



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Método mixto de elementos finitos para problemas elípticos degenerados**

Tesis presentada para optar al título de Doctora de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas.

**Lic. María Luz Alvarez.**

Director de tesis: Dr. Ricardo Durán.  
Consejero de estudios: Dr. Gabriel Acosta Rodriguez.  
Lugar de trabajo: Departamento de matemática, FCEyN, UBA.

Fecha de defensa: 14 de noviembre del 2025



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Clase de Muckenhoupt $A_p$ . . . . .	5
1.2. Espacios de Sobolev con peso . . . . .	6
1.3. Operadores elípticos de segundo orden . . . . .	7
1.3.1. Existencia y unicidad del problema modelo . . . . .	8
1.3.2. Formulación mixta débil . . . . .	8
1.4. Aproximación por método mixto de elementos finitos . . . . .	9
1.4.1. Operadores $\Pi_h$ y $P_h$ , y la propiedad del diagrama commutativo . .	10
<b>2. Estimaciones a priori del error</b>	<b>13</b>
2.1. Estimaciones de error para elementos de Raviart-Thomas . . . . .	13
2.2. Aplicación a problemas elípticos degenerados . . . . .	21
2.3. Dominios curvos . . . . .	24
2.4. Experimentos numéricos . . . . .	27

<b>3. Estimaciones a posteriori</b>	<b>35</b>
3.1. Estimación general abstracta . . . . .	35
3.2. Estimación de error a posteriori . . . . .	36
3.2.1. Resultados preliminares . . . . .	36
3.2.2. Postproceso de la variable escalar . . . . .	38
3.2.3. Estimaciones del error a priori para $\tilde{u}_h$ . . . . .	39
3.2.4. Aproximación conforme . . . . .	40
3.2.5. Estimador computable para el error a posteriori . . . . .	42
3.3. Otras condiciones de borde . . . . .	43
3.4. Experimentos numéricos . . . . .	45

# Resumen

## Método mixto de elementos finitos para problemas elípticos degenerados.

Esta tesis se centra en el análisis de las aproximaciones por elementos finitos mixtos de Raviart - Thomas para operadores elípticos de la forma:

$$-div(a\nabla u) = f$$

donde el coeficiente  $a = a(x)$  es una función no negativa que posee singularidades.

En primer lugar obtenemos estimaciones a priori del error para el caso de órdenes fraccionarios, generalizando de esta manera los resultados conocidos previamente para órdenes enteros. Para ello, fue necesario extender las estimaciones del error de interpolación de Raviart-Thomas con la norma  $L^2$  con peso adaptándolas a funciones definidas en espacios de Sobolev fraccionarios. Un desafío importante con el que nos topamos, fue establecer una definición de estos espacios que resultara adecuada para nuestro propósito.

Por otro lado, introducimos y analizamos un estimador de error a posteriori basado en un postproceso de la solución numérica. Demostramos la eficiencia y confiabilidad de nuestro estimador.

Además, incluimos ejemplos numéricos para la aproximación de Raviart-Thomas de orden más bajo que ilustran nuestros resultados teóricos tanto para estimaciones a priori como a posteriori. En el caso del estimador a posteriori extendemos los resultados a condiciones de borde mixtas con el objetivo de aplicarlo a un problema degenerado introducido por Caffarelli y Silvestre como forma de resolver el Laplaciano fraccionario espectral.



# Abstract

## Mixed finite element method for degenerate elliptic problems.

This thesis is focused on the analysis of the approximation via mixed finite elements of Raviart - Thomas for elliptic operators of the form:

$$-div(a\nabla u) = f$$

where the coefficient  $a = a(x)$  is a non-negative function that exhibits singularities.

First, we obtain a priori error estimates for the fractional order case, generalizing the previously known results for integer orders. To this end, it was necessary to extend the interpolation error estimates of Raviart-Thomas with weighted  $L^2$ -norm adapting them to functions defined in fractional Sobolev spaces. An important challenge we encountered was establishing a definition of these spaces that was suitable for our purposes.

On the other hand, we introduce and analyze an a posteriori error estimator based on a postprocess of the numerical solution. We prove both the efficiency and reliability of our estimator.

We include numerical examples for the lowest-order Raviart-Thomas approximation that illustrate our theoretical results for both a priori and a posteriori estimates. In the case of the a posteriori estimator, we extend the results to mixed boundary conditions with the purpose of applying it to a degenerate problem introduced by Caffarelli and Silvestre as a method to solve the spectral fractional Laplacian.

# Introducción

A lo largo de este tesis analizamos la aproximación por *elementos finitos mixtos de Raviart-Thomas* (ver por ejemplo los libros [?, ?]) de problemas elípticos de la forma

$$-div(a\nabla u) = f \text{ en un dominio } D \subset \mathbb{R}^n, \quad (0.0.1)$$

donde  $a = a(x)$  es una función no negativa.

En particular, nos interesan *problemas elípticos degenerados* en el sentido que el coeficiente  $a(x)$  no cumple que

$$\lambda \leq a(x) \leq \Lambda$$

para  $\lambda, \Lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  (es decir, problemas que no son uniformemente elípticos).

En los métodos mixtos se quieren aproximar dos variables de manera simultánea. Estas variables pueden aparecer naturalmente en el problema o introduciendo una nueva variable. En nuestro caso, planteando  $\boldsymbol{\sigma} = -a\nabla u$ , la ecuación antes mencionada se convierte en el sistema de primer orden

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} + a\nabla u = 0 & \text{en } D \\ div \boldsymbol{\sigma} = f & \text{en } D. \end{cases} \quad (0.0.2)$$

Si bien al aproximar simultáneamente ambas variables se incrementa el costo del problema discreto ya que se aumentó el número de variables, la ventaja es que en muchos casos, las singularidades de  $a$  y de  $\nabla u$  se compensan haciendo que la variable  $\boldsymbol{\sigma}$  sea más regular y en consecuencia más fácil de aproximar de manera eficiente.

El análisis de la aproximación por *elementos finitos* se centra en el estudio de las estimaciones de error. Estas se dividen en *a priori* (ver por ejemplo los libros clásicos [?, ?]) y *a posteriori* (ver por ejemplo [?, ?]). La teoría, tanto para estimaciones a priori como a posteriori [?, ?] está ampliamente desarrollada para problemas uniformemente elípticos [?, ?, ?] tanto para el caso estándar como el mixto. Sin embargo, para el caso degenerado, hay pocos trabajos y quedan muchos problemas por investigar. Podemos mencionar por ejemplo los trabajos de Nochetto, Otárola y Salgado [?] o el trabajo de Chen, Nochetto, Otárola y Salgado [?]. En ambos se estudió la aplicación del método estándar para problemas no uniformemente elípticos.

En cuanto a métodos mixtos, en los trabajos [?, ?] se tratan problemas degenerados particulares y de distinta índole que los que consideramos nosotros, y en [?] se trata la misma clase de problemas que en esta tesis. Todos estos trabajos son sobre estimaciones a priori.

En esta tesis obtenemos resultados tanto sobre estimaciones a priori como a posteriori. Nuestras estimaciones a priori extienden al caso de orden fraccionario los resultados de [?] mientras que las estimaciones a posteriori que introducimos y analizamos son los primeros resultados para la aproximación por métodos mixtos de problemas degenerados. Para el desarrollo de nuestra teoría, suponemos que el coeficiente  $a$  pertenece a la clase de Muckenhoupt  $A_2$ .

La estructura de esta tesis está centrada en tres capítulos. El primero reúne resultados preliminares que se utilizan en el desarrollo de todo el trabajo. El segundo está dedicado al análisis de las estimaciones a priori mientras que el tercero aborda el estudio de las estimaciones a posteriori.

A continuación describimos cada capítulo.

Comenzamos el Capítulo 1 introduciendo las clases de Muckenhoupt  $A_p$ . Estas fueron introducidas por Muckenhoupt en [?] para caracterizar los pesos para los cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood está acotado. Presentamos algunos ejemplos ilustrativos.

Introducimos los espacios de Sobolev con peso con los que trabajaremos. La teoría de elementos finitos para problemas uniformemente elípticos utiliza los espacios clásicos de Sobolev. Sin embargo, para los problemas degenerados que nos interesan es necesario reemplazar estos espacios por versiones con pesos, las cuales han sido utilizadas en el análisis teórico de ecuaciones diferenciales desde hace alrededor de cincuenta años [?].

En los últimos tiempos se llevaron a cabo varios trabajos donde se utilizaron normas con peso para analizar aproximaciones numéricas, algunos ejemplos de esto son [?, ?, ?, ?, ?] para el caso del método estándar de elementos finitos, y [?] para el método mixto.

Puede suceder que una solución pertenezca al espacio de Sobolev de orden  $m$  pero no al  $m + 1$ , es por esto que la escala entera no es suficiente para medir la suavidad de las funciones, y por lo tanto, es necesario considerar espacios de Sobolev de órdenes fraccionarios. En el caso de ecuaciones degeneradas esta pérdida de suavidad puede deberse a singularidades del coeficiente de difusión o del dominio.

En el caso de normas sin peso, las normas usuales para probar estimaciones de orden fraccionario son la de los espacios de Sobolev-Slobodeckij, también conocidas como espacios de Sobolev fraccionarios.

Por lo tanto, la primera pregunta para generalizar la estimación del error a normas con peso, es cuál sería una definición razonable de los espacios de Sobolev fraccionarios con peso. Por esto damos una definición útil que se ajusta a nuestro propósito y motivada

por las seminormas pesadas que han sido utilizadas para probar desigualdades del tipo de Poincaré.

Una vez definidos los espacios y citados resultados como el teorema de trazas para espacios de Sobolev, y Sobolev fraccionario, continuamos con la presentación del problema modelo. Mostramos la existencia y unicidad de la solución y llevamos a cabo la formulación mixta débil del mismo.

Por último introducimos los espacios de *Raviart-Thomas* [?], la aproximación por elementos finitos mixtos obtenida mediante estos y construimos el operador de interpolación de Raviart-Thomas para finalmente enunciar la propiedad del diagrama conmutativo.

En el Capítulo 2 desarrollamos el análisis de las estimaciones del error a priori. En el trabajo [?] se obtienen estimaciones a priori para problemas degenerados del tipo (0.0.1) en el caso en que  $a$  está en la clase  $A_2$ . Extendemos los resultados obtenidos en ese trabajo a órdenes de aproximación fraccionarios.

Con el fin de tener un resultado de aproximación polinomial para funciones en espacios de Sobolev fraccionarios con pesos comenzamos enunciando la desigualdad de Poincaré fraccionaria. Luego, obtenemos un resultado general sobre las estimaciones de error para la interpolación de Raviart-Thomas. Continuamos por aplicar las estimaciones probadas a problemas elípticos degenerados y mostramos cómo nuestros resultados pueden extenderse a dominios suaves. Finalmente presentamos algunos resultados numéricos para el caso de orden más bajo de Raviart-Thomas.

Por último, en el Capítulo 3 introducimos y analizamos un estimador a posteriori para el caso degenerado.

Al momento se han desarrollado una variedad de técnicas y métodos para estimar el error a posteriori [?, ?], desde enfoques globales hasta locales, que juegan un papel crucial en la mejora de la eficiencia y precisión de estos métodos.

Particularmente, para la aproximación por métodos mixtos en el caso de problemas uniformemente elíptico hubo diversos acercamientos. En el trabajo de A. Alonso [?] se trabaja con  $a(x) = 1$  y para el caso de dos dimensiones, usando la descomposición de Helmholtz. Después de ese trabajo, se introdujeron distintos argumentos para obtener resultados para el caso de coeficientes variables y espacios de mayores dimensiones (ver por ejemplo [?, ?, ?, ?]).

La teoría de [?] fue extendida en [?] para operadores con coeficientes variables incluyendo a las ecuaciones uniformemente elípticas de la forma (0.0.2), cuya función  $a(x)$  es suave. Sin embargo, si sólo asumimos que  $a \in A_2$  los argumentos de [?] no pueden aplicarse. En efecto, si  $\sigma_h$  es la solución numérica aproximada, el estimador para  $\sigma - \sigma_h$  obtenido de esa manera involucra el salto  $a^{-1}\sigma_h$  sobre los bordes entre los elementos, pero estos saltos no están bien definidos para una función arbitraria cualquiera  $a \in A_2$ .

Un método distinto es construir un estimador del error basado en un postproceso

de la solución numérica obtenida. Este enfoque fue considerado para la aplicación del método mixto en trabajos como [?, ?, ?]. Dadas las características consideradas en nuestro caso, decidimos adoptar el enfoque propuesto en [?] y en este capítulo mostramos una generalización de esta teoría a ecuaciones del tipo (0.0.1) con una función  $a \in A_2$ .

Introducimos un estimador de error basado en un postproceso de la aproximación de la variable escalar  $u$ , y demostramos la eficiencia y confiabilidad de este estimador.

Para finalizar aplicamos nuestro estimador a posteriori a un problema degenerado introducido por Caffarelli-Silvestre [?] para resolver el laplaciano fraccionario. Para esto mostramos como nuestro estimador de error puede extenderse a casos con condiciones de borde mixta.

Presentamos resultados numéricos sobre la aproximación de *Raviart-Thomas* de orden más bajo para este problema, utilizando mallas quasi-uniformes y mallas refinadas adaptativamente utilizando nuestro estimador.

#### Publicaciones relacionadas con la tesis:

- El Capítulo 2 extiende y muestra resultados de:

[?] M. L. Alvarez, M. G. Armentano y R. G. Durán, *Raviart-Thomas interpolation in fractional weighted Sobolev spaces*. Computers and Mathematics with Applications, 168: 39-45, 2024. Elsevier

- El Capítulo 3 reúne resultados de:

[?] M. L. Alvarez y R. G. Durán, *A posteriori error estimates for mixed approximations of degenerate elliptic problems*. Applied Numerical Mathematics, 188(1): 146-159, 2023. Elsevier

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Clase de Muckenhoupt $A_p$

Consideramos el operador maximal de Hardy-Littlewood definido como

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f|$$

para  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $B(x, r)$  denota la bola de radio  $r$  centrada en  $x$ .

Las clases  $A_p$  fueron introducidas por Muckenhoupt en [?] para caracterizar las medidas para las cuales el operador antes presentado es acotado.

**Definición 1.1.1.** Dado  $1 < p < \infty$ , sea  $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  una función no negativa, decimos que  $w$  pertenece a la clase de Muckenhoupt  $A_p$  si cumple que,

$$[w]_{A_p} := \sup_B \left( \frac{1}{|B|} \int_B w \right) \left( \frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} < \infty, \quad (1.1.2)$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

Algunos ejemplos clásicos de funciones que pertenecen a la clase  $A_p$  son  $w(x) = |x - x_0|^\alpha$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $-n < \alpha < n(p-1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $p > 1$  o las funciones  $w(x) = d_\Gamma(x)^\beta$  para  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $-1 < \beta < p-1$  y  $p > 1$ , donde  $d_\Gamma(x)$  es la función distancia a  $\Gamma$ , superficie suave de dimensión  $n-1$  de  $\mathbb{R}^n$ .

En el desarrollo de la teoría utilizaremos el siguiente famoso resultado para  $p = 2$  (ver por ejemplo [?]).

Existe una constante  $C_n$ , que depende solo de la dimensión, tal que

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^2_w(\mathbb{R}^n)} \leq C_n [w]_{A_2} \|f\|_{L^2_w(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.1.3)$$

donde  $L^2_w(\mathbb{R}^n)$  denota al espacio de Lebesgue con la medida  $w(x)dx$  sobre  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2. Espacios de Sobolev con peso

Partiendo de los clásicos espacios normados  $L^p$  definiremos espacios con peso  $w \in A_p$ .

Ahora bien, para cualquier  $1 < p < \infty$  y cualquier conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dada una función  $w \in A_p$  con  $1 < p < \infty$  denotamos por  $L_w^p(D)$  al espacio de Lebesgue con la medida  $w(x)dx$ .

**Definición 1.2.1.** Dado un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 < p < \infty$  y  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  definimos el espacio de Sobolev

$$W_w^{m,p}(D) = \{v \in L_w^p(D) : D^\alpha v \in L_w^p(D) \quad \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Introducimos ahora los espacios de Sobolev fraccionarios con pesos.

**Definición 1.2.2.** Dado un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 < p < \infty$ , y  $w \in A_p$ , definimos, para  $0 < s < 1$ , el espacio de Sobolev fraccionario

$$W_w^{s,p}(D) = \{v \in L_w^p(D) : |v|_{W_w^{s,p}(D)} < \infty\},$$

donde

$$|v|_{W_w^{s,p}(D)}^p = \int_D \int_D \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} w(x) dx dy.$$

Este resulta un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|v\|_{W_w^{s,p}(D)}^p = \|v\|_{L_w^p(D)}^p + |v|_{W_w^{s,p}(D)}^p.$$

En [?], A. Kufner profundiza la teoría sobre los espacios de Sobolev con peso.

Notemos que dejaremos de escribir el subíndice  $w$  si  $w(x) \equiv 1$ , para recuperar la notación estandard de  $W^{s,p}(D)$  con  $0 < s < 1$  o  $W^{m,p}(D)$  con  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Para  $p = 2$  denotamos por  $H_w^s(D)$  al espacio  $W_w^{s,2}(D)$  con  $0 < s < 1$  o por  $H_w^m(D)$  al espacio  $W_w^{m,2}(D)$  con  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Finalmente definiremos los espacios de Sobolev con peso para todo orden positivo.

**Definición 1.2.3.** Dado un dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  y  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $0 < s < 1$  definimos el espacio de Sobolev

$$W_w^{m+s,p}(D) = \{v \in L_w^p(D) : v \in W_w^{m,p}(D) \text{ y } D^\alpha v \in W_w^{s,p}(D) \quad \forall |\alpha| = m\}. \quad (1.2.4)$$

De la misma forma que antes, dejaremos de escribir el subíndice  $w$  si  $w(x) \equiv 1$ . En el caso  $p = 2$  denotamos por  $H_w^{m+s}(D)$  al espacio  $W_w^{m+s,2}(D)$  con  $0 < s < 1$  y  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Para los espacios de campos vectoriales, utilizaremos notaciones análogas pero con letras en negrita.

