



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tres contribuciones matemáticas a economía y finanzas

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Nahuel Ignacio Arca

Director de tesis: Pablo Amster

Consejero de estudios: Nicolás Saintier

Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló

Buenos Aires, 2026

Tres contribuciones matemáticas a economía y finanzas

Resumen

En esta tesis se presentan tres trabajos, en los que se desarrollaron herramientas matemáticas para aplicarlas al estudio de modelos financieros y macroeconómicos.

En el primer trabajo, se presenta una variante del famoso modelo binomial de precios de activos. Esta variante incorpora una cota para las ventas cortas. Se demuestra una fórmula para todos los momentos de los retornos logarítmicos y se deriva una fórmula para el caso con infinitos inversores. También se muestra como calcular parámetros para aproximar momentos dados.

En el segundo trabajo, se estudian modelos de mercados finitos bajo la teoría del arbitraje. En base a una interpretación geométrica, se dan condiciones necesarias y suficientes para que un mercado sea libre de arbitraje y completo. También se presenta un algoritmo para completar mercados libres de arbitraje de todas las maneras posibles. Se aplican estos resultados al estudio de una versión a tiempo discreto del modelo Korn-Kreer-Lenssen.

El tercer trabajo fue producido en colaboración con un grupo de investigación del SEDLab del Departamento de Computación. Se desarrolló un modelo macroeconómico de la economía Argentina. Se corrieron simulaciones del modelo y se analizó su comportamiento, integrando herramientas numéricas y analíticas. La derivación de las ecuaciones del modelo también debe ser destacada, ya que se logró bajo un innovador marco metodológico que garantiza características realistas del modelo y argumentación rigurosa.

Palabras claves: sin ventas cortas, desviaciones de la normalidad, momentos binomiales, multinomial, viabilidad, completitud, mercado límite, economía argentina, modelo de Goodwin, SFC

Three mathematical contributions to economics and finance

Abstract

In this thesis three works are presented, in which mathematical tools were developed in order to apply them to the study of financial and macroeconomic models.

In the first work, a variation of the well-known binomial model of asset prices is presented. This variation incorporates a bound to short-selling. A formula for all the moments of the logarithmic returns is proven and a formula for the case with infinitely many investors is derived. It is also shown, how to compute parameters in order to approximate given moments.

In the second work, finite market models were studied under arbitrage pricing theory. Based on a geometric interpretation, necessary and sufficient conditions for a market to be arbitrage-free and complete were given. An algorithm for completing arbitrage-free markets in every possible way is also presented. These results are applied to the study of a discrete-time version of the Korn-Kreer-Lenssen model.

The third work was produced in collaboration with a research group of the SED-Lab from the Department of Computer Sciences. A macroeconomic model of the Argentinian economy was developed. Simulations of the model were run and its behavior was analyzed, integrating numerical and analytical tools. The derivation of the model equations must also be highlighted, as it was achieved under an innovative methodological framework that guarantees realistic features of the model and rigorous argumentation.

Keywords: no shorting, normality deviations, binomial moments, multinomial, viability, completeness, limit market, Argentinian economy, Goodwin model, SFC

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Preliminares	8
1.2. Toros vs. osos: un modelo trinomial de un activo financiero	9
1.3. Viabilidad y completitud del mercado para modelos multinomiales . .	9
1.4. TED&POP: Un modelo de la economía argentina	10
1.5. Otros modelos dinámicos en el marco de TED&POP	11
1.6. Código	11
2. Preliminares	12
2.1. Introducción	12
2.2. Combinatoria	12
2.2.1. Sumatorias	12
2.2.2. Números de Stirling de segunda especie	14
2.3. Probabilidad	14
2.3.1. Funciones medibles	14
2.3.2. Teorema de Hahn-Kolmogorov	15
2.3.3. Función generadora de momentos	15
2.3.4. Esperanza condicional	15
2.3.5. Particiones y σ -álgebras	16
2.3.6. La distribución de Poisson	20
2.3.7. Procesos estocásticos	21
2.4. Mercados financieros	23
2.4.1. Mercados a tiempo discreto	23
2.4.2. Descomposición de mercados discretos	28
2.4.3. Mercados de un solo período	36
2.4.4. El modelo binomial	37
2.4.5. Una teoría de mercados más general	39
2.5. Análisis convexo	41
2.6. Macroeconomía	43
3. Toros vs. osos: un modelo trinomial de un activo financiero	51
3.1. Introducción	51
3.2. El modelo en palabras	53
3.3. Construcción del espacio de probabilidad	54
3.4. Cálculo de momentos de los retornos logarítmicos	57
3.5. Momentos del modelo con infinitos inversores	64
3.6. Ajuste de momentos	66
3.6.1. Prueba con datos reales	70

3.7.	Modelo multigrupos	71
3.7.1.	Ajuste de momentos	73
3.8.	Conclusiones	74
4.	Viabilidad y completitud del mercado para modelos multinomiales	76
4.1.	Introducción	76
4.2.	Teoría	77
4.2.1.	Clasificación de medidas de martingala	78
4.2.2.	Más fechas de trading	82
4.3.	Ejemplos concretos	83
4.4.	Aplicación	85
4.4.1.	El modelo Korn–Kreer–Lenssen	88
4.5.	Conclusiones	94
5.	TED&POP: Un modelo de la economía argentina	95
5.1.	Introducción	95
5.2.	El modelo discreto	96
5.2.1.	Salarios e impuestos	99
5.2.2.	Subsidios	99
5.2.3.	Producción	100
5.2.4.	Ventas	101
5.2.5.	Importaciones	101
5.2.6.	La secuencia completa de eventos	102
5.3.	El modelo continuo	103
5.3.1.	Demanda extranjera	107
5.3.2.	Suavizado de las funciones	108
5.4.	Tabla del modelo	109
5.5.	Un comentario sobre la productividad del trabajo	113
5.6.	Tendencias a largo plazo	114
5.7.	Características económicamente significativas	114
5.8.	Simulaciones	115
5.8.1.	Regímenes de funcionamiento	115
5.9.	Soluciones de mediano plazo	119
5.9.1.	Régimen restringido por el capital, con existencias	121
5.9.2.	Régimen sin existencias	124
5.9.3.	Régimen restringido por la demanda	126
5.9.4.	Régimen restringido por la población	129
5.10.	Conclusiones	132
6.	Otros modelos dinámicos en el marco de TED&POP	134
6.1.	Introducción	134
6.2.	Sobre la productividad del trabajo	135
6.2.1.	Impacto de la productividad en la evolución del modelo a largo plazo	135
6.2.2.	Aumento de la productividad por adquisición de nuevos capitales	136
6.3.	Sobre la evolución de la población en edad de trabajar	138
6.4.	Un TED&POP más simple	139
6.4.1.	Salarios e impuestos	140
6.4.2.	Producción	141

6.4.3.	Exportaciones e importaciones	141
6.4.4.	Tabla del modelo	141
6.4.5.	Soluciones de mediano plazo	142
6.5.	Una alternativa al modelo de Dávila-Fernández y Libânio	147
6.5.1.	Salarios y ganancias distribuidas	150
6.5.2.	Producción	150
6.5.3.	Exportaciones e importaciones	150
6.5.4.	Inversiones	150
6.5.5.	Observaciones importantes	151
6.5.6.	Precios y productividad	152
6.5.7.	Tabla del modelo	152
6.5.8.	Solución	155
6.6.	Un modelo de Goodwin con restricción externa	158
6.6.1.	Solución	161
6.6.2.	Una alternativa con empleo y participación de salarios	165
6.7.	Conclusiones (de toda la tesis)	167
A.	Código	169
A.1.	Toros vs. osos	169
A.1.1.	Cálculo de momentos	169
A.1.2.	Cálculo de asimetría y exceso de curtosis	171
A.1.3.	Aplicación del procedimiento	171
A.1.4.	Análisis de la convergencia	176
A.2.	Modelos multinomiales	178

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis presenta tres trabajos, en los que se utilizan herramientas matemáticas para desarrollar y estudiar modelos financieros y macroeconómicos. El primer trabajo consiste en una alternativa sin ventas cortas (es decir, que los inversores no pueden pedir prestadas acciones para venderlas) al modelo binomial de precios de activos. El segundo trabajo es otra generalización del modelo binomial, pero gran parte de los desarrollos teóricos aplican a todos los mercados discretos. El tercer trabajo es un modelo macroeconómico de la Argentina, desarrollado en colaboración con un grupo de investigación del SEDLab del Departamento de Computación; como matemático del grupo, me encargué de la fundamentación rigurosa de las ecuaciones del modelo y el análisis matemático del mismo.

Si bien es cierto que los temas abordados son diversos, todos estos trabajos son distintas manifestaciones de una misma metodología. En la discusión que sigue, cuando hable de “economía”, estoy incluyendo implícitamente el área de finanzas.

La matemática constituye, desde hace décadas, una herramienta indispensable para el estudio riguroso de la economía. Los modelos económicos han encontrado en el lenguaje matemático una forma precisa de articular hipótesis, derivar consecuencias y contrastar predicciones con datos reales. Sin embargo, los economistas enfrentan siempre una difícil tarea: producir modelos que sean permeables al uso de herramientas matemáticas, pero que mantengan suficientes rasgos de la realidad.

Una corriente contemporánea de economistas, la corriente SFC (por *Stock-Flow Consistent*), ha puesto énfasis en un aspecto de la realidad, que muchos modelos macroeconómicos no preservan. En toda transferencia de dinero, el dinero va de un agente a otro: no hay dinero que se acredite en la cuenta de un agente sin que se debite de la cuenta de otro. Este es un principio que constituye la base fundamental de la teoría contable. Los economistas de la corriente SFC, argumentan que todos los modelos macroeconómicos debieran cumplir ese principio contable, porque no cumplir ese principio suele llevar a contradicciones.

Inspirada en esta corriente, la metodología aquí empleada plantea otros principios que yo creo que todo modelo debería cumplir, y propone un procedimiento para producir modelos que los cumplan. El procedimiento consiste en partir de una posible explicación de un fenómeno a partir de ciertos rasgos observables, y hacerla pasar a través de dos filtros:

- **Disposición secuencial de los eventos.** Muchas explicaciones tienden a enumerar diversos eventos sin disponerlos en una secuencia. Esto suele ocultar que la explicación encierra contradicciones causales como, por ejemplo, un

efecto que antecede a una causa.

- **Conservación de cantidades físicas.** A menos que se explicita la forma en la que una sustancia se crea o se destruye, se asume que esta permanece constante. Esto generaliza la exigencia de la corriente SFC: no sólo el dinero debe respetar una ley de conservación, también cosas como la maquinaria o los bienes de consumo. Además, este principio evita, por ejemplo, que stocks de dinero se transformen espontáneamente en maquinarias.

De esta manera, se pretende mantener rasgos reales, al mismo tiempo que se consigue una explicación más clara y rigurosa. Los trabajos aquí presentados son ejemplos en los que fue posible analizar los modelos así conseguidos mediante herramientas matemáticas, que permitieron completar los huecos en las explicaciones, consiguiéndose así explicaciones rigurosas y realistas.

Adicionalmente, las explicaciones presentadas en este trabajo son en algún sentido reduccionistas, puesto que pretenden explicar un todo a partir de sus partes. A mi juicio, esto no refleja ninguna necesidad metodológica, y es simplemente el producto de gustos personales.

Presento a continuación un breve resumen de los capítulos de la tesis, destacando cómo se expresan las cuestiones metodológicas recién señaladas.

1.1. Preliminares

El capítulo 2 presenta los preliminares matemáticos y económicos necesarios para los capítulos siguientes, cubriendo resultados de combinatoria, teoría de la probabilidad, mercados financieros, análisis convexo y macroeconomía. Para la selección de temas a cubrir, asumí que el lector estará familiarizado con los contenidos de la Licenciatura en Ciencias Matemáticas con orientación pura. Si no lo está, puede consultar la siguiente bibliografía:

- Las publicaciones de grado del departamento de matemática: <https://web.dm.uba.ar/index.php/component/content/article/713-publicaciones-cursos-grado>
- Las notas de Probabilidad y Estadística del profesor Pablo Ferrari: <https://mate.dm.uba.ar/%7Epferrari/clases/TeoricasProbaM2016-Pablo.pdf>
- Las notas de Análisis Real del profesor Pablo De Nápoli: https://mate.dm.uba.ar/~pdenapo/apuntes-analisis-real/notas_de_real.pdf

Traté de ser consistente con la terminología y notación de estas publicaciones, por considerarlas representativas de la experiencia previa que espero de mis lectores.

Además, los textos citados a lo largo del capítulo de preliminares también pueden servir como lectura alternativa a las publicaciones del departamento, para el lector que así lo prefiera.

1.2. Toros vs. osos: un modelo trinomial de un activo financiero

El capítulo 3 presenta el modelo *toros vs. osos*, un modelo financiero alternativo al clásico modelo binomial, que incorpora una restricción sobre las ventas en corto. Esta modificación tiene consecuencias sobre la distribución de los retornos logarítmicos, permitiendo el modelado de desviaciones de la normalidad ausentes en los modelos canónicos pero presentes en la realidad.

Se trata de un modelo de precio de una acción a tiempo discreto, en el que en cada instante de tiempo se selecciona un inversor que compra (en cuyo caso es un *toro*) o vende (en cuyo caso es un *oso*) la acción a un hacedor de mercado. El hacedor de mercado se encarga de subir (bajar) el precio de la acción si el último inversor compró (vendió). Se puede observar inmediatamente que los eventos se disponen en forma secuencial. Por otro lado, la conservación de cantidades físicas se manifiesta en que los inversores pueden quedarse sin acciones o dinero.

A lo largo del capítulo se estudia la distribución del retorno logarítmico a largo plazo, desarrollándose entre otras cosas una fórmula de sus momentos y un procedimiento para ajustar sus parámetros según datos empíricos. El capítulo termina con una generalización del modelo que permite incluir una cantidad arbitraria de grupos de inversores, que pueden afectar el precio en menor o mayor medida.

Este trabajo fue enviado a publicar, y la versión preliminar puede encontrarse en <https://arxiv.org/abs/2505.18723>

1.3. Viabilidad y completitud del mercado para modelos multinomiales

El capítulo 4 se embarca en el estudio de una generalización del modelo binomial de los mercados financieros: los modelos *multinomiales*. El modelo binomial es un modelo a tiempo discreto del precio de una acción, en el que en cada instante de tiempo el futuro se bifurca: o bien el precio de la acción sube al multiplicarse por un factor $u > 1$, o bien el precio de la acción baja al multiplicarse por un factor $d < 1$. En el modelo multinomial, en cada instante de tiempo el futuro se ramifica en b posibilidades: se tienen coeficientes $0 < f_1 < \dots < f_b$, y el precio puede multiplicarse por cualquiera de estos factores f_i . Claramente los eventos (cambios de precios) se disponen secuencialmente.

En matemática financiera hay dos características principales de los mercados que suelen ser de interés: que sean viables y que sean completos. Además, como puede leerse en el capítulo de preliminares, los mercados discretos pueden descomponerse en mercados de un solo período. En el capítulo 4 se estudian estas propiedades para modelos multinomiales, en base a las mismas propiedades de los mercados de un solo período que los componen.

En general, los mercados discretos viables pueden completarse agregando activos. Las formas en las que pueden completarse están relacionadas con el conjunto de sus *medidas de martingala equivalentes*. El estudio de este conjunto en modelos de un solo período arrojó una novedosa caracterización geométrica del conjunto en base a finitos generadores. Se obtuvo un algoritmo para hallar dichos generadores, que puede ser aplicado a otros problemas de geometría convexa.

Además, se utilizan estos resultados para estudiar una versión discreta del modelo Korn-Kreer-Lenssen, originalmente continuo. El modelo continuo puede pensarse como el límite de versiones discretas. Sin embargo, el capítulo concluye con un ejemplo de las limitaciones de este enfoque.

Este trabajo fue enviado a publicar, y la versión preliminar puede encontrarse en <https://arxiv.org/abs/2508.13966>

1.4. TED&POP: Un modelo de la economía argentina

El capítulo 5 se aleja del mundo financiero para adentrarse en la macroeconomía: en colaboración con economistas y científicos de la computación del SED-Lab de la UBA, se desarrolló TED&POP, un modelo macroeconómico de la economía argentina basado en un marco metodológico original. Ese trabajo fue aceptado para presentarse en el 2do. Simposio Argentino de Modelado y Simulación. También fue enviado a publicar, y la versión preliminar puede encontrarse en https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=6486721

El marco metodológico que desarrollé, consiste en plantear el modelo a través de una serie de pasos:

1. Definición de actores y activos.
2. Planteo del modelo discreto.
 - a) Definición de stocks: qué actor los controla y de qué activos están compuestos.
 - b) Secuencia grosera de eventos, tablas contables (que garantizan la conservación de cantidades físicas) y ecuaciones contables.
 - c) Secuencia fina de eventos y ecuaciones de comportamiento.
3. Deducción del modelo continuo y tabla del modelo.

Un ejemplo simple de esta metodología puede hallarse en el capítulo de preliminares.

Plantear inicialmente una versión discreta permite la disposición secuencial de los eventos, además de hacer más rigurosa la deducción de las ecuaciones del modelo continuo. La tabla del modelo es un formato de presentación de las variables, parámetros y ecuaciones del modelo que permite chequear inmediatamente que haya tantas ecuaciones como variables, y que haya homogeneidad dimensional.

Después de plantear el modelo, procedo a analizarlo. Primeramente se obtienen ciertos resultados importantes sobre las tendencias a largo plazo del modelo. Para continuar el análisis, se desarrolla el concepto de “régimen de funcionamiento”. Se presenta una simulación del modelo y se descubren los regímenes de funcionamiento predominantes en ella. Finalmente, se emplean herramientas analíticas para tratar de entender la dinámica de cada uno de estos regímenes.

1.5. Otros modelos dinámicos en el marco de TED&POP

El capítulo 6 cierra la tesis proponiendo posibles líneas de investigación futura. Por esta razón, las secciones de ese capítulo no forman un todo y no constituyen trabajos completos, son sólo los pasos iniciales de posibles trabajos futuros.

Todas las secciones corresponden a elaboraciones que se fueron dando mientras se desarrollaba TED&POP y motivadas por éste. Las primeras dos secciones presentan alternativas a dinámicas específicas dentro del modelo TED&POP, correspondientes a la productividad y la población en edad de trabajar. Las restantes secciones tratan cuatro modelos macroeconómicos: una alternativa simple a TED&POP, una alternativa a un modelo tratado en [18] y dos modelos basados en el modelo de Goodwin.

Nuevamente, todas las contribuciones de este capítulo pasan ambos filtros.

El capítulo termina con una sección de conclusiones de toda la tesis que resume posibles trabajos futuros, sugeridos por los desarrollos de los capítulos anteriores.

1.6. Código

En los capítulos 3 y 4 se desarrollaron procedimientos que fueron expresados en lenguaje natural. En el apéndice se presentan implementaciones en Python de dichos procedimientos, que fueron utilizadas en la confección de dichos trabajos. Además, en la sección 3.6.1 se presentaron los resultados de una serie de cálculos; el código Python correspondiente a ellos también se puede encontrar en el apéndice.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción

El presente capítulo tiene por objetivo reunir los conceptos y resultados matemáticos que serán utilizados en los capítulos sucesivos. Su propósito no es expositivo en sentido estricto, sino fundamentalmente utilitario: se establecen aquí las notaciones, definiciones y proposiciones sobre las que se apoyan los desarrollos originales de la tesis.

El lector familiarizado con las áreas aquí expuestas puede avanzar directamente a los capítulos de contribuciones originales y remitirse a este capítulo sólo cuando sea necesario.

Siempre que pude encontrar un resultado en la literatura, expresado tal cual lo necesitaba, me limité simplemente a citarlo. A veces no pude hallarlos en la forma que deseaba, por lo que me dediqué a elaborar las demostraciones por mi cuenta. Sin embargo, no creo que nada de lo que expongo en este capítulo sea original, excepto cuando expreso lo contrario en referencia a la metodología presentada en la sección 2.6.

2.2. Combinatoria

2.2.1. Sumatorias

Esta sección se basa en el capítulo 2 de [24].

Todas las sumatorias finitas que uno encuentra son de la forma

$$\sum_{k \in K} f(k) ,$$

para algún conjunto K finito y alguna función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. El codominio de f podría ser cualquier grupo abeliano, pero para los fines de esta tesis es suficiente con considerar el caso en el que el codominio es $\mathbb{R}$.

¿Qué representa esta notación? Se puede definir recursivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \emptyset} f(k) &:= 0 && \text{y} \\ \sum_{k \in K \sqcup \{k_0\}} f(k) &:= f(k_0) + \sum_{k \in K} f(k) . \end{aligned}$$

La sumatoria está bien definida pues si $k_1, k_2 \in K$ son dos elementos distintos, se tiene que

$$f(k_1) + \sum_{k \in K \setminus \{k_1\}} f(k) = f(k_1) + f(k_2) + \sum_{k \in K \setminus \{k_1, k_2\}} f(k) = f(k_2) + \sum_{k \in K \setminus \{k_2\}} f(k) .$$

Presentamos ahora un par de propiedades que nos serán útiles.

Proposición 2.1. Sean J y K dos conjuntos finitos, $f : J \rightarrow K$ y $g : K \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$\sum_{j \in J} g \circ f(j) = \sum_{k \in K} g(k) |f^{-1}(k)| .$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el cardinal de J . Si $|J| = 0$, tenemos que

$$\sum_{j \in J} g \circ f(j) = \sum_{j \in \emptyset} g \circ f(j) = 0 = \sum_{k \in K} g(k) |f^{-1}(k)| ,$$

pues $f^{-1}(k) = \emptyset$ para todo $k \in K$.

Si $|J| \geq 1$, sea $j_0 \in J$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} g \circ f(j) &= g \circ f(j_0) + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} g \circ f(j) \\ &= g \circ f(j_0) + \sum_{k \in K} g(k) |(f|_{J \setminus \{j_0\}})^{-1}(k)| \\ &= g \circ f(j_0) + g \circ f(j_0) |(f|_{J \setminus \{j_0\}})^{-1}(f(j_0))| + \sum_{k \in K \setminus \{f(j_0)\}} g(k) |(f|_{J \setminus \{j_0\}})^{-1}(k)| \\ &= g \circ f(j_0) + g \circ f(j_0) (|f^{-1}(f(j_0))| - 1) + \sum_{k \in K \setminus \{f(j_0)\}} g(k) |f^{-1}(k)| \\ &= g \circ f(j_0) |f^{-1}(f(j_0))| + \sum_{k \in K \setminus \{f(j_0)\}} g(k) |f^{-1}(k)| = \sum_{k \in K} g(k) |f^{-1}(k)| . \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2. Sean J y K dos conjuntos finitos disjuntos, y $f : J \cup K \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$\sum_{j \in J} f(j) + \sum_{k \in K} f(k) = \sum_{i \in J \cup K} f(i) .$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el cardinal de J . Si $|J| = 0$, tenemos que

$$\sum_{j \in J} f(j) + \sum_{k \in K} f(k) = 0 + \sum_{k \in K} f(k) = \sum_{k \in K} f(k) = \sum_{i \in J \cup K} f(i) .$$

Si $|J| \geq 1$, sea $j_0 \in J$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} f(j) + \sum_{k \in K} f(k) &= f(j_0) + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} f(j) + \sum_{k \in K} f(k) = f(j_0) + \sum_{i \in (J \setminus \{j_0\}) \cup K} f(i) \\ &= \sum_{i \in J \cup K} f(i) . \end{aligned}$$

□

Proposición 2.3. Sean J y K dos conjuntos finitos, y $f : J \times K \rightarrow \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$\sum_{(j,k) \in J \times K} f(j,k) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j,k) .$$

Demostración. Procedemos por inducción sobre el cardinal de J . Si $|J| = 0$, tenemos que

$$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j,k) = 0 = \sum_{(j,k) \in J \times K} f(j,k) .$$

Si $|J| \geq 1$, sea $j_0 \in J$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} f(j,k) &= \sum_{k \in K} f(j_0, k) + \sum_{j \in J \setminus \{j_0\}} \sum_{k \in K} f(j,k) \\ &= \sum_{(j,k) \in \{j_0\} \times K} f(j,k) + \sum_{(j,k) \in (J \setminus \{j_0\}) \times K} f(j,k) = \sum_{(j,k) \in J \times K} f(j,k) . \end{aligned}$$

□

2.2.2. Números de Stirling de segunda especie

Los números de Stirling de segunda especie se denotan $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ y cuentan la cantidad de particiones de un conjunto de n elementos en k conjuntos no vacíos. Es inmediato que

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} &= 1 \quad \forall n \geq 0 \quad \text{y} \\ \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} &= 0 \quad \forall n > 0 . \end{aligned}$$

Con esas igualdades y el siguiente resultado [24, p. 259] se puede calcular cualquiera de estos números.

Proposición 2.4. Para todo $n \geq 0$ y para todo $1 \leq k \leq n$, se tiene que

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} .$$

2.3. Probabilidad

2.3.1. Funciones medibles

Definición 2.1 ([32, p. 8]). Sea (Ω, τ) un espacio topológico. La σ -álgebra $\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{B}(\Omega, \tau) := \sigma(\tau)$ se llama la σ -álgebra de Borel sobre Ω . Los elementos $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ se llaman borelianos.

En el resto de esta sección, $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Omega', \mathcal{A}')$ serán espacios medibles.

Definición 2.2 ([32, p. 32]). Una función $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ se llama $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ -medible (o, simplemente, medible) si $X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ para todo $A' \in \mathcal{A}'$.

Notación. Sea $X : \Omega \rightarrow E$ donde (E, τ) es un espacio topológico. Se dice que X es $\mathcal{A}$ -medible si es $\mathcal{A} - \mathcal{B}(E)$ -medible.

Proposición 2.5 ([32, p. 36]). Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y sean $f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. Sea $f := (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces

$$f \text{ es medible} \Leftrightarrow \text{cada } f_i \text{ es medible.}$$

Proposición 2.6 ([32, p. 37]). Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible. Sean $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones medibles. Entonces también las funciones $f + g$, $f - g$ y $f \cdot h$ son medibles.

2.3.2. Teorema de Hahn-Kolmogorov

Recordemos el teorema de Hahn-Kolmogorov:

Teorema 2.7 (Hahn-Kolmogorov). Toda medida sobre un álgebra de conjuntos se puede extender a una medida sobre la σ -álgebra generada. Si la medida es σ -finita dicha extensión es única.

2.3.3. Función generadora de momentos

Recordemos que dada una variable aleatoria X , su función generadora de momentos es (como puede verse definida en [8, p. 62])

$$M_X(t) := \mathbb{E}(\exp(tX)) ,$$

siempre que haya un entorno de 0 para el que exista esa esperanza. Algunas propiedades que usaremos:

1. $M_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ [8, p. 62];
2. $M_{\lambda X}(t) = M_X(\lambda t)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, en un entorno de $t = 0$ [8, p. 67];
3. si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ en un entorno de 0 [6].

2.3.4. Esperanza condicional

Recordemos la definición de esperanza condicional y algunas de sus propiedades [3, p. 472 – 476].

Definición 2.3 ([3, p. 472]). Sea X una variable aleatoria integrable en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sea $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ una σ -álgebra en Ω . Es fácil ver (usando el teorema de Radon-Nikodym) que existe una variable aleatoria $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$, llamada la esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$, que tiene las siguientes propiedades:

1. $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$ -medible e integrable y

2.

$$\int_G \mathbb{E}(X|\mathcal{G})d\mathbb{P} = \int_G Xd\mathbb{P}$$

para todo $G \in \mathcal{G}$.

Proposición 2.8 ([3, p. 473]). Si Y y Z son esperanzas condicionales de X dado $\mathcal{G}$, entonces $Y = Z$ casi seguramente (c.s.).

Observación 2.1. Debido a la proposición anterior, las identidades concernientes a la esperanza condicional valdrán con probabilidad 1.

Observación 2.2. Si tomamos $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, tenemos que $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X)$.

Proposición 2.9 ([3, p. 475]). Sean X e Y integrables, se tiene entonces que $\mathbb{E}(X + Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ c.s.

Proposición 2.10 ([3, p. 475]). Sea X $\mathcal{G}$ -medible, y sea Y integrable tal que XY también lo es. Se tiene entonces que $\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = X\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ c.s.

Proposición 2.11 (Ley de esperanzas iteradas [3, p. 476]). Sea X una variable aleatoria integrable en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y sean $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ dos σ -álgebras en Ω . Entonces $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)$ c.s.

Proposición 2.12. Si $X = Y$ c.s. y X es integrable, entonces Y es integrable y $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Este es un caso particular de la siguiente proposición:

Proposición 2.13 ([3, p. 218]). Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles tales que $f = g$ p.p. y g es integrable. Entonces f es integrable y

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Definición 2.4 ([3, p. 457]). Sea $\mathcal{G}$ una σ -álgebra y $A \in \mathcal{F}$. Se define la probabilidad condicional de A dado $\mathcal{G}$, dada por $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{G})$.

Proposición 2.14 ([3, p. 457]). Sea $B_1, \dots, B_n$ una partición de Ω y sea $\mathcal{G}$ la σ -álgebra generada por dichos conjuntos. Dado $A \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \sum_{\mathbb{P}(B_i) > 0} \mathbb{P}(A|B_i)\mathbf{1}_{B_i}.$$

2.3.5. Particiones y σ -álgebras

Motivados por esta última proposición, observemos que dada la σ -álgebra $\mathcal{G}$ generada de esta forma, se puede recuperar la partición $\mathcal{P}$ de la que proviene. Para ello, necesitaremos la siguiente proposición:

Proposición 2.15 ([3, p. 456]). Sea $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ una partición de un conjunto Ω con I a lo sumo numerable. Sea $\mathcal{G}$ la σ -álgebra generada por $\mathcal{P}$. Se tiene entonces que

$$\mathcal{G} = \left\{ \bigsqcup_{i \in J} B_i : J \subset I \right\}.$$

Definición 2.5. Sea $\mathcal{G}$ una σ -álgebra sobre un conjunto Ω . En Ω se puede definir la relación de equivalencia

$$\omega \sim \eta \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{G} \text{ tal que } \omega \in A \text{ y } \eta \notin A.$$

Sea $\mathcal{P}$ la partición inducida por esta relación de equivalencia. Diremos que $\mathcal{P}$ es la partición generada por $\mathcal{G}$.

Es trivial chequear que $\sim$ es una relación de equivalencia, así que lo dejo como ejercicio para el lector.

Observación 2.3. Observemos que

$$\eta \not\sim \omega \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{G} \text{ tal que } \omega \in A \text{ y } \eta \notin A \Leftrightarrow \eta \notin \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A,$$

por lo que

$$\{\eta \in \Omega : \eta \sim \omega\} = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A$$

y la partición generada por $\mathcal{G}$ es

$$\left\{ \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A : \omega \in \Omega \right\}.$$

Proposición 2.16. Sea $\mathcal{P}$ una partición a lo sumo numerable de un conjunto Ω , sea $\mathcal{G}$ la σ -álgebra generada a partir de dicha partición, y sea $\mathcal{P}_1$ la partición generada por $\mathcal{G}$. Se tiene entonces que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$.

Demostración. Queremos ver que las particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}_1$ son iguales. Para esto, sólo necesitamos ver que para todo $\omega \in \Omega$, el conjunto de la partición en el que se encuentra ω es el mismo en ambas. Luego, sea $\omega \in \Omega$.

El conjunto de $\mathcal{P}_1$ en el que se encuentra ω es

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A.$$

Por otro lado, sabemos que $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ para algún conjunto I a lo sumo numerable. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \omega &\in B_k \in \mathcal{P} \text{ para algún } k \in I \text{ y} \\ \omega &\in \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A \in \mathcal{P}_1. \end{aligned}$$

Como $B_k \in \mathcal{G}$ y $\omega \in B_k$, se tiene que

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A \subset B_k.$$

Como consecuencia de esto, tenemos que

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A = B_k \cap \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A = \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} (A \cap B_k).$$

Sea $A \in \mathcal{G}$ tal que $\omega \in A$. Como $\mathcal{P}$ genera a $\mathcal{G}$, por la proposición anterior sabemos que existe $J \subset I$ tal que

$$A = \bigsqcup_{j \in J} B_j.$$

Ahora intersequemos ambos lados de esta igualdad por B_k . Para el lado derecho, tengamos en cuenta que

$$B_j \cap B_k = \begin{cases} B_k & \text{si } j = k \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}.$$

Se tiene entonces que

$$A \cap B_k = \bigsqcup_{j \in J} (B_j \cap B_k) = \begin{cases} B_k & \text{si } k \in J \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}.$$

Pero $\omega \in A \cap B_k$, por lo que $A \cap B_k = B_k$ y

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A = B_k.$$

□

Proposición 2.17. Sea Ω un conjunto finito, $\mathcal{G}$ una σ -álgebra sobre Ω y $\mathcal{P}$ la partición generada por $\mathcal{G}$. Se tiene entonces que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{G}$.

Demostración. $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{P})$ y este último es un conjunto finito, por lo que $\mathcal{G}$ es finito. Luego, las intersecciones

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A$$

son finitas y, por lo tanto, están en $\mathcal{G}$. Esto prueba que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}$.

Sea $B \in \mathcal{G}$ y sea $\omega \in B$. Se tiene entonces que

$$\bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A \subset B,$$

por lo que

$$B = \bigcup_{\omega \in B} \bigcap_{\substack{A \in \mathcal{G}: \\ \omega \in A}} A.$$

Esta unión es finita porque $\mathcal{P}$ es finita. Por lo tanto, $B \in \sigma(\mathcal{P})$. Esto prueba que $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{P})$. □

Proposición 2.18. Ω un conjunto finito, $\mathcal{G}$ una σ -álgebra sobre Ω , $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ la partición generada por $\mathcal{G}$ y $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. Se tiene entonces que X es $\mathcal{G}$ -medible si y sólo si existe $\{a_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}^d$ tal que

$$X = \sum_{i \in I} a_i \mathbf{1}_{B_i}.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Esencialmente tenemos que ver que X es constante en cada B_i . Supongamos que existe $j \in I$, $\omega, \eta \in B_j$ tales que $X(\omega) \neq X(\eta)$. Sea $B \subset \mathbb{R}^d$ un boreliano tal que $X(\omega) \in B$ y $X(\eta) \notin B$; se puede tomar, por ejemplo, B un semiespacio que los separe. Se tiene entonces que $X^{-1}(B) \in \mathcal{G}$, por lo que

$$X^{-1}(B) = \bigsqcup_{i \in J} B_i$$

para algún $J \subset I$. Si $j \in J$, tenemos que $B_j \subset X^{-1}(B) \Rightarrow X(\eta) \in B$, lo que es absurdo. Luego, $j \notin J$. $X(\omega) \in B$, por lo que existe $k \in J$ tal que $\omega \in B_k \Rightarrow \omega \in B_k \cap B_j = \emptyset$ lo cual es absurdo. Concluimos entonces que X es constante en cada B_i .

$\Leftarrow$) Como $B_i \in \mathcal{G}$, se tiene entonces que $\mathbf{1}_{B_i}$ es $\mathcal{G}$ -medible. X es $\mathcal{G}$ -medible por ser combinación lineal de funciones $\mathcal{G}$ -medibles. $\square$

Definición 2.6 ([32, p. 10]). Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una clase arbitraria de subconjuntos de Ω y sea $A \in \mathcal{P}(\Omega) \setminus \{\emptyset\}$. La clase

$$\mathcal{A}|_A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(A)$$

se llama la traza de $\mathcal{A}$ sobre A o la restricción de $\mathcal{A}$ a A .

Proposición 2.19 ([32, p. 10]). Sea $A \subset \Omega$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{A}$ una σ -álgebra sobre Ω . Entonces $\mathcal{A}|_A$ es una σ -álgebra sobre A .

Observación 2.4. Si $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra y $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{A}|_A \subset \mathcal{A}$.

Observación 2.5. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto no vacío y sea $\mathcal{P}$ una partición de Ω . Se tiene entonces que $\mathcal{P}|_A \setminus \{\emptyset\}$ es una partición de A .

Notación. Sea $A \subset \Omega$ un conjunto (posiblemente vacío) y sea $\mathcal{P}$ una partición de Ω , notaremos $\mathcal{P}^A := \mathcal{P}|_A \setminus \{\emptyset\}$, donde relajamos la definición 2.6 para incluir el caso $A = \emptyset$.

Proposición 2.20. Sea $\mathcal{P}$ una partición a lo sumo numerable de Ω y sea $A \in \sigma(\mathcal{P})$. Se tiene entonces que

$$\mathcal{P}^A = \{B \in \mathcal{P} : B \subset A\}. \quad (2.1)$$

Demostración. $\subset$) Tenemos que $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$. Sea $B \in \mathcal{P}^A$, existe entonces $j \in I$ tal que $B = B_j \cap A$. Es obvio que $B \subset A$. Además, sabemos que existe $J \subset I$ tal que

$$A = \bigsqcup_{i \in J} B_i \Rightarrow B = B_j \cap A = \begin{cases} B_j & \text{si } j \in J \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}.$$

Pero $\emptyset \notin \mathcal{P}^A$, por lo que $B = B_j \in \mathcal{P}$.

$\supset$) Sea $B \in \mathcal{P}$ tal que $B \subset A$. Se tiene entonces que $B \cap A = B$ y $B \neq \emptyset$. $\square$

Por último, necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 2.21. *Sea $\mathcal{P} = \{B_i\}_{i \in I}$ una partición de un conjunto Ω con I a lo sumo numerable, y $p : \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty)$ una función tal que*

$$\sum_{i \in I} p(B_i) = 1 .$$

Se puede extender p a una función de probabilidad $\mathbb{P} : \sigma(\mathcal{P}) \rightarrow [0, 1]$ de manera única.

Demostración. Sea $A \in \sigma(\mathcal{P})$, por la proposición 2.15, existe $J \subset I$ tal que

$$A = \bigsqcup_{i \in J} B_i .$$

Si $\mathbb{P} : \sigma(\mathcal{P}) \rightarrow [0, 1]$ es una función de probabilidad que extiende a p , tiene que valer entonces que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in J} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i \in J} p(B_i) .$$

De aquí sale la unicidad y la forma en la que tendríamos que definir $\mathbb{P}$ para probar la existencia. Veamos que $\mathbb{P} : \sigma(\mathcal{P}) \rightarrow [0, 1]$ está bien definida. Para empezar,

$$0 \leq \sum_{i \in J} p(B_i) \leq \sum_{i \in I} p(B_i) = 1 .$$

Por otro lado, sean $J_1, J_2 \subset I$ tales que

$$\bigsqcup_{i \in J_1} B_i = A = \bigsqcup_{i \in J_2} B_i .$$

Supongamos que $J_1 \not\subset J_2$, tenemos entonces que existe $j \in J_1 \setminus J_2$. Sea $\omega \in B_j$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \omega \in B_j \subset \bigsqcup_{i \in J_1} B_i = A \quad \text{y} \\ \omega \notin \bigsqcup_{i \in J_2} B_i = A , \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $J_1 \subset J_2$, y del mismo modo $J_2 \subset J_1$. Luego, $J_1 = J_2$, y $\mathbb{P}$ es una función bien definida.

Es trivial ver que $\mathbb{P}$ así definida es una función de probabilidad, por lo que lo dejo como ejercicio al lector. $\square$

2.3.6. La distribución de Poisson

El siguiente resultado viene de [45].

Proposición 2.22. *Sea $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Se tiene entonces que*

$$\mathbb{E}(X^n) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \lambda^k .$$

Recordemos además que si $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ su función generadora de momentos es (como puede verse en [6, p. 91])

$$M_X(t) = \exp(\lambda \cdot (e^t - 1)) . \tag{2.2}$$

2.3.7. Procesos estocásticos

En esta sección presentaremos definiciones necesarias para definir mercados financieros. A lo largo de la sección tendremos que $I \subset \mathbb{R}$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es un espacio de probabilidad y E es un espacio polaco (un espacio métrico separable y completo) con σ -álgebra de Borel $\mathcal{E}$.

Definición 2.7 ([32, p. 189]). *Una familia de variables aleatorias $X = (X_t, t \in I)$ (en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) con valores en $(E, \mathcal{E})$ se llama un proceso estocástico indexado por I y con rango E .*

Ejemplo 2.1. *Digamos que arrojamamos una moneda equilibrada unas 5 veces. Sabemos que el espacio muestral asociado a este experimento es $\Omega = \{H, T\}^5$, donde H representa cara (head) y T representa ceca (tails). El espacio de probabilidad es un espacio equiprobable con σ -álgebra $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sea $I = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ y sea X_t la cantidad de caras hasta la t -ésima tirada inclusive. Se puede afirmar entonces que $X = (X_t, t \in I)$ es un proceso estocástico indexado por I y con rango $\mathbb{R}$.*

Definición 2.8 ([32, p. 191]). *Sea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ una familia de σ -álgebras con $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo $t \in I$. Decimos que $\mathbb{F}$ es una filtración si $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s, t \in I$ con $s \leq t$.*

Las filtraciones suelen representar la información que uno tiene en cada instante de tiempo.

Ejemplo 2.2. *Continuemos con el ejemplo 2.1. ¿Qué eventos sabemos si ocurrieron o no después de la t -ésima tirada? Después de dicha tirada conocemos las primeras t coordenadas del resultado $\eta \in \Omega$ del experimento aleatorio. Por ejemplo, después de la primera tirada sabemos a cuál de los siguientes conjuntos pertenece η :*

$$\{\omega \in \Omega : \omega_1 = H\} \text{ y } \{\omega \in \Omega : \omega_1 = T\} .$$

Luego, si $\mathcal{F}_1$ es la σ -álgebra generada por este par de conjuntos, $\mathcal{F}_1$ es la familia de eventos que sabemos si ocurrieron o no después de la primera tirada. En general, después de la t -ésima tirada la información de la que disponemos puede ser representada por una partición de Ω en 2^t subconjuntos o, equivalentemente, por la σ -álgebra $\mathcal{F}_t$ que dichos subconjuntos generan.

Observar además, que el hecho de que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s, t \in I$ con $s \leq t$, representa que a medida que pasan las tiradas vamos acumulando más información.

Definición 2.9 ([32, p. 191]). *Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in I)$ se llama adaptado a la filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ si X_t es $\mathcal{F}_t$ -medible para todo $t \in I$.*

Si $\mathcal{F}_t$ representa la información a tiempo t , esto quiere decir que a tiempo t se conoce el valor de X_t , pues para todo $v \in E$, a tiempo t sabemos si $\omega \in X_t^{-1}(v)$.

Ejemplo 2.3. *Continuando con los ejemplos 2.1 y 2.2, X es adaptado a $(\mathcal{F}_t, t \in I)$.*

Definición 2.10 ([32, p. 194]). *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $I \subset \mathbb{R}$, y sea $\mathbb{F}$ una filtración. Sea $X = (X_t, t \in I)$ un proceso estocástico con rango $\mathbb{R}$, adaptado a la filtración y con $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ para todo $t \in I$. X se llama una martingala (con respecto a $\mathbb{F}$) si $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ para cualesquiera $s, t \in I$ con $t > s$.*

Observación 2.6 ([32, p. 195]). Si $I \subset \mathbb{N}_0$, para chequear esta última igualdad, basta chequear que para cada $t \in I \setminus \{0\}$ vale la igualdad para $s = t - 1$. Esto es gracias a la ley de esperanzas iteradas (proposición 2.11).

Ejemplo 2.4. Continuemos con los ejemplos 2.1 a 2.3. Observamos que $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$ para todo $t \in I$, calculemos $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}(X_t \mathbf{1}_{\{\omega_t=H\}} + X_t \mathbf{1}_{\{\omega_t=T\}} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \mathbb{E}((X_{t-1} + 1) \mathbf{1}_{\{\omega_t=H\}} + X_{t-1} \mathbf{1}_{\{\omega_t=T\}} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= (X_{t-1} + 1) \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\omega_t=H\}} | \mathcal{F}_{t-1}) + X_{t-1} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\omega_t=T\}} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= (X_{t-1} + 1) \mathbb{P}(\{\omega_t = H\} | \mathcal{F}_{t-1}) + X_{t-1} \mathbb{P}(\{\omega_t = T\} | \mathcal{F}_{t-1}) . \end{aligned}$$

Además,

$$\mathbb{P}(\{\omega_t = H\} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{\eta \in \{H,T\}^{t-1}} \mathbb{P}(\{\omega_t = H\} | B_\eta) \mathbf{1}_{B_\eta} ,$$

donde $B_\eta = \{\omega \in \Omega : \omega_s = \eta_s, \text{ para todo } s \leq t-1\}$. Como B_η y $\{\omega_t = H\}$ son independientes, se tiene que

$$\mathbb{P}(\{\omega_t = H\} | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{\eta \in \{H,T\}^{t-1}} \frac{1}{2} \mathbf{1}_{B_\eta} = \frac{1}{2} .$$

Análogamente se ve que $\mathbb{P}(\{\omega_t = T\} | \mathcal{F}_{t-1}) = 1/2$, por lo que

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{X_{t-1} + 1}{2} + \frac{X_{t-1}}{2} = X_{t-1} + \frac{1}{2} .$$

Por lo tanto, X no es una martingala. Sea Y_t la cantidad de cecas después de la t -ésima tirada. Análogamente puede verse que

$$\mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = Y_{t-1} + \frac{1}{2} .$$

Esto sugiere una posible martingala. Sea $Z = X - Y = (X_t - Y_t, t \in I)$, tenemos entonces que

$$\mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) - \mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1} - Y_{t-1} = Z_{t-1} .$$

Es inmediato que Z es adaptado a la filtración y que $\mathbb{E}(|Z_t|) < \infty$ por lo que, gracias a la observación 2.6, tenemos que Z es una martingala.

Definición 2.11 ([30, p. 2]). Sea $I = [0, T]$ y sea $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ una filtración. Decimos que $\mathcal{F}$ es continua a derecha si

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

para todo $t \in [0, T)$.

Definición 2.12 ([32, p. 192]). Una variable aleatoria τ con valores en $I \cup \{\infty\}$ se llama un tiempo de parada (con respecto a $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$) si para todo $t \in I$, se tiene que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Esto quiere decir que a tiempo t sabemos si ya hemos llegado o no al tiempo de parada.

Notación ([17, p. 112]). Para $T_1 \leq T_2$, dos tiempos de parada, denotamos

$$[[T_1, T_2]] := \{(t, \omega) | t \in I, \omega \in \Omega \text{ y } T_1(\omega) \leq t \leq T_2(\omega)\}.$$

Definición 2.13 ([17, p. 115]). Un proceso $S : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ es localmente acotado si existe una sucesión creciente de tiempos de parada $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ tendiendo a ∞ c.s. y una sucesión $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ en $[0, +\infty)$ tales que $|S \mathbf{1}_{[[0, T_n]]}| \leq K_n$.

2.4. Mercados financieros

2.4.1. Mercados a tiempo discreto

Para los propósitos de esta tesis, usaremos la siguiente definición de mercado discreto.

Definición 2.14 ([17, p. 12]). Un mercado discreto consiste en

1. un conjunto $I = \{0, 1, 2, \dots, T\}$;
2. un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es un conjunto finito, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$;
3. una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ en dicho espacio de probabilidad, con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$;
4. un proceso estocástico $\hat{S} = (\hat{S}_t^0, \dots, \hat{S}_t^d)_{t=0}^T$ con rango $\mathbb{R}^{d+1}$, adaptado a dicha filtración, con $\hat{S}_t^0 > 0$ para todo $t \in I$ y $\hat{S}_0^0 = 1$.

Esto representa un mercado con $d+1$ activos: $\hat{S}_t^j$ representa el precio del activo j -ésimo a tiempo t digamos en dólares; $\hat{S}_t^0$ representa un activo que se usa como numerario, para medir los precios del resto de los activos respecto a él. Permite comparar el valor presente de los activos con el valor futuro de ellos. Típicamente, se piensa que $\hat{S}_t^0$ representa una cuenta bancaria; en esa interpretación,

$$\frac{\hat{S}_{t+1}^0 - \hat{S}_t^0}{\hat{S}_t^0}$$

es la tasa de interés que el banco paga por mantener dinero en la cuenta en el período $(t, t+1)$. Los modelos económicos tradicionales piensan que la tasa de interés indica el precio relativo del dinero futuro respecto del dinero presente: esta tasa de interés, estaría reflejando que $\hat{S}_t^0$ dólares a tiempo t pueden comprar $\hat{S}_{t+1}^0$ dólares a tiempo $t+1$.

Consideremos fijo un mercado discreto como el de la definición 2.14.

Definición 2.15 ([17, p. 12]). Una estrategia de trading $\hat{H} = (\hat{H}_t^0, \dots, \hat{H}_t^d)_{t=1}^T$ es un proceso estocástico con rango $\mathbb{R}^{d+1}$ y predecible ($\hat{H}_t$ es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible).

Si un inversor sigue la estrategia de trading $\hat{H}$, en el intervalo $(t-1, t)$ mantiene $\hat{H}_t^j$ unidades del activo j -ésimo. Observar que $\hat{H}_t^j$ puede tomar valores negativos: en la jerga financiera, esto se conoce como “tomar una posición en corto en”, “vender en corto” o “shortear” el activo j -ésimo.

Definición 2.16 ([17, p. 12]). Una estrategia $\hat{H}$ se llama autofinanciada si

$$\langle \hat{H}_t, \hat{S}_t \rangle = \langle \hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t \rangle$$

para cada $t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$.

Una estrategia autofinanciada es una estrategia que no requiere retirar ni ingresar dinero para llevarse a cabo. Para dichas estrategias, el valor del portfolio a tiempo t está bien definido.

Definición 2.17 ([17, p. 13]). Sea $\hat{H}$ una estrategia autofinanciada, el valor del portfolio a tiempo t es

$$\hat{V}_t := \langle \hat{H}_t, \hat{S}_t \rangle = \langle \hat{H}_{t+1}, \hat{S}_t \rangle$$

para $t \in \{1, 2, \dots, T-1\}$, $\hat{V}_0 := \langle \hat{H}_1, \hat{S}_0 \rangle$ y $\hat{V}_T := \langle \hat{H}_T, \hat{S}_T \rangle$.

Observación 2.7. Si $\hat{H}$ es una estrategia autofinanciada, se puede prescindir de $\hat{H}^0$ para caracterizarla si en su lugar se provee sólo $\hat{V}_0$, pues

$$\begin{aligned} \hat{H}_1^0 &= \hat{V}_0 - \sum_{j=1}^d \hat{H}_1^j \hat{S}_0^j \quad y \\ \hat{H}_{t+1}^0 &= \frac{\langle \hat{H}_t, \hat{S}_t \rangle - \sum_{j=1}^d \hat{H}_{t+1}^j \hat{S}_t^j}{\hat{S}_t^0} . \end{aligned}$$

Usando esto y midiendo los precios en términos relativos respecto del activo 0-ésimo, podemos simplificar la notación.

Definición 2.18 ([17, p. 15]). Un mercado discreto en términos descontados consiste en

1. un conjunto $I = \{0, 1, 2, \dots, T\}$;
2. un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde Ω es un conjunto finito, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$;
3. una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ en dicho espacio de probabilidad, con $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$;
4. un proceso estocástico $S = (S_t^1, \dots, S_t^d)_{t=0}^T$ con rango $\mathbb{R}^d$, adaptado a dicha filtración.

Una estrategia de trading $H = (H_t^1, \dots, H_t^d)_{t=1}^T$ es un proceso estocástico con rango $\mathbb{R}^d$ y predecible (H_t es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible). Denotamos con $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las estrategias de trading.

Definimos $H \cdot S = ((H \cdot S)_t)_{t=0}^T$ como el proceso estocástico con rango $\mathbb{R}$, dado por

$$(H \cdot S)_t = \sum_{u=1}^t \langle H_u, \Delta S_u \rangle ,$$

donde $\Delta S_u := S_u - S_{u-1}$.

Se habla de “términos descontados” porque, en la literatura financiera, el “precio descontado” es la cantidad de dólares que hay que entregar actualmente para comprar un bien futuro. Digamos que a tiempo t queremos comprar un bien que sabemos que costará F dólares. Tenemos una cuenta bancaria y sabemos que por cada dólar que tengamos actualmente, a tiempo t tendremos r dólares más. ¿Cuántos dólares necesitaríamos tener hoy en la cuenta bancaria para poder comprar dicho bien? Si P es la cantidad de dólares que tenemos hoy, a tiempo t tendremos en total $(1+r)P$ dólares, por lo que necesitamos $(1+r)P = F \Rightarrow P = F/(1+r)$. $F/(1+r)$ es entonces el precio descontado del bien futuro que queremos comprar.

Como mencionamos anteriormente, la tasa de interés r de la cuenta bancaria vendría a ser $(\hat{S}_t^0 - \hat{S}_0^0)/\hat{S}_0^0 = \hat{S}_t^0 - 1$, por lo que el precio descontado del activo j -ésimo es $\hat{S}_t^j/\hat{S}_t^0$. Por lo tanto, dado un mercado discreto como el de la definición 2.14, el mercado discreto en términos descontados correspondiente se consigue tomando $S_t^j := \hat{S}_t^j/\hat{S}_t^0$.

En concordancia con lo mencionado en la observación 2.7, dada una estrategia de trading autofinanciada $\hat{H}$ en el mercado sin descontar precios, la estrategia de trading correspondiente en el mercado en términos descontados está dada por $H_t^j := \hat{H}_t^j$.

Observación 2.8 ([17, p. 14]). *Dada una estrategia de trading autofinanciada $\hat{H}$, si $\hat{V}_t$ es el valor del portfolio a tiempo t , el valor descontado será $V_t := \hat{V}_t/\hat{S}_t^0$. Como el valor descontado del activo 0-ésimo es siempre 1, los valores de $\hat{H}_t^0$ no deberían ser relevantes para determinar los valores de V_t . En efecto,*

$$\begin{aligned} \Delta V_t &:= V_t - V_{t-1} = \frac{\langle \hat{H}_t, \hat{S}_t \rangle}{\hat{S}_t^0} - \frac{\langle \hat{H}_t, \hat{S}_{t-1} \rangle}{\hat{S}_{t-1}^0} = \hat{H}_t^0 + \langle H_t, S_t \rangle - \hat{H}_t^0 - \langle H_t, S_{t-1} \rangle \\ &= \langle H_t, \Delta S_t \rangle \\ \Rightarrow V_t &= V_0 + \sum_{u=1}^t \langle H_u, \Delta S_u \rangle = V_0 + (H \cdot S)_t. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aquí se observa la utilidad de definir el proceso $H \cdot S$.

Proposición 2.23. *$H \cdot S$ es adaptado a la filtración $\mathbb{F}$.*

Demostración. Se puede ver que $(H \cdot S)_t$ es $\mathcal{F}_t$ -medible por inducción en t . El caso $t = 0$ vale trivialmente. Supongamos que vale para $t < T$, veamos que vale para $t + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (H \cdot S)_{t+1} &= (H \cdot S)_t + \langle H_{t+1}, \Delta S_{t+1} \rangle \quad \text{y} \\ \langle H_{t+1}, \Delta S_{t+1} \rangle &= \sum_{j=1}^d H_{t+1}^j \cdot (S_{t+1}^j - S_t^j). \end{aligned}$$

Como S_t^j , S_{t+1}^j y H_{t+1}^j son $\mathcal{F}_{t+1}$ -medibles y las funciones $\mathcal{F}_{t+1}$ -medibles son cerradas por restas, productos y sumas, tenemos que $\langle H_{t+1}, \Delta S_{t+1} \rangle$ es $\mathcal{F}_{t+1}$ -medible. Por hipótesis inductiva, $(H \cdot S)_t$ es $\mathcal{F}_t$ -medible y, como $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$, también es $\mathcal{F}_{t+1}$ -medible. Luego, $(H \cdot S)_{t+1}$ es $\mathcal{F}_{t+1}$ -medible. $\square$

Notación. $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es el espacio de variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, identificadas por la relación de ser iguales con probabilidad 1 ($X \sim Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$).

Dado $p \in [0, \infty]$, definimos

$$L_+^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \mathbb{P}(X \geq 0) = 1\} .$$

Definición 2.19 ([17, p. 16]). Llamamos al subespacio K de $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definido por

$$K = \{(H \cdot S)_T | H \in \mathcal{H}\} ,$$

el conjunto de reclamos contingentes obtenibles a precio 0.

Como muestra la observación 2.8, $(H \cdot S)_T$ es una variable aleatoria que puede conseguirse como valor descontado de un portfolio con nula inversión inicial siguiendo la estrategia de trading H .

Definición 2.20 ([17, p. 16]). Un mercado financiero S satisface la condición de no arbitraje (NA) si

$$K \cap L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} .$$

Una *oportunidad de arbitraje* sería una estrategia de trading H tal que $(H \cdot S)_T \in L_+^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \setminus \{0\}$, es decir, una estrategia que partiendo con una inversión inicial nula produce un portfolio cuyo valor final V_T cumple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_T \geq 0) &= 1 & \text{y} \\ \mathbb{P}(V_T > 0) &> 0 . \end{aligned}$$

Un mercado financiero que satisface (NA) también se dice *viable* o *libre de arbitraje*.

