



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Acoplamientos del modelo SIS con dinámicas de opinión.**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el  
área Ciencias Matemáticas

**Carlo Giambiagi Ferrari**

Director de tesis: Juan Pablo Pinasco  
Consejero de estudios: Pablo Groisman

Buenos Aires, 2021

# Acoplamiento de modelos epidemiológicos con dinámicas de opinión.

## Resumen

En este trabajo se estudiaron problemas de epidemias influenciados por fenómenos sociales. Se plantearon modelos matemáticos en términos de ecuaciones integrodiferenciales, y para estas se analizaron cuestiones de existencia, unicidad, dependencia continua, y comportamiento asintótico.

Se estudia el acople de dos dinámicas, la de un modelo SIS para la transmisión de una enfermedad, con la de un modelo de opinión donde los individuos cambian sus medidas de prevención en un continuo a consecuencia de la interacción entre ellos y de la evolución de la epidemia.

Se plantea un modelo SIS discreto basado en agentes. Cada agente tiene una opinión propia que influye su tasa de contagio. Con una heurística despejamos ecuaciones de campo medio para la proporción de infectados y la opinión media de la población. Despejamos los equilibrios y hacemos un análisis de la estabilidad. Se compara las simulaciones de los modelos de agentes con los equilibrios encontrados para verificar la legitimidad de las ecuaciones.

El modelo discreto se generaliza con una ecuación cinética de tipo Boltzmann. La existencia y unicidad de soluciones en un espacio de medidas positivas sale utilizando teoremas de punto fijo, y se prueba que las soluciones encontradas efectivamente modelan una dinámica de enfermedad. Luego, se analiza el paso al límite cuando se rescala el tiempo, y se obtiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de tipo Fokker-Planck, que son mas sencillas de trabajar del punto de vista numérico. En la última parte de la tesis se estudian dos generalizaciones, considerando en una la influencia de una campaña gubernamental para implementar medidas de prevención, y en la otra, agregando individuos refractarios a cumplir estas medidas. Para ambas, se vuelven a plantear los modelos discretos de agentes y sus respectivas ecuaciones de campo medio. Luego pasamos a una ecuación de tipo Boltzmann solamente para la dinámica de opinión. La existencia y unicidad de soluciones se obtiene por un método basado en la prueba de Peano de existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales ordinarias, pero extendido a una ecuación diferencial ordinaria en un espacio de Banach. La idea es construir una poligonal en el espíritu del método de Euler, desplazándose en la dirección del gradiente.

**Palabras clave:** Modelos epidemiológicos, modelos basados en agentes, ecuación de tipo Boltzmann, ecuaciones diferenciales, soluciones en medidas.

# Couplings of epidemiological models with opinion dynamics.

## Abstract

In this work, epidemic problems influenced by social phenomena were studied. The models were built in terms of integrodifferential equations, and for these we analyzed existence, uniqueness, continued dependence, and asymptotic behavior.

The coupling of two dynamics is studied, that of a SIS model for the transmission of a disease, with that of an opinion model where individuals change their prevention measures in a continuum as a result of the interaction between them and the evolution of the epidemic.

We propose a discrete SIS model based on agents. Each agent has their own opinion that influences their contagion rate. With a heuristic, we derive mean-field equations for the proportion of infected and the mean opinion of the population. We solve for the equilibria and do a stability analysis. The simulations of the agent-based models are compared with the equilibria found to verify the legitimacy of the equations.

The discrete model is generalized with a Boltzmann-type kinetic equation. The existence and uniqueness of solutions in a space of positive measures is proven using fixed point theorems, and it is proved that the solutions found effectively model the disease dynamic. Then, the passage to the limit is analyzed when the time is rescaled, and a system of Fokker-Planck differential equations is obtained. They are easier to work with from the numerical point of view. In the last part of the thesis two generalizations are studied, considering in one the influence of a government campaign to implement prevention measures, and in the other, adding refractory individuals that do not comply with these measures. For both, the discrete agent models and their respective mean field equations are re-stated. We then move on to a Boltzmann-type equation only for the opinion part of the dynamic. The existence and uniqueness of solutions is obtained by a method based on Peano's proof of the existence of solutions for differential equations ordinary, but extended to an ordinary differential equation in a Banach space. The idea is to build a polygonal in the spirit of Euler's method, moving in the direction of the gradient.

**Keywords:** Agent-based models, epidemiological models, Boltzmann-like equations, Differential equations, solutions in measure spaces.

## Agradecimientos

A mi director de tesis Juan Pablo Pinasco.

A Nico Saintier y a mis hermanas académicas Natalia y Martina por compartir el trabajo.

A mis amigos y a mi familia por acompañarme.

Quiero dedicar esta tesis a mi abuelo Bocha.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. SIS y opinión</b>	<b>13</b>
2.1. El modelo de agentes . . . . .	13
2.2. Análisis Teórico . . . . .	15
2.2.1. Evolución del esfuerzo de un solo agente . . . . .	16
2.2.2. Evolución del promedio . . . . .	18
2.2.3. Otras reglas de contagio . . . . .	20
2.3. Estudio cualitativo de la dinámica . . . . .	20
2.3.1. El caso $h_1 = h_2$ . . . . .	21
2.3.2. El caso $h_1 \neq h_2$ . . . . .	22
2.3.3. Otras reglas de contagio . . . . .	23
2.4. El valor de reproducción modificado $R_m$ y simulaciones . . . . .	24
2.5. Conclusión y comentarios finales . . . . .	25
<b>3. Ecuaciones de tipo Boltzmann</b>	<b>29</b>
3.1. Existencia . . . . .	30
3.2. Recuperando las ecuaciones mean-field . . . . .	38
3.3. Aproximación de la ecuación de Boltzmann . . . . .	40
<b>4. Un nuevo agente: El gobierno</b>	<b>45</b>
4.1. El modelo . . . . .	45
4.1.1. Descripción del modelo . . . . .	45
4.1.2. Ecuaciones de campo medio para poblaciones grandes . . . . .	47
4.1.3. Resultados analíticos . . . . .	51
4.2. Agentes heterogéneos . . . . .	54
4.2.1. Un caso simplificado . . . . .	55
<b>5. Sistemas de diferente dimensión.</b>	<b>63</b>
5.1. La ecuación de tipo Boltzmann . . . . .	63
5.2. Grazing limit . . . . .	64
5.3. Análisis del sistema aproximado . . . . .	66
5.4. Impacto de agentes tercios . . . . .	68
5.5. Demostraciones . . . . .	69
5.5.1. Buen planteo del sistema . . . . .	69

5.5.2. Demostración del Teorema 5.2.1. . . . .	76
5.5.3. Demostración del teorema 5.2.2. . . . .	80
<b>A. Otras reglas de contagio</b>	<b>83</b>
A.1. Nivel de esfuerzo del infectado . . . . .	83
A.2. Niveles de esfuerzo de ambos . . . . .	84
<b>B. Prueba del teorema 4.1.2</b>	<b>87</b>
B.1. Análisis de la estabilidad lineal. . . . .	87
<b>C. Existencia para la ecuación de Boltzmann</b>	<b>91</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Los modelos de transmisión de enfermedades ya están motivados por la situación actual. La pandemia del Covid-19 apareció de sorpresa. Mucha investigación se hizo en paralelo. Una cuarentena estricta fué la primer respuesta frente al desconocimiento y luego fué reemplazada por medidas de lockdown más direccionadas a medida que se conocía más y más al virus. Este momento de incertidumbre fué fértil para la emergencia de distintas opiniones a favor y en contra de las medidas de cuidado. La gravedad percibida de la enfermedad y las medidas de protección contra la pandemia no están desacopladas de ideologías políticas y creencias personales.

En los últimos años hubo un interés cada vez mayor por modelos de epidemia que incluyen cambios en los comportamientos y las normas culturales. Originalmente estaban motivados por el surgimiento de los movimientos antivacunas, y recientemente por la pandemia del Covid-19 que nos está tocando vivir. En este trabajo acoplamos el modelo Susceptible-Infectados-Susceptibles, SIS, de transmisión de la enfermedad, junto con distintas dinámicas de opinión respecto a qué medidas de cuidado deben tomarse.

Desde los trabajos fundacionales de Kermack y MacKendrick [26, 27, 28], donde se introduce el modelo Susceptible-Infectado-Removido, SIR, diferentes autores consideraron diversos modelos donde se divide a la población susceptible en distintos grupos. Por ejemplo, los vacunados, los no vacunados, y los que decidieron no vacunarse [6, 7, 41]. Otros modelos consideran grupos como los que están al tanto y los que no lo están de la existencia de la enfermedad [15, 31, 53]. En estos casos, cada grupo tiene su propia tasa de contagio, y se superponen dos dinámicas, la correspondiente a la enfermedad, y la que describe el pasaje de individuos de un grupo al otro.

También se suelen considerar grupos con distintos niveles de riesgo, como grupos de distintas edades, o grupos de expuestos, que incluyen a la población que está incubando la enfermedad pero aún no contagia. La evolución del tamaño de cada grupo se describe con una ecuación diferencial ordinaria que involucra todas las tasas de transición entre los distintos grupos. La complejidad de este sistema aumenta a medida que agregamos más y más grupos.

Lo usual es que los agentes se muevan de un grupo a otro en función de la dinámica de la enfermedad, por ejemplo un sano se infecta, o por decisiones personales basadas en sus creencias y en la influencia de los demás agentes. Las transiciones entonces involu-

eran un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la dinámica de la enfermedad por un lado, y las dinámicas sociales por otro, como el modelo del votante, el modelo de transmisión cultural de Axelrod [5], dinámicas de imitación [6], u otros modelos discretos de opinión como Galam, Sznajd, or Ochrombel [24, 33, 45, 48]. También se han utilizado herramientas de teoría de juegos, donde los individuos toman la decisión de cambiar de grupo de acuerdo a su utilidad esperada, comparando por ejemplo el costo de la vacunación, y el costo/beneficio potencial de enfermarse o no.

Ahora bien, la posibilidad de que haya un *outbreak* de la enfermedad y que sus efectos sean más o menos duraderos, dependerá del tamaño de cada grupo, los mecanismos de transmisión de la enfermedad, los procesos sociales que existan y también en cuestiones espaciales como el *clustering* y otras propiedades de las redes y la estructura de la población, ver por ejemplo [19, 43, 47, 50, 54].

En esta tesis se consideran modelos de opinión continuos con tendencia al compromiso, como los estudiados por Deffuant y Weisbuch [16] mediante simulaciones, y desde un punto de vista teórico por Toscani y sus coautores [2, 49]. Observemos que en este caso hay infinitos compartimentos para los individuos, lo cual exige utilizar ecuaciones en derivadas parciales o tipo Boltzmann para modelar la distribución de los individuos en los distintos niveles de susceptibilidad, acopladas con ecuaciones ordinarias para la dinámica de la epidemia.

En el capítulo 2 planteamos un modelo de agentes con una dinámica de enfermedad SIS acoplada a una dinámica de opinión del estilo Deffuant. Los agentes tienen una opinión respecto a cuánto se deben cuidar de la enfermedad, que influye en la probabilidad de contagio. Esta opinión esta sujeta a cambios provocados por interacciones sociales. Planteamos rigurosamente el modelo discreto para  $N$  agentes y luego mandamos  $N$  a infinito para obtener un sistema de dos ecuaciones ordinarias que describe ambas dinámicas, una ecuación para la proporción de infectados, y otra para la opinión media de la población.

Recordemos que el modelo SIS se describe con las tasas  $\beta$  de contagio y  $\gamma$  de cura. Describimos el estado de un agente con un par  $(e, p)$  donde  $e \in \{S, I\}$ , el estado con respecto a la enfermedad, y  $p \in [0, 1]$  es la opinión. Las interacciones entre los agentes ocurren de a pares. El parámetro  $p$  de la opinión disminuye la tasa de contagio de ese agente a  $p\beta$ . Cuando más chico es  $p$ , más chica es la probabilidad de contagiarse.

La actualización de  $p$  se da de dos formas. Por un lado, cuando ambos están en el mismo estado, se influyen mutuamente y acercan sus opiniones respecto a las medidas de cuidado. Por otro, cuando un agente sano interactúa con un agente infectado puede haber infección o no. El agente pasa a cuidarse más si hay contagio, y menos si no lo hay. Esto incluye los efectos de miedo y confianza de los agentes en el modelo.

Podemos ver que la dinámica es una cadena de Markov con  $N$  agentes, y queremos entender como cambian la proporción de agentes susceptibles y la opinión media de la población en un intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$ , lo suficientemente chico como para que haya una sola interacción. Planteamos el cambio esperado de estas dos variables, y mandando  $N$  a infinito, obtenemos heurísticamente un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para la proporción de sanos y otra para la opinión media de la población.

A continuación, hacemos un análisis de los equilibrios del sistema dinámico y su estabilidad. Los caracterizamos todos, y los comparamos con los equilibrios del SIS ori-

ginal, introduciendo un número de reproducción modificado. Si bien los equilibrios son los mismos, se observa que la fase endémica de nuestro modelo tiene menos infectados porque al multiplicar  $p$  por la tasa  $\beta$ , baja la tasa efectiva de contagio. Equivalentemente, la epidemia se extingue en un rango de valores de  $\beta$  mayores -y de  $\gamma$  menores- que los usuales.

También simulamos computacionalmente el modelo, para poblaciones finitas y asignando a cada uno una opinión inicial aleatoria en el  $[0, 1]$ , dejando correr la dinámica hasta que se estabilice. Los equilibrios que aparecen para la proporción de sanos y la opinión media de la población son los mismos que caracterizamos analíticamente.

Un detalle que vale la pena comentar es que la probabilidad de contagio en principio depende solamente de la opinión del agente sano. Esto hace que en la ecuación para la proporción de sanos aparezca solamente la opinión media de los agentes sanos. Hay argumentos para reemplazar la media de opinión de los sanos por la media de opinión de toda la población. Por un lado, tanto infectados como susceptibles modifican su opinión de la misma manera, si bien al producirse un contagio ambos bajan pero el susceptible se vuelve infectado, y por otro lado las simulaciones muestran que la diferencia entre ambas cantidades es de orden  $O(h)$ , que es el parámetro que regula cuánto cambian de opinión.

Cabe destacar que si no hiciéramos este cambio, el sistema de ecuaciones que obtenemos no queda cerrado. Al plantear la ecuación para la opinión media de los sanos, aparece el segundo momento de la opinión de los sanos. Luego, al plantear la ecuación para el segundo momento, aparece el tercero, y así sucesivamente, creando un sistema de infinitas ecuaciones ordinarias. Esta jerarquía es un fenómeno comparable a las de la física estadística, ver [13], y el mismo problema se presenta en [17] donde los contactos sociales varían, y afectan la transmisión de una epidemia; en ese trabajo se obtuvo un sistema cerrado acelerando la dinámica social, y tomando los valores en el equilibrio.

Encaramos esta dificultad con un abordaje más general en el capítulo 3. Generalizamos el modelo de agentes con una ecuación cinética de tipo Boltzmann, y pasamos a describir el sistema con dos medidas  $f^S$  y  $f^I$  sobre el intervalo  $[0, 1]$ , una para la distribución de la opinión de los sanos, y otra para la distribución de la opinión de los infectados. La suma  $f^S + f^I$  de estas dos medidas es una medida de probabilidad y da la distribución de las opiniones de toda la población.

Usando las reglas que ya definimos, podemos obtener un nuevo sistema de ecuaciones para  $f^S$  y  $f^I$  en sentido débil. Es decir, dadas funciones test  $\phi$  y  $\psi$  que viven en espacios adecuados, planteamos las ecuaciones para  $\int_{\omega} \phi(\omega) df^S$  y  $\int_{\omega} \psi(\omega) df^I$ .

Entre las funciones test, la función  $\phi(\omega) \equiv 1$  nos daría ecuaciones para la proporción de individuos infectados y susceptibles, la masa de las funciones  $f^S$  y  $f^I$ . Si tomamos  $\phi(\omega) = \omega$ , obtenemos ecuaciones para la media de cada grupo. Utilizando el teorema de punto fijo de Banach probamos existencia y unicidad de solución para el sistema de ecuaciones que nos queda. Luego, mediante un procedimiento similar al de [37], probamos que las soluciones son compatibles con el modelo original, las soluciones son siempre medidas positivas cuya suma tiene masa 1. Son efectivamente la distribución de la opinión de los agentes.

Luego reescalamos el tiempo en un procedimiento conocido como *Grazing Limit*, así como en [37, 49] para obtener una ecuación en derivadas parciales, más fácil de resolver

numéricamente, y con la cual podemos entender el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Para una solución  $f(t)$ , llamamos  $\tau = ht$  y definimos  $f_h(\tau) = f(t)$ . Mandamos  $h \rightarrow 0$  y estudiamos el comportamiento límite de  $f_h$ . Usando Arzela-Ascoli obtenemos gratis la existencia de solución. Tomando algunas funciones test apropiadas ( $\phi \equiv \psi \equiv 1$  ó  $\phi \equiv \psi \equiv \omega$ ), obtenemos ecuaciones diferenciales ordinarias para la cantidad de susceptibles y la opinión media de la población que se corresponden con las del capítulo 2.

Cabe señalar que en el último año han aparecido trabajos en esta línea, motivados por el Covid-19, en particular [11], donde se analizan distintas heterogeneidades de los agentes, que pueden evolucionar en el tiempo tal como la carga viral de la persona en un modelo SIR (susceptible-infectado-removido), ver también [1]. En [30] consideran una dinámica de contactos acoplada con un SIR, mediante una sola ecuación tipo Boltzmann donde las partículas son etiquetadas como infectadas o susceptibles, análogo a modelos de velocidades discretas. Previamente, sólo el trabajo [21] consideraba una situación similar con infinitos estados, donde la información que los agentes tenían sobre la enfermedad era un número natural  $j$  mayor o igual a cero, y la probabilidad de contagio se veía modificada como  $(1 - e^{-j})\beta$ . El problema fue estudiado para un SIR con simulaciones, e incluía un decaimiento  $j \rightarrow j + 1$  debido al olvido, y una transmisión imperfecta, donde un agente con parámetro  $j$  sólo podía acercarse a otro hasta  $j + 1$  en la interacción de tipo social, y los que enfermaban alcanzaban el valor  $j = 0$ .

En el capítulo 4 planteamos una nueva variante del modelo. Seguimos con un modelo SIS, pero los agentes en vez de tener opiniones sobre cuánto cuidarse de la enfermedad, pasan a tener un nivel de conciencia o *awareness*  $a \in [0, \infty)$  similar al caso de [21]. En este caso, el *awareness* se traduce en probabilidades de infección de la siguiente manera: cuando el agente  $i$  de *awareness*  $a_i$  se encuentra con un infectado, se contagia con probabilidad  $e^{-a_i}\beta$ . Luego, a medida que crece el *awareness* del agente, baja la probabilidad de contagio.

Además, agregamos un nuevo agente, el gobierno, que tiene como objetivo erradicar la enfermedad. Para esto emite un mensaje  $W \in [0, \infty)$  que puede considerarse un campo que interactúa globalmente con toda la población. Cuando un agente interactúa con el gobierno, actualiza su *awareness* acercándolo al mensaje  $W$ . Cuando mayor es el valor mensaje  $W$ , más les está diciendo el gobierno a sus ciudadanos que se cuiden. Por su parte, el gobierno aumenta  $W$  si el número de infectados crece, y si el *awareness* promedio está por debajo de un umbral crítico  $a^*$  que es el menor valor posible que permite erradicar la enfermedad. Si bien para  $W$  arbitrariamente grande el objetivo de llevar a la población se cumplirá, es razonable que la señal decaiga si crece demasiado, ya sea porque el costo la vuelve prohibitiva, o porque los agentes se saturan y ya no responden a ella.

Planteamos nuevamente un modelo de agentes y las simulaciones computacionales muestran que al inicio de un brote epidémico el gobierno manda mensajes  $W(t)$  cada vez más altos. Todos los agentes empiezan a cuidarse más, y el gobierno relaja su mensaje acercándolo al valor crítico  $a^*$ . Se observa que el sistema alcanza siempre un único equilibrio en el que están todos sanos y tienen *awareness*  $a^*$ .

Si aumentamos el número de agentes y analizamos el sistema bajo la hipótesis de campo medio, donde todos pueden interactuar con todos, obtenemos un sistema de  $N + 2$

ecuaciones diferenciales ordinarias: una para el número de infectados, otra para la intensidad del mensaje  $W$ , y una para el awareness de cada agente. Al igual que en el capítulo 2, podemos caracterizar el equilibrio y analizar su estabilidad, comparándolo con las simulaciones de agentes.

Una última generalización consiste en incluir la predisposición de los agentes a cambiar de opinión, introduciendo un parámetro  $q \in [0, 1]$ . Si  $q = 0$  el agente es terco y no cambia su awareness nunca. Si  $q = 1$  el agente está muy predispuesto a cambiar y en cada interacción actualiza su awareness lo máximo que le permite la dinámica. En primer lugar, independiente de la distribución inicial de awareness en los agentes, la distribución final es un promedio pesado entre el valor de los agentes tercos y el mensaje del gobierno.

En particular, si los agentes son antivacunas (es solamente un nombre porque no incluimos vacunas en el modelo), tienen predisposición  $q = 0$  y el awareness inicial también es cero. Es decir, no toman ninguna medida de cuidado, ni están dispuestos a hacerlo. Veremos que, dependiendo de los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$  de contagio y de recuperación de la enfermedad, hay casos en que la enfermedad se mantiene endémica dentro de la población de antivacunas. Aún si, el resto de la población es inmune, y su awareness tiende a infinito.

Finalmente, en el capítulo 5 reemplazamos la ecuación que teníamos para cada agente por una única ecuación de tipo Boltzmann, un abordaje común al modelar fenómenos socio-económicos, ver [34]. Nos queda un sistema con dos ecuaciones ordinarias y la ecuación de tipo Boltzmann, permitiendo que los agentes intercambien opiniones entre sí como en el capítulo anterior, y obtenemos tras hacer el *grazing limit* un sistema que incluye una ecuación de transporte con un campo de velocidades no lineal y no local, acoplada con las dos ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes a la dinámica de la señal gubernamental y de la epidemia, y finalmente demostramos la existencia y unicidad de soluciones para este sistema. En este caso, probamos existencia y unicidad para el sistema usando las ideas de [12], considerando a la ecuación de Boltzmann como una ecuación diferencial ordinaria abstracta en un espacio de Banach. Incluimos en el apéndice B.1 la demostración de este teorema de Alonso, Gamba, y Tran [3].



## Capítulo 2

# El modelo SIS con una dinámica de opinión

En este capítulo vamos a presentar un modelo de agentes donde acoplamos la dinámica de enfermedad SIS y un modelo de opinión donde los agentes tienen tendencia al compromiso y acercan sus posiciones, basado en el modelo de Deffuant pero sin *bounded confidence*, donde sólo agentes con opiniones cercanas se influyen. La opinión de los agentes modifica su probabilidad de contagiarse.

Nos interesa estudiar si existe una región en el espacio de parámetros  $\beta$ - $\gamma$  (probabilidades de contagio y de recuperación) donde la enfermedad se extingue y otra donde se vuelve endémica, y luego compararlas con las del modelo SIS original. A partir del modelo de agentes derivamos un sistema de ecuaciones ordinarias que describen las dinámicas de la enfermedad y de la media de la opinión de los agentes.

También vamos a realizar simulaciones computacionales del modelo de agentes, y compararlas con las soluciones numéricas del sistema de ecuaciones, para verificar que las ecuaciones efectivamente describen el modelo planteado.

### 2.1. El modelo de agentes

Tenemos una población de  $N$  agentes, caracterizados por un par  $(e_i, p_i)$ , donde  $e_i \in \{S, I\}$  representa el estado de salud y  $p_i \in [0, 1]$  el nivel de esfuerzo o protección que toma el agente  $i$  para prevenir la enfermedad.

Cuando dos agentes  $i$  y  $j$  interactúan, cambiarán sus parámetros de  $(e_i, p_i)$  a  $(e_i^*, p_i^*)$  y de  $(e_j, p_j)$  a  $(e_j^*, p_j^*)$  respectivamente. Las dinámicas de infección y cura son similares a los modelos SIS clásicos. Las dinámicas de actualización del nivel de esfuerzo son una mezcla entre un modelo con tendencia al compromiso y una mecánica de confianza y miedo a la enfermedad.

Los estados de los agentes se actualizan de manera similar al SIS clásico. Cuando el agente susceptible  $i$  interactúa con un agente infectado, se contagia con probabilidad  $\beta p_i$ . Por otro lado, un agente infectado se cura a tasa  $\gamma$ .

**Observación 2.1.1.** *Asumimos que en el contagio solo influye el nivel de esfuerzo  $p_i$  del agente susceptible, basados en [21]. Otros tipos de regla se pueden implementar, como*

por ejemplo que el contagio dependa de  $p_j$  o de ambos parámetros. Estas reglas, y las ecuaciones que se derivan de ellas, se estudian de la misma manera. Haremos un breve análisis de esas dos posibilidades más adelante. Cambios drásticos y no acotados en los niveles de esfuerzo, como los que ocurren en [21], necesitan otros abordajes.

Definamos cómo se actualizan los niveles de esfuerzo de los agentes. Cuando dos agentes del mismo estado interactúan, actualizan sus opiniones de acuerdo a la dinámica de Deffuant. Cuando dos agentes de distinto estado interactúan, sus nuevas opiniones dependerán de si hubo o no hubo infección. Cuando hay infección, se cuidan más, y cuando no la hay, se cuidan menos. La actualización precisa sigue las siguientes reglas, y depende de ciertos parámetros  $h$ ,  $h_1$  y  $h_2$  que representan la fuerza de la influencia:

- *Compromiso*: Un agente susceptible (respectivamente, infectado)  $i$  interactúa con otro agente susceptible (respectivamente, infectado)  $j$ . Ambos mantienen su estado y cambian sus niveles de esfuerzo:

$$p_i^* = p_i + h(p_j - p_i),$$

$$p_j^* = p_j + h(p_i - p_j).$$

Cada agente cambia su nivel de esfuerzo a un punto intermedio entre su valor inicial y el del otro agente.

- *Contagio y Miedo*: Un agente susceptible  $i$  se infecta con probabilidad  $p_i\beta$  luego de interactuar con un agente infectado  $j$ . En este caso,  $i$  y  $j$  sienten que sus niveles de esfuerzo son insuficientes y los actualizan:

$$p_i^* = p_i - h_1 p_i,$$

$$p_j^* = p_j - h_1 p_j.$$

- *Confianza*: Un agente susceptible  $i$  se mantiene susceptible con probabilidad  $1 - \beta p_i$  luego de interactuar con un agente infectado  $j$ . En este caso, tanto  $i$  como  $j$  sienten que sus niveles de esfuerzo son excesivos y los disminuyen (aumentando  $p$ ):

$$p_i^* = p_i + h_2(1 - p_i),$$

$$p_j^* = p_j + h_2(1 - p_j).$$

- *Recuperación*: Un agente  $i$  es seleccionado aleatoriamente y se vuelve susceptible con probabilidad  $\gamma$ . No hay cambios en el nivel de esfuerzo  $p_i$ .

El nivel de prevención que los agentes toman luego de interactuar con sus pares sigue la dinámica social introducida por Deffuant y Weisbuch [16, 37, 49]. Al interactuar con alguien del mismo estado, ambos agentes acercan sus parámetros  $p$  una proporción  $h \in [0, 1/2]$  de la diferencia. Si  $h = 0$ , no hay cambios, mientras que para  $h = 1/2$ , ambos agentes llegan a un consenso en el punto medio entre sus niveles de esfuerzo. Veremos más adelante que cada agente podría tener su propio parámetro  $h$ , estando más o menos predispuestos a cambiar de opinión.

Los parámetros de miedo y confianza  $h_1$  y  $h_2$  modelan cuanto se adaptan los agentes luego de una interacción entre un agente susceptible y otro infectado. El nuevo nivel de esfuerzo  $p_i^* = p_i - h_1 p_i$  (resp.  $p_i^* = p_i + h_2(1 - p_i)$ ) se puede interpretar como si el agente  $i$  está interactuando con alguien que tiene nivel de esfuerzo  $p_j = 0$  (respectivamente,  $p_j = 1$ ) y actualiza el suyo siguiendo una interacción al estilo Deffuant .

Por último, notemos que ambas dinámicas están acopladas, en el sentido que en la misma interacción se cambian los estados de la enfermedad y los niveles de esfuerzo, y a su vez, esos cambios en el nivel de esfuerzo repercuten en los futuros contagios, y que se produzcan o no contagios modifican la opinión. Una variante posible es desacoplar las dinámicas y darles distintas tasas de interacción a una u otra. Por ejemplo, si se introduce una interacción de tipo social pero sin riesgo de contagio, donde los agentes actualizan rápidamente sus opiniones, se llegará a un estado estacionario de la opinión que modifica el parámetro  $\beta$ , en el espíritu de [17].

## 2.2. Análisis Teórico

Vamos a derivar una ecuación diferencial ordinaria para el valor medio del nivel de esfuerzo de los agentes susceptibles,  $\langle p_S \rangle$ , y otra para  $S$ , la proporción de agentes susceptibles.

Observaremos que si los parámetros de miedo y confianza  $h_1$  y  $h_2$  no son nulos, entonces el sistema que queda no es cerrado. Las ecuaciones dependen del segundo momento de los niveles de esfuerzo,  $\langle p_S^2 \rangle$ . Necesitamos la ecuación del segundo momento que a su vez depende del tercer momento  $\langle p_S^3 \rangle$ , y así sucesivamente, obteniendo un sistema infinito de ecuaciones acopladas.

Hay distintas maneras de sortear este problema, basadas en su mayoría en truncar la jerarquía a cierto nivel y quedarnos con finitas ecuaciones, ver [13]. También es posible en ciertos casos apelar a las leyes microscópicas y justificarlo porque tanto los agentes Susceptibles como los Infectados siguen las mismas reglas. Sin embargo, aquí aparece una pequeña asimetría, ya que al producirse un contagio, el susceptible pasa a ser infectado, y tanto él como el que lo contagió disminuyen su parámetro  $p$ . Así, uno esperaría  $\langle p_I \rangle \leq \langle p \rangle \leq \langle p_S \rangle$ , y en las simulaciones, esta diferencia es de orden  $O(h)$ .

Otro *approach* es introducir una función  $f_i$  que en cada instante  $t$  tiene la distribución de agentes en los niveles de esfuerzo. En este caso podemos describir el sistema con una ecuación de tipo Boltzmann. Este abordaje lo haremos en el capítulo 3.

Introducimos un poco de notación. Asumimos que hay  $N$  agentes. Llamamos  $k(t)$  a la cantidad de agentes susceptibles a tiempo  $t$ . Llamamos  $S(t)$  e  $I(t)$  a las proporciones de agentes susceptibles e infectados, es decir

$$S(t) = \frac{k(t)}{N},$$

$$I(t) = \frac{N - k(t)}{N} = 1 - S(t).$$

Los promedios  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p_S \rangle$  y  $\langle p_S^2 \rangle$  del parámetro  $p$  en toda la población, en la población susceptible, y el segundo momento de la población susceptible se obtienen haciendo

$$P_S = \sum_{i \in Sus} p_i, \quad \langle p_S \rangle = \frac{P_S}{k(t)},$$

$$\langle p_S^2 \rangle = \frac{1}{k(t)} \sum_{i \in Sus} p_i^2, \quad \langle p \rangle = \frac{1}{N} \sum_i p_i,$$

donde  $Sus$  e  $Inf$  son los conjuntos de agentes susceptibles e infectados, que varían en el tiempo.

Para la dinámica, asumimos que las interacciones entre agentes vienen dadas por un proceso de Poisson  $\mathcal{P}$  de tasa  $\lambda = 1$  (reescalando el tiempo si fuera necesario), tal que la probabilidad de que haya una interacción en un intervalo  $[t, t + \Delta t]$  sea  $\Delta t$ . Luego, en cada unidad de tiempo, un par de agentes es seleccionado al azar, uniformemente entre todos los pares posibles, y los hacemos interactuar de acuerdo a las reglas presentadas previamente.

Para derivar las ecuaciones diferenciales que describen la evolución de los valores esperados de  $S(t)$  y  $\langle p \rangle$ , vamos a calcular primero como evoluciona el nivel de esfuerzo de cada agente.

### 2.2.1. Evolución del esfuerzo de un solo agente

Fijamos un agente  $i$  arbitrario. Queremos ver como evoluciona su nivel de esfuerzo  $p_i$  a tiempo  $t$ . Observemos que esta evolución dependerá del estado de salud del agente.

Para esto, estudiamos el cambio esperado  $p_i(t + \Delta t) - p_i(t)$  en un intervalo de tiempo chico  $[t, t + \Delta t]$ . Tenemos la siguiente *master equation* para  $p_i(t + \Delta t)$ :

$$p_i(t + \Delta t) = (1 - \Delta t) p_i(t) + \Delta t p_i^*(t), \quad (2.1)$$

donde el primer término es la probabilidad que no haya interacción y  $p_i$  se mantenga igual; y el segundo término es el valor esperado de  $p_i^*$  cuando hay una interacción. Calculemos los posibles valores que puede tomar  $p_i^*$ :

Al momento de la interacción, la probabilidad de que los agentes  $i$  y  $j$  sean seleccionados es  $\frac{2}{n(n-1)}$ . El 2 viene del hecho de que el agente  $i$  puede ser el primero o el segundo seleccionado en el par, veremos más adelante que esto cambia los valores que se obtienen en el SIS clásico.