A continuación recordamos algunos resultados auxiliares que serán usados en el desarrollo de la teoría. Usaremos  $C$  para denotar una constante genérica. Dadas dos cantidades

$A$  y  $B$ , la notación  $A \lesssim B$  significa que  $A \leq CB$ . También escribimos  $A \simeq B$  cuando  $A \lesssim B$  y  $B \lesssim A$ . Comenzaremos por citar el teorema de trazas para espacios de Sobolev [?] y espacios de Sobolev fraccionarios:

**Lema 1.2.1.** Sea  $D$  un dominio Lipschitz cualquiera y  $\Gamma$  el borde de  $D$ . Existe una constante  $C$ , que depende solo de  $D$ , tal que

$$\|v\|_{L^1(\Gamma)} \leq C\|v\|_{W^{1,1}(D)} \quad \forall v \in W^{1,1}(D). \quad (1.2.5)$$

Notemos que para  $w \in A_2$  se tiene que

$$H_w^1(D) \subset W^{1,1}(D), \quad (1.2.6)$$

en efecto, como  $w^{-1} \in L^1(D)$  aplicando la desigualdad de Schwarz tenemos

$$\|v\|_{W^{1,1}(D)} \leq \left( \int_D w^{-1} \right)^{1/2} \|v\|_{H_w^1(D)}. \quad (1.2.7)$$

De esta manera queda definida para funciones en  $H_w^1(D)$  la traza sobre  $\Gamma$ , o cualquier subconjunto medible de él.

Para el caso fraccionario tenemos la siguiente variante del resultado de trazas:

**Lema 1.2.2.** Sea  $D$  un dominio Lipschitz, dados  $1 < p < \infty$  y  $v \in W^{s,p}(D)$ , si  $1/p < s < 1$  tenemos que

$$\|v\|_{L^p(\Gamma)} \lesssim \|v\|_{W^{s,p}(D)}.$$

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede ver en [?] o [?]. □

## 1.3. Operadores elípticos de segundo orden

A lo largo de esta tesis trabajaremos con el siguiente problema:

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , un polítopo Lipschitz y  $a \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$  una función no negativa. Sea  $H_{a,0}^1(\Omega)$  la clausura en  $H_a^1(\Omega)$  de las funciones  $C_0^\infty(\Omega)$  y sea  $(H_{a,0}^1(\Omega))^*$  su espacio dual. Dada  $f \in (H_{a,0}^1(\Omega))^*$ , consideramos el siguiente operador elíptico de segundo orden:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a\nabla u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad (1.3.1)$$

donde  $\Gamma$  es el borde de  $\Omega$ .

Nos interesan problemas degenerados en el sentido que el coeficiente  $a$  puede volverse infinito o cero en subconjuntos de  $\Omega$ . Para el desarrollo de nuestra teoría supondremos que  $a$  pertenece a la clase de Muckenhoupt  $A_2$ .

Introduciendo el campo vectorial  $\boldsymbol{\sigma} = -a\nabla u$  el problema (1.3.1) se transforma en el sistema equivalente de primer orden dado por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} + a\nabla u = 0 & \text{en } \Omega \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

### 1.3.1. Existencia y unicidad del problema modelo

Para mostrar la existencia y unicidad del problema (1.3.1) comenzaremos por recordar primero el siguiente resultado:

Dado un dominio Lipschitz acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $w \in A_2$ , se tiene la siguiente desigualdad con pesos de Poincaré (ver [?]). Para  $v \in H_{w,0}^1(\Omega)$ , se tiene

$$\|v\|_{L_w^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)} \quad (1.3.3)$$

donde la constante depende solo de  $w$  y  $\Omega$ .

**Teorema 1.3.1.** Dada  $a \in A_2$  y  $f \in (H_{a,0}^1(\Omega))^*$  el problema definido en (1.3.1) tiene una solución única  $u \in H_{a,0}^1(\Omega)$ . Y, además,

$$\|u\|_{H_{a,0}^1(\Omega)} \lesssim \|f\|_{(H_{a,0}^1(\Omega))^*} \quad (1.3.4)$$

*Demostración.* La prueba sigue los argumentos clásicos aplicando el teorema de Lax–Milgram. Partiendo de la formulación débil del problema:

Hallar  $u \in H_{a,0}^1(\Omega)$  tal que

$$\int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{a,0}^1(\Omega).$$

Notemos que el lado izquierdo de la igualdad es una forma bilineal continua en el espacio  $H_{a,0}^1(\Omega)$ . Usando que vale (1.3.3) la forma resulta coercitiva.

□

### 1.3.2. Formulación mixta débil

Recordemos que buscamos aproximar simultáneamente las variables  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $u$ .

Para esto vamos a trabajar con los siguientes espacios con peso. Consideramos :

$$\mathbf{H}_w(\operatorname{div}, D) = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}_w^2(D) : \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \in L_w^2(D)\}, \quad (1.3.5)$$

el cual resulta un espacio de Hilbert con la norma dada por

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_w(\text{div}, D)}^2 = \|\boldsymbol{\tau}\|_{L_w^2(D)}^2 + \|\text{div } \boldsymbol{\tau}\|_{L_w^2(D)}^2.$$

Partiendo de (1.3.2), multiplicando por funciones de prueba e integrando por partes, obtenemos la formulación mixta débil:

Se busca  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}(\text{div}, \Omega)$  y  $u \in L_a^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a^{-1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} u \text{div } \boldsymbol{\tau} = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}(\text{div}, \Omega) \\ \int_{\Omega} v \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \int_{\Omega} fv & \forall v \in L_a^2(\Omega) \end{cases} \quad (1.3.6)$$

Notemos que la condición de contorno de Dirichlet está implícita en la formulación débil.

## 1.4. Aproximación por método mixto de elementos finitos

Dado  $D$  un dominio poligonal cualquiera, consideramos  $\mathcal{T}_h$ , una triangulación conforme en simplex de  $D$ , es decir  $D = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$  (ver [?]).

Sea  $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$  el tamaño de la malla, con  $h_K$  el diámetro de cada elemento  $K$ . Se define a  $\{\mathcal{T}_h\}$  como una familia regular de particiones, si existe una constante positiva  $\gamma$  tal que, para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  y todo  $h$ , se cumple que,

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \gamma \quad (1.4.1)$$

donde  $\rho_K$  es el diámetro de la bola más grande contenida en  $K$ .

**Definición 1.4.2.** El espacio local de Raviart Thomas [?] de orden  $k \geq 0$  en un simplex  $K \subset \mathbb{R}^n$  está dado por:

$$\mathcal{RT}_k(K) = \mathcal{P}_k(K) + x\mathcal{P}_k(K), \quad (1.4.3)$$

donde  $\mathcal{P}_k(K)$  denota el espacio de los polinomios de grado menor o igual que  $k$  restringido a  $K$ , y  $\mathcal{P}_k(K) = \mathcal{P}_k(K)^n$ .

Introducimos también los espacios globales de Raviart-Thomas [?]:

**Definición 1.4.4.** Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación conforme, definimos el espacio global de Raviart-Thomas como:

$$\mathcal{S}_h^k = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}(\text{div}, D) : \boldsymbol{\tau}|_K \in \mathcal{RT}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.4.5)$$

Necesitaremos también definir para la aproximación mixta el espacio:

$$V_h^k = \{v \in L^2(D) : v|_K \in \mathcal{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (1.4.6)$$

Tanto la aproximación por métodos mixtos, como el análisis del error lo llevaremos a cabo para un  $k$  fijo, por lo tanto dejamos de lado la dependencia en la notación y notamos a los espacios por  $\mathbf{S}_h$  y  $V_h$ .

De esta manera, para la variable vectorial usaremos el espacio  $\mathbf{S}_h$  definido en (1.4.5) y para la variable escalar, el espacio  $V_h$  definido en (1.4.6), obteniendo como aproximación mixta:

Se busca  $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{S}_h$  y  $u_h \in V_h$  tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} a^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} u_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{S}_h, \\ \int_{\Omega} v \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h = \int_{\Omega} fv & \forall v \in V_h. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Observemos que el lado izquierdo de la primera ecuación tiene sentido siempre que  $a^{-1} \in L^1(\Omega)$ , en particular, si  $a \in A_2$ .

En [?, ?] se puede encontrar la existencia y unicidad de la solución discreta.

Si bien el problema continuo original está bien definido para  $f \in (H_{a,0}^1(\Omega))^*$ , la definición de la solución vía el método mixto de elementos finitos por Raviart-Thomas requiere más regularidad de la función  $f$  para que  $\int_{\Omega} fv$  esté bien definida para  $v \in V_h$ . Una hipótesis suficiente es que  $f \in L^1(\Omega)$ , condición que utilizaremos en algunos de nuestros ejemplos numéricos.

#### 1.4.1. Operadores $\Pi_h$ y $P_h$ , y la propiedad del diagrama conmutativo

Para el desarrollo de nuestra teoría es necesario que los espacios de elementos finitos cumplan la propiedad del diagrama conmutativo. Para la misma, necesitamos definir a los operadores  $\Pi_h$  y  $P_h$ .

Llamando  $F_i$  a las caras (lados en 2D) de  $K$  y  $\mathbf{n}_i$  a los vectores normales exteriores correspondientes, definimos a la interpolación de Raviart-Thomas en cada elemento  $K$ ,  $\Pi_K$  como (ver, por ejemplo, [?]):

$$\int_{F_i} \Pi_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i p_k = \int_{F_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_i p_k \quad \forall p_k \in \mathcal{P}_k(F_i), \quad i = 1, \dots, n+1$$

y, si  $k \geq 1$ ,

$$\int_K \Pi_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_{k-1} dx = \int_K \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_{k-1} \quad \forall \mathbf{p}_{k-1} \in \mathcal{P}_{k-1}(K),$$

donde  $\Pi_K : \mathbf{H}_w^1(K) \rightarrow \mathbf{S}_h(K)$ . Dado que las funciones restringidas a  $W^{1,1}(K)$  pertenecen a  $L^1(\partial K)$ , los grados de libertad están bien definidos para  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{W}^{1,1}(K)$ . Como mencionamos en la Sección 1.2, para  $w \in A_2$  resulta que  $H_w^1(K) \subset W^{1,1}(K)$  y así  $\Pi_K$  está bien definido en  $\mathbf{H}_w^1(K)$ . Entonces, el espacio global para la aproximación de la variable vectorial para una partición  $\mathcal{T}_h$  es el ya definido en (1.4.5),  $\mathbf{S}_h^k$ , y el asociado a la variable escalar es el espacio  $V_h^k$  dado por (1.4.6).

La proyección  $P_h$  se da localmente por  $(P_h v)|_K = P_K v$  donde  $P_K : L_w^2(K) \rightarrow \mathcal{P}_k(K)$  se define por

$$\int_K (v - P_K v) p_k = 0 \quad \forall p_k \in \mathcal{P}_k(K).$$

Notemos que  $P_K$  es la proyección ortogonal en  $L^2(K)$  (sin el peso). Destacamos que  $P_K$  está bien definido en  $L^1(K)$  y, por lo tanto, en particular, en  $L_w^2(K)$ .

Trabajaremos para un  $k$  fijo, tenemos entonces asociadas a estas particiones los espacios de elementos finitos,  $\mathbf{S}_h \subset \mathbf{H}_w(\text{div}, D)$ ,  $V_h \subset L_w^2(D)$ , el operador

$$\Pi_h : \mathbf{H}_w(\text{div}, D) \cap \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H_w^1(K)^n \rightarrow \mathbf{S}_h$$

tal que  $(\Pi_h \boldsymbol{\tau})|_K = \Pi_K \boldsymbol{\tau} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$  y por último, la proyección  $L^2$ -ortogonal

$$P_h : L_w^2(D) \rightarrow V_h.$$

De modo que se cumple que

$$\text{div } \mathbf{S}_h = V_h, \tag{1.4.8}$$

y, para todo  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w(\text{div}, D) \cap \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H_w^1(K)^n$ ,

$$\int_D \text{div} (\boldsymbol{\tau} - \Pi_h \boldsymbol{\tau}) v = 0 \quad \forall v \in V_h. \tag{1.4.9}$$

Y, por consecuencia, la propiedad del diagrama comutativo, es decir :

$$\begin{array}{ccc} H_w^1(D)^n & \xrightarrow{\text{div}} & L_w^2(D) \\ \downarrow \Pi_h & & \downarrow P_h \\ \mathbf{S}_h & \xrightarrow{\text{div}} & V_h \rightarrow 0 \end{array} \tag{1.4.10}$$

donde reemplazamos  $\mathbf{H}_w(\text{div}, D) \cap \prod_{K \in \mathcal{T}_h} H_w^1(K)^n$  por el subespacio  $H_w^1(D)^n$ , para simplificar notación.

En resumen, se tiene que,

$$\text{div } \Pi_h = P_h \text{div}. \quad (1.4.11)$$

# Capítulo 2

## Estimaciones a priori del error

El análisis de error se divide en dos pasos. El primero consiste en demostrar estimaciones para el error de aproximación en términos del error para algún operador de interpolación o proyección apropiado. Esta parte del análisis se puede realizar para espacios finitos mixtos generales, siempre que cumplan con la llamada propiedad del diagrama conmutativo (1.4.10), así como con algunas estimaciones de estabilidad con peso para las proyecciones apropiadas.

Llevaremos a cabo el análisis de las estimaciones del error a priori de problemas elípticos no uniformes como el planteado en (1.3.1). Partiremos por el caso de orden entero, para continuar con el caso de orden fraccionario. Para esto, recordaremos algunos resultados de [?] en los que se prueba que la estimación óptima del orden del error de la solución de Raviart-Thomas via el método mixto se sigue de la estimación del error con normas con peso apropiados. Y extenderemos estos resultados para el caso de orden fraccionario.

Trabajaremos con el sistema equivalente de primer orden definido en (1.3.2):

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} + a\nabla u = 0 & \text{en } D \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = f & \text{en } D \\ u = 0 & \text{en } \Gamma. \end{cases}$$

### 2.1. Estimaciones de error para elementos de Raviart-Thomas

Supongamos que tenemos una familia regular de particiones  $\{\mathcal{T}_h\}$  del dominio  $D$ , es decir, que satisfacen la condición de regularidad dada en (1.4.4). Esto es necesario para demostrar estimaciones de error para los operadores  $\Pi_h$  y  $P_h$  definidos en la Sección 1.4.1.

Partiendo de que se cumplen (1.4.8), (1.4.9) y por lo tanto (1.4.11), probaremos primero, para el caso donde  $\sigma$  es una función suave, la estimación del error de interpolación para la familia de espacios de Raviart–Thomas de orden arbitrario  $k \geq 0$  en un  $K$  simplex cualquiera y de dimensión general  $n$ . Luego, para el caso donde  $\sigma$  no es suave, nos restringiremos al caso  $k = 0$ .

Trabajamos en un elemento de referencia fijo  $\hat{K}$  para luego cambiar variables via la transformación de Piola. Dado un simplex  $K$ , sea  $\Phi$  una transformación afín dada por  $\Phi(\hat{x}) = a\hat{x} + b$  que transforma  $\hat{K}$  en  $K$ , recordamos las siguientes estimaciones,

$$\|A\| \leq \frac{h_K}{\rho_{\hat{K}}} \quad \text{y} \quad \|A^{-1}\| \leq \frac{h_{\hat{K}}}{\rho_K}. \quad (2.1.1)$$

La transformación de Piola está dada por

$$\sigma(x) = \frac{1}{|\det A|} A \hat{\sigma}(\hat{x})$$

donde  $x = \Phi(\hat{x})$ . Se sabe que (ver [?, Lema 3.4] para más detalles)

$$\Pi_{\hat{K}} \hat{\sigma} = \widehat{\Pi_K \sigma}. \quad (2.1.2)$$

Consideramos ahora una variante de la desigualdad del estilo de Poincaré para  $K$ , un elemendo cualquiera de  $\{\mathcal{T}_h\}$ .

**Lema 2.1.1.** Sea  $K$  un simplex de  $\{\mathcal{T}_h\}$ , sea  $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  una función no negativa. Dado  $0 < s < 1$ ,  $m = 0$  y  $v \in H_w^s(K)$ , tenemos

$$\|v - v_K\|_{L_w^2(K)} \lesssim h_K^s |v|_{H_w^s(K)} \quad (2.1.3)$$

donde  $v_K = \frac{1}{|K|} \int_K v$ .

*Demostación.* Observemos que

$$v(x) - v_K = \frac{1}{|K|} \int_K (v(x) - v(y)) dy$$

y luego,

$$\begin{aligned} \int_K |v(x) - v_K|^2 w(x) dx &= \frac{1}{|K|^2} \int_K \left( \int_K (v(x) - v(y)) dy \right)^2 w(x) dx \\ &\leq \frac{1}{|K|} \int_K \int_K |v(x) - v(y)|^2 w(x) dy dx \\ &= \frac{1}{|K|} \int_K \int_K \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x - y|^{n+2s} w(x) dy dx \end{aligned}$$

por lo que,

$$\int_K |v(x) - v_K|^2 w(x) dx \leq \frac{h_K^{n+2s}}{|K|} \int_K \int_K \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{n+2s}} w(x) dy dx \lesssim h_K^{2s} |v|_{H_w^s(K)}^2.$$

□

Damos ahora una demostración sencilla de la desigualdad de Poincaré con pesos cuando el dominio es un simplex para tener información explícita de la dependencia de la constante en términos del diámetro, de la regularidad del elemento y de la constante  $A_2$  del peso. Como consecuencia observamos que la constante en la desigualdad está uniformemente acotada en familias regulares de mallas.

**Lema 2.1.2.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un simplex tal que  $h_K/\rho_K \leq \gamma$ . Entonces si  $w \in A_2$  y  $v \in H_w^1(K)$ , se tiene

$$\|v - v_K\|_{L_w^2(K)} \leq C_P h_K \|\nabla v\|_{L_w^2(K)}, \quad (2.1.4)$$

con  $C_P = C_n \gamma^n [w]_{A_2}$  donde  $C_n$  es la constante en (1.1.3).

*Demostración.* Por densidad podemos suponer que  $v$  es diferenciable. Entonces, dado  $x \in K$ , tenemos

$$v(x) - v_K = \frac{1}{|K|} \int_K \int_0^1 \nabla v(x + t(y - x)) \cdot (x - y) dt dy.$$

Sea  $g \in L_w^2(\mathbb{R}^n)$  la extensión por cero fuera de  $K$  de  $|\nabla v|$ . Intercambiando el orden de integración, haciendo el cambio de variables  $z = x + t(y - x)$ , y usando que  $|x - y| \leq h_K$  y que  $|z - x| \leq th_K$  obtenemos

$$\begin{aligned} |v(x) - v_K| &\leq \frac{h_K}{|K|} \int_0^1 \frac{1}{t^n} \int_{|z-x| \leq th_K} g(z) dz dt \\ &\leq h_K \int_0^1 \frac{|B(x, th_K)|}{|K| t^n} \frac{1}{|B(x, th_K)|} \int_{|z-x| \leq th_K} g(z) dz dt \\ &\leq \gamma^n h_K \int_0^1 \frac{1}{|B(x, th_K)|} \int_{|z-x| \leq th_K} g(z) dz dt \leq \gamma^n h_K \mathcal{M}g(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, (2.1.4) se deduce de (1.1.3). □

Utilizando este lema conjuntamente con la desigualdad de Poincaré fraccionaria dada en el Lema 2.1.1 damos a continuación un resultado de aproximación polinomial para funciones en espacios de Sobolev fraccionarios con pesos. En el caso de espacios de orden entero este resultado fue demostrado en [?, ?] pero damos aquí una demostración más corta siguiendo el argumento dado por Verfürth en el caso sin pesos (ver [?]). Por otra parte, en el caso de orden no entero y sin pesos el resultado está contenido en [?] pero, nuevamente, nuestro argumento es más sencillo.