El primer teorema fundamental de la valuación de activos da una condición suficiente y necesaria para que un mercado sea libre de arbitraje. Para entender dicho teorema necesitamos definir qué es una medida de martingala equivalente.

Definición 2.21 ([17, p. 17]). Una medida de probabilidad $\mathbb{P}_1$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama una medida de martingala para S si S es una martingala bajo $\mathbb{P}_1$, es decir, si S^j es una martingala bajo $\mathbb{P}_1$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

Recordemos la siguiente notación:

Notación. Dadas dos medidas μ y ν en $(\Omega, \mathcal{F})$, si ν es absolutamente continua con respecto a μ , lo notamos $\nu \ll \mu$.

Definición 2.22 ([17, p. 17]). Dadas dos medidas μ y ν en $(\Omega, \mathcal{F})$, si $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$, decimos que ν y μ son equivalentes, y lo notamos $\nu \sim \mu$.

Definición 2.23 ([17, p. 17]). Una medida de probabilidad $\mathbb{P}_1$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ se llama una medida de martingala equivalente para S si es una medida de martingala para S y $\mathbb{P}_1 \sim \mathbb{P}$.

Notación ([17, p. 17]). Notamos $\mathcal{M}^a(S)$ al conjunto de medidas de martingala absolutamente continuas con respecto a $\mathbb{P}$ y $\mathcal{M}^e(S)$ al conjunto de medidas de martingala equivalentes.

Ahora podemos presentar el primer teorema fundamental de la valuación de activos:

Teorema 2.24 ([17, p. 18]). *Sea S un mercado financiero, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. S es libre de arbitraje.
2. $\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset$.

Una de las principales funciones de los mercados financieros es posibilitar la cobertura contra eventos futuros. Si X es una variable aleatoria que representa las pérdidas ante posibles escenarios futuros a tiempo T , para neutralizar ese riesgo se requiere armar un portfolio cuyo valor sea $\hat{V}_T = -X$, o equivalentemente $V_T = -X/\hat{S}_T^0$. Un mercado que permite cubrirse contra cualquier tipo de riesgos es un mercado completo.

Definición 2.24 ([17, p. 21]). *Un mercado financiero S se dice completo si para toda $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ existen $a \in \mathbb{R}$ y $H \in \mathcal{H}$ tales que*

$$f = a + (H \cdot S)_T .$$

El segundo teorema fundamental de la valuación de activos da una condición suficiente y necesaria para que un mercado libre de arbitraje sea completo.

Teorema 2.25 ([17, p. 21]). *Para un mercado financiero S que satisface (NA), las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. S es completo.
2. $\mathcal{M}^e(S)$ tiene un único elemento.

Observemos que si tenemos un mercado discreto $S = (S^1, \dots, S^d)$ y un proceso estocástico $S^{d+1} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, podemos preguntarnos sobre como se ve alterado el mercado al agregarle S^{d+1} a S . Es decir, si consideramos el mercado $\bar{S} := (S^1, \dots, S^{d+1})$, cuál es la relación entre $\mathcal{M}^e(S)$ y $\mathcal{M}^e(\bar{S})$.

Observación 2.9. *Observemos que si $Q \in \mathcal{M}^e(\bar{S})$, entonces S^j es una martingala bajo Q para todo $1 \leq j \leq d+1$ y Q es equivalente a $\mathbb{P}$; de aquí deducimos inmediatamente que $Q \in \mathcal{M}^e(S)$. Por lo tanto,*

$$\mathcal{M}^e(\bar{S}) \subset \mathcal{M}^e(S) .$$

Luego, si S no es libre de arbitraje, $\bar{S}$ tampoco lo será.

Si S es libre de arbitraje pero no completo, una posible forma de conseguir un mercado completo a partir de S sería agregarle activos paulatinamente para ir reduciendo $\mathcal{M}^e(\bar{S})$ teniendo cuidado de evitar en cada paso que $\mathcal{M}^e(\bar{S}) = \emptyset$, hasta alcanzar $|\mathcal{M}^e(\bar{S})| = 1$. A este procedimiento lo llamaremos *completar S* .

Terminamos esta sección con la siguiente proposición, que nos será útil para completar mercados.

Proposición 2.26 ([17, p. 22]). *Asumamos que S satisface (NA) y sea H una estrategia de trading fija. Fijemos $a \in \mathbb{R}$ y definamos el proceso $S^{d+1} := a + H \cdot S$. Entonces el proceso $\bar{S} := (S^1, \dots, S^{d+1})$ también satisface (NA) y los conjuntos $\mathcal{M}^e(S)$ y $\mathcal{M}^e(\bar{S})$ (así como $\mathcal{M}^a(S)$ y $\mathcal{M}^a(\bar{S})$) coinciden.*

2.4.2. Descomposición de mercados discretos

Pensemos en un mercado discreto. Si somos inversores a tiempo t , nuestra preocupación inmediata es la evolución del mercado hasta el siguiente instante, el tiempo $t + 1$. Además, a tiempo t ya podemos usar la información provista por $\mathcal{F}_t$ con lo cual limitamos los posibles $\omega \in \Omega$ que representan nuestro mundo y las posibilidades futuras; es decir, podemos considerar un espacio muestral más chico que el que teníamos originalmente.

Motivados por esto, en esta sección presentamos resultados que permiten entender un mercado discreto en términos de los mercados de un solo período que lo componen. La siguiente definición formaliza cuáles serían esas componentes.

Definición 2.25. Sea S un mercado discreto. Para todo $r \in \{0, \dots, T\}$, sea $\mathcal{P}_r$ la partición de Ω generada por $\mathcal{F}_r$. Sea $t \in \{0, \dots, T - 1\}$ y $A \in \mathcal{P}_t$, la componente (t, A) de S será el mercado con

1. conjunto $J = \{0, 1\}$;

2. espacio de probabilidad $(\mathcal{P}_{t+1}^A, \mathcal{P}(\mathcal{P}_{t+1}^A), \mathbb{P}_{(t,A)})$ con

$$\mathbb{P}_{(t,A)}(B) := \mathbb{P} \left(\bigcup_{C \in B} C \mid A \right) ;$$

3. filtración $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_s)_s$ con

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &:= \{\emptyset, \mathcal{P}_{t+1}^A\} & y \\ \mathcal{G}_1 &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}_{t+1}^A) ; \end{aligned}$$

4. proceso estocástico $S_{(t,A)} : \{0, 1\} \times \mathcal{P}_{t+1}^A \rightarrow \mathbb{R}^d$ dado por

$$S_{(t,A)}(s, B) := S(t + s, \omega)$$

para algún $\omega \in B$.

Tenemos que chequear que esta definición es correcta. Para ello, usaremos la siguiente proposición.

Proposición 2.27. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{Q} \subset \mathcal{F}$ una partición a lo sumo numerable de Ω . Si definimos $Q : \mathcal{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q(B) = \mathbb{P} \left(\bigcup_{C \in B} C \right) ,$$

$(\mathcal{Q}, \mathcal{P}(\mathcal{Q}), Q)$ es un espacio de probabilidad.

Demostración. Ver que $Q(\emptyset) = 0$ y $Q(\mathcal{Q}) = 1$ es trivial. Probemos la σ -aditividad.

Sea $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Q})$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Observemos que

$$x \in \bigcup_{C \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i} C \Leftrightarrow \exists C, i : x \in C \in B_i, i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in B_i} C ,$$

lo cual prueba que

$$\bigcup_{C \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i} C = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in B_i} C.$$

Además, la unión del lado derecho sobre $i \in \mathbb{N}$ es disjunta. En efecto, sean $i, j \in \mathbb{N}$ distintos, si

$$x \in \bigcup_{C \in B_i} C \cap \bigcup_{D \in B_j} D,$$

se tiene que existen $C \in B_i \subset \mathcal{Q}$ y $D \in B_j \subset \mathcal{Q}$ tales que $x \in C \cap D$ y, como $\mathcal{Q}$ es una partición, se tiene entonces que $C = D$. Luego, $C \in B_i \cap B_j$, lo cual es absurdo.

Se tiene entonces que

$$Q\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{C \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i} C\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{C \in B_i} C\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{C \in B_i} C\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} Q(B_i).$$

□

Observación 2.10. *Tenemos que chequear que la definición 2.25 es correcta.*

Sabemos que $(A, \mathcal{F}|_A, \mathbb{P}(\cdot|A))$ es un espacio de probabilidad y que $\mathcal{P}_{t+1}^A \subset \mathcal{F}|_A$ es una partición finita de A . Por la proposición anterior, se tiene entonces que $(\mathcal{P}_{t+1}^A, \mathcal{P}(\mathcal{P}_{t+1}^A), \mathbb{P}_{(t,A)})$ es un espacio de probabilidad.

Sea $B \in \mathcal{P}_{t+1}^A$, se tiene entonces que

$$\mathbb{P}_{(t,A)}(\{B\}) = \mathbb{P}(B|A) > 0.$$

Veamos ahora que la función $S_{(t,A)}$ está bien definida. Sea $B \in \mathcal{P}_{t+1}^A$. Tanto S_t como S_{t+1} son $\mathcal{F}_{t+1}$ -medibles, por lo que ambas funciones son constantes en B , y la definición de $S_{(t,A)}$ no depende de qué $\omega \in B$ tomemos.

Falta ver que $S_{(t,A)}$ es adaptado a $\mathcal{G}$. Recordando la observación 2.3, las particiones $\mathcal{Q}_i$ generadas por $\mathcal{G}_i$ son claramente

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0 &= \{\mathcal{P}_{t+1}^A\} \quad y \\ \mathcal{Q}_1 &= \{\{B\} : B \in \mathcal{P}_{t+1}^A\}. \end{aligned}$$

Por la proposición 2.18, sólo necesitamos ver que $S_{(t,A)}(i, \cdot)$ es constante en los elementos de $\mathcal{Q}_i$. Cuando $i = 1$, eso se cumple trivialmente. Cuando $i = 0$, lo que hay que ver es que $S_{(t,A)}(0, \cdot)$ es constante. Como $S(t, \cdot)$ es $\mathcal{F}_t$ -medible y $A \in \mathcal{P}_t$, sabemos que $S(t, \cdot)$ es constante en A ; de esto se deduce inmediatamente que $S_{(t,A)}(0, \cdot)$ es constante.

Notación. Sea Ω un conjunto no vacío. Notaremos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Omega^e &:= \{Q : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tales que} \\ Q &\text{ es una función de probabilidad y } Q(\{\omega\}) > 0 \forall \omega \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Lema 2.28. Sea S un mercado discreto con $I = \{0, 1, \dots, T\}$, y sea $\mathcal{P}_t$ la partición generada por $\mathcal{F}_t$ para todo $t \in I$. Dada $Q \in \mathcal{M}_\Omega^e$, sea $Q_{-1} : \mathcal{P}(\mathcal{P}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$Q_{-1}(C) := Q\left(\bigcup_{B \in C} B\right),$$

y para cada $t \in \{0, \dots, T-1\}$ y $A \in \mathcal{P}_t$, sean $Q_{(t,A)} : \mathcal{P}(\mathcal{P}_{t+1}^A) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$Q_{(t,A)}(B) := Q \left(\bigcup_{C \in B} C \middle| A \right).$$

Definimos

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}_\Omega^e &\rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{t+1}^A}^e, \\ \Phi(Q) &:= (Q_{-1}, ((Q_{(t,A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}). \end{aligned}$$

Se tiene entonces que Φ es una biyección.

Demostración. La demostración es larga, por lo cual la dividí en partes. El inicio de cada parte está señalado mediante un título correspondiente.

1. Φ está bien definida

Gracias a la proposición 2.27, sabemos que Q_{-1} es una función de probabilidad. Sea $B \in \mathcal{P}_0$, tenemos que

$$Q_{-1}(\{B\}) = Q(B) > 0,$$

por lo que $Q_{-1} \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e$.

Sea $t \in \{0, \dots, T-1\}$ y $A \in \mathcal{P}_t$. El mismo argumento del comienzo de la observación anterior prueba que $Q_{(t,A)} \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{t+1}^A}^e$.

2. Φ es inyectiva

Sea $Q \in \mathcal{M}_\Omega^e$ y sea $B \in \mathcal{F}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} Q(B) &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q(A_0) \frac{Q(B \cap A_0)}{Q(A_0)} \\ &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q(A_0) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q(A_1|A_0) \frac{Q(B \cap A_1)}{Q(A_1)} \\ &\vdots \\ &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q(A_0) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q(A_1|A_0) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{A_{T-1}}} Q(B \cap A_T|A_{T-1}) \\ &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_{T-1} \in \mathcal{P}_{T-1}^{A_{T-2}}} Q_{(T-2,A_{T-2})}(\{A_{T-1}\}) \\ &\quad \cdot \sum_{\omega \in A_{T-1}} Q(B \cap \{\omega\}|A_{T-1}). \end{aligned}$$

Observar que

$$B \cap \{\omega\} = \begin{cases} \{\omega\} & \text{si } \omega \in B \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases},$$

por lo que

$$Q(B) = \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in B \cap A_{T-1}} Q(\{\omega\}|A_{T-1})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{B \cap A_{T-1}}} Q(A_T | A_{T-1}) \\
&= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{B \cap A_{T-1}}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{A_T\}).
\end{aligned}$$

Vemos entonces que podemos reconstruir Q a partir de $\Phi(Q)$, por lo que Φ es inyectiva.

3. Φ es sobreyectiva
Sea

$$(Q_{-1}, ((Q_{(t,A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}_{\mathcal{P}_{t+1}^A}^e.$$

Definimos $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
P(B) &:= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{B \cap A_{T-1}}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{A_T\}) \\
&= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in B \cap A_{T-1}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}),
\end{aligned}$$

queremos ver que $P \in \mathcal{M}_{\Omega}^e$ y que

$$\Phi(P) = (Q_{-1}, ((Q_{(t,A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}). \quad (2.4)$$

3.1. P es una función de probabilidad

Si $B = \emptyset$, es inmediato que $P(B) = 0$. Si $B = \Omega$, tenemos que

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{A_{T-1}}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{A_T\}) \\
&= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_{T-1} \in \mathcal{P}_{T-1}^{A_{T-2}}} Q_{(T-2,A_{T-2})}(\{A_{T-1}\}) \\
&\vdots \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sea $\{B^i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Se tiene que

$$\begin{aligned}
P\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) &= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \cap A_{T-1}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) \\
&= \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{\omega \in B_i \cap A_{T-1}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in B_i \cap A_{T-1}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} P(B_i).
\end{aligned}$$

Si $B \in \mathcal{F}$, se tiene obviamente que $P(B) \geq 0$. Además, por la σ -aditividad tenemos que

$$1 = P(B) + P(\Omega \setminus B) \Rightarrow P(B) = 1 - P(\Omega \setminus B) \leq 1.$$

Esto termina de probar que P es una función de probabilidad.

3.2. $P \in \mathcal{M}_\Omega^e$

Sea $\eta \in \Omega$, se tiene entonces que $\eta \in A_{T-1}(\eta)$ para algún $A_{T-1}(\eta) \in \mathcal{P}_{T-1}$. En consecuencia,

$$Q_{(T-1, A_{T-1}(\eta))}(\{\{\eta\}\}) > 0. \quad (2.5)$$

Observemos que

$$P(\{\eta\}) = \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0, A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}} Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}).$$

Supongamos que $P(\{\eta\}) = 0$. Como todos los sumandos de la suma sobre $A_0 \in \mathcal{P}_0$ son no negativos, se tiene entonces que

$$Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0, A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}} Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) = 0$$

para todo $A_0 \in \mathcal{P}_0$. Pero $Q_{-1} \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e$, por lo que $Q_{-1}(\{A_0\}) > 0$ para todo $A_0 \in \mathcal{P}_0$. Se tiene entonces que

$$\sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0, A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}} Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) = 0$$

para todo $A_0 \in \mathcal{P}_0$. Aplicando los mismos argumentos una vez más, obtenemos que

$$\sum_{A_2 \in \mathcal{P}_2^{A_1}} Q_{(1, A_1)}(\{A_2\}) \cdots \sum_{\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}} Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) = 0$$

para todo $A_0 \in \mathcal{P}_0$ y para todo $A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}$ o, equivalentemente, que vale la última igualdad para todo $A_1 \in \mathcal{P}_1$. Continuando de esta manera, llegamos eventualmente a que

$$\sum_{\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}} Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) = 0$$

para todo $A_{T-1} \in \mathcal{P}_{T-1}$, y luego a que

$$Q_{(T-1, A_{T-1})}(\{\{\omega\}\}) = 0$$

para todo $A_{T-1} \in \mathcal{P}_{T-1}$ y para todo $\omega \in \{\eta\} \cap A_{T-1}$. Pero esto contradice la expresión (2.5). Por lo tanto, $P(\{\eta\}) > 0$ y $P \in \mathcal{M}_\Omega^e$.

3.3. Vale la igualdad (2.4)

Sea

$$(P_{-1}, ((P_{(t, A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}) := \Phi(P).$$

Sea $B \in \mathcal{P}_t$, tenemos entonces que

$$P(B) = \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_T \in \mathcal{P}_T^{B \cap A_{T-1}}} Q_{(T-1,A_{T-1})}(\{A_T\}).$$

Si $s \geq t$, tenemos que $B \in \mathcal{P}_t \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$, por lo que para $A_s \in \mathcal{P}_s$, se tiene que

$$B \cap A_s = \begin{cases} A_s & \text{si } A_s \subset B \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{A_{s+1} \in \mathcal{P}_{s+1}^{B \cap A_s}} Q_{(s,A_s)}(\{A_{s+1}\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } A_s \subset B \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Además, la proposición 2.20 nos dice que

$$\begin{aligned} A_s &\in \mathcal{P}_s^{A_{s-1}} \text{ y } A_s \subset B \\ \Leftrightarrow A_s &\in \mathcal{P}_s \text{ y } A_s \subset B \cap A_{s-1} \\ \Leftrightarrow A_s &\in \mathcal{P}_s^{B \cap A_{s-1}}. \end{aligned}$$

Aplicando esto, si $t < T - 1$ tenemos que

$$P(B) = \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_{T-1} \in \mathcal{P}_{T-1}^{B \cap A_{T-2}}} Q_{(T-2,A_{T-2})}(\{A_{T-1}\}),$$

y en general, por aplicación sucesiva obtenemos que

$$P(B) = \sum_{A_0 \in \mathcal{P}_0} Q_{-1}(\{A_0\}) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_1^{A_0}} Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots \sum_{A_t \in \mathcal{P}_t^{B \cap A_{t-1}}} Q_{(t-1,A_{t-1})}(\{A_t\}).$$

Si $s < t$ y $A_s \in \mathcal{P}_s$, tenemos que $A_s \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, por lo que

$$B \cap A_s = \begin{cases} B & \text{si } A_s \supset B \\ \emptyset & \text{si no} \end{cases}.$$

Como $B \neq \emptyset$ y $\mathcal{P}_s$ es una partición, esto implica que existe un único $A_s \in \mathcal{P}_s$ tal que $B \subset A_s$; lo notaremos A_s^B . Se tiene entonces que

$$P(B) = \sum_{\substack{A_s \in \mathcal{P}_s \\ A_0 \supset \dots \supset A_t \\ A_t \subset B}} Q_{-1}(\{A_0\}) Q_{(0,A_0)}(\{A_1\}) \cdots Q_{(t-1,A_{t-1})}(\{A_t\}),$$

pero los únicos conjuntos que cumplen la condición del índice de la suma son $A_t = B$ y $A_s = A_s^B$ para todo $s < t$. Luego,

$$P(B) = Q_{-1}(\{A_0^B\}) Q_{(0,A_0^B)}(\{A_1^B\}) \cdots Q_{(t-1,A_{t-1}^B)}(\{B\}).$$

Gracias a esta fórmula, podemos ver directamente que vale la igualdad (2.4). Sea $B \in \mathcal{P}_0$, se tiene que

$$P_{-1}(\{B\}) = P(B) = Q_{-1}(\{B\}),$$

por lo que $P_{-1} = Q_{-1}$.

Sea $t \in \{0, \dots, T-1\}$, $A \in \mathcal{P}_t$ y $B \in \mathcal{P}_{t+1}^A$. Observar que $A = A_t^B$, y consecuentemente $A_s^A = A_s^B$ para todo $s < t$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(B) &= Q_{-1}(\{A_0^B\})Q_{(0, A_0^B)}(\{A_1^B\}) \cdots Q_{(t-1, A_{t-1}^B)}(\{A_t^B\})Q_{(t, A_t^B)}(\{B\}) = P(A)Q_{(t, A)}(\{B\}) \\ &\Rightarrow P_{(t, A)}(\{B\}) = P(B|A) = Q_{(t, A)}(\{B\}), \end{aligned}$$

por lo que $P_{(t, A)} = Q_{(t, A)}$. Esto termina de probar la igualdad (2.4). $\square$

Proposición 2.29. *Sea S un mercado discreto con $I = \{0, 1, \dots, T\}$, y sea $\mathcal{P}_t$ la partición generada por $\mathcal{F}_t$ para todo $t \in I$. Se tiene entonces que*

$$\mathcal{M}^e(S) \cong \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}^e(S_{(t, A)}).$$

Demostración. Este resultado surge de restringir la biyección Φ dada por el lema anterior. Veamos que

$$\Phi(\mathcal{M}^e(S)) = \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}^e(S_{(t, A)}).$$

Sea $Q \in \mathcal{M}^e(S)$ y

$$(Q_{-1}, ((Q_{(t, A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}) := \Phi(Q).$$

Veamos que $Q_{(t, A)}$ es una medida de martingala para $S_{(t, A)}$. Sea $j \in \{1, \dots, d\}$, hay que ver que

$$\mathbb{E}_{Q_{(t, A)}}(S_{(t, A)}^j(1, \cdot) | \mathcal{G}_0) = S_{(t, A)}^j(0, \cdot).$$

Sabemos que $S_{(t, A)}^j(0, \cdot)$ es $\mathcal{G}_0$ -medible e integrable (pues $\mathcal{P}_{t+1}^A$ es finito). Sea $C \in \mathcal{G}_0$, queremos ver que

$$\int_C S_{(t, A)}^j(1, \omega) dQ_{(t, A)}(\omega) = \int_C S_{(t, A)}^j(0, \omega) dQ_{(t, A)}(\omega).$$

Recordemos que $\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \mathcal{P}_{t+1}^A\}$. Si $C = \emptyset$ la igualdad vale trivialmente. Si $C = \mathcal{P}_{t+1}^A$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_C S_{(t, A)}^j(s, \omega) dQ_{(t, A)}(\omega) &= \sum_{B \in \mathcal{P}_{t+1}^A} S_{(t, A)}^j(s, B) Q_{(t, A)}(\{B\}) \\ &= \sum_{B \in \mathcal{P}_{t+1}^A} S_{(t, A)}^j(s, B) Q(B|A) = \sum_{B \in \mathcal{P}_{t+1}^A} \sum_{\omega \in B} S^j(t+s, \omega) Q(\{\omega\}|A) \\ &= \frac{1}{Q(A)} \sum_{\omega \in A} S^j(t+s, \omega) Q(\{\omega\}) = \frac{1}{Q(A)} \int_A S_{t+s}^j(\omega) dQ(\omega). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\mathbb{E}_Q(S_{t+1}^j | \mathcal{F}_t) = S_t^j$$

y, como $A \in \mathcal{P}_t \subset \mathcal{F}_t$, tenemos entonces que

$$\int_A S_{t+1}^j(\omega) dQ(\omega) = \int_A S_t^j(\omega) dQ(\omega).$$

Esto prueba que

$$\Phi(\mathcal{M}^e(S)) \subset \mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}^e(S_{(t,A)}),$$

veamos ahora la otra inclusión.

Sea

$$(Q_{-1}, ((Q_{(t,A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{P}_0)}^e \times \prod_{t=0}^{T-1} \prod_{A \in \mathcal{P}_t} \mathcal{M}_{\mathcal{P}(\mathcal{P}_{t+1}^A)}^e.$$

y

$$Q := \Phi^{-1}(Q_{-1}, ((Q_{(t,A)})_{A \in \mathcal{P}_t})_{t \in \{0, \dots, T-1\}}).$$

Queremos ver que Q es una medida de martingala para S . Sea $t \in \{0, \dots, T-1\}$ y $j \in \{1, \dots, d\}$, queremos ver que

$$\mathbb{E}_Q(S_{t+1}^j | \mathcal{F}_t) = S_t^j.$$

Sabemos que S_t^j es $\mathcal{F}_t$ -medible e integrable (pues Ω es finito). Sea $C \in \mathcal{F}_t$, queremos ver que

$$\int_C S_{t+1}^j(\omega) dQ(\omega) = \int_C S_t^j(\omega) dQ(\omega).$$

Gracias a la proposición 2.15, basta ver que esto vale para $C \in \mathcal{P}_t$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_C S_{t+s}^j(\omega) dQ(\omega) &= \sum_{\omega \in C} S_{t+s}^j(\omega) Q(\{\omega\}) = \sum_{A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}^C} \sum_{\omega \in A_{t+1}} S_{t+s}^j(\omega) Q(\{\omega\}) \\ &= \sum_{A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(s, A_{t+1}) \sum_{\omega \in A_{t+1}} Q(\{\omega\}) = \sum_{A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(s, A_{t+1}) Q(A_{t+1}) \\ &= \sum_{A_{t+1} \in \mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(s, A_{t+1}) Q_{(t,C)}(\{A_{t+1}\}) Q(C) = Q(C) \int_{\mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(s, \omega) dQ_{(t,C)}(\omega). \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\mathbb{E}_{Q_{(t,C)}}(S_{(t,C)}^j(1, \cdot) | \mathcal{G}_0) = S_{(t,C)}^j(0, \cdot),$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(1, \omega) dQ_{(t,C)}(\omega) &= \int_{\mathcal{P}_{t+1}^C} S_{(t,C)}^j(0, \omega) dQ_{(t,C)}(\omega) \quad \text{y} \\ \int_C S_{t+1}^j(\omega) dQ(\omega) &= \int_C S_t^j(\omega) dQ(\omega). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.30. *Un mercado discreto es libre de arbitraje si y sólo si cada una de sus componentes es libre de arbitraje.*

Demostración. Antes que nada, observemos que dado un conjunto finito A , se tiene que $\mathcal{M}_A^e \neq \emptyset$: por ejemplo, se puede tomar la medida que lo hace equiprobable.

Sea S un mercado discreto. Por la proposición 2.29 tenemos que

$$\mathcal{M}^e(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{M}^e(S_{(t,A)}) \neq \emptyset \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \forall A \in \mathcal{P}_t,$$

ya que $\mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e \neq \emptyset$. De esto se desprende inmediatamente lo que queríamos probar, usando el teorema 2.24. $\square$

Corolario 2.31. *Sea S un mercado discreto libre de arbitraje con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. S es completo si y sólo si cada una de sus componentes es completa.*

Demostración. Gracias al resultado anterior, sabemos que todas las componentes de S son libres de arbitraje. Por la proposición 2.29 tenemos que

$$|\mathcal{M}^e(S)| = 1 \Leftrightarrow |\mathcal{M}^e(S_{(t,A)})| = 1 \forall t \in \{0, \dots, T-1\} \forall A \in \mathcal{P}_t,$$

ya que $|\mathcal{M}_{\mathcal{P}_0}^e| = 1$. De esto se desprende inmediatamente lo que queríamos probar, usando el teorema 2.25. $\square$

2.4.3. Mercados de un solo período

Ahora sabemos que el estudio de la viabilidad y completitud de un mercado discreto puede reducirse al estudio de las mismas propiedades en sus componentes. En esta sección presentaremos caracterización útil de dichas propiedades para este último tipo de mercados.

Empecemos explicando el tipo de mercados en los que estamos interesados.

Definición 2.26. *Sea S un mercado discreto con $I = \{0, 1, \dots, T\}$. Se dice que S es un mercado con T períodos.*

En esta sección nos referiremos únicamente a mercados discretos con un solo período que además cumplan que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Resulta inmediato que si S es un mercado discreto cualquiera, todas sus componentes son mercados que satisfacen estas dos condiciones.

Siguiendo [4] pero con diferente notación, consideremos un mercado discreto sin descontar precios $\hat{S} = (\hat{S}_t^0, \dots, \hat{S}_t^d)_{t \in I}$ con $I = \{0, 1\}$ y $\Omega = \{1, 2, \dots, b\}$.

Notación. *Para conciliar las notaciones de [4] y [17], denotaremos*

$$D = \begin{pmatrix} \hat{S}^0(1, 1) & \dots & \hat{S}^0(1, b) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{S}^d(1, 1) & \dots & \hat{S}^d(1, b) \end{pmatrix} \quad y$$

$$D^Z = \begin{pmatrix} S^0(1, 1) & \dots & S^0(1, b) \\ \vdots & & \vdots \\ S^d(1, 1) & \dots & S^d(1, b) \end{pmatrix}.$$

Se tienen entonces las siguientes proposiciones:

Proposición 2.32 ([4, p. 30]). *El mercado es libre de arbitraje si y sólo si existe $q \in \mathbb{R}_{>0}^b$ tal que*

$$D^Z q = S_0 . \quad (2.6)$$

Proposición 2.33 ([4, p. 36]). *Asumamos que el mercado es libre de arbitraje. El mercado es completo si y sólo si D tiene rango b .*

Observación 2.11. *Esta última proposición es intrigante, pues habíamos definido la completitud de los mercados descontados, y la condición señalada parece depender de los valores de $\hat{S}_1^0$. Sin embargo, es inmediato que*

$$D = D^Z \begin{pmatrix} \hat{S}^0(1, 1) & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{S}^0(1, b) \end{pmatrix}$$

y esa matriz diagonal es inversible porque $\hat{S}^0(1, \omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Se tiene entonces que el rango de D coincide con el de D^Z , por lo que no depende de los valores de $\hat{S}_1^0$.

Por lo visto en esta observación, se tiene el siguiente corolario:

Corolario 2.34. *Asumamos que el mercado es libre de arbitraje. El mercado es completo si y sólo si D^Z tiene rango b .*

Observación 2.12. *Las medidas de probabilidad sobre Ω pueden identificarse con*

$$\Delta^{b-1} := \{q \in \mathbb{R}_{\geq 0}^b : q_1 + \dots + q_b = 1\} .$$

Observar que $Q \in \mathcal{M}^a(S)$ si y sólo si

$$\mathbb{E}_Q(S_1^j) = S_0^j$$

para todo $1 \leq j \leq d$. Además, $S_t^0 = 1$, por lo que esta igualdad vale trivialmente para $j = 0$. Luego, $\mathcal{M}^a(S)$ se identifica con el conjunto de $q \in \Delta^{b-1}$ tales que $D^Z q = S_0$. Como la primera fila de esta última igualdad es $q_1 + \dots + q_b = 1$, podemos también afirmar que $\mathcal{M}^a(S)$ se identifica con el conjunto de $q \in \mathbb{R}_{\geq 0}^b$ tales que $D^Z q = S_0$. En consecuencia, $\mathcal{M}^e(S)$ se identifica con el conjunto de $q \in \mathbb{R}_{> 0}^b$ tales que $D^Z q = S_0$: de aquí que la proposición 2.32 es en realidad un caso particular del primer teorema fundamental.

2.4.4. El modelo binomial

El ejemplo clásico de mercado discreto en la literatura es el modelo binomial que presento en esta sección.

Definición 2.27. *El modelo binomial es el mercado discreto sin descontar precios dado por:*

1. *El conjunto $I = \{0, 1, \dots, T\}$.*
2. *El espacio de equiprobabilidad $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ donde $\Omega = \{U, D\}^T$.*

3. Una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Para definir $\mathcal{F}_t$, empezaremos definiendo $p_t : \Omega \rightarrow \{U, D\}^t$ como

$$p_t(\omega) := (\omega_1, \dots, \omega_t),$$

y a partir de esto la relación de equivalencia $\sim_t$ en Ω :

$$\omega \sim_t \eta \Leftrightarrow p_t(\omega) = p_t(\eta).$$

Definimos entonces $\mathcal{P}_t$ como la partición de Ω generada por $\sim_t$ y $\mathcal{F}_t := \sigma(\mathcal{P}_t)$.

4. El proceso estocástico $\hat{S} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{aligned} \hat{S}^0(t, \omega) &:= (1 + r)^t \\ \hat{S}^1(t, \omega) &:= \begin{cases} s & \text{si } t = 0 \\ u\hat{S}^1(t-1, \omega) & \text{si } t \geq 1 \text{ y } \omega_t = U \\ d\hat{S}^1(t-1, \omega) & \text{si } t \geq 1 \text{ y } \omega_t = D \end{cases} \end{aligned}$$

Los parámetros del modelo son $T, r, d, u, s \in \mathbb{R}_{>0}$ y cumplen que $T \in \mathbb{N}$, $1 + r > 0$, $0 < d < u$ y $s > 0$.

Observación 2.13. Veamos que el modelo binomial es en efecto un mercado. Empecemos viendo que $\mathbb{F}$ es una filtración. Sea $t \in \{0, \dots, T-1\}$ y $B \in \mathcal{P}_t$. Sea $\omega \in B$, definimos

$$\begin{aligned} \omega^U &:= (\omega_1, \dots, \omega_t, U, \omega_{t+1}, \dots, \omega_T) \quad \text{y} \\ \omega^D &:= (\omega_1, \dots, \omega_t, D, \omega_{t+1}, \dots, \omega_T). \end{aligned}$$

Sean $B_U, B_D \in \mathcal{P}_{t+1}$ tales que $\omega^U \in B_U$ y $\omega^D \in B_D$. Se tiene entonces que

$$B = B_U \cup B_D.$$

Veamos que vale esta igualdad. Sea $\eta \in B$, se tiene que

$$(\eta_1, \dots, \eta_t) = p_t(\eta) = p_t(\omega) = (\omega_1, \dots, \omega_t).$$

Si $\eta_{t+1} = U$, se tiene que $\eta \sim_{t+1} \omega^U \Rightarrow \eta_{t+1} \in B_U$; análogamente, si $\eta_{t+1} = D$, se tiene que $\eta_{t+1} \in B_D$. Esto prueba que $B \subset B_U \cup B_D$.

Sea $\eta \in B_U$, se tiene entonces que

$$(\eta_1, \dots, \eta_{t+1}) = (\omega_1, \dots, \omega_t, U)$$

por lo que $\eta \sim_t \omega \Rightarrow \eta \in B$. Esto prueba que $B_U \subset B$; análogamente se prueba que $B_D \subset B$, lo que termina de probar que $B = B_U \cup B_D$.

Como $B_U, B_D \in \mathcal{P}_{t+1} \subset \mathcal{F}_{t+1}$, se tiene entonces que $B \in \mathcal{F}_{t+1}$. Luego, $\mathcal{P}_t \subset \mathcal{F}_{t+1} \Rightarrow \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$.

Ahora falta ver que $\hat{S}$ es adaptado a $\mathbb{F}$. $\hat{S}_t^0$ es $\mathcal{F}_t$ -medible porque es constante. Probemos por inducción que $\hat{S}_t^1$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

$\hat{S}_0^1$ es $\mathcal{F}_0$ -medible porque es constante. Supongamos que $\hat{S}_{t-1}^1$ es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible para un $t \in \{1, \dots, T\}$ y veamos que $\hat{S}_t^1$ es $\mathcal{F}_t$ -medible.

Basta ver que $\widehat{S}_t^1$ es constante en cada elemento de $\mathcal{P}_t$. Sea $B \in \mathcal{P}_t$ y sean $\omega, \eta \in B$. Se tiene entonces que

$$\omega \sim_t \eta \Rightarrow (\omega_1, \dots, \omega_t) = (\eta_1, \dots, \eta_t).$$

Como $\widehat{S}_{t-1}^1$ es $\mathcal{F}_{t-1}$ -medible y $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$, entonces es $\mathcal{F}_t$ -medible y, por lo tanto, constante en B . Se tiene entonces que

$$t \geq 1, \omega_t = \eta_t \text{ y } \widehat{S}_{t-1}^1(\omega) = \widehat{S}_{t-1}^1(\eta) \Rightarrow \widehat{S}_t^1(\omega) = \widehat{S}_t^1(\eta).$$

2.4.5. Una teoría de mercados más general

En esta sección presentaremos una teoría de mercados más general que cubre las necesidades de esta tesis.

Definición 2.28 ([17, p. 71, 72, 112 y 113]). *Un mercado consiste en*

1. un conjunto $I = [0, T]$;
2. un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
3. una filtración $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in I)$ en dicho espacio de probabilidad con las siguientes propiedades:
 - a) $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$;
 - b) $\mathbb{F}$ es continua a derecha;
 - c) Si $A \subset B \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(B) = 0$, entonces $A \in \mathcal{F}_0$.
4. un proceso estocástico $S = (S_t^1, \dots, S_t^d)_{t=0}^T$ con rango $\mathbb{R}^d$ y las siguientes propiedades:
 - a) es adaptado a $\mathbb{F}$;
 - b) es localmente acotado.

Observación 2.14. *Supongamos que tenemos un mercado discreto en el sentido de la definición 2.18 con $I = \{0, 1, 2, \dots, T\}$. Podemos pensar este mercado como un caso particular de esta nueva definición más general, tomando $I = [0, T]$ y definiendo*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &:= \mathcal{F}_{[t]} & \text{y} \\ S_t &:= S_{[t]}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T] \setminus \{0, 1, 2, \dots, T\}$. Todas las propiedades que hay que chequear son inmediatas, exceptuando que S es localmente acotado. Para chequear esto último, observamos que como $\{0, 1, 2, \dots, T\} \times \Omega$ es finito, S como función con ese dominio es acotada, por lo que existe $K > 0$ tal que $|S| \leq K$; basta entonces tomar las sucesiones $T_n := \infty$ y $K_n := K$ para todo n .

También observamos que esta definición más general permite considerar mercados discretos más generales, como aquellos que se obtienen si en la definición 2.18 consideramos $0 < t_1 < \dots < t_n$ arbitrarios y tomamos $I = \{0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Observación 2.15. Las estrategias de trading serán en este caso procesos estocásticos $H : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$. La versión continua de la ecuación (2.3) debería ser

$$V_t = V_0 + \int_{(0,t]} \langle H_u, dS_u \rangle .$$

Se pide que S sea localmente acotado para que esta integral esté bien definida. Esa misma razón limita las posibles elecciones de H . Para los fines de esta tesis basta señalar que tomar H constante es admisible pues

$$\begin{aligned} \int_{(0,t]} \langle H, dS_u \rangle &= \int_{(0,t]} \sum_{j=1}^d H^j dS_u^j = \sum_{j=1}^d H^j \int_{(0,t]} dS_u^j = \sum_{j=1}^d H^j \cdot (S_t^j - S_0^j) \\ &= \langle H, S_t - S_0 \rangle . \end{aligned}$$

Tal como en el caso discreto, dicha estrategia será una oportunidad de arbitraje si $V_T := \langle H, S_T - S_0 \rangle$ cumple que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_T \geq 0) &= 1 \quad y \\ \mathbb{P}(V_T > 0) &> 0 . \end{aligned}$$

A aquellos interesados en la definición general de estrategia de trading admisible y en nociones más generales de mercado financiero, les recomiendo la lectura de los capítulos 5, 7 y 8 de [17].

Para cerrar esta sección, introduciré definiciones y resultados que nos ayudarán en la construcción de mercados alrededor de un proceso estocástico dado.

Notación. Sea $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, notaremos $\sigma(X_u; u \leq t)$ a la menor σ -álgebra que contiene a todos los conjuntos de la forma $X_u^{-1}(B)$ para $u \leq t$ y $B \subset \mathbb{R}^d$ boreliano. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, notaremos $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ a la menor σ -álgebra que contiene a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$.

Es inmediato que tales σ -álgebras existen porque se consiguen intersecando a todas las σ -álgebras que cumplen esas propiedades, y $\mathcal{P}(\Omega)$ cumple esas propiedades.

Definición 2.29 ([17, p. 113]). La filtración natural $(\mathcal{F}_t)_t$ generada por un proceso $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ está definida como sigue:

1. para todo t definimos $\mathcal{H}_t = \sigma(X_u; u \leq t)$.
2. $\mathcal{G}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{H}_s$.
3. $\mathcal{N} = \{A \mid \exists B \in \mathcal{G}_T, A \subset B \text{ y } \mathbb{P}(B) = 0\}$.
4. $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{G}_t, \mathcal{N})$.

Observación 2.16. Es inmediato que $\mathcal{H}$ es una filtración, que $\mathcal{G}$ es una filtración y que $\mathcal{F}$ es una filtración. También es inmediato que X es adaptado a $\mathcal{H}$, que X es adaptado a $\mathcal{G}$ ($\mathcal{H}_t \subset \mathcal{G}_t$) y que X es adaptado a $\mathcal{F}$ ($\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$).

Proposición 2.35 ([17, p. 113]). La filtración natural es continua a derecha.

Definición 2.30 ([32, p. 30]). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $A \in \mathcal{A}$ se dice μ -nulo si $\mu(A) = 0$. Por $\mathcal{N}_\mu$ denotamos a la clase de todos los subconjuntos de conjuntos μ -nulos.

Definición 2.31 ([32, p. 30]). Un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se dice completo si $\mathcal{N}_\mu \subset \mathcal{A}$.

Observación 2.17 ([32, p. 30]). Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ -finito. Existe una única mínima σ -álgebra $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}$ y una extensión μ^* de μ a $\mathcal{A}^*$ tal que $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ es completo. $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ se llama la completación de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Además,

$$\mathcal{A}^* = \sigma(\mathcal{A}, \mathcal{N}_\mu) = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Observación 2.18. La condición 3c de la definición 2.28 equivale a pedir que

1. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sea completo (pues $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_T = \mathcal{F}$) y
2. $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0$.

2.5. Análisis convexo

Por todos conocida es la versión finita de la siguiente proposición. La demostración de esta versión general es análoga a la del caso finito.

Proposición 2.36. Sea V un K -espacio vectorial y sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de variedades lineales en V . Entonces $\bigcap_{i \in I} M_i$ es $\emptyset$ o una variedad lineal.

Definición 2.32 ([46, p. 6]). Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. La variedad lineal generada por S es la menor variedad lineal que contiene a S , y se denota $\text{aff}(S)$.

Teorema 2.37 ([46, p. 10]). La intersección de una colección arbitraria de conjuntos convexos es convexa.

Definición 2.33 ([46, p. 12]). Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. La cápsula convexa generada por S es el menor conjunto convexo que contiene a S , y se denota $\text{conv}(S)$.

Teorema 2.38 ([46, p. 12]). Para cualquier $S \subset \mathbb{R}^n$, $\text{conv}(S)$ consiste en todas las combinaciones convexas de los elementos de S .

Definición 2.34. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, su dimensión es la dimensión de $\text{aff}(C)$.

Definición 2.35 ([46, p. 44]). Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y no vacío. Su interior relativo, denotado $\text{ri}(C)$, se define como el interior que resulta cuando C es considerado un subconjunto de $\text{aff}(C)$. El conjunto $\overline{C} \setminus \text{ri}(C)$ se llama la frontera relativa de C .

Notación. Si C es un conjunto convexo, denotaremos su frontera relativa como ∂C .

Recordemos lo siguiente.

Definición 2.36. Sea $n \geq 0$. Un n -símplex σ en $\mathbb{R}^m$ (para algún $m \geq n$) es la cápsula convexa de $n + 1$ puntos de $\mathbb{R}^m$ afínmente independientes, que se llaman vértices de σ .

Observación 2.19. Notar que los vértices $v_0, \dots, v_n$ de σ lo determinan, pero también quedan determinados por σ .

Observación 2.20 ([46, p. 12]). Si σ es un n -símplex, su dimensión es n .

Notación. Lo denotamos $\dim \sigma = n$.

Proposición 2.39 ([46, p. 7]). Sean $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ afínmente independientes y $M = \text{aff}(\{v_0, \dots, v_n\})$. Todo $x \in M$ se expresa de manera única como

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Se dice que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ son las coordenadas baricéntricas de x .

Observación 2.21. Esta proposición define un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow M$, dado por

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) v_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Además, como

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) 0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i,$$

las coordenadas baricéntricas de x con respecto a $\{v_0, \dots, v_n\}$ coinciden con las coordenadas baricéntricas de $f^{-1}(x)$ con respecto a $\{0, e_1, \dots, e_n\}$.

Corolario 2.40 ([46, p. 12]). Cada punto de un símplex se expresa de manera única como una combinación convexa de sus vértices.

Observación 2.22. Sean $v_0, \dots, v_n$ los vértices del símplex σ . Sea $I \subset \{0, \dots, n\}$, por la unicidad de las coordenadas baricéntricas, se tiene que $x \in \text{conv}(\{v_i\}_{i \in I})$ si y sólo si sus coordenadas baricéntricas $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ con respecto a $\{v_0, \dots, v_n\}$ cumplen que $\lambda_i \geq 0$ para todo $i \in I$ y $\lambda_j = 0$ para todo $j \in \{0, \dots, n\} \setminus I$. Luego,

$$f^{-1}(\text{conv}(\{v_i\}_{i \in I})) = \text{conv}(\{e_i\}_{i \in I}),$$

donde $e_0 := 0$.

La siguiente proposición caracteriza la frontera de un símplex en términos de sus generadores.

Proposición 2.41. Sean $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ los vértices del símplex σ . Se tiene entonces que σ es cerrado y

$$\partial \sigma = \bigcup_{i=0}^n \text{conv}(\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}).$$

Demostración. Por la observación 2.22, basta probarlo para el caso $v_i = e_i \in \mathbb{R}^n$ para todo i . En tal caso, se tiene que

$$\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1 \right\}.$$

Con esta caracterización es fácil ver que

$$\overline{\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})} = \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) \quad \text{y}$$

$$\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\})^\circ = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda_i > 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i < 1 \right\}.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \partial \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) = & \left(\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) \cap \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \right) \\ & \cup \bigcup_{i=1}^n \left(\text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) \cap \{\lambda : \lambda_i = 0\} \right), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) \cap \left\{ \lambda : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} &= \text{conv}(\{e_1, \dots, e_n\}) \quad \text{y} \\ \text{conv}(\{0, e_1, \dots, e_n\}) \cap \{\lambda : \lambda_i = 0\} &= \text{conv}(\{0, e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n\}). \end{aligned}$$

□

Definición 2.37. Si $v_0, \dots, v_n$ son los vértices del símplex σ , diremos que sus bordes son

$$\text{conv}(\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\})$$

para cada $i \in \{0, \dots, n\}$.

2.6. Macroeconomía

En esta sección presentaré un famoso modelo macroeconómico que sirve como base del trabajo presentado en el capítulo 5. Aprovecharé también para ilustrar la naturaleza de los modelos Stock-Flujo.

Presentaré el modelo de Goodwin [23] empleando el mismo enfoque metodológico utilizado en el modelo TED&POP del capítulo 5. Este enfoque en sí es un desarrollo original, razón por la cual dudé en incluirlo en este capítulo, pero creo que su inclusión aquí ayudará a su mejor entendimiento.

Los pasos de este enfoque serían los siguientes:

1. Definición de actores y activos.
2. Planteo del modelo discreto.
 - a) Definición de stocks: qué actor los controla y de qué activos están compuestos.
 - b) Secuencia grosera de eventos, tablas contables y ecuaciones contables.
 - c) Secuencia fina de eventos y ecuaciones de comportamiento.
3. Deducción del modelo continuo y tabla del modelo.

Actores, activos y unidades

Como primer paso en la fundamentación del modelo, enumeramos sus actores y sus activos. El modelo de Goodwin se puede pensar como un modelo con 2 actores,

1. *Familias* y

2. *Firmas*,

y 1 activo,

1. *maíz*.

Aprovechamos este momento para definir las unidades empleadas en el modelo. Se utilizará la unidad *kg* para medir cantidades de maíz. También utilizaremos las unidades básicas *año* para medir el tiempo y *trabajador* para medir cantidad de trabajadores; esta última será abreviada *tr*.

El modelo discreto

El segundo paso en la fundamentación es ver qué ocurre en el intervalo de tiempo $[t - \Delta t, t]$, para plantear el modelo a tiempo discreto.

¿Con qué stocks de qué activos cuenta cada actor a tiempo t ? A tiempo t , las Firmas cuentan con $K(t)$ kg de maíz que emplean como capital, mientras que las Familias no tienen ningún stock de maíz.

A grandes rasgos, en el intervalo de tiempo $(t - \Delta t, t)$ se da la siguiente secuencia de eventos:

1. Las Firmas contratan trabajadores y producen $Y(t)\Delta t$ kg de maíz.
2. Las Firmas pagan $WB(t)\Delta t$ kg de maíz en concepto de salarios y los restantes $P(t)\Delta t$ kg de maíz los pagan en concepto de ganancias.
3. Los salarios se consumen en su totalidad, mientras que las ganancias se invierten en su totalidad: se invierten $I(t)\Delta t$ kg de maíz, donde $I(t)\Delta t = P(t)\Delta t$; se consumen $C(t)\Delta t$ kg de maíz, donde $C(t)\Delta t = WB(t)\Delta t$.
4. Se pierden $\delta \cdot K(t - \Delta t)\Delta t$ kg de maíz del stock de capital, ya sea por uso o por paso del tiempo.

Todos estos eventos pueden resumirse en una tabla contable:

La última fila (columna) es el resultado de sumar todas las filas (columnas) anteriores: la doble línea que la antecede puede interpretarse como un igual. La primera fila corresponde al stock de maíz que tiene cada actor a tiempo $t - \Delta t$, mientras que la última fila corresponde a los mismos stocks a tiempo t . La fila “producción” corresponde a la creación de maíz mediante algún proceso, en este caso, la producción de maíz en las Firmas. La fila “consumo” corresponde a la destrucción de maíz mediante algún proceso, en este caso, el consumo de maíz de las Familias y la depreciación de capital en las Firmas. Las tres filas del medio corresponden a transferencias de maíz entre actores: puede observarse que la cuarta columna tiene 0's en tal caso. Por último, las Firmas cuentan con dos columnas para hacer más clara la interpretación.

	Familias	Firmas		Σ
		Corriente	Capital	
Inicial	0	0	$K(t - \Delta t)$	$K(t - \Delta t)$
Producción	0	$+Y(t)\Delta t$	0	$+Y(t)\Delta t$
Salarios	$+WB(t)\Delta t$	$-WB(t)\Delta t$	0	0
Ganancias	$+P(t)\Delta t$	$-P(t)\Delta t$	0	0
Inversión	$-I(t)\Delta t$	0	$+I(t)\Delta t$	0
Consumo	$-C(t)\Delta t$	0	$-\delta \cdot K(t - \Delta t)\Delta t$	$-C(t)\Delta t - \delta \cdot K(t - \Delta t)\Delta t$
Final	0	0	$K(t)$	$K(t)$

Cuadro 2.1: Contabilidad del maíz [kg]

Los modelos que cuentan con este tipo de tablas se conocen en la literatura macroeconómica como *modelos Stock-Flujo* (SFC, Stock-Flow Consistent) [9, 22, 39, 42]. Tradicionalmente las entradas de la tabla tienen como unidad una divisa, pero una de las innovaciones de TED&POP fue hacer una tabla contable por activo y, para ser consistentes con eso, acá las entradas se miden en kg.

De la primera columna se obtiene la ecuación

$$WB(t) + P(t) = C(t) + I(t).$$

En este modelo, esta ecuación es redundante, pues resulta de la suma de dos ecuaciones que mencionamos anteriormente:

$$\begin{aligned} C(t) &= WB(t) & y \\ I(t) &= P(t). \end{aligned}$$

De la segunda columna se obtiene la ecuación

$$Y(t) = WB(t) + P(t).$$

De la tercera columna se obtiene la ecuación

$$\frac{K(t) - K(t - \Delta t)}{\Delta t} = I(t) - \delta \cdot K(t - \Delta t).$$

La última columna siempre es redundante por tratarse de la suma de las otras columnas. En este caso particular, la ecuación que de ella se desprende tampoco resulta interesante.

Para cerrar el modelo, es necesario agregarle ecuaciones. Para ello, repasaremos los hechos del intervalo $(t - \Delta t, t)$ con mayor detalle.

La producción Para producir Y kg de maíz por año, las Firmas requieren tener como capital al menos sY kg de maíz y contratar al menos Y/a trabajadores. s es la *relación capital-producto* y a es la *productividad del trabajo*. Al revés, se puede pensar que con L trabajadores las Firmas pueden producir como mucho aL kg de maíz por año si disponen de suficiente capital, y con K kg de maíz como capital las Firmas pueden producir como mucho K/s kg de maíz por año si contratan suficientes trabajadores: con K kg de maíz como capital y contratando L trabajadores, las

Firmas producen $\min\{K/s, a \cdot L\}$ kg de maíz por año.

En este modelo, las Firmas producen lo máximo que pueden de acuerdo al capital del cual disponen:

$$Y(t) = \frac{K(t - \Delta t)}{s}.$$

Para producir esta cantidad, necesitan contratar al menos $Y(t)/a(t - \Delta t)$ ¹ trabajadores. Contratan exactamente esa cantidad, pues si contrataran más producirían lo mismo y tendrían que pagar más salarios:

$$L(t) = \frac{Y(t)}{a(t - \Delta t)}.$$

$a(t)$ se asume que aumenta con el tiempo: gracias al descubrimiento de nuevas técnicas de producción, cada trabajador puede producir cada vez más por año. Su evolución está dada por la ecuación

$$a(t) = a(t - \Delta t) + \psi \cdot a(t - \Delta t)\Delta t,$$

donde ψ es un parámetro.

Salarios El salario promedio pagado a un trabajador por año de trabajo es $w(t - \Delta t)$, por lo que

$$\begin{aligned} WB(t)\Delta t &= w(t - \Delta t) \cdot L(t)\Delta t \\ \Rightarrow WB(t) &= w(t - \Delta t) \cdot L(t). \end{aligned}$$

El salario promedio se actualiza según la ecuación

$$w(t) = w(t - \Delta t) + \rho \cdot (e(t) - \tau) \cdot w(t - \Delta t)\Delta t,$$

donde ρ y τ son parámetros, y $e(t) = L(t)/N(t - \Delta t)$ es la tasa de empleo. $N(t)$ es la *población en edad de trabajar* y se actualiza según la ecuación

$$N(t) = N(t - \Delta t) + \varphi \cdot N(t - \Delta t)\Delta t,$$

donde φ es un parámetro.

Juntando todas las ecuaciones, tenemos

$$I(t) = P(t), \tag{2.7}$$

$$C(t) = WB(t), \tag{2.8}$$

$$Y(t) = WB(t) + P(t), \tag{2.9}$$

$$\frac{K(t) - K(t - \Delta t)}{\Delta t} = I(t) - \delta \cdot K(t - \Delta t), \tag{2.10}$$

$$Y(t) = \frac{K(t - \Delta t)}{s}, \tag{2.11}$$

$$L(t) = \frac{Y(t)}{a(t - \Delta t)}, \tag{2.12}$$

¹Se puede pensar que $a(t - \Delta t)$ es la productividad del trabajo en todo el intervalo $[t - \Delta t, t)$.

$$a(t) = a(t - \Delta t) + \psi \cdot a(t - \Delta t)\Delta t, \quad (2.13)$$

$$WB(t) = w(t - \Delta t) \cdot L(t), \quad (2.14)$$

$$w(t) = w(t - \Delta t) + \rho \cdot (e(t) - \tau) \cdot w(t - \Delta t)\Delta t, \quad (2.15)$$

$$e(t) = \frac{L(t)}{N(t - \Delta t)} \quad y \quad (2.16)$$

$$N(t) = N(t - \Delta t) + \varphi \cdot N(t - \Delta t)\Delta t. \quad (2.17)$$

Fijado $\Delta t > 0$, esto nos da un modelo a tiempo discreto.

El modelo continuo

El tercer paso de la fundamentación del modelo es pasar de la familia de modelos a tiempo discreto (indexada por $\Delta t > 0$) al modelo a tiempo continuo. Para escribir algunas ecuaciones resultantes en forma compacta, introducimos la siguiente notación.

Notación. Dada una función f derivable y no nula en t_0 , denotaremos

$$\hat{f}(t_0) := \frac{\dot{f}(t_0)}{f(t_0)}.$$

Observación 2.23. Observar que si definimos $g(t) := \log |f(t)|$, tenemos $\dot{g}(t_0) = \hat{f}(t_0)$; por esta razón, $\hat{f}(t_0)$ se llama la derivada logarítmica de f en t_0 .

Algunas propiedades inmediatas que resultan de esto son

$$\begin{aligned} \widehat{f \cdot g}(t_0) &= \hat{f}(t_0) + \hat{g}(t_0), \\ \widehat{\lambda} &\equiv 0, \\ y \quad \widehat{f^\lambda}(t_0) &= \lambda \hat{f}(t_0), \end{aligned}$$

para cualesquiera f y g derivables y no nulas en t_0 , y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cuando $\Delta t \rightarrow 0$, y asumiendo que todas las funciones son suficientemente suaves, obtenemos el modelo a tiempo continuo de la siguiente tabla.