Supongamos primero que  $i$  está susceptible a tiempo  $t$ . El nuevo valor  $p_i^*$  depende en primer lugar de una de dos cosas: si el otro agente está infectado, depende de si ocurre una infección o no (pero no depende del parámetro  $p_j$  del otro); en cambio, si el otro agente está susceptible, depende también de su nivel de esfuerzo  $p_j$ . Entonces,

- $p_i^* = p_i - h_1 p_i$ , cuando  $i$  se infecta luego de interactuar con uno de los  $n - k$  agentes infectados. Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2}{n} \frac{n-k}{n-1} \beta p_i$ ;
- $p_i^* = p_i + h_2(1 - p_i)$  cuando  $i$  interactúa con un infectado pero no se infecta. Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2}{n} \frac{n-k}{n-1} (1 - \beta p_i)$ ;

- $p_i^* = p_i - h(p_i - p_j)$  Cuando  $i$  interactúa con otro agente susceptible  $j$ . Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2}{n(n-1)}$  para cada agente  $j$ .

Luego de remplazar en (2.1) y reordenar términos, obtenemos

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \frac{2\Delta t}{n(n-1)} \left[ -h_1(n-k)\beta p_i^2 + h_2(1-p_i)(n-k)(1-\beta p_i) - h \sum_{j \in Sus} (p_i - p_j) \right].$$

**Observación 1.** En el último término de la suma aparecen todos los agentes susceptibles ya que con cada uno el nuevo nivel de esfuerzo será distinto. En el primero y en el segundo término podemos elegir a cualquiera de los  $n - k$  agentes infectados y el resultado será el mismo ya que el parámetro  $p_j$  no entra en la cuenta.

Si la probabilidad de contagio dependiera también del nivel de esfuerzo del agente infectado, o bien de ambos, tendríamos que hacer una suma sobre todos los agentes como en el caso de los sanos.

Ahora consideramos el caso en el que  $i$  está infectado. El nuevo valor  $p_i^*$  dependerá del parámetro del agente sano  $i$  que sea elegido, y si hay contagio o no. Tenemos

$$P(i \text{ infecta a } j) = \frac{2}{n(n-1)} \beta p_j,$$

$$P(i \text{ no infecta a } j) = \frac{2}{n(n-1)} (1 - \beta p_j).$$

Escribimos el cambio esperado de  $p_i^*$  como la probabilidad condicional de interactuar con un agente  $j$  susceptible. Obtenemos

- $p_i^* = p_i - h_1 p_i$  cuando el otro agente se infecta. Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2\beta}{n(n-1)}$  para cada susceptible  $j$ ;
- $p_i^* = p_i + h_2(1 - p_i)$  cuando el otro agente no se infecta. Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2\beta p_j}{n(n-1)}$  para cada susceptible  $j$ ;
- $p_i^* = p_i - h(p_i - p_j)$  cuando  $i$  interactúa con otro infectado  $j$ . Esto ocurre con probabilidad  $\frac{2(1-\beta p_j)}{n(n-1)}$ .

Remplazando esto en la *master equation*, tenemos

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \frac{2\Delta t}{n(n-1)} \left[ -h_1 p_i \sum_{j \in Sus} p_j \beta + h_2(1-p_i) \sum_{j \in Sus} (1 - p_j \beta) - h \sum_{j \in Inf} (p_i - p_j) \right].$$

Y si usamos que

$$\sum_{j \in Sus} p_j = P_S, \quad \sum_{j \in Sus} (1 - p_j \beta) = k - \beta P_S,$$

podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera.

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \frac{2\Delta t}{n(n-1)} \left[ -h_1 \beta p_i P_S + h_2(1 - p_i)(k - \beta P_S) - h \sum_{j \in Inf} (p_i - p_j) \right].$$

Por último, en ambas ecuaciones dividimos por  $\Delta t$ , y tomando límite  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtenemos la ecuación diferencial ordinaria para  $p_i$  cuando  $i$  es un agente susceptible.

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = \frac{2}{n(n-1)} \left[ -h_1(n-k)\beta p_i^2 + h_2(1-p_i)(n-k)(1-\beta p_i) - h \sum_{j \in Sus} (p_i - p_j) \right], \quad (2.2)$$

o un agente infectado:

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = \frac{2}{n(n-1)} \left[ -h_1 \beta p_i P_S + h_2(1-p_i)(k - \beta P_S) - h \sum_{j \in Inf} (p_i - p_j) \right]. \quad (2.3)$$

### 2.2.2. Evolución del promedio

Obtenemos ahora la ecuación para  $\langle p \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$ , el valor promedio de  $p$ . Separando la suma entre los susceptibles y los infectados,

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i \in Sus} p_i + \sum_{i \in Inf} p_i,$$

y usando (2.2) y (2.3), tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle \\ &= \sum_{i \in Sus} \left[ -h_1(n-k)\beta p_i^2 + h_2(1-p_i)(n-k)(1-\beta p_i) - h \sum_{j \in Sus} (p_i - p_j) \right] \\ &+ \sum_{i \in Inf} \left[ -h_1 \beta p_i P_S + h_2(1-p_i)(k - \beta P_S) - h \sum_{j \in Inf} (p_i - p_j) \right]. \end{aligned}$$

Notemos que las siguientes doble sumas son en realidad cero:

$$\sum_{i \in Sus} \sum_{j \in Sus} (p_i - p_j) = \sum_{i \in Inf} \sum_{j \in Inf} (p_i - p_j) = 0,$$

Luego, el parámetro  $h$  no influye en el promedio  $\langle p \rangle$ : como ambos agentes se mueven lo mismo pero en sentidos opuestos, el promedio se conserva. Lo que determina la dinámica es la tensión entre  $h_1$  y  $h_2$ , los parámetros de miedo y confianza.

Renombramos  $h_1 = h_2 + g$  y reordenamos términos:

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle &= h_2(n-k) \sum_{i \in S_{us}} (1 - (1+\beta)p_i) + h_2 \sum_{i \in Inf} (k - \beta P_S - p_i k) \\ &\quad - \sum_{i \in S_{us}} g(n-k)\beta p_i^2 - \sum_{i \in Inf} g\beta p_i P_S \\ &= h_2(n-k)[2k - (1+2\beta)P_S] - h_2k \sum_{i \in Inf} p_i \\ &\quad - \sum_{i \in S_{us}} g(n-k)\beta p_i^2 - \sum_{i \in Inf} g\beta p_i P_S. \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i \in Inf} p_i = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i \in S_{us}} p_i = n\langle p \rangle - k\langle p_S \rangle = n(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) + (n-k)\langle p_S \rangle,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle &= 2h_2(n-k)k[1 - (1+\beta)\langle p_S \rangle] \\ &\quad - h_2kn(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) \\ &\quad - g(n-k)\beta k\langle p_S^2 \rangle - g\beta P_S[n(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) + (n-k)\langle p_S \rangle], \end{aligned}$$

y dividiendo por  $n^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle &= 2h_2S(1-S)[1 - (1+\beta)\langle p_S(t) \rangle] - h_2S(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) \\ &\quad - g\beta S[(1-S)\langle p_S^2 \rangle + \langle p_S \rangle[(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) + (1-S)\langle p_S \rangle]]. \end{aligned}$$

Por último, reescalamos el tiempo para absorber el factor  $n-1$ . Reordenando lo demás, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= h_24S(1-S)[1 - (1+\beta)\langle p_S \rangle] - h_22S(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle) \\ &\quad - g\beta S[(1-S)(\langle p_S^2 \rangle + \langle p_S \rangle^2) + \langle p_S \rangle(\langle p \rangle - \langle p_S \rangle)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**Observación 2.2.1.** Como  $g = h_1 - h_2$ , el último término desaparece cuando  $h_1 = h_2$ .

**Observación 2.2.2.** De la misma manera, se obtiene la ecuación para  $S$ ,

$$\frac{d}{dt} S = (1-S)(\gamma - 2\langle p_S \rangle\beta S). \quad (2.5)$$

*La principal diferencia con los modelos clásicos es que aparece el promedio del nivel de esfuerzo multiplicando el  $\beta$ . El 2 que aparece es sólo porque la infección se puede dar en el cualquiera de los dos agentes seleccionados, y en la dinámica usual del SIS sólo el primer agente seleccionado puede contagiarse. Es importante tener esto en cuenta para comparar el número de reproducción básico, o  $R_0$ .*

### 2.2.3. Otras reglas de contagio

También se pueden derivar las ecuaciones mean-field para otras reglas de contagio. Primero llamemos

$$\langle p_I \rangle = \frac{1}{n-k} \sum_{j \in Inf} p_j, \quad \langle p_I^2 \rangle = \frac{1}{n-k} \sum_{j \in Inf} p_j^2.$$

La primer variante es que el contagio dependa del nivel de esfuerzo del agente infectado. Supongamos que cuando un agente susceptible  $i$  interactúa con un agente infectado  $j$ , el contagio ocurre con probabilidad  $p_j \beta$ . En este caso, luego de corregir la probabilidad de los distintos eventos, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= 2h_2 S (1-S) (2 - 2\beta \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle - \langle p_I \rangle) \\ &\quad + (h_2 - h_1) S (1-S) \beta (\langle p_I \rangle \langle p_S \rangle - \langle p_I^2 \rangle), \\ \frac{d}{dt} S &= (1-S) (\gamma - 2\langle p_I \rangle \beta S). \end{aligned}$$

La segunda variante es que el contagio dependa del nivel de esfuerzo de ambos. Es decir, cuando un agente sano  $i$  interactúa con un infectado  $j$ , la infección ocurre con probabilidad  $p_i p_j \beta$ . En ese caso queda

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= 2h_2 S (1-S) (2 - \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle - 2\beta \langle p_S \rangle \langle p_I \rangle) \\ &\quad + (h_2 - h_1) \beta (\langle p_S^2 \rangle \langle p_I \rangle + \langle p_S \rangle \langle p_I^2 \rangle), \\ \frac{d}{dt} S &= (1-S) (\gamma - 2\langle p_I \rangle \langle p_S \rangle \beta S). \end{aligned}$$

## 2.3. Estudio cualitativo de la dinámica

Las reglas de la interacción microscópica en la sección anterior son simétricas para ambos tipos de agentes, con lo cual, luego de la interacción entre un sano y un infectado, ambos reaccionan de la misma manera, pero se rompe la simetría cuando en un contagio el susceptible pasa a estar infectado, y en ese caso, ambos infectados bajaron su valor de  $p$ . Como estos agentes volverán más adelante a la población susceptible, esta diferencia no es mayor a  $h_1$ , y las simulaciones con agentes de la figura 2.1 confirman esta intuición, mostrando que la diferencia entre  $\langle p_S \rangle$  y  $\langle p \rangle$  es del orden de  $h_1$ . Por lo tanto, tomando  $h_1 \ll 1$ , vamos a asumir a partir de ahora que  $\langle p_S \rangle = \langle p \rangle$ .

Para esquivar la jerarquía infinita de los momentos, tenemos dos enfoques. La primera opción y la más sencilla es analizar solamente el caso en el que  $h_1 = h_2$ .

La segunda explota el hecho que  $h$  desaparece de la ecuación. El promedio  $\langle p \rangle$  es invariante bajo la interacción que involucra  $h$ , luego, si suponemos que  $h \gg h_1, h_2$ , el consenso se alcanza en una escala de tiempo menor, y la varianza  $\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$  tiende a cero (ver [40], y [17]). Como  $\langle p^2 \rangle \rightarrow \langle p \rangle^2$ , podemos también abordar el caso  $h_1 \neq h_2$ . Este efecto también se logra acelerando las interacciones entre agentes que no provoquen contagios, y se podría fundamentar con una dinámica social similar a la estudiada en [10].

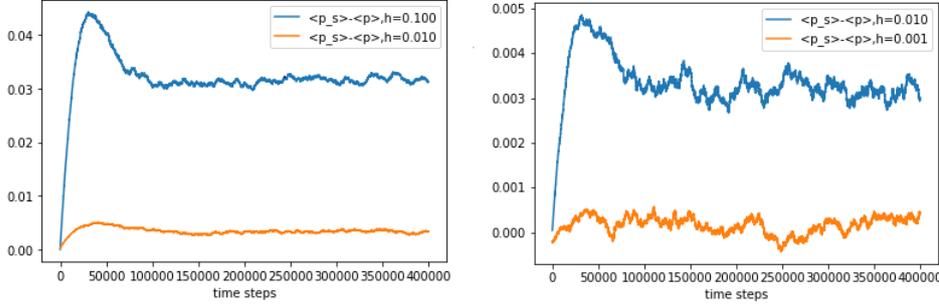


Figura 2.1: Gráfico de  $\langle p_S \rangle - \langle p \rangle$  para  $h_1 = h_2 = h = 0,1, 0,01, \text{ y } 0,01$  en una simulación con  $n = 20000$  agentes,  $\beta = 0,7$ , y  $\gamma = 0,3$ .

### 2.3.1. El caso $h_1 = h_2$

En este caso, como  $g = h_1 - h_2 = 0$ , las ecuaciones (2.4) y (2.5) para  $\langle p \rangle$  y  $S$  quedan

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = h_2 4(1 - S)S[1 - (1 + \beta)\langle p \rangle], \quad (2.6)$$

$$\frac{d}{dt}S = (1 - S)(\gamma - 2\langle p \rangle\beta S). \quad (2.7)$$

Observemos que el sistema es claramente invariante en el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Los puntos fijos son los segmentos  $\{S = 1\}$  y el punto  $(\langle p \rangle, S) = \left(\frac{1}{1 + \beta}, \frac{\gamma(1 + \beta)}{2\beta}\right)$  con  $\frac{\gamma(1 + \beta)}{2\beta} \leq 1$ .

Estudiamos ahora el comportamiento asintótico de una solución con dato inicial

$$(\langle p \rangle(0), S(0)) \in [0, 1] \times [0, 1).$$

Como  $S(t) < 1$  para todo  $t$  y  $\frac{d}{dt}\langle p \rangle$  tiene el mismo signo que  $1 - (1 + \beta)\langle p \rangle$ , vale que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle p \rangle = p_\infty = \frac{1}{1 + \beta}.$$

Por lo que reescribimos (2.7) como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\beta} \frac{d}{dt}S &= \langle p \rangle(1 - S) \left( \frac{\gamma}{2\beta\langle p \rangle} - S \right) \\ &= \langle p \rangle(1 - S) \left( R_m^{-1} + \varepsilon(t) - S \right), \end{aligned}$$

donde  $R_m^{-1} = \frac{\gamma(1 + \beta)}{2\beta}$  y  $\varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

Podemos distinguir tres casos:

- Si  $R_m^{-1} > 1$  entonces existe  $T > 0$  tal que  $R_m^{-1} + \varepsilon(t) \geq 1$  para cualquier  $t \geq T$ . Entonces para  $t \geq T$  tenemos  $\frac{d}{dt}S \geq 0$ , y la igualdad solo se cumple cuando  $S = 1$ . Concluimos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 1$ .

- Si  $R_m^{-1} < 1$  entonces para todo par  $a, b \in [0, 1)$ ,  $a < R_m^{-1} < b$ , existe  $T' > 0$  tal que para  $t \geq T'$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle p \rangle (1 - s) (R_m^{-1} + \varepsilon(t) - s) &> 0 & \forall s \in [0, a], \\ \langle p \rangle (1 - s) (R_m^{-1} + \varepsilon(t) - s) &< 0 & \forall s \in [b, 1) \end{aligned}$$

Luego  $S$  entra al intervalo  $[a, b]$  en algún momento  $T \geq T'$  y no sale más. Como esto vale para cualesquiera  $a, b \in [0, 1)$ ,  $a < R_m^{-1} < b$ , deducimos  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = R_m^{-1}$ .

- Si  $R_m = 1$  entonces para todo  $\delta \in (0, 1)$ , existe  $T' > 0$  tal que para  $t \geq T'$ ,  $|\varepsilon(t)| < \delta/2$  de forma tal que

$$\langle p \rangle (1 - s) (R_m^{-1} + \varepsilon(t) - s) > 0 \quad \forall s \in [0, 1 - \delta].$$

Luego, si  $S(0) < 1 - \delta$ , entonces  $S(t)$  debe entrar en el intervalo  $[1 - \delta, 1]$  en algún tiempo  $T \geq T'$  y quedarse ahí. Si  $S(0) \geq 1 - \delta$  entonces  $S(t) \geq 1 - \delta$  para todo  $t \geq 0$ . Como esto vale para todo  $\delta > 0$ , vale que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 1$ .

Resumimos la discusión anterior en el siguiente teorema

**Teorema 2.3.1.** Para cualquier condición inicial  $(\langle p \rangle(0), S(0)) \in [0, 1] \times (0, 1]$ , la solución  $(\langle p \rangle, S)$  de (2.6)-(2.7) satisface

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle p \rangle = p_\infty = \frac{1}{1 + \beta}.$$

Si  $S(0) = 1$  entonces  $S(t) = 1$  para todo  $t \geq 0$ , y si  $S(0) < 1$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_m \leq 1, \\ R_m^{-1} & \text{si } R_m > 1, \end{cases}$$

donde  $R_m = \frac{2\beta}{\gamma(1+\beta)}$ .

### 2.3.2. El caso $h_1 \neq h_2$

Asumiendo que  $h \gg h_1, h_2$ , ó bien que  $\langle p^2 \rangle \sim \langle p \rangle^2$ , las ecuaciones (2.4) y (2.5) para  $\langle p \rangle$  y  $S$  quedan

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = h_2 2S(1 - S) [2 - 2(1 + \beta) \langle p \rangle - (h_1 - h_2) \beta \langle p \rangle^2], \quad (2.8)$$

$$\frac{d}{dt} S = (1 - S) (\gamma - 2 \langle p \rangle \beta S). \quad (2.9)$$

Consideramos primero el caso  $h_1 > h_2$ , donde la reacción por miedo es mayor que por confianza. La derivada de  $\langle p \rangle$  es positiva si  $\langle p \rangle = 0$ , y negativa si  $\langle p \rangle = (1 + \beta)^{-1}$ . Luego, existe un único equilibrio positivo  $p_\infty^-$  para la primer ecuación. Este equilibrio además es estable y cumple  $0 < p_\infty^- < (1 + \beta)^{-1}$ . Se puede calcular explícitamente resolviendo la

cuadrática y el resto del análisis se hace igual que antes. Esto da como resultado  $R_m = p_\infty^- R_0$ .

Por otro lado, si  $h_1 < h_2$ , los agentes relajan sus medidas de protección más de lo que las aumentan, la derivada de  $\langle p \rangle$  es positiva en  $\langle p \rangle = 0$  y también en  $\langle p \rangle = (1 + \beta)^{-1}$ . Sin embargo, si  $\langle p \rangle = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= h_2 2S(1-S) [2 - 2(1 + \beta) - (h_1 - h_2)\beta] \\ &= -h_2 2S(1-S)\beta(2 + h_1 - h_2) < 0, \end{aligned}$$

como  $0 \leq h_1, h_2 \leq 1/2$ . Luego, existe un único equilibrio positivo  $p_\infty^+$  de la ecuación (2.8). Es un equilibrio estable y cumple  $p_\infty^+ > (1 + \beta)^{-1}$ .

Notemos que  $p_\infty^- < (1 + \beta)^{-1} < p_\infty^+$  implica que, para  $h_1 > h_2$ , la población realiza un nivel de esfuerzo que mitiga la dispersión de la infección superior al que realiza cuando  $h_1 = h_2$ . Lo inverso ocurre cuando  $h_1 < h_2$ .

### 2.3.3. Otras reglas de contagio

Mencionamos que, para  $h_1 = h_2$  y asumiendo que  $\langle p_I \rangle = \langle p_S \rangle = \langle p \rangle$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= 2h_2 S(1-S)(2 - 2(1 + \beta)\langle p \rangle) \\ \frac{d}{dt} S &= (1-S)(\gamma - 2\langle p \rangle\beta S). \end{aligned}$$

Cuando el contagio depende del nivel de esfuerzo de los infectados es el mismo sistema estudiado antes.

Si el contagio depende del esfuerzo de ambos agentes, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= 4h_2 S(1-S)(1 - \langle p \rangle - \beta\langle p \rangle^2) \\ \frac{d}{dt} S &= (1-S)(\gamma - 2\langle p \rangle^2\beta S). \end{aligned}$$

y la primera ecuación tiene un único equilibrio positivo

$$\langle p \rangle_\infty = \frac{\sqrt{1 + 4\beta} - 1}{2\beta} < 1,$$

que es estable, ya que  $\langle p \rangle' > 0$  en 0, y  $\langle p \rangle' < 0$  en 1.

Tenemos

$$\frac{\sqrt{1 + 4\beta} - 1}{2\beta} > \frac{1}{1 + \beta},$$

con lo cual el número de agentes susceptibles en el equilibrio endémico es mayor en este caso ya que

$$\left( \frac{\sqrt{1 + 4\beta} - 1}{2\beta} \right)^2 < \frac{1}{1 + \beta},$$

y la ecuación para  $S$  involucra el cuadrado del promedio del nivel de esfuerzo. Por lo tanto, pese a que los agentes implementan medidas de protección mas relajadas, el esfuerzo combinado de la población reduce la probabilidad de contagio.

## 2.4. El valor de reproducción modificado $R_m$ y simulaciones

Un parámetro crítico en modelos epidémicos con compartimentos es el  $R_0$ . El valor básico de reproducción (*basic reproduction number* en inglés). Representa el número esperado de susceptibles que un agente enfermo infectará. En el SIS clásico, tenemos

$$R_0 = \frac{2\beta}{\gamma},$$

ver, por ejemplo, [4], y recordar que el 2 aparece porque tanto el primero como el segundo agente seleccionado puede infectarse. A medida que evoluciona el tiempo, el valor de reproducción efectivo  $R_t = R_0 S(t)$  describe mejor la dinámica ya que toma en cuenta que hay menos agentes susceptibles que al inicio. En el modelo SIS,  $R_t$  se estabiliza en  $R_t = 1$  en la fase endémica, y aparece un equilibrio entre los recuperados y los nuevos infectados.

En nuestro modelo, el valor de reproducción efectivo  $R_t$  lo podemos obtener de la ecuación (2.7),

$$R_t = p(t) \frac{2\beta}{\gamma} S(t).$$

Como  $\langle p(t) \rangle$  converge a  $p_\infty$  para  $h_1 = h_2$ , y a  $p_\infty^\pm$  si  $h_1 \neq h_2$ , introducimos los valores de reproducción modificados

$$R_m = p_\infty \frac{2\beta}{\gamma} \quad \text{y} \quad R_m^\pm = p_\infty^\pm \frac{2\beta}{\gamma}.$$

Se sigue del resultado anterior que dado un brote epidémico, i.e.  $S(0) < 1$ , entonces la enfermedad tiende a desaparecer si  $R_m \leq 1$ , mientras que se vuelve endémica si  $R_m > 1$ .

En la figura 2.2 comparamos el diagrama de bifurcación del SIS clásico con el del nuestro modelo. Variando  $\beta$ , para  $\gamma = 0,6$  fijo, observamos que la bifurcación ocurre en  $R_0 = 2\beta/\gamma$  en el SIS, mientras que las interacciones sociales bajan la bifurcación a  $R_m = R_0/(1 + \beta)$ , disminuyendo efectivamente la proporción de infectados final en el equilibrio endémico. Las estrellas rojas en el diagrama son los resultados de las simulaciones de agentes. Hay una gran similitud entre los valores simulados y los predichos en el equilibrio, y claramente detectan el punto de bifurcación.

Presentamos en la figura 2.3 dos mapas de calor, uno para la proporción de agentes susceptibles en el equilibrio obtenidos en el teorema 2.3.1 (a izquierda), y otro para el resultado obtenido de las simulaciones (a derecha). Se observa que la región en el espacio de parámetros donde la enfermedad es endémica es menor que la correspondiente para el SIS clásico, delimitada por la curva amarilla.

Terminamos esta sección presentando las simulaciones que avalan el sistema de EDO (2.6)-(2.7) como el sistema que describe la dinámica de agentes. La figura 2.4 muestra

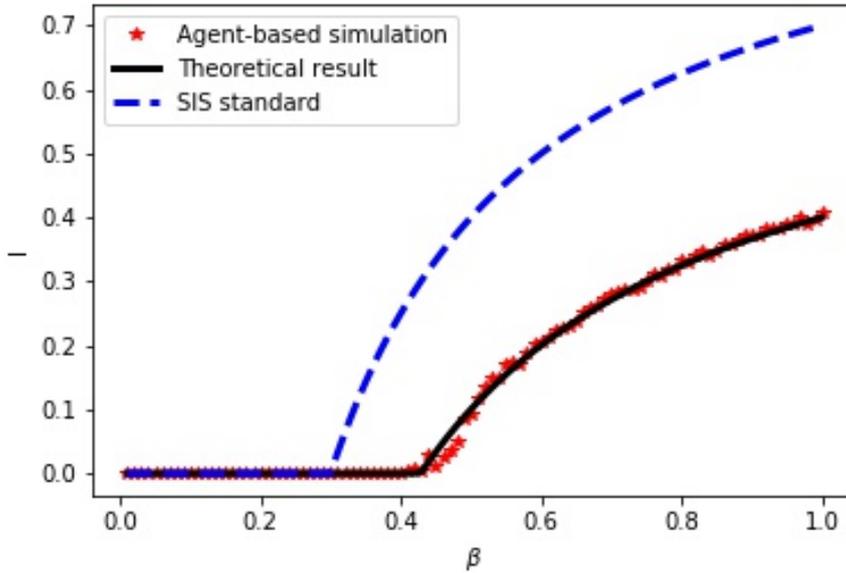


Figura 2.2: Gráfico de la proporción de agentes infectados en el equilibrio estable, para  $\gamma = 0,6$  y variando  $\beta$ . La curva punteada en azul representa el equilibrio del SIS, la negra el equilibrio teórico del Teorema 2.3.1, las estrellas rojas son las simulaciones de agentes.

una única simulación de la dinámica con 20000 agentes y parámetros  $\beta = 0,7$ ,  $\gamma = 0,3$ , y  $h = 0,1$ . El estado inicial es  $p = 1$  para todos los agentes y  $S(0) = 0,8$ . Podemos notar que  $R_m \approx 2,8 > 1$  de forma que la epidemia alcanza un equilibrio endémico. De hecho, podemos ver en la figura que

$$S \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,3553,$$

lo que nos da un error relativo de 2,5% con respecto al resultado teórico  $R_m^{-1} \approx 0,3643$ . Esto es bastante más que el valor asintótico de  $S$  en el SIS clásico. Además,

$$\langle p \rangle \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,5724,$$

lo que da un error relativo de 2,7% con respecto al valor teórico  $\frac{1}{1+\beta} \approx 0,5882$ .

## 2.5. Conclusión y comentarios finales

En este capítulo derivamos un modelo de epidemia acoplado con una dinámica de opinión continua. Asumimos que cada individuo toma medidas de precaución que reducen la probabilidad de contagio. El nivel de esfuerzo de cada agente cambia según ocurrió o no un contagio en una interacción, y también por influencias sociales. Incluimos en el modelo algunos mecanismos tales como la persuasión, el miedo al contagio, y la confianza luego de ver a un infectado y no contagiarse, como las principales fuerzas que producen cambios de comportamiento, y estudiamos como impactan en la dinámica de la enfermedad.

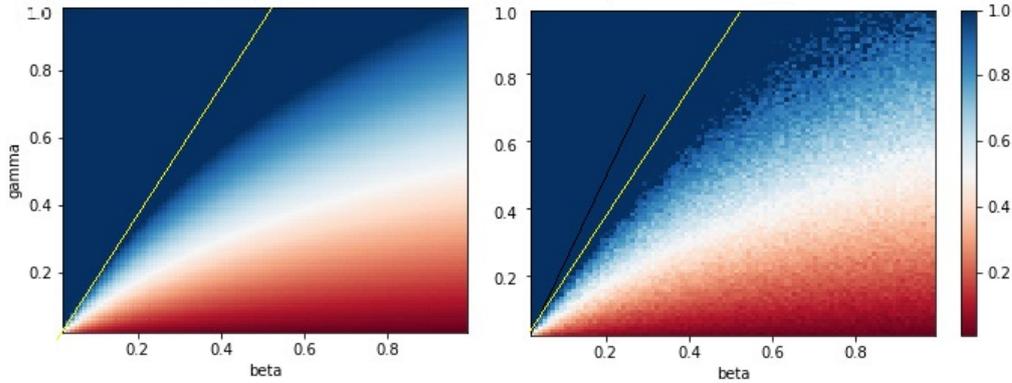


Figura 2.3: Heatmap de la proporción de agentes susceptibles en el equilibrio. A izquierda: Valores teóricos de 2.3.1. A derecha: simulación de agentes. La línea amarilla corresponde a  $R_0 = 1$  en el SIS.

Obtuvimos un sistema con dos ecuaciones diferenciales ordinarias: una para la proporción de agentes susceptibles, y otra para el promedio de los niveles de esfuerzo. Estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones y obtuvimos una generalización del valor de reproducción  $R_0$  que denotamos  $R_m$  y viene dado por

$$R_m = \frac{2\beta}{\gamma(1 + \beta)},$$

donde  $\beta$  y  $\gamma$  son las tasas de infección y recuperación de la enfermedad cuando  $h_1 = h_2$ , y probamos la existencia de valores críticos similares  $R_m^\pm$  cuando  $h_1 \neq h_2$ . Recordemos que el 2 que multiplica viene del hecho de que ambos agentes pueden infectarse luego de la interacción. Elegimos modelarlo así para mantener la simpleza y la simetría del problema, y al comparar con el  $R_0$  de los sistemas clásicos, debemos incluir este factor. Es decir, si la tasa de contagio de la enfermedad es  $\beta$ , entonces es equivalente a una tasa de  $2\beta$  cuando solo el primer agente elegido en la interacción puede ser infectado.

Hay una serie de preguntas prácticas que surgen, particularmente en este momento con la pandemia el Covid-19. Si bien no apuntamos a una aplicación directa de las reglas de interacción social, se pueden medir algunas tendencias en la población, como la frecuencia de uso de barbijos, utilización de sanitizantes, mantenimiento de la distancia social, o la proporción de individuos de la población que circula. Si bien no podemos obtener una probabilidad individual de contagio  $\beta_i$ , que sería el resultado del producto  $p_i\beta$  en nuestro modelo, si podríamos tomar una reducción promedio del contagio que equivaldría al factor  $\langle p \rangle \beta$ . Existen estimaciones recientes de la influencia de estos factores en relación al Covid-19, ver [14, 32], si bien debería utilizarse un modelo Susceptibles-Expuestos-Infectados-Removidos, SEIR, que parece ser mejor para analizar su evolución.

En este trabajo elegimos la misma escala de tiempo tanto para la epidemia como para la dinámica social, escalando solo el número de agentes y manteniendo el parámetro  $h_2$  para estudiar la evolución de  $\langle p \rangle$ . Es posible cambiar la frecuencia de las interacciones, separando las tasas de contacto de las sociales, que solo afectan los niveles de esfuer-

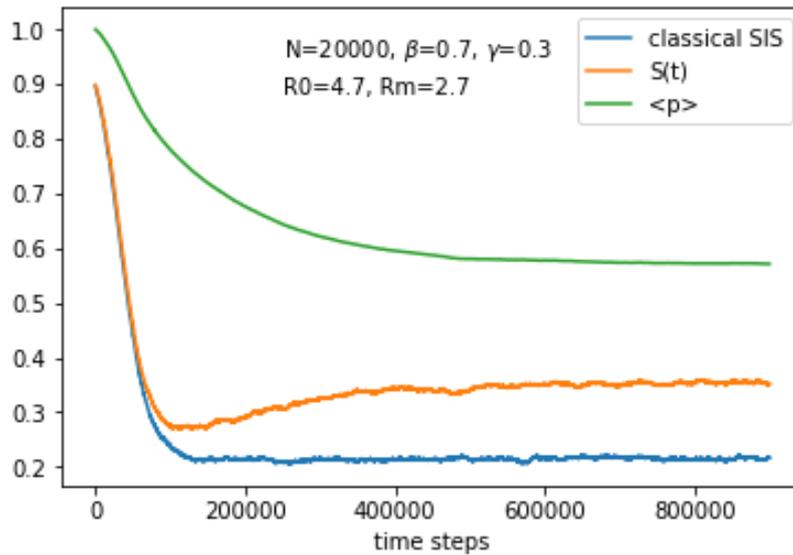


Figura 2.4: Gráfico de  $S(t)$  y  $\langle p \rangle$  en una simulación con 20000 agentes,  $\beta = 0,7$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $h = 0,1$ .

zo. Esto serviría por ejemplo para separar interacciones, por teléfono o internet, de las interacciones físicas que si incluyen riesgo de contagio como en [10].

Por otra parte, no consideramos grandes instituciones como los gobiernos, los medios de comunicación y las organizaciones de salud. Su influencia como agentes sociales no puede ser ignorada. Tampoco la de grupos que proponen medidas contraproducentes, como por ejemplo los movimientos anti vacunas, negacionistas, o grupos políticos que violaron la cuarentena y se rehusaron a usar barbijos tratando de convencer más gente a que los sigan. Estos agentes actúan como *cabezaduras* y los vamos a incluir en el capítulo 4, donde estudiemos su rol y su influencia en la estabilidad del equilibrio.