**Lema 2.1.3.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un simplex tal que  $h_K/\rho_K \leq \gamma$ . Entonces si  $w \in A_2$  y  $v \in H_w^{k+s}(K)$ , con  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $0 < s \leq 1$ , existe un polinomio  $p_k = p_k(v) \in \mathcal{P}_k$  tal que

$$|v - p_k|_{H_w^j(K)} \lesssim h_K^{k+s-j} |v|_{H_w^{k+s}(K)} \quad \forall j = 0; \dots; k. \quad (2.1.5)$$

*Demostración.* Dada  $v \in H_w^{k+s}(K)$  sea  $p_k \in \mathcal{P}_k$  tal que

$$\int_K D^\alpha p_k = \int_K D^\alpha v \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Los grados de libertad están bien definidos porque  $H_w^k(K) \subset W^{k,1}(K)$ . Además, como el número de condiciones es igual a la dimensión de  $\mathcal{P}_k$ , la existencia de  $p_k$  se sigue de la unicidad. Para ver esta última consideremos  $p \in \mathcal{P}_k$  tal que  $\int_K D^\alpha p = 0$ ,  $\forall |\alpha| \leq k$ . Si  $|\alpha| = k$ ,  $D^\alpha p$  es constante y con integral cero, por lo tanto,  $D^\alpha p = 0$ . Análogamente se ve ahora que las derivadas de orden  $k-1$  son todas nulas, e iterando el argumento se llega a que  $p = 0$ .

Usando que  $\int_K D^\alpha (v - p_k) = 0$  para todo  $|\alpha| \leq k$ , podemos aplicar reiteradamente la desigualdad de Poincaré (2.1.4) y tenemos,

$$\begin{aligned} \|v - p_k\|_{L_w^2(K)} &\lesssim h_K |v - p_k|_{H_w^1(K)} \lesssim h_k^2 |v - p_k|_{H_w^2(K)} \lesssim \dots \\ &\dots \lesssim h_k^k |v - p_k|_{H_w^k(K)} \lesssim h_K^{k+s} |v|_{H_w^{k+s}(K)} \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos nuevamente (2.1.4) cuando  $s = 1$  y la desigualdad del Lema 2.1.1 si  $0 < s < 1$ .  $\square$

En lo que sigue, usaremos la hipótesis de regularidad (1.4.4) y el siguiente resultado:

**Observación 2.1.1.** Para  $p > 1$  y  $w \in A_p$  tenemos,

$$\left( \frac{1}{|K|} \int_K w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|K|} \int_K w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq \gamma^{np} [w]_{A_p} \quad (2.1.6)$$

con  $\gamma$  la constante de regularidad.

*Demostración.* Sean  $B_1$  una bola que contiene a  $K$  y sea  $B_2$  la bola más grande contenida en  $K$  tenemos que

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{|K|} \int_K w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|K|} \int_K w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} &\leq \\ \left( \frac{|B_1|}{|K|} \right)^p \left( \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} w(x) dx \right) \left( \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} w(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Usando que  $|B_2| < |K| < |B_1|$  y la hipótesis de regularidad (1.4.4) podemos concluir que

$$\frac{|B_1|}{|K|} \leq \gamma^n.$$

Tomando supremo sobre  $B_1$  tenemos el resultado (2.1.6)  $\square$

**Teorema 2.1.4.** Dado  $K = \Phi(\hat{K}) \subset \mathbb{R}^n$  un simplex y  $k \geq 1$ , sea  $\Pi_K$  la interpolación de Raviart-Thomas sobre  $\mathcal{RT}_k(K)$ . Si  $w \in A_2$  y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w^{k+s}(K)$  con  $0 < s \leq 1$ , entonces existe una constante  $C$  que depende solo de  $n, k, s, [w]_{A_2}$  y la constante de regularidad  $\gamma$  tal que,

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \leq Ch_K^{k+s} |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^{k+s}(K)}. \quad (2.1.7)$$

*Demostración.* Procediendo exactamente como en el [?, Teorema 3.1], pero utilizando el teorema de trazas (1.2.5) en  $\hat{K}$  y utilizando (1.2.7) para  $\hat{w}_K$  en  $\hat{K}$ , obtenemos

$$|\Pi_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{x})| \leq C \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{W}^{1,1}(\hat{K})} \leq C \left( \int_{\hat{K}} \hat{w}_K^{-1} \right)^{1/2} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{H}_{\hat{w}_K}^1(\hat{K})}$$

donde la constante depende solo del elemento de referencia y  $n$ . Luego, elevando al cuadrado esta desigualdad, multiplicando por  $\hat{w}_K(\hat{x})$  e integrando, obtenemos

$$\|\Pi_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}_{\hat{w}_K}^2(\hat{K})} \leq C \left( \int_{\hat{K}} \hat{w}_K \right)^{1/2} \left( \int_{\hat{K}} \hat{w}_K^{-1} \right)^{1/2} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{H}_{\hat{w}_K}^1(\hat{K})}.$$

Pero,

$$\left( \int_{\hat{K}} \hat{w}_K \right) \left( \int_{\hat{K}} \hat{w}_K^{-1} \right) \leq C \left( \frac{1}{|K|} \int_K w \right) \left( \frac{1}{|K|} \int_K w^{-1} \right) \leq C[w]_{A_2}$$

donde hemos usado (2.1.6) en el caso  $p = 2$ . Por lo tanto,

$$\|\Pi_{\hat{K}} \hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}_{\hat{w}_K}^2(\hat{K})} \leq C[w]_{A_2}^{1/2} \|\hat{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{H}_{\hat{w}_K}^1(\hat{K})}$$

donde  $C$  depende solo de  $\gamma$  y  $n$ . Haciendo ahora el cambio de variables  $x = \Phi(\hat{x})$  y usando (2.1.1), obtenemos (ver detalles en [?, Teorema 3.1]),

$$\|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \leq C \{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^1(K)} \}, \quad (2.1.8)$$

donde la constante depende solo del elemento de referencia,  $[w]_{A_2}$  y la constante de regularidad  $\gamma$ .

Recordamos que  $\mathcal{P}_k(K) \subset \mathbf{S}_h^k$ , y que dado  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(K)$ ,  $\Pi_K \mathbf{p} = \mathbf{p}$ . Luego,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} &= \|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{p} - \Pi_K(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{p})\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \\ &\leq C \{ \|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{p}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K |\boldsymbol{\tau} - \mathbf{p}|_{\mathbf{H}_w^1(K)} \} \end{aligned}$$

y eligiendo ahora,  $\mathbf{p} = p_k(\boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{P}_k(K)$  como en el Lema 2.1.3, obtenemos (2.1.7). □

El análisis del error desarrollado hasta el momento no se puede aplicar directamente para estimar el error en cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  para el caso fraccionario con  $s \in (0, 1)$ . Comenzaremos por repasar un resultado de la desigualdad de trazas para el caso fraccionario seguido de un resultado de inmersión entre espacios Sobolev con pesos y sin peso.

Denotaremos por  $\ell$  a cualquier  $(n - 1)$ -dimensional simplex que forma parte de  $\partial K$ .

**Lema 2.1.5.** Dados  $1 < p < \infty$  y  $v \in W^{s,p}(K)$ , si  $1/p < s < 1$  y  $m = 0$  tenemos que

$$\|v\|_{L^p(\ell)} \lesssim \left( \frac{|\ell|}{|K|} \right)^{1/p} (\|v\|_{L^p(K)} + h_K^s |v|_{W^{s,p}(K)}).$$

*Demuestra*ción. Se sigue del resultado del teorema de trazas para dominios Lipschitz (ver [?, Teorema 1.5.1.2] aplicado en un elemento de referencia combinado con argumentos estándar de reescalado.  $\square$

**Lema 2.1.6.** Para  $0 < \varepsilon < s < 1$ ,  $1 < p < 2$  y  $w \in A_q$ , con  $q = 2/p$ , tenemos que

$$H_w^s(K) \subset W^{s-\varepsilon,p}(K)$$

y, más aún, para  $v \in H_w^s(K)$ ,

$$\|v\|_{L^p(K)} \leq \|v\|_{L_w^2(K)} \left( \int_K w(x)^{-q'/q} dx \right)^{1/pq'} \quad (2.1.9)$$

y

$$|v|_{W^{s-\varepsilon,p}(K)} \lesssim h_K^\varepsilon |v|_{H_w^s(K)} \left( \int_K w(x)^{-q'/q} dx \right)^{1/pq'} \quad (2.1.10)$$

donde  $q'$  es el exponente dual de  $q$  y la constante detrás depende de  $\varepsilon$  y  $p$ .

*Demuestra*ción. Escribiendo

$$\int_K |v(x)|^p dx = \int_K |v(x)|^p w(x)^{1/q} w(x)^{-1/q} dx,$$

la estimación en (2.1.9) se sigue de la desigualdad de Hölder con  $q$  y  $q'$ .

Para probar la estimación en (2.1.10), aplicando la desigualdad de Hölder tenemos,

$$\begin{aligned} |v|_{W^{s-\varepsilon,p}(K)}^p &= \int_K \int_K \frac{|v(y) - v(x)|^p}{|y - x|^{\frac{n}{q} + ps}} \frac{1}{|y - x|^{\frac{n}{q'} - \varepsilon p}} dy dx \\ &\leq \int_K \left( \int_K \frac{|v(y) - v(x)|^2}{|y - x|^{n+2s}} dy \right)^{1/q} \left( \int_K \frac{1}{|y - x|^{n-\varepsilon pq'}} dy \right)^{1/q'} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\left( \int_K \frac{1}{|y - x|^{n-\varepsilon pq'}} dy \right)^{1/q'} \leq C h_K^{\varepsilon p},$$

con  $C$  dependiendo de  $\varepsilon$  y  $p$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |v|_{W^{s-\varepsilon,p}(K)}^p &\leq C h_K^{\varepsilon p} \int_K \left( \int_K \frac{|v(y) - v(x)|^2}{|y - x|^{n+2s}} dy \right)^{1/q} dx \\ &= C h_K^{\varepsilon p} \int_K \left( \int_K \frac{|v(y) - v(x)|^2}{|y - x|^{n+2s}} w(x) dy \right)^{1/q} w(x)^{-1/q} dx. \end{aligned}$$

Luego, usando nuevamente la desigualdad de Hölder obtenemos (2.1.10).  $\square$

Probaremos ahora las estimaciones del error del caso de orden fraccionario  $1/2 < s < 1$ . Para este, vamos a restringir nuestro análisis al espacio de Raviart-Thomas de orden más bajo.

**Teorema 2.1.7.** Dados  $1/2 < s < 1$  y  $w \in A_{2s}$ , para  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w^s(K)$  tenemos que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \lesssim h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)} \quad (2.1.11)$$

*Demostración.* Usaremos la siguiente propiedad clásica de las clases  $A_p$ :

Dado  $w \in A_{2s}$  entonces existe  $q$  que depende de  $w$ ,  $1 < q < 2s$ , tal que  $w \in A_q$  (ver por ejemplo [?, ?]). Luego, podemos escribir a  $q = 2/p$  con  $p \in (1, 2)$  y tomar  $\varepsilon > 0$  tal que  $1/p < s - \varepsilon$ .

Del Lema 2.1.6 podemos concluir que  $\mathbf{H}_w^s(K) \subset \mathbf{W}^{s-\varepsilon, p}(K)$  y tal que  $\Pi_K \boldsymbol{\tau}$  está bien definido. Más aún, si  $P_i$  denota el vértice opuesto a  $\ell_i$ , tenemos

$$\Pi_K \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{n+1} \left( \int_{\ell_i} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_i \right) \psi_{\ell_i}, \quad (2.1.12)$$

donde las funciones bases están definidas como

$$\psi_{\ell_i}(x) = \frac{(x - P_i)}{n|K|} \quad (2.1.13)$$

Usando el Lema 2.1.5 para  $\mathbf{W}^{s-\varepsilon, p}(K)$  en cada  $\ell_i$  tenemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\ell_i} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_i \right| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^1(\ell_i)} \leq |\ell_i|^{1/p'} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^p(\ell_i)} \\ &\lesssim \left( \frac{|\ell_i|^{1/p'} |\ell_i|^{1/p}}{|K|^{1/p}} \right) (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^p(K)} + h_K^{s-\varepsilon} |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{W}^{s-\varepsilon, p}(K)}), \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

donde  $p'$  denota el exponente dual de  $p$ .

Por otro lado, se sigue de (2.1.13) que  $\|\psi_{\ell_i}\|_{L^\infty(K)} \leq h_K/n|K|$ , y usando esta estimación junto a (2.1.14) en (2.1.12) obtenemos

$$\begin{aligned} \|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} &\lesssim \left( \frac{h_K}{|K|} \frac{|\ell_i|}{|K|^{1/p}} \right) (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^p(K)} + h_K^{s-\varepsilon} |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{W}^{s-\varepsilon, p}(K)}) \\ &\lesssim \frac{1}{|K|^{1/p}} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^p(K)} + h_K^{s-\varepsilon} |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{W}^{s-\varepsilon, p}(K)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (2.1.9) y (2.1.10), obtenemos

$$\|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \lesssim \frac{1}{|K|^{1/p}} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)}) \left( \int_K w^{-q'/q} \right)^{1/pq'}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} &\leq \|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \left( \int_K w \right)^{1/2} \\ &\lesssim \frac{1}{|K|^{1/p}} \left( \int_K w \right)^{1/2} \left( \int_K w^{-q'/q} \right)^{1/pq'} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)}) \\ &\lesssim \left( \frac{1}{|K|} \int_K w \right)^{1/2} \left( \frac{1}{|K|} \int_K w^{-q'/q} \right)^{1/pq'} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)}). \end{aligned}$$

Usando (2.1.6) concluimos que

$$\|\Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \lesssim [w]_{A_q}^{1/2} (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)}).$$

Para finalizar la prueba usamos esta estimación y algunos argumentos clásicos algebraicos, de hecho, dado que  $\Pi_K$  se puede pensar como la función identidad entre las funciones vectoriales que son constantes, entonces

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\tau} - \Pi_K \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} &= \|\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}} - \Pi_K(\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}})\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} \\ &\lesssim (\|\boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\tau}}\|_{\mathbf{L}_w^2(K)} + h_K^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(K)}), \end{aligned}$$

y por lo tanto, (2.1.11) se sigue de la desigualdad de Poincaré dada en (2.1.3).  $\square$

**Lema 2.1.8.** Dado  $K \subset \mathbb{R}^n$  un simplex,  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  y  $0 < s \leq 1$ . Sea  $P_K$  la proyección  $L^2$ -ortogonal sobre  $\mathcal{P}_k(K)$ . Entonces, si  $w \in A_2$ , existe una constante  $C$  que depende solo de  $n$ ,  $k$ ,  $[w]_{A_2}$  y la constante de regularidad  $\gamma$  tal que,

$$\|P_K v\|_{L_w^2(K)} \leq C \|v\|_{L_w^2(K)} \quad (2.1.15)$$

y, si  $v \in H_w^{k+s}(K)$ ,

$$\|v - P_K v\|_{L_w^2(K)} \leq C h_K^{k+s} |v|_{H_w^{k+s}(K)}. \quad (2.1.16)$$

*Demuestra*ción. Sea  $\{p_\alpha\}_{|\alpha| \leq k}$  una base ortonormal de  $\mathcal{P}_k(K)$ . Entonces tenemos

$$P_K v(x) = \sum_{\alpha} \left( \int_K v p_{\alpha} \right) p_{\alpha}(x)$$

y luego,

$$|P_K v(x)| \leq \sum_{\alpha} \|p_{\alpha}\|_{\infty}^2 \|v\|_{L^1(K)} \leq \sum_{\alpha} \|p_{\alpha}\|_{\infty}^2 \left( \int_K w^{-1} \right)^{1/2} \|v\|_{L_w^2(K)}.$$

Pero, dado que  $\|p_{\alpha}\|_{L^2(K)} = 1$ , mediante una estimación inversa estándar sabemos que  $\|p_{\alpha}\|_{\infty}^2 \leq C/|K|$ , y por lo tanto,

$$|P_K v(x)|^2 \leq \frac{C}{|K|^2} \left( \int_K w^{-1} \right) \|v\|_{L_w^2(K)}^2$$

donde la constante depende de  $n$  y  $k$ . Multiplicando por  $w(x)$ , integrando y usando (2.1.6), obtenemos

$$\|P_K v\|_{L_w^2(K)}^2 \leq C[w]_{A_2} \|v\|_{L_w^2(K)}^2$$

y así se cumple (2.1.15).

Ahora, para cualquier  $p \in \mathcal{P}_{k+s}(K)$ , tenemos  $P_K p = p$ , y por lo tanto

$$\|v - P_K v\|_{L_w^2(K)} \leq \|v - p - P_K(v - p)\|_{L_w^2(K)} \leq C\|v - p\|_{L_w^2(K)}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado (2.1.15). Por lo tanto, eligiendo  $p = p_{k+s}(v)$  como el polinomio de Taylor promediado en  $K$  dado por el Lema 2.1.3, obtenemos (2.1.16).  $\square$

## 2.2. Aplicación a problemas elípticos degenerados

Para la aplicación a problemas elípticos degenerados partimos de la aproximación mixta enunciada en (1.4.7) bajo la hipótesis que  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}(\text{div}, \Omega)$ , espacio definido en (1.3.5). La siguiente estimación de error se sigue de argumentos similares a los dado en [?, ?]. Incluiremos la demostración para ver que los argumentos usuales se pueden adaptar para problemas degenerados. Despreciamos los errores de integración numérica asumiendo que todas las integrales se pueden calcular exactamente.

**Lema 2.2.1.** Supongamos que  $a^{-1} \in L^1(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)$ . Si  $\boldsymbol{\sigma}$  es la solución de (1.3.6), y  $\boldsymbol{\sigma}_h$  es la solución de (1.4.7), entonces

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_h \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)}.$$

*Demostración.* Restando la segunda ecuación en (1.4.7) de la segunda en (1.3.6) y usando (1.4.9) obtenemos

$$\int_{\Omega} \text{div}(\Pi_h \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) v = 0 \quad \forall v \in V_h.$$

Dado que  $\Pi_h \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbf{S}_h$ , y vale que (1.4.8) tenemos que  $\text{div}(\Pi_h \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) = 0$ . Tomando  $\boldsymbol{\tau} = \Pi_h \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h$  en (1.3.6) y (1.4.7), obtenemos

$$\int_{\Omega} a^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\Pi_h \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) = 0$$

y así,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}^2_{a^{-1}}(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} a^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \Pi_h \boldsymbol{\sigma}) \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}^2_{a^{-1}}(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_h \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}^2_{a^{-1}}(\Omega)},\end{aligned}$$

y el lema queda probado.  $\square$

Para estimar el error en la aproximación de la variable escalar, necesitamos el siguiente resultado que generaliza al caso con peso la existencia de inversos continuos del operador divergencia.

