



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## Ideales de operadores Lipschitz de Banach

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas.

Nahuel Albarracín

Director de tesis: Pablo Turco  
Consejero de estudios: Daniel Carando

Lugar de trabajo: Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.

Buenos Aires, 8 de abril de 2026.



## Ideales de operadores Lipschitz de Banach

Esta tesis está dedicada al estudio sistemático de ciertas clases de operadores Lipschitz, denominadas ideales de operadores Lipschitz de Banach, entre espacios de Banach.

Por un lado, dado un ideal de operadores lineales  $\mathcal{A}$  en el sentido de Pietsch, se introducen y estudian los ideales Lipschitz de la forma  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ , denominados ideales de composición, y los ideales Lipschitz de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . En particular, a partir de distintas propiedades que posee  $\mathcal{A}$  como ideal, se muestra cómo dichas propiedades se trasladan, en el contexto Lipschitz, a  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  y a  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ .

Por otro lado, dado un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , se estudian distintos procedimientos para generar otros ideales Lipschitz, tales como las cápsulas maximales, inyectivas y Lipschitz inyectivas, entre otras. Se analizan las propiedades de estos procedimientos y de los ideales que generan, y se los compara entre sí. A medida que se van introduciendo los distintos procedimientos, se presentan ejemplos que muestran que gran parte de los ideales Lipschitz estudiados por diversos autores encajan en este marco. Por lo tanto, todos estos ideales pueden analizarse desde un punto de vista unificado.

A partir de las definiciones, se deduce que, dado un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , los operadores lineales que pertenecen a  $\mathcal{I}$ , denotados por  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ , forman un ideal de operadores lineales. En este trabajo también se estudia qué propiedades de  $\mathcal{I}$  hereda  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  como ideal.

Entre otros resultados, se establecen condiciones sobre los ideales  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  bajo las cuales, si un operador lineal admite una factorización Lipschitz vía funciones en  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$ , entonces también admite una factorización lineal vía operadores lineales en  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  y  $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}$ . Es decir, dado un operador lineal  $T: E \rightarrow F$  entre espacios de Banach, si  $T = f \circ g$  con  $g \in \mathcal{I}$  y  $f \in \mathcal{J}$ , bajo que condiciones se puede obtener que  $T = R \circ S$  con  $S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  y  $R \in \mathcal{J} \cap \mathcal{L}$ .



## Banach operator ideals of Lipschitz functions

This thesis is devoted to the systematic study of certain classes of Lipschitz operators, called Lipschitz operator ideals of Banach spaces, between Banach spaces.

On the one hand, given an ideal of linear operators  $\mathcal{A}$  in the sense of Pietsch, we introduce and study the Lipschitz ideals of the form  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ , called composition ideals, and those of the form  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . In particular, starting from various properties that  $\mathcal{A}$  possesses as a linear ideal, we show how these properties are transferred, in the Lipschitz setting, to  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  and to  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ .

On the other hand, given a Lipschitz operator ideal  $\mathcal{I}$ , we study different procedures to generate new Lipschitz ideals, such as the maximal, injective, and Lipschitz-injective hulls, among others. We analyze the properties of these procedures and of the ideals they generate, and we compare them with each other. As the different constructions are introduced, several examples are presented showing that many of the Lipschitz ideals studied by various authors fit within this framework. Therefore, all these ideals can be analyzed from a unified point of view.

From the definitions, it follows that, given a Lipschitz operator ideal  $\mathcal{I}$ , the linear operators that belong to  $\mathcal{I}$ , denoted by  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ , form a linear operator ideal. This work also studies which properties of  $\mathcal{I}$  are inherited by  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  as a linear ideal.

Among other results, we establish conditions on the ideals  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$  under which, if a linear operator admits a Lipschitz factorization through functions in  $\mathcal{I}$  and  $\mathcal{J}$ , then it also admits a linear factorization through operators in  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  and  $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}$ . In other words, given a linear operator  $T: E \rightarrow F$  between Banach spaces, if  $T = f \circ g$  with  $g \in \mathcal{I}$  and  $f \in \mathcal{J}$ , we determine under which conditions one can obtain a linear factorization  $T = R \circ S$  with  $S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  and  $R \in \mathcal{J} \cap \mathcal{L}$ .



# Tabla de Contenidos

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Notación y Preliminares</b>	<b>7</b>
<b>1 Ideales Lipschitz de Banach</b>	<b>15</b>
1.1 Ideales Lipschitz de composición . . . . .	15
1.2 Ideales Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte . . . . .	18
1.3 Cápsula regular y cápsula inyectiva . . . . .	21
1.4 Cápsula Lipschitz inyectiva . . . . .	23
1.5 Cápsula maximal y núcleo minimal . . . . .	31
1.6 Maximalidad y ultraestabilidad . . . . .	33
1.7 Representación tensorial de ideales Lipschitz maximales . . . . .	40
1.8 Ideal de operadores Lipschitz $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados . . . . .	43
<b>2 Extensiones Lipschitz de operadores lineales</b>	<b>51</b>
2.1 Gateaux diferenciabilidad de funciones Lipschitz . . . . .	52
2.2 Invarianza por traslaciones . . . . .	55
2.3 Teorema de extensiones Lipschitz de operadores lineales . . . . .	58
2.4 Operadores extendibles de un ideal Lipschitz . . . . .	62
<b>3 Extensiones Lipschitz de ideales de Banach</b>	<b>65</b>
3.1 Extensiones de ideales de Banach a ideales Lipschitz de composición . . . . .	66
3.2 Extensiones de ideales de Banach a ideales Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte . . . . .	68
3.3 Extensiones de ideales de Banach inyectivos a ideales Lipschitz inyectivos . . . . .	74
3.4 Extensiones Lipschitz del ideal de operadores lineales $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados a ideales Lipschitz . . . . .	76
<b>Apéndices</b>	<b>79</b>
<b>A Ideales de Banach</b>	<b>79</b>
<b>B Ultrafiltros</b>	<b>83</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>87</b>



# Introducción

Los espacios de Banach son, en particular, espacios métricos. La teoría de la geometría no lineal en espacios de Banach busca establecer hasta qué punto la estructura métrica de un espacio de Banach influye en su estructura lineal. El primer resultado en esta línea surge con el inicio de la teoría de espacios de Banach. En 1932, Mazur y Ulam [41] muestran que si existe una isometría suryectiva entre dos espacios de Banach reales, entonces dicha isometría es necesariamente afín. Como consecuencia, dos espacios de Banach reales que son métricamente isométricos son linealmente isométricos.

Varios problemas en este área se pueden enmarcar de la siguiente manera.

- (P) Dados espacios de Banach  $E$  y  $F$  y una función no lineal  $f: E \rightarrow F$  con una cierta propiedad (por ejemplo que sea homeomorfismo, un embebimiento, una proyección, etc.), ¿Existe un operador lineal entre  $E$  y  $F$  con la misma propiedad?

Antes de seguir, vale la pena mencionar el siguiente resultado de Kadets [34] y Toruńczyk [56]. Todo par de espacios de Banach de dimensión infinita con el mismo cardinal son homeomorfos. Es decir, entre dos espacios de Banach con igual cardinal hay una función biyectiva, continua y con inversa continua. Es por eso que cuando uno habla de *funciones no lineales* en (P) se tiene que ser más específico. En este trabajo solo consideraremos funciones Lipschitz.

De los primeros trabajos del tema se encuentra el de Lindenstrauss de 1964 [38]. Una consecuencia de los resultados de este trabajo es que para espacios de Banach reales  $E$  y  $F$ , donde  $E$  es un espacio dual y subespacio de  $F$ , si existe una proyección Lipschitz de  $F$  sobre  $E$ , entonces existe una proyección lineal de  $F$  sobre  $E$ . Este resultado se puede expresar también en términos de factorizaciones Lipschitz de operadores lineales de la siguiente manera.

**Proposición** (Lindenstrauss). *Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $E$  un espacio dual y supongamos que existe un operador lineal  $T: E \rightarrow F$  y un operador Lipschitz  $f: F \rightarrow E$  tal que la identidad de  $E$  se factoriza a través de  $T$  y  $f$  (es decir,  $Id_E = f \circ T$ ). Entonces existe un operador lineal  $R: F \rightarrow E$  tal que  $Id_E = R \circ T$ .*

Es decir

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{Id_E} & E \\
 \searrow T & & \nearrow f \\
 & F &
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{Id_E} & E \\
 \searrow T & & \nearrow R \\
 & F &
 \end{array}
 ,$$

donde había un operador Lipschitz  $f$  con una propiedad (ser un inverso a izquierda de un operador lineal), existe un operador lineal  $R$  con la misma propiedad.

Siguiendo en esta línea, en el trabajo de Heinrich y Mankiewicz de 1982 [31] se muestra que si un espacio de Banach  $E$  es Lipschitz isomorfo a  $\ell_p$  para  $1 < p < \infty$ , entonces  $E$  es linealmente isomorfo a un subespacio complementado de  $\ell_p$ . Es decir

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id_E} & E \\ & \searrow f & \nearrow f^{-1} \\ & \ell_p & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id_E} & E \\ & \searrow R & \nearrow S \\ & \ell_p & \end{array} ,$$

donde había operadores Lipschitz  $f$  y  $f^{-1}$ , existen operadores lineales  $R$  y  $S$ . Como el diagrama de la derecha implica que  $E$  es linealmente isomorfo a un subespacio complementado de  $\ell_p$ , que es un espacio primo (es decir, todos sus subespacios complementados de dimensión infinita son isomorfos a él),  $E$  resulta ser linealmente isomorfo a  $\ell_p$ .

Este resultado obtenido por Heinrich y Mankiewicz era, de cierta, forma esperado. A partir de distintos trabajos de la década del 60, se pensaba que cualesquiera espacios de Banach que fueran Lipschitz isomorfos tendrían que ser linealmente isomorfos. No obstante, Aharoni y Lindenstrauss [7] muestran la existencia de un espacio de Banach  $E$  que es Lipschitz isomorfo a  $c_0(\Gamma)$ , con  $\Gamma$  no numerable, que no es linealmente isomorfo. Sin embargo, hoy en día no se sabe si dos espacios de Banach separables que son Lipschitz isomorfos son, en realidad, linealmente isomorfos.

Otro resultado importante en relación con lo anterior es el de Johnson, Maurey y Schechtman de 2009 [33], en donde muestran que si un operador lineal de un espacio de Banach  $E$  al espacio dual de  $F$ ,  $F'$ , se puede factorizar Lipschitz a través de un espacio de Banach  $G$  y, además la función que va de  $E$  a  $G$  es *Gateaux diferenciable en un punto*, entonces el operador se puede factorizar linealmente a través de  $G$ . Es decir

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F' \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & G & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F' \\ & \searrow R & \nearrow S \\ & G & \end{array} ,$$

donde había operadores Lipschitz  $f$  y  $g$ , bajo cierta hipótesis sobre  $f$ , se pueden obtener operadores lineales  $R$  y  $S$ . Los autores aplican este resultado cuando el espacio  $G$  es  $L_p$ , obteniendo como consecuencia que una factorización Lipschitz de  $T$  a través de  $L_p$  implica una factorización lineal a través de  $L_p$ .

Los tres resultados que enunciamos anteriormente tienen una estructura en común. Dado un operador lineal con una factorización Lipschitz vía un espacio, se obtiene una factorización lineal vía el mismo espacio. En términos generales, si un operador lineal tiene una *propiedad descrita a través de funciones Lipschitz*, entonces tiene *la misma propiedad descrita a través de operadores lineales*.

El principal objetivo de este trabajo cuando se concibió es el de desarrollar un estudio de esta estructura en común. Es decir, si un operador lineal tiene una *propiedad descrita a partir de funciones Lipschitz*, ¿se puede describir *la propiedad en términos de operadores lineales*? Esta pregunta así formulada es bastante ambigua. Debemos precisar qué queremos decir con

una *propiedad descrita con funciones Lipschitz* y con la *propiedad en términos de operadores lineales*.

En el año 2009, Farmer y Johnson [26] introducen la clase de operadores *Lipschitz  $p$ -sumantes* y muestran que todo operador lineal que es Lipschitz  $p$ -sumante es, de hecho, linealmente  $p$ -sumante. Este resultado tiene la *misma estructura* que los resultados previos. Concretamente lo que muestran Farmer y Johnson es que si se tiene un operador lineal  $T: E \rightarrow \ell_\infty(\Gamma)$  que se factoriza Lipschitz a través de la inclusión formal  $\iota_{\infty,p}: L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$  para alguna medida de probabilidad  $\mu$ , entonces se factoriza linealmente a través de  $\iota_{\infty,p}$ . Es decir

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & \ell_\infty(\Gamma) \\ f \downarrow & & \uparrow g \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu) \end{array} \implies \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & \ell_\infty(\Gamma) \\ R \downarrow & & \uparrow S \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu) \end{array} ,$$

donde había operadores Lipschitz  $f$  y  $g$ , se pueden obtener operadores lineales  $R$  y  $S$ . Este trabajo se puede considerar que fue el primero de muchos en donde se introduce una clase de funciones Lipschitz que, en cierto modo, generaliza una clase de operadores lineales ya conocida. Este trabajo motivó a varios autores a introducir y estudiar distintas clases de operadores Lipschitz que generalizan distintas clases de operadores lineales.

Producto de estos trabajos, con la necesidad de unificar el lenguaje utilizado, surge en 2016 la noción de *ideales de operadores Lipschitz*, introducida de forma independiente en los trabajos de Achour, Rueda, Sánchez-Pérez y Yahi [1] y Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos [13], este último bajo el nombre de ideal de operadores Lipschitz genéricos. Los ideales de operadores Lipschitz son una generalización de los ideales de operadores lineales (en el sentido de Pietsch), al caso Lipschitz.

Los ideales de operadores Lipschitz es lo que utilizaremos para poder aclarar el objetivo original de este trabajo. Describir operadores lineales que pertenecen a un cierto ideal de operadores Lipschitz. Como primera aproximación, veremos que directamente de las definiciones se deduce que dado un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , los operadores lineales que pertenecen a  $\mathcal{I}$ , que denotaremos  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ , forman un ideal de operadores lineales. Luego, nuestro objetivo puede ser abordado de dos maneras distintas. Por un lado, dado un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , describir el ideal de operadores lineales  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ , mientras que por el otro lado, dado un ideal de operadores lineales  $\mathcal{A}$ , describir los ideales de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  tales que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ . Para ello, es necesario comprender los distintos ideales de operadores Lipschitz y sus propiedades. Es así como surge el segundo objetivo de este trabajo: desarrollar un estudio de los ideales de operadores Lipschitz y de distintos procedimientos para generar estos ideales, haciendo hincapié en las distintas propiedades que puedan tener.

El trabajo está dividido de la siguiente manera. Primero fijaremos la notación que utilizaremos y daremos algunas definiciones y resultados preliminares. Daremos las nociones básicas de funciones Lipschitz antes de dar la definición de ideal de operadores Lipschitz. Para poder ejemplificar los distintos resultados sobre ideales de operadores Lipschitz, utilizaremos ideales de operadores lineales y distintos procedimientos para generarlos. Es por ello que recordaremos algunos de estos procedimientos. Asumimos que los lectores están familiarizados con la

teoría de ideales de operadores lineales. De todas formas, incluimos el Apéndice A en donde se exhiben algunas definiciones y resultados sobre ideales de operadores lineales que utilizaremos a lo largo del manuscrito.

En el Capítulo 1 se tratará sobre ideales de operadores Lipschitz. Se expondrá dos procedimientos para producir ideales Lipschitz a partir de un ideal de operadores lineales  $\mathcal{A}$ . Estos son el ideal Lipschitz de composición  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  introducido en [1] y el ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . Veremos que, por lo general, estos procedimientos difieren. Luego, se estudiarán distintos procedimientos para producir ideales de operadores Lipschitz a partir de otros ideales Lipschitz que emulan a los ya conocidos para ideales de operadores lineales. Entre otros, estudiaremos las cápsula regular, inyectiva, Lipschitz inyectiva y maximal de un ideal de operadores Lipschitz y compararemos distintas propiedades entre ellos. Veremos que muchos de los ejemplos de ideales Lipschitz estudiados por distintos autores encuadran dentro de estos procedimientos aplicados los ideales de composición y los de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ .

En particular, caracterizaremos a los ideales de operadores Lipschitz maximales (aquellos que coinciden con su cápsula maximal) en términos de la ultraestabilidad y regularidad. Este resultado extiende a la caracterización de ideales lineales maximales obtenida por Pietsch [45, Satz 4] y Kürsten [36]. Esto nos permite mostrar que varios ideales de operadores Lipschitz definidos por distintos autores son, de hecho, maximales. Finalmente, estudiaremos el ideal de operadores Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados, introducidos por Saleh [52]. Además de mostrar que este ideal es maximal y que posee una factorización Lipschitz, podremos ver que este ideal no es de composición, no es de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  y no se puede obtener a partir de ninguno de los procedimientos Lipschitz aplicados a estos. Para poder ver esto último, necesitaremos esperar hasta el Capítulo 3.

En el Capítulo 2, estudiamos extensiones Lipschitz de operadores lineales. El resultado obtenido por Lindenstrauss enunciado en la Página 1 se puede expresar en términos de extensiones. Si  $E, F$  son espacios de Banach,  $E$  un dual con  $E$  subespacio de  $F$ , si existe una función Lipschitz  $f: F \rightarrow E$  tal que  $f|_E = Id_E$ , entonces existe un operador lineal  $R: F \rightarrow E$  tal que  $R|_E = Id_E$ . Más aun, con similar demostración, Lindenstrauss prueba lo siguiente

**Proposición.** *Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach, con  $E_0$  subespacio de  $E$  y  $F$  un dual. Si  $T: E_0 \rightarrow F$  es un operador lineal tal que existe una función Lipschitz  $f: E \rightarrow F$  de manera que  $f|_{E_0} = T$ , entonces existe un operador lineal  $R: E \rightarrow F$  tal que  $R|_{E_0} = T$ .*

En simples términos, si  $T$  es Lipschitz extendible a  $E$ , entonces es linealmente extendible a  $E$ . El resultado principal de este capítulo es que si en la proposición anterior la extensión Lipschitz de  $T$  pertenece a un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  con ciertas propiedades, entonces existe una extensión lineal de  $T$  también perteneciente a  $\mathcal{I}$ . Para ello, usaremos técnicas de diferenciabilidad de funciones Lipschitz. En particular, veremos que si  $f$  es una función Lipschitz entre espacios de Banach, *Gateaux diferenciable* en algún punto  $x_0$  y pertenece a un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  maximal, entonces el operador lineal diferencial  $Df(x_0)$  pertenece a  $\mathcal{I}$ .

Finalmente, en el Capítulo 3, abordaremos el problema original de este trabajo. Dado un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , describimos como son los operadores lineales que pertenecen

a  $\mathcal{I}$ . Notemos que dados un ideal de operadores lineales  $\mathcal{A}$  y un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ , obtener la igualdad  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$  implica que un operador lineal con una *propiedad descrita a partir de funciones Lipschitz* (que pertenezca a  $\mathcal{I}$ ), se puede describir con la *propiedad en términos de operadores lineales* (que pertenezca a  $\mathcal{A}$ ). Para cada uno de los tipos de ideales de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  estudiados en el Capítulo 1, caracterizaremos el ideal de operadores lineales  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ .

Uno de los resultados principales de este capítulo es una versión más general del resultado de Johnson, Maurey y Schechtman que citamos previamente. En concreto, el Teorema 3.14 muestra que bajo ciertas hipótesis de los ideales de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$ , si un operador lineal  $T: E \rightarrow F'$  se factoriza a través de un espacio de Banach  $G$  como  $T = f \circ g$ , con  $g$  un operador en  $\mathcal{I}$  y  $f$  un operador en  $\mathcal{J}$ , entonces es posible obtener una factorización lineal de  $T$  a través de  $G$ , de manera que los operadores lineales de la factorización pertenezcan a  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  y  $\mathcal{J} \cap \mathcal{L}$ . Es decir

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F' \\
 g \in \mathcal{I} \searrow & & \nearrow f \in \mathcal{J} \\
 & G &
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F' \\
 S \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L} \searrow & & \nearrow R \in \mathcal{J} \cap \mathcal{L} \\
 & G &
 \end{array}$$

donde había operadores Lipschitz  $f$  y  $g$  con cierta propiedad, se pueden obtener operadores lineales  $R$  y  $S$  con la misma propiedad.

Este trabajo está basado en los artículos [ABBT, AT, AT2].



# Notación y Preliminares

A lo largo del manuscrito,  $E, F, G$  denotarán espacios de Banach, mientras que  $X, Y, Z$  espacios métricos. Llamaremos espacio métrico *punteado* a un espacio métrico  $X$  junto con un elemento distinguido de  $X$ , que denotaremos  $0$ . En particular, todo espacio de Banach es un espacio métrico punteado y su punto distinguido será el  $0$ . Si bien algunas de las nociones que utilizaremos a lo largo de este trabajo tienen sentido para espacios métricos en general, a fines prácticos, de ahora en más, todos los espacios métricos que utilizaremos serán punteados con su punto distinguido  $0$ . Como es usual, dado un espacio de Banach  $E$ ,  $B_E$  será su bola unitaria cerrada y  $E'$  su espacio dual. La inclusión canónica de  $E$  a su bidual se denotará con  $k_E: E \rightarrow E''$ . Con  $J_E: E \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$  denotaremos la isometría lineal canónica. Esto es el operador definido por  $J_E(x) = (x'(x))_{x \in B_{E'}}$  y con  $Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow E$  denotaremos al operador cociente definido por  $Q_E((a_x)_{x \in B_E}) = \sum_{x \in B_E} a_x x$ . En cuanto a clases de subespacios de un espacio normado, denotaremos con FIN a la clase de espacios normados de dimensión finita. En particular,  $\text{FIN}(E)$  denotará a la familia de subespacios de dimensión finita de  $E$ . Además,  $\text{COFIN}(E)$  denota a la familia de subespacios de  $E$  de codimensión finita. En cuanto a espacios métricos, MFIN será la clase de espacios métricos finitos y, para un espacio métrico  $X$ ,  $\text{MFIN}(X)$  denotará la familia de subespacios métricos de  $X$  que contienen al  $0$ .

Para  $E$  y  $F$  espacios de Banach  $\mathcal{L}(E, F)$  es el espacio de Banach de operadores lineales acotados de  $E$  a  $F$ , con la norma usual de operadores,  $\mathcal{F}(E, F)$  es el subespacio de operadores de rango finito de  $E$  a  $F$ . Dado  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $T' \in \mathcal{L}(F', E')$  denota el operador adjunto de  $T$ .

## Ideales de operadores lineales

A continuación, introduciremos las notaciones de los distintos ideales de operadores lineales en el sentido de Pietsch que utilizaremos en este trabajo. Al no ser este objetivo principal, solo fijaremos la notación y daremos algunas definiciones básicas. En el Apéndice A se encuentran las definiciones de los ideales y varias de sus propiedades.

Una subclase  $\mathcal{A}$  de los operadores lineales acotados entre espacios de Banach  $\mathcal{L}$  se dice *ideal de operadores lineales* si para todo espacio de Banach  $E$  y  $F$ , sus componentes  $\mathcal{A}(E, F): = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{A}$  satisfacen

- $\mathcal{A}(E, F)$  es un subespacio lineal de  $\mathcal{L}(E, F)$ .
- $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

- La propiedad de ideal: dados espacios de Banach  $E, E_1, F, F_1$ , si  $T \in \mathcal{A}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{L}(E_1, E)$  y  $R \in \mathcal{L}(F, F_1)$ , se tiene que  $S \circ T \circ R \in \mathcal{A}(E_1, F_1)$ .

Un ideal de operadores  $\mathcal{A}$  se dice *normado* (de Banach) si hay una función  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que para espacios de Banach  $E, E_1, F, F_1$  cualesquiera, se tienen las siguientes propiedades

- $(\mathcal{A}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$  es un espacio normado (de Banach).
- $\|Id_{\mathbb{R}}\|_{\mathcal{A}} = 1$ .
- Si  $T \in \mathcal{A}(E, F)$ ,  $S \in \mathcal{L}(E_1, E)$  y  $R \in \mathcal{L}(F, F_1)$ , entonces  $\|S \circ T \circ R\|_{\mathcal{A}} \leq \|S\| \|T\|_{\mathcal{A}} \|R\|$ .

Para dos ideales de operadores normados  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , escribiremos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$  si para cualesquiera espacios de Banach  $E$  y  $F$ , se tiene que  $\mathcal{A}(E, F) \subseteq \mathcal{B}(E, F)$  y  $\|T\|_{\mathcal{B}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}$  para todo  $T \in \mathcal{A}(E, F)$ . Para simplificar la notación y ganar claridad, a los ideales de operadores lineales de Banach los denominaremos simplemente *ideales de Banach* y los denotaremos con las letras  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ .

Con  $\overline{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{W}$  denotamos a los ideales de operadores aproximables, compactos y débilmente compactos, respectivamente, mientras que  $\mathfrak{X}$  será el ideal de operadores separables, es decir, aquellos operadores cuya imagen es separable. Todos estos ideales, dotados con la norma usual de operadores, son ideales de Banach y se los denominan *cerrados*. Otros ideales de Banach que utilizaremos que no son cerrados son, para  $1 \leq p < \infty$ , los operadores  $p$ -nucleares  $\mathcal{N}_p$ , cuasi  $p$ -nucleares  $\mathcal{QN}_p$ ,  $p$ -compactos  $\mathcal{K}_p$  en el sentido de Sinha y Karn [55] y los operadores  $p$ -sumantes  $\Pi_p$ . Para  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\mathcal{I}_p$  serán los operadores  $p$ -integrales,  $\mathcal{PI}_p$  los operadores Pietsch  $p$ -integrales y  $\mathcal{L}_p$  los operadores  $p$ -factoreables.

Otros de los ideales lineales que consideramos en este trabajo son los denominados ideales de factorización. Siguiendo la notación usada por Pietsch [46], si  $\mathbf{A}$  es una clase de espacios de Banach, denotamos  $\text{op}(\mathbf{A})$  a los operadores que se factorizan linealmente a través de un espacio de Banach perteneciente a  $\mathbf{A}$ , esto es, para espacios de Banach  $E$  y  $F$ ,  $T \in \text{op}(\mathbf{A})(E, F)$  si y solo si existe  $G \in \mathbf{A}$  y operadores  $S \in \mathcal{L}(E, G)$ ,  $R \in \mathcal{L}(G, F)$  de manera que  $T = R \circ S$ . Para  $T \in \text{op}(\mathbf{A})$ , se define

$$\|T\|_{\text{op}(\mathbf{A})} := \inf \{ \|R\| \|S\| \}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones lineales  $T = R \circ S$  a través de un espacio perteneciente a  $\mathbf{A}$ . A lo largo del trabajo, solo consideraremos las clases  $\mathbf{A}$  tal que  $\text{op}(\mathbf{A})$  dotado con  $\|\cdot\|_{\text{op}(\mathbf{A})}$  es un ideal normado. Por ejemplo, tenemos que  $\mathcal{F} = \text{op}(\text{FIN})$ . Es decir, un operador lineal entre espacios de Banach es de rango finito si y sólo si se factoriza a través de un espacio de dimensión finita. De la misma forma,  $\mathfrak{X} = \text{op}(\{\mathbf{E}: \mathbf{E} \text{ separable}\})$ . Por la versión isométrica del teorema de factorización de Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński [22], obtenida por Lima, Nygaard y Oja [37], se tiene que  $\mathcal{W} = \text{op}(\{\mathbf{E}: \mathbf{E} \text{ reflexivo}\})$ . Finalmente, recordamos que la clase de operadores que se factorizan a través de  $c_0$ ,  $\text{op}(c_0)$ , o  $\ell_p$ ,  $\text{op}(\ell_p)$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ , son ideales de Banach.

Dado un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , existen distintos procedimientos sobre  $\mathcal{A}$  que dan otros ideales de Banach. Algunos de ellos son:

- $\mathcal{A}^{\text{reg}}$ , la *cápsula regular* de  $\mathcal{A}$ , conformada por todos los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que  $k_F \circ T \in \mathcal{A}(E, F'')$ , con la norma dada por  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{reg}}} = \|k_F \circ T\|_{\mathcal{A}}$ .  $\mathcal{A}$  se dice *regular* si  $\mathcal{A}^{\text{reg}} = \mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}^{\text{inj}}$ , la *cápsula inyectiva* de  $\mathcal{A}$ , conformada por todos los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que  $J_F \circ T \in \mathcal{A}(E, \ell_\infty(B_{F'}))$ , con la norma dada por  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{inj}}} = \|J_F \circ T\|_{\mathcal{A}}$ .  $\mathcal{A}$  se dice *inyectivo* si  $\mathcal{A}^{\text{inj}} = \mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}^{\text{sur}}$ , la *cápsula suryectiva* de  $\mathcal{A}$ , conformada por todos los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que  $T \circ Q_E \in \mathcal{A}(\ell_1(B_E), F)$ , con la norma dada por  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} = \|T \circ Q_E\|_{\mathcal{A}}$ .  $\mathcal{A}$  se dice *suryectivo* si  $\mathcal{A}^{\text{sur}} = \mathcal{A}$ .
- $\mathcal{A}^{\text{dual}}$ , el *ideal dual* de  $\mathcal{A}$  conformado por todos los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que su adjunto,  $T': F' \rightarrow E'$ , pertenece a  $\mathcal{A}(F', E')$ , con la norma dada por  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}}} := \|T'\|_{\mathcal{A}}$ .
- $\mathcal{A}^{\text{max}}$ , la *cápsula maximal* de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^{\text{min}}$ , el *núcleo minimal* de  $\mathcal{A}$  son respectivamente el máximo y el mínimo de la familia parcialmente ordenada de ideales de Banach  $\mathcal{B}$  tales que  $\mathcal{B}(M, N) = \mathcal{A}(M, N)$  para todo  $M, N \in \text{FIN}$ .  $\mathcal{A}$  se dice *maximal* si  $\mathcal{A}^{\text{max}} = \mathcal{A}$  y *minimal* si  $\mathcal{A}^{\text{min}} = \mathcal{A}$ .

Para más de la teoría de ideales de Banach se recomienda el libro de Defant y Floret [23] y el de Pietsch [46].

## Funciones Lipschitz

Dados espacios métricos  $X$  e  $Y$ , una función  $f: X \rightarrow Y$  se dice *Lipschitz* si existe  $C > 0$  tal que  $d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$  para todos  $x, y \in X$ . En tal caso, se define la constante de Lipschitz de  $f$  como

$$\text{Lip}(f) := \sup_{\substack{x, y \in X \\ x \neq y}} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

Al conjunto de funciones Lipschitz que apliquen 0 en 0 lo denotamos  $\text{Lip}_0(X, Y)$ , esto es,

$$\text{Lip}_0(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y \text{ Lipschitz con } f(0) = 0\}.$$

Cuando  $Y = E$  es un espacio de Banach, se tiene que  $(\text{Lip}_0(X, E), \text{Lip}(\cdot))$  es un espacio de Banach, por lo que a la función  $\text{Lip}(\cdot)$  se la llama también la *norma Lipschitz*. A las funciones Lipschitz de un espacio métrico en un espacio de Banach que apliquen el 0 en 0 los llamaremos *operadores Lipschitz*. En el caso en que el codominio es  $E = \mathbb{R}$ , denotamos

$$X^\# := \text{Lip}_0(X, \mathbb{R})$$

y lo llamamos el *dual Lipschitz de  $X$* . Si  $E$  y  $F$  son espacios de Banach, se tiene que  $\mathcal{L}(E, F) \subseteq \text{Lip}_0(E, F)$ , y la norma Lipschitz restringida a  $\mathcal{L}(E, F)$  es la norma usual de operadores.

Para todo espacio métrico  $X$ , su dual Lipschitz  $X^\#$  es, como espacio de Banach, un espacio dual. A continuación describiremos brevemente un predual  $X^\#$  y algunas propiedades que

utilizaremos a lo largo del manuscrito. Siguiendo el libro de Weaver [58], a este espacio predual lo denominaremos el espacio de Arens–Eells [5], pero también es conocido como el *Lipschitz free space* (ver [29] por ejemplo), o *transportation cost space*. Dados  $x, y \in X$ , el funcional  $\delta_{x,y} \in (X^\#)'$  definido, para  $f \in X^\#$ , como

$$\langle \delta_{x,y}, f \rangle = f(x) - f(y)$$

se denomina *molécula elemental*.

A las combinaciones lineales de moléculas elementales las llamaremos *moléculas* y al espacio vectorial de moléculas de  $X$  lo denotaremos  $\text{MOL}(X)$ , esto es,

$$\text{MOL}(X) := \text{span}\{\delta_{x,y} : x, y \in X\} \subseteq (X^\#)'.$$

Se define la *norma de Arens-Eells* de una molécula  $m$  en  $X$  como

$$\|m\|_{\mathbb{E}} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i| d(x_i, y_i) : m = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i, y_i} \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de  $m$  como combinación lineal de moléculas elementales. El *espacio de Arens-Eells* de  $X$ , denotado  $\mathbb{E}(X)$ , es la completación de  $\text{MOL}(X)$  con respecto a esta norma. El siguiente resultado se puede encontrar, por ejemplo, en [58, Theorem 3.3].

**Teorema.** *Sea  $X$  un espacio métrico. El espacio dual del espacio de Arens–Eells de  $X$  es isométricamente isomorfo al espacio dual Lipschitz de  $X$ . Más aún, sobre conjuntos acotados de  $X^\#$ , la topología débil  $*$  inducida coincide con la topología de convergencia puntual.*

Dadas  $f \in X^\#$ ,  $m \in \text{MOL}(X)$  y una representación de  $m$  como combinación lineal de moléculas elementales,  $m = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i, y_i}$ , la dualidad viene dada por

$$\langle m, f \rangle = \sum_{i=1}^n a_i (f(x_i) - f(y_i)).$$

Notemos que

$$|\langle m, f \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n a_i (f(x_i) - f(y_i)) \right| \leq \text{Lip}(f) \sum_{i=1}^n |a_i| d(x_i, y_i).$$

Siguiendo a Godefroy y Kalton [29], dados espacios métricos  $X$  e  $Y$  y  $f \in \text{Lip}_0(X, Y)$ , existe un único operador lineal acotado  $\widehat{f}: \mathbb{E}(X) \rightarrow \mathbb{E}(Y)$  con  $\|\widehat{f}\| = \text{Lip}(f)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \delta_X \downarrow & & \downarrow \delta_Y \\ \mathbb{E}(X) & \xrightarrow{\widehat{f}} & \mathbb{E}(Y) \end{array}$$

Más aún, tal operador está definido, en una molécula elemental, como

$$\widehat{f}(\delta_{x,y}) = \delta_{f(x),f(y)}.$$

Para  $X$  un espacio métrico y  $X_0$  un subconjunto de  $X$  con  $0 \in X_0$ , denotando  $\iota: X_0 \hookrightarrow X$  a la inclusión, se tiene que  $\mathcal{A}(X_0)$  es un subespacio de  $\mathcal{A}(X)$  e  $\widehat{\iota}: \mathcal{A}(X_0) \hookrightarrow \mathcal{A}(X)$  es la inclusión (veáse [58, Theorem 3.7]). Además, si  $f: X \rightarrow Y$  es un isomorfismo Lipschitz, es decir, una función Lipschitz biyectiva con inversa Lipschitz, entonces  $\widehat{f}: \mathcal{A}(X) \rightarrow \mathcal{A}(Y)$  es un isomorfismo lineal entre espacios de Banach.

Para un espacio de Banach  $E$ , llamamos *baricentro* u *operador baricéntrico* de  $E$  al operador lineal  $\beta_E: \mathcal{A}(E) \rightarrow E$  definido en una molécula  $m = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j}$  como

$$\beta_E(m) = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$$

y extendido por densidad. Se trata de un operador cociente (esto es, es suryectivo,  $\|\beta_E\| = 1$  y  $\|x\| = \inf\{\|u\|_E : x = \beta(u)\}$  para todo  $x \in E$ ). Si  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ , al operador lineal  $L_f: \mathcal{A}(X) \rightarrow E$  definido por

$$L_f = \beta_E \circ \widehat{f}$$

lo llamamos la *linealización de  $f$* . Ésta cumple que  $L_f \circ \delta_X = f$  y  $\|L_f\| = \text{Lip}(f)$ . Para resumir,

**Propiedad universal de  $\mathcal{A}(X)$ .** Sea  $X$  espacio métrico. Se tiene que

- (a) La función  $\delta: x \mapsto \delta_x$  es una isometría de  $X$  en  $\mathcal{A}(X)$ .
- (b) Si  $E$  es un espacio de Banach y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ , entonces  $L_f: \mathcal{A}(X) \rightarrow E$  es el único operador lineal tal que  $L_f \circ \delta = f$  y  $\|L_f\| = \text{Lip}(f)$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ \delta \downarrow & \nearrow L_f & \\ \mathcal{A}(X) & & \end{array} .$$

En particular,  $\text{Lip}_0(X, E)$  es isométricamente isomorfo a  $\mathcal{L}(\mathcal{A}(X), E)$ .

Observemos que si  $T: E \rightarrow F$  es un operador lineal acotado entre espacios de Banach, puesto que el operador lineal  $T \circ \beta_E: \mathcal{A}(E) \rightarrow F$  satisface que  $(T \circ \beta_E) \circ \delta_E = T$ , por unicidad de la linealización se tiene que

$$L_T = T \circ \beta_E.$$

Si  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , por unicidad de la linealización de  $T \circ f$ , se tiene que

$$L_{T \circ f} = T \circ L_f.$$

# Ideales de operadores Lipschitz

Farmer y Johnson [26] extendieron la noción de operador  $p$ -sumante para funciones entre espacios métricos de la siguiente manera.

**Definición.** *Dados  $X, Y$  espacios métricos, una función  $f: X \rightarrow Y$  se dice Lipschitz  $p$ -sumante ( $1 \leq p < \infty$ ) si existe  $C > 0$  tal que para toda colección finita de pares de elementos  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  en  $X$ , se tiene que*

$$\left( \sum_{i=1}^n d(f(x_i), f(y_i))^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{g \in B_{X^\#}} \left( \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(y_i)|^p \right)^{1/p}.$$

*Al ínfimo de las constantes  $C$  que satisfacen la condición anterior se lo llama la norma Lipschitz  $p$ -sumante de  $f$ .*

A la clase de operadores Lipschitz  $p$ -sumantes la denotamos  $\Pi_p^L$ . En su trabajo, entre otras cosas, mostraron que esta definición extiende la noción de operador lineal  $p$ -sumante. Esto es, si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  es Lipschitz  $p$ -sumante, entonces es  $p$ -sumante (en el sentido lineal), y la norma  $p$ -sumante de  $T$  coincide con su norma Lipschitz  $p$ -sumante. Este resultado, siguiendo la notación que utilizamos, puede escribirse como  $\Pi_p^L \cap \mathcal{L} = \Pi_p$ .

En otro trabajo publicado el mismo año, Johnson, Maurey y Schechtman [33] introdujeron la clase de operadores Lipschitz  $p$ -factoreables. Una función Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  se dice Lipschitz  $p$ -factoreable,  $1 \leq p \leq \infty$ , si  $k_E \circ f$  se factoriza a través de un  $L_p$ -espacio vía funciones Lipschitz. Entre otras cosas, demostraron que si  $T: E \rightarrow F$  es un operador lineal Lipschitz  $p$ -factoreable, entonces es  $p$ -factoreable (en el sentido lineal).

A partir de los dos trabajos anteriores, varios autores comenzaron a investigar distintas clases de funciones Lipschitz que extienden clases de operadores lineales. Extendiendo la noción de ideal de operadores lineales de Pietsch, en los trabajos de Achour, Rueda, Sánchez-Pérez y Yahi [1] y Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos [13] de forma independiente se introdujo la noción de ideal de operadores Lipschitz.

Una subclase  $\mathcal{I}$  de  $\text{Lip}_0$  es un *ideal Lipschitz* si para todo espacio métrico  $X$  y espacio de Banach  $E$ , sus componentes  $\mathcal{I}(X, E) := \text{Lip}_0(X, E) \cap \mathcal{I}$  satisfacen

- $\mathcal{I}(X, E)$  es un subespacio lineal de  $\text{Lip}_0(X, E)$ .
- $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .
- La propiedad de ideal: si  $g \in \text{Lip}_0(Y, X)$ ,  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  y  $S \in \mathcal{L}(E, F)$ , entonces  $S \circ f \circ g \in \mathcal{I}(Y, F)$ .

Un ideal de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$  se dice *normado* (de Banach) si hay una función  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}: \mathcal{I} \rightarrow [0, +\infty)$  tal que para espacios métricos  $X$  e  $Y$  y espacios de Banach  $E$  y  $F$  cualesquiera, se tienen las siguientes propiedades

- $(\mathcal{I}_{\text{Lip}}(X, E); \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  es un espacio normado (de Banach).
- $\|Id_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\|_{\mathcal{I}} = 1$ .

- Si  $g \in \text{Lip}_0(Y, X)$ ,  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  y  $S \in \mathcal{L}(E, F)$ , entonces  $\|S \circ f \circ g\|_{\mathcal{I}} \leq \text{Lip}(g)\|f\|_{\mathcal{I}}\|S\|$ .

En particular, si  $\mathcal{I}$  es un ideal normado, vale que  $\text{Lip}(\cdot) \leq \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ .

Fijado  $1 \leq p < \infty$ , la clase de funciones Lipschitz  $p$ -sumantes y los operadores Lipschitz  $p$ -factoreables de Johnson, Maurey y Schechtman son ideales Lipschitz de Banach.