## Capítulo 3

### Ecuaciones de tipo Boltzmann

En este capítulo vamos a generalizar el modelo del capítulo anterior y obtener un sistema de ecuaciones de tipo Boltzmann que describe el modelo, y compacta en dos ecuaciones integrodiferenciales tanto la dinámica de la epidemia como la evolución del nivel de esfuerzo para evitar su propagación.

El estado del sistema a tiempo  $t$  lo podemos describir con dos medidas positivas  $f_t^S$ ,  $f_t^I$  sobre  $[0, 1]$ , que indican la distribución de los agentes susceptibles e infectados respectivamente en los niveles de esfuerzo.

Para deducir la ecuación que debe cumplir  $f_t^S$ , sea  $\phi(\omega) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciables que usamos como test. ¿Cómo cambia entonces  $\int \phi(\omega) df_t^S(\omega)$ ? Tenemos un término de pérdida (los que se infectan), uno de ganancia (los que se curan) y dos de interacción (uno de interacciones entre agentes susceptibles, y otro de interacciones entre un susceptible y un infectado):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(\omega) df_t^S(\omega) = & - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) \alpha \omega df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) + \int_{\omega} \beta \phi(\omega) df_t^I(\omega) \\ & + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df_t^S(\omega) df_t^S(\omega^*) \\ & + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*), \end{aligned}$$

donde  $\omega'$  es el nuevo nivel de esfuerzo de alguien que tenía un nivel  $\omega$  e interactuó con un susceptible o infectado con nivel  $\omega^*$ , y utilizamos las reglas de interacción del capítulo anterior.

De forma similar, planteamos la ecuación para  $f_t^I(\omega)$  la distribución en el nivel de esfuerzo de los infectados. Hay tres términos ahora, uno de ganancia, otro de pérdida, y sólo uno de interacción:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \psi(\omega) df_t^I(\omega) = & - \int_{\omega} \beta \psi(\omega) f_t^I(\omega) + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) df_t^I(\omega) df_t^I(\omega^*) \\ & + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \alpha \frac{\omega}{1-h_1} \chi_{[0,1-h_1]} df_t^S\left(\frac{\omega}{1-h_1}\right) df_t^I(\omega^*). \end{aligned}$$

Observemos que el término de ganancia incluye una característica y evaluar  $f_t^S$  en otro valor, no en  $\omega$ . Cuando un susceptible con nivel de esfuerzo  $\omega$  se infecta, ingresa a los

infectados con un nuevo nivel  $(1-h_1)\omega$ . Podemos despejar entonces y ver que alguien que ingresa a los infectados con opinión  $\omega$ , tenía opinión  $\frac{\omega}{1-h_1}$  al momento de infectarse. Con la misma lógica establecemos los límites de integración, lo más grande que puede valer el nivel de esfuerzo de un susceptible es 1, y si uno con este nivel se infecta, actualiza su valor a  $1-h_1$ . Por lo tanto, desde la población susceptible, sólo pueden entrar infectados con nivel a lo sumo  $1-h_1$ , y de ahí la función indicadora  $\chi_{[0,1-h_1]}$ .

### 3.1. Existencia

Vamos a probar la existencia de soluciones para este sistema. Para simplificar las cuentas, vamos a tomar los parámetros de confianza y miedo  $h_1$  y  $h_2$  proporcionales al parámetro  $h$  de la interacción social,

$$h_1 = h_2 = \eta h$$

Antes de enunciar el teorema de manera precisa, definamos bien los espacios donde vamos a trabajar. Utilizamos funciones test  $\phi, \psi \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ . Llamamos  $M([0, 1])$  al conjunto de las medidas Borelianas finitas sobre el intervalo  $[0, 1]$ , con la norma de variación total

$$\|f\|_{TV} = \sup \left\{ \int_{[0,1]} \phi \, df : \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Notamos  $M^+([0, 1])$  al subconjunto de medidas positivas sobre el intervalo.

Llamamos  $E = M([0, 1]) \times M([0, 1])$ , y vamos a considerar funciones  $f_t \in C([0, T], E)$  equipado con la norma del supremo, donde  $f_t = (f_t^S, f_t^I)$ , y

$$\|f_t\| = \sup_{k \in \{S, I\}, t \in [0, T]} \|f_t^k\|_{TV}.$$

**Teorema 3.1.1.** *Sean  $f_0^S, f_0^I \in M^+([0, 1])$  cuya suma es una medida de probabilidad. Entonces, existe una única solución  $f_t \in C^1([0, T], E)$  de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_\omega \phi(\omega) df_t^S(\omega) = \int_\omega \phi(\omega) df_0^S + \int_\omega \beta \phi(\omega) df_s^I(\omega) \\ \quad + \int_0^t \int_\omega \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df_s^S(\omega) df_s^S(\omega^*) \\ \quad + \int_\omega \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) (1 - \omega \alpha) df_s^S(\omega) df_s^I(\omega^*) \\ \quad + \int_\omega \int_{\omega^*} -\phi(\omega) \omega \alpha df_s^S(\omega) df_s^I(\omega^*) ds \\ \int_\omega \psi(\omega) df_t^I = \int_\omega \psi(\omega) df_0^I - \int_\omega \beta \psi(\omega) df_s^I(\omega) \\ \quad + \int_0^t \int_\omega \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) df_s^I(\omega) df_s^I(\omega^*) \\ \quad + \int_\omega \int_{\omega^*} \psi(\omega) \alpha \left( \frac{\omega}{1-\eta h} \right) \chi_{[0,1-\eta h]} df_s^S \left( \frac{\omega}{1-\eta h} \right) df_s^I(\omega^*) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

tal que  $f_t^S, f_t^I \in M^+([0, 1])$  y su suma es una medida de probabilidad para todo tiempo.

La demostración es larga e involucra introducir notación para los espacios convenientes, y la dividiremos en distintos lemas.

*Los términos de colisión.* Definimos

$$Q_1, Q_2 : (C([0, T], E) \times C([0, T], E)) \times C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(Q_1(f, g), \phi) &= \frac{1}{2} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df^S(\omega) dg^S(\omega^*) + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \phi(\omega) df^I(\omega) dg^I(\omega^*) \right. \\
&\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega))(1 - \omega\alpha) df^S(\omega) dg^I(\omega^*) \\
&\quad \left. + \int_{\omega} \int_{\omega^*} -\phi(\omega)(\omega\alpha) df^S(\omega) dg^I(\omega^*) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) dg^S(\omega) df^S(\omega^*) + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \phi(\omega) dg^I(\omega) df^I(\omega^*) \right. \\
&\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega))(1 - \omega\alpha) dg^S(\omega) df^I(\omega^*) \\
&\quad \left. + \int_{\omega} \int_{\omega^*} -\phi(\omega)(\omega\alpha) dg^S(\omega) df^I(\omega^*) \right). \tag{3.2}
\end{aligned}$$

Definimos  $Q_2$

$$\begin{aligned}
(Q_2(f, g), \psi) &= \frac{1}{2} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) df^I(\omega) dg^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \psi(\omega) df^I(\omega) dg^I(\omega^*) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \alpha \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) \chi_{[0, 1 - \eta h]} df^S \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) dg^I(\omega^*) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) dg^I(\omega) df^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \psi(\omega) dg^I(\omega) df^I(\omega^*) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \alpha \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) \chi_{[0, 1 - \eta h]} dg^S \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) df^I(\omega^*) \right). \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Entonces podemos reescribir las ecuaciones 3.1 de manera más compacta,

$$\begin{aligned}
\int_{\omega} \phi(\omega) df_t^S(\omega) &= \int_{\omega} \phi(\omega) df_0^S + \int_0^t Q_1(f_s, f_s)(\phi(\omega)) ds, \\
\int_{\omega} \psi(\omega) df_t^I &= \int_{\omega} \psi(\omega) df_0^I + \int_0^t Q_2(f_s, f_s)(\psi(\omega)) ds.
\end{aligned}$$

Dos observaciones. Primero, recordando que  $\|f\|$  es la norma infinito de la variación total como función de  $t$  y sobre sus coordenadas, podemos acotar

$$\begin{aligned}
|(Q_1(f, g), \phi)| &\leq (2 + \beta + |\omega\alpha|) \|\phi\| \|f\| \|g\|, \\
|(Q_2(f, g), \psi)| &\leq \left( 2 + \beta + \left| \frac{\omega}{1 - \eta h} \alpha \right| \right) \|\psi\| \|f\| \|g\|.
\end{aligned}$$

Como  $\alpha$  y  $\beta$  están fijos, y  $|\omega\alpha| \leq \alpha$ , y  $\left| \frac{\omega}{1 - \eta h} \alpha \right| \leq 2$  para  $\eta h$  chico, entonces se puede encontrar una constante  $C(\alpha, \beta, h) < \infty$  tal que

$$\|Q_1(f, g)\| \leq C \|f\| \|g\| \quad \text{y} \quad \|Q_2(f, g)\| \leq C \|f\| \|g\|. \tag{3.4}$$

Segundo, para  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$Q_i(f, f) - Q_i(g, g) = Q_i(f + g, f - g),$$

con lo cual

$$\|Q_i(f, f) - Q_i(g, g)\| \leq C\|f + g\| \|f - g\|.$$

Sean

$$C_T := C([0, T], P([0, 1]) \times P([0, 1])),$$

las funciones continuas del  $[0, 1]$  en el producto de las medidas de probabilidad sobre el intervalo  $[0, 1]$ , y

$$X_T = \left\{ f \in C_T : f(0) = (f_0^S, f_0^I) \text{ y } \max_{0 \leq t \leq T} \|f_t\| \leq 2\|f_0\| \right\}.$$

Definimos el operador  $\mathcal{J} : X_T \rightarrow X_T$ ,

$$\mathcal{J}(f_t^S, f_t^I) := \left( f_0^S + \int_0^t Q_1(f_s, f_s) ds, f_0^I + \int_0^t Q_2(f_s, f_s) ds \right)$$

y veamos que  $\mathcal{J}$  tiene un punto fijo, con lo cual la ecuación 3.1 tiene solución.

**Lema 3.1.1.** *Dada  $f_0$ , existe  $T < \frac{1}{4C\|f_0\|}$  tal que si  $f_t \in X_T$ , entonces  $\mathcal{J}(f_t)$  también.*

Como  $\mathcal{J}$  es absolutamente continua,  $\mathcal{J}(f_t) \in C_T$ .

Acotemos la primer coordenada de  $\mathcal{J}$ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{J}(f)(t)_1\| &\leq \|f_0^S\| + \int_0^t \|Q_1(f_s, f_s)\| ds \\ &\leq \|f_0^S\| + T \max_{0 \leq s \leq T} C\|f_s\|^2 \\ &\leq \|f_0^S\| + TC(2\|f_0\|)^2. \end{aligned}$$

Luego, si  $T < \frac{1}{4C\|f_0\|}$ ,

$$\|\mathcal{J}(f)(t)_1\| \leq \|f_0^S\| + \|f_0\| \leq 2\|f_0\|.$$

Lo mismo se puede hacer para la segunda coordenada de  $\mathcal{J}$  concluyendo

$$\|\mathcal{J}(f_t)\| \leq 2\|f_0\|.$$

**Lema 3.1.2.** *Para  $T < \frac{1}{16\|f_0\|}$ , el operador  $\mathcal{J}$  es contracción.*

Solo hace falta verlo para una coordenada de cada vez.

$$\begin{aligned}
\|(\mathcal{J}_1(f) - \mathcal{J}_1(g))(t)\| &\leq \left\| f_0 + \int_0^t \mathcal{Q}_1(f_s, f_s) ds - f_0 + \int_0^t \mathcal{Q}_1(g_s, g_s) ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{Q}_1(f_s, f_s) - \mathcal{Q}_1(g_s, g_s)\| ds \\
&= \int_0^t \|\mathcal{Q}_1(f_s + g_s, f_s - g_s)\| ds \\
&\leq 2T\|f + g\| \|f - g\|.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \leq 2\|f_0\| + 2\|f_0\| = 4\|f_0\|,$$

y por lo tanto

$$\|(\mathcal{J}_1(f) - \mathcal{J}_1(g))(t)\| \leq 8T\|f_0\| \|f - g\|$$

Si pedimos  $T < \frac{1}{16\|f_0\|}$ , podemos concluir

$$\|(\mathcal{J}_1(f) - \mathcal{J}_1(g))\| < \frac{1}{2}\|f - g\|.$$

Repitiendo la cuenta en la segunda coordenada, y recordando que usamos norma infinito, obtenemos que  $\mathcal{J}$  es una contracción.

Finalmente, por el Teorema de punto fijo de Banach, la ecuación 3.1 tiene una única solución  $f_t = (f_t^S, f_t^I)$  definida en el intervalo  $[0, T]$ , continua.

**Lema 3.1.3.** Si  $f_t = (f_t^S, f_t^I)$  es una solución de 3.1 para toda  $\phi \in C^\infty([0, 1])$ , se tiene que  $\int_0^t \phi(\omega) df_s^S(\omega)$  e  $\int_0^t \phi(\omega) df_s^I(\omega)$  son continuamente diferenciables en la variable  $t$ .

Para demostrarlo, utilizamos la acotación

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f_{t+h}^S - f_t^S}{h} - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \mathcal{Q}_1(f_s, f_s) ds - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (\mathcal{Q}_1(f_s, f_s) - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t)) ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\mathcal{Q}_1(f_s, f_s) - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t)\| ds.
\end{aligned}$$

Usando nuevamente que

$$\|\mathcal{Q}_1(f_s, f_s) - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t)\| \leq 2\|f_s + f_t\| \|f_s - f_t\| \leq 8\|f_0\| \|f_s - f_t\|,$$

obtenemos

$$\left\| \frac{f_{t+h}^S - f_t^S}{h} - \mathcal{Q}_1(f_t, f_t) \right\| \leq 8\|f_0\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f_s - f_t\| ds \rightarrow 0$$

utilizando la continuidad de  $f_t$ . Lo mismo para  $f^I$ .

Hasta ahora hemos encontrado una solución y probado que vive en  $C^1([0, T], E)$ . Ahora vamos a ver que esta solución es, efectivamente, una medida de probabilidad para la distribución de agentes sobre los niveles de esfuerzo para evitar la epidemia para algún tiempo  $T_1 \leq T$ . Es decir,  $0 \leq f_t^S, f_t^I$  y

$$\int d(f_t^S + f_t^I) = 1 \text{ para todo } 0 \leq t \leq T_1 \leq T. \quad (3.5)$$

**Observación 2.** Vamos a notar  $g^S$  y  $g^I$  a  $g^S(\omega)$  y  $g^I(\omega)$ . Es decir, omitimos la variable  $\omega$ . Notamos también  $\int_\omega$  a la integral  $\int_0^1$ . Siempre vamos a integrar en todo el dominio de las  $g$ , que es el intervalo  $[0, 1]$ .

**Proposición 3.1.1.** Sea  $g_0 = (g_0^S, g_0^I) \in \mathcal{M}_+([0, 1]) \times \mathcal{M}_+([0, 1])$  tal que  $\int d(g_0^S + g_0^I) = 1$ . Sea  $\lambda \geq 1$ . Entonces, existe una única  $g \in C^1([0, +\infty), \mathcal{M}_+([0, 1]) \times \mathcal{M}_+([0, 1]))$  tal que  $g|_{t=0} = g_0$  y para  $t > 0$  resuelve el sistema

$$\begin{cases} \partial_t g_t^S + \lambda g_t^S &= Q_1(g_t, g_t) + \lambda g_t^S \int_\omega d(g_t^S + g_t^I) \\ \partial_t g_t^I + \lambda g_t^I &= Q_2(g_t, g_t) + \lambda g_t^I \int_\omega d(g_t^S + g_t^I). \end{cases} \quad (3.6)$$

Es fácil ver que si  $f$  es solución de 3.1 y satisface  $\|f_t^S + f_t^I\| = 1$ , entonces también es solución de 3.6 y, por unicidad, pertenece a  $\mathcal{M}_+([0, 1]) \times \mathcal{M}_+([0, 1])$ .

*Demostración.* Empecemos entendiendo la forma que va a tener una solución. Multipliquemos ambas ecuaciones de 3.6 por  $e^{\lambda t}$  e integramos,

$$\begin{cases} g_t^S &= e^{-\lambda t} g_0^S + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left( Q_1(g_s, g_s) + \lambda g_s^S \int_\omega d(g_s^S + g_s^I) \right) ds, \\ g_t^I &= e^{-\lambda t} g_0^I + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left( Q_2(g_s, g_s) + \lambda g_s^I \int_\omega d(g_s^S + g_s^I) \right) ds. \end{cases} \quad (3.7)$$

Definimos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  como

$$\begin{aligned} \Gamma_1(f_t, g_t) &= Q_1(f_t, g_t) + \frac{\lambda}{2} \left( f_t^S \int_\omega d(g_t^S + g_t^I) + g_t^S \int_\omega d(f_t^S + f_t^I) \right), \\ \Gamma_2(f_t, g_t) &= Q_2(f_t, g_t) + \frac{\lambda}{2} \left( f_t^I \int_\omega d(g_t^S + g_t^I) + g_t^I \int_\omega d(f_t^S + f_t^I) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Notamos que tienen los mismos dominios y codominios que  $Q_1$  y  $Q_2$ .

Entonces, reescribimos 3.7 como

$$\begin{cases} g_t^S &= e^{-\lambda t} g_0^S + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_1(g_s, g_s) ds, \\ g_t^I &= e^{-\lambda t} g_0^I + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_2(g_s, g_s) ds. \end{cases} \quad (3.9)$$

Es directo ver que  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son formas cuadráticas y por lo tanto tienen las mismas propiedades que tenían las  $Q$ .

**Lema 3.1.4.** Se tiene que  $\Gamma_1(g, g)$  y  $\Gamma_2(g, g)$  son positivas para cualquier  $g \in C([0, \infty))$ .

$$\begin{aligned}
(\Gamma_1(g, g), \phi) &= (Q_1(g, g) + \lambda g^S \int_{\omega} d(g^S + g^I), \phi) \\
&= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') dg^S(\omega) dg^S(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^S(\omega) dg^S(\omega^*) \\
&\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \phi(\omega) dg^I(\omega) d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \\
&\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) \\
&\quad - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') \omega \alpha dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) \\
&\quad + \int_{\omega} \phi(\omega) \lambda dg^S \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)).
\end{aligned}$$

Observamos que para toda  $\phi > 0$ ,

- $\int_{\omega} \phi(\omega) \lambda g^S(\omega) \int_{\omega^*} dg^S(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^S(\omega) dg^S(\omega^*) > 0.$
- $\int_{\omega} \phi(\omega) \lambda g^I(\omega) \int_{\omega^*} dg^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^I(\omega) dg^I(\omega^*) > 0.$
- $\int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') \alpha \omega dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) > 0.$

Para  $\Gamma_2$ ,

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2(g, g), \phi) &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega') dg^I(\omega) dg^I(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^I(\omega) dg^I(\omega^*) \\
&\quad - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \phi(\omega) dg^I(\omega) d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \\
&\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) \alpha \frac{\omega}{1 - \eta h} dg^S \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) dg^I(\omega^*) \\
&\quad + \int_{\omega} \phi(\omega) \lambda dg^I(\omega) \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)).
\end{aligned}$$

Para toda  $\phi > 0$ , la siguiente expresión

$$\int_{\omega} \phi(\omega) \lambda dg^I(\omega) \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) dg^I(\omega) dg^I(\omega^*) \quad (3.10)$$

$$- \int_{\omega} \int_{\omega^*} \beta \phi(\omega) dg^I(\omega) d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \quad (3.11)$$

es positiva cuando  $\lambda > 1 + \beta$ .

Por lo tanto,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son medidas positivas.

**Observación 3.** También podemos observar que preservan orden, pues si  $g \geq f$ ,

$$\Gamma_1(g, g) - \Gamma_1(f, f) = \Gamma_1(g + f, g - f) \geq 0,$$

y lo mismo vale para  $\Gamma_2$ .

Construimos ahora la solución de 3.6. Empezando con  $g^0 = (0, 0)$ , definimos la sucesión  $\{g_t^n\}_{n \geq 0}$  como

$$\begin{cases} g_t^{n,S} &= e^{-\lambda t} g_0^S + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) ds, \\ g_t^{n,I} &= e^{-\lambda t} g_0^I + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_2(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) ds. \end{cases} \quad (3.12)$$

donde  $g_0$  es el dato inicial de 3.6.

Es directo ver que  $g_t^{n,S}$  y  $g_t^{n,I}$  son positivas. Más aún, tenemos

**Lema 3.1.5.** *Las sucesiones  $\{g_t^{n,S}\}_{n \geq 0}$  y  $\{g_t^{n,I}\}_{n \geq 0}$  son crecientes para cada  $t$ , y su masa total está acotada,*

$$g_t^n([0, 1]) + g_t^n([0, 1]) \leq 1.$$

Lo podemos ver por inducción. Como  $g^0 = (0, 0)$ , tenemos  $g_t^1 = e^{-\lambda t} g_0 > 0$ . Ahora,

$$\begin{aligned} g_t^{n,S} - g_t^{n-1,S} &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) - \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \Gamma_1(g_s^{n-2}, g_s^{n-2}) ds \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left( \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) - \Gamma_1(g_s^{n-2}, g_s^{n-2}) \right) ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

por la hipótesis inductiva, y lo mismo es cierto para  $g_t^{n,I} - g_t^{n-1,I}$ . Entonces la sucesión  $\{g_t^n\}_{n \geq 0}$  tiene coordenadas positivas y crecientes.

Veamos que las integrales de  $g_t^{n,S}$  y  $g_t^{n,I}$  son menores o iguales a 1. Para ello, miramos la suma  $G_t^n := g_t^{n,S} + g_t^{n,I}$ .

$$G_t^n = e^{-\lambda t} (g_0^S + g_0^I) + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \left( \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) + \Gamma_2(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) \right) ds.$$

Escribimos  $\Gamma_1(g, g) + \Gamma_2(g, g)$  para entender como es.

$$\Gamma_1(g, g) + \Gamma_2(g, g) = Q_1(g, g) + Q_2(g, g) + \lambda \left( (g^S + g^I) \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \right).$$

Afirmamos que  $Q_1 + Q_2$  preserva masa. Cuando escribimos 3.2 y 3.3 con  $\phi \equiv 1$ , los términos

$$\int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) dg^S(\omega) dg^S(\omega^*) \quad \text{y} \quad \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) dg^I(\omega) dg^I(\omega^*)$$

se cancelan. También se cancelan el término que lleva  $\beta$  de  $Q_1$  con el de  $Q_2$  y el término

$$\int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega))(1 - \alpha\omega) dg^S(\omega) dg^I(\omega^*).$$

Lo único que en principio sobrevive es

$$\begin{aligned} (Q_1(g, g) + Q_2(g, g), 1) &= - \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) \alpha \omega dg^S(\omega) dg^I(\omega^*) \\ &\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi(\omega) \alpha \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) \chi_{[0, 1 - \eta h]} dg^S \left( \frac{\omega}{1 - \eta h} \right) dg^I(\omega^*). \end{aligned}$$

En la segunda integral hacemos el cambio de variables  $z = \frac{\omega}{1-h\eta}$ , y obtenemos que

$$(Q_1(g, g) + Q_2(g, g), 1) = 0.$$

Por lo tanto, la masa de  $\Gamma_1(g, g) + \Gamma_2(g, g)$  es

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(g, g) + \Gamma_2(g, g)| &\leq |Q_1(g, g) + Q_2(g, g)| + \lambda \left| (g^S + g^I) \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \right| \\ &\leq \lambda \left( \int_{\omega^*} d(g^S(\omega^*) + g^I(\omega^*)) \right)^2 \end{aligned}$$

La masa de  $G^n$  podemos acotarla

$$\begin{aligned} |G^n| &\leq |e^{-\lambda t}(g_0^S + g_0^I)| + \left| \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} (\Gamma_1(g_t^{n-1}, g_t^{n-1}) + \Gamma_2(g_t^{n-1}, g_t^{n-1})) ds \right| \\ &\leq e^{-\lambda t} |g_0^S + g_0^I| + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda \left( \int_{\omega^*} d(g^{n-1,S}(\omega^*) + g^{n-1,I}(\omega^*)) \right)^2 ds \\ &\leq e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda |G^{n-1}|^2 ds \end{aligned}$$

Recordando que  $|g_0^S + g_0^I| = 1$  por hipótesis, hacemos inducción.

Como  $G^0 = 0 + 0$ , tiene masa menor que 1. Si  $G^{n-1} = g^{n-1,S} + g^{n-1,I}$  tiene masa menor que 1, entonces reemplazando en la ecuación anterior,

$$|G^n| \leq e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \lambda ds \leq 1.$$

Por lo tanto, las sucesiones  $g_t^{n,S}$  y  $g_t^{n,I}$  son positivas, crecientes y, como están acotadas por arriba por  $G^n$  que está acotada por 1, son acotadas. Luego,  $\{g^n\}$  es una familia de funciones equiacotadas.

**Lema 3.1.6.** *La sucesión de funciones  $\{g^n\}_{n \geq 0}$  es equicontinua.*

Fijemos un  $T > 0$ , y veamos que  $\{g^n\}_{n \geq 0}$  es una familia de funciones equicontinua. Supongamos que tenemos dos tiempos  $t_2 > t_1$ . Podemos acotar

$$\begin{aligned} \|g_{t_2}^{n,S} - g_{t_1}^{n,S}\| &\leq |e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1}| \|g_0^S\| \\ &\quad + \left\| \int_0^{t_1} (e^{-\lambda(t_2-s)} \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) - e^{-\lambda(t_1-s)} \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1})) ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda(t_2-s)} \Gamma_1(g_s^{n-1}, g_s^{n-1}) ds \right\| \\ &\leq |e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}| \|g_0^S\| + T e^{\lambda T} |e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}| \sup_{t \in [0, T]} \|\Gamma_1(g_t^{n-1}, g_t^{n-1})\| \\ &\quad + |t_2 - t_1| \sup_{t \in [0, T]} \|e^{-\lambda(t_2-t)} \Gamma_1(g_t^{n-1}, g_t^{n-1})\|. \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\Gamma_1(g, g) = Q_1(g, g) + \lambda g^S \int d(g^S + g^I)$ , podemos utilizar la cota 3.4 y obtenemos

$$\|\Gamma_1(g, g)\| \leq (C + 2\lambda)\|g\|^2.$$

Por lo tanto, como las  $g^n$  tienen norma menor o igual a 1,  $\Gamma_1(g_t^n, g_t^n)$  está acotado uniformemente en  $n$  y en  $t$ . Como  $[0, T]$  es compacto y  $e^{-\lambda t}$  es continua, existe una constante  $\tilde{C}$  tal que

$$|e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}| \leq \tilde{C}|t_1 - t_2|.$$

Entonces

$$\|g_{t_2}^{n,S} - g_{t_1}^{n,S}\| \leq \tilde{C}|t_2 - t_1| + T e^{\lambda T} \tilde{C}|t_2 - t_1|(C + 2\lambda) + (C + 2\lambda)|t_2 - t_1|,$$

y por lo tanto existe una constante  $\tilde{C}$  que no depende de  $n$  ni de  $t$  tal que

$$\|g_{t_2}^{n,S} - g_{t_1}^{n,S}\| \leq \tilde{C}|t_2 - t_1|$$

De la misma forma, se puede repetir este argumento para  $g^{n,I}$  y concluimos que la familia de funciones  $\{g^n\}_{n \geq 0}$  es equicontinua.

Por el teorema de Arzela Ascoli, existe un límite  $g_t^S$  tal que  $g_t^{S,n_k} \rightarrow g_t^S$  para alguna subsucesión  $n_k$  en  $C([0, T], \mathcal{M}^+([0, 1]))$ . Si repetimos este argumento para la sucesión  $g_t^{I,n_k}$ , podemos encontrar una sub-sucesión  $n_{k_l}$  que cumple

$$(g^S, g^I)^{n_{k_l}} \rightarrow (g^S, g^I) =: g \quad \text{en } C([0, T], M).$$

El límite  $g$  también satisface que  $0 \leq \int_{\omega} d(g_t^S + g_t^I) \leq 1$  para todo  $t$ , y es una solución de 3.6. Como  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son continuas, por la cuenta de antes,  $g$  está en  $C^1([0, T], \mathcal{M}^+([0, 1]))$ .

Si  $\tilde{g}$  es otra solución de 3.6,

$$\|g_t^S - \tilde{g}_t^S\| \leq \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|\Gamma_1(g_s, g_s) - \Gamma_1(\tilde{g}_s, \tilde{g}_s)\| ds \leq C \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} \|g_s - \tilde{g}_s\| ds,$$

y aplicando el lema de Gronwall obtenemos  $\|g_t^S - \tilde{g}_t^S\| \leq 0$ . Haciendo lo mismo para  $g^I$ , concluimos que la solución es única.

Hemos concluido la demostración de la Proposición 3.1.1.  $\square$

**Observación 4.** Por el teorema de punto fijo de Banach, sabemos que existe una solución  $f$  del sistema de ecuaciones 3.1 en  $[0, T]$ . Ahora bien, por la Proposición 3.1.1, sabemos que para todo  $t \in [0, T]$  esa solución cumple  $\|f_t^S + f_t^I\| = 1$ ,  $f_t^S, f_t^I > 0$  ya que el dato inicial lo cumplía, y está definida para todo  $t \geq 0$ .

## 3.2. Recuperando las ecuaciones mean-field

Si en la ecuación 3.1 tomamos funciones test  $\phi$  y  $\psi$  apropiadas, podemos recuperar el sistema 2.6 2.7 del capítulo anterior.

Por ejemplo, si tomamos  $\phi(\omega) = \psi(\omega) = 1$ , las integrales  $\int_{\omega} 1df^S(\omega)$  y  $\int_{\omega} 1df^I(\omega)$  dan la masa total de  $f^S$  y  $f^I$ , es decir, son la proporción de sanos e infectados que hay en la población. Luego, siguiendo las ecuaciones 3.1, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}S_t &= +\beta^*I_t - \alpha^*I_tE(f_t^S) \\ \frac{d}{dt}I_t &= -\beta^*I_t + \alpha^*I_tE(f_t^S),\end{aligned}\quad (3.13)$$

Observemos que son la misma ecuación ya que  $S_t = 1 - I_t$ . Además,  $E(f_t^S)$  lo podemos pensar como  $S_t$  (la masa total de  $f$ ) multiplicado por el promedio de  $f^S$ , la opinión media de los sanos. Nos queda exactamente la ecuación 2.6 con la diferencia que habíamos cambiado la opinión media de los sanos  $\langle p \rangle_S$  por la opinión media de toda la población  $\langle p \rangle$ .

Por otro lado, si tomamos  $\phi(\omega) = \psi(\omega) = \omega$ , las integrales  $\int_{\omega} \omega d(f^S(\omega) + f^I(\omega))$  es la media de la opinión de todos los infectados. Sumando las dos ecuaciones de 3.1, podemos obtener una ecuación para  $\frac{d}{dt} \int_{\omega} \omega d(f^S(\omega) + f^I(\omega))$

Cuando evaluamos 3.1 en  $\phi(\omega) = \psi(\omega) = \omega$ , los términos de interacción quedan

$$\int_{\omega} \int_{\omega^*} (\omega + h(\omega^* - \omega) - \omega) df_t^S(\omega) df_t^S(\omega^*) - \int_{\omega} \int_{\omega^*} h(\omega^* - \omega) df_t^S(\omega) df_t^S(\omega^*) = 0$$

Por otro lado, los términos de cura  $\int_{\omega} \beta \omega d f_t^I(\omega)$  se cancelan entre ellos. Lo único que sobrevive son los términos de contagio y el término de confianza.