**Lema 2.2.2.** Sea  $w \in A_2$ , entonces, dada  $\phi \in L_w^2(\Omega)$ , existe  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w^1(\Omega)$  tal que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \phi$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_w^1(\Omega)} \leq C \|\phi\|_{L_w^2(\Omega)},$$

donde la constante  $C$  depende sólo de  $n$ ,  $\Omega$  y  $\omega$ .

*Demuestra*ción. Extendemos  $\phi$  por cero fuera de  $\Omega$  y definimos  $u = \Phi * \phi$  donde  $\Phi$  es la solución fundamental del Laplaciano en  $\mathbb{R}^n$ . Tenemos entonces

$$\Delta u = \phi \tag{2.2.1}$$

Se sabe que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -R_i R_j \phi$$

donde  $R_i$  y  $R_j$  son transformadas de Riesz, las cuales son continuas en  $L_w^2$  si  $w \in A_2$  (ver por ejemplo [?, ?]). En consecuencia,

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L_w^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\phi\|_{L_w^2(\Omega)} \tag{2.2.2}$$

Por otra parte, llamando  $d$  al diámetro de  $\Omega$ , para  $x \in \Omega$  se tiene que,

$$|\nabla u(x)| \lesssim \int_{|x-y| \leq d} \frac{|\phi(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy \lesssim \mathcal{M}\phi(x)$$

donde en el último paso usamos un lema conocido de Hedberg [?].

Entonces, por (1.1.3) resulta que

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)} \lesssim \|\phi\|_{L_w^2(\Omega)}$$

lo que junto con (2.2.1) y (2.2.2) implican que  $\boldsymbol{\tau} := \nabla u$  cumple las condiciones del enunciado.  $\square$

**Lema 2.2.3.** Sean  $(\boldsymbol{\sigma}, u)$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h)$  las soluciones de (1.3.6) y (1.4.7) respectivamente. Sea  $a \in A_2$  y  $\Pi_h$  tal que cumple (2.2.4), entonces

$$\|u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)} \leq \|u - P_h u\|_{L_a^2(\Omega)} + C\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)}, \quad (2.2.3)$$

donde  $C$  depende de la constante en el Lema 2.2.2.

*Demostración.* Partiendo del Lema 2.2.2, existe  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega) \cap \mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\text{div}, \Omega)$  tal que

$$\text{div } \boldsymbol{\tau} = (P_h u - u_h)a$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega)} \leq C\|(P_h u - u_h)a\|_{L_{a^{-1}}^2(\Omega)}.$$

Y, considerando el siguiente resultado de estabilidad con normas con peso :

$$\|\Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq C\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega)}. \quad (2.2.4)$$

El cual se prueba usando que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq Ch\|\nabla \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)},$$

junto a la inmersión de  $\mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega)$  en  $\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)$  y la definición de la norma  $\mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega)$ .

Luego, combinando estos resultados con (1.4.9) estamos en condiciones de probar (2.2.3),

$$\begin{aligned} \|P_h u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (P_h u - u_h) \text{div } \boldsymbol{\tau} = \int_{\Omega} (P_h u - u_h) \text{div } \Pi_h \boldsymbol{\tau} \\ &= \int_{\Omega} (u - u_h) \text{div } \Pi_h \boldsymbol{\tau} = \int_{\Omega} a^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \Pi_h \boldsymbol{\tau} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \|\Pi_h \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \\ &\leq C\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^1(\Omega)} \\ &\leq C\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \|P_h u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)} \end{aligned}$$

finalmente, por desigualdad triangular, se tiene lo que se quería probar.  $\square$

Ahora bien, combinando el Lema 2.2.1 y Lema 2.2.3, obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 2.2.4.** Bajo las hipótesis dadas en el Lema 2.2.3, tenemos

$$\|u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)} \leq \|u - P_h u\|_{L_a^2(\Omega)} + C\|\boldsymbol{\sigma} - \Pi_h \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)}.$$

Usando en forma conjunta las estimaciones de error obtenidas en (2.1.7) y (2.1.16), junto a los resultados anteriores, podemos enunciar el teorema principal para la aproximación por elementos de Raviart–Thomas en familias regulares de mallas.

**Teorema 2.2.5.** Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación regular de  $\Omega$ . Para  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ ,  $0 < s \leq 1$  sea  $\mathbf{S}_h$  y  $V_h$  los espacio definidos en (1.4.5) y (1.4.6). Si  $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in \mathbf{H}_{a^{-1}}(\text{div}, \Omega) \times L_a^2(\Omega)$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_h, u_h) \in \mathbf{S}_h \times V_h$  son las soluciones de (1.3.6) y (1.4.7) respectivamente, luego, para  $a \in A_2$ , existe una constante  $C$  que depende solo de  $\Omega$ ,  $a$ ,  $n$ ,  $k$  y  $\gamma$  tal que,

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq Ch^{k+s} |\boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^{k+s}(\Omega)}.$$

y

$$\|u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)} \leq Ch^{k+s} \left\{ |\boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^{k+s}(\Omega)} + |u|_{H_a^{k+s}(\Omega)} \right\}.$$

*Demostración.* La estimación del error para  $\boldsymbol{\sigma}$  se sigue del Lema 2.2.1 combinado con la estimación (2.1.7) aplicada al peso  $a^{-1}$  (recordando que  $a \in A_2$  si y solo si  $a^{-1} \in A_2$ ).

Por otro lado, observamos que (2.1.7) implica la hipótesis (2.2.4) asumida en el Lema 2.2.3. Entonces, para acotar el error para  $u$ , aplicamos ese lema, junto a (2.1.7) nuevamente y (2.1.16).  $\square$

A continuación, adaptando el análisis desarrollado hasta el momento tenemos las estimaciones del error para el caso donde  $\boldsymbol{\sigma}$  está en un espacio de orden fraccionario.

**Teorema 2.2.6.** Sea  $f$  tal que  $P_h f$ , y que la aproximación numérica están bien definidas. Sea  $\{\mathcal{T}_h\}$  una triangulación regular de  $\Omega$ . Si la solución del problema continuo cumple que  $(\boldsymbol{\sigma}, u) \in (\mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega), H_a^s(\Omega))$ , para algún  $1/2 < s < 1$ , y  $a^{-1} \in A_{2s}$  tenemos que

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \lesssim h^s |\boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega)} \tag{2.2.5}$$

y

$$\|u - u_h\|_{L_a^2(\Omega)} \lesssim h^s \left\{ |\boldsymbol{\sigma}|_{\mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega)} + |u|_{H_a^s(\Omega)} \right\}. \tag{2.2.6}$$

*Demostración.* Dado que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega)$  con  $s > 1/2$ , se sigue que  $\Pi_h \boldsymbol{\sigma}$  está bien definida, como  $f$  y  $P_h f$  también, se puede aplicar el Lema 2.2.1 junto al Teorema 2.1.7 para  $w(x) = a^{-1}(x)$  obteniendo (2.2.5).

De la misma manera, podemos aplicar el Lema 2.2.3 y luego (2.2.5), junto a aplicar el Lema 2.1.1 para así obtener (2.2.6).  $\square$

## 2.3. Dominios curvos

En las secciones previas de este capítulo hemos asumido que el dominio era un polítopo. Sin embargo, dado que estamos considerando condiciones Dirichlet homogéneas (i.e.,

la condición natural para la formulación mixta), el resultado puede extenderse a dominios con frontera suave. Por simplicidad restringiremos nuestro estudio a dominios planos. Suponemos que,  $\partial\Omega$  puede dividirse en un número finito de arcos tal que cada uno puede ser representado por una función paramétrica de clase  $C^1$ .

Si generalizamos los triángulos a triángulos con un lado curvo, el dominio  $\Omega$  puede ser perfectamente cubierto por triangulaciones  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  tales que todos los triángulos sin lados en  $\partial\Omega$  sean triángulos estándar, y aquellos con un lado en  $\partial\Omega$  sean triángulos generalizados, es decir, tienen dos lados rectos y uno curvo. De acá en adelante llamaremos a estos triángulos, triángulos generales.

Por consiguiente, puede redefinirse el espacio de Raviart-Thomas para un triángulo general  $\tilde{K}$  en dos dimensiones como,

$$\mathcal{RT}_0(\tilde{K}) = \mathcal{P}_0(\tilde{K}) + x\mathcal{P}_0(\tilde{K}),$$

y de esta manera el espacio global y la aproximación mixta por elementos finitos queda definida como en (1.4.5), (1.4.6) y (1.4.7) pero ahora usando  $\tilde{\mathcal{T}}_h$ .

El próximo paso es ahora extender la definición de  $\Pi_K$  a elementos en  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  y generalizar el Teorema 2.1.7 sobre la estimación del error para el caso con dominios curvos.

Es necesario incluir un poco de notación: Dado  $\tilde{K}$  tal que  $\tilde{K} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$  llamamos  $\ell_1, \ell_2$  a los lados rectos, y,  $\tilde{\ell}_3$ , al lado curvo.  $P_i$ , son los vértices opuestos correspondientes a cada lado para  $i = 1, 2, 3$ . Finalmente,  $\ell_3$  es el segmento  $\overline{P_1 P_2}$ , y  $K \subset \tilde{K}$  el triángulo que tiene a  $P_i$  como vértices, llamamos  $\alpha_i$  al ángulo interior de  $K$  de cada vértice  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . También notaremos por  $\mathbf{n}_i$ , con  $i = 1, 2$  y  $\tilde{\mathbf{n}}_3$  a la normal exterior unitaria de  $\ell_i$ ,  $i = 1, 2$  y  $\tilde{\ell}_3$  respectivamente. (ver Figura: 2.1)

En el siguiente lema construiremos las bases para  $\mathcal{RT}_0(\tilde{K})$  que nos permitirán definir la interpolación de Raviart-Thomas y extender la estimación del error a triángulos generales. Mostraremos también que las funciones bases pueden tener una expresión equivalente a la dada en (2.1.13). Por simplicidad vamos a explicar en detalle el caso  $K \subset \tilde{K}$ , sin embargo otros casos pueden tratarse con argumentos similares.

**Lema 2.3.1.** Definimos

$$\psi_{\tilde{\ell}_3}(x) = \frac{(x - P_3)}{2|\tilde{K}|}, \quad \psi_{\ell_1}(x) = \frac{(x - Q_1)}{2|\tilde{K}|}, \quad \text{y} \quad \psi_{\ell_2}(x) = \frac{(x - Q_2)}{2|\tilde{K}|},$$

donde  $Q_1$  y  $Q_2$  son los puntos definidos por

$$|Q_1 - P_1| = |\ell_2| \frac{|\tilde{K} \setminus K|}{|K|},$$

y el ángulo entre  $P_1 - Q_1$  y el vector  $\mathbf{n}_3$  es  $\pi/2 + \alpha_1$ , y

$$|Q_2 - P_2| = |\ell_1| \frac{|\tilde{K} \setminus K|}{|K|}$$

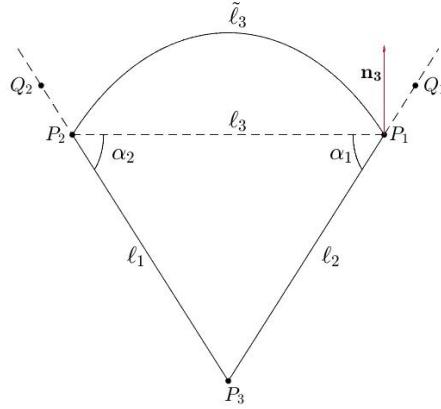


Figura 2.1: Triángulo general junto a las referencias necesarias sobre los elementos de la prueba del Lema 2.3.1.

y el ángulo entre  $P_2 - Q_2$  y el vector  $\mathbf{n}_3$  es  $\pi/2 + \alpha_2$  (ver Figura 2.1).

Luego,

$$\int_{\tilde{\ell}_3} \psi_{\tilde{\ell}_3} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3 = 1, \quad \int_{\ell_i} \psi_{\tilde{\ell}_3} \cdot \mathbf{n}_i = 0 \quad \text{para } i = 1, 2 \quad (2.3.1)$$

y

$$\int_{\tilde{\ell}_3} \psi_{\ell_i} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3 = 0, \quad \int_{\ell_j} \psi_{\ell_i} \cdot \mathbf{n}_j = \delta_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2 \quad \text{y } j = 1, 2 \quad (2.3.2)$$

*Demuestra*o. De la definición de  $\psi_{\tilde{\ell}_3}$  se puede ver que  $\int_{\ell_i} \psi_{\tilde{\ell}_3} \cdot \mathbf{n}_i = 0$ , para  $i = 1, 2$ . Más aún, observemos que  $\int_{\tilde{K}} \operatorname{div} \psi_{\tilde{\ell}_3} = 1$  y por lo que, la primera condición de (2.3.1) se sigue del teorema de la divergencia.

Para probar (2.3.2) consideramos, por ejemplo,  $i = 1$ . Como  $Q_1$  forma parte de una línea recta contenida en  $\ell_2$  se tiene que  $\int_{\ell_2} \psi_{\ell_1} \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ . Por otro lado, aplicando el teorema de la divergencia en  $\tilde{K} \setminus K$  tenemos

$$\int_{\tilde{\ell}_3} \psi_{\ell_1} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3 = \int_{\ell_3} \psi_{\ell_1} \cdot \mathbf{n}_3 + \int_{\tilde{K} \setminus K} \operatorname{div} \psi_{\ell_1} = \frac{|\ell_3|}{2|\tilde{K}|} (P_1 - Q_1) \cdot \mathbf{n}_3 + \frac{|\tilde{K} \setminus K|}{|\tilde{K}|} \quad (2.3.3)$$

pero,

$$\begin{aligned} \frac{|\ell_3|}{2|\tilde{K}|} (P_1 - Q_1) \cdot \mathbf{n}_3 &= \frac{|\ell_3|}{2|\tilde{K}|} |P_1 - Q_1| \cos(\pi/2 + \alpha_1) \\ &= -\frac{|\ell_3|}{2|\tilde{K}|} |\ell_2| \frac{|\tilde{K} \setminus K|}{|K|} \sin \alpha_1 = -\frac{|\tilde{K} \setminus K|}{|K|}, \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

donde hemos usado que  $\sin \alpha_1 = \frac{2|K|}{|\ell_2||\ell_3|}$ . Luego, tomando (2.3.4) y combinándolo con (2.3.3) obtenemos  $\int_{\tilde{\ell}_3} \psi_{\ell_1} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3 = 0$ . Finalmente, el resultado  $\int_{\ell_1} \psi_{\ell_1} \cdot \mathbf{n}_1 = 1$  se sigue nuevamente del teorema de la divergencia.  $\square$

Una consecuencia inmediata de este lema es la existencia de la interpolación de Raviart-Thomas en cualquier triángulo. En efecto, dado  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w^s(\tilde{K})$ , para cualquier  $s > 1/2$  y  $w \in A_{2s}$ , definimos

$$\Pi_{\tilde{K}} \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\ell_i} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_i \right) \psi_{\ell_i} + \left( \int_{\tilde{\ell}_3} \boldsymbol{\tau} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_3 \right) \psi_{\tilde{\ell}_3}$$

y se puede concluir de (2.3.1) y (2.3.2), que  $\Pi_{\tilde{K}}$  satisface la propiedad del diagrama conmutativo también para este caso, i.e., si  $\Pi_h$  es la proyección global asociada a  $\tilde{\mathcal{T}}_h$  se tiene que  $\operatorname{div} \Pi_h \boldsymbol{\tau} = P_h(\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})$ . Más aún, la estimación del error puede probarse para este caso con los mismos argumentos usados en la prueba del Teorema 2.1.7.

**Teorema 2.3.2.** Dadon  $s > 1/2$ ,  $w \in A_{2s}$ , y  $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ , para  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_w^s(\tilde{K})$  tenemos

$$\|\boldsymbol{\tau} - \Pi_{\tilde{K}} \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_w^2(\tilde{K})} \lesssim h_{\tilde{K}}^s |\boldsymbol{\tau}|_{\mathbf{H}_w^s(\tilde{K})}.$$

*Demostración.* Los puntos claves de la prueba del Teorema 2.1.7 son los lemas 2.1.5 y 2.1.6 dados en la Sección 2.1, el Lema 2.1.1 definido en la Sección 1.2 del Capítulo 1 junto a las cotas para las funciones bases. Todos estos resultados siguen valiendo para  $\tilde{K}$ .

Primero, el teorema de trazas recordado en el Lema 2.1.5 puede probarse cambiando variables a un triángulo de referencia. De hecho, podemos definir la transformación inversible  $F: \tilde{K} \rightarrow \hat{K}$ , donde  $\hat{K}$  es un elemento de referencia de orden uno, es decir que este resulta mapeable debido a que su inversa es de clase  $C^1$ ,  $|J_F| \sim h_{\tilde{K}}^2$ , donde  $J_F$  es el Jacobiano de  $F$ , y la primera derivada de  $F$  y  $F^{-1}$  son  $O(h)$  y  $O(h^{-1})$  respectivamente. (ver [?, Teorema 1]).

Por otro lado, los Lemas 2.1.1 y 2.1.6 siguen valiendo para  $\tilde{K}$ , de hecho sólo se ha usado la regularidad del elemento  $K$  pero no su condición de simplex.

Finalmente las cotas de las funciones bases usadas en los mencionados triángulos generales se siguen del Lema 2.3.1 considerando que, de la definición de  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$  obtenemos  $|P_i - Q_i| \lesssim h_{\tilde{K}}$ .  $\square$

Uniendo estos argumentos concluimos que el Teorema 2.2.6 sigue valiendo para dominios curvos.

## 2.4. Experimentos numéricos

Por último, en esta sección presentaremos algunos resultados numéricos sobre aproximaciones a un problema via elementos de Raviart-Thomas de orden más bajo en dos dimensiones.

Consideramos el problema (1.3.1) para  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$  y  $a(x) = |x|^\alpha$ , el cual pertenece a  $A_2$  cuando  $\alpha \in (-2, 2)$ , y tomando una función  $f$  tal que la solución exacta es  $u(x) = |x|^\beta - 1$  para algún  $\beta$ .

El siguiente lema será útil para determinar condiciones sobre  $s$  tales que  $\sigma \in \mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega)$ .