Cuadro 2.2: Variables, parámetros, unidades y ecuaciones del modelo de Goodwin

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Variables macro			
ρ	Intensidad de la lucha de clases	1/año	[parámetro]
τ	Tasa de empleo no aceleradora de los salarios	-	[parámetro]
$e(t)$	Tasa de empleo	-	$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$
$w(t)$	Salario promedio por unidad de tiempo	kg/tr-año	$\hat{w}(t) = \rho \cdot (e(t) - \tau)$
$WB(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	kg/año	$WB(t) = w(t)L(t)$
Variables de las Familias			

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
φ	Tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar	1/año	[parámetro]
$N(t)$	Población en edad de trabajar	tr	$\hat{N}(t) = \varphi$
$C(t)$	Consumo por unidad de tiempo	kg/año	$C(t) = WB(t)$
Variables de las Firmas			
ψ	Tasa de crecimiento de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
s	Relación capital-producto	año	[parámetro]
δ	Tasa de depreciación del capital	1/año	[parámetro]
$a(t)$	Productividad del trabajo	kg/tr-año	$\hat{a}(t) = \psi$
$Y(t)$	Producción por unidad de tiempo	kg/año	$Y(t) = \frac{K(t)}{s}$
$L(t)$	Población empleada	tr	$L(t) = \frac{Y(t)}{\hat{a}(t)}$
$P(t)$	Ganancias por unidad de tiempo	kg/año	$P(t) = Y(t) - WB(t)$
$I(t)$	Inversión bruta por unidad de tiempo	kg/año	$I(t) = P(t)$
$K(t)$	Capital	kg	$\dot{K}(t) = I(t) - \delta \cdot K(t)$

La tabla muestra todas las variables, sus descripciones y todas las ecuaciones del modelo, y garantiza que la cantidad de variables sea igual a la cantidad de ecuaciones (donde cuenta como ecuación declarar a una variable como parámetro). En general, en lugar de escribir una ecuación o declarar una variable como parámetro, se puede también declarar una variable como *exógena*.

En la literatura económica, las variables exógenas de un modelo son aquellas que “se supone están determinadas por fuerzas externas al modelo y cuyas magnitudes se aceptan sólo como datos” [11, p. 5-6]. Para los efectos de esta tesis, una variable exógena será una variable cuya dinámica se omite a la hora de presentar las ecuaciones del modelo, pero estará dada explícitamente cuando se realicen simulaciones del modelo. Por ejemplo, los parámetros serían un caso particular de variables exógenas: son variables exógenas constantes.

Análisis del modelo

Para analizar este modelo, observar que

$$\begin{aligned}
\hat{K} &= \frac{I}{K} - \delta = \frac{P}{sY} - \delta, \\
P &= Y - wL = \left(1 - \frac{w}{a}\right) Y \\
\Rightarrow \hat{K} &= \frac{1 - w/a}{s} - \delta, \\
\Rightarrow \hat{e} &= \hat{L} - \hat{N} = \hat{Y} - \hat{a} - \varphi = \hat{K} - \psi - \varphi = \frac{1 - w/a}{s} - \delta - \psi - \varphi.
\end{aligned}$$

Definimos $v := w/a$, se tiene entonces que

$$\hat{v} = \hat{w} - \hat{a} = \rho \cdot (e - \tau) - \psi,$$

por lo que se obtiene el sistema de 2 ecuaciones diferenciales con 2 incógnitas

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \rho \cdot (e - \tau) - \psi & y \\ \hat{e} &= \frac{1-v}{s} - \delta - \psi - \varphi.\end{aligned}$$

Observar que esto es un caso particular de las famosas ecuaciones de Lotka-Volterra para sistemas predador-presa, donde la variable v toma el rol de predador y la variable e toma el rol de presa.

Es obvio que el sistema tiene un equilibrio en $(v, e) = (1 - (\delta + \psi + \varphi)s, \tau + \psi/\rho)$. Es sabido también que todas las soluciones con condición inicial $v(0) > 0$ y $e(0) > 0$ son órbitas cerradas [28, p. 240].

Observar que N y a se pueden integrar aparte:

$$\begin{aligned}N(t) &= N(0) \exp(\varphi t) & y \\ a(t) &= a(0) \exp(\psi t).\end{aligned}$$

Las otras variables del modelo pueden calcularse en base a v , e , N y a :

$$\begin{aligned}L &= e \cdot N, \\ w &= a \cdot v, \\ Y &= a \cdot L & y \\ K &= s \cdot Y.\end{aligned}$$

Exploremos la dinámica del modelo en palabras. Para empezar, observemos que lo producido por unidad de tiempo Y se distribuye en forma de salarios WB y ganancias P :

$$Y = WB + P.$$

Al dividir ambos lados por Y obtenemos

$$\begin{aligned}1 &= \frac{WB}{Y} + \frac{P}{Y} \\ \Rightarrow 1 &= v + \frac{P}{Y}.\end{aligned}$$

WB/Y se conoce como la *participación de los salarios*, mientras que P/Y se conoce como la *participación de las ganancias*.

Cuando la participación de los salarios (v) es baja, la participación de las ganancias $(1-v)$ es alta, la tasa de crecimiento del capital es alta ($\hat{K} = (1-v)/s - \delta$), la tasa de crecimiento del producto es alta ($\hat{Y}$) y crece la tasa de empleo ($\hat{e} = \hat{Y} - \psi - \varphi > 0$). Cuando la tasa de empleo es suficientemente alta, la tasa de crecimiento de los salarios es alta ($\hat{w} = \rho \cdot (e - \tau)$) y la participación de los salarios crece ($\hat{v} = \hat{w} - \psi > 0$). Pero cuando la participación de los salarios es alta, el ciclo virtuoso anteriormente mencionado se revierte: la participación de las ganancias es baja, la tasa de crecimiento del capital es baja, la tasa de crecimiento del producto es baja y cae la tasa de empleo.

Este modelo ilustra como el conflicto distributivo entre trabajadores y capitalistas, representado por la ecuación

$$\hat{v} = \rho \cdot (e - \tau) - \psi,$$

produce ciclos de crecimiento y recesión en la economía capitalista.

Capítulo 3

Toros vs. osos: un modelo trinomial de un activo financiero

3.1. Introducción

Usualmente, el primer acercamiento de uno al mundo de la matemática financiera es a través del modelo binomial [16, 44, 51]. Dicho modelo puede entenderse como una puja entre dos grupos de inversores: los *toros* y los *osos*. Los toros son aquellos inversores que creen que el precio del activo va a subir, mientras que los osos son aquellos que creen que el precio del activo va a bajar. Supongamos que la proporción de toros entre todos los inversores es p_u , mientras que la proporción de osos entre todos los inversores es $p_d (= 1 - p_u)$. En cada instante de tiempo, se elige al azar un inversor:

- Si se eligió un toro, éste compra el activo, haciendo que el precio se multiplique por un factor $u > 1$.
- Si se eligió un oso, éste vende el activo, haciendo que el precio se multiplique por un factor $d < 1$.

De manera que si $S(t)$ es el precio del activo a tiempo t , se tiene que

$$\mathbb{P}(S(t) = uS(t-1)) = p_u \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(S(t) = dS(t-1)) = p_d.$$

Las probabilidades p_u y p_d están fijas. Un modelo en sintonía con esta interpretación puede leerse en la sección 4 de [15].

Bajo esta interpretación, el modelo binomial asume implícitamente al menos una de las siguientes hipótesis:

- La cantidad de inversores es suficientemente grande: si un toro se queda sin dinero, o un oso se queda sin acciones, esto no altera significativamente los valores de p_u y p_d .
- La compra de acciones por parte de los toros, y la venta de acciones por parte de los osos, se realiza en forma gradual: lleva tiempo que un toro se quede sin dinero, o que un oso se quede sin acciones.

- Todos los inversores pueden pedir préstamos y shortear¹ sin límites: un toro puede seguir comprando aunque no tenga dinero, y un oso puede seguir vendiendo aunque no tenga acciones.
- Continuamente los inversores perciben ingresos de dinero y acciones por fuera del mercado considerado: los toros siempre tienen dinero y los osos siempre tienen acciones.

Por otro lado, un modelo que se basa en la finitud de los activos de los inversores, es decir en la violación de las hipótesis recién mencionadas, es el presentado en [7]. Se trata de un modelo a tiempo continuo, con distintos grupos de inversores. A tiempo t , cada grupo tiene un parámetro $k(t) \in (0, 1)$ que determina la proporción en la que compran o venden el activo basados en consideraciones de factores fundamentales y técnicos, y una magnitud $B(t) \in (0, 1)$ que representa la proporción de su riqueza invertida en activos. Estas funciones determinan la oferta $S(t)$ y la demanda $D(t)$, y el precio $P(t)$ cambia según la ecuación

$$\frac{d}{dt} \log P(t) = \log \left(\frac{D(t)}{S(t)} \right),$$

lo que termina por cerrar un sistema de ecuaciones diferenciales determinístico. Particularmente, $k(t)$ está dado por la ecuación

$$k(t) = \frac{1 + \tanh \zeta(t)}{2},$$

donde $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ es un parámetro que representa la preferencia del inversor sobre comprar o no acciones, y la ecuación garantiza que $k(t) \in (0, 1)$. $B(t)$ varía según la ecuación

$$\frac{dB}{dt} = k \cdot (1 - B) - (1 - k) \cdot B + B(1 - B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt},$$

lo que a su vez garantiza que empezando con $B(0) \in (0, 1)$, se tiene que $B(t) \in (0, 1)$ para todo t , lo que significa que los inversores no shortean ni piden préstamos. También, los cambios en $B(t)$ se deben sólo a compra y venta de acciones, y variaciones en el precio, lo que indica que no entran dinero ni acciones de afuera del mercado considerado. Las otras dos hipótesis tampoco son necesarias.

En este modelo, a medida que un grupo de inversores se va quedando sin dinero, no pueden seguir subiendo el precio de la acción y, análogamente, a medida que se van quedando sin acciones, no pueden seguir bajando el precio de la acción. Cuando dos grupos de inversores tienen dos valores fundamentales distintos, el primero mayor y el segundo menor que el precio actual del activo, se produce una puja que eventualmente agota el dinero del primer grupo o las acciones del segundo grupo, y el precio termina convergiendo al valor fundamental del grupo vencedor. Este fenómeno se usa en [7] para explicar algunos conocidos patrones de análisis técnico.

En el presente trabajo, se desarrolla un modelo que combina aspectos de los dos modelos previamente mencionados. En la sección 3.2, se describe el modelo como representación de un escenario real. En tal escenario hay dos grupos de inversores,

¹Este término está definido inmediatamente después de la definición 2.15.

los toros y los osos. Los toros compran acciones, mientras que los osos las venden. Mediando las transacciones entre los grupos, hay un hacedor de mercado que fija los precios. Los detalles técnicos sobre la formalización se pueden encontrar en la sección 3.3.

En el modelo binomial, la distribución de los retornos logarítmicos puede aproximarse mediante el teorema central del límite. Una forma de medir cuánto se desvían tales distribuciones en este nuevo modelo es estudiar sus momentos [1, 34, 49, 52]. Con esto en mente, en la sección 3.4 probamos una fórmula que permite calcular todos estos momentos.

Si bien la distribución de los retornos logarítmicos del modelo binomial puede aproximarse apelando al teorema central del límite, sus momentos también pueden calcularse de forma exacta. Esto es lo que hacemos en la sección 3.5, tomando límite en una fórmula presentada en la sección 3.4.

Como una aplicación del modelo, en la sección 3.6, muestro como tomar valores de los parámetros para aproximar momentos dados con precisión arbitraria. Este procedimiento es ejemplificado con el uso de datos financieros reales, que además sugieren un patrón de convergencia claro.

En la sección 3.7, generalizamos el marco presentado, para el caso en el que hay varios grupos de toros con distintas cantidades de dinero y/o varios grupos de osos con distintas cantidades de acciones. La generalización de la fórmula deducida en la sección 3.4 y la generalización del algoritmo presentado en la sección 3.6 son introducidos, observando que demostraciones análogas valen para este caso general.

3.2. El modelo en palabras

Considerar el siguiente modelo. Hay N inversores interactuando en un mercado. Además de los inversores, hay un *hacedor de mercado* (HM) siempre dispuesto a comprar y vender acciones. A tiempo t , se puede dividir a los inversores en 3 grupos:

1. Hay $N_u(t)$ *toros*: éstos son inversores con dinero que desean comprar acciones.
2. Hay $N_d(t)$ *osos*: éstos son inversores con acciones que desean venderlas.
3. Hay $N - N_u(t) - N_d(t)$ *inactivos*: se trata de inversores sin dinero que desearían comprar acciones, e inversores sin acciones que desearían venderlas².

A tiempo t se elige un inversor al azar, y todos los inversores cuentan con igual probabilidad de ser elegidos.

Sea $p(t)$ el precio de la acción a tiempo t . El HM opera con dos constantes $0 < d < 1 < u$. Si a tiempo t

1. se elige un toro, éste gasta todo su dinero en comprarle acciones al HM, quien se las vende a precio $up(t)$, y éste pasa a ser el nuevo precio de la acción ($p(t+1) = up(t)$);
2. si se elige un oso, éste le vende todas sus acciones al HM, quien se las compra a precio $dp(t)$, y éste pasa a ser el nuevo precio de la acción ($p(t+1) = dp(t)$);

²Uno de los jurados me ha señalado lo excéntrico de hablar de “inversores sin acciones”. Espero que el lector me permita esta pequeña transgresión.

3. si se elige un inversor inactivo, no se venden ni se compran acciones, y el precio se mantiene igual ($p(t+1) = p(t)$).

El inversor elegido, sea cual sea su origen, pasa a estar inactivo:

1. si se trataba de un toro, $N_u(t+1) = N_u(t) - 1$ y $N_d(t+1) = N_d(t)$;
2. si se trataba de un oso, $N_d(t+1) = N_d(t) - 1$ y $N_u(t+1) = N_u(t)$;
3. si se trataba de un inversor inactivo, $N_u(t+1) = N_u(t)$ y $N_d(t+1) = N_d(t)$.

3.3. Construcción del espacio de probabilidad

Todo esto puede modelarse mediante el siguiente espacio de probabilidad. Consideramos el espacio muestral

$$\Omega = \{U, D, I\}^{\mathbb{N}_0}$$

cuyos elementos $\omega \in \Omega$ representan estados del mundo [25, 26].

Para cada $l \in \mathbb{N}_0$ y para cada $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^l$, se tiene el conjunto

$$A_{\hat{\omega}} = \{\omega \in \Omega : (\omega_0, \dots, \omega_{l-1}) = \hat{\omega}\}$$

Sea $\mathcal{F}_t$ la σ -álgebra generada por la familia

$$\{A_{\hat{\omega}}\}_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t},$$

y

$$\mathcal{F}_{\infty} := \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{F}_t.$$

Considerar $q : \mathbb{N}_0^2 \times \{U, D, I\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} q(n_u, n_d, U) &:= \frac{N_u(0) - n_u}{N}, & q(n_u, n_d, D) &:= \frac{N_d(0) - n_d}{N} \\ \text{y} \quad q(n_u, n_d, I) &:= \frac{N - N_u(0) - N_d(0) + n_u + n_d}{N}, \end{aligned}$$

y $\mathbb{P}_t : \{A_{\hat{\omega}}\}_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \rightarrow \mathbb{R}$ definida recursivamente por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_t(A_{\hat{\omega}}) &:= \mathbb{P}_{t-1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t-2})}) \cdot q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, \hat{\omega}_{t-1}) \\ \text{y} \quad \mathbb{P}_0(\Omega) &:= 1. \end{aligned}$$

Proposición 3.1. $\mathbb{P}_t$ toma valores no negativos y

$$\sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \mathbb{P}_t(A_{\hat{\omega}}) = 1.$$

Demostración. Hacemos inducción sobre t . Si $t = 0$, vale trivialmente. Supongamos que vale hasta $t - 1$.

Si $P_t(A_{\hat{\omega}}) < 0$, entonces $\mathbb{P}_{t-1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t-2})}) > 0$ y $q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, \hat{\omega}_{t-1}) < 0$.

Si $\hat{\omega}_{t-1} = U$, se tiene entonces que $\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\} > N_u(0)$. Sea t' el mayor de los $i \leq t-2$ tales que $\hat{\omega}_i = U$, se tiene entonces que $\#\{i \leq t'-1 : \hat{\omega}_i = U\} \geq N_u(0)$, pero

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}_{t'+1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t'})}) \\ &= \mathbb{P}_{t'}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t'-1})}) \cdot q(\#\{i \leq t' - 1 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t' - 1 : \hat{\omega}_i = D\}, U) \leq 0, \end{aligned}$$

por lo que $\mathbb{P}_{t'+1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t'})}) = 0$. Consecuentemente, $\mathbb{P}_{t-1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t-2})}) = 0$, lo que es absurdo. Análogamente, se llega a una contradicción si $\hat{\omega}_{t-1} = D$. No puede ser que $\hat{\omega}_{t-1} = I$, pues $N \geq N_u(0) + N_d(0)$, por lo que $N + \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\} + \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\} \geq N_u(0) + N_d(0)$ y $q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, I) \geq 0$.

Por último, tenemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \mathbb{P}_t(A_{\hat{\omega}}) \\ &= \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \mathbb{P}_{t-1}(A_{(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{t-2})}) \cdot q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, \hat{\omega}_{t-1}) \\ &= \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^{t-1}} \sum_{\hat{\omega}_{t-1} \in \{U, D, I\}} \mathbb{P}_{t-1}(A_{\hat{\omega}}) \cdot q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, \hat{\omega}_{t-1}) \\ &= \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^{t-1}} \mathbb{P}_{t-1}(A_{\hat{\omega}}) \sum_{\hat{\omega}_{t-1} \in \{U, D, I\}} q(\#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = U\}, \#\{i \leq t-2 : \hat{\omega}_i = D\}, \hat{\omega}_{t-1}) \\ &= \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^{t-1}} \mathbb{P}_{t-1}(A_{\hat{\omega}}) = 1. \end{aligned}$$

□

Luego, por la proposición 2.21, $\mathbb{P}_t$ se extiende a una medida de probabilidad definida en $\mathcal{F}_t$. Observar que si $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t$, se tiene que

$$\mathbb{P}_s(A_{\hat{\omega}}) = \mathbb{P}_{s-1}(A_{\hat{\omega}}) \quad (3.1)$$

para todo $s > t$, y por lo tanto $\mathbb{P}_s|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}_t$. Considerar entonces $\mathbb{P}_{\infty} : \mathcal{F}_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$, si $A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{P}_{\infty}(A) := \mathbb{P}_t(A) .$$

Esto está bien definido por (3.1). $\mathcal{F}_{\infty}$ es un álgebra de conjuntos y $\mathbb{P}_{\infty} : \mathcal{F}_{\infty} \rightarrow [0, 1]$ es finitamente aditiva.

Proposición 3.2. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_{\infty}$ una familia de conjuntos disjuntos tales que $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}_{\infty}$. Vale entonces que

$$\mathbb{P}_{\infty}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{\infty}(A_n) .$$

Demostración. Como

$$\bigcup_{n=1}^N A_n \subset A,$$

tomando t suficientemente grande se tiene que

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_t(A_n) = \mathbb{P}_t\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \mathbb{P}_t(A).$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}_\infty(A_n) \leq \mathbb{P}_\infty(A),$$

y tomando límite obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\infty(A_n) \leq \mathbb{P}_\infty(A).$$

Para ver que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_\infty(A_n) \geq \mathbb{P}_\infty(A),$$

basta ver que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^N A_n,$$

y una demostración de esto puede verse en [32, p. 27]. $\square$

Por el teorema de Hahn-Kolmogorov (teorema 2.7), se puede extender entonces $\mathbb{P}_\infty$ a una única medida de probabilidad $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, donde $\mathcal{F}$ es la σ -álgebra generada por $\mathcal{F}_\infty$.

Definición 3.1. Se definen los procesos estocásticos $N_u, N_d : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}^\Omega$ y $p : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_{>0}^\Omega$, dados por

$$\begin{aligned} N_u(t)(\omega) &:= \begin{cases} N_u(t-1)(\omega) - 1 & \text{si } \omega_{t-1} = U \\ N_u(t-1)(\omega) & \text{si no} \end{cases}, \\ N_d(t)(\omega) &:= \begin{cases} N_d(t-1)(\omega) - 1 & \text{si } \omega_{t-1} = D \\ N_d(t-1)(\omega) & \text{si no} \end{cases} \\ \text{y } p(t)(\omega) &:= \begin{cases} p(t-1)(\omega)u & \text{si } \omega_{t-1} = U \\ p(t-1)(\omega)d & \text{si } \omega_{t-1} = D \\ p(t-1)(\omega) & \text{si } \omega_{t-1} = I \end{cases}, \end{aligned}$$

con $N_u(0), N_d(0) \in \mathbb{N}_0$ y $p(0) \in \mathbb{R}_{>0}$ dados.

Proposición 3.3. Se tiene que

$$\begin{aligned} N_u(t)(\omega) &= N_u(0) - \#\{i \leq t-1 : \omega_i = U\}, \\ \text{y } N_d(t)(\omega) &= N_d(0) - \#\{i \leq t-1 : \omega_i = D\}. \end{aligned}$$

Demostración. Por inducción en t . $\square$

3.4. Cálculo de momentos de los retornos logarítmicos

En este tipo de modelos, los practicantes están usualmente interesados en la distribución de los retornos logarítmicos. En este caso, $\log(p(t)/p(0))$ es una variable aleatoria con soporte compacto (de hecho, su soporte es finito), por lo tanto sus momentos determinan su distribución: el famoso resultado de unicidad del problema de los momentos de Hausdorff [19].

El principal objetivo de esta sección es probar una fórmula que nos permita calcular fácilmente los primeros momentos de los retornos logarítmicos. Esa fórmula es

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{k_u=0}^{n_u} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \left\{ n_u \atop k_u \right\} \\ \cdot \sum_{k_d=0}^{n_d} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} \left\{ n_d \atop k_d \right\} \sum_{j=0}^{k_u+k_d} (-1)^j \binom{k_u+k_d}{j} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^t .$$

donde el símbolo $\left\{ n \atop k \right\}$ representa un número de Stirling de segundo tipo, como vimos en la sección 2.2.2. El lector puede encontrar código de Python para calcular estos valores en la sección A.1.1.

Para probar esta fórmula, necesitamos algunos resultados previos.

Definición 3.2. Sea $i \in \mathbb{N}$, definimos la variable aleatoria

$$X_i := \log \frac{p(i)}{p(i-1)} .$$

Observación 3.1. Si $t \in \mathbb{N}_0$, observar que

$$\log \frac{p(t)}{p(0)} = \sum_{i=1}^t X_i .$$

Proposición 3.4. Se tiene que

$$X_i(\omega) = \begin{cases} \log u & \text{si } \omega_{i-1} = U \\ \log d & \text{si } \omega_{i-1} = D \\ 0 & \text{si } \omega_{i-1} = I \end{cases} .$$

Demostración. Sale inmediatamente de las definiciones de X_i y p . □

Proposición 3.5. Dado $i \in \mathbb{N}_0$, las variables $N_u(i)$, $N_d(i)$ y X_i (en este último caso, $i \geq 1$) son $\mathcal{F}_i$ -medibles.

Demostración. Sea $i \in \mathbb{N}_0$. Sea $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^i$, por la proposición 3.3 sabemos que $N_u(i)$ y $N_d(i)$ son constantes en $A_{\hat{\omega}}$. Luego, $N_u(i)$ y $N_d(i)$ se escriben como combinaciones lineales de $\{\mathbf{1}_{A_{\hat{\omega}}}\}_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^i}$ y por lo tanto son $\mathcal{F}_i$ -medibles.

Si $i \in \mathbb{N}$, por la proposición 3.4 sabemos que X_i es constante en $A_{\hat{\omega}}$. Luego, X_i es $\mathcal{F}_i$ -medible. □

Lema 3.6. Sea $i \in \mathbb{N}_0$ y $\pi_i : \{U, D, I\}^{\mathbb{N}_0} \rightarrow \{U, D, I\}$ la proyección $\pi_i(\omega) = \omega_i$. Se tiene que

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{U\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) = \frac{N_u(i)}{N}, \quad (3.2)$$

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{D\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) = \frac{N_d(i)}{N} \quad (3.3)$$

$$\text{y } \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{I\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) = 1 - \frac{N_u(i) + N_d(i)}{N}. \quad (3.4)$$

Demostración. Probaremos la identidad (3.2); las otras dos identidades se demuestran de forma análoga. Por la proposición 2.14, se tiene que

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{U\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) = \mathbb{P}(\pi_i^{-1}(\{U\}) | \mathcal{F}_i) = \sum_{\substack{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^i \\ \mathbb{P}(A_{\hat{\omega}}) > 0}} \mathbb{P}(\pi_i^{-1}(\{U\}) | A_{\hat{\omega}}) \mathbf{1}_{A_{\hat{\omega}}}.$$

Sea $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^i$ tal que $\mathbb{P}(A_{\hat{\omega}}) > 0$ y $\omega \in A_{\hat{\omega}}$, se tiene entonces

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{U\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) (\omega) = \mathbb{P}(\pi_i^{-1}(\{U\}) | A_{\hat{\omega}}) = \frac{\mathbb{P}(A_{(\hat{\omega}, U)})}{\mathbb{P}(A_{\hat{\omega}})} = \frac{N_u(i)(\omega)}{N}$$

donde la última igualdad sale de la definición de $\mathbb{P}_{i+1}$ junto con la proposición 3.3. Luego, con probabilidad 1,

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{U\})} \middle| \mathcal{F}_i \right) = \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^i} \frac{N_u(i)}{N} \mathbf{1}_{A_{\hat{\omega}}} = \frac{N_u(i)}{N}.$$

□

Proposición 3.7. Sean $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_k < i_{k+1}$ enteros, entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1} - 1)!}{(N_u(i_{k+1} - 1) - l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1} - 1)!}{(N_d(i_{k+1} - 1) - l_d)!} \prod_{j=1}^k X_{i_j}^{n_j} \right) \\ &= \frac{1}{N^k} \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{l_u + l_d + k - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \quad (3.5) \\ & \cdot \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j}. \end{aligned}$$

Demostración. Damos una demostración por inducción en k . Para $k = 0$, el lado izquierdo es

$$\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_1 - 1)!}{(N_u(i_1 - 1) - l_u)!} \frac{N_d(i_1 - 1)!}{(N_d(i_1 - 1) - l_d)!} \right).$$

Observar que

$$\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i + 1)!}{(N_u(i + 1) - l_u)!} \frac{N_d(i + 1)!}{(N_d(i + 1) - l_d)!} \middle| \mathcal{F}_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i+1)!}{(N_u(i+1)-l_u)!} \frac{N_d(i+1)!}{(N_d(i+1)-l_d)!} \left(\mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{I\})} + \mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{U\})} + \mathbf{1}_{\pi_i^{-1}(\{D\})} \right) \middle| \mathcal{F}_i \right) \\
&= \frac{N_u(i)!}{(N_u(i)-l_u)!} \frac{N_d(i)!}{(N_d(i)-l_d)!} \left(1 - \frac{N_u(i) + N_d(i)}{N} \right) + \frac{(N_u(i)-1)!}{(N_u(i)-1-l_u)!} \frac{N_d(i)!}{(N_d(i)-l_d)!} \frac{N_u(i)}{N} \\
&\quad + \frac{N_u(i)!}{(N_u(i)-l_u)!} \frac{(N_d(i)-1)!}{(N_d(i)-1-l_d)!} \frac{N_d(i)}{N} \\
&= \frac{N_u(i)!}{(N_u(i)-l_u)!} \frac{N_d(i)!}{(N_d(i)-l_d)!} \left(1 - \frac{l_u + l_d}{N} \right).
\end{aligned}$$

Por aplicación sucesiva de la ley de esperanzas iteradas (proposición 2.11), obtenemos que

$$\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_1-1)!}{(N_u(i_1-1)-l_u)!} \frac{N_d(i_1-1)!}{(N_d(i_1-1)-l_d)!} \right) = \frac{N_u(0)!}{(N_u(0)-l_u)!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0)-l_d)!} \left(1 - \frac{l_u + l_d}{N} \right)^{i_1-1},$$

lo que prueba el caso $k = 0$.

Supongamos que (3.5) vale para k . Usando sucesivamente la ley de esperanzas iteradas, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+2}-1)!}{(N_u(i_{k+2}-1)-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+2}-1)!}{(N_d(i_{k+2}-1)-l_d)!} \prod_{j=1}^{k+1} X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&= \left(1 - \frac{l_u + l_d}{N} \right)^{i_{k+2}-i_{k+1}-1} \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} \prod_{j=1}^{k+1} X_{i_j}^{n_j} \right).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} \prod_{j=1}^{k+1} X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} X_{i_{k+1}}^{n_{k+1}} \middle| \mathcal{F}_{i_{k+1}-1} \right) \prod_{j=1}^k X_{i_j}^{n_j} \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} X_{i_{k+1}}^{n_{k+1}} \middle| \mathcal{F}_{i_{k+1}-1} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} (\log u)^{n_{k+1}} \mathbf{1}_{\pi_{i_{k+1}-1}^{-1}(\{U\})} \middle| \mathcal{F}_{i_{k+1}-1} \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1})-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1})-l_d)!} (\log d)^{n_{k+1}} \mathbf{1}_{\pi_{i_{k+1}-1}^{-1}(\{D\})} \middle| \mathcal{F}_{i_{k+1}-1} \right) \\
&= \frac{(N_u(i_{k+1}-1)-1)!}{(N_u(i_{k+1}-1)-1-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1}-1)!}{(N_d(i_{k+1}-1)-l_d)!} (\log u)^{n_{k+1}} \frac{N_u(i_{k+1}-1)}{N} \\
&\quad + \frac{N_u(i_{k+1}-1)!}{(N_u(i_{k+1}-1)-l_u)!} \frac{(N_d(i_{k+1}-1)-1)!}{(N_d(i_{k+1}-1)-1-l_d)!} (\log d)^{n_{k+1}} \frac{N_d(i_{k+1}-1)}{N} \\
&= \frac{(\log u)^{n_{k+1}}}{N} \frac{N_u(i_{k+1}-1)!}{(N_u(i_{k+1}-1)-1-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1}-1)!}{(N_d(i_{k+1}-1)-l_d)!} \\
&\quad + \frac{(\log d)^{n_{k+1}}}{N} \frac{N_u(i_{k+1}-1)!}{(N_u(i_{k+1}-1)-l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1}-1)!}{(N_d(i_{k+1}-1)-1-l_d)!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1})!}{(N_u(i_{k+1}) - l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1})!}{(N_d(i_{k+1}) - l_d)!} \prod_{j=1}^{k+1} X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&= \frac{(\log u)^{n_{k+1}}}{N} \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1} - 1)!}{(N_u(i_{k+1} - 1) - 1 - l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1} - 1)!}{(N_d(i_{k+1} - 1) - l_d)!} \prod_{j=1}^k X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&+ \frac{(\log d)^{n_{k+1}}}{N} \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+1} - 1)!}{(N_u(i_{k+1} - 1) - l_u)!} \frac{N_d(i_{k+1} - 1)!}{(N_d(i_{k+1} - 1) - 1 - l_d)!} \prod_{j=1}^k X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&= \frac{(\log u)^{n_{k+1}}}{N} \frac{1}{N^k} \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{l_u + 1 + l_d + k - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\
&\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - 1 - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} \\
&\quad + \frac{(\log d)^{n_{k+1}}}{N} \frac{1}{N^k} \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{l_u + l_d + 1 + k - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\
&\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - 1 - l_d - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} \\
&= \frac{1}{N^{k+1}} \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{l_u + l_d + k + 1 - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\
&\cdot \left(\sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - 1 - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - \#\{s_j = d\})!} (\log u)^{n_{k+1}} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} \right. \\
&+ \left. \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - 1 - \#\{s_j = d\})!} (\log d)^{n_{k+1}} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} \right) \\
&= \frac{1}{N^{k+1}} \prod_{j=1}^{k+1} \left(1 - \frac{l_u + l_d + k + 1 - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\
&\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^{k+1}} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^{k+1} (\log s_j)^{n_j} .
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\frac{N_u(i_{k+2} - 1)!}{(N_u(i_{k+2} - 1) - l_u)!} \frac{N_d(i_{k+2} - 1)!}{(N_d(i_{k+2} - 1) - l_d)!} \prod_{j=1}^{k+1} X_{i_j}^{n_j} \right) \\
&= \frac{1}{N^{k+1}} \prod_{j=1}^{k+2} \left(1 - \frac{l_u + l_d + k + 1 - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\
&\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^{k+1}} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - l_u - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - l_d - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^{k+1} (\log s_j)^{n_j} .
\end{aligned}$$

□

Corolario 3.8.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) &= \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} \frac{N_u(0)!}{N^{k_u} (N_u(0) - k_u)!} \\ &\quad \sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} \frac{N_d(0)!}{N^{k_d} (N_d(0) - k_d)!} \frac{(k_u + k_d)!}{k_u! k_d!} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \\ &\quad \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k_u + k_d} = t - k_u - k_d}} \prod_{j=0}^{k_u + k_d} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^{m_j} . \quad (3.6) \end{aligned}$$

Demostración. Tomando $l_u = l_d = 0$ en (3.5), obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^k X_{i_j}^{n_j} \right) &= \frac{1}{N^k} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{k - j + 1}{N} \right)^{i_j - i_{j-1} - 1} \\ &\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} . \end{aligned}$$

Usando esto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^t X_i \right)^n \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_k \leq t}} \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^k X_{m_1 + \dots + m_j}^{n_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_k \leq t}} \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{1}{N^k} \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{k - j + 1}{N} \right)^{m_j - 1} \\ &\cdot \sum_{s \in \{u, d\}^k} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \sum_{s \in \{u, d\}^k} \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_k \leq t}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{1}{N^k} \\ &\cdot \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{k - j + 1}{N} \right)^{m_j - 1} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} . \end{aligned}$$

Sea

$$B_n := \left\{ (k, \vec{n}, s) : 1 \leq k \leq n, \vec{n} \in \mathbb{N}^k \text{ tal que } |\vec{n}|_1 = n, s \in \{u, d\}^k \right\} ,$$

obtenemos

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{(k, \vec{n}, s) \in B_n} \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_k \leq t}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} \frac{1}{N^k} \\ \cdot \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{k-j+1}{N} \right)^{m_j-1} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - \#\{s_j = u\})!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - \#\{s_j = d\})!} \prod_{j=1}^k (\log s_j)^{n_j} .$$

Sea

$$C_n := \left\{ (n_u, n_d, \vec{n}_u, \vec{n}_d) : n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \text{ tales que } n_u + n_d = n, \vec{n}_u \in \bigcup_{k_u \geq 0} \mathbb{N}^{k_u} \text{ tal que } |\vec{n}_u|_1 = n_u, \right. \\ \left. \vec{n}_d \in \bigcup_{k_d \geq 0} \mathbb{N}^{k_d} \text{ tal que } |\vec{n}_d|_1 = n_d \right\} .$$

Hay una función sobreyectiva de B_n a C_n , donde

$$n_u := \sum_{j: s_j = u} n_j ,$$

$\vec{n}_u$ es el vector $\vec{n}$ con sólo las componentes n_j tales que $s_j = u$, y dando definiciones análogas para n_d y $\vec{n}_d$. Los puntos en la preimagen de $(n_u, n_d, \vec{n}_u, \vec{n}_d)$ están asociados con términos de la forma

$$\sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_{k_u+k_d} \leq t}} \frac{n!}{n_1! \dots n_{k_u+k_d}!} \frac{1}{N^{k_u+k_d}} \\ \cdot \prod_{j=1}^{k_u+k_d} \left(1 - \frac{k_u+k_d-j+1}{N} \right)^{m_j-1} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} ;$$

observar que todos ellos son iguales. La preimagen de $(n_u, n_d, \vec{n}_u, \vec{n}_d)$ tiene $(k_u + k_d)! / (k_u! k_d!)$ elementos, pues ese es el número de valores que s puede tomar si la restringimos a tener u en k_u componentes y d en k_d componentes. Por lo tanto, podemos reescribir la suma como

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} \sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} \frac{(k_u + k_d)!}{k_u! k_d!} \\ \cdot \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + \dots + m_{k_u+k_d} \leq t}} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \frac{1}{N^{k_u+k_d}} \prod_{j=1}^{k_u+k_d} \left(1 - \frac{k_u+k_d-j+1}{N} \right)^{m_j-1} \\ \cdot \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \\ = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} \frac{N_u(0)!}{N^{k_u} (N_u(0) - k_u)!} \sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} \frac{N_d(0)!}{N^{k_d} (N_d(0) - k_d)!}$$

$$\cdot \frac{(k_u + k_d)!}{k_u! k_d!} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k_u+k_d} = t - k_u - k_d}} \prod_{j=0}^{k_u+k_d} \left(1 - \frac{j}{N}\right)^{m_j}.$$

□

Lema 3.9. Dado $k \geq 0$, y $c_0, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ todos distintos entre sí, se tiene que

$$\sum_{\substack{m_j \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_k = m}} \prod_{j=0}^k c_j^{m_j} = \sum_{j=0}^k \frac{c_j^{m+k}}{\prod_{i \neq j} (c_j - c_i)}.$$

Demostración. Por inducción en k . Si $k = 0$, obviamente vale. Suponemos que vale para k , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m_j \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_k + m_{k+1} = m}} \prod_{j=0}^{k+1} c_j^{m_j} &= \sum_{l=0}^m \sum_{\substack{m_j \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k-1} = m-l}} \sum_{m_k=0}^l c_k^{m_k} c_{k+1}^{l-m_k} \prod_{j=0}^{k-1} c_j^{m_j} \\ &= \sum_{l=0}^m \frac{c_{k+1}^{l+1} - c_k^{l+1}}{c_{k+1} - c_k} \sum_{\substack{m_j \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k-1} = m-l}} \prod_{j=0}^{k-1} c_j^{m_j} \\ &= \frac{c_{k+1}}{c_{k+1} - c_k} \sum_{\substack{m_j, l \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k-1} + l = m}} c_{k+1}^l \prod_{j=0}^{k-1} c_j^{m_j} - \frac{c_k}{c_{k+1} - c_k} \sum_{\substack{m_j, l \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k-1} + l = m}} c_k^l \prod_{j=0}^{k-1} c_j^{m_j} \\ &= \frac{c_{k+1}}{c_{k+1} - c_k} \left(\frac{c_{k+1}^{m+k}}{\prod_{0 \leq i \leq k-1} (c_{k+1} - c_i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j^{m+k}}{(c_j - c_{k+1}) \prod_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ i \neq j}} (c_j - c_i)} \right) \\ &\quad - \frac{c_k}{c_{k+1} - c_k} \left(\frac{c_k^{m+k}}{\prod_{0 \leq i \leq k-1} (c_k - c_i)} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{c_j^{m+k}}{(c_j - c_k) \prod_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ i \neq j}} (c_j - c_i)} \right) \\ &= \frac{c_{k+1}^{m+k+1}}{\prod_{0 \leq i \leq k} (c_{k+1} - c_i)} + \frac{c_k^{m+k+1}}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq k+1 \\ i \neq k}} (c_k - c_i)} \\ &\quad + \frac{1}{c_{k+1} - c_k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{c_{k+1}}{c_j - c_{k+1}} - \frac{c_k}{c_j - c_k} \right) \frac{c_j^{m+k}}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ i \neq j}} (c_j - c_i)} \\ &= \frac{c_{k+1}^{m+k+1}}{\prod_{0 \leq i \leq k} (c_{k+1} - c_i)} + \frac{c_k^{m+k+1}}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq k+1 \\ i \neq k}} (c_k - c_i)} \\ &\quad + \frac{1}{c_{k+1} - c_k} \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{(c_{k+1} - c_k) c_j}{(c_j - c_{k+1})(c_j - c_k)} \right) \frac{c_j^{m+k}}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq k-1 \\ i \neq j}} (c_j - c_i)} \\ &= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{c_j^{m+k+1}}{\prod_{\substack{0 \leq i \leq k+1 \\ i \neq j}} (c_j - c_i)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.10.

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{k_u=0}^{n_u} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \left\{ \begin{matrix} n_u \\ k_u \end{matrix} \right\} \\ \cdot \sum_{k_d=0}^{n_d} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} \left\{ \begin{matrix} n_d \\ k_d \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{k_u+k_d} (-1)^j \binom{k_u+k_d}{j} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^t . \quad (3.7)$$

Demostración. Aplicando el lema 3.9 en (3.6), obtenemos

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} \binom{N_u(0)}{k_u} \\ \cdot \sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} \binom{N_d(0)}{k_d} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \sum_{j=0}^{k_u+k_d} (-1)^j \binom{k_u+k_d}{j} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^t . \quad (3.8)$$

Esta expresión puede simplificarse usando números de Stirling de segunda especie. Recordemos que $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ es el número de particiones de un conjunto de n elementos en k conjuntos no vacíos. Luego, el número de funciones sobreyectivas de un conjunto de n elementos a un conjunto de k elementos es $k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Llamando n_i al cardinal de la preimagen del i -ésimo elemento del codominio, obtenemos

$$k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{\substack{n_i \in \mathbb{N} \\ n_1 + \dots + n_k = n}} \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} .$$

Usando esta identidad en (3.8) obtenemos (3.7). $\square$

3.5. Momentos del modelo con infinitos inversores

Como un caso límite de nuestro modelo, el modelo binomial puede ser recuperado. Tomando ventaja de esto, en esta sección calculamos los retornos logarítmicos del modelo binomial. Por lo que sabemos, estos resultados no aparecen en la literatura actual.

En esta sección usaremos la notación de la sección 3.3.

Sean $q_u, q_d \geq 0$ tales que $q_u + q_d \leq 1$. Consideremos el modelo con $N_u(0) := \lfloor q_u N \rfloor$ y $N_d(0) := \lfloor q_d N \rfloor$, y apliquemos el límite $N \rightarrow \infty$ a los momentos de los retornos logarítmicos. Por un lado, al aplicar el límite a la fórmula 3.6, tenemos que

$$\frac{N_u(0)}{N} \rightarrow q_u$$

$$\Rightarrow \frac{N_u(0)!}{N^{k_u}(N_u(0) - k_u)!} \rightarrow q_u^{k_u},$$

por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) &\rightarrow \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} q_u^{k_u} \\ &\sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} q_d^{k_d} \frac{(k_u + k_d)!}{k_u! k_d!} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N}_0 \\ m_0 + \dots + m_{k_u + k_d} = t - k_u - k_d}} 1 \\ &= \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{\substack{n_u^i \in \mathbb{N} \\ n_u^1 + \dots + n_u^{k_u} = n_u}} q_u^{k_u} \\ &\sum_{\substack{n_d^i \in \mathbb{N} \\ n_d^1 + \dots + n_d^{k_d} = n_d}} q_d^{k_d} \frac{(k_u + k_d)!}{k_u! k_d!} \frac{n!}{n_u^1! \dots n_u^{k_u}! \cdot n_d^1! \dots n_d^{k_d}!} \binom{t}{k_u + k_d} \\ &= \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{k_u=0}^{n_u} q_u^{k_u} \left\{ \begin{matrix} n_u \\ k_u \end{matrix} \right\} \sum_{k_d=0}^{n_d} q_d^{k_d} \left\{ \begin{matrix} n_d \\ k_d \end{matrix} \right\} \frac{t!}{(t - k_u - k_d)!}. \end{aligned}$$

Por otro lado, tomemos $Z := \log(p(t)/p(0))$. Por definición de $p(t)$, observemos que Z es constante en $A_{\hat{\omega}}$, para todo $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t$. Sea $\hat{Z}(\hat{\omega}) := Z(\omega)$ para cualquier $\omega \in A_{\hat{\omega}}$. Bajo cualquier medida de probabilidad $Q : \mathcal{F}_t \rightarrow [0, 1]$, tenemos entonces que

$$\mathbb{E}_Q(Z) = \int Z(\omega) dQ(\omega) = \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \int_{A_{\hat{\omega}}} Z(\omega) dQ(\omega) = \sum_{\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t} \hat{Z}(\hat{\omega}) Q(A_{\hat{\omega}}). \quad (3.9)$$

Para hacer énfasis en la dependencia respecto de N de las construcciones de la sección 3.3, notaremos

$$q^N := q, \quad \mathbb{P}_t^N := \mathbb{P}_t \quad \text{y} \quad \mathbb{P}^N := \mathbb{P}.$$

Además, definimos $q^\infty : \mathbb{N}_0^2 \times \{U, D, I\} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$q^\infty(\cdot, \cdot, U) := q_u, \quad q^\infty(\cdot, \cdot, D) := q_d \quad \text{y} \quad q^\infty(\cdot, \cdot, I) := 1 - q_u - q_d;$$

definimos $\mathbb{P}_t^\infty$ y $\mathbb{P}^\infty$ reemplazando q^N por q^∞ en las definiciones de $\mathbb{P}_t^N$ y $\mathbb{P}^N$, respectivamente. Por último, notaremos $\mathbb{E}^N$ a la esperanza bajo $\mathbb{P}^N$ y $\mathbb{E}^\infty$ a la esperanza bajo $\mathbb{P}^\infty$.

Tenemos entonces que $q^N \rightarrow q^\infty$ puntualmente cuando $N \rightarrow \infty$. Por inducción se prueba que $\mathbb{P}_t^N(A_{\hat{\omega}}) \rightarrow \mathbb{P}_t^\infty(A_{\hat{\omega}})$ para todo $\hat{\omega} \in \{U, D, I\}^t$. Como

$$\mathbb{P}^N(A_{\hat{\omega}}) = \mathbb{P}_t^N(A_{\hat{\omega}}) \rightarrow \mathbb{P}_t^\infty(A_{\hat{\omega}}) = \mathbb{P}^\infty(A_{\hat{\omega}}),$$

de la ecuación 3.9 obtenemos entonces que

$$\mathbb{E}^N(Z) \rightarrow \mathbb{E}^\infty(Z).$$

La medida $\mathbb{P}^\infty$ define al clásico modelo trinomial con probabilidades de transición constantes, por lo que

$$\mathbb{E}^\infty(Z) = \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{k_u=0}^{n_u} q_u^{k_u} \begin{Bmatrix} n_u \\ k_u \end{Bmatrix} \sum_{k_d=0}^{n_d} q_d^{k_d} \begin{Bmatrix} n_d \\ k_d \end{Bmatrix} \frac{t!}{(t - k_u - k_d)!}$$

es la fórmula de los momentos de sus retornos logarítmicos. En particular, en el modelo binomial se tiene que $q_d = 1 - q_u$, por lo que el momento n -ésimo del retorno logarítmico a tiempo t es

$$\sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} (\log u)^{n_u} (\log d)^{n_d} \sum_{k_u=0}^{n_u} q_u^{k_u} \begin{Bmatrix} n_u \\ k_u \end{Bmatrix} \sum_{k_d=0}^{n_d} (1 - q_u)^{k_d} \begin{Bmatrix} n_d \\ k_d \end{Bmatrix} \frac{t!}{(t - k_u - k_d)!} .$$

3.6. Ajuste de momentos

Parte de la importancia de los modelos financieros para los practicantes yace en entender mejor los fenómenos financieros y ajustar mejor los datos empíricos. En esta sección muestro como ajustar a datos empíricos, y espero que el resultado final arroje algo de luz sobre una posible explicación para conocidas desviaciones de la normalidad, basada en características del mundo real tales como la finitud de los activos y las limitaciones a las ventas en corto.

Dados los primeros momentos de una distribución, quisiéramos encontrar parámetros $\log u, \log d, N_u(0), N_d(0), N$ y t tales que los momentos de $\log(p(t)/p(0))$ ajusten a los valores dados.

Como el marco tiene 6 parámetros, sospecho que sería posible ajustar los primeros 6 momentos, pero no encontré una forma analítica de hacer eso. En vez de eso, emplearé un límite, tomando $t, N \rightarrow \infty$ de una forma particular y mostraré un procedimiento para ajustar los primeros 4 momentos.

Asumimos dados los primeros 4 momentos muestrales de los retornos logarítmicos: m_n para $1 \leq n \leq 4$. Sean

$$\begin{aligned} v_1(x) &:= 1 + \sum_{k=1}^4 \frac{m_k}{k!} x^k , \\ u_1(x) &:= \log v_1(x) \quad \text{y} \\ \kappa_n &:= u_1^{(n)}(0) . \end{aligned}$$

Sea $q(x)$ el polinomio

$$q(x) := \det \left(\begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \kappa_2 & \kappa_3 \\ \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix} \right) ,$$

y sean r_1 y r_2 sus raíces. Sean

$$\begin{aligned} V &:= \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 1 & r_2 \end{pmatrix} , \\ D &:= \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \end{aligned}$$

$$\lambda := D^{-1}(V^T)^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Bajo las siguientes condiciones, podemos aproximar los momentos muestrales dados:

- $r_1, r_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $r_1 \neq r_2$ y
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Asumiendo que estas condiciones valen, mostraré como aproximar los momentos dados. Asumimos s.p.d.g. que $r_1 < r_2$.

Digamos que queremos aproximar los primeros 4 momentos con un error menor que un $\varepsilon > 0$ dado.

Procedimiento 3.1. 1. Fijar $C \gg 0$.

2. Fijar $N_d(0) = \lfloor \lambda_1 C \rfloor$, $N_u(0) = \lfloor \lambda_2 C \rfloor$, $d = \exp r_1$ y $u = \exp r_2$.

3. Calcular los primeros 4 momentos usando la expresión

$$\sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} r_1^{n_d} r_2^{n_u} \sum_{k_u=0}^{n_u} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \begin{Bmatrix} n_u \\ k_u \end{Bmatrix} \sum_{k_d=0}^{n_d} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} \begin{Bmatrix} n_d \\ k_d \end{Bmatrix} C^{-(k_u + k_d)}.$$

Si los momentos calculados no aproximan a los momentos muestrales con un error menor que ε , volver al paso 1 y tomar un valor de C más grande.

4. Fijar $N \geq N_u(0) + N_d(0)$.

5. Fijar $t = \lfloor -N \log(1 - C^{-1}) \rfloor$.

6. Calcular los primeros 4 momentos usando la ecuación (3.7). Si los momentos calculados no aproximan a los momentos muestrales con un error menor que ε , volver al paso 4 y tomar un valor de N más grande.

Para probar la correctitud de este procedimiento, primero observar que manteniendo C fijo, $\mathbb{E}(\log(p(t)/p(0))^n)$ converge a

$$\sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} r_1^{n_d} r_2^{n_u} \sum_{k_u=0}^{n_u} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \begin{Bmatrix} n_u \\ k_u \end{Bmatrix} \sum_{k_d=0}^{n_d} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} \begin{Bmatrix} n_d \\ k_d \end{Bmatrix} C^{-(k_u + k_d)}$$

cuando $N \rightarrow \infty$. A su vez, esta última expresión converge a

$$\sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + n_2 = n}} \frac{n!}{n_1! n_2!} r_1^{n_1} r_2^{n_2} \sum_{k_1=0}^{n_1} \begin{Bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{Bmatrix} \lambda_1^{k_1} \sum_{k_2=0}^{n_2} \begin{Bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} \lambda_2^{k_2}$$

cuando $C \rightarrow \infty$. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con la distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente. Entonces, de acuerdo a la proposición 2.22,

$$\mathbb{E}(X_h^{n_h}) = \sum_{k_h=0}^{n_h} \left\{ \begin{matrix} n_h \\ k_h \end{matrix} \right\} \lambda_h^{k_h} .$$

Luego, definiendo

$$Y := r_1 X_1 + r_2 X_2 ,$$

obtenemos

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) \rightarrow \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + n_2 = n}} \frac{n!}{n_1! n_2!} r_1^{n_1} r_2^{n_2} \mathbb{E}(X_1^{n_1}) \mathbb{E}(X_2^{n_2}) = \mathbb{E}(Y^n)$$

cuando $N \rightarrow \infty$.

Para completar la demostración de correctitud del procedimiento 3.1, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.11. *Para $1 \leq n \leq 4$,*

$$\mathbb{E}(Y^n) = m_n .$$

Demostración. Usando las propiedades de la sección 2.3.3 y la ecuación (2.2), tenemos que la función generadora de momentos de Y es

$$\mathbb{E}(\exp(sY)) = \exp(\lambda_1 (\exp(r_1 s) - 1) + \lambda_2 (\exp(r_2 s) - 1)) .$$

Sea

$$\begin{aligned} u_2(s) &:= \lambda_1 (\exp(r_1 s) - 1) + \lambda_2 (\exp(r_2 s) - 1) & \text{y} \\ v_2(s) &:= \exp(u_2(s)) , \end{aligned}$$

entonces queremos probar que

$$v_2^{(n)}(0) = v_1^{(n)}(0)$$

para $1 \leq n \leq 4$.

Por inducción, puede verse que

$$u_i^{(n)}(s) = v_i^{(n)}(s) v_i(s)^{-1} + P_n(v_i'(s), \dots, v_i^{(n-1)}(s), v_i(s)^{-2}, \dots, v_i(s)^{-n}) ,$$

donde P_n es un polinomio en muchas variables, y usando esto, reducimos el problema a probar que

$$u_2^{(n)}(0) = u_1^{(n)}(0) .$$

Del lado izquierdo, observamos que

$$\begin{aligned} u_2^{(n)}(s) &= \lambda_1 r_1^n \exp(r_1 s) + \lambda_2 r_2^n \exp(r_2 s) & \text{y} \\ u_2^{(n)}(0) &= \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n , \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{pmatrix} u_2^{(1)}(0) \\ \vdots \\ u_2^{(4)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^T \\ V^T D^2 \end{pmatrix} D\lambda = \begin{pmatrix} V^T \\ V^T D^2 \end{pmatrix} (V^T)^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} .$$

En las últimas dos filas de esta cuenta, observamos que

$$V^T D^2 (V^T)^{-1} = (V^T D (V^T)^{-1})^2 .$$

Sea

$$C := \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_2 & \kappa_3 \\ \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c_0 \\ 1 & -c_1 \end{pmatrix} , \quad (3.10)$$

entonces

$$q(x) = \det \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \det(x - C) \quad \text{y} \\ \det(x - C) = (x - r_1)(x - r_2) .$$

Es sabido y trivial que

$$VC = DV ,$$

por lo que

$$V^T D (V^T)^{-1} = C^T$$

y

$$\begin{pmatrix} u_2^{(1)}(0) \\ \vdots \\ u_2^{(4)}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ (C^T)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} .$$

Observamos que

$$C^T \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ -c_0 a_0 - c_1 a_1 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto

$$(C^T)^2 \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix}$$

es el vector dado por

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

de la secuencia recursivamente definida por

$$a_{n+2} := -c_0 a_n - c_1 a_{n+1}$$

y empezando en

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} .$$

De la última columna de la ecuación (3.10), obtenemos

$$\begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_2 & \kappa_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c_0 \\ -c_1 \end{pmatrix} ,$$

y de esto concluimos que

$$(C^T)^2 \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_3 \\ \kappa_4 \end{pmatrix} ,$$

lo que completa la demostración. $\square$

3.6.1. Prueba con datos reales

En esta sección, aplicaremos el procedimiento 3.1 a un caso real. Como se señala en [15], se pueden observar colas gruesas en los retornos intradiarios, pues intervalos de tiempo más largos parece más probable que permitan el agregado de variables independientes idénticamente distribuidas, llevando a retornos normalmente distribuidos. Por lo tanto, analizaremos datos de retornos diarios.

Analicé los datos de tres compañías Big Tech y una compañía argentina de e-commerce. Primero, elegí la compañía argentina, porque pensé que sería más vulnerable a las limitaciones a las ventas en corto. En este caso, encontré que las raíces del polinomio q no eran reales y decidí probar suerte con algunas compañías famosas.

Probé el procedimiento con los tickers MELI, GOOG, AAPL y MSFT entre las fechas 2023-09-01 y 2023-10-30. Para cada ticker, calculé los retornos logarítmicos diarios, aquellos obtenidos empezando con el precio de apertura y terminando con el precio de cierre. De eso, calculé los momentos muestrales. En el cuadro 3.1 podemos apreciar la asimetría y el exceso de curtosis de los retornos logarítmicos de los stocks seleccionados. Los valores del cuadro son claramente no nulos, lo que subraya su distribución no normal.

Ticker	Asimetría	Exceso de curtosis
MELI	0.3837	-0.5337
GOOG	-0.1467	-0.3921
AAPL	-0.6373	-0.2251
MSFT	-0.2997	0.8309

Cuadro 3.1: Asimetría y exceso de curtosis de los retornos logarítmicos diarios entre las fechas 2023-09-01 y 2023-10-30

Con los cuatro tickers, continué con el procedimiento. A excepción de MSFT, las raíces del polinomio q resultaron no ser reales. Por lo tanto, le apliqué el procedimiento sólo a MSFT.