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \omega d(f^S(\omega) + f^I(\omega)) = \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\omega + h\eta(1 - \omega) - \omega)(1 - \omega\alpha) df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.14)$$

$$- \int_{\omega} \int_{\omega^*} \omega^2 \alpha df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.15)$$

$$+ \int_{\omega} \int_{\omega^*} \omega \alpha \frac{\omega}{1 - h\eta} \chi_{[0, 1-h\eta]} df_t^S(\frac{\omega}{1 - h\eta}) df_t^I(\omega^*) \quad (3.16)$$

En la primera integral multiplicamos todo y en la tercera hacemos el mismo cambio de variables  $z = \frac{\omega}{1 - h\eta}$  que en la demostración del lema 3.1.5. Nos queda

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \omega d(f^S(\omega) + f^I(\omega)) = \int_{\omega} \int_{\omega^*} h\eta(1 - \omega\alpha - \omega + \omega^2\alpha) df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.17)$$

$$- \int_{\omega} \int_{\omega^*} \omega^2 \alpha df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.18)$$

$$+ \int_z \int_{\omega^*} z^2 \alpha (1 - h\eta) df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.19)$$

$$= \int_{\omega} \int_{\omega^*} h\eta(1 - \omega\alpha - \omega) df_t^S(\omega) df_t^I(\omega^*) \quad (3.20)$$

Que es equivalente a la siguiente ecuación para el promedio de las opiniones de toda la población

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} \omega d(f^S(\omega) + f^I(\omega)) = h\eta I_t \left( S_t - (1 + \alpha) \int_{\omega} \omega df_t^S(\omega) \right) \quad (3.21)$$

Que es la ecuación 2.7 con las mismas salvedades que para la ecuación 3.13

### 3.3. Aproximación de la ecuación de Boltzmann por una de primer orden

Queremos analizar qué sucede con la ecuación cuando aceleramos el tiempo. Vamos a aplicar la técnica del *grazing limit*, útil para obtener ecuaciones en derivadas parciales cuya solución es el límite de las soluciones obtenidas para la ecuación de Boltzmann para cada  $h$  cuando el parámetro  $h$  tiende a cero. Siguiendo [37] y [49], reescalamos el tiempo llamando  $\tau := ht$  y definimos

$$\begin{aligned} f_h(\tau) &:= f(t), \\ f_h(\tau) &= (f_h^S, f_h^I)(\tau). \end{aligned}$$

Podemos pensar  $f_h$  como mirar a  $f$  en una escala de tiempo mucho más grande. Por ejemplo, si  $h = 0,1$ ,  $f_h$  a tiempo  $\tau = 100$  es mirar  $f$  a tiempo  $t = \tau/h = 1000$ .

$$\begin{aligned} f_{0,1}(100) &= f(1000), \\ f_h(\tau) &= (f_h^S, f_h^I)(\tau). \end{aligned}$$

Si derivamos, obtenemos por regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} f_h(\tau) = \frac{d\tau}{dt} \frac{d}{d\tau} f_h(\tau) = h \frac{d}{d\tau} f_h(\tau).$$

Entonces, para todo  $h > 0$ ,  $f_h(\tau)$  satisface

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\omega} \phi(\omega) f_h^S(\tau) &= \frac{1}{h} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df_{h,\tau}^S(\omega) df_{h,\tau}^S(\omega^*) \right. \\ &\quad + \int_{\omega} \beta \phi(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega) \\ &\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{h,\tau}^S(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad \left. + \int_{\omega} \int_{\omega^*} -\phi(\omega) (\omega\alpha) df_{h,\tau}^S(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega^*) \right) \\ \frac{d}{d\tau} \int_{\omega} \psi(\omega) f_h^I(\tau) &= \frac{1}{h} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) df_{h,\tau}^I(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega^*) \right) \\ &\quad - \int_{\omega} \beta \psi(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega) \\ &\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \alpha \frac{\omega}{1-\eta h} \chi_{[0,1-\eta h]} df_{h,\tau}^S \left( \frac{\omega}{1-\eta h} \right) df_{h,\tau}^I(\omega^*) \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Donde  $\tilde{\alpha} > \alpha$  y  $\tilde{\alpha} - \omega\alpha$  es la probabilidad de que no haya un contagio cuando un sano interactúa con un infectado. Originalmente  $\tilde{\alpha}$  era igual a 1. Hacemos este cambio de notación para poder reescalar las tasas apropiadamente cuando  $h \rightarrow 0$ .

De ahora en más vamos a omitir  $h$  y notamos  $f_{\tau} = f_h(\tau)$ . Empezamos con la ecuación de  $f_{\tau}^S$ . Recordamos el desarrollo de Taylor de la expresión  $\phi(\omega') - \phi(\omega)$ ,

$$\phi(\omega') - \phi(\omega) = \phi_{\omega}(\omega)(\omega' - \omega) + \frac{1}{2} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega})(\omega' - \omega)^2,$$

donde  $\tilde{\omega}$  es un punto entre  $\omega'$  y  $\omega$ .

Cuando la interacción es del tipo susceptible - susceptible,

$$\omega' - \omega = h(\omega^* - \omega).$$

Y para la interacción susceptible - infectado,

$$\omega' - \omega = \eta h(1 - \omega).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) \\ &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) h(\omega^* - \omega) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}_1) h^2(\omega^* - \omega)^2 df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) \\ &= h \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) + h^2 \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}_1) (\omega^* - \omega)^2 df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*), \end{aligned}$$

En el otro término obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\phi(\omega') - \phi(\omega)) (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) \eta h(1 - \omega) (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}_2) \eta^2 h^2 (1 - \omega)^2 (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \end{aligned}$$

Reescribiendo la ecuación 3.22,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} f^S(\tau) &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) \\ &\quad + \frac{\beta}{h} \int_{\omega} \phi(\omega) df_{\tau}^I(\omega) - \frac{\alpha}{h} \int_{\omega} \phi(\omega) \omega I_{\tau} df_{\tau}^S(\omega) \\ &\quad + \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) \eta (1 - \omega) (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad + o(h), \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde  $I_{\tau} = \int_{\omega} df_{\tau}^I(\omega)$  y

$$\begin{aligned} o(h) &= h \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}_1) (\omega^* - \omega)^2 df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^S(\omega^*) \\ &\quad + h \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}_2) (1 - \omega)^2 (\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_{\tau}^S(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*). \end{aligned}$$

Vamos a ver que el término  $o(h)$  converge uniformemente a cero cuando  $h \rightarrow 0$ .

Hacemos el mismo *approach* con la ecuación de  $f_{\tau}^I$ . Esta vez hay un solo término de interacción,

$$\begin{aligned} \psi(\omega') - \psi(\omega) &= \psi_{\omega}(\omega) (\omega' - \omega) + \frac{1}{2} \psi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}) (\omega' - \omega)^2 \\ &= h \psi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) + \frac{h^2}{2} \psi_{\omega\omega}(\tilde{\omega}) (\omega^* - \omega)^2. \end{aligned}$$

Como  $\omega' - \omega = h(\omega^* - \omega)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \int_{\omega^*} (\psi(\omega') - \psi(\omega)) df_{\tau}^I(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) &= h \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi_{\omega}(\omega)(\omega^* - \omega) df_{\tau}^I(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi_{\omega\omega}(\tilde{\omega})(\omega^* - \omega)^2 df_{\tau}^I(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*). \end{aligned}$$

La ecuación para  $f_{\tau}^I$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\omega} \psi(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega) &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi_{\omega}(\omega)(\omega^* - \omega) df_{\tau}^I(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad - \frac{\beta}{h} \int_{\omega} \psi(\omega) df_{\tau}^I(\omega) \\ &\quad + \frac{\alpha}{h} \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \frac{\omega}{1-\eta h} \chi_{[0,1-\eta h]} df_{\tau}^S\left(\frac{\omega}{1-\eta h}\right) df_{\tau}^I(\omega^*) + o(h) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos a usar el teorema de Arzela Ascoli para ver que la familia de funciones  $f_h$  tiene un punto límite.

Consideramos  $X = C^2([0, 1])$ , con la norma

$$\|f\|_{M^+([0,1])} = \sup_{\phi \in X, \|\phi\|=1} \int_{\omega} \phi(\omega) df(\omega). \quad (3.25)$$

Y una norma en  $M^+([0, 1]) \times M^+([0, 1])$

$$\|f\| = \|f_1\|_{M^+([0,1])} + \|f_2\|_{M^+([0,1])}. \quad (3.26)$$

Está claro que la familia de funciones  $\{f_{h,\tau}\}_h$  es equiacotada ya que cada  $f_h = (f_h^S, f_h^I)$  satisface que  $f_h^S + f_h^I$  es una medida de probabilidad en el  $[0, 1]$  y, por lo tanto, está acotada por 1 en la norma que acabamos de definir. En efecto, para todo  $h$ ,

$$\|f_{h,\tau}\| = \sup_{\phi \in X, \|\phi\|=1} \int_{\omega} \phi(\omega) df_{h,\tau}^S(\omega) + \sup_{\phi \in X, \|\phi\|=1} \int_{\omega} \phi(\omega) df_{h,\tau}^I(\omega) \leq \int_{\omega} df_{h,\tau}^S(\omega) + \int_{\omega} df_{h,\tau}^I(\omega) \leq 1$$

Veamos ahora que la familia  $\{f_h\}_h$  es equicontinua.

Dados  $h$ ,  $\tau$  y  $\tau'$ , buscamos una cota de la forma

$$\|f_h(\tau) - f_h(\tau')\| < K(\tau - \tau')$$

Para alguna constante  $K$  que no depende de  $h$ .

Vamos a buscar cotas para cada integral de las ecuaciones 3.22.

Tengamos en cuenta que  $f^S$  y  $f^I$  son medidas que pueden no ser de probabilidad, tienen masa menor o igual que 1. Tengamos también en cuenta que como son medidas positivas en el  $[0, 1]$ , tienen su primer momento más chico que 1. También tomamos  $\phi$  y  $\psi$  de manera que ellas y sus derivadas estén acotadas por 1.

Entonces:

- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) df_s^S(\omega) df_s^S(\omega^*) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau')2,$
- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \frac{\beta}{h} \int_{\omega} \phi(\omega) df_s^I(\omega) - \frac{\alpha}{h} \int_{\omega} \phi(\omega) \omega I_s df_s^S(\omega) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau') \left( \frac{\beta}{h} + \frac{\alpha}{h} \right),$

- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) \eta(1-\omega)(\tilde{\alpha} - \omega\alpha) df_s^S(\omega) df_s^I(\omega^*) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau')\tilde{\alpha},$
- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} o(h) ds \right| \leq (\tau - \tau')h.$

Acotamos de la misma manera la ecuación de  $f^I$ . Observamos que si  $h\eta < 1/2$ , entonces  $\frac{\omega}{1-\eta h} < 2$ .

- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi_{\omega}(\omega)(\omega^* - \omega) df_s^I(\omega) df_s^I(\omega^*) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau')2,$
- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \frac{\beta}{h} \int_{\omega} \psi(\omega) df_s^I(\omega) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau')\frac{\beta}{h},$
- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} \left( \frac{\alpha}{h} \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \frac{\omega}{1-\eta h} \chi_{[0,1-\eta h]} df_s^S\left(\frac{\omega}{1-\eta h}\right) df_s^I(\omega^*) \right) ds \right| \leq (\tau - \tau')\frac{\alpha}{h}2,$
- $\left| \int_{\tau'}^{\tau} o(h) ds \right| \leq (\tau - \tau')h.$

Ahora, recordemos que hemos rescalado el tiempo, con lo cual también deben rescalarse las tasas de contagio y recuperación  $\alpha$ ,  $\tilde{\alpha}$  y  $\beta$ . Tomando límite  $\frac{\beta}{h} \rightarrow \beta^*$ ,  $\frac{\alpha}{h} \rightarrow \alpha^* < 1$  y  $\frac{\tilde{\alpha}}{h} \rightarrow \tilde{\alpha}^* = 1$ , tenemos la siguiente cota para todo  $h < 1/2\eta$  y todos  $\tau, \tau' \in [0, +\infty)$ ,

$$\|f_{h,\tau} - f_{h,\tau'}\| = \|f_{h,\tau}^S - f_{h,\tau'}^S\|_M + \|f_{h,\tau}^I - f_{h,\tau'}^I\|_M \leq K_0(\tau - \tau'), \quad (3.27)$$

para alguna constante apropiada  $K_0$  que va a ser el máximo de todas las cotas encontradas anteriormente.

Por el Teorema de Arzela-Ascoli, junto a un argumento diagonal, existe una sucesión  $\{h_n\}$  tal que  $h_n \rightarrow 0$  y  $f_{h_n} \rightarrow g$  en  $C([0, T], M \times M)$  para cualquier  $T > 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\omega} \phi(\omega) dg_{\tau}^S(\omega) &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \phi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) dg_{\tau}^S(\omega) dg_{\tau}^S(\omega^*) \\ &\quad + \beta^* \int_{\omega} \phi(\omega) dg_{\tau}^I(\omega) - \alpha^* \int_{\omega} \phi(\omega) \omega I_{\tau} dg_{\tau}^S(\omega) \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_{\omega} \psi(\omega) dg_{\tau}^I(\omega) &= \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi_{\omega}(\omega) (\omega^* - \omega) dg_{\tau}^I(\omega) df_{\tau}^I(\omega^*) \\ &\quad - \beta^* \int_{\omega} \psi(\omega) dg_{\tau}^I(\omega) + \alpha^* \int_{\omega} \int_{\omega^*} \psi(\omega) \omega dg_{\tau}^S(\omega) dg_{\tau}^I(\omega^*). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones corresponden a la formulación débil de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} g_{\tau}^S(\omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ g_{\tau}^S(\omega) \left( S_{\tau} \omega - \int_{\omega^*} \omega^* g_{\tau}^S(\omega^*) d\omega^* \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta^* g_{\tau}^I(\omega) - \alpha^* \omega I_{\tau} g_{\tau}^S(\omega) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \tau} g_{\tau}^I(\omega) &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ g_{\tau}^I(\omega) \left( I_{\tau} \omega - \int_{\omega^*} \omega^* g_{\tau}^I(\omega^*) d\omega^* \right) \right. \\ &\quad \left. - \beta^* g_{\tau}^I(\omega) + \alpha^* I_{\tau} \omega g_{\tau}^S(\omega) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $(f_{\tau}^S, f_{\tau}^I)$  un dato inicial con  $f^S$  y  $f^I \in M^+([0, 1])$  cuya suma es una medida de probabilidad. Sea  $f$  la solución que nos da el teorema 3.1.1. Definimos el rescale  $f_h(\tau) := f(t)$  con  $\tau = ht$  y sucesiones de parámetros  $\{\alpha_h\}_h, \{\tilde{\alpha}_h\}_h, \{\beta_h\}_h$  que cumplen  $\alpha_h \rightarrow \alpha^*$ ,  $\tilde{\alpha}_h \rightarrow \tilde{\alpha}^*$  y  $\beta_h \rightarrow \beta^*$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Entonces, a lo sumo tomando subsucesiones, vale que  $f_h \rightarrow g$ . Donde  $g \in C([0, T], M^+([0, 1]) \times M^+([0, 1]))$  y es solución de 3.28 para toda  $\phi \in C^1([0, 1])$ .*



# Capítulo 4

## Un nuevo agente: El gobierno

En este capítulo estudiamos un modelo SIS con tasas de infección individuales para cada agente más cercano al de [21]. Cada agente tiene un nivel de información o consciencia que determinará la probabilidad que tiene de contagiarse al interactuar con un infectado, como antes, sólo que es un número mayor a cero. Consideramos un nuevo agente, el gobierno, que tiene la intención de erradicar la enfermedad. Para ello, emite un mensaje de concientización que modifica el nivel de los agentes. Primero planteamos y analizamos el modelo de agentes que sólo interactúan con el gobierno, luego añadimos la interacción de los agentes entre ellos como en los capítulos anteriores, y añadimos agentes tercios ó *cabezaduras* que no modifican su nivel de cuidado pero argumentan con los demás agentes tratando de imponer su nivel.

### 4.1. Descripción del modelo, aproximación de campo medio, y análisis de la dinámica

#### 4.1.1. Descripción del modelo

Consideramos una población de  $N$  agentes con una dinámica de dispersión enfermedad modelada por un SIS. El contagio y la recuperación de agentes ocurre siguiendo un proceso de Poisson y tienen tasas  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente.

Introducimos nuestro modelo. Al igual que antes, cada agente está caracterizado por un par  $(s_i, a_i)$  donde  $s_i \in \{S, I\}$  es el estado de salud y  $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  es el nivel de consciencia, o información, o *awareness*, que modela el conocimiento que tiene el agente sobre la enfermedad. Un agente con un nivel bajo  $a \simeq 0$  se cuida poco. Un agente que está más informado y toma todas las precauciones necesarias para evitar contagiarse tiene un nivel alto  $a \gg 0$ . Su valor se traduce en la probabilidad de contagio de la siguiente manera: en un intervalo de tiempo  $dt$ , un agente susceptible con nivel de awareness  $a$  interactúa con un agente infectado y se enferma con probabilidad  $\alpha e^{-a} dt$ .

Si notamos  $a_1, \dots, a_N$  el nivel de cada uno de los  $N$  agentes de la población, la nueva ecuación para  $I$  queda

$$\frac{d}{d\tau} I = \alpha \langle e^{-a} \rangle I(1 - I) - \beta I, \quad (4.1)$$

donde  $\langle e^{-a} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{-a_i}$  es el promedio de  $e^{-a}$  sobre la población a tiempo  $t$ .

Asumimos que  $a_1, \dots, a_N$  cambian en el tiempo por la influencia de políticas públicas, e introducimos un nuevo agente, el gobierno, que tiene como objetivo erradicar la enfermedad en la población. Para ello, manda un mensaje  $W(t)$  a toda la población con la intención de llevar el nivel de los agentes a un cierto valor  $a^*$  alto. Para determinar  $a^*$ , recordemos que para el SIS clásico, teníamos que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$  si y solo si el valor básico de reproducción  $R_0 := \alpha/\beta$  es menor o igual que 1. Luego, si los agentes tienen nivel  $a_i = a^*$  para todo  $i$ , entonces el nuevo valor básico de reproducción de (4.1) es  $\alpha e^{-a^*}/\beta$ . El umbral para la extinción de la enfermedad pasa a ser  $\alpha e^{-a^*}/\beta = 1$ . Es decir

$$a^* = \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right). \quad (4.2)$$

Desde el punto de vista matemático, le es conveniente al gobierno llevar el nivel de la población a un valor estrictamente mayor que  $a^*$  cuando  $\alpha > \beta$ , por ejemplo  $a_\delta^* := a^* + \delta$  para algún  $\delta > 0$ . Cuando  $\alpha < \beta$ , tomamos  $\delta$  de manera que  $a_\delta^* = a^*$ .

Modelamos la evolución del mensaje del gobierno  $W(t)$  con la ecuación

$$W'(t) = W(t)\left(\rho I(t) + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle_t) + \eta(a_\delta^* - W(t))\right), \quad (4.3)$$

donde  $\rho, \sigma, \eta, \delta > 0$  están fijos, y  $\langle a \rangle_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i(t)$  es el promedio de los niveles de la población a tiempo  $t$ . La tasa de cambio del mensaje del gobierno depende de tres cosas:

- La cantidad de infectados  $\rho I(t)$ ,
- la diferencia entre el valor deseado y el promedio de awareness de la población  $a_\delta^* - \langle a \rangle_t$ , y
- la diferencia entre el valor deseado y el mensaje actual del gobierno  $a_\delta^* - W(t)$

Asumimos que las interacciones de los agentes con el gobierno ocurren con tasa 1. Luego de una interacción, el agente  $i$  está dispuesto a cambiar su conducta y actualiza su nivel de la siguiente manera.

$$a_i(t + dt) = a_i(t) + \xi dt(W(t) - a_i(t))$$

donde  $\xi > 0$  modela la predisposición de los agentes a seguir el mensaje. Observemos que cuando  $a_i > W$ ,  $a_i$  decrece para acercarse a  $W$ , el agente  $i$  está relajando sus conductas.

Para la simulación del modelo de agentes utilizamos el Algoritmo 1. Notamos  $s_i \in \{0, 1\}$  el estado de los agentes,  $s_i = 1$  si infectado,  $s_i = 0$  si no. Aquí, *rand* denota un

número elegido con una variable aleatoria con distribución uniforme en  $[0, 1]$ .

---

**Algorithm 1:** Dinámica basada en agentes
 

---

**Data:** paso temporal  $d\tau$ , cantidad de pasos  $N_\tau$ ,  
 parámetros del modelo  $\alpha, \beta, \delta, \xi, \rho, \sigma, \eta$ .  
**Result:**  $a_1, \dots, a_N, s_1, \dots, s_N, W$  a tiempo  $kd\tau, k = 0, 1, \dots, N_\tau$ .  
 inicializamos  $a_1, \dots, a_N, s_1, \dots, s_N, W$ .  
**for**  $\tau \leftarrow 1$  **to**  $N_\tau$  **do**  
   **for**  $k \leftarrow 1$  **to**  $N$  **do**  
     elegimos  $i$  al azar para interactuar con el gobierno.  
      $a'_i = a_i + \xi d\tau(W - a_i)$ ;  
     elegimos  $i$  y  $j$  al azar para interactuar entre ellos.  
     **if**  $s_i = 0$  **and**  $s_j = 1$  **and**  $rand < \alpha e^{-a_i} d\tau$  **then**  
        $s'_i = 1$   
     elegimos  $i$  al azar para una posible recuperación.  
     **if**  $s_i = 1$  **and**  $rand < \beta d\tau$  **then**  
        $s'_i = 0$ ;  
     Actualizamos  
   Actualizamos  $a_1, \dots, a_N, s_1, \dots, s_N$ .  
   Calculamos  $\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_i a_i, I = \frac{1}{N} \sum_i s_i$ , and  
    $W \leftarrow W + d\tau W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W))$

---

En la figura 4.1.1 presentamos simulaciones de esta dinámica con parámetros

$$\alpha = 0,7, \quad \beta = 0,1, \quad \xi = \rho = \sigma = \eta = 0,1, \quad d\tau = 0,1, \quad \delta = 0,01, \quad (4.4)$$

e inicializamos el mensaje del gobierno como  $W(0) = 0,01$ ; y los niveles los elegimos uniformemente en el intervalo  $[0, 1]$  de manera independiente. Consideramos dos proporciones iniciales de los agentes infectados: 0,9 y 0,2, panel superior e inferior respectivamente. Notemos que  $\alpha > \beta$  de manera que la epidemia persiste en el SIS clásico, pero con la acción del gobierno, podemos observar que la epidemia se extingue en nuestro modelo.

#### 4.1.2. Ecuaciones de campo medio para poblaciones grandes

Queremos obtener ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento de la proporción de agentes infectados  $I$ , el mensaje del gobierno  $W$  y los niveles de consciencia  $a_1, \dots, a_N$ , de acuerdo a la actualización en el Algoritmo 1.

El mensaje del gobierno es el más sencillo ya que  $W \leftarrow W + d\tau W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W))$  nos da

$$\frac{d}{d\tau} W = W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W))$$

en el límite  $d\tau \rightarrow 0$ .

Respecto al nivel de los agentes, tenemos que para un pequeño intervalo de tiempo  $dt \ll 1$ , cada agente tiene probabilidad  $1/N$  de estar en una interacción cuando esta ocurre. El cambio esperado en el nivel del agente  $i$  es

$$a_i(t + dt) \simeq a_i(t) + \frac{dt}{N} \xi(W(t) - a_i(t)). \quad (4.5)$$

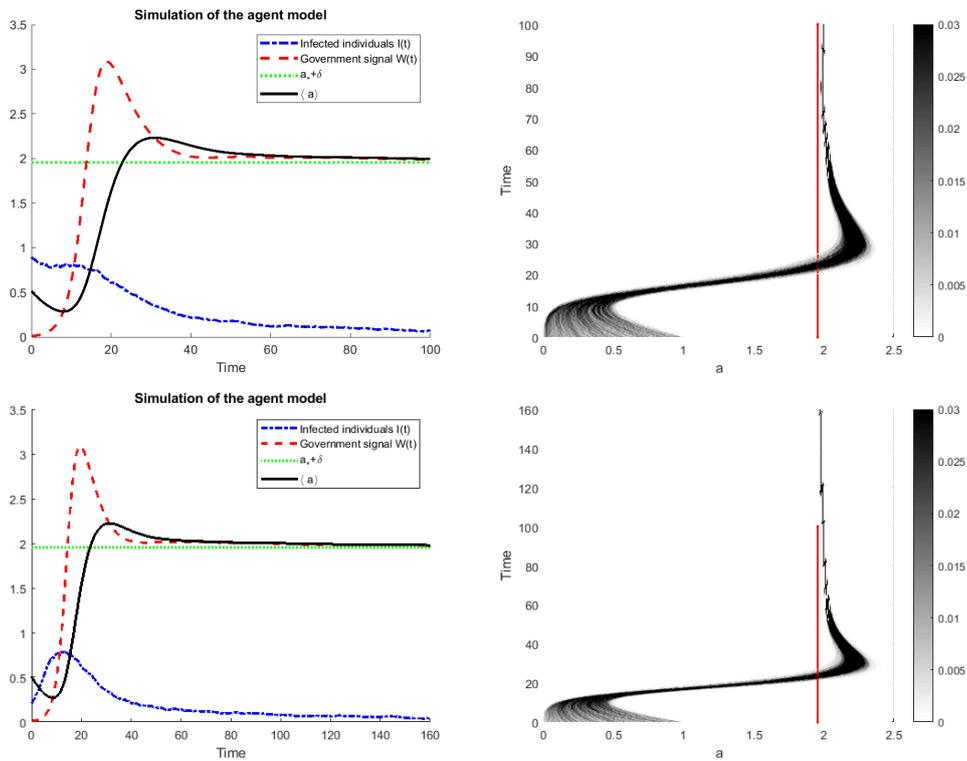


Figura 4.1: A izquierda: La evolución de la proporción  $I(t)$  de agentes infectados, el mensaje del gobierno  $W(t)$ , el promedio de los niveles  $\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_i a_i$ , y  $a_\delta^*$ . Los parámetros solo difieren en la proporción inicial de infectados. 0,9 arriba y 0,2 abajo. A derecha: La evolución en el tiempo de la distribución de niveles  $a_1, \dots, a_N$ . La línea roja vertical es el valor  $a = a_\delta^*$ .

En un intervalo chico  $[t, t + dt]$  hay un contagio con probabilidad

$$\sum_{i \text{ sus}} \frac{1}{N} \sum_{j \text{ inf}} \frac{1}{N-1} \alpha e^{-a_i(t)} dt \simeq \alpha dt I(t) \frac{1}{N} \sum_{i \text{ sus}} e^{-a_i(t)}.$$

Si multiplicamos y dividimos por  $N_S$ , la cantidad de agentes susceptibles, tenemos que  $N_S/N = 1 - I$ . Luego, la probabilidad de contagio es aproximadamente

$$\alpha dt I(t)(1 - I(t)) \frac{1}{N_S} \sum_{i \text{ sus}} e^{-a_i(t)}.$$

Por otro lado, la probabilidad de que haya una recuperación es  $\sum_{i \text{ inf}} \frac{1}{N} \beta dt = I(t) \beta dt$ . Entonces,

$$I(t + dt) \simeq I(t) + \frac{dt}{N} \left\{ \alpha I(t)(1 - I(t)) \frac{1}{N_S} \sum_{i \text{ sus}} e^{-a_i(t)} - \beta I(t) \right\}. \quad (4.6)$$

Notemos que las variables aleatorias

$$\langle e^{-a} \rangle_{t=0}^{Sus} := \frac{1}{N_S} \sum_{i \text{ sus}} e^{-a_i(0)}, \quad \langle e^{-a} \rangle_{t=0} := \frac{1}{N} \sum_{i=1, \dots, N} e^{-a_i(0)}$$

tienen la misma distribución ya que  $a_1(0), \dots, a_N(0)$  son independientes e idénticamente distribuidas. Mas aún, la regla que actualiza  $a_i$  no diferencia entre infectados o susceptibles, con lo cual es razonable reemplazar el promedio del nivel de esfuerzo de los susceptibles  $\langle e^{-a} \rangle^{Sus}$  por el promedio del nivel de esfuerzo de toda la población  $\langle e^{-a} \rangle$ . Mostramos en la Figura 4.1.2 la evolución en el tiempo de  $\log(|\langle e^{-a} \rangle^{Sus} - \langle e^{-a} \rangle|)$  para una simulación. Se aprecia que  $\langle e^{-a} \rangle^{Sus} \simeq \langle e^{-a} \rangle$ . Obtenemos entonces

$$I(t + dt) \simeq I(t) + \frac{dt}{N} \left\{ \alpha \langle e^{-a} \rangle I(t)(1 - I(t)) - \beta I(t) \right\} \quad (4.7)$$

que es la ecuación (4.1) que usamos para determinar  $a^*$ .

Teniendo en cuenta el factor  $\frac{dt}{N}$  en las ecuaciones (4.5) y (4.7), es natural reescalar el tiempo considerando  $\tau := t/N$  de manera que  $d\tau = \frac{dt}{N}$  (esto explica la notación  $\tau$  usada en el algoritmo 1).

Obtenemos entonces en el límite  $d\tau \rightarrow 0$  que  $a_1, \dots, a_N, I, W$  verifica el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} I = \langle e^{-a} \rangle \alpha I(1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} a_i = \xi(W - a_i) & i = 1, \dots, N, \\ \frac{d}{d\tau} W = W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W)). \end{cases} \quad (4.8)$$

Mostramos en la figura 4.3 la resolución numérica de este sistema para los mismos parámetros y condiciones iniciales usadas anteriormente en 4.1.1. Notemos que ambas figuras son casi indistinguibles, confirmando que el sistema de campo medio (4.8) captura adecuadamente la evolución del modelo discreto de agentes.

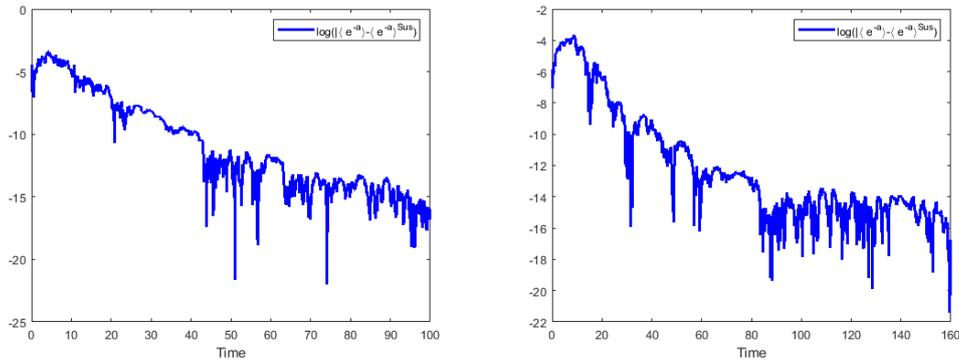


Figura 4.2: Evolución en el tiempo del logaritmo del valor absoluto de la diferencia entre el promedio  $\langle e^{-a} \rangle$  calculado sobre toda la población y el promedio  $\langle e^{-a} \rangle^{Sus}$  calculado sobre la población susceptible. Los parámetros para ambos gráficos están en (4.4) y la proporción inicial de infectados es 0,9 (Izquierda) y 0,2 (Derecha).

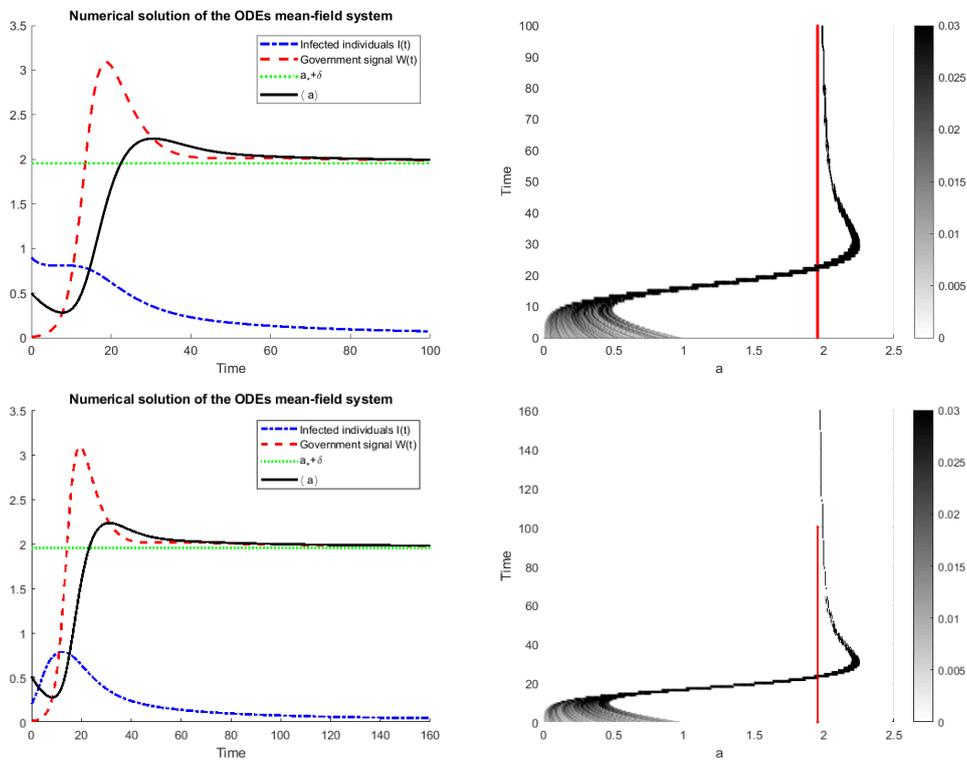


Figura 4.3: Resolución numérica del sistema (4.8) con los mismos parámetros y condición inicial que en la Figura 4.1.1

### 4.1.3. Resultados analíticos

De ahora más, notaremos  $t$  para  $\tau$ .

Consideremos una condición inicial  $a_1(0), \dots, a_N(0) \geq 0$ ,  $W(0) \geq 0$ , e  $I(0) \in [0, 1]$ . El sistema (4.8) tiene una única solución  $a_1(t), \dots, a_N(t), W(t), I(t)$  definida en un intervalo abierto maximal  $J \ni 0$ . Mas aún, es fácil ver que  $W(t) \geq 0$  e  $I(t) \in [0, 1]$  para todo  $t \in J$ .

