UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

K-teoría bivariante algebraica y problemas de clasificación de $*$-álgebras

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Guido Arnone

Director: Guillermo Cortiñas
Consejero de estudios: Marco Farinati
Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló (IMAS)

Buenos Aires, 2025.

K-TEORÍA BIVARIANTE ALGEBRAICA Y PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN DE $*$-ÁLGEBRAS

RESUMEN

En esta tesis desarrollamos herramientas de K-teoría y álgebra homológica para el estudio de problemas de clasificación de $*$-álgebras sobre un $*$-anillo conmutativo y unital. Nos concentramos especialmente en las conjeturas de Hazrat sobre la clasificación graduada de álgebras de Leavitt.

Introducimos versiones homotópicamente invariante y hermitiana de los grupos de K-teoría graduada, y los calculamos para toda álgebra de Leavitt de un grafo finito en términos de la K-teoría (homotópica, hermitiana) del anillo base y del llamado módulo de Bowen-Franks del grafo subyacente.

Probamos que todo morfismo de módulos punteados preordenados entre módulos de Bowen-Franks de grafos finitos puede levantarse a un $*$-morfismo unital y graduado entre las álgebras de Leavitt asociadas, y más aún que el morfismo puede tomarse de forma que preserve las subálgebras diagonales.

Adaptamos al contexto graduado el teorema de clasificación a menos de homotopía de Cortiñas y Montero: demostramos que dos álgebras de Leavitt de grafos primitivos son homotópicamente equivalentes de forma graduada si y sólo si sus módulos de Bowen-Franks son isomorfos como módulos preordenados punteados. En el camino demostramos una serie de resultados estructurales sobre la K-teoría bivariante algebraica graduada y su estructura de categoría triangulada.

Por último, estudiamos la homología de Hochschild del álgebra de Steinberg asociada a un grupoide amplio. Para grupoides Hausdorff obtenemos que la homología de grupoides es un sumando directo de la homología de Hochschild. Obtenemos resultados similares para la homología cíclica, así como para sus variantes negativa y periódica.

Palabras clave: K-teoría bivariante algebraica, K-teoría graduada, álgebras de Leavitt, conjeturas de Hazrat, álgebras de Steinberg, homología de grupoides.

Algebraic bivariant K-theory and classification problems for $*$-algebras

Abstract

In this thesis we develop tools from K-theory and homological algebra to study classification problems for $*$-algebras over a commutative unital $*$-ring. We focus especially on the graded classification conjectures for Leavitt path algebras due to Hazrat.

We introduce homotopy invariant and hermitian versions of graded K-theory and compute them for any Leavitt path algebra of a finite graph in terms of the (homotopy, hermitian) K-theory of the ground ring and the so-called Bowen-Franks module of the underlying graph.

We prove that any morphism between Bowen-Franks modules of finite graphs can be lifted to a unital, graded, diagonal preserving $*$-morphism between the associated Leavitt path algebras.

Adapting the homotopy classification theorem due to Cortiñas and Montero, we show that two Leavitt path algebras of primitive graphs are graded homotopy equivalent if and only if their Bowen-Franks modules are isomorphic as pointed preordered modules. Along the way we prove several structural results on graded bivariant algebraic K-theory and its triangulated structure.

Finally, we study the Hochschild homology of the Steinberg algebra of an ample groupoid. For Hausdorff groupoids, we show that groupoid homology is a direct summand of Hochschild homology. We also obtain similar results for cyclic homology as well as its negative and periodic variants.

Keywords: algebraic bivariant K-theory, graded K-theory, Leavitt path algebras, Hazrat's conjectures, Steinberg algebras, groupoid homology.

Agradecimientos

A toda mi familia, muy especialmente a mi mamá Fabiana y a Luis, a mi papá Marcelo y a Ana, a Clara, Juan, Maju y Pachi, a mi tío Germán, mi tía Ianina y mi abuela Lidia. Sin todo su cariño hubiera sido imposible llegar hasta acá. Agradezco especialmente a mi mamá por su apoyo incondicional y su contención: no hay palabras que le hagan justicia a todo lo que ha hecho por mí. Gracias por haberme enseñado con el ejemplo a prestarle atención a los detalles y a dar todo de mí en lo que sea que me proponga.

A mi director Willie Cortiñas, por todo lo que me ha inspirado y transmitido, por responder mis preguntas con incansable paciencia, por estar pendiente de mí, por la generosidad de siempre tenerme en cuenta, por sus entrañables y variopintas anécdotas, por ser respetuoso de mis tiempos durante los reveces y por su aliento para seguir adelante.

A Alcides Buss, Eusebio Gardella y Enrique Pardo, por haber aceptado ser jurados de esta tesis.

A mi amigo y colega Devarshi Mukherjee por todo el apoyo que me brindó, tanto personal como profesionalmente. Su estadía en Buenos Aires contribuyó en buena medida a mi formación durante los primeros años del doctorado y, en más de una ocasión, a mi forma de ver el mundo. Agradezco también a Simranjeet Kaur por su enorme calidez y hospitalidad cuando fui a visitarlos a Göttingen.

A todos mis amigos y amigas de la facultad, muy especialmente a Ramiro Akris, Carli Antunes, Darío Aza, Agustín Barreto, Nahuel Bobar, Boris Burd, Lucía Busolini, Nacho Cordoba, Lucas de Amorin, Charly Di Fiore, Cecilia Duhau, Janou Glaeser, Leopoldo Lerena, Maki Martínez Wagner, Sol Nabot, Valentín Nico, Pablo Perrella, Santiago Ramírez, Nicolás San Martín, Matías Saucedo, Emilia Vayssier y Cristel Yacovone. Gracias por acompañarme durante los altibajos de hacer un doctorado y por la infinidad de experiencias divertidas y enriquecedoras que hemos compartido todo este tiempo.

Una mención especial para Agus y Lu: a mediados de 2020, cuando el mundo estaba en un momento más que incierto, me animaron a poner mi energía en recibirme. Su compañía durante el final de la licenciatura y al comenzar este proyecto fue invaluable. Agradezco seguir teniendo el gusto de compartir el día a día con ellos.

A todos mis alumnos y alumnas, cuya dedicación y afán por el conocimiento son, sin duda alguna, una fuente de esperanza.

A Diego García, mi profesor de batería, cuyas clases han sido un cable a tierra durante todo este recorrido.

A la Universidad de Buenos Aires y muy especialmente a Exactas, que ya es como mi segunda casa. Gracias a todos aquellos que contra viento y marea dan todo de sí para que siga siendo lo que es.

Al CONICET por brindarme la posibilidad de dar mis primeros pasos en la investigación.

Índice general

Introducción

En esta tesis estudiamos $*$-álgebras que provienen de algebrizar la definición de cierta álgebra de operadores. Uno de nuestros principales objetivos será estudiar preguntas de clasificación que conciernen al álgebra de Leavitt asociada a un grafo, definida independientemente por Ara, Moreno y Pardo en [AMP07] y por Abrams y Aranda Pino en [AAP05] como contraparte algebraica de la C^*-álgebra asociada a un grafo introducida por Cuntz y Krieger ([CK80]).

Fijemos un $*$-anillo conmutativo y unital ℓ. El ℓ-álgebra de Leavitt $L_\ell(E)$ de un grafo E viene equipada con una graduación canónica sobre $\mathbb{Z}$. En [Haz13b], Hazrat conjetura que es posible clasificar a las álgebras de Leavitt –como álgebras graduadas– a partir de sus grupos de Grothendieck graduados:

Conjetura A (Conjetura I.6.1)**.** Sea ℓ un cuerpo y sean E y F dos grafos finitos. Las álgebras $L_\ell(E)$ y $L_\ell(F)$ son graduadamente isomorfas si y sólo si hay un isomorfismo de módulos preordenados $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(F))$ que envía $[L_\ell(E)]$ a $[L_\ell(F)]$.

Conjetura B (Conjetura I.6.2)**.** Sea ℓ un cuerpo y sean E y F dos grafos finitos.

(I) Todo morfismo $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(F))$ que preserve el orden y envíe $[L(E)]$ a $[L(F)]$ proviene de aplicar K_0^{gr} a un morfismo de álgebras graduadas $L_\ell(E) \to L_\ell(F)$.

(II) Si $f, g\colon L_\ell(E) \to L_\ell(F)$ son dos morfismos de álgebras graduadas tales que $K_0^{\mathrm{gr}}(f) = K_0^{\mathrm{gr}}(g)$, entonces f y g difieren en un automorfismo interior.

En el mismo artículo, Hazrat prueba la Conjetura A para una familia de grafos llamados policefálicos ([Haz13b, Definition 3.6]). Posteriormente Ara y Pardo prueban en [AP14] una versión débil de la Conjetura A para grafos sin pozos ni fuentes. Exhiben también un contraejemplo para la parte (II) de la Conjetura B ([AP14, Example 6.7]).

Otro de los objetivos de esta tesis consiste en el estudio de invariantes asociados al álgebra de Steinberg $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$ de un grupoide amplio $\mathscr{G}$, definida independientemente por Steinberg [Ste10] y Clark, Farthing, Sims y Tomforde [CFST14]. Esta familia de álgebras incluye tanto a las álgebras de Leavitt como a las álgebras de grupo; en particular, un cálculo explícito y general de su K-teoría está lejos de nuestro alcance. Nos concentramos como primer paso en el cálculo de la homología de Hochschild e invariantes relacionados, buscando generalizar la caracterización de Burghelea para álgebras de grupo [Bur85].

En el Capítulo I recopilamos los resultados preliminares que serán necesarios a lo largo de la tesis. A continuación, en el Capítulo II nos concentramos en el cálculo de los grupos de K-teoría graduada de un álgebra de Leavitt. Sean E un grafo y A_E su matriz de adyacencia reducida, es decir, la que se obtiene de la matriz de adyacencia omitiendo las filas asociadas a pozos y emisores infinitos. Llamemos $C_\infty = \langle \sigma \rangle$ al grupo cíclico infinito con notación multiplicativa y $\mathbb{Z}[\sigma]$ a su anillo de grupo. El módulo de Bowen-Franks de E es el $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulo

$$\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) := \operatorname{coker}(I - \sigma A_E^t).$$

Resulta isomorfo al grupo dimensional considerado por Krieger [Kri80], un invariante de la dinámica simbólica, y guarda una estrecha relación con $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E))$; Hazrat demuestra en [Haz13c, Lemma

11] que, si ℓ es un *cuerpo* y E un grafo sin pozos, entonces

$$K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E).$$

En esta dirección obtenemos la siguiente generalización:

Teorema A (Corolario II.4.5). Si E es un grafo finito por filas y ℓ un anillo conmutativo y unital, entonces

$$K_n^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n(\ell) \qquad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

Para demostrarlo utilizamos la relación entre los módulos graduados de un álgebra graduada R y módulos sobre su producto cruzado $\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} R$, estudiada por Ara, Hazrat, Li y Sims en [AHLS18]. En particular, utilizamos fuertemente que cuando R es el álgebra de Leavitt de un grafo E, entonces su producto cruzado es el álgebra de Leavitt del llamado revestimiento $\widetilde{E}$ de E (ver Definición II.4.1).

En este capítulo también introducimos una versión invariante por homotopías KH^{gr} de K^{gr}, y una variante hermitiana para $*$-álgebras graduadas definida a partir de la K-teoría hermitiana de categorías exactas con dualidad debida a Schlichting ([Sch10a]). Tanto el teorema anterior como sus análogos para estos invariantes pueden deducirse del siguiente resultado general.

Teorema B (Teorema II.4.3). Sea E un grafo finito por filas. Si $H\colon \mathsf{Alg} \to \mathsf{Ab}$ es un funtor matricialmente estable y aditivo que preserva colímites filtrantes, entonces hay un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos

$$H(L_\ell(\widetilde{E})) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} H(\ell).$$

La definición de estabilidad matricial puede consultarse en la Sección I.1.2.

En el Capítulo III estudiamos el problema de levantamiento de morfismos entre módulos de Bowen-Franks a morfismos entre álgebras de Leavitt. En la Sección III.3 damos una interpretación combinatoria de los morfismos entre módulos de Bowen-Franks, lo cual da lugar al principal resultado del capítulo:

Teorema C (Teorema III.4.1). Sean E y F dos grafos finitos. Si $\phi : \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados punteados, entonces existe un $*$-morfismo unital $\mathbb{Z}$-graduado $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ que preserva la diagonal y hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \arrow[r, "K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)"] & K_0^{\mathrm{gr}}(L(F)) \\ \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \arrow[u] \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

En particular probamos la parte (I) de la Conjetura B, simultánea e independientemente demostrada también por Vaš en [Vaš23]. Los levantamientos obtenidos en el anterior teorema son de una especial rigidez (Definición III.5.1); el resto del capítulo está dedicado a caracterizarlos (ver Teorema III.5.4).

Los Capítulos IV y V conciernen a una versión de la Conjetura A en la que se reemplaza la noción de isomorfismo por la de homotopía graduada (ver Sección I.1.5 para la definición precisa de este término). Esta pregunta está inspirada en el teorema de clasificación a menos de homotopía debido a Cortiñas y Montero en el caso no graduado [CM20], y la versión hermitiana demostrada posteriormente por Cortiñas en [Cor22]. La principal herramienta a la hora de probar estos teoremas es la K-teoría bivariante algebraica [CT07], definida por Cortiñas y Thom en analogía con la interpretación de Cuntz de la K-teoría bivariante de Kasparov ([Cun87]). En nuestro caso utilizaremos la versión graduada introducida por Ellis [Ell14]. Consiste de una categoría triangulada kk^{gr} junto con un funtor $j\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to kk^{\mathrm{gr}}$ que universal con una serie de propiedades de estabilidad; referimos a la Sección IV.1 para una breve introducción a esta teoría. El funtor j es la identidad en objetos, por lo que lo omitiremos de la notación frecuentemente.

En el Capítulo IV probamos una serie de propiedades formales que necesitaremos para adaptar las técnicas desarrolladas en [CM21, CM20, Cor22]. En las Secciones IV.2 y Secciones IV.3 estudiamos la estructura de categoría triangulada de kk^{gr}, y en la Sección IV.4 representamos la clase de una unidad en K_1^{gr} como un morfismo en kk^{gr}. Nuestra motivación para estos resultados proviene de adaptar la dualidad de Poincaré para álgebras de Leavitt demostrada en [Cor22, Theorem 11.2]. Sea $\Omega = s(1-s)\ell[s]$, con s homogéneo de grado cero. Dado un grafo E, notamos E_t al grafo dual de E con matriz de adyacencia A_E^t. La dualidad de Poincaré relaciona a $L_\ell(E)$ con $\Omega L_\ell(E_t) := \Omega \otimes_\ell L_\ell(E_t)$.

Teorema D (Teorema IV.5.2)**.** Si E es un grafo finito sin pozos ni fuentes, entonces $-\otimes_\ell L_\ell(E)$ es adjunto a izquierda de $-\otimes \Omega L_\ell(E_t)$ como endofuntores de kk^{gr}.

El Capítulo V está dedicado a demostrar que el grupo de Grothendieck graduado clasifica a las álgebras de Leavitt a menos de homotopía. Nos restringimos a una familia de grafos conocidos como primitivos (ver Definición V.2.2); esta es una hipótesis de simplicidad (ver Proposición V.2.4) que permite adaptar técnicas desarrolladas en el caso no graduado para álgebras de Leavitt simples puramente infinitas. La dualidad de Poincaré juega un papel esencial en este capítulo, pues permite entender morfismos entre álgebras de Leavitt en kk^{gr} a través del isomorfismo $kk^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E), L_\ell(F)) \cong KH_1^{\mathrm{gr}}(L_\ell(F)\otimes L_\ell(E_t))$. Otras herramientas técnicas necesarias en este capítulo refieren a álgebras ultramatriciales (Sección V.2.2) y la estructura de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulo de $K_1^{\mathrm{gr}}(R)$ cuando R es un álgebra de polinomios de Laurent torcida (Sección V.2.3). El teorema principal implica en particular el siguiente resultado:

Teorema E (Teorema V.3.1, cf. Conjetura A)**.** Sea ℓ un cuerpo y sean E y F dos grafos finitos y primitivos. Las álgebras $L_\ell(E)$ y $L_\ell(F)$ son graduadamente unitalmente homotópicamente equivalentes si y sólo si hay un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(F))$ que envía $[L_\ell(E)]$ a $[L_\ell(F)]$.

Finalmente, en el Capítulo VI nos concentramos en el cálculo de la homología de Hochschild y la homología cíclica de álgebras de Steinberg. Usando resultados recientes de Miller [Mil], probamos que la resolución bar de $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$ guarda relación con el complejo $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$ que resulta de tomar el módulo $\mathscr{C}_c(-)$ de funciones de soporte compacto sobre

$$\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} = \{(g_0,\dots,g_n) \in \mathscr{G}^{n+1} : s(g_i) = r(g_{i+1}), s(g_n) = r(g_0)\}.$$

A partir de este hecho obtenemos una serie de consecuencias que comparan al módulo cíclico $C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}))$ asociado al álgebra de Steinberg con el módulo cíclico asociado a la homología de grupoides. Pueden resumirse en el siguiente teorema:

Teorema F (Corolario VI.3.6, Teoremas VI.3.4 y VI.3.2)**.** Sea $\mathscr{G}$ un grupoide amplio y $\mathscr{G}^{\mathrm{Iso}} = \{g \in \mathscr{G} : s(g) = r(g)\}$ su isotropía. Notamos $\mathbb{H}(\mathscr{G})$ al módulo cíclico asociado a la homología de $\mathscr{G}$ y $\mathbb{HC}$, $\mathbb{HN}$, $\mathbb{HP}$ para sus complejos de homología cíclica, cíclica negativa y cíclica periódica.

(I) El morfismo natural $C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\ell) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}^0))$ es un cuasi-isomorfismo.

(II) Hay inclusiones $C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}^0)) \xleftarrow{\iota} \mathbb{H}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\iota'} \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{G}$ es Hausdorff, entonces ι y ι' son secciones y existe una suryección $\mu\colon C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}^0)) \to \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$ tal que $\mu\circ\iota = \iota'$.

(III) Se tienen cuasi-isomorfismos

$$\mathbb{HC}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{H}(\mathscr{G})[-2n], \quad \mathbb{HN}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_{n\geq 0} \mathbb{H}(\mathscr{G})[2n], \quad \mathbb{HP}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}(\mathscr{G})[2n].$$

(IV) Supongamos que $\mathscr{G}$ es Hausdorff y $\mathscr{G}^{\mathrm{Iso}} \setminus \mathscr{G}^{(0)}$ es discreto. Sea $\mathscr{R}$ un conjunto de representantes de las órbitas de elementos $x \in \mathscr{G}^0$ con $\mathscr{G}_x^x \neq \{x\}$. Para cada $x \in \mathscr{R}$, sea Z_x un conjunto de representantes de las clases de conjugación no triviales de $\mathscr{G}_x^x$. Dado $\eta \in \mathscr{G}_x^x$, notamos $(\mathscr{G}_x^x)_\eta$ a su centralizador. Se tiene un cuasi-isomorfismo de módulos cíclicos

$$\mathbb{H}(\mathscr{G}) \oplus \bigoplus_{x\in\mathscr{R}} \bigoplus_{\eta\in Z_x} \mathbb{H}((\mathscr{G}_x^x)_\eta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}).$$

Los resultados del Capítulo II forman parte del artículo [AC23], el artículo [Arn23] comprende los resultados del Capítulo III, los Capítulos IV y V forman parte del artículo [Arn25] y el Capítulo VI forma parte de [ACM24].

Capítulo I

Preliminares

En este capítulo damos una breve introducción a los conceptos preliminares que necesitaremos en la tesis.

A lo largo del texto, fijamos un grupo abeliano G y un anillo conmutativo y unital ℓ equipado con un automorfismo involutivo $*\colon \ell \to \ell$. A menos que se indique lo contrario, el adjetivo ***graduado*** significará siempre G-graduado. Una ***ℓ-álgebra*** será un ℓ-bimódulo simétrico A equipado con una multiplicación asociativa $A \otimes_\ell A \to A$. En esta tesis $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ y $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

I.1. Álgebras graduadas

Una ***G-graduación*** en una ℓ-álgebra A es una descomposición $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ en ℓ-módulos que satisfacen $A_g A_h \subset A_{gh}$ para cada $g, h \in G$. Un ***álgebra graduada*** es un álgebra equipada con una graduación. La proyección de $x \in A$ a A_g se denotará x_g; si $x \in A_g$, decimos que x es ***homogéneo de grado*** g y escribimos $|x| = g$.

El anillo de base ℓ es visto como álgebra graduada a través de la graduación trivial, es decir, poniendo $|\lambda| = 1_G$ para cada $\lambda \in \ell$. Un morfismo de álgebras graduadas es un morfismo de álgebras $f : A \to B$ que satisface $f(A_g) \subset B_g$ para todo $g \in G$. Denotaremos a la categoría de álgebras graduadas por $\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$.

Ejemplos I.1.1. Antes de seguir mencionamos brevemente algunos ejemplos básicos de álgebras graduadas.

- Toda ℓ-álgebra A puede verse como un álgebra graduada a través de la graduación trivial, en la cual $A = A_{1_G}$.
- El álgebra de grupo $\ell[G]$ viene equipada con una graduación canónica dada por $\ell[G] = \bigoplus_{g \in G} \ell \cdot g$.
- Si A es un álgebra graduada, entonces A^{op} tiene una graduación canónica dada por $A^{\mathrm{op}}_g := A_{g^{-1}}$.
- Toda función $\omega\colon \{1, \dots, n\} \to G$ induce una graduación en el álgebra

$$L_n := \frac{\ell\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}}{\left\langle 1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i, y_j x_i - \delta_{ij} \right\rangle}$$

  definida originalmente por Leavitt en [Lea62]. La graduación está determinada por las igualdades $|x_i| = \omega(i)$, $|y_i| = \omega(i)^{-1}$. En el caso $G = \mathbb{Z}$ y ω la función constantemente $1 \in \mathbb{Z}$, esta se conoce como la graduación estándar sobre L_n.

En la Sección I.1.2 consideraremos graduaciones sobre anillos de matrices, y en la Sección I.4 generalizaremos este último ejemplo a toda álgebra de caminos de Leavitt.

Observación I.1.2. Si A es una ℓ-álgebra graduada, entonces A_{1_G} es una subálgebra de A.

Nuestra referencia principal sobre anillos graduados y sus grupos de Grothendieck es [Haz16].

I.1.1. Producto tensorial

Dadas dos álgebras graduadas A y B, su producto tensorial viene equipado con una graduación canónica dada por

$$(R \otimes_\ell S)_d = \bigoplus_{gh=d} R_g \otimes_{\mathbb{Z}} S_h.$$

Consideraremos siempre al anillo $\ell[t]$ de polinomios con la graduación trivial, y definimos $A[t] := A \otimes_\ell \ell[t]$ para cada álgebra graduada A. En otras palabras, definimos $|t| = 1_G$.

A menudo omitiremos el símbolo de producto tensorial y usaremos la yuxtaposición en su lugar, especialmente cuando alguna de las álgebras involucradas venga equipada con la graduación trivial. Por ejemplo, definimos las álgebras de ***caminos*** y de ***lazos*** respectivamente como

$$P = \ker(\ell[t] \xrightarrow{\mathrm{ev}_0} \ell), \qquad \Omega = \ker(P \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \ell) \tag{I.1.3}$$

y escribimos

$$PA = P \otimes_\ell A, \qquad \Omega A = \Omega \otimes_\ell A$$

para cada álgebra graduada A. Notamos $\Omega^n := \Omega^{\otimes_\ell n}$ para cada $n \geq 1$.

I.1.2. Conjuntos graduados y estabilidad

Un ***conjunto graduado*** es un par (X, d) donde X es un conjunto y $d : X \to G$ una función. Cuando se sobreentienda del contexto, escribiremos $|\cdot|$ en vez de d. Un elemento $x \in X$ se dice de ***grado*** $d(x) \in G$, y la ***componente de grado*** $g \in G$ de X es $X_g := d^{-1}(g)$. Un morfismo de conjuntos graduados $f : (X, d) \to (Y, d')$ es una función $f : X \to Y$ tal que $d' \circ f = d$. Si X es un conjunto, escribimos $|X|$ para el conjunto graduado asociado a la función constante de constante 1_G.

Un conjunto graduado X da lugar a un álgebra graduada de ***matrices indexadas por*** X, que denotaremos M_X. Como ℓ-módulo es libre con base $\{\varepsilon_{x,y} : x, y \in X\}$, y el producto está dado por $\varepsilon_{x,y} \cdot \varepsilon_{w,z} = \delta_{y,w}\varepsilon_{x,z}$. La graduación viene inducida por la asignación $|\varepsilon_{x,y}| = |x||y|^{-1}$. Si A es un álgebra graduada, escribimos $M_X A := M_X \otimes_\ell A$.

Definición I.1.4. Notamos $M_\infty := M_{|\mathbb{N}|}$ y $M_n := M_{|\{1,\ldots,n\}|}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que si tenemos un morfismo de conjuntos graduados $f : X \to Y$ cuya función subyacente es inyectiva, entonces da lugar a un morfismo de álgebras graduadas

$$Mf : M_X \to M_Y, \qquad \varepsilon_{x,y} \mapsto \varepsilon_{f(x),f(y)}.$$

Definición I.1.5. Sea $F : \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ un funtor. Decimos que F es ***matricialmente estable*** si para cada par de conjuntos no vacíos X, Y de cardinalidad menor o igual a $\gimel = \max\{\aleph_0, |G|\}$ y cualquier álgebra graduada A, el funtor F envía la inclusión $M_{|X|}R \to M_{|X \sqcup Y|}R$ a un isomorfismo. Si más aún F envía las inclusiones $M_X R \to M_{X \sqcup Y} R$ a isomorfismos para todo par de conjuntos graduados de cardinal menor o igual a $\gimel$, decimos que es ***G-estable***.

Dados X un conjunto graduado y $x \in X$, definimos para toda álgebra graduada A el siguiente morfismo de álgebras graduadas:

$$\iota_x^A : A \to M_X A, \quad a \mapsto \varepsilon_{x,x} \otimes a. \tag{I.1.6}$$

Cuando se desprenda del contexto, omitiremos el supraíndice. A menos que se indique lo contrario, veremos siempre a G como conjunto graduado a través de $\mathrm{id}_G : G \to G$ y escribiremos $\iota_A := \iota_{1_G} : A \to M_G A$.

Proposición I.1.7 (cf. [Arn21, Proposición 3.3.8])**.** Sean X un conjunto graduado, $x \in X$ de grado $g \in G$ y A un álgebra graduada. Todo funtor G-estable F envía $\iota_x : A \to M_G A$ a un isomorfismo. Más aún, para todo otro $y \in X_g$ se tiene que $F(\iota_y) = F(\iota_x)$.

Demostración. Sea $F : \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ un funtor G-estable. Bajo el isomorfismo graduado $A \cong M_{\{x\}} A$, es posible identificar a ι_x con el morfismo inducido por la inclusión $\{x\} \subset \{x\} \sqcup X \setminus \{x\} = X$. Por lo tanto $F(\iota_x)$ es un isomorfismo; veamos ahora que sólo depende del grado de x. Consideramos los siguientes isomorfismos de álgebras graduadas

$$\tau : M_G M_X A \to M_G M_X A, \qquad \varepsilon_{s,t} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes a \mapsto \varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{sd(x),td(y)} \otimes a \in M_{|X|} M_G A, \tag{I.1.8}$$

$$L_g : M_G A \to M_G A, \qquad \varepsilon_{x,y} \otimes a \mapsto \varepsilon_{gx,gy} \otimes a. \tag{I.1.9}$$

que forman parte del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M_G M_X A \arrow[rr, "\tau"] & & M_{|X|} M_G A \\
& & M_G A \arrow[u, "\iota_x^{M_G A}"'] \\
M_X A \arrow[uu, "\iota_{M_X A}"] & A \arrow[l, "\iota_x^A"'] \arrow[r, "\iota_A"] & M_G A \arrow[u, "L_g"']
\end{tikzcd}$$

Por lo observado F envía todas estas flechas a isomorfismos. En consecuencia $F(\iota_x)$ se puede expresar en términos de $F(\iota_x^{M_G A})$, donde x es visto en X con graduación trivial, y de morfismos que sólo dependen de A y de $g \in G$. Esto nos dice que basta probar el caso en el cual X tiene graduación trivial, lo cual se deduce de la estabilidad matricial de F aplicando [CV22, Lemma 2.4.1]. ◇

Corolario I.1.10. Si $F : \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ es un funtor matricialmente estable, entonces $F(M_G(-))$ resulta G-estable. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) El funtor F es G-estable.

(II) Para cada álgebra graduada A, el funtor F envía la inclusión $A \xrightarrow{\iota_1} M_G A$ a un isomorfismo.

(III) Los funtores F y $F(M_G(-))$ son naturalmente isomorfos.

Demostración. Probamos primero que $F(M_G(-))$ es G-estable. Sean X e Y conjuntos graduados no vacíos y $x \in X$. Como el triángulo

$$\begin{tikzcd}
& M_X A \arrow[dd] \\
A \arrow[ur, "\iota_x"] \arrow[dr, "\iota_x"'] & \\
& M_{X \sqcup Y} A
\end{tikzcd}$$

conmuta, basta ver que FM_G envía morfismos de la forma ι_x a isomorfismos, es decir, que F envía $M_G \iota_x$ a un isomorfismo. Si llamamos inc_x a la inclusión $\mathrm{inc}_x : M_G A \to M_{|X|} M_G A$ en lugar $x \in X$, por estabilidad matricial $F(\mathrm{inc}_x)$ es un isomorfismo. Resta observar que si τ y $L_{|x|}$ los isomorfismos de álgebras graduadas (I.1.8) y (I.1.9), entonces $\iota_x = \tau^{-1} \mathrm{inc}_x L_{|x|}$.

Pasamos ahora a las equivalencias. Que (I) implica (II) se sigue de la Proposición I.1.7. Si (II) es cierto, aplicar F a ι_1 nos provee de un isomorfismo natural $F \Rightarrow FM_G$, probando (III). Como la G-estabilidad se preserva por isomorfismos naturales, que (III) implica (I) es una consecuencia de que FM_G es G-estable. ◇

Observación I.1.11. Por [ART23, Theorem 5.3], dos anillos graduados y unitales S, R son graduadamente Morita equivalentes si y sólo si existe una graduación $d : \mathbb{N} \to G$ tal que $M_{(\mathbb{N},d)} S \cong M_{|\mathbb{N}|} R = M_\infty R$. En particular, los funtores G-estables son Morita invariantes en el sentido graduado.

I.1.3. Extensiones

Una ***extensión*** de álgebras graduadas es una sucesión exacta

$$K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q$$

tal que $p = \operatorname{coker}(i)$, $i = \ker(p)$, y p admite una sección ℓ-lineal $s\colon Q \to E$.

Observación I.1.12. Si bien no requerimos que la sección s en la definición de extensión preserve las graduaciones, la existencia de s permite conseguir una sección graduada definiendo

$$\hat{s}(m) = \sum_{d \in G} s(m_d)_d.$$

Ejemplo I.1.13. La ***extensión de lazos*** de un álgebra graduada A es

$$\Omega A \hookrightarrow PA \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} A. \tag{$\mathfrak{L}$}$$

Ejemplo I.1.14. Sea

$$\Gamma = \{f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \ell : |\operatorname{im} f| < \infty \text{ y } (\exists N \geq 1) \text{ tal que } |\operatorname{Supp}(x,-)|, |\operatorname{Supp}(-,x)| \leq N (\forall x \in X)\} \tag{I.1.15}$$

el ***cono de Karoubi***, que resulta un anillo con la suma puntual y el producto de convolución. Notemos que M_∞ es un ideal de Γ; definimos el anillo ***suspensión*** como $\Sigma = \Gamma / M_\infty$. La extensión

$$M_\infty A \to \Gamma A \to \Sigma A \tag{$\mathfrak{K}$}$$

es la ***extensión de cono*** de A ([CT07, Section 4.7]). Notamos $\Sigma^n := \Sigma^{\otimes_\ell n}$.

La importancia de la extensión del Ejemplo I.1.14 yace en su relación con la K-teoría bivariante algebraica [CT07] y su estructura de categoría triangulada: tensorizar por Σ representa el funtor de suspensión ([CT07, Corollary 6.4.2] y [CT07, Section 6.5]). Más adelante generalizaremos esta extensión para que cumpla propiedades formales análogas en el contexto de la K-teoría bivariante algebraica graduada.

I.1.4. Anillos fuertemente graduados

Un anillo unital graduado R se dice ***fuertemente graduado*** si $R_g R_h = R_{gh}$ para cada $g, h \in G$. El teorema de Dade [Dad80, Theorem 2.8] dice que R es fuertemente graduado si y sólo si el funtor

$$R \otimes_{R_{1_G}} - \colon \operatorname{Mod}_{R_{1_G}} \to \operatorname{Mod}_R^{\mathrm{gr}}$$

es una equivalencia de categorías con inversa

$$(-)_{1_G} \colon \operatorname{Mod}_R^{\mathrm{gr}} \to \operatorname{Mod}_{R_{1_G}}.$$

Ejemplo I.1.16. Por [Haz16, Example 1.1.16], si A es un álgebra fuertemente graduada entonces también lo es $B \otimes_\ell A$ para toda álgebra unital graduada B.

I.1.5. Invariancia homotópica

Una ***homotopía elemental graduada*** entre morfismos de álgebras graduadas $f, g\colon A \to B$ es un morfismo graduado $h\colon A \to B[t]$ tal que $\mathrm{ev}_0 \circ h = f$, $\mathrm{ev}_1 \circ h = g$. Decimos que f y g son ***graduadamente homotópicas*** si hay una secuencia de homotopías elementales graduadas $h_1, \dots h_n\colon A \to B[t]$ tales que $\mathrm{ev}_0 \circ h_1 = f$, $\mathrm{ev}_1 \circ h_n = g$ y $\mathrm{ev}_1 \circ h_j = \mathrm{ev}_0 \circ h_{j+1}$ para cada j. Esta noción forma una relación de equivalencia que denotaremos por $\sim$.

Dos álgebras graduadas (unitales) R y S son ***(unitalmente) graduadamente homotópicamente equivalentes*** si existen morfismos graduados (unitales) $f : R \to S$ y $g : S \to R$ tales que $fg \sim 1_S$ y $gf \sim 1_R$.

Definición I.1.17. Decimos que un funtor $F\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ es ***homotópicamente invariante*** si envía cada inclusión $A \subset A[t]$ a un isomorfismo. Equivalentemente F es homotópicamente invariante si $f \sim g$ implica $F(f) = F(g)$.

Será necesario considerar también dos variantes más débiles de la noción de homotopía graduada. La primer variante involucra estabilizar matricialmente. Decimos que dos morfismos graduados $f, g\colon A \to B$ son ***graduadamente M_2-homotópicos*** si $\iota_1 \circ f, \iota_1 \circ g\colon A \to M_2B$ son graduadamente homotópicos. Como para la noción de homotopía previamente definida, esto induce una relación de equivalencia que denotaremos por $\sim_{M_2}$. Similarmente, tenemos una noción de ***equivalencia M_2-homotópica graduada***; decimos que dos álgebras graduadas son ***graduadamente M_2-homotópicamente equivalentes*** si hay una equivalencia M_2-homotópica graduada entre ellas. La segunda variante de homotopía graduada requiere una definición.

Definición I.1.18. Sea C un álgebra graduada unital y $A, B \subset C$ dos subálgebras. Notamos $\mathrm{inc}_A\colon A \to C$ e $\mathrm{inc}_B\colon B \to C$ a las inclusiones. Dados $u, v \in C$ dos elementos homogéneos tales que $|u||v| = 1$ y $avua' = aa'$ para todo $a, a' \in A$ y $uAv \subset B$, definimos el morfismo graduado

$$\mathrm{ad}(u,v)\colon A \to B, \qquad a \mapsto uav.$$

Si u es una unidad, escribimos $\mathrm{ad}(u) := \mathrm{ad}(u, u^{-1})$.

Diremos que dos morfismos unitales $f, g\colon R \to S$ entre álgebras graduadas son ***graduadamente*** ad***-homotópicos***, y notaremos $f \sim_{\mathrm{ad}} g$, si existe una unidad $u \in S_{1_G}$ tal que $(\mathrm{ad}(u) \circ f) \sim g$. Si queremos hacer explícita la unidad en cuestión, escribiremos $f \sim_u g$. La demostración del siguiente lema es una consecuencia de la Proposición I.1.20.

Lema I.1.19. Si dos morfismos unitales graduados son graduadamente ad-homotópicos, entonces son graduadamente M_2-homotópicos. ◇

Proposición I.1.20. Dadas A, B, C y $u, v \in C$ como en la Definición I.1.18, se tiene que:

(I) todo funtor G-estable $F\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ satisface $F(\mathrm{inc}_B\, \mathrm{ad}(u,v)) = F(\mathrm{inc}_A)$;

(II) si $B = A$, $uA, Av \subset A$, y $|u| = 1_G$, entonces $\mathrm{ad}(u,v) \sim_{M_2} \mathrm{id}_A$.

En particular (II) implica que todo funtor $F\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{C}$ que sea matricialmente estable y homotópicamente invariante cumple que $F(\mathrm{ad}(u,v)) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Demostración. Para demostrar (I) adaptamos [Cor11, Proposition 2.2.6]. Sea $d := |u|$ y notemos que $|v| = d^{-1}$. La asignación $1 \mapsto 1_G$, $2 \mapsto d$ define una graduación en $\{1,2\}$ y por lo tanto en M_2; por el resto de la demostración consideraremos a M_2 con esta graduación en particular.

Sean $U = \varepsilon_{1,1}u + \varepsilon_{2,2}1_C$ y $V = \varepsilon_{1,1}v + \varepsilon_{2,2}1_C$. Una verificación muestra que

$$\phi\colon M_2A \to M_2C, \qquad x \mapsto UxV$$

es un morfismo de álgebras graduadas bien definido. Para cada $k \in \{1,2\}$, notemos $\iota_k^R\colon R \to M_2R$ a la inclusión de esquina y observemos que

$$\phi\iota_1^A = \iota_1^C\, \mathrm{inc}_B\, \mathrm{ad}(u,v), \qquad \phi\iota_2^A = M_2(\mathrm{inc}_A)\iota_2^A.$$

Al aplicar F se obtiene que $F(\phi)F(\iota_2^A) = F(M_2(\mathrm{inc}_A))F(\iota_2^A)$. Como $F(\iota_2^A)$ es un isomorfismo pues F es G-estable, se sigue que $F(\phi) = F(M_2(\mathrm{inc}_A))$. En consecuencia

$$F(\iota_1^C)F(\mathrm{inc}_B\, \mathrm{ad}(u,v)) = F(\phi\iota_1^A) = F(M_2(\mathrm{inc}_A)\iota_1^A) = F(\iota_1^C)F(\mathrm{inc}_A).$$

Una vez más apelando a la G-estabilidad, sabemos que $F(\iota_1^C)$ es un isomorfismo y entonces $F(\mathrm{inc}_B\, \mathrm{ad}(u,v)) = F(\mathrm{inc}_A)$. Esto concluye la prueba de i).

Ahora supongamos que $A = B$, $uA, Av \subset A$ y $|u| = 1_G$. Escribiendo $\iota_k = \iota_k^A$, las hipótesis nos dicen que ϕ puede ser correstringido a un morfismo $\psi \colon M_2 A \to M_2 A$ que cumple $\psi\iota_1 = \iota_1 \operatorname{ad}(u,v)$ y $\psi\iota_2 = \iota_2$. También nos dicen que $d = 1_G$ y por lo tanto la graduación considerada en $M_2 A$ es la usual. Más aún, la homotopía entre ι_1 y ι_2 dada en [CM21, Lemma 2.1] resulta graduada. Esto implica que $\iota_1 \operatorname{ad}(u,v) = \psi\iota_1 \sim \psi\iota_2 = \iota_2 \sim \iota_1$, lo cual prueba (II). ◇

I.1.6. Unitalización y módulos unitales

La ***unitalización*** de una ℓ-álgebra graduada A es el ℓ-módulo $\widetilde{A}_\ell = A \oplus \ell$ con multiplicación $(a,k)(b,l) := (ab + al + bk, kl)$ y graduación $(\widetilde{A}_\ell)_{1_G} = A_{1_G} \oplus \ell$ y $(\widetilde{A}_\ell)_g = A_g$ si $g \neq 1$. Por definición $\widetilde{A}_\ell$ es unital con unidad $(0,1)$, la proyección $\pi \colon \widetilde{A}_\ell \to \ell$ es un morfismo de anillos unitales, y $A \cong \ker(\pi)$. Si A es unital, entonces $\widetilde{A}_\ell \cong_{\mathrm{gr}} A \times \ell$ y vía $(a,n) \mapsto (a + n\cdot 1, n)$.

Sea $\mathsf{Alg}_1^{\mathrm{gr}}$ la subcategoría de ℓ-álgebras graduadas que son unitales y A una categoría aditiva. Un funtor $F \colon \mathsf{Alg}_1^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{A}$ es ***aditivo*** si para cada par de ℓ-álgebras graduadas unitales R, S el morfismo canónico $F(R \times S) \to F(R) \oplus F(S)$ es un isomorfismo. Si F es aditivo, entonces

$$\hat{F}(A) := \ker(F(\widetilde{A}_\ell) \xrightarrow{F(\pi)} F(\ell))$$

extiende el dominio de F a $\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$ a menos de isomorfismo natural.

Si A es un anillo, un A-módulo a izquierda (resp. a derecha) M se dice ***unital*** si $AM = M$ (resp. $MA = M$). Notaremos Mod_A a la categoría de A-módulos unitales, y mod_A a la subcategoría plena generada por los que son finitamente generados.

I.1.7. Unidades locales graduadas

Definición I.1.21 ([AHLS18, p. 134])**.** Una ℓ-álgebra graduada A tiene ***unidades locales graduadas*** si para todo conjunto finito $\mathscr{F} \subset A$ existe un idempotente homogéneo $e \in A$ tal que $\mathscr{F} \subset eAe$.

Si vemos a un álgebra como álgebra graduada con la graduación trivial, recuperamos la noción usual de unidades locales. Recordemos que el conjunto $\mathrm{idem}^{\mathrm{gr}}(A)$ de idempotentes homogéneos de un álgebra graduada A viene equipado con un orden parcial; concretamente, decimos que $e \leq f$ si $ef = ef = e$. Un ***conjunto de unidades locales graduadas*** es un subconjunto cofinal de $\mathrm{idem}^{\mathrm{gr}}(A)$.