Quería obtener un modelo con menos del 1% de error con respecto a los momentos muestrales calculados. Valores de $C = 10^3$ y $N = 10^6$ fueron suficientes

Orden del momento	Muestra	Ajuste	Diferencia relativa
1	$-9,051 \cdot 10^{-4}$	$-9,064 \cdot 10^{-4}$	0,1494 %
2	$1,837 \cdot 10^{-4}$	$1,835 \cdot 10^{-4}$	-0,06762 %
3	$-1,238 \cdot 10^{-6}$	$-1,236 \cdot 10^{-6}$	-0,1564 %
4	$1,316 \cdot 10^{-7}$	$1,312 \cdot 10^{-7}$	-0,3255 %

Cuadro 3.2: Ajuste de parámetros a los retornos logarítmicos diarios de MSFT entre las fechas 2023-09-01 y 2023-10-30

para esto. Los parámetros correspondientes del modelo son $d = 0,986529$, $u = 1,01025$, $N_d(0) = 596$, $N_u(0) = 704$ y $t = 1001$. En el cuadro 3.2 presento los momentos de la muestra, del ajuste y su diferencia relativa.

Continuemos analizando la convergencia. El procedimiento 3.1 consiste de dos partes: los pasos 1 a 3 consisten en hallar un valor de C grande tal que

$$\mu(C, n) := \sum_{\substack{n_u, n_d \in \mathbb{N}_0 \\ n_u + n_d = n}} \frac{n!}{n_u! n_d!} r_1^{n_d} r_2^{n_u} \sum_{k_u=0}^{n_u} \frac{N_u(0)!}{(N_u(0) - k_u)!} \left\{ \begin{matrix} n_u \\ k_u \end{matrix} \right\} \sum_{k_d=0}^{n_d} \frac{N_d(0)!}{(N_d(0) - k_d)!} \left\{ \begin{matrix} n_d \\ k_d \end{matrix} \right\} C^{-(k_u + k_d)}$$

difiera poco de m_n , y los pasos 4 a 6 consisten en hallar un valor de N grande tal que $\mathbb{E}(\log(p(t)/p(0))^n)$ difiere poco de $\mu(C, n)$ (y correspondientemente de m_n).

Definimos

$$d_1(C) := \max_{1 \leq n \leq 4} \left| \frac{\mu(C, n) - m_n}{m_n} \right|,$$

el máximo de las diferencias relativas entre $\mu(C, n)$ y m_n . Tomando diferentes valores de C y calculando $d_1(C)$ para los datos de MSFT, obtenemos el gráfico de la figura 3.1.

Los datos parecen ajustarse al modelo

$$\log(d_1(C)) \sim -1,044 \log(C) + 1,774$$

con $R^2 = 0,952$.

Fijando $C = 10^3$, definimos

$$d_2(N) := \max_{1 \leq n \leq 4} \left| \frac{\mathbb{E}(\log(p(t)/p(0))^n) - \mu(C, n)}{\mu(C, n)} \right|,$$

el máximo de las diferencias relativas entre $\mathbb{E}(\log(p(t)/p(0))^n)$ y $\mu(C, n)$. Haciendo el mismo gráfico para N y $d_2(N)$, obtenemos la figura 3.2.

Los datos parecen ajustarse al modelo

$$\log(d_2(N)) \sim -0,9946 \log(N) + 6,594$$

con $R^2 = 0,9336$.

El código usado en esta sección puede hallarse en la sección A.1.

3.7. Modelo multigrupos

En esta sección, presentamos una generalización del marco. Supongamos que hay varios grupos de osos y toros, g grupos en total, de manera

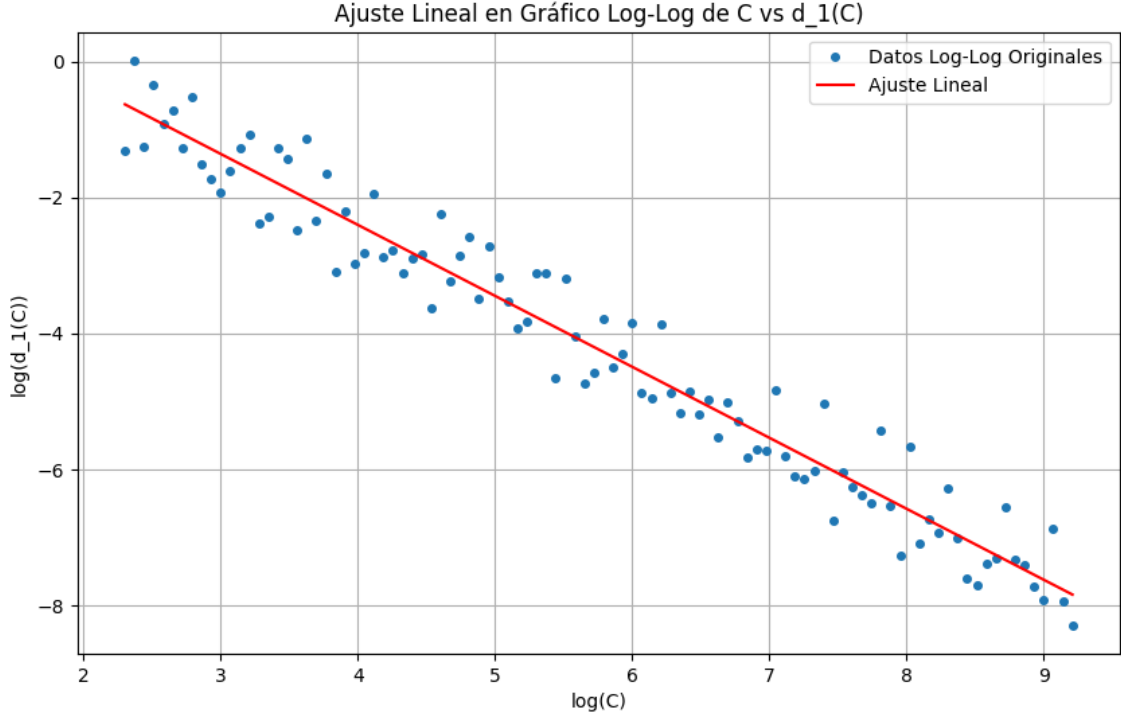


Figura 3.1: $\log(d_1(C)) \sim -1,044 \log(C) + 1,774$

tal que dentro de cada grupo, cada uno de sus miembros tiene la misma cantidad de dinero y la misma cantidad de acciones. De esta forma, se tienen cantidades iniciales de inversores $N_1(0), N_2(0), \dots, N_g(0) \in \mathbb{N}$ de cada grupo, y al elegir un inversor del grupo i -ésimo, el precio se multiplica por un número positivo f_i , y dicho inversor deja el grupo para convertirse en un inversor inactivo.

Los coeficientes $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_g$ pueden representar que los inversores del grupo 1 son los osos con mayor cantidad de acciones (por lo que al invertir ellos el precio cae más), mientras que los inversores del grupo g son los toros con mayor cantidad de dinero (por lo que al invertir ellos el precio sube más). Un modelo sin osos también puede ser representado: el grupo 1 serían los toros con menor cantidad de dinero, por lo que al invertir ellos el precio sube menos. Análogamente, un modelo sin toros puede ser representado.

En este modelo, la fórmula para los momentos del retorno logarítmico a tiempo t es

$$\mathbb{E} \left(\log \left(\frac{p(t)}{p(0)} \right)^n \right) = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_g \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + \dots + n_g = n}} \frac{n!}{\prod_h n_h!} \prod_{h=1}^g (\log f_h)^{n_h} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{N_1(0)!}{(N_1(0) - k_1)!} \left\{ \begin{matrix} n_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\} \dots$$

$$\sum_{k_g=0}^{n_g} \frac{N_g(0)!}{(N_g(0) - k_g)!} \left\{ \begin{matrix} n_g \\ k_g \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{k_1 + \dots + k_g} (-1)^j \binom{k_1 + \dots + k_g}{j} \left(1 - \frac{j}{N} \right)^t.$$

(3.11)

La demostración es análoga a la de la sección 3.4.

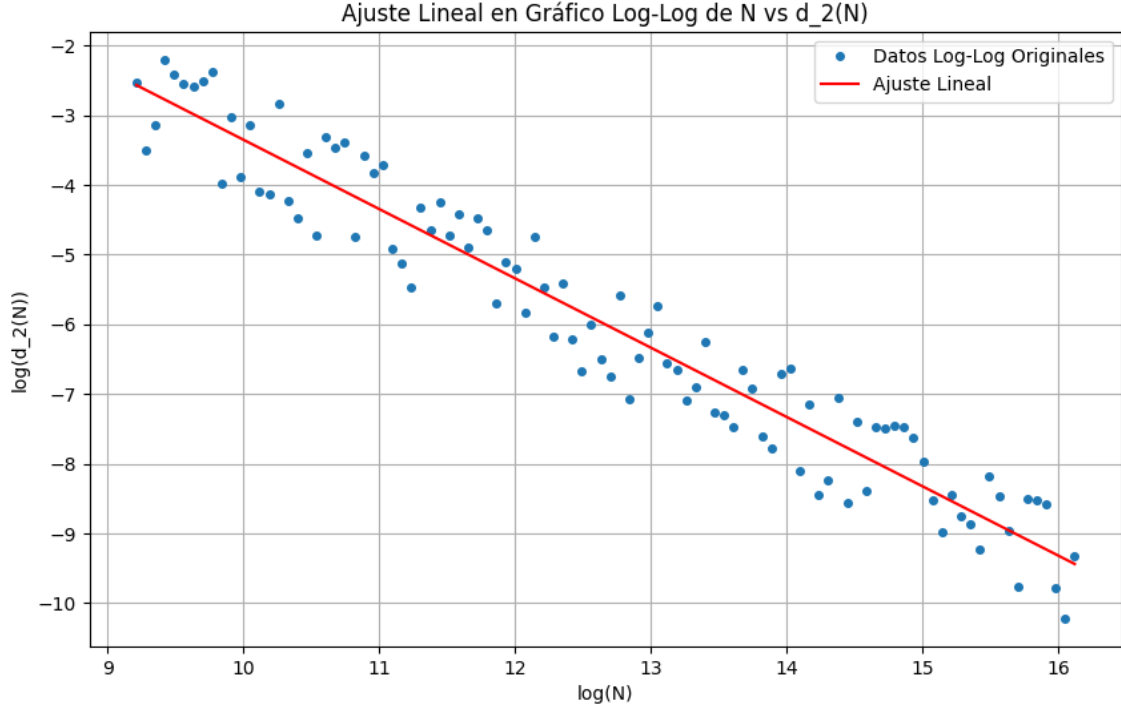


Figura 3.2: $\log(d_2(N)) \sim -0,9946 \log(N) + 6,594$

3.7.1. Ajuste de momentos

En esta sección, generalizamos el procedimiento descrito en la sección 3.6.

Asumimos dados los primeros $2g$ momentos muestrales de los retornos logarítmicos: m_n para $1 \leq n \leq 2g$. Sean

$$\begin{aligned} v_1(x) &:= 1 + \sum_{k=1}^{2g} \frac{m_k}{k!} x^k, \\ u_1(x) &:= \log v_1(x) \quad \text{y} \\ \kappa_n &:= u_1^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Sea $q(x)$ el polinomio

$$q(x) := \det \left(\begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \cdots & \kappa_g \\ \kappa_2 & \kappa_3 & \cdots & \kappa_{g+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_g & \kappa_{g+1} & \cdots & \kappa_{2g-1} \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \kappa_2 & \kappa_3 & \cdots & \kappa_{g+1} \\ \kappa_3 & \kappa_4 & \cdots & \kappa_{g+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \kappa_{g+1} & \kappa_{g+2} & \cdots & \kappa_{2g} \end{pmatrix} \right),$$

y sean $\{r_h\}_{h=1}^g$ sus raíces. Sean

$$\begin{aligned} V &:= \begin{pmatrix} 1 & r_1 & \cdots & r_1^{g-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r_g & \cdots & r_g^{g-1} \end{pmatrix}, \\ D &:= \begin{pmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_g \end{pmatrix} \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\lambda := D^{-1}(V^T)^{-1} \begin{pmatrix} \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_g \end{pmatrix}.$$

Bajo las siguientes condiciones, podemos aproximar los momentos muestrales dados:

- $r_h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para $1 \leq h \leq g$,
- $r_i \neq r_j$ para $i \neq j$ y
- $\lambda_h > 0$ para $1 \leq h \leq g$.

Asumiendo que estas condiciones valen, los momentos dados pueden ser aproximados mediante el siguiente procedimiento.

Asumimos s.p.d.g. que $r_1 < \dots < r_g$.

Digamos que queremos aproximar los primeros $2g$ momentos con un error menor que un $\varepsilon > 0$ dado.

Procedimiento 3.2. 1. Fijar $C \gg 0$.

2. Fijar $N_h(0) = \lfloor \lambda_h C \rfloor$ y $f_h = \exp r_h$.

3. Calcular los primeros $2g$ momentos usando la expresión

$$\sum_{\substack{n_1, \dots, n_g \in \mathbb{N}_0 \\ n_1 + \dots + n_g = n}} \frac{n!}{\prod_h n_h!} \prod_{h=1}^g r_h^{n_h} \sum_{k_1=0}^{n_1} \frac{N_1(0)!}{(N_1(0) - k_1)!} \left\{ \begin{matrix} n_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\} \dots \sum_{k_g=0}^{n_g} \frac{N_g(0)!}{(N_g(0) - k_g)!} \left\{ \begin{matrix} n_g \\ k_g \end{matrix} \right\} C^{-\sum_h k_h}.$$

Si los momentos calculados no aproximan a los momentos muestrales con un error menor que ε , volver al paso 1 y tomar un valor de C más grande.

4. Fijar $N \geq \sum_{h=1}^g N_h(0)$.

5. Fijar $t = \lfloor -N \log(1 - C^{-1}) \rfloor$.

6. Calcular los primeros $2g$ momentos usando la ecuación (3.11). Si los momentos calculados no aproximan a los momentos muestrales con un error menor que ε , volver al paso 4 y tomar un valor de N más grande.

La demostración de correctitud de este procedimiento es análoga a la de la sección 3.6.

3.8. Conclusiones

En este trabajo se desarrolló un modelo similar al clásico modelo binomial, pero sin la posibilidad de tomar posiciones en corto. Pienso que esto es relevante porque hay muchos mercados financieros donde las ventas en corto están restringidas de una forma u otra.

Se describió al modelo como una representación de un escenario real. En tal escenario hay dos grupos de inversores, los toros y los osos. Los toros compran acciones,

mientras que los osos las venden. Mediando las transacciones entre los grupos, hay un hacedor de mercado que fija los precios.

Se proveyó una formalización: se construyó un espacio de probabilidad que permite representar los eventos y la información del modelo.

Se probó una fórmula que permite calcular todos los momentos de los retornos logarítmicos. También se dedujo una fórmula para el caso con infinitos inversores. Una aplicación importante de esta última fórmula es que nos permitió calcular los momentos del clásico modelo binomial.

Como una aplicación del modelo, se presentó un procedimiento para elegir los parámetros, para aproximar los primeros cuatro momentos muestrales con precisión arbitraria. Esto es relevante porque los datos muestran que los retornos se desvían de la normalidad[13, 14, 35, 40, 43]. Más evidencia de eso fue provista en la sección siguiente, donde también se aplicó el procedimiento a datos financieros reales y se descubrió un patrón de convergencia claro. Este patrón, sin embargo, todavía requiere una explicación.

Se generalizó el modelo para el caso en el que hay varios grupos de toros y/o varios grupos de osos. También se generalizó el algoritmo dado en la sección 3.6, lo que permite aproximar $2g$ momentos muestrales. Estas generalizaciones proveen un marco para la integración de fenómenos más complejos.

Capítulo 4

Viabilidad y completitud del mercado para modelos multinomiales

4.1. Introducción

El punto de partida en el área de matemática financiera suele ser el modelo binomial [16, 44, 51]. En dicho modelo, el tiempo es discreto y, en cada instante de tiempo, el futuro se bifurca: o bien el precio de la acción sube al multiplicarse por un factor $u > 1$, o bien el precio de la acción baja al multiplicarse por un factor $d < 1$. Este modelo se muestra en la figura 4.1.

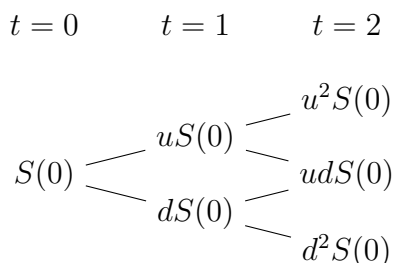


Figura 4.1: Modelo binomial con 3 fechas de trading

Otra variante es el árbol trinomial [5, 12, 27, 29, 47, 48]. En este modelo, el tiempo sigue siendo discreto pero, en cada instante de tiempo, el futuro se ramifica en tres posibilidades: las dos del modelo binomial, y una tercera que consiste en que el precio se mantenga constante. Una versión de este modelo con $ud = 1$ se muestra en la figura 4.2.

La generalización natural de estos ejemplos es un modelo a tiempo discreto en el cual, en cada instante de tiempo, el futuro se ramifica en b posibilidades: se tienen coeficientes $0 < f_1 < \dots < f_b$, y el precio puede multiplicarse por cualquiera de estos factores f_i . En el presente trabajo se estudian las condiciones de viabilidad y completitud del mercado, para tales modelos.

En la sección 4.2, se da una interpretación geométrica del conjunto de medidas de martingala equivalentes para el modelo de un solo período y se desarrollan resultados teóricos que caracterizan tales medidas como combinaciones convexas de un número finito de medidas de martingala. Aún más importante, se provee un algoritmo para

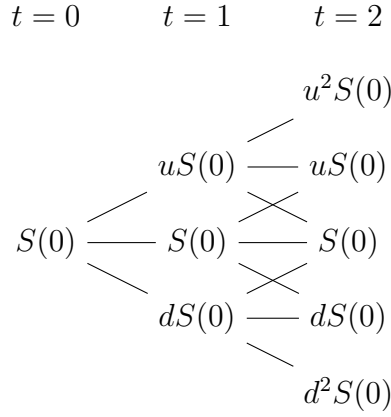


Figura 4.2: Modelo del árbol trinomial con 3 fechas de trading y $ud = 1$

calcular estos generadores, y otro para completar mercados libres de arbitraje que agota las posibles formas de hacerlo.

En la sección 4.3, se muestra como aplicar los resultados teóricos desarrollados en la sección 4.2 a casos concretos.

En la sección 4.4, se utilizan los resultados de la sección 4.2 para probar algunos resultados de los modelos multinomiales. Se analiza un mercado con dos activos y se encuentra una condición necesaria y suficiente para que sea libre de arbitraje. También se demuestra que el mercado es completo cuando $b = 2$. En el caso $b = 3$, agregamos un activo y caracterizamos todos los activos que completan el mercado. Aplicamos este último caso al análisis de una versión a tiempo discreto del modelo Korn-Kreer-Lenssen [33], y doy un ejemplo de mercados discretos completos que convergen a un mercado con oportunidades de arbitraje.

4.2. Teoría

Consideremos un modelo de mercado con fechas de trading $t = 0, 1$, donde el espacio muestral es $\Omega = \{1, 2, \dots, b\}$ con $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ para todo $1 \leq \omega \leq b$, activos financieros $\hat{S}_0, \dots, \hat{S}_n$, y $\hat{S}_0(\omega, t) > 0$ para todo $(\omega, t) \in \Omega \times \{0, 1\}$.

Completar un mercado consiste en agregar activos $S_{n+1}, \dots, S_m$ tales que el nuevo mercado es completo. Debido a la proposición 2.32, esto requiere que el mercado original sea libre de arbitraje. Considerando la proposición 2.32 y el corolario 2.33, el siguiente procedimiento para completar un mercado se vuelve claro:

Procedimiento 4.1. 1. Fijar una medida de martingala equivalente (MME) p .

2. Añadir filas $(S_k(\omega, 1))_{k, \omega}$ para $k > n$ a la matriz D^Z hasta que su rango fila sea b .

3. Definir

$$S_k(0) := \langle (S_k(\omega, 1))_{\omega}, p \rangle$$

para todas las nuevas filas de D^Z .

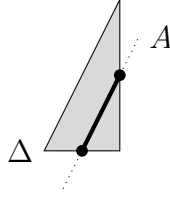


Figura 4.3: $\Delta \cap A$ es la cápsula convexa de $(\partial\Delta) \cap A$

En consecuencia, las formas en las que el mercado puede ser completado están restringidas por el conjunto $\mathcal{M}^e(S)$. Teniendo en mente la observación 2.12, se tiene que

$$\mathcal{M}^e(S) = \mathcal{M}^a(S) \cap \mathbb{R}_{>0}^b, \quad (4.1)$$

por lo que la caracterización del conjunto $\mathcal{M}^a(S)$ lleva automáticamente a la caracterización del conjunto $\mathcal{M}^e(S)$. La siguiente subsección es sobre la caracterización de $\mathcal{M}^a(S)$.

4.2.1. Clasificación de medidas de martingala

Observar que una medida de martingala (MM) p es una solución de

$$\begin{pmatrix} S_1(1,1) & \cdots & S_1(b,1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_n(1,1) & \cdots & S_n(b,1) \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ \vdots \\ S_n(0) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

en el $b - 1$ -simplex estándar $\Delta^{b-1} \subset \mathbb{R}^b$. Llamaremos $A(S)$ a la variedad lineal definida por las soluciones de este sistema (posiblemente $A(S) = \emptyset$). En consecuencia,

$$\mathcal{M}^a(S) = A(S) \cap \Delta^{b-1}. \quad (4.3)$$

Para caracterizar esta intersección, desarrollaremos una serie de resultados.

Proposición 4.1. *Sea Δ un simplex y A una variedad lineal, ambos en $\mathbb{R}^b$. Si $(\partial\Delta) \cap A \neq \emptyset$, entonces $\Delta \cap A$ es la cápsula convexa de $(\partial\Delta) \cap A$.*

Esta proposición es ilustrada por la figura 4.3: Δ es el triángulo gris y A es la línea punteada. Los puntos negros representan a $(\partial\Delta) \cap A$, y la línea gruesa entre ellos (incluyéndolos) es su cápsula convexa, que coincide con $\Delta \cap A$.

Demostración de la proposición 4.1. Sea $B := \text{aff}(\Delta)$. Como $\Delta \subset B \Rightarrow (\partial\Delta) \subset B$,

$$\begin{aligned} \Delta \cap A &= \Delta \cap (A \cap B) \quad \text{y} \\ \emptyset \neq (\partial\Delta) \cap A &= (\partial\Delta) \cap (A \cap B), \end{aligned}$$

por lo que podemos asumir s.p.d.g. que $A \subset B$ y que estamos trabajando directamente en B (por lo que $\partial\Delta$ es simplemente la frontera de Δ).

Como Δ y A son convexos, entonces $\Delta \cap A$ es convexo. Como $(\partial\Delta) \cap A \subset \Delta \cap A$, la cápsula convexa de $(\partial\Delta) \cap A$ está incluida en $\Delta \cap A$.

Sea $x \in \Delta \cap A$, queremos ver que se encuentra en la cápsula convexa de $(\partial\Delta) \cap A$. Sea $y \in (\partial\Delta) \cap A$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, sea

$$v_\lambda := x + \lambda(x - y).$$

Los v_λ son combinaciones afines de x e y , y como $x, y \in A$, se tiene entonces que $v_\lambda \in A$ para todo λ . Además, como Δ es acotado, existe $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande que cumple que $v_{\lambda_0} \notin \Delta$. Por otro lado, $v_0 = x \in \Delta$, por lo que existe

$$\lambda_1 := \sup\{\lambda \in [0, \lambda_0] : v_\lambda \in \Delta\}.$$

Está claro que $v_{\lambda_1} \in \overline{\Delta}$, porque si no habría una cota superior estrictamente menor que λ_1 . Como Δ es cerrado, tenemos entonces que $v_{\lambda_1} \in \Delta \Rightarrow \lambda_1 < \lambda_0$ y $v_{\lambda_1} \in \overline{B \setminus \Delta}$, pues si no λ_1 no sería cota superior.

Luego, $v_{\lambda_1} \in \partial\Delta \Rightarrow v_{\lambda_1} \in (\partial\Delta) \cap A$ y

$$\begin{aligned} v_{\lambda_1} &= x + \lambda_1(x - y) \\ \Rightarrow x &= \frac{1}{1 + \lambda_1}v_{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}y. \end{aligned}$$

Es decir, x es una combinación convexa entre y y v_{λ_1} , y $v_{\lambda_1}, y \in (\partial\Delta) \cap A$. □

$\partial\Delta$ es una unión de símplexes de menor dimensión, por lo que para encontrar los generadores de $\Delta^{b-1} \cap A(S)$ se puede proceder de la siguiente forma:

- Procedimiento 4.2.**
1. *Empezamos viendo si $e_i \in A(S)$ para todo $1 \leq i \leq b$: los que pertenecen a $A(S)$, los ponemos en una lista de generadores; los que no pertenecen, los ponemos en una lista de 0-símplexes.*
 2. *Formamos todos los posibles 1-símplexes cuyos bordes estén todos en la lista de 0-símplexes. Para cada una de estos 1-símplexes, vemos si se intersecan con $A(S)$: las intersecciones así conseguidas las agregamos a la lista de generadores y, con los 1-símplexes que no se intersecan con $A(S)$ formamos una lista de 1-símplexes.*
 3. *Formamos todos los posibles 2-símplexes cuyos bordes estén todos en la lista de 1-símplexes. Para cada uno de estos 2-símplexes, vemos si se intersecan con $A(S)$: las intersecciones así conseguidas las agregamos a la lista de generadores y, con los 2-símplexes que no se intersecan con $A(S)$ formamos una lista de 2-símplexes, etc.*

Como Δ^{b-1} no contiene b -símplexes cuyos vértices pertenezcan a $\{e_i\}_{i=1}^b$, el proceso termina a lo sumo en el paso b . Una implementación de este algoritmo en Python puede encontrarse en la sección A.2.

Ejemplo 4.1. *Para ilustrar el procedimiento, se lo aplicaremos a la figura 4.4, un caso en el que $b = 3$. Tal figura representa el plano que contiene a Δ^2 ($\{x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$). En este caso particular, aplicando el algoritmo se tienen los siguientes pasos:*

1. *Vemos que $e_i \notin A(S)$ para $i = 1, 2, 3$. Ahora, la lista de generadores es $\{\}$ y la lista de 0-símplexes es $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}\}$.*

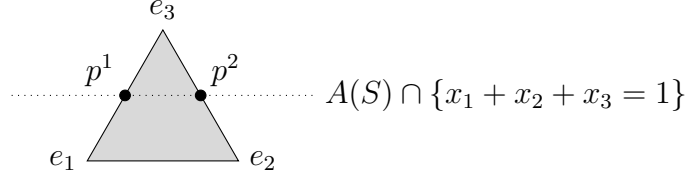


Figura 4.4: Dibujo en el plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. El algoritmo nos permite encontrar los generadores p^1 y p^2 : su cápsula convexa nos da $\Delta^2 \cap A(S)$.

2. *Construimos todos los posibles 1-símplices cuyos bordes estén todos en la lista de 0-símplices, es decir, las cápsulas convexas de $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$ y $\{e_2, e_3\}$. $\text{conv}(\{e_1, e_2\}) \cap A(S) = \{\}$, $\text{conv}(\{e_1, e_3\}) \cap A(S) = \{p^1\}$ y $\text{conv}(\{e_2, e_3\}) \cap A(S) = \{p^2\}$. Ahora, la lista de generadores es $\{p^1, p^2\}$ y la lista de 1-símplices es $\{\text{conv}(\{e_1, e_2\})\}$.*
3. *Construimos todos los posibles 2-símplices cuyos bordes estén todos en la lista de 1-símplices: no hay ninguno. Por lo tanto, el algoritmo termina aquí y la lista de generadores es $\{p^1, p^2\}$.*

Este proceso puede terminar incluso antes, con la ayuda de los siguientes resultados.

Proposición 4.2. *Sea Δ un símplex y A una variedad lineal, ambos en $\mathbb{R}^b$, y sea B la variedad lineal generada por Δ . Si $\Delta \cap A \neq \emptyset (\Rightarrow B \cap A \neq \emptyset)$ y $\dim(A \cap B) \geq 1$, entonces $(\partial\Delta) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x \in \Delta \cap A$. Sea $y \in A \cap B$ tal que $y \neq x$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, sea

$$v_\lambda := x + \lambda(y - x).$$

Se tiene entonces que $v_\lambda \in A \cap B$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Además, como Δ es acotado, existe $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande que cumple que $v_{\lambda_0} \notin \Delta$. Como $v_0 = x \in \Delta$, existe un $\lambda_1 \in [0, \lambda_0)$ tal que $v_{\lambda_1} \in \partial\Delta$. Luego, $v_{\lambda_1} \in (\partial\Delta) \cap A$. $\square$

Corolario 4.3. *Sea Δ un símplex y A una variedad lineal, ambos en $\mathbb{R}^b$. Si $\Delta \cap A \neq \emptyset$ y $\dim \Delta \geq b + 1 - \dim A$, entonces $(\partial\Delta) \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea B la variedad lineal generada por Δ , y sea $x \in \Delta \cap A$. Se tiene entonces que $A - x$ y $B - x$ son subespacios lineales de $\mathbb{R}^b$ y, por el teorema de la dimensión

$$\dim((A - x) + (B - x)) + \dim((A - x) \cap (B - x)) = \dim(A - x) + \dim(B - x).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \dim((A - x) + (B - x)) + \dim((A - x) \cap (B - x)) &= \dim A + \dim \Delta \geq b + 1 \\ \Rightarrow \dim((A - x) \cap (B - x)) &\geq b + 1 - \dim((A - x) + (B - x)) \geq 1 \\ &\Rightarrow \dim(A \cap B) \geq 1. \end{aligned}$$

$\square$

De aquí se deduce que es innecesario ver si se intersecan con $A(S)$ las cápsulas convexas de $b + 2 - \dim A(S)$ o más vértices.

Observación 4.1. *Observar que, al considerar un k -simplex Δ en el paso $k + 1$, de existir una solución en dicho k -simplex, tiene que ser única. En efecto, de otra manera $\dim(A(S) \cap B) \geq 1$ lo que implica que $(\partial\Delta) \cap A(S) \neq \emptyset$, por lo que habría una solución en alguno de los $k - 1$ -símplices que forman $\partial\Delta$. Pero según el algoritmo, estos símplices fueron símplices considerados en el paso k que no tenían soluciones.*

Proposición 4.4. *Sea g uno de los generadores obtenidos mediante el algoritmo mencionado. Se tiene entonces que g no está en la clausura convexa de $(A(S) \cap \Delta^{b-1}) \setminus \{g\}$.*

Demostración. Tenemos que

$$g = \sum_{j \in J} \alpha_j e_j$$

con $\alpha_j > 0$ y $\sum_{j \in J} \alpha_j = 1$, para algún $J \subset \{1, \dots, b\}$. Consideremos el conjunto

$$C := \{x \in \Delta^{b-1} : x_j > 0 \text{ para algún } j \notin J\}.$$

Es fácil ver por definición que este conjunto es convexo.

Ahora, supongamos que $x \in (A(S) \cap \Delta^{b-1}) \setminus C$. Se tiene entonces que $x_j = 0$ para todo $j \notin J$. Es decir, x es combinación convexa de los e_j con $j \in J$, y también $x \in A(S)$. Por la observación 4.1, sabemos que el único punto que cumple ambas propiedades es g , por lo que $x = g$. De esta manera, obtenemos que $(A(S) \cap \Delta^{b-1}) \setminus \{g\} \subset C$ y, como C es convexo, C contiene a la clausura convexa de $(A(S) \cap \Delta^{b-1}) \setminus \{g\}$. Como $g \notin C$, g no está en la clausura convexa de $(A \cap \Delta^{b-1}) \setminus \{g\}$. $\square$

Concluimos así, que los generadores obtenidos por este algoritmo son necesarios y suficientes.

Ejemplo 4.2. *Los generadores obtenidos por el algoritmo no tienen porque ser afínmente independientes. Consideremos el sistema*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los generadores en este caso resultan ser

$$\begin{aligned} & (1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \\ & (0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0), \\ & (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \quad 1/2), \\ & (1/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0) \quad y \\ & (0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0 \quad 1/3). \end{aligned}$$

Estos generadores no son afínmente independientes, pues el promedio de los primeros tres es igual al promedio de los últimos dos. Con el algoritmo señalado se puede chequear fácilmente que ninguno de estos generadores es combinación convexa de los otros.

Una vez que se tienen los generadores $p^1, p^2, \dots, p^k$, las MM's son combinaciones convexas de ellos, es decir, de la forma $\alpha_1 p^1 + \dots + \alpha_k p^k$, o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ p_b^1 & \cdots & p_b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Para que resulten equivalentes, hay que ver que cumplen $\alpha_1 p_i^1 + \dots + \alpha_k p_i^k \neq 0$ para todo i , es decir, que $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \notin \langle (p_i^1, \dots, p_i^k) \rangle^\perp$ para todo i . Aprovechando que los $p_i^j \geq 0$, la condición sobre los α_j se vuelve evidente: $\alpha_j > 0$ para algún j tal que $p_i^j \neq 0$.

Cuando se quieren agregar activos para completar el mercado, digamos $S_{n+1}, \dots, S_m$, para mantenerlo libre de arbitraje se tiene la restricción

$$\begin{pmatrix} S_{n+1}(1, 1) & \cdots & S_{n+1}(b, 1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_m(1, 1) & \cdots & S_m(b, 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^1 & \cdots & p_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ p_b^1 & \cdots & p_b^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n+1}(0) \\ \vdots \\ S_m(0) \end{pmatrix},$$

donde los valores de $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tienen las restricciones mencionadas anteriormente. Una vez elegidos los valores de $S_l(\omega, 1)$ para completar el mercado, el rango de valores para $(S_{n+1}(0), \dots, S_m(0))$ está dado por

$$\begin{pmatrix} S_{n+1}(0) \\ \vdots \\ S_m(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle S_{n+1}(1), p^1 \rangle & \cdots & \langle S_{n+1}(1), p^k \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle S_m(1), p^1 \rangle & \cdots & \langle S_m(1), p^k \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix},$$

donde los valores de $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ tienen las restricciones mencionadas anteriormente.

4.2.2. Más fechas de trading

Como vimos en la sección 2.4.2, los mercados discretos pueden descomponerse en componentes de un solo período con $\mathcal{F}_0$ triviales. Ahora disponemos de un procedimiento para caracterizar los conjuntos $\mathcal{M}^e(S_{(t,A)})$ correspondientes a dichas componentes.

Si queremos estudiar la viabilidad y completitud de un mercado discreto con $\mathcal{F}_0$ trivial, podemos entonces empezar caracterizando los conjuntos $\mathcal{M}^e(S_{(t,A)})$ de cada una de sus componentes.

Gracias al corolario 2.30, para chequear que el mercado total S es libre de arbitraje, podemos simplemente chequear que cada una de sus componentes es libre de arbitraje, es decir, que $\mathcal{M}^e(S_{(t,A)}) \neq \emptyset$ para cada (t, A) .

Una vez que sabemos que el mercado total es libre de arbitraje, podemos chequear que sea completo. Gracias al corolario 2.31, podemos chequear esto viendo que cada una de las componentes sea completa, es decir, que $|\mathcal{M}^e(S_{(t,A)})| = 1$ para cada (t, A) .

Si el mercado total es libre de arbitraje pero no completo, podemos completarlo agregándole activos. Cada activo S^j que agregamos al mercado total es un activo $S_{(t,A)}^j$ que se agrega a cada componente (t, A) . Recíprocamente, si podemos agregar un activo R en la componente (t, A) sin afectar su viabilidad, podemos agregar un activo S^j en el mercado total, de manera tal que $S_{(t,A)}^j = R$.

Proposición 4.5. Sea $I = \{0, \dots, T\}$ y $S = (S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in I}$ un mercado discreto libre de arbitraje con $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Sea $t \in I \setminus \{T\}$ y $A \in \mathcal{P}_t$. Sea $R : \mathcal{P}_{t+1}^A \times \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ un proceso estocástico tal que $R(\cdot, 0)$ es constante y $(S_{(t,A)}, R)$, el mercado $S_{(t,A)}$ al que le agregamos R , es libre de arbitraje. Se tiene entonces que existe $S^{d+1} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$, tal que $\bar{S} = (S_t^1, \dots, S_t^{d+1})_{t \in I}$ es libre de arbitraje y $S_{(t,A)}^{d+1} = R$.

Demostración. Sea $S^{d+1} : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$S^{d+1}(\omega, s) = \begin{cases} R(A_{t+1}^{\{\omega\}}, s - t) & \text{si } s \in \{t, t+1\} \text{ y } \omega \in A \\ R(A_{t+1}^{\{\omega\}}, 1) & \text{si } s > t+1 \text{ y } \omega \in A \\ R(\cdot, 0) & \text{si no} \end{cases}$$

donde $\omega \in A_{t+1}^{\{\omega\}} \in \mathcal{P}_{t+1}^A$.

Veamos que S^{d+1} es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. Sea $s \in I \setminus \{T\}$, $B \in \mathcal{P}_s$ y $\omega, \eta \in B$. Si $s \geq t+1$, se tiene que $\omega, \eta \in B \subset A_{t+1}^B \in \mathcal{P}_{t+1}$, por lo $A_{t+1}^{\{\omega\}} = A_{t+1}^B = A_{t+1}^{\{\eta\}}$ y $S^{d+1}(\omega, s) = S^{d+1}(\eta, s)$. Si $s \leq t$, se tiene que $S^{d+1}(\omega, s) = R(\cdot, 0) = S^{d+1}(\eta, s)$. En todos los casos vemos que $S^{d+1}(\cdot, s)$ es constante en B , lo que prueba que S^{d+1} es adaptado a la filtración.

Veamos que $S_{(t,A)}^{d+1} = R$. Sea $B \in \mathcal{P}_{t+1}^A$ y sea $\omega \in B$, se tiene entonces que

$$S_{(t,A)}^{d+1}(B, s) = S^{d+1}(\omega, t+s) = R(A_{t+1}^{\{\omega\}}, s).$$

Pero $\omega \in B \in \mathcal{P}_{t+1}^A$, por lo que $B = A_{t+1}^{\{\omega\}}$. Luego, $S_{(t,A)}^{d+1} = R$.

Veamos que $\bar{S}$ es libre de arbitraje. Para eso, veamos que cada una de sus componentes es libre de arbitraje. Sean $s \in I \setminus \{T\}$ y $B \in \mathcal{P}_s$, observar que $\bar{S}_{(s,B)} = (S_{(s,B)}, S_{(s,B)}^{d+1})$. Si $s = t$ y $B = A$, se tiene que $\bar{S}_{(s,B)} = (S_{(t,A)}, R)$ que por hipótesis es libre de arbitraje. Si $s \geq t+1$ y $B \subset A$, sean $C \in \mathcal{P}_{s+1}^B$ y $\omega \in C$; se tiene que

$$S_{(s,B)}^{d+1}(C, r) = S^{d+1}(\omega, r+s) = R(A_{t+1}^{\{\omega\}}, 1) = R(A_{t+1}^B, 1).$$

Como $S_{(s,B)}^{d+1}$ es constante, se puede escribir como $S_{(s,B)}^{d+1} = S_{(s,B)}^{d+1} + 0 \cdot S_{(s,B)}$, donde 0 representa la estrategia de trading nula. Por la proposición 2.26, como $S_{(s,B)}$ es libre de arbitraje, $\bar{S}_{(s,B)}$ también lo es. En cualquier otro caso, se tiene que $S_{(s,B)}^{d+1} = R(\cdot, 0)$, por lo que es constante y se aplica el mismo argumento. $\square$

Gracias a este resultado, tenemos un procedimiento para completar el mercado total: completamos cada componente y extendemos al mercado total los activos que agregamos.

4.3. Ejemplos concretos

Ejemplo 4.3. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 & -6 & 75 \\ 99 & -33 & -33 & 291 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 15 \\ 123 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método no se obtiene ningún generador, lo que indica que no hay soluciones del sistema en el símplex. Sin embargo, es inmediato que cada fila por separada tiene soluciones en el símplex, y $(2, -1/3, -1/3, -1/3)$ es una solución en el hiperplano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$.

Ejemplo 4.4. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -15 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & 1 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método se obtiene como único generador el vector $(1, 0, 0, 0)$, lo que indica que la solución del sistema en el símplex es sólo ese vértice. Sin embargo, es inmediato que cada fila por separada tiene más soluciones en el símplex, y $(1, 1, 0, -1)$ es otra solución en el hiperplano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. La única MM es entonces $(1, 0, 0, 0)$, pero no es equivalente.

Ejemplo 4.5. Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método se obtiene como generadores a los vectores $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$, lo que indica que el conjunto solución del sistema en el símplex es la arista que conecta estos vértices. Sin embargo, es inmediato que cada fila por separada tiene más soluciones en el símplex.

Las MM's son las combinaciones convexas de $(1, 0, 0, 0)$ y $(0, 1, 0, 0)$, pero ninguna es equivalente porque en todas esas combinaciones, las componentes tercera y cuarta son nulas.

Ejemplo 4.6. Consideremos el sistema

$$(2 \ 0 \ 0 \ 0) p = 1$$

Aplicando el método se obtiene como generadores a los vectores $(1/2, 1/2, 0, 0)$, $(1/2, 0, 1/2, 0)$ y $(1/2, 0, 0, 1/2)$. Las MM's son las combinaciones convexas de estos vectores, es decir,

$$\alpha_1(1/2, 1/2, 0, 0) + \alpha_2(1/2, 0, 1/2, 0) + (1 - \alpha_1 - \alpha_2)(1/2, 0, 0, 1/2)$$

con $0 \leq \alpha_1$, $0 \leq \alpha_2$ y $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. Para hallar las equivalentes, observamos que

1. De las primeras componentes de cada generador, ninguna se anula, por lo que la primera componente de la combinación no se anula si y sólo si $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ o $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.
2. De las segundas componentes de cada generador, sólo la del primero no se anula, por lo que la segunda componente de la combinación no se anula si y sólo si $\alpha_1 > 0$.
3. De las terceras componentes de cada generador, sólo la del segundo no se anula, por lo que la tercera componente de la combinación no se anula si y sólo si $\alpha_2 > 0$.

4. De las cuartas componentes de cada generador, sólo la del tercero no se anula, por lo que la cuarta componente de la combinación no se anula si y sólo si $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Luego, las medidas de martingala equivalentes son las combinaciones con $0 < \alpha_1$, $0 < \alpha_2$ y $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$.

Para completar el mercado podemos agregar dos activos, extendiendo la matriz a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando las últimas dos filas de esta matriz con la matriz de generadores

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

obtenemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego, el sistema extendido sería

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1/2 \\ \alpha_2/2 \end{pmatrix},$$

con las restricciones $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. Por ejemplo, tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$, obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Usando el algoritmo podemos chequear fácilmente que el único generador es $(1/2, 1/6, 1/6, 1/6)$. En consecuencia, esa es la única MM, y ninguna de sus componentes es nula, por lo que es equivalente. Por lo tanto, este mercado es libre de arbitraje y completo.

4.4. Aplicación

El modelo más simple que podemos considerar es el caso en el que hay sólo un activo $\hat{S}_0$. En ese caso, es inmediato que $A(S) = \mathbb{R}^b \Rightarrow \mathcal{M}^a(S) = \Delta^{b-1}$ y por lo tanto:

- el mercado es libre de arbitraje;
- el mercado es completo si y sólo si $b = 1$.

Asumamos que existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $\widehat{S}_0(\omega, t+1)/\widehat{S}_0(\omega, t) = 1+r$ para cualesquiera ω y t , y agreguemos otro activo $\widehat{S}_1$ con las siguientes características. $\widehat{S}_1(0) > 0$, tenemos un conjunto de coeficientes $0 < f_1 < f_2 < \dots < f_b$ y en cada instante de tiempo t , tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\widehat{S}_1(t+1) = f_h \widehat{S}_1(t)\right) > 0 \quad \forall h \quad \text{y} \quad \sum_{h=1}^b \mathbb{P}\left(\widehat{S}_1(t+1) = f_h \widehat{S}_1(t)\right) = 1.$$

Fijemos la variable t . Por lo visto anteriormente, el mercado es libre de arbitraje si y sólo si $S_1(t)$ se puede escribir como combinación convexa de $\{S_1(\omega, t+1)\}_\omega$ con coeficientes positivos, es decir, si

$$\begin{aligned} \min(\{S_1(\omega, t+1)\}_\omega) < S_1(t) < \max(\{S_1(\omega, t+1)\}_\omega) \\ \Leftrightarrow f_1 < 1+r < f_b. \end{aligned}$$

Además, el mercado es completo si y sólo si es libre de arbitraje y

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ f_1 & \dots & f_b \end{pmatrix}$$

tiene rango fila b , lo cual sólo pasa si $b \leq 2$.

En el caso $b = 3$, necesitamos que el rango fila sea 3, por lo que se puede agregar un activo para completar el mercado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

tiene que tener rango 3. Triangulando esta matriz nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & f_2 - f_1 & f_3 - f_1 \\ 0 & 0 & c_3 - c_1 - \frac{c_2 - c_1}{f_2 - f_1}(f_3 - f_1) \end{pmatrix},$$

por lo que la condición para que el rango fila sea 3 es

$$\begin{aligned} c_3 - c_1 - \frac{c_2 - c_1}{f_2 - f_1}(f_3 - f_1) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow c_1(f_3 - f_2) + c_2(f_1 - f_3) + c_3(f_2 - f_1) &\neq 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Calculemos las MME's.

En el caso $b = 3$, el mercado es libre de arbitraje si $f_1 < 1+r < f_3$; asumiremos estas desigualdades. El sistema queda

$$(f_1 \quad f_2 \quad f_3)p = 1+r.$$

En ese caso, ni $(1, 0, 0)$ ni $(0, 0, 1)$ son soluciones, pero

$$\left(\frac{f_3 - (1+r)}{f_3 - f_1}, 0, \frac{1+r - f_1}{f_3 - f_1} \right)$$

sí lo es.

Si $f_2 = 1+r$, entonces $(0, 1, 0)$ es una solución y todas las soluciones que son

medidas de probabilidad son combinaciones convexas de éstas. Entonces, las MM's se obtienen como

$$\begin{pmatrix} \frac{f_3-(1+r)}{f_3-f_1} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1+r-f_1}{f_3-f_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

De la primera y tercera fila sale que $\alpha_1 > 0$, y de la segunda sale que $\alpha_2 > 0$. Luego, las MME's son

$$\left(p \frac{f_3 - (1+r)}{f_3 - f_1}, 1-p, p \frac{1+r-f_1}{f_3 - f_1} \right)$$

con $0 < p < 1$. Para completar el mercado, se tiene que c_0 , el precio a tiempo t del activo agregado, es una combinación convexa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \frac{1}{1+r} (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \begin{pmatrix} \frac{f_3-(1+r)}{f_3-f_1} \\ 0 \\ \frac{1+r-f_1}{f_3-f_1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \frac{1}{1+r} (c_1 \quad c_2 \quad c_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 \frac{c_1(f_3 - (1+r)) + c_3(1+r-f_1)}{(f_3 - f_1)(1+r)} + \alpha_2 \frac{c_2}{1+r}, \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. Es decir, c_0 se encuentra en el intervalo abierto comprendido entre

$$\frac{c_1(f_3 - (1+r)) + c_3(1+r-f_1)}{(f_3 - f_1)(1+r)}$$

y

$$\frac{c_2}{1+r}.$$

Si $f_2 < 1+r$, entonces $(0, 1, 0)$ tampoco es solución, pero

$$\left(0, \frac{f_3 - (1+r)}{f_3 - f_2}, \frac{1+r-f_2}{f_3 - f_2} \right)$$

sí lo es. No hay soluciones de la forma $(p, 1-p, 0)$, por lo que las MM's se obtienen como

$$\begin{pmatrix} \frac{f_3-(1+r)}{f_3-f_1} & 0 \\ 0 & \frac{f_3-(1+r)}{f_3-f_2} \\ \frac{1+r-f_1}{f_3-f_1} & \frac{1+r-f_2}{f_3-f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

De la primera fila sale que $\alpha_1 > 0$ y de la segunda que $\alpha_2 > 0$. La tercera fila no impone ninguna restricción adicional. Luego, las MME's son

$$\left(p \frac{f_3 - (1+r)}{f_3 - f_1}, (1-p) \frac{f_3 - (1+r)}{f_3 - f_2}, p \frac{1+r-f_1}{f_3 - f_1} + (1-p) \frac{1+r-f_2}{f_3 - f_2} \right),$$

con $0 < p < 1$. Para completar el mercado, se tiene que c_0 es una combinación convexa

$$\alpha_1 \frac{c_1(f_3 - (1+r)) + c_3(1+r-f_1)}{(f_3 - f_1)(1+r)} + \alpha_2 \frac{c_2(f_3 - (1+r)) + c_3(1+r-f_2)}{(f_3 - f_2)(1+r)}$$

donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. Es decir, c_0 se encuentra en el intervalo abierto comprendido entre

$$\frac{c_1(f_3 - (1 + r)) + c_3(1 + r - f_1)}{(f_3 - f_1)(1 + r)}$$

y

$$\frac{c_2(f_3 - (1 + r)) + c_3(1 + r - f_2)}{(f_3 - f_2)(1 + r)}.$$

Si $f_2 > 1 + r$, entonces $(0, 1, 0)$ tampoco es solución, pero

$$\left(\frac{f_2 - (1 + r)}{f_2 - f_1}, \frac{1 + r - f_1}{f_2 - f_1}, 0 \right)$$

sí lo es. No hay soluciones de la forma $(0, p, 1 - p)$, por lo que las MM's se obtienen como

$$\begin{pmatrix} \frac{f_3 - (1 + r)}{f_3 - f_1} & \frac{f_2 - (1 + r)}{f_2 - f_1} \\ 0 & \frac{1 + r - f_1}{f_2 - f_1} \\ \frac{1 + r - f_1}{f_3 - f_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

De la segunda fila sale que $\alpha_2 > 0$ y de la tercera que $\alpha_1 > 0$. La primera fila no impone ninguna restricción adicional. Para completar el mercado, se tiene que c_0 es una combinación convexa

$$\alpha_1 \frac{c_1(f_3 - (1 + r)) + c_3(1 + r - f_1)}{(f_3 - f_1)(1 + r)} + \alpha_2 \frac{c_1(f_2 - (1 + r)) + c_2(1 + r - f_1)}{(f_2 - f_1)(1 + r)}$$

donde $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$. Es decir, c_0 se encuentra en el intervalo abierto comprendido entre

$$\frac{c_1(f_3 - (1 + r)) + c_3(1 + r - f_1)}{(f_3 - f_1)(1 + r)}$$

y

$$\frac{c_1(f_2 - (1 + r)) + c_2(1 + r - f_1)}{(f_2 - f_1)(1 + r)}.$$

4.4.1. El modelo Korn–Kreer–Lenssen

El modelo Korn-Kreer-Lenssen (KKL) [10, 33] es un modelo a tiempo continuo caracterizado por un activo con un proceso de precios sin descontar dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(dS = 1) &= \lambda S dt, \\ \mathbb{P}(dS = -1) &= \eta S dt \\ \text{y } \mathbb{P}(dS = 0) &= 1 - (\lambda + \eta) S dt, \end{aligned}$$

para algunos $\lambda, \eta > 0$ fijos. El trading es continuo en $[0, T]$, y $\widehat{S}_0(\omega, t) = e^{rt}$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Para completarlo, se agrega una opción put F^* con strike 1 y vencimiento T , es decir, un activo que cumple que

$$F^*(T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S(T) \geq 1 \\ 1 & \text{si } S(T) = 0 \end{cases}.$$

Particionando $[0, T]$ en n intervalos iguales, obtenemos una versión finita del modelo KKL:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S(t + \Delta t) = S(t) + 1) &= \lambda S(t) \Delta t, \\ \mathbb{P}(S(t + \Delta t) = S(t) - 1) &= \eta S(t) \Delta t \\ \text{y } \mathbb{P}(S(t + \Delta t) = S(t)) &= 1 - (\lambda + \eta) S(t) \Delta t,\end{aligned}$$

donde $\Delta t := T/n$, y $\widehat{S}_0(\omega, t + \Delta t)/\widehat{S}_0(\omega, t) = 1 + r\Delta t$, siempre que $t/\Delta t \in \{0, \dots, n\}$. Para que estas probabilidades tengan sentido cuando $n \rightarrow \infty$, se requiere la condición $(\lambda + \eta)T < 1$.

Si $S(t) = 0$, caemos en el caso $b = 1$, con una MME trivialmente única. Si no, caemos en el caso $b = 3$ con

$$f_1 = 1 - S(t)^{-1}, \quad f_2 = 1 \quad \text{y} \quad f_3 = 1 + S(t)^{-1}.$$

Por lo tanto, el mercado es libre de arbitraje si y sólo si

$$\begin{aligned}1 - S(t)^{-1} &< 1 + r\Delta t < 1 + S(t)^{-1} \\ \Leftrightarrow \Delta t &< \frac{1}{|r|S(t)}.\end{aligned}$$

Para que esto valga para todo $t < T$, es necesario y suficiente que valga en el caso $S(t) = S(0) + n - 1$. En consecuencia, la condición se convierte en

$$\begin{aligned}\Delta t &< \frac{1}{|r|(S(0) + n - 1)} \\ \Leftrightarrow T|r|(S(0) + n - 1) &< n.\end{aligned}$$

Esto vale para n suficientemente grande si $T|r| < 1$.

Para completar el mercado, se debe agregar otro activo. Si a tiempo t el activo original tiene precio $S(t)$, entonces asumiremos que el nuevo activo tiene precio $F^n(t, S(t))$ para alguna función F^n . Sea $\Gamma \subset (T/n)\{0, 1, \dots, n\} \times \mathbb{N}_0$ el menor conjunto que satisface:

1. $(0, S(0)) \in \Gamma$.
2. Si $(t, k) \in \Gamma$ y $t < T$, entonces
 - $(t + \Delta t, 0) \in \Gamma$ si $k = 0$.
 - $(t + \Delta t, k - 1), (t + \Delta t, k), (t + \Delta t, k + 1) \in \Gamma$ si $k \neq 0$.

Para cada $(t, k) \in \Gamma$ tal que $t < T$ y $k \neq 0$, como vimos en esta sección, tenemos muchas MME's para las transiciones

$$\tilde{\mathbb{P}}(S(t + \Delta t) = k + i | S(t) = k)$$

para $i \in \{-1, 0, 1\}$. Elijamos cualquiera de estas MME's para cada uno de estos (t, k) . La MME elegida determina los valores de $F^n(t, k)$ para $t < T$, dados los valores de $F^n(T, k)$:

$$F^n(t, k) = \begin{cases} (1 + r\Delta t)^{-1} \sum_{i=-1}^1 \tilde{\mathbb{P}}(S(t + \Delta t) = k + i | S(t) = k) F^n(t + \Delta t, k + i) & \text{si } k \neq 0 \\ (1 + r\Delta t)^{-1} F^n(t + \Delta t, 0) & \text{si } k = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Para que el mercado sea completo, para cada $(t, k) \in \Gamma$ tal que $t < T$ y $k \neq 0$, la ecuación (4.4) requiere que

$$\begin{aligned} F^n(t + \Delta t, k - 1)k^{-1} - 2F^n(t + \Delta t, k)k^{-1} + F^n(t + \Delta t, k + 1)k^{-1} &\neq 0 \\ \Leftrightarrow F^n(t + \Delta t, k - 1) - 2F^n(t + \Delta t, k) + F^n(t + \Delta t, k + 1) &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En [33] se asume que el nuevo activo es una opción put con strike 1 y vencimiento T . Esto corresponde a

$$F^*(T, k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

Si usamos estos valores en nuestra versión a tiempo discreto, entonces el mercado no será completo.