En general, a los ideales Lipschitz de Banach los denotaremos con las letras  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ . Si  $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$  y  $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{J}})$  son dos ideales Lipschitz normados, decimos que  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$  si para todo espacio métrico  $X$  y espacio de Banach  $E$ , se tiene que  $\mathcal{I}(X, E) \subseteq \mathcal{J}(X, E)$  y  $\|f\|_{\mathcal{J}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$  para todo  $f \in \mathcal{I}(X, E)$ .

Como dijimos en la Introducción, nos interesaremos en los operadores lineales que pertenecen a un cierto ideal Lipschitz. La demostración de la siguiente proposición se deduce directamente de las definiciones y por ende la omitimos.

**Proposición.** *Si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz (normado, de Banach), entonces  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  es un ideal lineal (respectivamente, normado, de Banach).*

En algunos casos, nos interesará comparar ideales Lipschitz con ideales lineales. En estos casos, para abreviar, escribiremos  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$  en lugar de  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ .

Si  $\mathfrak{U}_1$  y  $\mathfrak{U}_2$  son dos ideales, cada uno de los cuales es lineal o Lipschitz de Banach, denotamos  $\mathfrak{U}_1 \circ \mathfrak{U}_2$  a la clase de operadores  $\phi$  que admiten una factorización  $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ , con  $\phi_1 \in \mathfrak{U}_1$  y  $\phi_2 \in \mathfrak{U}_2$ . La cuasi-norma de  $\phi$  en  $\mathfrak{U}_1 \circ \mathfrak{U}_2$  se define como  $\|\phi\|_{\mathfrak{U}_1 \circ \mathfrak{U}_2} := \inf\{\|\phi_1\|_{\mathfrak{U}_1}\|\phi_2\|_{\mathfrak{U}_2}\}$ , donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles factorizaciones. La composición  $\mathfrak{U}_1 \circ \mathfrak{U}_2 \circ \mathfrak{U}_3$  se define como  $\mathfrak{U}_1 \circ (\mathfrak{U}_2 \circ \mathfrak{U}_3)$ , o equivalentemente, como  $(\mathfrak{U}_1 \circ \mathfrak{U}_2) \circ \mathfrak{U}_3$ . A modo de ejemplo, notar que si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz normado, la propiedad de ideal de  $\mathcal{I}$  se puede escribir de la forma  $\mathcal{L} \circ \mathcal{I} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}$ .



# Capítulo 1

## Ideales Lipschitz de Banach

Este primer capítulo está destinado a introducir y estudiar distintos ideales Lipschitz de Banach de una forma sistemática. Mostraremos varios procedimientos que generan ideales Lipschitz y sus distintas propiedades. Los dos primeros procedimientos que presentaremos generan ideales Lipschitz a partir de ideales de operadores lineales, mientras que los siguientes generan ideales Lipschitz a partir de otros ideales Lipschitz. A medida que vayamos introduciendo cada uno de ellos, vamos a ir ejemplificándolos, obteniendo así distintos ideales Lipschitz. Varios de estos ideales fueron introducidos por distintos autores.

### 1.1 Ideales Lipschitz de composición

Los ideales Lipschitz de composición fueron introducidos por Achour, Rueda, Sánchez-Pérez y Yahí [1] y fueron también estudiados por Saadi [51], Turco y Villafañe [57], entre otros.

**Definición 1.1.** Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de operadores (de Banach). El ideal Lipschitz (de Banach) de composición de  $\mathcal{A}$  es

$$\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0.$$

Una caracterización de los ideales de composición se obtiene a partir de la linealización de operadores Lipschitz a través del espacio de Arens–Eells. Si bien la demostración de la siguiente proposición es estándar, la incluimos.

**Proposición 1.2.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal lineal normado,  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Entonces  $f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  si y solo si su linealización  $L_f \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(X), E)$ . En tal caso,  $\|f\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} = \|L_f\|_{\mathcal{A}}$ . Como consecuencia, para todo espacio métrico  $X$  y todo espacio de Banach  $E$ ,  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  es isométricamente isomorfo a  $\mathcal{A}(\mathcal{A}(X), E)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$ , y sean  $G$  un espacio de Banach,  $g \in \text{Lip}_0(X, G)$  y  $T \in \mathcal{A}(G, E)$  tales que  $f = T \circ g$ . Tenemos que la linealización de  $f$  es  $L_f = T \circ L_g$ . Por lo tanto  $L_f \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(X), E)$  y  $\|L_f\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}} \text{Lip}(g)$ . Por arbitrariedad de la  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ -factorización de  $f$ , inferimos que  $\|L_f\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $L_f \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(X), E)$ . De la igualdad  $f = L_f \circ \delta_X$ , deducimos que  $f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  y  $\|f\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} \leq \|L_f\|_{\mathcal{A}}$ .  $\square$

### Comentarios 1.3.

1. Si consideramos  $\mathcal{F}$  el ideal de operadores de rango finito, una función pertenece a  $\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0$  si y solo si el subespacio generado por su imagen es finito-dimensional. Siguiendo [1], a los operadores en  $\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0$  los llamamos *Lipschitz de rango finito*. Como consecuencia de la Proposición 1.2, se puede ver que un operador  $f$  pertenece a  $\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  si y solo si existen  $g_1, \dots, g_n \in X^\#$  y  $v_1, \dots, v_n \in E$  de manera que

$$f(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)v_i \text{ para todo } x \in X.$$

Para  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz, de la condiciones de ideal Lipschitz se deduce que  $\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}$ . En el caso en que  $X$  es un espacio métrico finito o  $E$  es un espacio normado finito-dimensional, se tiene que  $\mathcal{I}(X, E) = \mathcal{F} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  como conjuntos.

2. Para  $\overline{\mathcal{F}}$ , el ideal de operadores aproximables, de la Proposición 1.2 se deduce la igualdad

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0 = \overline{\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0}^{\text{Lip}(\cdot)}.$$

Siguiendo [1], a los operadores en  $\overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0$  los llamamos *Lipschitz aproximables*.

3. Los operadores lineales de rango finito (aproximables) son, en particular, operadores Lipschitz de rango finito (respectivamente, Lipschitz aproximables). En general, dado un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach tal que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ , de la propiedad de ideal se tiene que

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}.$$

En otras palabras,  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es el ideal Lipschitz de Banach más chico que contiene a  $\mathcal{A}$ .

4. Jiménez-Vargas, Sepulcre y Villegas-Vallecillos en [32] introducen el ideal de operadores Lipschitz (débilmente) compactos de la siguiente manera: Un operador  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  se dice Lipschitz (débilmente) compacto si el conjunto  $\left\{ \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)} : x, y \in X, x \neq y \right\}$  es precompacto (resp., débilmente precompacto) en  $E$ . Este ideal Lipschitz es de composición [32, Proposition 2.1] y coincide con  $\mathcal{K} \circ \text{Lip}_0$  (resp.,  $\mathcal{W} \circ \text{Lip}_0$ ). Achour, Dahia y Turco en [3] introducen la clase de operadores Lipschitz  $p$ -compactos, que coincide con  $\mathcal{K}_p \circ \text{Lip}_0$ .
5. Dado  $1 \leq p < \infty$ , Chen y Zheng [19] definen una clase de operadores Lipschitz que denominan fuertemente Lipschitz  $p$ -nucleares. Dicha clase está conformada [19, Theorem 2.2] por los operadores  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tales que existen  $g \in \text{Lip}_0(X, \ell_\infty)$ ,  $T \in \mathcal{L}(\ell_p, E)$  y  $\lambda \in \ell_p$  de manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ g \downarrow & & \uparrow T \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p \end{array}$$

donde  $M_\lambda$  es el operador de multiplicación por  $\lambda$ . De la Proposición 1.2 se deduce que esta clase coincide con el ideal de composición  $\mathcal{N}_p \circ \text{Lip}_0$ . En el caso  $p = 1$ , puesto que  $\mathcal{N}_1$  es el ideal de Banach más chico [46, Theorem 6.7.2], para todo ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  se tiene que  $\mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}$  y por ende  $\mathcal{N}_1 \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}$ , lo cual nos dice que  $\mathcal{N}_1 \circ \text{Lip}_0$  es el ideal Lipschitz de Banach más chico, resultado que puede ser encontrado en [57, Lemma 3.10]. Una generalización del ideal de operadores fuertemente Lipschitz  $p$ -nucleares, que también es un ideal de composición, es introducida por Belacel y Chen (véase [10, Theorem 2.8]).

6. En analogía con el ejemplo anterior, Jiménez-Vargas, Sepulcre y Villegas Vallecillos [32] introducen una clase de operadores Lipschitz que denominan fuertemente Lipschitz  $p$ -integrales [32, Definition 2.4]. Acorde a su definición, dado  $1 \leq p < \infty$ , un operador  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  es fuertemente Lipschitz  $p$ -integral si existen un espacio de medida finita  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $T \in \mathcal{L}(L_p(\mu), E'')$  y  $g \in \text{Lip}_0(X, L_\infty(\mu))$  tales que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{k_E} & E'' \\ g \downarrow & & & & \uparrow T \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu) & & \end{array}$$

siendo  $\iota_{\infty,p}$  el operador inclusión. De la Proposición 1.2 se deduce que esta clase es el ideal Lipschitz de composición  $\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0$ . A los operadores en  $\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0$ , Cabrera-Padilla y Jiménez Vargas en [15] los llaman Lipschitz Grothendieck integrales. Una generalización del ideal de operadores fuertemente Lipschitz  $p$ -integrales, que también es ideal de composición, es introducida por Belacel y Chen [10, Definition 4.2].

7. Otro ejemplo de ideal Lipschitz de composición es introducido por Saadi en [50], quien los denomina Lipschitz-Cohen fuertemente  $p$ -sumantes. Éste coincide con  $\Pi_p^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0$ .

Fijado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ , se tiene que  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}$ . En particular, si  $\mathcal{I} = \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es un ideal de composición,

$$((\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0.$$

Por otro lado, tenemos que  $\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}$  y por lo tanto

$$\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0 \subseteq ((\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0.$$

Combinando ambas inclusiones, obtenemos un criterio que resultará útil para establecer si un ideal Lipschitz es de composición o no. Este resultado puede encontrarse en [57, Proposition 3.16].

**Proposición 1.4.** *Un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  es de composición si y solo si  $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0$ .*

## 1.2 Ideales Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte

Algunos ideales Lipschitz pueden ser definidos no solo entre un espacio métrico y un espacio de Banach, sino también entre espacios métricos, como sucede con los operadores Lipschitz  $p$ -sumantes. Para estos ideales, al no necesitar que los espacios involucrados para definirlos tengan una estructura lineal, carece de sentido que la propiedad de ideal involucre a operadores lineales. En virtud de esto, Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos [13, Definition 6.1] introdujeron la siguiente definición.

**Definición 1.5.** Un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  tiene la *propiedad de ideal fuerte* si  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I} = \mathcal{I}$ . Es decir, dados  $X$  un espacio métrico,  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  y  $g \in \text{Lip}_0(E, F)$ , se tiene que  $g \circ f \in \mathcal{I}(X, F)$  y  $\|g \circ f\|_{\mathcal{I}} \leq \text{Lip}(g)\|f\|_{\mathcal{I}}$ .

### Ejemplos 1.6.

1. Chen y Zheng [19] introdujeron la clase de operadores *Lipschitz  $p$ -nucleares* de la siguiente forma. Dados  $X$  e  $Y$  dos espacios métricos, una función  $f \in \text{Lip}_0(X, Y)$  es Lipschitz  $p$ -nuclear si existen  $g \in \text{Lip}_0(X, \ell_\infty)$ ,  $h \in \text{Lip}_0(\ell_p, Y)$  y  $\lambda \in \ell_p$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \uparrow h \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p, \end{array}$$

donde  $M_\lambda: \ell_\infty \rightarrow \ell_p$  es el operador de multiplicación por  $\lambda$ . Vale recordar que  $M_\lambda$  es un operador  $p$ -nuclear. Luego, un operador Lipschitz  $f: X \rightarrow Y$  es  $p$ -nuclear si y sólo si existen espacios de Banach  $E$  y  $F$ , operadores Lipschitz  $g \in \text{Lip}_0(X, E)$  y  $h \in \text{Lip}_0(F, Y)$  y un operador lineal  $T \in \mathcal{N}_p(E, F)$  tal que  $f = h \circ T \circ g$ . En el caso de que el espacio de llegada es un espacio de Banach, esta clase de operadores es un ideal Lipschitz de Banach que se puede caracterizar como  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{N}_p \circ \text{Lip}_0$ . De la definición se deduce que este ideal tiene la propiedad de ideal fuerte.

2. Análogamente, Achour, Dahia y Turco en [3] introdujeron la clase de operadores Lipschitz Pietsch  $p$ -integrales entre espacios métricos. Dados  $X$  e  $Y$  espacios métricos y  $1 \leq p < \infty$ , una función  $f \in \text{Lip}_0(X, Y)$  es Pietsch  $p$ -integral si existen un espacio de probabilidad  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  y dos funciones Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, L_\infty(\mu))$  y  $g \in \text{Lip}_0(L_p(\mu), Y)$  tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & \uparrow h \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu), \end{array}$$

En el caso de que el espacio de llegada es un espacio de Banach, esta clase de operadores es un ideal Lipschitz de Banach que se puede caracterizar como  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{PI}_p \circ \text{Lip}_0$ . Este ideal Lipschitz también tiene la propiedad de ideal fuerte.

Los ejemplos anteriores de ideales Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte pueden ser estudiados bajo un mismo marco. Para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , los ideales Lipschitz de la forma

$$\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$$

fueron estudiados en [AT]. Dado un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ , se tiene que  $f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  si y solo si existen espacios de Banach  $G_1$  y  $G_2$  y operadores  $g_1 \in \text{Lip}_0(X, G_1)$ ,  $T \in \mathcal{A}(G_1, G_2)$  y  $g_2 \in \text{Lip}_0(G_2, E)$  tales que  $f = g_2 \circ T \circ g_1$ , como se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ g_1 \downarrow & & \uparrow g_2 \\ G_1 & \xrightarrow{T} & G_2. \end{array} \quad (1.1)$$

Para  $f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E)$ ,

$$\|f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} = \inf\{\text{Lip}(g_2)\|T\|_{\mathcal{A}}\text{Lip}(g_1)\}.$$

De la misma forma como se vio para ideales Lipschitz de composición, si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach con la propiedad de ideal fuerte y  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach tal que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ , se tiene que  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{I}$ . El ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es el ideal Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte más chico que contiene a  $\mathcal{A}$ . En el caso particular en que  $\mathcal{I}$  sea de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ , se tiene que

$$\text{Lip}_0 \circ ((\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0 \subseteq \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0.$$

Por otro lado, si  $\mathcal{I} = \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  para algún ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , como  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  se tiene que

$$\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \text{Lip}_0 \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0.$$

Combinando estas dos inclusiones, obtenemos un criterio análogo al de la Proposición 1.4 para ideales de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ .

**Proposición 1.7.** *Un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  es de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  para algún ideal de Banach  $\mathcal{A}$  si y solo si  $\mathcal{I} = \text{Lip}_0 \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \text{Lip}_0$ .*

Para finalizar esta sección, veremos en qué casos un ideal de composición tiene la propiedad de ideal fuerte. Comencemos con un ejemplo.

**Ejemplo 1.8.** Consideremos el ideal de Banach de operadores separables  $\mathfrak{X}$  y veamos que  $\mathfrak{X} \circ \text{Lip}_0$  tiene la propiedad de ideal fuerte, es decir que

$$\mathfrak{X} \circ \text{Lip}_0 = \text{Lip}_0 \circ \mathfrak{X} \circ \text{Lip}_0.$$

Tomemos un espacio métrico  $X$ , espacios de Banach  $E$  y  $F$ ,  $f \in \mathfrak{X} \circ \text{Lip}_0(X, E)$  y  $g \in \text{Lip}_0(E, F)$ . Puesto que la imagen de  $f$  es separable, también lo es la imagen de  $g \circ f$ . Denotando  $G$  al subespacio cerrado generado por la imagen de  $g \circ f$ ,  $h: X \rightarrow G$  a la correstricción de  $g \circ f$  a  $G$  e  $\iota_G^F: G \hookrightarrow F$  a la inclusión, que es un operador lineal separable por ser  $G$  un espacio separable, se tiene que  $g \circ f = \iota_G^F \circ h$ , de modo que  $g \circ f \in \mathfrak{X} \circ \text{Lip}_0(X, F)$ .

De los ideales Lipschitz de composición que tengan la propiedad de ideal fuerte podemos decir lo siguiente.

**Proposición 1.9.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach de composición que tiene la propiedad de ideal fuerte. Entonces para todo espacio normado finito-dimensional  $E$ , se tiene que  $Id_{\mathbb{A}(E)} \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(\mathbb{A}(E), \mathbb{A}(E))$ .*

*Demostración.* Tomemos  $E$  un espacio normado finito-dimensional. Como  $Id_E \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, E)$  e  $\mathcal{I}$  tiene la propiedad de ideal fuerte, tenemos que  $\delta_E = \delta_E \circ Id_E \in \mathcal{I}(E, \mathbb{A}(E))$ . Como estamos asumiendo que  $\mathcal{I}$  es un ideal de composición, por la Proposición 1.2 tenemos que  $Id_{\mathbb{A}(E)}$ , la linealización de  $\delta_E$ , pertenece a  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(\mathbb{A}(E), \mathbb{A}(E))$ , concluyendo así la prueba.  $\square$

Tratemos de entender mejor la proposición anterior. Supongamos que  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach tal que  $Id_{\mathbb{A}(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}(\mathbb{A}(\mathbb{R}), \mathbb{A}(\mathbb{R}))$ . Como  $\mathbb{A}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$  (véase por ejemplo [58, Example 3.11]) y  $\ell_1$  es 1-complementado en  $L_1(\mathbb{R})$  [8, Lemma 5.1.1], se tiene que  $Id_{\ell_1} \in \mathcal{A}(\ell_1, \ell_1)$ . Por lo tanto, como para todo espacio de Banach separable  $E$ , existe un operador cociente y  $q: \ell_1 \rightarrow E$ , obtenemos que  $q = Id_E \circ q \in \mathcal{A}(\ell_1, E)$  o, equivalentemente,  $Id_E \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(E, E)$ . Así, tenemos

**Proposición 1.10.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach tal que  $Id_{\mathbb{A}(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}(\mathbb{A}(\mathbb{R}), \mathbb{A}(\mathbb{R}))$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que para todo par de espacios de Banach  $E$  y  $F$ , se tiene que  $\mathfrak{X}(E, F) \subseteq \mathcal{A}^{\text{sur}}(E, F)$  como conjuntos y esta inclusión es continua de norma a lo sumo  $C$ .*

*Demostración.* Sea  $T \in \mathfrak{X}(E, F)$ . Luego existe un espacio de Banach  $G$  separable y operadores  $R \in \mathcal{L}(E, G)$  y  $S \in \mathcal{L}(G, F)$  tal que  $T = S \circ R = S \circ Id_G \circ R$ . Por lo dicho anteriormente, al ser  $G$  separable,  $Id_G \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(G, G)$  implicando que  $T \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(E, F)$ .  $\square$

Combinando las dos proposiciones anteriores, obtenemos

**Corolario 1.11.** *Si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach de composición y con la propiedad de ideal fuerte, entonces para todo par de espacios de Banach separables  $E$  y  $F$  se tiene que  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})^{\text{sur}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ .*

De la definición de operador Lipschitz  $p$ -sumante, se desprende que el ideal de operadores Lipschitz  $p$ -sumantes tienen la propiedad de ideal fuerte. Además, como mencionamos en los Preliminares se tiene que  $\Pi_p^L \cap \mathcal{L} = \Pi_p$ . Estos resultados, en combinación con el corolario previo implica que  $\Pi_p^L$  no es de composición ya que, si lo fuera, tendríamos que  $\Pi_p^{\text{sur}}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$  para  $E$  y  $F$  espacios de Banach separables cualesquiera, lo cual no es posible pues, como  $\Pi_p \subseteq \mathcal{W}$ , se tiene que  $\Pi_p^{\text{sur}} \subseteq \mathcal{W}^{\text{sur}} = \mathcal{W}$ .

Por otro lado, dado que  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0$  es el ideal Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte más chico que contiene a  $\Pi_p$ , se tiene que  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0 \subseteq \Pi_p^L$  y por consiguiente

$$\Pi_p \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0) \cap \Pi_p^L \cap \mathcal{L} = \Pi_p,$$

con lo cual  $(\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \Pi_p$ , de donde también deducimos que  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0$  no es de composición.

Para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  con la propiedad de que  $\mathcal{A}^{\text{sur}} = \mathcal{L}$ , no se tiene necesariamente que  $\mathcal{A} = \mathcal{L}$ . Por ejemplo, el ideal de operadores 1-factorables  $\mathfrak{L}_1$  cumple que  $\mathfrak{L}_1^{\text{sur}} = \mathcal{L}$  por la Proposición A.7 y  $\mathfrak{L}_1 \neq \mathcal{L}$  aun entre espacios separables.

Por otro lado, si consideramos el ideal Lipschitz  $\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0$ , que tiene la propiedad de ideal fuerte y como  $\mathfrak{L}_1 \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}$ , tomando cápsulas suryectivas se obtiene que  $((\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L})^{\text{sur}} = \mathcal{L}$ . Sin embargo, el ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0$  no es de composición, como veremos en la Proposición 3.22. Por consiguiente, no vale la recíproca del corolario anterior.

No conocemos un ejemplo de un ideal Lipschitz de Banach no cerrado de composición que tenga la propiedad de ideal fuerte.

### 1.3 Cápsula regular y cápsula inyectiva

Comenzamos ahora con distintos procedimientos para obtener ideales Lipschitz a partir de otros ideales Lipschitz. Los primeros dos procedimientos que veremos son los de cápsula regular y cápsula inyectiva y sus definiciones son análogas a las de cápsula regular y cápsula inyectiva de ideales de Banach.

**Definición 1.12.** Dado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ ,

- Su *cápsula regular*  $\mathcal{I}^{\text{reg}}$  está formada por los operadores Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tales que  $k_E \circ f \in \mathcal{I}(X, E'')$ . La norma de  $\mathcal{I}^{\text{reg}}$  viene dada por  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{reg}}} = \|k_E \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .  $\mathcal{I}$  se dice *regular* si  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{reg}}$ .
- Su *cápsula inyectiva*  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  está formada por los operadores Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tales que  $J_E \circ f \in \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{E'}))$ . La norma de  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  está dada por  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} = \|J_E \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .  $\mathcal{I}$  se dice *inyectivo* si  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{inj}}$ .

La cápsula inyectiva de un ideal Lipschitz fue introducida por Achour, Rueda, Sánchez-Pérez y Yahí en [1, Definition 2.2]. Análogamente al caso lineal, se puede ver que  $\mathcal{I}^{\text{reg}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  son ideales Lipschitz de Banach.

**Comentario 1.13.** Notemos que en la definición de cápsula inyectiva de un ideal Lipschitz de Banach, al igual que en el caso lineal, se puede tomar cualquier isometría lineal  $j$  de  $E$  a un espacio de Banach 1-inyectivo  $F$  en lugar de la isometría  $J_E$  (ver, por ejemplo [46, 4.6.9]).

Con respecto a la cápsula inyectiva de un ideal Lipschitz al considerar isometrías lineales arbitrarias, tenemos

**Proposición 1.14.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach.*

- Sea  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach,  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ , y  $j: E \rightarrow F$  una isometría lineal de  $E$  en un espacio de Banach  $F$ . Si  $j \circ f \in \mathcal{I}(X, F)$ , entonces  $f \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} \leq \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .
- El ideal  $\mathcal{I}$  es inyectivo si y solo si cualesquiera que sean el espacio métrico  $X$ , el espacio de Banach  $E$ ,  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y la isometría lineal  $j: E \rightarrow F$  tal que  $j \circ f \in \mathcal{I}(X, F)$ , se tiene que  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}} = \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .

*Demostración.*

- (a) Dado que  $j: E \rightarrow F$  es isometría lineal y  $\ell_\infty(B_{E'})$  es 1-inyectivo, existe  $\tilde{J}_E \in \mathcal{L}(F, \ell_\infty(B_{E'}))$  tal que  $\tilde{J}_E \circ j = J_E$  y  $\|\tilde{J}_E\| = 1$ . Por lo tanto, si  $j \circ f \in \mathcal{I}(X, E)$ , se tiene que  $J_E \circ f \in \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{E'}))$  con  $\|J_E \circ f\|_{\mathcal{I}} \leq \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ , equivalentemente,  $f \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} \leq \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .
- (b) Si  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{inj}}$ , tomando  $f$  y  $j$  como en el enunciado, por el ítem (a) se tiene que  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}} \leq \|j \circ f\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Para la implicación recíproca, basta con tomar la isometría lineal  $J_E$ .

□

Del ítem (a) de la proposición anterior se deduce que  $\mathcal{I}^{\text{reg}} \subseteq \mathcal{I}^{\text{inj}}$  para todo ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ . Debido a que la definición de cápsula regular e inyectiva solo involucra isometrías lineales, es de esperar que estos procedimientos tengan un comportamiento razonable con respecto a ideales de composición. De hecho, se tiene

**Proposición 1.15.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} = \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \text{Lip}_0 \quad \text{y} \quad (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}} = \mathcal{A}^{\text{inj}} \circ \text{Lip}_0$$

*Demostración.* Sólo demostraremos el caso de la cápsula regular. El de la cápsula inyectiva es análogo. Fijemos un espacio métrico  $X$ , un espacio de Banach  $E$  y sea  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Puesto que  $k_E$  es lineal, la linealización de  $k_E \circ f$  es  $L_{k_E \circ f} = k_E \circ L_f$ . Usando la Proposición 1.2, tenemos

$$\begin{aligned} f \in (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}(X, E) &\iff k_E \circ f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, E'') \\ &\iff k_E \circ L_f \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(X), E'') \\ &\iff L_f \in \mathcal{A}^{\text{reg}}(\mathcal{A}(X), E) \\ &\iff f \in \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \text{Lip}_0 \end{aligned}$$

y de la misma cadena de equivalencias se ve que  $\|f\|_{(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}} = \|f\|_{\mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \text{Lip}_0}$ . □

### Ejemplos 1.16.

- Farmer y Johnson en [26] introdujeron los operadores Lipschitz  $p$ -integrales de la siguiente forma. Dados espacios métricos  $X, Y$  y  $f \in \text{Lip}_0(X, Y)$ ,  $f$  se dice Lipschitz  $p$ -integral si existen un espacio de medida finita  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $g \in \text{Lip}_0(X, L_\infty(\mu))$  y  $h \in \text{Lip}_0(L_p(\mu), (Y^\#)')$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{K_Y} & (Y^\#)' \\ \downarrow g & & & & \uparrow h \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty, p}} & & & L_p(\mu) \end{array}$$

La norma Lipschitz  $p$ -integral de  $f$  se define como  $\inf\{\text{Lip}(g)\text{Lip}(h)\}$ , donde el ínfimo esta tomado sobre todas las triplas  $(g, h, \mu)$  que satisfacen la condición del diagrama. Cuando

$Y = E$  es un espacio de Banach, puesto que  $E''$  es 1-complementado en  $(E^\#)'$  (véase [38, Theorem 2]), podemos reemplazar la isometría métrica  $K_E$  por la lineal  $k_E: E \rightarrow E''$  en la definición. A partir de eso, vemos que la clase de operadores Lipschitz  $p$ -integrales de espacios métricos a espacios de Banach es el ideal Lipschitz de Banach  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$ .

2. El ideal de operadores Lipschitz  $p$ -factoreables de Johnson, Maurey, Schechtman, mencionado en los Preliminares, coincide con  $(\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$ , donde  $\mathbb{L}_p$  denota la clase de espacios  $L_p$ .

Cerramos esta sección con un resultado relativo a la composición de ideales que se puede comparar con uno de Oertel [43] para ideales lineales. Si bien, en general, la composición de dos ideales normados es *cuasi-normada*, eso no quita el hecho que podamos considerar su cápsula regular.

**Proposición 1.17.** *Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \subseteq \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}^{\text{inj}}.$$

*En particular, si  $\mathcal{I}$  es inyectivo, se tiene que*

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} = \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}.$$

*Demostración.* Sea  $f \in (\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}}(X, E)$  y  $\varepsilon > 0$ . Tomemos un espacio de Banach  $F$  y operadores  $g \in \mathcal{I}(X, F)$ ,  $T \in \mathcal{A}(F, E'')$  tales que  $k_E \circ f = T \circ g$  y  $\|T\|_{\mathcal{A}} \|g\|_{\mathcal{I}} \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_{(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}}}$ . Sea  $F_0 := T^{-1}(E)$ , que es un subespacio lineal cerrado de  $F$ . Como  $T(F_0) \subseteq E$ , podemos definir el operador  $T_0: F_0 \rightarrow E$  tal que  $k_E \circ T_0(x) = T(x)$ . Como  $T \circ \iota_{F_0}^F = k_E \circ T_0$ , tenemos que  $T_0 \in \mathcal{A}^{\text{reg}}(F_0, E)$  con  $\|T_0\|_{\mathcal{A}^{\text{reg}}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}}$ .

Sea  $g_0 \in \text{Lip}_0(X, F_0)$  definida como  $g_0(x) = g(x)$  para  $x \in X$ . Como  $T \circ f(x) \in E$  para todo  $x \in X$ ,  $g_0$  está bien definida. Tenemos que  $\iota_{F_0}^F \circ g_0 = g \in \mathcal{I}(X, F) \subseteq \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, F)$ . Por el ítem (b) de la Proposición 1.14,  $g_0 \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, F_0)$  con  $\|g_0\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} = \|\iota_{F_0}^F \circ g_0\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} = \|g\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ .

Notando que  $k_E \circ f = k_E \circ T_0 \circ g_0$  tenemos que  $f = T_0 \circ g_0$ . Luego  $f \in \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}^{\text{inj}}} \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_{(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}}}$ .

Esto demuestra la primera igualdad del enunciado. Ahora, supongamos que  $\mathcal{I}^{\text{inj}} = \mathcal{I}$ . Por lo recientemente probado, tenemos que  $(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \subseteq \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}$ , y dado que la inclusión  $\mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I} \subseteq (\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}}$  se puede ver directamente a partir de las definiciones de los ideales involucrados, se tiene que  $(\mathcal{A} \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} = \mathcal{A}^{\text{reg}} \circ \mathcal{I}$ .  $\square$

## 1.4 Cápsula Lipschitz inyectiva

Para el caso lineal, la cápsula inyectiva de un ideal de operadores se puede caracterizar a través de una condición de dominación. Dado un ideal de operadores  $\mathcal{A}$ , un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  pertenece a  $\mathcal{A}^{\text{inj}}(E, F)$  si y sólo si existe un operador  $R \in \mathcal{A}(E, G)$  tal que  $\|Tv\| \leq \|Rv\|$  para todo  $v \in E$  [46, Proposition 8.4.4]. Esta caracterización de la cápsula inyectiva puede utilizarse para llevarla al caso Lipschitz y no es necesario que el espacio de llegada tenga una estructura lineal. La siguiente definición fue introducida por Achour, Dahia y Turco en [3] para clases de

funciones Lipschitz entre espacios métricos, pero nosotros la introduciremos sólo para ideales Lipschitz. En lo que sigue, dadas  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y  $g \in \text{Lip}_0(X, F)$ , diremos que  $g$  *domina a*  $f$  si  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|g(x) - g(y)\|$  para todo  $x, y \in X$ .

**Definición 1.18.** Dado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ , su *cápsula Lipschitz inyectiva*  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  está conformada por los operadores Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tales que existen un espacio de Banach  $F$  y  $g \in \mathcal{I}(X, F)$  de modo que  $g$  domina a  $f$ , y en tal caso,  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} := \inf\{\|g\|_{\mathcal{I}}\}$ , donde el ínfimo está tomado sobre todas las  $g$  en  $\mathcal{I}$  que dominan a  $f$ .  $\mathcal{I}$  se dice *Lipschitz inyectivo* si  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} = \mathcal{I}$ .

La prueba de que  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  es un ideal Lipschitz de Banach es análoga al caso lineal partiendo de la definición de cápsula inyectiva a partir de la condición de dominación (véase por ejemplo [53, Theorem 4.1]).

Recordemos que un espacio de Banach  $E$  se dice *Lipschitz 1-inyectivo* si siempre que tengamos un subconjunto métrico  $X$  de un espacio métrico  $Y$  que contiene al punto base de  $Y$  y una función  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ , existe  $\tilde{f} \in \text{Lip}_0(Y, E)$  que extiende a  $f$  y  $\text{Lip}(\tilde{f}) = \text{Lip}(f)$ . Gracias al teorema de extensión de McShane (ver por ejemplo [58, Theorem 1.33]), se puede ver que  $\ell_\infty(\Gamma)$  es Lipschitz 1-inyectivo para todo conjunto de índices  $\Gamma$ . Nos será útil la siguiente caracterización de la cápsula Lipschitz inyectiva, basada en [3, Proposition 1.2], que es una *versión Lipschitz* del Comentario 1.13.

**Proposición 1.19.** *Sea  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach,  $X$  espacio métrico,  $E$  espacio de Banach,  $j: E \rightarrow F$  una isometría (no necesariamente lineal) de  $E$  en un espacio de Banach  $F$  Lipschitz 1-inyectivo, y sea  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Se tiene que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  si y solo si  $j \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, F)$ , y en tal caso,  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} = \|j \circ f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}}$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$ , y sean  $G$  espacio de Banach y  $g \in \mathcal{I}(X, G)$  tales que  $g$  domina a  $f$ . Al ser  $j$  una isometría,  $g$  también domina a  $j \circ f$  y, por lo tanto, la función  $h: g(X) \subset G \rightarrow F$  dada por  $h(y) = j \circ f(x)$  si  $y = g(x)$  está bien definida,  $h \in \text{Lip}_0(g(X), F)$  y  $\text{Lip}(h) \leq 1$ . Como  $F$  es 1-Lipschitz inyectivo, existe  $\tilde{h}: G \rightarrow F$  que extiende a  $h$  y  $\text{Lip}(\tilde{h}) = \text{Lip}(h)$ . Tenemos así que  $j \circ f = \tilde{h} \circ g$ , de modo que  $j \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, F)$  y  $\|j \circ f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Tomando ínfimo sobre las normas de las funciones  $g$  que dominan a  $f$ , tenemos que  $\|j \circ f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $j \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, F)$  y sean  $G$  espacio de Banach,  $g \in \mathcal{I}(X, G)$  y  $h \in \text{Lip}_0(G, F)$  tales que  $j \circ f = h \circ g$ . Dados  $x, y \in X$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|j \circ f(x) - j \circ f(y)\| \leq \text{Lip}(h) \|g(x) - g(y)\| \\ &= \|(\text{Lip}(h)g)(x) - (\text{Lip}(h)g)(y)\|. \end{aligned}$$

De esto se deduce que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  y  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \text{Lip}(h) \|g\|_{\mathcal{I}}$ . □

A continuación enunciamos algunas propiedades básicas.

**Proposición 1.20.** *Sea  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach. Se tiene que*

(a) *El ideal  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  tiene la propiedad de ideal fuerte.*

$$(b) (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{Linj}} = \mathcal{I}^{\text{Linj}}.$$

$$(c) (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{Linj}} = \mathcal{I}^{\text{Linj}}.$$

$$(d) \mathcal{I}^{\text{Linj}} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{inj}}. \text{ En particular, si } \mathcal{I} \text{ tiene la propiedad de ideal fuerte, } \mathcal{I}^{\text{Linj}} = \mathcal{I}^{\text{inj}}.$$

*Demostración.* Fijemos un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ .

(a) Sea  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  y  $g \in \text{Lip}_0(E, F)$ . Sean  $G$  un espacio de Banach y  $h \in \mathcal{I}(X, G)$  tales que  $h$  domina a  $f$ . Dados  $x, y \in X$ , tenemos que

$$\|g \circ f(x) - g \circ f(y)\| \leq \|(\text{Lip}(g)h)(x) - (\text{Lip}(g)h)(y)\|.$$

Por ende  $g \circ f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  y  $\|g \circ f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \text{Lip}(g)\|h\|_{\mathcal{I}}$ . Tomando ínfimo sobre las normas de las funciones  $h$  en  $\mathcal{I}(X, \cdot)$  que dominan a  $f$ , se sigue que  $\|g \circ f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \text{Lip}(g)\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}}$ .

(b) De  $\mathcal{I} \subseteq \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}$ , se sigue que  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{Linj}}$ . Para ver la otra inclusión, tomemos  $f \in (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{Linj}}(X, E)$  y sean  $G$  espacio de Banach y  $g \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, G)$  tales que  $g$  domina a  $f$ . Sean  $F$  espacio de Banach,  $g_2 \in \mathcal{I}(X, F)$  y  $g_1 \in \text{Lip}_0(F, G)$  tales que  $g = g_1 \circ g_2$ . Dados  $x, y \in X$ , tenemos que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|g(x) - g(y)\| \leq \text{Lip}(g_1)\|g_2(x) - g_2(y)\| = \|(\text{Lip}(g_1)g_2)(x) - (\text{Lip}(g_1)g_2)(y)\|.$$

Por consiguiente,  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \text{Lip}(g_1)\|g_2\|_{\mathcal{I}}$ . Como esta desigualdad no depende de la factorización de  $g$ , tenemos que  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \|g\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}}$ . Tomando ínfimo sobre las normas de las funciones  $g$  en  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}$  que dominan a  $f$ , se obtiene que  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \|f\|_{(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{Linj}}}$ .

(c) De  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{inj}}$ , se sigue que  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \subseteq (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{Linj}}$ . Ahora, sea  $f \in (\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{Linj}}(X, E)$  y sean  $G$  espacio de Banach y  $g \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(X, G)$  tales que  $g$  domina a  $f$ . Luego,  $J_G \circ g \in \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{G'}))$  domina a  $f$  por ser  $J_G$  una isometría. Se sigue que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  y  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \|J_G \circ g\|_{\mathcal{I}} = \|g\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}}$ . Tomando ínfimo sobre las norma de las funciones  $g$  en  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  que dominan a  $f$ , se obtiene que  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \|f\|_{(\mathcal{I}^{\text{inj}})^{\text{Linj}}}$ .

(d) Por la Proposición 1.19 un operador Lipschitz  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$  si y sólo si  $J_E \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{E'}))$  o, equivalentemente,  $f \in (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{inj}}(X, E)$ .

□

Análogamente al ítem (b) de la Proposición 1.14, se tiene la siguiente caracterización.

**Proposición 1.21.** *Sea  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach con la propiedad de ideal fuerte. Entonces  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{Linj}}$  si y solo si cualesquiera que sean el espacio métrico  $X$ , el espacio de Banach  $E$ ,  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y la isometría (no necesariamente lineal)  $j: E \rightarrow F$  tal que  $j \circ f \in \mathcal{I}(X, F)$ , se tiene que  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}} = \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .*

*Demostración.* Fijemos un espacio métrico  $X$ , un espacio de Banach  $E$  y supongamos que  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{Linj}}$ . Tomemos  $f$  y  $j$  como en el enunciado. Como  $j \circ f \in \mathcal{I}(X, E)$  domina a  $f$  por ser  $j$  una isometría, se tiene que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E) = \mathcal{I}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}} \leq \|j \circ f\|_{\mathcal{I}}$ , y la otra desigualdad vale por la propiedad de ideal.

Recíprocamente, tomemos  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Si  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E)$ , por la Proposición 1.19  $J_E \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{E'})) = \mathcal{I}(X, \ell_\infty(B_{E'}))$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} = \|J_E \circ f\|_{\mathcal{I}}$ . Por hipótesis esto implica que  $f \in \mathcal{I}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}} = \|J_E \circ f\|_{\mathcal{I}}$ . Concluimos que  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \subseteq \mathcal{I}$ . La otra inclusión es trivial.  $\square$

Como ejemplo de ideal Lipschitz inyectivo tenemos, como es de esperar, al ideal de operadores Lipschitz  $p$ -sumantes. En efecto, sea  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y supongamos que existe una función  $g \in \Pi_p^L(X, F)$  tal que  $g$  domina a  $f$ . Luego, para  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$  tenemos que

$$\sum_{j=1}^n \|f(x_j) - f(y_j)\|^p \leq \sum_{j=1}^n \|g(x_j) - g(y_j)\|^p \leq \|g\|_{\Pi_p^L}^p \sup_{h \in B_{X^\#}} \sum_{j=1}^n |h(x_j) - h(y_j)|^p.$$

Luego,  $f \in \Pi_p^L(X, E)$ . Además, este ejemplo nos va a permitir mostrar que los procedimientos de cápsula inyectiva y cápsula Lipschitz inyectiva generan distintos ideales.