Observación I.1.22. Si A es un álgebra graduada con unidades locales graduadas, entonces para todo conjunto de unidades locales $\mathscr{U} \subset \mathrm{idem}^{gr}(A)$ tenemos isomorfismos graduados

$$A = \operatorname{colim}_{\mathrm{idem}^{\mathrm{gr}}(A) \ni e} eAe = \operatorname{colim}_{\mathscr{U} \ni e} eAe.$$

Como la unitalización preserva colímites filtrantes, y los núcleos conmutan con colímites filtrantes en la categoría Ab de grupos abelianos, para todo funtor $F \colon \mathsf{Alg}_1^{\mathrm{gr}} \to \mathsf{Ab}$ tenemos isomorfismos

$$\hat{F}(A) = \operatorname{colim}_{e \in \mathscr{U}} \hat{F}(eAe) \cong \operatorname{colim}_{e \in \mathscr{U}} F(eAe).$$

I.2. K-teoría graduada

Los ***grupos de K-teoría*** de un anillo unital R son una familia de grupos abelianos $\{K_*(R)\}_{*\geq 0}$ que se construyen a partir de la categoría proj_R de R-módulos finitamente generados y proyectivos. En el 0-ésimo lugar tenemos al ***grupo de Grothendieck*** de R,

$$K_0(R) = \frac{\mathbb{Z}\{[P] : P \in \mathrm{proj}_R\}}{\langle [P] + [Q] - [P \oplus Q] \rangle}.$$

Más generalmente, hay una noción de grupos de K-teoría asociada a una familia de categorías aditivas con estructura adicional llamadas ***categorías exactas***. Esta teoría fue desarrollada originalmente por Quillen en [Qui73], utilizando la denominada ***construcción Q de Quillen***. En la Sección II.3.2 daremos las definiciones básicas de categorías exactas. Referimos a [Sch] para una breve introducción a la construcción Q y la definición de K-teoría, y a [Büh10] para un tratamiento detallado de la teoría de categorías exactas.

Observación I.2.1. Dado un morfismo unital de anillos $f : R \to S$, la extensión de escalares define un funtor $\mathrm{proj}_R \to \mathrm{proj}_S$ y en consecuencia morfismos de grupos abelianos $K_*(R) \to K_*(S)$. Si bien esta construcción es funtorial, no lo es a nivel de categorías exactas. Esto es porque la extensión de escalares de una composición no es estrictamente igual a componer dos funtores de extensión de escalares.

Una forma de rectificar este problema y definir una asignación funtorial a nivel de categorías exactas es reemplazar proj_A por otra categoría exacta $\mathbb{P}(A)$ que resulta equivalente. Si $\mathbb{F}(A)$ es la categoría con objetos $\mathbb{N}_0$ y morfismos $\hom(n,m) = A^{m\times n}$, con la composición dada por la multiplicación de matrices de matrices, entonces $\mathbb{P}(A)$ es su completación por idempotentes. A continuación damos su descripción explícita, aunque referimos a [Wei13, II.7] y a [Wei13, IV, Elementary Properties 6.4] para más detalles al respecto. Los objetos de $\mathbb{P}(A)$ son matrices idempotentes $p \in M_n(A)$ para algún $n \geq 1$. Informalmente, pensamos en un módulo proyectivo y finitamente generado como la imagen de un proyector $R^n \to R^n$. Dados objetos $p \in M_n(A)$, $q \in M_m(A)$ un morfismo $x : p \to q$ es una matriz $x \in M_{m\times n}(A)$ tal que $x = qxp$. La composición está dada por la multiplicación de matrices, e $1_p = p$ para toda matriz idempotente p. Notar que esta construcción da una categoría equivalente a proj_A cuando A tiene unidades locales. La extensión de escalares a lo largo de un morfismo de anillos $f : A \to B$ se identifica, a menos de isomorfismo natural, con el funtor $\mathbb{P}(A) \to \mathbb{P}(B)$ que aplica f a una matriz lugar a lugar.

Observación I.2.2. La K-teoría se extiende a un funtor sobre todos los anillos, unitales o no, como en la Sección I.1.6. Como conmuta con colímites filtrantes de anillos unitales por lo observado en [Wei13, IV, Elementary Properties 6.4], su extensión también lo hace. Más aún, en loc. cit. se afirma que la K-teoría conmuta con colímites filtrantes de categorías exactas. En particular si A tiene unidades locales, entonces $\mathbb{P}(A) = \mathrm{colim}_{e\in \mathrm{idem}(A)} \mathbb{P}(eAe)$ y luego

$$K_*(\mathrm{proj}_A) \cong K_*(\mathbb{P}(A)) \cong K_*(\mathrm{colim}_{e\in\mathrm{idem}(A)} \mathbb{P}(eAe)) \cong \mathrm{colim}_{e\in\mathrm{idem}(A)} K_*(eAe) = K_*(A).$$

A continuación recordaremos la definición de K-teoría graduada para un anillo graduado R. Un ***R-módulo (unital) graduado*** (a izquierda) es un R-módulo M equipado con una descomposición en suma directa de ℓ-módulos $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ que satisfacen $R_g M_h \subset M_{gh}$ para todo $g, h \in G$. El ***shift (o desplazamiento)*** de M por $g \in G$ es el módulo $M[g] := M$ equipado con la graduación $M[g]_h = M_{gh}$. Un morfismo R-lineal $f : M \to N$ entre módulos graduados se dice ***homogéneo de grado*** $g \in G$ si $f(M_h) \subset N_{gh}$ para cada $h \in G$. Diremos que es ***graduado*** si es homogéneo de grado 1_G. Los R-módulos graduados forman una categoría denominada $\mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}}$. El shift por $g \in G$ define un endofuntor $S_g : \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}} \to \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}}$ que es un isomorfismo.

Un R-módulo graduado se dice ***finitamente generado*** si lo es como R-módulo, y proyectivo si es un objeto proyectivo de $\mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}}$. Por [AHLS18, Lemma 4.1] (ver también [Haz16, Proposition 1.2.15]), si R tiene unidades locales entonces los R-módulos (unitales) graduados proyectivos son exactamente aquellos que son proyectivos como R-módulos. Tenemos subcategorías plenas

$$\mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}} \supset \mathrm{mod}_R^{\mathrm{gr}} \supset \mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$$

dadas por los módulos finitamente generados y los finitamente generados y proyectivos respectivamente. En ambos casos, los endofuntores de shift se restringen a estas subcategorías. Observamos que de igual modo que en el caso no-graduado, la categoría $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$ tiene una estructura canónica de categoría exacta dada por las sucesiones exactas cortas.

Definición I.2.3. La K-teoría de un ***K-teoría graduada*** $K_*^{\mathrm{gr}}(R)$ de un álgebra graduada y unital R se define como la K-teoría de la categoría exacta $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$. Extendemos esta construcción a $\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$ como en la Sección I.1.6.

En lugar 0, obtenemos el ***grupo de Grothendieck graduado*** de R

$$K_0^{\mathrm{gr}}(R) = \frac{\mathbb{Z}\{[P] : P \in \mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}\}}{\langle [P]+[Q]-[P\oplus Q]\rangle}.$$

Nuestra referencia principal sobre anillos graduados y sus grupos de Grothendieck es [Haz16].

Ejemplo I.2.4. Si R es un álgebra unital fuertemente graduada, entonces las equivalencias definidas en la Sección I.1.4 inducen isomorfismos canónicos

$$K_*(R_{1_G}) \to K_*^{\mathrm{gr}}(R). \tag{I.2.5}$$

Los grupos de K-teoría graduada tienen estructura adicional que proviene de los funtores de desplazamiento. En efecto, para cada $g \in G$ el funtor S_g es un endomorfismo de $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$ que preserva la estructura de categoría exacta, y por lo tanto desciende a un isomorfismo $\mathbb{Z}$-lineal $K_n^{\mathrm{gr}}(R) \to K_n^{\mathrm{gr}}(R)$. Esto nos dice que los grupos de K-teoría graduada tienen una estructura natural de $\mathbb{Z}[G]$-módulo.

Notación I.2.6. Escribiremos $C_\infty \cong \mathbb{Z}$ para referirnos al grupo cíclico infinito con notación multiplicativa, y fijaremos de aquí en más un generador σ de C_∞. Notamos $\mathbb{Z}[\sigma] := \mathbb{Z}[C_\infty]$ a su anillo de grupo, que es isomorfo al anillo de polinomios de Laurent.

En términos de la Notación I.2.6, cuando $G = \mathbb{Z}$ la K-teoría graduada consiste de una familia de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos.

I.3. Grafos

Un ***grafo*** (dirigido) es una tupla $E = (E^0, E^1, r, s)$ que consiste de dos conjuntos E^0 de ***vértices*** y E^1 de ***aristas*** junto con funciones de ***salida*** y ***llegada*** $s, r : E^1 \to E^0$.

Un vértice v es un ***pozo*** si $s^{-1}(v) = \emptyset$, un ***emisor infinito*** si $s^{-1}(v)$ es infinito, y una ***fuente*** si $r^{-1}(v) = \emptyset$. Notamos $\mathrm{sink}(E)$, $\mathrm{ínf}(E)$ y $\mathrm{sour}(E)$ a estos conjuntos de vértices respectivamente. Un vértice es ***singular*** si pertenece a $\mathrm{sing}(E) = \mathrm{sink}(E) \sqcup \mathrm{ínf}(E)$, y es ***regular*** en caso contrario. Escribimos $\mathrm{reg}(E) = E^0 \setminus \mathrm{sing}(E)$. Decimos que E es ***regular*** si $E^0 = \mathrm{reg}(E)$ y ***esencial*** si es regular y además $\mathrm{sour}(E) = \emptyset$.

Decimos que E es ***finito*** si E^0 y E^1 son conjuntos finitos, y ***finito por filas*** si no tiene emisores infinitos.

La ***matriz de adyacencia (reducida)*** de un grafo finito por filas E es la matriz $A_E \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{reg}(E)\times E^0}$ cuyas entradas cuentan la cantidad de aristas entre cada par de vértices,

$$(A_E)_{v,w} = \#\{e \in E^1 : s(e) = v, r(e) = w\}.$$

En ocasiones consideraremos también la matriz de adyacencia no-reducida $\tilde{A}_E \in \mathbb{N}_0^{E^0\times E^0}$. Sus filas correspondientes a vértices regulares son iguales a las de A_E, y el resto son nulas. Un ***camino*** en E es una sucesión finita de aristas $\alpha = e_1 \dots e_n$ tales que $r(e_i) = s(e_{i+1})$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$; la salida de α es $s(\alpha) = s(e_1)$ y su llegada $r(\alpha) = r(e_n)$. La ***longitud*** de α es $|\alpha| = n$; consideramos a un vértice $v \in E^0$ como un camino de longitud cero que comienza y termina en v. El conjunto de caminos de E se denotará $\mathscr{P}(E)$. Para cada $k \geq 0$ y $v, w \in E^0$, escribiremos $E_{v,w}^k = \{\alpha \in \mathscr{P}(E) : s(\alpha) = v, r(\alpha) = w, |\alpha| = k\}$ y $E_w^k := \bigcup_{v\in E^0} E_{v,w}^k = \{\alpha \in \mathscr{P}(E) : r(\alpha) = w, |\alpha| = k\}$. Recordemos que, como $\#E_{v,w}^k = (\tilde{A}^k)_{v,w}$,

$$\#E_w^k = \sum_{v\in E^0} (\tilde{A}_E^k)_{v,w}. \tag{I.3.1}$$

Necesitaremos también distinguir si un camino termina en un vértice regular o singular; dado $n \geq 0$ notamos $\mathscr{R}_n(E) = \bigcup_{w\in\mathrm{reg}(E)} E_w^n$ y $\mathscr{S}_n(E) = \bigcup_{u\in\mathrm{sink}(E)} \bigcup_{i=0}^n E_u^i$.

I.4. Álgebras de Leavitt

A un grafo E le asociamos su ***ℓ-álgebra de Leavitt*** $L(E)$, la cual se define como el álgebra cociente del álgebra libre en el conjunto $\{v, e, e^* : v \in E^0, e \in E^1\}$ por las siguientes relaciones:

$$vw = \delta_{v,w} v, \qquad (v, w \in E^0), \tag{V}$$
$$s(e)e = er(e) = e, \qquad (e \in E^1), \tag{E1}$$
$$r(e)e^* = e^* s(e) = e^*, \qquad (e \in E^1), \tag{E2}$$
$$f^* e = \delta_{f,e} r(e), \qquad (f, e \in E^1), \tag{CK1}$$
$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^*, \qquad (v \in \operatorname{reg}(E)). \tag{CK2}$$

Las relaciones (CK1) y (CK2) se denominan ***relaciones de Cuntz-Krieger***.

Ejemplo I.4.1. Sea $n \geq 1$. El grafo $\mathscr{R}_n$ dado por un único vértice v y n lazos $e_1, \ldots, e_n$ se denomina la ***rosa de n pétalos***. Un cálculo directo muestra que $L(\mathscr{R}_n)$ es isomorfa al álgebra L_n definida en la lista de Ejemplos I.1.1 a través de la asignación $v \mapsto 1$, $e_i \mapsto x_i$, $e_i^* \mapsto y_i$.

El libro [AASM17] es la principal referencia sobre los fundamentos de la teoría de álgebras de caminos de Leavitt. Referimos también al artículo [Abr15] donde se detalla la motivación histórica que llevó a la definición de estas álgebras, así como el desarrollo de los primeros resultados fundamentales sobre ellas.

El ***álgebra de Cohn*** de E es el álgebra que se obtiene dividiendo por todas las relaciones anteriores excepto por (CK2). Hay un morfismo canónico de álgebras $C(E) \to L(E)$ que es suryectivo por definición. Si escribimos

$$q_v = v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \tag{I.4.2}$$

para cada $v \in \operatorname{reg}(E)$ y $\mathscr{K}(E) := \langle q_v : v \in \operatorname{reg}(E) \rangle$, tenemos una sucesión exacta corta

$$\mathscr{K}(E) \to C(E) \to L(E). \tag{$\mathscr{C}_E$}$$

Por [AASM17, Proposition 1.5.11], esta es una extensión en el sentido de la Sección I.1.3. La denominamos la ***extensión de Cohn*** de $L(E)$.

Un ***peso*** en un grafo E es una función $\omega \colon E^1 \to G$. Todo peso define una graduación en $C(E)$ vía la asignación $|v| = 1_G$, $|e| = \omega(e)$, $|e^*| = \omega(e)^{-1}$ que hace de $\mathscr{K}(E)$ un ideal homogéneo. Por lo tanto, se tiene inducida una graduación en $L(E)$. Escribiremos $C(E, \omega)$, $L(E, \omega)$ y $\mathscr{K}(E, \omega)$ cuando queramos enfatizar que la graduación está dada por ω. Si no hacemos referencia a un peso, estaremos considerando la ***graduación estándar***, que es la inducida por el peso $\omega \colon E^1 \to \mathbb{Z}$ que vale constantemente 1. Es decir, la graduación está dada por una extensión de la regla $|v| = 0$, $|e| = 1$ y $|e^*| = -1$ para cada $v \in E^0$, $e \in E^1$.

Observación I.4.3. Si E es un grafo finito, entonces $L(E)$ equipada con la graduación estándar es fuertemente graduada si y sólo si E no tiene pozos ([Haz13a, Theorem 3.15]).

Los siguientes dos lemas nos serán de utilidad a lo largo de la tesis.

Lema I.4.4. Sean α y β dos caminos en un grafo finito E. Se tienen las siguientes identidades en in $L(E)$:

(I) si $|\alpha| = |\beta|$, entonces $\alpha^* \beta = \delta_{\alpha,\beta} r(\alpha)$.

(II) si $r(\alpha) \in \operatorname{reg}(E), r(\beta) \in \operatorname{sink}(E)$ y $|\beta| \leq |\alpha|$, entonces $\alpha^* \beta = \beta^* \alpha = 0$.

(III) si $r(\alpha), r(\beta) \in \operatorname{sink}(E)$, entonces $\alpha^* \beta = \delta_{\alpha,\beta} r(\alpha)$.

(IV) para cada $N \geq 0$, el conjunto $\{xx^* : x \in \mathscr{R}_N(E) \sqcup \mathscr{S}_N(E)\}$ consiste de proyecciones ortogonales y homogéneos.

Demostración. Es una consecuencia directa de la regla de multiplicación en $L(E)$ ([AASM17, Lemma 1.2.12]). ◇

Lema I.4.5. Sea E un grafo finito. Para cada $N \in \mathbb{N}_0$,

$$1 = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}_N(E)} \alpha\alpha^* + \sum_{\beta \in \mathscr{S}_N(E)} \beta\beta^*$$

Demostración. Si $N = 0$, esto es cierto por [AASM17, Lemma 1.2.12 (iv)] lo cual a su vez es una consecuencia directa de la regla de multiplicación entre caminos. El caso general se sigue inductivamente aplicando reiteradas veces la relación (CK2). ◇

La ***diagonal*** de $L(E)$ es una sub-$*$-álgebra

$$D(E) = \operatorname{span}_\ell\{\alpha\alpha^* : \alpha \in \mathscr{P}(E)\} \subset L(E)_0.$$

Decimos que un morfismo de álgebras $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ ***preserva la diagonal*** si $\varphi(D(E)) \subset D(F)$. Escribiendo

$$L(E)_{0,n} = \operatorname{span}_\ell\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in \mathscr{R}_n(E)\} \oplus \operatorname{span}_\ell\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in \mathscr{S}_n(E)\}$$

y

$$D(E)_n = \operatorname{span}_\ell\{\alpha\alpha^* : \alpha \in \mathscr{R}_n(E) \sqcup \mathscr{S}_n(E)\},$$

cada álgebra $L(E)_{0,n}$ es matricial —esto es, un producto de álgebras de matrices— y $D(E)_n$ es su subálgebra diagonal. Se tienen inclusiones crecientes $L(E)_0 = \bigcup_{n\geq 0} L(E)_{0,n}$, $D(E) = \bigcup_{n\geq 0} D(E)_n$.

I.5. Módulos de Bowen-Franks

Sea E un grafo finito y A_E su matriz de adyacencia reducida. Escribiremos $I \in \mathbb{N}_0^{\operatorname{reg}(E)\times E^0}$ para la matriz definida por $I_{v,w} = \delta_{v,w}$. El ***grupo de Bowen-Franks*** de E es

$$\mathfrak{BF}(E) := \operatorname{coker}(I - A_E^t) = \frac{\mathbb{Z}^{E^0}}{\langle v - \sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e) : v \in \operatorname{reg}(E)\rangle},$$

y el $\mathbb{Z}[\sigma]$-***módulo de Bowen-Franks*** de E se define como

$$\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) := \operatorname{coker}(I - \sigma A_E^t) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}}{\langle v - \sigma\sum_{e\in s^{-1}(v)} r(e) : v \in \operatorname{reg}(E)\rangle}.$$

Estos invariantes tienen una estrecha relación con la K-teoría (graduada) de álgebras de Leavitt. Citamos dos resultados en esta dirección. En ambos casos las hipótesis pueden ser relajadas; profundizaremos sobre este punto en el Capítulo II.

Teorema I.5.1 ([AMP07, Theorem 3.5])**.** Si ℓ es un cuerpo y E un grafo finito por filas, entonces $K_0(L_\ell(E)) \cong \mathfrak{BF}(E)$. ◇

Teorema I.5.2 ([Haz13b, Theorem 5])**.** Si ℓ es un cuerpo y E un grafo finito sin pozos, entonces $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$. ◇

El módulo $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$ cuenta con más estructura que simplemente la de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulo. A continuación damos las definiciones necesarias para expresar precisamente a qué nos referimos con estructura adicional, ya que será necesario para enunciar las conjeturas de clasificación en la sección siguiente.

Definición I.5.3. Un $\mathbb{Z}[\sigma]$-***módulo preordenado*** es un $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulo M junto con un submonoide distinguido M_+, llamado el ***cono positivo*** de M, tal que $\mathbb{N}_0[\sigma]M_+ \subset M_+$. Esto define un orden en M dado por $x \leq y$ si $y - x \in M_+$, que es invariante por la acción de σ. Un ***módulo preordenado punteado*** es un módulo preordenado junto con un elemento distinguido $u \in M$ que es una ***unidad de orden***, es decir, tal que para todo $m \in M$ existe $x \in \mathbb{N}_0[\sigma]$ que satisface $m \leq x \cdot u$. Un morfismo de módulos punteados preordenados $f : (M, u) \to (N, v)$ es un morfismo $\mathbb{Z}[\sigma]$-lineal tal que $f(M_+) \subset N_+$ y $f(u) = f(v)$.

Los dos ejemplos fundamentales de módulos preordenados punteados que consideraremos en la presente tesis son los siguientes.

Ejemplo I.5.4. Si R es un anillo graduado, entonces su grupo de Grothendieck graduado junto con el submonoide $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))_+$ de clases de módulos proyectivos es un módulo preordenado y la clase de R es una unidad de orden.

Ejemplo I.5.5. El módulo de Bowen-Franks de un grafo finito E es un módulo punteado preordenado definiendo $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+ = \langle \sum_{v \in E^0} x_v \cdot v : x_v \in \mathbb{N}_0[\sigma] \rangle$ y tomando como unidad de orden a $1_E := \sum_{v \in E^0} [v]$.

Antes de seguir, mencionamos que el módulo de Bowen-Franks de un grafo sin pozos resulta isomorfo al llamado ***grupo dimensional de Krieger***, un invariante de la teoría de subshifts de tipo finito; ver por ejemplo [Haz16, 3.11]. Referimos a [LM95] para una introducción a este área.

I.6. Las conjeturas de clasificación graduada de Hazrat

En [Haz13b] Hazrat conjetura que la K-teoría graduada es un invariante completo para las álgebras de Leavitt como álgebras graduadas.

Conjetura I.6.1 ([Haz13b, Conjecture 1])**.** Sea ℓ un cuerpo y sean E y F dos grafos finitos. Las álgebras $L_\ell(E)$ y $L_\ell(F)$ son graduadamente isomorfas si y sólo si hay un isomorfismo de módulos preordenados $K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(E)) \xrightarrow{\cong} K_0^{\mathrm{gr}}(L_\ell(F))$ que envía $[L_\ell(E)]$ a $[L_\ell(F)]$.

Conjetura I.6.2 ([Haz13b, Conjecture 3])**.** Sea ℓ un cuerpo. El funtor $K_0^{\mathrm{gr}}(-)$ de la categoría de ℓ-álgebras de Leavitt unitales es un funtor plenamente fiel de la categoría de álgebras de Leavitt unitales módulo automorfismos interiores hacia la categoría de módulos preordenados punteados.

Dicho de otro modo, la Conjetura I.6.2 dice que todo morfismo $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$ proviene de un morfismo de álgebras graduadas, y que dos morfismos de álgebras graduadas que inducen el mismo morfismo en K_0^{gr} deben diferir en un automorfismo interior.

En el mismo artículo Hazrat prueba la Conjetura I.6.1 para una familia de grafos llamados ***policefálicos*** ([Haz13b, Definition 3.6]). Posteriormente, una versión débil de la Conjetura I.6.1 fue probada por Ara y Pardo en [AP14] para grafos esenciales. En ese mismo trabajo, los autores muestran que la fidelidad del funtor K_0^{gr} no es cierta en general ([AP14, Example 6.7]). La plenitud de K_0^{gr} es el principal tema de estudio del Capítulo III.

Capítulo II

K-teoría graduada y álgebras de Leavitt

En este capítulo nos concentramos en el cálculo de distintas variantes de la K-teoría graduada de álgebras de Leavitt. Para ello, primero utilizaremos resultados recientes de Ara, Hazrat, Li y Sims [AHLS18] para describir la K-teoría graduada de un álgebra graduada como la K-teoría de un cierto producto cruzado asociado al álgebra. Veremos que tanto estos resultados como sus consecuencias se pueden extender a las variantes hermitiana y homotópicamente invariante de la K-teoría graduada que definimos en este capítulo. Por último aplicaremos estos resultados al caso particular de las álgebras de Leavitt.

II.1. Módulos graduados como módulos sobre un producto cruzado

Comenzamos el capítulo estableciendo la relación entre módulos graduados sobre un álgebra graduada A y módulos sobre el álgebra $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A := (M_G A)_{1_G}$ que se denomina su ***producto cruzado***. Escribiremos $\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} a := \sum_{h\in H} \varepsilon_{g,gh} a_h$. Con esta notación, si $a, a' \in A$ son homogéneos entonces

$$(\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} a)(\chi_h \mathbin{\widehat{\ltimes}} a') = \delta_{g|a|,h} \cdot \chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} aa'.$$

Observación II.1.1. En [AHLS18, Definition 2.1], se considera el ***producto smash*** $A\#G$ de un álgebra graduada. Una verificación directa muestra que para la graduación opuesta $(A^{\mathrm{gr-op}})_g := A_{g^{-1}}$ $(g \in G)$, la siguiente asignación es un isomorfismo de álgebras:

$$A\#G \to (G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A^{\mathrm{gr-op}})^{\mathrm{op}}, \quad ap_g \mapsto \chi_{g^{-1}} \mathbin{\widehat{\ltimes}} a.$$

A continuación observaremos que si bien los productos cruzados no son unitales cuando G es infinito, pueden describirse como una unión de anillos de este tipo.

Observación II.1.2. Sea A un anillo graduado con unidades locales graduadas y notemos $\mathscr{F}(G)$ al conjunto de subconjuntos finitos de G. Para cada conjunto de unidades locales graduadas $\mathscr{U} \subset A$ se tiene que $\{\chi_F \mathbin{\widehat{\ltimes}} e : F \in \mathscr{F}(G),\, e \in \mathscr{U}\}$ es un conjunto de unidades locales de $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$.

Observación II.1.3. El funtor $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} -$ preserva extensiones, pues es exacto a nivel de ℓ-módulos. Si A es un álgebra graduada y C un álgebra con graduación trivial, entonces

$$G \mathbin{\widehat{\ltimes}} (C \otimes_\ell A) \cong C \otimes_\ell (G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A)$$

via $\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} c \otimes a \mapsto c \otimes (\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} a)$.

En [AHLS18, Proposition 2.5] Ara, Hazrat, Li y Sims prueban que si A es un anillo graduado que tiene unidades locales graduadas, entonces existe un isomorfismo entre la categoría de A-módulos a izquierda graduados y unitales y la categoría de módulos a izquierda unitales sobre el producto smash $A\#G$ mencionado en la Observación II.1.1. De esta última observación se desprende inmediatamente que tenemos isomorfismos inversos $\mathrm{Mod}_A^{\mathrm{gr}} \rightleftarrows \mathrm{Mod}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A}$; a continuación los describimos explícitamente.

Teorema II.1.4. Sea A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, y sea $\mathscr{U} \subset A$ un conjunto de unidades locales graduadas. Entonces existen isomorfismos inversos de módulos unitales a derecha

$$\Psi\colon \operatorname{Mod}_A^{\mathrm{gr}} \overset{\simeq}{\rightleftarrows} \operatorname{Mod}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A} \colon \Phi \tag{II.1.5}$$

definidas del siguiente modo:

(I) Dado un A-módulo graduado M, se define $\Psi(M) = M$ como grupo abeliano, con acción $m(\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} a) := m_g a$ para cada $g \in G$, $a \in A$, y $m \in \Psi(M)$.

(II) Si $f : M \to M'$ es un morfismo graduado, entonces $\Psi(f)$ es el morfismo dado por la función subyacente a f, el cual resulta $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$-lineal para la acción definida en el punto anterior.

(III) Si N es un $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$-módulo, se define $\Psi(N) = N$ como grupo abeliano, con graduación

$$\Phi(N)_g = \sum_{u \in \mathscr{U}} N(\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} u)$$

para cada $g \in G$, y acción $ma := m(\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} a)$ para cada $m \in \Phi(N)_g$, $a \in A$.

(IV) Si $f : M \to N$ es un morfismo $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$-lineal, definimos $\Phi(f)(m_g) = f(m)_g$.

◇

Observación II.1.6. Como el morfismo Ψ del Teorema II.1.4 no depende del conjunto de unidades locales graduadas $\mathscr{U}$ elegido, se sigue que la definición de Φ no depende de $\mathscr{U}$.

Dado un $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$-módulo N y $g \in G$, definimos una nueva estructura de módulo en N via

$$x \cdot_g (\chi_s \mathbin{\widehat{\ltimes}} a) = x \cdot (\chi_{gs} \mathbin{\widehat{\ltimes}} a). \tag{II.1.7}$$

Notamos $S'_g(N)$ a N con esta nueva estructura de módulo. Un cálculo muestra entonces que S'_g se corresponde a través de los isomorfismos del Teorema II.1.4 con el funtor de desplazamiento S_g. En otras palabras, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Mod}_A^{\mathrm{gr}} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "S_g"'] & \operatorname{Mod}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A} \arrow[d, "S'_g"] \\
\operatorname{Mod}_A^{\mathrm{gr}} & \operatorname{Mod}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A} \arrow[l, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

Tanto Ψ como Φ son isomorfismos, en particular, preservan objetos proyectivos. Nuestro objetivo es utilizar estos funtores para inducir isomorfismos a nivel de K-teoría, para lo cual necesitamos una última proposición debida a Preusser.

Proposición II.1.8. Si A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, entonces los funtores (II.1.5) envían módulos finitamente generados a módulos finitamente generados.

Demostración. Es un cálculo directo; puede verse en la demostración de [Pre20, Proposition 66]. ◇

II.2. K-teoría graduada y productos cruzados

Tenemos ahora sí todos los ingredientes para probar que la K-teoría graduada puede describirse en términos de la K-teoría de productos cruzados.

Teorema II.2.1. Si A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, entonces Ψ induce un isomorfismo $K_n^{\mathrm{gr}}(A) \to K_n(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Los funtores (II.1.5) definen isomorfismos de las categorías $\mathrm{proj}_A^{\mathrm{gr}}$ y $\mathrm{proj}_{G \widehat{\ltimes} A}$. Como $G \widehat{\ltimes} A$ tiene unidades locales, pues A tiene unidades locales graduadas, se sigue que $K_*(G \widehat{\ltimes} A) = K_*(\mathrm{proj}_{G \widehat{\ltimes} A})$ por la Observación I.2.2. Si A es unital, entonces $K_*^{\mathrm{gr}}(A) = K_*(\mathrm{proj}_A^{\mathrm{gr}})$ y se sigue que Φ induce un isomorfismo $K_*^{\mathrm{gr}}(A) \cong K_*(G \widehat{\ltimes} A)$. En el caso general A es un colímite filtrante de anillos unitales. Sea $\mathscr{U}$ un conjunto de unidades locales graduadas de A. Por el caso unital y la Observación I.1.22 aplicada a $\ell = \mathbb{Z}$ y $F = K_*^{\mathrm{gr}}$, tenemos un isomorfismo

$$K_*^{\mathrm{gr}}(A) \cong \mathrm{colim}_{e \in \mathscr{U}} K_*(G \widehat{\ltimes} eAe). \tag{II.2.2}$$

Como $G \widehat{\ltimes} - = (M_G \otimes_\ell -)_{1_G}$ y K_* preservan colímites filtrantes, el lado derecho de (II.2.2) es isomorfo a $K_*(G \widehat{\ltimes} A)$. ◇

Observación II.2.3. Sea A un álgebra graduada. Su producto cruzado $G \widehat{\ltimes} A$ es una G-álgebra, es decir, viene equipado con una acción a izquierda de G por automorfismos de álgebras

$$\alpha_g(\chi_h \widehat{\ltimes} a) = \chi_{gh} \widehat{\ltimes} a.$$

El funtor S_g' del Teorema II.1.4 es naturalmente isomorfo a la extensión de escalares a lo largo de $\alpha_{g^{-1}}$. Por lo tanto, la involución $g \mapsto g^{-1}$ de G identifica la acción a derecha de G en $K_*^{\mathrm{gr}}(A)$ con la acción a izquierda de G en $K_*(G \widehat{\ltimes} A)$ inducida por la estructura de G-álgebra de A.

II.2.1. La sucesión de seis términos y la K-teoría graduada negativa

Comenzamos con una observación. Sea

$$0 \to I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} B \to 0$$

una extensión de álgebras graduadas. Como el funtor $G \widehat{\ltimes} -$ preserva extensiones, al menos en el caso en que p es un morfismo unital usando la sucesión de seis términos para K_0 y K_1 (ver por ejemplo [Cor11, Theorem 2.4.1]) se obtiene se tiene una sucesión exacta

$$K_1^{\mathrm{gr}}(I) \to K_1^{\mathrm{gr}}(A) \to K_1^{\mathrm{gr}}(B) \xrightarrow{\partial} K_0^{\mathrm{gr}}(I) \to K_0^{\mathrm{gr}}(A) \to K_0^{\mathrm{gr}}(B). \tag{II.2.4}$$

El caso general se sigue del caso unital y de las propiedades formales de la extensión de K_*^{gr} a anillos no necesariamente unitales.

Si Γ es el cono de Karoubi, entonces como se observa en [Cor11, Example 2.3.2] tenemos que $K_1(\Gamma) = K_0(\Gamma) = 0$. La Observación II.1.3 nos asegura entonces que para toda álgebra graduada A tenemos que $K_0^{\mathrm{gr}}(\Gamma A) = K_1^{\mathrm{gr}}(\Gamma A) = 0$. Aplicando (II.2.4) a la extensión ($\mathfrak{K}$), obtenemos isomorfismos

$$K_1^{\mathrm{gr}}(\Sigma A) \cong K_0^{\mathrm{gr}}(A).$$

Esto motiva la definición de los grupos de ***K-teoría graduada negativa***,

$$K_{-n}^{\mathrm{gr}}(A) := K_0^{\mathrm{gr}}(\Sigma^n A) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Por definición un extensión como la descrita más arriba induce una sucesión exacta larga en grados menores a 1,

$$K_1^{\mathrm{gr}}(I) \to K_1^{\mathrm{gr}}(A) \to K_1^{\mathrm{gr}}(B) \xrightarrow{\partial} K_0^{\mathrm{gr}}(I) \to K_0^{\mathrm{gr}}(A) \to K_0^{\mathrm{gr}}(B) \to K_{-1}^{\mathrm{gr}}(I) \to K_{-1}^{\mathrm{gr}}(A) \to K_{-1}^{\mathrm{gr}}(B) \to \cdots \tag{II.2.5}$$

Usando una vez más la Observación II.1.3, el Teorema II.1.4 se puede extender a los grados negativos.

Corolario II.2.6. Si A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, entonces $K_n^{\mathrm{gr}}(A) \cong K_n(G \widehat{\ltimes} A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. ◇

II.2.2. K-teoría graduada homotópica

En esta sección definimos una versión homotópicamente invariante de la K-teoría graduada, siguiendo la caracterización de la K-teoría homotópica KH definida por Weibel ([Wei89]) dada en [CT07, Proposition 8.1.1].

La extensión de lazos ($\mathfrak{L}$) de un álgebra graduada A da lugar a un morfismo de conexión

$$\partial : K_r^{\mathrm{gr}}(A) \to K_{r-1}^{\mathrm{gr}}(\Omega A), \qquad r \leq 0. \tag{II.2.7}$$

El álgebra de caminos PA asociada a A es homotópicamente equivalencia al álgebra nula, pues el morfismo $p(t) \in PA \mapsto p(ts) \in P[s]$ es una homotopía entre la identidad y el morfismo nulo. Heurísticamente, una versión homotópicamente invariante de K_0^{gr} debería enviar PA al grupo trivial y el morfismo de conexión (II.2.7) a un isomorfismo. Con esta premisa, se estabiliza este morfismo definiendo los grupos de K***-teoría homotópica graduada*** como

$$KH_n^{\mathrm{gr}}(A) := \operatorname{colim}_{r\geq 0} K_{-r}^{\mathrm{gr}}(\Omega^{n+r}A) = \operatorname{colim}_{r\geq 0} K_0^{\mathrm{gr}}(\Omega^{n+r}\Sigma^r A). \tag{II.2.8}$$

y $KH_{-n}^{\mathrm{gr}}(A) = KH^{\mathrm{gr}}(\Sigma^n A)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Corolario II.2.9. Si A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, entonces $KH_n^{\mathrm{gr}}(A) \cong KH_n(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. ◇

II.3. K-teoría hermitiana graduada

A continuación consideraremos una versión graduada de la K-teoría hermitiana. Para llegar a su definición necesitaremos primero algunas generalidades sobre $*$-álgebras graduadas y sus módulos, así como la noción de categoría exacta con dualidad introducida por Schlichting en ([Sch10a]).

II.3.1. $*$-álgebras graduadas, módulos y el dual hermitiano

Una $*$***-álgebra*** graduada es un álgebra graduada A junto con un morfismo involutivo de anillos graduados $*\colon A \to A^{\mathrm{op}}$ compatible con la involución de ℓ, es decir, que satisface $(\lambda a)^* = \lambda^* a^*$ para todo $\lambda \in \ell$ y $a \in A$. Un morfismo de $*$-álgebras graduadas es un morfismo de álgebras graduadas que respeta las involuciones. Un elemento a de una $*$-álgebra A se dice ***autoadjunto*** si $a^* = a$, y una ***proyección*** si es un idempotente autoadjunto. Diemos que A tiene unidades locales graduadas si admite un conjunto de unidades locales graduadas que son autoadjuntas.

Si A es una $*$-álgebra y M un A-módulo a derecha, su ***dual hermitiano*** es el módulo a derecha

$$M^* = \{f \in \hom_{\mathbb{Z}}(M,A) : f(xa) = a^* f(x)\ (\forall a \in A, x \in M)\}.$$

Supongamos que A es una $*$-álgebra graudada. Para cada $d \in G$, consideramos el $\mathbb{Z}$-submódulo

$$M_d^* := \{f \in M^* : f(M_g) \subset A_{g^{-1}d}\ (\forall g \in G)\}.$$

Si bien la suma $\sum_{d\in G} M_d^*$ siempre es directa, la inclusión $\bigoplus_{d\in G} M_d^* \subset M^*$ puede ser estricta.

Definición II.3.1. Sea A es una $*$-álgebra graduada con unidades locales graduadas. Decimos que un A-módulo M es ***finitamente presentado*** si existen un idempotente homogéneo $e \in A$, $n, m \geq 1$ y $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_m \in G$ tales que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} eA[g_i] \to \bigoplus_{i=1}^{m} eA[h_i] \to M \to 0$$

es una sucesión exacta de módulos graduados. Como en el caso no-graduado, un módulo proyectivo y finitamente generado es finitamente presentado.

Proposición II.3.2. Si A es un anillo con unidades locales y M un A-módulo finitamente presentado, entonces

$$M^* = \bigoplus_{d \in G} M_d^*.$$

En particular M^* tiene una estructura de módulo graduado.

Demostración. El enunciado es cierto para módulos de la forma $eA[g]$ con $g \in G$ y e idempotente autoadjunto. En efecto, un morfismo $f \in (eA[g])^*$ es de la forma $f(a) = a^* x$ con $x = f(e)$. En particular, el dual hermitiano en cuestión está generado por morfismos de la forma $f(a) = a^* x$ con x homogéneo. Cada uno de ellos pertenece a algún submódulo $(eA[g])_d^*$, con $d = g^{-1}|x|$. Como $\hom_{\mathbb{Z}}(-, A)$ es exacto a izquierda y preserva sumas directas finitas, si M es finitamente presentado entonces tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to M^* \to \bigoplus_{i=1}^{m} (eA[h_i])^* \to \bigoplus_{i=1}^{n} (eA[g_i])^*.$$

Luego M^* es el núcleo de un morfismo entre módulos graduados y, como tal, tiene una graduación canónica. Una verificación directa muestra que coincide con la del enunciado de la proposición. ◇

II.3.2. Categorías exactas con dualidad

Una ***categoría exacta*** es una categoría aditiva $\mathscr{E}$ junto con una familia de sucesiones

$$X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} Z, \tag{II.3.3}$$

que llamaremos sucesiones exactas, sujetas a una serie de axiomas de que detallamos a continuación. Los morfismos i y p que formen parte de alguna sucesión exacta se dicen ***monomorfismos admisibles*** y ***epimorfismos admisibles*** respectivamente.

(I) toda sucesión exacta (II.3.3) es un par de núcleo-conúcleo, es decir $i = \ker(p)$ y $p = \operatorname{coker}(i)$.

(II) toda sucesión

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y$$

es exacta.

(III) las sucesiones exactas son cerradas por isomorfismos.

(IV) los monomorfismos (resp. epimorfismos) admisibles son cerrados por composición.

(V) todo diagrama $X \xleftarrow{i} Z \to Y$ admite un pushout

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r, "\bar{i}"'] & P \end{tikzcd}$$

con $\bar{i}$ un monomorfismo admisible.

(VI) todo diagrama $X \to Z \xleftarrow{p} Y$ admite un pullback

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d, "\bar{p}"'] & X \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

con $\bar{p}$ un epimorfismo admisible.

Un funtor entre categorías exactas se dice ***exacto*** si envía sucesiones exactas a sucesiones exactas.

Ejemplos II.3.4. Toda categoría abeliana es exacta, pero hay muchos ejemplos de categorías exactas que no son abelianas. Nuestro principal interés yace en proj_R y $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$, con las sucesiones exactas usuales, que son exactas pero no abelianas. Si $\mathscr{E}$ es exacta, entonces $\mathscr{E}^{\mathrm{op}}$ lo es con la misma familia de sucesiones exactas ahora vistas en $\mathscr{E}^{\mathrm{op}}$.

Definición II.3.5 ([Sch10a, Definition 2.1, Definition 3.1])**.** Una ***categoría con dualidad*** es una categoría $\mathscr{E}$ junto con un funtor $*\colon \mathscr{E}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}$ y una transformación natural $\eta_A\colon A \to A^{**}$ que satisface $1_{A^*} = \eta_A^* \circ \eta_{A^*}$. Decimos que es una ***categoría exacta con dualidad*** si $\mathscr{E}$ es exacta, el funtor de dualidad $*$ es exacto, y además η es un isomorfismo.

Dado un anillo unital R, la categoría proj_R tiene una estructura canónica de categoría exacta con dualidad. Lo mismo sucede en el caso graduado:

Ejemplo II.3.6. Si A es un anillo graduado con unidades locales, entonces $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}$ es una categoría exacta con dualidad considerando $*$ el funtor asociado al dual hermitiano y es isomorfismo natural

$$\mathrm{can}\colon M \to M^{**}, \qquad \mathrm{can}(x)(f) = f(x).$$

Ejemplo II.3.7 ([Sch10a, Section 3.5])**.** La ***categoría hiperbólica*** $H(\mathscr{E})$ de una categoría exacta $\mathscr{E}$ es la categoría exacta con dualidad dada por $H(\mathscr{E}) := \mathscr{E} \times \mathscr{E}^{\mathrm{op}}$, el funtor

$$(P,Q)^* = (Q,P), \qquad (f,g)^* = (g,f)$$

y el morfismo natural identidad $1 \to **$.

