

Concurso Ayudante de Segunda, área Materias que usan Herramientas Computacionales

A los 15 días del mes de octubre de 2025, el jurado que entiende en el concurso para proveer 15 (quince) cargos de Ayudante de Segunda con dedicación Parcial, área Materias que usan Herramientas Computacionales en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), formado por Emiliano Acri, María Cecilia De Vita, Paula Kuna, Martín Mansilla y Mauricio Mendiluce, decide asignar los siguientes puntajes máximos en los distintos ítems:

Puntajes:

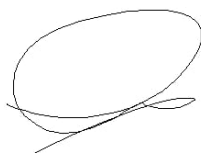
Prueba de oposición	57
Calificaciones, títulos, estudios y otros	24
Antecedentes docentes	7
Antecedentes de extensión	6
Antecedentes profesionales	3
Antecedentes científicos	3

Tema y modalidad de la prueba de oposición:

La prueba de oposición se realizará en forma presencial el día miércoles 22 de octubre de 2025 a las 15 hs en los laboratorios 1111-1112 del Pabellón 0 + ∞ y tendrá una duración de 60 minutos. El/La concursante deberá elaborar un programa utilizando el lenguaje de programación Python de uno de los ejercicios de la lista detallada a continuación. La lista consta de 7 ejercicios de programación con un nivel comparable a las materias Elementos de Cálculo Numérico - Álgebra Lineal Computacional - Matemática II para Biología. El ejercicio a desarrollar será anunciado por el jurado al inicio de la prueba de oposición. El programa debe ser claro, con los debidos comentarios tanto al comienzo como a lo largo del código, y al final de la resolución, para que un estudiante pueda comprender el código y el problema. Todos los comentarios deben estar escritos dentro del mismo archivo `.ipynb` a entregar. Al finalizar la prueba, el archivo `Apellido_Nombre.ipynb` debe ser enviado al correo electrónico: **concursoay2p25HC@dm.uba.ar**.



Emiliano Acri



Paula Kuna



María Cecilia De Vita



Martín Mansilla



Mauricio Mendiluce

Lista de ejercicios

1. Considerar el problema de la propagación de una llama:

$$\begin{cases} \dot{y} = y^2 - y^3, & t \in [0, 2/\delta], \\ y(0) = \delta. \end{cases}$$

Al prender un fósforo, la bola de fuego crece rápidamente hasta que alcanza un tamaño crítico. Luego, permanece en ese tamaño porque la cantidad de oxígeno que se consume por la combustión en el interior de la bola se compensa con la cantidad disponible en la superficie. El radio de la bola de fuego se representa con $y(t)$ y los términos y^2 y y^3 provienen de la superficie y el volumen. El parámetro crítico es el radio inicial δ .

- a) Resolver numéricamente el sistema para $\delta = 0,01$ utilizando el método de Euler, con paso $h = 2$. ¿Qué se observa?
- b) Repetir el ítem anterior pero utilizando el método de Euler implícito:

$$y_n = y_{n+1} - hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

Para despejar y_{n+1} en cada paso, utilizar el método de Newton–Raphson con dato inicial y_n . ¿Qué se observa?

2. Considerar la función signo dada por

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma

$$a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x),$$

considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0,001. Graficar el resultado obtenido.

3. Se desea implementar una regla de cuadratura *adaptiva*, es decir, una cuadratura compuesta que utilice más subintervalos en la zona en que la aproximación obtenida sea peor. Para ello, notamos $S(a, b)$ a la regla de Simpson en el intervalo $[a, b]$. Si notamos $c = \frac{a+b}{2}$, se tiene que:

$$|S(a, b) - S(a, c) - S(c, b)|/15 \sim E(a, c, b),$$

donde $E(a, c, b)$ es el error cometido al aplicar la regla compuesta: $S(a, c) + S(c, b)$.

Implementar un programa que reciba como *input* una función f , un intervalo $[a, b]$ y una tolerancia ε , y calcule las cuadraturas: $q = S(a, b)$, $q_1 = S(a, c)$ y $q_2 = S(c, b)$.

Si $|q - q_1 - q_2| < 15\varepsilon$, se devuelve el valor $q_1 + q_2$. En caso contrario, se aplica el mismo criterio para integrar f en los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$, con una tolerancia $\varepsilon/2$.