**Ejemplo 1.22.** Para  $1 \leq p < \infty$ , se tiene que

$$\Pi_p^L = (\mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}.$$

*Demostración.* Como  $\mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0 \subseteq \Pi_p^L$  y  $\Pi_p^L$  es Lipschitz inyectivo, se tiene que  $(\mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \subseteq \Pi_p^L$ . Ahora, dada  $f \in \Pi_p^L(X, E)$ , por la versión Lipschitz del teorema de factorización de Pietsch [26, Theorem 1], existen una medida de probabilidad  $\mu$ ,  $g \in \text{Lip}_0(X, L_\infty(\mu))$  y  $h \in \text{Lip}_0(L_p(\mu), \ell_\infty(B_{E'}))$  tales que  $J_E \circ f = h \circ \iota_{\infty,p} \circ g$ , donde  $\iota_{\infty,p}: L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$  es la inclusión. Dado que  $\iota_{\infty,p}$  es un operador lineal Pietsch  $p$ -integral, se tiene que  $J_E \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0(X, \ell_\infty(B_{E'}))$  o, equivalentemente,  $f \in (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}}(X, E)$ . Por el ítem (d) de la Proposición 1.20, concluimos que  $f \in (\mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$ .  $\square$

Dado que  $\Pi_p = \mathcal{P}\mathcal{I}_p^{\text{inj}}$  (ver Corolario A.3), de la Proposición 1.15 vemos que  $(\mathcal{P}\mathcal{I}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}} = \Pi_p \circ \text{Lip}_0$  y, en particular, es un ideal de composición. Sin embargo, como comentamos debajo del Corolario 1.11,  $\Pi_p^L$  no es un ideal de composición y gracias al ejemplo anterior, podemos deducir que los procedimientos de cápsula inyectiva y cápsula Lipschitz inyectiva son, en general, distintos.

A continuación daremos una caracterización del ideal  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$  en términos de un diagrama conmutativo. La siguiente proposición se puede comparar con el diagrama (1.1) donde se describe el ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ .

**Proposición 1.23.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach,  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach y una función  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Son equivalentes:

(i)  $f \in (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$ .

(ii) Existen espacios de Banach  $G_1$  y  $G_2$ , un operador  $T \in \mathcal{A}(G_1, G_2)$ , subconjuntos  $Y_1$  e  $Y_2$  de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente que contienen a 0 y  $T(Y_1) \subseteq Y_2$ , y funciones  $g_1 \in \text{Lip}_0(X, Y_1)$  y  $g_2 \in \text{Lip}_0(Y_2, E)$  tales que  $f = g_2 \circ T|_{Y_1} \circ g_1$ , como se ilustra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 g_1 \downarrow & & \uparrow g_2 \\
 Y_1 & \xrightarrow{T|_{Y_1}} & Y_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 G_1 & \xrightarrow{T} & G_2
 \end{array}$$

En tal caso,

$$\|f\|_{(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}} = \inf\{\text{Lip}(g_2)\|T\|_{\mathcal{A}}\text{Lip}(g_1)\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones de  $f$  como en el enunciado.

*Demostración.* Denotemos  $C$  al ínfimo del enunciado.

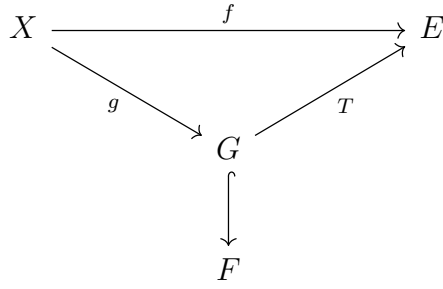
Supongamos que  $f \in (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$ . Entonces existen un espacio de Banach  $G_2$  y una función  $h \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, G_2)$  tales que  $h$  domina a  $f$ . Tomemos una factorización de  $h$  a través de un espacio de Banach  $G_1$  de la forma  $h = T \circ g$ , con  $g \in \text{Lip}_0(X, G_1)$  y  $T \in \mathcal{A}(G_1, G_2)$ . Como  $h$  domina a  $f$ , la función  $g_2: h(X) \rightarrow E$ , dada por  $g_2(h(x)) = f(x)$  para  $x \in X$ , está bien definida y vale que  $\text{Lip}(g_2) \leq 1$ . Tomando  $Y_1 := g(X) \subseteq G_1$ ,  $Y_2 := h(X) \subseteq G_2$  y  $g_1: X \rightarrow Y_1$  la función definida por  $g_1(x) := g(x)$  para  $x \in X$ , se tiene la factorización de  $f$ ,  $f = g_2 \circ T|_{Y_1} \circ g_1$ , y por lo tanto  $C \leq \text{Lip}(g)\|T\|_{\mathcal{A}}$ . Como la  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ -factorización de  $h$  era arbitraria, se sigue que  $C \leq \|h\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ , y al ser  $h$  cualquier función en  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  que domina a  $f$ , concluimos que  $C \leq \|f\|_{(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}}$ .

Recíprocamente, supongamos que  $f$  satisface la condición (ii). Consideremos  $J_E \circ f = J_E \circ g_2 \circ T|_{Y_1} \circ g_1 \in \text{Lip}_0(X, \ell_\infty(B_{E'}))$ . Puesto que  $\ell_\infty(B_{E'})$  es Lipschitz 1-inyectivo, existe  $\tilde{g}: G_2 \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$  que extiende a  $J_E \circ g_2$  y  $\text{Lip}(\tilde{g}) = \text{Lip}(g_2)$ . Así, tenemos que  $J_E \circ f = \tilde{g} \circ T \circ (\iota_{Y_1}^{G_1} \circ g_1)$ , donde  $\iota_{Y_1}^{G_1}: Y_1 \hookrightarrow G_1$  es la inclusión. De aquí, se sigue que  $J_E \circ f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, \ell_\infty(B_{E'}))$ , equivalentemente,  $f \in (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}}(X, E)$ , y esto, en virtud del ítem (d) de la Proposición 1.20, equivale a decir que  $f \in (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$ , con  $\|f\|_{(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}} = \|J_E \circ f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} \leq \text{Lip}(g_2)\|T\|_{\mathcal{A}}\text{Lip}(g_1)$ . Se sigue que  $\|f\|_{(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}} \leq C$ .  $\square$

Ahora vamos a poder ver las diferencias entre los procedimientos de la cápsula inyectiva y la cápsula Lipschitz inyectiva cuando se aplica a un ideal de composición de la forma  $\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0$ .

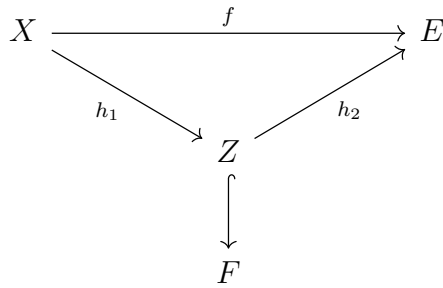
**Proposición 1.24.** Sean  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach y  $\mathbf{A}$  una clase de espacios de Banach tal que  $\text{op}(\mathbf{A})$  es un ideal de operadores normado.

(a) Una función  $f \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}}(X, E)$  si y solo si existen  $F \in \mathbf{A}$ , un subespacio  $G \subseteq F$ ,  $g \in \text{Lip}_0(X, G)$  y  $T \in \mathcal{L}(G, E)$  tal que  $f = T \circ g$ . Es decir, el siguiente diagrama conmuta.



En tal caso,  $\|f\|_{(\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}}} = \inf\{\|T\| \text{Lip}(g)\}$ , donde el ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones de  $f$  como en el diagrama.

- (b) Una función  $f \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$  si y solo si existen  $F \in \mathbf{A}$ , un subconjunto  $Z \subseteq F$  con  $0 \in Z$ , y  $h_1 \in \text{Lip}_0(X, Z)$ ,  $h_2 \in \text{Lip}_0(Z, E)$  tal que  $f = h_2 \circ h_1$ .



En tal caso,  $\|f\|_{(\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}} = \inf\{\text{Lip}(h_2) \text{Lip}(h_1)\}$ , donde el ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones de  $f$  como en el diagrama.

*Demostración.*

- (a) Por la Proposición 1.15,  $(\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}} = \text{op}(\mathbf{A})^{\text{inj}} \circ \text{Lip}_0$ . Así, basta con usar que, para un operador  $S \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $S \in \text{op}(\mathbf{A})^{\text{inj}}(E, F)$  si y solo si  $S$  se factoriza linealmente a través de un subespacio de un espacio en  $\mathbf{A}$ . Esto se deduce de combinar [46, Theorem 4.6.5, Proposition 4.6.6].
- (b) Supongamos que  $f$  tiene una factorización como en el diagrama. Entonces podemos escribir  $f = h_2 \circ \text{Id}_F|_Z \circ h_1$ , así que por la Proposición 1.23 se tiene que  $f \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$ . Recíprocamente, supongamos que  $f \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E)$  y tomemos una factorización de  $f$  como en el ítem (ii) de la Proposición 1.23. Sean  $G_1, G_2$  espacios de Banach,  $Y_1, Y_2$  subconjuntos de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente, funciones  $g_1 \in \text{Lip}_0(X, Y_1)$ ,  $g_2 \in \text{Lip}_0(Y_2, E)$  y un operador lineal  $T \in \text{op}(\mathbf{A})(G_1, G_2)$  tal que  $T(Y_1) \subseteq Y_2$ , de manera que  $f = g_2 \circ T|_{Y_1} \circ g_1$ . Dado que  $T \in \text{op}(\mathbf{A})(G_1, G_2)$ , existen un espacio de Banach  $F \in \mathbf{A}$  y operadores  $S \in \mathcal{L}(G_1, F)$ ,  $R \in \mathcal{L}(F, G_2)$  tales que  $T = R \circ S$ . Por consiguiente, notando con  $Z = S(Y_1) \subseteq F$ , obtenemos que  $T|_{Y_1} = (R|_Z) \circ (S|_{Y_1})$ , con lo cual  $f = (g_2 \circ R|_Z) \circ (S|_{Y_1} \circ g_1)$  es una factorización de  $f$  como en el diagrama.

□

**Ejemplo 1.25.** Para  $1 \leq p < \infty$ , el ideal Lipschitz  $(\text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$  está formado por los operadores Lipschitz que se factorizan a través de un subconjunto de un espacio  $L_p$  vía funciones Lipschitz. Este ideal fue estudiado por Chávez-Domínguez [17] (véase también [14, Page 117]).

Dado un espacio de Banach  $E$  y una clase de espacios de Banach  $\mathbf{A}$  tal que  $\text{op}(\mathbf{A})$  es un ideal normado, el operador identidad  $Id_E \in \text{op}(\mathbf{A})$  si y solo si  $E$  es isomorfo a un subespacio complementado de algún espacio de Banach perteneciente a  $\mathbf{A}$  (véase por ejemplo [54, Lemma 1.1]). Veremos ahora una caracterización análoga para el caso en que  $Id_E \in \text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0(\mathbf{E}, \mathbf{E})$  o  $Id_E \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ . Recordemos que para un espacio de Banach  $E$  y un subespacio  $F \subseteq E$ ,  $F$  se dice complementado en  $E$  si existe un operador lineal acotado  $P: E \rightarrow F$  tal que  $P(v) = v$  para todo  $v \in F$ . En analogía con esto, dado un espacio métrico  $X$ , un subconjunto  $Y$  de  $X$  se dice *retracto Lipschitz* de  $X$  si existe una función  $r: X \rightarrow Y$  Lipschitz tal que  $r(y) = y$  para todo  $y \in Y$ .

**Proposición 1.26.** *Dado un espacio de Banach  $E$  y una clase de espacios de Banach  $\mathbf{A}$  tal que  $\text{op}(\mathbf{A})$  es un ideal normado, se tiene que*

- (a)  $Id_E \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$  si y solo si  $E$  es Lipschitz isomorfo a un subconjunto de algún espacio de Banach perteneciente a  $\mathbf{A}$ .
- (b)  $Id_E \in \text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0(\mathbf{E}, \mathbf{E})$  si y solo si  $E$  es Lipschitz isomorfo a un retracto Lipschitz de algún espacio de Banach perteneciente a  $\mathbf{A}$ .

*Demostración.*

- (a) Si  $E$  es Lipschitz isomorfo a un subconjunto  $Y$  de un espacio de Banach  $G \in \mathbf{A}$ , llamando  $f: Y \rightarrow E$  a un Lipschitz isomorfismo entre  $F$  e  $Y$ , como  $Id_E = f \circ f^{-1}$ , por el ítem (b) de la Proposición 1.24,  $Id_E \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ . Recíprocamente, si  $Id_E \in (\text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ , el ítem (b) de dicha Proposición implica que existe  $G \in \mathbf{A}$ , un subconjunto  $Y \subseteq G$  que contiene a  $0$ ,  $g_2 \in \text{Lip}_0(Y, E)$  y  $g_1 \in \text{Lip}_0(E, Y)$  de manera que  $Id_E = g_2 \circ g_1$ . En particular,  $g_1$  es inyectivo. Denotando  $Z = g_1(E) \subseteq Y \subseteq G$ , se tiene que  $g_1: E \rightarrow Z$  es Lipschitz y biyectiva. Su inversa  $g_1^{-1}: Z \rightarrow E$  también es Lipschitz. En efecto, dados  $z_1, z_2 \in Z$ , existen  $x_1, x_2 \in E$  tales que  $z_i = g_1(x_i)$ ,  $i = 1, 2$ , con lo cual

$$d(g_1^{-1}(z_1), g_1^{-1}(z_2)) = d(x_1, x_2) = d(g_2 \circ g_1(x_1), g_2 \circ g_1(x_2)) \leq \text{Lip}(g_2)d(z_1, z_2)$$

Luego,  $g_1: E \rightarrow Z$  es un isomorfismo Lipschitz, como queríamos ver.

- (b) Supongamos que  $f: E \rightarrow Y$  es un Lipschitz isomorfismo sobre un subconjunto  $Y$  de algún espacio de Banach  $G \in \mathbf{A}$  tal que existe una retracción Lipschitz  $r: G \rightarrow Y$ . Sea  $\iota_Y^G: Y \hookrightarrow G$  la inclusión. Se puede ver que  $Id_E = (f^{-1} \circ r) \circ Id_G \circ (\iota_Y^G \circ f)$  con lo cual se tiene que  $Id_E \in \text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ . Recíprocamente, si  $Id_E \in (\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbf{A}) \circ \text{Lip}_0)(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ , entonces existen un espacio de Banach  $G \in \mathbf{A}$  y funciones  $f \in \text{Lip}_0(E, G)$  y  $g \in \text{Lip}_0(G, E)$  tal que  $Id_E = g \circ f$ . Se sigue que  $f: E \rightarrow f(E)$  es un isomorfismo Lipschitz y  $r = f \circ g: G \rightarrow f(E)$  es una retracción Lipschitz.

□

Un resultado importante en la teoría de la geometría no lineal de espacios de Banach es el de Aharoni donde afirma que todo espacio métrico separable es Lipschitz isomorfo a un subconjunto de  $c_0$  [6]. Este resultado, utilizando la Proposición 1.26, se puede expresar en términos de ideales Lipschitz.

**Proposición 1.27.** *Si  $X$  es un espacio métrico y  $E$  es un espacio de Banach, uno de los cuales es separable, entonces*

$$(\text{op}(c_0) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(X, E) = \text{Lip}_0(X, E)$$

como conjuntos.

**Corolario 1.28.** *Sea  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach tal que  $Id_{c_0} \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(c_0, c_0)$ . Si  $X$  es un espacio métrico y  $E$  es un espacio de Banach, uno de los cuales es separable, entonces  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, E) = \text{Lip}_0(X, E)$  como conjuntos.*

*Demostración.* La hipótesis sobre  $\mathcal{I}$  implica que  $\text{Lip}_0 \circ \text{op}(c_0) \circ \text{Lip}_0 \subseteq \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}$ . Tomando cápsulas Lipschitz inyectivas en ambos miembros de esta inclusión, y usando el ítem (b) de la Proposición 1.20 y la Proposición anterior, obtenemos la conclusión deseada.  $\square$

Finalizaremos esta sección con un resultado y un ejemplo en relación a los operadores lineales que pertenecen a ideales Lipschitz inyectivos.

**Proposición 1.29.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces*

- (a)  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L} = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})^{\text{inj}}$ .
- (b)  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L} = ((\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L})^{\text{inj}}$ .

*En particular,  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}$  y  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}$  son ideales de Banach inyectivos.*

*Demostración.*

- (a) Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Tenemos que  $T \in \mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}(E, F)$  si y solo si  $J_E \circ T \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, \ell_\infty(B_{E'}))$  y esto equivale a decir que  $T \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})^{\text{inj}}(E, F)$ . La igualdad de las normas se sigue de dichas equivalencias.
- (b) Esta igualdad se obtiene combinando el ítem (d) de la Proposición 1.20 y el ítem anterior.

$\square$

Como consecuencia del Ejemplo 1.22, vimos que los procedimientos de cápsula inyectiva y cápsula Lipschitz inyectiva pueden diferir. Más aún, a continuación veremos un ejemplo de un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  tal que los operadores lineales de  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  difieren, es decir  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}$  y  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}$  son distintos.

**Ejemplo 1.30.** Consideremos el ideal de Banach de *operadores de Rosenthal* conformado por los operadores que mandan sucesiones acotadas en sucesiones que tienen subsucesiones débilmente de Cauchy. Por [9], este ideal coincide con el ideal inyectivo  $\text{op}(\mathbf{N}\ell_1)$ , donde  $\mathbf{N}\ell_1$  es la clase de espacios de Banach que no contienen una copia isomorfa de  $\ell_1$ . Tomemos el ideal Lipschitz de composición  $\text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0$ , que es inyectivo en virtud de la Proposición 1.15. Dado que la sucesión de vectores canónicos  $(e_n)_n$  en  $\ell_1$  no tiene subsucesiones débilmente de Cauchy, como el operador baricentro  $\beta_{\ell_1}: \mathbb{E}(\ell_1) \rightarrow \ell_1$  manda la sucesión  $(\delta_{e_n})_n \subseteq \mathbb{E}(\ell_1)$  en la sucesión  $(e_n)_n$ , este no es un operador de Rosenthal. Al ser  $\beta_{\ell_1}$  la linealización de  $Id_{\ell_1}$ ,

concluimos que  $Id_{\ell_1} \notin (\text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1)$ . Por otro lado, como  $c_0$  no tiene copias de  $\ell_1$ ,  $Id_{c_0} \in \text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \subseteq \text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0$ . Aplicando el Corolario 1.28 tenemos en particular que  $Id_{\ell_1} \in (\text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(\ell_1, \ell_1)$ . Así obtuvimos la inclusión estricta

$$(\text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0)^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1) \subsetneq (\text{op}(\mathbf{N}\ell_1) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}(\ell_1, \ell_1).$$

## 1.5 Cápsula maximal y núcleo minimal

La cápsula maximal de un ideal Lipschitz de Banach fue introducida y estudiada por Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos [13]. Aquí, a fines prácticos, para definir la cápsula maximal y núcleo minimal de un ideal Lipschitz, seguiremos el enfoque hecho en [57]. Análogamente al caso lineal, dado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ , de [57, Proposition 4.2] la familia de ideales Lipschitz de Banach

$$\{\mathcal{J} : \mathcal{J}(X_0, E_0) = \mathcal{I}(X_0, E_0) \forall X_0 \in \text{MFIN}, \forall E_0 \in \text{FIN}\},$$

considerada con el orden parcial de ideales Lipschitz de Banach, tiene un máximo y un mínimo. A éstos se los denotan  $\mathcal{I}^{\text{max}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{min}}$  y se los denominan la *cápsula maximal* y el *núcleo minimal* de  $\mathcal{I}$ , respectivamente. De su definición, se sigue que

- $\mathcal{I}^{\text{min}} \subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{max}}$ .
- $\mathcal{I}^{\text{min}}(X_0, E_0) = \mathcal{I}(X_0, E_0) = \mathcal{I}^{\text{max}}(X_0, E_0)$  para cualesquiera  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$ .
- Si  $\mathcal{J}$  es un ideal Lipschitz de Banach tal que  $\mathcal{J}(X_0, E_0) = \mathcal{I}(X_0, E_0)$  para cualesquiera  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$ , entonces  $\mathcal{I}^{\text{min}} \subseteq \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}^{\text{max}}$ .

Un ideal Lipschitz se dice maximal o minimal si coincide con su cápsula maximal o su núcleo minimal respectivamente. A continuación damos una lista de propiedades básicas, tomadas de [13] y [57].

**Proposición 1.31.** *Sean  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  ideales Lipschitz de Banach.*

- (a)  $(\mathcal{I}^{\text{min}})^{\text{max}} = \mathcal{I}^{\text{max}}$  e  $(\mathcal{I}^{\text{max}})^{\text{min}} = \mathcal{I}^{\text{min}}$ .
- (b) Si  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ , entonces  $\mathcal{I}^{\text{min}} \subseteq \mathcal{J}^{\text{min}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{max}} \subseteq \mathcal{J}^{\text{max}}$ .
- (c)  $\mathcal{I}^{\text{reg}} \subseteq \mathcal{I}^{\text{max}}$ . En particular, si  $\mathcal{I}$  es maximal, entonces es regular.
- (d) Si  $\mathcal{I}$  es minimal, entonces  $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{F} \circ \text{Lip}_0}^{\|\cdot\|_{\mathcal{I}}}$  y en particular  $\mathcal{I} \subseteq \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0$ .

El núcleo minimal de un ideal Lipschitz no puede tener la propiedad de ideal fuerte.

**Proposición 1.32.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach con la propiedad de ideal fuerte. Entonces  $\mathcal{I}$  no es minimal.*

*Demostración.* Si  $\mathcal{I}$  es minimal y tiene la propiedad de ideal fuerte, utilizando el ítem (d) de la proposición anterior tenemos que

$$\delta_{\mathbb{R}} = \delta_{\mathbb{R}} \circ Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{A}(\mathbb{R})) \subseteq \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0(\mathbb{R}, \mathbb{A}(\mathbb{R})).$$

Esto implica que la linealización de  $\delta_{\mathbb{R}}$ , el operador identidad de  $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ , es aproximable, lo cuál no puede ocurrir ya que  $\mathbb{A}(\mathbb{R})$  no es de dimensión finita.  $\square$

La siguiente proposición muestra que la definición de cápsula maximal de un ideal Lipschitz de Banach dada por Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos en [13] y la utilizada aquí son equivalentes.

**Proposición 1.33.** *Sea  $X$  espacio métrico,  $E$  espacio de Banach y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Entonces  $f \in \mathcal{I}^{\max}(X, E)$  si y solo si*

$$\sup\{\|q_L^E \circ f \circ \iota_Y^X\|_{\mathcal{I}} : Y \in \text{MFIN}(X), L \in \text{COFIN}(E)\} < \infty$$

y en tal caso  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\max}}$  es igual a dicho supremo.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach y definamos, para  $X$  un espacio métrico y  $E$  un espacio de Banach, la clase de funciones Lipschitz  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$  dada por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{I}}(X, E) = \left\{ f \in \text{Lip}_0(X, E) : \|f\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{I}}} := \sup_{\substack{Y \in \text{MFIN}(X) \\ L \in \text{COFIN}(E)}} \|q_L^E \circ f \circ \iota_Y^X\|_{\mathcal{I}} < \infty \right\}.$$

Es rutinario que  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$  con la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{J}_{\mathcal{I}}}$  es un ideal Lipschitz de Banach,  $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{I}}$  y que si  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$  entonces  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}(X_0, E_0) = \mathcal{I}(X_0, E_0)$ . Luego  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{I}^{\max}$ . Más aún, como la definición de  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}}$  depende de funciones con dominios restringidos a espacios métricos finitos y codominios de dimensión finita, entonces  $\mathcal{J}_{\mathcal{I}^{\max}} = \mathcal{J}_{\mathcal{I}}$ . Por ende,  $\mathcal{I}^{\max} \subseteq \mathcal{J}_{\mathcal{I}}$  y concluimos la demostración.  $\square$

Es conocido que la bola unidad de un ideal lineal maximal es cerrada en la topología de convergencia puntual. Para el caso Lipschitz se tiene el resultado análogo. Más aún, se puede comparar con [23, Proposition 17.21].

**Proposición 1.34.** *Sea  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Sea una red  $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{I}(X, E)$  y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tal que  $(f_i)_{i \in I}$  converge puntualmente a  $f$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}}$  es finito. Entonces  $f \in \mathcal{I}^{\max}(X, E)$  y  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\max}} \leq \liminf_i \|f_i\|_{\mathcal{I}}$ . En particular, la bola unidad de  $\mathcal{I}^{\max}(X, E)$  es cerrada con respecto a la topología de convergencia puntual.*

*Demostración.* Fijemos  $Y \in \text{MFIN}(X)$  y  $L \in \text{COFIN}(E)$  y notemos que en  $\text{Lip}_0(Y, E/L)$  las topologías de convergencia puntual y la de la norma Lipschitz son equivalentes. Además, como  $\text{Lip}_0(Y, E/L)$  es un espacio de dimensión finita, es isomorfo a  $\mathcal{I}(Y, E/L)$ . Luego, como  $(f_i)_{i \in I}$  converge puntualmente a  $f$ , por lo dicho anteriormente,  $(q_L^E \circ f_i \circ \iota_Y^X)_{i \in I}$  converge en norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$  a  $q_L^E \circ f \circ \iota_Y^X$ . Por lo tanto

$$\|q_L^E \circ f \circ \iota_Y^X\|_{\mathcal{I}} = \liminf_i \|q_L^E \circ f_i \circ \iota_Y^X\|_{\mathcal{I}} \leq \liminf_i \|f_i\|_{\mathcal{I}}.$$

Aplicando la caracterización anterior, se tiene el resultado.  $\square$

En relación a los operadores lineales que están en un ideal Lipschitz maximal, tenemos

**Proposición 1.35.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces  $\mathcal{I}^{\max} \cap \mathcal{L}$  es un ideal maximal.*

*Demostración.* Supongamos que un operador lineal  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  está en  $(\mathcal{I}^{\max} \cap \mathcal{L})^{\max}$ . Esto implica que existe una constante  $C > 0$  tal que para todo espacio  $M \in \text{FIN}(E)$  y  $L \in \text{COFIN}(F)$ ,  $\|q_L^F \circ T \circ \iota_M^E\|_{\mathcal{I}^{\max}} \leq C$ . Para ver que  $T \in \mathcal{I}^{\max}(E, F)$ , tomemos un espacio  $X_0 \in \text{MFIN}(E)$  y  $L \in \text{COFIN}(F)$ . Denotando con  $M = \text{span}\{X_0\}$ , tenemos que

$$\|q_L^F \circ T \circ \iota_{X_0}^E\|_{\mathcal{I}} = \|q_L^F \circ T \circ \iota_{X_0}^E\|_{\mathcal{I}^{\max}} = \|q_L^F \circ T \circ \iota_M^E \circ \iota_{X_0}^M\|_{\mathcal{I}^{\max}} \leq \|q_L^F \circ T \circ \iota_M^E\|_{\mathcal{I}^{\max}} \leq C.$$

Aplicando la Proposición 1.33 tenemos el resultado.  $\square$

En el caso lineal, un célebre resultado de Pietsch [45, Satz 4] y Kürsten [36], cuyo enunciado puede ser encontrado en [30, Theorem 8.1], caracteriza a los ideales de Banach maximales en términos de la *ultraestabilidad y regularidad*. El análogo para ideales Lipschitz fue obtenido en [AT]. Este resultado nos será de mucha utilidad a lo largo del trabajo y, en particular, para dar distintos ejemplos y propiedades relacionados con ideales Lipschitz maximales. Es por ello que nos permitimos introducir la *ultraestabilidad de un ideal Lipschitz* ahora y luego continuar con el estudio de ideales Lipschitz maximales.

## 1.6 Maximalidad y ultraestabilidad

La teoría de ultraproductos de espacios de Banach fue introducida por Dacuhna-Castelle y Krivine en [21]. En el trabajo de Heinrich [30] se encuentran las definiciones y resultados básicos de esta teoría. Algunas de ellas se encuentran en el Apéndice B.

Dado un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en un conjunto  $I$ , para toda familia acotada de números reales  $(c_i)_{i \in I}$  indexada por  $I$ , por Proposición B.4 existe su límite a lo largo del ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , denotado  $\lim_{\mathcal{U}} c_i$ . Una propiedad que usaremos en ocasiones es que si  $C \subseteq \mathbb{R}$  es un cerrado y existe  $I_1 \in \mathcal{U}$  tal que  $c_i \in C$  para todo  $i \in I_1$ , entonces  $\lim_{\mathcal{U}} c_i \in C$  (Proposición B.5).

Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de espacios métricos con puntos bases  $0_i \in X_i$ . En el conjunto  $\left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i : \sup_{i \in I} d(x_i, 0_i) < \infty \right\}$  se puede definir la relación de equivalencia  $(x_i)_i \sim (y_i)_i$  si y solo si  $\lim_{\mathcal{U}} d(x_i, y_i) = 0$ . A la clase de equivalencia de un elemento  $(x_i)_i$  en dicho conjunto la denotamos  $(x_i)_{\mathcal{U}}$ . Denotamos con  $(X_i)_{\mathcal{U}}$  al conjunto de clases de equivalencias  $(X_i)_{\mathcal{U}}$ , dotado de la métrica  $d((x_i)_{\mathcal{U}}, (y_i)_{\mathcal{U}}) = \lim_{\mathcal{U}} d(x_i, y_i)$  y con  $(0_i)_{\mathcal{U}}$  como punto base. Este espacio métrico se llama el *ultralímite* o *ultraproducto* de la familia  $(X_i)_{i \in I}$  con el ultrafiltro  $\mathcal{U}$ . Cuando todos los espacio métricos  $X_i$  con  $i \in I$  son espacios de Banach, su ultraproducto es un espacio de Banach, con norma  $\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|$ .

Fijemos un conjunto de índices  $I$  y un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  de  $I$ . Dada una familia de funciones Lipschitz  $f_i \in \text{Lip}_0(X_i, Y_i)$  indexada por  $I$  tales que  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(f_i) < \infty$ , la función  $(f_i)_{\mathcal{U}} : (X_i)_{\mathcal{U}} \rightarrow (Y_i)_{\mathcal{U}}$  dada por

$$(f_i)_{\mathcal{U}}((x_i)_{\mathcal{U}}) := (f_i x_i)_{\mathcal{U}}$$

aplica el 0 en 0 y es Lipschitz con norma  $\text{Lip}((f_i)^\mathcal{U}) \leq \lim_{\mathcal{U}} \text{Lip}(f_i)$ . Si las funciones  $f_i$ ,  $i \in I$ , son operadores lineales entre espacios de Banach, entonces  $(f_i)^\mathcal{U}$  es un operador lineal. Imitando la definición de ideal de Banach ultraestable [46, Definition 8.8.5], introducimos la análoga en el caso Lipschitz.

**Definición 1.36.** Un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  se dice *ultraestable* si para toda familia de operadores Lipschitz  $(f_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{I}$  con  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}} < \infty$  y para todo ultrafiltro  $\mathcal{U}$  de  $I$ , el ultraproducto  $(f_i)^\mathcal{U}$  pertenece a  $\mathcal{I}$  con  $\|(f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}}$ .

Para producir distintos ideales Lipschitz de Banach ultraestables, notemos que dado un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en  $I$ , familias de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}, (Z_i)_{i \in I}$  y funciones Lipschitz  $f_i \in \text{Lip}_0(X_i, Y_i)$  y  $g_i \in \text{Lip}_0(Y_i, Z_i)$ ,  $i \in I$ , tales que  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(f_i)$  y  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(g_i)$  son finitos, tenemos que

$$(g_i \circ f_i)^\mathcal{U} = (g_i)^\mathcal{U} \circ (f_i)^\mathcal{U}.$$

**Proposición 1.37.** Sea  $\mathcal{A}$  ideal de Banach ultraestable. Entonces  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es ultraestable

*Demostración.* Tomemos familias de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}$ , espacios de Banach  $(E_i)_{i \in I}$ , operadores Lipschitz  $(f_i)_{i \in I}$  tal que  $f_i \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X_i, E_i)$  para cada  $i \in I$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} < \infty$ , y sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$ . Para cada  $i \in I$ , hay una factorización  $f_i = T_i \circ g_i$  a través de un espacio de Banach  $F_i$ , donde  $g_i \in \text{Lip}_0(X_i, F_i)$  con  $\text{Lip}(g_i) = 1$  y  $T_i \in \mathcal{A}(F_i, E_i)$  con  $\|T_i\|_{\mathcal{A}} = \|f_i\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ . Tenemos que  $(f_i)^\mathcal{U} = (T_i)^\mathcal{U} \circ (g_i)^\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{A}$  es ultraestable, tenemos que  $(T_i)^\mathcal{U} \in \mathcal{A}((F_i)_{\mathcal{U}}, (E_i)_{\mathcal{U}})$  con  $\|(T_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{A}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|T_i\|_{\mathcal{A}}$ , implicando que  $(f_i)^\mathcal{U} \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0((X_i)_{\mathcal{U}}, (E_i)_{\mathcal{U}})$ , con

$$\|(f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} \leq \|(T_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{A}} \text{Lip}((g_i)^\mathcal{U}) \leq \lim_{\mathcal{U}} \|T_i\|_{\mathcal{A}} = \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$$

concluyendo la demostración □

*Mutatis mutandis*, se puede demostrar lo siguiente [AT, Proposition 3.3].

**Proposición 1.38.** Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestable. Entonces  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}$  es ultraestable.

Como consecuencia de las dos proposiciones anteriores, tenemos

**Corolario 1.39.** Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach ultraestable. Entonces  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es ultraestable.

Para familias de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}, (Y_i)_{i \in I}$  e isometrías  $J_i: X_i \rightarrow Y_i$ ,  $i \in I$ , tomando un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  de  $I$  se tiene que  $(J_i)^\mathcal{U}: (X_i)_{\mathcal{U}} \rightarrow (Y_i)_{\mathcal{U}}$  es una isometría. En efecto, dados  $(x_i)_{\mathcal{U}}, (y_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ ,

$$d((J_i)^\mathcal{U}((x_i)_{\mathcal{U}}), (J_i)^\mathcal{U}((y_i)_{\mathcal{U}})) = \lim_{\mathcal{U}} d(J_i x_i, J_i y_i) = \lim_{\mathcal{U}} d(x_i, y_i) = d((x_i)_{\mathcal{U}}, (y_i)_{\mathcal{U}}).$$

Esto lo usaremos en la siguiente proposición.

**Proposición 1.40.** Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestable. Entonces  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  son ultraestables.

*Demostración.* Tomemos familias de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}$ , espacios de Banach  $(E_i)_{i \in I}$  y operadores Lipschitz  $(f_i: X_i \rightarrow E_i)_{i \in I}$ . Supongamos que  $f_i \in \mathcal{I}^{\text{inj}}(X_i, E_i)$  para cada  $i \in I$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} < \infty$ , equivalentemente,  $\sup_{i \in I} \|J_{E_i} \circ f_i\|_{\mathcal{I}} < \infty$ . Sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$ . Como en particular tenemos que  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(f_i) < \infty$ , el ultraproducto  $(f_i)^\mathcal{U}: (X_i)_\mathcal{U} \rightarrow (E_i)_\mathcal{U}$  está bien definido. Como  $J_{E_i}$  es una isometría lineal para todo  $i \in I$ , el ultraproducto  $(J_{E_i})^\mathcal{U}: (E_i)_\mathcal{U} \rightarrow (\ell_\infty(B_{E_i}))_\mathcal{U}$  es una isometría lineal. Dado que por hipótesis  $\mathcal{I}$  es ultraestable, el operador Lipschitz  $(J_{E_i} \circ f_i)^\mathcal{U} = (J_{E_i})^\mathcal{U} \circ (f_i)^\mathcal{U}$  pertenece a  $\mathcal{I}((X_i)_\mathcal{U}, (\ell_\infty(B_{E_i}))_\mathcal{U})$  con  $\|(J_{E_i})^\mathcal{U} \circ (f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|J_{E_i} \circ f_i\|_{\mathcal{I}} = \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}}$ . Por el ítem (a) de la Proposición 1.14, se tiene que  $(f_i)^\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{inj}}((X_i)_\mathcal{U}, (E_i)_\mathcal{U})$  con  $\|(f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}} \leq \|(J_{E_i})^\mathcal{U} \circ (f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{inj}}}$ .

Ahora supongamos que  $f_i \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X_i, E_i)$  para cada  $i \in I$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} < \infty$ . De la misma forma que antes, el ultraproducto  $(f_i)^\mathcal{U}: (X_i)_\mathcal{U} \rightarrow (E_i)_\mathcal{U}$  está bien definido. Sea  $\varepsilon > 0$ . Para cada  $i \in I$ , sea  $g_i \in \mathcal{I}(X_i, E_i)$  que domina a  $f_i$  y  $\|g_i\|_{\mathcal{I}} \leq \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} + \varepsilon$ . Entonces  $\sup_{i \in I} \|g_i\|_{\mathcal{I}} < \infty$ , así que, como  $\mathcal{I}$  es ultraestable,  $(g_i)^\mathcal{U} \in \mathcal{I}((X_i)_\mathcal{U}, (E_i)_\mathcal{U})$  con  $\|(g_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|g_i\|_{\mathcal{I}} \leq \varepsilon + \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}}$ . Dado que  $(g_i)^\mathcal{U}$  domina a  $(f_i)^\mathcal{U}$ , esto demuestra que  $(f_i)^\mathcal{U} \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}((X_i)_\mathcal{U}, (E_i)_\mathcal{U})$  y  $\|(f_i)^\mathcal{U}\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \varepsilon + \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}}$ .  $\square$

Para poder caracterizar los ideales Lipschitz maximales en términos de la ultraestabilidad y regularidad, vamos a necesitar el siguiente resultado que se encuentra en [AT, Lemma 3.4] y muestra cómo recuperar un operador Lipschitz a partir de sus *partes finitas*. La demostración sigue los pasos de un resultado análogo de Pietsch para operadores lineales [46, Lemma 8.8.4]. Dado un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ , en el conjunto  $I = \text{MFIN}(X) \times \text{COFIN}(E)$ , consideramos el orden parcial dado por  $(X_1, L_1) \leq (X_2, L_2)$  si y solo si  $X_1 \subseteq X_2$  y  $L_2 \subseteq L_1$ . A las componentes del par  $i \in I$  las denotamos  $X_i \in \text{MFIN}(X)$  y  $L_i \in \text{COFIN}(E)$ , esto es,  $i = (X_i, L_i)$ . Para cada  $i \in I$ ,  $\iota_{X_i}^X: X_i \hookrightarrow X$  denota la inclusión y  $q_{L_i}^E: E \rightarrow E/L_i$  el operador cociente. Sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$  que contiene al filtro del orden, esto es, para todo  $i_0 \in I$  se tiene que  $\{i \in I : i_0 \leq i\} \in \mathcal{U}$ . Con esta notación y esta elección del ultrafiltro, tenemos

**Lema 1.41.** *Existe una isometría métrica  $J: X \rightarrow (X_i)_\mathcal{U}$  y un operador lineal  $Q: (E/L_i)_\mathcal{U} \rightarrow E''$  con  $\|Q\| \leq 1$  tales que para toda función  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ , se tiene que*

$$k_E \circ f = Q \circ (q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X)^\mathcal{U} \circ J.$$

*Demostración.* Sea  $J: X \rightarrow (X_i)_\mathcal{U}$  definida por  $J(x) = (x_i)_\mathcal{U}$ , donde

$$x_i = \begin{cases} x & \text{si } x_i \in X_i \\ 0 & \text{si } x_i \notin X_i \end{cases}.$$

Dados  $x, y \in X$ , tenemos que

$$d(J(x), J(y)) = d((x_i)_\mathcal{U}, (y_i)_\mathcal{U}) = \lim_{\mathcal{U}} d(x_i, y_i).$$

Tomando  $i_0 \in I$  tal que  $x, y \in X_{i_0}$ , por ejemplo  $i_0 = (\{0, x, y\}, E)$ , se tiene que  $d(x_i, y_i) = d(x, y)$  para todo  $i \geq i_0$ . Luego  $d(J(x), J(y)) = \lim_{\mathcal{U}} d(x_i, y_i) = d(x, y)$ , así que  $J$  es una isometría.

Para definir al operador  $Q$ , vamos detallar lo hecho en la demostración de [46, Lemma 8.8.4]. Primero definamos un operador  $Q_0$  del espacio  $W = \{(w_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E/L_i : \sup_{i \in I} \|w_i\| < \infty\}$  a  $E''$  de la siguiente manera. Dado un elemento  $(w_i)_{i \in I} \in W$  tomemos un representante  $v_i \in E$  de  $w_i$  para cada  $i \in I$ , tales que  $\sup_{i \in I} \|v_i\|$  es finito. Para  $v' \in E'$ , ponemos

$$Q_0((w_i)_{i \in I})(v') = \lim_{\mathcal{U}} v'(v_i).$$

Veamos que  $Q_0$  está bien definido. Dada  $(w_i)_{i \in I} \in W$ , sean  $v_i$  e  $\tilde{v}_i \in E$  dos representantes de  $w_i$  para cada  $i \in I$ . En particular,  $v_i - \tilde{v}_i \in L_i$  para todo  $i \in I$ . Dado  $v' \in E'$ , tomando el índice  $i_0 = (0, \ker(v'))$ , se tiene que  $v_i - \tilde{v}_i \in \ker(v')$  para todo  $i \geq i_0$ , y por ende  $\lim_{\mathcal{U}} v'(v_i - \tilde{v}_i) = 0$ . Si, además, los representantes de  $w_i$  elegidos cumplen que  $\sup_{i \in I} \|v_i\|$  y  $\sup_{i \in I} \|\tilde{v}_i\|$  son finitos, llegamos a que los límites,  $\lim_{\mathcal{U}} v'(v_i)$  y  $\lim_{\mathcal{U}} v'(\tilde{v}_i)$  existen y son iguales. Luego,  $Q_0$  está bien definida y, de la definición, se ve que es lineal y continuo.