Definición II.3.8 ([Sch10a, Definition 3.2])**.** Un ***funtor de formas*** $F\colon (\mathscr{A},*,\alpha) \to (\mathscr{B},*,\beta)$ entre categorías con dualidad es un par (F,φ) donde $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es un funtor y $\varphi\colon F* \to *F$ una transformación natural que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\beta_{FA}"] \arrow[d, "F(\alpha_A)"'] & (FA)^{**} \arrow[d, "\varphi_A^*"] \\
F(A^{**}) \arrow[r, "\varphi_{A^*}"'] & F(A^*)^*
\end{tikzcd}$$

Decimos que (F,φ) es ***no-singular*** si φ es un isomorfismo. Si $(F,\varphi)\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $(G,\psi)\colon \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ son funtores de formas, se definen $(\psi \star \varphi)_A = \psi_{FA} \circ G(\varphi_A)$ y la composición de (F,φ) con (G,ψ) como $(G \circ F, \psi \star \varphi)$.

II.3.3. Grupos de Grothendieck-Witt

En [Sch10a, 4] Schlichting asocia a cada categoría exacta con dualidad $\mathscr{E}$ una familia de grupos $(GW_n(\mathscr{E}))_{n\geq 0}$ denominados ***grupos de Grothendieck-Witt*** de $\mathscr{E}$. Precisaremos aquí únicamente propiedades formales de estos grupos. De todos modos, antes de seguir damos una descripción informal de su construcción. Se construye una categoría $Q^h\mathscr{E}$ similar a la construcción Q de Quillen, teniendo en cuenta la estructura adicional de dualidad. Se tiene luego una fibración canónica entre espacios clasificantes $|Q^h\mathscr{E}| \to |Q\mathscr{E}|$; el espacio de Grothendieck-Witt de $\mathscr{E}$ es la fibra homotópica $GW(\mathscr{E}) := \mathrm{hofib}(|Q^h\mathscr{E}| \to |Q\mathscr{E}|)$ y los grupos de Grothendieck-Witt son sus grupos de homotopía.

Observación II.3.9. En [Sch10a, Definition 4.12] se observa que un funtor de formas no-singular $(F,\varphi)\colon \mathsf{A} \to \mathsf{B}$ induce un morfismo entre grupos de Grothendieck-Witt. Si además F es un isomorfismo, entonces por la definición de composición entre funtores de formas ([Sch10a, Definition 3.2]) la inversa (estricta) F^{-1} se puede equipar con una transformación natural de manera que resulte un funtor de formas no-singular y tal que F y F^{-1} induzcan isomorfismos inversos a nivel de grupos de Grothendieck-Witt.

Ejemplo II.3.10. Sea R un $*$-anillo con unidades locales. Los grupos $K_n^h(R) := GW_n(\mathrm{proj}_R, *, \mathrm{can})$ se conocen como los grupos de ***K-teoría hermitiana*** de R.

Definición II.3.11. Sea R un $*$-anillo unital graduado. Se definen los grupos de ***K-teoría hermitiana graduada*** de R como

$$K_n^{h,\mathrm{gr}}(R) := GW_n(\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}}, *, \mathrm{can}).$$

La definición puede extenderse a todos los $*$-anillos graduados como en la Sección I.1.6. Al igual que para la K-teoría, si A es un anillo graduado con unidades locales graduadas, es un colímite filtrante de $*$-anillos graduados unitales, y $K_*^{h,\mathrm{gr}}(A) := GW_*(\mathrm{proj}_A^{\mathrm{gr}}, *, \mathrm{can})$. El principal objetivo de esta sección es comparar estos grupos con la K-teoría hermitiana de $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$. Observamos antes de seguir que bajo las presentes hipótesis de unitalidad sobre A, el $*$-anillo $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$ tiene unidades locales autoadjuntas, así que de igual manera $K_*^h(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A) = GW_*(\mathrm{proj}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A}, *, \mathrm{can})$. En consecuencia, nuestros esfuerzos se concentrarán en ver que la equivalencia de categorías entre módulos graduados y módulos sobre el producto cruzado es una equivalencia entre categorías exactas con dualidad.

Lema II.3.12. Si A un $*$-anillo graduado con unidades locales graduadas y Ψ el isomorfismo asociado del Teorema (II.1.4), entonces existe un isomorfismo natural

$$\eta_M : \Psi(M^*) \xrightarrow{\cong} \Psi(M)^*$$

para todo módulo graduado M proyectivo y finitamente generado, que hace de

$$(\Psi, \eta) : (\mathrm{proj}_A^{\mathrm{gr}}, *, \mathrm{can}) \to (\mathrm{proj}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A}, *, \mathrm{can})$$

un funtor de formas no-singular.

Demostración. Recordemos que $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A = (M_G A)_{1_G}$ es un $*$-subanillo de $M_G A$; sea $\pi_{g,h}(x) \in A$ la coordenada (g,h) de un elemento $x \in G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$. Dados $\alpha \in \Psi(M^*)$ y $\beta \in \Psi(M)^*$, definimos

$$\alpha^\sharp(x) = \sum_{g,h \in G} \chi_g \ltimes \alpha_h(x_g), \quad \beta^\flat(y) = \sum_{g,h \in G} \pi_{g,h}(\beta(y))$$

Una verificación directa muestra que $\alpha^\sharp \in \Psi(M)^*$ y $\beta^\flat \in \Psi(M^*)$, y que el morfismo $(-)^\sharp : \Psi(M^*) \xrightarrow{\cong} \Psi(M)^*$ es $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$-lineal con inversa $(-)^\flat$.

Notemos can' al isomorfismo natural de dualidad e $\mathrm{proj}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A}$. Para terminar debemos ver que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \Psi(M) & \xrightarrow{\mathrm{can}'_{\Psi(M)}} & \Psi(M)^{**} \\ {\scriptstyle \Psi(\mathrm{can}_M)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_M^*} \\ \Psi(M^{**}) & \xrightarrow[\eta_{M^*}]{} & \Psi(M^*)^* \end{array}$$

es conmutativo. Basta ver que dado un elemento $m \in \Psi(M)$ que es homogéneo como elemento de M, los morfismos $(\eta_M^* \mathrm{can}'_{\Psi(M)})(m)$ y $(\eta_{M^*}\Psi(\mathrm{can}))(m)$ coinciden cuando los evaluamos en cada elemento $\alpha \in \Psi(M^*)$ que es homogéneo como elemento de M^*. En efecto, dados $m \in M_s$ y $\alpha \in M_t^*$ tenemos que

$$(\eta_M^* \mathrm{can}'_{\Psi(M)})(m)(\alpha) = \mathrm{can}'_{\Psi(M)}(m)\eta_M(\alpha) = (\alpha^\sharp(m))^* = (\chi_s \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha(m))^* = \chi_t \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha(m)^*$$

y

$$(\eta_{M^*}\Psi(\mathrm{can}))(m)(\alpha) = \Psi(\mathrm{can})(m)^\sharp(\alpha) = \chi_t \mathbin{\widehat{\ltimes}} \Psi(\mathrm{can})(m)(\alpha) = \chi_t \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha(m)^*.$$

◇

Teorema II.3.13. Si A es un $*$-anillo graduado con unidades locales graduadas, entonces los isomorfismos (II.1.5) inducen isomorfismos de $\mathbb{Z}[G]$-módulos

$$K_n^{h,\mathrm{gr}}(A) \xrightarrow{\cong} K_n^h(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A). \tag{II.3.14}$$

para todo $n \geq 0$.

Demostración. Por la Observación II.3.9, basta ver que hay un funtor de formas no-singular entre $\mathrm{proj}_A^{\mathrm{gr}}$ y $\mathrm{proj}_{G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A}$ que sea un isomorfismo. Esto es precisamente lo que nos dice el Lema II.3.12. ◇

II.3.4. Involuciones libres

En este sección observamos que la K-teoría graduada es un caso particular de la K-teoría graduada hermitiana. Usaremos el siguiente resutlado.

Proposición II.3.15 ([Sch10a, Proposition 4.7])**.** Si $\mathscr{E}$ es una categoría exacta, entonces una equiavlencia natural $GW_*(H(\mathscr{E})) \cong K_*(\mathscr{E})$. ◇

Si A es un anillo graduado, el anillo $\mathrm{inv}(A) = A \oplus A^{\mathrm{op}}$ tiene una involución $(a,b)^* = (b,a)$ y graduación $\mathrm{inv}(A)_g := A_g \oplus A_g^{\mathrm{op}} = A_g \oplus A_{g^{-1}}$ compatibles. Tenemos un isomorfismo dado por

$$G \mathbin{\widehat{\ltimes}} \mathrm{inv}(A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{inv}(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A), \qquad \chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} (x,y) \mapsto (\chi_g \mathbin{\widehat{\ltimes}} x, \chi_{g|y|} \mathbin{\widehat{\ltimes}} y)$$

para cada par de elementos homogéneos $x, y \in A$.

Proposición II.3.16. Si R es un anillo unital graduado, entonces hay un isomorfismo natural $K_*^{\mathrm{gr}}(R) \cong K_*^{h,\mathrm{gr}}(\mathrm{inv}(R))$.

Demostración. Hay un isomorfismo canónico $\mathrm{proj}_{\mathrm{inv}(R)}^{\mathrm{gr}} \cong \mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}} \times \mathrm{proj}_{R^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{gr}}$, que identifica el funtor de dualidad de $\mathrm{proj}_{\mathrm{inv}(R)}^{\mathrm{gr}}$ con el endofuntor de $\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}} \times \mathrm{proj}_{R^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{gr}}$ dado por $(P,Q)^\dagger = (Q^\vee, P^\vee)$. Aquí $M^\vee = \hom_R(M,R)$ es el módulo dual usual. Se tiene un morfismo natural

$$\mathrm{ev}_M : M \to M^{\vee\vee}, \qquad \mathrm{ev}_M(x)(f) = f(x),$$

y $\mathrm{can}\colon \mathrm{proj}_{\mathrm{inv}(R)}^{\mathrm{gr}} \to \mathrm{proj}_{\mathrm{inv}(R)}^{\mathrm{gr}}$ se identifica con $\mathrm{ev} \times \mathrm{ev}$.

En vista de la Proposición II.3.15, basta ver que hay un isomorfismo natural entre los grupos de Grothendieck-Witt de $H(\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}})$ y $(\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}} \times \mathrm{proj}_{R^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{gr}}, \dagger, \mathrm{ev} \times \mathrm{ev})$. Tenemos equivalencias inversas

$$F := \mathrm{id} \times (-)^\vee \colon\ \mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}} \oplus \mathrm{proj}_{R^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{gr}} \longleftrightarrow \mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}} \oplus (\mathrm{proj}_R^{\mathrm{gr}})^{\mathrm{op}} : \mathrm{id} \times (-)^\vee =: G, s$$

que son funtores de forma no-singulares al equiparlos con las transformaciones naturales

$$\begin{aligned} \varphi\colon F \circ \dagger \Rightarrow * \circ F, &\quad \varphi_{(P,Q)} = (1_{Q^\vee}, \mathrm{ev}_P)\colon (Q^\vee, P^{\vee\vee}) \to (Q^\vee, P) \\ \psi\colon G \circ * \Rightarrow \dagger \circ G, &\quad \psi_{(P,Q)} = (\mathrm{ev}_Q, 1_{P^\vee})\colon (Q, P^\vee) \to (Q^{\vee\vee}, P^\vee). \end{aligned}$$

Let $\star$ be as in [Sch10a, bottom of page 113]; the form functor compositions $(F \circ G, \varphi \star \psi)$ and $(G \circ F, \psi \star \varphi)$ yield

$$\begin{aligned} F \circ G = \mathrm{id} \times (-)^{\vee\vee}, &\quad (\varphi \star \psi)_{(P,Q)} = (\mathrm{ev}_Q, \mathrm{ev}_P), \\ G \circ F = \mathrm{id} \times (-)^{\vee\vee}, &\quad (\psi \star \varphi)_{(P,Q)} = (\mathrm{ev}_{Q^\vee}, {\mathrm{ev}_P}^\vee). \end{aligned}$$

Una verificación directa muestra que $\zeta\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{id}$, $\zeta_{(P,Q)} = (1_P, \mathrm{ev}_Q)$ and $\xi\colon \mathrm{id} \Rightarrow G \circ F$, $\xi_{(P,Q)} = (1_P, \mathrm{ev}_Q)$ son isomorfismos naturales de funtores de forma no-singualres en el sentido de [Sch10a, Section 3.3]. Por [Sch10b, Section 2.8, Lemma 2] y [Sch10b, Section 2.10, Proposition 2] esto implica que F y G inducen isomorfismos inversos a nivel de grupos de Grothendieck-Witt, lo cual concluye la demostración. ◇

Observación II.3.17. En vista de la Proposición II.3.16, el isomorfismo $K_*^{\mathrm{gr}}(A) \cong K_*(G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A)$ del Teorema II.2.1 se puede obtener aplicando II.3.13 a $\mathrm{inv}(R)$.

II.3.5. Teorema de Dade hermitiano

En esta sección observamos que el teorema de Dade se extiende al contexto hermitiano. Si R un $*$-anillo graudado, las las categorías $(\mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}}, *, \mathrm{can})$ y $(\mathrm{Mod}_{R_{1_G}}, *, \mathrm{can})$ tienen estructuras canónicas de categorías con dualidad. Los funtores

$$(-)_1\colon \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}} \to \mathrm{Mod}_{R_{1_G}} \qquad \text{y} \qquad -\otimes_{R_{1_G}} R\colon \mathrm{Mod}_{R_{1_G}} \to \mathrm{Mod}_R^{\mathrm{gr}} \tag{II.3.18}$$

son funtores de forma al equiparlos con las transformaciones naturales

$$\begin{aligned} &\varphi_M : (M^*)_1 \mapsto (M_1)^*, \quad \varphi_M(f) = f|_{M_1}^{R_1}; \\ &\psi_N : N^* \otimes_{R_{1_G}} R \to (N \otimes_{R_{1_G}} R)^*, \quad \psi_N(f \otimes r)(n \otimes s) = s^* f(m) r. \end{aligned} \tag{II.3.19}$$

Habiendo dado las definiciones anteriores, podemos enunciar la versión hermitiana del teorema de Dade.

Teorema II.3.20. Sea R un $*$-anillo graduado unital. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) El anillo R es fuertemente graduado.

(II) Los funtores de forma dados por (II.3.18) y (II.3.19) son equivalencias inversas de categorías con dualidad.

Demostración. La versión no hermitiana del teorema nos dice que $(-)_1$ y $-\otimes_{R_{1_G}} R$ son equivalencias inversas si y sólo si R es fuertemente graduado; una posible demostración puede consultarse en [Haz16, proof of Theorem 1.5.1]. Un cálculo muestra que si R es fuertemente graduado entonces los isomorfismos naturales $(N \otimes_{R_{1_G}} R)_1 \cong N$ and $M_1 \otimes_{R_{1_G}} R \cong M$ dados en loc. cit. son isomorfismos naturales de funtores de forma. ◇

Observación II.3.21. Si R es como en el Teorema II.3.20, entonces la composición $\Psi \circ (-\otimes_{R_{1_G}} R)\colon \mathrm{proj}_{R_{1_G}} \to \mathrm{proj}_{G \,\widehat{\ltimes}\, R}$ es naturalmente isomorfa al funtor inducido por el morfismo de anillos $r \in R_1 \mapsto \chi_1 \,\widehat{\ltimes}\, r \in G \,\widehat{\ltimes}\, R$ a través del isomorfismo natural

$$\eta_M : M \otimes_{R_{1_G}} R \to M \otimes_{R_{1_G}} (G \,\widehat{\ltimes}\, R), \qquad m \otimes r \mapsto m \otimes \chi_1 \,\widehat{\ltimes}\, r.$$

Ejemplo II.3.22. Si R es un $*$-álgebra graduada y unital, entonces $R[G] = R \otimes_\ell \ell[G]$ es un $*$-álgebra unital fuertemente graduada, con involución dada por $(rg)^* = r^* g^{-1}$. Dado que $R[G]_{1_G} = \bigoplus_{g \in G} R_g \cdot g^{-1} \cong R$, por el Teorema II.3.20 tenemos que

$$K_*^{h,\mathrm{gr}}(R[G]) = K_*^h(R).$$

II.4. K-teoría graduada de álgebras de Leavitt

Para concluir, en esta sección calculamos las distintas variantes de grupos de K-teoría graduada en el caso del álgebra de Leavitt de un grafo. Esencialmente, probarmos que sólo dependen de la K-teoría del anillo base y del módulo de Bowen-Franks del grafo. A lo largo de esta sección supondremos que $G = \mathbb{Z}$, fijamos un grafo E y consideramos a $L_\ell(E)$ con su graduación estándar.

Definición II.4.1. El ***revestimiento*** de E asociado es el grafo $\widetilde{E}$ con vértices y aristas definidas por $\widetilde{E}^i = E^1 \times \mathbb{Z}$. Escribimos $v_k = (v, k)$ y $e_k = (e, k)$ para cada $v \in E^0$, $e \in E^1$ y $k \in \mathbb{Z}$. Las funciones de salida y llegada se definen como

$$s(e_k) = s(e)_k, \quad r(e_k) = r(e)_{k+1}.$$

Notar que $L(\widetilde{E})$ es una $\mathbb{Z}$-álgebra pues $\mathbb{Z}$ actua en $\widetilde{E}$ a través de la acción de multiplicación de $\mathbb{Z}$ en sí mismo. En particular $L(\tilde{E})$ es una $\mathbb{Z}$-álgebra. Los revestimientos nos serán de gran utilidad por el siguiente resultado:

Proposición II.4.2 ([Pre20, Example 7], [Pre20, Proposition 74]). Hay un isomorfismo de $\mathbb{Z}$-$*$-álgebras $L(\widetilde{E}) \cong \mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} L(E)$ determinado por las asignaciones $v_k \mapsto \chi_k \mathbin{\widehat{\ltimes}} v$, $e_k \mapsto \chi_k \mathbin{\widehat{\ltimes}} e$ y $e_k^* \mapsto \chi_{k+1} \mathbin{\widehat{\ltimes}} e^*$. ◇

Teorema II.4.3. Sea E un grafo finito por filas. Si $H\colon \mathsf{Alg} \to \mathsf{Ab}$ es un funtor matricialmente estable y aditivo que preserva colímites filtrantes, entonces hay un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos

$$H(L(\widetilde{E})) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} H(\ell).$$

Demostración. Todo grafo finito por filas es un colímite de sus subgrafos completos finitos ([AMP07, Lemma 3.1]), por lo que podemos asumir que E es finito.

La acción de $\mathbb{Z}$ en $\widetilde{E}$ e induce un $*$-automorfismo de álgebras $s\colon L(\widetilde{E}) \to L(\widetilde{E})$ tal que $s(v_n) = v_{n+1}$, $s(e_n) = e_{n+1}$ $(v \in E^0, e \in E^1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, consideremos el subgrafo completo E_n de $\widetilde{E}$ con conjunto de vértices

$$E_n^0 = \{v_k : v \in E^0,\ |k| \le n\}.$$

Notar que $\widetilde{E} = \bigcup_{n\ge 1} E_n$ y que s se restringe a un morfismo $s_n\colon L(E_n) \to L(E_{n+1})$ para todo $n \ge 0$. En particular $L(\widetilde{E}) = \operatorname{colim}_{n\ge 0} L(E_n)$ y

$$H(L(\widetilde{E})) \cong \operatorname{colim}_{n\ge 0} H(L(E_n)).$$

La acción inducida por s del lado izquierdo se traslada al lado derecho a través de la familia de morfismos $\{H(s_n)\}_{n\ge 0}$. Como cada grafo E_n es acíclico, por [AASM17, Theorem 2.6.17] (ver también [Cor, Proposición 2.5.1]) tenemos un isomorfismo

$$L(E_n) \cong \bigoplus_{v\in \operatorname{sink}(E_n)} M_{\mathscr{P}_v(E_n)}.$$

Recordemos que aquí $\mathscr{P}_v(E_n)$ indica el conjunto de caminos de E_n que terminan en v. La aditividad y estabilidad matricial de H nos aseguran luego que $H(L(E_n)) \cong \mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E_n)} \otimes_{\mathbb{Z}} H(\ell)$. Para concluir, observemos que

$$\operatorname{sink}(E_n) = (\operatorname{sink}(E) \times \{i \in \mathbb{Z} : |i| \le n\}) \sqcup (\operatorname{reg}(E) \times \{n\}),$$

y que el morfismo de transición $H(\ell) \otimes \mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E_n)} \to H(\ell) \otimes \mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E_{n+1})}$ viene inducido por la inclusión $\mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E)\times\{i\in\mathbb{Z}:|i|\le n\}} \subset \mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E)\times\{i\in\mathbb{Z}:|i|\le n+1\}}$ y por la regla

$$(v,n) \mapsto \sum_{w\in r(s^{-1}\{v\})} A_E(v,w)(w,n+1) \tag{II.4.4}$$

en $\mathbb{Z}^{\operatorname{reg}(E)\times\{n\}}$. Esto termina de probar que $\operatorname{colim}_{\mathbb{N}_0} \mathbb{Z}^{\operatorname{sink}(E_n)} \otimes_{\mathbb{Z}} H(\ell) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} H(\ell)$. ◇

Corolario II.4.5. Sea E un grafo finito por filas. Para toda $*$-algebra R con unidades locales y graduación trivial se tienen isomorfismos

$$K_n^{\mathrm{gr}}(L(E)\otimes R) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n(R), \quad K_n^{h,\mathrm{gr}}(L(E)\otimes R) \cong \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} K_n^h(R)$$

Demostración. La Proposición II.4.2 y los Teoremas II.2.1 y II.3.13 nos dan isomorfismos $K_n^{\mathrm{gr}}(L(E)\otimes R) \cong K_n(L(\widetilde{E})\otimes R)$ y $K_n^{h,\mathrm{gr}}(L(E)\otimes R) \cong K_n^h(L(\widetilde{E})\otimes R)$; el resultado se sigue entonces del Teorema II.4.3 aplicado a los funtores $K_n(-\otimes R)$ y $K_n^h(-\otimes R)$. ◇

Capítulo III

Levantamiento de morfismos entre módulos de Bowen-Franks

En este capítulo nos concentraremos en la pregunta de cuándo es que un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos ordenados punteados $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ que envía 1_E a 1_F proviene de un morfismo de álgebras de Leavitt $L(E) \to L(F)$. Bajo leves hipótesis sobre ℓ, que se satisfacen por ejemplo cuando es un cuerpo, veremos que siempre es posible conseguir un tal levantado. Esto responde por la afirmativa a la pregunta sobre plenitud en la Conjetura I.6.2. A lo largo del capítulo, todos los grafos considerados se asumirán finitos.

III.1. Idempotentes homogéneos y equivalencia Murray-von Neumann

En esta sección damos una interpretación de K_0^{gr} en términos de idempotentes homogéneos que nos será de utilidad más adelante.

Sea R un anillo. Dos idempotentes $e, f \in \mathrm{idem}(R)$ se dicen ***Murray-von Neumann equivalentes*** si existen $x, y \in R$ tales que $xy = e$ e $yx = f$. En tal caso, notamos $e \sim f$. Esto define una relación de equivalencia sobre idem(R), escribimos $\mathcal{V}(R) = \mathrm{idem}(R)/\sim$ para su conjunto de clases de equivalencia. Consideramos también $\mathcal{V}_\infty(R) := \mathrm{idem}(M_\infty R)/\sim$; recordamos que la suma en bloque de matrices hace de $\mathcal{V}_\infty(R)$ un monoide conmutativo. Por lo observado en la Sección I.2, si R tiene unidades locales entonces $\mathcal{V}_\infty(R)$ es isomorfo al monoide de clases de isomorfismo de módulos proyectivos y unitales (ver también [AHLS18, Section 4A]). En particular su completación a grupo coincide entonces con $K_0(R)$.

Observación III.1.1. Dado un anillo $\mathbb{Z}$-graduado y unital S, por el Teorema II.1.4 tenemos un isomorfismo entre el monoide $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} S)$ y el monoide $\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(S)$ de clases de isomorfismo de módulos graduados proyectivos y finitamente generados. En particular $K_0^{\mathrm{gr}}(S)$ es la completación a grupo de $\mathcal{V}_\infty(\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} S)$.

Lema III.1.2. Sea R un anillo y $e, f, g \in \mathrm{idem}(R)$ tales que $e, f \leq g$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Existen $x, y \in gRg$ tales que $xy = e$, $yx = f$.

(II) Los idempotentes e y f son Murray-von Neumann equivalentes.

Demostración. Como $gRg \subset R$, se sigue que (i) implica (ii). Para probar la recíproca consideramos $x, y \in R$ tales que $xy = e$, $yx = f$ y definimos $x' = exf$, $y' = fye$. Luego $x'y' = e$, $y'x' = f$ y $x' \in eRf = geRfg \subset gRg$, $y \in gRg$. ◇

Lema III.1.3. Si R es un anillo y $g \in \mathrm{idem}(R)$, entonces el morfismo $\mathcal{V}(gRg) \to \mathcal{V}_\infty(R)$ inducido por la inclusión resulta inyectivo.

Demostración. Llamaremos $\iota_k\colon gRg \to M_kR$ a la inclusión en la esquina superior izquierda. Sean $e, f \in gRg$ dos idempotentes que son Murray-von Neumann equivalentes como elementos de $M_\infty R$. Existe entonces $n \geq 1$ tal que $\iota_n(e) \sim \iota_n(f)$ en M_nR. Como $e, f \leq g$, se sigue que $\iota_n(e), \iota_n(f) \leq \iota_n(g)$. Luego, si aplicamos el Lema III.1.2 deben existir entonces $a, b \in \iota_n(g)(M_nR)\iota_n(g) = \iota_n(gRg)$ tales que $ab = \iota_n(e)$, $ba = \iota_n(f)$. Sean $x, y \in gRg$ tales que $a = \iota_n(x)$, $b = \iota_n(y)$. Como ι_n es inyectivo, se sigue $xy = e$, $yx = f$, probando así que $e \sim f$. ◇

Corolario III.1.4. Si S es un anillo unital $\mathbb{Z}$-graduado, entonces el morfismo canónico $\mathcal{V}(S_0) \to \mathcal{V}_\infty(\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} S)$ es inyectivo.

Demostración. Basta aplicar el Lema III.1.3 a $\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} S$ y el idempotente $g = \chi_0 \mathbin{\widehat{\ltimes}} 1$, observando que $S_0 \simeq g(\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} S)g$ a través de $s \mapsto \chi_0 \mathbin{\widehat{\ltimes}} s$. ◇

Corolario III.1.5 (cf. [Cor22, Lemma 9.7])**.** Supongamos que ℓ es un cuerpo. Sean E y F dos grafos finitos y $f, g\colon L(E) \to L(F)$ dos morfismos de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas. Si $K_0^{\mathrm{gr}}(f) = K_0^{\mathrm{gr}}(g)$, entonces para cada $L \geq 0$ existe una unidad homogénea de grado cero $u_L \in L(E)$ tal que $\mathrm{ad}(u_L) \circ f$ y g coinciden en $D(E)_L = \mathrm{span}_\ell\{xx^*\colon x \in \mathscr{R}_L \sqcup \mathscr{S}_L\}$.

Demostración. En [AHLS18, Corollary 5.8] se observa que $\mathcal{V}^{\mathrm{gr}}(L(F))$ es un monoide cancelativo cuando ℓ es un cuerpo. Luego, por la Observación III.1.1 y el Corolario III.1.4, se sigue que $\mathcal{V}(L(F)_0) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$ es inyectivo. Usando la hipótesis se obtiene que $[f(xx^*)] = [g(xx^*)]$ en $K_0^{\mathrm{gr}}(L(F))$ para cada $x \in X := \mathscr{R}_L \sqcup \mathscr{S}_L$, así que existen $p_x \in f(xx^*)L(F)_0 g(xx^*)$, $q_x \in g(xx^*)L(F)_0 f(xx^*)$ tales que $p_x q_x = f(xx^*)$, $q_x p_x = g(xx^*)$. Un cálculo muestra que el elemento $u_L := \sum_{x\in X} q_x$ cumple lo pedido. ◇

Para todo grafo finito E, se tiene un morfismo canónico de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados punteados

$$\mathrm{can}\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)), \quad v \mapsto [v]. \tag{III.1.6}$$

En vista del Corolario II.4.5, resulta un isomorfismo cuando el grupo de Grothendieck de ℓ es isomorfo a $\mathbb{Z}$; por ejemplo, esto sucede si ℓ es un cuerpo o más generalmente un dominio de ideales principales.

Lema III.1.7. Sea E un grafo finito y can el morfismo (III.1.6). Si α es un camino de longitud $N \in \mathbb{N}_0$ en E, entonces

$$\mathrm{can}(\sigma^N r(\alpha)) = [\alpha\alpha^*].$$

Demostración. A través de la identificación $K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) = \mathcal{V}_\infty(\mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} L(E))^+$, el elemento $[L(E)\alpha\alpha^*] \in K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))$ se corresponde con la clase del idempotente $\chi_0 \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha\alpha^* \in \mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} L(E)$. Por el Teorema II.4.3, el elemento $\mathrm{can}(\sigma^N r(\alpha))$ se corresponde con la clase del idempotente $\chi_n \mathbin{\widehat{\ltimes}} v \in \mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} L(E)$. Para concluir la demostración notamos que los elementos $\chi_0 \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha$ y $\chi_n \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha^* \in \mathbb{Z} \mathbin{\widehat{\ltimes}} L(E)$ implementan una equivalencia Murray-von Neumann entre $\chi_n \mathbin{\widehat{\ltimes}} v$ y $\chi_0 \mathbin{\widehat{\ltimes}} \alpha\alpha^*$. ◇

III.2. Caracterizaciones de módulos de Bowen-Franks

Comenzamos estableciendo algunos resultados generales sobre módulos de Bowen-Franks. Sea E un grafo finito. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $v \in E^0$, ponemos $v_k = (v, k)$. Dado $x = \sum_{v\in E^0} x_v v \in \mathbb{Z}^{E^0}$ escribiremos

$$x \otimes \sigma^k = \sum_{v\in E^0} x_v v_k \in \mathbb{Z}^{E^0\times\{k\}}.$$

Sea $V_n := \{u_i : u \in \mathrm{sink}(E),\ |i| \leq n\} \cup \{w_n : w \in \mathrm{reg}(E)\}$ para cada $n \geq 0$, consideremos los morfismos $\mathbb{Z}$-lineales $\iota_n\colon \mathbb{Z}^{V_n} \to \mathbb{Z}^{V_{n+1}}$ via

$$\iota_n(u_i) := u_i, \qquad \iota_n(w_n) := \sum_{v\in E^0} (A_E)_{w,v} v_{n+1}.$$

Tenemos así un sistema filtrante de grupos abelianos indexados por $\mathbb{N}_0$. Dados dos enteros no-negativos $i < j$, escribiremos $\iota_{i,j} = \iota_{j-1} \circ \cdots \circ \iota_i$ para el morfismo de transición. Notaremos también $\iota_{i,i} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}^{V_i}}$.

Como observamos en el curso de la demostración del Teorema II.4.3, se tiene la siguiente caracterización.

Proposición III.2.1. Sea E un grafo finito. Se tiene un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos

$$\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \cong \mathrm{colim}(\mathbb{Z}^{V_0} \xrightarrow{\iota_0} \mathbb{Z}^{V_1} \to \cdots), \qquad \sigma^n v \mapsto [v_n] \tag{III.2.2}$$

que envía $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+$ a $\mathrm{colim}(\mathbb{N}_0^{V_0} \xrightarrow{\iota_0} \mathbb{N}_0^{V_1} \to \cdots)$ y 1_E a $\sum_{v \in E^0}[v_0]$. ◇

Observación III.2.3. Sea E un grafo finito y $\tilde{A}_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ su matriz de adyacencia no-reducida. Para cada $n \geq 1$ y $v, w \in E^0$, la entrada (v, w) de la matriz $\tilde{A}_E^n$ coincide con la cantidad de caminos de longitud n que comienzan en v y terminan en w.

Supongamos ahora que E es regular, de manera que $A_E = \tilde{A}_E$. Bajo esta suposición todo camino de longitud $k \in \mathbb{N}$ puede extenderse a uno de longitud $k+1$. Por lo tanto, en un grafo regular existen caminos de toda longitud entera no-negativa posible. De aquí se deduce que las matrices de adyacencia de grafos regulares no son nilpotentes.

Lema III.2.4. Si E es un grafo finito y no vacío, entonces:

(I) $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \neq 0$.

(II) Se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\sigma]^{\mathrm{reg}(E)} \xrightarrow{I - \sigma A_E^t} \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0} \longrightarrow \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \longrightarrow 0.$$

En otras palabras, el morfismo $I - \sigma A_E^t$ es un monomorfismo, y no es un epimorfismo.

Demostración. Usaremos fuertemente el hecho de que $\mathbb{Z}[\sigma]$ es un dominio íntegro, por lo que una matriz cuadrada $B \in M_n\mathbb{Z}[\sigma]$ es un monomorfismo si y sólo si $\det(B) \neq 0$, y un epimorfismo si y sólo si $\det(B)$ es una unidad.

Veamos primero que $I - \sigma \cdot A_E^t$ no es suryectiva; supongamos que lo es y veamos que esto es absurdo. En tal caso, por consideraciones de rango

$$\#\,\mathrm{reg}(E) = \mathrm{rk}\ \mathbb{Z}[\sigma]^{\mathrm{reg}(E)} \geq \mathrm{rk}\ \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0} = \#E^0$$

así que E debe ser regular, y $\sigma I - A_E^t$ es cuadrada. Sea $\chi_{A_E}(\sigma) = \det(\sigma I - A_E^t) \in \mathbb{Z}[\sigma]$ su polinomio característico. Como estamos suponiendo que $\sigma I - A_E^t$ es un epimorfismo, esto implica que

$$\det(I - \sigma A_E^t) = \sigma^{|E^0|} \cdot \chi_{A_E}(\sigma^{-1}) \tag{III.2.5}$$

es una unidad de $\mathbb{Z}[\sigma]$. Se sigue entonces que $\chi_{A_E}(\sigma)$ también es inversible, y por lo tanto debe ser $\chi_{A_E}(\sigma) = \sigma^{|E^0|}$. Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton se obtiene así que A_E es nilpotente, lo cual contradice la regularidad de E por la Observación III.2.3. Como el absurdo provino de suponer que $I - \sigma A_E^t$ era suryectiva, hemos probado (I).

Ahora veamos (II), es decir, que $I - \sigma A_E^t$ es un monomorfismo. Consideremos $\tilde{A}_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ la matriz de adyacencia no-reducida de E. Como $I - \sigma A_E^t$ es la composición la inclusión $\mathbb{Z}[\sigma]^{\mathrm{reg}(E)} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}$ con $I - \sigma\tilde{A}_E^t$, basta ver que este último es un monomorfismo. La igualdad (III.2.5) se sigue satisfaciendo al reemplazar A_E por $\tilde{A}_E$, lo cual en particular muestra que $\det(I - \sigma\tilde{A}_E^t) \neq 0$. Esto concluye la demostración. ◇

Corolario III.2.6. Si E es un grafo finito y $K = \mathbb{Q}(\sigma)$ el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}[\sigma]$, entonces

$$\operatorname{rk}\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) := \dim_K K \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) = \#\operatorname{sink}(E). \tag{III.2.7}$$

◇

Observación III.2.8. Sea E un grafo finito. Como $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$ es un colímite filtrante, se sigue que si $x \in \mathbb{Z}^{V_n}$ e $y \in \mathbb{Z}^{V_m}$ son tales que $[x] = [y]$ en $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$, entonces existen $k_0 \geq n, m$ tales que $\iota_{n,k}(x) = \iota_{m,k}(y)$ para todo $k \geq k_0$. Más aún: si $x_1 \in \mathbb{Z}^{V_{n_1}}, \ldots, x_j \in \mathbb{Z}^{V_{n_j}}, y_1 \in \mathbb{Z}^{V_{m_1}}, \ldots, y_j \in \mathbb{Z}^{V_{m_j}}$ son tales que $[x_i] = [y_i]$ para todo $i \in \{1, \ldots, j\}$, entonces existe $k_0 \geq n_1, \ldots, n_j, m_1, \ldots, m_j$ tal que $\iota_{n_i,k}(x_i) = \iota_{n_j,k}(y_i)$ para todo $1 \leq i \leq j$ y $k \geq k_0$.

Lema III.2.9. Si E es un grafo finito y

$$\mathrm{cl}\colon \mathbb{Z}^{E^0} \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E), \qquad \mathrm{cl}(v) = [v_0],$$

entonces $\ker(\mathrm{cl}) \cap \mathbb{N}^{E^0} = 0$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{N}^{E_0}$. Por la Observación III.2.8, si $\mathrm{cl}(x) = 0$ entonces deberíamos tener que $\iota_{0,k}(x) = 0$ para algún $k \geq 0$. Sin embargo, los morfismos de transición $\iota_{j,j+1}$ están dados por matrices con coeficientes no-negativos y sin columnas de ceros. Por lo tanto $\iota_{j,j+1}(\mathbb{N}^{V_j}) \subset \mathbb{N}^{V_{j+1}}$ para todo $j \geq 0$, y en particular $\iota_{0,k}(\mathbb{N}^{V_0}) \subset \mathbb{N}^{V_k}$. Se sigue entonces que $\iota_{0,k}(x) \neq 0$ para todo $k \geq 0$, y en consecuencia $x \notin \ker(\mathrm{cl})$. ◇

Corolario III.2.10. Sea E un grafo finito y $f : L(E) \to R$ un morfismo de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas. Supongamos que ℓ es un cuerpo. Si $K_0^{\mathrm{gr}}(f)$ es un monomorfismo, entonces f es un monomorfismo.

Demostración. Sea $v \in E^0$. Como $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \ni [v] \neq 0$ por el Lema III.2.9, el hecho de que $K_0^{\mathrm{gr}}(f)$ sea un monomorfismo implica que $[f(v)] = K_0^{\mathrm{gr}}(f)([v])$ es no nulo. En particular, debe ser $f(v) \neq 0$ para todo $v \in E^0$. Concluimos observando que un morfismo con esta propiedad siempre es un monomorfismo por el Teorema de Unicidad para Álgebras de Leavitt (ver por ejemplo [AASM17, Theorem 2.2.15]). ◇

Definición III.2.11. Dado un grafo finito E, escribiremos $B_E \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)\times\mathrm{reg}(E)}$ y $C_E \in \mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)\times\mathrm{reg}(E)}$ para las matrices que se obtienen proyectando a A_E^t sobre los submódulos $\mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$ y $\mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)}$ respectivamente,

$$(B_E)_{v,w} = (A_E)_{w,v}, \qquad (C_E)_{v,u} = (A_E)_{u,v} \qquad (u \in \mathrm{sink}(E),\ v, w \in \mathrm{reg}(E)).$$

En particular $A_E^t x = B_E x + C_E x$ para todo $x \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$ y si $s^{(-N)}, \ldots, s^{(N)} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)}$, $r \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$ entonces

$$\iota_N\Big(\sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + r \otimes \sigma^N\Big) = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + A_E^t r \otimes \sigma^{N+1} = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + C_E r \otimes \sigma^{N+1} + B_E r \otimes \sigma^{N+1}. \tag{III.2.12}$$

De (III.2.12) se desprenden las siguientes identidades.

Lema III.2.13. Sea E un grafo finito y $N \in \mathbb{N}$. Consideremos $s^{(-N)}, \ldots, s^{(N)} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)}$, $r \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$. Si $x = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + r \otimes \sigma^N \in \mathbb{Z}^{V_N}$, entonces:

(I) $\sigma^{-1}[x] = \sum_{i=-N}^{N} [s^{(i)} \otimes \sigma^{i-1}] + [A_E^t r \otimes \sigma^N]$ in $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$.

(II) Si $M \geq 0$, entonces

$$\iota_{N,N+M}(x) = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + \sum_{j=0}^{M-1} C_E B_E^j r \otimes \sigma^{N+j+1} + B_E^M r \otimes \sigma^{N+M}.$$

(III) Si $M \geq 0$, entonces

$$\iota_{N,N+M}(A_E^t r \otimes \sigma^N) = \sum_{j=0}^{M} C_E B_E^j r \otimes \sigma^{N+j} + B_E^{M+1} r \otimes \sigma^{N+M}$$

◇

A continuación caracterizamos representantes de la unidad de orden canónica en $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$. Para cada $n \geq 0$, sea

$$\mathrm{u}_n := \iota_{0,n}(1_E) \in \mathbb{Z}^{V_n}. \tag{III.2.14}$$

Lema III.2.15. Sea E un grafo finito. Para cada $N \in \mathbb{N}_0$,

$$\mathrm{u}_N = \sum_{u \in \mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \# E_u^i u_i + \sum_{v \in \mathrm{reg}(E)} \# E_v^N v_N. \tag{III.2.16}$$

Demostración. El caso $N = 0$ es cierto por definición de u_0 y de 1_E, así que podemos suponer que $N \geq 1$. Por el Lema III.2.13 (ii), debemos ver que $\# E_u^i = (C_E B_E^{i-1} 1_{\mathrm{reg}(E)})_u$ para cada $u \in \mathrm{sink}(E)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$ y que $\# E_v^N = (B_E^N 1_{\mathrm{reg}(E)})_v$ para cada $v \in \mathrm{reg}(E)$.

Vista como endomorfismo de $\mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)} \oplus \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$, la matriz $\tilde{A}_E^t$ tiene la forma $\tilde{A}_E^t = \begin{pmatrix} 0 & C_E \\ 0 & B_E \end{pmatrix}$. Inductivamente,

$$(\tilde{A}_E^t)^i = \begin{pmatrix} 0 & C_E B_E^{i-1} \\ 0 & B_E^i \end{pmatrix} \qquad (1 \leq i \leq N).$$

Resta notar entonces que la Ecuación (I.3.1) puede reinterpretarse como la igualdad $\# E_w^i = ((\tilde{A}_E^t)^i 1_E)_w$ para cada vértices $w \in E^0$. ◇

Lema III.2.17. Sea E un grafo finito y $N \in \mathbb{N}$. Sean $s^{(-N)}, \ldots, s^{(N)} \in \mathbb{Z}^{\mathrm{sink}(E)}$, $r \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)}$ y $x = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + \sum_{v \in \mathrm{reg}(E)} r \otimes \sigma^N$. Si $[1_E] = [x]$ en $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$, entonces $s^{(i)} = 0$ para todo $i \in \{-N, \ldots, -1\}$.