Probar el programa calculando

$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}).$$

4. Interpolarse la siguiente función en $n + 1$ puntos equiespaciados en el intervalo $[-1, 1]$:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Graficar simultáneamente la función con sus respectivos interpoladores p_n para $n = 5, 10, 15$.

Para valores altos de n , ¿mejora o empeora la aproximación? Calcular la norma infinito de $(f - p_n)$.

5. Los siguientes datos corresponden a la población argentina (expresada en millones de habitantes):

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Hab. (millones)	17	20.5	23.9	27.9	32.6	36.9

- a) Hallar una función f de la forma $f(x) = ax + b$ que mejor ajuste los datos en el sentido de mínimos cuadrados. Graficar en una misma figura los datos y la función f .
- b) Utilizando la función del ítem anterior, ¿qué población se puede inferir que había en Argentina en los años 1955, 1965, 1975, 1985 y 1995?
- c) La población real de la Argentina en los años del ítem anterior era de 18.8, 22.2, 25.9, 30.2 y 34.8 millones de habitantes respectivamente. Calcular el error que se cometió al inferir la población de estos años a partir del ajuste del ítem (a). Volver a graficar la función f del ítem (a), incorporando (en otro color) los nuevos datos.
6. Considerar el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica y definida positiva. El método de *descenso por gradiente* busca minimizar la función cuadrática

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}.$$

Dado un vector inicial $\mathbf{x}_0$, el método itera según

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{r}_k, \quad \text{donde} \quad \mathbf{r}_k = A\mathbf{x}_k - \mathbf{b},$$

y el paso óptimo se calcula como

$$\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k^T A \mathbf{r}_k}.$$

- a) Implementar el método de descenso por gradiente para matrices A simétricas y



definidas positivas. El programa debe recibir A , $\mathbf{b}$, un vector inicial $\mathbf{x}_0$ y una tolerancia ε para el criterio de parada $\|\mathbf{r}_k\|_2 < \varepsilon$.

b) Probar el método con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (1, 2, 3, 4)^T, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}.$$

Calcular también la solución exacta $\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b}$.

c) Para distintas tolerancias $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}$, calcular el error $e_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2$ y graficar el error e_k frente al número de iteraciones k .

7. Dado un conjunto A , recordemos que una relación en él es un subconjunto del producto cartesiano $\mathcal{R} \subset A \times A$. Una relación puede ser:

- Reflexiva: si $(a, a) \in \mathcal{R}$ para todo $a \in A$.
- Simétrica: si $(a_1, a_2) \in \mathcal{R} \implies (a_2, a_1) \in \mathcal{R}$.
- Antisimétrica: si $(a_1, a_2), (a_2, a_1) \in \mathcal{R} \implies a_1 = a_2$.
- Transitiva: si $(a_1, a_2), (a_2, a_3) \in \mathcal{R} \implies (a_1, a_3) \in \mathcal{R}$.

a) Definir las funciones ‘EsReflexiva($\mathcal{R}, A$)’, ‘EsSimetrica($\mathcal{R}, A$)’, ‘EsAntisimetrica($\mathcal{R}, A$)’ y ‘EsTransitiva($\mathcal{R}, A$)’ que, dada $\mathcal{R} \subset A \times A$ ‘True’ si dicha relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva respectivamente y ‘False’ en caso contrario.

b) Recordemos que una relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ es de:

- equivalencia: si es reflexiva, simétrica y transitiva.
- orden: si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Las relaciones de equivalencia definen clases de equivalencia, es decir, subconjuntos de A de la forma $[a] = \{x \in A : (x, a) \in \mathcal{R}\}$.

i) Definir las funciones ‘EsEquivalencia($\mathcal{R}, A$)’ y ‘EsOrden($\mathcal{R}, A$)’ que, dada una relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ devuelva una variable ‘True’ si dicha relación es de equivalencia o de orden respectivamente y valor ‘False’ en caso contrario.

ii) Definir la función ‘ClasesDeEquivalencia($\mathcal{R}, A$)’ que, dada una relación $\mathcal{R} \subset A \times A$ devuelva un error si la relación no es de equivalencia y en caso si serlo devuelva una lista con todas la clases de equivalencia.

c) Sean $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x\mathcal{R}y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y.$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ¿es antisimétrica?

ii) Hallar la clase de equivalencia de cada elemento $x \in A$. ¿Cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$?