Como

$$\frac{d}{dt}W \leq \eta W(A - W), \quad A = \frac{\rho}{\eta} + (1 + \frac{\sigma}{\eta})a_\delta^*$$

vemos que  $W(t) \leq \max\{W(0), A\}$ . Luego, la solución  $(a_1(t), \dots, a_N(t), W(t), I(t))$  permanece acotada de manera tal que  $J = \mathbb{R}$ . Es decir, la solución existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Nos interesa el comportamiento de la solución  $a_1(t), \dots, a_N(t), W(t), I(t)$  a largo plazo.

El caso  $\alpha < \beta$  es sencillo ya que  $I$  puede ser controlada por la dinámica propia del modelo SIS clásico. Por lo tanto,  $I(t) \rightarrow 0$ . No hace falta intervención del gobierno.  $W(t) \rightarrow 0$ , y luego  $a_i(t) \rightarrow 0$ .

**Teorema 4.1.1.** *Supongamos que  $\alpha < \beta$ . Entonces cuando  $t \rightarrow +\infty$ ,*

$$a_1(t), \dots, a_N(t) \rightarrow 0, \quad W(t) \rightarrow 0, \quad I(t) \rightarrow 0.$$

*Demostración.* Como  $\langle e^{-\alpha} \rangle_t^S \leq 1$ , tenemos

$$I'(t) \leq \alpha I(t)(1 - I(t)) - \beta I(t)$$

De manera que  $I(t) \leq I_{sis}(t)$  donde  $I_{sis}$  es solución del modelo SIS clásico.

$$I'_{sis}(t) = \alpha I_{sis}(1 - I_{sis}) - \beta I_{sis}, \quad I_{sis}(0) = I(0).$$

Ya que  $\alpha < \beta$ ,  $I_{sis}(t) \rightarrow 0$ . Entonces  $I(t) \leq I_{sis}(t) \rightarrow 0$ .

Sea  $\varepsilon(t) := \rho I(t)$  y observando que  $a_\delta^* = a^* < 0$  (ya que  $\alpha < \beta$ ), tenemos

$$W'(t) \leq W(t)(\varepsilon(t) - \xi W(t)).$$

Se sigue que  $W(t) \rightarrow 0$ . En efecto, en otro caso existiría  $\delta > 0$  y una sucesión  $t_k \uparrow +\infty$  tal que  $W'(t_k) = 0$  y  $W(t_k) \geq \delta$ . Luego,

$$0 = W'(t_k) \leq W(t_k)(\varepsilon(t_k) - \xi W(t_k)) \leq W(t_k)(\varepsilon(t_k) - \xi \delta)$$

de manera que  $0 \leq \varepsilon(t_k) - \xi \delta$  y el lado derecho de la ecuación es negativo para  $k \gg 1$ , una contradicción. Un argumento similar muestra que  $a_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ , y la demostración queda terminada. □

El caso  $\alpha > \beta$  es bastante más interesante ya que el gobierno actúa para controlar la dispersión de la enfermedad. Lo primero que hacemos es caracterizar el equilibrio.

**Proposición 4.1.1.** Para cualquier  $\alpha > \beta$  y  $\delta > 0$ , los equilibrios de (4.8) son los equilibrios todos-sanos

$$(0, \dots, 0) \quad \text{y} \quad (0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*),$$

y el equilibrio

$$\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0\right).$$

*Demostración.* La demostración es directa. En efecto, (4.8) brinda  $a_1 = \dots = a_N = W$  de manera que nos queda por resolver

$$\begin{aligned} I\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}e^W - I\right) &= 0, \\ W\left(\rho I + (\sigma + \eta)(a_\delta^* - W)\right) &= 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Si  $W = 0$ , obtenemos  $I = 0$  ó  $I = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$  brindando el equilibrio  $(0, \dots, 0)$  y  $\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0\right)$ . Si  $W \neq 0$  entonces  $\rho I + (\sigma + \eta)(a_\delta^* - W) = 0$ . Si  $I = 0$  obtenemos el tercer equilibrio  $(0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*)$ . Si  $I \neq 0$  obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\beta}{\alpha}e^W &= I, \\ \rho I + (\sigma + \eta)(a_\delta^* - W) &= 0. \end{aligned}$$

Si  $\delta \geq 0$ , entonces este sistema no tiene solución. De hecho, como  $I > 0$  debe suceder que  $a_\delta^* - W < 0$  i.e.  $e^W > e^{\delta \frac{\alpha}{\beta}}$ , tal que  $1 > 1 - I = \frac{\beta}{\alpha}e^W > e^\delta$ , que implica  $\delta < 0$ .  $\square$

Teniendo en cuenta las simulaciones numéricas de la sección anterior, conjeturamos que cuando  $\delta > 0$  entonces cualquier solución con  $W(0) > 0$  converge al equilibrio todos sanos  $P := (0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*, a_\delta^*)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Desafortunadamente, no pudimos probar esta convergencia. Sin embargo, el análisis de estabilidad para el sistema linealizado muestra que  $P$  es el único equilibrio que es localmente asintóticamente estable cuando  $\delta > 0$ .

Para lo que sigue, seguimos asumiendo que  $\alpha > \beta$ .

**Teorema 4.1.2.** Los equilibrios  $(0, \dots, 0)$  y  $\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0\right)$  son inestables. Mas aún, si llamamos  $A$  la matriz que viene de linealizar (4.8) en un entorno del equilibrio con todos susceptibles,  $P := (0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*, a_\delta^*)$ , entonces existe una constante  $C > 0$  independiente de  $N$  tal que para cualquier  $N$  los autovalores de  $A$  pertenecen a  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < -C\}$ .

En particular, tenemos que  $P$  es localmente asintóticamente estable para todo  $\delta > 0$  y  $N \geq 1$ .

*Demostración.* Ver el Apéndice B.  $\square$

**Observación 4.1.1.** Cuando  $\delta < 0$ , los equilibrios del sistema son cuatro. Los tres del teorema anterior, que son inestables, y un cuarto equilibrio  $(i^*, w^*, \dots, w^*)$  donde  $(i^*, w^*)$  es la única solución del sistema

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\beta}{\alpha}e^W &= I, \\ \rho I + (\sigma + \eta)(a_\delta^* - W) &= 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

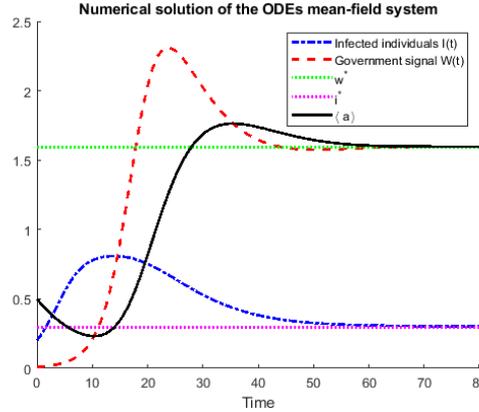


Figura 4.4: Resolución numérica del sistema (4.8) con los mismos parámetros y condición inicial que en la figura 4.1.1 pero con  $\delta = -0,5$ . Las líneas horizontales indican la solución  $(i^*, w^*)$  de (4.10).

En efecto, si  $\delta < 0$ , el sistema (4.10) tiene una única solución ya que la función

$$f(i) := \rho i + (\sigma + \eta) \left( a_\delta^* - \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} (1 - i) \right) \right)$$

es creciente con  $f(0) < 0$  y  $f(1 - \beta/\alpha) > 0$ . Entonces existe un único  $i^*$  tal que  $f(i^*) = 0$  e  $i^* \in (0, 1 - \beta/\alpha)$ . En particular  $w^* = \ln \left( \frac{\alpha}{\beta} (1 - i^*) \right) > 0$ . Notemos que  $(i^*, w^*) \in (0, 1 - \beta/\alpha) \times (0, +\infty)$ .

Conjeturamos que este equilibrio es asintóticamente estable como ilustra la figura 4.4 en la que mostramos una corrida de la dinámica con parámetros (4.4)  $\delta = -0,01$ ,  $I(0) = 0,2$ ,  $W(0) = 0,01$ . Recordemos que  $1 - \beta/\alpha$  es la proporción límite de infectados en el SIS clásico. Como  $i^* < 1 - \beta/\alpha$  podemos ver el éxito de la acción del gobierno en reducir esta proporción límite.

Si suponemos que la dinámica social es más rápida que la dinámica de la enfermedad, es decir  $\xi \gg 1$ , entonces en la práctica tenemos  $a_i = W$  para todo  $i = 1, \dots, N$  en (4.8) de manera que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \langle e^{-W} \rangle \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} W &= W \left( \rho I + (\sigma + \eta) (a_\delta^* - W) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Probemos que:

**Proposición 4.1.2.** Para toda condición inicial  $(W_0, I_0)$  con  $W_0 > 0$  y  $I_0 \in (0, 1]$ , la solución correspondiente  $(W(t), I(t))$  de (4.11) converge a  $(a_\delta^*, 0)$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Dividimos el cuadrante  $Q := \{(W, I), W > 0, I > 0\}$  en tres zonas I, II, III definidas por

$$\begin{aligned} I &= \{(W, I) \in Q : \langle e^{-W} \rangle \alpha (1 - I) - \beta > 0\}, \\ III &= \{(W, I) \in Q : \rho I + (\sigma + \eta) (a_\delta^* - W) < 0\}, \\ II &= Q \setminus (I \cup III). \end{aligned}$$

Notemos que el campo vectorial que define el lado derecho de la ecuación (4.11) apunta hacia el interior de III en la línea  $\{(W, I) \in Q : \rho I + (\sigma + \eta)(a_\delta^* - W) = 0\}$ . Entonces III es invariante. En III una solución  $(W(t), I(t))$  verifica  $I' > 0$ ,  $W' < 0$  con  $I > 0$ ,  $W > a_\delta^*$ , tal que el límite  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (W(t), I(t))$  tiene que existir. Este límite tiene que ser un equilibrio dentro de III, es decir,  $(a_\delta^*, 0)$ .

Por otro lado, es fácil ver que si una solución empieza en I, debe pasar por II en tiempo finito. Si pasa a III entonces ya está. En otro caso, si se queda en II por un tiempo  $t \gg 1$ , entonces, como  $I' < 0$  y  $W' > 0$  debe converger al único equilibrio en II que es  $(a_\delta^*, 0)$ .  $\square$

## 4.2. Modelo con agentes heterogéneos en su predisposición a cambiar de conducta

Hasta ahora siempre asumimos que todos los agentes estaban igualmente predisuestos a seguir las recomendaciones del gobierno. Pero ya sabemos que no todos los agentes responden de la misma manera a las políticas públicas. Demás está nombrar los ejemplos de marchas y actos en contra de las medidas de prevención y campaña de vacunación en contra del Covid-19 que ocurrieron y siguen ocurriendo.

Vamos a modelar este fenómeno agregando un nuevo parámetro  $q \in [0, 1]$  a cada agente que representará la volatilidad o predisposición de un agente a cambiar su postura. Cuando un agente con nivel de información  $a$  y predisposición  $q$  interactúa con el gobierno a tiempo  $t$ , su nivel se actualiza a

$$a \rightarrow a + q\xi(W(t) - a). \quad (4.12)$$

Notemos que un agente con  $q = 0$  no se mueve nunca de su nivel  $a$ . A estos agentes los llamaremos tercios ya que no responden nunca al mensaje del gobierno.

Además, recuperamos la dinámica de interacción social de los capítulos anteriores. Asumimos que habrá interacciones entre dos agentes con la misma tasa que la de las interacciones con el gobierno. Cuando el agente  $i$  con parámetros  $(a_i, q_i)$  interactúa con otro agente  $j$  con parámetros  $(a_j, q_j)$ , su nuevo nivel de información será

$$a'_i = a_i + q_i \kappa (a_j - a_i), \quad (4.13)$$

Notemos que el nivel de predisposición  $q$  no cambia en la interacción. Si el agente era tercio, es decir  $q = 0$ , entonces no cambiará su nivel de información. Acá  $\kappa$  es el parámetro que regula la intensidad de la interacción, que antes habíamos llamado  $h$ .

Deducimos las ecuaciones de campo medio correspondientes con estas nuevas reglas.

$$\begin{aligned} a_i(t + dt) &\simeq a_i(t) + \frac{dt}{N} q_i \left\{ \xi(W(t) - a_i(t)) + \sum_j \frac{1}{N-1} \kappa (a_j(t) - a_i(t)) \right\} \\ &\simeq a_i(t) + \frac{dt}{N} q_i \left\{ \xi(W(t) - a_i(t)) + \kappa (\langle a \rangle_t - a_i(t)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Las ecuaciones para  $I$  y  $W$  son las mismas que antes. Obtenemos entonces el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}I = \langle e^{-a} \rangle \alpha I(1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau}a_i = q_i \{ \xi(W(t) - a_i(t)) + \kappa(\langle a \rangle_t - a_i(t)) \} & i = 1, \dots, N, \\ \frac{d}{d\tau}W = W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W)). \end{cases} \quad (4.15)$$

Vamos a profundizar el estudio de este sistema en el siguiente capítulo. Vamos a reescribirlo de una manera más compacta reemplazando las  $N$  ecuaciones de  $\frac{d}{d\tau}a_i$  por una única ecuación cinética de tipo Boltzmann similar a la que teníamos en el capítulo anterior, sólo que ahora la ecuación estará acoplada dos ecuaciones diferenciales ordinarias. En el resto de la sección haremos un análisis de una población simplificada donde hay solamente dos tipos de agentes, los tercios y los agentes con  $q = 1$ .

### 4.2.1. Un caso simplificado

Vamos a estudiar este modelo en un caso particular. Los agentes tienen solamente dos posibles valores de  $q$ . O bien son tercios y tienen  $q = 0$  y  $a = 0$ , o bien tienen  $q = 1$  y actualizan su nivel de información con la dinámica. Vamos a tener una parte de la población que no toma ninguna medida preventiva que a la vez va a debilitar el cuidado del resto al interactuar y actualizar el nivel de los demás. Queremos estudiar el impacto de la proporción de estos agentes en la propagación de la enfermedad. Además, la infección depende del nivel de consciencia de ambos agentes, no sólo del susceptible.

Vamos a ver que la población que no se cuida puede hacer que la enfermedad persista, aún cuando el resto de la población se cuida lo más posible. Nuestra población de  $N$  agentes ahora está dividida en dos tipos, consideramos que una proporción  $A_v \in [0, 1]$  de los agentes tienen su nivel de consciencia o información fijada en  $a = 0$  y su predisposición fijada en  $q = 0$ .

Tanto para las interacciones sociales como para la interacción con el gobierno, asumimos que el nivel  $a_i$  del agente  $i$  se actualiza en el tiempo como

$$a_i' = -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}),$$

donde  $\bar{a}$  es el nivel promedio de la población.

**Observación 5.** *El valor del nivel medio de la población  $\bar{a}$  depende solo de los agentes comunes, es decir, los agentes cuyo nivel no está fijado en cero,*

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i}{N} = \frac{\sum_{i \in AV} a_i}{N} + \frac{\sum_{i \notin AV} a_i}{N} = 0 + \frac{\sum_{i \notin AV} a_i}{N - |AV|} \frac{N - |AV|}{N} = \bar{a}_c(1 - A_v).$$

*La conclusión es que podemos describir el promedio real del nivel de consciencia de la población conociendo solamente el promedio de los agentes comunes y la proporción de tercios.*

La nueva ecuación entonces queda,

$$\begin{cases} I'_c = \alpha I_c S_c \tilde{a}^2 + \alpha I_{A_v} S_c \tilde{a} - \beta I_c \\ I'_{A_v} = \alpha I_c S_{A_v} \tilde{a} + \alpha I_{A_v} S_{A_v} - \beta I_{A_v} \\ a'_i = -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}_c(1 - A_v)) \\ W' = W(\rho(I_c + I_{A_v}) + \sigma(a_\delta^* - \bar{a}) + \eta(a_\delta^* - W)), \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N \quad (4.16)$$

donde  $I_c$  es la proporción de agentes comunes infectados,  $I_{A_v}$  es la proporción de agentes tercos infectados, y  $\tilde{a} = \langle e^{-a_c} \rangle$ .

**Observación 6.** *Sin cambios en el mensaje del gobierno, una pequeña población de agentes tercos puede ser suficiente para llevar el sistema a un equilibrio endémico. Esto sucede aún cuando en el modelo anterior la población convergía a un equilibrio sin enfermedad  $I = 0$  cuando no hay agentes tercos, es decir, en los casos donde el teorema 4.1.2 nos garantizaba que la población convergía a un equilibrio todos sanos.*

Hay un nuevo valor de consciencia deseado, que llamaremos  $w^*$ , al cual el gobierno puede apuntar a llevar el nivel de esfuerzo de los agentes comunes. Si todos los agentes comunes tienen este nivel  $w^*$ , la epidemia se extinguirá. Como la media de toda la población es disminuida por la interacción con los tercos, el mensaje que manda el gobierno  $W = w^*$  tendrá que ser aún mayor ( $w^* > a^*$ ).

Supongamos que estamos en un punto de equilibrio  $z^*$  en el que no hay agentes infectados,

$$z^* = (I_c = 0, I_{A_v} = 0, a_c = a^*, W = w^*),$$

donde  $a_c = (a_1, a_2, \dots, a_{N(1-A_v)})$  es el vector de todos los agentes comunes. Miramos las ecuaciones

$$a'_i = -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}(1 - A_v)) \quad \text{para } 1 \leq i \leq N.$$

Como  $z^*$  es un equilibrio, entonces  $a'_i = 0$ . Esto sucede si y solo si  $-\xi(a^* - w^*) - \kappa(a^* - a^*(1 - A_v)) = 0$ , lo que implica que  $w^* = a^*(1 + \frac{\kappa}{\xi} A_v)$ .

Proponemos entonces un nuevo sistema. La diferencia entre este sistema y 4.16 es que ahora el gobierno apunta a tener una señal  $w^* > a_\delta^*$  para compensar la influencia de los tercos:

$$\begin{cases} I'_c = \alpha I_c S_c \tilde{a}^2 + \alpha I_{A_v} S_c \tilde{a} - \beta I_c \\ I'_{A_v} = \alpha I_c S_{A_v} \tilde{a} + \alpha I_{A_v} S_{A_v} - \beta I_{A_v} \\ a'_i = -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}(1 - A_v)) \\ W' = W(\rho(I_c + I_{A_v}) + \sigma(a_\delta^* - \bar{a}) + \eta(w^* - W)) \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq N$$

En el SIS clásico, cuando  $\alpha < \beta$ , el equilibrio donde todos los agentes son susceptibles es el único equilibrio, y es estable. En cambio, en esta nueva ecuación, vamos a ver que si la cantidad de tercos es lo suficientemente alta, puede que ya no sea estable.

Vamos a mostrar primero que no necesitamos tener en cuenta el nivel de cada agente por separado, ya que todos ellos van a converger a un mismo valor.

**Lema 4.2.1.** *Dado un agente  $i$ , la diferencia entre su nivel y el promedio de la población común tiende a cero.*

*Demostración.* Recordemos que dado un agente común  $i$ , su nivel se actualiza siguiendo la ecuación

$$a'_i = -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}(1 - A_v)),$$

y el promedio del nivel de la población se actualiza siguiendo

$$\begin{aligned} \bar{a}' &= \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)' \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a'_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}(1 - A_v))) \\ &= -\xi(\bar{a} - W) - \kappa(\bar{a} - \bar{a}(1 - A_v)) \\ &= -\xi(\bar{a} - W) - \kappa \bar{a} A_v. \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces como se actualiza la diferencia entre los dos, el de  $i$  y el promedio de la población común,

$$\begin{aligned} (a_i - \bar{a})' &= -\xi(a_i - W) - \kappa(a_i - \bar{a}(1 - A_v)) - (-\xi(\bar{a} - W) - \kappa \bar{a} A_v) \\ &= \xi(\bar{a} - a_i) + \kappa(\bar{a} - a_i) \\ &= (\xi + \kappa)(\bar{a} - a_i). \end{aligned}$$

Luego, la diferencia  $(a_i - \bar{a})$  tiene un decaimiento exponencial y converge a cero.  $\square$

Veremos ahora que la estabilidad del equilibrio  $I_c = I_{A_v} = 0$  depende de una sola condición sobre los parámetros del modelo:

**Teorema 4.2.1.** *Asumamos que*

$$\frac{\alpha}{\beta} A_v < 1. \quad (4.17)$$

*Entonces existe un valor  $a^* < \infty$  tal que si todos los miembros la población común tienen nivel  $a = a^*$ , entonces  $I'_{A_v} < 0$ .*

*Demostración.* Si suponemos el mejor escenario donde todos los agentes comunes están sanos ( $I_c = 0$ ), y su nivel es lo más alto posible ( $a_c = \infty$ ), tenemos que la población de infectados en la población antivacunas se actualizará de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$I'_{A_v} = \alpha I_{A_v} S_{A_v} - \beta I_{A_v}.$$

Como  $S_{A_v} = A_v - I_{A_v}$ , tenemos

$$I'_{A_v} < \alpha I_{A_v} A_v - \beta I_{A_v}.$$

Esto implica que si  $\frac{\alpha}{\beta} A_v < 1$ , entonces  $I'_{A_v} < 0$  y la población infectada se extinguirá.

Por otro lado, el peor escenario posible es cuando toda la población tiene nivel  $a = 0$ . Como estamos en el caso  $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ , sabemos que la enfermedad seguirá endémica por los resultados del análisis del SIS clásico.

En nuestro sistema tenemos

$$I'_{A_v} = f(I_{A_v}, I_c, a_c).$$

En resumen, los dos escenarios recién descritos, el mejor y el peor dan como consecuencia que, si  $\frac{\alpha}{\beta} A_v < 1$ , hay un punto  $z_1$  con  $a_c = \infty$  tal que  $f(z_1) < 0$  y un punto  $z_2$  con  $a_c = 0$  tal que  $f(z_2) > 0$ . Como  $f$  es una función continua, por Bolzano, existe un punto  $z^*$  con  $a_c = a^* < \infty$  tal que  $f(z^*) = 0$ .  $\square$

En la figura 4.5 mostramos una simulación donde los parámetros cumplen 4.17 pero seteamos deliberadamente al mensaje del gobierno en un valor  $W^*$  que no es lo suficientemente alto. La población llega a un equilibrio endémico y la enfermedad no se extingue. En la figura 4.7 hacemos la simulación con los mismos parámetros pero aumentando el mensaje  $W$  de manera que la enfermedad desaparezca.

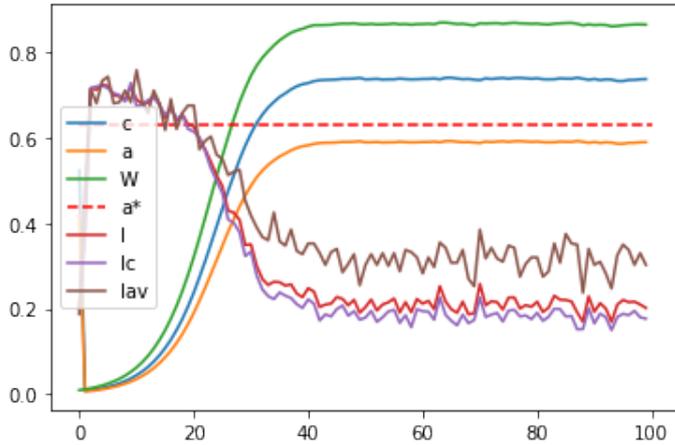


Figura 4.5: Simulación con 2000 agentes de los cuales 20 % son tercios,  $\alpha = 0,7$  y  $\beta = 0,1$ . Estos parámetros satisfacen la condición 4.17.  $W$  es el mensaje del gobierno,  $c$  es el nivel medio de la población común,  $a$  es el nivel medio de toda la población,  $a^*$  marca el umbral de nivel para extinguir la enfermedad. Por último,  $I_c$ ,  $I_{A_v}$  e  $I$  marcan la proporción de infectados en la población común, la población terca y en toda la población respectivamente. El mensaje del gobierno no es suficiente para extinguir la enfermedad. Ambas poblaciones están en un equilibrio endémico.

Probemos ahora el siguiente lema:

**Lema 4.2.2.** Si  $\frac{\alpha}{\beta} A_v > 1$ , entonces el equilibrio  $I_c = I_{A_v} = 0$  no es estable.

*Demostración.* Supongamos que una pequeña cantidad de tercios se infectan,  $I_{A_v} = \varepsilon$ . Supongamos además que todos los agentes comunes son susceptibles pero tienen nivel  $a = +\infty$ . En este caso,

$$I'_{A_v} = \alpha \varepsilon (A_v - \varepsilon) - \beta I_{A_v} = \varepsilon (\alpha (A_v - \varepsilon) - \beta).$$

El signo de  $I'_{A_v}$  depende solo del signo de

$$\alpha(A_v - \varepsilon) - \beta. \quad (4.18)$$

Si  $\alpha A_v - \beta > 0$ , entonces para todo  $\varepsilon \in (0, \frac{\alpha A_v - \beta}{\alpha})$ , se tiene  $I'_{A_v} > 0$ . En este caso el equilibrio  $I_c = I_{A_v} = 0$  no es estable.  $\square$

La figura 4.6 ilustra este teorema. La población común está casi toda susceptible. La población terca está en un equilibrio endémico propio ya que  $\alpha A_v - \beta > 0$ . La población común está apenas por arriba del cero ya que siguen susceptibles a enfermarse aunque con probabilidad baja.

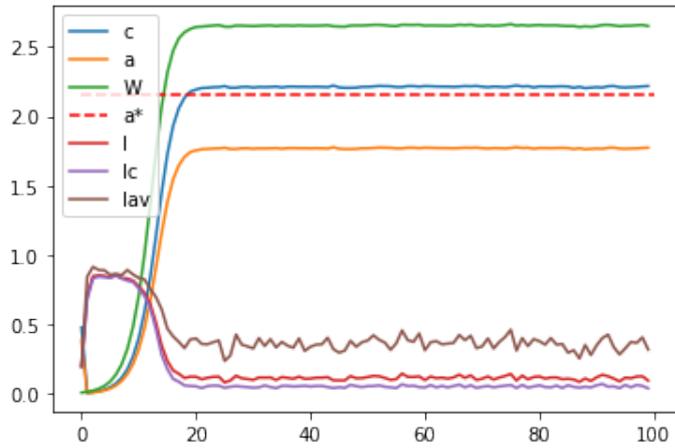


Figura 4.6: Simulación con 2000 agentes de los cuales 20 % son tercios,  $\alpha = 0,7$  y  $\beta = 0,1$ . Estos parámetros están por arriba del umbral del lema 4.2.2. Está claro que la población común es casi toda susceptible pero sigue reinfectándose por los agentes tercios que tienen un equilibrio endémico propio.

En el caso  $I_c = 0$  y con todos los agentes comunes teniendo nivel  $+\infty$ , podemos pensar que la enfermedad se esparce solo en la población de tercios. Lo podemos pensar como un nuevo SIS con tasas  $\alpha A_v$  y  $\beta$ .

El valor infinito es irreal, así que vamos a encontrar una cota superior para el valor crítico  $a^*$ .

**Lema 4.2.3.** *Supongamos que todos los agentes comunes tienen el mismo nivel  $a^*$  y que estamos bajo la condición 4.17. Si  $\frac{1}{2}I_c < I_{A_v}$ , entonces  $I'_{A_v} < 0$  cuando  $a^* > -\log(\frac{\beta - \alpha A_v}{2\alpha A_v})$ .*

*Demostración.* De la ecuación de  $I'_{A_v}$

$$I'_{A_v} = \alpha I_c S_{A_v} \tilde{a} + \alpha I_{A_v} S_{A_v} - \beta I_{A_v},$$

podemos usar las cotas  $S_{A_v} < A_v$  e  $I_c < 2I_{A_v}$  para escribir

$$\begin{aligned} I'_{A_v} &< \alpha 2I_{A_v} \tilde{a} + \alpha I_{A_v} A_v - \beta I_{A_v} \\ &= I_{A_v} (2\alpha A_v \tilde{a} + \alpha A_v - \beta). \end{aligned}$$

El signo de esta expresión es negativo si

$$\tilde{a} < \frac{\beta - \alpha A_v}{2\alpha A_v}.$$

Recordemos que  $\tilde{a} = e^{-a^*}$  y tenemos la cota

$$a^* > -\log\left(\frac{\beta - \alpha A_v}{2\alpha A_v}\right),$$

y podemos aplicar el logaritmo porque estamos bajo la condición 4.17, el argumento es positivo.  $\square$

**Lema 4.2.4.** *Supongamos que todos los agentes comunes tienen el mismo nivel  $a^*$ . Si  $\frac{1}{2}I_{A_v} < I_c$ , entonces  $I'_c < 0$  cuando  $a^* > -\log\left(\frac{\beta}{3\alpha(1-A_v)}\right)$ .*

*Demostración.* La demostración de este lema es similar a la anterior. De la ecuación de  $I'_c$ ,

$$I'_c = \alpha I_c S_c \tilde{a}^2 + \alpha I_{A_v} S_c \tilde{a} - \beta I_c.$$

Usamos las cotas  $S_c < 1 - A_v$ ,  $\tilde{a}^2 < \tilde{a}$ , ya que  $\tilde{a} \leq 1$ , y  $I_{A_v} < 2I_c$  para escribir

$$\begin{aligned} I'_c &< \alpha I_c (1 - A_v) \tilde{a} + \alpha 2I_c (1 - A_v) \tilde{a} - \beta I_c \\ &= I_c (3\alpha(1 - A_v) \tilde{a} - \beta), \end{aligned}$$

que es negativo si

$$\tilde{a} < \frac{\beta}{3\alpha(1 - A_v)},$$

es decir

$$a^* > -\log\left(\frac{\beta}{3\alpha(1 - A_v)}\right).$$

$\square$

Con estos dos lemas, sabemos que si  $a^*$  es más grande que ambas cotas, la población de infectados se extinguirá. En efecto, supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $I_c > I_{A_v}$ . Entonces, por el lema 4.2.4,  $I_c$  es decreciente. Por el lema 4.2.3,  $I_{A_v}$  puede crecer pero solo mientras sea más chico que  $I_c/2$ , porque si no va a pasar a decrecer. El único equilibrio es  $I_c = I_{A_v} = 0$ . Lo podemos ver en la figura 4.7.

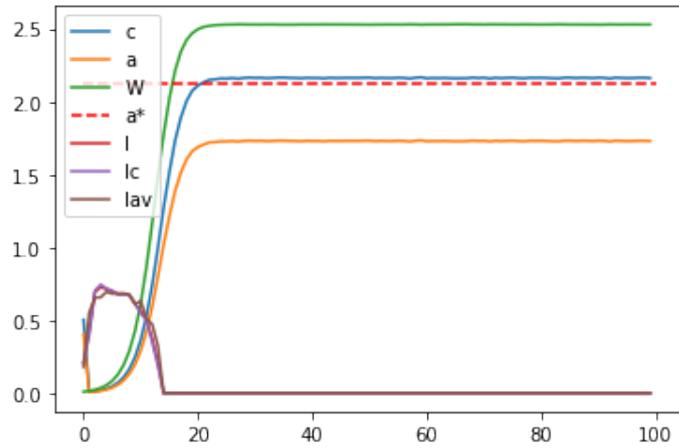


Figura 4.7: Simulación con 2000 agentes de los cuales 20 % son tercios,  $\alpha = 0,7$  y  $\beta = 0,2$ . Los parámetros satisfacen 4.17. Elegimos el valor de  $a^*$  considerando las cotas de 4.2.3 y 4.2.4. La enfermedad desaparece.



# Capítulo 5

## Sistemas de diferente dimensión.

### 5.1. La ecuación de tipo Boltzmann

En este capítulo vamos a modelar las interacciones de los agentes que modifican su nivel de información con una ecuación de tipo Boltzmann que acoplaremos a la dinámica de la enfermedad. Notamos  $f_t$  la distribución de los agentes en el espacio de parámetros  $(a, q)$  a tiempo  $t$ . Es decir,  $f_t$  es una medida de probabilidad en  $[0, +\infty) \times [0, 1]$  para cada tiempo.

Al igual que antes, dada una función test  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , la integral  $\int \phi(a, q) df_t(a, q)$  es el valor esperado de  $\phi$  bajo  $f_t$ . Por ejemplo, si tomamos  $\phi(a) = a$ , esta integral queda  $\int \phi(a) df_t(a) = \int a df_t(a) =: \langle a \rangle$ , el nivel medio de la población a tiempo  $t$ . Si tomamos  $\phi(a) = a^2 - \langle a \rangle^2$ ,  $\int \phi(a) df_t(a) = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 =: \text{Var}(a)$ , tenemos la varianza a tiempo  $t$ .

De las reglas de interacción (4.12) y (4.13), la derivada de  $\int \phi(a, q) df_t(a, q)$  viene dada por la siguiente ecuación de tipo Boltzmann.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(a, q) df_t(a, q) &= \int [\phi(a + q\gamma(W(t) - a), q) - \phi(a, q)] df_t(a, q) \\ &+ \int [\phi(a + q\kappa(a_* - a), q) - \phi(a, q)] df_t(a, q) df_t(a_*, q_*) \end{aligned} \quad (5.1)$$

para toda  $\phi \in C_b([0, +\infty) \times [0, 1])$ , y mantenemos las ecuaciones para  $W$  e  $I$  como estaban en (4.8). Obtenemos entonces el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= \langle e^{-a} \rangle \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{dt} W &= W (\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W)), \\ \frac{d}{dt} \int \phi(a, q) df_t(a, q) &= \int [\phi(a + q\gamma(W(t) - a), q) - \phi(a, q)] df_t(a, q) \\ &+ \int [\phi(a + q\kappa(a_* - a), q) - \phi(a, q)] df_t(a, q) df_t(a_*, q_*). \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde  $\langle a \rangle = \int a df_t(a, q)$  y  $\langle e^{-a} \rangle = \int e^{-a} df_t(a, q)$  son los valores medios de  $a$  y  $e^{-a}$  a tiempo  $t$ .