Proposición 4.6. *Dados valores cualesquiera de $F^*(T, k)$, los valores de $F^n(T, k)$ pueden tomarse arbitrariamente cercanos a $F^*(T, k)$ obteniendo además un mercado completo.*

Demostración. Sea $\tilde{\Gamma}$ el conjunto

$$\tilde{\Gamma} := \{(t, k) \in \Gamma : t < T, k \neq 0\}.$$

Observar que cada $F^n(t, k)$ es una combinación lineal de valores $F^n(T, k)$ a través de la ya elegida MME. Para cada $(t, k) \in \tilde{\Gamma}$, sea $H_{(t,k)}$ el conjunto

$$H_{(t,k)} := \{(F^n(T, l))_{l=0}^{S(0)+n} : F^n(t + \Delta t, k - 1) - 2F^n(t + \Delta t, k) + F^n(t + \Delta t, k + 1) = 0\} \\ \subset \mathbb{R}^{S(0)+n+1}.$$

Estos conjuntos son, o bien hiperplanos, o bien $\mathbb{R}^{S(0)+n+1}$. Para un (t, k) dado, $H_{(t,k)} = \mathbb{R}^{S(0)+n+1}$ si y sólo si los coeficientes correspondientes a cada $F^n(T, l)$ en la combinación lineal

$$F^n(t + \Delta t, k - 1) - 2F^n(t + \Delta t, k) + F^n(t + \Delta t, k + 1)$$

son cada uno de ellos 0. Esto no es cierto, porque el coeficiente correspondiente a $F^n(T, k + (T - t)/\Delta t)$ no es 0:

$$F^n(t + \Delta t, k + i) = (1 + r\Delta t)^{-\frac{T-t-\Delta t}{\Delta t}} \sum_j \tilde{\mathbb{P}}(S(T) = j | S(t + \Delta t) = k + i) F^n(T, j)$$

y

$$\tilde{\mathbb{P}}(S(T) = j | S(t + \Delta t) = k + i) = 0$$

para $|k + i - j| > (T - t - \Delta t)/\Delta t$. Luego, con $j = k + (T - t)/\Delta t$,

$$\tilde{\mathbb{P}}(S(T) = j | S(t + \Delta t) = k + i) = 0$$

para $i \in \{-1, 0\}$, pero

$$\tilde{\mathbb{P}}(S(T) = j | S(t + \Delta t) = k + 1) > 0 .$$

Por lo tanto, el coeficiente correspondiente a $F^n(T, k + (T - t)/\Delta t)$ es

$$(1 + r\Delta t)^{-\frac{T-t-\Delta t}{\Delta t}} \tilde{\mathbb{P}}(S(T) = k + (T - t)/\Delta t | S(t + \Delta t) = k + 1) > 0 .$$

Entonces, los conjuntos $H_{(t,k)}$ son hiperplanos y por lo tanto son conjuntos de medida nula.

Como Γ es un conjunto finito, $\tilde{\Gamma}$ también es un conjunto finito. Sea $\varepsilon > 0$ y B el conjunto

$$B := \{x \in \mathbb{R}^{S(0)+n+1} : |x_i - F^*(T, i)| < \varepsilon \quad \forall i\} .$$

Como B no es un conjunto de medida nula,

$$B \not\subset \bigcup_{(t,k) \in \tilde{\Gamma}} H_{(t,k)} .$$

Sea $(F^n(T, l))_{l=0}^{S(0)+n} \in B$ tal que

$$(F^n(T, l))_{l=0}^{S(0)+n} \notin \bigcup_{(t,k) \in \tilde{\Gamma}} H_{(t,k)} ,$$

entonces

$$|F^n(T, l) - F^*(T, l)| < \varepsilon$$

para todo $0 \leq l \leq S(0) + n$, y el mercado es completo debido a la ecuación (4.6). $\square$

Sería deseable tomar el límite $n \rightarrow \infty$, y deducir de estos resultados la viabilidad y completitud del modelo KKL original con tiempo continuo. Sin embargo, este paso no es tan simple y requiere más investigación. Para ilustrar esto, presento el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7. *En este ejemplo mostraré una secuencia de mercados completos que converge a un mercado límite con oportunidades de arbitraje. Cada uno de estos mercados se caracteriza por un proceso de precios sin descontar (B^n, S^n) con B^n determinístico (el proceso correspondiente es (B, S) en el caso del mercado límite). El concepto de convergencia que probaremos está dado por:*

1. $B^n \rightarrow B$ uniformemente;
2. $S^n(0) \rightarrow S(0)$;
3. y para cada $t_1 < t_2$, $\log(S^n(t_2)/S^n(t_1))$ converge en distribución a $\log(S(t_2)/S(t_1))$.

Para los mercados de la secuencia, consideremos el modelo binomial clásico. Dado $n \in \mathbb{N}$, fijamos las fechas de trading $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$, con parámetros $r_n = 0$, $u_n = e$, $d_n = \exp(-1/n^2)$ y $p_n = 1/n$, con probabilidades

$$\mathbb{P}(S^n(t + 1/n) = u_n S^n(t)) = p_n$$

$$y \quad \mathbb{P}(S^n(t + 1/n) = d_n S^n(t)) = 1 - p_n ,$$

y $S^n(0) = B^n(0) = 1$. Observar que todos estos mercados son completos, ya que $d_n < 1 + r_n < u_n$. Los procesos $S^n, B^n : \Omega \times \{0, 1/n, \dots, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ pueden ser extendidos a tiempo continuo en el intervalo $[0, 1]$ pensando en ellos como funciones càdlàg constantes entre fechas de trading, tal como se muestra en la observación 2.14. Luego, obtenemos

$$\log S^n(t) = \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i^n ,$$

donde los X_i^n son independientes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_i^n = \log u_n) &= p_n \\ y \quad \mathbb{P}(X_i^n = \log d_n) &= 1 - p_n . \end{aligned}$$

Para el mercado límite, sea $Y(t)$ un proceso de Poisson con parámetro 1, $S(t) := \exp(Y(t))$ y $B(t) \equiv 1$. El proceso de portfolio $S(t) - B(t)$ es una oportunidad de arbitraje en este mercado:

$$\begin{aligned} S(0) - B(0) &= 0 , \\ \mathbb{P}(S(1) - B(1) \geq 0) &= \mathbb{P}(Y(1) \geq 0) = 1 \\ y \quad \mathbb{P}(S(1) - B(1) > 0) &= 1 - e^{-1} > 0 . \end{aligned}$$

Sean $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Dado $n \geq 2$, se tiene que

$$\log \left(\frac{S^n(t_2)}{S^n(t_1)} \right) = \log(u_n/d_n) Y_{t_1, t_2}^n + (\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor) \log d_n ,$$

donde $Y_{t_1, t_2}^n \sim B(\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor, p_n)$. La función característica de $\log(S^n(t_2)/S^n(t_1))$ es

$$\varphi_n(s) = \exp(is(\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor) \log d_n) (1 - p_n + p_n \exp(is \log(u_n/d_n)))^{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor} .$$

Observemos que cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lfloor nt_2 \rfloor \leq nt_2 < \lfloor nt_2 \rfloor + 1 &\Rightarrow 1 - \frac{1}{nt_2} < \frac{\lfloor nt_2 \rfloor}{nt_2} \leq 1 \Rightarrow \frac{\lfloor nt_2 \rfloor}{nt_2} \rightarrow 1 \\ \Rightarrow \lfloor nt_2 \rfloor \log d_n &= -t_2 \frac{\lfloor nt_2 \rfloor}{nt_2} \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow (\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor) \log d_n \rightarrow 0 , \\ |\exp(is \log(u_n/d_n))| &= 1 \Rightarrow -p_n + p_n \exp(is \log(u_n/d_n)) \rightarrow 0 \quad y \\ \log(u_n/d_n) &= 1 + 1/n^2 \Rightarrow (-p_n + p_n \exp(is \log(u_n/d_n)))(\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor) \\ &= (-1 + \exp(is(1 + 1/n^2))) \frac{\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor}{n} \rightarrow (e^{is} - 1)(t_2 - t_1) , \end{aligned}$$

por lo que

$$\varphi_n(s) \rightarrow \exp((t_2 - t_1)(e^{is} - 1)) .$$

Por otro lado, se tiene que $\log(S(t_2)/S(t_1)) \sim \text{Pois}(t_2 - t_1)$ y su función característica es

$$\varphi(s) = \exp((t_2 - t_1)(e^{is} - 1)) .$$

Como φ_n converge puntualmente a φ , $\log(S^n(t_2)/S^n(t_1))$ converge en distribución a $\log(S(t_2)/S(t_1))$. También $S^n(0) = S(0)$ y $B^n \equiv B$, y todos estos hechos juntos muestran que la secuencia de mercados converge al mercado límite.

Observación 4.2. Para ser completamente formales, faltaría ver que el proceso S puede definirse en el marco de un mercado como indica la definición 2.28. Siguiendo la construcción de la definición 2.29, obtenemos $(\mathcal{F}_t)_t$, la filtración natural generada por S . Restringiendo $\mathcal{Q}$, obtenemos el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{G}_1, \mathcal{Q}|_{\mathcal{G}_1})$, que según la observación 2.17 podemos completar al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P})$.

Por la observación 2.18, tendríamos que probar que si $A \in \mathcal{F}_1$ es tal que $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $A \in \mathcal{F}_0$. Sea $A \in \mathcal{F}_1$ tal que $\mathbb{P}(A) = 0$, por la observación 2.17 tenemos que existen $B \in \mathcal{G}_1$ y $N \in \mathcal{N}$ tales que $A = B \cup N$. Se tiene entonces que

$$Q(B) = \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) = 0.$$

Sea $C \in \mathcal{G}_1$ tal que $N \subset C$ y $Q(C) = 0$. Como $A \subset (B \cup C) \in \mathcal{G}_1$ y

$$Q(B \cup C) \leq Q(B) + Q(C) = 0,$$

tenemos entonces que $A \in \mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$.

Sólo nos falta probar que S es localmente acotado. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sean $T_k : \Omega \rightarrow [0, 1] \cup \{\infty\}$ definidas como

$$T_k(\omega) := \inf\{t \in [0, 1] : Y(\omega, t) \geq k\}$$

donde $\inf \emptyset := \infty$. Se tiene entonces que

$$T_k(\omega) \leq t \Leftrightarrow Y(\omega, t) \geq k;$$

hay que señalar que $T_k(\omega) = t \Rightarrow Y(\omega, t) \geq k$ pues $Y(\omega, \cdot)$ es continua a derecha. De esto se deduce que, para $a, b \in (0, 1)$ vale que

$$\begin{aligned} T_k^{-1}(\{\infty\}) &= S(1)^{-1}((-\infty, e^k)) \in \mathcal{F}_1, \\ T_k^{-1}((a, 1]) &= S(a)^{-1}((-\infty, e^k)) \setminus T_k^{-1}(\{\infty\}) \in \mathcal{F}_1 \\ \Rightarrow T_k^{-1}([0, b]) &= \Omega \setminus (T_k^{-1}((b, 1]) \cup T_k^{-1}(\{\infty\})) \in \mathcal{F}_1 \\ \Rightarrow T_k^{-1}([0, b]) &= \bigcup_{l=1}^{\infty} T_k^{-1}([0, b - 1/l]) \in \mathcal{F}_1 \\ \Rightarrow T_k^{-1}((a, b)) &= T_k^{-1}((a, 1]) \cap T_k^{-1}([0, b]) \in \mathcal{F}_1, \end{aligned}$$

y como los conjuntos de la forma $\{\infty\}$, $(a, 1]$, $[0, b)$ y (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ constituyen una base numerable para la topología de $[0, 1] \cup \{\infty\}$, se tiene que $T_k^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1$ para todo $B \subset [0, 1] \cup \{\infty\}$ abierto. Eso prueba que T_k es una variable aleatoria. Además, si $t \in [0, 1]$, entonces

$$\{T_k \leq t\} = \{Y(t) \geq k\} = \{S(t) \geq e^k\} = S(t)^{-1}([e^k, +\infty)) \in \mathcal{F}_t,$$

por lo que T_k es un tiempo de parada.

Sea $\omega \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, vale que

$$\{t \in [0, 1] : Y(\omega, t) \geq k + 1\} \subset \{t \in [0, 1] : Y(\omega, t) \geq k\} \Rightarrow T_k(\omega) \leq T_{k+1}(\omega).$$

Luego, $\{T_k\}_{k=1}^\infty$ es creciente.

Sea $\omega \in \Omega$, tenemos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k(\omega) = \infty \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : T_{k_0}(\omega) = \infty ,$$

pero

$$T_{k_0}(\omega) = \infty \Leftrightarrow Y(\omega, 1) < k_0 ,$$

por lo que

$$\{T_k \rightarrow \infty\} = \{Y(1) < \infty\} .$$

Esto tiene probabilidad 1 porque $Y(1) \sim \text{Pois}(1)$.

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(\omega, t) \in \Omega \times [0, 1]$, observar que

$$(\omega, t) \in \llbracket 0, T_k \rrbracket \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T_k(\omega) \Rightarrow Y(\omega, t) \leq k \Rightarrow S(\omega, t) \leq e^k ,$$

por lo que $|S1_{\llbracket 0, T_k \rrbracket}| \leq e^k$ y podemos tomar $K_k := e^k$.

4.5. Conclusiones

En el presente trabajo se estudió el conjunto de medidas de martingala equivalentes (MME's), para mercados de un solo período. Hicimos esto para entender bajo qué condiciones los modelos multinomiales son libres de arbitraje o completos, y cómo pueden ser completados.

Se utilizó una interpretación geométrica del conjunto de MME's para reducir el problema a uno de geometría convexa, y así se observó que todas las medidas de martingala se pueden escribir como combinaciones convexas de algunas pocas. Se presentó un algoritmo que permite calcular estos generadores. También se observó que dichos generadores resultan necesarios y suficientes.

Además, se presentó una caracterización simple de las MME's en base a los generadores obtenidos, y un algoritmo con todas las posibles formas de completar un mercado libre de arbitraje. Se proveyeron ejemplos de aplicación a casos concretos.

Estos resultados se utilizaron para probar resultados adicionales sobre los modelos multinomiales con dos activos. Se encontró una condición necesaria y suficiente para que el mercado sea libre de arbitraje para cualquier valor de b . Más aún, se probó que el mercado es completo cuando $b = 2$. En el caso $b = 3$, se agregó un activo y se caracterizaron todos los activos que completan el mercado. Se usaron estos resultados para analizar una versión a tiempo discreto del modelo Korn-Kreer-Lenssen, dando una condición necesaria y suficiente para que el mercado sea libre de arbitraje, y una forma de completar el mercado en el espíritu de [33].

Se requieren futuras investigaciones para cerrar la brecha entre estos modelos a tiempo discreto y modelos a tiempo continuo. Además del ejemplo dado en este trabajo, se pueden encontrar ejemplos particulares de tomar límites en sucesiones de mercados en [37] y [41], pero parece que falta una teoría general.

Capítulo 5

TED&POP: Un modelo de la economía argentina

5.1. Introducción

La economía argentina presenta una complejidad estructural que desafía los modelos macroeconómicos convencionales: alta volatilidad cambiaria, restricciones en la cuenta capital, ciclos recurrentes de expansión y contracción, y una marcada dependencia del sector externo. Modelar esta dinámica de manera rigurosa requiere un marco que sea a la vez suficientemente detallado para capturar las especificidades institucionales del país y suficientemente general para admitir análisis formal.

El presente capítulo expone TED&POP, un modelo macroeconómico de la economía argentina desarrollado en colaboración con un grupo interdisciplinario del SEDLab del Departamento de Computación, integrado por economistas y científicos de la computación. El nombre del modelo hace referencia a los cuatro activos que se intercambian en la economía representada: bienes de capital (TElares), divisa extranjera (Dólares), bienes de consumo (PONchos) y divisa local (Pesos).

La metodología de derivación del modelo es en sí misma una contribución original: las ecuaciones se obtienen mediante un procedimiento en etapas que combina rigor matemático con realismo económico. La base de dicha metodología ya se expuso en la sección 2.6. A lo allí detallado se le agregó un paso final, que consiste en suavizar algunas funciones no diferenciables para garantizar la existencia y unicidad de la solución.

El capítulo se organiza del siguiente modo.

En la sección 5.2 se plantea el modelo discreto, que en la sección 5.3 se utiliza para deducir el modelo continuo. El paso final de esa deducción, detalla el procedimiento para suavizar las funciones.

La sección 5.4 resume el modelo en una tabla que contiene todas sus variables, parámetros y ecuaciones.

La sección 5.5 analiza los supuestos implícitos en la dinámica de la productividad, mientras que la sección 5.6 analiza algunas tendencias importantes de largo plazo del modelo.

La sección 5.7 describe características económicamente significativas del modelo, que nos permiten entender porqué sirve para modelar una economía como la argentina.

El capítulo cierra con el análisis de una simulación numérica. La sección 5.8

detalla los valores que se usaron para correr la simulación, introduce el concepto de “régimen de funcionamiento” e identifica distintos regímenes de funcionamiento predominantes en la simulación. La sección 5.9 intenta explicar lo observado en la simulación numérica, mediante el empleo de herramientas analíticas.

A lo largo del capítulo, se asumirá que el lector ha leído previamente la sección 2.6, y se emplearán las notaciones y definiciones en ella utilizadas, a menos que se indique lo contrario.

5.2. El modelo discreto

Este es un modelo con 5 actores

1. *Familias*
2. *Firmas*
3. *Gobierno*
4. *Banco Central*
5. *Resto del Mundo*

y 4 activos

1. *bien de consumo* (los “ponchos”)
2. *bien de capital* (los “telares”)
3. *divisa local* (los “pesos”)
4. *divisa extranjera* (los “dólares”)

Las unidades de estos activos serán abreviadas *ubc*, *ubk*, *udl* y *ude*, respectivamente. También utilizaremos las unidades básicas *año* para medir el tiempo y *trabajador* para medir cantidad de trabajadores; esta última será abreviada *tr*.

Para deducir las ecuaciones, presentamos las acciones de los diferentes actores como una secuencia que tiene lugar entre los instantes de tiempo $t - \Delta t$ y t . Para hacer más clara la presentación, introducimos la siguiente notación:

- $t_- := t - \Delta t$
- $t_{-2} := t - 2\Delta t$
- $t_+ := t + \Delta t$

A tiempo t :

- Las Firmas tienen un stock $in(t)$ de *ubc*'s (sus *existencias*), un stock $k(t)$ de *ubk*'s (su *capital*) y un stock $H(t)$ de *udl*'s (su *stock de dinero*).
- El Banco Central tiene un stock $R(t)$ de *ude*'s (sus *reservas*).

A grandes rasgos, en el intervalo de tiempo (t_-, t) la siguiente secuencia de eventos tiene lugar:

1. Las Firms pagan $WB(t)\Delta t$ udl's a las Familias en concepto de salarios y $T(t)\Delta t$ udl's al Gobierno en concepto de impuestos.
2. El Gobierno paga $S(t)\Delta t$ udl's a las Familias en concepto de subsidios.
3. Las Firms contratan trabajadores y producen $y(t)\Delta t$ ubc's.
4. Las Firms venden $c(t)\Delta t$ ubc's a las Familias, $g(t)\Delta t$ ubc's al Gobierno y $x(t)\Delta t$ ubc's al Resto del Mundo. En esta última transacción, el Resto del Mundo paga $X(t)\Delta t/xr(t_-)$ ude's al Banco Central ($xr(t_-)$ indica el precio de una ude expresada en udl's durante el período (t_-, t)), que a su vez paga $X(t)\Delta t$ udl's a las Firms. Las restantes ubc's son almacenadas como existencias.
5. Las Familias y el Gobierno consumen la totalidad de las ubc's vendidas a ellos.
6. Las Firms importan $m(t)\Delta t$ ubk's. Para hacer esto, pagan $M(t)\Delta t$ udl's al Banco Central, que a su vez paga $M(t)\Delta t/xr(t_-)$ ude's al Resto del Mundo.
7. Las Firms invierten todas las ubk's que importaron: invierten $i(t)\Delta t$ ubk's, donde $i(t)\Delta t = m(t)\Delta t$.
8. $\delta \cdot k(t_-)\Delta t$ ubk's del stock de capital se pierden, debido a depreciación del capital.

Estos eventos pueden resumirse en las tablas de contabilidad 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4.

	Familias	Firms		Gobierno	Banco Central	Σ
		Corriente	Capital			
Inicial	0	0	$H(t_-)$	0	$-H(t_-)$	0
Salarios	$+WB(t)\Delta t$	$-WB(t)\Delta t$	0	0	0	0
Impuestos	0	$-T(t)\Delta t$	0	$+T(t)\Delta t$	0	0
Subsidios	$+S(t)\Delta t$	0	0	$-S(t)\Delta t$	0	0
Familias	$-C(t)\Delta t$	$+C(t)\Delta t$	0	0	0	0
Gobierno	0	$+G(t)\Delta t$	0	$-G(t)\Delta t$	0	0
Exportaciones	0	$+X(t)\Delta t$	0	0	$-X(t)\Delta t$	0
Importaciones	0	$-M(t)\Delta t$	0	0	$+M(t)\Delta t$	0
Stock de dinero	0	$-\Delta H(t)$	$+\Delta H(t)$	0	0	0
Final	0	0	$H(t)$	0	$-H(t)$	0

Cuadro 5.1: Contabilidad de las udl's

De esas tablas, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
C(t) &= WB(t) + S(t) , \\
\frac{H(t) - H(t_-)}{\Delta t} &= C(t) + G(t) + X(t) - WB(t) - T(t) - M(t) \\
T(t) &= G(t) + S(t) , \\
\frac{in(t) - in(t_-)}{\Delta t} &= y(t) - c(t) - g(t) - x(t) ,
\end{aligned}$$

	Familias	Firmas		Gobierno	Σ
		Corriente	Capital		
Inicial	0	0	$in(t_-)$	0	$in(t_-)$
Producción	0	$+y(t)\Delta t$	0	0	$+y(t)\Delta t$
Familias	$+c(t)\Delta t$	$-c(t)\Delta t$	0	0	0
Gobierno	0	$-g(t)\Delta t$	0	$+g(t)\Delta t$	0
Exportaciones	0	$-x(t)\Delta t$	0	0	$-x(t)\Delta t$
Existencias	0	$-\Delta in(t)$	$+\Delta in(t)$	0	0
Consumo	$-c(t)\Delta t$	0	0	$-g(t)\Delta t$	$-c(t)\Delta t - g(t)\Delta t$
Final	0	0	$in(t)$	0	$in(t)$

Cuadro 5.2: Contabilidad de las ubc's

	Banco Central	Σ
Inicial	$R(t_-)$	$R(t_-)$
Exportaciones	$+X(t)\Delta t/xr(t_-)$	$+X(t)\Delta t/xr(t_-)$
Importaciones	$-M(t)\Delta t/xr(t_-)$	$-M(t)\Delta t/xr(t_-)$
Final	$R(t)$	$R(t)$

Cuadro 5.3: Contabilidad de las ude's

	Firmas		Σ
	Corriente	Capital	
Inicial	0	$k(t_-)$	$k(t_-)$
Importaciones	$+m(t)\Delta t$	0	$+m(t)\Delta t$
Inversión	$-i(t)\Delta t$	$+i(t)\Delta t$	0
Consumo	0	$-\delta \cdot k(t_-)\Delta t$	$-\delta \cdot k(t_-)\Delta t$
Final	0	$k(t)$	$k(t)$

Cuadro 5.4: Contabilidad de las ubk's

$$\frac{R(t) - R(t_-)}{\Delta t} = \frac{X(t) - M(t)}{xr(t_-)} ,$$

$$i(t) = m(t) \quad \text{y}$$

$$\frac{k(t) - k(t_-)}{\Delta t} = i(t) - \delta \cdot k(t_-) .$$

Sea $p_c(t_-)$ ($p_k(t_-)$) el precio de una ubc (ubk) en udl's durante el período (t_-, t) . De las transacciones obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} C(t) &= c(t)p_c(t_-) , \\ G(t) &= g(t)p_c(t_-) , \\ X(t) &= x(t)p_c(t_-) \quad \text{y} \\ M(t) &= m(t)p_k(t_-) . \end{aligned}$$

Para cerrar el modelo, ecuaciones de comportamiento deben ser agregadas. Para hacer esto, revisamos los eventos del período (t_-, t) con mayor detenimiento.

5.2.1. Salarios e impuestos

Las Firmas pagan los salarios del trabajo realizado en el período (t_{-2}, t_-) y los impuestos de la producción llevada a cabo en ese período. La masa salarial es

$$WB(t)\Delta t = w(t_{-2})L(t_-)\Delta t ,$$

donde w es el salario nominal por unidad de tiempo [udl/tr-año] y L es la población empleada [tr].

La evolución del salario por unidad de tiempo está dada por

$$w(t) = w(t_-) + \rho \cdot (e(t) - \tau)w(t_-)\Delta t ,$$

donde

$$e(t) = \frac{L(t)}{N(t_-)}$$

es la tasa de empleo (adimensional), y la población en edad de trabajar [tr] crece de acuerdo a

$$N(t) = N(t_-) + \varphi \cdot N(t_-)\Delta t ,$$

donde φ [1/año] es un parámetro.

Los impuestos son

$$T(t)\Delta t = \theta(t_{-2})Y(t_-)\Delta t ,$$

donde θ es la tasa impositiva (adimensional) e Y es la producción nominal por unidad de tiempo [udl/año].

El Gobierno fija

$$\theta(t) = \theta_S(t) + \theta_G(t) ,$$

donde θ_S es la tasa de subsidios (adimensional) y la tasa de gasto público θ_G (adimensional) es una variable exógena.

5.2.2. Subsidios

Los subsidios son

$$S(t)\Delta t = \theta_S(t_{-2})Y(t_-)\Delta t .$$

El Gobierno actualiza la tasa de subsidios para el siguiente período. Su política trata de aproximar cierto objetivo de participación de los salarios después de los subsidios:

$$\theta_S(t) = \theta_S(t_-) + \beta \cdot \theta_S(t_-) \cdot (1 - \theta_S(t_-)) \cdot (\bar{v} - v(t))\Delta t ,$$

donde la intensidad de la respuesta gubernamental β [1/año] y el objetivo $\bar{v}$ (adimensional) son parámetros, y

$$v(t) = \frac{WB(t) + S(t)}{Y(t)}$$

es la participación de los salarios (adimensional).

5.2.3. Producción

Justo después de que el Gobierno paga subsidios a las Familias, las Familias demandan $c_d(t)\Delta t$ ubc's, el Gobierno demanda $g_d(t)\Delta t$ ubc's y el Resto del Mundo demanda $x_d(t)\Delta t$ ubc's.

Las Familias demandan la totalidad de su ingreso en ubc's:

$$C_d(t)\Delta t = WB(t)\Delta t + S(t)\Delta t \quad y$$

$$c_d(t)\Delta t = \frac{C_d(t)\Delta t}{p_c(t_-)} ,$$

donde $p_c(t)$ [udl/ubc] es una variable exógena.

La demanda gubernamental de ubc's es una porción de los impuestos recaudados:

$$G_d(t)\Delta t = \theta_G(t_{-2})Y(t_-)\Delta t \quad y$$

$$g_d(t)\Delta t = \frac{G_d(t)\Delta t}{p_c(t_-)} .$$

La demanda extranjera nominal por unidad de tiempo $X_d(t)$ [udl/año] es una variable exógena.

La demanda agregada nominal está dada por

$$Y_d(t)\Delta t = C_d(t)\Delta t + G_d(t)\Delta t + X_d(t)\Delta t ,$$

y la demanda real está dada por

$$y_d(t)\Delta t = \frac{Y_d(t)\Delta t}{p_c(t_-)} .$$

Las Firmas pueden producir como mucho

$$y^*(t)\Delta t = \min\{k(t_-)/s, a(t_-)N(t_-)\}\Delta t$$

ubc's, donde la relación capital-producto s [ubk-año/ubc] es un parámetro y a [ubc/tr-año] es la productividad del trabajo. En consecuencia, producen

$$y(t)\Delta t = \min\{y^*(t)\Delta t, y_d(t)\Delta t\}$$

ubc's.

Para producir $y(t)$ ubc's por unidad de tiempo, deben contratar

$$L(t) = \frac{y(t)}{a(t_-)}$$

trabajadores. La evolución de $a(t)$ está dada por

$$a(t) = (1 + \Omega_0\Delta t + \Omega_1(k(t) - k(t_-))) a(t_-)$$

donde Ω_0 [1/año] y Ω_1 [1/ubk] son parámetros.

5.2.4. Ventas

Las ventas locales por unidad de tiempo de las Firms y_L [ubc/año] están dadas por

$$\begin{aligned} c(t)\Delta t &= \min\{c_d(t)\Delta t, y(t)\Delta t\} , \\ g(t)\Delta t &= \min\{g_d(t)\Delta t, y(t)\Delta t - c(t)\Delta t\} \quad y \\ y_L(t)\Delta t &= c(t)\Delta t + g(t)\Delta t . \end{aligned}$$

Por lo tanto, les quedan $y(t)\Delta t - y_L(t)\Delta t$ ubc's producidas en (t_-, t) . De estas, las Firms quieren almacenar una porción como existencias. La porción se determina en base a las reservas de ude's del Banco Central: si las reservas del Banco Central son bajas, las Firms esperan una devaluación próximamente, y en consecuencia desean vender después de dicha devaluación. Las ecuaciones correspondientes son

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{R(t_-) \cdot xr(t_-)}{Y(t_-)} , \\ \sigma(t) &= 1 - d \cdot E(t) \quad y \\ \tilde{in}(t)\Delta t &= \sigma(t) \cdot (y(t) - y_L(t))\Delta t , \end{aligned}$$

donde xr [udl/ude] es una variable exógena, d [1/año] es un parámetro e $\tilde{in}$ [ubc/año] es la acumulación de existencias deseada.

Como $E(t) \in [0, +\infty)$, tenemos que $\sigma(t) \in (-\infty, 1]$: un deseo de almacenar una porción negativa del producto corresponde a una reducción de las existencias. Esto es físicamente posible si y sólo si hay existencias. Eso es representado por la ecuación

$$\tilde{in}_T(t)\Delta t = \begin{cases} \tilde{in}(t)\Delta t & \text{si } in(t_-) > 0 \\ \max\{\tilde{in}(t)\Delta t, 0\} & \text{si no} \end{cases} ,$$

donde $\tilde{in}_T$ [ubc/año] es el objetivo de acumulación de existencias. Luego, las Firms quieren exportar $x_s(t)\Delta t$ ubc's, donde

$$x_s(t)\Delta t = (y(t) - y_L(t))\Delta t - \tilde{in}_T(t)\Delta t$$

y terminan exportando $x(t)\Delta t$ ubc's, donde

$$\begin{aligned} x_d(t)\Delta t &= \frac{X_d(t)\Delta t}{p_c(t_-)} \quad y \\ x(t)\Delta t &= \min\{x_s(t)\Delta t, x_d(t)\Delta t\} . \end{aligned}$$

5.2.5. Importaciones

Como se vio en la contabilidad, las importaciones son iguales a la inversión, por lo que la demanda de importaciones tiene su origen en el deseo de inversión de las Firms. Las Firms desearían adquirir $i_w(t)\Delta t$ ubk's, donde

$$\begin{aligned} Y(t)\Delta t &= y(t)p_c(t_-)\Delta t , \\ P(t)\Delta t &= Y(t)\Delta t - WB(t_+)\Delta t - T(t_+)\Delta t , \\ u(t) &= \frac{y(t)\Delta t}{(k(t_-)/s)\Delta t} , \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{P(t)\Delta t}{Y(t)\Delta t} ,$$

$$i_w(t) = \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t_-) \quad \text{y}$$

$$I_w(t)\Delta t = i_w(t)p_k(t_-)\Delta t .$$

Aquí P [udl/año] son las ganancias por unidad de tiempo, u (adimensional) es la utilización de la capacidad instalada y h (adimensional) es la participación de las ganancias; π [1/año], γ_u (adimensional) y γ_h (adimensional) son parámetros, y p_k [udl/ubk] es una variable exógena.

Como el bien de capital no es producido localmente, las Firms necesitan ude's para importarlo. Pero las ude's son retenidas como reservas en el Banco Central. Luego, las Firms necesitan usar las udl's que tienen para comprar las ude's del Banco Central para importar. Las Firms tienen la intención de importar $I_d(t)\Delta t$ ubk's, donde

$$I_d(t)\Delta t = \min\{I_w(t)\Delta t, H(t_-) + C(t)\Delta t + G(t)\Delta t + X(t)\Delta t - WB(t)\Delta t - T(t)\Delta t\} .$$

Asumimos que el Banco Central autoriza importaciones por un valor de $M(t)\Delta t$ udl's, donde

$$cb(t) = cbd \cdot \left(1 + \exp \left(cbf \frac{I_d(t)}{R(t_-) \cdot xr(t_-)} - cbt \right) \right)^{-1} \quad \text{y}$$

$$M(t)\Delta t = \min\{I_d(t)\Delta t, cb(t) \cdot R(t_-) \cdot xr(t_-)\Delta t\} .$$

Aquí cb [1/año] es la disponibilidad de reservas del Banco Central por unidad de tiempo; cbd [1/año], cbf [año] y cbt (adimensional) son parámetros.

5.2.6. La secuencia completa de eventos

La secuencia completa de eventos puede ser ilustrada mediante la tabla 5.5. La tabla tiene 3 columnas destinadas al tiempo:

- El primer nivel hace referencia a la escala temporal que usamos para plantear las ecuaciones del modelo discreto.
- El segundo nivel es una escala temporal más chica, que permite ordenar secuencialmente los eventos que usamos para construir las tablas de contabilidad, al principio de esta sección. Si r es el número que aparece en dicha columna, puede pensarse que la acción ocurre a tiempo $t_- + r\Delta t/9$.
- El tercer nivel es una escala temporal aún más chica.

Cuadro 5.5: Secuencia completa de eventos en el modelo discreto.

Tiempo			Actor	Acción
1er nivel	2do nivel	3er nivel		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
t_{-2}	8	0	Firms	Depreciación del Capital

1er nivel	Tiempo		Actor	Acción
	2do nivel	3er nivel		
t_-	0	0	—	Actualización de $N(t_-)$, $w(t_-)$, $p_c(t_-)$, $p_k(t_-)$, $xr(t_-)$, $x_d(t_-)$, $\theta_G(t_-)$, $\theta_S(t_-)$ y $\theta(t_-)$
	1	0	Firmas	Pago de salarios e impuestos
	2	0	Gobierno	Pago de subsidios
	3	0	Familias	Demanda de bienes de consumo
		1	Gobierno	Demanda de bienes de consumo
		2	Resto del Mundo	Demanda de bienes de consumo
		3	Firmas	Producción de bienes de consumo
	4	0	Firmas	Venta de bienes de consumo y acumulación de existencias netas
	5	0	Familias	Consumo de bienes de consumo
		1	Gobierno	Consumo de bienes de consumo
	6	0	Firmas	Importación de bienes de capital
	7	0	Firmas	Inversión de bienes de capital
	8	0	Firmas	Depreciación del capital
t	0	0	—	Actualización de $N(t)$, $w(t)$, $p_c(t)$, $p_k(t)$, $xr(t)$, $X_d(t)$, $\theta_G(t)$, $\theta_S(t)$ y $\theta(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

5.3. El modelo continuo

Tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ y asumiendo que las funciones son continuas, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\hat{a}(t) &= \Omega_0 + \Omega_1 \dot{k}(t) , \\
C_d(t) &= WB(t) + S(t) , \\
G_d(t) &= \theta_G(t)Y(t) , \\
y^*(t) &= \min\{k(t)/s, a(t)N(t)\} , \\
Y_d(t) &= C_d(t) + G_d(t) + X_d(t) , \\
y_d(t) &= \frac{Y_d(t)}{p_c(t)} , \\
y(t) &= \min\{y_d(t), y^*(t)\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_d(t) &= \frac{C_d(t)}{p_c(t)} , \\
g_d(t) &= \frac{G_d(t)}{p_c(t)} , \\
c(t) &= \min\{c_d(t), y(t)\} , \\
g(t) &= \min\{g_d(t), y(t) - c(t)\} , \\
C(t) &= c(t)p_c(t) , \\
G(t) &= g(t)p_c(t) , \\
y_L(t) &= c(t) + g(t) , \\
E(t) &= \frac{R(t) \cdot xr(t)}{Y(t)} , \\
\sigma(t) &= 1 - d \cdot E(t) , \\
\tilde{in}(t) &= \sigma(t) \cdot (y(t) - y_L(t)) , \\
\tilde{in}_T(t) &= \begin{cases} \tilde{in}(t) & \text{si } in(t) > 0 \\ \max\{\tilde{in}(t), 0\} & \text{si } in(t) < 0 \end{cases} , \\
x_s(t) &= y(t) - y_L(t) - \tilde{in}_T(t) , \\
x_d(t) &= \frac{X_d(t)}{p_c(t)} , \\
x(t) &= \min\{x_s(t), x_d(t)\} , \\
X(t) &= x(t)p_c(t) , \\
in(t) &= y(t) - c(t) - g(t) - x(t) , \\
L(t) &= \frac{y(t)}{a(t)} , \\
WB(t) &= w(t)L(t) , \\
Y(t) &= y(t)p_c(t) , \\
T(t) &= \theta(t)Y(t) , \\
P(t) &= Y(t) - WB(t) - T(t) , \\
u(t) &= \frac{y(t)}{k(t)/s} , \\
h(t) &= \frac{P(t)}{Y(t)} , \\
i_w(t) &= \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t) , \\
I_w(t) &= i_w(t)p_k(t) , \\
I_d(t) &= \begin{cases} I_w(t) & \text{si } H(t) > 0 \\ \min\{I_w(t), -\dot{H}(t) + C(t) + G(t) + X(t) - WB(t) - T(t)\} & \text{si } H(t) < 0 \end{cases} , \\
cb(t) &= cbd \cdot \left(1 + \exp \left(cbf \frac{I_d(t)}{R(t) \cdot xr(t)} - cbt \right) \right)^{-1} , \\
M(t) &= \min\{I_d(t), cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t)\} ,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}
& \tag{5.2} \\
& \tag{5.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{R}(t) &= \frac{X(t) - M(t)}{xr(t)} , \\
m(t) &= \frac{M(t)}{p_k(t)} , \\
i(t) &= m(t) , \\
\dot{k}(t) &= i(t) - \delta \cdot k(t) , \\
\dot{H}(t) &= C(t) + G(t) + X(t) - WB(t) - T(t) - M(t) , \\
S(t) &= \theta_S(t)Y(t) , \\
v(t) &= \frac{WB(t) + S(t)}{Y(t)} , \\
\dot{\theta}_S(t) &= \beta \cdot \theta_S(t) \cdot (1 - \theta_S(t)) \cdot (\bar{v} - v(t)) , \\
\theta(t) &= \theta_S(t) + \theta_G(t) , \\
\hat{N}(t) &= \varphi , \\
e(t) &= \frac{L(t)}{N(t)} \quad y \\
\hat{w}(t) &= \rho \cdot (e(t) - \tau) .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Las ecuaciones (5.1) y (5.2) tienen que ser corregidas para contemplar los casos $in(t) = 0$ y $H(t) = 0$, respectivamente. Bajo el régimen $x = x_s$, se tiene que

$$\dot{in}(t) = \tilde{in}_T(t)$$

y para garantizar que $\dot{in}(t) \geq 0$ si $in(t) = 0$, redefinimos

$$\tilde{in}_T(t) = \begin{cases} \tilde{in}(t) & \text{si } in(t) > 0 \\ \max\{\tilde{in}(t), 0\} & \text{si no} \end{cases} .$$

En palabras, cuando las Firmas desean desacumular existencias, lo hacen siempre que haya existencias; si no hay existencias, se limitan a no acumular.

Asumimos que el modelo opera bajo la condición $P(t) \geq 0$. En consecuencia, tenemos

$$\begin{aligned}
Y(t) &\geq WB(t) + T(t) = C_d(t) + G_d(t) \\
\Rightarrow y(t) &\geq c_d(t) + g_d(t) \\
\Rightarrow c(t) &= c_d(t) \\
\Rightarrow g(t) &= g_d(t) \\
\Rightarrow WB(t) + T(t) &= C(t) + G(t) .
\end{aligned}$$

Cuando $H(t) = 0$, las ecuaciones (5.2), (5.3) y (5.4) pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned}
M(t) &= -\dot{H}(t) + X(t) , \\
I_d(t) &= \min\{I_w(t), M(t)\} \quad y \\
M(t) &= \min\{I_d(t), cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t)\} .
\end{aligned}$$

Cualquier valor de $I_d(t)$ que satisface $I_d(t) \leq I_w(t)$ y

$$I_d(t) \leq \frac{cbd \cdot R(t) \cdot xr(t)}{1 + \exp\left(cbf \frac{I_d(t)}{R(t) \cdot xr(t)} - cbt\right)}$$

(se puede conseguir tomando $I_d(t)$ suficientemente cercano a 0), da lugar a una solución del sistema de ecuaciones. Para evitar esta indeterminación y garantizar que $\dot{H}(t) \geq 0$ cuando $H(t) = 0$, redefinimos

$$I_d(t) = \begin{cases} I_w(t) & \text{si } H(t) > 0 \\ \min\{I_w(t), X(t)\} & \text{si no} \end{cases} .$$

En palabras, las Firmas piden realizar importaciones por el valor de $I_w(t)$ udl/año mientras tengan dinero en stock; si no, se limitan a la cantidad de dinero que les ingresa por exportaciones.

Luego, las ecuaciones terminan siendo

$$\hat{a}(t) = \Omega_0 + \Omega_1 \dot{k}(t) , \quad (5.5)$$

$$C(t) = WB(t) + S(t) , \quad (5.6)$$

$$G(t) = \theta_G(t)Y(t) , \quad (5.7)$$

$$y^*(t) = \min\{k(t)/s, a(t)N(t)\} , \quad (5.8)$$

$$Y_d(t) = C(t) + G(t) + X_d(t) , \quad (5.9)$$

$$y_d(t) = \frac{Y_d(t)}{p_c(t)} , \quad (5.10)$$

$$y(t) = \min\{y_d(t), y^*(t)\} , \quad (5.11)$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{p_c(t)} , \quad (5.12)$$

$$g(t) = \frac{G(t)}{p_c(t)} , \quad (5.13)$$

$$y_L(t) = c(t) + g(t) , \quad (5.14)$$

$$E(t) = \frac{R(t) \cdot xr(t)}{Y(t)} , \quad (5.15)$$

$$\sigma(t) = 1 - d \cdot E(t) , \quad (5.16)$$

$$\tilde{in}(t) = \sigma(t) \cdot (y(t) - y_L(t)) , \quad (5.17)$$

$$\tilde{in}_T(t) = \begin{cases} \tilde{in}(t) & \text{si } \tilde{in}(t) > 0 \\ \max\{\tilde{in}(t), 0\} & \text{si no} \end{cases} , \quad (5.18)$$

$$x_s(t) = y(t) - y_L(t) - \tilde{in}_T(t) , \quad (5.19)$$

$$x_d(t) = \frac{X_d(t)}{p_c(t)} , \quad (5.20)$$

$$x(t) = \min\{x_s(t), x_d(t)\} , \quad (5.21)$$

$$X(t) = x(t)p_c(t) , \quad (5.22)$$

$$\dot{in}(t) = y(t) - c(t) - g(t) - x(t) , \quad (5.23)$$

$$L(t) = \frac{y(t)}{a(t)} , \quad (5.24)$$

$$WB(t) = w(t)L(t) , \quad (5.25)$$

$$Y(t) = y(t)p_c(t) , \quad (5.26)$$

$$T(t) = \theta(t)Y(t) , \quad (5.27)$$

$$P(t) = Y(t) - WB(t) - T(t) , \quad (5.28)$$

$$u(t) = \frac{y(t)}{k(t)/s} , \quad (5.29)$$

$$h(t) = \frac{P(t)}{Y(t)} , \quad (5.30)$$

$$i_w(t) = \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t) , \quad (5.31)$$

$$I_w(t) = i_w(t) p_k(t) , \quad (5.32)$$

$$I_d(t) = \begin{cases} I_w(t) & \text{si } H(t) > 0 \\ \min\{I_w(t), X(t)\} & \text{si no} \end{cases} , \quad (5.33)$$

$$cb(t) = cbd \cdot \left(1 + \exp \left(cbf \frac{I_d(t)}{R(t) \cdot xr(t)} - cbt \right) \right)^{-1} , \quad (5.34)$$

$$M(t) = \min\{I_d(t), cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t)\} , \quad (5.35)$$

$$\dot{R}(t) = \frac{X(t) - M(t)}{xr(t)} , \quad (5.36)$$

$$m(t) = \frac{M(t)}{p_k(t)} , \quad (5.37)$$

$$i(t) = m(t) , \quad (5.38)$$

$$\dot{k}(t) = i(t) - \delta \cdot k(t) , \quad (5.39)$$

$$\dot{H}(t) = X(t) - M(t) , \quad (5.40)$$

$$S(t) = \theta_S(t) Y(t) , \quad (5.41)$$

$$v(t) = \frac{WB(t) + S(t)}{Y(t)} , \quad (5.42)$$

$$\dot{\theta}_S(t) = \beta \cdot \theta_S(t) \cdot (1 - \theta_S(t)) \cdot (\bar{v} - v(t)) , \quad (5.43)$$

$$\theta(t) = \theta_S(t) + \theta_G(t) , \quad (5.44)$$

$$\hat{N}(t) = \varphi , \quad (5.45)$$

$$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)} \quad y \quad (5.46)$$

$$\hat{w}(t) = \rho \cdot (e(t) - \tau) . \quad (5.47)$$

5.3.1. Demanda extranjera

Como habíamos mencionado, $X_d(t)$ es una variable exógena. Pero le hemos dados una forma específica para facilitar el ajuste a datos históricos. Se asume que el PBI mundial en ude's tiene la tasa de crecimiento

$$\hat{Y}_W(t) = A \sin(\omega t) + B , \quad (5.48)$$

donde A [1/año], B [1/año] y ω [1/año] son parámetros. Si integramos esto, obtenemos

$$Y_W(t) = Y_W(0) \exp \left(-\frac{A}{\omega} \cos(\omega t) + Bt \right)$$

de lo cual podemos apreciar que tiene ciclos encima de un crecimiento exponencial. Asumimos que la demanda extranjera está dada por las siguientes ecuaciones:

$$\hat{X}_d^{usd}(t) = \eta \cdot \hat{Y}_W(t) \quad y \quad (5.49)$$

$$X_d(t) = X_d^{usd}(t) \cdot xr(t) , \quad (5.50)$$

donde X_d^{usd} [ude/año] es la demanda extranjera nominal por unidad de tiempo y η (adimensional) es un parámetro.

5.3.2. Suavizado de las funciones

Para garantizar la existencia y unicidad de la solución del sistema de ecuaciones, se usa típicamente el teorema de la función implícita. Para aplicar dicho teorema sin muchos problemas, las funciones involucradas deberían ser de clase C^1 . Dado que el sistema de ecuaciones deducido tiene algunas funciones definidas a trozos, no satisface inmediatamente este requerimiento. Por esa razón, se consideró reemplazar las funciones definidas a trozos por aproximaciones suaves.

Observar que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (1 + e^{-ax})^{-1} = \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x) = \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$$

para todo $x \neq 0$. En consecuencia, si tomamos $a \gg 0$, esta función es una buena aproximación de $\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$ y $\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$, además de ser de clase C^1 . Las funciones definidas a trozos que tenemos, son de la forma

$$f_0(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } f_2(x) > 0 \\ f_3(x) & \text{si no} \end{cases} .$$

Esto puede ser reescrito como

$$f_0(x) = f_1(x)\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(f_2(x)) + f_3(x)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(-f_2(x)) .$$

Usando la aproximación previamente mencionada, reemplazamos estas funciones por

$$\tilde{f}_0(x) := \frac{\tilde{f}_1(x)}{1 + \exp\left(-a\tilde{f}_2(x)\right)} + \frac{\tilde{f}_3(x)}{1 + \exp\left(a\tilde{f}_2(x)\right)} ,$$

donde $\tilde{f}_i(x)$ es la aproximación suave de $f_i(x)$.

Las funciones suavizadas dependen del parámetro $a \gg 0$. En consecuencia, hay un grado de arbitrariedad en las soluciones. Esto motiva la pregunta de si las soluciones convergen cuando $a \rightarrow +\infty$. No se pudo responder a esta pregunta, pero no se apreciaron diferencias entre los resultados de la simulación del sistema suavizado y los del sistema sin suavizar, lo que parecería indicar que dichas soluciones convergen. Las preguntas sobre la existencia y unicidad de la solución del modelo sin suavizar tampoco han sido respondidas.

Si las funciones involucradas en el sistema sin suavizar fueran Lipschitz, debería ser posible aplicar el teorema del punto fijo de Banach para probar existencia y unicidad de la solución, tal como se hace en la demostración del teorema de Picard-Lindelöf. Sin embargo, este enfoque falla debido a que la ecuación (5.18) involucra una función discontinua. No he hallado en la literatura una forma metódica de tratar este tipo de sistemas.

5.4. Tabla del modelo

Cuadro 5.6: Variables, parámetros, unidades y ecuaciones del modelo TED&POP.
Las funciones fueron suavizadas como se explicó en la sección 5.3.2

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Variables macro			
ρ	Intensidad de la lucha de clases	1/año	[parámetro]
τ	Tasa de empleo no aceleradora de la inflación	-	[parámetro]
$p_c(t)$	Precio del bien de consumo	udl/ubc	[exógena]
$p_k(t)$	Precio del bien de capital	udl/ubk	[exógena]
$xr(t)$	Tipo de cambio	udl/ude	[exógena]
$y^*(t)$	Límite físico a la producción por unidad de tiempo	ubc/año	$y^*(t) = \min\{k(t)/s, a(t)N(t)\}$
$Y_d(t)$	Demanda agregada nominal por unidad de tiempo	udl/año	$Y_d(t) = C(t) + G(t) + X_d(t)$
$y_d(t)$	Demanda real por unidad de tiempo	ubc/año	$y_d(t) = \frac{Y_d(t)}{p_c(t)}$
$y(t)$	Producción física por unidad de tiempo	ubc/año	$y(t) = \min\{y_d(t), y^*(t)\}$
$e(t)$	Tasa de empleo	-	$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$
$w(t)$	Salario nominal por unidad de tiempo	udl/tr-año	$\hat{w}(t) = \rho \cdot (e(t) - \tau)$
$WB(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	udl/año	$WB(t) = w(t)L(t)$
$v(t)$	Participación de los salarios	-	$v(t) = \frac{WB(t)+S(t)}{Y(t)}$
Variables de las Familias			
φ	Tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar	1/año	[parámetro]
$N(t)$	Población en edad de trabajar	tr	$\hat{N}(t) = \varphi$
$C(t)$	Consumo nominal por unidad de tiempo	udl/año	$C(t) = WB(t) + S(t)$
$c(t)$	Consumo real por unidad de tiempo	ubc/año	$c(t) = \frac{C(t)}{p_c(t)}$
Variables de las Firmas			

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Ω_0	Tasa de crecimiento secular de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
Ω_1	Elasticidad de la productividad del trabajo con respecto al capital por unidad de capital	1/ubk	[parámetro]
d	Desconfianza en la sostenibilidad del régimen cambiario	1/año	[parámetro]
s	Relación capital-producto	ubk-año/ubc	[parámetro]
δ	Tasa de depreciación del capital	1/año	[parámetro]
π	Propensión a la inversión	1/año	[parámetro]
γ_u	Elasticidad de la inversión bruta deseada con respecto a la utilización de la capacidad instalada	-	[parámetro]
γ_h	Elasticidad de la inversión bruta deseada con respecto a la participación de las ganancias	-	[parámetro]
$a(t)$	Productividad del trabajo (físico)	ubc/tr-año	$\hat{a}(t) = \Omega_0 + \Omega_1 \dot{k}(t)$
$L(t)$	Población empleada	tr	$L(t) = \frac{y(t)}{a(t)}$
$y_L(t)$	Demanda doméstica real por unidad de tiempo	ubc/año	$y_L(t) = c(t) + g(t)$
$\sigma(t)$	Propensión a la acumulación de existencias	-	$\sigma(t) = 1 - d \cdot E(t)$
$\tilde{in}(t)$	Acumulación de existencias deseada (físico)	ubc/año	$\tilde{in}(t) = \sigma(t) \cdot (y(t) - y_L(t))$
$\tilde{in}_T(t)$	Objetivo de acumulación de existencias (físico)	ubc/año	$\tilde{in}_T(t) = \begin{cases} \tilde{in}(t) & \text{si } in(t) > 0 \\ \text{máx}\{\tilde{in}(t), 0\} & \text{si no} \end{cases}$

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$x_s(t)$	Oferta de exportaciones por unidad de tiempo (físico)	ubc/año	$x_s(t) = y(t) - y_L(t) - \tilde{in}_T(t)$
$x(t)$	Exportaciones por unidad de tiempo (físico)	ubc/año	$x(t) = \min\{x_s(t), x_d(t)\}$
$X(t)$	Exportaciones nominales por unidad de tiempo	udl/año	$X(t) = x(t)p_c(t)$
$in(t)$	Existencias (físico)	ubc	$\dot{in}(t) = y(t) - c(t) - g(t) - x(t)$
$Y(t)$	Producción nominal por unidad de tiempo	udl/año	$Y(t) = y(t)p_c(t)$
$P(t)$	Ganancias por unidad de tiempo	udl/año	$P(t) = Y(t) - WB(t) - T(t)$
$u(t)$	Utilización de la capacidad instalada	-	$u(t) = \frac{y(t)}{k(t)/s}$
$h(t)$	Participación de las ganancias	-	$h(t) = \frac{P(t)}{Y(t)}$
$i_w(t)$	Inversión bruta deseada por unidad de tiempo (físico)	ubk/año	$i_w(t) = \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t)$
$I_w(t)$	Inversión bruta deseada nominal por unidad de tiempo	udl/año	$I_w(t) = i_w(t)p_k(t)$
$I_d(t)$	Demanda de inversión bruta nominal por unidad de tiempo	udl/año	$I_d(t) = \begin{cases} I_w(t) & \text{si } H(t) > 0 \\ \min\{I_w(t), X(t)\} & \text{si no} \end{cases}$
$M(t)$	Importaciones nominales por unidad de tiempo	udl/año	$M(t) = \min\{I_d(t), cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t)\}$
$m(t)$	Importaciones reales por unidad de tiempo	ubk/año	$m(t) = \frac{M(t)}{p_k(t)}$
$i(t)$	Inversión bruta real por unidad de tiempo	ubk/año	$i(t) = m(t)$
$k(t)$	Capital (físico)	ubk	$\dot{k}(t) = i(t) - \delta k(t)$
$H(t)$	Stock de dinero	udl	$\dot{H}(t) = X(t) - M(t)$
Variables del Gobierno			
β	Intensidad de la respuesta gubernamental	1/año	[parámetro]

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$\bar{v}$	Objetivo de participación de los salarios	-	[parámetro]
$\theta_G(t)$	Tasa de gasto público	-	[exógena]
$\theta_S(t)$	Tasa de subsidios	-	$\dot{\theta}_S(t) = \beta \cdot \theta_S(t) \cdot (1 - \theta_S(t)) \cdot (\bar{v} - v(t))$
$\theta(t)$	Tasa impositiva	-	$\theta(t) = \theta_S(t) + \theta_G(t)$
$T(t)$	Impuestos por unidad de tiempo	udl/año	$T(t) = \theta(t)Y(t)$
$S(t)$	Subsidios por unidad de tiempo	udl/año	$S(t) = \theta_S(t)Y(t)$
$G(t)$	Gasto público nominal por unidad de tiempo	udl/año	$G(t) = \theta_G(t)Y(t)$
$g(t)$	Gasto público real por unidad de tiempo	ubc/año	$g(t) = \frac{G(t)}{p_c(t)}$
Variables del Banco Central			
cbd	Capacidad de entrega del banco central	1/año	[parámetro]
cbf	Frugalidad del banco central	año	[parámetro]
cbt	Umbral de acumulación de reservas	-	[parámetro]
$R(t)$	Reservas extranjeras del banco central	ude	$\dot{R}(t) = \frac{X(t) - M(t)}{xr(t)}$
$cb(t)$	Disponibilidad de reservas del banco central por unidad de tiempo	1/año	$cb(t) = cbd \cdot \left(1 + \exp\left(cbf \frac{I_d(t)}{R(t) \cdot xr(t)} - cbt\right)\right)^{-1}$
$E(t)$	Índice de acumulación de reservas	año	$E(t) = \frac{R(t) \cdot xr(t)}{Y(t)}$
Variables del Resto del Mundo			
A	Amplitud de la tasa de crecimiento del PBI mundial	1/año	[parámetro]
B	Media de la tasa de crecimiento del PBI mundial	1/año	[parámetro]
ω	Frecuencia de la tasa de crecimiento del PBI mundial	1/año	[parámetro]

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
η	Elasticidad de la demanda de exportaciones (ude) con respecto al PBI mundial	-	[parámetro]
$Y_W(t)$	PBI nominal del resto del mundo	ude/año	$\hat{Y}_W(t) = A \sin(\omega t) + B$
$X_d^{usd}(t)$	Importaciones extranjeras por unidad de tiempo	ude/año	$\hat{X}_d^{usd}(t) = \eta \hat{Y}_W(t)$
$X_d(t)$	Demanda extranjera nominal por unidad de tiempo	udl/año	$X_d(t) = X_d^{usd}(t) \cdot xr(t)$
$x_d(t)$	Demanda extranjera real por unidad de tiempo	ubc/año	$x_d(t) = \frac{X_d(t)}{p_c(t)}$

5.5. Un comentario sobre la productividad del trabajo

Observemos que la ecuación (5.5) se puede integrar inmediatamente, dando lugar a la ecuación

$$a(t) = a(0) \exp(\Omega_0 t + \Omega_1 \cdot (k(t) - k(0))) .$$

Esta sección trata sobre como puede interpretarse esta relación para que sus consecuencias sean económicamente sensatas.