Demostración. La Observación III.2.8 nos dice que debe existir $M \in \mathbb{N}$ tal que $\iota_{N,M}(x) = \iota_{0,N+M}(1_E) = \mathrm{u}_{N+M}$ in $\mathbb{Z}^{V_{N+M}}$. Por lo tanto $\mathrm{u}_{N+M} = \iota_{N,M}(x) = \sum_{i=-N}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i + \iota_{N,M}(r \otimes \sigma^N)$. Escribiendo $P = V_{N+M} \setminus (\mathrm{sink}(E) \times \{-(N+M), \ldots, -1\})$, observamos que $\mathrm{u}_{N+M}, \iota_{N,M}(r \otimes \sigma^N)$ y $s^{(i)} \otimes \sigma^i$ pertenecen a $\mathbb{Z}^P$ para cada i no-negativo. Consecuentemente,

$$\sum_{i=-N}^{-1} s^{(i)} \otimes \sigma^i = \mathrm{u}_{N+M} - \iota_{N,M}(r \otimes \sigma^N) - \sum_{i=0}^{N} s^{(i)} \otimes \sigma^i \in \mathbb{Z}^P \cap \mathbb{Z}^{V_{N+M} \setminus P} = 0.$$

Esto completa la prueba. ◇

III.3. Morfismos entre módulos de Bowen-Franks

El principal resultado de esta sección es la siguiente caracterización de morfismos entre módulos de Bowen-Franks.

Proposición III.3.1. Sean E y F dos grafos finitos, y $\phi : \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados tal que $\phi(1_E) = 1_F$.

Para cada $L_0 \in \mathbb{N}_0$ existen $L \geq L_0$ y matrices $S^{(0)}, S^{(1)}, \ldots, S^{(L)} \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times \mathrm{sink}(F)}$, $R \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times \mathrm{reg}(F)}$ tales que, para cada $v \in E^0$,

$$\phi([v]) = \sum_{u \in \mathrm{sink}(F)} \sum_{i=0}^{L} S_{v,u}^{(i)} [u_i] + \sum_{w \in \mathrm{reg}(F)} R_{v,w} [w_L]. \tag{III.3.2}$$

Más aún, para cada $v \in \mathrm{reg}(E), w \in \mathrm{reg}(F), u \in \mathrm{sink}(F)$ e $i \in \{0, \dots, L\}$ tenemos las siguientes igualdades:

$$\#F_w^L = \sum_{z\in E^0} R_{z,w}, \quad \#F_u^i = \sum_{z\in E^0} S_{z,u}^{(i)}, \tag{III.3.3}$$

$$S_{v,u}^{(0)} = 0, \quad S_{v,u}^{(i)} = (A_E S^{(i-1)})_{v,u}\ (1 \le i \le L), \quad (A_E S^{(L)})_{v,u} = (RA_F)_{v,u}, \tag{III.3.4}$$

$$(A_E R)_{v,w} = (RA_F)_{v,w}. \tag{III.3.5}$$

Demostración. Como ϕ preserva el orden y E^0 es finito, por (III.2.2) y la Observación III.2.8 existen $N \ge L_0$ y una familia $(x_v)_{v\in E^0}$ con $x_v \in \mathbb{N}_0^{V_N}$ tal que $\phi([v]) = [x_v]$ para todo $v \in E^0$. Por lo tanto, para cada $v \in E^0$ e $i \in \{-N, \dots, N\}$ existen vectores $s_v^{(-N)}, \dots, s_v^{(N)} \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{sink}(F)}, \widetilde{r}_v \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{reg}(F)}$ de forma que

$$\phi([v]) = \sum_{i=-N}^{N} [s_v^{(i)} \otimes \sigma^i] + [\widetilde{r}_v \otimes \sigma^N].$$

De esto se sigue que

$$[1_F] = \sum_{v\in E^0} \phi([v]) = \sum_{i=-N}^{N} [\sum_{v\in E^0} s_v^{(i)} \otimes \sigma^i] + [\sum_{v\in E^0} \widetilde{r}_v \otimes \sigma^N].$$

Usando el Lema III.2.17, debe ser $\sum_{v\in E^0} s_v^{(i)} = 0$ para cada $v \in E^0$ e i negativo. Como los coeficientes de cada vector $s_v^{(i)}$ son no-negativos, obtenemos que $s_v^{(i)} = 0$ para todo $v \in E^0, i \in \{-N, \dots, -1\}$. Como consecuencia, las ecuaciones descritas anteriormente se simplifican a $\phi([v]) = \sum_{i=0}^N [s_v^{(i)} \otimes \sigma^i] + [\widetilde{r}_v \otimes \sigma^N]$ y

$$[\mathrm{u}_N] = [1_F] = \sum_{v\in E^0} \phi([v]) = \sum_{i=0}^{N} [\sum_{v\in E^0} s_v^{(i)} \otimes \sigma^i] + [\sum_{v\in E^0} \widetilde{r}_v \otimes \sigma^N]. \tag{III.3.6}$$

Para cada $v \in \mathrm{reg}(E)$, aplicar el Lema III.2.13 (i) a la ecuación $\sigma^{-1}\phi([v]) = \phi(\sigma^{-1}[v])$ arroja que

$$\sum_{i=0}^{N} [s_v^{(i)} \otimes \sigma^{i-1}] + [A_F^t \widetilde{r}_v \otimes \sigma^N] = \sum_{i=0}^{N} [\sum_{x\in E^0} (A_E)_{v,x} s_x^{(i)} \otimes \sigma^i] + [\sum_{x\in E^0} (A_E)_{v,x} \widetilde{r}_x \otimes \sigma^N]. \tag{III.3.7}$$

Una vez más teniendo en consideración a la Observación III.2.8, debe existir $M \ge 0$ de forma que los representantes involucrados en las Ecuaciones (III.3.6) y (III.3.7) coinciden una vez aplicado $\iota_{N,N+M}$. Ponemos $L := N + M$ y $r_v := B_F^M \widetilde{r}_v \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{reg}(F)}$, $s_v^{N+1+j} := C_F B_F^j \widetilde{r}_v \in \mathbb{N}_0^{\mathrm{sink}(F)}$ para cada $v \in E^0$ y $0 \le j \le M - 1$. Definimos también $S_{v,u}^{(i)} := (s_v^{(i)})_u$ y $R_{v,w} = (r_v)_w$ para cada $v \in E^0$, $w \in \mathrm{reg}(F)$, $u \in \mathrm{sink}(F)$ e $i \in \{0, \dots, L\}$. Habiendo fijado esta notación, usando el Lema III.2.13 conseguimos la siguiente igualdad en $\mathbb{Z}^{V_L}$:

$$\mathrm{u}_L = \sum_{i=0}^{L} \sum_{v\in E^0} s_v^{(i)} \otimes \sigma^i + \sum_{v\in E^0} r_v \otimes \sigma^L. \tag{III.3.8}$$

Las identidades (III.3.3) se desprenden de comparar (III.3.8) con (III.2.16) aplicado a F. De igual modo, para cada $v \in \mathrm{reg}(E)$ obtenemos

$$\sum_{i=0}^{L} s_v^{(i)} \otimes \sigma^{i-1} + C_F r_v \otimes \sigma^L + B_F r_v \otimes \sigma^L = \sum_{i=0}^{L} \sum_{x\in E^0} (A_E)_{v,x} s_x^{(i)} \otimes \sigma^i + \sum_{x\in E^0} (A_E)_{v,x} r_x \otimes \sigma^L. \tag{III.3.9}$$

Las identidades (III.3.4) y (III.3.5) se siguen de comparar los coeficientes que acompañan a σ^i para cada $i = 0, \dots, L$ en ambos lados de (III.3.9) y tomar coordenadas. $\diamond$

Corolario III.3.10. Sean E y F dos grafos finitos y $\phi : \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módules preordenados tal que $\phi(1_E) = 1_F$. Si E es regular, entonces también lo es F.

Demostración. Por la Proposición III.3.1, existe una matriz $S^{(0)} \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times \mathrm{sink}(F)}$ tal que para cada $v \in \mathrm{reg}(E)$ y $u \in \mathrm{sink}(F)$ tenemos $S^{(0)}_{v,u} = 0$ y $1 = \#E^0_u = \sum_{z \in E^0} S^{(0)}_{z,u}$. Como $E = \mathrm{reg}(E)$, la existencia de un elemento $u \in \mathrm{sink}(F)$ implicaría que $1 = \sum_{z \in E^0} S^{(0)}_{z,u} = \sum_{z \in \mathrm{reg}(E)} S^{(0)}_{z,u} = 0$, lo que es una contradicción. ◇

Concluimos esta sección mostrando que isomorfismos entre módulos de Bowen-Franks se restringen a biyecciones entre pozos.

Un vértice v de un grafo finito E se dice un ***punto línea*** si o es un pozo o existen aristas $e_1, \dots, e_n$ tales que $s(e_1) = v$, $\#s^{-1}(s(e_i)) = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y $r(e_n) \in \mathrm{sink}(E)$. Remarcamos que esta definición es equivalente a la dada en [HL20].

Observación III.3.11. Si E es un grafo finito y $v \in E^0$ un punto línea, entonces existen $i \in \mathbb{N}_0$ y $u \in \mathrm{sink}(E)$ tales que $v = \sigma^i u$ en $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$.

En [HL20], los puntos líneas se caracterizan en términos del cono positivo del módulo de Bowen-Franks (denominado ***monoide talentoso*** en loc. cit.) . Un elemento $x \in \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+$ se dice ***aperiódico*** si el conjunto $\{\sigma^i x\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es infinito y ***minimal*** si $y \leq x$ implica $y = x$ para todo $y \neq 0$. En [HL20, Section 2.2] se pruebe que un elemento $x \in \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+$ es minimal si y sólo si es un ***átomo***, lo cual significa que si $x = z + y$ para ciertos $z, y \geq 0$ entonces $y = 0$ o $z = 0$.

Proposición III.3.12 ([HL20, Lemma 5.6 ii)]). Sea E un grafo finito. Un vértice $v \in E^0$ es un punto línea si y sólo si es un elemento minimal y aperiódico de $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+$. ◇

Antes de probar la siguiente proposición, observamos que si E es un grafo finito, entonces el Lema III.2.13 implica que $\mathrm{sink}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$, $u \mapsto [u \otimes 1]$ es inyectiva.

Proposición III.3.13. Sean E y F dos grafos finitos. Si $\phi : \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados tal que $\phi(1_E) = 1_F$, entonces ϕ se restringe a una biyección $\phi : \mathrm{sink}(E) \xrightarrow{\cong} \mathrm{sink}(F)$.

Demostración. Como ϕ es un isomorfismo, por (III.2.7) debe ser $\#\,\mathrm{sink}(E) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) = \mathrm{rk}\,\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F) = \#\,\mathrm{sink}(F)$. Como en particular ϕ es inyectiva, será suficiente ver que se restringe a una función $\mathrm{sink}(E) \to \mathrm{sink}(F)$.

Sea $x \in \mathrm{sink}(E)$ y, usando la Proposición III.3.1, escribamos

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{u \in \mathrm{sink}(F)} S^{(i)}_{x,u} [u \otimes \sigma^i] + \sum_{w \in \mathrm{reg}(F)} R_{x,w} [w \otimes \sigma^N].$$

Como x es un átomo aperiódico, por la Proposición III.3.12, el elemento $\phi(x)$ debe ser un átomo aperiódico de $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)_+$. En particular, en la anterior igualdad el lado derecho debe consistir de exactamente un único sumando. Es decir, debe ser $\phi(x) = [z \otimes \sigma^i]$ para ciertos $z \in E^0$ e $i \geq 0$. Usando una vez más que $\phi(x) = [z \otimes \sigma^i]$ es aperiódico, sabemos que $[z \otimes 1]$ cumple las mismas propiedades; la Proposición III.3.12 nos dice entonces que z debe ser un punto línea. En vista de la Observación III.3.11, esto implica que $[z \otimes 1] = [u \otimes \sigma^j]$ para algún $u \in \mathrm{sink}(F)$ y $j \geq 0$.

Hemos visto así que existe $k \geq 0$ tal que $\phi(x) = [u \otimes \sigma^k]$. El mismo argumento aplicado a ϕ^{-1} y u dice que existen $x' \in \mathrm{sink}(E)$ y $k' \geq 0$ tales que $\phi^{-1}(u) = [x' \otimes \sigma^{k'}]$. Componiendo,

$$[x \otimes 1] = \phi^{-1}(\phi(x)) = [x' \otimes \sigma^{k+k'}],$$

lo cual implica $x' = x$ y $k + k' = 0$. Por tanto $k = k' = 0$ y $\phi(x) = [u \otimes 1]$, como queríamos ver. ◇

Observación III.3.14. La demostración de la Proposición III.3.13 nos dice en particular que si $\phi\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados que envía 1_E a 1_F, entonces en la descripción de la Proposición III.3.1 tenemos que $R_{u,w}=0$, $S^i_{u,u'}=0$ y $S^0_{u,u'}=\delta_{u,\phi(u)}$ para todo $u\in \mathrm{sink}(E)$, $w\in \mathrm{reg}(F)$, $u'\in \mathrm{sink}(F)$ y $i\in\{1,\dots,L\}$.

III.4. Construcción de levantamientos

Esta sección está dedicada a la prueba del siguiente teorema de levantamiento sobre módulos de Bowen-Franks y sus álgebras de Leavitt asociadas.

Teorema III.4.1. Sean E y F dos grafos finitos. Si $\phi\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados tal que $\phi(1_E)=1_F$, entonces existe un $*$-morfismo unital $\mathbb{Z}$-graduado $\varphi\colon L(E)\to L(F)$ que preserva la diagonal y hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)) \arrow[r, "K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)"] & K_0^{\mathrm{gr}}(L(F)) \\ \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \arrow[u, "\mathrm{can}"] \arrow[r, "\phi"] & \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F) \arrow[u, "\mathrm{can}"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Como $L_\ell(E)=\ell\otimes_{\mathbb{Z}} L(E)$, $L_\ell(F)=\ell\otimes_{\mathbb{Z}} L(F)$, y todo $*$-morfismo entre álgebras de Leavitt sobre $\mathbb{Z}$ preserva la diagonal ([Car18, Corollary 5]), será suficiente ver que hay un $*$-morfismo unital y $\mathbb{Z}$-graduado $\varphi\colon L_{\mathbb{Z}}(E)\to L_{\mathbb{Z}}(F)$ que cumple $K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)\,\mathrm{can}=\mathrm{can}\,\phi$.

Por la Proposición III.3.1, existen $L\in\mathbb{N}_0$ y matrices $S^{(0)},\dots,S^{(L)}\in \mathbb{N}_0^{E^0\times \mathrm{sink}(F)}$, $R\in\mathbb{N}_0^{E^0\times\mathrm{reg}(F)}$ que cumplen las Ecuaciones (III.3.2), (III.3.3), (III.3.4), y (III.3.5). Esto implica, para cada $w\in\mathrm{reg}(F)$ y $u\in\mathrm{sink}(F)$, $i\in\{0,\dots,L\}$, la existencia de particiones

$$F_w^L=\bigsqcup_{z\in E^0}\Gamma_{z,w},\quad F_u^i=\bigsqcup_{z\in E^0}\Sigma^i_{z,u} \tag{III.4.2}$$

tales que $\#\Gamma_{z,w}=R_{z,w}$ y $\#\Sigma^i_{z,u}=S^{(i)}_{z,u}$. Más aún, si $v\in\mathrm{reg}(E)$ entonces $\Sigma^0_{v,u}=\emptyset$ y existen biyecciones

$$\zeta^i_{v,u}\colon \{(e,\beta): e\in s^{-1}(v), \beta\in\Sigma^i_{r(e),u}\}\xrightarrow{\cong}\Sigma^{i+1}_{v,u},\qquad (0\le i\le L-1), \tag{III.4.3}$$

$$\zeta^L_{v,u}\colon \{(e,\beta): e\in s^{-1}(v), \beta\in\Sigma^L_{r(e),u}\}\xrightarrow{\cong}\{\alpha f: f\in F^1, r(f)=u, \alpha\in\Gamma_{v,s(f)}\}, \tag{III.4.4}$$

$$\xi_{v,w}\colon \{(e,\alpha): e\in s^{-1}(v), \alpha\in\Gamma_{r(e),w}\}\xrightarrow{\cong}\{\alpha f: f\in F^1, r(f)=w, \alpha\in\Gamma_{v,s(f)}\}. \tag{III.4.5}$$

Identificaremos las imágenes de estas funciones con caminos en $L(F)$. Omitiremos los índices cuando se puedan deducir del elemento en el cual la función está siendo evaluada, concretamente $\xi(e,\alpha)=\xi_{s(e),r(\alpha)}(e,\alpha)$ y $\zeta^i(e,\beta)=\zeta^i_{s(e),r(\beta)}(e,\beta)$.

Para cada $v\in E^0$ y $e\in E^1$, definimos

$$\varphi(v)=\sum_{w\in\mathrm{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}}\alpha\alpha^*+\sum_{u\in\mathrm{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*, \tag{III.4.6}$$

$$\varphi(e)=\sum_{w\in\mathrm{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\alpha^*+\sum_{u\in\mathrm{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\beta^*. \tag{III.4.7}$$

Veremos que estas asignaciones definen un $*$-homomorphism graduado. Notemos que para cada

$v \in E^0$ y $e \in E^1$ tenemos que $\varphi(e) \in L(F)_1, \varphi(v) \in L(F)_0$ y, por el Lema I.4.5,

$$\begin{aligned}\sum_{v\in E^0}\varphi(v) &= \sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{v\in E^0}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}}\alpha\alpha^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{v\in E^0}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*\\ &= \sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in F^L_w}\alpha\alpha^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in F^i_u}\beta\beta^* = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para ver que las asignaciones (III.4.6) y (III.4.7) definen un $*$-morfismo unital graduado es suficiente verificar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\varphi(v) = \varphi(v)^*, && (v \in E^0) && \text{(P)}\\
&\varphi(v)\varphi(v') = \delta_{v,v'}\varphi(v), && (v, v' \in E^0) && \text{(V)}\\
&\varphi(s(e))\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(r(e)) = \varphi(e), && (e \in E^1) && \text{(E)}\\
&\varphi(g)^*\varphi(e) = \delta_{g,e}\varphi(r(e)), && (g, e \in E^1) && \text{(CK1)}\\
&\varphi(v) = \sum_{e\in s^{-1}(v)}\varphi(e)\varphi(e)^*. && (v \in \operatorname{reg}(E)) && \text{(CK2)}
\end{aligned}$$

Las relaciones (P) y (V) son consecuencias directas del Lema I.4.4. Nos concentramos a continuación en (E). Primero calcularemos $\varphi(e)\varphi(r(e))$. Por el Lema I.4.4,

$$\begin{aligned}\varphi(e)\varphi(r(e)) &= \sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha,\lambda\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\alpha^*\lambda\lambda^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{N}\sum_{\beta,\gamma\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\beta^*\gamma\gamma^*\\ &= \sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\alpha^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{N}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\beta^* = \varphi(e).\end{aligned}$$

Usando el Lema I.4.4 una vez más, vemos que $\varphi(s(e))\varphi(e)$ coincide con lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{w,w'\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w},\lambda\in\Gamma_{s(e),w'}}\lambda\lambda^*\xi(e,\alpha)\alpha^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u},\gamma\in\Sigma^{i+1}_{s(e),u}}\gamma\gamma^*\zeta^i(e,\beta)\beta^*\\ + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F),w'\in\operatorname{reg}(F)}\sum_{\beta\in\Sigma^L_{r(e),u},\lambda\in\Gamma_{s(e),w'}}\lambda\lambda^*\zeta^L(e,\beta)\beta^*.\end{aligned} \tag{III.4.8}$$

Para un $w \in \operatorname{reg}(E)$ fijo y $\alpha \in \Gamma_{r(e),w}$, sabemos que $\xi(e,\alpha) = \varepsilon f$ para algún $f \in F^1$ y $\varepsilon \in \Gamma_{s(e),s(f)}$. Por lo tanto si $\lambda \in \Gamma_{s(e),w'}$ debe ser

$$\lambda\lambda^*\xi(e,\alpha)\alpha^* = \delta_{\lambda,\varepsilon}\lambda f\alpha^* = \delta_{\lambda,\varepsilon}\varepsilon f\alpha^* = \delta_{\lambda,\varepsilon}\xi(e,\alpha)\alpha^*.$$

Similarmente, fijemos $u \in \operatorname{sink}(E)$ y $\beta \in \Sigma^i_{r(e),u}$. Si $i < L$ tenemos que $\gamma\gamma^*\zeta^i(e,\beta)\beta^* = \delta_{\gamma,\zeta^i(e,\beta)}\zeta^i(e,\beta)\beta^*$ para cada $\gamma \in \Sigma^{i+1}_{s(e),u}$. Si $i = L$, entonces hay un único $\lambda \in \Gamma_{s(e),w'}$ tal que $\lambda\lambda^*\zeta^L(e,\beta)\beta^*$ es no-nulo, en cuyo caso resulta igual a $\zeta^L(e,\beta)\beta^*$. En consecuencia la Ecuación (III.4.8) coincide con

$$\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\alpha^* + \sum_{u\in\operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\beta^* = \varphi(e)$$

como queríamos ver.

A continuación probamos (CK1). En vista de (P), (V) y (E), podemos asumir sin pérdida de generalidad que $s(g)=s(e)$. Usando que para cada $w\in \operatorname{reg}(F), u\in \operatorname{sink}(F)$ las funciones $\xi_{s(e),w}$ y $\zeta^i_{s(e),u}$ son biyecciones, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\xi(g,\lambda)^*\xi(e,\alpha)=\delta_{\xi(g,\lambda),\xi(e,\alpha)}r(\xi(e,\alpha))=\delta_{e,g}\delta_{\alpha,\lambda}w, \qquad (\lambda\in\Gamma_{r(g),w'},\alpha\in\Gamma_{r(e),w})$$
$$\zeta^i(g,\gamma)^*\zeta^i(e,\beta)=\delta_{\zeta^i(g,\gamma),\zeta^i(e,\beta)}r(\zeta^i(e,\beta))=\delta_{e,g}\delta_{\beta,\gamma}u. \qquad (\gamma\in\Sigma^i_{r(g),u'},\beta\in\Sigma^i_{r(e),u})$$

Consecuentemente,

$$\varphi(g)^*\varphi(e)=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\delta_{e,g}\alpha\alpha^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\delta_{e,g}\beta\beta^*=\delta_{e,g}\varphi(r(e)).$$

Por último, probamos (CK2). Fijemos $v\in \operatorname{reg}(E)$. Por hipótesis, sabemos que $\Sigma^0_{v,u}=\emptyset$ para todo $u\in \operatorname{sink}(F)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\varphi(v)&=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}}\alpha\alpha^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*.\\
&=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{f\in s^{-1}(w)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}}\alpha f(\alpha f)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*\\
&=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{f\in s^{-1}(w)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,s(f)}}\alpha f(\alpha f)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*\\
&=\sum_{f\in F^1}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,s(f)}}\alpha f(\alpha f)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*.\end{aligned} \tag{III.4.9}$$

Dado $e\in E^1$, un razonamiento similar al usado para probar (E) nos dice que

$$\varphi(e)\varphi(e)^*=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\xi(e,\alpha)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\zeta^i(e,\beta)^*.$$

Si sumamos esta última expresión para cada $e\in s^{-1}(v)$, se obtiene:

$$\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{e\in s^{-1}(v)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}}\xi(e,\alpha)\xi(e,\alpha)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{e\in s^{-1}(v)}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}}\zeta^i(e,\beta)\zeta^i(e,\beta)^*. \tag{III.4.10}$$

Notemos que dado $w\in \operatorname{reg}(F)$ y $u\in \operatorname{sink}(F)$, estamos sumando sobre los dominios de definición de las biyecciones $\zeta^i_{v,u}$ y $\xi_{v,u}$ respectivamente. De esto y de (III.4.10) se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{e\in s^{-1}(v)}\varphi(e)\varphi(e)^*&=\sum_{z\in F^0}\sum_{f\in r^{-1}(z)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,s(f)}}\alpha f(\alpha f)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*\\
&=\sum_{f\in E^1}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,s(f)}}\alpha f(\alpha f)^*+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=1}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}\beta\beta^*.\end{aligned}$$

Esta expresión es precisamente (III.4.9), que coincide con $\varphi(v)$; completamos así la prueba de (CK2).

Finalmente, veamos que $K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)\operatorname{can}=\operatorname{can}\phi$. Sea $v\in E^0$. Aplicando el Lema I.4.4 obtenemos

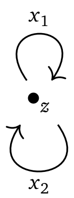
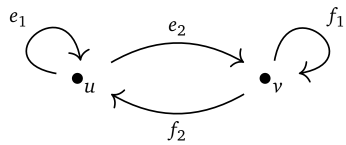
$$K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)\operatorname{can}(v)=[\varphi(v)]=\sum_{w\in \operatorname{reg}(F)}\sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}}[\alpha\alpha^*]+\sum_{u\in \operatorname{sink}(F)}\sum_{i=0}^{L}\sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}}[\beta\beta^*].$$

Si $\alpha \in \Gamma_{v,w}$ y $\beta \in \Sigma^i_{v,u}$, por el Lema III.1.7 tenemos que $[\alpha\alpha^*] = \mathrm{can}([r(\alpha)_{|\alpha|}]) = \mathrm{can}([w_L])$ y de igual modo $[\beta\beta^*] = \mathrm{can}([u_i])$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)\,\mathrm{can}(v) &= \sum_{w\in \mathrm{reg}(F)} \sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}} \mathrm{can}([w_L]) + \sum_{u\in\mathrm{sink}(F)} \sum_{i=0}^{L} \sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}} \mathrm{can}([u_i]) \\ &= \sum_{w\in \mathrm{reg}(F)} \#\Gamma_{v,w}\,\mathrm{can}([w_L]) + \sum_{u\in\mathrm{sink}(F)} \sum_{i=0}^{L} \#\Sigma^i_{v,u}\,\mathrm{can}([u_i]) \\ &= \sum_{w\in \mathrm{reg}(F)} R_{v,w}\,\mathrm{can}([w_L]) + \sum_{u\in\mathrm{sink}(F)} \sum_{i=0}^{L} S^{(i)}_{v,u}\,\mathrm{can}([u_i]). \end{aligned}$$

El último término de esta cadena de igualdades coincide con $(\mathrm{can}\circ\phi)(v)$ por la Ecuación (III.3.2). $\diamond$

Ejemplo III.4.11. Veamos la construcción de la prueba del Teorema III.4.1 puesta en práctica en un ejemplo concreto. Consideremos los grafos:

$E =$  , $A_E = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, $F =$  $A_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hay un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados $\phi\colon \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(E) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(F)$ determinado por $1_E = [z_0] \mapsto 1_F = [u_0] + [v_0]$. Poniendo $L = 0$, la matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{E^0\times F^0}$ cumple las ecuaciones de la Proposición III.3.1. Existen por lo tanto particiones de los caminos de longitud $L = 0$ que terminan en cada vértice regular, en concreto $\Gamma_{z,u} = \{u\}$, $\Gamma_{z,v} = \{v\}$, y biyecciones

$$\begin{aligned} \xi_{z,u}\colon \{x_1, x_2\} \times \{u\} &\xrightarrow{\cong} \{u\} \times \{e_1\} \sqcup \{v\} \times \{f_2\}, \\ \xi_{z,v}\colon \{x_1, x_2\} \times \{v\} &\xrightarrow{\cong} \{u\} \times \{e_2\} \sqcup \{v\} \times \{f_1\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, podemos tomar

$$\xi_{z,u}(x_1, u) = e_1, \qquad \xi_{z,u}(x_2, u) = f_2, \qquad \xi_{z,v}(x_1, v) = e_2, \qquad \xi_{z,v}(x_2, v) = f_1.$$

Para esta elección de biyecciones obtenemos un levantado $\varphi\colon L_\ell(E) \to L_\ell(F)$ de ϕ determinado por:

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(x_1) = e_1 + e_2, \qquad \varphi(x_2) = f_1 + f_2.$$

Observación III.4.12. Si $\phi : \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados tal que $1_E \mapsto 1_F$ y $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ un morfismo construido como en la prueba del Teorema III.4.1, entonces por la Observación III.3.14 el morfismo φ se restringe a una biyección $\mathrm{sink}(E) \xrightarrow{\cong} \mathrm{sink}(F)$.

Observación III.4.13. El Corolario III.3.10 puede obtenerse también usando el Teorema III.4.1. En efecto, sea $\phi\colon \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(E) \to \mathfrak{B}\mathfrak{F}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un morfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados tal que $\phi(1_E) = 1_F$. Si E es regular, entonces $L(E)$ es fuertemente graduado por [Haz13a, Theorem 3.15]. Ahora bien, el Teorema III.4.1 implica la existencia de un $*$-morfismo $\mathbb{Z}$-graduado $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ y luego $L(F)$ también debe ser fuertemente graduada; ver [Haz16, Proposition 1.1.15 (4)]. Usando [Haz13a, Theorem 3.15] una vez más, concluimos que F es regular.

Ahora exploraremos la pregunta de si existen morfismos unitales graduados $\varphi\colon L_{\mathbb{C}}(E) \to L_{\mathbb{C}}(F)$ entre álgebras de Leavitt de grafos finitos donde $K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi)$ es un isomorfismo pero φ no lo es.

Para ello, recordamos sucintamente algunos hechos sobre C^*-álgebras de grafos; en [AASM17, Section 5.2] y [AT11, Sections 1-4] pueden encontrarse más detalles. Dado un grafo E, su C^*-álgebra $C^*(E)$ está dada por una completación de $L_{\mathbb{C}}(E)$ en una norma adecuada ([AT11, Proposition 3.1]). Un $*$-morfismo entre $\mathbb{C}$-álgebras de Leavitt se extiende, completando, a un morfismo entre las C^*-álgebras de grafo correspondientes ([AT11, Proposition 4.4]).

La C^*-álgebra $C^*(E)$ viene equipada con una acción del círculo S^1 ([AT11, Definition 2.13]). Podemos ver el automorfismo asociado a multiplicar por $z \in S^1$ como la completación del $*$-automorfismo dado por

$$\mu_z \colon L_{\mathbb{C}}(E) \to L_{\mathbb{C}}(E), \quad v \mapsto v,\ e \mapsto ze \qquad (v \in E^0, e \in E^1).$$

Notemos que si $x \in L_{\mathbb{C}}(E)$ es un elemento homogéneo de grado k entonces $\mu_z(x) = z^k x$. Por tanto, un $*$-morfismo graduado $L_{\mathbb{C}}(E) \to L_{\mathbb{C}}(F)$ resulta S^1-equivariante con respecto a la acción anteriormente definida. En particular, su completación es un morfismo S^1-equivariante $C^*(E) \to C^*(F)$.

Recordemos que un grafo E se dice ***irreducible*** si para cada $v, w \in E^0$ existe un camino de v a w, y ***no-trivial*** si no consiste de un único ciclo.

Observación III.4.14. Si E es un grafo irreducible y no-trivial con al menos un arista, entonces por [AASM17, Lemma 6.3.14] y [GCNI18, Proposition 4.5 and Theorem 4.13] se sigue que $D(E)$ es una subálgebra conmutativa maximal de $L_{\mathbb{C}}(E)$. En particular, si E y F son grafos irreducibles y no-triviales con al menos un arista, y $\varphi \colon L_{\mathbb{C}}(E) \to L_{\mathbb{C}}(F)$ un isomorfismo que preserva la diagonal, entonces $\varphi(D(E)) = D(F)$. Notemos $\overline{D(E)}$ a la clausura de $D(E)$ en $C^*(E)$. Lo anterior nos dice en particular que la completación de φ es un isomorfismo S^1-equivariante que envía $\overline{D(E)}$ a $\overline{D(F)}$ de forma biyectiva.

Sea $\mathscr{O}$ la categoría de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados punteados, y $\mathsf{Leavitt}_\ell$ la subcategoría plena de la categoría de $*$-álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas generada por las álgebras de Leavitt. Podemos considerar al grupo de Grothendieck graduado como un funtor $K_0^{\mathrm{gr}} \colon \mathsf{Leavitt}_\ell \to \mathscr{O}$ que envía $L(E)$ a $(K_0^{\mathrm{gr}}(L(E)), K_0^{\mathrm{gr}}(L(E))_+, [L(E)])$.

Pregunta III.4.15. ¿Existen dos grafos finitos E y F que sean irreducibles, no-triviales, tengan al menos un arista y cumplan con las siguientes dos condiciones?

(I) existe un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados $\phi \colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ tal que $1_E \mapsto 1_F$;

(II) no existen isomorfismos S^1-equivariantes $\varphi \colon C^*(E) \to C^*(F)$ tales que $\varphi(\overline{D(E)}) = \overline{D(F)}$.

La motivación de la Pregunta III.4.15 proviene del Teorema III.4.18 enunciado a continuación. Las condiciones (i) e (ii) están relacionadas con las nociones de ***shift equivalence*** y ***strong shift equivalence*** para matrices.

Definición III.4.16. Dos matrices $A \in \mathbb{N}_0^{n\times n}$, $B \in \mathbb{N}_0^{m\times m}$ se dicen:

- ***equivalentes*** (sobre $\mathbb{N}_0$) con retardo l si existen matrices $R \in \mathbb{N}_0^{n\times m}, S \in \mathbb{N}_0^{m\times n}$ tales que

$$AR = RB,\ SA = BS,\ RS = A^l,\ SR = B^l;$$

- ***elementalmente equivalentes*** si son equivalentes con retardo 1;

- ***fuertemente equivalentes*** si están relacionadas a través de la clausura transitiva de la relación de equivalencias elementales; es decir, si hay una sucesión de equivalencias con retardo 1 que relacionan A con B.

Una equivalencia fuerte siempre es una equivalencia. La recíproca de esta afirmación fue la llamada ***conjetura de Wiliams*** y no es cierta en general; ver por ejemplo [KR99]. La relación entre estas nociones y los espacios de corrimiento asociados a grafos puede consultarse en [LM95, 7.2 y 7.3].

Por [CDOE24, Theorem 7.3 and Remark 7.5], dos grafos finitos, irreducibles y no-triviales con al menos un arista cuyas matrices de adyacencia son equivalentes pero no fuertemente equivalentes cumplen todas las condiciones de la Pregunta III.4.15 con la excepción del requerimiento de que el morfismo ϕ sea punteado. Un ejemplo de tales grafos son los asociados a las matrices A y B del contraejemplo de Kim y Roush al caso irreducible de la conjetura de Williams [KR99, Section 7], que notaremos E_{KR} y F_{KR} (en [CDOE24, demostración de Theorem 7.4] se emplea la notación G_A y G_B para E_{KR} y F_{KR} respectivamente). En particular de aquí surge naturalmente la siguiente pregunta:

Pregunta III.4.17. ¿Existe un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E_{\mathrm{KR}}) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F_{\mathrm{KR}})$ tal que $1_{E_{\mathrm{KR}}}$ to $1_{F_{\mathrm{KR}}}$?

Notemos que responder a la Pregunta III.4.17 por la afirmativa implica una respuesta afirmativa para la Pregunta III.4.15.

Teorema III.4.18. Si la respuesta de la Pregunta III.4.15 es afirmativa, entonces el funtor $K_0^{\mathrm{gr}}\colon \mathsf{Leavitt}_{\mathbb{C}} \to \mathscr{O}$ no refleja isomorfismos.

Demostración. Usaremos que, sobre $\mathbb{C}$, el grupo de Grothendieck graduado de un álgebra de Leavitt puede identificarse como $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulo preordenado punteado con el módulo de Bowen-Franks asociado. Supongamos que existen dos grafos finitos E y F que son irreducibles, no-triviales y cumplen las condiciones (i) y (ii) de la Pregunta III.4.15. Entonces, por el Teorema III.4.1, existe un $*$-morfismo $\mathbb{Z}$-graduado $\varphi\colon L_{\mathbb{C}}(E) \to L_{\mathbb{C}}(F)$ que preserva la diagonal y cumple $K_0^{\mathrm{gr}}(\varphi) = \phi$. Si φ fuese un isomorfismo, entonces la Observación III.4.14 implicaría la existencia de un isomorfismo S^1-equivariante $C^*(E) \to C^*(F)$ que envía $\overline{D(E)}$ a $\overline{D(F)}$, contradiciendo la condición (ii). ◇

Observación III.4.19. Considerando las matrices A y B de [KR99, Section 7], las matrices R y S que implementan su equivalencia sobre $\mathbb{Z}$, y el argumento de [LM95, demostración de Theorem 7.3.6], conseguimos matrices que implementan la equivalencia de A y B sobre $\mathbb{N}_0$. Concretamente, las matrices $\tilde{S} := S \cdot B^6$ y $\tilde{R} := R \cdot A^6$ tienen entradas no-negativas y son tales que $A^{13} = \tilde{S}\tilde{R}$, $B^{13} = \tilde{R}\tilde{S}$, $\tilde{R}A = B\tilde{R}$, $A\tilde{S} = \tilde{S}B$. Identificando $\{1, \dots, 7\}$ con E^0_{KR} y F^0_{KR}, obtenemos morfismos de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados

$$
\begin{aligned}
\phi\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E_{\mathrm{KR}}) &\to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F_{\mathrm{KR}}), & x &\mapsto \tilde{S}^t \cdot x,\\
\psi\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F_{\mathrm{KR}}) &\to \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E_{\mathrm{KR}}), & x &\mapsto \tilde{R}^t \cdot x.
\end{aligned}
$$

Recordemos además que estos morfismos, inducidos por la equivalencia, son isomorfismos. Para verlo resta observar que $\psi\phi$ coincide con la multiplicación por $(A^t)^{13}$, que se identifica con la multiplicación por σ^{-13} en $\mathfrak{BF}(E_{\mathrm{KR}})$, y la situación análoga ocurre con $\phi\psi$.

Ninguno de estos isomorfismos resulta punteado. Para verlo, primero observamos que A^t y B^t son invertibles pues tienen determinante -1. En vista de la Observación III.2.8, que ni ϕ ni ψ son punteados se sigue de que ni $\tilde{R}^t$ ni $\tilde{S}^t$ fijan al vector $v := (1,1,1,1,1,1,1)^t$. Esto es porque ambas matrices tienen una columna con entradas todas mayores a 1. Más todavía, un cálculo muestra que tanto $u := \tilde{S}^t \cdot (1,1,1,1,1,1,1)^t$ como $v := \tilde{R}^t \cdot (1,1,1,1,1,1,1)^t$ tienen coordenadas todas mayores a 1.

Se podrían considerar también las equivalencias definidas por $S \cdot B^{6+j}$ y $R \cdot A^{6+j}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Los morfismos inducidos están dados por $(B^j)^t\tilde{S}^t$ y $(A^j)^t\tilde{R}^t$ respectivamente. Para concluir la observación, veamos que estos tampoco resultarán punteados.

Como E_{KR} y F_{KR} son regulares, tanto $(B^j)^t$ como $(A^j)^t$ son matrices de entradas no-negativas y sin columnas nulas. Usando una vez más que todas las coordenadas de u y v son mayores que 1, se sigue que $(B^j)^t\tilde{S}^t \cdot (1,1,1,1,1,1,1)^t = (B^j)^t u$ tiene una coordenada mayor a 1; lo mismo ocurre con $(A^j)^t\tilde{R}^t \cdot (1,1,1,1,1,1,1)^t$.

III.5. Morfismos prolijos

Para concluir el capítulo, en esta sección caracterizamos el tipo de morfismos obtenido en la demostración del Teorema III.4.1.

Definición III.5.1. Decimos que un morfismo de álgebras $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ es ***prolijo*** si existen $L \geq 0$ y, para cada $w \in \mathrm{reg}(F)$, $u \in \mathrm{sink}(F)$ y $i \in \{0,\dots,L\}$, particiones $\{\Gamma_{v,w}\}_{v\in E^0}$ de F_w^L y $\{\Sigma_{v,u}^i\}_{v\in E^0}$ de F_u^i junto con biyecciones (III.4.3), (III.4.4), y (III.4.5) tales que (III.4.6) y (III.4.7) se satisfacen para todo $v \in E^0$ y $e \in E^1$.

Relacionaremos la noción de morfismo prolijo con la noción de morfismos que preservan orden definida a continuación.

Definición III.5.2. Sea E un grafo finito. El ***cono positivo*** de $L_{\mathbb{Z}}(E)$ se define como el sub-$*$-anillo de $L_{\mathbb{Z}}(E)$ dado por

$$PC(E) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i^* : \alpha_i, \beta_i \in \mathscr{P}(E), r(\alpha_i) = r(\beta_i),\ \lambda_i \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Decimos que un morfismo de álgebras $\varphi\colon L_{\mathbb{Z}}(E) \to L_{\mathbb{Z}}(F)$ ***preserva el orden*** si $\varphi(PC(E)) \subset PC(F)$.

Lema III.5.3. Si E es un grafo finito y $D(E)$ la subálgebra diagonal de $L_{\mathbb{Z}}(E)$, entonces

$$D(E) \cap PC(E) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathscr{R}_n(E) \sqcup \mathscr{S}_n(E)} \lambda_\alpha \alpha\alpha^* : \lambda_\alpha \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Demostración. Sea $x \in D(E) \cap PC(E)$. Como $x \in PC(E)$, podemos escribir $x = \lambda_1\alpha_1\beta_1^* + \cdots + \lambda_1\alpha_k\beta_k^*$ para α_i, $\beta_i \in \mathscr{P}(E)$ tales que $r(\alpha_i) = r(\beta_i)$ y coeficientes $\lambda_i \in \mathbb{N}_0$. Sea $M \in \mathbb{N}$ tal que $x \in D(E)_M$. Aplicando (CK2) de ser necesario, podemos asumir que existe $N \geq M$ para el cual $\beta_i \in \mathscr{R}_N(E) \sqcup \mathscr{S}_N(E)$ para todo i. En particular $x \in D(E)_N$, pues $N \geq M$. Si escribimos x como una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de elementos $\gamma\gamma^*$ con $\gamma \in \mathscr{R}(E)_N \sqcup \mathscr{S}(E)_N$, el coeficiente $c_\gamma \in \mathbb{Z}$ que acompaña a cada proyección $\gamma\gamma^*$ cumple

$$c_\gamma r(\gamma) = \gamma^* x \gamma = \left(\sum_{i=1}^{k} \delta_{\gamma,\alpha_i}\delta_{\gamma,\beta_i}\lambda_i \right) r(\gamma).$$

Por lo tanto $c_\gamma \geq 0$; esto completa la prueba. ◇

Teorema III.5.4. Sean E y F dos grafos finitos y $\varphi\colon L(E) \to L(F)$ un morfismo unital de ℓ-álgebras. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(I) El morfismo φ es prolijo.

(II) El morfismo φ es la extensión escalar a lo largo de ℓ de un $*$-morfismo unital y $\mathbb{Z}$-graduado $L_{\mathbb{Z}}(E) \to L_{\mathbb{Z}}(F)$ que preserva el orden.