**Lema 2.4.1.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio convexo acotado y  $w(x) = |x|^\delta$  con  $\delta > -n$ . Para  $0 < s < 1$ , si  $s < \frac{n}{2} + \xi + \frac{\delta}{2}$  y  $\delta < 2s$  luego,  $v_j := x_j |x|^{\xi-1} \in H_w^s(\Omega)$ , para  $j = 1, \dots, n$ .

*Demuestra*ción. Primero observemos que, dado  $2\xi + \delta > -n$  tenemos que  $v_j \in L_w^2(\Omega)$ . De esta manera, lo único que resta chequear es si  $|v_j|_{H_w^s(\Omega)}$  es finito. Dividiremos la prueba en dos casos.

**Caso**  $\xi \leq 0$ :

Descomponemos el dominio de integración  $\Omega \times \Omega$  tal que  $A \cup B$  con

$$A := \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : |x|/2 < |x - y|\}, \text{ y } B := (\Omega \times \Omega) \setminus A.$$

A su vez partimos la integral sobre  $A$  en dos partes:

Primero, dado que  $\xi \leq 0$ , para  $|y| < |x|$ , tenemos  $|y_j| |y|^{\xi-1} - x_j |x|^{\xi-1}|^2 \lesssim |y|^{2\xi}$ , y como  $|x| < 2|x - y|$  en  $A$ , obtenemos

$$\begin{aligned} & \iint_{A \cap \{|y| < |x|\}} \frac{|y_j| |y|^{\xi-1} - x_j |x|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \lesssim \iint_{A \cap \{|y| < |x|\}} \frac{|y|^{2\xi}}{|x|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \\ & \lesssim \int_{\Omega} \left( \int_{\{|y| < |x|\}} |y|^{2\xi} dy \right) |x|^{\delta-n-2s} dx \end{aligned}$$

pero, de las hipótesis tenemos que  $2\xi > -n + 2s - \delta \geq -n$ , y por lo tanto

$$\iint_{A \cap \{|y| < |x|\}} \frac{|y_j| |y|^{\xi-1} - x_j |x|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \lesssim \int_{\Omega} |x|^{2\xi+\delta-2s} dx < \infty$$

pues  $2\xi + \delta - 2s > -n$ .

Por otro lado, para  $|x| \leq |y|$ , usamos que en  $A$ ,  $|y| \leq |y - x| + |x| < 3|x - y|$ , lo que implica

$$\begin{aligned} & \iint_{A \cap \{|x| \leq |y|\}} \frac{|x_j| |x|^{\xi-1} - y_j |y|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \lesssim \iint_{A \cap \{|x| \leq |y|\}} \frac{|x|^{2\xi+\delta}}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \\ & \lesssim \int_{\Omega} |y|^{-n-2s} \int_{\{|x| \leq |y|\}} |x|^{2\xi+\delta} dx dy \lesssim \int_{\Omega} |y|^{2\xi+\delta-2s} < \infty \end{aligned}$$

pues  $2\xi + \delta - 2s > -n$ .

Ahora trabajaremos con la integral definida en  $B$ . En este caso tenemos  $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x|/2$  y consecuentemente  $|x| \leq 2|y|$ . Por otro lado  $|y| \leq |x - y| + |x| \leq 3|x|/2$ . Entonces, en  $B$  tenemos  $|x| \simeq |y|$ .

Lo que implica, usando el teorema del valor medio, que

$$|x_j|x|^{\xi-1} - y_j|y|^{\xi-1}|^2 \lesssim |x|^{2\xi-2}|x - y|^2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \iint_B \frac{|x_j|x|^{\xi-1} - y_j|y|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx &\lesssim \iint_B \frac{|x|^{2\xi-2}}{|x - y|^{n+2s-2}} |x|^\delta dy dx \\ &\lesssim \int_\Omega |x|^{2\xi-2+\delta} \int_{\{|x-y| \leq |x|/2\}} |x - y|^{-n-2s+2} dy dx \\ &\lesssim \int_\Omega |x|^{2\xi+\delta-2s} dx < \infty \end{aligned}$$

pues  $2\xi + \delta - 2s > -n$ .

**Caso  $\xi > 0$ :**

Descomponemos el dominio de integración como en el caso  $\xi \leq 0$ . Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{A \cap \{|y| < |x|\}} \frac{|x_j|x|^{\xi-1} - y_j|y|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx &\lesssim \iint_{A \cap \{|y| < |x|\}} \frac{|x|^{2\xi}}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \\ &\lesssim \int_\Omega \int_{\{|y-x| > |x|/2\}} \frac{|x|^{2\xi+\delta}}{|x - y|^{n+2s}} dy dx \lesssim \int_\Omega |x|^{2\xi+\delta-2s} dx < \infty \end{aligned}$$

pues  $2\xi + \delta - 2s > -n$ .

Por otro lado,

$$\iint_{A \cap \{|x| \leq |y|\}} \frac{|x_j|x|^{\xi-1} - y_j|y|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx \lesssim \iint_{A \cap \{|x| \leq |y|\}} \frac{|y|^{2\xi}}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx$$

y usando que en  $A$  tenemos  $|y| < 3|x - y|$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{A \cap \{|x| \leq |y|\}} \frac{|x_j|x|^{\xi-1} - y_j|y|^{\xi-1}|^2}{|x - y|^{n+2s}} |x|^\delta dy dx &\lesssim \int_\Omega \int_{\{|x| \leq |y|\}} |y|^{2\xi-n-2s} |x|^\delta dx dy \\ &\lesssim \int_\Omega |y|^{2\xi+\delta-2s} dy < \infty \end{aligned}$$

donde usamos que  $\delta > -n$  y  $2\xi + \delta - 2s > -n$ .

Finalmente, la integral sobre  $B$  puede ser acotada de la misma manera que en  $\xi \leq 0$ .  $\square$

Ahora mostraremos los resultados numéricos obtenidos para distintas combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$  para mallas quasi uniformes, en esta sección usaremos la notación  $\|\cdot\|_{a^{-1}}$  para referirnos a la norma  $\mathbf{L}_{a^{-1}}^2$ . Observemos que  $\boldsymbol{\sigma}(x) = -\beta x |x|^{\alpha+\beta-2}$  y  $f(x) = -\beta(\alpha + \beta)|x|^{\alpha+\beta-2}$ . Por lo tanto,  $f \in L^1(\Omega)$  siempre que  $\alpha + \beta > 0$ , y por lo que, la aproximación mixta via elementos finitos está bien definida en este caso.

Para cada caso, usaremos el Lema 2.4.1, con  $\xi = \alpha + \beta - 1$  y  $\delta = -\alpha$  para determinar el orden de la regularidad de la solución vectorial  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Consideramos cuatro casos, dos donde el coeficiente  $a(x)$  se anula (o sea  $\alpha > 0$ ) y dos donde se hace infinito ( $\alpha < 0$ ). Para el caso  $\alpha > 0$  tomamos las siguientes combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $\alpha = 3/4$ ,  $\beta = 1/4$ , y  $\alpha = 3/2$ ,  $\beta = -1/8$ . Tenemos entonces que  $\boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{4}x|x|^{-1}$  para la primera y,  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{8}x|x|^{-5/8}$ , para la segunda.

Dado que  $\delta < 0$ , la hipótesis  $\delta < 2s$  es trivial, y por lo tanto se sigue del Lema 2.4.1 que  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{H}_{a^{-1}}^s(\Omega)$  para  $s < 5/8$  en ambos ejemplos.

Ahora estamos en condiciones de mostrar el orden teórico de convergencia aplicando el Teorema 2.3.2. Para hacer esto es necesario chequear que  $a^{-1}(x) = |x|^\delta \in A_{2s}$ , lo cual es conocido que equivale a  $-2 < \delta < 2(2s - 1)$  (ver por ejemplo [?]). Nuevamente, dado que en ambos ejemplos  $-2 < \delta < 0$ , esta condición se cumple para  $s > 1/2$ .

Tabla 2.1: Errores obtenidos para el ejemplo:  $\alpha = 3/4$  y  $\beta = 1/4$ .

$h$	$\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\ _{a^{-1}}$
$1,9e-01$	$1,5834e-01$
$9,5e-02$	$1,0507e-01$
$4,7e-02$	$6,9053e-02$
$2,3e-02$	$4,5130e-02$

Tabla 2.2: Errores obtenidos para el ejemplo:  $\alpha = 3/2$  y  $\beta = -1/8$ .

$h$	$\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\ _{a^{-1}}$
$1,9e-01$	$5,5075e-02$
$9,5e-02$	$3,6015e-02$
$4,7e-02$	$2,3457e-02$
$2,3e-02$	$1,5247e-02$

Para el caso  $\alpha < 0$ , tomamos los valores  $\alpha = -3/10$ ,  $\beta = 3/4$ , y  $\alpha = -1/6$ ,  $\beta = 5/6$ . Para estos casos, tenemos que  $\boldsymbol{\sigma} = -\frac{3}{4}x|x|^{-31/20}$  para los primeros y,  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{5}{6}x|x|^{-4/3}$ , para

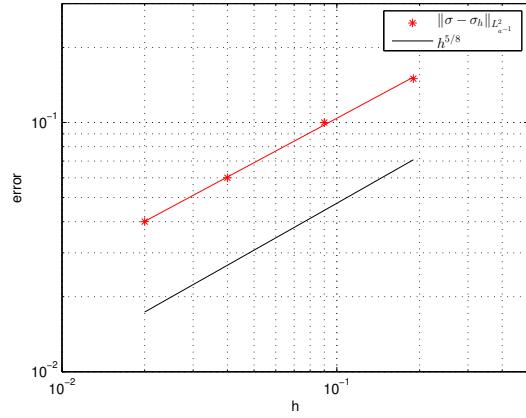


Figura 2.2: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  para mallas uniformes con  $\alpha = 3/4$  y  $\beta = 1/4$  obtenido via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. En este caso  $eoc = 0,55$  y orden teórico esperado,  $s < 5/8$ .

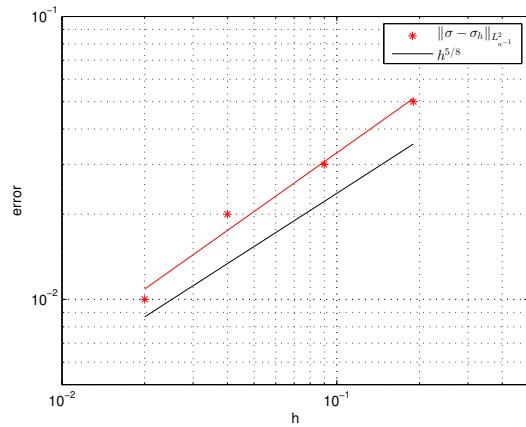


Figura 2.3: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  para mallas uniformes con  $\alpha = 3/2$  y  $\beta = -1/8$  obtenido via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. En este caso  $eoc = 0,59$  y orden teórico esperado,  $s < 5/8$ .

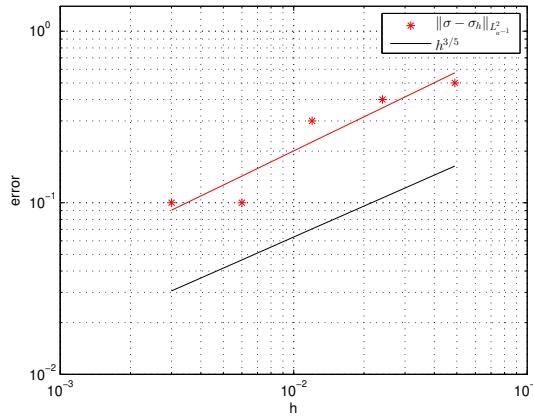
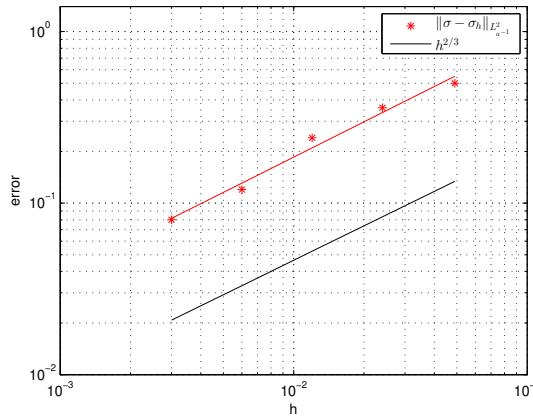
los segundos.

Para chequear la hipótesis  $\delta < 2s$  notemos que en el primer ejemplo  $\delta = -(-3/10) = 3/10$  y  $2s = 2 * (3/5) = 6/5$ , donde  $3/10 < 6/5$ , por lo tanto se cumple la hipótesis y usando el Lema 2.4.1 que  $\sigma \in \mathbf{H}_{\alpha-1}^s(\Omega)$  para  $s < 3/5$ . En el segundo ejemplo tenemos una situación similar  $\delta = -(-1/6) = 1/6$ ,  $2s = 2 * (2/3) = 4/3 > 1$  y como  $1/6 < 4/3$ , por el Lema 2.4.1 se sigue que  $\sigma \in \mathbf{H}_{\alpha-1}^s(\Omega)$  para  $s < 2/3$ .

Chequeamos  $a^{-1}(x) \in A_{2s}$  para mostrar el orden teórico de convergencia. Nuevamente usamos que  $-2 < \delta < 2(2s - 1)$ . Para ambos ejemplos  $\delta > 0$  por lo tanto  $\delta > -2$ , y  $\delta < 2(2s - 1)$  se cumple pues, para el primer caso  $3/10 < 2 * (2 * (3/5) - 1) = 2/5$  y  $1/6 < 2 * (2 * (2/3) - 1) = 2/3$  para el segundo.

Tabla 2.3: Errores obtenidos para el ejemplo:  $\alpha = -3/10$  y  $\beta = 3/4$ .

$h$	$\ \sigma - \sigma_h\ _{a^{-1}}$
4, 9e-02	5, 6944e-01
2, 45e-02	4, 2327e-01
1, 2e-02	3, 0131e-01
6, 1e-03	1, 6344e-01
3, 06e-03	1, 1344e-01

Figura 2.4: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  para mallas uniformes con  $\alpha = -3/10$  y  $\beta = 3/4$  obtenido via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. En este caso  $eoc = 0,60$  y orden teórico  $s < 3/5$ .Figura 2.5: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  para mallas uniformes con  $\alpha = -1/3$  y  $\beta = 5/6$  obtenido via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. En este caso  $eoc = 0,67$  y orden teórico  $s < 2/3$ .

Las Figuras 2.2, 2.3, 2.4 y 2.5 muestran los gráficos de  $\log(h)$  vs  $\log(\|\sigma - \sigma_h\|_{a^{-1}})$  para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  propuestos y el orden experimental de convergencia ( $eoc$ ). Y, en las Tablas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 se tiene, para cada ejemplo, el error con respecto a  $h$

Tabla 2.4: Errores obtenidos para el ejemplo:  $\alpha = -1/3$  y  $\beta = 5/6$ .

$h$	$\ \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\ _{a^{-1}}$
4, 9e-02	5, 0767e-01
2, 45e-02	3, 6305e-01
1, 2e-02	2, 4766e-01
6, 1e-03	1, 2498e-01
3, 06e-03	8, 2942e-02

obtenido mediante un ajuste vía cuadrados mínimos.



# Capítulo 3

## Estimaciones a posteriori

En este capítulo vamos a introducir y analizar un estimador del error a posteriori para el método mixto de elementos finitos para el problema planteado en (1.3.1).

Para esto, partiendo del sistema transformado (1.3.2) optamos por construir un estimador del error basado en un postproceso que aproxime a la solución numérica de dicho problema.

### 3.1. Estimación general abstracta

El punto de partida para estudiar la estimación del error a posteriori fue propuesto, para el caso regular, por Vohralík en [?]. Este resultado, como el Lema 3.2.1, pueden verse como una generalización de la famosa identidad Prager-Synge [?, ?]. La prueba dada en [?] es puramente geométrica, y, por lo tanto, puede ser aplicada al caso degenerado que estamos estudiando.

**Lema 3.1.1.** Sea  $w \in A_2$  y sean  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}_w^2(\Omega)$  funciones arbitrarias. Tenemos que

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}) \cdot \frac{(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\sigma})}{\|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)}} w \right|. \quad (3.1.1)$$

*Demostración.* Notemos que el segundo término del lado derecho en (3.1.1) es la longitud de la proyección ortogonal de  $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}$  sobre la recta generada por  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\eta}$ , ( $h$  en la Figura 3.1). En la misma se puede observar que la estimación sobre  $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)}$  se deduce de que  $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{L}_w^2(\Omega)}$  es mayor o igual que la distancia de  $\boldsymbol{\tau}$  a esa recta, aplicando la desigualdad triangular.

□

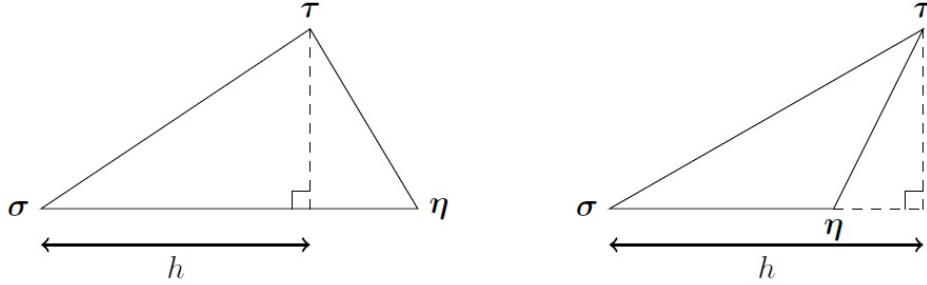


Figura 3.1: Idea geométrica de la prueba del Lema 3.1.1. *Izquierda:* Caso  $\|\tau - \sigma\|_{L_w^2(\Omega)} \leq \|\eta - \sigma\|_{L_w^2(\Omega)}$ . *Derecha:* Caso  $\|\tau - \sigma\|_{L_w^2(\Omega)} \leq \|\eta - \sigma\|_{L_w^2(\Omega)}$ .

Usaremos el Lema 3.1.1 para obtener una estimación del error al aproximar la variable vectorial  $\sigma$ . El argumento es análogo al dado en [?] para el caso regular sin embargo necesitaremos sumar también una versión con peso de la desigualdad de Poincaré para el caso de simplex, esta fue enunciada en el Lema 2.1.2.

## 3.2. Estimación de error a posteriori

### 3.2.1. Resultados preliminares

Ya probamos que el problema tiene solución para  $f \in (H_{a-1}^1(\Omega))^*$  como  $L_{a-1}^2(\Omega) \subset (H_{a-1}^1(\Omega))^*$ , entonces dado  $f \in L_{a-1}^2(\Omega)$ , existe una única solución

$$(\sigma, u) \in \mathbf{H}_{a-1}(div, \Omega) \times L_a^2(\Omega)$$

de la formulación mixta débil dada en (1.3.6).