Notemos que en el caso particular en el que  $f_t$  tiene la forma  $f_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{(a_i, q_i)}$  entonces (5.2) se reduce a (4.15).

Primero probamos la buena definición del sistema (5.2) que viene de acoplar la ecuación integrodiferencial de Boltzmann con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Dadas ciertas condiciones iniciales  $f_0 \in P([0, +\infty) \times [0, 1])$ ,  $W_0 \geq 0$ ,  $I_0 \in [0, 1]$ , una solución de (5.2) es una terna  $(f, W, I)$  con

$$f \in C([0, +\infty), P([0, +\infty) \times [0, 1])) \cap C^1((0, +\infty), P([0, +\infty) \times [0, 1])),$$

$W \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ ,  $I \in C([0, +\infty), [0, 1])$  cumpliendo (5.2) para todo  $t > 0$  tal que  $f|_{t=0} = f_0$ ,  $W(0) = W_0$ ,  $I(0) = I_0$ . Acá,  $P([0, +\infty) \times [0, 1])$  está dotado con la norma Bounded Lipschitz, ver (5.16). Tenemos entonces:

**Teorema 5.1.1.** *Dadas condiciones iniciales  $f_0 \in P([0, +\infty) \times [0, 1])$  de soporte compacto,  $W_0 \geq 0$ ,  $I_0 \in [0, 1]$ , y  $\gamma \in [0, 1]$ , entonces existe una única solución del sistema (5.2).*

*Mas aún, existe  $R > 0$  independiente de  $\gamma$  tal que  $\text{supp } f_t \subset [0, R] \times [0, 1]$  para todo  $t \geq 0$ .*

La demostración la dejamos para el final del capítulo, en la sección 5.5.1.

## 5.2. Grazing limit

Es difícil estudiar el comportamiento a largo plazo de (5.2) principalmente porque la ecuación (5.1) involucra integrar en todo el espacio. Un procedimiento estándar conocido como *quasi-invariant limit* ó *grazing limit* nos permite aproximar esta ecuación no-local con una ecuación de transporte cuando  $\gamma$  y  $\kappa$  son chicos.

Para implementar esta idea, escalamos todos los parámetros  $\alpha, \beta, \kappa, \rho, \sigma$  y  $\eta$  por un  $\varepsilon$  chico, y también el tiempo,  $\tau := \varepsilon t$ . Si hacemos el desarrollo de Taylor de primer orden de  $f_t$  en las ecuaciones del sistema (5.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \int \phi(a, q) df_t(a, q) &\simeq \gamma \int \partial_a \phi(a, q) q (W(t) - a) df_t(a, q) \\ &\quad + \kappa \int \partial_a \phi(a, q) q (a_* - a) df_t(a, q) df_t(a_*, q_*) \\ &= \int \partial_a \phi(a, q) q \{ \gamma (W(t) - a) + \kappa (\langle a \rangle - a) \} df_t(a, q). \end{aligned}$$

y el sistema aproximado queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} I &= \langle e^{-a} \rangle \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} W &= W (\rho I + \sigma (a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta (a_\delta^* - W)), \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dt} \int \phi(a, q) df_t(a, q) &= \int \partial_a \phi(a, q) q \{ \gamma (W(t) - a) + \kappa (\langle a \rangle - a) \} df_t(a, q), \end{aligned}$$

para toda  $\phi \in C_b([0, +\infty) \times [0, 1])$ .

El reescale temporal  $\tau := \varepsilon t$ , definiendo  $g_\tau := f_t$ ,  $W(\tau) := W(t)$ ,  $I(\tau) = I(t)$ , nos da

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \langle e^{-a} \rangle \alpha I(1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} W &= W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W)), \\ \frac{d}{d\tau} \int \phi(a, q) dg_\tau(a, q) &= \int \partial_a \phi(a, q) q \{ \gamma(W(t) - a) + \kappa(\langle a \rangle - a) \} dg_\tau(a, q), \end{aligned} \quad (5.3)$$

para toda  $\phi \in C_b([0, +\infty) \times [0, 1])$ .

Esperamos aproximar bien el comportamiento de la solución a largo plazo de (5.2) para  $\varepsilon$  chico utilizando la solución  $g_\tau$ . Notemos que la ecuación de  $g_\tau$  es la forma débil de la siguiente ecuación de transporte

$$\partial_\tau g_\tau + \partial_a (q \{ \gamma(W - a) + \kappa(\langle a \rangle - a) \} g_\tau) = 0, \quad (5.4)$$

con lo cual podemos reescribir (5.3) de una manera mas compacta como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \langle e^{-a} \rangle \alpha I(1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} W &= W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - W)), \\ \partial_\tau g_\tau + \partial_a (q \{ \gamma(W - a) + \kappa(\langle a \rangle - a) \} g_\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Consideremos condiciones iniciales  $(g_0, W(0), I(0)) \in P([0, +\infty) \times [0, 1]) \times [0, +\infty) \times [0, 1]$ . Una solución en  $[0, T^*)$  es una terna  $(g, W, I)$  con  $g \in C([0, T^*), P([0, +\infty) \times [0, 1]))$ ,  $W, I \in C^1([0, T^*), \mathbb{R}^2)$  donde  $W(t) \geq 0$  y  $0 \leq I(t) \leq 1$  satisfacen la condición inicial y resuelven (5.3). La solución es global si  $T^* = +\infty$ .

El siguiente resultado nos asegura que (5.3) tiene una única solución:

**Teorema 5.2.1.** Sean  $(g_0, W(0), I(0)) \in P([0, +\infty) \times [0, 1]) \times [0, +\infty) \times [0, 1]$  las condiciones iniciales y asumimos que  $g_0$  tiene soporte compacto en  $[0, +\infty) \times [0, 1]$ . Entonces existe una única solución global  $(g, W, I)$  de (5.3). Mas aún, existe  $M, R_0 > 0$  tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $W(t) \leq M$ , y  $g_t$  está soportada en  $[0, R_0] \times [0, 1]$ .

También justificamos la aproximación de (5.2) por (5.3):

**Teorema 5.2.2.** Dadas condiciones iniciales  $f_0 \in P([0, +\infty) \times [0, 1])$ ,  $W_0 \geq 0$ ,  $I_0 \in [0, 1]$  donde  $f_0$  tiene soporte compacto, notamos  $(f^\varepsilon, W^\varepsilon(t), I^\varepsilon(t))$  la solución correspondiente de (5.2) como viene dada por el Teorema 5.1.1. Sea  $\tau = \varepsilon t$  y  $g^\varepsilon \tau := f_t^\varepsilon$ . Entonces para todo  $T > 0$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} g^\varepsilon &\rightarrow g \quad \text{in } C([0, T], P([0, +\infty) \times [0, 1])), \\ W^\varepsilon &\rightarrow W \quad \text{in } C([0, T], [0, +\infty)), \\ I^\varepsilon &\rightarrow I \quad \text{in } C([0, T], [0, 1]), \end{aligned}$$

donde  $(g, W, I)$  es la única solución de (5.3) con condiciones iniciales  $(f_0, W_0, I_0)$  dada por el teorema 5.2.1.

La demostración de los Teoremas 5.2.1 y 5.2.2 las pasamos a las secciones 5.5.2 y 5.5.3.

### 5.3. Análisis del sistema aproximado

Consideramos una solución  $(g, W, I)$  del sistema (5.3) como viene dada por el teorema 5.2.1.

Primero vamos a verificar la dinámica de la distribución del nivel de los agentes es contractiva. Es decir, condicionada a los valores  $q$ , el soporte de la distribución de los niveles  $g_{\tau|q}$  se reduce a un punto. Sea  $f_0(q)dq$  la distribución del parámetro  $q$  en la población, esto es, la proyección de  $g_\tau$  en  $[0, 1]$ . Por el Teorema de Jirina (ver [29][III.5.9]), existe una familia  $\{g_{\tau|q}\}_{q \in [0,1]}$  de medidas de probabilidad en  $[0, +\infty)$ , única en el complemento de un conjunto de medida cero para la medida  $f_0(q)dq$ , tal que para toda función  $\phi : [0, +\infty) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  integrable para  $g_\tau$ ,

$$\int \phi(a, q) dg_\tau(a, q) = \int_0^1 \left( \int_0^{+\infty} \phi(a, q) dg_{\tau|q}(a) \right) f_0(q) dq.$$

Tenemos entonces

**Proposición 5.3.1.** *Para todo  $q > 0$  en el soporte de  $f_0(q)dq$ ,*

$$|\text{conv}(\text{supp } g_{\tau|q})| \leq |\text{conv}(\text{supp } g_{0|q})e^{-q(\gamma+\kappa)\tau}| \quad (5.6)$$

donde  $\text{conv}(\text{supp } g_{\tau|q})$  es la cápsula convexa del soporte de  $g_{\tau|q}$ .

*Demostración.* Adaptando ligeramente la demostración de [37][Paso 3.9] para la ecuación (5.4), se puede probar que  $g_{\tau|q}$  satisface

$$\partial_\tau g_{\tau|q} + q \partial_a \left( \left\{ \gamma(W(\tau) - a) + \kappa(\langle a \rangle - a) \right\} g_{\tau|q} \right) = 0. \quad (5.7)$$

Por otro lado, recordemos que la función de distribución acumulada  $F_\tau : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de  $g_{\tau|q}$ , y su inversa generalizada  $X_\tau : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  están definidas por  $F_\tau(x) = g_{\tau|q}((-\infty, x])$  y

$$X_\tau(\rho) = \inf \{x \in [0, +\infty) \text{ tal que } F_\tau(x) \geq \rho\}, \quad \rho \in [0, 1]. \quad (5.8)$$

Como  $g_\tau$  está soportada en  $[0, R_0] \times [0, 1]$ ,  $g_{\tau|q}$  está soportada en  $[0, R_0]$  y  $X_\tau(\rho) \in [0, R_0]$ . Notemos también que el segmento  $[X_\tau(0^+), X_\tau(1)]$  es  $\text{conv}(\text{supp } g_{\tau|q})$ , la cápsula convexa de  $g_{\tau|q}$ .

Es una propiedad clásica de la inversa generalizada  $X_\tau$  que

$$\int_0^1 \phi(X_\tau(r)) dr = \int_0^{+\infty} \phi(a) dg_{\tau|q}(a), \quad (5.9)$$

para toda  $\phi$  integrable, y es suficiente chequearlo para funciones características  $\phi$  de la forma  $1_{(-\infty, a]}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Con este cambio de variables podemos reescribir la ecuación (5.7) como (ver [37][Prop. 3.1])

$$\partial_\tau X_\tau(r) = q\gamma(W - X_\tau(r)) + q\kappa(\langle a \rangle - X_\tau(r)) \quad r \in (0, 1).$$

Se sigue que para  $0 < r < s < 1$ ,

$$\partial_\tau(X_\tau(s) - X_\tau(r)) = -q(\gamma + \kappa)(X_\tau(s) - X_\tau(r)),$$

e integrando y usando Gronwall,

$$X_\tau(s) - X_\tau(r) \leq (X_0(s) - X_0(r))e^{-q(\gamma+\kappa)\tau}.$$

Tomamos límites  $s \rightarrow 1$  y  $r \rightarrow 0^-$  y obtenemos (5.6).

La demostración está terminada.  $\square$

Si suponemos que existe  $\varepsilon_0 \in (0, 1)$  tal que todo agente que no es terco tiene  $q \geq \varepsilon_0$ , entonces (5.6) nos da

$$\text{conv}(\text{supp } g_{\tau|q}) \leq \text{conv}(\text{supp } g_{0|q})e^{-\varepsilon_0(\gamma+\kappa)\tau} \quad (5.10)$$

para todo  $q$  en el soporte de  $f^{NT}(q)dq$ .

Luego cada  $g_{\tau|q}$  está muy concentrado alrededor de su media  $a_\tau(q) = \int a dg_{\tau|q}(a)$ . Para  $\tau \gg 1$  es razonable reemplazar (independientemente de  $q$ ) cada  $g_{\tau|q}$  por la delta de Dirac  $\delta_{a_\tau(q)}$ . Notemos que (5.7) nos da

$$\frac{1}{q} \frac{d}{d\tau} a_\tau(q) = (\gamma(W(\tau) - a_\tau(q)) + \kappa(\langle a \rangle - a_\tau(q)))$$

Vamos a simplificar aún más asumiendo que  $a_\tau(q)$  es independiente de  $q$  para  $\tau \gg 1$ , es decir,  $a_\tau(q) = a_\tau$ , motivado por las simulaciones numéricas.

Entonces,  $\langle a \rangle^{NT} = a_\tau$ . Recordando que  $\langle a \rangle = \alpha_0 \langle a \rangle^S + (1 - \alpha_0) \langle a \rangle^{NT}$ , obtenemos

$$\frac{d}{d\tau} a_\tau = q\gamma(W(\tau) - a_\tau) + q\kappa\alpha_0(\langle a \rangle^S - \langle a \rangle^{NT}).$$

Integrando con respecto a  $f_0^{NT}(q)dq$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle a \rangle^{NT} &= \langle q \rangle (\gamma(W(\tau) - \langle a \rangle^{NT}) + \kappa\alpha_0(\langle a \rangle^S - \langle a \rangle^{NT})) \\ &= \langle q \rangle (\gamma + \kappa\alpha_0) \left( \frac{\gamma W(\tau) + \kappa\alpha_0 \langle a \rangle^S}{\gamma + \kappa\alpha_0} - \langle a \rangle^{NT} \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Entonces, los agentes que no son tercos reaccionan a una combinación convexa entre el mensaje del gobierno y la opinión de los agentes tercos  $\frac{\gamma W(\tau) + \kappa\alpha_0 \langle a \rangle^S}{\gamma + \kappa\alpha_0}$ .

Con estas aproximaciones, el sistema (5.5) se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= (\alpha_0 \langle e^{-a} \rangle^S + (1 - \alpha_0) e^{-\langle a \rangle^{NT}}) \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} \langle a \rangle^{NT} &= \langle q \rangle (\gamma + \kappa\alpha_0) \left( \frac{\gamma W(\tau) + \kappa\alpha_0 \langle a \rangle^S}{\gamma + \kappa\alpha_0} - \langle a \rangle^{NT} \right), \\ \frac{d}{d\tau} W &= W(\rho I + \sigma(a_\delta^* - \alpha_0 \langle a \rangle^S - (1 - \alpha_0) \langle a \rangle^{NT}) + \eta(a_\delta^* - W)). \end{aligned} \quad (5.12)$$

## 5.4. Impacto de agentes tercros

Para poder analizar cualitativamente el impacto de los agentes tercros que no toman medidas, asumimos que estos tienen su nivel fijo en  $a = 0$ , en particular  $\langle a \rangle^S = 0$  y  $\langle e^{-a} \rangle^S = 1$ . El sistema (5.12) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \left( \alpha_0 + (1 - \alpha_0) e^{-\langle a \rangle^{NS}} \right) \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} \langle a \rangle^{NS} &= \langle q \rangle (\gamma + \kappa \alpha_0) \left( \frac{\gamma W(\tau)}{\gamma + \kappa \alpha_0} - \langle a \rangle^{NS} \right), \\ \frac{d}{d\tau} W &= W \left( \rho I + \sigma (a_\delta^* - (1 - \alpha_0) \langle a \rangle^{NS}) + \eta (a_\delta^* - W) \right). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Examinamos primero dos casos extremos donde  $\gamma \gg 1$  o  $\kappa \geq 1$ , es decir, donde la dinámica social evoluciona en una escala de tiempo mucho más rápida que la de la enfermedad o la del gobierno.

Este tipo de abordaje tiene sentido pensarlo en un mundo donde los agentes interactúan sin verse, a través de internet por ejemplo, a la vez que el mensaje del gobierno es uno solo y tarda en actualizarse por las dificultades propias de las políticas públicas.

Primero, si  $\kappa \gg 1$  con  $\kappa \gg \gamma$ , entonces, intuitivamente, las interacciones entre amigos ocurren en una escala de tiempo mucho más rápida que la de la enfermedad y también son mucho más frecuentes que las interacciones con el gobierno. El gobierno está relativamente ausente del debate público. En este caso  $\langle a \rangle^{NT} \simeq 0$  y

$$\frac{d}{d\tau} I \simeq \alpha I (1 - I) - \beta I$$

Entonces, hemos recuperado el modelo SIS clásico y la enfermedad persistirá.

Por otro lado, si  $\gamma \gg 1$  con  $\gamma \gg \kappa$ , entonces el gobierno está muy presente en el debate público y las interacciones entre agentes y el gobierno son mucho más frecuentes que la de los agentes entre ellos. En este caso vale que  $\langle a \rangle^{NT} \simeq W$  y también

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \left( \alpha_0 + (1 - \alpha_0) e^{-W} \right) \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} W &= W \left( \rho I + \sigma (a_\delta^* - (1 - \alpha_0) W) + \eta (a_\delta^* - W) \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Vemos ahora el caso general. Primero, multiplicando los parámetros  $\alpha, \beta, \rho, \sigma, \eta$  por  $\langle q \rangle (\gamma + \kappa \alpha_0)$  y cambiando la escala de tiempo, podemos asumir que  $\langle q \rangle (\gamma + \kappa \alpha_0) = 1$ . Sea  $\chi = \kappa / \gamma$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} I &= \left( \alpha_0 + (1 - \alpha_0) e^{-\langle a \rangle^{NT}} \right) \alpha I (1 - I) - \beta I, \\ \frac{d}{d\tau} \langle a \rangle^{NT} &= \frac{W(\tau)}{1 + \chi} - \langle a \rangle^{NT}, \\ \frac{d}{d\tau} W &= W \left( \rho I + \sigma (a_\delta^* - (1 - \alpha_0) \langle a \rangle^{NT}) + \eta (a_\delta^* - W) \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Terminamos esta sección con la estabilidad del equilibrio todos-sanos de este sistema

**Lema 5.4.1.** *El sistema 5.15 tiene un equilibrio en  $\tilde{I} = 0$ ,  $\tilde{a} = \frac{a_0^*(\sigma+\eta)}{\sigma(1-\alpha_0)+\eta(1+\chi)}$  y  $\tilde{W} = \tilde{a}(1+\chi)$ . Este equilibrio es localmente estable si  $(\alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\tilde{a}})\alpha - \beta < 0$  e inestable sino.*

*Demostración.* Chequear que el punto  $(0, \tilde{a}, \tilde{W})$  es un equilibrio es directo. Si linealizamos el sistema en el punto, obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} (\alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\tilde{a}})\alpha - \beta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{1+\chi} \\ \tilde{W}\rho & -\tilde{W}\sigma(1 - \alpha_0) & -\tilde{W}\eta \end{pmatrix}.$$

La matriz tiene 3 autovalores. Uno de ellos es el que nos interesa, es

$$\lambda = (\alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\tilde{a}})\alpha - \beta.$$

De los otros dos, solo nos interesa su signo. Observemos que el determinante de la submatriz

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{1+\chi} \\ -\tilde{W}\sigma(1 - \alpha_0) & -\tilde{W}\eta \end{pmatrix}$$

es positivo, entonces los autovalores son ambos positivos o ambos negativos. Como la traza es negativa, son ambos negativos. Por lo tanto la estabilidad del equilibrio depende solo del signo de la expresión

$$(\alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\tilde{a}})\alpha - \beta.$$

La demostración queda terminada.  $\square$

Que es lo que está sucediendo? Primero descartemos el caso  $\alpha < \beta$  que es igual que siempre. Quedan dos casos cuando  $\alpha > \beta$ . Si  $\alpha_0\alpha - \beta > 0$ , entonces no importa cuanto se cuiden los demás agentes, el equilibrio  $I = 0$  siempre será inestable. Por otro lado, puede suceder que  $\alpha_0\alpha - \beta < 0$  y por lo tanto, existe un  $\tilde{a}$  lo suficientemente grande de manera que  $(\alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\tilde{a}})\alpha - \beta < 0$  y el equilibrio  $I = 0$  es estable. La dinámica de la enfermedad admite que una proporción de la población sea terca y no tome medidas de precaución sin afectar la estabilidad del equilibrio.

## 5.5. Demostraciones

A continuación veremos las demostraciones que quedaron pendientes para el sistema acoplado de la ecuación de Boltzmann, el mensaje del gobierno, y la epidemia; y para el grazing limit.

### 5.5.1. Buen planteo del sistema

Demostración del Teorema 5.1.1. Lo demostramos en el caso en el que  $q \equiv 1$ .

Notamos  $\mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  el espacio de medidas borelianas con signo en  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{M}_{b,+}([0, R])$  al subconjunto de las medidas no negativas. Recordemos que la norma de Total Variation (TV) y la norma Bounded Lipschitz (BL) definidas para  $f \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  están definidas por

$$\|f\|_{TV} = \sup_{\|\phi\|_\infty \leq 1} \int \phi df, \quad \|f\|_{BL} = \sup_{\|\phi\|_{W^{1,\infty}} \leq 1} \int \phi df, \quad (5.16)$$

donde  $\|\phi\|_{W^{1,\infty}} := \max\{\|\phi\|_\infty, Lip(\phi)\} \leq 1$ , siendo  $Lip(\phi)$  la constante de Lipschitz de  $\phi$ . Recomendamos[20] para las propiedades generales de estas normas.

Reescribimos el sistema (5.2) de manera abstracta como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_t &= Q[x(t), f_t], \\ x'(t) &= F[f_t](x(t)), \end{aligned} \quad (5.17)$$

donde  $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) := (W(t), I(t))$ ,  $Q : \mathbb{R}^2 \times \mathcal{M}_b(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  está definido por

$$(Q[x, f], \phi) = \int \phi(a + \gamma(x_1 - a)) df(a) - \int \phi(a) df(a) + \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) df da' \quad \phi \in C_b(\mathbb{R}),$$

y, dado  $f \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ , el campo  $F[f] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene componentes

$$\begin{aligned} F_1[f](x) &= x_1(\rho x_2 - \eta x_1 - \sigma \langle a \rangle_g + (\sigma + \eta)a_\delta^*), \\ F_2[f](x) &= x_2(\alpha \langle e^{-a} \rangle_f (1 - x_2) - \beta), \end{aligned}$$

donde  $\langle a \rangle_f := \int_{-\infty}^{+\infty} a df(a)$  y  $\langle e^{-a} \rangle_f := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a} df(a)$ .

Dado  $f \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$ , notamos  $x[f](t)$  la solución de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x[f](t) &= F[f_t](x[f](t)) \\ x[f](0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

A partir de ahora fijamos una condición inicial  $x(0)$  con  $x_1(0) \geq 0$  y  $x_2(0) \in [0, 1]$ . Fijamos una constante  $N > 0$  de manera que

$$N > \max \left\{ x_1(0), \frac{\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*}{\eta} \right\}. \quad (5.19)$$

**Proposición 5.5.1.** *Supongamos que  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  es continua para la norma BL con  $f_t$  no negativa y soportada en un intervalo fijo  $[0, R]$  para todo  $t \in [0, T]$ . Entonces existe  $x[f](t)$  y está soportada en  $[0, N] \times [0, 1]$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

Mas aún para todo  $0 \leq s \leq t$ ,

$$|x_1[f](t) - x_1[f](s)| \leq N(\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*)(t - s). \quad (5.20)$$

Sea ahora otra función continua  $\tilde{f} : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{M}_{b,+}([0, R])$  y fijamos un  $T > 0$ . Supongamos que  $\|f_t\|_{TV}, \|\tilde{f}_t\|_{TV} \leq R$  para  $t \in [0, T]$ . Entonces para todo  $t$

$$|x[f](t) - x[\tilde{f}](t)| \leq N(R\sigma + \alpha e^R) t e^{M_R t} \max_{0 \leq s \leq t} \|f_s - \tilde{f}_s\|_{BL} \quad (5.21)$$

donde  $M_R$  está definida en (5.23).

*Demostración.* Como las funciones  $a$  y  $e^{-a}$  son Lipschitz y acotadas en  $[0, R]$ , las funciones  $t \rightarrow \langle a \rangle_{f_t}$  y  $t \rightarrow \langle e^{-a} \rangle_{f_t}$  son continuas. Entonces la solución  $x(t) := x[f](t)$  de (5.18) está definida en algún intervalo alrededor del cero. Como  $F_1[g](0, x_2) = F_2[g](x_1, 0) = F_2[g](x_1, 1) = 0$  para todo  $g \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$  y  $x \in \mathbb{R}^2$ , y  $x_1(0) \geq 0$ ,  $x_2(0) \in [0, 1]$ , tenemos  $x_1(t) \geq 0$  y  $x_2(t) \in [0, 1]$ .

Como  $f$  es no negativa y soportada en  $[0, +\infty)$ , tenemos  $\langle a \rangle_f \geq 0$  tal que

$$x_1'(t) \leq \eta x_1(t) \left( \frac{\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*}{\eta} - x_1 \right).$$

Recordando la definición de  $N$ , tenemos que  $x_1(t) \leq N$  para todo  $t$ . Entonces  $x(t)$  pertenece al compacto  $[0, N] \times [0, 1]$  y existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Para demostrar (5.20), notamos que para todo  $\tau \geq 0$ ,  $|F_1[f_\tau](x[f](\tau))| \leq N(\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*)$ . Entonces escribiendo

$$x_1[f](t) - x_1[\bar{f}](s) = \int_s^t F_1[f_\tau](x[f](\tau))$$

obtenemos el resultado.

Finalmente, probemos (5.21). Para facilitar la notación escribimos  $x(t) := x[f](t)$  y  $\bar{x}(t) := x[\bar{f}](t)$ . Entonces

$$x(t) - \bar{x}(t) = \int_0^t F[f_s](x(s)) - F[\bar{f}_s](\bar{x}(s)) ds.$$

Usando la proposición 5.5.2, definida más abajo, con  $A = N$  obtenemos

$$\begin{aligned} |x(t) - \bar{x}(t)| &\leq \int_0^t M_R |x(s) - \bar{x}(s)| + N(R\sigma + \alpha e^R) \|f_s - \bar{f}_s\|_{BL} ds \\ &\leq N(R\sigma + \alpha e^R) t \max_{0 \leq s \leq t} \|f_s - \bar{f}_s\|_{BL} + M_R \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)| ds. \end{aligned}$$

Deducimos (5.21) aplicando la desigualdad de Gronwall, y la demostración queda terminada.  $\square$

En la demostración usamos el siguiente resultado:

**Proposición 5.5.2.** Sean  $A > 0$ ,  $x, \bar{x} \in \bar{B}(0, A)$  y  $f, \bar{f} \in \mathcal{M}_b([-R, R])$  tal que

$$\|f\|_{TV}, \|\bar{f}\|_{TV} \leq R,$$

entonces

$$|F[f](x) - F[\bar{f}](\bar{x})| \leq M_R |x - \bar{x}| + A(R\sigma + \alpha e^R) \|f - \bar{f}\|_{BL} \quad (5.22)$$

( $\mathbb{R}^2$  dotado con la norma  $\|\cdot\|_1$ ) con

$$M_R := \sup_g \|\nabla F[g]\|_{L^\infty(\bar{B}(0, A))} \quad (5.23)$$

donde el supremo lo tomamos sobre todas las  $g \in \mathcal{M}_b([-R, R])$  tal que  $\|g\|_{TV} \leq R$ .

**Observación 7.** Notemos que para todo  $g$ ,  $|\langle a \rangle_g| \leq R^2$  y  $|\langle e^{-a} \rangle_g| \leq Re^R$ . Luego  $M_R$  es finito.

*Demostración.* Escribimos

$$|F[f](x) - F[\bar{f}](\bar{x})| \leq |F[f](x) - F[\bar{f}](x)| + |F[\bar{f}](x) - F[\bar{f}](\bar{x})|.$$

Por un lado, el segundo término del lado derecho de la desigualdad es menor que

$$\|\nabla F[\bar{f}]\|_{L^\infty(\bar{B}(0,A))} |x - \bar{x}| \leq M_R |x - \bar{x}|.$$

Por otro lado, respecto del primer término, notemos que  $a$  y  $e^{-a}$  son Lipschitz y acotadas en  $[-R, R]$ . Luego,

$$\begin{aligned} |F_1[f](x) - F_1[\bar{f}](x)| &= |x_1|\sigma \left| \int_{-R}^R a d(\bar{f} - f) \right| \\ &\leq A\sigma R \|\bar{f} - f\|_{BL}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} |F_2[f](x) - F_2[\bar{f}](x)| &= |x_2|\alpha \left| \int_{-R}^R e^{-a} d(\bar{f} - f) \right| \\ &\leq A\alpha e^R \|\bar{f} - f\|_{BL}. \end{aligned}$$

Deducimos (5.22), y la proposición queda demostrada.  $\square$

**Observación 8.** Podemos reescribir la ecuación de Boltzmann (5.17) como una ecuación ordinaria en un espacio de Banach,

$$\frac{d}{dt} f_t = Q[x[f](t), f_t] =: \tilde{Q}[f_t]. \quad (5.24)$$

Vamos a probar la existencia de solución para esta ecuación siguiendo las ideas de Bressan [12], formalizadas en [3].

Recordamos el resultado de existencia y unicidad demostrado en [3][Theorem 6.1].

**Teorema 5.5.1.** [Theorem 6.1 [3]] Dada la ecuación

$$\partial_t f = \tilde{Q}[f] \quad \text{in } [0, T] \times E \quad (5.25)$$

$$f(0) = f_0 \in S \quad (5.26)$$

donde  $E$  es un espacio de Banach,  $S \subset E$  es convexo cerrado y acotado, y

$$\tilde{Q} : C([0, T], S) \rightarrow C([0, T], E)$$

es un operador causal, es decir,  $\tilde{Q}[f](t) = \tilde{Q}[f|_{[0,t]}](t)$  para toda  $f \in C([0, T], E)$ , tal que  $Q$  satisfice:

- *Hölder continuity:* Para todas  $f, g \in C([0, T], S)$  y tiempos  $0 \leq s \leq t \leq T$ , existe  $\beta \in (0, 1)$  tal que

$$\|\tilde{Q}[f](t) - \tilde{Q}[g](s)\| \leq C \left( \max_{0 \leq \tau \leq s} \|f(\tau) - g(\tau)\|^\beta + \|f(t) - g(s)\|^\beta + |t - s|^\beta \right) \quad (5.27)$$

- *Sub-tangent condition:* para toda  $f \in C([0, T], S)$ ,

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \sup_{0 \leq t \leq T} \{ \text{dist}(f(t) + h\tilde{Q}[f](t), S) \} = 0 \quad (5.28)$$

- *One-sided Lipschitz condition:* para toda  $f, g \in C([0, T], S)$  y todo tiempo  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t [f(s) - g(s), \tilde{Q}[f](s) - \tilde{Q}[g](s)] ds \leq L \int_0^t \|f(s) - g(s)\| ds \quad (5.29)$$

where  $[\Phi, \phi] := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [\|\Phi + h\phi\| - \|\Phi\|]$ .

Bajo estas hipótesis, la ecuación (5.25) tiene una única solución que vive en el espacio  $C([0, T], S) \cap C^1((0, T), E)$ .

Incluimos en el apéndice C la demostración de este teorema.

Usando este resultado probamos la existencia de una única solución de (5.24). Sea  $R = \max\{R_0, N\}$  donde  $R_0$  es tal que  $\text{supp } f_0 \subset [-R_0, R_0]$ . Tomamos

$$E = \{f \in \mathcal{M}_b([0, +\infty]) : \text{supp } f \subset [0, R], \|f\|_{TV} \leq 2\},$$

y

$$S = \{f \in E, f \text{ es una medida de probabilidad}\}.$$

Dotamos a  $S$  con la norma *Bounded Lipschitz* (BL) definida en (5.16). Cuando lo pensamos con la norma BL,  $E$  es completo, y  $S$  es cerrado y convexo. El operador

$$\tilde{Q}[f]_t := Q[x[f](t), f_t]$$

es causal y satisface las propiedades de la siguiente proposición:

**Proposición 5.5.3.** *El operador  $\tilde{Q}$  satisface las siguientes propiedades:*

- (i) Para todas  $f, g \in C([0, T], S)$  y tiempos  $0 \leq s \leq t$ ,

$$|\tilde{Q}[f](t) - \tilde{Q}[g](s)| \leq C \left( \max_{0 \leq \tau \leq s} \|f_\tau - g_\tau\|_{BL} + \|f_t - g_s\|_{BL} + |t - s| \right)$$

donde  $C$  depende solo de  $N, R$  y de los parámetros del modelo  $\rho, \sigma, \gamma, \kappa, a^*$ .

- (ii) Para toda  $f \in C([0, T], S)$ , todo tiempo  $t \in [0, T]$  y todo  $h \in [0, 1]$ ,  $f_t + h\tilde{Q}[f]_t \in S$ .