Demostración. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ forma parte de la demostración del Teorema III.4.1, probemos la recíproca. Recordemos que por [Car18, Corollary 5] todo $*$-morfismo entre álgebras de Leavitt sobre $\mathbb{Z}$ preserva las diagonales. Como φ es la extensión escalar de un morfismo graduado $L_{\mathbb{Z}}(E) \to L_{\mathbb{Z}}(F)$ que preserva el orden, para cada $e \in E^1$ deben existir caminos $\alpha_{e,1},\dots,\alpha_{e,n_e}$, $\beta_{e,1},\dots,\beta_{e,n_e}$ en F y escalares $\lambda_{e,1},\dots,\lambda_{e,n_e} \in \mathbb{N}_0$ tales que $r(\alpha_{e,i}) = r(\beta_{e,i})$, $|\alpha_{e,i}| = 1 + |\beta_{e,i}|$ and $\varphi(e) = \sum_{i=1}^{n_e} \lambda_{e,i}\alpha_{e,i}\beta_{e,i}^*$. Aplicando (CK2) iteradas veces, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo $e \in E^1$ tenemos que $\beta_{e,i} \in \mathscr{R}_N(F) \sqcup \mathscr{S}_N(F)$.

Como E^0 es finito y está contenido en $D(E) \cap PC(E)$, incrementado N de ser necesario el Lema III.5.3 nos permite escribir

$$\varphi(v) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}_N(F)} \lambda_{v,\alpha}\alpha\alpha^* + \sum_{\beta \in \mathscr{S}_N(F)} \lambda_{v,\beta}\beta\beta^*, \qquad (\lambda_{v,\alpha}, \lambda_{v,\beta} \in \mathbb{N}_0)$$

para todo $v \in E^0$. Como $\varphi(v)$ es un idempotente, usando el Lema I.4.4 obtenemos que los coeficientes $\lambda_{v,\alpha}$ y $\lambda_{v,\beta}$ deben pertenecer a $\mathrm{Idem}(\mathbb{Z}) = \{0,1\}$.

Definimos $\Gamma_{v,w} = \{\alpha \in E^N_w : \lambda_{v,\alpha} = 1\}$ para cada $w \in \mathrm{reg}(E)$ y $\Sigma^i_{v,u} = \{\beta \in E^i_u : \lambda_{v,\beta} = 1\}$ para cada $u \in \mathrm{sink}(E)$, $i \in \{1,\ldots,N\}$. Con esta notación,

$$\varphi(v) = \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}} \alpha\alpha^* + \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}} \beta\beta^*. \tag{III.5.5}$$

A continuación veremos que los conjuntos $\Gamma_{v,w}$ y $\Sigma^i_{v,u}$ definen las particiones buscadas. Dados dos vértices $v \neq v'$,

$$0 = \varphi(v)\varphi(v') = \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}\cap\Gamma_{v',w}} \alpha\alpha^* + \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}\cap\Sigma^i_{v',u}} \beta\beta^*,$$

y entonces $\Gamma_{v,w} \cap \Gamma_{v',w} = \emptyset$ y $\Sigma^i_{v,u} \cap \Sigma^i_{v',u} = \emptyset$. Ahora, por la unitalidad de φ,

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{v\in E^0} \varphi(v) &= \sum_{v\in E^0} \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha\in\Gamma_{v,w}} \alpha\alpha^* + \sum_{v\in E^0} \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta\in\Sigma^i_{v,u}} \beta\beta^* \\ &= \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha\in\bigcup_{v\in E^0}\Gamma_{v,w}} \alpha\alpha^* + \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta\in\bigcup_{v\in E^0}\Sigma^i_{v,u}} \beta\beta^*. \end{aligned}$$

En consecuencia $\mathscr{R}_N(F) = \bigcup_{v\in E^0, w\in\mathrm{reg}(E)} \Gamma_{v,w}$ y $\mathscr{S}_N(F) = \bigcup_{v\in E^0, u\in\mathrm{sink}(E), i\in\{0,\ldots,N\}} \Sigma^i_{v,u}$. Intersecando esas igualdades de conjuntos con E^N_w y E^i_u obtenemos que $E^N_w = \bigsqcup_{v\in E^0} \Gamma_{v,w}$ y $E^i_u = \bigsqcup_{v\in E^0} \Sigma^i_{v,u}$ respectivamente.

Fijemos ahora $e \in E^1$. Por las observaciones precedentes, podemos escribir

$$\varphi(e) = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}_N(F)} x_\alpha \alpha^* + \sum_{\beta\in\mathscr{S}_N(F)} \sum_{i=0}^{N} y_\beta \beta^*$$

con x_α una suma finita de caminos de longitud $N+1$ y rango $r(\alpha)$, e y_β una suma finita de caminos de longitud $|\beta|+1$ y rango $r(\beta)$. Más todavía, como $\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(r(e))$, por (III.5.5) tenemos que

$$\varphi(e) = \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha\in\Gamma_{r(e),w}} x_\alpha \alpha^* + \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta\in\Sigma^i_{r(e),u}} y_\beta \beta^*.$$

Para cada α, β como en la igualdad anterior, escribimos $x_\alpha = \sum_{j=0}^{n_\alpha} c_{\alpha,j}\gamma_{\alpha,j}$ para $n_\alpha \geq 0$, $c_{\alpha,j} \in \mathbb{N}$, y caminos distintos dos a dos $\gamma_{\alpha,j} \in E^{N+1}_{r(\alpha)}$. De igual forma escribimos $y_\beta = \sum_{j=0}^{n_\beta} c_{\beta,j}\gamma_{\beta,j}$ con $n_\beta \geq 0$, $\gamma_{\beta,j} \in E^{|\beta|+1}_{r(\beta)}$, $c_{\beta,j} \in \mathbb{N}$. Entonces

$$x^*_\alpha x_{\alpha'} = \left(\sum_{i\in[n_\alpha], j\in[n_{\alpha'}]} \delta_{\gamma_{\alpha,i},\gamma_{\alpha',j}} c_{\alpha,i} c_{\alpha',j} \right) r(\alpha) \text{ y } y^*_\beta y_{\beta'} = \left(\sum_{i\in[n_\beta], j\in[n_{\beta'}]} \delta_{\gamma_{\beta,i},\gamma_{\beta',j}} c_{\beta,i} c_{\beta',j} \right) r(\beta).$$

Como

$$\varphi(r(e)) = \varphi(e)^*\varphi(e) = \sum_{w\in\mathrm{reg}(E)} \sum_{\alpha,\alpha'\in\Gamma_{r(e),w}} \alpha x^*_\alpha x_{\alpha'} \alpha'^* + \sum_{u\in\mathrm{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta,\beta'\in\Sigma^i_{r(e),u}} \beta y^*_\beta y_{\beta'} \beta'^*,$$

necesariamente $n_\alpha = n_\beta = 1$ y $c_{\alpha,1} = c_{\beta,1} = 1$ para todo α, β. Luego $x_\alpha, y_\beta \in \mathscr{P}(E)$ y más todavía las asignaciones $\alpha \mapsto x_\alpha$ y $\beta \mapsto y_\beta$ deben ser inyectivas, dado que $x_\alpha^* x_{\alpha'}$ y $y_\beta^* y_{\beta'}$ deben ser nulos para $\alpha \neq \alpha'$ y $\beta \neq \beta'$.

Definimos ahora $\xi(e,\alpha) := x_\alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma_{r(e),w}$ y $\zeta^i(e,\beta) := y_\beta$ para cada $\beta \in \Sigma^i_{r(e),u}$, de forma que

$$\varphi(e) = \sum_{w \in \operatorname{reg}(E)} \sum_{\alpha \in \Gamma_{r(e),w}} \xi(e,\alpha)\alpha^* + \sum_{u \in \operatorname{sink}(E)} \sum_{i=0}^{N} \sum_{\beta \in \Sigma^i_{r(e),u}} \zeta^i(e,\beta)\beta^*.$$

Observemos que $\varphi(s(e))\xi(e,\alpha)\alpha^*$ será nulo si $\xi(e,\alpha)$ no comienza en un camino de longitud N que pertenezca a $\bigsqcup_{w \in E^0} \Gamma_{s(e),w}$, y coincidirá con $\xi(e,\alpha)\alpha^*$ en caso contrario. Puesto que $\varphi(s(e))\varphi(e) = \varphi(e)$, esto establece que $\xi(e,\alpha) \in \bigsqcup_{w \in \operatorname{reg}(F)} \Gamma_{s(e),w} \times F_{w,r(\alpha)}$ y de forma similar que $\zeta^N(e,\beta) \in \bigsqcup_{w \in \operatorname{reg}(F)} \Gamma_{s(e),w} \times F_{w,r(\beta)}$ y $\zeta^i(e,\beta) \in \Sigma^{i+1}_{s(e),r(\beta)}$ cuando $|\beta| < N$.

Podremos dar por terminada la demostración una vez que veamos que, dados vértices $v \in \operatorname{reg}(E), w \in \operatorname{reg}(F), u \in \operatorname{sink}(F)$, las funciones

$$\begin{aligned}
\xi_{v,w} &: \bigsqcup_{x \in E^0} E_{v,x} \times \Gamma_{x,w} \to \bigsqcup_{z \in \operatorname{reg}(F)} \Gamma_{v,z} \times F_{z,w},\\
\zeta^N_{v,u} &: \bigsqcup_{x \in E^0} E_{v,x} \times \Sigma^N_{x,u} \to \bigsqcup_{z \in \operatorname{reg}(F)} \Gamma_{v,z} \times F_{z,u}\\
\zeta^i_{v,u} &: \bigsqcup_{x \in E^0} E_{v,x} \times \Sigma^i_{x,u} \to \Sigma^{i+1}_{v,u}, \qquad (0 \leq i \leq N-1).
\end{aligned}$$

son biyectivas.

Ya hemos observado que para un arista fijo $e \in E^1$, las funciones $\alpha \mapsto \xi_{s(e),r(\alpha)}(e,\alpha)$ y $\beta \mapsto \zeta^{|\beta|}_{s(e),r(\beta)}(e,\beta)$ son inyectivas. De la ecuación $\varphi(f)^*\varphi(e) = 0$ se desprende que si $e, f \in E^1$ son aristas distintos comenzando en v y $\alpha \in \Gamma_{x,w}, \alpha' \in \Gamma_{y,w}$ entonces $\xi_{v,w}(e,\alpha) \neq \xi_{v,w}(f,\alpha')$. El mismo argumento aplica para probar la inyectividad de cada función $\zeta^i_{v,w}$.

Para concluir probamos la suryectividad. Usando CK2 y (III.5.5), el elemento $\varphi(v)$ debe coincidir con la suma de todas las expresiones $\gamma f(\gamma f)^*$ con $\gamma f \in \bigsqcup_{z \in E^0, z \in \operatorname{reg}(F)} \Gamma_{v,z} \times F_{z,z'}$ y $\delta\delta^*$ con $\delta \in \bigcup_{i=0}^{N} \bigcup_{u \in \operatorname{sink}(F)} \Sigma^i_{v,u}$. Al mismo tiempo $\varphi(v) = \sum_{s(e)=v} \varphi(e)\varphi(e)^*$ debe coincidir con la suma de las expresiones $\xi(e,\alpha)\xi(e,\alpha)^*$ y $\zeta^i(e,\beta)\zeta^i(e,\beta)^*$ para cada i, $\alpha \in \mathscr{R}(F)_N$, $\beta \in \mathscr{S}(F)_N$. Restringir estas observaciones a los codominios apropiados implica que cada función es sobreyectiva. ◇

Ejemplo III.5.6. Si $E = \mathscr{R}_1$ es el grafo con un único vértice y un único lazo, entonces $L(E) \simeq \ell[t, t^{-1}]$ con t de grado 1 y $t^* = t^{-1}$. Para cada $N \geq 0$, hay un único camino de longitud N en E, que se corresponde bajo el anterior isomorfismo con el monomio t^N. Esto implica que el único morfismo prolijo $f : L(E) \to L(E)$ es la identidad. En particular vemos que existen $*$-morfismos $\mathbb{Z}$-graduados y unitales que preservan la diagonal pero no son prolijos; por ejemplo podemos considerar el morfismo determinado por $t \mapsto -t$.

Corolario III.5.7. La composición de dos morfismos prolijos es un morfismo prolijo.

Demostración. Las condiciones (ii) del Teorema III.5.4 se preservan por composición. ◇

Capítulo IV

Resultados estructurales sobre la K-teoría bivariante graduada

Este capítulo está dedicado a probar propiedades sobre la categoría kk^{gr} de K-teoría bivariante algebraica graduada [Ell14], los cuales nos serán de utilidad para estudiar problemas de clasificación graduada para álgebras de Leavitt.

IV.1. Una breve introducción a kk^{gr}

Una ***teoría de homología escisiva*** para álgebras graduadas consiste de un funtor $H\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathscr{T}$ cuyo codominio es una categoría triangulada $\mathscr{T}$ y, para cada extensión

$$K \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} Q, \tag{$\mathscr{E}$}$$

una elección de triangulo distinguido

$$H(Q)[+1] \xrightarrow{\partial^H_{\mathscr{E}}} H(K) \xrightarrow{H(i)} H(E) \xrightarrow{H(p)} H(Q)$$

de forma que para cada morfismo entre extensiones $\mathscr{E}$ y $\mathscr{E}'$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\beta"] & Q \arrow[d, "\gamma"] \\ K' \arrow[r, "i'"] & E' \arrow[r, "p'"] & Q' \end{tikzcd}$$

conmute el cuadrado

$$\begin{tikzcd} H(Q)[+1] \arrow[r, "\partial_{\mathscr{E}}"] \arrow[d, "{H(\gamma)[+1]}"'] & H(K) \arrow[d, "H(\alpha)"] \\ H(Q')[+1] \arrow[r, "\partial_{\mathscr{E}'}"] & H(K') \end{tikzcd}$$

Denominaremos al morfismo $\partial^H_{\mathscr{E}}$ como el ***morfismo de borde (a izquierda)*** de H asociado a $\mathscr{E}$. Un morfismo de teorías de homología escisivas (F,ϕ) de H a $H'\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathscr{T}'$ consiste de un funtor triangulado $F\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ tal que $FH = H'$ y una transformación natural $\phi\colon F(H(-)[+1]) \to H'(-)[+1]$

que hace conmutar el siguiente diagrama para toda extensión $\mathscr{E}$:

$$\begin{tikzcd}
F(H(Q)[+1]) \arrow[dr, "F(\partial^H_{\mathscr{E}})"] \arrow[dd, "\phi_Q"'] & \\
& H'(K) \\
H'(Q)[+1] \arrow[ur, "\partial^{H'}_{\mathscr{E}}"'] &
\end{tikzcd} \tag{IV.1.1}$$

La K-***teoría bivariante graduada***

$$j\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to kk^{\mathrm{gr}}$$

es la teoría de homología escisiva inicial con la propiedad de ser G-estable, matricialmente estable e invariante homotópica ([Ell14, Theorem 4.2.1]). Los objetos de kk^{gr} son los mismos que los de $\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$, y j es la identidad en objetos. Dada un álgebra graduada A, escribiremos frecuentemente A para referirnos a $j(A)$ cuando esto se deduzca del contexto. La categoría kk^{gr} se construye a partir de una teoría de homología escisiva $j'\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ que es inicial entre las que son matricialmente estables y homotópicamente invariantes pero no necesariamente G-estables ([Ell14, Section 2]). Los objetos de $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ son, como los de kk^{gr}, todas las ℓ-álgebras graduadas. De igual manera el funtor j' es la identidad en objetos. En morfismos tenemos las siguientes definiciones:

$$kk^{\mathrm{gr}}(A,B) = kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}(M_G A, M_G B), \qquad j(f) = j'(M_G f).$$

En el caso en el que G es el grupo trivial kk^{gr} coincide con la K-teoría bivariante algebraica [CT07], que es la teoría de homología escisiva $j_{kk}\colon \mathsf{Alg} \to kk$ inicial con respecto a la estabilidad matricial y al invarianza homotópica.

En la Sección IV.2 trabajaremos con la definición explícita de los morfismos de borde en kk^{gr} y $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$. Salvo por este punto, nos será suficiente en casi todo momento trabajar con la propiedad universal de kk^{gr}, por lo que no ahondaremos detalladamente en su construcción.

Para concluir la sección recordaremos algunos resultados de [CT07], [Ell14] y [Arn21] que nos serán de utilidad.

Teorema IV.1.2 ([CT07, Theorem 8.2.1])**.** Sea A una ℓ-álgebra. Se tiene un isomorfismo

$$kk(\ell, A) \cong KH_0(A)$$

natural en A. ◇

Teorema IV.1.3. Sea A una ℓ-álgebra graduada. Se tienen isomorfismos

$$kk^{\mathrm{gr}}(\ell, A) \cong kk(\ell, G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A) \cong KH_0(A) \cong KH_0^{\mathrm{gr}}(A).$$

naturales en A.

Demostración. El primer isomorfismo se obtiene concatenando [Ell14, Theorem 7.6] junto con [Ell14, Corollary 6.17] aplicado al subgrupo trivial de G. El segundo proviene de aplicar el Teorema IV.1.2, y el tercero del Corolario II.2.9. ◇

Los grupos $KH_n^{\mathrm{gr}}(A)$ pueden interpretarse como aplicar $kk^h_{\mathrm{gr}}(\ell, -)$ a $\Omega^n A$ si $n \geq 0$, y a $\Sigma^{-n} A$ si $n \leq 0$.

Teorema IV.1.4 ([Arn21, Sección 3.7], [AC23, Section 9])**.** Se tiene un isomorfismo de anillos

$$\mathbb{Z}[G^{\mathrm{op}}] \otimes kk(\ell, \ell) \to kk^{\mathrm{gr}}(\ell, \ell)$$

que envía $g \otimes j_{kk}(1_\ell)$ a $m_g := j(\iota_1)^{-1} \circ j(\iota_g)$. Esto define una acción

$$\cdot\colon G \times kk^{\mathrm{gr}}(\ell, A) \to kk^{\mathrm{gr}}(\ell, A), \qquad g \cdot \xi = \xi \circ m_g$$

que bajo el isomorfismo $kk^{\mathrm{gr}}(\ell, A) \cong kk(\ell, G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A)$ se corresponde con la inducida por la estructura de G-álgebra en $G \mathbin{\widehat{\ltimes}} A$. ◇

IV.2. Morfismos de borde

En esta sección vamos a estudiar los morfismos de borden $\partial_{\mathscr{E}} := \partial^j_{\mathscr{E}}$ de kk^{gr}. Recordamos para esto como se definen en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ los morfismos de borde.

Sea ($\mathscr{E}$) una una extensión, y sean TQ el álgebra tensorial de Q y $JQ := \ker(TQ \to Q)$ el núcleo del morfismo counidad. Una sección $s\colon Q \to E$ de p define un morfismo de álgebras $TQ \to E$, que se restringe a su vez a un morfismo $c_{\mathscr{E}}\colon JQ \to K$. Decimos que $c_{\mathscr{E}}$ es el ***mapa clasificante*** de $c_{\mathscr{E}}$. A menos de homotopía polinomial graduada, no depende de la sección elegida.

En particular tenemos un morfismo $c_{\mathscr{L}_Q}\colon JQ \to Q$ asociado a la extensión de lazos

$$\Omega Q \to PQ \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} Q, \tag{$\mathscr{L}_Q$}$$

que resulta un isomorfismo en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ ([Ell14, p. 209], [CT07, Lemma 6.3.10]). El morfismo de borde $\partial'_{\mathscr{E}} := \partial^{j'}_{\mathscr{E}}$ de ($\mathscr{E}$) viene dado por un zig zag de mapas clasificantes ([Ell14, 2.6.4]):

$$\partial'_{\mathscr{E}} := c_{\mathscr{E}} \circ c^{-1}_{\mathscr{L}_Q} = \Omega Q \xleftarrow{c_{\mathscr{L}_Q}} JQ \xrightarrow{c_{\mathscr{E}}} K.$$

Observación IV.2.1. Observemos que, por construcción, el morfismo de borde de $\mathscr{L}_Q$ es la identidad de ΩQ. Como observamos más arriba, si $H\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathscr{T}$ es una teoría de homología escisiva matricialmente estable y homotópicamente invariante, hay un único morfismo $(X,\phi)\colon j' \to H$. Si bien no entraremos en detalles sobre la construcción de X, notamos que como $\partial'_{\mathscr{L}_Q} = \mathrm{id}_{\Omega Q}$ entonces $\phi_Q = (\partial^H_{\mathscr{L}_Q})^{-1}$ para todo Q.

El morfismo de borde de una extensión ($\mathscr{E}$) en kk^{gr} es un elemento $\partial_{\mathscr{E}} \in kk^{\mathrm{gr}}(\Omega Q, K) = kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}(M_G\Omega Q, M_G K)$. Para construirlo se considera la extensión

$$M_G K \xrightarrow{M_G i} M_G E \xrightarrow{M_G p} M_G Q. \tag{$M_G\mathscr{E}$}$$

Su morfismo de borde en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ es una flecha $\partial'_{M_G\mathscr{E}}\colon \Omega M_G Q \to M_G K$. Para definir $\partial_{\mathscr{E}}$, precomponemos a $\partial'_{M_G\mathscr{E}}$ con el morfismo de ***flip*** $\tau_Q\colon M_G\Omega Q \to \Omega M_G Q$:

$$\partial_{\mathscr{E}} := \partial'_{M_G\mathscr{E}} \circ \tau_Q = c_{M_G\mathscr{E}} \circ c^{-1}_{\mathscr{L}_{M_G Q}} \circ \tau_Q. \tag{IV.2.2}$$

Nuestro primer cálculo concierne a la extensión de lazos.

Lema IV.2.3. Si A es un álgebra graduada, entonces $\partial_{\mathscr{L}_A} = \mathrm{id}_{\Omega A}$.

Demostración. Sean $\mathscr{E} = M_G\mathscr{L}_A$ y $\mathscr{D} = \mathscr{L}_{M_G A}$. Siguiendo al definición de (IV.2.2), tenemos la siguiente igualdad en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$:

$$\partial_{\mathscr{L}_A} = \partial'_{M_G\mathscr{L}_A} \circ \tau_A = c_{\mathscr{E}} \circ c^{-1}_{\mathscr{D}} \circ \tau_A.$$

Consideremos ahora el morfismo de flip $\tau'_A\colon M_G PA \to PM_G A$, que forma parte de un morfismo de extensiones de $\mathscr{E}$ a $\mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd}
M_G\Omega A \arrow[r] \arrow[d, "\tau_A"] & M_G PA \arrow[r] \arrow[d, "\tau'_A"] & M_G A \arrow[d, equal] \\
\Omega M_G A \arrow[r] & PM_G A \arrow[r] & M_G A
\end{tikzcd}$$

La versión graduada de [CT07, Proposition 4.4.2] (ver [Ell14, p. 205-206]), en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ nos provee de la igualdad $\tau_A \circ c_{\mathscr{E}} = c_{\mathscr{D}}$. Por lo tanto $c_{\mathscr{E}}$ es un isomorfismo y $c^{-1}_{\mathscr{D}} = c^{-1}_{\mathscr{E}}\tau^{-1}_A$; esto concluye la demostración. ◇

Observación IV.2.4. Sea $H\colon \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}} \to \mathscr{T}$ una teoría de homología escisiva que es matricialmente estable, homotópicamente invariante y G-estable. En particular, sabemos que existe un único morfismo de teorías de homología escisivas $(X',\phi')\colon j' \to H$. A continuación recordamos como construir el morfismo único $(X,\phi)\colon j \to H$ a partir de (X',ϕ'), siguiendo [Ell14, Section 4.2].

Recordemos que tenemos una transformación natural $\iota\colon \mathrm{id} \Rightarrow M_G \otimes -$ dada por las inclusiones en la esquina asociada a $1_G \in G$. Construimos primero el funtor $X\colon kk^{\mathrm{gr}} \to \mathscr{T}$. En objetos definimos $X(A) := X'(A)$. Dado un morfismo $\alpha \in kk^{\mathrm{gr}}(A,B) = kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}(M_G A, M_G B)$, se define

$$X(\alpha) = X'(\iota_B)^{-1}X'(\alpha)X'(\iota_A).$$

La transformación natural ι induce, para cada extensión ($\mathscr{E}$), un morfismo de extensiones $\mathscr{E} \to M_G\mathscr{E}$. En particular, se sigue que $\iota_K \circ \partial'_{\mathscr{E}} = \partial'_{M_G\mathscr{E}} \circ \Omega\iota_Q = \partial'_{M_G\mathscr{E}} \circ \tau_Q \circ \iota_{\Omega Q}$ en $kk_{\mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}}$ y entonces

$$X(\partial_{\mathscr{E}}) = X'(\iota_K)^{-1}X'(\partial'_{M_G\mathscr{E}} \circ \tau_Q)X'(\iota_{\Omega Q}) = X'(\partial'_{\mathscr{E}}).$$

Definiendo $\phi_Q := \phi'_Q = (\partial^H_{\mathscr{L}_Q})^{-1}$ se obtiene que (X,ϕ) es un morfismo de teorías de homología escisivas. Notemos además que, en vista del Lema IV.2.3, esta es la única posibilidad para ϕ; cf. Observación IV.2.1.

IV.2.1. Extensiones de álgebras con graduación trivial

Sea $\mathrm{triv}\colon \mathsf{Alg} \hookrightarrow \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$ el funtor que equipa a un álgebra A con la graduación trivial, es decir, tal que $\mathrm{triv}(A) = A$ y $\mathrm{triv}(A)_{1_G} = A$. Como $j \circ \mathrm{triv}$ resulta una teoría de homología escisiva, tal composición se factoriza por j de forma única a través de un funtor triangulado $(\mathrm{triv},\phi)\colon kk \to kk^{\mathrm{gr}}$. En particular $\phi_Q = (\partial_{\mathrm{triv}(\mathscr{L}_Q)})^{-1} = \partial^{-1}_{\mathscr{L}_{\mathrm{triv}(Q)}} = \mathrm{id}_{\Omega Q}$ para cada álgebra Q. Se tiene entonces el siguiente teorema.

Teorema IV.2.5. Sea $\mathrm{triv}\colon kk \to kk^{\mathrm{gr}}$ el funtor canónico inducido por el funtor de graduación trivial $\mathrm{triv}\colon \mathsf{Alg} \hookrightarrow \mathsf{Alg}^{\mathrm{gr}}$. Si $\mathscr{E}$ es una extensión de álgebras no-graduadas y $\partial^{kk}_{\mathscr{E}}$ su morfismo de borde en kk, entonces $\mathrm{triv}(\partial^{kk}_{\mathscr{E}}) = \partial_{\mathscr{E}}$. ◇

Antes de seguir, caracterizamos el borde de la extensión de cono de ℓ,

$$M_\infty \to \Gamma \to \Sigma,$$

tanto en caso graduado como no graduado.

Definición IV.2.6. Sea $s_0 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon_{i+1,i} \in \Gamma$ el ***shift a derecha*** y $s := [s_0]$ su clase como elemento de Σ. Como $s_0^* s_0 = 1$ y $s_0 s_0^* = 1 - \varepsilon_{1,1}$, se sigue que s es una unidad. Sea $L = s^{-1}$ y

$$\xi_L\colon \ell \to \Omega\Sigma$$

el morfismo en $kk(\ell,\Omega\Sigma)$ asociado a $[L] \in KH_1(\Sigma)$.

Lema IV.2.7. El siguiente diagrama conmuta en kk^{gr}:

$$\begin{tikzcd} \ell \arrow[r, "\mathrm{triv}(\xi_L)"] \arrow[dr, "\mathrm{inc}_1"'] & \Omega\Sigma \arrow[d, "\partial_{\mathfrak{K}}"] \\ & M_\infty \end{tikzcd}$$

En particular $\mathrm{triv}(\xi_L)$ es un isomorfismo.

Demostración. Por el Teorema IV.2.5 el funtor $\mathrm{triv}\colon kk \to kk^{\mathrm{gr}}$ es compatible con los morfismos de borde, por lo cual podemos asumir que G es el grupo trivial. El resultado se sigue entonces de [Cor22, proof of Lemma 11.1], que en particular dice que el borde $\partial\colon KH_1(\Sigma) \to KH_0(M_\infty)$ envía $[s]$ a $[1 - s_0^* s_0] - [1 - s_0 s_0^*] = -[\varepsilon_{1,1}]$ y entonces $\partial([L]) = [\varepsilon_{1,1}]$. ◇

IV.2.2. Compatibilidad con productos tensoriales

En esta subsección probamos que los morfismos de borde son compatibles con productos tensoriales.

Teorema IV.2.8. Si

$$K \to E \to Q \tag{$\mathscr{E}$}$$

es una extensión y A un álgebra graduada, entonces el borde de la extensión

$$K \otimes A \to E \otimes A \to Q \otimes A \tag{$\mathscr{E}\otimes A$}$$

es igual a el borde de $\mathscr{E}$ tensorizado por A. Es decir,

$$\partial_{\mathscr{E}\otimes A} = \partial_{\mathscr{E}} \otimes A.$$

Demostración. Recordemos que $-\otimes A\colon kk^{\mathrm{gr}} \to kk^{\mathrm{gr}}$ se define usando la propiedad universal de j como el único morfismo de teorías de homología escisivas de j a $H := j(-\otimes A)$. Como vimos en la Observación IV.2.4, esto implica en particular que $\partial_{\mathscr{E}} \otimes A = \partial^H_{\mathscr{E}} \circ (\partial^H_{\mathscr{L}_Q})^{-1} = \partial_{\mathscr{E}\otimes A} \circ \partial_{\mathscr{L}_Q\otimes A}$. Como $\mathscr{L}_Q \otimes A = \mathscr{L}_{Q\otimes A}$, se desprende del Lema IV.2.3 que $\mathscr{L}_Q \otimes A$ es el morfismo identidad. Esto termina la prueba. ◇

IV.2.3. Equivalencias adjuntas entre lazos y suspensiones

Como consecuencia del Lema IV.2.7, la transformación natural

$$\lambda\colon \Omega\Sigma \Rightarrow \mathrm{id}, \qquad \lambda_A := \mathrm{triv}(\xi_L)^{-1} \otimes A \tag{IV.2.9}$$

es un isomorfismo. Sea $\mathrm{flip}\colon \Omega\Sigma \cong \Sigma\Omega$ la premutación entre factores del producto tensorial. Como $\mathrm{flip}\otimes -$ es una transformación natural, también lo es $\gamma := (\mathrm{flip}\otimes -)\circ\lambda^{-1}\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Sigma\Omega$. Hemos construido entonces explícitamente pseudoinversas que exhiben el hecho de que $\Omega\otimes-$ y $\Sigma\otimes-$ son equivalencias inversas de categorías. En particular, esto nos permite ver a Ω como adjunto a izquierda de Σ considerando a λ como la counidad de una adjunción:

Teorema IV.2.10. La transformación natural λ de (IV.2.9) es la counidad de una adjunción cuya unidad es is $\Theta := \gamma^{-1}\Sigma\Omega \circ \Sigma\lambda^{-1}\Omega \circ \gamma$. Explícitamente,

$$\Theta_B := \Theta_0 \otimes B, \qquad \Theta_0 = (\mathrm{triv}(\xi_L)^{-1} \circ \mathrm{flip} \otimes \Sigma \otimes \Omega) \circ (\Sigma \otimes \mathrm{triv}(\xi_L) \otimes \Omega) \circ (\mathrm{flip} \circ \mathrm{triv}(\xi_L)). \tag{IV.2.11}$$

Demostración. Esto se sigue de la caracterización de adjunciones en términos de identidades triangulares ([Rie16, Remark 4.2.7]); la construcción dual de la counidad se puede ver en [Rie16, demostración de Proposition 4.4.5]. ◇

Similarmente, podemos usar la equivalencia natural $\mathfrak{u} := \lambda^{-1} = \mathrm{triv}(\xi_L)\otimes -$ con inversa γ^{-1} para construir una adjunción en la que Ω es adjunto a derecha de Σ:

Teorema IV.2.12. La transformación natural $\mathfrak{u}$, inversa a (IV.2.9), es la unidad de una adjunción cuya counidad es $\mathfrak{c} := \gamma^{-1} \circ \Sigma\lambda\Omega \circ \Sigma\Omega\gamma$. Explícitamente,

$$\mathfrak{c}_B = \mathfrak{c}_0 \otimes B, \qquad \mathfrak{c}_0 := (\xi_L^{-1} \circ \mathrm{flip}^{-1}) \circ (\Sigma \otimes \xi_L^{-1} \otimes \Omega) \circ (\Sigma \otimes \Omega \otimes \mathrm{flip} \circ \xi_L). \tag{IV.2.13}$$

A través de los Teoremas IV.2.10 y IV.2.12 obtenemos, para cada par de álgebras graduadas A y B, isomorfismos naturales de grupos abelianos

$$\mathscr{R}_{A,B}\colon kk^{\mathrm{gr}}(\Omega A, B) \xrightarrow{\cong} kk^{\mathrm{gr}}(A, \Sigma B), \quad \zeta \mapsto \Sigma\zeta \circ \Theta_A, \tag{IV.2.14}$$

$$\mathscr{L}_{A,B}\colon kk^{\mathrm{gr}}(A, \Sigma B) \xrightarrow{\cong} kk^{\mathrm{gr}}(\Omega A, B), \quad \zeta \mapsto \lambda_B \circ \Omega\zeta \tag{IV.2.15}$$

y

$$\mathscr{U}_{A,B}\colon kk^{\mathrm{gr}}(\Sigma A, B) \xrightarrow{\cong} kk^{\mathrm{gr}}(A, \Omega B), \quad \zeta \mapsto \Omega\zeta \circ \mathfrak{u}_A, \tag{IV.2.16}$$

$$\mathscr{V}_{A,B}\colon kk^{\mathrm{gr}}(A, \Omega B) \xrightarrow{\cong} kk^{\mathrm{gr}}(\Sigma A, B), \quad \zeta \mapsto \mathfrak{c}_B \circ \Sigma\zeta. \tag{IV.2.17}$$

IV.2.4. Bordes a derecha

Dada una extensión ($\mathscr{E}$), su ***borde a derecha*** se define como

$$\delta_{\mathscr{E}} := -\mathscr{R}_{Q,K}(\partial_{\mathscr{E}}) = -\Sigma\partial_{\mathscr{E}} \circ (\Theta_0 \otimes Q).$$

Observación IV.2.18. Por el teorema IV.2.8, los bordes a derecha son compatibles con tensorizar en el sentido de que $\delta_{\mathscr{E}\otimes A} = \delta_{\mathscr{E}} \otimes A$.

Más adelante nos será de utilidad el siguiente lema.

Lema IV.2.19. Sea A un álgebra graduada. El morfismo de borde a derecha de la extensión de cono ($\mathfrak{K}$) es $\delta_{\mathfrak{K}\otimes A} = -\Sigma\,\mathrm{inc}_1 \otimes A$.

Demostración. En vista de la Observación IV.2.18, podemos asumir que $A = \ell$. En este caso, la extensión consiste de álgebras con graduación trivial; por el Teorema IV.2.5 podemos entonces probar el resultado para kk (en otras palabras, podemos asumir que G es el grupo trivial). Llamemos ∂ y δ a los bordes a izquierda y derecha de ($\mathfrak{K}$) respectivamente. De la definición de δ y el Lema IV.2.7, se obtiene:

$$\delta = -\Sigma\partial \circ \Theta_Q = -\Sigma\,\mathrm{inc}_1 \circ (\Sigma \otimes \xi_L^{-1}) \circ (\Theta \otimes \Sigma) = -\Sigma\,\mathrm{inc}_1 \circ \mathscr{R}_{\Sigma,\ell}(\xi_L^{-1}).$$

Para concluir observamos que $\xi_L^{-1} = \mathscr{L}_{\Sigma,\ell}(\mathrm{id}_\Sigma) = \mathscr{R}_{\Sigma,\ell}^{-1}(\mathrm{id}_\Sigma)$. ◇

IV.3. Álgebras de suma infinita, conos y suspensiones

Un ***álgebra graduada de suma*** es una $*$-álgebra graduada y unital R junto con elementos homogéneos $x, y \in R_{1_G}$ tales que

$$x^*x = y^*y = xx^* + yy^* = 1.$$

Si $x, y \in R_{1_G}$ hacen de R un álgebra de suma infinita, entonces $y^*x = 0$. Esto se sigue de multiplicar a la izquierda por y^* y a la derecha por x en la igualdad $xx^* + yy^* = 1$. De forma similar tenemos que $x^*y = 0$. Como consecuencia, la función

$$\boxplus : R \times R \to R, \qquad a \boxplus b := xax^* + yby^*$$

es un morfismo de álgebras graduadas. Dados dos morfismos de $*$-álgebras graduadas $f, g : S \to R$, escribimos $f \boxplus g$ para referirnos al morfismo de $*$-álgebras $b \mapsto f(b) \boxplus g(b)$.

Una $*$-álgebra graduada de suma se dice de ***suma infinita*** si viene equipada con un morfismo graduado $(-)^\infty : A \to A$ tal que $\boxplus \circ (\mathrm{id} \times (-)^\infty) = (-)^\infty$, esto es, tal que

$$a \boxplus a^\infty = a^\infty \qquad (\forall a \in A).$$

Nuestra motivación para considerar tales álgebras proviene del rol que cumplen como objetos en kk. Adaptamos ahora algunos resultados de [CT07] sobre anillos de suma infinita al contexto graduado.

Proposición IV.3.1. Si B es una $*$-álgebra graduada de suma infinita y $f, g : A \to B$ dos morfismos de álgebras graduadas, entonces $j(f) + j(g) \in kk^{\mathrm{gr}}(A, B)$ es igual a $j(f \boxplus g)$.

Demostración. Como kk^{gr} es una categoría aditiva y j un funtor aditivo (en el sentido de que envía productos finitos a biproductos), es suficiente ver que el morfismo codiagonal $\nabla \in kk^{\mathrm{gr}}(B \times B, B)$ coincide con $j(\boxplus)$.

Por la Proposición I.1.7, las inclusiones $\iota_1, \iota_2 : B \to M_2B$ de B en las esquinas superior izquierda e inferior derecha respectivamente son enviadas a la misma flecha en kk^{gr}. Por lo tanto, si consideramos el morfismo graduado

$$\epsilon : (b_1, b_2) \in B \times B \mapsto \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in M_2B,$$

tenemos que $\nabla = j(\iota_1)^{-1} \circ j(\epsilon)$. En particular, para probar la proposición bastará ver que $j(\iota_1 \boxplus) = j(\epsilon)$.

Sean $x, y \in B_{1_G}$ los elementos homogéneos que definen la estructura de álgebra de suma en B, y sea

$$Q = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & x^* \\ 0 & 0 & y^* \end{pmatrix}$$

la matriz considerada por Wagoner en [Wag72, p. 355]. Observemos que $u = Q^* = Q^{-1}$ es un elemento unitario de $M_3 B$ que es homogéneo de grado $1 \in G$. Por [CT07, Lemma 4.8.3], tenemos que

$$u \begin{pmatrix} b \boxplus b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u^* = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{IV.3.2}$$

En otras palabras, si llamamos $\jmath \colon M_2 B \to M_3 B$ a la inclusión en la esquina superior izquierda, la ecuación (IV.3.2) nos dice que $\operatorname{ad}(u) \circ \jmath \circ \iota_1 \circ \boxplus = \jmath \circ \epsilon$. Aplicando j y usando la Proposición I.1.20 vemos que $j(\jmath) \circ j(\iota_1 \boxplus) = j(\jmath) \circ j(\epsilon)$. Para concluir observamos que $j(\jmath)$ es un isomorfismo por estabilidad matricial. ◇

Proposición IV.3.3. Si A es una $*$-álgebra de suma infinita e $I \triangleleft A$ un ideal tal que $I^\infty \subset I$, entonces I es kk^{gr}-equivalente a 0.

Demostración. Por la Proposición I.1.20, la matriz u considerada en la Demostración de la Proposición IV.3.1 determina un $*$-homomorfismo graduado $\operatorname{ad}(u) \colon M_3 I \to M_3 I$ que representa la identidad de $M_3 I$. El mismo argumento que en loc. cit. muestra que la restricción $\boxplus' \colon I \times I \to I$ de $\boxplus$ a I es el morfismo codiagonal de I. Como $I^\infty \subset I$, también podemos restringir $(-)^\infty$ a un morfismo $(-)^{\infty'} \colon I \to I$ que satisface $(-)^{\infty'} = 1_I \boxplus' (-)^{\infty'}$. Se sigue entonces que $j((-)^{\infty'}) = j(1_I \boxplus' (-)^{\infty'}) = j(1_I) + j((-)^{\infty'})$; esto muestra que $j(1_I) = 0$ y por lo tanto que $j(I) = 0$. ◇

En el caso no-graduado, un ejemplo de un anillo de suma infinita es el cono de Karoubi (I.1.15). Queremos probar un resultado similar para su análogo graduado

$$\Gamma_X^\circ = \operatorname{span}_\ell \{ f \in \Gamma_X : |x||f(x,y)||y|^{-1} \text{ constante en el soporte de } f \}.$$

Este álgebra tiene una graduación canónica dada por $(\Gamma_X^\circ)_g = \operatorname{span}_\ell \{ f \in \Gamma_X : |x||f(x,y)||y|^{-1} = g \text{ si } f(x,y) \neq 0. \}$. Contiene a M_X como ideal homogéneo; el cociente Γ_X° / M_X se denotará Σ_X°.

Un conjunto graduado y no vacío (X, d) con función de grado $d \colon X \to G$ se dirá ***graduadamente infinito*** si para cada $g \in G$ la fibra $X_g := d^{-1}(g)$ es vacía o infinita.

Proposición IV.3.4. Si X es graduadamente infinito, entonces existe una biyección graduada $X \sqcup X \xrightarrow{\sim} X$.

Demostración. Si X es graduado infinito, cada componente X_g es o vacío o infinita; en cualquier caso existen inyecciones $\sigma_g, \tau_g \colon X_g \to X_g$ tales que $\sigma_g \sqcup \tau_g \colon X_g \sqcup X_g \to X_g$ es una biyección. Se sigue que $\sigma = \sqcup_{g \in G} \sigma_g$ y $\tau = \sqcup_{g \in G} \tau_g$ son endomorfismos del conjunto graduado X que definen una biyección graduada $X \sqcup X \to X$. ◇

Proposición IV.3.5 (cf. [CT07, Lemma 4.8.2])**.** Si X es graduadamente infinito, entonces Γ_X° es una $*$-álgebra graduada de suma infinita.

Demostración. En vista de la Proposición IV.3.4, tenemos una biyección $X \sqcup X \to X$ dada por inyecciones $\sigma, \tau \colon X \to X$, con imagen disjunta y tales que $X = \operatorname{im}(\tau) \sqcup \operatorname{im}(\sigma)$. Una verificación directa muestra que los elementos

$$u = \sum_{x \in X} \varepsilon_{\sigma(x),x}, \qquad v \in \sum_{x \in X} \varepsilon_{\tau(x),x}$$

hacen de Γ_X° una $*$-álgebra de suma.