Para la aproximación por elementos finitos de (1.3.6) usaremos los elementos de Raviart-Thomas (1.4.3). Dada una partición  $\mathcal{T}_h$ , consideramos los espacios  $\mathbf{S}_h$  y  $V_h$  definidos en (1.4.5) y (1.4.6) para aproximar la variable vectorial y escalar respectivamente. Así, la aproximación mixta por elementos finitos es la dada en (1.4.7).

Consideramos  $P_h$ , la proyección ortogonal ya definida en el Capítulo 1. Como  $P_h: L^2(\Omega) \rightarrow V_h$  está definida en el espacio más grande  $L^1(\Omega)$ , por lo tanto también en  $L_{a-1}^2(\Omega)$ , ya que por la desigualdad de Schwarz sabemos que  $L_{a-1}^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ .

Para definir el primer estimador del error debemos introducir la oscilación local y global de  $f$ ,

$$\eta_{osc,K}^2 = h_K^2 \|f - P_h f\|_{L_{a^{-1}}^2(K)}^2 \quad , \quad \eta_{osc}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{osc,K}^2. \quad (3.2.1)$$

**Lema 3.2.1.** Sea  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h$  soluciones de (1.3.6) y (1.4.7) respectivamente. Luego

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \inf_{s \in H_{a,0}^1(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_h + a\nabla s\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + C_P \eta_{osc} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + C_P \eta_{osc}. \quad (3.2.2)$$

*Demostración.* Tomemos  $s \in H_{a,0}^1(\Omega)$  y apliquemos (3.1.1) para la función  $\boldsymbol{\sigma}$ , donde  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_h$  y  $\boldsymbol{\eta} = -a\nabla s$ , luego

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h + a\nabla s\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \frac{(\boldsymbol{\sigma} + a\nabla s)}{\|\boldsymbol{\sigma} + a\nabla s\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)}} a^{-1} \right|.$$

Como  $\boldsymbol{\sigma} = -a\nabla u$  con  $u \in H_{a,0}^1(\Omega)$ , tenemos que  $(\boldsymbol{\sigma} + a\nabla s)/\|\boldsymbol{\sigma} + a\nabla s\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} = a\nabla r$  para  $r \in H_{a,0}^1(\Omega)$  y luego, reescribiendo el segundo término del lado derecho, obtenemos

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h + a\nabla s\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla r \right|. \quad (3.2.3)$$

Ahora, de la segunda ecuación en (1.3.6) y (1.4.7) tenemos  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) = f - P_h f$ , e integrando por partes obtenemos

$$\left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla r \right| = \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - P_h f) r \right| = \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f - P_h f) (r - r_K) \right| \leq C_P \eta_{osc},$$

donde hemos usado que las funciones constantes a trozos están contenidas en  $V_h$ , la desigualdad de Schwarz, (2.1.4), y  $\|\nabla r\|_{\mathbf{L}_a^2(\Omega)} = 1$ . Como  $s \in H_{a,0}^1(\Omega)$  es arbitrario, la última estimación combinada con (3.2.3) nos devuelve la primera desigualdad en (3.2.2). Por otro lado, la restante desigualdad se deduce de que  $\boldsymbol{\sigma} = -a\nabla u$  con  $u \in H_{a,0}^1(\Omega)$  combinada con la definición de ínfimo.  $\square$

Para obtener un estimador computable tomaremos una función particular  $s \in H_{a,0}^1(\Omega)$  para estimar el ínfimo de (3.2.2), una elección arbitraria de  $s$  no alcanza pues dará una cota superior, pero esta puede ser más grande de lo conveniente. Para que esto no suceda seguiremos la construcción propuesta en [?] para el caso uniformemente elíptico. También probaremos que el análisis propuesto en ese trabajo puede ser extendido a problemas donde el coeficiente  $a \in A_2$ .

Para la construcción de la función  $s$  de forma que resulte una buena aproximación del ínfimo en (3.2.2) primero se define una aproximación no conforme para  $u$  y segundo, se aplica un procedimiento basado en promedios para obtener una aproximación continua.

### 3.2.2. Postproceso de la variable escalar

Vamos a considerar el caso donde  $k$  es par y  $n = 2$ . La idea principal es extender el postproceso y análisis introducido en [?] para el caso uniforme. En dicho trabajo los autores consideran el espacio local

$$R_{k+1}(K) = \mathcal{P}_{k+1}(K) + B_{k+3}(K),$$

donde  $B_{k+3}(K)$  es el espacio de las funciones burbujas, i.e., funciones polinomiales de grado menor o igual que  $k+3$  que valen 0 en  $\partial K$ .

Dada la partición  $\mathcal{T}_h$ , introducimos la notación  $\mathcal{E}_h$  para el conjunto de sus lados. Notamos por  $\mathcal{E}_h^0$  y  $\mathcal{E}_h^\partial$  a los lados que son interiores o que pertenecen al borde  $\Gamma$  respectivamente. Dado  $\ell \in \mathcal{E}_h^0$ , y  $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$  elementos vecinos que contienen al lado  $\ell$ , notamos por  $\llbracket v \rrbracket_\ell$  al salto de  $v$  sobre  $\ell$ , es decir,

$$\llbracket v \rrbracket_\ell := (v|_{K_1})|_\ell - (v|_{K_2})|_\ell,$$

y la restricción de  $v$  sobre  $\ell$  cuando  $\ell \in \mathcal{E}_h^\partial$ ,  $\llbracket v \rrbracket_\ell := (v|_K)|_\ell$ . Omitiremos la dependencia de  $\ell$  cuando no haya confusiones.

El espacio no conforme de elementos finitos introducido en [?] es,

$$R_h^{k+1} = \left\{ v : v|_K \in R_{k+1}(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ y } \int_\ell p \llbracket v \rrbracket_\ell = 0, \forall p \in \mathcal{P}_k(\ell), \forall \ell \in \mathcal{E}_h \right\}.$$

Luego, en [?], los autores introducen una aproximación no-conforme  $\tilde{u}_h$  de  $u$ , que se obtiene al postprocesar  $u_h$ , la aproximación mixta de elementos finitos. De esta manera la solución  $\tilde{u}_h \in R_h^{k+1}$  satisface

$$\int_K \nabla \tilde{u}_h \cdot \boldsymbol{\tau} = - \int_K a^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K). \quad (3.2.4)$$

Cuando  $k = 0$ ,  $\tilde{u}_h$  puede obtenerse resolviendo el sistema definido en (3.2.4) sumándole a éste, la ecuación  $\int_K \tilde{u}_h = \int_K u_h$ . Se puede ver también que este sistema tiene solución única en  $R_1(K)$  y que para cualquier  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K)$  se cumple que,

$$\int_K a^{-1} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \boldsymbol{\tau} - \int_K \tilde{u}_h \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \int_{\partial K} \tilde{u}_h \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_i = 0.$$

Luego, dado  $\ell \in \mathcal{E}_h$ , sumando la ecuación planteada en dos elementos vecinos  $K_1$  y  $K_2$  que contienen a  $\ell$ , (o sólo uno, si  $\ell$  está en  $\partial\Omega$ ), y tomando  $\boldsymbol{\tau}$  soportada en la unión de ambos, es decir  $K_1 \cup K_2$ , se sigue que  $\int_\ell \llbracket \tilde{u}_h \rrbracket_\ell = 0$ , es decir,  $\tilde{u}_h \in R_h^1$ . Ahora bien, para la construcción de  $\tilde{u}_h$  para el caso par  $k \geq 2$  nos referimos a lo demostrado en [?]. Los argumentos dados allí se aplican a nuestro caso, en efecto, no se usa la elipticidad uniforme para dicha construcción. En lo que sigue, usaremos que  $\tilde{u}_h$  cumple (3.2.4) (ver [?, (2.24) en pág. 29]) aunque no puede obtenerse directamente de ésta.

**Observación 3.2.1.** Ideas similares pueden aplicarse para el caso  $k$  impar, sin embargo la construcción del espacio  $R_h^{k+1}$  es más complicada. (ver [?, ?]).

### 3.2.3. Estimaciones del error a priori para $\tilde{u}_h$

Mostraremos que la solución  $\tilde{u}_h$  permite alcanzar un orden óptimo de aproximación de  $u$  también para el caso con peso. Esto es una consecuencia inmediata de (3.2.4) combinada con la condición inf-sup dada en el siguiente lema.

**Lema 3.2.2.** Si  $a \in A_2$ , entonces existe una constante  $C$  que depende de  $[a]_{A_2}$  y de la constante de regularidad de  $K$  tal que, para todo  $v \in R_{k+1}(K)$  tenemos

$$\|\nabla v\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \leq C \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K)} \frac{\int_K \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau}}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a-1}^2(K)}}. \quad (3.2.5)$$

*Demuestra*cción. Observemos primero que, para todo  $v \in R_{k+1}(K)$ ,

$$\int_K \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K) \quad \Rightarrow \quad \nabla v = 0. \quad (3.2.6)$$

Si  $\ell \in \mathcal{E}_K$ , llamando  $\mathbf{n}_\ell$  a la normal exterior en  $\ell$  y dado  $q \in \mathcal{P}_k(\ell)$ , se sigue del lema [?, Lema 4] que existe  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K)$  tal que  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_\ell = q$ ,  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{\ell'} = 0$  en los otros dos lados de  $K$ , y  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$  es constante. Por otro lado, podemos asumir que  $\int_K v = 0$ , por lo que

$$0 = \int_K \nabla v \cdot \boldsymbol{\tau} = \int_\ell v q.$$

Luego, se tiene que  $v|_\ell = cq_{\ell,k+1}$  donde  $q_{\ell,k+1}$  es el polinomio de Legendre de grado  $k+1$  en  $\ell$ , y como  $k+1$  es un número impar, esto puede suceder sobre los tres lados solo si  $c = 0$ . Sean  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  las coordenadas baricéntricas asociadas a  $K$ , tenemos que  $v = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p$  para algún  $p \in \mathcal{P}_k$ . Luego, tomando  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K)$  tal que  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = p$ ,

$$0 = \int_K v \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = \int_K \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p^2$$

y entonces  $p = 0$ . De esta manera el resultado dado en (3.2.6) queda demostrado.

Ahora, para el caso  $a = 1$ , la desigualdad (3.2.5) se sigue por argumentos clásicos, primero trabajando en un elemento de referencia y usando equivalencia de normas y luego haciendo un cambio adecuado de variables. Por otro lado, para  $a \in A_2$  tenemos

$$\|\nabla v\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \leq \left( \int_K a \right)^{1/2} \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^\infty(K)} \leq C \left( \frac{1}{|K|} \int_K a \right)^{1/2} \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(K)},$$

donde en la última desigualdad hemos usado la usual estimación inversa. Análogamente,

$$\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a-1}^2(K)} \leq C \left( \frac{1}{|K|} \int_K a^{-1} \right)^{1/2} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}^2(K)},$$

y por lo tanto, si  $C_1$  es la constante en el caso no pesado, se sigue, de acuerdo a (2.1.6) que el resultado (3.2.5) se tiene con  $C \sim C_1 \gamma^n [a]_{A_2}^{1/2}$ .  $\square$

Con este resultado podemos estimar el error de aproximación para  $\tilde{u}_h$ .

**Corolario 3.2.3.** Existe  $C$  tal que

$$\|\nabla(u - \tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \leq C \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)} + \inf_{v \in R_{k+1}(K)} \|\nabla(u - v)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \right\}. \quad (3.2.7)$$

*Demuestra*ción. Dado  $v \in R_{k+1}(K)$ ,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{RT}_k(K)$  y que vale (3.2.4) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_K \nabla(\tilde{u}_h - v) \cdot \boldsymbol{\tau} &= \int_K \nabla(\tilde{u}_h - u) \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_K \nabla(u - v) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &= \int_K a^{-1}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \boldsymbol{\tau} + \int_K \nabla(u - v) \cdot \boldsymbol{\tau} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)} + \|\nabla(u - v)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)}, \end{aligned}$$

y luego (3.2.7) se sigue de (3.2.5) y de aplicar la desigualdad triangular.  $\square$

**Observación 3.2.2.** El orden óptimo de convergencia para soluciones suaves se sigue de usar una de las estimaciones probadas en el Teorema 2.2.5 para el primer término del lado derecho de (3.2.7) y la estimación del error de aproximación con normas con peso dada en el Lema 2.1.3 para el segundo.

### 3.2.4. Aproximación conforme

Queremos usar la aproximación no conforme  $\tilde{u}_h$  construida para obtener una solución conforme apropiada para utilizar en (3.2.2). La forma natural de hacer esto es con el interpolador de Lagrange, promediando los valores de  $\tilde{u}_h$  sobre cada elemento, este procedimiento fue utilizado en numerosos trabajos (ver: [?, ?, ?]).

Dado  $K \in \mathcal{T}_h$ , sea  $\mathcal{N}_K$  un conjunto unisolvente para  $R_{k+1}(K)$  obtenido agregando nodos interiores a los nodos usuales para la interpolación de Lagrange  $\mathcal{P}_{k+1}(K)$ . Definimos, a su vez,  $\mathcal{N} = \cup_K \mathcal{N}_K$  y para cada  $V \in \mathcal{N}$  llamamos  $\mathcal{T}_V$  al conjunto de todos los elementos que contienen a  $V$  y denotamos por  $|\mathcal{T}_V|$  a su cardinal.

De esta manera introducimos al operador

$$\mathcal{I}_{av} : R_h^{k+1} \longrightarrow R_h^{k+1} \cap H_0^1(\Omega),$$

alcanza con definir valores en los nodos e interpolando estos. Dada  $\phi \in R_h^{k+1}$  y cualquier  $V \in \mathcal{N}$  definimos

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{av}\phi(V) = \frac{1}{|\mathcal{T}_V|} \sum_{K \in \mathcal{T}_V} \phi|_K(V), & V \in \Omega \\ \mathcal{I}_{av}\phi(V) = 0, & V \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Observemos que si  $V$  está en el interior de  $K$ , se tiene que  $\mathcal{I}_{av}\phi(V) = \phi(V)$ .

A continuación mostraremos que  $\mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h$  da una aproximación conforme de  $u$  al menos tan buena como  $\tilde{u}_h$ . Notamos con  $\tilde{\mathcal{E}}_K$  al conjunto de lados que al menos contienen un vértice de  $K$  y con  $U(K)$  a la unión de los elementos que comparten un lado o un vértice con  $K$ . Se puede ver que vale:

$$\|\nabla(\phi - \mathcal{I}_{av}\phi)\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \leq C \sum_{\ell \in \tilde{\mathcal{E}}_K} |K|^{-2} \|\llbracket \phi \rrbracket\|_{L^1(\ell)}^2. \quad (3.2.8)$$

La demostración de esto está esencialmente contenido en ([?], Teorema 2.2]). Aunque allí se enuncia globalmente puede verse, siguiendo la demostración, que el resultado es local. Por otra parte en ese trabajo se utilizan normas  $L_2$  pero es fácil ver, usando desigualdades inversas, que puede obtenerse (3.2.8).

Para  $v \in H_a^1(K)$ , para todo  $K \in \mathcal{T}_h$ , usaremos la notación standard  $(\nabla_h v)|_K = \nabla(v|_K)$ .

**Lema 3.2.4.** Si  $a \in A_2$ , existe una constante  $C$  que depende de  $[a]_{A_2}$  y de la constante de regularidad de la malla tal que

$$\|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \leq C \|\nabla_h(u - \tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(U(K))}. \quad (3.2.9)$$

*Demostración.* Alcanza con que ver que

$$\|\nabla(\tilde{u}_h - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)} \leq C \|\nabla_h(u - \tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(U(K))}. \quad (3.2.10)$$

Dado un lado interior  $\ell \in \tilde{\mathcal{E}}_K$ , sea  $K_1$  y  $K_2$  los elementos que comparten  $\ell$ . Como  $u \in H_a^1(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$  se tiene  $\llbracket \tilde{u}_h \rrbracket_\ell = \llbracket \tilde{u}_h - u \rrbracket_\ell$ . Por otro lado, llamamos  $\tilde{u}_{h,i}$ ,  $i = 1, 2$  a la restricción de  $\tilde{u}_h$  sobre  $K_i$ , sabemos que

$$m_\ell := \frac{1}{|\ell|} \int_\ell (\tilde{u}_{h,1} - u) = \frac{1}{|\ell|} \int_\ell (\tilde{u}_{h,2} - u)$$

y por lo tanto tenemos que

$$\llbracket \tilde{u}_h - u \rrbracket_\ell = (\tilde{u}_{h,1} - u)|_\ell - m_\ell - ((\tilde{u}_{h,2} - u)|_\ell - m_\ell).$$

Sin embargo, usando el teorema de trazas clásico obtenemos que

$$\|\tilde{u}_{h,i} - u - m_\ell\|_{L^1(\ell)} \leq C \{ h_{K_i}^{-1} \|\tilde{u}_{h,i} - u - m_\ell\|_{L^1(K_i)} + \|\nabla(\tilde{u}_{h,i} - u)\|_{L^1(K_i)} \}$$

que combinado con la desigualdad de Poincaré para funciones con promedio igual a cero en  $\ell$  tenemos

$$\|\tilde{u}_{h,i} - u - m_\ell\|_{L^1(\ell)} \leq \|\nabla(\tilde{u}_{h,i} - u)\|_{L^1(K_i)}$$

y por lo tanto

$$\|\llbracket \tilde{u}_h \rrbracket\|_{L^1(\ell)} \leq \|\nabla_h(\tilde{u}_h - u)\|_{\mathbf{L}^1(K_1 \cup K_2)}.$$

La misma desigualdad puede ser probada de forma análoga para  $\ell \in \tilde{\mathcal{E}}_K \cap \mathcal{E}_h^\partial$ . Luego, usando esta desigualdad y la estimación (3.2.8), tenemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla(\tilde{u}_h - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)}^2 &\leq \left( \int_K a \right) \|\nabla(\tilde{u}_h - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}^\infty(K)}^2 \\ &\leq C \frac{1}{|K|^2} \left( \int_K a \right) \|\nabla_h(\tilde{u}_h - u)\|_{\mathbf{L}^1(U(K))}^2 \\ &\leq C \frac{1}{|K|^2} \left( \int_K a \right) \left( \int_{U(K)} a^{-1} \right) \|\nabla_h(\tilde{u}_h - u)\|_{\mathbf{L}_a^2(U(K))}^2 \end{aligned}$$

sin embargo como  $|K| \sim |U(K)|$ , la desigualdad (3.2.10) tendrá una constante que depende de  $[a]_{A_2}$  y de la constante de regularidad de la malla.

□

**Observación 3.2.3.** Juntando lo observado en (3.2.10) y la Observación 3.2.2 concluimos que  $\|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)}$  es también de orden óptimo.