Ahora veamos que el operador  $Q_0$  respeta la relación de equivalencia que define al ultraproducto  $(E/L_i)_{\mathcal{U}}$ . Para ello, puesto que  $Q_0$  es lineal, basta ver que si  $(w_i)_{i \in I} \in W$  cumple que  $\sup_{i \in I} \|w_i\| < \infty$  y  $\lim_{\mathcal{U}} \|w_i\| = 0$ , entonces  $Q_0((w_i)_{i \in I}) = 0$ . Dado  $v' \in E'$  y  $\varepsilon > 0$ , eligiendo una familia acotada de representantes  $(v_i)_{i \in I}$  en  $E$  tales que  $\|v_i\| < \|w_i\| + \frac{\varepsilon}{2}$  y tomando límite, tenemos que  $\lim_{\mathcal{U}} \|v_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  y en particular  $|Q_0((w_i)_{i \in I})(v')| = |\lim_{\mathcal{U}} v'(v_i)| \leq \|v'\| \frac{\varepsilon}{2}$ . Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, se tiene que  $Q_0((w_i)_{i \in I})(v') = 0$ .

Por lo tanto, tenemos definida una función  $Q: (E/L_i)_{\mathcal{U}} \rightarrow E''$ . A partir de su definición, se puede ver que  $Q$  es lineal y  $\|Q\| \leq 1$ .

Ahora, tomemos una función  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  y fijemos  $x \in X$ . Tenemos que

$$Q \circ (q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X)^{\mathcal{U}} \circ J(x) = Q((q_{L_i}^E(f(x_i)))_{\mathcal{U}}).$$

Si  $v' \in E'$ , entonces

$$Q((q_{L_i}^E(f(x_i)))_{\mathcal{U}})(v') = \lim_{\mathcal{U}} v'(f(x_i)).$$

Puesto que existe  $i_0 \in I$  tal que  $f(x_i) = f(x)$  para todo  $i \geq i_0$  (por ejemplo,  $i_0 = (\{x\}, E)$ ), se tiene que  $\lim_{\mathcal{U}} v'(f(x_i)) = v'(f(x))$ , y al ser  $x \in X$  y  $v' \in E'$  arbitrarios, la demostración está concluida.  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior, obtenemos

**Corolario 1.42.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestable. Entonces  $\mathcal{I}^{\text{reg}} = \mathcal{I}^{\text{max}}$ . En particular, un ideal Lipschitz de Banach ultraestable y regular es maximal.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{J}$  un ideal Lipschitz de Banach tal que para todo  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$ , se tiene que  $\mathcal{J}(X_0, E_0) = \mathcal{I}(X_0, E_0)$  y veamos que  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}^{\text{reg}}$ . Sean  $X$  un espacio métrico,  $E$  un espacio de Banach y una función  $f \in \mathcal{J}(X, E)$ . Con la notación del lema precedente, para todo  $i \in I$ , tenemos que  $\|q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X\|_{\mathcal{I}} = \|q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X\|_{\mathcal{J}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$ . Puesto que  $\mathcal{I}$  es ultraestable,  $(q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X)^{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}((X_i)_{\mathcal{U}}, (E/L_i)_{\mathcal{U}})$  con  $\|(q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X)^{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|q_{L_i}^E \circ f \circ \iota_{X_i}^X\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$ . Se sigue del lema anterior que  $k_E \circ f \in \mathcal{I}(X, E'')$  con  $\|k_E \circ f\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$ , equivalentemente,  $f \in \mathcal{I}^{\text{reg}}(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{I}^{\text{reg}}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$ .  $\square$

La versión del corolario anterior para ideales de Banach puede ser encontrada en [46, Theorem 8.8.6].

Saadi [51] mostró que para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  es un ideal Lipschitz maximal, basándose en la teoría de normas tensoriales Lipschitz. Aquí se dará una demostración alternativa.

**Proposición 1.43.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach. Entonces*

$$\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0 = (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\max}.$$

*Demostración.* Para  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$ , como  $\mathcal{A}(X_0)$  es finito-dimensional, tenemos que  $\mathcal{A}(\mathcal{A}(X_0), E_0) = \mathcal{A}^{\max}(\mathcal{A}(X_0), E_0)$ . Aplicando la Proposición 1.2 obtenemos que  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0) = \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0)$  para todo  $X_0 \in \text{MFIN}$  y  $E_0 \in \text{FIN}$ . Por lo tanto basta probar que  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  es maximal. Por el Teorema de Kürsten y Pietsch [30, Theorem 8.1],  $\mathcal{A}^{\max}$  es regular y ultraestable, que implica por las Proposiciones 1.15 y 1.38 que  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  es regular y ultraestable. Por el Corolario anterior, concluimos que  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  es maximal.  $\square$

Combinando la Proposición 1.38 con el Corolario 1.42, obtenemos

**Proposición 1.44.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestable. Entonces*

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\max} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{reg}}.$$

*En particular, si  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach ultraestable, entonces*

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\max} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}.$$

**Ejemplo 1.45.** Sea  $1 \leq p < \infty$ .

1. Por [46, 19.2.5] el ideal de Banach  $\mathcal{P}\mathcal{I}_p$  ultraestable. Por lo tanto, por la caracterización dada en Ejemplo 1.16 y la proposición anterior, tenemos que el ideal de operadores Lipschitz  $p$ -integrales de Farmer y Johnson es maximal.
2. Análogamente, como por [30, Theorem 3.3] el ideal de Banach  $\text{op}(\mathbb{L}_p)$  es ultraestable, el ideal de operadores Lipschitz  $p$ -factoreables de Johnson, Maurey y Schechtman es maximal.

Para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}^{\max}$  es *accesible a derecha*, también podemos describir la cápsula maximal de  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . Recordemos que un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  es accesible a derecha si para todo espacio finito-dimensional  $M$  y todo espacio de Banach  $F$ , se tiene que  $\mathcal{A}^{\min}(M, F) = \mathcal{A}(M, F)$  [23, 25.2]. En particular, todo ideal de Banach inyectivo es accesible a derecha.

**Proposición 1.46.** *Sea  $\mathcal{A}$  ideal de Banach tal que  $\mathcal{A}^{\max}$  es accesible a derecha. Entonces*

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\max} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}.$$

*Demostración.* Por la Proposición 1.44,  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0)^{\max}$ . Luego, para ver la igualdad del enunciado, basta con ver que para todo espacio métrico finito  $X_0$  y espacio de dimensión finita  $E_0$  vale que  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0) = \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0)$ . Sea  $f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0)$  y tomemos una factorización  $f = g \circ T \circ h$ , con  $h \in \text{Lip}_0(X_0, G_1)$ ,  $T \in \mathcal{A}^{\max}(G_1, G_2)$  y  $g \in \text{Lip}_0(G_2, E_0)$ . Como  $X_0$  es finito, podemos suponer que  $G_1$  es finito-dimensional. Puesto que  $\mathcal{A}^{\max}$  es accesible a derecha, tenemos que  $\mathcal{A}^{\min}(G_1, G_2) = \mathcal{A}^{\max}(G_1, G_2)$  y como consecuencia que  $\mathcal{A}(G_1, G_2) = \mathcal{A}^{\max}(G_1, G_2)$ . Por lo tanto  $\|f\|_{\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0} \leq \text{Lip}(g)\|T\|_{\mathcal{A}}\text{Lip}(h) = \text{Lip}(g)\|T\|_{\mathcal{A}^{\max}}\text{Lip}(h)$ . Se sigue que  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0) \subseteq \text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X_0, E_0)$ . La otra inclusión se debe a que  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{\max}$ .  $\square$

**Ejemplo 1.47.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . Dado que  $\mathcal{N}_p^{\max} = \mathcal{I}_p$  es accesible a derecha [24, Theorem 5.26], por la Proposición anterior deducimos que la cápsula maximal del ideal de operadores Lipschitz  $p$ -nucleares de Chen y Zheng, en virtud de la caracterización del Ejemplo 1.6, coincide con los Lipschitz  $p$ -integrales de Farmer y Johnson. Esto mejora un resultado de Turco y Villafaña [57, Proposition 4.10].

Dado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ , dado que  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  son regulares, en virtud de las Proposiciones 1.40 y 1.42 obtenemos

**Proposición 1.48.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestable. Entonces  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  son maximales.*

**Ejemplo 1.49.** Sea  $1 \leq p < \infty$ . En virtud de la proposición anterior

1. Por el Ejemplo 1.22, el ideal de los operadores Lipschitz  $p$ -sumantes de Farmer y Johnson,  $\Pi_p^L$  es maximal.
2. El ideal  $(\text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$  es maximal. Esto fue probado por Chávez-Domínguez para el caso  $p = 2$  en [17, Theorem 4.5] y generalizado para  $1 \leq p \leq \infty$  por Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos en [14, Theorem 2.8].

Para finalizar esta sección, daremos el resultado análogo al de Kürsten y Pietsch para ideales Lipschitz. Esto es, un ideal Lipschitz de Banach es maximal si y sólo si es regular y ultraestable. Para ello necesitaremos el siguiente lema, que se encuentra en [AT, Lemma 3.5], cuya demostración está basada en un resultado de Kürsten que puede ser encontrado en [27, Proposition 1.5].

**Lema 1.50.** *Sea  $(X_i)_{i \in I}$  una familia de espacios métricos y  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$ . Dado  $Y \in \text{MFIN}((X_i)_{\mathcal{U}})$ , existe, para cada  $i \in I$ , una función Lipschitz  $g_i \in \text{Lip}_0(Y, X_i)$  de manera que*

- a)  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(g_i)$  es finito.
- b) Para todo  $x \in Y$ ,  $x = (g_i(x))_{\mathcal{U}}$ .
- c)  $\lim_{\mathcal{U}} \text{Lip}(g_i) = 1$ .

*Demostración.* Pongamos  $Y = \{0, x^1, \dots, x^n\}$  y elijamos representaciones  $x^k = (x_i^k)_U$  ( $1 \leq k \leq n$ ) y para el punto base  $0 = (0_i)_U$ . Para cada  $i \in I$ , consideremos la función  $g_i \in \text{Lip}_0(Y, X_i)$  definida por  $g_i(x^k) = x_i^k$  para  $k = 1, \dots, n$ . Notemos que dados  $1 \leq k, k' \leq n$ ,  $\sup_{i \in I} d(x_i^k, x_i^{k'})$  es

finito. Denotando  $C := \sup_{\substack{1 \leq k, k' \leq n \\ k \neq k'}} \frac{\sup_{i \in I} d(x_i^k, x_i^{k'})}{d(x^k, x^{k'})}$ , tenemos

$$d(g_i(x^k), g_i(x^{k'})) = d(x_i^k, x_i^{k'}) \leq \sup_{i \in I} d(x_i^k, x_i^{k'}) \leq C d(x^k, x^{k'}).$$

Por ende  $\text{Lip}(g_i) \leq C$  para todo  $i \in I$  y  $x^k = (g_i(x^k))_U$ . Esto demuestra a) y b).

Ahora, tomemos  $\varepsilon > 0$ . Dados  $1 \leq k, k' \leq n$ , tenemos que

$$\lim_{\mathcal{U}} d(g_i(x^k), g_i(x^{k'})) = \lim_{\mathcal{U}} d(x_i^k, x_i^{k'}) = d(x^k, x^{k'})$$

lo cual implica que el conjunto

$$I_{k,k'} := \{i \in I : (1 + \varepsilon)^{-1} d(x^k, x^{k'}) \leq d(g_i x^k, g_i x^{k'}) \leq (1 + \varepsilon) d(x^k, x^{k'})\}$$

pertenece a  $\mathcal{U}$  y como éste es un filtro, se sigue que el conjunto  $I_0 = \bigcap_{1 \leq k, k' \leq n} I_{k,k'}$  también pertenece a  $\mathcal{U}$ . Para todo  $i \in I_0$ , se tiene que  $(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \text{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$ , y por ende  $(1 + \varepsilon)^{-1} \leq \lim_{\mathcal{U}} \text{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$ . Como  $\varepsilon > 0$  es arbitrario, esto demuestra c).  $\square$

También, necesitaremos usar [46, Remark 8.8.2] que afirma que si  $(E_i)_{i \in I}$  es una familia de espacios de Banach y  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro en  $I$ , existe una isometría  $J: (E'_i)_U \rightarrow (E_i)'_U$  definida, para  $(y'_i)_U \in (E'_i)_U$  y  $(x_i)_U \in (E_i)_U$ , como

$$J((y'_i)_U)((x_i)_U) = \lim_{\mathcal{U}} y'_i(x_i).$$

**Teorema 1.51.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces  $\mathcal{I}$  es maximal si y solo si es regular y ultraestable.*

*Demostración.* Que un ideal regular y ultraestable sea maximal se debe al Corolario 1.42. Sea ahora  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach maximal. Por el ítem (c) de la Proposición 1.31,  $\mathcal{I}$  es regular, así que solo debemos ver que es ultraestable. Sea  $I$  un conjunto de índices y tomemos familias de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}$ , de espacios de Banach  $(E_i)_{i \in I}$  y de operadores Lipschitz  $(f_i)_{i \in I}$  tal que para cada  $i \in I$ ,  $f_i \in \mathcal{I}(X_i, E_i)$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}}$  es finito y un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  de  $I$ . Está bien definido el ultraproducto  $(f_i)^{\mathcal{U}} \in \text{Lip}_0((X_i)_U, (E_i)_U)$  y queremos ver que  $(f_i)^{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}((X_i)_U, (E_i)_U)$  con  $\|(f_i)^{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}}$ . Basta con ver que dados  $Y \in \text{MFIN}((X_i)_U)$  y  $L \in \text{COFIN}((E_i)_U)$  se tiene que  $\|q_L^{(E_i)_U} \circ (f_i)^{\mathcal{U}} \circ \iota_Y^{(X_i)_U}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}}$ .

Denotemos  $Y = \{0, y^1, \dots, y^n\}$ ,  $z^k := (f_i)^{\mathcal{U}}(y^k) \in (E_i)_U$  ( $1 \leq k \leq n$ ). Puesto que  $((E_i)_U/L)' \in \text{FIN}((E_i)'_U)$ , por dualidad local del ultraproducto [27, Proposition 1.6] existe  $T \in \mathcal{L}(((E_i)_U/L)', (E_i)'_U)$  con  $\|T\| = 1$  tal que para todo funcional  $\varphi \in ((E_i)_U/L)'$  y  $1 \leq k \leq n$ , se tiene que  $JT(\varphi)(z^k) = \varphi(z^k)$ .

Dado que  $T(((E_i)_U/L)') \in \text{FIN}((E_i)'_U)$ , por [27, Proposition 1.5] existe, para cada  $i \in I$ , un operador  $R_i \in \mathcal{L}(T(((E_i)_U/L)'), (E_i)'_U)$  con  $\|R_i\| \leq 1$  de manera que  $w = (R_i w)_U$  para todo

$w \in T(((E_i)_\mathcal{U}/L)')$ . Dado  $i \in I$ , como  $R_i(T(((E_i)_\mathcal{U}/L)')) \in \text{FIN}(E'_i)$ , existe  $L_i \in \text{COFIN}(E_i)$  tal que  $R_i(T(((E_i)_\mathcal{U}/L)')) = (E_i/L_i)'$ .

Por el Lema 1.50, como  $Y \in \text{MFIN}((X_i)_\mathcal{U})$ , existe, para cada  $i \in I$ , una función  $g_i \in \text{Lip}_0(Y, X_i)$  tal que  $\sup_{i \in I} \text{Lip}(g_i)$  es finito,  $y = (g_i y)_\mathcal{U}$  para todo  $y \in Y$  y  $\lim_{\mathcal{U}} \text{Lip}(g_i) = 1$ .

Siendo  $Y$  finito y  $(E_i)_\mathcal{U}/L$  finito-dimensional, los espacios  $\mathcal{I}(Y, (E_i)_\mathcal{U}/L)$  y  $\text{Lip}_0(Y, (E_i)_\mathcal{U}/L)$  son linealmente isomorfos, de modo que existe una constante positiva  $C$ , solo dependiente de  $Y$  y  $L$ , tal que para toda función  $h \in \text{Lip}_0(Y, (E_i)_\mathcal{U}/L)$ , se tiene que  $\|h\|_{\mathcal{I}} \leq C \text{Lip}(h)$ .

De aquí en adelante, para  $i \in I$ , consideramos  $T$ ,  $g_i$  y  $R_i$  correstringidos a sus respectivas imágenes. Dado  $j \in I$ , denotando  $S_j := (R_j \circ T)' \in \mathcal{L}(E_j/L_j, (E_i)_\mathcal{U}/L)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \|q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}} \\ & \leq \|q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}} - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j\|_{\mathcal{I}} + \|S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j\|_{\mathcal{I}} \\ & \leq C \text{Lip} \left( q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}} - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j \right) + \text{Lip}(g_j) \|f_j\|_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

Tomando límite en  $j$  a lo largo del ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , vemos que

$$\begin{aligned} & \|q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}} \\ & \leq C \lim_{\mathcal{U}} \text{Lip} \left( q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}} - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j \right) + \lim_{\mathcal{U}} \|f_j\|_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta con ver que

$$\lim_{\mathcal{U}} \text{Lip} \left( q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}} - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j \right) = 0.$$

Para esto, dado que  $Y$  es finito y  $(E_i)_\mathcal{U}/L$  es finito-dimensional, basta ver que fijado  $1 \leq k \leq n$  y un funcional  $\varphi \in ((E_i)_\mathcal{U}/L)'$ , se tiene que

$$\lim_{\mathcal{U}} \varphi \left( q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}}(y^k) - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j(y^k) \right) = 0.$$

Para  $j \in I$ , tenemos que

$$\begin{aligned} & \varphi \left( q_L^{(E_i)_\mathcal{U}} \circ (f_i)^\mathcal{U} \circ \iota_Y^{(X_i)_\mathcal{U}}(y^k) - S_j \circ q_{L_j}^{E_j} \circ f_j \circ \iota_{g_j(Y)}^{X_j} \circ g_j(y^k) \right) \\ & = \varphi(z^k) - R_j(T(\varphi))(f_j(g_j(y^k))). \end{aligned}$$

Utilizando que

$$\varphi(z^k) = JT(\varphi)(z^k) = J(R_i T(\varphi))_\mathcal{U}((f_i g_i(y^k))_\mathcal{U}) = \lim_{\mathcal{U}} R_i T(\varphi)(f_i g_i(y^k)),$$

tenemos lo que queríamos probar.  $\square$

## 1.7 Representación tensorial de ideales Lipschitz maximales

Sabemos que los ideales de Banach maximales se pueden describir en términos de normas tensoriales finitamente generadas. En el caso Lipschitz, la teoría de productos tensoriales y

normas tensoriales Lipschitz fue introducida y estudiada en detalle por Cabrera-Padilla, Chávez-Domínguez, Jiménez-Vargas y Villegas-Vallecillos en [12] y ellos mismos demuestran el teorema de representación tensorial de ideales Lipschitz maximales en [13]. Como nosotros necesitaremos de este teorema de representación tensorial, en esta sección daremos las definiciones básicas y lo enunciaremos. Dado un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ , el *producto tensorial Lipschitz* de  $X$  con  $E$ , denotado  $X \boxtimes E$ , es el subespacio lineal generado por los funcionales  $\delta_{x,y} \boxtimes v$  definidos en  $\text{Lip}_0(X, E')$  tal que  $(\delta_{x,y} \boxtimes v)(f) = (f(x) - f(y))(v)$ , para  $x, y \in X$  y  $v \in E$ . Como es habitual, denotamos  $X \boxtimes_\alpha E$  al producto tensorial Lipschitz dotado de una norma  $\alpha$  y  $X \widehat{\boxtimes}_\alpha E$  a su completación. Una *norma tensorial Lipschitz*  $\alpha$  es una norma sobre la clase de productos tensoriales Lipschitz  $X \boxtimes E$  que satisface las siguientes propiedades:

1. (*crossnorm*)  $\forall x, y \in X$  y  $v \in E$ ,  $\alpha(\delta_{x,y} \boxtimes v) = d(x, y)\|v\|$ .
2. (*dualizable*)  $\forall g \in X^\#$  y  $v' \in E'$ ,  $g \boxtimes v': X \boxtimes E \rightarrow \mathbb{R}$  definido como  $g \boxtimes v'(\delta_{x,y} \boxtimes v) = (g(x) - g(y))v'(v)$  pertenece a  $(X \boxtimes_\alpha E)'$  y  $\|g \boxtimes v'\| \leq \text{Lip}(g)\|v'\|$ .
3. (*metric mapping property*)  $\forall f \in \text{Lip}_0(X, Y)$  y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , el operador lineal  $f \boxtimes T: X \boxtimes_\alpha E \rightarrow Y \boxtimes_\alpha F$  definido como  $f \boxtimes T(\sum_{j=1}^n \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j) = \sum_{j=1}^n \delta_{f(x_j), f(y_j)} \boxtimes T(v_j)$  es continuo y  $\|f \boxtimes T\| \leq \text{Lip}(f)\|T\|$ .

Dado  $u \in X \boxtimes E$ , la  $\alpha$ -norma de  $u$  en  $X \boxtimes E$  se denota  $\alpha(u; X, E)$  o  $\alpha(u, X \boxtimes E)$ . Una norma tensorial Lipschitz  $\alpha$  se dice *finitamente generada* si para todo espacio métrico  $X$ , todo espacio de Banach  $E$  y  $u \in X \boxtimes E$ , se tiene que

$$\alpha(u; X, E) = \inf\{\alpha(u; X_0, E_0): X_0 \in \text{MFIN}(X), E_0 \in \text{FIN}(E), u \in X_0 \boxtimes E_0\}.$$

Si  $\alpha$  es una norma tensorial Lipschitz y tenemos un funcional  $\varphi \in (X \boxtimes_\alpha E)'$ , éste induce un operador Lipschitz  $f_\varphi \in \text{Lip}_0(X, E')$  definido, para  $x \in X$  y  $v \in E$ , como  $f_\varphi(x)(v) = \varphi(\delta_x \boxtimes v)$ . La aplicación  $f \mapsto f_\varphi$  de  $(X \boxtimes_\alpha E)'$  a  $\text{Lip}_0(X, E')$  es lineal y, correstringida a su imagen, es un isomorfismo algebraico. En particular, poniendo  $E'$  en lugar de  $E$ , tenemos un isomorfismo algebraico de  $(X \boxtimes_\alpha E)'$  a un subespacio de  $\text{Lip}_0(X, E'')$ . Por comodidad, denotamos  $(X \boxtimes_\alpha E)'' \cap \text{Lip}_0(X, E) = \{\varphi \in (X \boxtimes_\alpha E)': f_\varphi \in \text{Lip}_0(X, E)\}$ .

**Teorema 1.52** (Representación tensorial de ideales Lipschitz maximales). *Un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  es maximal si y solo si existe una norma tensorial Lipschitz  $\alpha$  finitamente generada tal que  $\mathcal{I}(X, E)$  es isométricamente isomorfo a  $(X \boxtimes_\alpha E)'' \cap \text{Lip}_0(X, E)$  para todo espacio métrico  $X$  y todo espacio de Banach  $E$ , y en tal caso,  $\mathcal{I}(X, E')$  es isométricamente isomorfo a  $(X \boxtimes_\alpha E)'$ .*

Si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach maximal, nos referiremos a la norma  $\alpha$  del teorema como la norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada por dualidad a  $\mathcal{I}$ . En [14] se pueden encontrar ejemplos concretos de esta dualidad. A continuación listamos algunos

### Ejemplos 1.53.

- a) Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach, y sea  $\alpha$  la norma tensorial finitamente generada asociada por dualidad a  $\mathcal{A}^{\max}$ . Siguiendo a Saadi [51], dado un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ , para  $u \in X \boxtimes E$  con una representación  $u = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i$  ( $x_i, y_i \in X, v_i \in E$ ), definiendo

$$\alpha^L(u; X \boxtimes E) := \alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \otimes v_i; \text{MOL}(X) \otimes E \right),$$

se tiene que  $\alpha^L$  es la norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada por dualidad al ideal Lipschitz  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$ . En particular, si consideramos las normas tensoriales proyectiva  $\pi$  e inyectiva  $\varepsilon$ , se tiene que  $\pi^L$  es la asociada a  $\text{Lip}_0$  y  $\varepsilon^L$  es la asociada a  $\mathcal{I}_1 \circ \text{Lip}_0$ , donde  $\mathcal{I}_1$  es el ideal de Banach de operadores integrales. Explícitamente, para  $u \in X \boxtimes E$ , se tiene que

$$\pi^L(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i) \|v_i\| : u = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i \right\}$$

y en el caso de la norma inyectiva, si  $u = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i$ ,

$$\varepsilon^L(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i)) v'(v_i) \right| : f \in B_{X^\#}, v' \in B_{E'} \right\}.$$

- b) Dado  $1 \leq p \leq \infty$ , Chávez-Domínguez en [16] describió la norma tensorial Lipschitz asociada por dualidad al ideal de operadores Lipschitz  $p$ -sumantes. La misma se puede ver como una *versión Lipschitz* de la norma tensorial de *Chevet-Saphar a derecha* que está asociada por dualidad a  $\Pi_p$ . Para  $1 \leq p < \infty$ , como es usual,  $\ell_p(E)$  denota el espacio de Banach de todas las sucesiones  $(v_n)_n \subset E$  tal que  $\|(v_n)_n\|_{\ell_p(E)} := (\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$ . Concretamente, para  $u \in X \boxtimes E$ ,

$$d_p^L(u; X \boxtimes E) := \inf \left\{ \sup_{f \in B_{X^\#}} \|(\lambda_i(f(x_i) - f(y_i)))_{i=1}^n\|_{\ell_{p'}} \| (v_i)_{i=1}^n \|_{\ell_p(E)} \right\},$$

donde el ínfimo está tomado sobre todas las representaciones  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i$  con  $\lambda_i > 0$ , es la norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada por dualidad a  $\Pi_{p'}^L$ , donde se adopta la convención  $\Pi_\infty^L = \text{Lip}_0$ . Con respecto a esta convención, vale decir que en virtud de [16, Proposition 4.2] se tiene que  $d_1^L = \pi^L$ , la norma Lipschitz proyectiva.

- (c) Sea  $1 \leq p \leq \infty$ . Sea  $X$  un espacio métrico. Dadas secuencias finitas  $(\lambda_i, y_i, y'_i)_{i=1}^n$  y  $(\mu_i, x_i, x'_i)_{i=1}^m$  en  $\mathbb{R} \times X \times X$ , se denota  $(\lambda_i, y_i, y'_i)_{i=1}^n \prec_p (\mu_i, x_i, x'_i)_{i=1}^m$  si para toda  $f \in X^\#$  se tiene que

$$\|(\lambda_i(f(y_i) - f(y'_i)))_{i=1}^n\|_{\ell_p} \leq \|(\mu_i(f(x_i) - f(x'_i)))_{i=1}^m\|_{\ell_p}$$

Para  $u \in X \boxtimes E$ , se define

$$w_p^L(u) := \inf \left\{ \| (v_i)_{i=1}^n \|_{\ell_p(E)} \| (\mu_i d(x_i, x'_i))_{i=1}^m \|_{\ell_{p'}} \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{y_i, y'_i} \boxtimes v_i$  y ternas  $(\mu_1, x_i, x'_i)_{i=1}^m$  tal que  $(\lambda_i, y_i, y'_i)_{i=1}^n \prec_{p'} (\mu_i, x_i, x'_i)_{i=1}^m$ . Por [14, Theorem 2.8],  $w_p^L$  es la norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada por dualidad a  $(\text{op}(\mathbb{L}_{p'}) \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$ , mencionado en el Ejemplo 1.25.

## 1.8 Ideal de operadores Lipschitz $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados

Aquí presentaremos al ideal de operadores Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados, introducido por Saleh [52] e inspirado en el trabajo de López Molina y Sánchez-Pérez en [39] donde se introducen los operadores lineales  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados. Dados  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ , un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  se dice  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominado si existen espacios de Banach  $G_1$  y  $G_2$  y operadores  $S \in \Pi_p(E, G_1)$ ,  $R \in \Pi_q(F', G_2)$  de manera que

$$|w'(T(v))| \leq \|v\|^\sigma \|Sv\|^{1-\sigma} \|w'\|^\eta \|Rw'\|^{1-\eta} \quad (1.2)$$

para cualesquiera  $v \in E$  y  $w' \in F'$ . Para un operador  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominado  $T$ , se define

$$\|T\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}} := \inf\{\|S\|_{\Pi_p}^{1-\sigma} \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta}\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los operadores  $p$ -sumantes  $S$  y  $q$ -sumantes  $R$  que satisfacen (1.2). Al ideal de Banach de los operadores  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados se los denota  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

**Definición 1.54.** Dados  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ ,  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  se dice Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominado si existen espacios de Banach  $F$  y  $G$ , un operador Lipschitz  $g \in \Pi_p^L(X, F)$  y un operador lineal  $R \in \Pi_q(E', G)$  de manera que

$$|v'(f(x) - f(y))| \leq d(x, y)^\sigma \|g(x) - g(y)\|^{1-\sigma} \|v'\|^\eta \|Rv'\|^{1-\eta} \quad (1.3)$$

para cualesquiera  $x, y \in X$  y  $v' \in E'$ . Se denota  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  al espacio de operadores Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados con la norma definida como

$$\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} := \inf\{\|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta}\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los operadores Lipschitz  $p$ -sumantes  $g$  y lineales  $q$ -sumantes  $R$  que satisfacen (1.3).

El caso  $\sigma = \eta = 0$  fue estudiado previamente por Chávez-Domínguez en [16]. Que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es un ideal Lipschitz de Banach puede verse en [52, Proposition 3.6].

López Molina y Sánchez-Pérez [39] mostraron que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$  es un ideal de Banach maximal exhibiendo la norma tensorial finitamente generada al que está asociado por dualidad y que también se puede describir como una composición de dos ideales. Para el caso de los operadores Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados, en [ABBT] se obtuvieron resultados análogos a estos.

Dado un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  y  $0 \leq \sigma < 1$ , se denota  $\mathcal{A}_\sigma$  al ideal de Banach conformado por los operadores  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  tales que existen un espacio de Banach  $G$  y un operador  $S \in \mathcal{A}(E, G)$  tal que para todo  $v \in E$ , se tiene que

$$\|T(v)\| \leq \|v\|^\sigma \|S(v)\|^{1-\sigma}$$

con la norma  $\|T\|_{\mathcal{A}_\sigma} := \inf\{\|S\|_{\mathcal{A}}^{1-\sigma}\}$ . Esta definición se debe a Matter [40, Definition 3.1], quien puso especial atención a este procedimiento aplicado al ideal  $\Pi_p$ . Dados  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ , por [39, Teorema 2.4] se tiene que

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}. \quad (1.4)$$

Vale aclarar que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  se refiere a  $(\Pi_{q,\eta})^{\text{dual}}$  y no a  $(\Pi_q^{\text{dual}})_\eta$ . A partir de este resultado también se puede dar una demostración de la maximalidad de  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

Ahora nos encaminaremos a dar el resultado análogo a (1.4) para el ideal Lipschitz  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$ .

**Definición 1.55.** Sean  $0 \leq \sigma < 1$ ,  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach,  $X$  un espacio métrico y  $E$  un espacio de Banach. Se denota  $\mathcal{I}_\sigma(X, E)$  al conjunto de operadores Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$  tales que existen un espacio de Banach  $F$  y un operador Lipschitz  $g \in \mathcal{I}(X, F)$  tal que para todo  $x, y \in X$ , se tiene que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq d(x, y)^\sigma \|g(x) - g(y)\|^{1-\sigma}$$

y para  $f \in \mathcal{I}_\sigma(X, E)$ , se define  $\|f\|_{\mathcal{I}_\sigma} := \inf\{\|g\|_{\mathcal{I}}^{1-\sigma}\}$ .

Que  $\mathcal{I}_\sigma$  es un ideal Lipschitz de Banach fue demostrado por Saleh [52, Definition 3.2, Proposition 3.3]. Achour, Rueda y Yahí en [4] estudian este procedimiento aplicado ideal Lipschitz  $\Pi_p^L$ . Dado un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  y un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$ , es inmediato de sus respectivas definiciones que  $\mathcal{A}_\sigma$  es inyectivo e  $\mathcal{I}_\sigma$  es Lipschitz inyectivo. Para  $\sigma = 0$ , se tiene que  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}^{\text{Linj}}$  y además  $\mathcal{A}_\sigma = (\mathcal{A}^{\text{inj}})_\sigma$  e  $\mathcal{I}_\sigma = (\mathcal{I}^{\text{Linj}})_\sigma$ . A partir de las definiciones, también se puede ver que si  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{I}$  son ultraestables, entonces  $\mathcal{A}_\sigma$  e  $\mathcal{I}_\sigma$  son ultraestables, y como consecuencia del teorema de Kürsten y Pietsch y su versión Lipschitz,  $\mathcal{A}_\sigma$  e  $\mathcal{I}_\sigma$  son maximales.

Siguiendo [39], dado un espacio de Banach  $E$ , sea  $\mu$  una medida de probabilidad boreliana sobre  $B_{E'}$  y consideremos el operador canónico  $J_E^\mu: E \rightarrow L_\infty(B_{E'}, \mu)$ . En  $J_E^\mu(E)$  se define la norma

$$\|J_E^\mu(v)\|_{p,\sigma} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|v_i\|^\sigma \left( \int_{B_{E'}} |v'(v_i)|^p d\mu(v') \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} : v = \sum_{i=1}^n v_i \right\}.$$

y se denota  $M_{p,\sigma}(E)$  a la completación de  $J_E^\mu(E)$  dotado de la norma  $\|\cdot\|_{p,\sigma}$ . A partir de la definición de  $\|\cdot\|_{p,\sigma}$  se puede ver que  $J_E^\mu \in \Pi_{p,\sigma}(E, M_{p,\sigma}(E))$  con  $\|J_E^\mu\|_{\Pi_{p,\sigma}} \leq 1$ . En efecto, dado  $v \in E$ , considerando la inclusión formal  $\iota_{\infty,p}: L_\infty(\mu) \rightarrow L_p(\mu)$ , tenemos que

$$\|J_E^\mu(v)\|_{p,\sigma} \leq \|v\|^\sigma \|\iota_{\infty,p} \circ J_E^\mu(v)\|_{L_p}^{1-\sigma}$$

Dado que  $\iota_{\infty,p}$  es  $p$ -sumante con norma  $p$ -sumante igual a 1, se sigue que  $J_E^\mu \in \Pi_{p,\sigma}(E, M_{p,\sigma}(E))$  con  $\|J_E^\mu\|_{\Pi_{p,\sigma}} \leq 1$ .

Siguiendo [4], cuando  $E = \mathcal{A}(X)$  para algún espacio métrico  $X$ , en  $J_{\mathcal{A}(X)}^\mu(\mathcal{A}(X))$  podemos definir, para  $u \in \text{span}\{\delta_{x,x'}: x, x' \in X\}$  con una representación de la forma  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{x_i, x'_i}$

$$\|J_{\mathcal{A}(X)}^\mu(u)\|_{p,\sigma} := \inf \left\{ \sum_{i=1}^n |\lambda_i| d(x_i, x'_i)^\sigma \left( \int_{B_{X^\#}} |f(x_i) - f(x'_i)|^p d\mu(f) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \right\},$$

donde el ínfimo está tomado sobre tales representaciones de  $u$ . Notemos que

$$\|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu(u)\|_{p,\sigma} \leq \| \|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu(u)\| \|_{p,\sigma} \leq \|u\|_{\mathbb{E}(X)}.$$

Además,  $\| \cdot \|_{p,\sigma}$  satisface la desigualdad triangular. Luego,  $\| \cdot \|_{p,\sigma}$  es una norma definida sobre  $J_{\mathbb{E}(X)}^\mu(\text{span}\{\delta_{x,x'} : x, x' \in X\})$ , y denotando  $\widetilde{M}_{p,\sigma}(X)$  a su completación, se tiene que la inclusión formal  $\iota : \widetilde{M}_{p,\sigma}(X) \rightarrow M_{p,\sigma}(\mathbb{E}(X))$  es continua. Podemos extender el operador  $J_{\mathbb{E}(X)}^\mu$  por densidad, obteniendo  $J_{\mathbb{E}(X)}^\mu : \mathbb{E}(X) \rightarrow \widetilde{M}_{p,\sigma}(X)$ .

Como en el caso lineal, a partir de las definiciones se puede ver que  $J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta : X \rightarrow \widetilde{M}_{p,\sigma}(X)$  pertenece a  $\Pi_{p,\sigma}^L(X, \widetilde{M}_{p,\sigma}(X))$  con  $\|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta\|_{\Pi_{p,\sigma}^L} \leq 1$ . En efecto, dados  $x, y \in X$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta(x) - J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta(y)\|_{p,\sigma} &= \| \|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu(\delta_{x,y})\| \|_{p,\sigma} \\ &\leq d(x, y)^\sigma \| \iota_{\infty,p} \circ J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta(x) - \iota_{\infty,p} \circ J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta(y) \|_{L_p}^{1-\sigma}. \end{aligned}$$

Como  $\iota_{\infty,p} \circ J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta \in \Pi_p \circ \text{Lip}_0(X, L_p(\mu))$ , se tiene  $J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta \in (\Pi_p \circ \text{Lip}_0)_\sigma(X, \widetilde{M}_{p,\sigma}(X)) = \Pi_{p,\sigma}^L(X, \widetilde{M}_{p,\sigma}(X))$  con  $\|J_{\mathbb{E}(X)}^\mu \circ \delta\|_{\Pi_{p,\sigma}^L} \leq 1$ .

**Teorema 1.56.** *Dados  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ , se tiene que*

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L$$

*Demostración.* Fijemos un espacio métrico  $X$ , un espacio de Banach  $E$  y un operador Lipschitz  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Supongamos que  $f \in \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(X, E)$  y sea  $C$  constante positiva tal que  $\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} < C$ . Por [52, Theorem 3.8], existen medidas de probabilidad borelianas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  definidas sobre  $B_{X^\#}$  y  $B_{E''}$  respectivamente, tales que para cualesquiera  $x, y \in X$  y  $v' \in E'$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |v'(f(x) - f(y))| &\leq \\ C d(x, y)^\sigma \|v'\|^\eta &\left( \int_{B_{X^\#}} |g(x) - g(y)|^p d\mu_1(g) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \left( \int_{B_{E''}} |v''(v')|^q d\mu_2(v'') \right)^{\frac{1-\eta}{q}}. \end{aligned}$$

Con las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  podemos considerar  $\widetilde{M}_{p,\sigma}(X)$  y  $M_{q,\eta}(E')$  definidos previamente y el conjunto  $X_{p,\sigma} = J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(X) \subset \widetilde{M}_{p,\sigma}(X)$ .

Ahora, consideremos la función  $U : X_{p,\sigma} \rightarrow M_{q,\eta}(E)'$  definida como

$$U \left( J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) \right) (J_{E'}^{\mu_2}(v')) = v'(f(x)). \quad (1.5)$$

para  $x \in X$  y  $v' \in E'$ . Para ver que la función  $U$  está bien definida primero recordemos que  $\{J_{E'}^{\mu_2}(v') : v' \in E'\}$  es denso en  $M_{q,\eta}(E')$ . Ahora, si  $J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) = J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)$  para  $x, y \in X$ , entonces para cada  $v' \in E'$  se tiene que

$$\begin{aligned} |v'(f(x) - f(y))| &\leq \\ C d(x, y)^\sigma \|v'\|^\eta &\left( \int_{B_{X^\#}} |g(x) - g(y)|^p d\mu_1(g) \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \left( \int_{B_{E''}} |v''(v')|^q d\mu_2(v'') \right)^{\frac{1-\eta}{q}} \\ &\leq C \|J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) - J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)\|_{\widetilde{M}_{p,\sigma}} \|v'\|^\eta \left( \int_{B_{E''}} |v''(v')|^q d\mu_2(v'') \right)^{\frac{1-\eta}{q}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Por consiguiente  $f(x) = f(y)$ , así que  $U$  está bien definida. Para ver que es Lipschitz con  $\text{Lip}(U) \leq C$ , tomemos  $x, y \in X$  y  $v' \in E'$  tal que  $\|J_{E'}^{\mu_2}(v')\|_{q,\eta} = 1$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomemos una representación  $v' = \sum_{i=1}^n v'_i$  tal que

$$\sum_{i=1}^n \|v'_i\|^\eta \left( \int_{B_{E''}} |v''(v'_i)|^q d\mu_2(v'') \right)^{\frac{1-\eta}{q}} \leq 1 + \varepsilon.$$

Combinando (1.5) con (1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} & \left( U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x)) - U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)) \right) (J_{E'}^{\mu_2}(v')) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x)) - U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)) \right) (J_{E'}^{\mu_2}(v'_i)) \\ &\leq C \|J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) - J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)\|_{\widetilde{M}_{p,\sigma}} \sum_{i=1}^n \|v'_i\|^\eta \left( \int_{B_{E''}} |v''(v'_i)|^q d\mu_2(v'') \right)^{\frac{1-\eta}{q}} \\ &\leq C \|J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) - J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)\|_{\widetilde{M}_{p,\sigma}} (1 + \varepsilon). \end{aligned}$$

Se sigue que  $\|U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x)) - U(J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y))\|_{M_{q,\eta}(E')'} \leq C \|J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(x) - J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta(y)\|_{\widetilde{M}_{p,\sigma}}$ , así que  $\text{Lip}(U) \leq C$ .