Las firmas locales producen un bien de consumo, cuya producción requiere trabajo no calificado y un bien de capital. Para producir una ubc por unidad de tiempo, se requieren s ubk's.

La cantidad de capital utilizado determina la productividad del trabajo en cada instante de tiempo; si k ubk's son utilizadas a tiempo t , la productividad del trabajo $a(k, t)$ está dada por

$$a(k, t) = a_0 \exp(\Omega_0 t + \Omega_1 \cdot (k - k_0)) ,$$

donde a_0 [ubc/tr-año], k_0 [ubk], Ω_0 y Ω_1 son parámetros positivos (observar que $a(k_0, 0) = a_0$).

A tiempo t , si una firma con k ubk's desea producir $y (\leq k/s)$ ubc's por unidad de tiempo, emplear $\tilde{k} \leq k$ ubk's dará una productividad del trabajo $a(\tilde{k}, t) \leq a(k, t)$. Como el salario w está dado, los costos de trabajo serían mínimos contratando $y/a(\tilde{k}, t)$ trabajadores; como función de $\tilde{k}$, esto es mínimo cuando $\tilde{k} = k$. En consecuencia, se asume que la firma usa todo su capital en el proceso productivo y contrata $y/a(k, t)$ trabajadores: de ahí la ecuación (5.24).

5.6. Tendencias a largo plazo

Si $k(t) > 0$ para $t \in [0, t_1)$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= i(t) - \delta \cdot k(t) \geq -\delta \cdot k(t) \\ \Rightarrow k(t_1) &\geq k(0) \exp(-\delta t_1) > 0.\end{aligned}$$

Esto, sumado a la continuidad de k , garantiza que $k(t) > 0$ para todo t .

Integrando la ecuación (5.45), obtenemos

$$N(t) = N(0) \exp(\varphi t).$$

Usando esto, tenemos que

$$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)} = \frac{y(t)}{a(t)} \frac{1}{N(0)} \exp(-\varphi t) \leq \frac{e^{\Omega_1 k(0)}}{a(0)sN(0)} \frac{k(t)}{e^{\Omega_1 k(t)}} \exp(-(\Omega_0 + \varphi)t).$$

La función $xe^{-x\Omega_1}$ está acotada superiormente en $[0, +\infty)$, por ser continua y tender a 0 cuando $x \rightarrow +\infty$. Esto garantiza que $e(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. En consecuencia, tenemos también que $w(t) \rightarrow 0$. En efecto, para algún $t_0 > 0$ tenemos que $e(t) < \tau/2$ para todo $t \geq t_0$, por lo que

$$\dot{w}(t) < -\frac{\rho\tau}{2} \Rightarrow w(t) < w(t_0) \exp\left(-\frac{\rho\tau}{2}(t - t_0)\right) \rightarrow 0.$$

5.7. Características económicamente significativas

El modelo presenta tres características económicamente importantes:

1. conflicto distributivo,
2. crisis de balanza de pagos, y
3. el rol del Estado regulando las dos características previas.

El conflicto distributivo es la puja entre trabajadores y capitalistas por el reparto de la producción. Las distintas clases tienen distintas propensiones al consumo: en el caso extremo se asume que los trabajadores consumen todos sus ingresos mientras que los capitalistas ahorran todos sus ingresos. Como el crecimiento de la economía está dado por las inversiones, y estas no pueden exceder los ahorros, se deduce que el conflicto distributivo impone límites al crecimiento de la economía. A su vez, el crecimiento económico es necesario para sostener el crecimiento poblacional sin reducir los estándares de vida. Se trata entonces de un problema que atraviesa a todas las economías capitalistas. Un modelo que ilustra claramente este problema es el modelo de Goodwin que presenté en la sección 2.6.

La crisis de balanza de pagos es un problema originado en la necesidad de importar bienes. Se da típicamente en los *países periféricos*: aquellos países que producen bienes de consumo pero no bienes de capital (a diferencia de los *países centrales*, que sí producen bienes de capital). Los países periféricos necesitan importar de los países centrales el capital necesario para producir, y para ello necesitan ofrecer a cambio

los bienes de consumo que ellos producen. Así, las crisis en la balanza de pagos se dan naturalmente cuando el país periférico exporta menos de lo que necesita, ya sea por una caída en la oferta o en la demanda de exportaciones, o por un aumento en la demanda de importaciones. La expresión típica de este problema se encuentra en la ley de Thirlwall [36, cap. 3].

El Estado ocupa un lugar único para lidiar con estos problemas, dado que se trata de una organización dirigida y soberana a nivel nacional. Mediante la recaudación de impuestos y el pago de subsidios puede influir en la distribución del ingreso, y mediante controles en el tipo de cambio puede influir en la balanza comercial.

5.8. Simulaciones

Se realizaron simulaciones utilizando el lenguaje Modelica [20, 21, 38]. Proce- demos a presentar una de ellas: aquella que consideramos el escenario base, por lo típico de sus valores y la multitud de escenas que presenta. En el cuadro 5.7 se registran los valores de los parámetros, las funciones de las variables exógenas y los valores iniciales de las variables derivadas que caracterizan al escenario base.

Variables macro		Variables de las Familias		Variables de las Firmas	
ρ	0,1	φ	0,01	Ω_0	0
τ	0,7	$N(0)$	10^4	Ω_1	$2 \cdot 10^{-9}$
$p_c(t)$	1	Variables del Gobierno		d	2
$p_k(t)$	1	β	0,1	s	3
$xr(t)$	1	$\bar{v}$	0,5	δ	0,1
$w(0)$	35	$\theta_G(t)$	0,02	π	1
Variables del Resto del Mundo		$\theta_S(0)$	0,1	γ_u	0,5
A	0,09	Variables del Banco Central		γ_h	0,5
B	0,01	cbd	1	$a(0)$	75
ω	0,3	cbf	5	$in(0)$	0
η	0,93	cbt	20	$k(0)$	$1,713 \cdot 10^6$
$Y_W(0)$	$5 \cdot 10^7$	$R(0)$	$2 \cdot 10^5$	$H(0)$	$2 \cdot 10^5$
$X_d^{usd}(0)$	$2,46 \cdot 10^5$				

Cuadro 5.7: Valores que caracterizan al escenario base.

5.8.1. Regímenes de funcionamiento

Para la comprensión analítica de los resultados de la simulación, introducimos ahora el concepto de *regímenes de funcionamiento*. Cada ecuación que involucra una función definida a trozos da lugar a dos posibles regímenes de funcionamiento de esa componente del sistema. Por ejemplo, considerando la ecuación

$$x(t) = \min\{x_s(t), x_d(t)\} , \quad (5.21)$$

podemos estar bajo el régimen de funcionamiento

$$x(t) = x_s(t)$$

si $x_s(t) < x_d(t)$, o bajo el régimen de funcionamiento

$$x(t) = x_d(t)$$

si $x_s(t) > x_d(t)$.

Llamaremos a estos regímenes de funcionamiento, *regímenes de funcionamiento simples*. Seleccionando un régimen de funcionamiento simple en cada ecuación del sistema, obtenemos un *régimen de funcionamiento compuesto*.

Las ecuaciones del modelo que definen los regímenes de funcionamiento son

$$y^*(t) = \min\{k(t)/s, a(t)N(t)\} , \quad (5.8)$$

$$y(t) = \min\{y_d(t), y^*(t)\} , \quad (5.11)$$

$$\tilde{in}_T(t) = \begin{cases} \tilde{in}(t) & \text{si } in(t) > 0 \\ \max\{\tilde{in}(t), 0\} & \text{si no} \end{cases} , \quad (5.18)$$

$$x(t) = \min\{x_s(t), x_d(t)\} , \quad (5.21)$$

$$I_d(t) = \begin{cases} I_w(t) & \text{si } H(t) > 0 \\ \min\{I_w(t), X(t)\} & \text{si no} \end{cases} \quad y \quad (5.33)$$

$$M(t) = \min\{I_d(t), cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t)\} . \quad (5.35)$$

Los regímenes de y

Las ecuaciones (5.8) y (5.11) definen los regímenes de funcionamiento de la variable y . En la figura 5.1 se puede observar la evolución de las variables u y e . El gráfico es significativo pues muestra múltiples períodos de tiempo en los que

$$u(t) = 1 \quad (\Leftrightarrow y(t) = k(t)/s) ,$$

un período en el que

$$e(t) = 1 \quad (\Leftrightarrow y(t) = a(t)N(t)) ,$$

y los dos períodos restantes en los cuales vale que

$$y(t) = y_d(t) .$$

Los regímenes de $\tilde{in}_T$

La figura 5.2 muestra la evolución de la variable in . Se puede observar que $in(t) > 0$, excepto por un breve período. Durante ese período se puede observar que $\tilde{in}(t) < 0$, como ilustra la figura 5.3. Tenemos entonces que en casi todo momento

$$\tilde{in}_T(t) = \tilde{in}(t)$$

excepto cuando $in(t) = 0$, en cuyo caso

$$\tilde{in}_T(t) = 0 .$$

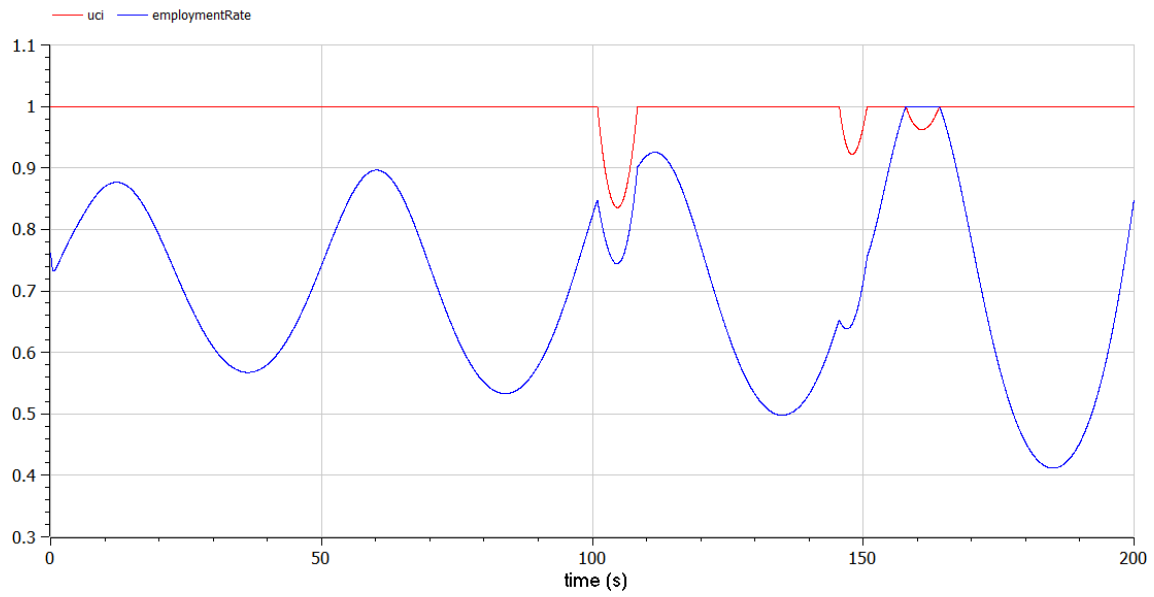


Figura 5.1: Valores de u (uci) y e ($employmentRate$) a lo largo de la simulación.

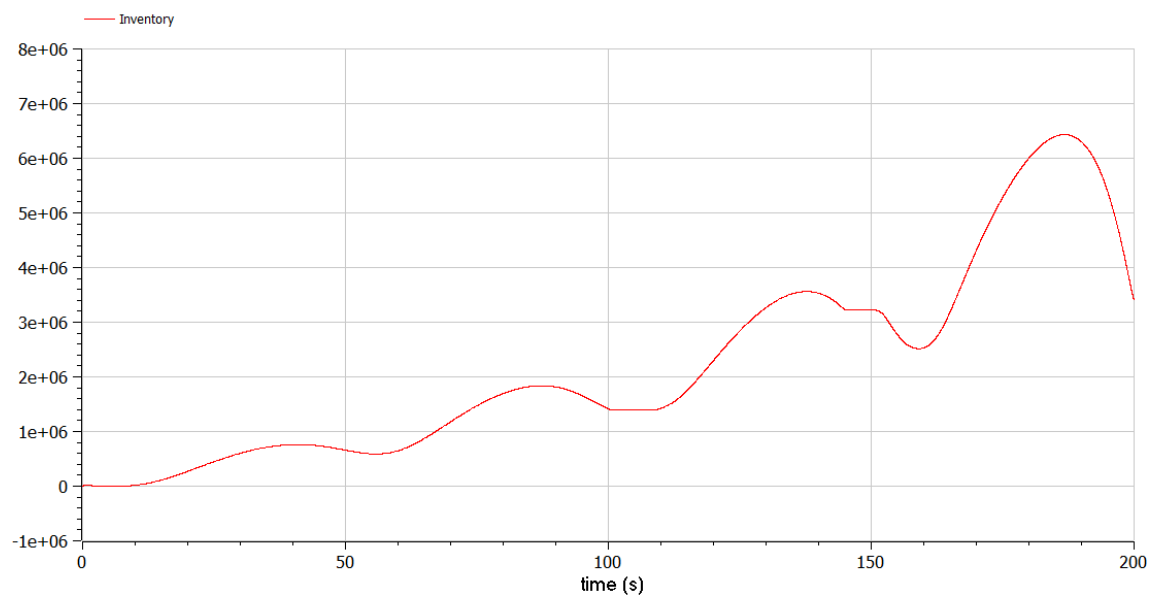


Figura 5.2: Valores de in (Inventory) a lo largo de la simulación.

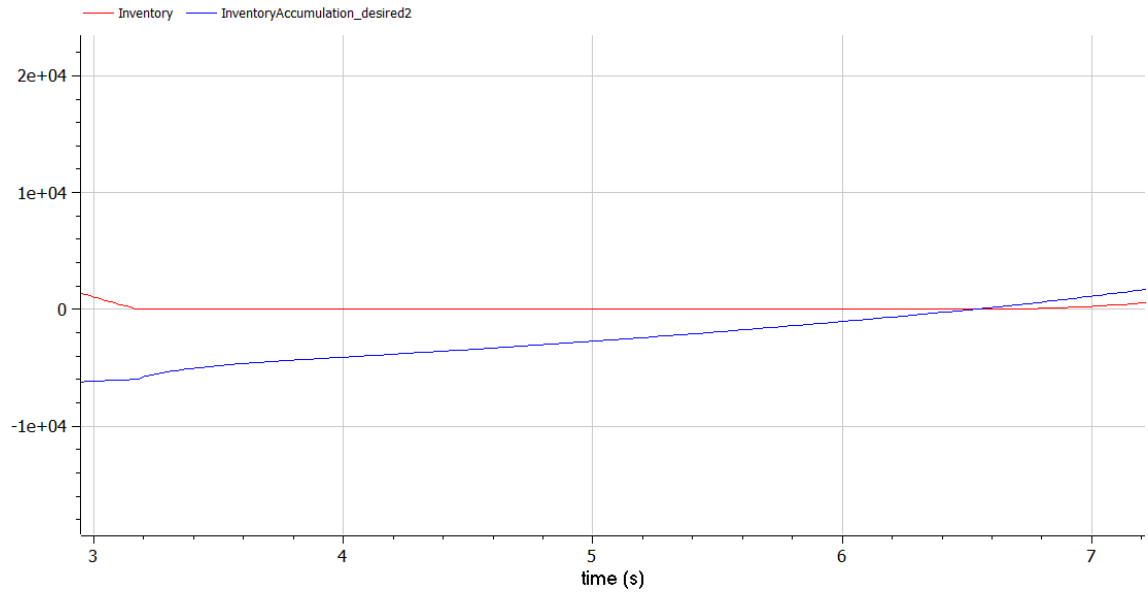


Figura 5.3: Valores de in (Inventory) y $\tilde{in}$ (InventoryAccumulation_desired2) en el período durante el cual $in(t) = 0$.

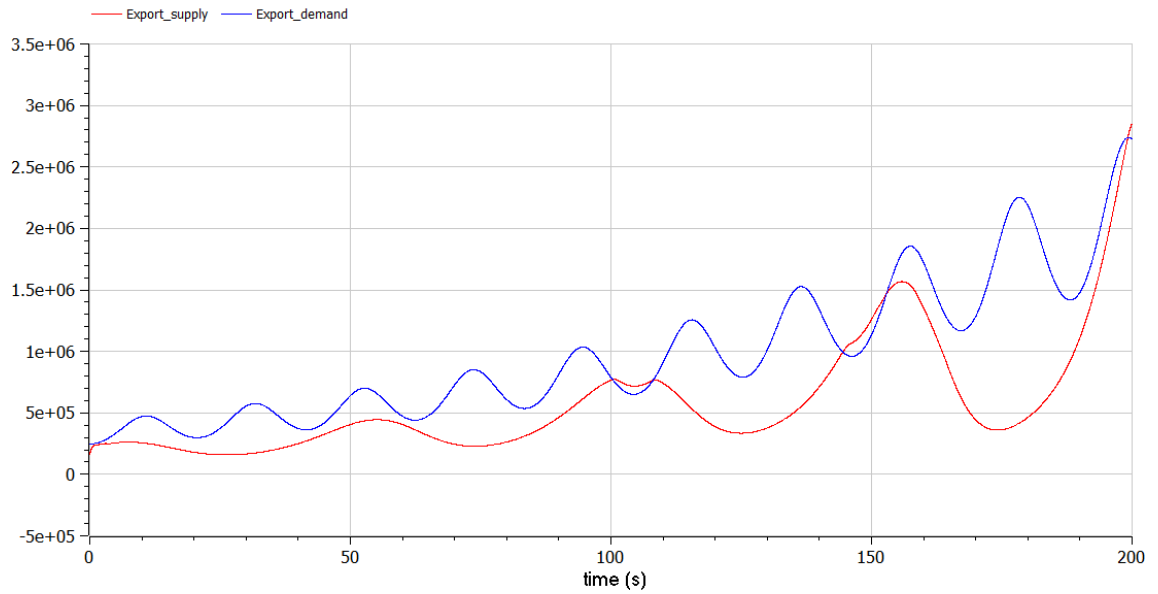


Figura 5.4: Valores de x_s (Export_supply) y x_d (Export_demand) a lo largo de la simulación.

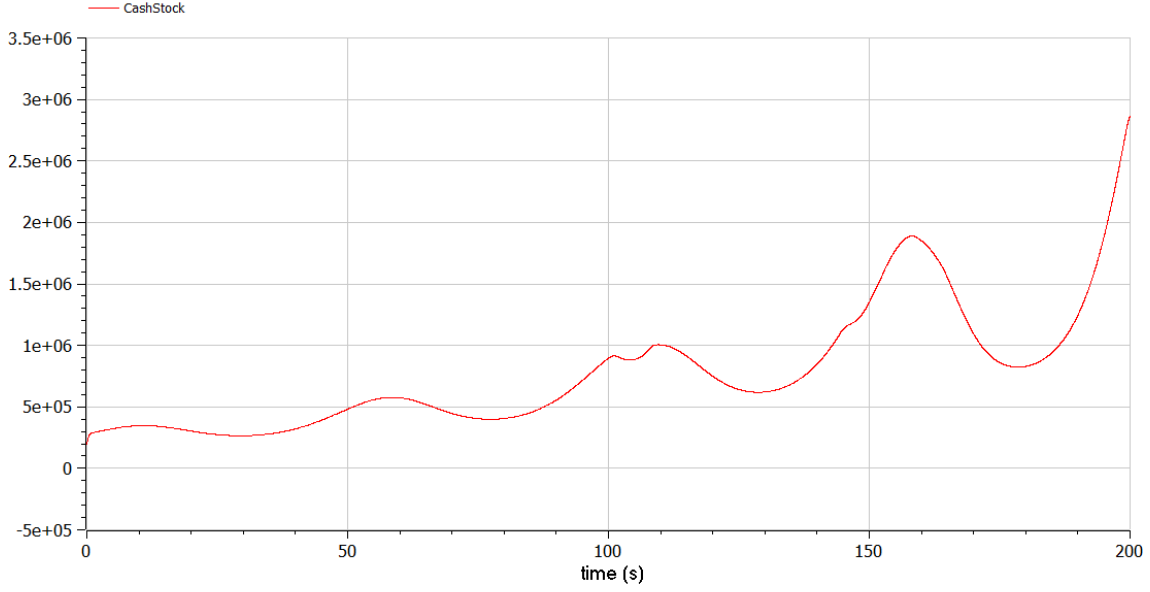


Figura 5.5: Valores de H (CashStock) a lo largo de la simulación.

Los regímenes de x

La figura 5.4 muestra que $x_s(t) < x_d(t)$ en casi toda la simulación, con notables excepciones en los períodos en que $y(t) = y_d(t)$.

Los regímenes de I_d

La figura 5.5 muestra la evolución de la variable H . Se puede observar que $H(t) > 0$ en todo momento de la simulación, por lo que

$$I_d(t) = I_w(t) .$$

Los regímenes de M

En la figura 5.6 se puede observar la evolución de las variables I_d y M . El gráfico es significativo pues muestra que en todo momento de la simulación vale $I_d(t) > M(t)$, lo cual implica que

$$M(t) = cb(t) \cdot R(t) \cdot xr(t) .$$

5.9. Soluciones de mediano plazo

En esta sección trataremos de analizar los resultados de la simulación utilizando herramientas analíticas. Al no tratarse del comportamiento asintótico de las soluciones, hablamos de soluciones de mediano plazo.

Hay una serie de variables cuya dinámica no se ve alterada por los cambios de régimen y pueden resolverse inmediatamente:

$$N(t) = N(0) \exp(\varphi t) ,$$

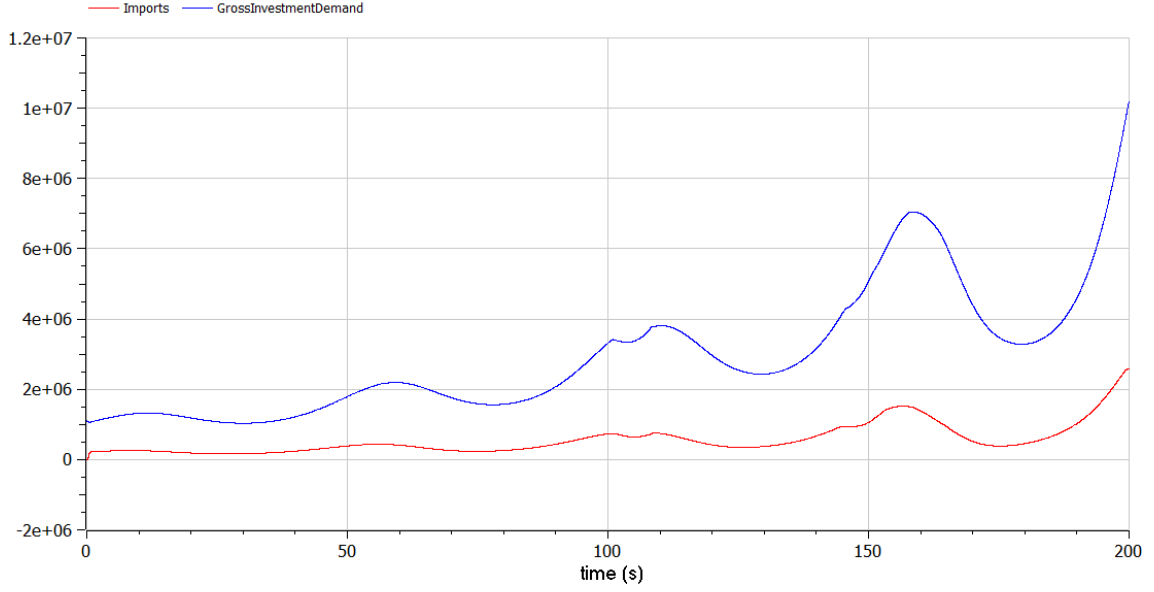


Figura 5.6: Valores de I_d (GrossInvestmentDemand) y M (Imports) a lo largo de la simulación.

$$\begin{aligned}
 Y_W(t) &= Y_W(0) \exp \left(-\frac{A}{\omega} \cos(\omega t) + Bt \right) , \\
 \hat{X}_d^{usd}(t) &= \eta A \sin(\omega t) + \eta B \\
 \Rightarrow X_d^{usd}(t) &= X_d^{usd}(0) \exp \left(-\frac{\eta A}{\omega} \cos(\omega t) + \eta Bt \right) , \\
 X_d(t) &= X_d^{usd}(t) \cdot xr(t) \quad \text{y} \\
 x_d(t) &= \frac{X_d(t)}{p_c(t)} .
 \end{aligned}$$

Recordemos también que la ecuación diferencial (5.5) puede integrarse inmediatamente, obteniéndose

$$a(t) = a(0) \exp(\Omega_0 \cdot t + \Omega_1 \cdot (k(t) - k(t_0))) .$$

Por lo visto en la sección anterior, en la simulación se pueden apreciar cuatro regímenes de funcionamiento compuestos principales:

1. $u = 1, in > 0, x_s < x_d$;
2. $u = 1, in = 0, \tilde{in} < 0, x_s < x_d$;
3. $y = y_d, in > 0, x_s > x_d$;
4. $e = 1, in > 0, x_s < x_d$.

En todos los casos se tiene que $H > 0$ y $M = cb \cdot R \cdot xr$.

En los análisis que siguen, como la simulación tiene valores $\Omega_0 = 0$ y $\Omega_1 \approx 0$, asumimos que ambos son exactamente cero, con lo cual a resulta constante.

Esta hipótesis nos permite entender el comportamiento a mediano plazo visto en las simulaciones, puesto que a largo plazo hemos visto que e y w tienden a 0, fenómeno que no llega a observarse en la simulación.

5.9.1. Régimen restringido por el capital, con existencias

Este régimen se caracteriza por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(t) &= k(t)/s , \\ in(t) &> 0 \quad \text{y} \\ x_s(t) &< x_d(t) . \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} h &= \frac{P}{Y} = \frac{Y - WB - T}{Y} = \frac{Y - (WB + S) - G}{Y} \\ &= 1 - \theta_G - v = 1 - \theta_G - \theta_S - \frac{w}{a \cdot p_c} \\ \Rightarrow \dot{\theta}_S &= \beta \theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) \\ \Rightarrow \dot{h} &= -\dot{\theta}_S - \frac{\dot{w}}{a \cdot p_c} = -\dot{\theta}_S - \frac{w\rho \cdot (e - \tau)}{a \cdot p_c} \\ &= -\beta \theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) - (1 - \theta_G - \theta_S - h)\rho \cdot (e - \tau) , \\ e &= \frac{k}{saN} \\ \Rightarrow \hat{e} &= \hat{k} - \varphi = \frac{M/p_k}{k} - \delta - \varphi = \frac{cb \cdot R \cdot xr}{k \cdot p_k} - \delta - \varphi , \\ X &= p_c \cdot x_s = p_c \cdot d \cdot E \cdot h \cdot y = d \cdot R \cdot xr \cdot h \\ \Rightarrow \widehat{R \cdot xr} &= \hat{R} = \frac{X}{R \cdot xr} - \frac{M}{R \cdot xr} = d \cdot h - cb , \\ I_d &= p_k \pi h^{\gamma_h} k \\ \Rightarrow \hat{I}_d &= \gamma_h \hat{h} + \hat{k} = \gamma_h \hat{h} + \hat{e} + \varphi . \end{aligned}$$

Definimos la variable

$$\zeta := \frac{I_d}{R \cdot xr} .$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\beta \theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) - (1 - \theta_G - \theta_S - h)\rho \cdot (e - \tau) , \\ \hat{e} &= \frac{\pi h^{\gamma_h}}{\zeta} cb - \delta - \varphi , \\ \hat{\zeta} &= \gamma_h \hat{h} + \hat{e} + \varphi - d \cdot h + cb \quad \text{y} \\ \dot{\theta}_S &= \beta \theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) , \end{aligned}$$

lo cual es un sistema de EDO con 4 variables, pues cb es una función de ζ :

$$cb(\zeta) = cbd \cdot (1 + \exp(cb f \cdot \zeta - cb t))^{-1} .$$

Este sistema tiene un equilibrio $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$ dado por

$$0 = \frac{\pi h_0^{\gamma_h}}{\zeta_0} cb(\zeta_0) - \delta - \varphi \quad \text{y} \quad (5.51)$$

$$0 = \varphi - d \cdot h_0 + cb(\zeta_0) . \quad (5.52)$$

Despejando $cb(\zeta_0)$ de la ecuación (5.52) y reemplazando en la ecuación (5.51), obtenemos

$$\zeta_0 = \frac{\pi h_0^{\gamma_h}(d \cdot h_0 - \varphi)}{\delta + \varphi} . \quad (5.53)$$

Observar que el lado derecho de (5.53) es una función estrictamente creciente de h_0 en $[\varphi/d, +\infty)$. Reemplazando (5.53) en la ecuación (5.52), se obtiene

$$0 = \varphi - d \cdot h_0 + cb \left(\frac{\pi h_0^{\gamma_h}(d \cdot h_0 - \varphi)}{\delta + \varphi} \right) . \quad (5.54)$$

Para que $\zeta_0 \geq 0$, (5.53) nos indica que es necesario y suficiente que $h_0 \geq \varphi/d = 0,005$. Evaluando el lado derecho de (5.54) en $h_0 = \varphi/d$ obtenemos $cb(0)$ que es positivo; evaluándolo en $h_0 = 1 - \theta_G = 0,98$ obtenemos $-1,95$ que es negativo. Tenemos entonces que hay una solución $h_0 \in (0,005; 0,98)$.

Como $cb(\zeta)$ es una función estrictamente decreciente, el lado derecho de (5.54) es una función estrictamente decreciente de h_0 en $(0,005; 0,98)$, lo que indica que la solución es única en ese intervalo. Numéricamente podemos obtener el valor $h_0 \approx 0,3572$. Reemplazando en (5.53) obtenemos $\zeta_0 \approx 3,826$.

Para estudiar las soluciones alrededor de $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$, estudiamos los autovalores de su matriz diferencial. Numéricamente se obtiene que los autovalores son aproximadamente

$$-4,729 , \quad 6,042 \cdot 10^{-3} + 0,1383i , \quad 6,042 \cdot 10^{-3} - 0,1383i \quad y \quad -0,01228 .$$

Gracias al teorema de Hartman-Grobman, podemos linealizar el sistema alrededor de $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$. Las soluciones tendrán entonces la forma aproximada

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h(t) \\ e(t) \\ \zeta(t) \\ \theta_S(t) \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 0,3572 \\ 0,7 \\ 3,826 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \exp(-4,729t) \begin{pmatrix} 3,729 \cdot 10^{-4} \\ 0,02831 \\ 0,9996 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \varepsilon_2 e^{i\mu} \exp((6,042 \cdot 10^{-3} + 0,1383i)t) \begin{pmatrix} 0,3497 \exp(1,614i) \\ 0,7771 \\ 0,5233 \exp(-1,661i) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \varepsilon_2 e^{-i\mu} \exp((6,042 \cdot 10^{-3} - 0,1383i)t) \begin{pmatrix} 0,3497 \exp(-1,614i) \\ 0,7771 \\ 0,5233 \exp(1,661i) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \varepsilon_3 \exp(-0,01228t) \begin{pmatrix} -0,01346 \\ 0,1909 \\ 6,675 \cdot 10^{-3} \\ 0,9815 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,3572 \\ 0,7 \\ 3,826 \\ 0 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \exp(-4,729t) \begin{pmatrix} 3,729 \cdot 10^{-4} \\ 0,02831 \\ 0,9996 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\varepsilon_2 \exp(6,042 \cdot 10^{-3}t) \begin{pmatrix} 0,3497 \cos(0,1383t + 1,614 + \mu) \\ 0,7771 \cos(0,1383t + \mu) \\ 0,5233 \cos(0,1383t - 1,661 + \mu) \\ 0 \end{pmatrix} \\
& + \varepsilon_3 \exp(-0,01228t) \begin{pmatrix} -0,01346 \\ 0,1909 \\ 6,675 \cdot 10^{-3} \\ 0,9815 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Esto es suficiente para entender las soluciones que arroja la simulación. En general, estas soluciones pueden ser aproximadas mediante la forma funcional

$$a_0 + a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + a_3 e^{b_3 t} \cos(c_3 t + d_3) .$$

A continuación se presentan tres tablas correspondientes al ajuste a datos en el período $t \in [6,535, 100,3]$ (el más extenso período bajo este régimen). En la tabla 5.8 se muestra el ajuste basado en la aproximación analítica haciendo coincidir los valores iniciales: ésta sería nuestra estimación de la solución si no conociéramos la solución numérica. Conociendo los valores de la solución numérica, se puede conseguir un mejor ajuste como el observado en la tabla 5.9, que preserva los exponentes de las funciones exponenciales y la frecuencia del coseno obtenidos analíticamente. La tabla 5.10 muestra el ajuste a datos cuando se permite que los exponentes sean distintos para las distintas variables; se omitieron aquellas funciones que resultaron redundantes (se tomo como indicación de esto que presentaran alta correlación entre parámetros y diferencias imperceptibles entre los gráficos).

	h	e	ζ	θ_S
a_0	0,3572	0,7	3,826	0
a_1	$1,015 \cdot 10^7$	$7,704 \cdot 10^8$	$2,72 \cdot 10^{10}$	0
b_1	-4,729	-4,729	-4,729	-4,729
a_2	$-1,423 \cdot 10^{-3}$	0,02018	$7,054 \cdot 10^{-4}$	0,1037
b_2	-0,01228	-0,01228	-0,01228	-0,01228
a_3	0,06173	0,1372	0,09237	0
b_3	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$
c_3	0,1383	0,1383	0,1383	0,1383
d_3	0,04648	-1,568	3,054	0
R^2	0,7507	0,6904	0,7695	0,989

Cuadro 5.8: Ajuste a datos basado en la aproximación analítica haciendo coincidir los valores iniciales.

Entendidos los comportamientos de estas variables, se puede entender el comportamiento del resto:

$$\begin{aligned}
L(t) &= e(t)N(t) , \\
y(t) &= a \cdot L(t) , \\
k(t) &= sy(t) , \\
i_w(t) &= \pi h(t)^{\gamma_h} k(t) , \\
I_d(t) &= i_w(t)p_k ,
\end{aligned}$$

	h	e	ζ	θ_S
a_0	0,3572	0,7	3,826	0
a_1	$-3,346 \cdot 10^{-21}$	$-2,541 \cdot 10^{-19}$	$-8,971 \cdot 10^{-18}$	0
b_1	-4,729	-4,729	-4,729	-4,729
a_2	$-1,451 \cdot 10^{-3}$	0,02058	$7,195 \cdot 10^{-4}$	0,1058
b_2	-0,01228	-0,01228	-0,01228	-0,01228
a_3	0,02624	0,05831	0,03926	0
b_3	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$	$6,042 \cdot 10^{-3}$
c_3	0,1383	0,1383	0,1383	0,1383
d_3	-0,387	-2,001	2,62	0
R^2	0,9665	0,9544	0,9683	0,9887

Cuadro 5.9: Mejor ajuste a datos basado en la aproximación analítica.

	h	e	ζ	θ_S
a_0	0,3542	0,7121	3,826	0
a_1	0	0	0	0
b_1	—	—	—	—
a_2	0	0	0	0,1008
b_2	—	—	—	-0,01185
a_3	0,05812	0,1475	0,08445	$3,598 \cdot 10^{-3}$
b_3	$4,081 \cdot 10^{-3}$	$2,685 \cdot 10^{-3}$	$4,97 \cdot 10^{-3}$	$-5,037 \cdot 10^{-3}$
c_3	0,1319	0,1316	0,1315	0,1309
d_3	0,0101	-1,605	3,044	-1,475
R^2	0,9977	0,9933	0,9984	1

Cuadro 5.10: Mejores ajustes, eliminando redundancias.

$$\begin{aligned}
R(t) &= \frac{I_d(t)}{\zeta(t) \cdot xr} , \\
cb(t) &= cbd \cdot (1 + \exp(cbf \cdot \zeta(t) - cbt))^{-1} , \\
M(t) &= cb(t) \cdot R(t) \cdot xr , \\
x_s(t) &= d \cdot \frac{R(t) \cdot xr}{p_c} \cdot h(t) , \\
v(t) &= 1 - \theta_G - h(t) , \\
w(t) &= (v(t) - \theta_S(t))a \cdot p_c , \\
\tilde{in}_T(t) &= y(t) \cdot h(t) - x_s(t) , \\
\dot{in}(t) &= \tilde{in}_T(t) \quad y \\
H(t) &= (R(t) - R(0)) \cdot xr + H(0) .
\end{aligned}$$

A priori, la única variable que no puede ser aproximada analíticamente resulta entonces $in(t)$.

5.9.2. Régimen sin existencias

Este régimen se caracteriza por las ecuaciones

$$y(t) = k(t)/s ,$$

$$\begin{aligned} in(t) &= 0 , \\ \widetilde{in}(t) &< 0 \quad y \\ x_s(t) &< x_d(t) . \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} X &= p_c \cdot h \cdot y = \frac{p_c \cdot h}{s} k \\ \Rightarrow \widehat{R \cdot xr} &= \frac{p_c \cdot h^{1-\gamma_h}}{sp_k \pi} \zeta - cb . \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) - (1 - \theta_G - \theta_S - h)\rho \cdot (e - \tau) , \\ \dot{e} &= \frac{\pi h^{\gamma_h}}{\zeta} cb - \delta - \varphi , \\ \dot{\zeta} &= \gamma_h \hat{h} + \hat{e} + \varphi - \frac{p_c \cdot h^{1-\gamma_h}}{sp_k \pi} \zeta + cb \quad y \\ \dot{\theta}_S &= \beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) , \end{aligned}$$

lo cual es un sistema de EDO con 4 variables. Este sistema tiene un equilibrio $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$ dado por

$$0 = \frac{\pi h_0^{\gamma_h}}{\zeta_0} cb(\zeta_0) - \delta - \varphi \quad y \quad (5.55)$$

$$0 = \varphi - \frac{p_c \cdot h_0^{1-\gamma_h}}{sp_k \pi} \zeta_0 + cb(\zeta_0) . \quad (5.56)$$

Despejando $cb(\zeta_0)$ de la ecuación (5.56) y reemplazando en la ecuación (5.55), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\pi h_0^{\gamma_h}}{\zeta_0} \left(\frac{p_c \cdot h_0^{1-\gamma_h}}{sp_k \pi} \zeta_0 - \varphi \right) - \delta - \varphi \\ &= \frac{p_c \cdot h_0}{sp_k} - \frac{\pi h_0^{\gamma_h}}{\zeta_0} \varphi - \delta - \varphi \\ \Rightarrow \zeta_0 &= \frac{\pi h_0^{\gamma_h} \varphi}{\frac{p_c \cdot h_0}{sp_k} - \delta - \varphi} . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Numéricamente, se obtiene $h_0 \approx 0,3346$ y $\zeta_0 \approx 3,807$. Estudiamos la matriz diferencial en $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$; los autovalores son aproximadamente

$$-5,235 , \quad 4,963 \cdot 10^{-3} + 0,1137i , \quad 4,963 \cdot 10^{-3} - 0,1137i \quad y \quad -0,01454 .$$

Gracias al teorema de Hartman-Grobman, podemos linealizar el sistema alrededor de $(h_0, \tau, \zeta_0, 0)$. Tal como en la sección anterior, estas soluciones pueden ser aproximadas mediante la forma funcional

$$a_0 + a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t} + a_3 e^{b_3 t} \cos(c_3 t + d_3) .$$

A continuación se presentan dos tablas correspondientes al ajuste a datos en el período $t \in [3,168, 6,534]$ (el período bajo este régimen). En la tabla 5.11 se muestra el ajuste basado en la aproximación analítica haciendo coincidir los valores iniciales. Exceptuando $\zeta(t)$, las demás curvas en este régimen son tan simples que pueden ajustarse perfectamente con una función cuadrática de la forma

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 .$$

La tabla 5.12 muestra dicho ajuste. Por su parte, la variable $\zeta(t)$ tiene la siguiente buena aproximación ($R^2 = 1$):

$$\zeta(t) \approx 4,755 - 5,155 \cdot 10^4 \exp(-4,728t) + \cos(-2,265 \cdot 10^{-2}t - 3,115) .$$

	h	e	ζ	θ_S
a_0	0,3346	0,7	3,807	0
a_1	-63,64	$-5,162 \cdot 10^3$	$-2,137 \cdot 10^5$	0
b_1	-5,235	-5,235	-5,235	-5,235
a_2	$-1,629 \cdot 10^{-3}$	0,02277	$1,136 \cdot 10^{-3}$	0,1027
b_2	-0,01454	-0,01454	-0,01454	-0,01454
a_3	0,08127	0,1433	0,05563	0
b_3	$4,963 \cdot 10^{-3}$	$4,963 \cdot 10^{-3}$	$4,963 \cdot 10^{-3}$	$4,963 \cdot 10^{-3}$
c_3	0,1137	0,1137	0,1137	0,1137
d_3	0,0787	-1,536	3,017	0
R^2	0,8617	0,9505	0,8256	-3,277

Cuadro 5.11: Ajuste a datos basado en la aproximación analítica haciendo coincidir los valores iniciales.

	h	e	θ_S
a_0	0,4133	0,7207	0,09988
a_1	$-5,254 \cdot 10^{-4}$	0,01901	$-5,257 \cdot 10^{-4}$
a_2	$-3,914 \cdot 10^{-4}$	$-3,251 \cdot 10^{-4}$	$-1,678 \cdot 10^{-5}$
R^2	1	1	1

Cuadro 5.12: Mejor ajuste a datos con una función cuadrática.

Entendidos los comportamientos de estas variables, se puede entender el comportamiento del resto haciendo los mismos despejes que en la sección anterior, excepto:

$$\begin{aligned} x_s(t) &= y(t) \cdot h(t) & \text{e} \\ in(t) &= 0 . \end{aligned}$$

5.9.3. Régimen restringido por la demanda

Este régimen se caracteriza por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(t) &= y_d(t) , \\ in(t) &> 0 & \text{y} \end{aligned}$$

$$x_s(t) > x_d(t) .$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} y(t) &= c(t) + g(t) + x_d(t) = (v(t) + \theta_G)y(t) + x_d(t) \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{x_d(t)}{h(t)} \\ \Rightarrow \dot{h} &= -\beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) - (1 - \theta_G - \theta_S - h)\rho \cdot \left(\frac{x_d(t)}{aN(t)}h^{-1} - \tau \right) , \end{aligned}$$

por lo que se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -\beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) - (1 - \theta_G - \theta_S - h)\rho \cdot \left(\frac{x_d(t)}{aN(t)}h^{-1} - \tau \right) \quad \text{y} \\ \dot{\theta}_S &= \beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + h) . \end{aligned} \quad (5.58)$$

Consideremos el período $t \in [100,94, 108,04]$ (el primero bajo este régimen). Si bien este sistema tiene equilibrios en $(1 - \theta_G - \bar{v}, \bar{v})$, $(1 - \theta_G, 0)$ y $(-\theta_G, 1)$, estos no sirven para entender la dinámica del sistema en este período: se examinaron las soluciones del sistema linealizado alrededor de estos puntos y se observó que difieren significativamente de la solución del sistema no linealizado.

Un buen ajuste se consiguió de la siguiente forma. Primero, se consideró la ecuación de $\dot{h}$ asumiendo que $\theta_S = 0$:

$$\dot{h} = -(1 - \theta_G - h)\rho \cdot \left(\frac{x_d(t)}{aN(t)}h^{-1} - \tau \right) . \quad (5.59)$$

Esto puede reducirse a una EDO de primer orden cúbica, planteando la ecuación diferencial de h^{-1} :

$$\widehat{h^{-1}} = -\hat{h} = ((1 - \theta_G)h^{-1} - 1)\rho \cdot \left(\frac{x_d(t)}{aN(t)}h^{-1} - \tau \right) .$$

Desafortunadamente, desconozco métodos analíticos para resolver esta ecuación.

Segundo, se linealizó la ecuación (5.59) alrededor de $h_0(t) := x_d(t)/(a\tau N(t))$:

$$\dot{h} \approx (1 - \theta_G - h_0(t))\rho \frac{x_d(t)}{aN(t)}h_0(t)^{-2} \cdot (h - h_0(t)) \quad (5.60)$$

$$= ((1 - \theta_G)h_0(t)^{-1} - 1)\rho\tau \cdot (h - h_0(t)) . \quad (5.61)$$

Dado que $a(100,94) = 75,54$, se consideró apropiado tomar dicho valor para la asumida constante a . Con este valor de a , la solución de (5.61) haciendo coincidir los valores iniciales consiguió ajustar los resultados de la simulación con un $R^2 = 0,9518$.

Tercero, se reemplazo esta solución aproximada $\tilde{h}$ en la ecuación (5.58), obteniéndose

$$\dot{\theta}_S \approx \beta\theta_S \cdot (1 - \theta_S)(\bar{v} - 1 + \theta_G + \tilde{h}(t)) . \quad (5.62)$$

La solución de esta ecuación, haciendo coincidir los valores iniciales, consiguió ajustar los resultados de la simulación con un $R^2 = 0,9989$.

El problema con este enfoque es que las soluciones analíticas así conseguidas no presentan una fórmula cerrada: se consigue

$$h(t) \approx \tilde{h}(t) = c(t) \exp(((1 - \theta_G)G(t) - t + t_0)\rho\tau) ,$$

donde

$$G(t) := \int_{t_0}^t h_0^{-1}(s) ds \quad \text{y}$$

$$c(t) := h(t_0) - \rho\tau \int_{t_0}^t \exp(-((1 - \theta_G)G(s) - s + t_0)\rho\tau)(1 - \theta_G - h_0(s)) ds .$$

En aras de la completitud, la ecuación (5.62) se integra de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \beta \cdot (\bar{v} - 1 + \theta_G + \tilde{h}(t)) &= \frac{\dot{\theta}_S}{\theta_S \cdot (1 - \theta_S)} = \frac{\dot{\theta}_S}{\theta_S} + \frac{\dot{\theta}_S}{1 - \theta_S} \\ \Rightarrow \beta \cdot \left((\bar{v} - 1 + \theta_G) \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{h}(s) ds \right) &= \log \frac{\theta_S(t)}{1 - \theta_S(t)} - \log \frac{\theta_S(t_0)}{1 - \theta_S(t_0)} \\ &= -\log \frac{\theta_S(t)^{-1} - 1}{\theta_S(t_0)^{-1} - 1} \\ \Rightarrow \left((\theta_S(t_0)^{-1} - 1) \exp \left(-\beta \cdot \left((\bar{v} - 1 + \theta_G) \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t \tilde{h}(s) ds \right) \right) + 1 \right)^{-1} &= \theta_S(t) . \end{aligned}$$

El mismo procedimiento aplicado al período $t \in [145,6, 150,72]$ arrojó un ajuste de h con $R^2 = 0,9741$ y un ajuste de θ_S con $R^2 = 0,997$.

Entendidos los comportamientos de h y θ_S , se pueden entender también los comportamientos de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x_d(t)}{h(t)} , \\ L(t) &= \frac{y(t)}{a} , \\ e(t) &= \frac{L(t)}{N(t)} , \\ v(t) &= 1 - h(t) - \theta_G , \\ w(t) &= (v(t) - \theta_S(t))p_c(t)a \quad \text{e} \\ in(t) &= in(t_0) . \end{aligned}$$

Para entender el comportamiento del resto de las variables, tenemos que analizar otro sistema de ecuaciones. Tenemos que

$$\begin{aligned} i_w &= \pi u^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k = \pi s^{\gamma_u} y^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k^{1-\gamma_u} = \pi s^{\gamma_u} x_d^{\gamma_u} h^{\gamma_h-\gamma_u} k^{1-\gamma_u} \\ &\Rightarrow I_d = p_k \pi s^{\gamma_u} x_d^{\gamma_u} h^{\gamma_h-\gamma_u} k^{1-\gamma_u} \\ &\Rightarrow \hat{\zeta} = \gamma_u \hat{x}_d + (\gamma_h - \gamma_u) \hat{h} + (1 - \gamma_u) \hat{k} - \frac{p_c x_d}{R \cdot x r} + cb \\ &= \gamma_u \hat{x}_d + (\gamma_h - \gamma_u) \hat{h} + (1 - \gamma_u) \hat{k} - \frac{p_c}{p_k \pi s^{\gamma_u}} \frac{x_d^{1-\gamma_u}}{h^{\gamma_h-\gamma_u} k^{1-\gamma_u}} \zeta + cb \quad \text{y} \end{aligned}$$

$$\hat{k} = \frac{i}{k} - \delta = \frac{cb \cdot R \cdot xr}{p_k k} - \delta = \frac{cb \cdot I_d}{p_k k \zeta} - \delta = \frac{cb}{\zeta} \pi s^{\gamma_u} x_d^{\gamma_u} h^{\gamma_h - \gamma_u} k^{-\gamma_u} - \delta .$$

Usando los valores de la tabla 5.7, estas expresiones se simplifican a

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} &= \frac{1}{2} \hat{x}_d + \frac{1}{2} \hat{k} - s^{-1/2} \frac{x_d^{1/2}}{k^{1/2}} \zeta + cb \quad y \\ \hat{k} &= \frac{cb}{\zeta} s^{1/2} x_d^{1/2} k^{-1/2} - \delta . \end{aligned}$$

Definiendo $\mu := (x_d/k)^{1/2}/\zeta$, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{k} &= cb \cdot s^{1/2} \mu - \delta , \\ \hat{\zeta} &= \frac{1}{2} \hat{x}_d + \frac{1}{2} \hat{k} - s^{-1/2} \mu \zeta^2 + cb \quad y \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{2} \hat{x}_d - \frac{1}{2} \hat{k} - \hat{\zeta} . \end{aligned}$$

Esto se reduce a un sistema de dos ecuaciones en dos variables, ζ y μ . Desafortunadamente no se pudo encontrar una forma de aproximar bien la solución de dicho sistema.

Si se pudieran entender los comportamientos de estas variables, se podría entender el comportamiento del resto:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{x_d(t)}{(\mu(t)\zeta(t))^2} , \\ u(t) &= \frac{y(t)}{k(t)/s} , \\ i_w(t) &= \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t) , \\ I_d(t) &= i_w(t) p_k , \\ R(t) &= \frac{I_d(t)}{\zeta(t) \cdot xr} , \\ cb(t) &= cbd \cdot (1 + \exp(cb f \cdot \zeta(t) - cb t))^{-1} , \\ M(t) &= cb(t) \cdot R(t) \cdot xr , \\ x_s(t) &= d \cdot \frac{R(t) \cdot xr}{p_c} \cdot h(t) , \\ \tilde{in}_T(t) &= x_d(t) - x_s(t) \quad y \\ H(t) &= (R(t) - R(0)) \cdot xr + H(0) . \end{aligned}$$

5.9.4. Régimen restringido por la población

Este régimen se caracteriza por las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(t) &= a \cdot N(t) , \\ in(t) &> 0 \quad y \\ x_s(t) &< x_d(t) . \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\hat{w}(t) = \rho \cdot (1 - \tau) \Rightarrow w(t) = w(t_0) \exp(\rho \cdot (1 - \tau)(t - t_0)) \quad y$$

$$\dot{\theta}_S = \beta \theta_S \cdot (1 - \theta_S) \left(\bar{v} - \frac{w(t)}{a \cdot p_c} - \theta_S \right) .$$

Linealizando esta última ecuación alrededor de $\theta_S(t) \equiv 0$, obtenemos

$$\dot{\theta}_S = \beta \cdot \left(\bar{v} - \frac{w(t)}{a \cdot p_c} \right) \theta_S$$

que puede integrarse, obteniéndose

$$\theta_S(t) = \theta_S(t_0) \exp \left(\beta \bar{v} \cdot (t - t_0) - \frac{\beta \cdot w(t_0)}{a \cdot p_c \cdot \rho \cdot (1 - \tau)} (\exp(\rho \cdot (1 - \tau)(t - t_0)) - 1) \right) .$$

Con esta función, se consiguió un ajuste con $R^2 = 0,9452$ en el período correspondiente a este régimen ($t \in [157,86, 164,04]$), tomando el valor $a(157,86)$ como constante para a .

Después de esto, se pueden entender también los comportamientos de las siguientes variables:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{w(t)}{a \cdot p_c} + \theta_S(t) \quad y \\ h(t) &= 1 - v(t) - \theta_G . \end{aligned}$$

Para entender el comportamiento del resto de las variables, tenemos que analizar otro sistema de ecuaciones. Tenemos que

$$\begin{aligned} i_w &= \pi s^{\gamma_u} y^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k^{1-\gamma_u} = \pi s^{\gamma_u} a^{\gamma_u} N^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k^{1-\gamma_u} \Rightarrow I_d = p_k \pi s^{\gamma_u} a^{\gamma_u} N^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k^{1-\gamma_u} , \\ X &= p_c \cdot x_s = p_c \cdot d \cdot E \cdot h \cdot y = d \cdot R \cdot xr \cdot h \\ &\Rightarrow \hat{\zeta} = \gamma_u \hat{N} + \gamma_h \hat{h} + (1 - \gamma_u) \hat{k} - d \cdot h + cb \quad y \\ \hat{k} &= \frac{i}{k} - \delta = \frac{cb \cdot R \cdot xr}{p_k k} - \delta = \frac{cb \cdot I_d}{p_k k \zeta} - \delta = \frac{cb}{\zeta} \pi s^{\gamma_u} a^{\gamma_u} N^{\gamma_u} h^{\gamma_h} k^{-\gamma_u} - \delta \\ &\Rightarrow \hat{u} = \hat{N} - \hat{k} = \varphi + \delta - \frac{cb}{\zeta} \pi u^{\gamma_u} h^{\gamma_h} \\ &\Rightarrow \hat{\zeta} = \varphi + \gamma_h \hat{h} - (1 - \gamma_u) \hat{u} - d \cdot h + cb . \end{aligned}$$

Nos queda así planteado un sistema de dos ecuaciones en dos variables, ζ y u :

$$\hat{\zeta} = \varphi + \gamma_h \hat{h} - (1 - \gamma_u) \hat{u} - d \cdot h + cb(\zeta) \quad y \quad (5.63)$$

$$\hat{u} = \varphi + \delta - \frac{cb(\zeta)}{\zeta} \pi u^{\gamma_u} h^{\gamma_h} . \quad (5.64)$$

Sean $\zeta_0(t)$ y $u_0(t)$ funciones tales que al reemplazar ζ y u por estas funciones, el lado derecho de éstas últimas dos ecuaciones se anula. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi + \gamma_h \hat{h} - d \cdot h + cb(\zeta_0) \quad y \\ 0 &= \varphi + \delta - \frac{cb(\zeta_0)}{\zeta_0} \pi u_0^{\gamma_u} h^{\gamma_h} . \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\zeta_0 = cb^{-1}(d \cdot h - \varphi - \gamma_h \hat{h}) \quad y$$

$$u_0 = \left(\frac{(\varphi + \delta)\zeta_0}{cb(\zeta_0)\pi h^{\gamma_h}} \right)^{1/\gamma_u} .$$

ζ_0 está bien definida donde

$$0 < d \cdot h(t) - \varphi - \gamma_h \hat{h}(t) < cbd . \quad (5.65)$$

Observar que h y $\hat{h}$ están dadas por

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 - \theta_G - \frac{w(t)}{a \cdot p_c} - \theta_S(t) \quad y \\ \hat{h}(t) &= - \frac{\frac{w(t)p \cdot (1-\tau)}{a \cdot p_c} + \beta \cdot \theta_S(t)(1 - \theta_S(t)) \left(\bar{v} - \frac{w(t)}{a \cdot p_c} - \theta_S(t) \right)}{1 - \theta_G - \frac{w(t)}{a \cdot p_c} - \theta_S(t)} , \end{aligned}$$

correspondientemente. Se chequeó numéricamente que las aproximaciones de h y $\hat{h}$ conseguidas reemplazando la aproximación de θ_S en estas igualdades, satisfacen las desigualdades (5.65) en todo el período de este régimen.