### 3.2.5. Estimador computable para el error a posteriori

Definimos el estimador de forma local y global de la siguiente manera

$$\eta_{\sigma,K}^2 = \|\sigma_h + a\nabla\mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)}^2, \quad \eta_{\sigma}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{\sigma,K}^2$$

el cual combinado con la oscilación  $\eta_{osc}$  definida en (3.2.1) nos da el siguiente estimador a posterior:

**Teorema 3.2.5.** Sean  $(\sigma, u)$  y  $(\sigma_h, u_h)$  las soluciones de (1.3.6) y (1.4.7) respectivamente, y sea  $\tilde{u}_h \in R_h^{k+1}$  tal que cumpla (3.2.4). Tenemos las siguientes estimaciones

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + \|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(\Omega)} \leq 3\eta_{\sigma} + 2C_P\eta_{osc} \quad (3.2.11)$$

y

$$\eta_{\sigma,K} \leq \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(K)} + \|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(K)}. \quad (3.2.12)$$

*Demuestra*ción. Como  $\mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h \in H_{a,0}^1(\Omega)$ , de la primera desigualdad dada en (3.2.2) se sigue que

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \eta_{\sigma} + C_P\eta_{osc}.$$

Mientras que para el otro término tenemos que,

$$\|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_{\mathbf{L}_a^2(\Omega)} = \|\sigma + a\nabla\mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} \leq \|\sigma - \sigma_h\|_{\mathbf{L}_{a^{-1}}^2(\Omega)} + \eta_{\sigma} \leq 2\eta_{\sigma} + C_P\eta_{osc}.$$

Sumando ambas desigualdades, se prueba (3.2.11). Por otro lado, (3.2.12) se sigue inmediatamente de sumar y restar  $\sigma = -a\nabla u$  en la definición de  $\eta_{\sigma,K}$ . □

### 3.3. Otras condiciones de borde

En esta sección vamos a extender los argumentos desarrollados previamente en este capítulo bajo simples modificaciones a otros tipos de condiciones de borde. Consideraremos un modelo en particular con condiciones mixtas de borde, este fue introducido por Caffarelli y Silvestre en [?] para transformar un problema no-local en un problema local degenerado. Por simplicidad nos restrigiremos al análisis del caso de grado más bajo de Raviart-Thomas el cual es el que estaremos utilizando para los ejemplos numéricos.

Consideramos, para  $\alpha \in (-1, 1)$ ,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(y^\alpha \nabla u(x, y)) = 0 & \text{en } \Omega = (0, 1) \times (0, L) \\ -\lim_{y \rightarrow 0} y^\alpha \frac{\partial u}{\partial y} = g & \text{en } \Gamma_N = (0, 1) \times \{0\} \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_N \end{cases} \quad (3.3.1)$$

para  $g \in L^2(\Gamma_N)$  dada.

Para llevar a cabo la solución de la formulación débil es necesario imponer la condición  $\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} = P_h^N g$ , donde  $P_h^N$  es la proyección  $L^2$ -ortogonal sobre las constantes a trozos de la malla inducida por  $\mathcal{T}_h$  en  $\Gamma_N$ . A su vez, las funciones test en la primera ecuación son restringidas a  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_h$  tal que  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $\Gamma_N$ .

Los argumentos desarrollados en el análisis del error a posteriori pueden aplicarse pues  $a(x, y) = y^\alpha$  pertenece a  $A_2$  cuando  $-1 < \alpha < 1$ .

Necesitaremos el siguiente resultado para trazas de las funciones en  $H_{y^\alpha}^1(\Omega)$ .

**Lema 3.3.1.** Sea  $R$  un rectángulo tal que un lado  $\ell \subset \Gamma_N$  y el otro lado es de largo  $k$ . Luego, para  $v \in H_{y^\alpha}^1$ ,  $-1 < \alpha < 1$ ,

$$\|v\|_{L^2(\ell)}^2 \leq C \{ k^{-1-\alpha} \|v\|_{L_{y^\alpha}^2(R)}^2 + k^{1-\alpha} \|v_y\|_{L_{y^\alpha}^2(R)}^2 \}$$

donde la constante depende de  $\alpha$  pero no de  $v$ .

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad consideramos el rectángulo  $R = [0, |\ell|] \times [0, k]$ . Tenemos

$$y^{\frac{\alpha}{2}} |v(x, 0)| \leq y^{\frac{\alpha}{2}} |v(x, y)| + y^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^k |v_y(x, t)| dt$$

y luego, elevando al cuadrado e integrando sobre  $y$  obtenemos,

$$k^{\alpha+1} |v(x, 0)|^2 \leq C \left\{ \int_0^k y^\alpha |v(x, y)|^2 dy + k^{\alpha+1} \left( \int_0^k t^{-\frac{\alpha}{2}} t^{\frac{\alpha}{2}} |v_y(x, t)| dt \right)^2 \right\}$$

con la constante dependiendo solo de  $\alpha$ . Completamos la prueba usando la desigualdad de Schwarz e integrando sobre  $\ell$ .  $\square$

Para obtener el estimador del error adecuado tenemos que modificar (3.2.2) de forma tal de considerar las nuevas condiciones de borde. Con esta idea introducimos el espacio  $H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega)$  tal que  $H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega) \subset H_{y^\alpha}^1(\Omega)$  con la condición que  $v|_{\Gamma_D} = 0$ . Notemos en particular que  $u \in H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega)$ .

Como el lado derecho  $f$  vale cero, no tenemos el término  $\eta_{osc}$  en (3.2.1) pero sí debemos incluir la oscilación de  $g$  sobre  $\Gamma_N$ . Denotamos con  $\mathcal{E}_N$  el conjunto de lados sobre  $\Gamma_N$  y así definimos

$$\eta_{osc, \ell}^2 = |\ell|^{1-\alpha} \|g - P_h^N g\|_{L^2(\ell)}^2, \quad \eta_{osc, \Gamma_N}^2 = \sum_{\ell \in \mathcal{E}_N} \eta_{osc, \ell}^2. \quad (3.3.2)$$

Modificando la prueba del Lema 3.2.1 obtenemos el siguiente resultado, notemos que usaremos nuevamente por comodidad la notación  $\|\cdot\|_a$  para referirnos a  $\|\cdot\|_{L_a^2(\Omega)}$  y  $\|\cdot\|_{a^{-1}}$  para referirnos a  $\|\cdot\|_{L_{a^{-1}}^2(\Omega)}$ , cuando no resulte ambiguo.

**Lema 3.3.2.** Existe una constante positiva  $C$  tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{y^{-\alpha}} \leq \inf_{s \in H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1} \|\boldsymbol{\sigma}_h + y^\alpha \nabla s\|_{y^{-\alpha}} + C \eta_{osc, \Gamma_N} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{y^{-\alpha}} + C \eta_{osc, \Gamma_N}. \quad (3.3.3)$$

*Demuestra*ción. Trabajando de la misma manera que en el Lema 3.2.1 obtenemos que, para cualquier  $s \in H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega)$ ,

$$\|\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\|_{y^{-\alpha}} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_h + y^\alpha \nabla s\|_{y^{-\alpha}} + \left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla r \right| \quad (3.3.4)$$

donde  $r \in H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega)$  y  $\|\nabla r\|_{y^\alpha} = 1$ . Para el segundo término tenemos

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla r = \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{n} r = \int_{\Gamma_N} (g - P_h^N g) r = \int_{\Gamma_N} (g - P_h^N g) (r - P_h^N r)$$

y luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \nabla r \right| &\leq \sum_{\ell \in \mathcal{E}_N} \|g - P_h^N g\|_{L^2(\ell)} \|r - P_h^N r\|_{L^2(\ell)} \\ &\leq \left( \sum_{\ell \in \mathcal{E}_N} |\ell|^{1-\alpha} \|g - P_h^N g\|_{L^2(\ell)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\ell \in \mathcal{E}_N} |\ell|^{\alpha-1} \|r - r_\ell\|_{L^2(\ell)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

donde  $r_\ell$  es cualquier constante. Dada  $\ell \in \mathcal{E}_N$  definimos  $T_\ell$  al elemento tal que  $\ell \subset \partial T_\ell$  y tomamos al rectángulo  $R_\ell$  tal que contenga  $T_\ell$  y a parte de los elementos vecinos que cumplan que ambos lados de  $R_\ell$  sean del orden de  $|\ell|$ . Luego, usando el Lema 3.3.1 en  $R_\ell$  tenemos

$$\|r - r_\ell\|_{L^2(\ell)}^2 \leq C \{ |\ell|^{-1-\alpha} \|r - r_\ell\|_{L_{y^\alpha}^2(R_\ell)}^2 + |\ell|^{1-\alpha} \|\nabla r\|_{L_{y^\alpha}^2(R_\ell)}^2 \}$$

y así, tomando  $r_\ell$  como el promedio de  $r$  sobre  $R_\ell$  y usando la desigualdad con peso de Poincaré obtenemos

$$\|r - r_\ell\|_{L^2(\ell)}^2 \leq C |\ell|^{1-\alpha} \|\nabla r\|_{L_{y^\alpha}^2(R_\ell)}^2,$$

combinando este resultado con (3.3.4), (3.3.5) y que  $\|\nabla r\|_{y^\alpha} = 1$  tenemos la primera desigualdad en (3.3.3). La segunda desigualdad en (3.3.3) se sigue de tomar a  $u \in H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1$  y que  $\boldsymbol{\sigma} = -y^\alpha \nabla u$ .  $\square$

Los restantes argumentos para definir el estimador del error son los mismos a los del caso de condiciones de Dirichlet, salvo modificaciones simples. No se impone ninguna condición sobre los lados  $\Gamma_N$  en la definición de  $R_h^1$ , por lo que el operador

$$\mathcal{I}_{av}: R_h^1 \longrightarrow R_h^1 \cap H_{y^\alpha, \Gamma_D}^1(\Omega)$$

se define por

$$\begin{cases} \mathcal{I}_{av}\phi(V) = \frac{1}{|\mathcal{T}_V|} \sum_{K \in \mathcal{T}_V} \phi|_K(V), & V \in \Omega \cap \Gamma_N \\ \mathcal{I}_{av}\phi(V) = 0, & V \in \Gamma_D. \end{cases}$$

## 3.4. Experimentos numéricos

En la siguiente sección presentamos resultados numéricos de la aproximación de grado más bajo de elementos de Raviart-Thomas a la solución de (3.3.1) para distintos valores de  $\alpha$ . Consideramos dos tipos de datos de Neumann,  $g$ . La primera es tal que se anula en los extremos de la frontera  $\Gamma_N$ , de esta manera es compatible con el caso homogéneo de Dirichlet, condición impuesta sobre  $\Gamma_D$ . Y la segunda no es compatible, en este caso se produce una singularidad extra en las esquinas mencionadas.

Para el primer caso de dato de Neumann tomamos

$$g(x) = d_\alpha \sin \pi x, \quad \text{donde} \quad d_\alpha = 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}.$$

Para esta  $g$ , y para  $L = +\infty$ , la solución exacta está dada por

$$u_\infty(x, y) = c_\alpha (\sqrt{\pi} y)^{\frac{1-\alpha}{2}} K_{\frac{1-\alpha}{2}}(\sqrt{\pi} y) \sin \pi x$$

donde  $c_\alpha = 2^{\frac{1+\alpha}{2}} / \Gamma(\frac{1-\alpha}{2})$ , y  $K_{\frac{1-\alpha}{2}}(x)$  es la función de Bessel modificada del segundo tipo (ver [?]). La diferencia entre  $u_\infty$  y la solución  $u$  dada en (3.3.1) decrece exponencialmente en  $L$  (ver [?, ?]) para el análisis del error), y por lo que, tomando  $L$  suficientemente grande dependiendo del tamaño de la malla, esta diferencia es despreciable en comparación con la discretización del error. Para los ejemplos propuestos se puede ver que alcanza con tomar  $L = 5$ , usaremos este valor y consideraremos  $u_\infty$  como la solución exacta para estimar los errores.

Primero resolveremos el caso para mallas quasi-uniformes. Usando la estimación general del error calculada en el Teorema 2.2.5 (ver [?]), junto a la estimación a priori probada en el Lema 5.1 del trabajo [?] en referencia a la solución de (3.3.1). El orden esperado

de convergencia para  $\sigma$  es  $N^{-\frac{1+\alpha}{4}+\varepsilon}$ , con  $\varepsilon > 0$  arbitrario, y donde  $N$  es el número de elementos.

El orden numérico obtenido es  $N^{-\zeta}$  con  $\zeta = 0,46$  para  $\alpha = 3/5$  y,  $\zeta = 0,14$ , para  $\alpha = -3/5$  (Ver Figura 3.2).

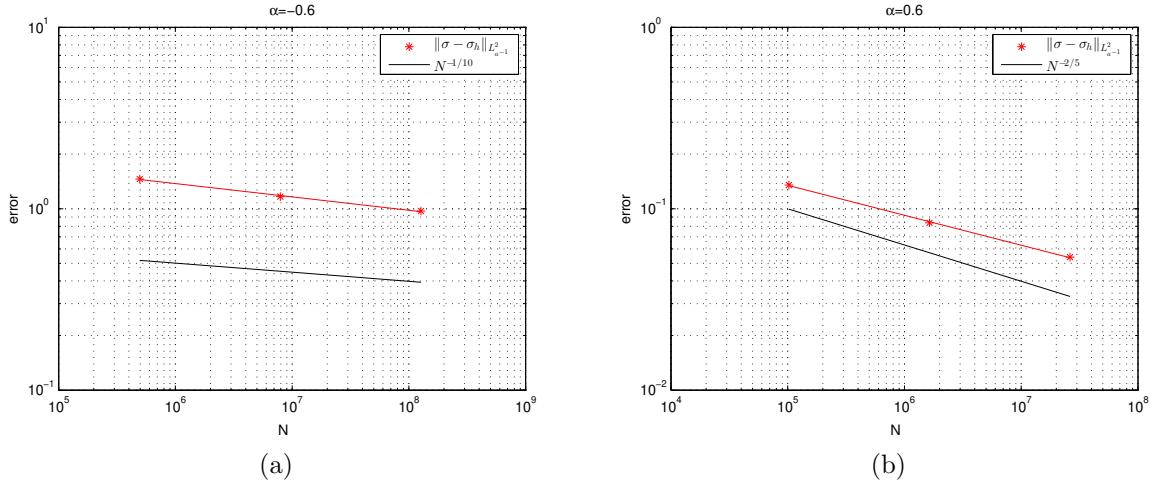


Figura 3.2: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  para mallas uniformes versus obtenido via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. *Izquierda* Caso  $\alpha = -3/5$  donde  $eoc = 0,14$ . *Derecha*: Caso  $\alpha = 3/5$  donde  $eoc = 0,46$ . El orden teórico esperado es  $N^{-\frac{1+\alpha}{4}+\varepsilon}$  para ambos casos.

Segundo, resolveremos el mismo problema con una malla adaptativa basada en el procedimiento propuesto. Los experimentos numéricos muestran que, para los ejemplos considerados, la parte del estimador correspondiente a la oscilación del dato  $\eta_{osc,\Gamma_N}$  puede ser desestimada con respecto a  $\eta_\sigma$ , por lo que sólo se usa este último para marcar los elementos a refinar. En cada paso calculamos  $\eta_{max} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{\sigma,K}$  y seleccionamos los elementos  $K$  tales que  $\eta_{\sigma,K} > \eta_{max}/2$ .

Las Figuras 3.3a, 3.3b, 3.5a y 3.5b muestran los órdenes de convergencia de los ejemplos numéricos para  $\alpha = 1/4$ ,  $\alpha = 3/5$ ,  $\alpha = -1/4$  y  $\alpha = -3/5$  respectivamente. Las Figuras 3.3 y 3.5 muestran algunas mallas obtenidas mediante el proceso de adaptatividad. Las Tablas 3.1 y 3.2 muestran los errores al realizar distintos refinamientos consecutivos para  $\alpha = 1/4$  y  $\alpha = -1/4$ .

La Tabla 3.3 muestra los valores de  $eoc_\sigma$  y  $eoc_{\nabla u}$  asociados a  $\|\sigma_h - \sigma\|_{a^{-1}}$  y a  $\|\nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\|_a$  para los distintos valores de  $\alpha$  mencionados para el caso de mallas adaptativas y el orden esperado de convergencia para  $\sigma$  para el caso de mallas uniformes,  $N^{-\frac{1+\alpha}{4}+\varepsilon}$ , con  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Notemos que en el caso de mallas adaptativas el orden es mejor.

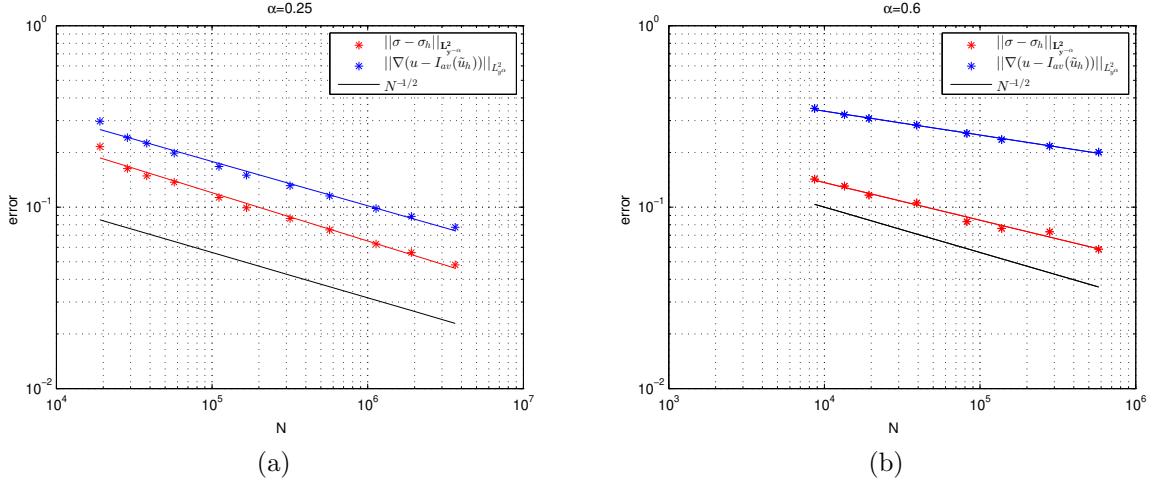


Figura 3.3: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  y  $\nabla u$  para mallas adaptativas via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. *Izquierda:* Caso  $\alpha = 1/4$ ,  $eoc_\sigma = 0,53$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,48$ . *Derecha:* Caso  $\alpha = 3/5$ ,  $eoc_\sigma = 0,43$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,41$ . El orden teórico esperado es  $N^{-\frac{1}{2}}$  para ambos casos.

Tabla 3.1: Cantidad de elementos y errores obtenidos para el ejemplo  $\alpha = 1/4$ .