También de (1.5) se sigue que  $k_E \circ f = (J_{E'}^{\mu_2})' \circ U \circ J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta$ , donde  $U \circ J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta \in \Pi_{p,\sigma}^L(X, M_{q,\eta}(E')')$  con  $\|U \circ J_{\mathbb{E}(X)}^{\mu_1} \circ \delta\|_{\Pi_{p,\sigma}^L} \leq C$  y  $(J_{E'}^{\mu_2})' \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}(M_{q,\eta}(E')', E'')$  con  $\|(J_{E'}^{\mu_2})'\|_{\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}} \leq 1$ , puesto que  $J_{E'}^{\mu_2} \in \Pi_{q,\eta}(E', M_{q,\eta}(E'))$  con  $\Pi_{q,\eta}$ -norma menor o igual a 1, como mencionamos previo a la demostración. Luego,  $k_E \circ f \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L(X, E'')$  con  $\|k_E \circ f\|_{\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L} \leq C$ . Dado que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L$  es regular en virtud de la Proposición 1.17, concluimos que  $f \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L(X, E)$  con  $\|f\|_{\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L} \leq C$ .

Recíprocamente, supongamos que  $f \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L(X, E)$ , y sean  $F$  un espacio de Banach y operadores  $h \in \Pi_{p,\sigma}^L(X, F)$  y  $S \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}(F, E)$  tales que  $f = S \circ h$ . Usando que  $h \in \Pi_{p,\sigma}^L(X, F)$  y  $S' \in \Pi_{q,\eta}(E', F')$ , tomemos espacios de Banach  $G_1$  y  $G_2$  y operadores  $g \in \Pi_p^L(X, G_1)$  y  $R \in \Pi_q(E', G_2)$  tales que para todo  $x, y \in X$ ,

$$\|h(x) - h(y)\| \leq d(x, y)^\sigma \|g(x) - g(y)\|^{1-\sigma} \quad (1.7)$$

y para todo  $v' \in E'$

$$\|S'v'\| \leq \|v'\|^\eta \|Rv'\|^{1-\eta}. \quad (1.8)$$

Dados  $x, y \in X$  y  $v' \in E'$ , tenemos que

$$\begin{aligned} |v'(f(x) - f(y))| &= |v'(S(h(x) - h(y)))| \\ &= |S'(v')(h(x) - h(y))| \\ &\leq \|S'(v')\| \|h(x) - h(y)\| \\ &\leq \|v'\|^\eta \|Rv'\|^{1-\eta} d(x, y)^\sigma \|g(x) - g(y)\|^{1-\sigma}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $f \in \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(X, E)$  con  $\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} \leq \|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta}$ . Tomando ínfimo sobre todas las  $g \in \Pi_{p,\sigma}^L(X, \cdot)$  que cumplen (1.7) y sobre todos los  $R \in \Pi_q(E', \cdot)$  que cumplen (1.8), se tiene que  $\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} \leq \|h\|_{\Pi_{p,\sigma}^L} \|S'\|_{\Pi_{q,\eta}} = \|h\|_{\Pi_{p,\sigma}^L} \|R\|_{\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}}$ . Dado que la  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L$ -factorización de  $f$  de la que partimos era arbitraria, se sigue que  $\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\mu)}^L} \leq \|f\|_{\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L}$ .  $\square$

Para ver que el ideal de operadores Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados no es de composición necesitamos caracterizar el ideal de operadores  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L \cap \mathcal{L}$ . Eso lo veremos en el capítulo 3. Lo que veremos a continuación es que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  no tiene la propiedad de ideal fuerte, y en particular, no es de la forma  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . Notar antes que como todo operador lineal  $q$ -sumante es débilmente compacto, tenemos que  $\Pi_q^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{W}^{\text{dual}} = \mathcal{W}$ , y por lo tanto

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L \subseteq \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0 \quad (1.9)$$

**Proposición 1.57.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ . El ideal  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  no tiene la propiedad de ideal fuerte.

*Demostración.* Suponiendo que tiene la propiedad de ideal fuerte, tenemos que  $\delta_{\mathbb{R}} = \delta_{\mathbb{R}} \circ \text{Id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(\mathbb{R}, \mathbb{A}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0(\mathbb{R}, \mathbb{A}(\mathbb{R}))$ . Esto implica que la linealización de  $\delta_{\mathbb{R}}$ , el operador  $\text{Id}_{\mathbb{A}(\mathbb{R})}$  es débilmente compacto, lo cual es falso ya que  $\mathbb{A}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$  no es reflexivo.  $\square$

Usando el teorema de factorización también podemos mostrar lo siguiente.

**Teorema 1.58.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tal que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ . El ideal  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es maximal.

*Demostración.* Por el Teorema 1.51, basta ver que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es regular y ultraestable. Como  $\Pi_{p,\sigma}^L$  y  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  son ultraestables, la composición  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L = \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es ultraestable (la demostración de esto es análoga a lo hecho en la Proposición 1.37). La regularidad se deduce de la Proposición 1.17 ya que  $\Pi_{p,\sigma}^L$  es Lipschitz inyectivo y  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  es regular. Que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es regular también se puede deducir directamente de la definición de operador Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominado.  $\square$

Al ser  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  maximal, por el Teorema de Representación de ideales Lipschitz maximales (Teorema 1.52) tiene una norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada por dualidad. Para finalizar veremos cuál es esa norma tensorial.

Dado un espacio métrico  $X$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq \sigma < 1$ ,  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in X$  y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , se define

$$\delta_{p,\sigma}^L((\lambda_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) := \sup_{f \in B_{X^\#}} \left( \sum_{j=1}^n (|\lambda_j| |f(x_j) - f(y_j)|^{1-\sigma} d(x_j, y_j)^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}},$$

y para  $v_1, \dots, v_n$  en un espacio de Banach  $E$ , se define

$$\delta_{p,\sigma}(v_j)_{j=1}^n := \sup_{v' \in B_{E'}} \left( \sum_{j=1}^n (|v'(v_j)|^{1-\sigma} \|v_j\|^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

Para  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ , sea  $1 \leq r < \infty$  tal que  $\frac{1}{r} + \frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$  o  $r = \infty$  si  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$ . Para  $u \in X \boxtimes E$ , sea

$$\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(u) := \inf \{ \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((a_j^{-1} v_j)_{j=1}^n) \},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones  $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j$  y  $a_j > 0$ . Esta construcción en el caso  $\sigma = \eta = 0$  fue hecha por Chávez-Domínguez [16].

**Proposición 1.59.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ . Entonces  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es una norma tensorial Lipschitz finitamente generada.

*Demostración.*  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es finitamente generada por construcción. Omitimos la prueba de que  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  satisface la desigualdad triangular ya que dicha prueba sigue el mismo patrón que en [39, Proposición 2.7] con las modificaciones correspondientes.

Veamos la *metric mapping property*. Sea  $1 \leq r \leq \infty$  tal que  $\frac{1}{r} + \frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$ . Sean  $X, Y$  espacios métricos,  $E, F$  espacios de Banach,  $f \in \text{Lip}_0(X, Y)$  y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Tomemos  $u \in X \boxtimes E$  con una representación  $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j$  y sea  $(a_j)_{j=1}^n$  una secuencia de números positivos. Tenemos que  $f \boxtimes T(u) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{f(x_j), f(y_j)} \boxtimes T(v_j)$  y

$$\begin{aligned} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, f(x_j), f(y_j))_{j=1}^n) &= \sup_{h \in B_{Y^\#}} \left( \sum_{j=1}^n (|a_j| |h(f(x_j)) - h(f(y_j))|^{1-\sigma} d(f(x_j), f(y_j))^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq \text{Lip}(f) \sup_{h \in B_{Y^\#}} \left( \sum_{j=1}^n \left( |a_j| \left| \left( \frac{h \circ f}{\text{Lip}(f)} \right)(x_j) - \left( \frac{h \circ f}{\text{Lip}(f)} \right)(y_j) \right|^{1-\sigma} d(x_j, y_j)^\sigma \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &\leq \text{Lip}(f) \sup_{h \in B_{X^\#}} \left( \sum_{j=1}^n (|a_j| |h(x_j) - h(y_j)|^{1-\sigma} d(x_j, y_j)^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \\ &= \text{Lip}(f) \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \end{aligned}$$

y similarmente  $\delta_{q,\eta}((a_j^{-1} T(v_j))_{j=1}^n) \leq \|T\| \delta_{q,\eta}((a_j^{-1} v_j)_{j=1}^n)$ . Se sigue que

$$\alpha_{p,\sigma,q,\eta}^L(f \boxtimes T(u); Y \boxtimes F) \leq \text{Lip}(f) \|T\| \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((a_j^{-1} v_j)_{j=1}^n).$$

Por arbitrariedad de la representación de  $u$  y secuencia de números positivos  $(a_j)$  con las que partimos, se sigue que  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(f \boxtimes T(u); Y \boxtimes F) \leq \text{Lip}(f) \|T\| \alpha_{p,\sigma,q,\eta}^L(u; X \boxtimes E)$ .

Por [12, Proposition 6.5], para ver que  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es *crossnorm* y es *dualizable*, basta con ver que  $\varepsilon^L \leq \alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L \leq \pi^L$  en  $X \boxtimes E$ . Para el caso de la norma inyectiva  $\varepsilon^L$ , tomemos  $u \in X \boxtimes E$  con una representación  $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j$ . Dado  $\rho > 0$ , existen  $f \in B_{X^\#}$  y  $v' \in B_{E'}$  tal que para toda secuencia  $(a_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^+$

$$\varepsilon^L(u) - \rho \leq \left| \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(y_j)) v'(\lambda_j v_j) \right| \leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| |a_j (f(x_j) - f(y_j))| |v'(a_j^{-1} v_j)|.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder generalizada, se obtiene

$$\varepsilon^L(u) - \rho \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \| (a_j (f(x_j) - f(y_j)))_{j=1}^n \|_{\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}} \| (v'(a_j^{-1} v_j))_{j=1}^n \|_{\ell_{\frac{q}{1-\eta}}}.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} \| (a_j (f(x_j) - f(y_j)))_{j=1}^n \|_{\ell_{\frac{p}{1-\sigma}}} &\leq \sum_{j=1}^n (|a_j| |f(x_j) - f(y_j)|^{1-\sigma} d(x_j, y_j)^\sigma)^{\frac{p}{1-\sigma}} \\ &\leq \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n)^{\frac{p}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

y similarmente

$$\| (v'(a_j^{-1} v_j))_{j=1}^n \|_{\ell_{\frac{q}{1-\eta}}} \leq \delta_{q,\eta}((a_j^{-1} v_j)_{j=1}^n),$$

obtenemos que  $\varepsilon^L(u) - \rho \leq \alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(u)$ . Siendo  $\rho > 0$  arbitrario, se tiene  $\varepsilon^L(u) \leq \alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(u)$ .

Para el caso de la norma proyectiva  $\pi^L$ , dado  $\rho > 0$  tomemos una representación  $u = \sum_{j=1}^n \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j$  tal que  $\sum_{j=1}^n d(x_j, y_j) \|v_j\| \leq \pi^L(u) + \rho$ , con  $x_j \neq y_j$  y  $v_j \neq 0$  for  $1 \leq j \leq n$ . Entonces

$$u = \sum_{j=1}^n (d(x_j, y_j) \|v_j\|)^{\frac{1}{r}} \delta_{x_j, y_j} \boxtimes (d(x_j, y_j) \|v_j\|)^{-\frac{1}{r}} v_j$$

y denotando  $a_j = \|v_j\|^{\frac{1-\sigma}{p}} d(x_j, y_j)^{\frac{1-\sigma}{p}-1}$ , se obtiene que

$$\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(u) \leq \|((d(x_j, y_j) \|v_j\|)^{\frac{1}{r}})_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((a_j^{-1} v_j)_{j=1}^n) \leq \pi(u) + \rho.$$

Como  $\rho > 0$  es arbitrario, concluimos que  $\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(u) \leq \pi^L(u)$ . □

**Teorema 1.60.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$  and  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  such that  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ . Para todo espacio métrico  $X$  y todo espacio de Banach  $E$  se tiene que

$$(X \widehat{\boxtimes}_{\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} E)' = \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(X, E').$$

*Demostración.* Asumimos que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} < 1$  (el caso  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$  se sigue de la misma manera con las modificaciones correspondientes). Sea  $1 \leq r < \infty$  tal que  $\frac{1}{r} + \frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$ . Tomemos  $f \in \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(X, E')$  y consideremos el funcional lineal  $\phi_f$  en  $X \boxtimes E$  definido, para  $u \in X \boxtimes E$  con una representación  $u = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v_j$ , como  $\phi_f(u) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(x_j) - f(y_j))(v_j)$ . Como es habitual,  $\phi_f$  está bien definido.

Dado  $\varepsilon > 0$ , existen espacios de Banach  $F$  y  $G$ , un operador Lipschitz  $g \in \Pi_p^L(X, F)$  y un operador lineal  $R \in \Pi_q(E'', G)$  que satisfacen (1.3) con  $\|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta} \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L}$ . Sea  $(a_j)_{j=1}^n$  una secuencia de números positivos. Entonces,

$$\begin{aligned} |\phi_f(u)| &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j (f(x_j) - f(y_j))(v_j) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |\lambda_j| d(x_j, y_j)^\sigma \|g(x_j) - g(y_j)\|^{1-\sigma} \|v_j\|^\eta \|Rv_j\|^{1-\eta} \\ &= \sum_{j=1}^n |\lambda_j| a_j d(x_j, y_j)^\sigma \|g(x_j) - g(y_j)\|^{1-\sigma} \|a_j^{-1} v_j\|^\eta \|Ra_j^{-1} v_j\|^{1-\eta}. \end{aligned}$$

Como  $\frac{1}{r} + \frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} = 1$ , aplicando la desigualdad de Hölder se tiene

$$|\phi_f(u)| \leq \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \| (a_j^{\frac{1}{1-\sigma}} d(x_j, y_j)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|g(x_j) - g(y_j)\|)_{j=1}^n \|_{\ell_p}^{1-\sigma} \| ( \|a_j^{-1} v_j\|^{\frac{\eta}{1-\eta}} \|Ra_j^{-1} v_j\| )_{j=1}^n \|_{\ell_q}^{1-\eta}. \quad (1.10)$$

Dado que  $g \in \Pi_p^L(X, F)$  y  $R \in \Pi_q(E'', G)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} &\| (a_j^{\frac{1}{1-\sigma}} d(x_j, y_j)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \|g(x_j) - g(y_j)\|)_{j=1}^n \|_{\ell_p}^{1-\sigma} \\ &\leq \|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \sup_{h \in B_{X^\#}} \{ \| (a_j^{\frac{1}{1-\sigma}} d(x_j, y_j)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} |h(x_j) - h(y_j)|)_{j=1}^n \|_{\ell_p}^{1-\sigma} \} \\ &= \|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \|(\|a_j^{-1}v_j\|^{\frac{\eta}{1-\eta}}\|Ra_j^{-1}v_j\|)_{j=1}^n\|_{\ell_q}^{1-\eta} \\
& \leq \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta} \sup_{v' \in B_{E'}} \{ \|(\|a_j^{-1}v_j\|^{\frac{\eta}{1-\eta}}|v'(a_j^{-1}v_j)|)_{j=1}^n\|_{\ell_q}^{1-\eta} \} \\
& = \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta} \delta_{q,\eta}((a_j^{-1}v_j)_{j=1}^n).
\end{aligned}$$

Combinando esto con la desigualdad (1.10) se obtiene que

$$\begin{aligned}
|\phi_f(u)| & \leq \|g\|_{\Pi_p^L}^{1-\sigma} \|R\|_{\Pi_q}^{1-\eta} \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((a_j^{-1}v_j)_{j=1}^n) \\
& \leq (1 + \varepsilon) \|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((a_j^{-1}v_j)_{j=1}^n).
\end{aligned}$$

Dado que  $\varepsilon > 0$  y la representación de  $u$  son arbitrarios, se tiene que  $\phi_f \in (X \widehat{\boxtimes}_{\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} E)'$  con norma menor o igual a  $\|f\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L}$ .

Recíprocamente, sea  $\phi \in (X \widehat{\boxtimes}_{\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} E)'$  y definamos  $f_\phi \in \text{Lip}_0(X, E')$  como  $f_\phi(x)(v) = \phi(\delta_{x,0} \boxtimes v)$  para  $x \in X$  y  $v \in E$ . Argumentos rutinarios muestran que  $f_\phi$  está bien definido. Por [13, Lemma 4.1] hay una manera canónica de extender  $\phi$  a  $X \widehat{\boxtimes}_{\alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} E''$  con la misma norma. Denotando  $\phi^\wedge$  a tal extensión, se tiene que  $\phi^\wedge(\delta_{x,0} \boxtimes v'') = v''(f_\phi(x))$  para  $x \in X$  y  $v'' \in E''$ . Ahora, dadas secuencias  $(x_j)_{j=1}^n, (y_j)_{j=1}^n$  en  $X$ ,  $(v''_j)_{j=1}^n \subset E''$  y  $(a_j)_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
& \|a_j v''_j((f_\phi(x_j) - f_\phi(y_j)))\|_{\ell_r} \\
& = \sup_{(\lambda_j)_j \in B_{\ell_r}} \left| \phi^\wedge \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v''_j \right) \right| \\
& \leq \|\phi^\wedge\| \sup_{(\lambda_j)_j \in B_{\ell_r}} \alpha_{(p,\sigma,q,\eta)}^L \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \delta_{x_j, y_j} \boxtimes v''_j \right) \\
& \leq \|\phi\| \sup_{(\lambda_j)_j \in B_{\ell_r}} \{ \|(\lambda_j)_{j=1}^n\|_{\ell_r} \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((v''_j)_{j=1}^n) \} \\
& \leq \|\phi\| \delta_{p,\sigma}^L((a_j, x_j, y_j)_{j=1}^n) \delta_{q,\eta}((v''_j)_{j=1}^n).
\end{aligned}$$

Aplicando [52, Theorem 3.8] se obtiene que  $f_\phi \in \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L(X, E')$  con  $\|f_\phi\|_{\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L} \leq \|\phi\|$ . Es rutinario mostrar que los operadores  $f \mapsto \phi_f$  y  $\phi \mapsto f_\phi$  son lineales y son uno el inverso del otro.  $\square$

# Capítulo 2

## Extensiones Lipschitz de operadores lineales

Uno de los teoremas pilares del Análisis Funcional es el teorema de Hahn-Banach, que afirma que todo operador lineal continuo a valores escalares puede extenderse a cualquier superespacio sin cambiar la norma. Análogamente, para funciones Lipschitz a valores reales, tenemos el teorema de extensión de McShane. Dado un espacio métrico  $X$ , un subconjunto  $X_0 \subset X$  y una función Lipschitz  $f: X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , la función  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \inf\{f(x_0) + \text{Lip}(f)d(x, x_0) : x_0 \in X_0\}$$

es Lipschitz,  $\text{Lip}(g) = \text{Lip}(f)$  y  $g|_{X_0} = f$ .

Sin embargo, ciertos tipos de funciones a valores reales pueden no admitir una extensión deseada. Por ejemplo, no hay un análogo del teorema de Hahn-Banach para polinomios  $n$ -homogéneos definidos sobre espacios de Banach [35].

En cuanto a operadores lineales entre espacios de Banach, sabemos que no siempre es posible extender linealmente un operador  $T \in \mathcal{L}(E_0, F)$  a un superespacio dado  $E$  de  $E_0$ , a menos que el espacio de llegada sea inyectivo. En el caso que no podamos extender  $T$  linealmente a  $E$ , dado que un operador lineal es en particular Lipschitz, uno podría preguntarse ¿puede ser que  $T$  admita una extensión Lipschitz a  $E$ ? Una respuesta parcial negativa se obtiene a partir del siguiente teorema de Lindenstrauss [38], que también se puede encontrar en [11, Theorem 7.2].

**Teorema 2.1.** *Sean  $E, F$  espacios de Banach y  $E_0$  un subespacio de  $E$ . Sea  $T \in \mathcal{L}(E_0, F)$  y supongamos que existe  $f \in \text{Lip}_0(E, F)$  tal que  $f|_{E_0} = T$ . Entonces existe un operador  $R \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que  $R|_{E_0} = k_F \circ T$  y  $\|R\| \leq \text{Lip}(f)$ .*

En particular, si  $F$  es un espacio dual, un operador lineal  $T: E_0 \rightarrow F$  tiene una extensión Lipschitz a  $E$  si y solo si tiene una extensión lineal a  $E$ .

Por otro lado, en las ocasiones en que un operador admita una extensión, resulta interesante saber si alguna extensión del operador preserva alguna propiedad del operador extendido. Por ejemplo, gracias al teorema de representación tensorial de ideales maximales, si  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach y la norma tensorial  $\alpha$  asociada por dualidad a  $\mathcal{A}^{\max}$  cumple que  $E_0 \widehat{\otimes}_{\alpha} F$  es un subespacio de  $E \widehat{\otimes}_{\alpha} F$  siempre que  $E_0$  sea un subespacio de  $E$  (esto es,  $\alpha$  es *inyectiva*

a izquierda), entonces como consecuencia del teorema de Hahn-Banach todo operador lineal en  $\mathcal{A}^{\max}(E_0, F') = (E_0 \widehat{\otimes}_{\alpha} F)'$  tiene una extensión en  $\mathcal{A}^{\max}(E, F') = (E \widehat{\otimes}_{\alpha} F)'$ , con la misma norma. En particular, el ideal de Banach de operadores integrales cumple con esta propiedad.

En ocasiones, si bien no es posible extender linealmente un operador de modo que se preserve alguna propiedad deseada, se puede conseguir una extensión Lipschitz con una *propiedad análoga*. Para ilustrar esto, consideremos la inclusión  $k_{c_0}: c_0 \rightarrow \ell_{\infty}$ , que es un operador lineal que se puede factorizar a través de  $c_0$ . Ésta se puede extender a un operador  $T: \ell_{\infty} \rightarrow \ell_{\infty}$  (por ejemplo, la identidad de  $\ell_{\infty}$  extiende a  $k_{c_0}$ ). Sin embargo, esa extensión no se puede factorizar a través de  $c_0$  ya que todo operador de  $\ell_{\infty}$  a  $\ell_{\infty}$  que deje fijo todo elemento de  $c_0$  tiene que tener imagen no separable (véase [8, Theorem 2.5.4]). Si ahora buscamos extensiones Lipschitz, por un ejemplo de Lindenstrauss [11, Example 1.5] existe  $f \in \text{Lip}_0(\ell_{\infty}, c_0)$  tal que  $f|_{c_0} = Id_{c_0}$ , y por ende  $k_{c_0} \circ f$  es una extensión Lipschitz de  $k_{c_0}$  que se factoriza Lipschitz a través de  $c_0$ .

Ahora, bajo las hipótesis del Teorema 2.1, si la extensión Lipschitz de un operador lineal tiene una cierta propiedad, ¿qué se puede decir de la extensión lineal? El resultado principal de este capítulo es una versión más refinada del Teorema 2.1 que nos mostrará varios casos en que, dado un operador lineal que tiene una extensión Lipschitz que pertenezca a un ideal Lipschitz, entonces la extensión lineal del operador pertenece al mismo ideal. Para ello, vamos a necesitar de dos herramientas que desarrollaremos previamente. Éstas son la Gateaux diferenciable de funciones Lipschitz y la invarianza por traslaciones de ideales Lipschitz. Primero, daremos un resultado preliminar asumiendo que las funciones involucradas son Gateaux diferenciable en algún punto y luego veremos en qué casos esta hipótesis se puede eliminar. Los resultados de este capítulo se encuentran en [AT2].

## 2.1 Gateaux diferenciable de funciones Lipschitz

**Definición 2.2.** Sean  $E, F$  espacios de Banach. Una función  $f$  definida en un abierto  $U$  de  $E$  y a valores en  $F$  es *Gateaux diferenciable* en  $x_0 \in U$  si existe un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  tal que para todo  $v \in E$ , se tiene

$$Tv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

En tal caso, se denota  $T = Df(x_0)$  y se lo llama la derivada de Gateaux de  $f$  en  $x_0$ .

De la definición, se puede ver que todo operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  es Gateaux diferenciable en todo  $x_0 \in E$  y  $DT(x_0) = T$ , y si  $f$  es Lipschitz y Gateaux diferenciable en  $x_0$ , entonces  $\|Df(x_0)\| \leq \text{Lip}(f)$ . Por lo general, la composición de dos funciones Gateaux diferenciables puede no ser Gateaux diferenciable, pero para la composición de funciones Lipschitz Gateaux diferenciables, se tiene

**Regla de la cadena.** Sea  $f$  una función definida en un abierto de un espacio de Banach  $E$  y a valores en un espacio de Banach  $F$  que es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0$ , y sea  $g$  un operador Lipschitz definido en un abierto que contiene a  $f(x_0)$  y que es Gateaux diferenciable en  $f(x_0)$ . Entonces  $g \circ f$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$  y  $D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$ . En particular, si  $g = T$  es un operador lineal acotado, entonces  $D(T \circ f)(x_0) = T \circ Df(x_0)$ .

*Demostración.* Fijemos  $v \in E$ . Para cada  $t \in \mathbb{R}$ , denotemos  $w(t) \in F$  al vector tal que

$$f(x_0 + tv) - f(x_0) = tDf(x_0)v + w(t).$$

Como  $f$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(t)}{t} = 0$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x_0 + tv) - (g \circ f)(x_0)}{t} &= \frac{g(f(x_0 + tv)) - g(f(x_0))}{t} \\ &= \frac{g(f(x_0) + (f(x_0 + tv) - f(x_0))) - g(f(x_0))}{t} \\ &= \frac{g(f(x_0) + tDf(x_0)v + w(t)) - g(f(x_0))}{t} \\ &= \frac{g(f(x_0) + tDf(x_0)v) - g(f(x_0))}{t} + \frac{g(f(x_0) + tDf(x_0)v + w(t)) - g(f(x_0) + tDf(x_0)v)}{t}. \end{aligned}$$

Como  $g$  es Gateaux diferenciable en  $f(x_0)$ , tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0) + tDf(x_0)v) - g(f(x_0))}{t} = Dg(f(x_0))Df(x_0)v.$$

Por otro lado, con el segundo término, tenemos que

$$\left\| \frac{g(f(x_0) + tDf(x_0)v + w(t)) - g(f(x_0) + tDf(x_0)v)}{t} \right\| \leq \text{Lip}(g) \left\| \frac{w(t)}{t} \right\|.$$

Por lo tanto,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x_0 + tv) - (g \circ f)(x_0)}{t} = Dg(f(x_0))Df(x_0)v$ , como queríamos ver.  $\square$

Volvamos al resultado de Lindenstrauss: si un operador lineal  $T$  admite una extensión Lipschitz, entonces admite una extensión lineal. En el caso de que la extensión Lipschitz sea Gateaux diferenciable en un punto del dominio de  $T$ , la demostración del resultado sería inmediata.

**Proposición 2.3.** Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $E_0$  subespacio de  $E$  y un operador  $T \in \mathcal{L}(E_0, F)$  tal que existe  $f \in \text{Lip}_0(E, F)$  con  $f|_{E_0} = T$  y es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E_0$ . Entonces  $Df(x_0) \in \mathcal{L}(E, F)$  cumple que  $Df(x_0)|_{E_0} = T$ .

*Demostración.* Puesto que  $T = f \circ \iota_{E_0}^E$ , aplicando la regla de la cadena y usando que  $T$  e  $\iota_{E_0}^E$  son operadores lineales, obtenemos que  $T = Df(x_0) \circ \iota_{E_0}^E$ .  $\square$

Recordemos que por el Teorema de Rademacher, toda función Lipschitz entre espacios normados de dimensión finita es Gateaux diferenciable en casi todo punto. Sin embargo, cuando consideramos espacios de dimensión infinita, existen funciones Lipschitz que no son Gateaux diferenciables en ningún punto, como muestra el siguiente ejemplo que se puede encontrar en [29, Proposition 2.1].

**Proposición 2.4.** Para cualquier espacio de Banach no nulo  $E$ , la isometría métrica  $\delta: E \rightarrow \mathcal{E}(E)$  no es Gateaux diferenciable en ningún punto.

*Demostración.* Supongamos que  $\delta_E$  es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E$ . Entonces la función  $\delta^{x_0}: E \rightarrow \mathbb{A}(E)$  definida como  $\delta^{x_0}(x) = \delta(x + x_0) - \delta(x_0)$  es Gateaux diferenciable en 0. Por lo tanto, para toda función  $f \in E^\#$ , se tiene que

$$f(\cdot + x_0) - f(x_0) = L_f \circ \delta^{x_0}$$

es Gateaux diferenciable en 0. Esto no ocurre pues, por ejemplo, la función  $f(x) = \|x - x_0\| - \|x_0\|$  no es Gateaux diferenciable en 0.  $\square$

De aquí puede surgir la pregunta de cuando una función Lipschitz entre espacios de dimensión infinita es Gateaux diferenciable en algún punto. El capítulo 6 del libro de Benyamini y Lindenstrauss [11] está dedicado a mostrar como se puede generalizar la teoría de diferenciabilidad de Lebesgue a espacios de dimensión infinita. Por el enfoque de esta tesis, no ahondaremos en este tema. Lo que necesitaremos en lo que viene es la siguiente consecuencia de un resultado de Mankiewicz [31, Theorem 1.3], que también se puede encontrar en [11, Theorem 6.42].

**Teorema 2.5.** *Sea  $E$  un espacio de Banach separable y sea  $F$  un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým. Si  $f$  es una función Lipschitz definida en un subconjunto abierto  $U$  de  $E$  y a valores en  $F$ , entonces  $f$  es Gateaux diferenciable en al menos un punto de  $U$ .*

En cuanto a la propiedad de Radon-Nikodým, recomendamos el libro de Diestel y Uhl donde, además, se puede encontrar una lista de espacios que tienen y que no tienen esta propiedad [25, Pag. 217 a 219]. En particular, todo espacio dual separable y todo espacio reflexivo tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Fijemos ahora un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , un espacio de Banach separable  $E$  y una función Lipschitz  $f \in \mathcal{A}^{\min} \circ \text{Lip}_0(E, F)$ . Como  $\mathcal{A}^{\min} = \mathcal{A}^{\min} \circ \overline{\mathcal{F}}$  y todo operador en  $\overline{\mathcal{F}}$  se factoriza linealmente a través de un espacio reflexivo (véase, por ejemplo, [46, Proposition 3.1.7]), la función  $f$  puede factorizarse como en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ g \downarrow & & \uparrow R \\ G_1 & \xrightarrow{T} & G_2, \end{array}$$

donde  $g \in \text{Lip}_0(E, G_1)$ ,  $T \in \overline{\mathcal{F}}(G_1, G_2)$ ,  $R \in \mathcal{A}^{\min}(G_2, F)$  y  $G_2$  es un espacio reflexivo. Por ende,  $T \circ g \in \text{Lip}_0(E, G_2)$  es Gateaux diferenciable en algún punto  $x_0 \in E$  por el Teorema 2.5 y, aplicando la regla de la cadena, obtenemos que  $f$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$  y  $Df(x_0) \in \mathcal{A}^{\min}(E, F)$ . Con esta misma idea, se puede demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach tal que  $\mathcal{A} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$  isométricamente para algún ideal de de Banach  $\mathcal{B}$  cerrado tal que todo operador en  $\mathcal{B}$  se factoriza linealmente a través de un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým. Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach, con  $E$  separable. Dados  $f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(E, F)$  y  $\varepsilon > 0$ , existe  $x_0 \in E$  tal que  $f$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$  y  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{A}} \leq (1 + \varepsilon)\|f\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ .*

Como consecuencia de la versión isométrica de la factorización de Davis, Figiel, Johnson y Pełczyński [22], obtenida por Lima, Nygaard y Oja [37], los operadores compactos y débiles compactos se factorizan isométricamente a través de un espacio con la propiedad de Radón-Nikodým. Luego, aparte de los ideales de Banach minimales, dos ejemplos de ideales que cumplen las hipótesis de la proposición anterior son el de operadores  $p$ -compactos  $\mathcal{K}_p$  y cuasi- $p$ -nucleares  $\mathcal{QN}_p$ , ya que  $\mathcal{K}_p = \mathcal{K}_p \circ \mathcal{K}$  [28, Proposition 2.9] y  $\mathcal{QN}_p = \mathcal{QN}_p \circ \mathcal{K}$  [44, Lemma 5].

## 2.2 Invarianza por traslaciones

Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach. Si  $X$  es un subconjunto de  $E$  que contiene al cero y  $x_0 \in X$ , entonces

$$X - x_0 := \{x - x_0 : x \in X\}$$

contiene al cero, y para  $f \in \text{Lip}_0(X, F)$ , denotamos  $f^{x_0} : X - x_0 \rightarrow F$  a la función Lipschitz definida como

$$f^{x_0}(x) = f(x + x_0) - f(x_0).$$

**Definición 2.7.** Un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  se dice *invariante por traslaciones* si dados espacios de Banach  $E$  y  $F$ , un subconjunto  $0 \in X \subseteq E$ ,  $x_0 \in X$  y  $f \in \mathcal{I}(X, F)$ , la función  $f^{x_0}$  pertenece a  $\mathcal{I}(X - x_0, F)$  y  $\|f^{x_0}\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ .

Observar que si  $f : X \subseteq E \rightarrow F$  es una función Lipschitz de un subconjunto  $X$  de  $E$  que contiene al cero a valores en  $F$  y  $x_0 \in X$ , entonces  $f = (f^{x_0})^{-x_0}$ . Por ende, si  $f$  pertenece a un ideal  $\mathcal{I}$  invariante por traslaciones, se tiene que  $\|f^{x_0}\|_{\mathcal{I}} = \|f\|_{\mathcal{I}}$  para todo  $x_0 \in X$ . En el caso en que  $X = E$ , la invarianza por traslaciones nos garantiza que  $f^{x_0} \in \mathcal{I}(E, F)$  para toda  $f \in \mathcal{I}(E, F)$  y  $x_0 \in E$ , con igual norma.

**Proposición 2.8.** *Sea  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach. Entonces  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es invariante por traslaciones.*

*Demostración.* Tomemos espacios de Banach  $E$  y  $F$ , un subconjunto  $0 \in X \subseteq E$ ,  $x_0 \in X$  y  $f \in \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(X, F)$ . Consideremos una factorización  $f = T \circ g$  donde  $g \in \text{Lip}_0(X, G)$  y  $T \in \mathcal{A}(G, F)$ , para algún espacio de Banach  $G$ . Puesto que  $T$  es lineal, se tiene que  $f^{x_0} = T \circ g^{x_0}$ , de donde obtenemos la conclusión deseada.  $\square$

**Proposición 2.9.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach invariante por traslaciones. Entonces  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}$  es invariante por traslaciones.*

*Demostración.* Fijemos espacios de Banach  $E$  y  $F$ , un subconjunto  $0 \in X \subseteq E$ , una función  $f \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(X, F)$  y  $x_0 \in X$ . Tomemos una factorización  $f = g_1 \circ g_2$  donde  $g_2 \in \mathcal{I}(X, G)$  y  $g_1 \in \text{Lip}_0(G, F)$ , para algún espacio de Banach  $G$ . Como  $f^{x_0} = g_1^{g_2(x_0)} \circ g_2^{x_0}$ , con  $g_1^{g_2(x_0)} \in \text{Lip}_0(G, F)$  y  $g_2^{x_0} \in \mathcal{I}(X - x_0, G)$ , obtenemos el resultado.  $\square$

En general, si  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  son ideales Lipschitz de Banach invariantes por traslaciones, entonces con idéntica demostración se ve que la composición  $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$  (que es ideal Lipschitz quasi-normado) es invariante por traslaciones.

Combinando las dos proposiciones anteriores, tenemos

**Corolario 2.10.** Si  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach, entonces  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es invariante por traslaciones.

La propiedad de invarianza por traslaciones se mantiene al tomar cápsula regular, inyectiva o Lipschitz inyectiva.

**Proposición 2.11.** Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach invariante por traslaciones. Entonces  $\mathcal{I}^{\text{reg}}$ ,  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  e  $\mathcal{I}^{\text{Linj}}$  son invariantes por traslaciones.

*Demostración.* Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $0 \in X \subseteq E$ ,  $x_0 \in X$  y  $f \in \mathcal{I}^{\text{reg}}(X, F)$ . Como  $k_F \circ f^{x_0} = (k_F \circ f)^{x_0}$  e  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones, se sigue que  $f^{x_0} \in \mathcal{I}^{\text{reg}}(X - x_0, F)$  con  $\|f^{x_0}\|_{\mathcal{I}^{\text{reg}}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}^{\text{reg}}}$ . De igual manera, cambiando la inclusión de  $F$  en su bidual por la inclusión de  $F$  en  $\ell_\infty(B_{F'})$ , se ve que  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  es invariante por traslaciones.

Ahora, supongamos que  $f \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X, F)$ , y sea  $g \in \mathcal{I}(X, G)$  que domina a  $f$ , esto es,  $\|f(x) - f(y)\| \leq \|g(x) - g(y)\| \forall x, y \in X$ . Entonces  $\|f^{x_0}(x) - f^{x_0}(y)\| \leq \|g^{x_0}(x) - g^{x_0}(y)\| \forall x, y \in X - x_0$  y como  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones,  $g^{x_0} \in \mathcal{I}(X - x_0, G)$  y domina a  $f^{x_0}$ , deducimos que  $f^{x_0} \in \mathcal{I}^{\text{Linj}}(X - x_0, F)$  con  $\|f^{x_0}\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}^{\text{Linj}}}$ .  $\square$

La invarianza por traslaciones también se mantiene al tomar cápsula maximal.

**Proposición 2.12.** Si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach invariante por traslaciones, entonces  $\mathcal{I}^{\text{max}}$  es invariante por traslaciones.

*Demostración.* Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $X$  un subconjunto de  $E$  que contiene al cero,  $x_0 \in X$  y  $f \in \mathcal{I}^{\text{max}}(X, F)$ . Para ver que  $f^{x_0} \in \mathcal{I}^{\text{max}}(X - x_0, F)$ , tomemos  $L \in \text{COFIN}(F)$  e  $Y \in \text{MFIN}(X - x_0)$ . Si  $-x_0 \notin Y$ , tomemos  $\tilde{Y} = \{-x_0\} \cup Y$ . Puesto que  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones, tenemos que

$$\begin{aligned} \|q_L^F \circ f^{x_0} \circ \iota_{\tilde{Y}}^{X-x_0}\|_{\mathcal{I}} &\leq \|q_L^F \circ f^{x_0} \circ \iota_{\tilde{Y}}^{X-x_0}\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(q_L^F \circ f \circ \iota_{\tilde{Y}+x_0}^X)^{x_0}\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|q_L^F \circ f \circ \iota_{\tilde{Y}+x_0}^X\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{I}^{\text{max}}} \end{aligned}$$

ya que  $\tilde{Y} + x_0 \in \text{MFIN}(E)$ . Esto demuestra que  $f^{x_0} \in \mathcal{I}^{\text{max}}(X - x_0, F)$  y  $\|f^{x_0}\|_{\mathcal{I}^{\text{max}}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}^{\text{max}}}$ .  $\square$

Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $x_0 \in E$ ,  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach y  $f \in \mathcal{I}(E, F)$ . Denotemos  $\tau_{x_0}$  a la traslación por  $x_0$ , esto es, la función afín  $\tau_{x_0}: E \rightarrow E$  definida por  $\tau_{x_0}(x) = x + x_0$ . Si asumimos que  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones, tenemos que  $\tau_{-f(x_0)} \circ f \circ \tau_{x_0}$  también pertenece a  $\mathcal{I}(E, F)$ . Notemos que  $\tau_{x_0} \notin \mathcal{L}(E, E)$  ya que no manda el cero en el cero. Por consiguiente, la propiedad de ideal por sí misma no garantiza que  $\tau_{-f(x_0)} \circ f \circ \tau_{x_0} \in \mathcal{I}(E, F)$ . Sin embargo, hasta donde sabemos, todo ideal Lipschitz de Banach es invariante por traslaciones.

En relación a la diferenciabilidad de Gateaux, sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach y supongamos que  $f: E \rightarrow F$  es una función Lipschitz Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E$  y que pertenece a un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  invariante por traslaciones. Para  $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ , denotando  $\phi_t \in \mathcal{L}(E, F)$  al operador  $\phi_t(v) = tv$  tenemos que, para  $x \in E$

$$\phi_{\frac{1}{t}} \circ f^{x_0} \circ \phi_t(x) = \frac{f(x_0 + tx) - f(x_0)}{t}.$$

Luego la red  $(\phi_{\frac{1}{t}} \circ f^{x_0} \circ \phi_t)_t \subseteq \text{Lip}_0(E, F)$  converge puntualmente a  $Df(x_0)$ . Como  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones y  $f \in \mathcal{I}(E, F)$ , para todo  $t \neq 0$  se tiene que  $\phi_{\frac{1}{t}} \circ f^{x_0} \circ \phi_t \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|\phi_{\frac{1}{t}} \circ f^{x_0} \circ \phi_t\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Dado que, por la Proposición 1.34, los ideales Lipschitz maximales son cerrados bajo convergencia puntual de redes acotadas, obtenemos

**Teorema 2.13.** *Sea  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach maximal e invariante por traslaciones y sean  $E, F$  espacios de Banach y  $f \in \mathcal{I}(E, F)$ . Supongamos que  $f$  es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E$ . Entonces  $Df(x_0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F)$  y  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ .*

Combinando el Teorema anterior con la Proposición 2.3, podemos demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 2.14.** *Sean  $E, F$  espacios de Banach y sea  $E_0$  un subespacio de  $E$ . Sea  $T \in \mathcal{L}(E_0, F)$  y supongamos que existe una función Lipschitz  $f: E \rightarrow F$  tal que  $f|_{E_0} = T$ . Si  $f$  pertenece a un ideal Lipschitz de Banach maximal  $\mathcal{I}$  que es invariante por traslaciones y  $f$  es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E_0$ , entonces  $Df(x_0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F)$  y cumple que  $Df(x_0)|_{E_0} = T$  y  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ .*

Recordemos que el Teorema 2.1 de Lindenstrauss no necesita la hipótesis de Gateaux diferenciability de la función Lipschitz que extiende al operador lineal. En la siguiente sección, veremos un resultado similar a la Proposición 2.14, pero sin la hipótesis de Gateaux diferenciability. Previo a eso, necesitamos ver cómo se traduce la invarianza por traslaciones de un ideal Lipschitz maximal a su normal tensorial Lipschitz asociada por dualidad.