Linealizando el sistema dado por las ecuaciones (5.63) y (5.64) alrededor de ζ_0 y u_0 , obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{u} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \zeta_0 \hat{\zeta}_\zeta & \zeta_0 \hat{\zeta}_u \\ u_0 \hat{u}_\zeta & u_0 \hat{u}_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta - \zeta_0 \\ u - u_0 \end{pmatrix} , \quad (5.66)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_\zeta &= -(1 - \gamma_u) \hat{u}_\zeta + cb'(\zeta_0) , \\ \hat{\zeta}_u &= -(1 - \gamma_u) \hat{u}_u , \\ \hat{u}_\zeta &= -\frac{cb'(\zeta_0)}{\zeta_0} \pi u_0^{\gamma_u} h^{\gamma_h} + \frac{cb(\zeta_0)}{\zeta_0^2} \pi u_0^{\gamma_u} h^{\gamma_h} \quad y \\ \hat{u}_u &= -\gamma_u \frac{cb(\zeta_0)}{\zeta_0} \pi u_0^{\gamma_u-1} h^{\gamma_h} . \end{aligned}$$

El sistema (5.66) puede integrarse:

$$\begin{aligned} G(s) &:= \begin{pmatrix} \zeta_0(s) \hat{\zeta}_\zeta(s) & \zeta_0(s) \hat{\zeta}_u(s) \\ u_0(s) \hat{u}_\zeta(s) & u_0(s) \hat{u}_u(s) \end{pmatrix} , \\ \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ u(t) \end{pmatrix} &= \exp \left(\int_{t_0}^t G(s) ds \right) c(t) \quad y \\ c(t) &= \begin{pmatrix} \zeta(t_0) \\ u(t_0) \end{pmatrix} - \int_{t_0}^t \exp \left(- \int_{t_0}^s G(r) dr \right) G(s) \begin{pmatrix} \zeta_0(s) \\ u_0(s) \end{pmatrix} ds . \end{aligned}$$

Nuevamente, no se consigue una fórmula cerrada. Estas soluciones ajustan ζ con $R^2 = 0,9771$ y u con $R^2 = 0,5963$.

Una vez entendidos los comportamientos de estas variables, se puede entender el comportamiento del resto:

$$k(t) = \frac{s \cdot y(t)}{u(t)} ,$$

$$\begin{aligned}
i_w(t) &= \pi \cdot u(t)^{\gamma_u} h(t)^{\gamma_h} k(t) , \\
I_d(t) &= i_w(t) p_k , \\
R(t) &= \frac{I_d(t)}{\zeta(t) \cdot xr} , \\
cb(t) &= cbd \cdot (1 + \exp (cbf \cdot \zeta(t) - cbt))^{-1} , \\
M(t) &= cb(t) \cdot R(t) \cdot xr , \\
x_s(t) &= d \cdot \frac{R(t) \cdot xr}{p_c} \cdot h(t) , \\
\tilde{i}n_T(t) &= y(t)h(t) - x_s(t) , \\
\dot{i}n(t) &= \tilde{i}n_T(t) \quad y \\
H(t) &= (R(t) - R(0)) \cdot xr + H(0) .
\end{aligned}$$

Para encontrar el valor de $\dot{i}n(t)$ hay que integrar nuevamente: no parece tener una fórmula cerrada, por las variables involucradas en la determinación de $\tilde{i}n_T(t)$.

5.10. Conclusiones

El desarrollo del modelo TED&POP representa una innovación metodológica sustancial en el modelado macroeconómico nacional, al introducir una consistencia contable física estructurada por una tabla contable específica para cada activo tangible y financiero del sistema. En la simulación numérica presentada, se logró identificar de forma precisa la emergencia de regímenes de funcionamiento diferenciados según los cuellos de botella del sistema (restringido por capital, demanda o población).

Las ecuaciones del modelo se dedujeron en las secciones 5.2 y 5.3. En la sección 5.2 se dedujo una versión discreta del modelo, dependiente de un parámetro Δt . El procedimiento en esta sección consistió en:

1. Definición de actores y activos.
2. Planteo del modelo discreto.
 - a) Definición de stocks.
 - b) Secuencia grosera de eventos, tablas contables y ecuaciones contables.
 - c) Secuencia fina de eventos (que se puede ver en la sección 5.2.6) y ecuaciones de comportamiento.

En la sección 5.3 se tomó el límite $\Delta t \rightarrow 0$, obteniéndose así el modelo continuo. En algunos casos, las ecuaciones así obtenidas presentaban problemas, como no estar definidas en ciertas situaciones o admitir más de una solución. Esas ecuaciones se modificaron manualmente para evitar esos problemas. Por último, como muchas de las ecuaciones del modelo continuo no eran diferenciales, en la sección 5.3.2 se planteó un procedimiento para suavizarlas. No está claro que esto último haya sido necesario, porque no se hallaron diferencias entre las simulaciones del modelo suavizado y las del modelo sin suavizar. Queda pendiente la resolución rigurosa de las siguientes preguntas:

- ¿Existe solución única para el sistema sin suavizar?
- ¿Existe solución única para el sistema suavizado?
- En caso de que las preguntas anteriores sean afirmativas, ¿converge la solución del sistema suavizado a la del sistema sin suavizar cuando $\Delta \rightarrow 0$?

En la sección 5.4 se presentó la tabla del modelo. Creo que esta es una innovación no menor, puesto que hace que la presentación del modelo resulte amena y facilita chequear cosas como que el número de variables sea igual al número de ecuaciones, o las dimensiones de las variables y los parámetros.

En la sección 5.5 se dio una interpretación rigurosa de la dinámica de la productividad propuesta, y en la sección 5.6 se probó que a largo plazo el empleo y los salarios tienden a 0. Estas dos secciones pueden dar lugar a elaboraciones futuras como se ilustra en la sección 6.2.

La sección 5.7 es una exposición de las características del modelo que les parecieron significativas a mis colegas economistas del grupo, lo que sirve de justificación de la importancia práctica del modelo y augura la posibilidad de desarrollar un modelo más simple con las mismas características. Ese modelo se desarrolla en la sección 6.4.

En la sección 5.8 se presentó una simulación y se introdujo el concepto de “régimen de funcionamiento”, útil para entender los cambios abruptos observados en la simulación. La sección termina con la identificación de los distintos regímenes de funcionamiento predominantes.

En la sección 5.9 se trató de entender los resultados de la simulación mediante el empleo de herramientas analíticas. Para ello, se analizó cada régimen compuesto por separado. En cada caso, se obtuvieron aproximaciones a las soluciones analíticas mediante linealizaciones alrededor de equilibrios o funciones específicas. Muchos de estos procedimientos probaron ser útiles, pero queda pendiente darles justificaciones rigurosas en el futuro.

Las aproximaciones fueron utilizadas para entender la forma de las soluciones, y se realizaron ajustes de parámetros para tratar de hacerlas coincidir con las soluciones numéricas. En general se obtuvieron buenos valores de R^2 , lo que muestra que las aproximaciones capturan bien la forma, pero su rol ha sido explicativo y no predictivo.

Las transiciones entre un régimen y otro es una posible línea de investigación futura, así como una justificación rigurosa de la hipótesis de que la productividad es constante. Queda planteada también la discusión del rol de la matemática en este tipo de modelos: ha demostrado ser útil a la hora de plantear rigurosamente las ecuaciones, pero el tratamiento puramente analítico se muestra insuficiente para modelos tan complejos. Sin embargo, mediante el uso de dichas herramientas analíticas, ha sido posible señalar dinámicas importantes (como las de la sección 5.6) y entender lo que muestran las simulaciones.

Capítulo 6

Otros modelos dinámicos en el marco de TED&POP

6.1. Introducción

En este capítulo, expongo diversas ideas que surgieron trabajando en el modelo TED&POP del capítulo anterior. Considerando esta estrecha relación, se asumirá que el lector ha leído previamente ese capítulo, y se emplearan las notaciones y definiciones en él utilizadas, a menos que se indique lo contrario.

Las ideas aquí presentadas no constituyen un todo, ni han sido completamente desarrolladas. Más bien, constituyen el punto de partida de posibles líneas futuras de investigación en distintas direcciones.

En la sección 6.2 se plantean dinámicas alternativas para la productividad. La primera de estas alternativas se plantea para evitar las tendencia a largo plazo del modelo TED&POP al desempleo generalizado, mientras que la segunda se plantea como una alternativa para modelar la productividad por incorporación de nuevos capitales. Estas pequeñas modificaciones al modelo TED&POP concluyen con la sección 6.3, donde se muestran los primeros pasos en plantear una alternativa más sofisticada para la dinámica de la población en edad de trabajar.

En la sección 6.4 se plantea una alternativa a todo el modelo TED&POP. La idea de esta alternativa es mantener las características económicamente significativas del modelo original al mismo tiempo que se simplifica lo más posible. Así se logra eliminar uno de los actores (el Banco Central) y dos de los activos (las divisas). También se reducen las cantidades de variables, parámetros y ecuaciones, como puede observarse en la tabla del modelo. Este modelo presenta otra particularidad, que es que una de sus variables (la tasa impositiva) se declara como variable de control. A continuación se procedió a analizar el modelo, asumiendo distintas políticas gubernamentales respecto de la tasa impositiva.

En las últimas dos secciones del capítulo se analizan modelos desarrollados que no guardan relación directa con TED&POP. Cuando me uní al grupo interdisciplinario de trabajo, TED&POP era un modelo en desarrollo que todavía no había incorporado un sector externo. Para añadir dicho sector, estuve estudiando distintas alternativas. Uno de los papers que solían mencionar en el grupo era [18], en el que se propone un modelo de una economía compuesta por dos países. Había ciertas características de dicho modelo que no me convencían, por lo que desarrollé la alternativa presentada en la sección 6.5. En dicha sección, después de deducir las

ecuaciones del modelo, se encuentra una solución analítica del mismo.

Otra alternativa que se puede pensar para incorporar el sector externo, es tratar de armar un modelo con dos países que interactúen entre sí, que se base en el modelo de Goodwin. El capítulo cierra con la sección 6.6, en la cual se plantean dos modelos que van en esa línea. En el primero de los modelos planteados, uno de los países evoluciona como un modelo de Goodwin, mientras que la evolución del otro país está subordinada a la evolución del primero. En la sección 6.6.1, se resuelve el modelo analíticamente y se encuentran condiciones suficientes para que las soluciones tengan sentido; la sección termina demostrando que siempre que las soluciones tengan sentido, el modelo a largo plazo tiende al desempleo generalizado en el país subordinado.

En la sección 6.6.2, se plantea el segundo modelo. En este caso, ambos países evolucionan como modelos de Goodwin. Nuevamente se resuelve analíticamente el modelo y se proveen condiciones suficientes para que la solución tenga sentido.

6.2. Sobre la productividad del trabajo

6.2.1. Impacto de la productividad en la evolución del modelo a largo plazo

Como vimos en la sección 5.6, en el modelo TED&POP tenemos que $e(t) \rightarrow 0$ y $w(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Esta característica del modelo puede ser considerada inaceptable para algunos.

Una alternativa que evita esto surge de cambiar la dinámica de la productividad en el modelo. Se puede preservar la idea de una correspondencia entre la productividad y el capital si se propone la relación

$$\hat{a} = \Omega_0 + \Omega_1 \hat{k},$$

que al integrar da lugar a

$$a(t) = a(0) \left(\frac{k(t)}{k(0)} \right)^{\Omega_1} \exp(\Omega_0 t).$$

La cuenta de la sección 5.6 pasa a ser entonces

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{L(t)}{N(t)} = \frac{y(t)}{a(t)N(t)} \leq \frac{1}{s} \frac{k(t)}{a(t)N(t)} \\ &\leq \frac{k(0)^{\Omega_1}}{a(0)sN(0)} k(t)^{1-\Omega_1} \exp(-(\Omega_0 + \varphi)t). \end{aligned}$$

En este caso, no es inmediato que $e(t) \rightarrow 0$. El argumento análogo al de la sección 5.6 requeriría que $\Omega_1 > 1$: en tal caso, si $\liminf_{t \rightarrow +\infty} k(t) > 0$, entonces $e(t) \rightarrow 0$.

Otra alternativa es la ley de Verdoorn [36, p. 168]:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \Omega_0 + \Omega_1 \hat{y} \\ \Rightarrow a(t) &= a(0) \left(\frac{y(t)}{y(0)} \right)^{\Omega_1} \exp(\Omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e(t) \leq \frac{y(0)^{\Omega_1}}{a(0)N(0)} y(t)^{1-\Omega_1} \exp(-(\Omega_0 + \varphi)t) ,$$

y nuevamente el argumento análogo al de la sección 5.6 requeriría que $\Omega_1 > 1$. Esta alternativa tiene la ventaja adicional de que no es necesario asumir que la firma emplea todo su capital en el proceso productivo, como se comentaba en la sección 5.5.

6.2.2. Aumento de la productividad por adquisición de nuevos capitales

En esta sección presentamos una posible alternativa a la evolución de la productividad utilizada en el modelo TED&POP.

Llamemos $k(t, x)\Delta x$ a los telares instalados a tiempo t que fueron adquiridos en el intervalo de tiempo $(x - \Delta x, x)$. Si asumimos que los telares adquiridos en el intervalo $(x - \Delta x, x)$ tienen productividad del trabajo $a(x)$, y esta función es creciente, los capitalistas tenderán a utilizar primero los capitales más nuevos. Luego, para producir $y(t)$ ponchos por unidad de tiempo, usarán los capitales adquiridos en el intervalo $[t - \tau(t), t]$ donde

$$y(t) = \int_{t-\tau(t)}^t \frac{k(t, x)}{s} dx$$

Pero los telares adquiridos en el intervalo $(x - \Delta x, x)$ son $i(x)\Delta x$, por lo que tomando $h > 0$ chico tenemos que

$$\begin{aligned} k(t + h, x)\Delta x &\approx k(t, x)\Delta x - \delta h k(t, x)\Delta x \\ \Rightarrow \frac{k_t(t, x)}{k(t, x)} &= -\delta \\ \Rightarrow k(t, x) &= k(x, x) \exp(-\delta \cdot (t - x)) \\ \Rightarrow k(t, x) &= i(x) \exp(-\delta \cdot (t - x)) . \end{aligned}$$

Luego,

$$y(t) = \frac{\exp(-\delta \cdot t)}{s} \int_{t-\tau(t)}^t i(x) \exp(\delta x) dx . \quad (6.1)$$

A tiempo t y sin limitaciones de trabajadores, el capital instalado permite como máximo producir $y_k(t)$ ubc/año, donde

$$y_k(t) = \frac{\exp(-\delta \cdot t)}{s} \int_{-\infty}^t i(x) \exp(\delta x) dx .$$

Dada $y(t) \in [0, y_k(t)]$, $\tau(t) \in [0, +\infty]$ será un valor que cumpla (6.1). Dicho valor existe porque el lado derecho de (6.1) es continuo respecto de $\tau(t)$, pero no tiene que ser único porque $i(x)$ puede ser 0 en algún subintervalo de $(-\infty, t)$.

$\tau(t)$ indica qué capitales se utilizarán en el proceso productivo. Si dos valores distintos $\tau_1(t) < \tau_2(t)$ cumplen (6.1), se tiene entonces que

$$\int_{t-\tau_1(t)}^t i(x) \exp(\delta x) dx = \int_{t-\tau_2(t)}^t i(x) \exp(\delta x) dx \Rightarrow \int_{t-\tau_2(t)}^{t-\tau_1(t)} i(x) \exp(\delta x) dx = 0 .$$

Como $i(x)$ es siempre no negativa, se tiene entonces que $i(x) = 0$ en el intervalo $(t - \tau_2(t), t - \tau_1(t))$, por lo que no hay capitales adquiridos en ese intervalo y tanto $\tau_1(t)$ como $\tau_2(t)$ hacen referencia a los mismos capitales.

Los capitales adquiridos en el intervalo $(x - \Delta x, x)$ producen

$$\frac{k(t, x) \Delta x}{s}$$

ubc/año y emplean

$$\frac{k(t, x) \Delta x}{s \cdot a(x)}$$

trabajadores. Por lo tanto, se tiene que

$$L(t) = \frac{\exp(-\delta \cdot t)}{s} \int_{t-\tau(t)}^t \frac{i(x) \exp(\delta x)}{a(x)} dx.$$

Si $\tau_1(t) < \tau_2(t)$ cumplen ambos (6.1), vimos que $i(x) = 0$ en $(t - \tau_2(t), t - \tau_1(t))$, por lo que

$$\int_{t-\tau_1(t)}^t \frac{i(x) \exp(\delta x)}{a(x)} dx = \int_{t-\tau_2(t)}^t \frac{i(x) \exp(\delta x)}{a(x)} dx \quad y$$

la definición de $L(t)$ no depende de la elección de $\tau(t)$.

Si se desea simular este modelo, hay que señalar que esta formulación integral no es admitida en forma directa por Modelica (el lenguaje utilizado para simular TED&POP). Nos podemos deshacer de las integrales definiendo una variable auxiliar

$$z(t) := \int_{-\infty}^t i(x) \exp(\delta x) dx,$$

y esta formulación equivale a

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = i(t) \exp(\delta t) \\ z(0) = \int_{-\infty}^0 i(x) \exp(\delta x) dx \end{cases},$$

donde le podemos asignar el valor que querramos a $z(0)$. Esta formulación diferencial sí es admitida por Modelica. Sin embargo, cuando reescribimos (6.1) obtenemos

$$y(t) = \frac{\exp(-\delta \cdot t)}{s} (z(t) - z(t - \tau(t))),$$

y el problema es que Modelica no admite la composición de funciones $z(t - \tau(t))$. Por estas razones, otras herramientas deberían ser utilizadas para simular este modelo.

Esta alternativa puede compararse con el modelo de crecimiento de Solow con capitales vintage [31, 53].

6.3. Sobre la evolución de la población en edad de trabajar

El modelado de la población en TED&POP fue rudimentario. En esta sección indicamos como empezar a plantear una alternativa más elaborada.

Sean:

- $P(t, s)$ la cantidad de personas menores de s años a tiempo t .
- $D(t, s)$ la cantidad de personas menores de s años que mueren por unidad de tiempo a tiempo t .
- $E(t, s)$ la cantidad de personas menores de s años que emigran por unidad de tiempo a tiempo t .
- $I(t, s)$ la cantidad de personas menores de s años que inmigran por unidad de tiempo a tiempo t .
- $b(t)$ la cantidad de personas que nacen por unidad de tiempo a tiempo t .

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} P(t, s) &\approx P(t - \Delta t, s - \Delta t) - D(t - \Delta t, s - \Delta t)\Delta t - E(t - \Delta t, s - \Delta t)\Delta t \\ &\quad + I(t - \Delta t, s - \Delta t)\Delta t + b(t - \Delta t)\Delta t \\ \Rightarrow P_t(t, s) &= -P_s(t, s) - D(t, s) - E(t, s) + I(t, s) + b(t). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Llamaremos a las derivadas respecto de s de estas funciones por la letra minúscula correspondiente. Por ejemplo, observar que $p(t, s) := P_s(t, s)$ resulta ser la pirámide poblacional a tiempo t .

Derivando (6.2) respecto de s , obtenemos entonces que

$$p_t(t, s) = -p_s(t, s) - d(t, s) - e(t, s) + i(t, s). \quad (6.3)$$

Observemos que

$$P(t, 0) = D(t, 0) = E(t, 0) = I(t, 0) = 0,$$

por lo que al evaluar (6.2) en $s = 0$, obtenemos

$$p(t, 0) = b(t). \quad (6.4)$$

No es descabellado pensar que las funciones d , e , i y b dependen de los valores de $p(t, s)$ para todo s . Uno de los casos particulares de esa dependencia es la ecuación de Sharpe-Lotka-McKendrick [2, p. 146].

(6.3) y (6.4) son las ecuaciones que gobiernan la evolución de la pirámide poblacional. Para determinar p basta modelar las funciones d , e , i y b , y dar una pirámide poblacional inicial $p(0, s)$. Una vez modeladas estas funciones, si la edad de trabajar está delimitada por el intervalo $[s_1, s_2]$, se tiene entonces que la población en edad de trabajar estaría dada por

$$N(t) := P(t, s_2) - P(t, s_1) = \int_{s_1}^{s_2} p(t, s) ds.$$

6.4. Un TED&POP más simple

Teniendo en cuenta las características mencionadas en la sección 5.7, pensé un nuevo modelo más simple que tenga dichas características.

Se trata de un modelo con 4 actores

1. *Familias*
2. *Firmas*
3. *Gobierno*
4. *Resto del Mundo*

y 2 activos

1. *bien de consumo*
2. *bien de capital*

A tiempo t , las Firmas tienen $K(t)$ ubk's que emplean como capital.

En líneas generales, en el intervalo de tiempo $(t - \Delta t, t)$ tiene lugar la siguiente secuencia de eventos:

1. Las Firmas pagan $WB(t)\Delta t$ ubc's a las Familias en concepto de salarios y $T(t)\Delta t$ ubc's al Gobierno en concepto de impuestos.
2. El Gobierno paga la totalidad de los impuestos recaudados a las Familias en concepto de subsidios.
3. Las Firmas contratan trabajadores y producen $y(t)\Delta t$ ubc's.
4. Las Firmas venden $x(t)\Delta t$ ubc's al Resto del Mundo. En esta última transacción, el Resto del Mundo paga $m(t)\Delta t$ ubk's a las Firmas.
5. Las Familias consumen la totalidad de las ubc's transferidas a ellas.
6. Las Firmas invierten todas las ubk's que importaron: invierten $i(t)\Delta t$ ubk's, donde $i(t)\Delta t = m(t)\Delta t$.

Estos eventos se resumen las tablas de contabilidad 6.1 y 6.2.

	Familias	Firmas	Gobierno	Σ
Inicial	0	0	0	0
Producción	0	$+y(t)\Delta t$	0	$+y(t)\Delta t$
Salarios	$+WB(t)\Delta t$	$-WB(t)\Delta t$	0	0
Impuestos	0	$-T(t)\Delta t$	$+T(t)\Delta t$	0
Subsidios	$+T(t)\Delta t$	0	$-T(t)\Delta t$	0
Exportaciones	0	$-x(t)\Delta t$	0	$-x(t)\Delta t$
Consumo	$-(WB(t) + T(t))\Delta t$	0	0	$-(WB(t) + T(t))\Delta t$
Final	0	0	0	0

Cuadro 6.1: Contabilidad de las ubc's

	Firmas		Σ
	Corriente	Capital	
Inicial	0	$k(t_-)$	$k(t_-)$
Importaciones	$+m(t)\Delta t$	0	$+m(t)\Delta t$
Inversión	$-i(t)\Delta t$	$+i(t)\Delta t$	0
Final	0	$k(t)$	$k(t)$

Cuadro 6.2: Contabilidad de las ubk's

De las tablas de contabilidad obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
y(t) &= WB(t) + T(t) + x(t), \\
i(t) &= m(t) \quad y \\
\frac{k(t) - k(t_-)}{\Delta t} &= i(t).
\end{aligned}$$

De las exportaciones/importaciones obtenemos la ecuación

$$m(t) = p(t_-)x(t),$$

donde $p(t_-)$ indica el precio de una ubc expresada en ubk's durante el período $(t - \Delta t, t)$.

Para cerrar el modelo, se deben agregar ecuaciones de comportamiento. Para hacer esto, revisamos los eventos del período $(t - \Delta t, t)$ con mayor detenimiento.

6.4.1. Salarios e impuestos

La masa salarial está determinada por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
WB(t) &= w(t)L(t) \quad y \\
L(t) &= \frac{y(t)}{a(t)}.
\end{aligned}$$

La determinación de los salarios sigue lo propuesto por Shaikh en [50, p. 646-649] combinado con hipótesis del TED&POP:

$$\begin{aligned}
w(t) &= v(t)a(t), \\
\hat{v}(t) &= \rho \cdot (e(t) - \tau), \\
e(t) &= \frac{L(t)}{N(t)} \quad y \\
\hat{N}(t) &= \varphi.
\end{aligned}$$

La productividad del trabajo evoluciona de acuerdo al modelo de Goodwin original:

$$\hat{a}(t) = \Omega_0.$$

Y la evolución de los impuestos estará dada por

$$T(t) = \theta(t)y(t),$$

donde θ es una variable de control que tiene el Gobierno. Observar que θ podría adquirir valores negativos, correspondiendo a recaudar impuestos de las Familias para subsidiar a las Firmas.

6.4.2. Producción

La producción estará determinada por

$$\begin{aligned} y(t) &= \min\{y^*(t), y_d(t)\}, \\ y^*(t) &= \frac{k(t)}{s} \quad \text{e} \\ y_d(t) &= WB(t) + T(t) + x_d(t), \end{aligned}$$

donde x_d es una variable exógena.

6.4.3. Exportaciones e importaciones

Las exportaciones están dadas por la ecuación contable ya deducida

$$x(t) = y(t) - WB(t) - T(t),$$

y se corresponden a las importaciones a través de la otra ecuación contable ya deducida

$$m(t) = p(t)x(t),$$

donde $p(t)$ es una variable exógena.

6.4.4. Tabla del modelo

Cuadro 6.3: Variables, parámetros, unidades y ecuaciones del modelo TED&POP simple

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Variables macro			
ρ	Intensidad de la lucha de clases	1/año	[parámetro]
τ	Tasa de empleo no aceleradora de la inflación	-	[parámetro]
$p(t)$	Precio del bien de consumo	ubk/ubc	[exógena]
$y^*(t)$	Límite físico a la producción por unidad de tiempo	ubc/año	$y^*(t) = k(t)/s$
$y_d(t)$	Demanda agregada por unidad de tiempo	ubc/año	$y_d(t) = WB(t) + T(t) + x_d(t)$
$y(t)$	Producción por unidad de tiempo	ubc/año	$y(t) = \min\{y_d(t), y^*(t)\}$
$e(t)$	Tasa de empleo	-	$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$
$w(t)$	Salario por unidad de tiempo	ubc/tr-año	$w(t) = v(t)a(t)$

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$v(t)$	Participación de los salarios antes de los subsidios	-	$\hat{v}(t) = \rho \cdot (e(t) - \tau)$
$WB(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	ubc/año	$WB(t) = w(t)L(t)$
Variables de las Familias			
φ	Tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar	1/año	[parámetro]
$N(t)$	Población en edad de trabajar	tr	$\hat{N}(t) = \varphi$
Variables de las Firmas			
Ω_0	Tasa de crecimiento de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
s	Relación capital-producto	ubk-año/ubc	[parámetro]
$a(t)$	Productividad del trabajo	ubc/tr-año	$\hat{a}(t) = \Omega_0$
$L(t)$	Población empleada	tr	$L(t) = \frac{y(t)}{a(t)}$
$x(t)$	Exportaciones por unidad de tiempo	ubc/año	$x(t) = y(t) - WB(t) - T(t)$
$m(t)$	Importaciones por unidad de tiempo	ubk/año	$m(t) = p(t)x(t)$
$i(t)$	Inversión por unidad de tiempo	ubk/año	$i(t) = m(t)$
$k(t)$	Capital	ubk	$\dot{k}(t) = i(t)$
Variables de Gobierno			
$\theta(t)$	Tasa impositiva	-	[control]
$T(t)$	Impuestos por unidad de tiempo	ubc/año	$T(t) = \theta(t)y(t)$
Variables del Resto del Mundo			
$x_d(t)$	Demanda extranjera por unidad de tiempo	ubc/año	[exógena]

6.4.5. Soluciones de mediano plazo

En lo que sigue asumiremos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_d(t) = +\infty$, y que $x_d(t) > 0$ y $p(t) = 1$ para todo t .

En este modelo se tienen dos regímenes de funcionamiento:

$$y(t) \in \{y_d(t), y^*(t)\}.$$

Sea $h(t) := 1 - v(t) - \theta(t)$, observar que

$$y_d(t) < y^*(t) \Rightarrow y_d(t) = \frac{x_d(t)}{h(t)} < \frac{k(t)}{s} \quad y$$

$$y^*(t) < y_d(t) \Rightarrow y^*(t) < (1 - h(t))y^*(t) + x_d(t) \Rightarrow \frac{k(t)}{s} < \frac{x_d(t)}{h(t)}.$$

Esto nos da condiciones fáciles de chequear que caracterizan los distintos regímenes.

El Gobierno elige cómo evoluciona la variable $\theta(t)$. Empezaremos analizando el Gobierno ausente: $\theta(t) \equiv 0$.

Gobierno ausente, régimen restringido por el capital

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= y^*(t) & \text{e} \\ y^*(t) &\leq y_d(t), \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} \hat{e} &= \hat{L} - \hat{N} = \hat{y} - \hat{a} - \hat{N} = \frac{x}{k} - \Omega_0 - \varphi = \frac{1-v}{s} - \Omega_0 - \varphi & \text{y} \\ \hat{v} &= \rho \cdot (e - \tau). \end{aligned}$$

Observar que este régimen se reduce al modelo de Goodwin. Además,

$$\begin{aligned} y_d(t) &= v(t)y(t) + x_d(t) \geq y(t) \\ \Leftrightarrow x_d(t) &\geq (1 - v(t))a(t)e(t)N(t). \end{aligned}$$

Para que esto valga, es suficiente que valga para las condiciones iniciales y las tasas de crecimiento en todo momento:

$$\hat{x}_d(t) \geq -\rho \frac{e - \tau}{v^{-1} - 1} + \frac{1 - v}{s}.$$

El equilibrio del sistema es

$$\begin{aligned} e_0 &= \tau & \text{y} \\ v_0 &= 1 - s \cdot (\Omega_0 + \varphi), \end{aligned}$$

por lo que si

$$\begin{aligned} \hat{x}_d &> \Omega_0 + \varphi & \text{y} \\ x_d(0) &> s\tau \cdot (\Omega_0 + \varphi)a(0)N(0), \end{aligned}$$

entonces el régimen se mantiene a largo plazo, si se empieza suficientemente cerca del equilibrio.

Gobierno ausente, régimen restringido por la demanda

En este caso se tiene

$$\begin{aligned} y(t) &= y_d(t) & \text{e} \\ y_d(t) &\leq y^*(t). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{x_d(t)}{1-v(t)}, \\ \hat{v}(t) &= \rho \cdot (e(t) - \tau) \quad y \\ \hat{e} &= \hat{x}_d - \widehat{1-v} - \hat{a} - \hat{N} = \hat{x}_d + \frac{\rho \cdot (e(t) - \tau)}{v(t)^{-1} - 1} - \Omega_0 - \varphi. \end{aligned}$$

Supongamos que a partir de cierto t_0 tenemos que $\hat{x}_d(t) > \Omega_0 + \varphi$ y $e(t_0) > \tau$. En tal caso, tenemos que tanto v como e crecen indefinidamente y para algún $t_1 > t_0$, v alcanza el valor 1, lo cual es absurdo pues tendríamos que $x_d(t_1) = (1-v(t_1))y_d(t_1) = 0$. Esto quiere decir que antes de t_1 se cambia al régimen $y^*(t) < y_d(t)$.

Supongamos ahora que a partir de cierto t_0 tenemos que $\hat{x}_d(t) < \Omega_0 + \varphi$ y $e(t_0) < \tau$. En tal caso, tenemos que tanto v como e decrecen indefinidamente y $v \rightarrow 0$. Este escenario podría sostenerse a largo plazo si $x_d(t)/k(t) < 1/s$ cuando $t \rightarrow +\infty$. Para analizar esto, observemos que

$$\dot{k} = x_d \Rightarrow k(t) = k(t_0) + \int_{t_0}^t x_d(u) du.$$

Como $x_d(t) \rightarrow +\infty$ cuando $t \rightarrow +\infty$, se tiene que $k(t) \rightarrow +\infty$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_d(t)}{k(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{x}_d(t)}{x_d(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_d(t).$$

Luego, este escenario podría mantenerse a largo plazo si $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_d(t)$ existe y es menor que $1/s$.

Gobierno presente

Podemos ahora continuar con el caso del gobierno presente. Observar que la participación de las ganancias es

$$\frac{y(t) - WB(t) - T(t)}{y(t)} = 1 - v(t) - \theta(t) = h(t),$$

por lo que la elección de θ del gobierno impacta directamente sobre dicha participación. Analizaremos el caso más extremo de esto, en el que el Gobierno tiene absoluto control sobre h . Asumiremos que aún así, el Gobierno debe garantizar que en todo momento $h_{\min} \leq h(t) \leq h_{\max}$ donde $0 < h_{\min} < h_{\max} < 1$ son parámetros entre los cuales se garantiza la paz social. A largo plazo, el Gobierno trataría de aumentar el empleo.

Observar que

$$e = \frac{y}{aN} \leq \frac{k}{saN},$$

por lo que el empleo siempre está limitado por el capital de las Firmas. Además, si $y = y_d$, tenemos que

$$y_d = \frac{x_d}{h} \leq \frac{k}{s},$$

por lo que el Gobierno puede acercarse tanto como desee a la cota, reduciendo h . También debemos recordar que

$$\dot{k} = x = hy.$$

En el régimen $y = y_d$, se tiene entonces que $\dot{k} = hy_d = x_d$, por lo que la acumulación de capital será independiente del valor de la variable h . En el régimen $y = k/s$, se tiene en cambio que $\dot{k} = hk/s$, por lo que la acumulación de capital será mayor cuanto mayor sea el valor de h .

Estas consideraciones sobre la acumulación de capital y el empleo dan una idea clara de cuál debería ser la política gubernamental. En el régimen $y = y_d$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{k} &= x_d & y \\ e &= \frac{x_d}{haN}, \end{aligned}$$

por lo que el Gobierno en este caso debería tomar el menor valor que pueda de h , pues este aumenta el empleo y no afecta la acumulación de capital. En el régimen $y = k/s$, se tiene en cambio que

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \frac{hk}{s} & y \\ e &= \frac{k}{saN}, \end{aligned}$$

por lo que el Gobierno en este caso debería tomar el mayor valor que pueda de h , pues este aumenta la acumulación de capital y no afecta el empleo.

Como la disminución de h en el régimen $y = y_d$ lleva al régimen $y = k/s$, el Gobierno debería en la medida de lo posible tomar $h(t) = h^*(t)$, donde

$$h^*(t) = \frac{x_d(t)s}{k(t)};$$

en general, el Gobierno debería tomar

$$h(t) = \begin{cases} h_{\min} & \text{si } h^*(t) < h_{\min} \\ h_{\max} & \text{si } h^*(t) > h_{\max} \\ h^*(t) & \text{si no} \end{cases}.$$

Estos son 3 regímenes simples. Observemos que

$$\begin{aligned} h^*(t) < h_{\min} &\Rightarrow h^*(t) < h(t) \Rightarrow \frac{x_d(t)}{h(t)} < \frac{k(t)}{s} \Rightarrow y_d(t) < y^*(t), \\ h^*(t) > h_{\max} &\Rightarrow h^*(t) > h(t) \Rightarrow \frac{x_d(t)}{h(t)} > \frac{k(t)}{s} \Rightarrow y_d(t) > y^*(t) & y \\ h_{\min} \leq h^*(t) \leq h_{\max} &\Rightarrow h^*(t) = h(t) \Rightarrow \frac{x_d(t)}{h(t)} = \frac{k(t)}{s} \Rightarrow y_d(t) = y^*(t), \end{aligned}$$

por lo que los 3 regímenes simples de h definen exactamente 3 regímenes compuestos.

Procedemos a analizar los regímenes. Para simplificar la presentación, asumiremos que existe $\hat{x}_d(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_d(t)$, aunque los resultados que siguen pueden generalizarse considerando $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_d(t)$ y $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \hat{x}_d(t)$.

$$\underline{h^*(t) < h_{\min}}:$$

Se tiene que $y_d(t) < y^*(t) \Rightarrow y(t) = y_d(t)$ y $\dot{k}(t) = x_d(t)$. Para ver si este régimen es sostenible a largo plazo, hay que ver qué pasa con $h^*(t)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_d(t)s}{k(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{x}_d(t)s}{x_d(t)} = s\hat{x}_d(+\infty),$$

por lo que si $\hat{x}_d(+\infty) > h_{\min}/s$ el régimen no se mantiene a largo plazo.

Si el régimen se mantiene a largo plazo, sea $\varepsilon > 0$, existe entonces t_ε tal que $h^*(t) < h_{\min}$ y $|\hat{x}_d(t) - \hat{x}_d(+\infty)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_\varepsilon$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \hat{x}_d(+\infty) - \varepsilon &< \hat{x}_d(t) < \hat{x}_d(+\infty) + \varepsilon \quad \forall t \geq t_\varepsilon \\ \Rightarrow x_d(t_\varepsilon) \exp((t - t_\varepsilon)(\hat{x}_d(+\infty) - \varepsilon)) &< x_d(t) < x_d(t_\varepsilon) \exp((t - t_\varepsilon)(\hat{x}_d(+\infty) + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Como

$$e(t) = \frac{x_d(t)}{h_{\min}a(t)N(t)},$$

se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) < \Omega_0 + \varphi \\ +\infty & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) > \Omega_0 + \varphi \end{cases}.$$

$$\underline{h_{\min} \leq h^*(t) \leq h_{\max}}:$$

Se tiene que $y_d(t) = y^*(t) = y(t)$ y $\dot{k}(t) = x_d(t)$. Con las mismas cuentas del caso anterior vemos que si $\hat{x}_d(+\infty) \notin [h_{\min}/s, h_{\max}/s]$, el régimen no se mantiene a largo plazo.

Si el régimen se mantiene a largo plazo, como

$$e(t) = \frac{k(t)}{sa(t)N(t)},$$

se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{k}(t)}{sa(t)N(t) \cdot (\Omega_0 + \varphi)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) < \Omega_0 + \varphi \\ +\infty & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) > \Omega_0 + \varphi \end{cases}.$$

$$\underline{h_{\max} < h^*(t)}:$$

Se tiene que $y_d(t) > y^*(t) \Rightarrow y(t) = y^*(t)$ y $\dot{k}(t) = h_{\max}k(t)/s$. En este caso tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x_d(t)s}{k(t)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) < h_{\max}/s \\ +\infty & \text{si } \hat{x}_d(+\infty) > h_{\max}/s \end{cases},$$

por lo que si $\hat{x}_d(+\infty) < h_{\max}/s$ el régimen no se mantiene a largo plazo.

Si el régimen se mantiene a largo plazo, como

$$e(t) = \frac{k(t)}{sa(t)N(t)},$$

se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } h_{\text{máx}}/s < \Omega_0 + \varphi \\ +\infty & \text{si } h_{\text{máx}}/s > \Omega_0 + \varphi \end{cases}.$$

En el caso particular en que $\hat{x}_d$ es un parámetro, se ve fácilmente que el comportamiento de h^* en cada régimen es monótono, y gracias a esto podemos afirmar que:

- Si $\hat{x}_d < h_{\text{mín}}/s$, a largo plazo se tiene que $h^*(t) < h_{\text{mín}}$.
- Si $h_{\text{mín}}/s < \hat{x}_d < h_{\text{máx}}/s$, a largo plazo se tiene que $h_{\text{mín}} < h^*(t) < h_{\text{máx}}$.
- Si $h_{\text{máx}}/s < \hat{x}_d$, a largo plazo se tiene que $h_{\text{máx}} < h^*(t)$.

6.5. Una alternativa al modelo de Dávila-Fernández y Libânio

En [18] se presenta un modelo de Goodwin con restricción en la balanza de pagos. Parte del trabajo que inicialmente hice en el desarrollo de TED&POP fue leer ese paper. Ciertas características del modelo no me resultaban convincentes, por lo que desarrollé una alternativa que presento a continuación.

En esta sección, dada una variable $x(t)$, notaremos $\Delta x := x(t) - x(t_-)$.

El modelo tiene 2 países:

1. *Sur*
2. *Norte*

Cada país tiene a su vez 2 actores:

1. *Familias*
2. *Firmas*

Se tiene entonces un total de 4 actores. El modelo cuenta con 3 activos:

1. *bien*
2. *peso*
3. *dólar*

Las unidades de estos activos serán abreviadas *ub*, *ars* y *usd*, respectivamente. También se emplearán las unidades *año* y *trabajador* previamente utilizadas.

Ambos países funcionan según la misma dinámica, la diferencia (si la hay) se halla en los valores iniciales de sus variables y los valores de sus parámetros. Por esta razón notaremos a las variables del país Norte de la misma manera que las del

país Sur, con la única diferencia siendo que las variables del país Norte presentan un superíndice f (por *foreign, extranjero* en inglés). Procedemos entonces a elaborar sólo la dinámica del país Sur.

A tiempo t las Firms del Sur tienen un stock $M(t)$ [ars] de pesos (sus *depósitos*) y un stock $k(t)$ [ub] de bienes (su *capital*). La suma de los stocks de pesos debe dar 0, por lo que las Firms del Norte tienen un stock $-M(t)$ de pesos que neutraliza al stock de las Firms del Sur. Por la misma razón, las Firms del Sur tienen un stock $-M^f(t)$ de dólares.

A grandes rasgos, en el intervalo de tiempo (t_-, t) la siguiente secuencia de eventos tiene lugar en el país Sur (a menos que se especifique lo contrario, se trata de actores del Sur):

1. Las Firms pagan $WB(t)\Delta t$ pesos a las Familias en concepto de salarios y $PD(t)\Delta t$ pesos a las Familias en concepto de ganancias distribuidas.
2. Las Firms contratan trabajadores y producen $y(t)\Delta t$ bienes.
3. Las Firms venden $c(t)\Delta t$ bienes a las Familias.
4. Las Familias consumen la totalidad de los bienes vendidos a ellas.
5. Las Firms del Sur les venden $x(t)\Delta t$ bienes a las Firms del Norte y les compran $x^f(t)\Delta t$ bienes. Las Firms reciben los correspondientes pagos en moneda local: las Firms del Sur reciben $X(t)\Delta t$ pesos y las Firms del Norte reciben $X^f(t)\Delta t$ dólares.
6. Las Firms invierten $i(t)\Delta t$ bienes, además de todos los bienes que importaron.

Estos eventos pueden resumirse en las tablas de contabilidad 6.4 y 6.5. Omití la tabla del flujo de dólares por ser análoga a la del flujo de pesos.

		Sur		Norte	
	Familias	Firms		Firms	Σ
		Corriente	Capital		
Familias	$-C$	$+C$			0
Inversiones		$+I$	$-I$		0
Norte		$+X$		$-X$	0
Salarios	$+WB$	$-WB$			0
Ganancias	$+PD$	$-P$	$+PU$		0
Σ	0	0	$+\Delta M/\Delta t$	$-\Delta M/\Delta t$	0

Cuadro 6.4: Flujo de pesos

Estas tablas son más parecidas a las de la literatura tradicional que las que vimos hasta ahora. Puede observarse que los Δt que aparecían en toda la tabla ahora aparecen sólo en la última fila: esto es porque las entradas en esta tabla representan flujos (volúmenes por unidad de tiempo), mientras que en las tablas anteriores representaban el volumen total transferido durante todo el intervalo (t_-, t) . Como los stocks divididos por Δt no representan nada, las filas “inicial” y “final” otrora vistas han sido reemplazadas por la última fila que sería “final” menos “inicial” e indica el cambio por unidad de tiempo en el stock correspondiente.

	Sur			Norte			Σ
	Familias	Firmas		Familias	Firmas		
		Corriente	Capital		Corriente	Capital	
Producción		y			y^f		
Familias	$+c$	$-c$		$+c^f$	$-c^f$		0
Inversiones		$-i$	$+i$		$-i^f$	$+i^f$	0
Sur			$+x^f$		$-x^f$		0
Norte		$-x$				$+x$	0
Consumo	$-c$			$-c^f$			
Σ	0	0	$\Delta k/\Delta t$	0	0	$\Delta k^f/\Delta t$	

Cuadro 6.5: Flujo de bienes

Puede pensarse que en la ecuación que teníamos con el viejo formato, simplemente pasamos restando la variable correspondiente a la fila “inicial” y dividimos por Δt . Por ejemplo, en la columna “capital” de la tabla 6.4, con el antiguo formato tendríamos la ecuación

$$M(t) = M(t_-) - I(t)\Delta t + PU(t)\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta t} = -I(t) + PU(t),$$

pero esta última es la ecuación que conseguimos con el nuevo formato. Por último, se han omitido los ceros que no aparecen en las columnas y filas finales, y las entradas de la columna final que no suman 0, por considerarse redundantes.

De estas tablas se obtienen las ecuaciones

$$P(t) = PD(t) + PU(t),$$

$$C(t) = WB(t) + PD(t),$$

$$WB(t) + P(t) = C(t) + I(t) + X(t),$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = PU(t) - I(t),$$

$$y(t) = c(t) + i(t) + x(t),$$

$$\frac{\Delta k}{\Delta t} = x^f(t) + i(t)$$

y las correspondientes ecuaciones con superíndice f .

Sea $p(t_-)$ [ars/ub] el precio en pesos de los bienes que venden las Firmas del Sur en el intervalo $(t - \Delta t, t)$. Las ecuaciones que conectan las tablas entre sí son

$$C(t) = p(t_-) \cdot c(t),$$

$$I(t) = p(t_-) \cdot i(t) \quad \text{y}$$

$$X(t) = p(t_-) \cdot x(t).$$

y las correspondientes ecuaciones con superíndice f .

Repasemos ahora los hechos del intervalo $(t - \Delta t, t)$, para plantear las ecuaciones de comportamiento.

6.5.1. Salarios y ganancias distribuidas

Las Firms pagan los salarios del trabajo realizado en el período (t_{-2}, t_-) y distribuyen parte de las ganancias conseguidas en el mismo período:

$$\begin{aligned} WB(t) &= w(t_{-2})L(t_-) & \text{y} \\ PD(t) &= c_K P(t_-), \end{aligned}$$

donde c_K (adimensional) es un parámetro.

6.5.2. Producción

Las Firms producen de acuerdo a la demanda del período anterior:

$$y(t) = c(t_-) + i(t_-) + x(t_-).$$

Para hacerlo, contratan a $L(t)$ trabajadores, donde

$$L(t) = \frac{y(t)}{q(t_-)}$$

y $q(t_-)$ [ub/tr-año] es la productividad del trabajo. El salario $w(t)$ se consigue a través de un acuerdo entre las Firms y las Familias, y responde a la ecuación

$$\frac{\Delta w}{w(t_-)} = \lambda_0 \Delta t + \lambda_1 u(t_-) \Delta t + \lambda_2 \frac{q(t_-) - q(t_{-2})}{q(t_{-2})} + \lambda_3 \frac{p(t_-) - p(t_{-2})}{p(t_{-2})},$$

donde λ_0 [1/año], λ_1 [1/año], λ_2 (adimensional) y λ_3 (adimensional) son parámetros.

6.5.3. Exportaciones e importaciones

Las Firms del Sur desean invertir para aumentar su capital y parte de los bienes destinados a esto se los compran a las Firms del Norte. Las Firms del Sur importan $x^f(t)\Delta t$ bienes. Se tiene que

$$x^f(t) = (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f(t_-) + \xi_2 u(t_-)) k(t_-),$$

donde ξ_0 [1/año], ξ_1 [1/año] y ξ_2 [1/año] son parámetros.

$$\varepsilon^f(t) = \frac{p(t) \cdot xr(t)}{p^f(t)}$$

son los *términos de intercambio* del Sur (adimensional) y $xr(t_-)$ [usd/ars] indica el precio de un peso expresado en dólares durante el período (t_-, t) .

6.5.4. Inversiones

Para invertir, además de usar las importaciones, las Firms compran $i(t)\Delta t$ bienes locales. Se tiene que

$$i(t) = (\gamma(t) - \gamma_1 \nu(t_-) + \gamma_2 u(t_-)) k(t_-)$$

donde γ_1 [1/año] y γ_2 [1/año] son parámetros,

$$Y(t) = p(t_-)y(t) \quad y$$

$$\nu(t) = \frac{WB(t)}{Y(t)}.$$

Por último, la dinámica de $\gamma(t)$ [1/año] tiene que ver con el manejo de la deuda por parte de las Firms. La deuda $D(t)$ [ars] de las Firms está dada por

$$D(t) = M^f(t) \cdot xr^f(t) - M(t).$$

En el caso en que $D(t_-) > 0$, las Firms buscan reducir su deuda en el intervalo (t_-, t) , y para lograr esto recortan sus inversiones; mientras que si $D(t_-) < 0$, sus ahorros las incentivan a invertir más. Esto se plantea mediante la ecuación

$$\frac{\Delta\gamma}{\Delta t} = -\gamma_0 \cdot D(t_-),$$

donde γ_0 [1/ars-año²] es un parámetro.

6.5.5. Observaciones importantes

Es necesario prestar atención a un par de puntos.

Primero, analizando las tablas contables habíamos planteado que

$$y(t) = c(t) + i(t) + x(t),$$

pero cuando introducimos las ecuaciones de comportamiento, planteamos que

$$y(t) = c(t_-) + i(t_-) + x(t_-).$$

Esto nos lleva a pensar que en realidad hay una diferencia entre lo producido y lo demandado, y que dicha diferencia debería expresarse en variaciones de un stock de bienes en la cuenta corriente de las Firms. Recordando al modelo TED&POP, llamemos $in(t)$ a dicho stock. Se tendría entonces que

$$\frac{\Delta in}{\Delta t} = c(t_-) + i(t_-) + x(t_-) - c(t) - i(t) - x(t).$$

Asumiendo que todas estas funciones son suficientemente suaves, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ obtenemos

$$\dot{in} = 0,$$

lo que revela que el stock $in(t)$ es innecesario en el modelo continuo, pues podemos tomar $in(0) = 0 \Rightarrow in(t) \equiv 0$.

Segundo, en las ecuaciones de comportamiento, se utilizaron los productos por $xr(t)$ y $xr^f(t)$ como una forma práctica de traducir valores en pesos a valores en dólares y viceversa. Por ejemplo, pensemos en la ecuación de las importaciones:

$$x^f(t) = (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f(t_-) + \xi_2 u(t_-)) k(t_-).$$

En esta ecuación, $\varepsilon^f(t_-) = p(t_-) \cdot xr(t_-)/p^f(t_-)$ representa la razón entre el precio del bien importado y el precio del bien local. Pero, ¿cuál es realmente el precio del bien importado? Para importar un bien, las Firms del Sur tienen que hacerse con $p^f(t)$ dólares, y como el precio de un dólar es $xr^f(t)$ pesos, esto requiere $p^f(t) \cdot xr^f(t)$ pesos. Entonces tendría más sentido definir

$$\varepsilon^f(t) = \frac{p(t)}{p^f(t) \cdot xr^f(t)}.$$

Observar que hemos asumido implícitamente que

$$xr^f(t) = \frac{1}{xr(t)}.$$

En principio, esto no es cierto: los precios de compra y venta de dólares difieren, y eso permite que las casas de cambio produzcan ganancias. Sin embargo, si dicho mercado es competitivo, esa diferencia es pequeña y la última ecuación es aproximadamente cierta. Agregamos entonces esta última ecuación al modelo.

6.5.6. Precios y productividad

Las Firms fijan los precios de manera similar a como se determinan los salarios:

$$\frac{\Delta p}{p(t_-)} = \zeta_0 \Delta t + \zeta_1 u(t_-) \Delta t - \zeta_2 \frac{q(t_-) - q(t_{-2})}{q(t_{-2})} + \zeta_3 \frac{\Delta w}{w(t_-)},$$

donde ζ_0 [1/año], ζ_1 [1/año], ζ_2 (adimensional) y ζ_3 (adimensional) son parámetros. Además, asumiremos que $xr(t)$ es un parámetro.

La productividad del trabajo $q(t)$ evoluciona según la ecuación

$$\frac{\Delta q}{q(t_-)} = \Omega_0 \Delta t + \Omega_1 \frac{\Delta y}{y(t_-)}.$$

6.5.7. Tabla del modelo

La tabla 6.6 muestra los parámetros, variables, unidades y ecuaciones correspondientes al Sur. Las correspondientes al Norte se han omitido por ser redundantes. Para conseguir dichos parámetros, variables y ecuaciones, basta con tomar la tabla a partir de la fila que dice “Variables del Sur” y hacer los siguientes cambios:

- A todas las variables y parámetros que no tengan superíndice f , agregárselo; a todas las variables y parámetros que tengan superíndice f , sacárselo.
- Efectuar los siguientes reemplazos: “Sur” por “Norte”, “pesos” por “dólares” y “ars” por “usd”.

Cuadro 6.6: Variables, parámetros, unidades y ecuaciones del Sur

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Variables macro			

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$xr(t)$	Tipo de cambio del Sur	usd/ars	[parámetro]
$xr^f(t)$	Tipo de cambio del Norte	ars/usd	$xr^f(t) = xr(t)^{-1}$
Variables del Sur			
λ_0	Tasa de crecimiento secular del salario	1/año	[parámetro]
λ_1	Propensión al crecimiento de los salarios respecto de la utilización de la capacidad instalada	1/año	[parámetro]
λ_2	Elasticidad de los salarios respecto de la productividad	-	[parámetro]
λ_3	Elasticidad de los salarios respecto de los precios	-	[parámetro]
$\varepsilon^f(t)$	Términos de intercambio	-	$\varepsilon^f(t) = \frac{p(t) \cdot xr(t)}{p^f(t)}$
$y(t)$	Producción física por unidad de tiempo	ub/año	$y(t) = c(t) + i(t) + x(t)$
$Y(t)$	Producción nominal por unidad de tiempo	ars/año	$Y(t) = p(t)y(t)$
$w(t)$	Salario nominal por unidad de tiempo	ars/tr-año	$\hat{w}(t) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t) + \lambda_2 \hat{q}(t) + \lambda_3 \hat{p}(t)$
$WB(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	ars/año	$WB(t) = w(t)L(t)$
$\nu(t)$	Participación de los salarios	-	$\nu(t) = \frac{WB(t)}{Y(t)}$
Variables de las Familias			
$C(t)$	Consumo nominal por unidad de tiempo	ars/año	$C(t) = WB(t) + PD(t)$
$c(t)$	Consumo real por unidad de tiempo	ub/año	$c(t) = \frac{C(t)}{p(t)}$
Variables de las Firmas			
Ω_0	Tasa de crecimiento secular de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
Ω_1	Elasticidad de la productividad del trabajo con respecto a la producción	-	[parámetro]

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
ζ_0	Inflación secular	1/año	[parámetro]
ζ_1	Propensión a la inflación por demanda agregada	1/año	[parámetro]
ζ_2	Elasticidad negativa de los precios respecto de la productividad	-	[parámetro]
ζ_3	Elasticidad de los precios respecto de los salarios	-	[parámetro]
ξ_0	Inversión secular a través de importaciones	1/año	[parámetro]
ξ_1	Propensión a invertir a través de importaciones respecto de los términos de intercambio	1/año	[parámetro]
ξ_2	Propensión a invertir a través de importaciones respecto de la utilización de la capacidad instalada	1/año	[parámetro]
c_K	Propensión a distribuir ganancias	-	[parámetro]
s	Relación capital-producto	año	[parámetro]
γ_0	Fuerza de la deuda sobre la inversión	1/ars-año ²	[parámetro]
γ_1	Propensión negativa a invertir internamente respecto de la participación de los salarios	1/año	[parámetro]
γ_2	Propensión a invertir internamente respecto de la utilización de la capacidad instalada	1/año	[parámetro]
$p(t)$	Precio del bien	ars/ub	$\hat{p} = \zeta_0 + \zeta_1 u - \zeta_2 \hat{q} + \zeta_3 \hat{w}$
$q(t)$	Productividad del trabajo (físico)	ub/tr-año	
$L(t)$	Población empleada	tr	$L(t) = \frac{y(t)}{q(t)}$

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$x^f(t)$	Importaciones reales por unidad de tiempo (físico)	ub/año	$x^f(t) = (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f(t) + \xi_2 u(t)) k(t)$
$X(t)$	Exportaciones nominales por unidad de tiempo	ars/año	$X(t) = p(t)x(t)$
$P(t)$	Ganancias por unidad de tiempo	ars/año	$P(t) = Y(t) - WB(t)$
$PD(t)$	Ganancias distribuidas por unidad de tiempo	ars/año	$PD(t) = c_K P(t)$
$PU(t)$	Ganancias no distribuidas por unidad de tiempo	ars/año	$PU(t) = P(t) - PD(t)$
$u(t)$	Utilización de la capacidad instalada	-	$u(t) = \frac{y(t)}{k(t)/s}$
$i(t)$	Inversión bruta real por unidad de tiempo	ub/año	$i(t) = (\gamma(t) - \gamma_1 \nu(t) + \gamma_2 u(t)) k(t)$
$I(t)$	Inversión bruta nominal por unidad de tiempo	ars/año	$I(t) = p(t)i(t)$
$\gamma(t)$	Inversión interna autónoma	1/año	$\dot{\gamma}(t) = -\gamma_0 \cdot D(t)$
$D(t)$	Deuda	ars	$D(t) = M^f(t) \cdot x r^f(t) - M(t)$
$k(t)$	Capital (físico)	ub	$\dot{k}(t) = i(t) + x^f(t)$
$M(t)$	Depósitos en pesos	ars	$\dot{M}(t) = PU(t) - I(t)$

6.5.8. Solución

Asumamos que u , ν , γ , ε y sus pares del norte son constantes. Primero, tenemos que

$$\nu = \frac{WB}{Y} = \frac{w \cdot L}{p \cdot y} = \frac{w}{p \cdot q}$$

$$\Rightarrow 0 = \hat{\nu} = \hat{w} - \hat{p} - \hat{q}.$$
(6.5)

Como

$$\hat{w} = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 \hat{q} + \lambda_3 \hat{p} \quad y$$

$$\hat{p} = \zeta_0 + \zeta_1 u - \zeta_2 \hat{q} + \zeta_3 \hat{w},$$

despejando obtenemos que

$$\hat{w} = \frac{\lambda_0 + \lambda_3 \zeta_0 + (\lambda_1 + \lambda_3 \zeta_1)u + (\lambda_2 - \lambda_3 \zeta_2)\hat{q}}{1 - \lambda_3 \zeta_3} \quad y \quad (6.6)$$

$$\hat{p} = \frac{\zeta_0 + \zeta_3 \lambda_0 + (\zeta_1 + \zeta_3 \lambda_1)u + (-\zeta_2 + \zeta_3 \lambda_2)\hat{q}}{1 - \lambda_3 \zeta_3}. \quad (6.7)$$

Reemplazando estas expresiones en (6.5) y reescribiendo, tenemos que

$$\hat{q} = \frac{\lambda_0 - \zeta_0 + \lambda_3\zeta_0 - \zeta_3\lambda_0 + (\lambda_1 - \zeta_1 + \lambda_3\zeta_1 - \zeta_3\lambda_1)u}{1 - \lambda_2 - \zeta_2 + \lambda_3\zeta_2 + \zeta_3\lambda_2 - \lambda_3\zeta_3}. \quad (6.8)$$

Además, como $\hat{q} = \Omega_0 + \Omega_1\hat{y}$, tenemos que

$$\hat{y} = \frac{\lambda_0 - \zeta_0 + \lambda_3\zeta_0 - \zeta_3\lambda_0 + (\lambda_1 - \zeta_1 + \lambda_3\zeta_1 - \zeta_3\lambda_1)u}{(1 - \lambda_2 - \zeta_2 + \lambda_3\zeta_2 + \zeta_3\lambda_2 - \lambda_3\zeta_3)\Omega_1} - \frac{\Omega_0}{\Omega_1}.$$

Segundo, tenemos que

$$\begin{aligned} y &= c + i + x \\ \Rightarrow \frac{y}{k} &= \frac{c}{k} + \frac{i}{k} + \frac{x}{k}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Pero $y/k = u/s$, y

$$\begin{aligned} \frac{C}{Y} &= \nu + c_K \cdot (1 - \nu) \\ \Rightarrow \frac{c}{k} &= \frac{c}{y} \frac{u}{s} = \frac{C}{Y} \frac{u}{s} = (\nu + c_K \cdot (1 - \nu)) \frac{u}{s}. \end{aligned}$$

Usando esto y las ecuaciones de i y x , podemos reescribir (6.9) como

$$(1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} = \gamma - \gamma_1\nu + \gamma_2u + (\xi_0^f + \xi_1^f\varepsilon + \xi_2^fu^f) \frac{k^f}{k}. \quad (6.10)$$

Observamos entonces que k^f/k es constante, lo que ocurre si y sólo si y^f/y es constante $\Leftrightarrow \hat{y}^f = \hat{y}$. Luego, podemos reescribir (6.10) como

$$(1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} = \gamma - \gamma_1\nu + \gamma_2u + (\xi_0^f + \xi_1^f\varepsilon + \xi_2^fu^f) \frac{k^f(0)}{k(0)}. \quad (6.11)$$

Tercero, como ε y xx son constantes, se tiene que

$$0 = \hat{\varepsilon} = \hat{p}^f - \hat{p}.$$

Además, reemplazando (6.8) en (6.7), obtenemos

$$\hat{p} = \frac{(1 - \lambda_2)\zeta_0 + (\zeta_3 - \zeta_2)\lambda_0 + ((1 - \lambda_2)\zeta_1 + (\zeta_3 - \zeta_2)\lambda_1)u}{1 - \lambda_2 - \zeta_2 + \lambda_3\zeta_2 + \zeta_3\lambda_2 - \lambda_3\zeta_3}.$$

Las ecuaciones $\hat{y} = \hat{y}^f$ y $\hat{p} = \hat{p}^f$ nos dan un sistema lineal de 2 ecuaciones con 2 incógnitas del cual se pueden despejar u y u^f . De esta manera, quedan determinadas las constantes $\hat{y}$, $\hat{q}$, $\hat{p}$, $\hat{w}$, y sus pares del norte.