Esta proposición será consecuencia de algunas propiedades simples de  $Q[x, f]$  para  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $f \in M_b(\mathbb{R})$ . Será conveniente escribir  $Q[x, f]$  como

$$Q[x, f] = Q^+[x, f] - f + Q^{int}[x, f]$$

donde  $Q^+[x, f]$  y  $Q^{int} \in M_b(\mathbb{R})$  están definidos por

$$(Q^+[x, f], \phi) = \int \phi((1 - \gamma)a + \gamma x_1) df(a) \quad \phi \in C_b(\mathbb{R}) \quad (5.30)$$

y

$$(Q^{int}[x, f], \phi) = \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) df(a) df(a') \quad \phi \in C_b(\mathbb{R}). \quad (5.31)$$

Entonces

**Proposición 5.5.4.** *Se tienen las siguientes propiedades:*

- (i) *Si  $f \geq 0$  entonces  $Q^+[x, f]$  es una medida no negativa.*
- (ii) *Si  $\text{supp}(f) \subset [0, \hat{R}]$  y  $x_1 \in [0, \tilde{R}]$  entonces  $Q^+[x, f]$  está soportada en  $[0, \bar{R}]$  con  $\bar{R} = \text{máx}\{\hat{R}, \tilde{R}\}$ .*
- (iii) *Para todo  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^2$  y toda  $f, \bar{f} \in P(\mathbb{R})$ , vale que*

$$\|Q[x, f] - Q[\bar{x}, \bar{f}]\|_{BL} \leq \gamma|x_1 - \bar{x}_1| + 2(1 + \kappa R)\|f - \bar{f}\|_{BL}. \quad (5.32)$$

*Demostración.* Si  $f \geq 0$  entonces para toda  $\phi$  no negativa,  $(Q^+[x, f], \phi) \geq 0$  por (5.30), y hemos demostrado (i).

Para ver (ii), basta observar que para todo  $a \in \text{supp}(f)$  y todo  $\gamma \in [0, 1]$ , vale  $(1 - \gamma)a + \gamma x_1 \in [0, \bar{R}]$ . Entonces  $(Q^+[x, f], \phi) = 0$  si  $\phi$  tiene soporte en  $\mathbb{R} \setminus [0, \bar{R}]$ , y hemos demostrado (ii).

Finalmente, probemos (5.32). Para toda  $\phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$  con norma menor o igual a 1, tenemos

$$(Q[x, f] - Q[\bar{x}, \bar{f}], \phi) = (Q^+[x, f] - Q^+[\bar{x}, \bar{f}], \phi) + (\bar{f} - f, \phi) + (Q^{int}[x, f], \phi) - (Q^{int}[\bar{x}, \bar{f}], \phi).$$

El término más sencillo es el del medio.

$$|(\bar{f} - f, \phi)| \leq \|\bar{f} - f\|_{BL}$$

Luego acotamos el de la izquierda.

$$\begin{aligned} (Q^+[x, f] - Q^+[\bar{x}, \bar{f}], \phi) &= \int \phi((1 - \gamma)a + \gamma x_1) - \phi((1 - \gamma)a + \gamma \bar{x}_1) df(a) \\ &\quad + \int \phi((1 - \gamma)a + \gamma \bar{x}_1) d(f - \bar{f})(a) \\ &\leq \gamma|x_1 - \bar{x}_1| + \|\bar{f} - f\|_{BL} \end{aligned}$$

En la última desigualdad usamos que  $\phi$  es 1-Lipschitz para acotar la primera integral. La segunda integral la acotamos con  $\|\bar{f} - f\|_{BL}$  multiplicado por la norma  $W^{1,\infty}$  de la función  $a \rightarrow \phi((1 - \gamma)a + \gamma\bar{x}_1)$  que es menor que 1.

Para acotar el término de la derecha, el de interacción, escribimos.

$$|(Q^{int}[x, f], \phi) - (Q^{int}[\bar{x}, \bar{f}], \phi)| = \quad (5.33)$$

$$\left| \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) df df - \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) d\bar{f} d\bar{f} \right| \quad (5.34)$$

Sumamos y restamos  $\int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) d\bar{f} df$ . Usamos que  $\phi$  es Lipschitz con constante 1.

$$\begin{aligned} &= \left| \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) d(f - \bar{f}) df - \int \int \phi(a + \kappa(a' - a)) - \phi(a) d\bar{f} d(f - \bar{f}) \right| \\ &\leq \int \int \kappa |a' - a| d |f - \bar{f}| df + \int \int \kappa |a' - a| d\bar{f} d |f - \bar{f}| \\ &\leq \kappa \int \int \bar{R} d |f - \bar{f}| df + \kappa \int \int \bar{R} d\bar{f} d |f - \bar{f}| \\ &\leq \kappa \bar{R} \|f\| \|f - \bar{f}\| + \kappa \bar{R} \|f\| \|f - \bar{f}\| \\ &= 2\kappa \bar{R} \|f - \bar{f}\|_{BL} \end{aligned}$$

□

Demostremos ahora la Proposición 5.5.3.

*Demostración de la Proposición 5.5.3.* Probamos (i) escribiendo

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}[f](t) - \tilde{Q}[g](s)| &\leq |\tilde{Q}[f](t) - \tilde{Q}[f](s)| + |\tilde{Q}[f](s) - \tilde{Q}[g](s)| \\ &= |Q[x[f](t), f_t] - Q[x[f](s), f_s]| + |Q[x[f](s), f_s] - Q[x[g](s), g_s]| \\ &=: I + II. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (5.32), (5.20) y (5.21), podemos acotar I y II de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I &\leq \gamma |x_1[f](t) - x_1[f](s)| + 2\|f_t - f_s\|_{BL} \\ &\leq \gamma N(\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*)(t - s) + 2(1 + \kappa\bar{R})\|f_t - f_s\|_{BL}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} II &\leq \gamma |x_1[f](s) - x_1[g](s)| + 2(1 + \kappa\bar{R})\|f_s - g_s\|_{BL} \\ &\leq \gamma NR\sigma s e^{M_R s} \max_{0 \leq \tau \leq s} \|f_\tau - g_\tau\|_{BL} + 2(1 + \kappa\bar{R})\|f_s - g_s\|_{BL}. \end{aligned}$$

Probemos (ii). Usando (5.30) y (5.31) escribimos

$$f_t + h\tilde{Q}[f]_t = (1 - 2h)f_t + h(\tilde{Q}^+[f]_t + \tilde{Q}^{int+}[f]_t)$$

con  $\tilde{Q}^+[f]_t = Q^+[x[f](t), f_t]$  y  $(\tilde{Q}^{int+}[f]_t, \phi) = \int \int \phi(a + \kappa(a' - a))df(a)df(a')$  la parte positiva del término de interacción. Como  $f_t$  es una medida de probabilidad,  $\tilde{Q}^+[f]_t$  y  $\tilde{Q}^{int+}[f]_t$  son medidas no negativas y también lo es  $(1 - 2h)f_t$  para  $h \in [0, 1/2]$ . Por lo tanto la suma  $f_t + h\tilde{Q}[f]_t$  es una medida no negativa.

Mas aún,

$$(f_t + h\tilde{Q}[f]_t, 1) = (1 - h)(f_t, 1) + h(Q^+[x[f](t), f_t], 1) + (Q^{int+}[x[f](t), f_t], 1) = (f_t, 1) = 1.$$

Entonces,  $f_t + h\tilde{Q}[f]_t$  es una medida de probabilidad. En particular, su norma TV es 1. Falta ver que  $f_t + h\tilde{Q}[f]_t$  está soportada en  $[0, R]$ . Como  $f_t$  está soportada en  $[0, R]$ , tenemos que ver que  $Q^+[x[f](t), f_t]$  y  $Q^{int+}[x[f](t), f_t]$  también. Para  $Q^+$ , recordemos que  $x_1[f](t) \in [0, N]$  por la Proposición 5.5.1. Por lo que dijimos anteriormente,  $Q^+[x[f](t), f_t]$  está soportada en  $[0, \bar{R}]$  con  $\bar{R} = \max\{N, R\}$ . Es decir,  $\bar{R} = R$  por la definición de  $R$ . Por otro lado, el soporte de  $Q^{int+}$  no puede ser mayor que el soporte de  $f$  porque acerca la medida a la esperanza de  $f$ .  $\square$

Podemos concluir la prueba de existencia y unicidad de la ecuación (5.24) en  $[0, T]$ . De acuerdo a la Proposición 5.5.3, el operador  $\tilde{Q}$  satisface las tres hipótesis del teorema [3][Theorem 6.1].

Efectivamente, (i) y (ii) de la proposición 5.5.3 nos da la condición de Holder (5.27) con  $\beta = 1$  y la *sub-tangent condition* (5.28). Mas aún, es fácil ver que la *one-sided Lipschitz condition* (5.29) también se cumple cuando la condición de Holder vale para  $\beta = 1$ . Como  $T$  es arbitrario, obtenemos la existencia y unicidad de solución en  $[0, \infty]$ . Observamos que  $f \in E$  para todo  $T$ , entonces  $f_t$  es una medida de probabilidad soportada en  $[0, R]$ .

### 5.5.2. Demostración del Teorema 5.2.1.

Reescribimos el sistema (5.5) como

$$\begin{aligned} \partial_t g_t + \partial_a(v[x(t)](a)g_t) &= 0, \\ x'(t) &= F[g_t](x(t)), \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1(t), x_2(t)) := (W(t), I(t)), \\ v[x(t)](a) &= x_1(t) - a, \end{aligned}$$

y, dada  $g \in P(\mathbb{R})$ , el campo  $F[g] : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tiene componentes

$$\begin{aligned} F_1[g](x) &= x_1(\rho x_2 - \eta x_1 - \sigma \langle a \rangle_g + (\sigma + \eta)a_\delta^*), \\ F_2[g](x) &= x_2(\alpha \langle e^{-a} \rangle_g (1 - x_2) - \beta), \end{aligned}$$

con  $\langle a \rangle_g := \int_{-\infty}^{+\infty} a dg(a)$  y  $\langle e^{-a} \rangle_g := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a} dg(a)$ .

Fijamos condiciones iniciales  $x_0 = (W(0), I(0)) \in \mathbb{R}^2$  y  $g_0 \in P(\mathbb{R})$  con soporte compacto. Tomamos  $R_0 > 0$  de manera que  $\text{supp}(g_0) \subset [-R_0, R_0]$ .

Queremos reescribir (5.35) como un problema de punto fijo. Dado un  $T > 0$  que elegiremos más tarde, consideramos el espacio

$$X_T = C([0, T], P(\mathbb{R})) \times C([0, T], \mathbb{R}^2)$$

con la norma del supremo. Como  $P(\mathbb{R})$  es completo,  $X_T$  es completo. Consideramos ahora el conjunto  $Y_T$  que consiste de los pares  $(g, x) \in X_T$  tal que

$$\begin{aligned} g(0) &= g_0, & x(0) &= x_0, \\ |x(t) - x_0| &\leq 1 & t &\in [0, T], \\ \text{supp}(g_t) &\subset [-2R_0, 2R_0] & t &\in [0, T]. \end{aligned}$$

Entonces  $Y_T$  es completo como un subconjunto cerrado de  $X_T$

Dado  $(g, x) \in Y_T$ , definimos el operador  $\Gamma(g, x) : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_b(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$  como

$$\Gamma(g, x)_t = (\Gamma^1(g, x)_t, \Gamma^2(g, x)_t) := \left( T_t^{v[x_t]} \# g_0, x_0 + \int_0^t F[g_s](x(s)) ds \right)$$

donde  $T_t^{v[x_t]}$  es el flujo de  $v[x_t]$ , es decir  $T_t^{v[x_t]} = T_{0,t}^{v[x_t]}$  y para todo  $a \geq 0$  y todo tiempo  $t \geq s \geq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} T_{s,t}^{v[x_t]}(a) = v[x_t](T_{s,t}^{v[x_t]}(a)), \quad t > s, \quad T_{s,s}^{v[x_t]}(a) = a.$$

Entonces, si tomamos  $T$  lo suficientemente chico,  $(g, x)$  resuelve (5.35) en  $[0, T]$  con condiciones iniciales  $(g_0, x_0)$  si y solo si  $(g, x) \in Y_T$  y  $(g, x)$  es un punto fijo de  $\Gamma$ .

Probemos la existencia de un punto fijo de  $\Gamma$  usando el Teorema de Punto Fijo de Banach en  $Y_T$ . Necesitamos ver que

(i)  $\Gamma(Y_T) \subset Y_T$ ,

(ii)  $\Gamma$  es contracción.

Fijemos  $(g, x) \in Y_T$ . Entonces para  $t \in [0, T]$ ,  $|x(t)| \leq 1 + |x_0|$  y  $g_t$  está soportado en  $[-2R_0, 2R_0]$ . Tenemos  $\max_{0 \leq s \leq T} |F[g_s](x(s))| \leq C$  con  $C = C(|x_0|, R_0)$ , entonces  $\Gamma^2(g, x)_t$  es continua en  $t \in [0, T]$ . Mas aún, como  $v[x_t]$  es acotada y globalmente Lipschitz en  $[0, T]$ , la función  $t \rightarrow T_{s,t}^{v[x_t]}(a)$  está bien definida y es continua en  $[0, T]$  para todo  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces para toda  $\phi \in C_b(\mathbb{R})$ ,  $(\Gamma^1(g, x)_t, \phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(T_t^{v[x_t]}(a)) dg_0(a)$  es continua en  $t$  por el teorema de convergencia dominada.

Hemos probado que  $\Gamma(g, x) \in Y_T$ . Mas aún,  $\Gamma(g, x)_{t=0} = (g_0, x_0)$ . Tambien  $|\Gamma^1(g, x)_t - x_0| \leq \int_0^t F[g_s](x(s)) ds \leq CT$  que es menor que 1 eligiendo  $T$  lo suficientemente chico en  $|x_0|$  y  $R_0$ .

Finalmente, como para todo  $z \in \mathbb{R}$  y todo  $s \in [0, T]$ ,

$$|v[x(s)](z)| \leq |x_1(s)| + |z| \leq 1 + |x_0| + |z|,$$

tenemos

$$|T_t^{v[x_t]}(a)| \leq |a| + \int_0^t |v[x_s](T_s^{v[x_s]}(a))| ds \leq |a| + T(1 + |x_0|) + \int_0^t |T_s^{v[x_s]}(a)| ds.$$

Usando la desigualdad de Gronwall, obtenemos

$$|T_t^{v[x_t]}(a)| \leq [|a| + T(1 + |x_0|)]e^T.$$

Si  $a \in [-R_0, R_0]$  tenemos entonces  $|T_t^{v[x_t]}(a)| \leq 2R_0$  si elegimos  $T$  lo suficientemente chico dependiendo solo de  $x_0$  y  $R_0$ . Ahora, para toda función suave  $\phi$  con soporte compacto en  $\{|a| > 2R_0\}$  podemos deducir

$$(\Gamma^1(g, x)_t, \phi) = \int_{-R_0}^{R_0} \phi(T_t^{v[x_t]}(a)) dg_0(a) = 0.$$

Concluimos que  $\Gamma^1(g, x)_t$  está soportado en  $[-2R_0, 2R_0]$  para todo  $t \in [0, T]$ . Hemos probado que podemos elegir  $T$  lo suficientemente chico dependiendo solo del módulo  $|x_0|$  y de  $R_0$  tal que  $\Gamma(Y_T) \subset Y_T$ .

Vamos a ver ahora (ii), que  $\Gamma$  es una contracción estricta para  $T$  chico. Notamos primero que existen constantes  $L_1$  y  $L_2$  que dependen solo de  $R_0$  y  $x_0$  tal que para todas  $g, \bar{g} \in P(\mathbb{R})$  soportadas en  $[-R_0, R_0]$  y toda  $x, \bar{x} \in B(x_0, 1)$ , vale

$$|F[g](x) - F[g](\bar{x})| \leq L_1|x - \bar{x}|, \quad (5.36)$$

$$|F[g](\bar{x}) - F[\bar{g}](\bar{x})| \leq L_2W_1(g, \bar{g}). \quad (5.37)$$

La primera desigualdad es clara. Basta escribir la diferencia  $|F[g](x) - F[g](\bar{x})|$  y darse cuenta de que queda un polinomio en dos variables  $x_1, x_2, \bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ . Para ver la segunda, usamos que

$$|F_1[g](\bar{x}) - F_1[\bar{g}](\bar{x})| = \sigma|\bar{x}_1| \left| \int_{-2R_0}^{2R_0} a d(g - \bar{g}) \right| \leq \sigma(1 + |x_0|)W_1(g, \bar{g}).$$

El mismo tipo de desigualdad vale para  $F_2$ .

Como consecuencia de estas dos desigualdades, obtenemos

$$|F[g](x) - F[\bar{g}](\bar{x})| \leq L_3(|x - \bar{x}| + W_1(g, \bar{g}))$$

donde  $L_3 = \max\{L_1, L_2\}$ .

Dada  $(g, x), (\bar{g}, \bar{x}) \in Y_T$ , deducimos de esta desigualdad que para todo tiempo  $t \in [0, T]$ ,

$$\begin{aligned} |\Gamma^2(g, x)_t - \Gamma^2(\bar{g}, \bar{x})_t| &\leq L_3 \int_0^t |x(s) - \bar{x}(s)| + W_1(g_s, \bar{g}_s) ds \\ &\leq L_3T(\|x - \bar{x}\|_\infty + \max_{0 \leq t \leq T} W_1(g_t, \bar{g}_t)) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Vamos a acotar ahora  $\Gamma^1$ . Simplificamos un poco la notación notando  $T_t := T_t^{v[x_t]}$  y  $\bar{T}_t := T_t^{v[\bar{x}_t]}$ . Tenemos

$$|T_t(a) - \bar{T}_t(a)| \leq \int_0^t |v[x(s)](T_t(a)) - v[\bar{x}(s)](\bar{T}_t(a))| ds \quad (5.39)$$

$$\leq \int_0^t |x_1(s) - \bar{x}_1(s)| + |T_t(a) - \bar{T}_t(a)| ds, \quad (5.40)$$

y por la desigualdad de Gronwall,

$$|T_t(a) - \bar{T}_t(a)| \leq T \|x - \bar{x}\|_\infty e^t.$$

Entonces, para toda función  $\phi$  que sea 1-Lipschitz y todo  $a \in \mathbb{R}$ , obtenemos

$$|\phi(T_t(a)) - \phi(\bar{T}_t(a))| \leq |T_t(a) - \bar{T}_t(a)| \leq T \|x - \bar{x}\|_\infty e^t.$$

y luego

$$(\Gamma^1(g, x)_t - \Gamma^1(\bar{g}, \bar{x})_t, \phi) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(T_t(a)) - \phi(\bar{T}_t(a)) dg_0(a) \leq T \|x - \bar{x}\|_\infty e^t.$$

Tomando el supremo sobre todas las  $\phi$ , obtenemos

$$\max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma^1(g, x)_t, \Gamma^1(\bar{g}, \bar{x})_t) \leq T e^T \|x - \bar{x}\|_\infty.$$

Juntando esto con la cota anterior para  $\Gamma^2$  en (5.38)

$$\begin{aligned} \|\Gamma(g, x) - \Gamma(\bar{g}, \bar{x})\|_{X_T} &= \max_{0 \leq t \leq T} W_1(\Gamma^1(g, x)_t, \Gamma^1(\bar{g}, \bar{x})_t) + \max_{0 \leq t \leq T} |\Gamma^1(g, x)_t - \Gamma^1(\bar{g}, \bar{x})_t| \\ &\leq T(e^T + L_3) \|x - \bar{x}\|_\infty + L_3 T \max_{0 \leq t \leq T} W_1(g_t, \bar{g}_t) \end{aligned}$$

Podemos entonces elegir  $T$  lo suficientemente chico y dependiendo solo de  $L_3$ , que dependía solo de  $x_0$  y  $R_0$ , de manera que  $\Gamma$  sea una contracción estricta.

Aplicando el Teorema del Punto Fijo de Banach,  $\Gamma$  tiene un único punto fijo en  $Y_T$  y por lo tanto existe una única solución de (5.35) en  $[0, T]$ . Repitiendo este argumento, obtenemos la existencia de una solución maximal  $(g, x)$  que está definida en algun intervalo maximal  $[0, T^*)$  con  $T^* \leq \infty$ .

Supongamos ahora que  $g_0$  está soportada en  $[0, +\infty)$  y que  $x(0) = (W(0), I(0)) \in [0, +\infty) \times [0, 1]$ . Vamos a ver que  $T^* = +\infty$ ,  $g_t$  está soportada en un compacto fijo de  $[0, +\infty)$ ,  $x_1$  es no negativo y acotado y que  $x_2(t) \in [0, 1]$ . Esto concluirá la demostración de 5.2.1.

Como  $F_1[g](0, x_2) = F_2[g](x_1, 0) = F_2[g](x_1, 1) = 0$  para todas  $g, x_1, x_2$ , y  $x_1(0) \geq 0$ ,  $x_2(0) \in [0, 1]$ , tenemos que  $x_1(t) \geq 0$  y  $x_2(t) \in [0, 1]$ . Usando que  $x_1 \geq 0$ , para todo  $a \geq 0$  vale que  $T_t(a) \geq 0$ . De hecho, el lado derecho de  $\frac{d}{dt} T_t(a) = x_1(t) - T_t(a)$  es positivo cuando  $T_t(a) = 0$ .

Entonces, si  $g_0$  está soportada en  $[0, +\infty)$ ,  $g_t = T_t \# g_0$  también lo está.

Vamos a acotar  $x_1$ . Como  $x_2 \leq 1$  y  $\langle a \rangle_{g_t} \geq 0$ , escribimos

$$x_1'(t) \leq \gamma x_1(t) \left( \frac{\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*}{\eta} - x_1 \right).$$

Tomando  $M > \max\{x_1(0), \frac{\rho + (\sigma + \eta)a_\delta^*}{\gamma}\}$ , vale que  $x_1(t) \leq M$ . Como consecuencia,  $g_t$  está soportada en un compacto (fijo) para todo  $t$ . En efecto, sea  $R_0$  tal que  $\text{supp}(g_0) \subset [0, R_0]$  y  $R_0 > M$ . Entonces para todo  $a \in [0, R_0]$ , vale  $T_t(a) \leq R_0$  para todo  $t$  ya que el lado derecho de  $\frac{d}{dt}T_t(a) = x_1(t) - T_t(a)$  es más chico que  $M - T_t(a)$  que es menor que cero cuando  $T_t(a) = R_0$ . Por lo tanto  $g_t = T_t \# g_0$  está soportada en  $[0, R_0]$  para todo  $t$ . Finalmente, como  $g_t = T_t \# g_0$  está soportada en  $[0, R_0]$  y  $x(t) \in [0, M] \times [0, 1]$ , tenemos  $T^* = +\infty$ , es decir, la solución  $(g, x)$  está definida para todo  $t \geq 0$ .

### 5.5.3. Demostración del teorema 5.2.2.

Sea una condición inicial  $(f_0, W_0, I_0)$  con  $f_0 \in P([0, +\infty))$  de soporte compacto,  $W_0 \geq 0$  y  $I_0 \in [0, 1]$ .

Notamos  $(f_t^\gamma, W^\gamma(t), I^\gamma(t))$  la solución de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \phi(a) df_t^\gamma(a) &= \int [\phi(a') - \phi(a)] df_t^{\gamma'}(a) \quad \phi \in C_b([0, +\infty)), \\ \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} W^\gamma(t) &= W(t) \left( \rho I^\gamma(t) + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle)_t + \eta(a_\delta^* - W^\gamma(t)) \right), \\ \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} I^\gamma(t) &= \alpha \langle e^{-a} \rangle I^\gamma(t) (1 - I^\gamma(t)) - \beta I^\gamma(t). \end{aligned} \quad (5.41)$$

donde  $a' = a + \gamma(W^\gamma(t) - a)$ ,  $\langle a \rangle = \int a df_t^\gamma$  y  $\langle e^{-a} \rangle = \int e^{-a} df_t^\gamma$ .

Como

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} W^\gamma(t) \leq \eta W^\gamma(t) \left( \frac{\rho + (\sigma + \eta)}{\eta} a_\delta^* - W^\gamma(t) \right)$$

tenemos  $0 \leq W^\gamma(t) \leq \max\{W_0, \frac{\rho + (\sigma + \eta)}{\eta}\}$ . Podemos entonces tomar  $R \geq 0$  de forma que  $f_0$  está soportada en  $[0, R]$  y  $W^\gamma(t) \in [0, R]$ . Como antes, tenemos que  $f_t^\gamma$  está soportada en  $[0, R]$  para todo  $t \geq 0$  y todo  $\gamma$ .

Dada  $\phi \in C^2([0, R])$ , usamos el desarrollo de Taylor para aproximar  $\phi(a') - \phi(a)$ .

$$\begin{aligned} \phi(a') - \phi(a) &= \phi'(a)(a' - a) + \frac{1}{2} \phi''(\xi)(a - a')^2 \\ &= \phi'(a)\gamma(W^\gamma(t) - a) + \frac{1}{2} \phi''(\xi)\gamma^2(W^\gamma(t) - a)^2, \end{aligned}$$

donde  $\xi = \theta a + (1 - \theta)a'$  para algún  $\theta \in (0, 1)$ . Reemplazando, obtenemos entonces

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \int \phi(a) df_t^\gamma(a) = \int \phi'(a)(W^\gamma(t) - a) df_t^\gamma(a) + R^\gamma(t), \quad (5.42)$$

donde

$$R^\gamma(t) = \frac{\gamma}{2} \int \phi''(\xi)(W^\gamma(t) - a)^2 df_t^\gamma(a).$$

Acotamos  $R^\gamma(t)$  por

$$|R^\gamma(t)| \leq \gamma \|\phi''\|_\infty \int W^\gamma(t)^2 + a^2 df_t^\gamma(a) \leq 2\gamma \|\phi''\|_\infty R^2,$$

donde usamos que  $W^\gamma(t) \in [0, R]$  y  $f_t^\gamma$  están soportadas en  $[0, R]$  para todo  $t \geq 0$  y todo  $\gamma$ .

Definimos un reescale de tiempo  $\tau = \gamma t$  y notamos  $g_\tau^\gamma := f_t^\gamma$ ,  $\tilde{W}^\gamma(\tau) = W^\gamma(t)$  y  $\tilde{I}^\gamma(\tau) = I^\gamma(t)$ . Entonces,

$$\frac{d}{d\tau} \int \phi(a) dg_\tau^\gamma(a) = \int \phi'(a)(\tilde{W}^\gamma(\tau) - a) dg_\tau^\gamma(a) + R^\gamma(\tau/\gamma).$$

Integrando entre  $s$  y  $t$  con  $s < t$ ,

$$\int \phi dg_t^\gamma - g_s^\gamma \leq \int_s^t \int \phi'(a)(\tilde{W}^\gamma(\tau) - a) dg_\tau^\gamma(a) d\tau + 2\gamma \|\phi''\|_\infty R^2(t - s).$$

Consideramos  $X = C^2([0, R])$  con la norma  $\|\phi\|_X = \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty + \|\phi''\|_\infty$ , y para  $P([0, R])$  definimos la norma

$$\|\mu\| := \sup_{\phi \in X, \|\phi\|_X \leq 1} \int \phi d\mu. \quad (5.43)$$

Entonces, para todo  $\gamma > 0$  y todos  $s, t \geq 0$ ,

$$\|g_t^\gamma - g_s^\gamma\| \leq C|t - s| \quad C = 2R(1 + 2\gamma R). \quad (5.44)$$

Por otro lado, de manera independiente, escribimos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{W}^\gamma(\tau) &= \tilde{W}^\gamma(\tau) (\rho \tilde{I}^\gamma(\tau) + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle) + \eta(a_\delta^* - \tilde{W}^\gamma(\tau))), \\ \frac{d}{d\tau} \tilde{I}^\gamma(\tau) &= \alpha \langle e^{-a} \rangle \tilde{I}^\gamma(\tau) (1 - \tilde{I}^\gamma(\tau)) - \beta \tilde{I}^\gamma(\tau), \end{aligned} \quad (5.45)$$

abusando un poco la notación con  $\langle a \rangle = \int a dg_\tau^\gamma$  y  $\langle e^{-a} \rangle = \int e^{-a} dg_\tau^\gamma$ .

Como  $\tilde{W}^\gamma(\tau) \in [0, R]$  y  $\tilde{I}^\gamma(\tau) \in [0, 1]$  para todo  $\gamma$  y todo  $\tau \geq 0$ , tenemos

$$\left| \frac{d}{d\tau} \tilde{W}^\gamma(\tau) \right| \leq \tilde{W}^\gamma(\tau) (\rho + \sigma + \eta) \leq R(\rho + \sigma + \eta)$$

y

$$\left| \frac{d}{d\tau} \tilde{I}^\gamma(\tau) \right| \leq \alpha + \beta.$$

Entonces, existe  $C > 0$  que depende solo de  $f_0, \rho, \sigma, \eta, \alpha, \beta$  tal que para todos  $s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} |\tilde{W}^\gamma(t) - \tilde{W}^\gamma(s)| &\leq C|t - s|, \\ |\tilde{I}^\gamma(t) - \tilde{I}^\gamma(s)| &\leq C|t - s|. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Consideramos el espacio  $\tilde{X} := P([0, R]) \times [0, R] \times [0, 1]$  con la norma  $\|(f, w, i)\|_{\tilde{X}} := \|f\|_X + w + i$ . Se sigue de [23][Lemma 5.3 y Corollary 5.5] que la norma  $\|\cdot\|$  definida en (5.43) induce la topología débil en  $P([0, R])$ . Entonces  $(\tilde{X}, \|\cdot\|_{\tilde{X}})$  es compacto. Más aún (5.44) y (5.46) muestran que la sucesión  $(g^\gamma, \tilde{W}^\gamma, \tilde{I}^\gamma)_\gamma$  que ya era acotada, es uniformemente equicontinua. Entonces, por el teorema de Arzela-Ascoli, junto con un argumento diagonal, tenemos asegurada la existencia de una terna  $(g, W, I)$  con  $g \in C([0, \infty); P([0, R]))$ ,  $W \in C([0, \infty); [0, R])$ ,  $I \in C([0, \infty); [0, 1])$  y una subsucesión  $(\gamma_n)_n$  que converge a 0 tal que  $(g^{\gamma_n}, \tilde{W}^{\gamma_n}, \tilde{I}^{\gamma_n})_n$  converge a  $(g, W, I)$  en  $C([0, T]; P([0, R])) \times C([0, T]; [0, R]) \times C([0, T]; [0, 1])$  para todo  $T > 0$ .

Lo que nos falta ver es que  $(g, W, I)$  resuelve el sistema (5.3) con condiciones iniciales  $(f_0, W_0, I_0)$ . Para facilitar la notación vamos a escribir  $\gamma$  en vez de  $\gamma_n$ . Dados  $\tau \geq 0$  y  $\phi \in C^1([0, R])$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^R \phi dg_\tau^\gamma - \int \phi df_0 &= \int_0^\tau \int_0^R \phi'(a)(\tilde{W}^\gamma(t) - a) dg_t^\gamma(a) dt + O(\gamma), \\ \tilde{W}^\gamma(\tau) - W_0 &= \int_0^\tau \tilde{W}^\gamma(t) (\rho \tilde{I}^\gamma(t) + \sigma(a^* - \langle a \rangle) + \eta(a^* - \tilde{W}^\gamma(t))) dt, \\ \tilde{I}^\gamma(\tau) - I_0 &= \int_0^\tau \alpha \langle e^{-a} \rangle \tilde{I}^\gamma(t) (1 - \tilde{I}^\gamma(t)) - \beta \tilde{I}^\gamma(t) dt. \end{aligned}$$

Como  $a$  y  $e^{-a}$  son funciones continuas en todo su dominio, en particular en  $[0, R]$ , tenemos  $\langle a \rangle = \int_0^R a dg_\tau^\gamma \rightarrow \int_0^R a dg_\tau$  y  $\langle e^{-a} \rangle = \int_0^R e^{-a} dg_\tau^\gamma \rightarrow \int_0^R e^{-a} dg_\tau$  cuando  $\gamma \rightarrow 0$ .

Podemos pasar al límite  $\gamma \rightarrow 0$  en las ecuaciones de  $\tilde{W}^\gamma$  y  $\tilde{I}^\gamma$ . Mas aún, para todo  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^R \phi'(a)(\tilde{W}^\gamma(t) - a) dg_t^\gamma(a) &= \int_0^R \phi'(a)(W(t) - a) dg_t^\gamma(a) \\ &\quad + (\tilde{W}^\gamma(t) - W(t)) \int_0^R \phi'(a) dg_t^\gamma(a) \\ &\rightarrow \int_0^R \phi'(a)(W(t) - a) dg_t(a) \end{aligned}$$

con

$$\left| \int_0^R \phi'(a)(\tilde{W}^\gamma(t) - a) dg_t^\gamma(a) \right| \leq \|\phi'\|_\infty R^2.$$

Podemos entonces pasar al límite usando el Teorema de Convergencia Dominada en la ecuación de  $g^\gamma$ . Obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \int_0^R \phi dg_\tau - \int \phi df_0 &= \int_0^\tau \int_0^R \phi'(a)(W(t) - a) dg_t(a) dt, \\ W(\tau) - W_0 &= \int_0^\tau W(t) (\rho I(t) + \sigma(a^* - \langle a \rangle) + \eta(a^* - W(t))) dt, \\ I(\tau) - I_0 &= \int_0^\tau \alpha \langle e^{-a} \rangle I(t) (1 - I(t)) - \beta I(t) dt. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración del teorema 5.2.2, y la tesis.