**Lema 2.15.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach maximal e invariante por traslaciones. Sea  $\alpha$  la norma tensorial Lipschitz finitamente generada asociada a  $\mathcal{I}$  por dualidad. Dados  $E, F$  espacios de Banach, elementos  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  en  $E$  y  $v_1, \dots, v_n$  en  $F$ , se tiene que*

$$\alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+x, y_i+x} \boxtimes v_i \right) = \alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i \right)$$

para todo  $x \in E$ .

*Demostración.* Usando la dualidad de la norma y la invarianza por traslaciones de  $\mathcal{I}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+x, y_i+x} \boxtimes v_i \right) &= \sup_{f \in B_{\mathcal{I}(E, F')}} \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i+x) - f(y_i+x))(v_i) \right| \\ &= \sup_{f \in B_{\mathcal{I}(E, F')}} \left| \sum_{i=1}^n (f^x(x_i) - f^x(y_i))(v_i) \right| \\ &= \sup_{f \in B_{\mathcal{I}(E, F')}} \left| \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(y_i))(v_i) \right| \\ &= \alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \boxtimes v_i \right) \end{aligned}$$

□

## 2.3 Teorema de extensiones Lipschitz de operadores lineales

Ya tenemos todo listo para mostrar el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 2.16.** *Sean  $E, F$  espacios de Banach y sea  $E_0$  un subespacio de  $E$ . Sea  $T \in \mathcal{L}(E_0, F)$  y supongamos que existe una función Lipschitz  $f: E \rightarrow F$  tal que  $f|_{E_0} = T$ . Si  $f$  pertenece a un ideal Lipschitz de Banach maximal  $\mathcal{I}$  que es invariante por traslaciones, entonces existe un operador  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')$  tal que  $R|_{E_0} = k_F \circ T$  y  $\|R\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ .*

*Demostración.* Primero, asumamos que  $E$  es finito-dimensional y escribamos (algebraicamente)  $E = E_0 \oplus E_1$ . Sea  $\varphi \geq 0$  una función  $C^\infty$  con soporte compacto en  $E_0$  tal que  $\int_{E_0} \varphi = 1$  y  $\varphi(x) = \varphi(-x)$  para todo  $x \in E_0$ . Para  $z \in E$ , se define

$$g(z) = \int_{E_0} f(z+x)\varphi(x)dx.$$

Se tiene que  $g(0) = \int_{E_0} f(x)\varphi(x)dx = \int_{E_0} T(x)\varphi(x)dx = 0$  porque  $T(x)\varphi(x) = -T(-x)\varphi(-x)$ . Como  $f$  es Lipschitz,  $g$  también lo es.

Para ver que  $g \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|g\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ , notemos que al ser  $\mathcal{I}$  maximal, es regular, así que basta con ver que  $k_F \circ g \in \mathcal{I}(E, F'')$  con  $\|k_F \circ g\|_{\mathcal{I}} \leq \|k_F \circ f\|_{\mathcal{I}}$ .

Al ser  $k_F$  un operador lineal, para todo  $z \in E$  se tiene que

$$(k_F \circ g)(z) = \int_{E_0} (k_F \circ f)(z+x)\varphi(x)dx.$$

Por el Teorema de Representación tensorial de ideales Lipschitz maximales, existe una norma tensorial Lipschitz finitamente generada  $\alpha$  tal que  $\mathcal{I}(E, F'') = (E \widehat{\otimes}_\alpha F'')$ . Tomemos  $u = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i, y_i} \otimes v'_i$  en  $E \otimes F'$ , donde  $x_i, y_i \in E$  y  $v'_i \in F'$  para  $i = 1, \dots, n$ . Tenemos

$$\begin{aligned} |\langle k_F \circ g, u \rangle| &= \left| \sum_{i=1}^n ((k_F \circ g)(x_i) - (k_F \circ g)(y_i)) (v'_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{E_0} ((k_F \circ f)(x_i+x) - (k_F \circ f)(y_i+x)) \varphi(x)dx \right) (v'_i) \right| \\ &= \left| \int_{E_0} \left( \sum_{i=1}^n ((k_F \circ f)(x_i+x) - (k_F \circ f)(y_i+x)) (v'_i) \right) \varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int_{E_0} \left| \left\langle k_F \circ f, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+x, y_i+x} \otimes v'_i \right\rangle \right| \varphi(x)dx \\ &\leq \|k_F \circ f\|_{\mathcal{I}} \int_{E_0} \alpha \left( \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+x, y_i+x} \otimes v'_i \right) \varphi(x)dx \\ &= \|k_F \circ f\|_{\mathcal{I}} \alpha(u), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue del Lema 2.15 y del hecho de que  $\int_{E_0} \varphi(x)dx = 1$ . Por ende  $g \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|g\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ .

Ahora, dados  $z \in E$  y una dirección  $y \in E_0$ , denotando  $u = ty + x$  con  $x \in E_0$ , obtenemos

$$g(z + ty) = \int_{E_0} f(z + ty + x)\varphi(x)dx = \int_{E_0} f(z + u)\varphi(u - ty)du$$

y por consiguiente

$$\frac{g(z + ty) - g(z)}{t} = \int_{E_0} f(z + u) \left( \frac{\varphi(u + t(-y)) - \varphi(u)}{t} \right) du.$$

Siendo  $\varphi$  una función  $C^\infty$  con soporte compacto en  $E_0$ , por el Teorema de Convergencia Dominada para la Integral de Bochner (véase por ejemplo [25, Theorem II.2.3]), existe la derivada direccional de  $g$  en  $z$  en la dirección  $y$ , que denotaremos  $\frac{\partial g}{\partial y}(z)$ , y satisface

$$\frac{\partial g}{\partial y}(z) = - \int_{E_0} f(z + x)D\varphi(x)(y) dx, \quad (2.1)$$

para todo  $z \in E$  e  $y \in E_0$ . Notemos que dicha expresión es continua en  $z \in E$  y lineal en  $y \in E_0$ .

Además, para cada  $y \in E_0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_{E_0} f(y + x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{E_0} T(y + x)\varphi(x)dx \\ &= T(y) \int_{E_0} \varphi(x)dx + \int_{E_0} T(x)\varphi(x)dx \\ &= T(y). \end{aligned}$$

Resumiendo,  $g \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|g\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ ,  $g|_{E_0} = T$  y satisface (2.1).

Ahora, sea  $\psi \geq 0$  una función  $C^\infty$  con soporte compacto en  $E_1$  tal que  $\int_{E_1} \psi = 1$ , y consideremos, para  $z \in E$ , la función dada por

$$f_n(z) = \int_{E_1} g\left(z + \frac{u}{n}\right) \psi(u)du$$

y para  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h_n(z) := f_n(z) - f_n(0) = \int_{E_1} \left( g\left(z + \frac{u}{n}\right) - g\left(\frac{u}{n}\right) \right) \psi(u)du = \int_{E_1} g^{\frac{u}{n}}(z)\psi(u)du.$$

Dado que  $\mathcal{I}$  es invariante por traslaciones,  $g^{\frac{u}{n}} \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|g^{\frac{u}{n}}\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$  para todo  $u \in E_1$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Como antes, se tiene que  $h_n \in \mathcal{I}(E, F)$  con  $\|h_n\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ .

Mostraremos que  $h_n$  es Gateaux diferenciable en  $z = 0$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $y = y_0 + y_1$ , donde  $y_0 \in E_0$  e  $y_1 \in E_1$ . Denotando  $w = ty_1 + \frac{u}{n}$  para  $u \in E_1$ , se tiene que

$$f_n(ty) = \int_{E_1} g\left(ty_1 + ty_0 + \frac{u}{n}\right)\psi(u)du = n \int_{E_1} g(w + ty_0)\psi(nw - tny_1)dw$$

que en el caso  $y = 0$  da

$$f_n(0) = \int_{E_1} g\left(\frac{u}{n}\right)\psi(u)du = n \int_{E_1} g(w)\psi(nw)dw.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \frac{h_n(ty)}{t} &= \frac{f_n(ty) - f_n(0)}{t} \\ &= \frac{n}{t} \int_{E_1} (g(u + ty_0)\psi(nu - tny_1) - g(u)\psi(nu))du \\ &= n \int_{E_1} \psi(nu - tny_1) \left( \frac{g(u + ty_0) - g(u)}{t} \right) du + n \int_{E_1} g(u) \left( \frac{\psi(nu - tny_1) - \psi(nu)}{t} \right) du. \end{aligned}$$

Nuevamente por el Teorema de Convergencia Dominada se obtiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_n(ty)}{t} = n \int_{E_1} \psi(nu) \frac{\partial g}{\partial y_0}(u) du + n \int_{E_1} g(u) D\psi(nu)(-ny_1) du. \quad (2.2)$$

El miembro derecho es lineal en  $(y_0, y_1) \in E_0 \oplus E_1 = E$ , y dado que  $E$  es finito-dimensional, define un operador lineal acotado de  $E$  a  $F$ . Por ende,  $h_n$  es Gateaux diferenciable en  $z = 0$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Además, como  $\mathcal{I}$  es maximal, por el Teorema 2.13 tenemos que  $Dh_n(0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F)$  con  $\|Dh_n(0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|h_n\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ .

Consideremos los operadores  $k_F \circ Dh_n(0) \in \|g\|_{\mathcal{I}} B_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')}$ . Dado que, por la Proposición 1.35,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  es un ideal de Banach maximal, por el Teorema de Representación tensorial para ideales de Banach maximales,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')$  es un espacio dual. Por ende, pasando a una subred de ser necesario, podemos asumir que existe  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')$  con  $\|R\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$  tal que  $R = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} k_F \circ Dh_n(0)$ . Equivalentemente, para cada  $x \in E$  e  $y' \in F'$ ,  $R(x)(y') = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( k_F \circ Dh_n(0)(x) \right)(y')$ .

Mostraremos que  $R|_{E_0} = T$ . Dado  $y_0 \in E_0$ , por (2.2) se tiene que

$$Dh_n(0)(y_0) = \int_{E_1} \frac{\partial g}{\partial y_0} \left( \frac{u}{n} \right) \psi(u) du.$$

Por otro lado, como  $g|_{E_0} = T$ , se tiene que  $\frac{\partial g}{\partial y_0}(0) = Tx$ , y entonces, para cada  $y' \in F'$ ,

$$\begin{aligned} R(y_0)(y') - y'(T(y_0)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Dh_n(0)(y_0) - Ty_0)(y') \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} \left( \frac{\partial g}{\partial y_0} \left( \frac{u}{n} \right) - \frac{\partial g}{\partial y_0}(0) \right) (y') \psi(u) du. \end{aligned}$$

Por la continuidad de  $\frac{\partial g}{\partial y_0}(\cdot)$  y el soporte compacto de  $\psi$ , se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_1} \left( \frac{\partial g}{\partial y_0} \left( \frac{u}{n} \right) - \frac{\partial g}{\partial y_0}(0) \right) (y') \psi(u) du = 0.$$

Dado que  $y' \in F'$  era arbitrario, tenemos que  $k_F \circ Ty_0 = Ry_0$ . Esto completa la demostración para el caso en que  $E$  es finito-dimensional.

Para el caso general, para cada subespacio  $G \in \text{FIN}(E)$ , por el caso anterior, existe un operador  $R_G \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(G, F'')$  tal que  $R_G|_{G \cap E_0} = k_F \circ T|_{G \cap E_0}$  y  $\|R_G\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \leq \|f|_G\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$  (en particular  $\|R_G\| \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ ). Consideremos la función  $h_G: E \rightarrow F''$  definida como

$$h_G x = \begin{cases} R_G x & \text{if } x \in G \\ 0 & \text{if } x \notin G. \end{cases}$$

Para cada  $x \in E$ , tenemos que  $\|h_G x\| \leq \|f\|_{\mathcal{I}} \|x\|$ . Fijemos un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en  $\text{FIN}(E)$  que contiene al filtro del orden, esto es, para todo  $G_0 \in \text{FIN}(E)$ ,  $\{G \in \text{FIN}(E) : G_0 \subseteq G\} \in \mathcal{U}$ . Por la  $w^*$ -compacidad de la bola cerrada de  $F''$ , el límite

$$Rx := w^* \text{-} \lim_{\mathcal{U}} h_G x$$

existe para cada  $x \in E$ . Veamos que  $R: E \rightarrow F''$  es lineal y extiende a  $T$ . Dados  $x, y \in E$ , para todo  $G \in \text{FIN}(E)$  que contiene a  $\text{span}\{x, y\}$ ,

$$h_G(x + y) = R_G(x + y) = R_G x + R_G y = h_G x + h_G y,$$

que implica que  $R(x + y) = Rx + Ry$ . Dado  $x \in E_0$ , para todo  $G \in \text{FIN}(E)$  que contiene a  $x$ ,

$$h_G x = R_G x = k_F \circ T x,$$

y por ende  $Rx = k_F \circ T x$ .

Resta ver que  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')$  con  $\|R\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Dado que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  es un ideal de Banach maximal, existe una norma tensorial finitamente generada  $\beta$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'') = (E \widehat{\otimes}_{\beta} F')'$ . Fijemos  $u \in E \otimes F'$  con una representación  $u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y'_i$ . Definimos, para  $G \in \text{FIN}(E)$ ,

$$t_G := \begin{cases} \beta(u; G \otimes F') & \text{if } \text{span}\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq G \\ 0 & \text{if } \text{span}\{x_i\}_{i=1}^n \not\subseteq G \end{cases}$$

En virtud de la *metric mapping property* de  $\beta$ , se tiene que

$$\beta(u; G \otimes F') \leq \beta(u; \text{span}\{x_i\}_{i=1}^n \otimes F').$$

Por ende, la red  $(t_G)_{G \in \text{FIN}(E)}$  es acotada, así que existe  $\lim_{\mathcal{U}} t_G$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , puesto que  $\beta$  es finitamente generada, existe  $G_{\varepsilon} \in \text{FIN}(E)$  tal que  $\beta(u; G_{\varepsilon} \otimes F') \leq \beta(u; E \otimes F') + \varepsilon$ . Para todo  $G \in \text{FIN}(E)$  que contiene a  $\tilde{G}_{\varepsilon} := \text{span}\{G_{\varepsilon} \cup \{x_i\}_{i=1}^n\}$ , se tiene que

$$\beta(u; E \otimes F') \leq t_G \leq \beta(u; \tilde{G}_{\varepsilon} \otimes F') \leq \beta(u; G_{\varepsilon} \otimes F') \leq \beta(u; E \otimes F') + \varepsilon.$$

lo cual implica que

$$\beta(u; E \otimes F') \leq \lim_{\mathcal{U}} t_G \leq \beta(u; E \otimes F') + \varepsilon.$$

Siendo  $\varepsilon > 0$  arbitrario, se tiene que  $\lim_{\mathcal{U}} t_G = \beta(u; E \otimes F')$ . Finalmente, para todo  $G \in \text{FIN}(E)$  que contiene a  $\text{span}\{x_i\}_{i=1}^n$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n (h_G x_i)(y'_i) \right| = \left| \sum_{i=1}^n (R_G x_i)(y'_i) \right| = |\langle R_G, u \rangle| \leq \|R_G\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \beta(u; G \otimes F') \leq \|f\|_{\mathcal{I}} t_G.$$

Tomando límite a lo largo del ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , se obtiene que

$$|\langle R, u \rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{I}} \beta(u; E \otimes F').$$

Esto muestra que  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F'')$  con  $\|R\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ , finalizando la demostración.  $\square$

Vale la pena mencionar que bajo las hipótesis del teorema anterior, el operador  $T$  pertenece al ideal  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ . Como consecuencia del Teorema 2.16, tenemos el siguiente resultado de extensión que afirma que un operador lineal en un ideal maximal  $\mathcal{A}$  admite una extensión en el mismo ideal si y solo si admite una extensión Lipschitz en algún ideal Lipschitz maximal  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ .

**Teorema 2.17.** *Sean  $E, F$  espacios de Banach,  $E_0$  subespacio de  $E$ . Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach maximal y  $T \in \mathcal{A}(E_0, F')$ . Son equivalentes*

- a) *Existe  $R \in \mathcal{A}(E, F')$  tal que  $R|_{E_0} = T$  y  $\|R\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$ .*
- b) *Para todo ideal Lipschitz de Banach maximal  $\mathcal{I}$  invariante por traslaciones tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ , existe  $f \in \mathcal{I}(E, F')$  tal que  $f|_{E_0} = T$  y  $\|f\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$ .*
- c) *Existe un ideal Lipschitz de Banach maximal  $\mathcal{I}$  invariante por traslaciones tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$  y una función Lipschitz  $f \in \mathcal{I}(E, F')$  con  $f|_{E_0} = T$  y  $\|f\|_{\mathcal{I}} = \|T\|_{\mathcal{A}}$ .*

*Demostración.* Que (a) implica (b) es inmediato, ya que toda extensión lineal de  $T$  en  $\mathcal{A}$  automáticamente está en todo ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ .

Que (b) implica (c) se sigue de la existencia de un ideal Lipschitz con las propiedades en (b). Por ejemplo,  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es maximal e invariante por traslaciones por las Proposiciones 1.43 y 2.8 y, como veremos en el Corolario 3.6, satisface que  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ .

Finalmente, que (c) implica (a) es una consecuencia directa del Teorema 2.16, que nos da la extensión lineal requerida.  $\square$

## 2.4 Operadores extendibles de un ideal Lipschitz

A partir de las extensiones de operadores Lipschitz en un ideal, se puede generar un procedimiento que da una nueva clase de operadores Lipschitz. Más precisamente, Chávez-Domínguez y Jiménez-Vargas en [18] introdujeron los operadores  $\mathcal{I}$ -extendibles de un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$ .

**Definición 2.18.** Sean  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach,  $X$  espacio métrico,  $E$  espacio de Banach y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Al operador  $f$  se le dice  $\mathcal{I}$ -extendible si para todo superespacio métrico  $Y$  de  $X$ , existe  $\tilde{f} \in \mathcal{I}(Y, E)$  que extiende a  $f$ . Denotamos  $\mathcal{I}_e$  a la clase de operadores Lipschitz  $\mathcal{I}$ -extendibles, y para  $f \in \mathcal{I}_e(X, E)$ , se define

$$\|f\|_{\mathcal{I}_e} := \sup \left\{ \inf \left\{ \|\tilde{f}\|_{\mathcal{I}} : \tilde{f} \in \mathcal{I}(Y, E) \text{ extiende a } f \right\} : Y \text{ superespacio de } X \right\}.$$

Que los operadores  $\mathcal{I}$  extendibles forman un ideal de Lipschitz fue mostrado en [18], nosotros incluimos la demostración por completitud.

**Proposición 2.19.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz. Entonces  $\mathcal{I}_e$  es un ideal Lipschitz.*

*Demostración.* Es claro que para un espacio métrico  $X$  y un espacio de Banach  $E$ ,  $\mathcal{I}_e(X, E)$  es un espacio vectorial. Además,  $Id_{\mathbb{R}}$  se puede extender a cualquier superespacio de  $\mathbb{R}$  gracias al teorema de extensión de McShane. Es decir  $Id_{\mathbb{R}} \in \mathcal{I}_e(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Por último, veamos la propiedad

de ideal. Sea  $f \in \mathcal{I}_e(X, E)$ ,  $h \in \text{Lip}_0(Y, X)$  y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  y sea  $Z$  un superespacio de  $Y$ . Consideremos la inclusión canónica de  $X$  en  $\ell_\infty(B_{X^\#})$ ,  $J_X: X \rightarrow \ell_\infty(B_{X^\#})$  y, por lo tanto, podemos extender a  $f$ . Es decir, existe  $\tilde{f} \in \mathcal{I}(\ell_\infty(B_{X^\#}), E)$  tal que  $f = \tilde{f} \circ J_X$ . Al ser  $\ell_\infty(B_{X^\#})$  un espacio 1-inyectivo, se puede extender al operador  $J_X \circ h \in \text{Lip}_0(Y, \ell_\infty(B_{X^\#}))$  a  $Z$ . Es decir, existe  $\tilde{h} \in \text{Lip}_0(Z, \ell_\infty(B_{X^\#}))$  tal que  $\tilde{h}|_Y = J_X \circ h$ . Luego,  $T \circ \tilde{f} \circ \tilde{h} \in \mathcal{I}(Z, F)$  y vale que  $T \circ \tilde{f} \circ \tilde{h}|_Y = T \circ f \circ h$ , con lo que  $T \circ f \circ h \in \mathcal{I}_e(Y, F)$ .  $\square$

De la misma forma, para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , se define la clase  $\mathcal{A}_e$  de operadores lineales  $\mathcal{A}$ -extendibles, que es un ideal de Banach. Notar que  $\mathcal{A}_e \subseteq \mathcal{A}$  e  $\mathcal{I}_e \subseteq \mathcal{I}$ . Se tiene la siguiente caracterización que nos dice que un operador es  $\mathcal{A}$ -extendible ( $\mathcal{I}$ -extendible) si y solo si es posible extenderlo a un espacio 1-inyectivo prefijado mediante un operador en  $\mathcal{A}$  (respectivamente, en  $\mathcal{I}$ ).

**Proposición 2.20.**

- a) Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach,  $E, F$  espacios de Banach y  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Sea  $G$  un espacio de Banach 1-inyectivo tal que existe una isometría lineal  $j: E \rightarrow G$ . Entonces  $T \in \mathcal{A}_e(E, F)$  si y solo si existe  $R \in \mathcal{A}(G, F)$  tal que  $T = R \circ j$ . En este caso  $\|T\|_{\mathcal{A}_e} = \inf\{\|R\|_{\mathcal{A}}: T = R \circ j\}$ .
- b) Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach,  $X$  espacio métrico,  $E$  espacio de Banach y  $f \in \text{Lip}_0(X, E)$ . Sea  $Y$  un espacio métrico Lipschitz 1-inyectivo tal que existe una isometría  $j: X \rightarrow Y$ . Entonces  $f \in \mathcal{I}_e(X, E)$  si y solo si existe  $g \in \mathcal{I}(Y, E)$  tal que  $f = g \circ j$ . En este caso  $\|f\|_{\mathcal{I}_e} = \inf\{\|g\|_{\mathcal{I}}: f = g \circ j\}$ .

*Demostración.* Veremos solo el caso Lipschitz. El caso lineal es análogo.

Tomemos  $f \in \mathcal{I}_e(X, E)$  y una isometría  $j: X \rightarrow Y$ , donde  $Y$  es 1-Lipschitz inyectivo. Como  $j(X)$  es un subespacio métrico de  $Y$  y  $f \circ j^{-1} \in \mathcal{I}_e(j(X), E)$  por ser  $\mathcal{I}_e$  un ideal Lipschitz, existe  $g \in \mathcal{I}(Y, E)$  tal que  $g|_{j(X)} = f \circ j^{-1}$ . Es decir,  $f = g \circ j$ . Ahora tomemos  $Z$  un superespacio de  $X$  y, como  $Y$  es Lipschitz 1-inyectivo, existe  $\tilde{j} \in \text{Lip}_0(Z, Y)$  con  $\text{Lip}(\tilde{j}) = 1$  tal que extiende a  $j$ . Luego  $g \circ \tilde{j} \in \mathcal{I}(Z, E)$  es una extensión de  $f$  con  $\|g \circ \tilde{j}\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Luego, tomando ínfimo sobre todas las extensiones de  $f$  a  $Z$ , y luego supremo sobre todos los superespacios  $Z$ , tenemos que  $\|f\|_{\mathcal{I}_e} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Tomando ínfimo sobre las funciones  $g \in \mathcal{I}(Y, E)$  tales que  $f = g \circ j$ , tenemos que  $\|f\|_{\mathcal{I}_e} \leq \inf\{\|g\|_{\mathcal{I}}: f = g \circ j\}$ .

Recíprocamente, si  $f$  admite una factorización como en el enunciado, como  $Y$  es 1-inyectivo, al poder extender la isometría  $j$ , se sigue que  $f \in \mathcal{I}_e(X, E)$ . Como hicimos al principio, podemos ver a  $Y$  como un superespacio de  $X$  y a  $j$  como la inclusión. Luego, al ser el operador  $g$  una extensión de  $f$ , se sigue que  $\|f\|_{\mathcal{I}_e} \geq \inf\{\|g\|_{\mathcal{I}}: g \in \mathcal{I}(G, F), f = g \circ j\}$ .  $\square$

En el lenguaje de ideales, la proposición anterior nos dice

**Corolario 2.21.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_e &= \mathcal{I} \circ \text{op}(\{\ell_\infty(\Gamma) : \Gamma \text{ conjunto de índices}\}) \circ \text{Lip}_0 \\ \mathcal{A}_e &= \mathcal{A} \circ \text{op}(\{\ell_\infty(\Gamma) : \Gamma \text{ conjunto de índices}\}) \end{aligned}$$

Otra propiedad es la siguiente.

**Proposición 2.22.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach ultraestables. Entonces  $\mathcal{A}_e$  e  $\mathcal{I}_e$  son ultraestables.

*Demostración.* Escribiremos la prueba de la ultraestabilidad de  $\mathcal{I}_e$ . Que  $\mathcal{A}_e$  es ultraestable cuando  $\mathcal{A}$  lo es se ve de forma similar. Sea  $I$  un conjunto de índices, y tomemos familias de espacios de espacios métricos  $(X_i)_{i \in I}$ , espacios de Banach  $(E_i)_{i \in I}$ , y operadores Lipschitz  $(f_i)_{i \in I}$  tales que, para cada  $i \in I$ ,  $f_i \in \mathcal{I}_e(X_i, E_i)$  y  $\sup_{i \in I} \|f_i\|_{\mathcal{I}_e} < \infty$ . Sea  $\mathcal{U}$  ultrafiltro en  $I$  e  $Y$  un superespacio métrico del ultraproducto  $(X_i)_{\mathcal{U}}$ . Dado que para cada  $i \in I$ ,  $Y$  es subespacio métrico del espacio métrico producto  $Y \times X_i$  (donde tomamos como métrica la suma de las distancias de  $Y$  y  $X_i$ ), se tiene que  $(Y)_{\mathcal{U}}$  es subespacio métrico de  $(Y \times X_i)_{\mathcal{U}}$ , y como  $Y$  es subespacio métrico de  $(Y)_{\mathcal{U}}$ , deducimos que  $Y$  es subespacio métrico de  $(Y \times X_i)_{\mathcal{U}}$ . Sea  $\varepsilon > 0$ . Dado  $i \in I$ , usando que  $f_i \in \mathcal{I}_e(X_i, E_i)$ , tomemos  $\tilde{f}_i \in \mathcal{I}(Y \times X_i, E_i)$  que extiende a  $f_i$ , con  $\|\tilde{f}_i\|_{\mathcal{I}} \leq \|f_i\|_{\mathcal{I}_e} + \varepsilon$ . Como  $\mathcal{I}$  es ultraestable, se tiene que  $(\tilde{f}_i)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}((Y \times X_i)_{\mathcal{U}}, (E_i)_{\mathcal{U}})$  con  $\|(\tilde{f}_i)_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\tilde{f}_i\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}_e} + \varepsilon$ . Se tiene que  $(\tilde{f}_i)_{\mathcal{U}}|_Y$  extiende a  $(f_i)_{\mathcal{U}}$  y  $\|(\tilde{f}_i)_{\mathcal{U}}|_Y\|_{\mathcal{I}} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}_e} + \varepsilon$ , implicando que

$$\inf \{ \|g\|_{\mathcal{I}} : g \in \mathcal{I}(Y, (E_i)_{\mathcal{U}}), g|_Y = (f_i)_{\mathcal{U}} \} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}_e} + \varepsilon.$$

Como el superespacio  $Y$  de  $(X_i)_{\mathcal{U}}$  y  $\varepsilon > 0$  son arbitrarios, se sigue que  $(f_i)_{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}_e((X_i)_{\mathcal{U}}, (E_i)_{\mathcal{U}})$  con  $\|(f_i)_{\mathcal{U}}\|_{\mathcal{I}_e} \leq \lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|_{\mathcal{I}_e}$ .  $\square$

Para finalizar, mostraremos cómo son los operadores lineales de  $\mathcal{I}_e$ .

**Teorema 2.23.** Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach maximal, invariante por traslaciones. Entonces

$$(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e \subseteq \mathcal{I}_e \cap \mathcal{L} \subseteq ((\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e)^{\text{reg}}.$$

En particular, dados espacios de Banach  $E$  y  $F$ , se tiene que

$$\mathcal{I}_e \cap \mathcal{L}(E, F') = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e(E, F').$$

Esto es, un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F')$  es  $\mathcal{I}$ -extendible si y solo si es  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})$ -extendible.

*Demostración.* La inclusión  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e \subseteq \mathcal{I}_e \cap \mathcal{L}$  se deduce de la definición de los ideales involucrados. Para ver la otra inclusión, tomemos un operador lineal  $T \in \mathcal{I}_e(E, F)$ . En particular,  $k_F \circ T \in \mathcal{I}_e(E, F'')$ . Sea  $f \in \mathcal{I}(\ell_{\infty}(B_{E'}), F'')$  que extiende a  $k_F \circ T$ . Como  $\mathcal{I}$  es maximal e invariante por traslaciones, por el Teorema 2.16 existe  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(\ell_{\infty}(B_{E'}), F'')$  tal que  $R|_E = k_F \circ T$  y  $\|R\|_{\mathcal{I} \cap \mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Por la Proposición 2.20, se sigue que  $k_F \circ T \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e(E, F'')$  con  $\|k_F \circ T\|_{(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ , y tomando ínfimo sobre las  $f \in \mathcal{I}(\ell_{\infty}(B_{E'}), F'')$  que extienden a  $k_F \circ T$ , se obtiene  $\|k_F \circ T\|_{(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e} \leq \|T\|_{\mathcal{I}_e}$ . Por lo tanto,  $T \in ((\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e)^{\text{reg}}(E, F)$  con  $\|T\|_{((\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_e)^{\text{reg}}} \leq \|T\|_{\mathcal{I}_e}$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Extensiones Lipschitz de ideales de Banach

En los preliminares mencionamos que, dado  $1 \leq p < \infty$ , los operadores lineales que pertenecen al ideal de operadores Lipschitz  $p$ -sumantes de Farmer y Johnson son los operadores lineales  $p$ -sumantes [26]. Esto expresado en el lenguaje de ideales se puede escribir como

$$\Pi_p^{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L} = \Pi_p.$$

Un resultado análogo a este fue obtenido por Johnson, Maurey y Schechtman cuando introdujeron el ideal de operadores Lipschitz  $p$ -factoreables, donde muestran que para  $1 < p < \infty$ , todos los operadores lineales en este ideal son exactamente los operadores  $p$ -factorables, si es que el espacio de llegada es un dual [33]. Esto es, para espacios de Banach  $E$  y  $F$ ,

$$(\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F') = \text{op}(\mathbb{L}_p)(E, F').$$

En este capítulo nos abocamos a dos tareas de forma simultánea. La primera es caracterizar los ideales lineales  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{I}$  es cada uno de los ideales Lipschitz estudiados en el primer capítulo. La segunda es, dado un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , identificar distintos ideales Lipschitz  $\mathcal{I}$  tales que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ . Antes de comenzar, para aclarar el lenguaje, introduciremos la siguiente definición.

**Definición 3.1.** Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Decimos que  $\mathcal{I}$  extiende a  $\mathcal{A}$  si  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ .

Primero, notemos que si un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  extiende a  $\mathcal{A}$ , como  $\mathcal{I} \circ \text{Lip}_0 = \mathcal{I}$ , tenemos que

$$\mathcal{A} \subseteq (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} \subseteq (\mathcal{I} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$$

con lo cual el ideal de composición  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  también extiende a  $\mathcal{A}$ . Por lo tanto, tenemos

**Proposición 3.2.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach,  $E$  y  $F$  espacios de Banach. Existe un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$  si y sólo si  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$ .

En virtud de la proposición anterior, es natural comenzar por ver cuando un ideal de Banach es extendido por su ideal de composición.

### 3.1 Extensiones de ideales de Banach a ideales Lipschitz de composición

Necesitaremos la siguiente definición introducida por Godefroy y Kalton [29].

**Definición 3.3.** Un espacio de Banach  $E$  tiene la *Lipschitz lifting property*, que abreviaremos LLP, si existe  $T \in \mathcal{L}(E, \mathcal{A}(E))$  tal que  $Id_E = \beta_E \circ T$ , donde  $\beta_E: \mathcal{A}(E) \rightarrow E$  es el operador baricentro. En caso que el operador  $T$  cumpla que  $\|T\| = 1$  diremos que el espacio tiene la LLP métrica.

Notemos que si  $E$  tiene la LLP métrica, entonces el operador lineal  $T$  de la definición es necesariamente isométrico y  $E$  es un subespacio 1-complementado de  $\mathcal{A}(E)$ . En el trabajo de Godefroy y Kalton [29] se muestran varios espacios con esta propiedad y otros sin ella. Todo espacio de Banach separable, los espacios  $\mathcal{A}(E)$ , con  $E$  espacio de Banach y los subespacios complementados de un espacio con la LLP métrica tienen la LLP métrica [29, Theorem 3.1, Lemma 2.10, Lemma 2.11]. Mientras que los espacios  $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ,  $c_0(\Gamma)$  con  $\Gamma$  no numerable y todo espacio de Banach reflexivo no separable carecen de la LLP [29, Proposition 4.6, Pag. 127, Theorem 4.3].

Comencemos mostrando que cuando el dominio tiene la LLP métrica, entonces cualquier ideal de Banach  $\mathcal{A}$  es extendido por  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  [57, Proposition 3.2]. En particular, si el dominio es separable.

**Proposición 3.4.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach,  $E$  un espacio de Banach con la LLP métrica, y sea  $F$  un espacio de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F).$$

*Demostración.* Sea  $T \in (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F)$ . Por la Proposición 1.2, su linealización  $L_T$  pertenece a  $\mathcal{A}(\mathcal{A}(E), F)$  con  $\|L_T\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ . Por otro lado, dado que  $T$  es un operador lineal, su linealización viene dada por  $L_T = T \circ \beta_E$ . Dado que  $E$  tiene la LLP métrica, existe  $S \in \mathcal{L}(E, \mathcal{A}(E))$  con  $\|S\| = 1$  tal que  $\beta_E \circ S = Id_E$ . Luego,  $T = L_T \circ S$  pertenece a  $\mathcal{A}(E, F)$  y  $\|T\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0}$ . Dado que la otra inclusión es trivial, la prueba está completa.  $\square$

Para ciertos ideales de Banach  $\mathcal{A}$ , se tiene que  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$  sin hipótesis sobre los espacios de Banach  $E$  y  $F$ . Tal es el caso si  $\mathcal{A}$  es suryectivo [57, Proposition 3.4] o es el dual de algún ideal de Banach.

**Proposición 3.5.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach. Entonces*

a)  $(\mathcal{A}^{\text{sur}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\text{sur}}$ .

b)  $(\mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\text{dual}}$ .

*Demostración.* Tomemos espacios de Banach  $E$  y  $F$ , un operador lineal  $T \in \mathcal{A}^{\text{sur}} \circ \text{Lip}_0(E, F)$  y una factorización  $T = S \circ f$  a través de algún espacio de Banach  $G$ , donde  $S \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(G, F)$ ,  $f \in \text{Lip}_0(E, G)$ . Sea  $q: G \rightarrow G/\ker(S)$  el operador cociente y  $\bar{S}: G/\ker(S) \rightarrow F$  el operador

inducido por  $S$ . Dado que  $\bar{S} \circ q = S$  y  $\mathcal{A}^{\text{sur}}$  es suryectivo, tenemos que  $\bar{S} \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(G/\ker(S), F)$  con  $\|\bar{S}\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} = \|S\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}}$ . Puesto que  $T$  y  $\bar{S}$  son lineales,  $\bar{S}$  es inyectivo y  $T = \bar{S} \circ (q \circ f)$ , se tiene que  $q \circ f$  es lineal, con  $\|q \circ f\| \leq \text{Lip}(f)$ . Por consiguiente,  $T \in \mathcal{A}^{\text{sur}}(E, F)$  y

$$\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} \leq \|\bar{S}\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} \|q \circ f\| \leq \|S\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} \text{Lip}(f).$$

Dado que la  $\mathcal{A}^{\text{sur}} \circ \text{Lip}_0$ -factorización de  $T$  era arbitraria, se tiene que  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{sur}}} \leq \|T\|_{(\mathcal{A}^{\text{sur}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}}$ .

Para el ítem b), tomemos un operador lineal  $T \in \mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0(E, F)$ . Como su linealización  $L_T \in \mathcal{A}^{\text{dual}}(\mathcal{A}(E), F)$  con  $\|L_T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}}} = \|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0}$ , tenemos que  $L'_T \in \mathcal{A}(F', E^\#)$  con  $\|L'_T\|_{\mathcal{A}} = \|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0}$ . Además, al ser  $T$  lineal, su linealización es  $L_T = T \circ \beta_E$  y por ende  $L'_T = \beta'_E \circ T'$ . Dado que  $\beta'_E: E' \rightarrow E^\#$  es la inclusión canónica, y, por [38, Theorem 2] existe una proyección lineal  $P: E^\# \rightarrow E'$  de norma 1, tenemos que  $P \circ \beta'_E = \text{Id}_{E'}$ , por lo que  $T' = P \circ \beta'_E \circ T' = P \circ L'_T$ . Deducimos que  $T' \in \mathcal{A}(F', E')$  con  $\|T'\|_{\mathcal{A}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0}$  o, equivalentemente,  $T \in \mathcal{A}^{\text{dual}}(E, F)$  con  $\|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}}} \leq \|T\|_{\mathcal{A}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0}$ . □

Recordemos que para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$  se tiene que  $\mathcal{A}^{\text{max}} = \mathcal{A}^{\text{max dual dual}}$  [23, Corollary 4]. Luego, aplicando el ítem b) de la proposición anterior a  $\mathcal{A}^{\text{max dual}}$  recobramos [57, Proposition 3.3] enunciado debajo, pero con una demostración diferente.

**Corolario 3.6.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{A}^{\text{max}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\text{max}}.$$

En la demostración del ítem (a) de la proposición anterior vimos que si un operador  $T$  se puede factorizar como  $T = S \circ f$  con  $S$  lineal y  $f$  Lipschitz, entonces podemos obtener una factorización lineal de  $T$  como  $T = \bar{S} \circ (q \circ f)$ . Como consecuencia, obtenemos

**Corolario 3.7.** *Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach suryectivo e  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach. Entonces*

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A} \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}).$$

Denotemos  $\text{LLP}$  a la clase de espacios de Banach con la propiedad LLP. Por [57, Theorem 3.7], se tiene que  $\text{op}(\text{LLP})$ , la clase de operadores que se factorizan linealmente a través de un espacio con la LLP, es un ideal de Banach. El siguiente ejemplo, que se puede encontrar en [57, Theorem 3.8] muestra que  $\text{op}(\text{LLP})$  no es extendido por  $\text{op}(\text{LLP}) \circ \text{Lip}_0$

**Ejemplo 3.8.** Fijemos un espacio de Banach  $E$  sin la LLP. Puesto que la linealización de la identidad de  $E$ ,  $\text{Id}_E$ , es el operador baricéntrico  $\beta_E: \mathcal{A}(E) \rightarrow E$ , que está en  $\text{op}(\text{LLP})(\mathcal{A}(E), E)$  ya que  $\mathcal{A}(E)$  tiene la LLP, tenemos que  $\text{Id}_E \in (\text{op}(\text{LLP}) \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, E)$ . Afirmamos que  $\text{Id}_E \notin \text{op}(\text{LLP})(E, E)$ . Suponiendo lo contrario, existen  $G$  un espacio de Banach con la LLP y operadores  $S \in \mathcal{L}(E, G)$ ,  $R \in \mathcal{L}(G, E)$  tales que  $\text{Id}_E = R \circ S$ , de donde se sigue que  $E$  es isomorfo a un subespacio complementado de  $G$ , lo cual implica que  $E$  tiene la LLP, habiendo llegado así a una contradicción.

El ejemplo anterior, junto con la Proposición 3.2 nos que ningún ideal Lipschitz extiende a  $\text{op}(\text{LLP})$ . Es decir

**Proposición 3.9.** *No existe un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \text{op}(\text{LLP})$ .*

## 3.2 Extensiones de ideales de Banach a ideales Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte

Supongamos que un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  con la propiedad de ideal fuerte extiende a un ideal  $\mathcal{A}$ . Luego, análogamente a la Proposición 3.2, tenemos

$$\mathcal{A} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}.$$

Luego, tenemos

**Proposición 3.10.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach,  $E$  y  $F$  espacios de Banach. Existe un ideal Lipschitz  $\mathcal{I}$  con la propiedad de ideal fuerte tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$  si y sólo si  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$ .*

A diferencia de los ideales Lipschitz de composición, hay ciertos ideales de Banach que no son extendidos por ideales Lipschitz con la propiedad fuerte a pesar de que el dominio sea separable. Este es el caso del ideal  $\text{op}(\ell_\infty)$ , los operadores que se factorizan linealmente a través de  $\ell_\infty$ . El siguiente ejemplo muestra que  $\text{op}(\ell_\infty)(c_0, c_0) \neq (\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\ell_\infty) \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(c_0, c_0)$  y, aplicando la proposición anterior, ningún ideal Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte lo extiende.