A continuación veremos que, para cada $x, y \in X$,

$$\tau^n(\sigma(x)) = \tau^m(\sigma(y)) \iff n = m, \quad x = y. \tag{IV.3.6}$$

En efecto, supongamos sin pérdida de generalidad que $n = m+k$ para algún $k \geq 0$. Por la inyectividad de τ^m, deberíamos tener que $\tau^k(\sigma(x)) = \sigma(y)$. Como las imágenes de τ y σ son disjuntas, debe ser $k = 0$ y entonces $n = m$. Finalmente, de la inyectividad de σ se deduce que $x = y$.

De (IV.3.6) vemos que, para cada $z \in \Gamma_X^\circ$, se tiene un elemento bien definido de Γ_X° dado por

$$z^\infty := \sum_{n\geq 0} v^n u z u^* (v^n)^* = \sum_{n\geq 0, x, y \in X} \varepsilon_{\tau^n(\sigma(x)),x} \cdot z \cdot \varepsilon_{y,\tau^n(\sigma(y))} = \sum_{n\geq 0, x, y\in X} z(x,y)\cdot \varepsilon_{\tau^n(\sigma(x)),\tau^n(\sigma(y))}.$$

Por definición $z \mapsto z^\infty$ es un morfismo de álgebras y hace de Γ_X° un álgebra graduada de suma infinita. ◇

Ahora aplicamos la definición de álgebra graduada de suma infinita al análogo graduado del cono de Karoubi, y al álgebra de suspensión resultante.

Corolario IV.3.7. Si X es un conjunto graduadamente infinito, entonces Γ_X° es kk^{gr}-equivalente a 0.

Demostración. Basta aplicar la Proposición IV.3.3 a $I = A = \Gamma_X^\circ$. ◇

Observemos que si (X, d) es un conjunto graduado no vacío, entonces

$$\widehat{X} := X \times \mathbb{N}, \qquad d(x,n) = d(x)$$

es un conjunto graduadamente infinito y hay una inclusión canónica $x \in X \mapsto (x, 0) \in \widehat{X}$.

Definición IV.3.8. Sea X es un conjunto graduado tal que $X_{1_G} \neq \emptyset$. Se define

$$\Gamma_X^{\mathrm{gr}} := \Gamma_{\widehat{X}}^\circ, \qquad \Sigma_X^{\mathrm{gr}} := \Sigma_{\widehat{X}}^\circ, \qquad M_X^{\mathrm{gr}} := M_{\widehat{X}}.$$

Corolario IV.3.9. Sea X un conjunto graduado tal que $X_{1_G} \neq \emptyset$ y sea $x \in X_{1_G}$. La inclusión graduada $i_x : k \in \mathbb{N} \mapsto (x, k) \in \widehat{X}$ induce monomorfismos de álgebras $M_\infty \hookrightarrow M_X^{\mathrm{gr}}$, $\Sigma \hookrightarrow \Sigma_X^{\mathrm{gr}}$, y $\Gamma \hookrightarrow \Gamma_X^{\mathrm{gr}}$ que son kk^{gr}-isomorfismos.

Demostración. Como $\Gamma_{\mathbb{N}}^\circ = \Gamma_{\mathbb{N}} = \Gamma$ y $\Sigma_{\mathbb{N}}^\circ = \Sigma_{\mathbb{N}} = \Sigma$, los morfismos inducidos por i_x definen un morfismo entre triángulos distinguidos asociados a las respectivas extensiones de cono:

$$\begin{tikzcd} M_\infty \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & \Sigma \arrow[d] \\ M_{\widehat{X}} \arrow[r] & \Gamma_{\widehat{X}}^\circ \arrow[r] & \Sigma_{\widehat{X}}^\circ \end{tikzcd}$$

La flecha vertical izquierda es una equivalencia por G-estabilidad. La flecha vertical del medio es una kk^{gr}-equivalencia porque tanto dominio como codominio son kk^{gr}-equivalentes a 0. Se sigue, usando que kk^{gr} es una categoría triangulada, que el morfismo vertical de la derecha debe ser una kk^{gr}-equivalencia. ◇

IV.3.1. Suspensiones graduadas

Una familia de morfismos de borde que será de nuestro interés proviene de las extensiones de cono graduadas. Dado un conjunto graduado X, tenemos una extensión

$$\Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{\partial_X} M_X^{\mathrm{gr}} \to \Gamma_X^{\mathrm{gr}} \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}.$$

Usando que la inclusión $\mathrm{inc}_X^{\mathrm{gr}} : M_X \hookrightarrow M_X^{\mathrm{gr}}$ es un kk^{gr}-isomorfismo, tenemos un triángulo:

$$\Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{(\mathrm{inc}_X^{\mathrm{gr}})^{-1}\circ\partial_X} M_X \to \Gamma_X^{\mathrm{gr}} \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}. \tag{IV.3.10}$$

Como $\Gamma_X^{\mathrm{gr}} = 0$ en kk^{gr} por el Corolario IV.3.7, se sigue que el morfismo $(\mathrm{inc}_X^{gr})^{-1}\circ\partial_X$ es un isomorfismo. En particular, por estabilidad matricial, para cualquier $x \in X_1$ tenemos un isomorfismo

$$\partial_X^{\mathrm{gr}} := \Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{(\mathrm{inc}_X^{\mathrm{gr}})^{-1}\circ\partial_X} M_X \xrightarrow{j(\iota_x)^{-1}} \ell. \tag{IV.3.11}$$

Describimos ahora ∂_X^{gr} de forma más explicita, al igual que lo hicimos para la extensión de cono clásica.

Proposición IV.3.12. Sea X un conjunto graduadamente infinito tal que $X_{1_G} \neq \emptyset$, y sea $x \in X_{1_G}$. Escribimos L_x para la clase de $\sum_{i\geq 1} \varepsilon_{(x,i),(x,i+1)}$ en Σ_X^{gr} y $\xi_{L_x} : \ell \to \Omega\Sigma$ para el morfismo correspondiente a $[L_x] \in KH_1^{\mathrm{gr}}(\Sigma_X^{\mathrm{gr}})$. El siguiente diagrama conmuta en kk^{gr}:

$$\begin{tikzcd} \ell \arrow[r, "\xi_{L_x}"] \arrow[dr, "\mathrm{inc}_{(x,1)}"'] & \Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \arrow[d, "\partial_X^{\mathrm{gr}}"] \\ & M_X^{\mathrm{gr}} \end{tikzcd}$$

Demostración. El morfismo de extensiones entre ($\mathfrak{K}$) y (IV.3.10) dada por inclusiones, como en el Corolario IV.3.9, se extiende a un morfismo de triángulos distinguidos expresando ∂_X^{gr} en términos de ∂. La conclusión se desprende luego del Lema IV.2.7. ◇

Observación IV.3.13. Si $X = *$ con $|*| = 1_G$, entonces $\widehat{X}$ es isomorfo a $\mathbb{N}$ con graduación trivial. La inclusión $\mathrm{inc}_X^{\mathrm{gr}}$ se corresponde con la inclusión $\iota_1 : \ell \to M_\infty$, y (IV.3.10) con el triángulo $\ell \to \Gamma \to \Sigma$. Por lo tanto, el morfismo de borde (IV.3.11) es el isomorfismo $\Omega\Sigma \xrightarrow{\partial} M_\infty \xrightarrow{\mathrm{inc}_1^{-1}} \ell$ y la Proposición IV.3.12 prueba el Lema IV.2.7 como caso particular.

IV.4. Unidades como morfismos

El propósito de esta sección es representar elementos de KH_1 y KH_1^{gr} que provienen de unidades como ciertas flechas en la categoría de K-teoría bivariante correspondiente. Primero damos una representación para unidades de álgebras sin graduación como morfismos en kk. Acto seguido, usamos estos resultados para deducir una representación en kk^{gr} de unidades homogéneas de grado 1_G en anillos fuertemente graduados.

IV.4.1. El caso sin graduación

Definición IV.4.1. Sea $\mathscr{S} := \ker(\ell[t,t^{-1}] \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \ell)$. Observemos que un morfismo $\ell[t,t^{-1}] \to A$ corresponde con la elección de un idempotente $p := \phi(1) \in A$ y una unidad en pAp, concretamente $u := \phi(t)$. Escribimos $\phi_{p,u}$ para un tal morfismo y $\nu_{p,u}$ para su restricción a $\mathscr{S}$. Si A es unital y u una unidad en A, ponemos $\phi_u := \phi_{1,u}$ y $\nu_u := \nu_{1,u}$.

Definición IV.4.2. Sea A un álgebra unital. Una unidad $u \in A^{\times}$ determina una clase $[u] \in K_1(A)$ que, vía en morfismo canónico de comparación, determina un elemento en $KH_1(A)$ que también llamaremos $[u]$. Definimos $\xi_u \colon \ell \to \Omega$ como el morfismo asociado a $[u] \in KH_1(A)$ a través del isomorfismo $KH_1(A) \simeq kk(\ell, \Omega A)$. Como $kk(\ell, \Omega(-)) \simeq KH_1(-)$, se sigue que para cualquier morfismo no necesariamente unital entre álgebras unitales $f : R \to S$ se tiene que

$$\Omega(j(f)) \circ \xi_u = \xi_{1-f(1)+f(u)}. \tag{IV.4.3}$$

En particular, si A es un álgebra unital entonces aplicando (IV.4.3) a la unidad $t \in \ell[t, t^{-1}]$ y a cualquier morfismo $\phi_{p,u} \colon \ell[t, t^{-1}] \to A$ tenemos

$$\Omega(j(\phi_{p,u}))\xi_t = \xi_{1+p-u}. \tag{IV.4.4}$$

En [CT07, Section 4.10 y demostración de Theorem 7.3.1] se muestra que $\nu_L \colon \mathscr{S} \to \Sigma$ es un isomorfismo. Tensorizar con ν_L produce entonces un isomorfismo natural $\mathscr{S} \otimes - \cong \Sigma \otimes -$. Esto permite la siguiente definición general en kk^{gr} (y, en particular, en kk):

Definición IV.4.5. Sean A y B dos álgebras graduadas y $\mathscr{U}_{A,B}$ el isomorfismo (IV.2.16). Definimos

$$\wp_{A,B} := kk^{\mathrm{gr}}(\mathscr{S}A, B) \xrightarrow{(\nu_L^{-1} \otimes A)^*} kk(\Sigma A, B) \xrightarrow{\mathscr{U}_{A,B}} kk(B, \Omega A). \tag{IV.4.6}$$

y

$$\wp := \wp_{\ell,\mathscr{S}}(\mathrm{id}_{\mathscr{S}}) = \Omega(\nu_L^{-1})\xi_L. \tag{IV.4.7}$$

El morfismo (IV.4.6) nos permite representar clases de unidades en KH_1 como clases de morfismos de álgebras en kk.

Teorema IV.4.8. Sea A un álgebra unital. La cadena de isomorfismos naturales

$$kk(\mathscr{S}, A) \xrightarrow{\wp_{\ell,A}} kk(\ell, \Omega A) \simeq KH_1(A)$$

envía $j(\nu_{p,u})$ a la clase de la unidad $1 - p + u \in A^{\times}$ en $KH_1(A)$.

Demostración. Escribamos $i \colon \mathscr{S} \to \ell[t, t^{-1}]$ para el morfismo de inclusión. Queremos ver que $\xi_{1-p+u} = \Omega(\phi_{p,u}) \circ \xi_t$ coincide con

$$\Omega(\nu_{p,u})\Omega(j(\nu_L))^{-1}\xi_L = \Omega(\phi_{p,u})\Omega(i)\Omega(j(\nu_L))^{-1}\xi_L.$$

Para esto, es suficiente ver que

$$\Omega(i)\Omega(j(\nu_L))^{-1}\xi_L = \xi_t.$$

Afirmamos que, para concluir, basta con ver que ξ_t se factoriza a través de $\Omega(i)$. En efecto, supongamos que existe un morfismo $\zeta \colon \ell \to \Omega\mathscr{S}$ tal que $\xi_t = \Omega(i)\zeta$. Entonces

$$\xi_L = \Omega(j(\phi_L))\xi_t = \Omega(j(\phi_L))\Omega(i)\zeta = \Omega(j(\nu_L))\zeta,$$

y al componer con $\Omega(i)\Omega(j(\nu_L))^{-1}$ al lado izquierdo en ambos lados de la ecuación obtenemos la igualdad buscada.

Por último, debemos demostrar la existencia de un tal morfismo $\zeta \colon \ell \to \Omega\mathscr{S}$, lo cual se reduce a probar que $[t] \in KH_1(\ell[t, t^{-1}])$ está en la imagen de $KH_1(i)$. Basta verlo para K_1 en vez de KH_1.

Consideremos los elementos $x = (t-1)$, $y = (t^{-1}-1)$ de $\mathscr{S}$. Un cálculo muestra que $xy+x+y = 0$, lo cual dice que en la unitalización U de $\mathscr{S}$ el elemento $x + 1_U$ es una unidad con inversa $y + 1_U$. El morfismo inducido por i en K_1 se restringe a un morfismo entre las unidades de U y las de la unitalización U' de $\ell[t, t^{-1}]$, que envía $x + 1_U$ a $x + 1_{U'}$. Para terminar notamos que la identificación de $K_1(\ell[t, t^{-1}])$ con $\ker(K_1(U') \to K_1(\ell))$ envía t a $x + 1_{U'}$. ◇

IV.4.2. Unidades graudadas en anillos fuertemente graduados

Vemos a $\mathscr{S}$ y $\ell[t,t^{-1}]$ como álgebras graduadas a través de la graduación trivial. Un morfismo graduado $\ell[t,t^{-1}] \to \mathscr{S}$ se corresponde con un idempotente homogéneo $p \in A_1$ y una unidad $u \in pA_1p$. Empleamos la misma notación que en la Definición IV.4.1 para estos morfismos y sus restricciones a $\mathscr{S}$.

Proposición IV.4.9. Sea C un álgebra, vista como álgebra graduada con la graduación trivial, y sea A un álgebra fuertemente graduada. Hay un isomorfismo

$$kk^{\mathrm{gr}}(C,A) \simeq kk(C,A_{1_G})$$

que envía la clase de un morfismo de álgebras graduadas $f : C \to A$ a la clase de su correstricción $f|: C \to A_{1_g}$.

Demostración. Esto se sigue directamente de la demostración de [Ell14, Theorem 6.1.4] (ver también [AC23, Remark 8.4]) y de la versión bivariante del teorema de Dade [AC23, Theorem 10.1]. $\diamond$

Combinando el Teorema IV.4.8 con la proposición anterior, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema IV.4.10. Sea A un álgebra fuertemente graduada y unital, $p \in A_{1_G}$ un idempotente y u una unidad en $pA_{1_G}p$. Sea $\phi : \mathscr{S} \to A$ el morfismo definido por $1 \mapsto p$, $t \mapsto u$. Bajo la cadena de isomorfismos

$$kk^{\mathrm{gr}}(\mathscr{S},A) \cong kk(\mathscr{S},A_{1_G}) \simeq KH_1(A_{1_G}),$$

la flecha $j(\phi)$ tiene por imagen a $[1-p+u]$. $\diamond$

Para el siguiente corolario recordamos que dadas dos flechas $\xi \in kk^{\mathrm{gr}}(A,B)$, $\zeta \in kk^{\mathrm{gr}}(C,D)$, su producto tensorial se define como $\xi \otimes \zeta := (B \otimes \zeta) \circ (\xi \otimes C) = (\xi \otimes D) \circ (A \otimes \zeta)$.

Corolario IV.4.11. Sean R y B dos álgebras unitales graduadas y $p \in R_{1_G}$, $q \in B_{1_G}$ dos idempotentes. Consideremos u una unidad de R_{1_G} e $\mathrm{inc}_q : \ell \to B$ el morfismo que envía 1 a q. Si R es fuertemente graduada y u es una unidad de R_{1_G}, entonces $\xi_{1\otimes q, u\otimes q} = \xi_u \otimes \mathrm{inc}_q$.

Demostración. El morfismo inc_q define una transformación natural $\mathrm{id} \Rightarrow -\otimes B$ y en particular tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\ell \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{inc}_q"] & \Omega\Sigma \arrow[r, "\nu_L"] \arrow[d, "\Omega\Sigma\otimes\mathrm{inc}_q"] & \Omega\mathscr{S} \arrow[r, "\Omega\phi_u"] \arrow[d, "\mathscr{S}\otimes\mathrm{inc}_q"] & \Omega R \arrow[d, "\Omega R\otimes\mathrm{inc}_q"] \\
B \arrow[r, "\sim"] & \Omega\Sigma \otimes B \arrow[r, "\nu_L\otimes B"] & \Omega\mathscr{S} \otimes B \arrow[r, "\phi_u\otimes B"] & \Omega R \otimes B
\end{tikzcd}$$

Por el Teorema IV.4.10, la composición de la fila superior es ξ_u. La composición por $\Omega R \otimes \mathrm{inc}_q$ se corresponde con el morfismo $KH_1^{\mathrm{gr}}(R) \to KH_1^{\mathrm{gr}}(R \otimes B)$ inducido por $R \otimes \mathrm{inc}_q$; por lo tanto, la composición de la fila superior, seguido de la flecha vertical del extremo derecho se corresponde con $\xi_{(R\otimes\mathrm{inc}_q)(1),(R\otimes\mathrm{inc}_q)(u)} = \xi_{1\otimes q,u\otimes q}$. Como muestra el diagama, esto tiene que coincidir con $\mathrm{inc}_q = \ell \otimes \mathrm{inc}_q$ compuesto con $\xi_u \otimes B$, que por definición es $\xi_u \otimes \mathrm{inc}_q$. $\diamond$

Concluimos la sección con algunos resultados sobre morfismos de borde de K_1^{gr} a K_0^{gr}.

Proposición IV.4.12. Sea $\pi : R \to S$ un morfismo de $*$-álgebras suryectivo, y sea $I := \ker(\pi)$. Supongamos que R es fuertemente graduada. Sea $u \in S_1$ una unidad. Si $\hat{u} \in R_1$ es una isometría parcial tal que $\pi(\hat{u}) = u$, entonces el morfismo de borde $\partial : K_1^{\mathrm{gr}}(R) \to K_0^{\mathrm{gr}}(I)$ envía $[u]$ a $[1-\hat{u}^*\hat{u}] - [1-\hat{u}\hat{u}^*]$.

Demostración. El el caso de la K-teoría (hermitiana) no graduada, un resultado más general se prueba en [Cor22, prueba de Lemma 11.1]; aquel argumento implica en particular que $\partial'\colon K_1(R_{1_G}) \to K_0(I_{1_G})$ envía $[u]$ a $[1-\hat{u}^*\hat{u}]-[1-\hat{u}\hat{u}^*]$. La conclusión de la proposición se obtiene del cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} K_1(R_{1_G}) \arrow[r, "\partial'"] \arrow[d] & K_0(I_{1_G}) \arrow[d] \\ K_1^{\mathrm{gr}}(R) \arrow[r, "\partial"] & K_0^{\mathrm{gr}}(I) \end{tikzcd}$$

◇

Lema IV.4.13. Sea X un conjunto graduado tal que $X_{1_G} \neq \emptyset$. Para cada $x \in X_1$, el morfismo de álgebras graduadas

$$\theta_X\colon \mathscr{S} \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}, \qquad t \mapsto \sum_{i\geq 1} \varepsilon_{(x,i+1),(x,i)} \tag{IV.4.14}$$

es una kk^{gr}-equivalencia.

Demostración. Por el Corolario IV.3.9, el morfismo $\Sigma \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}$ inducido por la inclusión $\mathbb{N} \subset \{x\} \times \mathbb{N}$ es una kk^{gr}-equivalencia. El resulto es implicado entonces por el hecho de que $\nu_L\colon \mathscr{S} \to \Sigma$ es una kk^{gr}-equivalencia. ◇

IV.5. Dualidad de Poincaré para álgebras de Leavitt

Esta sección esta dedicada a la demostración del análogo graduado de la dualidad de Poincaré [Cor22, Theorem 11.2]. Este resultado y sos consecuencias serán centrales para los resultados de clasificación que obtendremos más adelante.

Dado un grafo finito E y un peso $\omega\colon E^1 \to G$, escribiremos $L_\omega(E)$ para enfatizar que $L(E)$ se considerará como un álgebra graduada con la graduación asociada a ω (ver Sección I.4). Necesitamos también la siguiente definición.

Definición IV.5.1. El ***grafo dual*** E_t de un grafo E tiene por vértices y aristas a

$$E_t^0 = E^0, \qquad E_t^1 = \{e_t : e \in E^1\}$$

y sus funciones de llegada y salida son

$$r(e_t) = s(e), \qquad s(e_t) = r(e) \qquad (e \in E^1).$$

Si ω es un peso en E^1, define un peso en E_t via $\omega(e_t) = \omega(e)$.

Ahora sí, procedemos a enunciar y demostrar la dualidad de Poincaré.

Teorema IV.5.2. Si E es un grafo finito y esencial y $\omega\colon E^1 \to G$ un peso, entonces $-\otimes_\ell L_\omega(E)$ es adjunto a izquierda de $-\otimes \Omega L_\omega(E_t)$ como endofuntores de kk^{gr}. Esto es, para cada $R, S \in \mathrm{Alg}^{\mathrm{gr}}$ hay isomorfismos

$$kk^{\mathrm{gr}}(R \otimes_\ell L_\omega(E), S) \cong kk^{\mathrm{gr}}(R, S \otimes_\ell \Omega L_\omega(E_t)).$$

naturales tanto en R como en S.

Demostración. Adaptamos la demostración de [Cor22, Theorem 11.2] a nuestra situación.

Sean $\mathscr{P} = \mathscr{P}(E)$ y $\mathscr{P}_{\geq 1}$ el conjunto de caminos de E de longitud positiva, ambos equipados con la graduación $e_1 \cdots e_n \mapsto \omega(e_1)\cdots\omega(e_n)$. Omitiremos el peso de la notación de aquí en adelante. Dado $v \in E^0$, notamos $\mathscr{P}^v$ es el conjunto de caminos que comienzan en v, y $\mathscr{P}_v$ el conjunto de caminos que terminan en v. Ambos son conjuntos graduados vistos como subconjuntos de $\mathscr{P}$.

Sea $X = \mathscr{P}_{\geq 1} \sqcup \{\bullet\}$, visto como conjunto graduado con $|\bullet| = 1_G$. Veremos a $L(E_t) \otimes L(E)$ y a $L(E) \otimes L(E_t)$ como álgebras graduadas con la graduación usual del producto tensorial Tenemos morfismos $\rho_1 : L(E_t) \to \Sigma_X^\circ$, $\rho_2 : L(E) \to \Sigma_X^\circ$ dados por

$$\rho_1(e_t) = \left[\sum_{\alpha \in \mathscr{P}_{s(e)}} \varepsilon_{\alpha e, \alpha} \right], \qquad \rho_2(e) = \left[\sum_{\alpha \in \mathscr{P}^{r(e)}} \varepsilon_{e\alpha, \alpha} \right],$$

Componiendo con el morfismo canónico $\Sigma_X^\circ \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}$, obtenemos un morfismo graduado $\rho : L(E_t) \otimes L(E) \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}}$. Sea

$$\kappa : \Omega L(E_t) \otimes L(E) \to \ell, \qquad \kappa := \Omega L(E_t) \otimes L(E) \xrightarrow{\Omega\rho} \Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \xrightarrow{\partial_X^{\mathrm{gr}}} \ell.$$

Tensorizar por κ a la derecha define un morfismo natural

$$kk^{\mathrm{gr}}(R, S \otimes \Omega L(E_t)) \to kk^{\mathrm{gr}}(R \otimes L(E), S), \qquad \xi \mapsto (S \otimes \kappa) \circ (\xi \otimes L(E)). \tag{IV.5.3}$$

En la otra dirección, consideramos elementos $u = \sum_{e \in E^1} e \otimes e_t^*$ y $p = \sum_{v \in E^0} v \otimes v$ en $(L(E) \otimes L(E_t))_{1_G}$. Puesto que $uu^* = u^*u = p$, el elemento $u_1 = u + 1 - p$ define una unidad homogénea de grado 1_G en $L(E) \otimes L(E_t)$ y tenemos entonces un morfismo inducido $\nu_{u_1} : \mathscr{S} \to L(E) \otimes L(E_t)$. Por el Lema IV.4.8, el morfismo $\xi_{u_1} \in kk^{\mathrm{gr}}(\ell, \Omega L(E) \otimes L(E_t))$ asociado a $[u_1] \in KH_1^{\mathrm{gr}}(L(E) \otimes L(E_t))$ es igual a $\wp_{\mathscr{S}, L(E) \otimes L(E_t)}(\nu_{u_1}) = \Omega(\nu_{u_1})\wp$. Consideramos luego la composición

$$\nabla := \ell \xrightarrow{\wp} \Omega\mathscr{S} \xrightarrow{\Omega\nu_{u_1}} \Omega \otimes L(E) \otimes L(E_t) \xrightarrow{\cong} L(E) \otimes \Omega L(E_t), \tag{IV.5.4}$$

que define un morfismo natural

$$kk^{\mathrm{gr}}(R \otimes L(E), S) \to kk^{\mathrm{gr}}(R, S \otimes \Omega L(E_t)), \qquad \xi \mapsto (\xi \otimes \Omega L(E_t)) \circ (R \otimes \nabla). \tag{IV.5.5}$$

Al igual que en el caso no-graduado, para ver que (IV.5.3) y (IV.5.5) son biyecciones es suficiente probar que $(\kappa \otimes \Omega L(E_t)) \circ (\Omega L(E_t) \otimes \nabla)$ y $(L(E) \otimes \kappa) \circ (\nabla \otimes L(E))$ son isomorfismos en kk^{gr}. Ambos casos se adaptan de forma similar; indicamos cómo se hace en el caso de la primera composición. Definimos $\zeta : \mathscr{S} \otimes L(E_t) \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}} \otimes L(E_t)$ como la restricción de

$$\zeta' : \ell[t, t^{-1}] \otimes L(E_t) \to \Sigma_X^{\mathrm{gr}} \otimes L(E_t), \quad s \otimes 1 \mapsto (\rho_2 \otimes 1)(u), \quad 1 \otimes x \mapsto \rho_1(x) \otimes 1$$

y consideramos las siguientes permutaciones de tensores:

$$(243) : \Omega L(E_t) \otimes \Omega\mathscr{S} \xrightarrow{\cong} \Omega \otimes \Omega \otimes \mathscr{S} \otimes L(E_t);$$
$$(23) : \Omega \otimes \Omega \otimes \Sigma_X^{\mathrm{gr}} \otimes L(E_t) \xrightarrow{\cong} \Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \otimes \Omega L(E_t).$$

La composición $(\kappa \otimes \Omega L(E_t)) \circ (\Omega L(E_t) \otimes \nabla)$ coincide entonces con:

$$\Omega L(E_t) \xrightarrow{\Omega L(E_t) \otimes \wp} \Omega L(E_t) \otimes \Omega\mathscr{S} \xrightarrow{(23) \circ (\Omega \otimes \Omega \otimes \zeta) \circ (243)} \Omega\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \otimes \Omega L(E_t) \xrightarrow{\partial_X^{\mathrm{gr}} \otimes \Omega L(E_t)} \Omega L(E_t).$$

Por lo tanto, para ver que $(\kappa \otimes \Omega L(E_t)) \circ (\Omega L(E_t) \otimes \nabla)$ es un kk^{gr}-isomorfismo basta probar que ζ lo es. Para demostrar esto último, definimos como en el caso no-graduado el $*$-homomorfismo

$$\partial : L(E_t) \to \bigoplus_{v \in E^0} \Sigma_{\mathcal{P}v}^{\mathrm{gr}}, \qquad e_t \mapsto \sum_{\alpha \in \mathscr{P}_{s(e)}^{v}} \varepsilon_{\alpha e, \alpha}.$$

Notar que ∂ se extiende a un $*$-homomorfismo $C(E_t) \to \bigoplus_{v\in E^0} \Gamma^{\circ}_{\widehat{\mathscr{P}^v}}$, el cual a su vez se restringe al isomorfismo canónico $\mathscr{K}(E_t) \simeq \bigoplus_{v\in E^0} M_{\mathscr{P}^v}$. Se tienen luego morfismo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
\ell^{E^0} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \ell^{E^0} \arrow[r] \arrow[d, "\sim", "\mathrm{inc}"'] & L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Sigma\ell^{E^0} \arrow[d, "\sim"] \\
\mathscr{K}(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & C(E_t) \arrow[r] \arrow[d] & L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & \Sigma\mathscr{K}(E_t) \arrow[d, "\sim"] \\
\bigoplus_{v\in E^0} M_{\mathscr{P}^v} \arrow[r] & \bigoplus_{v\in E^0} \Gamma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}^v} \arrow[r] & \bigoplus_{v\in E^0} \Sigma^{\mathrm{gr}}_{P^v} \arrow[r, "\sim"] & \Sigma\bigoplus_{v\in E^0} M_{\mathscr{P}^v}
\end{tikzcd} \tag{IV.5.6}$$

Consecuentemente, el morfismo de borde $L(E_t) \to \Sigma\mathscr{K}(E)$ se corresponde con la clase de ∂ en kk^{gr} y tenemos un triángulo

$$\ell^{E^0} \xrightarrow{\mathrm{inc}} L(E_t) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{v\in E^0} \Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}^v}.$$

Tensorizando con $\mathscr{S}$ y Σ^{gr}_X respectivamente, obtenemos a su vez dos triángulos distinguidos en kk^{gr}. Para concluir que ζ es un isomorfismo, completaremos el siguiente diagrama a un morfismo de triángulos distinguidos, donde todas las flechas punteadas sean isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}\otimes\ell^{E^0} \arrow[r, "\mathscr{S}\otimes\mathrm{inc}"] \arrow[d, dashed, "\Upsilon_1"'] & \mathscr{S}\otimes L(E_t) \arrow[r, "\mathscr{S}\otimes\partial"] \arrow[d, "\zeta"] & \mathscr{S}\otimes\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}^v} \arrow[d, dashed, "\Upsilon_2"] \\
\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes\ell^{E^0} \arrow[r, "\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes\mathrm{inc}"] & \Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes L(E_t) \arrow[r, "\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes\partial"] & \Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}^v}.
\end{tikzcd} \tag{IV.5.7}$$

Primero construiremos el morfismo de la izquierda usando el morfismo θ_X definido en (IV.4.14). Sea $\Upsilon_1 = \theta_X \otimes \ell^{E^0}$, que es un isomorfismo por el Lema IV.4.13. Veremos ahora que $\zeta(S\otimes\mathrm{inc}) = (\Sigma^{\mathrm{gr}}_X \otimes \mathrm{inc})\circ\Upsilon_1$. Por aditividad, será suficiente ver que estas composiciones coinciden en cada factor $\mathscr{S}\otimes v$. En vista del Lema IV.4.8, esto se reduce a verificar que $1-\theta_X(1)\otimes v+\theta_X(t)\otimes v$ y $1-\zeta(1\otimes v)+\zeta(t\otimes v)$ representan la misma clase en $KH_1^{\mathrm{gr}}(\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes L(E_t))$. Como en el caso no graduado, eso se sigue de un cálculo explícito, usando la Proposición IV.4.12 y el hecho de que, en este caso particular, el morfismo de borde $\partial : KH_1^{\mathrm{gr}}(\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\otimes L(E_t)) \to KH_0^{\mathrm{gr}}(L(E_t))$ es un isomorfismo.

Ahora construimos la flecha punteada de la derecha. Sea $\tau := \ell\{t,t^* : t^*t = 1\}$, con $|t| = 1_G$. Recordemos que hay un isomorfismo $M_\infty \cong \ker(\tau \hookrightarrow \ell[t,t^{-1}])$ que envía $\varepsilon_{1,1}$ to $1-tt^*$. Al igual que en el caso no graduado, la restricción de ζ' a $\ell[t,t^{-1}]\otimes 1 \subset \ell[t,t^{-1}]\otimes L(E_t)$ se extiende a un morfismo graduado $\hat{\zeta} : \tau \to \Sigma^{\mathrm{gr}}_X \otimes L(E_t)$. Sea $\tau_0 := \ker(\tau \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \ell)$. Consideremos luego el siguiente morfismo de triángulos distinguidos:

$$\begin{tikzcd}
M_\infty L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_0\otimes L(E_t) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{S}\otimes L(E_t) \arrow[r, "d", "\sim"'] \arrow[d, "i\otimes L(E_t)"] & \Sigma M_\infty L(E_t) \arrow[d, equal] \\
M_\infty L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\zeta}|"] & \tau\otimes L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\zeta}"] & \ell[t,t^{-1}]\otimes L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\zeta'"] & \Sigma M_\infty L(E_t) \arrow[d, "\Sigma(\hat{\zeta}|)"] \\
\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\mathscr{K}(E_t) \arrow[r] & \Sigma^{\mathrm{gr}}_X C(E_t) \arrow[r] & \Sigma^{\mathrm{gr}}_X L(E_t) \arrow[r] & \Sigma\Sigma^{\mathrm{gr}}_X\mathscr{K}(E_t)
\end{tikzcd} \tag{IV.5.8}$$

Como τ_0 está equipada con la graduación trivial, y por [CT07, Lemma 7.3.2] es isomorfa a 0 en kk, se sigue que $\tau_0 \cong 0$ in kk^{gr}. En particular, el borde a derecha d del triángulo superior resulta un isomorfismo. Junto con (IV.5.6), este último diagrama nos dice en particular que tenemos un diagrama conmutativo de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{S}\otimes L(E_t) \arrow[r, "d", "\sim"'] \arrow[d, "\zeta"] & \Sigma M_\infty L(E_t) \arrow[d, "\Sigma(\hat{\zeta}|)"] & \\
\Sigma_X^{\mathrm{gr}} L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma_X^{\mathrm{gr}}(\partial)"] & \Sigma\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\mathscr{K}(E_t) \arrow[r, "\sim"] & \Sigma_X^{\mathrm{gr}}\Sigma\mathscr{K}(E_t) \arrow[d, "\sim"] \\
\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}v} \arrow[rr, "\sim"] & & \Sigma_X^{\mathrm{gr}}\Sigma\bigoplus_{v\in E^0} M_{\mathscr{P}v}
\end{tikzcd}$$

De esto se obtiene un isomorfismo $\mu\colon \Sigma\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\mathscr{K}(E_t)\to\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{Pv}$ tal que

$$\Sigma_X^{\mathrm{gr}}(\partial)\circ\zeta=\mu\circ\Sigma(\hat{\zeta}|)\circ d \tag{IV.5.9}$$

Similarmente, por el mismo argumento que en el caso no-graduado obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L(E_t) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t)"', "\sim"] & \bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}v} \arrow[r, "\bigoplus_v \mathrm{inc}_v", "\sim"'] & \bigoplus_{v\in E^0}\Sigma_X^{\mathrm{gr}} \arrow[d, "\sim"', "\sum_{v\in E^0}\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\otimes q_v"] \\
M_\infty L(E_t) \arrow[rr, "\hat{\zeta}|"] & & \Sigma_X^{\mathrm{gr}}\mathscr{K}(E_t)
\end{tikzcd}$$

garantizando la existencia de un isomorfismo $\mu'\colon \bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}v}\to\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\mathscr{K}(E_t)$ tal que

$$\mu'\circ\Sigma(\partial)\circ\Sigma(\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t))^{-1}=\Sigma(\hat{\zeta}|).$$

Más aún, como tenemos un isomorfismo $\nu_L\colon\mathscr{S}\xrightarrow{\cong}\Sigma$, se sigue que

$$(\nu_L\otimes\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}v})\circ(\mathscr{S}\otimes\partial)=\Sigma(\partial)\circ(\nu_L\otimes L(E_t))$$

Por lo tanto, definiendo $\mu''=\nu_L\otimes\bigoplus_{v\in E^0}\Sigma^{\mathrm{gr}}_{\mathscr{P}v}$, obtenemos

$$\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\circ\zeta=\mu\mu'\mu''\circ(\mathscr{S}\otimes\partial)\circ(\nu_L\otimes L(E_t))^{-1}\circ(\Sigma\,\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t))^{-1}\circ d.$$

Para terminar, veremos que $(\nu_L\otimes L(E_t))^{-1}\circ(\Sigma\,\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t))^{-1}\circ d=-\mathrm{id}$. En efecto, por el Lema IV.2.19 tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M_\infty L(E_t) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \tau_0 L(E_t) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{S}L(E_t) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\nu_L\otimes L(E_t)"'] & \Sigma M_\infty L(E_t) \arrow[d, equal] \\
M_\infty L(E_t) \arrow[r] & \Gamma L(E_t) \arrow[r] & \Sigma L(E_t) \arrow[r, "\delta"] & \Sigma M_\infty L(E_t),
\end{tikzcd}$$

donde $\delta=-(\Sigma\,\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t))$. En consecuencia $d=-(\Sigma\,\mathrm{inc}_1\otimes L(E_t))\circ(\nu_L\otimes L(E_t))$ y

$$\Sigma_X^{\mathrm{gr}}\circ\zeta=-\mu\mu'\mu''\circ(\mathscr{S}\otimes\partial).$$

Podemos entonces completar (IV.5.7) con $\Upsilon_2=-\mu\mu'\mu''$. Esto concluye la prueba. ◇

Corolario IV.5.10. Sean E y F dos grafos finitos, con E esencial. Si $f: L(E)\to L(F)$ es un morfismo de álgebras graduadas, entonces la cadena de isomorfismos

$$kk^{\mathrm{gr}}(L(E),L(F))\xrightarrow{\text{(IV.5.5)}}kk^{\mathrm{gr}}(\ell,L(F)\otimes\Omega L(E_t))\xrightarrow{\text{(IV.4.10)}}KH_1((L(F)\otimes L(E_t))_0).$$

envía $j(f)$ a la clase de la unidad

$$u_f:=1\otimes 1-\sum_{v\in E^0}f(v)\otimes v+\sum_{e\in E^1}f(e)\otimes e_t^*. \tag{IV.5.11}$$

Demostración. El morfismo en cuestión está dado por tensorizar $\xi \in kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))$ con $\Omega L(E)$, precomponer por

$$\ell \xrightarrow{u_1} \Omega(L(E) \otimes L(E_t)) \xrightarrow{\cong} L(E) \otimes \Omega L(E_t)$$

y luego postcomponer con la inversa del isomorfismo $\Omega(L(E) \otimes L(E_t)) \xrightarrow{\cong} L(E) \otimes \Omega L(E_t)$. Esto coincide con la composición $(\Omega f \otimes L(E_t)) \circ u_1$; esto es, el morfismo correspondiente a la imagen de $[u_1] \in KH_1((L(E) \otimes L(E_t))$ a través de $KH_1(f \otimes L(E_t))$. Resta notar que $u_f = (f \otimes L(E_t))(u_1)$. ◇

IV.5.1. Eliminación de fuentes

Para concluir la sección dejamos asentadas algunas observaciones sobre cómo extender la dualidad de Poincaré a grafos no necesariamente esenciales. Para esto recordamos primero las nociones de idempotentes plenos y eliminación de fuentes ([ALPS11, Definition 1.2]).

Recordemos que un idempotente p de un anillo unital R se dice ***pleno*** si $RpR = R$, es decir, si existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in R$ tales que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} y_i p x_i = 1.$$

Observemos que todo morfismo de anillos unital envía idempotentes plenos a idempotentes plenos. Si E es un grafo y $v \in \operatorname{sour}(E) \setminus \operatorname{sink}(E)$, el ***grafo de eliminación de fuente*** $E_{\setminus v}$ está dado por

$$E^0_{\setminus v} = E^0 \setminus \{v\}, \quad E^1_{\setminus v} = E^1 \setminus s^{-1}(v), \qquad r_{E \setminus v} = r, \quad s_{E \setminus v} = s|_{E^0 \setminus \{v\}}.$$

Por [Cor22, Lemma 8.3], el elemento $p = 1 - v$ es un idempotente pleno de $L(E)$. Además se verifica que el morfismo $\operatorname{inc}_v \colon L(E_{\setminus v}) \to L(E)$ inducido por la inclusión de grafos es inyectivo, por el teorema de unicidad para álgebras de Leavitt, y su imagen es exactamente $pL(E)p$. Como se observa en [Haz14, p. 230], si ℓ es un cuerpo entonces la eliminación de fuentes preserva la clase de equivalencia Morita graduada de de un álgebra de Leavitt. En esta dirección veremos que inc_v es un kk^{gr}-isomorfismo, lo cual es una consecuencia del siguiente resultado.

Proposición IV.5.12. Si R es un álgebra gradauda unital y $p \in R$ un idempotente pleno y homogéneo, entonces la inclusión $pRp \subset R$ es un kk^{gr}-isomorfismo.

Demostración. Adaptamos [Cor22, Lemma 8.12]. Sean $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in R$ tales que $1 = y_1 p x_1 + \cdots y_n p x_n$. Tomando compontentes de grado cero a ambos lados de esta igualdad y agrandando n de ser necesario, podemos asumir que los elementos x_i, y_j son homogéneos y que $|x_i| = |y_i|^{-1}$. Cambiando x_i por px_i e y_i por $y_i p$ de ser necesario, también podemos asumir que $x_i \in pR$ y que $y_i \in Rp$. Sea $d_i = |y_i|$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Por el resto de la demostración, vamos a considerar la graduación en M_n dada por $i \mapsto d_i$. Sean

$$c = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j,1} x_j \in M_n pR, \qquad r = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{1,j} y_j \in M_n Rp.$$

Observemos que estos elementos son homogéneos y además $|c||r| = 1$ y $c\varepsilon_{1,1} M_n R \varepsilon_{1,1} r \subset M_n pRp$. Más todavía, como $rc = \varepsilon_{1,1}$, se sigue que $wrcw' = ww'$ para todo $w, w' \in \varepsilon_{1,1} M_n R \varepsilon_{1,1}$. Se tiene entonces un morfismo graduado bien definido

$$\operatorname{ad}(c, r) \colon \varepsilon_{1,1} M_n R \varepsilon_{1,1} \to M_n pRp, \qquad w \mapsto cwr$$

que, por la Proposición I.1.20, al componer con la inclusión $M_n(\operatorname{inc}_p) \colon M_n pRp \hookrightarrow M_n R$ coincide en kk^{gr} con la inclusión $\varepsilon_{1,1} M_n R \varepsilon_{1,1} \hookrightarrow M_n R$. En consecuencia, si definimos

$$\phi : R \cong \varepsilon_{1,1} M_n R \varepsilon_{1,1} \xrightarrow{\operatorname{ad}(c,r)} M_n pRp,$$

entonces se cumple que $j(M_n(\mathrm{inc}_p)\phi) = j(\iota_1^R)$ y en particular $M_n(\mathrm{inc}_p)\phi$ es un kk^{gr}-isomorfismo. Un argumento similar aplicado a $cp, rp \in M_n pRp$ nos dice que la composición

$$\phi\ \mathrm{inc}_p = pRp \cong \varepsilon_{1,1} M_n pRp \varepsilon_{1,1} \xrightarrow{\mathrm{ad}(cp,pr)} M_n pRp$$

coincide en kk^{gr} con ι_1^{pRp}; por lo tanto $\phi\ \mathrm{inc}_p$ es también un kk^{gr}-isomorfismo. Esto dice que ϕ es un kk^{gr}-isomorfismo, lo cual finalmente implica que $j(\mathrm{inc}_p) = j(\phi)^{-1} j(\iota_1^{pRp})$ también lo es. ◇

Corolario IV.5.13. Si E es un grafo con al menos dos vértices y $v \in \mathrm{sour}(E) \setminus \mathrm{sink}(E)$, entonces la inclusión $L(E_{\setminus v}) \to L(E)$ es un kk^{gr}-isomorfismo. ◇

Observación IV.5.14. Dado un grafo finito y regular E, a partir de finitas eliminaciones de fuentes conseguimos un grafo esencial F de forma que exista un kk^{gr}-isomorfismo $L(F) \to L(E)$. El Teorema IV.5.2 implica que tensorizar por $L(E)$ es adjunto a izquierda a tensorizar por $\Omega L(F_t)$.