# Apéndice A

## Otras reglas de contagio

Presentamos las derivaciones de las ecuaciones ordinarias cuando el contagio entre el agente susceptible  $i$  y el infectado  $j$  dependen del nivel de esfuerzo del agente infectado, o de ambos. La cuenta es muy similar a la derivación anterior.

### A.1. Nivel de esfuerzo del infectado

Si el contagio depende del nivel de esfuerzo del agente infectado  $j$ , ocurre con probabilidad  $p_j\beta$ .

Para un agente  $i$  susceptible,

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)}{2} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} \\ &= -h_1 p_i \sum_{j \in Inf} \beta p_j + h_2(1 - p_i) \sum_{j \in Inf} (1 - \beta p_j) + h \sum_{j \in Sus} (p_j - p_i) \\ &= -h_1 \beta p_i (n - k) \langle p_I \rangle + h_2(n - k)(1 - p_i)(1 - \beta \langle p_I \rangle) + h \sum_{j \in Sus} (p_j - p_i). \end{aligned}$$

Para un agente  $i$  infectado,

$$\begin{aligned} & \frac{n(n-1)}{2} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} \\ &= -h_1 p_i \sum_{j \in Sus} \beta p_i + h_2(1 - p_i) \sum_{j \in Sus} (1 - \beta p_i) + h \sum_{j \in Inf} (p_j - p_i) \\ &= -h_1 \beta p_i^2 k + h_2 k(1 - p_i)(1 - \beta p_i) + h \sum_{j \in Inf} (p_j - p_i). \end{aligned}$$

Sumando sobre  $i$  y usando que  $\sum_{i,j \in Sus} (p_j - p_i) = \sum_{i,j \in Inf} (p_j - p_i) = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -h_1 \beta (n - k) \langle p_I \rangle \sum_{i \in Sus} p_i + h_2(n - k) \sum_{i \in Sus} (1 - p_i)(1 - \beta \langle p_I \rangle) \\ &\quad - h_1 \beta k \sum_{i \in Inf} p_i^2 + h_2 k \sum_{i \in Inf} (1 - p_i)(1 - \beta p_i), \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -h_1 \beta k(n-k) (\langle p_I \rangle \langle p_S \rangle + \langle p_I^2 \rangle) \\ &\quad + h_2 k(n-k) (2 - (1+2\beta) \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle + \beta \langle p_I \rangle \langle p_S \rangle + \beta \langle p_I^2 \rangle). \end{aligned}$$

Dividiendo por  $n^2$  y reescalando el tiempo para eliminar el factor  $(n-1)/2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= (h_2 - h_1) \beta S (1 - S) (\langle p_I \rangle \langle p_S \rangle + \langle p_I^2 \rangle) \\ &\quad + h_2 S (1 - S) (2 - (1 + 2\beta) \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle). \end{aligned}$$

## A.2. Niveles de esfuerzo de ambos

Cuando la probabilidad de contagio depende del nivel de esfuerzo de ambos agentes, el contagio ocurre con probabilidad  $p_i p_j \beta$ .

Para un agente  $i$  susceptible,

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-1)}{2} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} \\ &= -h_1 p_i \sum_{j \in Inf} \beta p_i p_j + h_2 (1 - p_i) \sum_{j \in Inf} (1 - \beta p_i p_j) + h \sum_{j \in Sus} (p_j - p_i) \\ &= -h_1 \beta p_i^2 (n-k) \langle p_I \rangle + h_2 (n-k) (1 - p_i) (1 - \beta p_i \langle p_I \rangle) + h \sum_{j \in Sus} (p_j - p_i) \end{aligned}$$

Para un agente  $i$  infectado,

$$\begin{aligned} &\frac{n(n-1)}{2} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} \\ &= -h_1 p_i \sum_{j \in Sus} \beta p_i p_j + h_2 (1 - p_i) \sum_{j \in Sus} (1 - \beta p_i p_j) + h \sum_{j \in Inf} (p_j - p_i) \\ &= -h_1 \beta p_i^2 k \langle p_S \rangle + h_2 k (1 - p_i) (1 - \beta p_i \langle p_S \rangle) + h \sum_{j \in Inf} (p_j - p_i). \end{aligned}$$

Sumando sobre  $i$  y usando que  $\sum_{i,j \in Sus} (p_j - p_i) = \sum_{i,j \in Inf} (p_j - p_i) = 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -h_1 \beta (n-k) \langle p_I \rangle \sum_{i \in Sus} p_i^2 + h_2 (n-k) \sum_{i \in Sus} (1 - p_i) (1 - \beta p_i \langle p_I \rangle) \\ &\quad - h_1 \beta k \langle p_S \rangle \sum_{i \in Inf} p_i^2 + h_2 k \sum_{i \in Inf} (1 - p_i) (1 - \beta p_i \langle p_S \rangle) \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{n^2(n-1)}{2} \frac{d}{dt} \langle p \rangle &= -h_1 \beta k (n-k) (\langle p_I \rangle \langle p_S^2 \rangle + \langle p_I^2 \rangle \langle p_S \rangle) \\ &\quad + h_2 k (n-k) (2 - 2\beta \langle p_S \rangle \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle - \langle p_I \rangle + \beta \langle p_S^2 \rangle \langle p_I \rangle + \beta \langle p_S \rangle \langle p_I^2 \rangle) \end{aligned}$$

Dividiendo por  $n^2$ , y reescalando el tiempo para eliminar el factor  $(n - 1)/2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{2} \frac{d}{dt} \langle p \rangle = & (h_2 - h_1) \beta S (1 - S) (\langle p_I \rangle \langle p_S^2 \rangle + \langle p_I^2 \rangle \langle p_S \rangle) \\ & + h_2 S (1 - S) (2 - 2\beta \langle p_S \rangle \langle p_I \rangle - \langle p_S \rangle - \langle p_I \rangle) \end{aligned}$$



# Apéndice B

## Prueba del teorema 4.1.2

### B.1. Análisis de la estabilidad lineal.

Supongamos que  $\alpha > \beta$ . Linealizaremos el sistema:

$$\begin{cases} I'(t) = \langle e^{-a} \rangle \alpha I(t)(1 - I(t)) - \beta I(t), \\ a'_i(t) = -\xi(a_i(t) - W(t)), \quad i = 1, \dots, N, \\ W'(t) = W(t)(\rho I(t) + \sigma(a_\delta^* - \langle a \rangle_t) + \eta(a_\delta^* - W(t))) \end{cases}$$

en un entorno de los equilibrio  $(0, \dots, 0)$ ,  $(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0)$  y  $(0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*, a_\delta^*)$ .

En el  $(0, \dots, 0)$  obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - \beta & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & \dots & 0 & \xi \\ 0 & 0 & -\xi & \dots & 0 & \xi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\xi & \xi \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (\sigma + \eta)a_\delta^* \end{pmatrix}.$$

Observamos que  $\alpha - \beta > 0$ , con lo cual hay al menos un autovalor positivo. Entonces  $(0, \dots, 0)$  es inestable.

Linealizando en el  $(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0)$  obtenemos

$$A = \begin{pmatrix} \beta - \alpha & -\frac{\beta}{N}(1 - \frac{\beta}{\alpha}) & \dots & \dots & -\frac{\beta}{N}(1 - \frac{\beta}{\alpha}) & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & \dots & 0 & \xi \\ 0 & 0 & -\xi & \dots & 0 & \xi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\xi & \xi \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho(1 - \frac{\beta}{\alpha}) + (\sigma + \eta)a_\delta^* \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $\rho(1 - \frac{\beta}{\alpha}) + (\sigma + \eta)a_\delta^* > 0$  es un autovalor positivo. Entonces  $(1 - \frac{\beta}{\alpha}, 0, \dots, 0)$  también es inestable.

Por último, linealizando en el equilibrio  $P = (0, a_\delta^*, \dots, a_\delta^*, a_\delta^*)$  nos queda la siguiente matriz de  $(N + 2) \times (N + 2)$ :

$$A = \begin{pmatrix} \beta(e^{-\delta} - 1) & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & \dots & 0 & \xi \\ 0 & 0 & -\xi & \dots & 0 & \xi \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\xi & \xi \\ \rho a_\delta^* & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} & \dots & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} & -\eta a_\delta^* \end{pmatrix}.$$

Recordemos que  $A$  y su traspuesta  $A^T$  tienen los mismos autovalores,

$$A^T = \begin{pmatrix} \beta(e^{-\delta} - 1) & 0 & \dots & \dots & 0 & \rho a_\delta^* \\ 0 & -\xi & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \vdots & 0 & -\xi & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -\xi & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ 0 & \xi & \xi & \dots & \xi & -\eta a_\delta^* \end{pmatrix}$$

y mirando la primera columna de  $A^T$  podemos ver que  $\beta(e^{-\delta} - 1)$  es un autovalor que es negativo cuando  $\delta > 0$  y positivo cuando  $\delta < 0$ . En particular, si  $\delta < 0$  entonces  $P$  es inestable.

Observemos ahora que

$$A^T + \xi I = \begin{pmatrix} \beta(e^{-\delta} - 1) + \xi & 0 & \dots & 0 & \rho a_\delta^* \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ 0 & \xi & \dots & \xi & \xi - \eta a_\delta^* \end{pmatrix}$$

tiene rango 3 entonces su núcleo tiene dimensión  $(N + 2) - 3 = N - 1$ . Por lo tanto  $-\xi$  es un autovalor de  $A^T$  con multiplicidad  $N - 1$ .

Notamos  $\lambda$  y  $\mu$  los dos autovalores restantes de  $A^T$ . Evaluando la traza de  $A^T$  obtenemos

$$\lambda + \mu - (N - 1)\xi + \beta(e^{-\delta} - 1) = \sum_i A_{ii} = \beta(e^{-\delta} - 1) - (N - 1)\xi - \eta a_\delta^*,$$

que brinda

$$\lambda + \mu = -\eta a_\delta^*. \quad (\text{B.1})$$

Evaluando el determinante de  $A^T$  obtenemos primero

$$\det(A) = \lambda \mu (-\xi)^{N-1} \beta(e^{-\delta} - 1). \quad (\text{B.2})$$

Y por otro lado,

$$\det(A) = \beta(e^{-\delta} - 1) \det(B)$$

donde

$$B = \begin{pmatrix} -\xi & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ 0 & -\xi & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\xi & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \xi & \xi & \dots & \xi & -\eta a_\delta^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}.$$

Sumando a la última fila de  $B$  la suma de las primeras  $N$  filas nos da

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} -\xi & 0 & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ 0 & -\xi & \dots & 0 & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\xi & -\frac{\sigma a_\delta^*}{N} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -(\eta + \sigma)a_\delta^* \end{pmatrix} = (-1)^{N+1} \xi^N (\eta + \sigma) a_\delta^*.$$

En vista de la ecuación (B.2) concluimos que

$$\lambda\mu = \xi(\eta + \sigma)a_\delta^*. \quad (\text{B.3})$$

Por lo tanto, los dos últimos autovalores  $\lambda$  y  $\mu$  de  $A^T$  satisfacen

$$\lambda + \mu = -\eta a_\delta^*, \quad \lambda\mu = \xi(\eta + \sigma)a_\delta^*.$$

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  entonces  $\mu = \bar{\lambda}$  y por lo tanto  $2\text{Re}(\lambda) = -\eta a_\delta^*$ .

Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  entonces tienen que ser negativos porque  $\lambda\mu > 0$  y  $\lambda + \mu < 0$ .

En ambos casos obtenemos  $\text{Re}(\lambda), \text{Re}(\mu) < -C$  con  $C > 0$  independiente de  $N$ .

Recordando que los demás  $N$  autovalores de  $A^T$  son  $\beta(e^{-\delta} - 1)$  (simples, negativos si  $\delta > 0$ ) y  $-\xi$  (con multiplicidad  $N - 1$ ), concluimos que existe  $C > 0$  independiente de  $N$  tal que los autovalores de  $A$  tienen parte real menor que  $-C$



# Apéndice C

## Existencia para la ecuación de Boltzmann

En función de la completitud de este trabajo, presentamos la demostración del Teorema 6.1 de [3], motivado por [12], que usamos en la demostración del Teorema 5.5.1.

**Definición 1.** Sean  $E := (E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach, y  $S \subset E$  un subconjunto de  $E$ . Un operador  $Q : C([0, T], S) \rightarrow C([0, T], E)$  un operador causal si a tiempo  $t$  está definido sólo por los valores de  $f$  en  $[0, t]$ , es decir

$$Q(f)(t) = Q(g)(t) \text{ si } f(s) \equiv g(s) \text{ para } 0 \leq s \leq t.$$

**Teorema C.0.1.** Sean  $E := (E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach, y  $S \subset E$  un subconjunto de  $E$  que es cerrado, acotado y convexo. Sea  $Q : C([0, T], S) \rightarrow C([0, T], E)$  un operador causal que satisface las siguientes propiedades:

- *Holder Continuity Condition:*

Para todas  $f, g \in C([0, T], S)$  y tiempos  $0 \leq t \leq s \leq T$ , existe  $\beta \in (0, 1)$  tal que

$$\|Q(f)(t) - Q(g)(s)\| \leq C \left( \sup_{\sigma \in [0, t]} \|f(\sigma) - g(\sigma)\|^\beta + \|f(t) - g(s)\|^\beta + |t - s|^\beta \right).$$

- *Sub-tangent Condition:*

Para toda  $f \in C([0, T], S)$ ,

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \sup_{t \in [0, T]} \text{dist}(f(t) + hQ(f)(t), S) = 0.$$

- *One sided Lipschitz Condition:* Para todas  $f$  y  $g$  en  $C([0, T], S)$  y todo tiempo  $t \in [0, T]$ ,

$$\int_0^t [Q(f)(s) - Q(g)(s); f(s) - g(s)] ds \leq L \int_0^t \|f(s) - g(s)\| ds,$$

donde  $[\varphi; \phi] := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (\|\phi + h\varphi\| - \|\phi\|)$ .

Entonces la ecuación

$$\begin{cases} \partial_t f = Q(f) & \text{en } [0, T] \times E \\ f(0) = f_0, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

para  $f_0 \in S$ , tiene una única solución en  $C^1([0, T], E) \cap C([0, T], S)$

Este teorema generaliza el teorema de existencia de Peano para ecuaciones diferenciales ordinarias, y se demuestra haciendo una especie de método de Euler. Vamos a construir una poligonal que aproxima la solución y tomamos límite para quedarnos con una función límite que va a ser la única solución de la ecuación.

*Demostración.* Vamos a dividirla en distintos pasos.

**Paso 1. Extensión.**

Tomamos una función  $u \in C([0, T], S)$ . Por la condición de Holder, tenemos que

$$\sup_{s \in [0, t]} \|Q(u)(s)\| \leq C \sup_{[0, t]} \|u(s)\|^\beta \leq C C_S^\beta, \quad (\text{C.2})$$

donde usamos  $C_S$ , la cota de  $S$ , para la segunda desigualdad.

Afirmamos que, gracias a la condición de subtangencia, fijado  $0 < \varepsilon < 1$ , existe un  $h$  lo suficientemente chico y un  $w \in S$  que satisface

$$\|w - u - hQ\| < \frac{h\varepsilon}{2}.$$

Por la definición de límite inferior, existe una sucesión  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  que tiende a cero tal que

$$\left| \frac{1}{h_k} \text{dist}(u + h_k Q(u)(t), S) \right| \rightarrow 0.$$

Entonces existe un  $k_0$  tal que si  $k > k_0$ ,

$$\text{dist}(u + h_k Q(u)(t), S) < \frac{h_k \varepsilon}{2}.$$

Podemos fijar  $h$  tan chico como querramos, y va a existir un  $w \in S$  que satisface

$$\|w - u - hQ(u)(t)\| < \frac{h\varepsilon}{2}. \quad (\text{C.3})$$

Podemos entonces definir una extensión de  $u$  entre  $t$  y  $t + h$

$$\rho(s) := u(t) + \frac{(s - t)(w - u(t))}{h} \quad s \in [t, t + h]$$

¿Qué podemos decir de  $\rho$ ? Como  $S$  es convexo,  $\rho(s)$  está en  $S$  para todo  $s \in [t, t + h]$ . Más aún, usando C.3, la derivada por derecha de  $\rho$ , es  $\dot{\rho} = \frac{w - u(t)}{h}$  y cumple

$$\|\dot{\rho}(s) - Q(u)(t)\| = \left\| \frac{w - u(t)}{h} - Q(u)(t) \right\| = \frac{1}{h} \|w - u - hQ(u)(t)\| \leq \frac{1}{h} \frac{h\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo  $s \in [t, t + h]$ .

También podemos acotar  $\|\rho(s) - u(t)\|$ ,

$$\|\rho(s) - u(t)\| = \left\| \frac{(s-t)(w - u(t))}{h} \right\| \leq \|w - u(t)\| \quad (\text{C.4})$$

sumando y restando  $hQ(u)(t)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|w - u(t)\| &= \|w - u(t) - hQ(u)(t) + hQ(u)(t)\| \\ &\leq \frac{h\varepsilon}{2} + \|hQ(u)(t)\| \\ &\leq \frac{h\varepsilon}{2} + hCC_S^\beta. \end{aligned}$$

Podemos resumir la cota como

$$\|\hat{\rho}(s) - Q(u)(t)\| \leq h(1 + CC_S^\beta).$$

Tenemos una extensión de  $u$  en  $[0, t + h]$ .

$$u_e(s) := \begin{cases} u(s) & s \in [0, t] \\ \rho(s) & s \in [t, t + h] \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Ahora, como  $Q$  cumple la condición de continuidad de Holder, para todo  $s$  tal que  $t < s < t + h$  se tiene

$$\|Q(u_e)(s) - Q(u)(t)\| \leq C \left( \sup_{\sigma \in [0, t]} \|u_e(\sigma) - u(\sigma)\|^\beta + \|u_e(s) - u(t)\|^\beta + |s - t|^\beta \right).$$

Observemos que  $\|u_e(\sigma) - u(\sigma)\|$  es cero ya que  $u$  y  $u_e$  coinciden en  $[0, t]$ . Luego,

$$\|Q(u_e)(s) - Q(u)(t)\| \leq C(\|u_e(s) - u(t)\|^\beta + |s - t|^\beta) \leq C((h(1 + CC_S^\beta))^\beta + h^\beta).$$

Entonces, si

$$h \leq \left( \frac{1}{C(1 + (1 + CC_S^\beta)^\beta)} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

tenemos

$$\|Q(u_e)(s) - Q(u)(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En  $[t, t + h]$ , podemos acotar

$$\begin{aligned} \|\dot{u}_e(s) - Q(u_e)(s)\| &= \|\hat{\rho}(s) - Q(u)(t) + Q(u)(t) - Q(u_e)(s)\| \\ &\leq \|\hat{\rho}(s) - Q(u)(t)\| + \|Q(u)(t) - Q(u_e)(s)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como consecuencia,

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [t, t+h]} \|\dot{u}_\varepsilon(s)\| &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \|\dot{u}_\varepsilon(s) - Q(u_\varepsilon)(s) + Q(u_\varepsilon)(s)\| \\ &\leq \sup_{s \in [t, t+h]} \varepsilon + \|Q(u_\varepsilon)(s)\| \\ &\leq 1 + CC_s^\beta. \end{aligned}$$

### Paso 2. Aproximación de a trozos.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Empezamos desde  $t = 0$ , y utilizando la extensión del paso anterior, construimos

$$\rho = \rho^\varepsilon \in C([0, \tau], S)$$

una aproximación a trozos de la solución de C.1 para algún  $\tau$ . Esta aproximación cumple

$$\sup_{s \in [0, \tau]} \|\dot{\rho}(s) - Q(\rho)(s)\| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \sup_{s \in [0, \tau]} \|\dot{\rho}(s)\| \leq C \quad (\text{C.6})$$

con  $\rho^\varepsilon(0) = u_0$ .

Primero veamos que en realidad  $\tau = T$ , y que la aproximación está bien definida en todo el intervalo  $[0, T]$ . Si tenemos una sucesión  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ , de manera tal que  $\rho$  es lineal en los intervalos  $[0, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], \dots, [\tau_n, \tau_{n+1}], \dots$ , entonces, como la sucesión  $\tau_n$  es creciente, pueden pasar dos cosas:

- o bien en un momento  $\tau_k$  es más grande que  $T$ , por lo que  $\rho$  estaría definida en todo el intervalo de interés;
- o bien  $\tau_n < T$  para todo  $n$  y entonces tiene un límite  $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ .

En este caso, como  $\dot{\rho}(\tau_n)$  está acotada uniformemente, entonces  $\rho(\tau_n)$  tiene un límite cuando  $n \rightarrow \infty$ . Definimos

$$\rho(\tau) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\tau_n),$$

y podemos extender  $\rho$  más allá de  $\tau$ .

Por lo tanto, podemos definir  $\rho$  en todo el intervalo  $[0, T]$ .

### Paso 3. Límite.

Tomemos dos sucesiones de poligonales  $u^\varepsilon$  y  $w^\varepsilon$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , y estudiemos cómo se comporta la diferencia  $\|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\|$ . Observemos que

$$\frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\| = [\dot{u}^\varepsilon(t) - \dot{w}^\varepsilon(t); u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)],$$

ya que para una  $f$  lineal a trozos cualquiera

$$\frac{d}{dt} \|f(t)\| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(t+h)\| - \|f(t)\|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(t) + hf'(t)\| - \|f(t)\|}{h} = [f'; f].$$

Entonces, si sumamos y restamos  $Q$ ,

$$\frac{d}{dt} \|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\| \leq [Q(u^\varepsilon)(t) - Q(w^\varepsilon)(t); u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)] + 2C\varepsilon,$$

ya que

$$\begin{aligned}
 [\dot{u}; u] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u + h\dot{u}\| - \|u\|}{h} \\
 &\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|u + hQ(u)\| \|h\dot{u} - hQ(u)\| - \|u\|}{h} \\
 &= [Q(u); u] + \|\dot{u} - Q(u)\|
 \end{aligned}$$

que es menor que  $[Q(u); u] + \varepsilon$  por C.6.

Ahora integramos y usamos la *one-sided Lipschitz condition*:

$$\begin{aligned}
 \|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\| &\leq \int_0^t ([Q(u^\varepsilon)(t) - Q(w^\varepsilon)(t); u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)] + 2C\varepsilon) \, ds \\
 &\leq L \int_0^t \|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\| \, ds + 2C\varepsilon t.
 \end{aligned}$$

Entonces, por el lema de Gronwall,

$$\|u^\varepsilon(t) - w^\varepsilon(t)\| \leq \frac{2CT}{L} e^{LT} \varepsilon,$$

con lo cual la sucesión  $u^\varepsilon$  es de Cauchy y converge uniformemente a un límite  $u \in C([0, T], S)$ . Este límite  $u$  es la solución de la ecuación.  $\square$



# Bibliografía

- [1] M. Aguiar, G. Dosi, D.A. Knopoff and M.E. Virgillito. *A multiscale network-based model of contagion dynamics: heterogeneity, spatial distancing and vaccination*, manuscript-M3AS\_wp.pdf 2021
- [2] G. Aletti, A. K. Naimzada & G. Naldi. *Mathematics and physics applications in sociodynamics simulation: the case of opinion formation and diffusion*, 203–221. In G. Naldi, L. Pareschi & G. Toscani, *Mathematical modeling of collective behavior in socio-economic and life sciences*. Birkhäuser Boston, 2010.
- [3] R. Alonso, I.M. Gamba, M-B. Tran, *The Cauchy problem and BEC stability for the quantum Boltzmann-Condensation system for bosons at very low temperature*, preprint (2016) arXiv 1609.07467.
- [4] R.M. Anderson and R.M. May. *Infectious diseases of humans: dynamics and control*. Oxford university press, 1992.
- [5] R. Axelrod. *The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization*. *Journal of Conflict Resolution*, 41(2) (1997):203–226.
- [6] C. Bauch. *Imitation dynamics predict vaccinating behaviour*. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 272(1573) (2005):1669–1675.
- [7] C. Bauch and D. Earn. *Vaccination and the theory of games*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(36) (2004):13391–13394.
- [8] C.T. Bauch, A.P. Galvani, *Social factors in epidemiology*, *Science*, 342 (2013), 47-49.
- [9] C.T. Bauch, A. D’Onofrio, P. Manfredi, *Behavioral epidemiology of infectious diseases: an overview*, in *Modeling the Interplay Between Human Behavior and the Spread of Infectious Diseases*, edited by P. Manfredi and A. D’Onofrio, Springer (2013), 1-19.
- [10] D.O. Baumgaertner, P.A. Fetros, S.M. Krone, and R.C. Tyson. *Spatial opinion dynamics and the effects of two types of mixing*. *Physical Review E*, 98(2) (2018), 022310.

- [11] N. Bellomo, R. Bingham, M. A. J. Chaplain, G. Dosi, G. Forni, D. A. Knopoff, J. Lowengrub, R. Twarock and M. E. Virgillito, *A multi-scale model of virus pandemic: Heterogeneous interactive entities in a globally connected world*, Math. Models Methods Appl. Sci., 30 (2020) 1591-1651.
- [12] A. Bressan, *Notes on the Boltzmann equation*. <https://www.math.psu.edu/bressan/PSPDF/boltz.pdf>
- [13] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and its Applications*, Springer Series in Applied Mathematical Sciences, vol. 67. Springer-Verlag, New York, NY 1988.
- [14] V. Chernozhukov, K. H. Kasahara y P. Schrimpf. *Causal impact of masks, policies, behavior on early covid-19 pandemic in the US*. Journal of econometrics 220.1 (2021): 23-62.
- [15] D. Clancy. *Precise estimates of persistence time for sis infections in heterogeneous populations*. *Bulletin of Mathematical Biology*, 80(11) (2018):2871–2896.
- [16] G. Deffuant, D. Neau, F. Amblard, and G. Weisbuch. *Mixing beliefs among interacting agents*. *Advances in Complex Systems*, 3(01n04) (2000):87–98.
- [17] G. Dimarco, B. Perthame, G. Toscani, M. Zanella, *Social contacts and the spread of infectious diseases*, Journal of Mathematical Biology, 83(1) (2021), 1-32.
- [18] C.O. Dorso, A. Medus, P. Balenzuela, *Vaccination and public trust: A model for the dissemination of vaccination behaviour with external intervention*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 482 (2017), 433-443 .
- [19] C.O. Dorso, A. Medus, and Pablo Balenzuela. *Vaccination and public trust: A model for the dissemination of vaccination behaviour with external intervention*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications (2017), 482:433–443.
- [20] R. M. Dudley, *Convergence of Baire measures*, Studia Mathematica, 27 (1966), 251-268.
- [21] S. Funk, E. Gilad, C. Watkins, V.A. Jansen, *The spread of awareness and its impact on epidemic outbreaks*, Proceedings of the National Academy of Sciences 106(16) (2009), 6872-6877.
- [22] S. Funk, S. Bansal, C.T. Bauch, K.T.D. Eames, W.J. Edmunds, A.P. Galvani, P. Klepac, *Nine challenges in incorporating the dynamics of behaviour in infectious diseases models*, Epidemics, 10 (2015), 21-25.
- [23] G. Gabetta, G. Toscani & B. Wennberg, *Metrics for probability distributions and the trend to equilibrium for solutions of the Boltzmann equation*, Journal of statistical physics, 81 (5-6), (1995), 901–934.
- [24] S. Galam and J.D. Zucker. *From individual choice to group decision-making*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 287(3-4) (2000):644–659.

- [25] C. Giambiagi Ferrari, J.P. Pinasco, N. Saintier, *Coupling Epidemiological Models with Social Dynamics*, Bulletin of Mathematical Biology volume 83 (2021), 74.
- [26] W.O. Kermack, and A.G. McKendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character 115.772 (1927): 700-721.
- [27] W.O. Kermack, and A.G. McKendrick. *Contributions to the mathematical theory of epidemics. II.—The problem of endemicity*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character 138.834 (1932): 55-83.
- [28] W.O. Kermack, and A.G. McKendrick. *Contributions to the mathematical theory of epidemics. III.—Further studies of the problem of endemicity*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character 141.843 (1933): 94-122.
- [29] P. Kree & C. Soize, *Mathematics of Random Phenomena: random vibrations of mechanical structures*, Mathematics and Its Applications, D. Reidel Publishing Company, (1986).
- [30] N. Loy, A. Tosin. *Boltzmann-type equations for multi-agent systems with label switching*. *arXiv preprint*, arXiv:2006.15550, 2020.
- [31] A. K. Misra, A. Sharma, and J. B. Shukla. *Modeling and analysis of effects of awareness programs by media on the spread of infectious diseases*. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(5-6)(2011):1221–1228.
- [32] C.N. Ngonghala , E. Iboi, S. Eikenberry, M. Scotch, C.R. MacIntyre, M.H. Bonds, A.B. Gumel. *Mathematical assessment of the impact of non-pharmaceutical interventions on curtailing the 2019 novel Coronavirus*. *Mathematical biosciences*. 325 (2020):108364.
- [33] R. Ochrombel et al. *Simulation of Sznajd sociophysics model with convincing single opinions*. *International Journal of Modern Physics C*, 12(7) (2001):1091–1092.
- [34] L. Pareschi & G. Toscani, *Interacting Multiagent Systems: Kinetic Equations and Monte Carlo Methods*, Oxford University Press, Oxford, 2014.
- [35] L. Pedraza, J.P. Pinasco, & N. Saintier, *Measure-valued opinion dynamics*, M3AS: Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 30 (02), 2020, 225–260.
- [36] M. Pérez-Llanos, J. P. Pinasco & N. Saintier *Opinion attractiveness and its effect in opinion formation models*, Preprint 2020.
- [37] M. Pérez-Llanos, J.P. Pinasco, N. Saintier, and A. Silva. *Opinion formation models with heterogeneous persuasion and zealotry*. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 50(5) (2018):4812–4837.

- [38] J.P. Pinasco, N. Saintier, & F. Vazquez, *The role of voting intention in public opinion polarization*, Phys. Rev. E 101, (2020) 012101.
- [39] J.P. Pinasco, N. Saintier, & F. Vazquez, *A model for a phase transition between political mono-polarization and bi-polarization*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 30 (2020), 063146.
- [40] J.P. Pinasco, V. Semeshenko, and P. Balenzuela. *Modeling opinion dynamics: Theoretical analysis and continuous approximation*. *Chaos, Solitons & Fractals*, (2017) 98:210–215.
- [41] M.A. Pires and N. Crokidakis. *Dynamics of epidemic spreading with vaccination: impact of social pressure and engagement*. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* (2017), 467:167–179.
- [42] S. Del Valle, H. Hethcote, J.M. Hyman, C. Castillo-Chavez, *Effects of behavioral changes in a smallpox attack model*, *Mathematical Biosciences*, 195 (2005), 228–251.
- [43] P.C. Ventura da Silva, F. Velásquez-Rojas, C. Connaughton, F. Vazquez, Y. Moreno, and F.A. Rodrigues. *Epidemic spreading with awareness and different timescales in multiplex networks*. *Physical Review E*, 100(3) (2019):032313.
- [44] P.C.V. da Silva, F. Velásquez-Rojas, C. Connaughton, F. Vazquez, Y. Moreno, F.A. Rodrigues, *Epidemic spreading with awareness and different timescales in multiplex networks*, *Physical Review E* 100(3) (2019), 032313.
- [45] F. Slanina and H. Lavicka. *Analytical results for the sznajd model of opinion formation*. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 35(2) (2003):279–288.
- [46] J. Sooknanan, D.M.G. Comissiong, *Trending on social media: integrating social media into infectious disease dynamics*, *Bulletin of mathematical biology* (2020) 82-86.
- [47] Z. Su, W. Wang, L. Li, H.E. Stanley, and L.A. Braunstein. *Optimal community structure for social contagions*. *New Journal of Physics*, 20(5)(2018):053053.
- [48] K. Sznajd-Weron and J. Sznajd. *Opinion evolution in closed community*. *International Journal of Modern Physics C*, 11(06)(2000):1157–1165.
- [49] G. Toscani et al. *Kinetic models of opinion formation*. *Communications in mathematical sciences*, 4(3) (2006):481–496.
- [50] R.C. Tyson, S.D. Hamilton, A.S. Lo, B.O., Baumgaertner, S.M. Krone, *The timing and nature of behavioural responses affect the course of an epidemic*, *Bulletin of Mathematical Biology* 82(14) (2020), 1-28.

- [51] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Grad.Studies in Math. (58), American Mathematical Soc., (2003).
- [52] Z. Wang, M.A. Andrews, Z-X. Wu, L Wng, C.T. Bauch, *Coupled disease-behaviour dynamic on complex networks: A review*, Physics of Life reviews, 15 (2015), 1-29.
- [53] C. Yang, X. Wang, D. Gao, and J. Wang. *Impact of awareness programs on cholera dynamics: Two modeling approaches*. Bulletin of Mathematical Biology, 79(9)(2017):2109–2131.
- [54] Y. Zhou, J. Zhou, G. Chen, and H.E. Stanley. *Effective degree theory for awareness and epidemic spreading on multiplex networks*. New Journal of Physics, 21(3)(2019):035002.