**Ejemplo 3.11.** Dado que  $c_0$  no está complementado en  $\ell_\infty$ , tenemos que  $Id_{c_0} \notin \text{op}(\ell_\infty)(c_0, c_0)$ . Por otro lado, por [11, Example 1.5]  $c_0$  es un retracto Lipschitz de  $\ell_\infty$ , es decir existe una función Lipschitz  $r: \ell_\infty \rightarrow c_0$  Lipschitz tal que  $r|_{c_0} = Id_{c_0}$ . De modo que por el ítem (b) de la Proposición 1.26,  $Id_{c_0} \in \text{Lip}_0 \circ \text{op}(\ell_\infty) \circ \text{Lip}_0(c_0, c_0)$ . Por lo tanto,  $(\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\ell_\infty) \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(c_0, c_0) \neq \text{op}(\ell_\infty)(c_0, c_0)$ .

**Proposición 3.12.** *No existe un ideal Lipschitz de Banach con la propiedad de ideal fuerte  $\mathcal{I}$  tal que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L} = \text{op}(\ell_\infty)$ .*

El primer ejemplo que daremos de un ideal de Banach que es extendido por un ideal Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte no necesita resultados previos. Dados espacios de Banach  $E$  y  $F$ , debido a que un operador Lipschitz aplica conjuntos compactos en compactos, es inmediato que la imagen de  $B_E$  por toda función Lipschitz en  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0(E, F)$  es relativamente compacta en  $F$ . En particular, obtenemos la igualdad

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{K}.$$

Lamentablemente, este argumento no se puede utilizar en general con ideales suryectivos ya que, por lo general, operadores Lipschitz no preservan ciertas propiedades de conjuntos. Como muestra el siguiente ejemplo, operadores Lipschitz no necesariamente aplican conjuntos débiles compactos en débiles compactos.

**Ejemplo 3.13.** Fijemos  $1 < p < \infty$  y consideremos la función  $f: \ell_p \rightarrow c_0$  dada por

$$f((x_k)_{k \in \mathbb{N}}) = (\| (x_k)_{k \geq 1} \|_p, \| (x_k)_{k \geq 2} \|_p, \| (x_k)_{k \geq 3} \|_p, \dots).$$

Dadas  $x = (x_k)$  e  $y = (y_k)$  en  $\ell_p$ , tenemos que

$$\|f(x) - f(y)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \|(x_k)_{k \geq n}\|_p - \|(y_k)_{k \geq n}\|_p \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(x_k - y_k)_{k \geq n}\|_p = \|x - y\|_p.$$

Luego  $f$  es Lipschitz,  $f(0) = 0$  y como  $\ell_p$  es reflexivo, tenemos que  $f = f \circ Id_{\ell_p} \in \text{Lip}_0 \circ \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0(\ell_p, c_0)$ . Considerando la sucesión de vectores canónicos  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en  $\ell_p$ , se tiene que  $f(e_n) = \sum_{i=1}^n e_i$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Como el dual de  $c_0$  es  $\ell_1$ , que es separable, todo subconjunto acotado de  $c_0$  con la topología débil es metrizable, y por ende,  $f(B_{\ell_p})$  no puede ser relativamente débil compacto, ya que contiene a la sucesión  $(\sum_{i=1}^n e_i)_{n \in \mathbb{N}}$ , que no tiene subsucesiones débilmente convergentes.

El resultado [33, Theorem 1] de Johnson, Maurey y Schechtman muestra que si un operador lineal de un espacio de Banach a un espacio dual tiene una factorización Lipschitz vía un tercer espacio de Banach, bajo ciertas condiciones se puede conseguir una factorización lineal del operador vía el mismo espacio. Aquí, con las herramientas de los capítulos anteriores, probaremos una versión refinada de este resultado. La demostración es similar, pero con las modificaciones necesarias.

**Teorema 3.14.** *Sean  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  ideales Lipschitz de Banach invariantes por traslaciones con  $\mathcal{J}$  maximal y sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach. Supongamos que  $T: E \rightarrow F'$  es un operador lineal que se puede factorizar a través de un espacio de Banach  $G$  en la forma  $T = f \circ g$  con  $f \in \mathcal{J}(G, F')$  y  $g \in \mathcal{I}(E, G)$  tal que  $g$  es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in E$ ,  $Dg(x_0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, G)$  y  $\|Dg(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Entonces existe  $R \in \mathcal{J} \cap \mathcal{L}(G, F')$  con  $\|R\|_{\mathcal{J} \cap \mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$  tal que  $T = R \circ Dg(x_0)$ .*

*Demostración.* Notemos primero que podemos suponer que  $x_0 = 0$ . En efecto, dado que  $T$  es lineal, tenemos que  $T = f^{g(x_0)} \circ g^{x_0}$  y como  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  son invariantes por traslaciones,  $f^{g(x_0)} \in \mathcal{J}(G, F')$  y  $g^{x_0} \in \mathcal{I}(E, G)$  con  $\|f^{g(x_0)}\|_{\mathcal{J}} = \|f\|_{\mathcal{J}}$  y  $\|g^{x_0}\|_{\mathcal{I}} = \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Al ser  $g$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$ ,  $g^{x_0}$  Gateaux diferenciable en 0 con  $Dg^{x_0}(0) = Dg(x_0)$ . Es decir, conseguimos una factorización de  $T$  como en el enunciado con la función Lipschitz Gateaux diferenciable en 0.

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definamos  $f_n(x) = nf(\frac{x}{n})$  para  $x \in G$  y  $g_n(x) = ng(\frac{x}{n})$  para  $x \in E$ . Si  $\tau_n$  es el operador lineal multiplicar por  $n$ , entonces  $f_n = \tau_n \circ f \circ \tau_n^{-1}$ , con lo que  $f_n \in \mathcal{J}(G, F')$  y  $\|f_n\|_{\mathcal{J}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$ . Análogamente,  $g_n \in \mathcal{I}(E, G)$  y  $\|g_n\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Por linealidad de  $T$ , tenemos que  $T = f_n \circ g_n$ . Por hipótesis,  $Dg(0) \in \mathcal{I}(E, G)$  con  $\|Dg(0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}}$ . Sea  $\mathcal{U}$  ultrafiltro no trivial en  $\mathbb{N}$ . Dado que la sucesión  $(f_n)_n$  es acotada en  $\mathcal{J}(G, F')$ , que es un espacio dual en virtud del Teorema de Representación Maximal 1.52, por el Teorema de Banach-Alaoglu existe  $\tilde{f} \in \mathcal{J}(G, F')$  de norma  $\|\tilde{f}\|_{\mathcal{J}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$  tal que  $\tilde{f} = w^*\text{-}\lim_{\mathcal{U}} f_n$ , con respecto a la  $w^*$ -topología inducida por el predual tensorial de  $\mathcal{J}(G, F')$ . En particular, para  $y \in G$  y  $z \in F$ ,  $\tilde{f}(y)(x) = \lim_{\mathcal{U}} f_n(x)(y)$ . Luego, como para cada  $x \in E$ ,  $g_n(x)$  converge a  $Dg(0)(x)$ , tenemos que para  $x \in E$  y  $z \in F$

$$\begin{aligned} \left| \left( (T - \tilde{f} \circ Dg(0)) (x)(y) \right) \right| &= \left| \left( f_n \circ g_n - \tilde{f} \circ Dg(0) \right) (x)(y) \right| \\ &\leq \left| (f_n \circ g_n - f_n \circ Dg(0)) (x)(y) \right| + \left| (f_n \circ Dg(0) - \tilde{f} \circ Dg(0)) (x)(y) \right| \\ &\leq \|y\| \|f_n\|_{\mathcal{J}} \|g_n - Dg(0)(x)\| + |(f_n - \tilde{f})(Dg(0)(x))(y)|. \end{aligned}$$

Luego tomando límite por el ultrafiltro  $\mathcal{U}$ , se obtiene que  $T = \tilde{f} \circ Dg(0)$ . Denotando  $G_0 := \overline{\text{Im}(Dg(0))}$ , tenemos que  $\tilde{f}|_{G_0}$  es lineal. Por el Teorema 2.16 existe  $R \in \mathcal{J} \cap \mathcal{L}(G, F')$  con  $\|R\|_{\mathcal{J} \cap \mathcal{L}} \leq \|\tilde{f}\|_{\mathcal{J}} \leq \|f\|_{\mathcal{J}}$  y  $R \circ Dg(0) = T$ . En particular,  $T \in (\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})(E, F')$  y  $\|T\|_{(\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})} \leq \|f\|_{\mathcal{J}} \|g\|_{\mathcal{I}}$ .  $\square$

Mirando el resultado anterior en el lenguaje de ideales, y relajando un poco las hipótesis, tenemos

**Teorema 3.15.** *Sean  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  ideales Lipschitz de Banach invariantes por traslaciones con  $\mathcal{J}$  maximal,  $E$  espacio de Banach tal que para todo operador Lipschitz  $f$  en  $\mathcal{I}(E, \cdot)$  y  $\varepsilon > 0$  existe un punto de Gateaux diferenciable  $x_0$  de  $f$  tal que  $Df(x_0) \in \mathcal{I}$  con  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{\mathcal{I}}$ . Para todo espacio de Banach  $F$ , se tiene que*

$$(\mathcal{J} \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L}(E, F') = (\mathcal{J} \cap \mathcal{L}) \circ (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})(E, F'). \quad (3.1)$$

**Observación 3.16.** Vale la pena remarcar que en los Teoremas 3.14 y 3.15, el ideal  $\mathcal{I}$  puede reemplazarse por una clase de operadores Lipschitz que no sea un ideal. En efecto, el único requisito que se le pide a la función que este involucrada en la factorización del operador lineal que pertenezca a  $\mathcal{I}$  que de conocer como es su operador diferencial. Sin embargo, preferimos enunciar los teoremas de esa manera ya que, en todos los ejemplos que utilizaremos, vamos a considerar ideales Lipschitz tal que si una función pertenece al ideal y es Gateaux diferenciable en un punto, entonces el operador diferencial está en el mismo ideal.

El resultado anterior, muestra que bajo ciertas hipótesis, si un operador lineal tiene una factorización Lipschitz con funciones en ideales  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$ , entonces tiene una factorización lineal con operadores en los mismos ideales.

### Ejemplos 3.17.

1. Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach y  $E$  un espacio de Banach separable. Como comentamos en la Proposición 2.6, todo operador Lipschitz en  $\mathcal{A}^{\min} \circ \text{Lip}_0(E, \cdot)$  satisface la hipótesis de diferenciable del Teorema 3.15. Aplicándolo al ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\min} \circ \text{Lip}_0 = \text{Lip}_0 \circ (\mathcal{A}^{\min} \circ \text{Lip}_0)$ , tenemos que para todo espacio de Banach separable  $E$  y todo espacio de Banach  $F$ ,

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\min} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F') = \mathcal{A}^{\min}(E, F').$$

En particular, como  $\mathcal{A}^{\min} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{A} \circ \overline{\mathcal{F}}$ , obtenemos que la siguiente factorización Lipschitz de un operador implica la factorización lineal.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F' \\
 \text{Lip}_0 \downarrow & & \uparrow \text{Lip}_0 \\
 G_1 & \xrightarrow{\mathcal{A}^{\min}} & G_2 \\
 \overline{\mathcal{F}} \downarrow & & \uparrow \overline{\mathcal{F}} \\
 G_3 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & G_4
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{T} & F' \\
 \overline{\mathcal{F}} \downarrow & & \uparrow \overline{\mathcal{F}} \\
 G_3 & \xrightarrow{\mathcal{A}} & G_4
 \end{array}$$

El caso particular cuando el ideal  $\mathcal{A}$  son los operadores  $p$ -nucleares fue obtenido en [19, Theorem 2.1].

2. En el caso que  $\mathcal{A}$  son los operadores aproximables se puede mejorar un poco el resultado anterior. En efecto, si  $T \in \text{Lip}_0 \circ \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0(E, F)$ , considerando la inclusión en el bidual, tenemos que  $k_F \circ T \in \text{Lip}_0 \circ \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0(E, F'')$ . Aplicando el ejemplo anterior, en el caso que  $E$  es separable, obtenemos que  $k_F \circ T \in \overline{\mathcal{F}}(E, F'')$  y, por ende, al ser  $\overline{\mathcal{F}}$  regular, tenemos que  $T \in \overline{\mathcal{F}}(E, F)$ . Es decir, para espacios de Banach  $E$  y  $F$  con  $E$  separable se tiene que  $(\text{Lip}_0 \circ \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \overline{\mathcal{F}}(E, F)$ . Además, por [30, Proposition 8.2], sabemos que un operador  $T \in \overline{\mathcal{F}}(E, F)$  si y sólo para todo subespacio  $E_0 \subset E$  separable,  $T|_{E_0}$  es aproximable. Combinando esto con lo anterior, tenemos que

$$(\text{Lip}_0 \circ \overline{\mathcal{F}} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \overline{\mathcal{F}}.$$

3. Si  $\mathcal{A}$  es cualquiera de los ideales  $\mathcal{W}$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_p$ ,  $\mathcal{QN}_p$ , como comentamos debajo de la Proposición 2.6, todo operador en  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0(E, \cdot)$ , cuando  $E$  es separable, satisface la hipótesis de diferenciabilidad del Teorema 3.15, y como  $\mathcal{A}$  es regular, para todo espacio de Banach  $F$  se tiene que

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F).$$

En particular, en el ejemplo anterior mostramos que  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{W}$ . Este resultado lo podemos comparar con el Ejemplo 3.13, donde exhibimos un operador Lipschitz en el ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0$  que no manda conjuntos acotados en conjuntos relativamente débiles compactos. Pero, si la función en el ideal es lineal, entonces es un operador débil compacto y, por ende, manda conjuntos acotados en conjuntos relativamente débiles compactos.

Para obtener resultados similares a los del Ejemplo 3.17 cuando consideramos un ideal de Banach maximal, necesitaremos la siguiente consecuencia del Teorema 3.15.

**Proposición 3.18.** *Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz de Banach maximal e invariante por traslaciones. Supongamos que para todo espacio de dimensión finita  $M$ , todo operador Lipschitz  $f$  en  $\mathcal{I}(M, \cdot)$  es Gateaux diferenciable en algún punto. Entonces*

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L} = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \cap \mathcal{L} = \mathcal{I} \cap \mathcal{L}.$$

*Demostración.* Puesto que

$$\mathcal{I} \cap \mathcal{L} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L} \subseteq (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \cap \mathcal{L},$$

basta con probar que los ideales de Banach  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  y  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \cap \mathcal{L}$  coinciden. Notar que, al ser  $\mathcal{I}$  maximal, por las Proposiciones 1.35 y 1.44  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  y  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I})^{\text{reg}} \cap \mathcal{L}$  son ideales de Banach maximales. Así es suficiente con demostrar que para espacios  $M$  y  $N$  de dimensión finita, se tiene que  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}(M, N) = (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L}(M, N)$ . Por hipótesis, todo operador Lipschitz  $f$  en  $\mathcal{I}(M, \cdot)$  es Gateaux diferenciable en algún punto  $x_0 \in M$ , y, al ser  $\mathcal{I}$  maximal, por el Teorema 2.13 se tiene que  $Df(x_0) \in \mathcal{I}$  con  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Aplicando el Teorema 3.15 a la composición  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}(M, N)$ , obtenemos que  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{I}) \cap \mathcal{L}(M, N) = \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(M, N)$ , como requeríamos.  $\square$

**Corolario 3.19.** *Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach tal que todo operador Lipschitz en  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  definido en un espacio de dimensión finita es Gateaux diferenciable en algún punto. Entonces*

$$(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\max} \quad \text{y} \quad (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\max}.$$

*Demostración.*  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  es maximal e invariante por traslaciones por las Proposiciones 1.43 y 2.8. Además, por el Corolario 3.6,  $(\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\max}$ . Aplicando la proposición anterior, se obtiene la conclusión deseada.  $\square$

Si  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach tal que todo operador en  $\mathcal{A}^{\max}$  se factoriza linealmente través de un espacio reflexivo (o más generalmente, a través de un espacio con la propiedad de Radon-Nikodým), entonces  $\mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0$  satisface la hipótesis del corolario anterior. En efecto, sean  $M$  y  $F$  espacios de Banach, con  $M$  de dimensión finita, y sea  $f \in \mathcal{A}^{\max} \circ \text{Lip}_0(M, F)$ . Entonces existen  $G$  espacio de Banach,  $g \in \text{Lip}_0(M, G)$  y  $T \in \mathcal{A}^{\max}(G, F)$  tales que  $f = T \circ g$ . Por hipótesis sobre  $\mathcal{A}^{\max}$ , existe un espacio de Banach  $G_1$  con la propiedad de Radon-Nikodým y  $R \in \mathcal{L}(G, G_1)$ ,  $S \in \mathcal{L}(G_1, F)$  tales que  $T = S \circ R$ , y por lo tanto  $f = S \circ (R \circ g)$ . Como  $R \circ g$  es un operador Lipschitz de un espacio de dimensión finita a un espacio con la propiedad de Radon-Nikodým, por el Teorema 2.5 es Gateaux diferenciable en un punto  $x_0 \in M$ , y como  $S$  es lineal,  $f = S \circ (R \circ g)$  es también Gateaux diferenciable en  $x_0$ .

**Ejemplos 3.20.** Si consideramos los ideales de Banach maximales  $\Pi_p$  y  $\Pi_p^{\text{dual}}$  o, mas en general  $\Pi_{p,\sigma}$  y  $\Pi_{p,\sigma}^{\text{dual}}$ , con  $1 \leq p < \infty$  y  $0 \leq \sigma < 1$ ,  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$  con  $1 \leq p, q < \infty$   $0 \leq \sigma, \eta < 1$  y  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ ,  $\mathcal{I}_p$  con  $1 \leq p < \infty$  y  $\mathcal{L}_p$  con  $1 < p < \infty$ , como cada uno de estos está contenido en el ideal de operadores débiles compactos,  $\mathcal{W}$ , todos satisfacen las hipótesis del Corolario 3.19, por ende, todos estos ideales tienen una extensión a ideal Lipschitz con la propiedad fuerte. En particular

1. En el caso del ideal de operadores  $p$ -factoreables  $\mathcal{L}_p$  con  $1 < p < \infty$ , por la Proposición 1.46 y el hecho de que  $\text{op}(\mathbb{L}_p)$  es ultraestable tenemos que  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{L}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} = (\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$  que, como vimos en el Ejemplo 1.16, es el ideal de operadores Lipschitz  $p$ -factoreables introducido por Johnson, Maurey y Schechtman. Luego  $(\text{Lip}_0 \circ \text{op}(\mathbb{L}_p) \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_p$ , recobrando el resultado obtenido en [33].
2. Para el ideal de los operadores  $p$ -integrales,  $1 \leq p < \infty$ , recobramos el resultado de Farmer y Johnson [26, Section 4] que todo operador lineal Lipschitz  $p$ -integral es  $p$ -integral.

Los ejemplos que vimos hasta ahora son en relación al ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$ . Para otros casos, tenemos

**Proposición 3.21.** *Sea  $E$  un espacio de Banach separable y  $F$  un espacio de Banach. Sea  $\mathcal{I}$  un ideal Lipschitz maximal invariante por traslaciones. Entonces*

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \mathcal{K}(E, F) \quad \text{e} \quad (\mathcal{I} \circ \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \mathcal{W}(E, F).$$

*Demostración.* Sea  $T \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F)$ . Luego  $k_F \circ T \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F'')$  y como los ideales  $\mathcal{K} \circ \text{Lip}_0$  y  $\mathcal{W} \circ \text{Lip}_0$  satisfacen la hipótesis de diferenciabilidad del Teorema 3.15

si el dominio es separable, son invariantes por traslaciones, y por la Proposición 3.5 extienden a  $\mathcal{K}$  y  $\mathcal{W}$  respectivamente, al ser  $\mathcal{I}$  maximal e invariante por traslaciones, aplicando el Teorema 3.15, tenemos que  $k_F \circ T \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \mathcal{K}(E, F'')$ . Por la Proposición 1.35,  $\mathcal{I} \cap \mathcal{L}$  es maximal y por lo tanto es regular. Como  $\mathcal{K}$  es inyectivo, por [43, Lemma 2.1]  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \mathcal{K}$  es regular, lo que implica que  $T \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{L}) \circ \mathcal{K}(E, F)$ . La otra igualdad se demuestra de forma análoga.  $\square$

La proposición anterior muestra que las siguientes factorizaciones Lipschitz de un operador lineal implica la factorización lineal

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \mathcal{K} \circ \text{Lip}_0 \searrow & & \nearrow \mathcal{I} \\ & G & \end{array} & \Longrightarrow & \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \mathcal{K} \searrow & & \nearrow \mathcal{I} \cap \mathcal{L} \\ & G & \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0 \searrow & & \nearrow \mathcal{I} \\ & G & \end{array} & \Longrightarrow & \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \mathcal{W} \searrow & & \nearrow \mathcal{I} \cap \mathcal{L} \\ & G & \end{array}
 \end{array}$$

Notemos que todos los operadores de los ideales de Banach  $\mathcal{A}$  de los Ejemplos 3.17 y Ejemplos 3.20 son débiles compactos. Esto implica que  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  y  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  son ideales distintos. En efecto, si ambos ideales coincidieran, por la Proposición 1.9,  $Id_{\mathbb{A}(\mathbb{R})} \in (\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(\mathbb{A}(\mathbb{R}), \mathbb{A}(\mathbb{R}))$  y por ende sería un operador débil compacto. Luego,  $\mathbb{A}(\mathbb{R}) = L_1(\mathbb{R})$  sería reflexivo, lo cual no es verdadero. Por otro lado, cuando  $E$  es separable, por la Proposición 3.4,  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}(E, F)$ . Por lo tanto, en estos casos,  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  y  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  son ideales distintos que extienden al mismo ideal de Banach, cuando el dominio es separable. Lo mismo ocurre en el caso de los operadores 1-factoreables que, a pesar de no ser un ideal contenido en  $\mathcal{W}$ ,  $\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0$  no es de composición. Esto lo habíamos mencionado debajo del Corolario 1.11. Ahora estamos listos para demostrarlo.

**Proposición 3.22.**  $\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0$  no es de composición.

*Demostración.* Supongamos que fuera de composición. Entonces, por la Proposición 1.15,  $(\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$  es de composición. Como vimos en Ejemplos 3.20, este es el ideal de operadores 1-factoreables de Johnson, Maurey y Schechtman. Como  $Id_{\mathbb{R}^2} \in \text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  al ser un operador de rango finito, por la propiedad de ideal fuerte  $\delta_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$  pertenece a  $(\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$ , y como éste es de composición, tenemos que  $Id_{\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)}$  (la linealización de  $\delta_{\mathbb{R}^2}$ ) pertenece a  $(\text{Lip}_0 \circ \mathfrak{L}_1 \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}} \cap \mathcal{L}$  en virtud de la Proposición 1.4, que coincide con  $\mathfrak{L}_1$  por [33, Corollary 3]. Por lo tanto, la inclusión  $k_{\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)}: \mathbb{A}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{A}(\mathbb{R}^2)''$  se factoriza linealmente a través de un espacio  $L_1$ , lo cual implica que  $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2)$  es isomorfo a un subespacio de un espacio  $L_1$ , que contradice un resultado de Naor y Schechtman [42], que también puede ser encontrado en [20, Remark 4.2].  $\square$

A lo largo de esta sección, vimos varias instancias en las que, dada una factorización Lipschitz de un operador lineal, bajo hipótesis de diferenciabilidad, se puede obtener una factorización lineal del operador. El siguiente resultado, que es otra forma de expresar parte del Teorema

2.23, muestra que si un operador lineal  $T: E \rightarrow F'$  se puede factorizar a través de  $\ell_\infty(B_{E'})$  vía dos funciones Lipschitz, entonces, sin hipótesis de diferenciabilidad, se puede factorizar linealmente través de  $\ell_\infty(B_{E'})$ . Es decir

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F' \\ & \searrow \text{Lip}_0 & \nearrow \mathcal{I} \\ & \ell_\infty(B_{E'}) & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F' \\ & \searrow \mathcal{L} & \nearrow \mathcal{I} \cap \mathcal{L} \\ & \ell_\infty(B_{E'}) & \end{array}$$

**Proposición 3.23.** Sean  $E$  y  $F$  espacios de Banach,  $T: E \rightarrow F'$  un operador lineal,  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach maximal e invariante por traslaciones. Supongamos que existen  $f \in \text{Lip}_0(E, \ell_\infty(B_{E'}))$  y  $g \in \mathcal{I}(\ell_\infty(B_{E'}), F')$  tales que  $T = g \circ f$ . Entonces existen operadores  $S \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty(B_{E'}))$  y  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{E'}), F')$  tales que  $T = R \circ S$  y  $\|R\|_{\mathcal{I}} \|S\| \leq \text{Lip}(f) \|g\|_{\mathcal{I}}$ .

*Demostración.* Sea un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F')$  como en el enunciado y consideremos  $J_E: E \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$  la inclusión canónica. Así, podemos considerar a  $E$  como un subespacio de  $\ell_\infty(B_{E'})$  con la inclusión  $J_E$ . Como  $\ell_\infty(B_{E'})$  es un espacio Lipschitz inyectivo, existe un operador Lipschitz  $\tilde{f}: \ell_\infty(B_{E'}) \rightarrow \ell_\infty(B_{E'})$  con  $\text{Lip}(\tilde{f}) = \text{Lip}(f)$  tal que  $f = \tilde{f} \circ J_E$ . Entonces  $g \circ \tilde{f} \in \mathcal{I}(\ell_\infty(B_{E'}), F')$  es una extensión de  $T$ . Al ser  $\mathcal{I}$  maximal e invariante por traslaciones, aplicando el Teorema 2.16, existe un operador  $R \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{E'}), F')$  con  $\|R\|_{\mathcal{I}} \leq \|g \circ \tilde{f}\|_{\mathcal{I}} \leq \|g\|_{\mathcal{I}} \text{Lip}(f)$  tal que  $R \circ J_E = T$ .  $\square$

### 3.3 Extensiones de ideales de Banach inyectivos a ideales Lipschitz inyectivos

Si  $\mathcal{I}$  es un ideal Lipschitz de Banach, entonces  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L}$  y  $\mathcal{I}^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}$  son ideales de Banach inyectivos por la Proposición 1.29 y, en virtud del Ejemplo 1.30, pueden ser distintos. En el caso de  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$ , se tiene la igualdad  $\mathcal{I}^{\text{inj}} \cap \mathcal{L} = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})^{\text{inj}}$ , de manera que si  $\mathcal{I}$  extiende a un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{I}^{\text{inj}}$  extiende a  $\mathcal{A}^{\text{inj}}$ .

Si  $\mathcal{A}$  es un ideal de Banach inyectivo, entonces  $\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$  es inyectivo y extiende a  $\mathcal{A}$  si el dominio es separable. Con respecto a la cuestión de si  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$  extiende a  $\mathcal{A}$ , nos apoyamos en lo siguiente resultado.

**Proposición 3.24.** Sean  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach y  $E, F$  espacios de Banach tales que  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, \ell_\infty(B_{F'})) = \mathcal{A}(E, \ell_\infty(B_{F'}))$ . Entonces  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{A}^{\text{inj}}(E, F)$ .

*Demostración.* Como  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}$  es un ideal de Banach inyectivo por la Proposición 1.29 y contiene a  $\mathcal{A}$ , se tiene que  $\mathcal{A}^{\text{inj}} \subseteq (\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}$ . Para la inclusión reversa, sea  $T: E \rightarrow F$  un operador lineal en  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}(E, F)$ . Por la Proposición 1.19, el operador  $J_F \circ T: E \rightarrow \ell_\infty(B_{F'})$  pertenece a  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L}(E, \ell_\infty(B_{F'}))$ , que por hipótesis coincide con  $\mathcal{A}(E, \ell_\infty(B_{F'}))$ . Luego,  $T \in \mathcal{A}^{\text{inj}}(E, F)$ .  $\square$

**Corolario 3.25.** Sea  $\mathcal{A}$  un ideal de Banach maximal tal que todo operador en  $\mathcal{A}$  se factoriza linealmente a través de un espacio con la propiedad de Radon-Nikodým. Entonces

$$(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\text{inj}}.$$

*Demostración.* Por lo comentado debajo del Corolario 3.19,  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}$ . Aplicando la proposición anterior, obtenemos que  $(\mathcal{A} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L} = \mathcal{A}^{\text{inj}}$ .  $\square$

### Ejemplos 3.26.

1. Sea  $1 \leq p < \infty$  y consideremos  $\Pi_p$ , el ideal de Banach de operadores  $p$ -sumantes. Por el Ejemplo 1.22 en combinación con el ítem (c) de la Proposición 1.20 y la Proposición 1.15, se tiene que  $\Pi_p^L = (\Pi_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}}$ . Ya que  $\Pi_p$  es maximal, inyectivo y todo operador  $p$ -sumante se factoriza linealmente a través de un espacio reflexivo, aplicando el corolario previo obtenemos el resultado de Farmer y Johnson [26, Theorem 2] de que  $\Pi_p^L \cap \mathcal{L} = \Pi_p$ .
2. Sea  $1 < p < \infty$  y consideremos  $\mathfrak{L}_p$ , el ideal de Banach de operadores  $p$ -factoreables. Por el corolario anterior,  $(\mathfrak{L}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L} = \mathfrak{L}_p^{\text{inj}}$ . En particular, con  $p = 2$ , como  $\mathfrak{L}_2^{\text{inj}} = \mathfrak{L}_2$ , obtenemos que el ideal de operadores Lipschitz que se factorizan a través de un subconjunto de un espacio de Hilbert estudiado por Chávez-Domínguez y mencionado en el Ejemplo 1.25, extiende a  $\mathfrak{L}_2$ .
3. Sea  $E$  y  $F$  espacios de Banach, con  $E$  separable. Como los ideales  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{W}$  y  $\mathcal{QN}_p$  son inyectivos, aplicando la Proposición 3.24 en combinación con el ítem 3) de Ejemplos 3.17, tenemos  $(\mathcal{K} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{K}(E, F)$ ,  $(\mathcal{W} \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$  y  $(\mathcal{QN}_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}} \cap \mathcal{L}(E, F) = \mathcal{QN}_p(E, F)$ .

Dado un ideal Lipschitz de Banach  $\mathcal{I}$  y  $0 \leq \sigma < 1$ , consideremos ahora el ideal Lipschitz inyectivo  $\mathcal{I}_\sigma$ , de la Definición 1.55. Recordemos que para  $\sigma = 0$ ,  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}^{\text{Linj}}$ , por lo que, en vista de los resultados anteriores, es natural preguntarse si  $\mathcal{I}_\sigma$  extiende a  $\mathcal{A}_\sigma$  sabiendo que  $\mathcal{I}$  extiende a un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ . Para estos casos, tenemos el siguiente resultado, que para el caso en que  $\mathcal{I}$  es de composición y  $\sigma = 0$ , se puede comparar con el Corolario 3.25.

**Proposición 3.27.** *Sean  $\mathcal{I}$  ideal Lipschitz de Banach y  $E$  espacio de Banach. Supongamos que para toda función  $f \in \mathcal{I}(E, \cdot)$  existe  $x_0 \in E$  tal que  $f$  es Gateaux diferenciable en  $x_0$  y  $Df(x_0) \in \mathcal{I}$  con  $\|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}$ . Entonces para todo  $0 \leq \sigma < 1$  y todo espacio de Banach  $F$ , se tiene que*

$$\mathcal{I}_\sigma \cap \mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_\sigma(E, F).$$

*Demostración.* La inclusión  $(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_\sigma \subseteq \mathcal{I}_\sigma \cap \mathcal{L}$  es inmediata a partir de la definición de los ideales involucrados. Tomemos ahora un operador lineal  $T: E \rightarrow F$  en  $\mathcal{I}_\sigma(E, F)$ , y sean  $G$  un espacio de Banach y  $f \in \mathcal{I}(E, G)$  tales que para todo  $v_1, v_2 \in E$ , se tiene que

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq \|v_1 - v_2\|^\sigma \|f(v_1) - f(v_2)\|^{1-\sigma}.$$

Tomemos  $v_1 = x_0 + hv$ ,  $v_2 = x_0$ , con  $h$  real no nulo,  $v \in E$  y  $x_0$  punto de Gateaux diferenciable de  $f$  como en el enunciado. Con esta elección, y multiplicando a ambos lados de la desigualdad por  $\frac{1}{|h|}$ , se obtiene que

$$\|Tv\| \leq \|v\|^\sigma \left\| \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \right\|^{1-\sigma}.$$

Por lo tanto, haciendo  $h \rightarrow 0$ , tenemos que  $\|Tv\| \leq \|v\|^\sigma \|Df(x_0)v\|^{1-\sigma}$ . Puesto que  $Df(x_0) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{L}(E, G)$ , concluimos que  $T \in (\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_\sigma(E, F)$  con

$$\|T\|_{(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_\sigma} \leq \|Df(x_0)\|_{\mathcal{I}}^{1-\sigma} \leq \|f\|_{\mathcal{I}}^{1-\sigma}.$$

Tomando el ínfimo correspondiente, se tiene que  $\|T\|_{(\mathcal{I} \cap \mathcal{L})_\sigma} \leq \|T\|_{\mathcal{I}_\sigma}$ .  $\square$

**Ejemplo 3.28.** Dado  $1 \leq p < \infty$  y  $0 \leq \sigma < 1$ , se tiene que

$$\Pi_{p,\sigma}^L \cap \mathcal{L} = \Pi_{p,\sigma}.$$

En efecto, por lo comentado debajo de la Definición 1.55,  $\Pi_{p,\sigma}$  y  $\Pi_{p,\sigma}^L$  son maximales, y

$$\Pi_{p,\sigma}^L = (\Pi_p^L)_\sigma = ((\Pi_p \circ \text{Lip}_0)^{\text{Linj}})_\sigma = (\Pi_p \circ \text{Lip}_0)_\sigma.$$

Por otro lado, por la Proposición 1.35,  $\Pi_{p,\sigma}^L \cap \mathcal{L}$  es maximal. Así que para probar la igualdad deseada basta ver que para  $M$  y  $N$  de dimensión finita, se tiene que  $\Pi_{p,\sigma}^L \cap \mathcal{L}(M, N) = \Pi_{p,\sigma}(M, N)$ . Pues bien, tenemos que  $(\Pi_p \circ \text{Lip}_0) \cap \mathcal{L} = \Pi_p$  por el Corolario 3.6 y  $\Pi_p \circ \text{Lip}_0(M, N)$  cumple la hipótesis de diferenciabilidad de la Proposición 3.27. Por consiguiente,  $\Pi_{p,\sigma}^L \cap \mathcal{L} = \Pi_{p,\sigma}$ .

### 3.4 Extensiones Lipschitz del ideal de operadores lineales $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados a ideales Lipschitz

Para finalizar, exhibiremos diferentes ideales Lipschitz que extienden al ideal de Banach maximal de operadores  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominados. Recordemos que este ideal se puede describir como la composición

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}.$$

El espíritu del siguiente resultado es que conociendo distintas extensiones de  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  y de  $\Pi_{p,\sigma}$  obtenemos distintas extensiones de  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

**Proposición 3.29.** Sean  $1 \leq p, q < \infty$  y  $0 \leq \sigma, \eta < 1$  tales que  $\frac{1-\sigma}{p} + \frac{1-\eta}{q} \leq 1$ . Los siguientes ideales Lipschitz son extensiones de  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

- 1)  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$
- 2)  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$
- 3)  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$
- 4)  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$
- 5)  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L)^{\text{reg}}$
- 6)  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$
- 7)  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$
- 8)  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$

*Demostración.* Al ser  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$  maximal, una aplicación del Corolario 3.6, da que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$  extiende a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

Para ver que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L$  extiende a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ , notemos que como  $\Pi_{q,\eta}$  es inyectivo, se tiene que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  es suryectivo [46, Theorem 8.5.9]. Por otro lado, por el Ejemplo 3.28,  $\Pi_{p,\sigma}^L$  extiende a  $\Pi_{p,\sigma}$ . Por consiguiente, aplicando el Corolario 3.7 tenemos que

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L \cap \mathcal{L} = (\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma}^L) \cap \mathcal{L} = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ (\Pi_{p,\sigma}^L \cap \mathcal{L}) = \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \Pi_{p,\sigma} = \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}.$$

Ahora bien, si consideramos las inclusiones

$$\Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \Pi_{p,\sigma}^L$$

y componiendo con  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}$  a izquierda, obtenemos

$$\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0 \subseteq \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L. \quad (3.2)$$

Por ende,  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  también extiende a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ . Ya obtuvimos que los ideales en 1), 2) y 3) extienden a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

Como  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L \subseteq \mathcal{W} \circ \text{Lip}_0$ , todo operador en  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$ , y en particular todo operador en  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$ , tiene un punto de Gateaux diferenciabilidad si su dominio es finito-dimensional. Por la Proposiciones 1.58 y 1.43,  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  y  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$  son maximales. Además  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$  es invariante por traslaciones por la Proposición 2.8, y que  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  es invariante por traslaciones se puede ver directamente a partir de su Definición 1.54. Aplicando la Proposición 3.18 junto con los ítems 1) y 3), tenemos que  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$  y  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0)^{\text{reg}}$  por un lado y  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  y  $(\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L)^{\text{reg}}$  por otro extienden a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ .

Finalmente, componiendo con  $\text{Lip}_0$  a izquierda en (3.2) y usando que  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$  y  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  extienden a  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}$ , obtenemos que  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  también lo extiende.  $\square$

Podemos mostrar que la mayoría de los ideales mencionados en la proposición anterior son diferentes. Como todo ideal Lipschitz con la propiedad de ideal fuerte contiene a la isometría métrica  $\delta_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R})$  (porque  $\delta_{\mathbb{R}} = \delta_{\mathbb{R}} \circ \text{Id}_{\mathbb{R}}$ ), cuya linealización es  $\text{Id}_{L_1(\mathbb{R})}$ , y los ideales 1), 2) y 3) de la proposición anterior están contenidos en  $\mathcal{W} \circ \text{Lip}_0$ , deducimos que estos ideales no tienen la propiedad de ideal fuerte. Como los ideales 4) a 8) de la proposición anterior tienen la propiedad de ideal fuerte, los ideales 1), 2) y 3) son diferentes de los ideales 4) a 8).

Ahora miremos los ideales 1), 2) y 3). Quisiéramos ver que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  y  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}^L$  no son ideales de composición, que por la Proposición 1.4, equivale a decir que difieren de  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$ . Para ello, en virtud de la cadena de inclusiones (3.2) usada en la demostración anterior, basta con ver que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  es distinto de  $\mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)} \circ \text{Lip}_0$ . Supongamos que éstos dos ideales coinciden. Entonces la linealización de todo operador Lipschitz en  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  es un operador  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominada. Por otro lado, por la propiedad de ideal fuerte, el operador  $\delta_M: M \rightarrow \mathcal{A}(M)$  pertenece a  $\text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$  para todo espacio de dimensión finita  $M$ , y por ende, para todo operador lineal  $T \in \Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}(\mathcal{A}(M), F)$ , el operador Lipschitz  $f = T \circ \delta_M$ , cuya linealización es  $T$ , pertenece a  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_{p,\sigma} \circ \text{Lip}_0$ , con lo cual  $T$  es un operador  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominado. Por lo tanto, basta con ver que existe un operador

lineal en  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}} \setminus \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}(\mathcal{E}(M), F)$  para algún espacio finito-dimensional  $M$  y un espacio de Banach  $F$ . Para ello, puesto que  $\ell_1$  es complementado en  $\mathcal{E}(M)$  si  $M \neq \{0\}$  [20, Theorem 1], es suficiente con ver que  $\Pi_{q,\eta}^{\text{dual}}(\ell_1, F) \setminus \mathcal{D}_{(p,\sigma,q,\eta)}(\ell_1, F)$  es no vacío para algún espacio de Banach  $F$ . Para el caso  $\sigma = \eta = 0$ , tenemos

**Proposición 3.30.** *Sean  $1 \leq p, q < \infty$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$  con  $q > 2$ . Entonces los ideales  $\Pi_q^{\text{dual}} \circ \text{Lip}_0 \circ \Pi_p \circ \text{Lip}_0$  y  $\mathcal{D}_{p,q}^L$  no son de composición.*

*Demostración.* Sea  $2 \leq s < q$ . Por lo comentado anteriormente, basta con ver que  $\mathcal{D}_{p,q}(\ell_1, \ell_s)$  está estrictamente contenido en  $\Pi_q^{\text{dual}}$ . A tal fin, invocamos la noción de *limit order* (véase por ejemplo [46, 14.4]). El *limit order* de  $\Pi_q^{\text{dual}}$  se deduce aplicando [46, 14.4.7] a [46, 22.4.7]. Dado que el *limit order* de  $\Pi_q^{\text{dual}}$  es  $\frac{1}{q}$ , para cualquier  $\varepsilon > 0$  el operador diagonal  $T: \ell_1 \rightarrow \ell_s$  definido como  $T((\alpha_n)_n) = (n^{-(\frac{1}{q}+\varepsilon)}\alpha_n)$  pertenece a  $\Pi_q^{\text{dual}}(\ell_1, \ell_s)$ . Por otro lado, una aplicación de [23, 26.1] (véase [23, Exercise 26.2]) muestra que  $\mathcal{D}_{p,q}(\ell_1, \ell_s) = \mathcal{I}_1(\ell_1, \ell_s)$ , los operadores integrales de  $\ell_1$  a  $\ell_s$ . Entonces, usando [46, 22.4.6], tenemos que el *limit order* de  $\mathcal{D}_{p,q}(\ell_1, \ell_s)$  es  $\frac{1}{s}$ . Dado que  $\frac{1}{q} < \frac{1}{s}$ , tomando  $\varepsilon > 0$  tal que  $\frac{1}{q} + \varepsilon < \frac{1}{s}$ , deducimos que el operador  $T$  no pertenece a  $\mathcal{D}_{p,q}(\ell_1, \ell_s)$ .  $\square$

# Apéndice A

## Ideales de Banach

Este Apéndice recolecta varias definiciones y resultados sobre la teoría de ideales de operadores lineales de Banach en el sentido de Pietsch que utilizamos en este trabajo.