Cuarto, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{k} &= i + x^f \\ \Rightarrow \hat{k}k &= (\gamma - \gamma_1\nu + \gamma_2u + \xi_0 + \xi_1\varepsilon^f + \xi_2u)k \\ \Rightarrow \hat{y} &= \gamma - \gamma_1\nu + (\gamma_2 + \xi_2)u + \xi_0 + \xi_1\varepsilon^{-1} \\ \Rightarrow \gamma - \gamma_1\nu &= \hat{y} - (\gamma_2 + \xi_2)u - \xi_0 - \xi_1\varepsilon^{-1}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Por último, como γ es constante, tenemos que

$$\dot{\gamma} = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow M^f \cdot xr^f = M \Rightarrow \dot{M}^f \cdot xr^f = \dot{M}.$$

Observar que

$$\begin{aligned} \dot{M} &= PU - I = P - PD - I = P + WB - C - I = Y - C - I = X \\ &= (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f) p \cdot k^f \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) p^f \cdot k \cdot xr^f &= (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f) p \cdot k^f \\ \Rightarrow (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon &= (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f) \frac{k^f(0)}{k(0)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Reemplazando (6.13) en (6.11), obtenemos

$$\begin{aligned} (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} &= \gamma - \gamma_1 \nu + \gamma_2 u + (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon \\ \Rightarrow \gamma - \gamma_1 \nu &= (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} - \gamma_2 u - (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon. \end{aligned}$$

Igualando esta ecuación con (6.12) nos da que

$$\begin{aligned} \hat{y} - (\gamma_2 + \xi_2) u - \xi_0 - \xi_1 \varepsilon^{-1} &= (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} - \gamma_2 u - (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon \\ \Rightarrow \hat{y} - \xi_2 u - \xi_1 \varepsilon^{-1} &= (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} - \xi_1 - \xi_2 u \varepsilon \\ \Rightarrow \nu &= 1 - \frac{\hat{y} - \xi_2 u - \xi_1 \varepsilon^{-1} + \xi_1 + \xi_2 u \varepsilon}{(1 - c_K)u} s. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para hallar una solución, podemos entonces fijar valores de $k(0)$, $p(0)$, $q(0)$, $M(0)$, $p^f(0)$ y $q^f(0)$, y definir

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &:= \frac{p^f(0)}{p(0) \cdot xr}, \\ k^f(0) &:= k(0) \frac{(\xi_0 + \xi_2 u) \varepsilon + \xi_1}{(\xi_0^f + \xi_2^f u^f) + \xi_1^f \varepsilon}, \\ \nu(t) &:= 1 - \frac{\hat{y} - \xi_2 u - \xi_1 \varepsilon^{-1} + \xi_1 + \xi_2 u \varepsilon}{(1 - c_K)u} s, \\ \gamma(t) &:= (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} + \gamma_1 \nu - \gamma_2 u - (\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon, \\ k(t) &:= k(0) \exp(\hat{y}t), \\ y(t) &:= \frac{u}{s} k(t), \\ p(t) &:= p(0) \exp(\hat{p}t), \\ w(t) &:= \nu(0) p(0) q(0) \exp(\hat{w}t), \\ q(t) &:= q(0) \exp(\hat{q}t), \\ M(t) &:= \frac{\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f}{\hat{p} + \hat{y}^f} (p(t) \cdot k^f(t) - p(0) \cdot k^f(0)) + M(0), \end{aligned}$$

$$M^f(0) := M(0)xr,$$

las mismas definiciones para las variables del Norte, y definir las demás variables según las ecuaciones correspondientes de la tabla. Es fácil chequear que esto define una solución del sistema:

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \hat{p}^f \Rightarrow \frac{p^f(t) \cdot xr^f}{p(t)} = \frac{p^f(0)}{p(0) \cdot xr} = \varepsilon(t), \\ 0 = \hat{w} - \hat{p} - \hat{q} &\Rightarrow \frac{WB(t)}{Y(t)} = \frac{w(t)y(t)/q(t)}{p(t)y(t)} = \frac{w(t)}{p(t)q(t)} = \frac{w(0)}{p(0)q(0)} = \nu(0) = \nu(t), \\ -\gamma_0 \cdot D(t) &= -\gamma_0 \cdot (M^f(t)xr^f(t) - M(t)) \\ &= -\gamma_0 \cdot \left(\frac{\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u}{\hat{p}^f + \hat{y}} (p^f(t)k(t) - p^f(0)k(0))xr^f + M^f(0)xr^f \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f}{\hat{p} + \hat{y}^f} (p(t)k^f(t) - p(0)k^f(0)) - M(0) \right) \\ &= -\gamma_0 \cdot \left(\frac{\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u}{\hat{p} + \hat{y}} (p(t)\varepsilon k(t) - p(0)\varepsilon k(0)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f}{\hat{p} + \hat{y}} \left(p(t)k(t) \frac{k^f(0)}{k(0)} - p(0)k(0) \frac{k^f(0)}{k(0)} \right) \right) \\ &= -\frac{\gamma_0 \cdot (p(t)k(t) - p(0)k(0))}{\hat{p} + \hat{y}} \left((\xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u) \varepsilon - \left(\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f \right) \frac{k^f(0)}{k(0)} \right) \\ &= 0 = \dot{\gamma}(t), \end{aligned}$$

$$i(t) + x^f(t) = (\gamma - \gamma_1 \nu + \gamma_2 u + \xi_0 + \xi_1 \varepsilon^f + \xi_2 u)k(t) = \hat{y}k(t) = \dot{k}(t),$$

$$\begin{aligned} c(t) + i(t) + x(t) &= \frac{WB(t) + c_K P(t)}{p(t)} + i(t) + x(t) \\ &= \frac{WB(t) + c_K(Y(t) - WB(t))}{Y(t)} y(t) + i(t) + x(t) = c_K + (1 - c_K) \frac{WB(t)}{Y(t)} + i(t) + x(t) \\ &= \left(c_K + (1 - c_K) \frac{w(t)y(t)/q(t)}{p(t)y(t)} \right) y(t) + (\gamma - \gamma_1 \nu + \gamma_2 u)k(t) + (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f)k^f(t) \\ &= (c_K + (1 - c_K)\nu) y(t) + \left(\gamma - \gamma_1 \nu + \gamma_2 u + (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f) \frac{k^f(t)}{k(t)} \right) k(t) \\ &= (c_K + (1 - c_K)\nu) y(t) + (1 - c_K)(1 - \nu) \frac{u}{s} k(t) = y(t) \quad y \end{aligned}$$

$$PU(t) - I(t) = X(t) = (\xi_0^f + \xi_1^f \varepsilon + \xi_2^f u^f)p(t) \cdot k^f(t) = \dot{M}.$$

6.6. Un modelo de Goodwin con restricción externa

Tomando como base el modelo de Goodwin, este modelo surgió de pensar si se podía plantear un modelo parecido para dos países que comercian entre sí.

Este modelo cuenta con 2 países

1. *Sur*

2. *Norte*

y 2 activos

1. *bien de consumo*

2. *bien de capital*

Los flujos de estos activos pueden observarse en las tablas 6.7 y 6.8.

	Sur		Norte	
	Familias	Firmas Corriente	Firmas Familias	Σ
Producción	y			
Salarios	$+WB$	$-WB$		0
Exportaciones del Sur		$-x$	$+x$	0
Consumo	$-WB$		$-x$	
Σ	0	0	0	

Cuadro 6.7: Flujo de bienes de consumo

	Sur		Norte		
	Firmas Corriente	Capital	Familias	Firmas Corriente	Capital
Producción	y^f				
Salarios			$+WB^f$	$-WB^f$	0
Exportaciones del Norte	$+x^f$		$-x^f$		0
Inversiones	$-i$	$+i$		$-i^f$	$+i^f$
Consumo		$-\delta \cdot k$			$-\delta \cdot k^f$
Σ	0	$\dot{k}$	0	0	$\dot{k}^f$

Cuadro 6.8: Flujo de bienes de capital

Se puede observar que el país Sur sólo produce bienes de consumo, y el país Norte sólo produce bienes de capital. La dinámica del modelo es como la de dos modelos de Goodwin, con las siguientes diferencias en el Sur:

- La producción responde a la ecuación

$$y = WB + x,$$

puesto que el excedente de producción no puede utilizarse para invertir.

- La inversión requiere importación de bienes de capital:

$$i = x^f.$$

Sólo las Familias del Norte exportan bienes de capital, porque necesitan bienes de consumo que sólo pueden obtener del Sur. Las Familias del Norte tampoco tienen ninguna utilidad para los bienes de capital que reciben como salarios, por lo que exportan la totalidad de éstos al Sur:

$$x^f = WB^f.$$

Todas las ecuaciones del modelo están dadas en el cuadro 6.9.

Cuadro 6.9: Variables, parámetros, unidades y ecuaciones del modelo de Goodwin

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
Variables macro			
δ	Tasa de depreciación del capital	1/año	[parámetro]
xr	Precio relativo del bien de consumo respecto del bien de capital	ubk/ubc	[parámetro]
Variables del Sur			
ρ	Intensidad de la lucha de clases	1/año	[parámetro]
τ	Tasa de empleo no aceleradora de los salarios	-	[parámetro]
$e(t)$	Tasa de empleo	-	$e(t) = \frac{L(t)}{N(t)}$
$w(t)$	Salario promedio por unidad de tiempo	ubc/tr-año	$\hat{w}(t) = \rho \cdot (e(t) - \tau)$
$WB(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	ubc/año	$WB(t) = w(t)L(t)$
Variables de las Familias del Sur			
φ	Tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar	1/año	[parámetro]
$N(t)$	Población en edad de trabajar	tr	$\hat{N}(t) = \varphi$
Variables de las Firmas del Sur			
ψ	Tasa de crecimiento de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
s	Relación capital-producto	ubk-año/ubc	[parámetro]
$a(t)$	Productividad del trabajo	ubc/tr-año	$\hat{a}(t) = \psi$
$y(t)$	Producción por unidad de tiempo	ubc/año	$y(t) = WB(t) + x(t)$
$L(t)$	Población empleada	tr	$L(t) = \frac{y(t)}{a(t)}$
$x(t)$	Exportaciones del Sur por unidad de tiempo	ubc/año	$x(t) = x^f(t)xr^{-1}$
$i(t)$	Inversión bruta por unidad de tiempo	ubk/año	$i(t) = x^f(t)$
$k(t)$	Capital	ubk	$\dot{k}(t) = i(t) - \delta \cdot k(t)$
Variables del Norte			
ρ^f	Intensidad de la lucha de clases	1/año	[parámetro]
τ^f	Tasa de empleo no aceleradora de los salarios	-	[parámetro]
$e^f(t)$	Tasa de empleo	-	$e^f(t) = \frac{L^f(t)}{N^f(t)}$
$w^f(t)$	Salario promedio por unidad de tiempo	ubk/tr-año	$\hat{w}^f(t) = \rho^f \cdot (e^f(t) - \tau^f)$

Variable	Descripción	Unidad	Ecuación principal
$WB^f(t)$	Masa salarial por unidad de tiempo	ubk/año	$WB^f(t) = w^f(t)L^f(t)$
Variables de las Familias del Norte			
φ^f	Tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar	1/año	[parámetro]
$N^f(t)$	Población en edad de trabajar	tr	$\hat{N}^f(t) = \varphi^f$
Variables de las Firmas del Norte			
ψ^f	Tasa de crecimiento de la productividad del trabajo	1/año	[parámetro]
s^f	Relación capital-producto	año	[parámetro]
$a^f(t)$	Productividad del trabajo	ubk/tr-año	$\hat{a}^f(t) = \psi^f$
$y^f(t)$	Producción por unidad de tiempo	ubk/año	$y^f(t) = \frac{k^f(t)}{s^f}$
$L^f(t)$	Población empleada	tr	$L^f(t) = \frac{y^f(t)}{a^f(t)}$
$x^f(t)$	Exportaciones del Norte por unidad de tiempo	ubk/año	$x^f(t) = WB^f(t)$
$i^f(t)$	Inversión bruta por unidad de tiempo	ubk/año	$i^f(t) = y^f(t) - WB^f(t)$
$k^f(t)$	Capital	ubk	$\dot{k}^f(t) = i^f(t) - \delta \cdot k^f(t)$

6.6.1. Solución

La economía del país Norte es esencialmente un modelo de Goodwin. Por lo que vimos en la sección 2.6, definiendo la variable

$$\nu^f := \frac{WB^f}{y^f},$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{e^f} &= \frac{1 - \nu^f}{s^f} - \delta - \psi^f - \varphi^f & \text{y} \\ \widehat{\nu^f} &= \rho^f \cdot (e^f - \tau^f) - \psi^f,\end{aligned}$$

y casi todas las otras variables del país Norte pueden despejarse tal como hicimos en dicha sección. Sólo nos queda despejar x^f :

$$x^f = WB^f.$$

Ahora que hemos despejado x^f , podemos analizar la economía argentina tomando a x^f como variable exógena. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}x &= \frac{x^f}{xr}, \\ i &= x^f \\ \Rightarrow k(t) &= \left(k(0) + \int_0^t e^{\delta s} x^f(s) ds \right) e^{-\delta t}.\end{aligned}$$

Observar que

$$\begin{aligned} N(t) &= N(0)e^{\varphi t} & \text{y} \\ a(t) &= a(0)e^{\psi t}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} y = WB + x &\Rightarrow aL = wL + \frac{x^f}{xr} \Rightarrow L = \frac{x^f}{(a-w)xr} \\ \Rightarrow \hat{w} &= \rho \cdot (e - \tau) = \rho \cdot \left(\frac{x^f}{N \cdot (a-w)xr} - \tau \right), \end{aligned}$$

esta última es una ecuación diferencial cuya solución nos da $w(t)$. Se puede entonces despejar

$$\begin{aligned} L &= \frac{x^f}{(a-w)xr}, \\ e &= \frac{L}{N}, \\ y &= a \cdot L & \text{y} \\ WB &= w \cdot L. \end{aligned}$$

Si definimos las variables

$$\begin{aligned} u &:= \frac{sy}{k} & \text{y} \\ \nu &:= \frac{wL}{y}, \end{aligned}$$

las condiciones que la solución debería cumplir para que el modelo tenga sentido serían

$$\begin{aligned} u(t) &\leq 1, \\ \nu(t) &< 1, \\ \nu^f(t) &\leq 1, \\ e(t) &\leq 1 & \text{y} \\ e^f(t) &\leq 1. \end{aligned}$$

Estudiemos estas condiciones para la solución que se obtiene tomando

$$\begin{aligned} \nu^f(t) &= 1 - s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f), \\ e^f(t) &= \tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f}, \\ L^f(t) &= \left(\tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} \right) N^f(0)e^{\varphi^f t}, \\ w^f(t) &= (1 - s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f)) a^f(0)e^{\psi^f t}, \\ x^f(t) &= (1 - s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f)) \left(\tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} \right) a^f(0)N^f(0)e^{(\varphi^f + \psi^f)t}, \end{aligned}$$

$$k(t) = \left(k(0) + \frac{x^f(0)}{\delta + \psi^f + \varphi^f} (e^{(\varphi^f + \psi^f + \delta)t} - 1) \right) e^{-\delta t},$$

y despejando las otras variables.

Inmediatamente observamos que

$$0 < \nu^f < 1 \Leftrightarrow s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f) < 1 \quad y \quad (6.15)$$

$$0 < e^f < 1 \Leftrightarrow \tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} < 1. \quad (6.16)$$

Por otro lado, tenemos que

$$u = \frac{y}{k/s} = \frac{s}{k} \frac{a \cdot x^f}{(a - w) \cdot xr} = \frac{s}{k} \frac{x^f}{(1 - \nu) \cdot xr} \quad y$$

$$e = \frac{L}{N} = \frac{x^f}{N \cdot (a - w) \cdot xr} = \frac{x^f}{N \cdot a \cdot (1 - \nu) \cdot xr},$$

por lo que necesitamos pedir que $\nu(t) < 1$ para todo t . Además, $(1 - \nu(t))^{-1} \geq 1$ para todo t y, por lo tanto,

$$1 \geq u(t) \geq \frac{s}{xr} \frac{x^f(t)}{k(t)} \quad y$$

$$1 \geq e(t) \geq \frac{1}{xr} \frac{x^f(t)}{N(t)a(t)}.$$

De la condición sobre e , sacamos que

$$\varphi^f + \psi^f < \varphi + \psi. \quad (6.17)$$

Para analizar la condición sobre u , observemos que

$$\frac{k(t)}{x^f(t)} = \left(\frac{k(0)}{x^f(0)} - \frac{1}{\varphi^f + \psi^f + \delta} \right) e^{-(\varphi^f + \psi^f + \delta)t} + \frac{1}{\varphi^f + \psi^f + \delta} \rightarrow \frac{1}{\varphi^f + \psi^f + \delta},$$

por lo que obtenemos la condición

$$\frac{(\varphi^f + \psi^f + \delta)s}{xr} < 1. \quad (6.18)$$

Volvamos a las condiciones sobre u y e . Necesitamos que

$$1 \geq u = \frac{s}{k} \frac{a \cdot x^f}{(a - w) \cdot xr} \quad y$$

$$1 \geq e = \frac{x^f}{N \cdot (a - w) \cdot xr},$$

lo que equivale a pedir que

$$w \leq a - \frac{s}{k} \frac{a \cdot x^f}{xr} \quad y$$

$$w \leq a - \frac{x^f}{N \cdot xr}.$$

Observar que estas desigualdades también implican que $w < a \Rightarrow \nu < 1$.

Para seguir estudiando estas condiciones, definimos

$$w_0(t) := a(t) - \frac{x^f(t)}{N(t)\tau xr}.$$

Como

$$\hat{w} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^f}{N \cdot (a - w)xr} > \tau \Leftrightarrow w > w_0,$$

$w - w_0$ y $\dot{w}$ siempre tienen el mismo signo. Si $w_0 \leq w$, se tiene que

$$\tau \leq e \leq \frac{k/s}{aN}$$

lo que no es sustentable a largo plazo pues $\varphi^f + \psi^f < \varphi + \psi$. Luego, eventualmente se tiene que $w < w_0$.

Notemos que si $w(t_1) < w_0(t_1)$, se tiene que $w(t) < w_0(t)$ para todo $t \geq t_1$. En efecto, si $w(t_2) = w_0(t_2)$ para algún $t_2 > t_1$ pero $w(t) < w_0(t)$ para todo $t \in [t_1, t_2)$, se tiene que

$$0 < \frac{(w(t_2) - w_0(t_2)) - (w(t_1) - w_0(t_1))}{t_2 - t_1} = \dot{w}(t_3) - \dot{w}_0(t_3)$$

para algún $t_3 \in (t_1, t_2)$. Pero $w(t_3) < w_0(t_3)$, por lo que $\dot{w}(t_3) < 0$, y

$$w_0(t) = a(t) \left(1 - \frac{x^f(0)}{a(0)N(0)\tau xr} e^{-(\varphi + \psi - \varphi^f - \psi^f)t} \right)$$

siempre es creciente, por lo que

$$\dot{w}(t_3) < 0 \leq \dot{w}_0(t_3),$$

lo que es una contradicción. Luego, $w(t) < w_0(t)$ para todo $t \geq t_1$.

Por otro lado, se observa que

$$a(t) - \frac{x^f(t)}{N(t)xr} = a(t) \left(1 - \frac{x^f(t)}{a(t)N(t)xr} \right)$$

es siempre creciente, y acota superiormente a $w_0(t)$ pues $\tau < 1$. Por lo tanto, una condición suficiente para

$$w(t) \leq a(t) - \frac{x^f(t)}{N(t)xr}$$

es que

$$0 < w(0) < w_0(0) = a(0) - \frac{x^f(0)}{N(0)\tau xr}. \quad (6.19)$$

Bajo este escenario se tiene que $w(t) < w_0(t)$ para todo $t \Rightarrow w(t)$ es decreciente $\Rightarrow \nu(t)$ es decreciente, por lo que

$$0 < \nu(t) \leq \nu(0) \Leftrightarrow 1 > 1 - \nu(t) \geq 1 - \nu(0).$$

Recordemos que

$$u = \frac{s}{xr} \frac{x^f}{k \cdot (1 - \nu)},$$

por lo que $u \leq 1$ si y sólo si

$$\frac{(1 - \nu)xr}{s} \geq \frac{x^f}{k}.$$

Como k/x^f se mueve entre $k(0)/x^f(0)$ y $1/(\varphi^f + \psi^f + \delta)$, una forma fácil de cumplir esta última condición es pedir que

$$\frac{(1 - \nu(0))xr}{s} > \max \left\{ \frac{x^f(0)}{k(0)}, \varphi^f + \psi^f + \delta \right\}. \quad (6.20)$$

Recapitulando, condiciones suficientes para que la solución propuesta tenga sentido son

$$\begin{aligned} \psi^f + \varphi^f &< \min \left\{ \frac{1}{s^f} - \delta, \varphi + \psi \right\}, \\ \tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} &< 1, \\ 0 &< w(0) < a(0) - \frac{x^f(0)}{N(0)\tau xr} \quad \text{y} \\ \frac{(1 - \nu(0))xr}{s} &> \max \left\{ \frac{x^f(0)}{k(0)}, \varphi^f + \psi^f + \delta \right\}. \end{aligned}$$

Por último, observar que siempre que la solución tenga sentido, tendremos que

$$0 \leq e(t) \leq \frac{k(t)/s}{a(t) \cdot N(t)} \rightarrow 0,$$

por lo que $e(t) \rightarrow 0$. También obtendremos que $w(t) \rightarrow 0$, aplicando el mismo argumento del final de la sección 5.6.

6.6.2. Una alternativa con empleo y participación de salarios

En el modelo expuesto recién, había sólo dos países. Esta es una forma típica de estudiar el comercio internacional en modelos SFC [22]. Sin embargo, si usamos ese modelo para estudiar la economía del país Sur, como se trata de un sistema cerrado en el que no entran ni salen flujos desde afuera (las filas de pesos y dólares suman 0), implícitamente el país Norte modela en realidad el resto del mundo. En ese caso, no tiene sentido que la totalidad de los salarios del resto del mundo compren productos del país Sur. Basados en esto, planteamos aquí una alternativa más sensata.

Reemplazamos el *bien de capital* por un *bien universal* que sirve tanto para el consumo como para usarse como capital. Ya dimos un ejemplo de esto cuando presentamos el modelo de Goodwin en la sección 2.6.

Los flujos de los activos pueden observarse en las tablas 6.10 y 6.11.

	Sur		Norte		
	Familias	Firmas Corriente	Familias	Firmas Corriente	Σ
Producción	y				
Salarios	$+WB$	$-WB$	$+x$	$-x$	0
Exportaciones del Sur		$-x$		$+x$	0
Consumo	$-WB$		$-x$		
Σ	0	0	0	0	

Cuadro 6.10: Flujo de bienes de consumo

	Sur		Norte		
	Corriente	Firmas Capital	Familias	Corriente	Firmas Capital
Producción	y^f				
Salarios			$+WB^f - x^f$	$-WB^f + x^f$	0
Exportaciones del Norte	$+x^f$			$-x^f$	0
Inversiones	$-i$	$+i$		$-i^f$	$+i^f$
Consumo		$-\delta \cdot k$	$-WB^f + x^f$		$-\delta \cdot k^f$
Σ	0	$\dot{k}$	0	0	$\dot{k}^f$

Cuadro 6.11: Flujo de bienes universales

Las ecuaciones son las mismas que teníamos antes, reemplazando la ecuación

$$x^f = WB^f$$

por

$$y = \frac{k}{s}.$$

Para que la solución del modelo tenga sentido, tiene que cumplir

$$\begin{aligned} \nu(t) &\leq 1, \\ \nu^f(t) &\leq 1, \\ e(t) &\leq 1, \\ e^f(t) &\leq 1 \quad \text{y} \\ x^f(t) &\leq WB^f(t). \end{aligned}$$

Ahora ambas economías son modelos de Goodwin, por lo que se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \widehat{\nu}^f &= \rho^f \cdot (e^f - \tau^f) - \psi^f \\ \widehat{e}^f &= \frac{1 - \nu^f}{s^f} - \delta - \psi^f - \varphi^f \\ \widehat{\nu} &= \rho \cdot (e - \tau) - \psi \\ \widehat{e} &= \frac{(1 - \nu) \cdot xr}{s} - \delta - \psi - \varphi \end{aligned}$$

Las soluciones a estos dos sistemas desacoplados serán órbitas periódicas alrededor de las soluciones

$$\begin{aligned} e^f(t) &= \tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f}, \\ \nu^f(t) &= 1 - s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} e(t) &= \tau + \frac{\psi}{\rho}, \\ \nu(t) &= 1 - \frac{s}{xr}(\delta + \psi + \varphi). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hay que pedir que

$$\begin{aligned} \tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} &< 1, \\ s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f) &< 1, \\ \tau + \frac{\psi}{\rho} &< 1 \quad \text{y} \\ \frac{s}{xr}(\delta + \psi + \varphi) &< 1. \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$\begin{aligned} x^f &= x \cdot xr = (y - WB)xr = y \cdot (1 - \nu)xr = a \cdot e \cdot N \cdot (1 - \nu)xr \quad \text{y} \\ WB^f &= \nu^f \cdot y^f = \nu^f \cdot a^f \cdot e^f \cdot N^f. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x^f(t) \leq WB^f(t)$ se puede escribir como

$$(1 - \nu(t))e(t)a(0)N(0)e^{(\psi+\varphi)t}xr \leq \nu^f(t)e^f(t)a^f(0)N^f(0)e^{(\psi^f+\varphi^f)t},$$

y es necesario que

$$\psi + \varphi < \psi^f + \varphi^f.$$

Si además pedimos que

$$s \cdot (\delta + \psi + \varphi) \left(\tau + \frac{\psi}{\rho} \right) a(0)N(0) < (1 - s^f(\delta + \psi^f + \varphi^f)) \left(\tau^f + \frac{\psi^f}{\rho^f} \right) a^f(0)N^f(0),$$

podemos garantizar la desigualdad tomando $(\nu(0), e(0))$ y $(\nu^f(0), e^f(0))$ suficientemente cerca de las ya mencionadas soluciones estacionarias.

6.7. Conclusiones (de toda la tesis)

A lo largo de esta tesis se han ido desarrollando distintos trabajos, pero cada uno de ellos ha abierto más interrogantes; esa es la naturaleza de la investigación en general. Hay muchas cosas para seguir estudiando, pero a modo de cierre de la

tesis, me gustaría comentar algunas muy específicas que surgieron en los capítulos anteriores.

Del capítulo 3, en el procedimiento 3.1 queda pendiente la pregunta de qué pasa si las raíces del polinomio q no son reales o si alguna entrada de λ es negativa.

Del capítulo 4, queda pendiente el desarrollo de una teoría de la topología del espacio de mercados financieros.

Del capítulo 5 quedan abiertos los siguientes temas:

- Existencia y unicidad de la solución del sistema suavizado y sin suavizar, y convergencia de las primeras en la última.
- Justificación rigurosa del procedimiento de linealización alrededor de funciones.
- Justificación rigurosa de la hipótesis de productividad constante.
- Estudio de las transiciones entre regímenes.
- Solución a largo plazo.

Sobre la metodología empleada en esta tesis y discutida en la introducción, surge la pregunta de qué otros filtros deberían ser requeridos.

En cuanto al reduccionismo, sería interesante llevar a cabo un análisis más profundo de las dinámicas de las partes en relación a la dinámica del todo. La realidad puede estructurarse en distintos niveles, cada uno de los cuales manifiesta una forma de esta relación, por lo cual un mejor entendimiento de ella en términos abstractos es un logro que beneficia a todas las ciencias.

Apéndice A

Código

En este apéndice presento código en Python desarrollado en el contexto de los trabajos expuestos en los capítulos 3 y 4.

A.1. Toros vs. osos

A.1.1. Cálculo de momentos

Presento a continuación código para calcular el resultado de la fórmula (3.8).

```
import numpy as np

def binomial(n):
    '''
    Calcula coeficientes binomiales.

    Parámetros:
    n (int): es un entero no negativo.

    Devuelve:
    res (list): res[i][j] es el coeficiente binomial i en j, con 0<=j<=i<=n.
    '''

    res = [[1]]
    for i in range(1,n+1):
        si1s = res[-1]
        sis = [1]
        for k in range(1,i):
            sis.append(si1s[k]+si1s[k-1])
        sis.append(1)
        res.append(sis)
    return res

def stirling(n):
    '''
    Calcula números de Stirling de segunda especie.
```

```

Parámetros:
n (int): es un entero no negativo.

Devuelve:
res (list): res[i][j] es el número de Stirling de segunda especie  $S(i,j)$ ,
            con  $0 \leq j \leq i \leq n$ .
'''

res = [[1]]
for i in range(1,n+1):
    si1s = res[-1]
    sis = [0]
    for k in range(1,i):
        sis.append(k*si1s[k]+si1s[k-1])
    sis.append(1)
    res.append(sis)
return res

nmax = 4          # Indica hasta que momento se desea calcular
lnu = np.log(1.01) # Indica el valor de log(u)
lnd = np.log(1/1.01) # Indica el valor de log(d)
t = 100
N = 1000
Nu = 500
Nd = 300

# Variando los parámetros anteriores, el código siguiente imprime una
# lista con los momentos del retorno logarítmico, calculados usando la
# fórmula deducida: moments[i] es el i-ésimo momento

s = stirling(nmax)
b = binomial(nmax)
js = []
for j in range(nmax+1):
    js.append((-1)**j*(1-j/N)**t)
lnus = [1]
lnds = [1]
Nus = [1]
Nds = [1]
for j in range(nmax):
    lnus.append(lnus[-1]*lnu)
    lnds.append(lnds[-1]*lnd)
    Nus.append(Nus[-1]*(Nu-j))
    Nds.append(Nds[-1]*(Nd-j))

moments = [1]
for n in range(1,nmax+1):
    s0 = 0
    for nu in range(n+1):

```

```

nd = n-nu
c1 = b[n][nu]*lnus[nu]*lnds[nd]
s1 = 0
for ku in range(nu+1):
    c2 = Nus[ku]*s[nu][ku]
    s2 = 0
    for kd in range(nd+1):
        c3 = Nds[kd]*s[nd][kd]
        s3 = 0
        k = ku+kd
        for j in range(k+1):
            s3 += js[j]*b[k][j]
        s2 += c3*s3
    s1 += c2*s2
s0 += c1*s1
moments.append(s0)

print(moments)

```

A.1.2. Cálculo de asimetría y exceso de curtosis

El siguiente código fue utilizado para armar el cuadro 3.1.

```

import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np

# Lista de tickers con los que se va a trabajar
ticker_list = ['MELI', 'GOOG', 'AAPL', 'MSFT']

# Fecha inicial y final del período a considerar
start_date = '2023-09-01'
end_date = '2023-10-31'

# Imprimo la asimetría y el exceso de curtosis de los retornos
# logarítmicos diarios de cada ticker
for ticker_symbol in ticker_list:
    ticker_data = yf.download(ticker_symbol, start=start_date, end=end_date)
    log_returns = np.log(ticker_data['Close'] / ticker_data['Open'])
    skewness = log_returns.skew().iloc[0]
    kurtosis = log_returns.kurt().iloc[0]
    print()
    print(str(ticker_symbol)+' & '+str(skewness)+' & '+str(kurtosis))

```

A.1.3. Aplicación del procedimiento

Presento en esta sección el código utilizado para aplicar el procedimiento 3.1 en la sección 3.6.1. El módulo `bullsvsbears` es un archivo `.py` que contiene el código de la sección A.1.1.

```

import yfinance as yf
import pandas as pd
import numpy as np
from bullsvsbears import stirling, binomial

# Muestro el ejemplo con MSFT
ticker_symbol = 'MSFT'

start_date = '2023-09-01'
end_date = '2023-10-31'
ticker_data = yf.download(ticker_symbol, start=start_date, end=end_date)
log_returns = np.log(ticker_data['Close'] / ticker_data['Open'])

# Calculo los primeros cuatro momentos (normalizados)
mean = log_returns.mean()
variance = log_returns.var()
skewness = log_returns.skew()
kurtosis = log_returns.kurt()

mean_val = mean.iloc[0]
variance_val = variance.iloc[0]
skewness_val = skewness.iloc[0]
kurtosis_val = kurtosis.iloc[0]

# Calculo los primeros cuatro cumulantes (kappa)
cumulant1 = mean_val
cumulant2 = variance_val
cumulant3 = skewness_val * (variance_val**(3/2))
cumulant4 = kurtosis_val * (variance_val**2)

# Defino el polinomio q como función
cumulant_matrix_1 = np.matrix([[cumulant1, cumulant2],
                                [cumulant2, cumulant3]])

cumulant_matrix_2 = np.matrix([[cumulant2, cumulant3],
                                [cumulant3, cumulant4]])

def q(x):
    return np.linalg.det(x*np.eye(2)-np.linalg.inv(cumulant_matrix_1) \
                          @cumulant_matrix_2)

# Calculo las raíces del polinomio q
# Doy un rango para ajustar la función q
x_values = np.linspace(-10, 10, 100)
y_values = [q(x_val) for x_val in x_values]
# Ajusto a un polinomio de grado 2
poly_coefficients = np.polyfit(x_values, y_values, 2)
# q es de hecho un polinomio de grado 2, por lo que

```

```

# poly_coefficients son sus coeficientes

# Calculo las raíces de q
roots_poly1 = np.roots(poly_coefficients)
print(f"Raíces: {roots_poly1}")
# Para chequear que son reales, no nulas y diferentes
print()

V = np.matrix([[1, roots_poly1[0]],
               [1, roots_poly1[1]]])

D = np.matrix([[roots_poly1[0], 0],
               [0, roots_poly1[1]]])

# Calculo el vector lambda
ls = np.linalg.inv(D)@np.linalg.inv(np.transpose(V))@cumulant_matrix_1[:,0]

lnd = roots_poly1[0]
lnu = roots_poly1[1]

# Calculo los primeros cuatro momentos (no normalizados)
moment1 = mean_val
moment2 = variance_val+mean_val**2
moment3 = skewness_val*variance_val**(3/2)+3*moment2*mean_val \
-3*moment1*mean_val**2+mean_val**3
moment4 = (kurtosis_val+3)*variance_val**2+4*moment3*mean_val \
-6*moment2*mean_val**2+4*moment1*mean_val**3-mean_val**4
sample_moments = [1,moment1, moment2, moment3, moment4]

# Función que calcula la fórmula de los momentos del paso 3 para 0<=n<=nmax
def moments_C(C,nmax,Nd,Nu):
    s = stirling(nmax)
    b = binomial(nmax)
    lnus = [1]
    lnds = [1]
    Nus = [1]
    Nds = [1]
    for j in range(nmax):
        lnus.append(lnus[-1]*lnu)
        lnds.append(lnds[-1]*lnd)
        Nus.append(Nus[-1]*(Nu-j))
        Nds.append(Nds[-1]*(Nd-j))

    moments = [1]
    for n in range(1,nmax+1):
        s0 = 0
        for nu in range(n+1):
            nd = n-nu

```

```

    c1 = b[n][nu]*lnus[nu]*lnds[nd]
    s1 = 0
    for ku in range(nu+1):
        c2 = Nus[ku]*s[nu][ku]
        s2 = 0
        for kd in range(nd+1):
            c3 = Nds[kd]*s[nd][kd]
            k = ku+kd
            s3 = C**(-k)
            s2 += c3*s3
        s1 += c2*s2
    s0 += c1*s1
    moments.append(s0)
return moments

# Calculo moments_C(C,4,Nd,Nu) para valores cada vez más grandes de C
# hasta que la diferencia relativa sea menor que 0.01
eps_rel = 0.01
C = 10**3
print('C=',C)
print()
Nd = round(ls[0,0]*C)
Nu = round(ls[1,0]*C)
nmax = 4
fit_moments_C = moments_C(C,nmax,Nd,Nu)
print('Diferencias relativas de la fórmula en el paso 3 respecto de \
los momentos que aproxima')
for i in range(1,nmax+1):
    print('Momento de orden '+str(i)+':',fit_moments_C[i]/ \
        sample_moments[i]-1)
print()

# Función que calcula la fórmula de los momentos (del paso 6) para
# 0<=n<=nmax
def moments_N(N,t,nmax,Nd,Nu):
    s = stirling(nmax)
    b = binomial(nmax)
    js = []
    for j in range(nmax+1):
        js.append((((1)**j)*((1-j/N)**t)))
    lnus = [1]
    lnds = [1]
    Nus = [1]
    Nds = [1]
    for j in range(nmax):
        lnus.append(lnus[-1]*lnu)
        lnds.append(lnds[-1]*lnd)
        Nus.append(Nus[-1]*(Nu-j))

```

```

Nds.append(Nds[-1]*(Nd-j))

moments = [1]
for n in range(1,nmax+1):
    s0 = 0
    for nu in range(n+1):
        nd = n-nu
        c1 = b[n][nu]*lnus[nu]*lnds[nd]
        s1 = 0
        for ku in range(nu+1):
            c2 = Nus[ku]*s[nu][ku]
            s2 = 0
            for kd in range(nd+1):
                c3 = Nds[kd]*s[nd][kd]
                k = ku+kd
                s3 = 0
                for j in range(k+1):
                    s3 += js[j]*b[k][j]
                s2 += c3*s3
            s1 += c2*s2
        s0 += c1*s1
    moments.append(s0)
return moments

# Para saber cuál es el mínimo valor para N
print('N>=',Nu+Nd)

# Calculo moments_N(N,t,nmax,Nd,Nu) para valores cada vez más grandes de N
# hasta que la diferencia relativa sea menor que 0.01
N = 10**6
print('N=',N)
print()
t = round(-N*np.log(1-1/C))
fit_moments_N = moments_N(N,t,nmax,Nd,Nu)
print('Diferencias relativas de la fórmula en el paso 6 respecto de \
los momentos que aproxima')
for i in range(1,nmax+1):
    print('Momento de orden '+str(i)+':',fit_moments_N[i]/ \
          sample_moments[i]-1)
print()

# Imprimo valores de los momentos muestrales, ajuste a momentos y
# diferencias relativas
print('Orden del momento & Muestra & Ajuste & Diferencia relativa')
for i in range(1,nmax+1):
    print(str(i)+' & '+str(sample_moments[i])+' & '+str(fit_moments_N[i]) \
          '+' & '+str(fit_moments_N[i]/sample_moments[i]-1))
print()

```

```
# Imprimo los parámetros calculados
print('d=', np.exp(lnd))
print('u=', np.exp(lnu))
print('N_d(0)=', Nd)
print('N_u(0)=', Nu)
print('t=', t)
```

A.1.4. Análisis de la convergencia

Presento en esta sección el código utilizado para analizar la convergencia en la sección 3.6.1. El módulo `real_data_fit_2` es un archivo `.py` que contiene el código de la sección anterior.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from real_data_fit_2 import *

# Función que, dado un valor de C, calcula la máxima diferencia
# relativa del paso 3 del procedimiento
def dif_rel_C(C):
    Nd = round(ls[0,0]*C)
    Nu = round(ls[1,0]*C)
    max_dif_rel = 0
    fit_moments = moments_C(C, nmax, Nd, Nu)
    for i in range(nmax):
        dif_rel = fit_moments[i+1]/sample_moments[i+1]-1
        max_dif_rel = max(max_dif_rel, abs(dif_rel))
    return max_dif_rel

# Hago un gráfico log-log de C vs. la diferencia relativa y su ajuste
# lineal
C_values = np.logspace(1, 4, 100) # De 10^1 a 10^4
dif_rel_C_values = [dif_rel_C(c) for c in C_values]
log_C_values = np.log(C_values)
log_dif_rel_C_values = np.log(dif_rel_C_values)
# Ajuste lineal
linear_coefficients = np.polyfit(log_C_values, log_dif_rel_C_values, 1)
print("Coeficientes del ajuste lineal:")
print(f"Pendiente: {linear_coefficients[0]:.4f}")
print(f"Ordenada al origen: {linear_coefficients[1]:.4f}")
fitted_line = linear_coefficients[0] * log_C_values + linear_coefficients[1]
# Calculo R^2
y_true = log_dif_rel_C_values
y_predicted = fitted_line
ss_total = ((y_true - np.mean(y_true)) ** 2).sum()
ss_residual = ((y_true - y_predicted) ** 2).sum()
r_squared = 1 - (ss_residual / ss_total)
print(f"Valor de R^2: {r_squared:.4f}")
```

```

# Gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(log_C_values, log_dif_rel_C_values, 'o', \
         label='Datos Log-Log Originales', markersize=4)
plt.plot(log_C_values, fitted_line, '-', color='red', label='Ajuste Lineal')
plt.xlabel('log(C)')
plt.ylabel('log(d_1(C))')
plt.title('Ajuste Lineal en Gráfico Log-Log de C vs d_1(C)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Función que, dado un valor de N, calcula la máxima diferencia
# relativa de la fórmula en el paso 6 respecto de la fórmula en el paso 3
# (con el valor fijo de C importado de real_data_fit_2)
def dif_rel_N(N):
    t = round(-N*np.log(1-1/C))
    max_dif_rel = 0
    fit_moments = moments_N(N,t,nmax,Nd,Nu)
    for i in range(nmax):
        dif_rel = fit_moments[i+1]/fit_moments_C[i+1]-1
        max_dif_rel = max(max_dif_rel,abs(dif_rel))
    return max_dif_rel

# Hago un gráfico log-log de N vs. la diferencia relativa y su ajuste
# lineal
C_values = np.logspace(4, 7, 100) # De 10^4 a 10^7
dif_rel_C_values = [dif_rel_N(c) for c in C_values]
log_C_values = np.log(C_values)
log_dif_rel_C_values = np.log(dif_rel_C_values)
# Ajuste Lineal
linear_coefficients = np.polyfit(log_C_values, log_dif_rel_C_values, 1)
print("Coeficientes del ajuste lineal:")
print(f"Pendiente: {linear_coefficients[0]:.4f}")
print(f"Ordenada al origen: {linear_coefficients[1]:.4f}")
fitted_line = linear_coefficients[0] * log_C_values + linear_coefficients[1]
# Calculo R^2
y_true = log_dif_rel_C_values
y_predicted = fitted_line
ss_total = ((y_true - np.mean(y_true)) ** 2).sum()
ss_residual = ((y_true - y_predicted) ** 2).sum()
r_squared = 1 - (ss_residual / ss_total)
print(f"Valor de R^2: {r_squared:.4f}")
# Gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(log_C_values, log_dif_rel_C_values, 'o', \
         label='Datos Log-Log Originales', markersize=4)
plt.plot(log_C_values, fitted_line, '-', color='red', label='Ajuste Lineal')

```

```
plt.xlabel('log(N)')
plt.ylabel('log(d_2(N))')
plt.title('Ajuste Lineal en Gráfico Log-Log de N vs d_2(N)')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

A.2. Modelos multinomiales

Presento a continuación una implementación del procedimiento 4.2.

```
import numpy as np

def consbloques(bloques,n):
    '''
    Calcula símlices que tienen como bordes a otros símlices dados y
    una cantidad dada de posibles vértices.

    Parámetros:
    bloques (list): es una lista cuyos elementos son conjuntos que
                    representan símlices. Todos sus elementos tienen el
                    mismo cardinal.
    n (int):       es un entero no negativo que representa la cantidad
                    de vértices que se pueden usar.

    Devuelve:
    nuevos (list): es una lista cuyos elementos son conjuntos que
                    representan símlices. Los elementos de nuevos son
                    conjuntos con un elemento más que cada elemento de
                    bloques. Los elementos de nuevos se caracterizan por
                    ser subconjuntos de {0,...,n-1} tales que al sacarles
                    un elemento cualquiera, el conjunto resultante es un
                    elemento de bloques. Es decir, los elementos de
                    nuevos representan símlices con vértices 0,...,n-1,
                    tales que todos sus bordes son elementos de bloques.
    '''

    nuevos = []
    for bloque in bloques:
        for i in range(n):
            candi = bloque | {i}
            if candi in nuevos:
                continue
            else:
                siguiente = False
                for x in candi:
                    if not(candi-{x} in bloques):
                        siguiente = True
```

```

        break
    if siguiente:
        continue
    else:
        nuevos.append(candi)
return nuevos

def generadores(M,b,eps):
    '''
    Calcula los generadores de las medidas de martingala.

    Parámetros:
    M (numpy.ndarray): es la matriz de precios futuros descontados.
    b (numpy.ndarray): es el vector de precios presentes.
    eps (float): es un número positivo que indica una tolerancia. En
                  un paso del algoritmo de esta función, se calcula
                  un resultado de una minimización de cuadrados. Si
                  la media cuadrática de dichos errores es menor que
                  eps, se considera que el ajuste es perfecto.

    Devuelve:
    gens (list): es una lista de arrays. Sus elementos son vectores tales
                  que toda medida de martingala surge como combinación
                  convexa de ellos.
    '''

    m,n = M.shape
    gens = []
    nuevos_bloques = [set()]
    c = np.ones(m+1)
    c[:-1] = b
    k = np.linalg.matrix_rank(M)
    for i in range(k+1):
        bloques = nuevos_bloques
        if bloques==[]:
            break
        bloques = consbloques(bloques,n)
        nuevos_bloques = bloques.copy()
        for bloque in bloques:
            bloque_lista = list(bloque)
            N = np.ones((m+1,i+1))
            N[:-1,:] = M[:,bloque_lista]
            x = np.linalg.lstsq(N,c,rcond=None)[0]
            r = N@x-c
            pos = True
            for z in x:
                if z<0:
                    pos = False

```

```

        break
    if (np.linalg.norm(r)<eps and pos):
        y = np.zeros(n)
        for j in range(i+1):
            y[bloque_lista[j]] = x[j]
        gens.append(y)
        nuevos_bloques.remove(bloque)
return gens

```

Bibliografía

- [1] Naum Ilyich Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis*. Oliver & Boyd, 1965.
- [2] Sebastian Anița, Viorel Arnăutu, and Vincenzo Capasso. *An introduction to optimal control problems in life sciences and economics: From mathematical models to numerical simulation with MATLAB®*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [3] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. John Wiley & Sons, 2012.
- [4] Tomas Björk. *Arbitrage theory in continuous time*, pages 27–36. Oxford University Press, Oxford, 2020.
- [5] Phelim Boyle. Option valuation using a three-jump process. *International Options Journal*, 3(7-12), 1986.
- [6] MG Bulmer. *Principles of Statistics*. Dover, 1979.
- [7] Gunduz Caginalp and Donald Balenovich. A theoretical foundation for technical analysis. *Journal of Technical Analysis*, 59:5–21, 2003.
- [8] George Casella and Roger Berger. *Statistical inference*. Thomson Learning, 2002.
- [9] Eugenio Caverzasi and Antoine Godin. Post-Keynesian stock-flow-consistent modelling: a survey. *Cambridge Journal of Economics*, 39(1):157–187, 2015.
- [10] Xiong Chen. The korn-kreer-lenssen model as an alternative for option pricing. *Willmott Magazine*, pages 74–80, 6 2004.
- [11] Alpha C. Chiang and Kevin Wainwright. *Métodos fundamentales de economía matemática*. McGraw-Hill, 2006.
- [12] Paul Clifford, Yan Wang, Oleg Zaboronski, and Kevin Zhang. Pricing options using trinomial trees. *University of Warwick*. Recuperado de: https://warwick.ac.uk/fac/sci/math/people/staff/oleg-zaboronski/fm/trinomial_tree_2010_kevin.pdf, 2010.
- [13] Rama Cont. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative finance*, 1(2):223, 2001.
- [14] Rama Cont. *Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models*, pages 289–309. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2007.

- [15] Rama Cont and Jean-Philippe Bouchaud. Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets. *Macroeconomic dynamics*, 4(2):170–196, 2000.
- [16] John C Cox, Stephen A Ross, and Mark Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.
- [17] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. *The mathematics of arbitrage*. Springer, 2006.
- [18] Marwil J Dávila-Fernández and Gilberto A Libânio. Goodwin cycles and the BoPC growth paradigm: A macrodynamic model of growth and fluctuations. *Economía*, 17(3):324–339, 2016.
- [19] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [20] Peter Fritzson. *Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation with Modelica 3.3: A Cyber-Physical Approach*. Wiley-IEEE Press, 2 edition, 2015.
- [21] Peter Fritzson and Vadim Engelson. Modelica - a unified object-oriented language for system modeling and simulation. *Lecture Notes in Computer Science*, 1445, 07 1998.
- [22] Wynne Godley and Marc Lavoie. *Monetary economics: an integrated approach to credit, money, income, production and wealth*. Macmillan, 2016.
- [23] Richard M Goodwin. A growth cycle. In C. H. Feinstein, editor, *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, pages 54–58. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [24] Ronald L Graham, Donald E Knuth, and Oren Patashnik. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley, 2 edition, 1994.
- [25] J Michael Harrison and David M Kreps. Martingales and arbitrage in multi-period securities markets. *Journal of Economic theory*, 20(3):381–408, 1979.
- [26] J Michael Harrison and Stanley R Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic processes and their applications*, 11(3):215–260, 1981.
- [27] Espen Gaarder Haug. *The complete guide to option pricing formulas*, chapter 7. McGraw Hill, 2 edition, 2007.
- [28] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2013.
- [29] John C. Hull. *Options, futures, and other derivatives*, chapter 21. Pearson, New York, 11 edition, 2022.
- [30] Ioannis Karatzas, Steven E Shreve, I Karatzas, and Steven E Shreve. *Methods of mathematical finance*, volume 39. Springer, 1998.

- [31] Andre A Keller. Contribution of the delay differential equations to the complex economic macrodynamics. *WSEAS Transactions on Systems*, 9(4):358–371, 2010.
- [32] Achim Klenke. *Probability theory: a comprehensive course*. Universitext. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] Ralf Korn, Markus Kreer, and Mark Lenssen. Pricing of european options when the underlying stock price follows a linear birth-death process. *Communications in statistics. Stochastic models*, 14(3):647–662, 1998.
- [34] Mark Grigorevich Krein and Adol’f Abramovich Nudel’man. *The Markov moment problem and extremal problems: ideas and problems of PL Cebysev and AA Markov and their further development*, volume 50 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1977.
- [35] Benoit Mandelbrot. The variation of some other speculative prices. *The Journal of Business*, 40(4):393–413, 1967.
- [36] John McCombie and Anthony Philip Thirlwall. *Economic growth and the balance-of-payments constraint*. Macmillan, 1994.
- [37] Yuliya Mishura and Kostiantyn Ralchenko. *Discrete-Time Approximations and Limit Theorems: In Applications to Financial Markets*, volume 2. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.
- [38] Modelica Association. *Modelica — A Unified Object-Oriented Language for Systems Modeling: Language Specification, version 3.7*. Modelica Association, 2023. Version 3.7 (or 3.7-dev depending on release).
- [39] Michalis Nikiforos and Gennaro Zezza. Stock-flow consistent macroeconomic models: A survey. *Journal of Economic Surveys*, 31(5):1204–1239, 2017.
- [40] Adrian Pagan. The econometrics of financial markets. *Journal of empirical finance*, 3(1):15–102, 1996.
- [41] Mikko S Pakkanen. Microfoundations for diffusion price processes. *Mathematics and financial economics*, 3:89–114, 2010.
- [42] Dimitri Papadimitriou and Gennaro Zezza. *Contributions to Stock-Flow Modeling: Essays in Honor of Wynne Godley*. Springer, 2011.
- [43] Svetlozar T Rachev, Stoyan V Stoyanov, Almira Biglova, and Frank J Fabozzi. An empirical examination of daily stock return distributions for us stocks. In *Data analysis and decision support*, pages 269–281. Springer, 2005.
- [44] Richard J Rendleman, Jr. and Britt J Bartter. Two-state option pricing. *The Journal of Finance*, 34(5):1093–1110, 1979.
- [45] John Riordan. Moment recurrence relations for binomial, poisson and hypergeometric frequency distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 8(2):103–111, 1937.

- [46] R Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*, volume 28. Princeton university press, 1997.
- [47] Mark Rubinstein. On the relation between binomial and trinomial option pricing models. *The Journal of Derivatives*, 8(2):47–50, 2000.
- [48] Mark Rubinstein. *Rubinstein on derivatives*, chapter 4. Risk Publications, 1 edition, 2000.
- [49] Konrad Schmüdgen. *The moment problem*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2017.
- [50] Anwar Shaikh. *Capitalism: Competition, conflict, crises*. Oxford University Press, 2016.
- [51] William F Sharpe, Gordon J Alexander, and Jeffery V Bailey. *Investments*. Prentice Hall Incorporated, 1999.
- [52] James Alexander Shohat and Jacob David Tamarkin. *The Problem of Moments*, volume 1 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 1943.
- [53] Robert M Solow. Investment and technical progress. In Kenneth J Arrow, Samuel Karlin, and Patrick Suppes, editors, *Mathematical Methods in the Social Sciences*, pages 89–104. Stanford University Press, Stanford, CA, 1960.