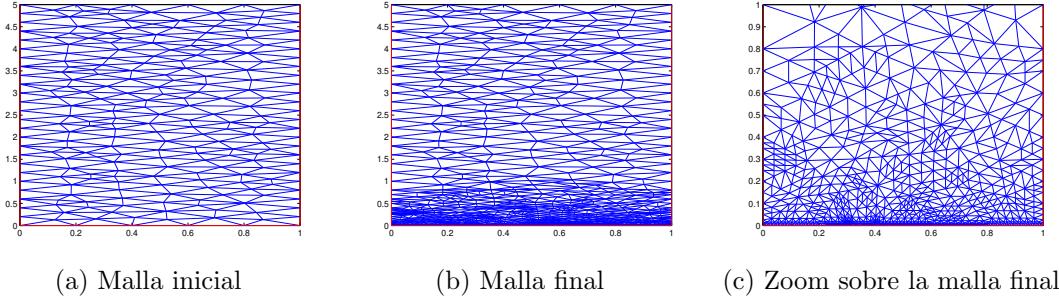
N	$\ \sigma_h - \sigma\ _{a^{-1}}$	$\ \nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\ _a$
169	1,6304e-01	2,4129e-01
195	1,4856e-01	2,2493e-01
239	1,3714e-01	1,9857e-01
333	1,1306e-01	1,6753e-01
408	9,9153e-02	1,5001e-01
563	8,6459e-02	1,312e-01
754	7,4915e-02	1,1525e-01
1064	6,2648e-02	9,8303e-02
1381	5,6196e-02	8,9983e-02
1911	4,8054e-02	7,7484e-02

Tabla 3.2: Cantidad de elementos y errores obtenidos para el ejemplo  $\alpha = -1/4$ .

N	$\ \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\ _{a^{-1}}$	$\ \nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\ _a$
237	3,6678e-1	3,191e-1
315	3,0595e-1	2,6897e-1
386	2,7446e-1	2,2932e-1
509	2,4409e-1	2,0515e-1
667	2,1116e-1	1,7164e-1
936	1,8117e-1	1,4896e-1
1212	1,6272e-1	1,275e-1
1637	1,4301e-1	1,111e-1
2202	1,2609e-1	9,6564e-2
3082	1,1118e-1	8,264e-2

Tabla 3.3: Valores  $eoc_{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $eoc_{\nabla u}$  obtenidos en el caso de mallas adaptativas junto al orden teórico esperado para el caso uniforme para  $\alpha = -1/4$ ,  $\alpha = -3/5$ ,  $\alpha = 1/4$  y  $\alpha = 3/5$ 

$\alpha$	$eoc_{\boldsymbol{\sigma}}$	$eoc_{\nabla u}$	$N^{-\frac{1+\alpha}{4}+\varepsilon}$
1/4	5,3e-1	4,8e-1	3,1e-1
3/5	4,3e-1	4,1e-1	4e-1
-3/5	4,3e-1	4,8e-1	1e-1
-1/4	4,7e-1	5,3e-1	1,8e-1

Figura 3.4: Mallas adaptativas para el caso  $\alpha = 1/4$ .

Para terminar damos los resultados de aplicar un proceso de adaptatividad al problema (3.3.1) en el caso de frontera no compatible Neumann dada por  $g = 1$ .

También, en este caso, el orden óptimo de convergencia es el esperado. Este resultado se puede ver en la Figura 3.6, algunas mallas se muestran en la Figura 3.7 y los errores para los distintos refinamientos en las tablas 3.4 y 3.5 para  $\alpha = 1/4$  y  $\alpha = -1/4$ .

Y, en la Tabla 3.6, se muestran los valores de  $eoc_{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $eoc_{\nabla u}$  para  $\alpha = 1/4$  y  $\alpha = -1/4$ .

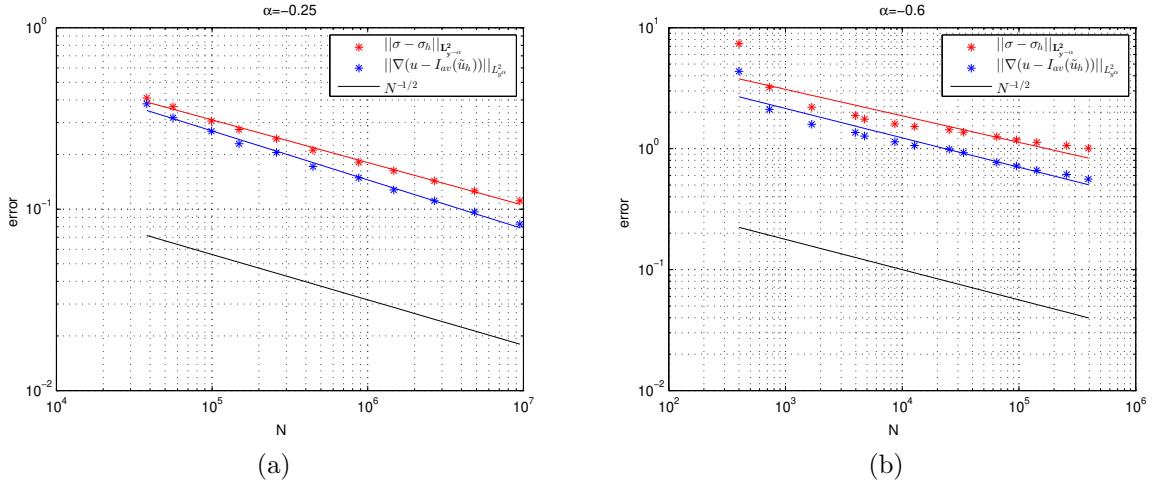


Figura 3.5: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\sigma$  y  $\nabla u$  para mallas adaptativas via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. *Izquierda:* Caso  $\alpha = -1/4$ ,  $eoc_\sigma = 0,47$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,53$ . *Derecha:* Caso  $\alpha = -3/5$ ,  $eoc_\sigma = 0,43$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,48$ . El orden teórico esperado es  $N^{-\frac{1}{2}}$  para ambos casos.

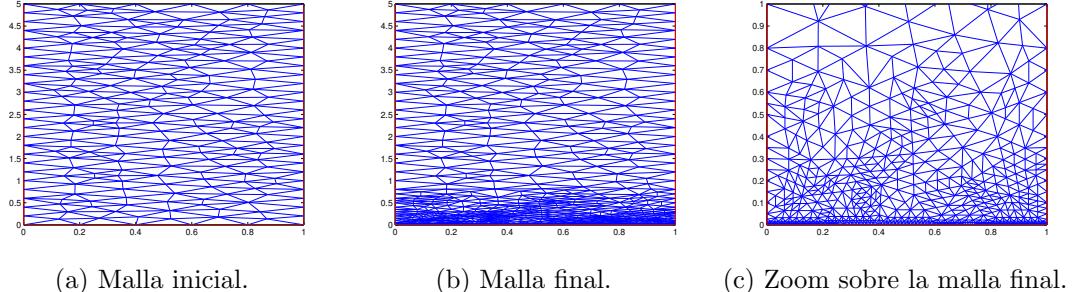


Figura 3.6: Mallas adaptativas para el caso  $\alpha = -1/4$ .

Tabla 3.4: Cantidad de elementos y errores obtenidos para el ejemplo  $\alpha = 1/4$ .

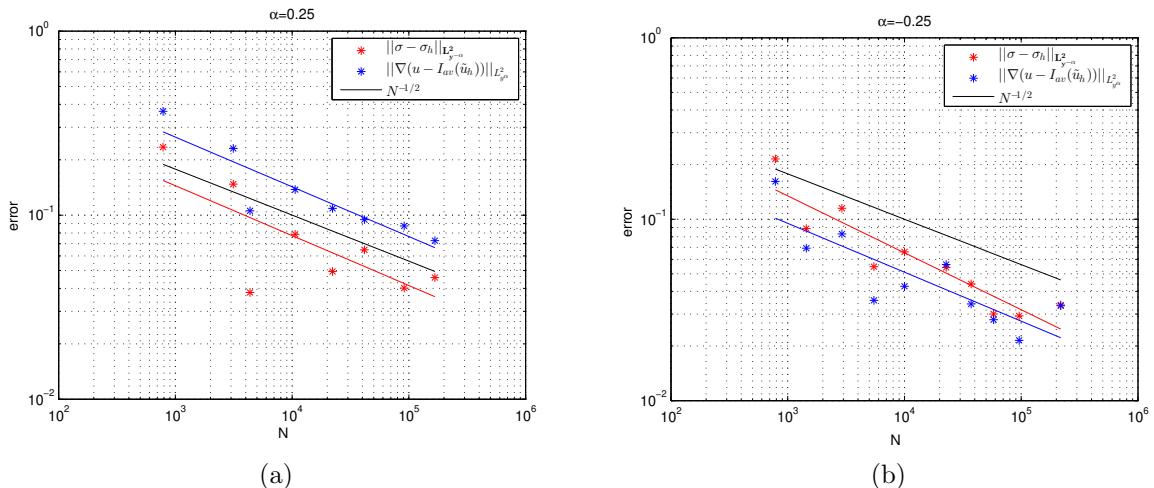
N	$\ \sigma_h - \sigma\ _{a^{-1}}$	$\ \nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\ _a$
28	2,3424e-1	3,6651e-1
56	1,4728e-1	2,3049e-1
66	3,7993e-2	1,0553e-1
103	7,8644e-2	1,3788e-1
149	4,9456e-2	1,0882e-1
204	6,4824e-2	9,4505e-2
302	4,0186e-2	8,7412e-2

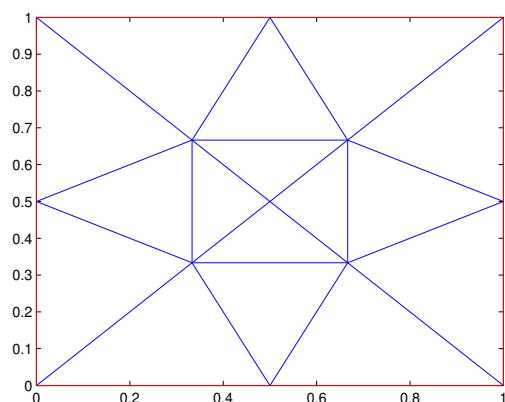
Tabla 3.5: Cantidad de elementos y errores obtenidos para el ejemplo  $\alpha = -1/4$ .

N	$\ \boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}\ _{a^{-1}}$	$\ \nabla(u - \mathcal{I}_{av}\tilde{u}_h)\ _a$
28	2,1492e-1	1,6153e-1
38	8,8841e-1	6,9268e-2
54	1,1488e-2	8,2987e-2
74	5,4741e-2	3,5677e-2
100	6,6046e-2	4,2717e-2
151	5,4269e-2	5,6245e-2
193	4,4006e-2	3,4090e-2
241	3,0032e-2	2,7909e-2
310	2,9306e-2	2,1484e-2
467	3,3631e-2	3,3343e-2

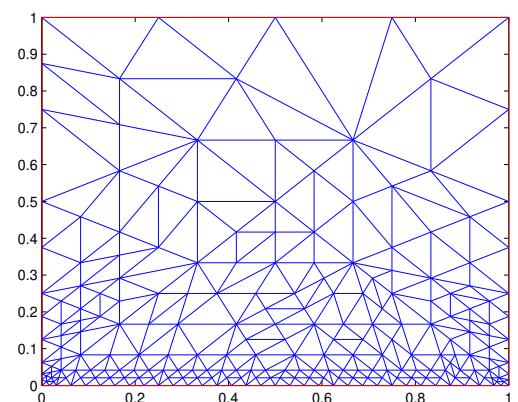
Tabla 3.6: Valores  $eoc_{\boldsymbol{\sigma}}$  y  $eoc_{\nabla u}$  obtenidos en el caso de mallas adaptativas para  $\alpha = -1/4$  y  $\alpha = 1/4$ .

$\alpha$	$eoc_{\boldsymbol{\sigma}}$	$eoc_{\nabla u}$
1/4	0,54	0,54
-1/4	0,62	0,53

Figura 3.7: Evolución del orden experimental de convergencia del error de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\nabla u$  para mallas adaptativas via un ajuste de cuadrados mínimos con escala logarítmica. *Izquierda:* Caso  $\alpha = 1/4$ ,  $eoc_{\boldsymbol{\sigma}} = 0,54$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,54$ . *Derecha:* Caso  $\alpha = -1/4$ ,  $eoc_{\boldsymbol{\sigma}} = 0,62$  y  $eoc_{\nabla u} = 0,53$ . El orden teórico esperado es  $N^{-\frac{1}{2}}$  para ambos casos.



(a) Malla inicial.



(b) Malla final.

Figura 3.8: Mallas adaptativas para el caso  $\alpha = 1/4$ .



# Bibliografía

- [1] R. A. Adams and J. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, Boston, 2nd edition, 2003.
- [2] J. P. Agnelli, E. M. Garau, and P. Morin. A posteriori error estimates for elliptic problems with Dirac measure terms in weighted spaces. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 48:1557–1581, 2014.
- [3] M. Ainsworth and J. T. Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience*, 2000.
- [4] A. Alonso. Error estimators for a mixed method. *Numerische Mathematik*, 74(4):385–395, 1996.
- [5] M. L. Alvarez, M. G. Armentano, and R.G . Durán. Raviart - Thomas interpolation in fractional weighted Sobolev spaces. *Computers Mathematics with Applications*, 168:39–45, 2024.
- [6] M. L. Alvarez and R. G. Durán. A posteriori error estimates for mixed approximations of degenerate elliptic problems. *Applied Numerical Mathematics*, 188(1):146–159, 2023.
- [7] T. Arbogast and Z. Chen. On the implementation of mixed methods as nonconforming methods for second- order elliptic problems. *Math. Comp.*, 64(211):943–972, 1995.
- [8] T Arbogast and A.L. Taicher. A linear degenerate elliptic equation arising from two-phase mixtures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(5):3105–3122, 2016.
- [9] D. N. Arnold and F. Brezzi. Mixed and nonconforming finite element methods: Implementation, postprocessing and error estimates. *RAIRO-M2AN*, 19(1):7–32, 1985.
- [10] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer, 2013.
- [11] D. Braess and J. Schoberl. Equilibrated residual error estimator for edge elements. *Math. Comp.*, 77(262):651–672, 2008.

- [12] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer-Verlag, 1994.
- [13] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2010.
- [14] F. Brezzi, D. Boffi, L. Demkowicz, R. G. Durán, R. S. Falk, and M. Fortin. *Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications*. Springer, 2008.
- [15] L. Caffarelli and L. Silvestre. An extension problem related to the fractional Laplacian. *Communications in partial differential equations*, 32(8):1245–1260, 2007.
- [16] D. Cai, Z. Cai, and S. Zhang. Robust equilibrated error estimator for diffusion problems: Mixed finite elements in two dimensions. *Journal of Scientific Computing*, 83:22(1):1–22, 2020.
- [17] Z. Cai and S. Zhang. Recovery-based error estimators for interface problems: Mixed and nonconforming finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(1):30–52, 2010.
- [18] C. Carstensen and R. Ma. Adaptive mixed finite element methods for non-self-adjoint indefinite second-order elliptic pdes with optimal rates. *SIAM J. Numer. Anal.*, 59(2):955–982, 2021.
- [19] M. E. Cejas, R. G. Durán, and M. Prieto. Mixed methods for degenerate elliptic problems and application to fractional Laplacian. *ESAIM: M2AN*, 55:S993–S1019, 2021.
- [20] L. Chen, R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado. A pde approach to fractional diffusion: A posteriori error analysis. *Journal of Computational Physics*, 293:339–358, 2015.
- [21] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- [22] C. D’Angelo and A. Quarteron. On the coupling of 1d and 3d diffusion-reaction equations. Application to tissue perfusion problems. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(8):1481–1504, 2008.
- [23] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [24] J. Duoandikoetxea. *Forty years of Muckenhoupt weights*. Function spaces and inequalities (Spring Lectures in Analysis, Paseky and Jizerou. Charles University and Academy of Sciences, Prague, 2013.
- [25] T. Dupont and L.R. Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Mathematics of Computation*, 34:441–463, 1980.
- [26] R. G. Durán and C. Padra. An error estimator for nonconforming approximations of a non linear problem. *en Finite Element Methods, Fifty years of the Courant Element*, M. Krizek, P. Neittaanmaki y R. Stenberg, eds., pages 201–205, 1994.

- [27] E. Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in  $n$  variabili. *Rendiconti del seminario matematico della universita di Padova*, 27:284–305, 1957.
- [28] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman, 1985.
- [29] L. I. Hedberg. On certain convolution inequalities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 36(2):505–510, 1972.
- [30] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Dover Publications, 1987.
- [31] O.A. Karakashian and F Pascal. A posteriori error estimates for a discontinuous galerkin approximation of second order elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 41(6):2374–2399, 2006.
- [32] A. Kufner. *Weighted Sobolev spaces*, volume 31 of *Teubner-Texte Math.* Teubner, Leipzig, 1980.
- [33] L. D. Marini and P. Pietra. Mixed finite element approximation of a degenerate elliptic problem. *Matemática Aplicada e Computacional*, 71:225–236, 1995.
- [34] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. *Transactions of the American Mathematical Society*.
- [35] B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden. Weighted norm inequalities for fractional integrals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 192:261–274, 1974.
- [36] R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado. A pde approach to fractional diffusion in general domains: A priori error analysis. *Foundations of Computational Mathematics*, 15(3):733–791, 2015.
- [37] R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado. A pde approach to numerical fractional diffusion. *Proceedings of the 8th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, pages 211–236, 2015.
- [38] R. H. Nochetto, E. Otárola, and A. J. Salgado. Piecewise polynomial interpolation in Muckenhoupt weighted Sobolev spaces and applications. *Numer. Math.*, 132(1):85–130, 2016.
- [39] P. Oswald. On a bpx-preconditioner for p1 elements. *Computing*, 51:125–133, 1993.
- [40] W. Prager and J. L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quarterly of Applied Mathematics*, V(3):241–269, 1947.
- [41] P. A. Raviart and J.M. Thomas. A mixed finite element method of a second order elliptic problems. *Mathematical Aspects of the Finite Element Method*, pages 292–315, 1977.

- [42] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press. Princeton, NJ, 1993.
- [43] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. John Wiley & Sons Inc, 1996.
- [44] R. Verfürth. A note on polynomial approximation in Sobolev spaces. *Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 33(4):715–719, 1999.
- [45] M. Vohralík. A posteriori error estimates for lowest-order mixed finite element discretizations of convection-diffusion-reaction equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(4):1570–1599, 2007.
- [46] M. Vohralík. Unified primal formulation-based a priori and a posteriori error analysis of mixed finite element methods. *Mathematics of Computation*, 79(272):2001–2032, 2010.
- [47] M Zlamal. Curved elements in the finite element method I. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10(1):229–240, 1973.