### Ideales cerrados

Comenzaremos con los ideales de Banach cerrados. El ideal de Banach de operadores aproximables,  $\overline{\mathcal{F}}$  está formado por los operadores que son límite de sucesiones de operadores de rango finito, en la norma usual de operadores. Los otros ideales de operadores cerrados que mencionaremos son los ideales de operadores compactos,  $\mathcal{K}$ , débiles compactos,  $\mathcal{W}$  y separables,  $\mathfrak{X}$ . Estos ideales están conformados por aquellos operadores lineales  $T: E \rightarrow F$  tales que  $T(B_E)$  es relativamente compacto, es débilmente relativamente compacto y separable, respectivamente.

Los ideales  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{W}$  y  $\mathfrak{X}$  son inyectivos y suryectivos [46, Propositions 4.6.12, 4.7.12], mientras que  $\overline{\mathcal{F}}^{\text{inj}} = \overline{\mathcal{F}}^{\text{sur}} = \mathcal{K}$  [46, Remark 4.6.13, 4.7.13]. Además, se tiene que  $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}^{\text{dual}}$ ,  $\mathcal{K} = \mathcal{K}^{\text{dual}}$  y  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\text{dual}}$  [46, Proposition 4.4.7]. Como todo ideal dual es regular [46, Proposition 4.5.6], en particular se tiene que  $\overline{\mathcal{F}}$  es regular.

### Ideales no cerrados

Para  $1 \leq p < \infty$ , el ideal de operadores  $p$ -nucleares  $\mathcal{N}_p$  está formado por aquellos operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que existen  $R \in \mathcal{L}(E, \ell_\infty)$ ,  $S \in \mathcal{L}(\ell_p, F)$  y  $\lambda \in \ell_p$  donde el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ R \downarrow & & \uparrow S \\ \ell_\infty & \xrightarrow{M_\lambda} & \ell_p, \end{array}$$

siendo  $M_\lambda$  el operador de multiplicación por  $\lambda$ . Notemos que  $M_\lambda \in \mathcal{K}(\ell_\infty, \ell_p)$  y, por lo tanto  $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{K}$  para  $1 \leq p < \infty$ . La norma  $p$ -nuclear de  $T$  se define como  $\|T\|_{\mathcal{N}_p} = \inf\{\|R\|\|M_\lambda\|\|S\|\}$ , donde el ínfimo está tomado sobre todas las factorizaciones de  $T$  como en el diagrama anterior. Equivalentemente [24, Proposition 5.23],  $T$  es  $p$ -nuclear si existen  $(v'_n)_n \in \ell_p(E')$  y  $(w_n)_n \in$

$\mathcal{L}_{p'}^{\text{weak}}(F)$  (el espacio de sucesiones débiles  $p'$ -sumantes de  $F$ ), tales que  $T(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} v'_n(\cdot)w_n$  con convergencia en  $\mathcal{L}(E, F)$ .

Para  $1 \leq p \leq \infty$ , el ideal de Banach de operadores  $p$ -integrales,  $\mathcal{I}_p$ , está formado por los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que existen un espacio de medida finita  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $R \in \mathcal{L}(E, L_{\infty}(\mu))$  y  $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), F'')$  donde el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{k_F} & F'' \\ R \downarrow & & & & \uparrow S \\ L_{\infty}(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu) & & \end{array}$$

La norma  $p$ -integral de  $T$  se define como  $\|T\|_{\mathcal{I}_p} = \inf \|R\| \|S\|$ , donde el ínfimo está tomado sobre todas las factorizaciones como en el diagrama.

También, el ideal de operadores Pietsch  $p$ -integrales  $\mathcal{PI}_p$ , está formado por los operadores  $T: E \rightarrow F$  tales que existen un espacio de medida finita  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ ,  $R \in \mathcal{L}(E, L_{\infty}(\mu))$  y  $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), F)$  tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ R \downarrow & & \uparrow S \\ L_{\infty}(\mu) & \xleftarrow{\iota_{\infty,p}} & L_p(\mu), \end{array}$$

La norma Pietsch  $p$ -integral de  $T$  se define como  $\|T\|_{\mathcal{PI}_p} = \inf \|R\| \|S\|$ , donde el ínfimo está tomado sobre todas las factorizaciones de  $T$  como en el diagrama.

Para  $1 \leq p < \infty$  tenemos las inclusiones  $\mathcal{N}_p \subset \mathcal{PI}_p \subset \mathcal{I}_p$  y combinando [46, Proposition 18.1.15] con [46, Proposition 19.1.8], si  $M$  y  $N$  son espacios de dimensión finita, entonces  $\mathcal{N}_p(M, N) = \mathcal{PI}_p(M, N) = \mathcal{I}_p(M, N)$ . Sin embargo, en general estos ideales difieren. En efecto, todo operador  $p$ -nuclear es, en particular un operador compacto, mientras que  $\iota_{\infty,p} \in \mathcal{PI}_p(L_{\infty}(\mu), L_p(\mu))$  y no es compacto. Que los ideales  $\mathcal{PI}_p$  e  $\mathcal{I}_p$  difieren para  $p \neq 2$  fue mostrado por Reinov [48]. De [46, Theorem 19.2.2] y [46, Theorem 19.2.1] se obtienen las relaciones entre estos ideales.

**Proposición A.1.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces*

- 1) *El ideal de los operadores  $p$ -nucleares es minimal y vale que  $\mathcal{N}_p = \mathcal{I}_p^{\min} = \mathcal{PI}_p^{\min}$ .*
- 2) *El ideal de los operadores  $p$ -integrales es maximal y vale que  $\mathcal{I}_p = \mathcal{N}_p^{\max} = \mathcal{PI}_p^{\max}$ .*

Además, de las definiciones, se desprende que  $\mathcal{PI}_p^{\text{reg}} = \mathcal{I}_p$ . Para  $1 \leq p < q < \infty$ , tenemos que  $\mathcal{PI}_p \subset \mathcal{PI}_q$ . Luego, como para  $p > 1$  los operadores Pietsch  $p$ -integrales se factorizan a través de  $L_p(\mu)$ , tenemos que para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathcal{PI}_p \subset \mathcal{W}$ . Además, como  $\mathcal{W}$  es regular, también obtenemos que para  $1 \leq p < \infty$ ,  $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{W}$ .

Un operador  $T: E \rightarrow F$  se dice  $p$ -sumante si existe una constante positiva  $C$  tal que para cualquier colección finita de elementos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en  $E$ , se tiene que

$$\left( \sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left( \sum_{i=1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{1/p}.$$

Se define la norma  $p$ -sumante de  $T$  como el ínfimo de tales constantes  $C$ . El Teorema de Factorización y Dominación de Pietsch puede encontrarse en [24, Theorem 2.12] y [24, Theorem 2.13] por ejemplo.

**Teorema A.2** (Factorización y Dominación de Pietsch). *Sean  $E, F$  espacios de Banach,  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  y  $C$  una constante positiva. Son equivalentes,*

- i)  $T$  es  $p$ -sumante y  $\|T\|_{\Pi_p} \leq C$ .
- ii) (Dominación de Pietsch) Hay una medida de probabilidad  $\mu$  definida sobre  $B_{E'}$  tal que para todo  $x \in E$ , se tiene que

$$\|Tx\| \leq C \left( \int_{B_{E'}} |e'(x)|^p d\mu(e') \right)^{1/p}.$$

- iii) (Factorización de Pietsch) Para alguna (o cualquiera) isometría lineal  $J: F \rightarrow G$  tal que  $G$  es 1-inyectivo, hay una medida de probabilidad  $\mu$  y operadores  $R \in \mathcal{L}(E, L_\infty(\mu))$ ,  $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), G)$  tales  $\|R\|\|S\| \leq C$  y el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{J} & G \\ R \downarrow & & & & \uparrow S \\ L_\infty(\mu) & \xrightarrow{\iota_{\infty,p}} & & & L_p(\mu) \end{array}$$

De la Factorización de Pietsch se deduce que un operador  $T: E \rightarrow F$  es  $p$ -sumante si y solo si  $J_F \circ T \in \mathcal{PI}_p(E, \ell_\infty(B_{F'}))$ . En otras palabras

**Corolario A.3.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\mathcal{PI}_p^{\text{inj}} = \Pi_p$ . Como consecuencia,  $\mathcal{I}_p^{\text{inj}} = \Pi_p$  y  $\Pi_p$  es un ideal inyectivo.*

Además, como para  $1 \leq p < \infty$  se tiene  $\mathcal{I}_p \subset \mathcal{W}$  y  $\mathcal{W}$  es inyectivo, tenemos que  $\Pi_p \subset \mathcal{W}$ .

El ideal de los operadores cuasi  $p$ -nucleares  $\mathcal{QN}_p$  esta formado por los operadores  $T: E \rightarrow F$  se tales que existe  $(v'_n)_n \in \ell_p(E')$  tal que para todo  $v \in E$ ,  $\|Tv\|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |v'_n(v)|^p$ , y la norma cuasi  $p$ -nuclear se define como  $\|T\|_{\mathcal{QN}_p} = \inf \|(v'_n)_n\|_{\ell_p(E')}$ . Este ideal fue introducido por Persson y Pietsch [44]. Si tomamos un operador  $T \in \mathcal{QN}_p(E, F)$ , tomando la sucesión  $(v'_n)_n \in \ell_p(E')$  de la definición, podemos definir el operador  $R: E \rightarrow \ell_p$  dado por  $R(\cdot) = \sum_{n=1}^\infty v'_n(\cdot)e_n$  ( $(e_n)_n \subset \ell_p$  la sucesión de vectores canónicos). Se sigue que  $R \in \mathcal{N}_p(E, \ell_p)$  y, por ende tenemos que  $\|Tv\| \leq \|Rv\|$  para todo  $v \in E$ . Por [46, Proposition 8.4.4] tenemos

**Proposición A.4.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\mathcal{N}_p^{\text{inj}} = \mathcal{QN}_p$ . En particular,  $\mathcal{QN}_p$  es inyectivo.*

Utilizando que, para un ideal de Banach  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^{\text{inj max}} = \mathcal{A}^{\text{max inj}}$  [46, Proposition 8.7.13], juntando la proposición anterior junto con la Proposición A.1, tenemos

**Proposición A.5.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\mathcal{QN}_p^{\text{max}} = \Pi_p$ . En particular,  $\Pi_p$  es maximal.*

En 2002, Sinha y Karn [55] introducen el ideal de operadores  $p$ -compactos. Para  $1 \leq p < \infty$ , un operador  $T: E \rightarrow F$  se dice  $p$ -compacto si existe una sucesión  $(v_n)_n \in \ell_p(F)$  tal que

$$T(B_E) \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n : (\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p'}} \right\}.$$

La norma  $p$ -compacta de un operador  $T$  se define como  $\|T\|_{\mathcal{K}_p} = \inf\{\|(v_n)_n\|_{\ell_p(F)}\}$ , siendo tomado sobre todas las secuencias  $(v_n)_n \in \ell_p(F)$  que cumplen la condición anterior. La relación entre los ideales casi  $p$ -nucleares y  $p$ -compactos queda establecida en [47, Theorem 6] y [47, Theorem 7].

**Proposición A.6.** *Sea  $1 \leq p < \infty$ . Entonces  $\mathcal{QN}_p^{\text{dual}} = \mathcal{K}_p$  y  $\mathcal{K}_p^{\text{dual}} = \mathcal{QN}_p$ . En particular  $\mathcal{K}_p^{\text{dual dual}} = \mathcal{K}_p$  y  $\mathcal{QN}_p^{\text{dual dual}} = \mathcal{QN}_p$ .*

Al ser  $\mathcal{K}_p$  y  $\mathcal{QN}_p$  ideales duales, por [46, Proposition 4.5.6] son regulares.

Finalmente, tenemos el ideal de operadores  $p$ -factoreables  $\mathfrak{L}_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Un operador  $T: E \rightarrow F$  se dice  $p$ -factoreable si existe un espacio de medida  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  y operadores  $R \in \mathcal{L}(E, L_p(\mu))$  y  $S \in \mathcal{L}(L_p(\mu), F'')$  de manera que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{T} & F & \xrightarrow{k_F} & F'' \\ & \searrow R & & \nearrow S & \\ & & L_p(\mu) & & \end{array}$$

La norma  $p$ -factoreable de  $T$  se define como  $\|T\| = \inf\{\|R\|\|S\|\}$ , donde el ínfimo está tomado sobre tales factorizaciones. Notemos que para  $1 < p < \infty$ ,  $\mathfrak{L}_p \subset \mathcal{W}$ . Siguiendo [46, 19.3.1], el ideal de operadores  $p$ -factoreables es maximal. Más aún,  $\mathfrak{L}_p = \text{op}(\ell_p)^{\text{max}}$ . Para  $p = 1$ , lo siguiente se infiere de la definición de cápsula suryectiva.

**Proposición A.7.**  $\mathfrak{L}_1^{\text{sur}} = \mathcal{L}$ .

*Demostración.* Dados espacios de Banach  $E, F$  y un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ , el operador  $T \circ Q_E: \ell_1(B_E) \rightarrow F$  es 1-factoreable ya que  $\ell_1(B_E) = L_1(\mu)$  con  $\mu$  la medida de conteo sobre el conjunto  $B_E$ . Luego,  $T \in \mathfrak{L}_1^{\text{sur}}(E, F)$ .  $\square$

# Apéndice B

## Ultrafiltros

Si  $I$  es un conjunto no vacío, una colección  $\mathfrak{F}$  de subconjuntos de  $I$  se dice *filtro* de subconjuntos de  $I$  si cumple las siguientes propiedades:

- (i)  $I \in \mathfrak{F}$  y  $\emptyset \notin \mathfrak{F}$
- (ii) Si  $A \in \mathfrak{F}$  y  $A \subseteq B$ , entonces  $B \in \mathfrak{F}$
- (iii) Si  $A, B \in \mathfrak{F}$ , entonces  $A \cap B \in \mathfrak{F}$

En particular, los filtros tienen la propiedad de la intersección finita (PIF): si  $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset$ .

Un filtro  $\mathcal{U}$  en  $I$  se dice *ultrafiltro* si para todo  $A \subseteq I$ , se tiene que  $A \in \mathcal{U}$  o bien  $I \setminus A \in \mathcal{U}$ .

Antes de enunciar y demostrar el resultado que dice que todo filtro está contenido en un ultrafiltro, mencionaremos, para el lector interesado, los ejemplos más importantes de filtros, y luego algunas propiedades básicas de ultrafiltros.

- El filtro generado por un elemento  $i \in I$ , es decir,  $\mathfrak{F} = \{A \subseteq I : i \in A\}$ , llamado *filtro principal generado* por el elemento  $i$ .
- Si  $I$  es infinito, se denomina *filtro cofinito* de  $I$  a  $\mathfrak{F} = \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ es finito}\}$
- Si  $I$  es un espacio topológico e  $i \in I$ , se denomina *filtro de vecindades de  $i$*  al filtro

$$\{A \subseteq I : \text{existe } V \subseteq I \text{ abierto tal que } i \in V \subseteq A\}.$$

En este caso, decimos que un filtro  $\mathfrak{F}$  converge a  $i$  si el filtro de vecindades de  $i$  está contenido en  $\mathfrak{F}$ .

- Es rutinario verificar que la intersección arbitraria de filtros de un conjunto  $I$  es un filtro. Si  $\mathcal{C}$  es una colección de subconjuntos de  $I$  con la PIF, se define el *filtro generado por  $\mathcal{C}$*  como la intersección de todos los filtros de  $I$  que contienen a  $\mathcal{C}$ , y se puede comprobar que dicho filtro es

$$\left\{ A \subseteq I : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ y } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C} \text{ tales que } \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A \right\}$$

Si  $\mathcal{C}$  además es cerrado por intersecciones finitas, entonces  $\mathcal{C}$  se dice *base para un filtro* (el filtro generado por  $\mathcal{C}$ ). En tal caso, el filtro generado por  $\mathcal{C}$  tiene una descripción más simple: es la colección

$$\{A \subseteq I : \exists C \in \mathcal{C} \text{ tal que } C \subseteq A\}$$

- Si  $(I, \leq)$  es un conjunto con un orden parcial dirigido (esto es, para cada par de elementos  $i, j \in I$ , existe  $k \in I$  tal que  $i \leq k$  y  $j \leq k$ ), se denomina *filtro del orden* de  $I$  al generado por la familia

$$\{\{j \in I : i \leq j\} : i \in I\}$$

La condición de que el orden parcial en  $I$  sea dirigido garantiza que esta familia tiene la propiedad de la intersección finita.

- Si  $f : I \rightarrow J$  es una función entre conjuntos, y  $\mathfrak{F}$  es un filtro en  $I$ ,  $f(\mathfrak{F})$  denota el filtro en  $J$  generado por los conjuntos  $f(A)$ , con  $A \in \mathfrak{F}$ , y se puede expresar de las siguientes dos maneras

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{F}) &= \left\{ B \subseteq J : \exists n \in \mathbb{N} \text{ y } A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{F} \text{ tal que } \bigcap_{i=1}^n f(A_i) \subseteq B \right\} \\ &= \{B \subseteq J : f^{-1}(B) \in \mathfrak{F}\} \end{aligned}$$

Ahora mencionamos algunas propiedades básicas sobre ultrafiltros.

- Todo filtro principal en un conjunto  $I$  es un ultrafiltro.
- Si  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro en  $I$ , entonces es un elemento maximal de la colección de filtros de  $I$  con el orden parcial de la inclusión (en efecto, si  $\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{F}$  para algún filtro  $\mathfrak{F}$  y existiera  $A \in \mathfrak{F} \setminus \mathcal{U}$ , entonces, como  $\mathcal{U}$  es ultrafiltro, tenemos que  $I \setminus A \in \mathcal{U} \subseteq \mathfrak{F}$ , con lo cual  $A \cap (I \setminus A) = \emptyset \in \mathfrak{F}$ , lo cual es absurdo). La recíproca también es cierta, y se deduce de la proposición enunciada abajo.
- Si  $I$  es un conjunto finito, todo ultrafiltro en  $I$  es principal. En efecto, si  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro en  $I$ , en particular es finito, digamos  $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_m\}$ , y si tomamos un elemento  $x \in \bigcap_{i=1}^m A_i$ , vemos que  $\mathcal{U}$  está contenido en el filtro principal generado por  $x$ , así que por maximalidad de  $\mathcal{U}$ , éste resulta ser igual al filtro principal generado por  $x$ .
- Si  $I$  es un conjunto infinito, todo ultrafiltro no principal  $\mathcal{U}$  en  $I$  contiene al filtro cofinito, y en particular, ningún subconjunto finito de  $I$  pertenece a  $\mathcal{U}$ . En efecto, supongamos que existiera  $A \subseteq I$  tal que  $A \notin \mathcal{U}$  e  $I \setminus A$  es finito, digamos,  $I \setminus A = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Entonces, por ser  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro, tenemos que  $I \setminus A \in \mathcal{U}$ . Ahora, como  $\mathcal{U}$  es filtro maximal y no es principal, entonces no está contenido en el filtro principal generado por  $x_i$ , de modo que para cada  $1 \leq i \leq n$ , existe  $A_i \in \mathcal{U}$  tal que  $x_i \notin A_i$ . Tenemos así que  $\mathcal{U} \ni (I \setminus A) \cap \bigcap_{i=1}^n A_i = \emptyset$ , lo cual es absurdo.

- Si  $f: I \rightarrow J$  es una función entre conjuntos y  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro en  $I$ , entonces  $f(\mathcal{U})$  es un ultrafiltro en  $J$ .

**Proposición B.1.** *Sea  $I$  un conjunto, y sea  $\mathfrak{F}$  un filtro en  $I$ . Entonces existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  de  $I$  que contiene a  $\mathfrak{F}$ . En particular, cualquier colección de subconjuntos de  $I$  con la propiedad de la intersección finita está contenida en algún ultrafiltro.*

*Demostración.* Sea  $\Phi$  la colección de todos los filtros que contienen a  $\mathfrak{F}$ , con el orden parcial de la inclusión. Si  $\mathcal{C}$  es una cadena en  $\Phi$ , entonces  $\bigcup_{\mathcal{C} \in \mathcal{C}} \mathcal{C}$  es cerrado por intersecciones finitas, así que es una base para un filtro. Dicho filtro es una cota superior de  $\mathcal{C}$  en  $\Phi$ . Por el Lema de Zorn,  $\Phi$  tiene un elemento maximal  $\mathcal{U}$ . Naturalmente,  $\mathcal{U}$  es un filtro que contiene a  $\mathfrak{F}$ .

Veamos que  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro: si no lo fuera, existiría  $A \subseteq I$  tal que ni  $A$  ni su complemento pertenecen a  $\mathcal{U}$ , y si consideramos  $\mathcal{U} \cup \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ , esta familia es cerrada por intersecciones finitas, y no contiene a  $\emptyset$  (pues si existiera  $U \in \mathcal{U}$  tal que  $U \cap A = \emptyset$ , entonces  $U \subseteq I \setminus A$ , que implica, por ser  $\mathcal{U}$  un filtro, que  $I \setminus A \in \mathcal{U}$ , lo cual contradice nuestra asunción). Por ende  $\mathcal{U} \cup \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\}$  es una base para un filtro (que contiene a  $A$ , pues  $A = A \cap I$  e  $I \in \mathcal{U}$ ), y el filtro que genera contiene estrictamente a  $\mathcal{U}$  (pues  $A \notin \mathcal{U}$ ), y esto contradice la maximalidad de  $\mathcal{U}$  como elemento de  $\Phi$ .  $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, si  $I$  es un conjunto infinito, existe un ultrafiltro no principal en  $I$  (En efecto, cualquier filtro que contenga al filtro cofinito es necesariamente no principal).

El siguiente resultado, sobre filtros en espacios topológicos, lo usaremos para dar la definición del límite a lo largo de un ultrafiltro de una familia indexada acotada de números reales. Recordemos que un filtro  $\mathfrak{F}$  en un espacio topológico  $I$  se dice convergente a un elemento  $x \in I$  si el filtro de vecindades de  $x$  está contenido en  $\mathfrak{F}$ .

**Proposición B.2.** *Sea  $I$  un espacio topológico. Entonces*

- $I$  es Hausdorff si y solo si todo filtro convergente en  $I$  tiene un único límite.*
- $I$  es compacto si y todo ultrafiltro en  $I$  es convergente.*

*Demostración.*

- Asumamos que  $I$  es Hausdorff. Si tuviéramos un filtro  $\mathfrak{F}$  en  $I$  que converge a dos puntos distintos  $x, y \in I$ , y tomamos  $U, V$  abiertos disjuntos de  $I$  tales que  $x \in U$  e  $y \in V$ , se tiene por definición de convergencia de un filtro que  $U \in \mathfrak{F}$  y  $V \in \mathfrak{F}$ , y por lo tanto,  $\emptyset = U \cap V \in \mathfrak{F}$ , lo cual es absurdo.

Para la otra implicación, supongamos que  $I$  no es Hausdorff. Entonces, existen dos puntos distintos  $x, y \in I$  tales que para toda vecindad  $U$  de  $x$  y toda vecindad  $V$  de  $y$ , se tiene que  $U \cap V \neq \emptyset$ . Entonces, la familia

$$\{U \cap V : U \text{ vecindad de } x, V \text{ vecindad de } y\}$$

es una base para un filtro, y contiene al filtro de vecindades de  $x$ , y al filtro de vecindades de  $y$ . El filtro  $\mathfrak{F}$  que genera converge tanto a  $x$  como a  $y$ .

b) Asumamos que  $I$  es compacto, y supongamos que existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  sobre  $I$  que no converge a ningún punto. Entonces, para cada  $x \in \Omega$ , existe un abierto  $V_x$  tal que  $x \in V_x$  y  $V_x \notin \mathcal{U}$ . Evidentemente,  $\{V_x\}_{x \in I}$  es un cubrimiento por abiertos de  $I$ , así que por compacidad, existen  $x_1, \dots, x_n \in I$  tal que  $I = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$ . Como  $V_{x_i} \notin \mathcal{U}$  y éste es un ultrafiltro, tenemos que  $I \setminus V_{x_i} \in \mathcal{U}$  para todo  $1 \leq i \leq n$ , y por lo tanto  $\mathcal{U} \ni \bigcap_{i=1}^n (I \setminus V_{x_i}) = I \setminus \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \emptyset$ , lo cual es absurdo.

Recíprocamente, asumamos que todo ultrafiltro en  $I$  es convergente, y supongamos que  $I$  no fuera compacto, esto es, tiene un cubrimiento  $\{U_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  de abiertos no vacíos que no admite un subcubrimiento finito. Entonces, para cada subconjunto finito  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , existe un elemento  $x_{\Gamma'} \in I \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} U_\gamma$ . Denotemos  $J = \{\Gamma' \subseteq \Gamma : \Gamma' \text{ es finito}\}$  con el orden de la inclusión, y sea la aplicación  $f: J \rightarrow I$  tal que  $\Gamma' \mapsto x_{\Gamma'}$ . Sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $J$  que contiene al filtro del orden. Entonces  $f(\mathcal{U})$  es un ultrafiltro en  $I$ , así que por hipótesis, converge a un punto  $y$ , que pertenecerá a algún  $U_{\gamma_0}$ . En particular,  $U_{\gamma_0} \in f(\mathcal{U})$ , equivalentemente,  $f^{-1}(U_{\gamma_0}) \in \mathcal{U}$ . Puesto que  $\mathcal{U}$  contiene al filtro del orden de  $J$ , en particular  $\{\Gamma' \in J : \{\gamma_0\} \subseteq \Gamma'\} \in \mathcal{U}$ , y por consiguiente  $\mathcal{U} \ni \{\Gamma' \in J : \gamma_0 \in \Gamma'\} \cap f^{-1}(U_{\gamma_0}) = \{\Gamma' \in J : \gamma_0 \in \Gamma' \text{ y } x_{\Gamma'} \in U_{\gamma_0}\} = \emptyset$ , lo cual es absurdo.  $\square$

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos

**Corolario B.3.** *Un espacio topológico  $I$  es Hausdorff compacto si y solo si todo ultrafiltro en  $I$  converge a un único límite.*

*Demostración.* Solo una implicación requiere demostración. Asumamos que todo ultrafiltro en  $I$  tiene un único límite. Por el ítem b) de la proposición anterior,  $I$  es compacto. Para ver que es Hausdorff, tomemos un filtro  $\mathfrak{F}$  convergente en  $I$ , y sean  $x, y \in I$  tales que  $\mathfrak{F}$  converge a  $x$  y a  $y$ . Entonces, por definición, el filtro de vecindades de  $x$  y el filtro de vecindades de  $y$ , que denotaremos  $\mathfrak{F}_x$  y  $\mathfrak{F}_y$  respectivamente, están contenidos en  $\mathfrak{F}$ . Por la Proposición B. B.1, existe un ultrafiltro  $\mathcal{U}$  en  $I$  que contiene a  $\mathfrak{F}$ , y por ende  $\mathfrak{F}_x \subseteq \mathcal{U}$  y  $\mathfrak{F}_y \subseteq \mathcal{U}$ , esto es,  $\mathcal{U}$  converge a  $x$  y a  $y$ , así que por hipótesis se tiene que  $x = y$ . Así, demostramos que todo filtro convergente en  $I$  tiene un único límite, de modo que por el ítem a) de la proposición anterior,  $I$  es Hausdorff.  $\square$

Ya podemos demostrar la buena definición de límite a lo largo de un ultrafiltro de una familia indexada acotada de números reales.

**Proposición B.4.** *Sea  $I$  un conjunto de índices, y  $(c_i)_{i \in I}$  una familia acotada de números reales indexada por  $I$  (en otras palabras, una función  $c: I \rightarrow \mathbb{R}$  acotada), y sea  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$ . Entonces existe un único  $x \in \mathbb{R}$  tal que para toda vecindad  $V$  de  $x$ ,  $\{i \in I : c_i \in V\} \in \mathcal{U}$ . Denotamos  $x = \lim_{\mathcal{U}} c_i$ .*

*Demostración.* Como la función  $c: I \rightarrow \mathbb{R}$  es acotada, podemos restringir su codominio a un subconjunto compacto  $K$  de  $\mathbb{R}$  (por ejemplo, la clausura de su imagen). Hecho esto, por el corolario anterior, el ultrafiltro  $c(\mathcal{U})$  converge a un único  $x \in K$ , que significa que toda vecindad  $V$  de  $x$  en  $K$  pertenece a  $c(\mathcal{U})$ , esto es,  $\{i \in I : c_i \in V\} \in \mathcal{U}$ . Ahora, si  $V$  es una vecindad de  $x$  en  $\mathbb{R}$ , como  $V \cap K$  es una vecindad de  $x$  en  $K$  y  $\{i \in I : c_i \in V \cap K\} \subseteq \{i \in I : c_i \in V\}$ , al

ser  $\mathcal{U}$  un filtro, se tiene que  $\{i \in I : c_i \in V\} \in \mathcal{U}$ . La unicidad de  $x$  en  $\mathbb{R}$  se debe a que éste es Hausdorff.  $\square$

La siguiente propiedad es usada en varias ocasiones en las que se toma límite a lo largo de un ultrafiltro.

**Proposición B.5.** *Sea  $I$  un conjunto de índices,  $(c_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$  acotada,  $\mathcal{U}$  un ultrafiltro en  $I$ , y  $F \subseteq \mathbb{R}$  un cerrado. Si existe  $I_0 \in \mathcal{U}$  tal que  $c_i \in F$  para todo  $i \in I_0$ , entonces  $\lim_{\mathcal{U}} c_i \in F$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\lim_{\mathcal{U}} c_i \notin F$ . Entonces  $\mathbb{R} \setminus F$  es un entorno abierto de  $\lim_{\mathcal{U}} c_i$ , así que por la proposición anterior, el conjunto  $I_1 := \{i \in I : c_i \in \mathbb{R} \setminus F\}$  pertenece a  $\mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{U}$  es un filtro, se tiene que  $I_0 \cap I_1 \in \mathcal{U}$  y en particular  $I_0 \cap I_1$  es no vacío. Tomando  $i \in I_0 \cap I_1$ , tenemos que  $c_i \in F$  y  $c_i \notin F$ , lo cual es absurdo.  $\square$

Con respecto a la relación entre redes convergentes y ultrafiltros, se tiene lo que uno esperaría.

**Proposición B.6.** *Sea  $I$  un conjunto dirigido y  $(c_i)_{i \in I}$  una red acotada de números reales que converge a un  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathcal{U}$  es un ultrafiltro en  $I$  que contiene al filtro del orden, entonces  $\lim_{\mathcal{U}} c_i = x$ .*

*Demostración.* Sea  $V$  una vecindad de  $x$  en  $\mathbb{R}$ . Como la red  $(c_i)_{i \in I}$  converge a  $x$ , existe  $i_0 \in I$  tal que  $\{i \in I : i \geq i_0\} \subseteq \{i \in I : c_i \in V\}$ . Como por hipótesis sobre  $\mathcal{U}$  se tiene que  $\{i \in I : i \geq i_0\} \in \mathcal{U}$  y éste es un filtro, obtenemos que  $\{i \in I : c_i \in V\} \in \mathcal{U}$ . Luego,  $\lim_{\mathcal{U}} c_i = x$ .  $\square$



# Bibliografía

- [ABBT] N. Albarracín, A. Bougoutaia, A. Belacel, P. Turco. *Lipschitz  $(p, \sigma, q, \eta)$ -dominated operators*. Colloquium Mathematicum 178 (2025)
- [AT] N. Albarracín, P. Turco. *On the Lipschitz operator ideal  $\text{Lip}_0 \circ \mathcal{A} \circ \text{Lip}_0$* . Studia Mathematica 277 (2024) 243–269.
- [AT2] N. Albarracín, P. Turco. *Lipschitz extensions of linear operators*.
- [1] D. Achour, P. Rueda, E. A. Sánchez-Pérez, R. Yahí. *Lipschitz operator ideals and the approximation property*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 436 (2016) 217–236.
- [2] D. Achour, E. Dahia, P. Turco. *Lipschitz  $p$ -compact mappings*. Monatshefte für Mathematik 189 (2019) 595–609.
- [3] D. Achour, E. Dahia, P. Turco. *The Lipschitz injective hull of Lipschitz operator ideals and applications*. Banach Journal of Mathematical Analysis 14 (2020) 1241–1257.
- [4] D. Achour, P. Rueda, R. Yahí.  *$(p, \sigma)$ -absolutely Lipschitz operators*. Annals of Functional Analysis 8 (2017) 38–50.
- [5] R. F. Arens, Jr. J. Eells. *On embedding uniform and topological spaces*. Pacific Journal of Mathematics 6 (1956) 397–403.
- [6] I. Aharoni. *Every separable metric space is Lipschitz equivalent to a subset of  $c_0$* . Israel Journal of Mathematics 19 (1974) 284–291.
- [7] I. Aharoni, J. Lindenstrauss. *Uniform equivalence between Banach spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society 84 (1978) 281–283.
- [8] F. Albiac, N. J. Kalton. *Topics in Banach space theory*. 2nd edition. Springer, 2016.
- [9] T. Alvarez. *Factoring Rosenthal operators*. Publicacions Matemàtiques 32 (1988) 87–89.
- [10] A. Belacel, D. Chen. *Lipschitz  $(p, r, s)$ -integral operators and Lipschitz  $(p, r, s)$ -nuclear operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 461 (2018) 1115–1137.
- [11] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, vol. 1. American Mathematical Society Colloquium Publications 48 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2000).

- [12] M. G. Cabrera-Padilla, J. A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos. *Lipschitz tensor product*. Khayyam Journal of Mathematics 1 (2015) 185–218.
- [13] M. G. Cabrera-Padilla, J. A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos. *Maximal Banach ideals of Lipschitz maps*. Annals of Functional Analysis 7 (2016) 593–608.
- [14] M. G. Cabrera-Padilla, J. A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas, M. Villegas-Vallecillos. *Duality for ideals of Lipschitz maps*. Banach Journal of Mathematical Analysis 11 (2017) 108–129.
- [15] M. G. Cabrera-Padilla, A. Jiménez-Vargas. *Lipschitz Grothendieck integral operators*. Banach Journal of Mathematical Analysis 9 (2015) 34–57.
- [16] J. A. Chávez-Domínguez. *Duality for Lipschitz  $p$ -summing operators*. Journal of Functional Analysis 261 (2011) 387–407.
- [17] J. A. Chávez-Domínguez. *Lipschitz factorization through subsets of Hilbert spaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 418 (2014) 344–356.
- [18] J. A. Chávez-Domínguez, A. Jiménez-Vargas. *Ideals of extendable Lipschitz maps*. Preprint
- [19] D. Chen, B. Zheng. *Lipschitz  $p$ -integral and Lipschitz  $p$ -nuclear operators*. Nonlinear Analysis 75 (2012) 5270–5282.
- [20] M. Cuth, M. Doucha, P. Wojtaszczyk. *On the structure of Lipschitz free spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society 144 (2016) 3833–3846.
- [21] D. Dacunha-Castelle, J. L. Krivine. *Applications des ultraproducts à l'étude des espaces et des algèbres de Banach*. Studia Mathematica 41 (1972) 315–334.
- [22] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pełczyński, *Factoring weakly compact operators*. Journal of Functional Analysis 17 (1974) 311–327.
- [23] A. Defant, K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*. North-Holland Mathematics Studies 176, 1993.
- [24] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge. *Absolutely Summing Operators*. Cambridge University Press, 1995.
- [25] J. Diestel, J. J. Uhl. *Vector Measures*. Mathematical Surveys Monographs, American Mathematical Society. Providence, RI. vol. 15 (1977).
- [26] J. D. Farmer, W. B. Johnson. *Lipschitz  $p$ -summing operators*. Proceedings of the American Mathematical Society 137 (2009) 2989–2995.
- [27] K. Floret, S. Hunfeld. *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society 130 (2001) 1425–1435.

- [28] D. Galicer, S. Lassalle, P. Turco. *The ideal of  $p$ -compact operators: a tensor product approach*. Studia Mathematica 211.3 (2012) 269–286.
- [29] G. Godefroy, N. J. Kalton. *Lipschitz free Banach spaces*. Studia Mathematica 159 (2003) 121–141.
- [30] S. Heinrich. *Ultraproducts in Banach space theory*. Journal für die reine und angewandte Mathematik 313 (1980) 72–104.
- [31] S. Heinrich, P. Mankiewicz. *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*. Studia Mathematica 73.3 (1982) 225–251.
- [32] A. Jiménez-Vargas, J. M. Sepulcre, M. Villegas-Vallecillos. *Lipschitz compact operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 415 (2014) 889–901.
- [33] W. Johnson, B. Maurey, G. Schechtman. *Non-linear factorization of linear operators*. Bulletin of the London Mathematical Society 41 (2009) 663–668.
- [34] M. I. Kadets. *Topological equivalence of all separable Banach spaces*. Soviet Mathematics. Doklady 7 (1966) 319–322.
- [35] P. Kirwan, R. Ryan. *Extendibility of Homogeneous Polynomials on Banach Spaces*. Proceedings of the American Mathematical Society 126 (1998) 1023–1029.
- [36] K. Kürsten. *On some questions of A. Pietsch II*. Teoriya funktsii, funktsional’nyy analiz i ikh prilozheniya 29 (1978) 61–73.
- [37] A. Lima, O. Nygaard, E. Oja. *Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property*. Israel Journal of Mathematics 119 (2000) 325–348.
- [38] J. Lindenstrauss. *On nonlinear projections in Banach spaces*. Michigan Mathematical Journal 11 (1964) 263–287.
- [39] J. A. López Molina, E. A. Sánchez-Pérez. *Ideales de operadores absolutamente continuos*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid 87 (1993) 349–378.
- [40] U. Matter. *Absolutely continuous operators & super-reflexivity*. Mathematische Nachrichten 130 (1987) 193–216.
- [41] S. Mazur, S. Ulam. *Sur les transformations isométriques d’espaces vectoriels normés*. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris 194 (1932) 946–948.
- [42] A. Naor, G. Schechtman. *Planar earthmover is not in  $L_1$* . SIAM Journal on Computing 37 (2007) 804–826.
- [43] F. Oertel. *Compositions of operator ideals and their regular hulls*. Acta Universitatis Carolinae Mathematica et Physica 36 (1995) 69–72.

- [44] A. Persson, A. Pietsch. *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*. Studia Mathematica 33.1 (1969) 19–62.
- [45] A. Pietsch. *Ultraprodukte von Operatoren in Banachräumen*. Mathematische Nachrichten 61 (1974) 123–132.
- [46] A. Pietsch. *Operator ideals*. North-Holland Mathematical Library, 1980.
- [47] A. Pietsch. *The ideal of p-compact operators and its maximal hull*. Proceedings of the American Mathematical Society 142 (2014) 519–530.
- [48] O. Reinov. *Approximation properties of order p and the existence of non-p-nuclear operators with p-nuclear second adjoints*. Mathematische Nachrichten 109 (1982) 125–134.
- [49] R. A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*. Springer, 2002.
- [50] K. Saadi. *Some properties of Lipschitz strongly p-summing operators*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 423 (2015) 1410–1426.
- [51] K. Saadi. *On the composition ideals of Lipschitz mappings*. Banach Journal of Mathematical Analysis 11 (2017) 825 - 840.
- [52] M. Saleh. *Interpolative Lipschitz ideals*. Colloquium Mathematicum 163 (2021) 153–170.
- [53] I. Stephani. *Injektive Operatorenideale über der Gesamtheit aller Banachräume und ihre topologische Erzeugung*. Studia Mathematica 38 (1970) 105-124.
- [54] I. Stephani. *Operator Ideals with the Factorization Property and Ideal Classes of Banach Spaces*. Mathematische Nachrichten 74 (1976) 201–210.
- [55] D. P. Sinha, A. K. Karn. *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of  $l_p$* . Studia Mathematica 150.1 (2002) 17–33.
- [56] H. Toruńczyk. *Characterizing Hilbert space topology*. Fundamenta Mathematicae 111 (1981) 247–262.
- [57] P. Turco, R. Villafañe. *Galois connection between Lipschitz and linear operator ideals and minimal Lipschitz operator ideals*. Journal of Functional Analysis 277 (2019) 434–451.
- [58] N. Weaver. *Lipschitz Algebras*. 2nd edition. World Scientific, 2018.