Capítulo V

Clasificación de álgebras de Leavitt a menos de homotopía graduada

En el resto de la tesis supondremos que $G = \mathbb{Z}$. En este capítulos utilizaremos las técnicas previamente desarrolladas para dar una clasificación a menos de homotopía graduada de álgebras de Leavitt. Veremos que para los llamados grafos primitivos (ver Definición V.2.2) el módulo de Bowen-Franks determina completamente el álgebra de Leavitt asociada a menos de homotopía polinomial graduada.

V.1. Álgebras de Leavitt en kk^{gr}

Comenzamos recordando en la siguiente sección algunos resultados de clasificación de álgebras de Leavitt como objetos en kk^{gr} obtenidos en [Arn21].

A través del isomorfismo del Teorema IV.1.4, en particular tenemos un morfismo canónico $\mathbb{Z}[\sigma] \to kk^{\mathrm{gr}}(\ell, \ell)$. En particular, como kk^{gr} es una categoría aditiva, dado un grafo finito E la matriz $I - \sigma A_E^t \in \mathbb{Z}[\sigma]^{\mathrm{reg}(E) \times E^0}$ puede interpretarse como un morfismo $\ell^{\mathrm{reg}(E)} \to \ell^{E^0}$ en kk^{gr}. Unos de los principales resultados de [Arn21] muestra que $L(E)$ es el cono de este morfismo en kk^{gr}:

Teorema V.1.1 ([Arn21, Corolario 3.4.27, Corolario 3.8.4])**.** Si E es un grafo finito, existe un triángulo distinguido en kk^{gr} de la forma

$$\ell^{\mathrm{reg}(E)} \xrightarrow{I-\sigma\cdot A_E^t} \ell^{E^0} \xrightarrow{\mathrm{inc}} L(E). \tag{V.1.2}$$

◇

La demostración consiste en considerar la extensión de Cohn ($\mathscr{C}_E$) asociada a E, y probar que las inclusiones canónicas $\ell^{\mathrm{reg}(E)} \to \mathscr{K}(E)$ y $\ell^{E^0} \to C(E)$ son isomorfismos en kk^{gr}. Sean ∂_E y δ_E los morfismos de borde a izquierda y derecha de ($\mathscr{C}_E$). Dada un álgebra graduada R, aplicando $kk^{\mathrm{gr}}(-, R)$ a (V.1.2) obtenemos una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
kk^{\mathrm{gr}}(\Sigma\ell^{E^0}, R) \arrow[r, "(\Sigma(I-\sigma A_E^t))^*"] & kk^{\mathrm{gr}}(\Sigma\ell^{\mathrm{reg}(E)}, R) \arrow[dl, "\delta_E^*"] & \\
kk^{\mathrm{gr}}(L(E), R) \arrow[d, "\mathrm{inc}^*"] & & \\
kk^{\mathrm{gr}}(\ell^{E^0}, R) \arrow[r, "(I-\sigma A_E^t)^*"] & kk^{\mathrm{gr}}(\ell^{\mathrm{reg}(E)}, R). &
\end{tikzcd}$$

Tomando núcleos y conúcleos apropiadamente en esta sucesión, conseguimos una sucesión exacta corta que describe a $kk^{\mathrm{gr}}(L(E), R)$; en el caso no-graduado se lo conoce como el Teorema de Coeficientes universales (abreviado UCT, por sus siglas en inglés). A continuación damos una versión graduada del teorema. Recordemos que el ***módulo dual de Bowen-Franks*** de un grafo E es $\mathfrak{BF}^{\vee}_{\mathrm{gr}}(E) = \operatorname{coker}(I^t - \sigma A_E)$. Si E es esencial, entonces A_E es una matriz cuadrada y $A^t_E = A_{E_t}$; en tal caso $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E_t) = \operatorname{coker}(I - \sigma A^t_{E_t}) = \operatorname{coker}(I^t - \sigma A_E) = \mathfrak{BF}^{\vee}_{\mathrm{gr}}(E)$.

Teorema V.1.3 (UCT)**.** Sea E un grafo finito y R un álgebra graduada. Sean $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]}$ y $\hom = \hom_{\mathbb{Z}[\sigma]}$. Existe un diagrama cuya fila superior es exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{BF}^{\vee}_{\mathrm{gr}}(E)\otimes KH^{\mathrm{gr}}_1(R) \arrow[r, "d"] & kk^{\mathrm{gr}}(L(E),R) \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \hom(\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E), KH^{\mathrm{gr}}_0(R)) \arrow[r] & 0 \\ & & {[L(E),R]} \arrow[u, "\bar{j}"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{can}^*\circ KH^{\mathrm{gr}}_0"'] & & \end{tikzcd}$$

tal que:

(I) El morfismo $\bar{j}$ es la factorización de j a través de la categoría de álgebras graduadas y morfismos graduados a menos de homotopía polinomial;

(II) El morfismo ev se corresponde con la asignación en morfismos del funtor $kk^{\mathrm{gr}}(\ell,-) = KH^{\mathrm{gr}}_0$, seguido de la precomposición por el mapa canónico $\mathrm{can}\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E) \to KH^{\mathrm{gr}}_0(L(E))$.

(III) El morfismo d se obtiene del borde a derecha $\delta_E\colon L(E) \to \Sigma^{\mathrm{reg}(E)}$, considerando la composición

$$\mathbb{Z}[\sigma]^{\mathrm{reg}(E)} \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} KH^{\mathrm{gr}}_1(R) \xrightarrow{\cong} kk^{\mathrm{gr}}(\Sigma^{\mathrm{reg}(E)}, L(F)) \xrightarrow{\delta^*} kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))$$

y observando que define un morfismo en el módulo cociente $\mathfrak{BF}^{\vee}_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} KH^{\mathrm{gr}}_1(R)$.

(IV) Si E es un grafo esencial, entonces para todo $v \in E^0$ y toda unidad $z \in R$ representada por un morfismo $\xi_z\colon \ell \to \Omega R$, el isomorfismo $kk^{\mathrm{gr}}(L(E),R) \cong kk^{\mathrm{gr}}(\ell, \Omega(R \otimes L(E_t)) \cong KH^{\mathrm{gr}}_1(R \otimes L(E_t))$ envía $d(v \otimes z)$ a $-[1\otimes 1 - 1 \otimes v + z \otimes v]$.

Demostración. Los ítems (I)-(III) se prueban tomando núcleos y conúcleos en la sucesión exacta que viene de aplicar $kk^{\mathrm{gr}}(-,R)$ a (V.1.2). La demostración es similar al caso no-graduado, cuya demostración puede consultarse en [CM21, Corollary 7.20] o [Cor22, Theorem 12.1].

Probamos (IV). Supongamos que E es esencial, y recordemos que ξ_z se corresponde con una flecha $\mathscr{V}_{\ell,R}(\xi_z)\colon \Sigma \to R$ vía la asignación (IV.2.17). Por lo tanto, si $p_v\colon \ell^{E^0} \to \ell$ es la proyección en la coordenada asociada a v, entonces $d(v\otimes \xi_z)$ coincide con la composición

$$L(E) \xrightarrow{\delta} \Sigma^{E^0} \xrightarrow{\Sigma p_v} \Sigma \xrightarrow{\mathscr{V}_{\ell,R}(\xi_z)} R.$$

Recordemos asimismo que, por el Teorema IV.5.2, esta flecha se corresponde con un elemento de $kk^{\mathrm{gr}}(\ell, \Omega(R\otimes L(E_t))$ del siguiente modo: primero, se tensoriza por $L(E_t)$; luego se aplica el funtor de lazos Ω y, por último, se precompone por $\xi_{u_1}\colon \ell \to \Omega(L(E)\otimes L(E_t))$ dada por la unidad distinguida $u_1 \in L(E)\otimes L(E_t)$ descrita en loc. cit. Llamamos a la flecha resultante $\eta := \Omega(d(v\otimes\xi_z)\otimes L(E_t))\circ \xi_{u_1}$.

Observemos que, en vista de la Observación IV.2.18 y la definición de (IV.2.17), tenemos $\delta_E \otimes L(E_t) = \delta_{\mathscr{C}(E)\otimes L(E_t)}$ y $\mathscr{V}_{\ell,R}(\xi_z)\otimes L(E_t) = \mathscr{V}_{\ell,R\otimes L(E_t)}(\xi_z \otimes L(E_t))$. Omitimos los subíndices debajo de $\mathscr{V}$ para aliviar la notación, y escribimos $\delta = \delta_{\mathscr{C}(E)\otimes L(E_t)}$, $\partial = \partial_{\mathscr{C}(E)\otimes L(E_t)}$, $\widetilde{p_v} = p_v \otimes L(E_t)$, y $\widetilde{\xi_z} = \xi_z \otimes L(E_t)$. Consideramos ahora el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Omega L(E)\otimes L(E_t) \arrow[r, "-\Omega\delta"] \arrow[d, equal] & \Omega\Sigma\otimes \ell^{E^0}\otimes L(E_t) \arrow[r, "\Omega\Sigma\widetilde{p_v}"] & \Omega\Sigma\otimes L(E_t) \arrow[r, "\Omega\mathscr{V}(\widetilde{\xi_z})"] & \Omega R\otimes L(E_t) \arrow[d, equal] \\ \Omega(L(E)\otimes L(E_t)) \arrow[r, "\partial"] & \ell^{E^0}\otimes L(E_t) \arrow[r, "\widetilde{p_v}"] \arrow[u, "\xi_L\otimes \ell^{E^0}\otimes L(E_t)"] & L(E_t) \arrow[r, "\widetilde{\xi_z}"] \arrow[u, "\xi_L\otimes L(E_t)"] & \Omega R\otimes L(E_t) \end{tikzcd}$$

La composición de la fila superior con ξ_{u_1} coincide con $-\eta$. Al igual que el caso no graduado ([Cor22, demostración de Lemma 12.3]) se verifica que el borde de u_1 es la clase de $\sum_{v\in E^0}\chi_v\otimes v$, y por lo tanto

$$-\eta = \xi_z \otimes L(E_t)\circ p_v \circ \left(\sum_{v\in E^0}\chi_v\otimes v\right) = \xi_z\otimes \mathrm{inc}_v\,.$$

Finalmente, el Lema IV.4.11 nos dice que $\xi_u\otimes \mathrm{inc}_v = \xi_{1\otimes v, z\otimes v}$ y esto se corresponde con la clase en $KH_1^{\mathrm{gr}}(R\otimes L(E_t))$ de la unidad $1\otimes 1 - 1\otimes v + z\otimes v$ como buscábamos ver. $\diamond$

En [Arn21] se prueba que ev refleja isomorfismos.

Teorema V.1.4 ([Arn21, Lema 3.9.8]). Sean E y F dos grafos finitos. Si $\xi\colon \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)\to\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos, entonces existe un isomorfismo $\overline{\xi}\colon L(E)\to L(F)$ en kk^{gr} tal que $\mathrm{ev}(\overline{\xi}) = \mathrm{can}\circ\xi$. $\diamond$

Con ello se muestra que el módulo de Bowen-Franks —sin tener en cuenta su estructura adicional de módulo preordenado— clasifica a las álgebras de Leavitt como objetos en kk^{gr}.

Teorema V.1.5 ([Arn21, Teorema 3.9.9]). Supongamos que $KH_{-1}(\ell)=0$ y que el morfismo canónico $\mathbb{Z}\to KH_0(\ell)$ es un isomorfismo. Dados E y F dos grafos finitos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Las álgebras $L(E)$ y $L(F)$ son kk^{gr}-isomorfas.

(II) Los $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)$ y $\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F)$ son isomorfos.

$\diamond$

Nuestro objetivo en lo que resta del presente capítulo será refinar esta clasificación a una a nivel de álgebras a menos de homotopía.

V.2. La relación entre morfismos en kk^{gr} y morfismos de álgebras graduadas

Utilizaremos a continuación el UCT para establecer una relación entre morfismos entre álgebras de Leavitt en kk^{gr} y el la categoría de álgebras graduadas. Dados dos grafos E y F, definimos

$kk^{\mathrm{gr}}(L(E),L(F))_1 := \{\xi\in kk^{\mathrm{gr}}(L(E),L(F)) : \mathrm{ev}(\xi)$ es un morfismo de módulos preordenados punteados$\}$

y escribimos $[L(E),L(F)]_1$ para el conjunto de morfismos unitales de álgebras graduadas $L(E)\to L(F)$ a menos de homotopía polinomial. Nuestro siguiente objetivo es estudiar la función

$$\overline{j}\colon [L(E),L(F)]_1 \to kk^{\mathrm{gr}}(L(E),L(F))_1. \tag{V.2.1}$$

Nos concentraremos en el caso en el que E y F son grafos primitivos, noción que describiremos en la sección siguiente. A continuación, para entender $kk^{\mathrm{gr}}(L(E),L(F))_1$, necesitaremos entender el primer grupo de K-teoría graduada de un álgebra de Leavitt. Con este fin, estableceremos propiedades sobre la K-teoría de álgebras ultramatriciales, y de anillos de polinomios de Laurent torcidos por automorfismos de esquina.

V.2.1. Grafos primitivos

Definición V.2.2. Un grafo regular E es ***primitivo*** si su matriz de adyacencia es primitiva ([LM95, Definition 4.5.7 y Theorem 4.5.8]), es decir, si existe $N\geq 1$ tal que $(A_E^N)_{v,w}>0$ para todo $v,w\in E^0$.

Observación V.2.3. Si E es un grafo primitivo, por definición existe $N\geq 1$ tal que todo par de vértices se conecta por un camino de longitud N. En particular los grafos primitivos son esenciales.

Nuestro interés por los grafos primitivos yace del siguiente resultado de simplicidad, el cual nos permitirá adaptar del contexto no-graduado técnicas de clasificación para álgebras de Leavitt simples puramente infinitas.

Proposición V.2.4. Supongamos que ℓ es un cuerpo. Si E es un grafo primitivo, entonces para cada $e \in E^1$ el idempotente $ee^* \in L(E)_0$ es pleno como elemento de $L(E)_0$.

Demostración. Recordemos que si ponemos

$$L(E)_{0,n} = \operatorname{span}_\ell\{\alpha\beta^* : r(\alpha) = r(\beta), |\alpha| = |\beta| = n\}$$

para cada $n \geq 0$, entonces $L(E)_0 = \bigcup_{n\geq 0} L(E)_{0,n}$. Además, si escribimos $\mathscr{P}_{v,n}$ para el conjunto de caminos de longitud n que terminan en un vértice v, tenemos isomorfismos

$$L(E)_{0,n} \cong \bigoplus_{v\in E^0} M_{\mathscr{P}_{v,n}}, \qquad \alpha\beta^* \mapsto \varepsilon_{\alpha,\beta} \in M_{\mathscr{P}_{r(\alpha),n}} \tag{V.2.5}$$

for each $n \geq 0$.

Como $L(E)$ es una unión creciente de sus subálgebras unitales $L(E)_{0,n}$, para ver que $ee^* \in L(E)_0$ es pleno es suficiente ver que lo es en algún álgebra $L(E)_{0,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \geq 1$ tal que existe un camino de longitud N entre cada par de vértices. Observemos que

$$ee^* = \sum_{s(\alpha)=r(e),|\alpha|=N} e\alpha(e\alpha)^* = \sum_{v\in E^0} \sum_{s(\alpha)=r(e),|\alpha|=N,r(\alpha)=v} e\alpha(e\alpha)^*.$$

Por tanto, bajo el isomorfismo (V.2.5) aplicado a $n = N+1$, el idempotente ee^* tiene por imagen a la suma de matrices diagonales

$$\sum_{v\in E^0} \sum_{s(\alpha)=r(e),|\alpha|=N,r(\alpha)=v} \varepsilon_{e\alpha,e\alpha}.$$

Como los anillos de matrices sobre un cuerpo son simples, para concluir la prueba es suficiente probar que cada coordenada del anterior elemento correspondiente a cada álgebra $M_{\mathscr{P}_{v,N+1}}$ es no nula. Esto consiste en ver que $\{e\alpha : r(\alpha) = v, |\alpha| = N\}$ es no vacío, lo cual se sigue de que tomamos N de forma que $(A_E^N)_{r(e),v} > 0$ para todo $v \in E^0$. ◇

Convención V.2.6. De ahora en más asumiremos que ℓ es un cuerpo y que todos los grafos considerados son primitivos.

V.2.2. K_1 de álgebras ultramatriciales

Ya hemos observado que si E es un grafo regular, entonces podemos calcular la K-teoría graduada (homotópica) de $L(E)$ como la K-teoría (homotópica) de $L(E)_0$. Cuando ℓ es un cuerpo, podemos sustituir KH por K.

La ventaja de pasar al álgebra $L(E)_0$ es que esta última es ***ultramatricial***, es decir, es una unión contable y creciente de álgebras matriciales. Por este motivo, probamos algunas generalidades sobre el primer grupo de K-teoría de un álgebra ultramatricial. En lo que sigue notamos G_{ab} para la abelianización de un grupo; en particular, si R es un anillo unital entonces $K_1(R) = GL(R)_{\mathrm{ab}}$. El cuerpo de dos elementos se denotará por $\mathbb{F}_2$.

La siguiente observación se desprende de la definición de álgebra ultramatricial.

Lema V.2.7. Sean $F, G\colon \mathrm{Alg} \to \mathrm{Grp}$ dos funtores que preservan productos finitos y colímites filtrantes y sea $\eta\colon F \Rightarrow G$ una transformación natural. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Para cada álgebra unital y ultramatricial R, el morfismo η_R es un isomorfismo.

(II) para cada $n \in \mathbb{N}$, el morfismo $\eta_{M_n(\ell)}$ es un isomorfismo.

$\diamond$

Proposición V.2.8. Sea $\ell \neq \mathbb{F}_2$ un cuerpo. Si R es una ℓ-álgebra unital y ultramatricial, entonces el morfismo canónico $R^\times_{ab} \to K_1(R)$ es un isomorfismo.

Demostración. Por el Lema V.2.7, basta probar el enunciado para $R = M_n(\ell)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que $M_n(\ell)^\times = GL_n(\ell)$ y $[GL_n(\ell), GL_n(\ell)] = SL_n(\ell)$, dado que $\ell \neq \mathbb{F}_2$.

La inclusión (no unital) ℓ en la esquina superior izquierda de $M_n(\ell)$ induce un isomorfismo en K_1, que envía $\lambda \in \ell^\times = K_1(\ell)$ a la clase de $[I_n - \varepsilon_{1,1} + \lambda\varepsilon_{1,1}]$. Para terminar, notamos que este isomorfismo se factoriza a través de la inversa del morfismo inducido por el determinante $\det\colon GL_n(\ell)/SL_n(\ell) \to \ell^\times$ seguido del morfismo de comparación $GL_n(\ell)/SL_n(\ell) = M_n(\ell)^\times_{ab} \to K_1(M_n(\ell))$. $\diamond$

Sea $F\colon \mathsf{Alg} \to \mathsf{Grp}$ un funtor. Notemos que, como $\mathrm{ev}_1\colon A[t] \to A$ es una retracción para toda álgebra A, el morfismo $F(\mathrm{ev}_1)$ siempre es una retracción; en particular es suryectivo y por lo tanto envía al subgrupo normal $\ker(F(\mathrm{ev}_0))$ de $F(A[t])$ a un subgrupo normal de $F(A)$. Llamamos

$$F^0(A) = F(\mathrm{ev}_1)(\ker(F(A[t]) \xrightarrow{F(\mathrm{ev}_0)} F(A)))$$

a este subgrupo normal, y

$$\pi_0 F(A) := F(A)/F^0(A)$$

al grupo cociente. Por las propiedades universales de los núcleos e imágenes, tenemos definido un funtor $\pi_0\colon \mathsf{Alg} \to \mathsf{Grp}$.

En [CM20, Proposition 2.8] Cortiñas y Montero muestran que el grupo K_1 de Karoubi-Villamayor de un anillo simple puramente infinito R se puede calcular como $\pi_0 R^\times = R^\times/\{u(1) : u \in (R[t])^\times, u(0) = 1\}$. En nuestro contexto obtenemos una conclusión similar para álgebras ultramatriciales, para lo cual primero necesitamos el siguiente lema.

Lema V.2.9. Si ℓ es un cuerpo, entonces $(M_n(\ell)^\times)^0 = SL_n(\ell)$.

Demostración. Probamos ambas inclusiones. Como $SL_n(\ell)$ está generado por matrices elementales, basta ver que $I_n + \lambda\varepsilon_{i,j} \in (M_n(\ell)^\times)^0$ para cada $\lambda \in \ell^\times$, y para esto es suficiente considerar las matrices elementales

$$I_n + \lambda t\varepsilon_{i,j} \in GL_n(\ell[t]) = M_n(\ell[t])^\times = (M_n(\ell)[t])^\times.$$

Para la recíproca, sea $u \in M_n(\ell)[t] = M_n(\ell[t])$ una matriz invertible tal que $u(0) = I_n$. Debemos ver que $u(1) \in SL_n(\ell)$. Como $\ell[t]$ es un dominio íntegro, una matriz $M_n(\ell[t])$ es una unidad si y sólo si $\det(u) \in (\ell[t])^\times = \ell^\times$. En particular $\det(u)$ es constante y por lo tanto

$$\det(u(1)) = \det(u)(1) = \det(u)(0) = \det(u(0)) = \det(I_n) = 1.$$

$\diamond$

Proposición V.2.10. Supongamos que ℓ es un cuerpo. Si $\ell \neq \mathbb{F}_2$, entonces el morfismo de comparación $R^\times_{ab} \to \pi_0 R^\times \to K_1(R)$ es un isomorfismo para toda álgebra unital y ultramatricial R. Si $\ell = \mathbb{F}_2$, entonces $K_1(R) = \pi_0 R^\times = 1$.

Demostración. Como $(M_n(\ell)^\times)^0 = SL_n(\ell)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\pi_0(M_n(\ell)^\times) = GL_n(\ell)/SL_n(\ell) = \begin{cases} GL_n(\ell)_{ab} & \ell \neq \mathbb{F}_2 \\ 1 & \ell = \mathbb{F}_2 \end{cases}$$

Esto junto con el Lema V.2.7 prueban la primera parte del lema, así como que $\pi_0 R^\times = 1$ para cada álgebra unital y ultramatricial R sobre $\mathbb{F}_2$. Resta ver que $K_1(R)$ es trivial cuando $\ell = \mathbb{F}_2$, lo cual se sigue de la estabilidad matricial de K_1:

$$K_1(M_n(\mathbb{F}_2)) \cong K_1(\mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2^\times = 1.$$

$\diamond$

Definición V.2.11. Dado un grafo finito E y morfismo de álgebras unitales graduadas $\phi\colon L(E)\to R$, definimos

$$R_\phi := \bigoplus_{e\in E^1} \phi(ee^*)R_0\phi(ee^*).$$

Lema V.2.12. Si ℓ es un cuerpo y R un álgera unital ultramatricial, entonces para todo idempotente $e\in R$ el álgebra unital eRe es ultramatricial.

Demostración. Sea $R=\bigcup_{n\geq 1} R_n$ una unión creciente de subálgebras matriciales y unitales. Como la unión es creciente, podemos sin pérdida de generalidad asumir que $1_R, e\in R_1$; en consecuencia $eRe=\bigcup_{n\geq 1} eR_n e$.

Basta ver que cada álgebra eR_ne es matricial, esto es, que una esquina de un álegbra matricial es matricial. Sea $A=M_{k_1}(\ell)\times\cdots\times M_{k_N}(\ell)$ un álgebra matricial y $(e_1,\dots,e_N)\in \operatorname{Idem}(A)$. Como $eAe=\prod_{i=1}^N e_iA_ie_i$, resta probar que toda esquina de un álgebra de matrices es un álgebra de matrices. En otras palabras, podemos asumir que $N=1$. Notamos $k=k_1$ y $e=e_1$. Como ℓ es un cuerpo y una matriz idempotente representa a un proyector lineal en ℓ^k, existe una matriz invertible u tal que $u^{-1}eu=\sum_{s=1}^j \varepsilon_{s,s} =: p_j$ para algún $j\in\{0,\dots,k\}$. Resta observar que la conjugación por u envía e a p_j y $eM_k(\ell)e$ a $p_jM_k(\ell)p_j$, y esta última es isomorfa a $M_j(\ell)$. ◇

Proposición V.2.13. Sea E un grafo primitivo y R un álgebra ultramatricial fuertemente graduada tal que R_0. Cada morfismo unital de álgebras graduadas $\phi\colon L(E)\to R$ induce un isomorfismo

$$(R_\phi)^\times_{\mathrm{ab}} = \prod_{e\in E^1}(\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*))^\times_{\mathrm{ab}} \to K_1(R_0)^{E^1}\cong K_1^{\mathrm{gr}}(R)^{E^1},\ (z_e)_{e\in E^1}\mapsto ([1-\phi(ee^*)+z_e])_{e\in E^1}. \tag{V.2.14}$$

Demostración. Se sigue de Lema V.2.12 y la Proposición V.2.8 que $K_1(\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*))$ puede calcularse como $(\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*))^\times_{\mathrm{ab}}$ para todo $e\in E^1$. Por la Proposición V.2.4, sabemos que cada elemento ee^* es un idempotente pleno de $L(E)_0$ y, como ϕ es un morfismo graduado y unital, se sigue que $\phi(ee^*)$ es un idempotente pleno de R_0. Consecuentemente, cada inclusión de esquina $\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*)\to R_0$ induce un isomorfismo al nivel de K_1. Esto concluye la prueba. ◇

V.2.3. La acción de desplazamiento para álgebras de polinomios de Laurent torcidas

Un ***álgebra de polinomios de Laurent torcida*** es un anillo $\mathbb{Z}$-graduado R junto con elementos $t_+\in R_1$, $t_-\in R_{-1}$ tales que $t_-t_+=1$ ([AGBGP04, Lemma 2.4]). Los ejemplo que serán de nuestro interés provienen del álgebra de Leavitt asociada a un grafo esencial, como se observa en [AP14, p. 210]. Si tomamos un arista e_v que llega a v para cada $v\in E^0$, entonces los elementos

$$t_+=\sum_{v\in E^0} e_v, \qquad t_l=\sum_{v\in E^0} e_v^*.$$

definen una estructura de álgebra de polinomios de Laurent torcida en $L(E)$.

Hazrat prueba en [Haz16, Proposition 1.6.6] que, dada un álgebra de polinomios de Laurent torcida (R,t_+,t_-), el idempotente $p:=t_+t_-$ es pleno si y sólo si R es fuertemente graduado. En tal caso, sabemos que $K_*^{\mathrm{gr}}(R)$ es naturalmente isomorfa a $K_*(R_0)$. En esta sección buscamos entender cómo se traduce la acción de desplazamiento vista en $K_*(R_0)$.

En el caso de un álgebra de Leavitt de un grafo esencial E, Ara y Pardo prueban en [AP14, Lemma 3.6] que la acción en $K_0(L(E)_0)$ viene inducida por el endomorfismo (no-unital) de esquina

$$\alpha\colon L(E)_0\to L(E)_0, \qquad x\mapsto t_+xt_-.$$

La demostración usa que el grupo de Grothendieck de $L(E)_0$ está generado por las matrices idempotentes de tamaño 1×1, es decir, por los idempotentes del anillo en cuestión.

Observación V.2.15. En [AP14] la acción de desplazamiento está dada por la inversa de α. Esto se debe a que si uno construye K_0^{gr} utilizando módulos a derecha en vez de módulos a izquierda, entonces el isomorfismo canónico envía la acción por σ a la acción por σ^{-1}.

Extenderemos este resultado a K_1 para lo cual usaremos que, por lo demostrado sobre álgebras ultramatriciales, el grupo $K_1(L(E)_0)$ está generado por unidades. Como hemos probado esto más generalmente para toda álgebra ultramatricial, podemos de hecho extender el resultado a todo álgebra de polinomios de Laurent torcida que sea fuertemente graduada y cuya componente de grado cero sea ultramatricial.

Teorema V.2.16. Sea (R, t_+, t_-) un álgebra de polinomios de Laurent fuertemente graduada. Consideremos el morfismo $\alpha\colon R_0 \to R_0$ dado por $x \mapsto t_+ x t_-$ y $p := \alpha(1)$. Para cada $x \in R^\times$, escribimos (R_0, x) para la clase en K_1 dada por el modulo a izquierda R_0 junto con la multiplicación por x. Tenemos entonces la siguiente igualdad en $K_1(R_0)$:

$$[(R_1, x)] = [(R_0, 1 + p - \alpha(x)].$$

Demostración. Notemos que $R_1 = R_0 t_+$ y que la multiplicación a derecha por t_- da un isomorfismo $R_1 \xrightarrow{\cong} R_0 p$ cuya inversa es la multiplicación por t_+. Se sigue que $[(R_1, x)] = [(R_0 p, \alpha(x))]$. Ahora, el siguiente diagrama de filas exactas

$$\begin{tikzcd}
R_0(p-1) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & R_0 \arrow[r, "-\cdot p"] \arrow[d, "-\cdot(1-p+\alpha(x))"] & R_0 p \arrow[d, "\alpha(x)"] \\
R_0(p-1) \arrow[r, hook] & R_0 \arrow[r, "-\cdot p"] & R_0 p
\end{tikzcd}$$

nos dice que

$$[(R_0, 1 + p - \alpha(x))] = [(R_0(p-1), 1)] + [(R_0 p, \alpha(x))] = [(R_0 p, \alpha(x))].$$

◇

El siguiente corolario aplica a toda álgebra de Leavitt asociada a un grafo esencial, y es nuestro principal interés en este resultado.

Corolario V.2.17. Sea (R, t_+, t_-) un álgebra de polinomios de Laurent torcida que es fuertemente graduada. Supongamos que ℓ es un cuerpo y R_0 es un álgebra ultramatricial. Si escribimos $\alpha\colon R_0 \to R_0$ para el morfismo $x \mapsto t_+ x t_-$ y $\mathsf{Dade}\colon K_1(R_0) \to K_1^{\mathrm{gr}}(R)$ para el isomorfismo de (I.2.5), el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_1^{\mathrm{gr}}(R) \arrow[r, "\sigma"] & K_1^{\mathrm{gr}}(R) \\
K_1(R_0) \arrow[r, "K_1(\alpha)"] \arrow[u, "\mathsf{Dade}"] & K_1(R_0) \arrow[u, "\mathsf{Dade}"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. La Proposición V.2.8 aplicada a R_0 nos dice que un elemento de $K_1(R_0)$ se puede representar por la clase del módulo a izquierda R_0 junto con un automorfismo $\rho_u\colon R_0 \to R_0$ dado por multiplicar a derecha por una unidad u; lo notamos (R_0, u).

Recordemos que el morfismo Dade está inducido por tensorizar por $R \otimes_{R_0} -$. Aplicándolo a (R_0, u) obtenemos $(R \otimes_{R_0} R_0, u)$, que coincide en $K_1^{\mathrm{gr}}(R)$ con la clase de (R, u), vía el isomorfismo graduado canónico $R \otimes_{R_0} R_0 \cong R$. El funtor de desplazamiento envía (R, u) a $(R[+1], u)$. Por último, la inversa del morfismo Dade toma la componente de grado cero de este último módulo, lo cual arroja el elemento $[(R_1, u)]$. Esta es exactamente la acción inducida en las unidades por α, como se muestra en el Teorema V.2.16. ◇

Observación V.2.18. Si (R, t_+, t_-) es un álgebra de polinomios de Laurent torcida y $f: R \to S$ es un morfismo unital de álgebras graduadas, poniendo $s_- := f(t_-)$, $s_+ := f(t_-)$ se tiene (S, s_+, s_-) es un álgebra de polinomios de Laurent torcida. Más todavía, si R es fuertemente graduada entonces S también lo es ([Haz16, Proposition 1.1.15 (4)]).

V.2.4. Suryectividad de la función (V.2.1)

Veremos ahora que la función (V.2.1) es suryectiva, para lo cual debemos definir una cierta modificación de un morfismo de álgebras graduadas $L(E) \to R$ dependiendo de un elemento $K_1(R_0)$, siguiendo los pasos de [CM20, Equation 5.10] y [CV22, Equation 13.6].

Definición V.2.19. Sea E un grafo primitivo. Dado $\phi: L(E) \to R$ un morfismo de álgebras graduadas, definimos

$$U: (R_\phi)^\times_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{(V.2.14)} K_1(R_0)^{E^1} \xrightarrow{s_*} K_1(R_0)^{E^0} \to \mathfrak{BF}^\vee_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} KH_1^{\mathrm{gr}}(R) \tag{V.2.20}$$
$$z \longmapsto \sum_{e \in E^1} s(e) \otimes [1 - \phi(ee^*) + z_e] = \sum_{v \in E^0} v \otimes \left[\prod_{s(e)=v} (1 - \phi(ee^*) + z_e) \right].$$

Dado $z = (z_e)_{e \in E^1} \in (R_\phi)^\times$, le asociamos un morfismo unital graduado $\phi_z: L(E) \to R$ definido por

$$\phi_z: L(E) \to L(F), \quad \phi_z(e) = z_e \phi(e), \quad \phi_z(e^*) = \phi(e^*) z_e^{-1}, \quad \phi_u(v) = \phi(v) \ (v \in E^0, e \in E^1). \tag{V.2.21}$$

Lema V.2.22. Si $\xi \in kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))_1$, entonces existe un morfismo unital graduado $\phi: L(E) \to L(F)$ y $x \in \mathfrak{BF}^\vee_{\mathrm{gr}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} KH_1^{\mathrm{gr}}(L(F))$ tal que

$$\bar{j}(\phi) - d(x) = \xi.$$

Demostración. Por el Teorema III.4.1, existe un morfismo unital graduado $\phi: L(E) \to L(F)$ tal que $K_0^{\mathrm{gr}}(\phi) = \mathrm{ev}(\xi)$. Como $K_0^{\mathrm{gr}}(\phi) = \mathrm{ev}\,\bar{j}(\phi)$ esto dice que $\bar{j}(\phi) - \xi \in \ker(\mathrm{ev}) = \mathrm{im}\, d$, de lo cual se desprende la conclusión del lema. ◇

Lema V.2.23. Sean E un grafo primitivo y R un álgebra graduada unital tal que R_0 es un álgebra ultramatricial. Si $\phi: L(E) \to R$ es un morfismo unital graduado, entonces para cada $z = (z_e)_{e \in E^1} \in R_\phi^\times$ se tiene que

$$j(\phi) - j(\phi_z) = d(U([z])).$$

Demostración. El elemento $U([z])$ es

$$\sum_{w \in E^0} w \otimes \left[\prod_{s(e)=w} (1 - \phi(ee^*) + z_e) \right].$$

Observemos que

$$\prod_{s(e)=w} (1 - \phi(ee^*) + z_e) = 1 - \sum_{s(e)=w} \phi(ee^*) + \sum_{s(e)=w} z_e = 1 - \phi(w) + \sum_{s(e)=w} z_e.$$

Notando $y_w := \sum_{s(e)=w} z_e$, tenemos entonces que

$$U([z]) = \sum_{w \in E^0} w \otimes [1 - \phi(w) + y_w].$$

Si aplicamos $-d(U[z])$, en vista de la parte (IV) del Teorema V.1.3 el elemento $-d(U[z]) = \sum_{w\in E^0} -d(v\otimes[1-\phi(w)+y_w])$ se corresponde a través de la dualidad de Poincaré con la clase de la unidad

$$\begin{aligned}Y &= \prod_{w\in E^0}(1\otimes 1 - 1\otimes w + (1-\phi(w)+y_w)\otimes w)\\ &= \prod_{w\in E^0}(1\otimes 1-\phi(w)\otimes w + y_w\otimes w)\\ &= 1\otimes 1 - \sum_{w\in E^0}\phi(w)\otimes w + \sum_{w\in E^0} y_w\otimes w.\end{aligned}$$

Por otro lado, los morfismos $j(\phi)$ y $j(\phi_z)$ se corresponden con las clases de las unidades u_ϕ y u_{ϕ_z} del Corolario IV.5.10. Para concluir la demostración es suficiente entonces probar que $Yu_\phi = u_{\phi_z}$. Sean $q = \sum_{w\in E^0}\phi(w)\otimes w$, $x = \sum_{e\in E^1}\phi(e)\otimes e_t^*$ e $y = \sum_{w\in E^0} y_w\otimes w$. Con esta notación $Y = 1\otimes 1 - q + y$ y $u_\phi = 1\otimes 1 - q + x$. Como $qx = x$, $q^2 = q$, $y = yq$, e

$$yx = \sum_{e\in E^1, w\in E^0} y_w\phi(e)\otimes we_t^* = \sum_{e\in E^1} y_s(e)\phi(e)\otimes e_t^* \sum_{e\in E^1} z_e\phi(e)\otimes e_t^*$$

tenemos que

$$\begin{aligned}Yu_\phi &= (1\otimes 1 - q + y)(1\otimes 1 - q + x)\\ &= 1\otimes 1 - q + x - q + q^2 - qx + y - yq + yx\\ &= 1\otimes 1 - q + yx\\ &= 1\otimes 1 - \sum_{v\in E^0}\phi(v)\otimes v + \sum_{e\in E^1} z_e\phi(e)\otimes e_t^*\\ &= 1\otimes 1 - \sum_{v\in E^0}\phi_z(v)\otimes v + \sum_{e\in E^1}\phi_z(e)\otimes e_t^*.\end{aligned}$$

Esta ultima expresión es la definición u_{ϕ_z}, como queríamos probar. ◇

Corolario V.2.24. La función (V.2.1) es sobreyectiva.

Demostración. Sea $\xi \in kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))_1$. Por el Lema V.2.22 existen un morfismo unital graduado $\phi\colon L(E)\to L(F)$ y $x \in \mathfrak{BF}^{\vee}_{\mathrm{gr}}(E)\otimes_{\mathbb{Z}[\sigma]} KH_1^{\mathrm{gr}}(L(F))$ tales que $\bar{j}(\phi) - d(x) = \xi$. Como en este caso (V.2.20) es sobreyectiva, existe $z\in L(F)_\phi$ tal que $x = [U(z)]$, y entonces $\xi = \bar{j}(\phi_z)$ por el Lema V.2.23. ◇

V.2.5. Inyectividad de la función (V.2.1)

Ahora analizaremos la inyectividad de $\bar{j}$. Consideraremos el conjunto $[L(E), L(F)]_{1,M_2}$ de morfismos unitales graduados $L(E)\to L(F)$ a menos de M_2-homotopía graduada. Veremos que al restringir $\bar{j}$ a este cociente de $[L(E), L(F)]_1$, se vuelve inyectiva.

Lema V.2.25. Utilizando la notación del Lema V.2.23, si $v, u\in R_\phi^\times$ son tales que $[v] = [u]$ en $(R_\phi)^\times_{\mathrm{ab}}$, entonces $\phi_v \sim \phi_u$.

Demostración. La Proposición V.2.10 nos asegura la existencia de una unidad

$$(Z_e)_{e\in E^1} \in \prod_{e\in E^1}(\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*))[t])^\times = \prod_{e\in E^1}(\phi(ee^*)(R[t])_0\phi(ee^*)))^\times$$

tal que $Z_e(0) = u_e$ y $Z_e(1) = v_e$. Si componemos a ϕ con la inclusión $i\colon R\to R[t]$ y tomamos $h := (i\circ\phi)_Z$, se sigue que $\mathrm{ev}_i \circ h = \phi_{Z(i)}$. ◇

Lema V.2.26. Sea E un grafo primitivo y $\phi: L(E) \to R$ un morfismo unital graudado. Supongamos que R_0 es ultramatricial. Dados $e, f \in E^1$ tales que $r(f) = s(e)$ y $u \in \phi(ee^*)R_0\phi(ee^*)^\times$, tenemos que

$$\sigma \cdot [1 - \phi(ee^*) + u] = [1 - \phi(fe(fe)^*) + \phi(f)u\phi(f^*)]$$

en $K_1(R_0)$. En particular, para todo otro $g \in E^1$ tal que $r(g) = s(e)$ se tiene

$$[1 - \phi(fe(fe)^*) + \phi(f)u\phi(f^*)] = [1 - \phi(ge(ge)^*) + \phi(g)u\phi(g^*)].$$

Demostración. Para cada $v \in E^0 \setminus \{s(e)\}$, consideramos un arista f_v que termina en v; su existencia está garantizada por el hecho de que E es esencial. Sea $f_{s(e)} := f$. Poniendo $t_+ = \sum_{v \in E^0} f_v$ y $t_- = t_+^*$ tenemos una estructura de álgebra de Laurent torcida en $L(E)$, de manera que R tiene una estructura de álgebra de Laurent torcida que viene de considerar los elementos $\phi(t_+)$ y $\phi(t_-)$.

El Teorema V.2.16, nos dice que la acción de σ en $K_1(R_0)$ es la inducida por el endomorfismo

$$\alpha: R_0 \to R_0, \qquad x \mapsto \phi(t_+)x\phi(t_-).$$

En consecuencia

$$\sigma \cdot [1 - \phi(ee^*) + u] = [1 - \phi(t_+t_-) + \phi(t_+)(1 - \phi(ee^*) + u)\phi(t_-)] = [1 - \phi(t_+)(\phi(ee^*) - u)\phi(t_-)].$$

Como $\phi(ee^*), u \in \phi(ee^*)R_0\phi(ee^*)$ y $f_v e = 0$ a menos que $v = s(e)$, es decir, a menos que $f_v = f$,

$$[1 - \phi(t_+)(\phi(ee^*) - u)\phi(t_-)] = [1 - \phi(fe(fe)^*) + \phi(f)u\phi(f^*)].$$

◇

Lema V.2.27. Sea E un grafo primitivo y R un álgebra unital fuertemente graduada tal que R_0 es ultramatricial. Sea $\phi: L(E) \to R$ un morfismo unital graduado. Si $z \in \prod_{e \in E^1}(\phi(ee^*)R_0\phi(ee^*))^\times$ es tal que $d(U([z])) = 0$, entonces $\phi \sim_{\mathrm{ad}} \phi_z$.

Demostración. Consideremos, como en el caso no graduado, el morfismo

$$\lambda: R_\phi \to R_\phi, \qquad a \mapsto \sum_{e \in E^1} \phi(e)a\phi(e^*)$$

y la matriz $B_{f,e} = \delta_{r(f),s(e)}$. Por el Lema V.2.26, el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd}
K_1(R_\phi) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\sim"] & K_1(R_\phi) \arrow[d, "\sim"] \\
K_1(R)^{E^1} \arrow[r, "\sigma B"] & K_1(R)^{E^1}
\end{tikzcd}$$

Escribamos ahora E_s para el grafo con matriz de adyacencia B, y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
K_1(R_\phi) \arrow[r, "1-\lambda"] \arrow[d, "\sim"] & K_1(R_\phi) \arrow[d, "\sim"] & & \\
K_1(R_0)^{E^1} \arrow[r, "I-\sigma B"] \arrow[d, "s_*"] & K_1(R_0)^{E^1} \arrow[r] \arrow[d, "s_*"] & \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}^\vee(E_s) \otimes_{\mathbb{Z}} KH_1^{\mathrm{gr}}(R) \arrow[d] & \\
K_1(R_0)^{E^0} \arrow[r, "I-\sigma A_E"] & K_1(R_0)^{E^0} \arrow[r] & \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}^\vee(E) \otimes_{\mathbb{Z}} KH_1^{\mathrm{gr}}(R) \arrow[r] & kk^{\mathrm{gr}}(L(E), R)
\end{tikzcd}$$

Observemos además que, por el Teorema V.1.3, en la fila inferior el morfismo que está en el extremo derecho es inyectivo. Por otro lado el morfismo inducido por s_* a nivel de morfismos duales de Bowen-Franks es un isomorfismo y está inducida por r^*; las respectivas composiciones coinciden con la acción por σ^{-1} correspondiente.

Ahora bien, como $d(U([z])) = 0$ persiguiendo el diagrama obtenemos que debe existir $[\nu] \in K_1(R_\phi)$ tal que $[\nu\lambda(\nu)^{-1}] = [z]$. El Lema V.2.25 nos asegura entonces que $\phi_z \sim \phi_{\nu\lambda(\nu)^{-1}}$. Por último, una verificación muestra que $\phi_{\nu\lambda(\nu)^{-1}} = \mathrm{ad}(\nu) \circ \phi$. ◇

Teorema V.2.28. Supongamos que ℓ es un cuerpo y sean E y F dos grafos primitivos. Dados dos morfismos unitales graduados $f, g \colon L(E) \to L(F)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) $j(f) = j(g)$;

(II) $f \sim_{\mathrm{ad}} g$;

(III) $f \sim_{M_2} g$.

Demostración. Ya sabemos que (II) implica (III) por el Lema I.1.19. Como j es matricialmente estable e homotópicamente invariante, se sigue que (III) implica (I). Resta ver que (I) implica (II). Supongamos que $j(f) = j(g)$. En particular $K_0^{\mathrm{gr}}(f) = \mathrm{ev} \circ j(f)$ coincide con $K_0^{\mathrm{gr}}(g)$ y por lo tanto, en vista del Corolario III.1.5, existe una unidad homogénea de grado cero $u \in R$ tal que $\mathrm{ad}(u) \circ f$ y g coinciden en $D(E)_1 = \mathrm{span}_\ell\{ee^* : e \in E^1\} = \mathrm{span}_\ell\{ee^*, \nu : e \in E^1, \nu \in E^0\}$. Como $\mathrm{ad}(u) \circ f \sim_{\mathrm{ad}} f$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f y g coinciden en $D_1(E)$.

Consideremos ahora $z_e = g(e)f(e^*)$, para cada $e \in E^1$; cada uno de estos elementos es una unidad de $f(ee^*)L(F)_0 f(ee^*)$ con inversa $f(e)g(e^*)$. Usando la notación del Lema V.2.23, se sigue que $g = f_z$ y $d(U([z])) = j(f) - j(f_z) = j(f) - j(g) = 0$. Aplicando el Lema V.2.27 obtenemos que $f \sim_{\mathrm{ad}} g$ como buscábamos ver. ◇

Corolario V.2.29. Supongamos que ℓ es un cuerpo. Si E y F son dos grafos primitivos, entonces la función $\overline{j} \colon [L(E), L(F)]_{1,M_2} \to kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))_1$ es biyectiva. ◇

Demostración. Basta aplicar el Corolario V.2.24 junto con el Teorema V.2.28. ◇

V.3. El teorema de clasificación

Concluimos el capítulo con un teorema de clasificación a menos de homotopía graduada. Para simplificar su enunciado, diremos que dos álgebras graduadas son ***unitalmente graduadamente homotópicamente equivalentes*** si existe una equivalencia homotópica graduada y unital entre ellas, cuya inversa a menos de homotopía graduada es también unital.

Teorema V.3.1. Sea ℓ un cuerpo y sean E y F dos grafos primitivos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(I) Los $\mathbb{Z}[\sigma]$-módulos preordenados punteados $(\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E), \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+, 1_E)$ y $(\mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(F), \mathfrak{BF}_{\mathrm{gr}}(E)_+, 1_F)$ son isomorfos.

(II) Existe un isomorfismo $\xi \in kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))_1$.

(III) Las álgebras $L(E)$ y $L(F)$ son unitalmente graduadamente homotópicamente equivalentes.

Demostración. El Lema V.1.4 nos dice que es posible levantar isomorfismos a nivel de K_0^{gr} a kk^{gr}-isomorfismos. Por definición el levantado de un morfismos de que preserva el orden y la unidad de orden yace en $kk^{\mathrm{gr}}(L(E), L(F))_1$; esto prueba que (I) implica (II).

Supongamos ahora que vale (II) y consideremos la inversa de ξ, observando en particular que $\xi^{-1} \in kk^{\mathrm{gr}}(L(F), L(E))_1$. Por el Corolario V.2.29, existen morfismos unitales graduados $f : L(E) \to$

$L(F)$ y $g\colon L(F)\to L(E)$ tales que $j(f)=\xi$ y $j(g)=\xi^{-1}$. En particular $j(fg)=\mathrm{id}_{L(F)}$ y $j(gf)=\mathrm{id}_{L(E)}$, y entonces por el Teorema V.2.28 existen unidades $u\in L(F)_0$, $v\in L(E)_0$ tales que $fg\sim \mathrm{ad}(u)$ y $gf\sim \mathrm{ad}(v)$. En consecuencia f es una equivalencia homotópica, lo que prueba que (II) implica (III).

Por último observamos que (III) implica (II). Sea $f: L(E)\to L(F)$ un morfismo graduado y unital que es una equivalencia homotópica. El morfismo $K_0^{\mathrm{gr}}(f)$ es un morfismo punteado que preserva el orden entre los módulos de Bowen-Franks de E y F. Basta ver que es un isomorfismo. Como ℓ es un cuerpo se sigue que $K_*(\ell)=KH_*(\ell)$, y entonces en vista del Teorema II.4.3 aplicar K_0^{gr} a $L(E)$ y $L(F)$ coincide con aplicar KH_0^{gr}. Como este último funtor es homotópicamente invariante, envía equivalencias homotópicas a isomorfismos. Esto concluye la prueba. ◇

El Teorema V.3.1 nos dice que para grafos primitivos la Conjetura I.6.1 equivale a la siguiente:

Conjetura V.3.2. Sea ℓ un cuerpo. Si E y F son dos grafos primitivos, entonces $L_\ell(E)$ y $L_\ell(F)$ son graduadamente isomorfas si y sólo si son unitalmente graduadamente homotópicamente equivalentes.

Capítulo VI

Homología de álgebras de Steinberg

En este capítulo nos concentraremos en las llamadas álgebras de Steinberg asociadas a un grupoide amplio. Muchas álgebras pueden representarse como un álgebra de Steinberg; nuestros principales ejemplos de interés son las álgebras de Leavitt (y más generalmente, las álgebras de Exel-Pardo), las álgebras de grupo y las álgebras de funciones continuas de un espacio compacto Hausdorff X con valores en el anillo discreto ℓ.

Con el objetivo de comenzar a estudiar a estas álgebras a través de invariantes homológicos y K-teóricos, en el presente capítulo estudiaremos la Homología de Hochschild y sus variantes para álgebras de Steinberg. En casos favorables, veremos que es posible describir a estos invariantes en términos de la homología del grupoide subyacente.

VI.1. Generalidades

En este capítulo un espacio topológico se dirá ***compacto*** si es Hausdorff y todo cubrimiento por abiertos tiene un subcubrimiento finito. Un función continua $f : X \to Y$ se dirá ***étale*** si es un homeomorfismo local y ***propia*** si $f^{-1}(K)$ es compacto para cada subespacio compacto $K \subset Y$. Si $\sigma\colon E \to X \leftarrow F : \tau$ son funciones continuas, escribiremos $E \times F \supset E_\sigma\times_\tau F = \{(e, f)\colon \sigma(e) = \tau(f)\}$ para su pullback.

VI.1.1. Grupoides

Un ***grupoide (topológico)*** $\mathscr{G}$ es un espacio topológico junto con un subespacio distinguido $\mathscr{G}^{(0)} \subset \mathscr{G}$ de ***unidades*** u objetos, funciones continuas de ***salida y llegada*** $r, s\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ y de composición e inversión

$$\begin{aligned}
&\circ\colon \mathscr{G}^{(2)} := \mathscr{G}_s\times_r\mathscr{G} \to \mathscr{G}, \qquad (g,h) \mapsto gh,\\
&\iota\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \qquad g \mapsto g^{-1},
\end{aligned}$$

que cumplen las condiciones esperables de compatibilidad que hacen de $\mathscr{G}$ una categoría. Un morfismo de grupoides es una función continua que sea compatible con salidas, llegadas, composiciones e inversas. A lo largo del capítulo abreviaremos frecuentemente $X := \mathscr{G}^{(0)}$, y siempre asumiremos que este subespacio es Hausdorff.

Antes de listar algunos ejemplos elementales de grupoides necesitamos algunas definiciones más. Un grupoide $\mathscr{G}$ es ***étale*** si sus funciones de salida y llegada son étale. Una ***bisección*** es un abierto $U \subset \mathscr{G}$ tal que $s|_U$ y $r|_U$ son inyectivos. Si $\mathscr{G}$ es étale, esto equivale a pedir que $s|_U$ y $r|_U$ sean homeomorfismos. Un grupoide étale es ***amplio*** si sus bisecciones compactas forman una base de su topología.

Ejemplos VI.1.1.

- Si $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto es un grupoide con identidades $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$, funciones de salida y llegada $r(x,y) = (x,x)$, $s(x,y) = (y,y)$, y composición $(z,y)(y,x) = (z,x)$.

- Toda unión disjunta de grupos discretos forma un grupoide amplio. La composición está definida únicamente entre elementos de un mismo grupo, donde coincide con la multiplicación.

- Si G es un grupo discreto que actúa en un espacio localmente compacto y Hausdorff X, entonces

$$G \ltimes X := G \times X = \bigsqcup_{g \in G} \{g\} \times X$$

es un grupoide con funciones de llegada y salida $s(g,x) = x$, $r(g,x) = g \cdot x$ y composición $(h, g \cdot x)(g,x) = (hg, x)$. Resulta amplio si X es totalmente disconexo. Esta construcción puede generalizarse a semigrupos inversos actuando de forma parcial; ver Sección VI.3.3.

En [Li, Secciones 2.1 y 2.2] puede encontrarse una sucinta introducción a los grupoides topológicos; referimos también a [Ste10, Sección 3] y [Exe08, Sección 3].

Dado $Z \subset X$, escribimos $\mathscr{G}^Z = s^{-1}(Z)$ y $\mathscr{G}_Z = r^{-1}(Z)$; notamos $\mathscr{G}^z = \mathscr{G}^{\{z\}}$, $\mathscr{G}_z = \mathscr{G}_{\{z\}}$ y $\mathscr{G}_z^z = \mathscr{G}_z \cap \mathscr{G}^z$. Observemos que $\mathscr{G}_z^z$ es un grupo con elemento neutro z; lo llamamos el ***grupo de isotropía*** de z. Decimos que z tiene ***isotropía trivial*** si $\mathscr{G}_z^z = \{z\}$. La ***isotropía*** de $\mathscr{G}$ es el subgrupoide

$$\mathscr{G} \supset \mathrm{Iso}(\mathscr{G}) = \{\eta \in \mathscr{G} : s(\eta) = r(\eta)\} = \bigsqcup_{x \in X} \mathscr{G}_x^x.$$

Sea Λ un grupo abeliano (discreto). Un grupoide Λ-***graduado*** es un grupoide $\mathscr{G}$ junto con un morfismo de grupoides topológicos $|\cdot| \colon \mathscr{G} \to \Lambda$ que llamaremos ***cociclo*** o ***función de graduación***.

VI.1.2. $\mathscr{G}$-espacios

Sea $\mathscr{G}$ un grupoide étale. Un ***$\mathscr{G}$-espacio a izquierda*** es un espacio topológico Z junto con una función continua $\tau \colon Z \to X$, denominada el ***ancla***, y una función continua $\bullet \colon \mathscr{G}_s \times_\tau Z \to Z$ tal que

I) $\tau(g \bullet z) = r(g)$ para cada $z \in Z$ y $g \in \mathscr{G}^{\tau(z)}$;

II) $\tau(z) \bullet z = z$ para todo $z \in Z$;

III) $g \bullet (h \bullet z) = gh \bullet z$ para cada $z \in Z$ y cada par componible $(g,h) \in \mathscr{G}^{(2)}$ tal que $h \in \mathscr{G}^{\tau(z)}$.

La noción de $\mathscr{G}$-espacio se define análogamente.

Si $\mathscr{G}$ viene equipado con una Λ-graduación, definimos un $\mathscr{G}$-espacio (a izquierda) graduado como un $\mathscr{G}$-espacio Z junto con un a función continua $|\cdot| \colon Z \to \Lambda$ tal que $|g \bullet z| = |g| + |z|$ para cada $z \in Z$ y $g \in \tau^{-1}(z)$.

Ejemplo VI.1.2. Todo grupoide $\mathscr{G}$ actúa sobre sí mismo por composición, *i. e.* $g \bullet h = gh$.

Ejemplo VI.1.3. Un grupoide $\mathscr{G}$ actúa en $\mathrm{Iso}(\mathscr{G})$ por conjugación: se define $\tau = s \colon \mathrm{Iso}(\mathscr{G}) \to X$ y $g \bullet \eta = g\eta g^{-1}$.

Dado un $\mathscr{G}$-espacio Z, la relación en Z dada por $x \sim y$ si $x = g \bullet y$ para algún $g \in \mathscr{G}$ es de equivalencia. Escribiremos $Z/\mathscr{G}$ para el espacio cociente asociado. La ***órbita*** de $x \in Z$ es su clase de equivalencia con respecto a esta relación, denotada $\mathscr{G} \bullet x$.

VI.1.3. Funciones de soporte compacto

Convención VI.1.4. A partir de ahora, todos los espacios que consideraremos serán localmente compactos.

Definición VI.1.5. Un espacio localmente compacto se dice ***débilmente booleano*** si sus abiertos compactos forman una base de su topología y ***booleano generalizado*** si adicionalmente es Hausdorff.

Dado un espacio débilmente booleano X, se define

$$\mathscr{C}_c(X) = \operatorname{span}_\ell\{\chi_K : X \supset K \text{ compacto abierto}\} \subset \ell^X.$$

Si X es booleano generalizado y equipamos a ℓ con la topología discreta, entonces $\mathscr{C}_c(X)$ coincide con las funciones continuas $X \to \ell$ de soporte compacto; en tal caso, con la suma y producto puntual forma una ℓ-subálgebra de ℓ^X.

La construcción $\mathscr{C}_c(-)$ es funtorial para morfismos propios y étale, de forma contravariante y covariante respectivamente. Si $f : X \to Y$ es propio, la precomposición con f define un morfismo ℓ-lineal:

$$f^*\colon \mathscr{C}_c(Y) \to \mathscr{C}_c(X), \qquad \chi_K \mapsto \chi_{f^{-1}(K)}. \tag{VI.1.6}$$

Si $f : X \to Y$ es étale, entonces el siguiente es un morfismo ℓ-lineal bien definido:

$$f_*\colon \mathscr{C}_c(X) \to \mathscr{C}_c(Y), \qquad f_*(\phi)(x) = \sum_{z \in f^{-1}(x)} \phi(z). \tag{VI.1.7}$$

Ejemplo VI.1.8. Si $F \subset X$ es un subespacio cerrado entonces la inclusión $i\colon F \to X$ es propia. Si X es débilmente booleano, el morfismo inducido se denotará $\operatorname{res}_{X,F}\colon \mathscr{C}_c(X) \to \mathscr{C}_c(F)$, puesto que envía χ_K a $\chi_{K\cap F}$ para cada subespacio compacto abierto $K \subset X$. Los subíndices en la expresión $\operatorname{res}_{X,F}$ se omitirán cuando se deduzcan del contexto.

Observación VI.1.9. Si $f : X \to Y$ es étale y $K \subset X$ un subespacio compacto abierto tal que f es inyectiva en K, es decir, tal que $f|_K : K \to f(K)$ es un homeomorfismo, entonces $f_*(\chi_K) = \chi_{f(K)}$.

El argumento de [Ste10, Proposition 4.3] prueba el siguiente Lema; lo incluimos por completitud.

Lema VI.1.10. Sea X un espacio débilmente booleano. Si $\mathscr{B}$ es una base de abiertos compactos para su topología, entonces:

(I) $\mathscr{C}_c(X) = \operatorname{span}_\ell\{\chi_{\cap_{i=1}^n B_i} : B_i \in \mathscr{B} \text{ y } \cup_{i=1}^n B_i \subset Y \subset X \text{ con } Y \text{ Hausdorff}\}$.

(II) Si para cada $B_1, \dots, B_n \in \mathscr{B}$ tal que $\bigcup_{i=1}^n B_i$ están contenidos en un subespacio Hausdorff de X su intersección $B_1 \cap \cdots \cap B_n$ yace en $\mathscr{B}$, entonces $\mathscr{C}_c(X) = \operatorname{span}_\ell\{\chi_B : B \in \mathscr{B}\}$.

Demostración. El ítem (II) se sigue directamente de (I); probamos este último. Es suficiente ver que, dado un abierto compacto $O \subset X$, el elemento $\chi_O \in \mathscr{C}_c(X)$ pertenece al módulo generado por los elementos descritos en (I). Como O es abierto, es una unión de elementos de $\mathscr{B}$; como además es compacto existen $B_1, \dots, B_n$ tales que $O = B_1 \cup \cdots \cup B_n$. Por el principio de inclusión-exclusión,

$$\chi_O = \chi_{B_1 \cup \cdots \cup B_n} = \sum_{i=1}^n (-1)^i \sum_{I \subset \{1,\dots,n\},\ |I| = i} \chi_{\bigcap_{j\in I} B_j}.$$

Dado que $B_1, \dots B_n$ están contenidos en O, que es Hausdorff, cada intersección finita del lado derecho es compacta. Por lo tanto $\chi_{\bigcap_{j\in I} B_j} \in \mathscr{C}_c(X)$ para cada $I \subset \{1, \dots, n\}$; esto concluya la prueba. ◇

Observación VI.1.11. Podemos aplicar el Lema VI.1.10 (II), por ejemplo, a la base que consiste de todos los abiertos compactos de un espacio débilmente booleano. También aplica a todas las bisecciones compactas de un grupoide amplio.

Lema VI.1.12. Sea X un espacio booleano generalizado y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Sean $U = X \setminus F$ e $i : U \to X$ la inclusión. Hay una sucesión exacta corta

$$0 \to \mathscr{C}_c(U) \xrightarrow{i_*} \mathscr{C}_c(X) \xrightarrow{\mathrm{res}_{X,F}} \mathscr{C}_c(F) \to 0.$$

Demostración. Tenemos las fórmulas

$$\mathrm{res}_{X,F}(\varphi) = \varphi|_F, \qquad i_*(\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

de lo cual se sigue que $\mathrm{res}_{X,F} \circ i_* = 0$ y que i_* es inyectiva. Sea $\varphi \in \mathscr{C}_c(X)$. Si $\varphi|_F = 0$, entonces el soporte de φ está contenido en U y $\varphi|_U \in \mathscr{C}_c(U)$. Como X es Hausdorff, esto implica que $\varphi = i_*(\varphi|_U)$, probando la exactitud de la sucesión en el término del medio. Por último veamos que $\mathrm{res}_{X,F}$ es suryectiva. Sea $\mathscr{B}$ una base de compactos abiertos de X; luego $S = \{F \cap B : B \in \mathscr{B}\}$ es una base de abiertos compactos de F. Como X es Hausdorff, también lo es F, luego S está en las hipótesis del Lema VI.1.10 (II) y $\mathscr{C}_c(F) = \mathrm{span}_\ell\{\chi_{B\cap F} : B \in \mathscr{B}\} = \mathrm{im}(\mathrm{res}_{X,F})$. ◇

VI.1.4. Álgebras de Steinberg y $\mathscr{G}$-módulos

Dado un grupoide amplio $\mathscr{G}$, su ***álgebra de Steinberg*** ([Ste10], [CFST14]) es el ℓ-módulo $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}) := \mathscr{C}_c(\mathscr{G})$ equipado con el producto

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g=\alpha\beta} f_1(\alpha) f_2(\beta) \qquad (g \in \mathscr{G}).$$

Por [Ste10, Proposition 4.3] sabemos que $\mathscr{A}(\mathscr{G})$ está generada como ℓ-módulo por funciones indicadoras de bisecciones compactas (ver Observación VI.1.10). Si $\mathscr{G}$ es Λ-graduado, se tiene inducida una graduación en $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$ vía

$$\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})_l = \{f \in \mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}) : \mathrm{Supp}(f) \subset |\cdot|^{-1}(l)\} \quad (l \in \Lambda).$$

Un ***$\mathscr{G}$-módulo*** será un $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulo unital. Una vasta familia de ejemplos proviene de $\mathscr{G}$-espacios; para cada $\mathscr{G}$-espacio X con ancla $\tau : X \to \mathscr{G}^{(0)}$ el ℓ-módulo $\mathscr{C}_c(X)$ puede equiparse con una estructura de $\mathscr{G}$-módulo vía

$$\chi_U \cdot \chi_K := \chi_{UK}, \qquad UK = \{u \bullet k : k \in K, u \in \mathscr{G}^{\tau(k)} \cap U\}$$

para cada par de abiertos compactos $U \subset \mathscr{G}$, $K \subset X$. Si$\mathscr{G}$ es Λ-graduado y X un $\mathscr{G}$-espacio graduado, entonces $\mathscr{C}_c(X)$ es Λ-graduado poniendo $\mathscr{C}_c(X)_l = \{f \in \mathscr{C}_c(X) : \mathrm{Supp}(l) \subset |\cdot|^{-1}(l)\}$.

VI.1.5. Espacios débilmente booleanos simpliciales y cíclicos

Llamaremos WeakBool a la categoría de espacios débilmente booleanos y funciones étale.

Un espacio débilmente booleano simplicial es un funtor $X : \Delta^\bullet \to \mathsf{WeakBool}^{\mathrm{op}}$; es decir, un objeto simplicial en WeakBool. Un tal objeto induce un ℓ-módulo simplicial $\mathscr{C}_c(X)$, y, en particular, un complejo de ℓ-módulos con diferenciales

$$\partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (d_i)_*.$$

Consideramos a continuación ejemplos de espacios débilmente booleanos simplicales asociados a un grupoide $\mathscr{G}$ que serán de nuestro interés en lo que sigue.

Ejemplo VI.1.13 (Nervio de un grupoide). Para cada $n \geq 1$, escribimos

$$\mathcal{N}(\mathcal{G})_n = \mathcal{G}^{(n)} = \{(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{G}^n : s(g_i) = r(g_{i+1}) \,\forall 1 \leq i \leq n-1\}. \tag{VI.1.14}$$

para las n-tuplas de flechas componibles de $\mathcal{G}$, equipadas con la topología subespacio del producto cartesiano $\mathcal{G}^n$. Escribiremos $\mathcal{N}(\mathcal{G})_0 = \mathcal{G}^{(0)}$. Como $\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff, $\mathcal{G}^{(n)} \subset \mathcal{G}^n$ es un subespacio cerrado. En particular, si $A_1, \dots, A_n \subset \mathcal{G}$ son bisecciones compactas, el abierto

$$[A_1|\cdots|A_n] := (A_1 \times \cdots \times A_n) \cap \mathcal{G}^{(n)} \tag{VI.1.15}$$

es compacto. Estos subespacios compacto-abiertos forman una base de $\mathcal{G}^{(n)}$, lo cual muestra que este último es débilmente booleano. Para cada $n \geq 0$ y $i \in \{0, \dots, n\}$, sean

$$d_i \colon \mathcal{G}^{(n)} \to \mathcal{G}^{(n-1)}, \qquad d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{si } i = n \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$s_i \colon \mathcal{G}^{(n)} \to \mathcal{G}^{(n+1)}, s_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (r(g_1), g_1, \dots, g_n) & \text{si } i = 0 \\ (g_1, \dots, g_n, s(g_n)) & \text{si } i = n \\ (g_1, \dots, g_i, r(g_{i+1}), g_{i+1}, \dots, g_n) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Con estas definiciones, tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} d_0[A_1|\cdots|A_n] &= [s(A_1)A_2|\cdots|A_n], \\ d_n[A_1|\cdots|A_n] &= [A_1|\cdots|A_{n-1}r(A_n)], \\ d_i[A_1|\cdots|A_n] &= [A_1|\cdots|A_iA_{i+1}|\cdots A_n], \\ s_0[A_1|\cdots|A_n] &= [r(A_1)|A_1|\cdots|A_n], \\ s_n[A_0|\cdots|A_n] &= [A_0|\cdots|A_n|s(A_n)], \\ s_i[A_1|\cdots|A_n] &= [A_1|\cdots|A_i|r(A_{i+1})|A_{i+1}|\cdots A_n]. \end{aligned} \tag{VI.1.16}$$

Además, al restringir d_i y s_i a $[A_0|\cdots|A_n]$ resultan inyectivas, lo cual implica que las caras y degeneraciones son funciones étale. En consecuencia $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es un espacio débilmente booleano simplicial.

Como conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{G})$ es isomorfo al nervio $N(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ visto como categoría. En la convención estándar (ver por ejemplo [GJ99]) los morfismos apuntan en la dirección opuesta a la considerada aquí (donde están orientados como en [BK72]), el isomorfismo debe invertir las flechas. Concretamente, está dado por las biyecciones naturales

$$(g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{N}(\mathcal{G}) \mapsto (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}) \in N(\mathcal{G}).$$

Como veremos más abajo, el complejo $\mathbb{H}(\mathcal{G}) = \mathbb{H}(\mathscr{C}_c(\mathcal{G}^{(\bullet)}))$ calcula la homología de $\mathcal{G}$ con coeficienes en ℓ.

Ejemplo VI.1.17 (Nervio cíclico de un grupoide). Para cada $n \geq 0$, consideramos las flechas ***cíclicamente componibles***

$$\mathcal{G}^{(n+1)} \supset \mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}} = \{(g_0, \dots, g_n) \in \mathcal{G}^{(n+1)} : s(g_n) = r(g_0)\}.$$

equipadas con la topología subespacio; notar una vez más que como $\mathcal{G}^{(0)}$ es Hausdorff este subespacio es cerrado. Cada espacio $\mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}}$ tiene una base de compactos abiertos dada por los conjuntos de la forma

$$(A_0|\cdots|A_n) = (A_0 \times \cdots \times A_n) \cap \mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}} \tag{VI.1.18}$$

donde $A_0,\dots,A_n \subset \mathscr{G}$ son bisecciones compactas. Para cada $n \geq 0$ y $i \in \{0,\dots,n\}$, definimos

$$d_i\colon \mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} \to \mathscr{G}^{n-1}_{\mathrm{cyc}}, \qquad d_i(g_0,\dots,g_n) = \begin{cases} (g_ng_0, g_1,\dots,g_{n-1}) & \text{si } i = n \\ (g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$s_i\colon \mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} \to \mathscr{G}^{n+1}_{\mathrm{cyc}}, \qquad s_i(g_0,\dots,g_n) = (g_0,\dots,g_i,s(g_i),g_{i+1},\dots,g_n).$$

Los morfismos d_i y s_i interactúan con los compacto-abiertos básicos (VI.1.18) de forma análoga a la de las identidades (VI.1.16); por lo tanto resultan étale. Tenemos entonces un espacio débilmente booleano simplicial $\mathscr{G}_{\mathrm{cyc}}$. Abusando notación, escribimos $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) = C_c(\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{cyc}})$ para tanto el ℓ-módulo simplicial asociado como para el complejo de cadenas inducido. A partir del Ejemplo VI.1.43 también identificaremos esta notación con el modulo cíclico asociado a $\mathscr{G}$.

Observación VI.1.19. Notamos que si $\mathscr{G}$ es Λ-graduado, entonces $\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}}$ es Λ-graduado poniendo $|(g_0,\dots,g_n)| = |g_0| + \cdots + |g_n|$ y, como Λ es abeliano, los morfismo de caras y degeneraciones del nervio cíclico son compatibles con la graduación. En consecuencia $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$ es un ℓ-módulo simplicial Λ-graduado y sus morfismos de caras y degenraciones son homogéneos de grado nulo.

Lema VI.1.20. Sean $A_0,A_1,\dots,A_n \subset \mathscr{G}$ bisecciones compactas y $U \subset \mathscr{G}^{(0)}$ un abierto compacto. Tenemos las siguientes igualdades:

(I) $[A_1|\dots|A_iU|A_{i+1}|\cdots|A_n] = [A_1|\dots|A_i|UA_{i+1}|\cdots|A_n]$;

(II) $(A_0|\dots|A_iU|A_{i+1}|\cdots|A_n) = (A_0|\dots|A_i|UA_{i+1}|\cdots|A_n)$;

(III) $(UA_0|\cdots|A_n) = (A_0|\cdots|A_nU)$.

Demostración. Las tres identidades se prueban de forma similar, viendo ambas inclusiones. Lo ejemplificamos exhibiendo una de las inclusiones de (III). Sea $x = (g_0,\dots,g_n) \in (UA_0|\cdots|A_n)$, de forma que $g_i \in A_i$ si $i \in \{1,\dots,n\}$ y $g_0 \in UA_0$, es decir, $g_0 \in A_0$ y $r(g_0) \in U$. Como $s(g_n) = r(g_0)$ pertenece a U, así que $g_n \in A_nU$ y luego $x \in (A_0|\cdots|A_nU)$. ◇

VI.1.6. Homología de grupoides

En esta sección seguimos la presentación de [Mil, Section 2]; ver también [Li, 2.3]. Fijamos un grupoide étale $\mathscr{G}$. Dado $n \geq 0$, el n-ésimo grupo de homología de $\mathscr{G}$ con coeficientes en un $\mathscr{G}$-módulo M se define como

$$H_n(\mathscr{G},M) = \mathrm{Tor}_n^{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})}(\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}),M).$$

Escribimos $H_*(\mathscr{G}) := H_*(\mathscr{G},\mathscr{C}_c(G^{(0)}))$ y $H_*(\mathscr{G},Z) = H_*(\mathscr{G},\mathscr{C}_c(Z))$ para cada $\mathscr{G}$-espacio Z. Como se observa en [Mil, Section 2], será importante en lo que sigue recordar que el funtor derivado Tor puede calcularse a través de resoluciones playas. Concretamente, si $P_\bullet$ es una resolución playa de M, entonces $H_*(\mathscr{G},M)$ es la homología de $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})} P_\bullet$; este proceso también coincide con resolver a $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)})$ por $\mathscr{G}$-módulos playos y luego tensorizar por M. Esto permite el cálculo de la homología de grupoides a partir de un complejo explícito que recordaremos a continuación. Primero recordamos algunos resultados de [Mil] sobre platitud y productos tensoriales de $\mathscr{G}$-módulos. Un $\mathscr{G}$-espacio a izquierda Z se dice ***básico*** si

$$\mathscr{G} \times_{\mathscr{G}^{(0)}} Z \to Z \times_{Z/\mathscr{G}} Z, \qquad (g,x) \to (g \bullet x, x).$$

es un homeomorfismo, y étale si su ancla es étale.

Los espacios $\mathscr{G}^{(n)}$ son básicos y étale para todo $n \geq 1$. Nuestro interés por este tipo de espacios proviene del siguente resultado.

Proposición VI.1.21 ([Mil, Proposition 2.8])**.** Sea $\mathscr{G}$ un grupoide amplio. Si Y es un $\mathscr{G}$-espacio básico y étale, entonces $\mathscr{C}_c(Y)$ es un $\mathscr{G}$-módulo playo. ◇

Abreviaremos $\otimes_{\mathcal{G}} := \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathcal{G})}$. Dado un $\mathcal{G}$-espacio a izquierda Z y un $\mathcal{G}$-espacio a derecha Y, podemos formar su pullback $Y \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z$ a lo largo de sus anclas; el cociente de este espacio por la relación $(y \bullet g, z) \sim (y, g \bullet z)$ se denotará $Y \times_{\mathcal{G}} Z$.

Proposición VI.1.22 ([Mil, Proposition 2.9]). Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio, y sean Y un $\mathcal{G}$-espacio a derecha básico y étale con ancla $\sigma\colon Y \to G^{(0)}$. Si Z es un $\mathcal{G}$-espacio a izquierda totalmente disconexo, entonces $Y \times_{\mathcal{G}} Z$ es totalmente disconexo, localmente compacto, y hay un isomorfismo $\kappa\colon \mathscr{C}_c(Y) \otimes_{\mathcal{G}} \mathscr{C}_c(Z) \xrightarrow{\cong} \mathscr{C}_c(Y \times_{\mathcal{G}} Z)$ dado por

$$\kappa(\xi \otimes \eta)([y,z]) = \sum_{g \in \mathcal{G}^{\sigma(y)}} \xi(y \bullet g)\eta(g^{-1} \bullet z). \tag{VI.1.23}$$

◇

Observación VI.1.24. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio, Y $\mathcal{G}$-espacio a derecha étale, y Z a totally disconnected left $\mathcal{G}$-space. Como Y es básico y étale como $\mathcal{G}^0$-espacio, la Proposición VI.1.22 aplicada a $\mathcal{G}^{(0)}$ en lugar de $\mathcal{G}$ nos dice que $\mathscr{C}_c(Y) \otimes_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathscr{C}_c(Z) \cong \mathscr{C}_c(Y \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z)$.

Observación VI.1.25. En la Proposición VI.1.22, si $\mathcal{G}$, Y y Z son Λ-graduados, entonces $Y \times_{\mathcal{G}} Z$ puede equiparse con una Λ-graduación vía $|[y,z]| = |y| + |z|$. Con esta graduación κ es homogéneo de grado cero: si $\xi \in \mathscr{C}_c(Y)_l$ y $\eta \in \mathscr{C}_c(Z)_{l'}$ para algún $l, l' \in \Lambda$, entonces para que $\kappa(\xi \otimes \eta)([y,z])$ sea no nulo debe existir $g \in \mathcal{G}^{\sigma(y)}$ tal que $y \bullet g \in \operatorname{Supp}(\xi)$ y $g^{-1} \bullet z \in \operatorname{Supp}(\eta)$. Por lo tanto $|y| + |g| = l$, $-|g| + |z| = l'$, y así $|[y,z]| = l + l'$. Se sigue que $\operatorname{Supp}(\kappa(\xi \otimes \eta))$ está contenido en $|\cdot|^{-1}(l + l')$ y $\kappa(\xi \otimes \eta) = l + l' = |\xi| + |\eta| = |\xi \otimes \eta|$ como afirmamos.

Corolario VI.1.26. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y Z un espacio topológico con estructuras de $\mathcal{G}$-espacio a derecha e izquierda. Si Z es totalmente disconexo, entonces

$$\begin{gathered}\mu : \mathscr{A}_\ell(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathscr{C}_c(Z) \otimes_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathscr{A}_\ell(\mathcal{G}) \to \mathscr{C}_c(\mathcal{G} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z \times_{\mathcal{G}^{(0)}} \mathcal{G}), \\ \mu(\phi_0 \otimes \psi \otimes \phi_1)(g_0, z, g_1) = \phi_0(g_0)\psi(z)\phi_1(g_1).\end{gathered}$$

es un isomorfismo de bimódulos. ◇

Ejemplo VI.1.27 (La resolución estándar). Sea $B_n(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{(n+1)}$ para cada $n \geq -1$, y para cada $n \geq 0$ sean

$$\begin{aligned} d_i(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, g_{i-1}g_i, \ldots, g_n), \qquad 0 < i \leq n, \\ d_0(g_0, \ldots, g_n) &= (g_1 \ldots, g_n) \qquad n > 0, \\ s_i(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, r(g_i), g_i, \ldots, g_n). \end{aligned}$$

En el lugar $B_0(\mathcal{G})$ definimos $d_0(g_0) = s(g_0)$. Un análisis análogo al de (VI.1.13) muestra que estas asignaciones son funciones étale $\mathcal{G}$-equivariantes. Tenemos asociado entonces un complejo de cadenas $(\mathscr{C}_c(B_\bullet(\mathcal{G})), b_\bullet)_{n \geq -1}$ con borde $b_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i (d_i)_*$. Consideremos $h_n\colon B_n(\mathcal{G}) \to B_{n+1}(\mathcal{G})$, $h_n(g_0, \ldots, g_n) = (g_0, \ldots, g_n, s(g_n))$ junto con la inclusión abierta $h_{-1}\colon B_{-1}(\mathcal{G}) \to B_0(\mathcal{G})$. Como

$$d_i h_n = h_{n-1} d_i, \quad d_{n+1} h_n = \mathrm{id}, \quad d_0 h_{-1} = \mathrm{id} \quad (0 \leq i \leq n),$$

se sigue que $\{(-1)^{n+1}(h_n)_*\}_{n \geq -1}$ es una homotopía de contracción del complejo $(\mathscr{C}_c(B_\bullet(\mathcal{G})), b_\bullet)_{n \geq -1}$. En particular este último es (puramente) exacto. En vista de la Proposición VI.1.21 tenemos una resolución playa $\mathbb{B}(\mathcal{G}) := \mathscr{C}_c(B_n(\mathcal{G}))_{n \geq 0}$ de $\mathbb{B}(\mathcal{G})_{-1} := \mathscr{C}_c(\mathcal{G}^{(0)})$.

Por lo tanto la homología de $\mathbb{B}(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{G}} M$ calcula $H_*(G, M)$. Si $M = \mathscr{C}_c(Z)$ para algún $\mathcal{G}$-espacio totalmente disconexo Z, entonces usando la Proposición VI.1.22 se llega a que

$$\mathbb{B}(\mathcal{G})_n \otimes_{\mathcal{G}} \mathscr{C}_c(Z) \cong \mathscr{C}_c(\mathcal{G}^{(n+1)} \times_{\mathcal{G}} Z) \cong \mathscr{C}_c(\mathcal{G}^{(n)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z).$$

Más aún, los morfismos $(d_i)_* \otimes_{\mathcal{G}} \mathscr{C}_c(Z)$ vienen inducidos por los morfismos $\delta_i\colon \mathcal{G}^{(n)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z \to \mathcal{G}^{(n-1)} \times_{\mathcal{G}^{(0)}} Z$ dados por

$$\begin{cases} \delta_0(g_1,\dots,g_n,z) & = (g_2,\dots,g_n,z) \\ \delta_i(g_1,\dots,g_n,z) & = (g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n,z)\, i<n \\ \delta_n(g_1,\dots,g_n,z) & = (g_1,\dots,g_{n-1},g_n\bullet z). \end{cases}$$

Escribimos $\mathbb{H}(\mathcal{G},Z)$ para el complejo resultante. Como observamos, su homología calcula $H_*(\mathcal{G},\mathscr{C}_c(Z))$. Si $Z=\mathcal{G}^{(0)}$, entonces $\mathbb{H}(\mathcal{G},\mathcal{G}^{(0)})$ puede identificarse con el complejo $\mathbb{H}(\mathcal{G})$ asociado al nervio de $\mathcal{G}$ descrito en el Ejemplo VI.1.13.

VI.1.7. Homología de Hochschild y sus variantes

Sea A una ℓ-álgebra con unidades locales. Consideremos el complejo $\mathbb{N}_0$-graduado de ℓ-módulos $\mathbb{HH}(A/\ell)$ dado por $\mathbb{HH}(A/\ell)_n = A^{\otimes_\ell n+1}$ junto con los morfismos de borde

$$b(a_0\otimes\cdots\otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n + (-1)^n a_na_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n. \quad \text{(VI.1.28)}$$

Llamamos a $\mathbb{HH}(A/\ell)$ el ***complejo de Hochschild*** de A y su homología $HH_*(A/\ell)$ la ***homología de Hochschild*** de A (relativa a ℓ).

Observación VI.1.29. En [Lod98, Section 1.4.3] el complejo $\mathbb{HH}(A/\ell)$ se denota $C^{\mathrm{naiv}}(A/\ell)$ y se llama el ***complejo de Hochschild naive***. Para un álgebra A arbitraria, su homología de Hochschild puede diferir de la definida en [Lod98, Section 1.4.1]; sin embargo ambas definiciones coinciden para álgebras con unidades locales por [Lod98, Proposition 1.4.4 y Proposition 1.4.8].

Dado un A-bimódulo M, escribimos $[M,A]$ para el ℓ-módulo generado por los conmutadores $[m,a]=ma-am$ y

$$M_\# = M/[M,A] \quad \text{(VI.1.30)}$$

para el ℓ-módulo cociente. Viendo a M como un módulo a izquierda sobre el álgebra envolvente $A\otimes_\ell A^{\mathrm{op}}$, tenemos un isomorfismo de ℓ-módulos

$$M_\# \cong A\otimes_{A\otimes A^{\mathrm{op}}} M.$$

Sea B otra ℓ-álgebra tal que A es una subálgebra de B que contiene un sistema de unidades locales de B (y por lo tanto también de A). Considerando el A-bimódulo $B^{\otimes_A n+1}$ para cada $n\geq 0$, definimos

$$\mathbb{HH}(B/A)_n = B_\#^{\otimes_A n+1} \cong A\otimes_{A\otimes A^{\mathrm{op}}} B^{\otimes_A n+1}.$$

El morfismo de borde (VI.1.28) desciende a un morfismo $b\colon \mathbb{HH}(B/A)_{*+1}\to\mathbb{HH}(B/A)_*$ que hace de $\mathbb{HH}(B/A)$ un complejo de cadenas.

Observación VI.1.31. Si B es un álgebra Λ-graduada entonces $B^{\otimes_\ell n+1}$ es un ℓ-módulo graduado. Si $A\subset B_0$, entonces $B^{\otimes_A n+1}$ también es graduado. En ambos casos la graduación está dada por la asignación en tensores elementales $|b_0\otimes\cdots\otimes b_n| = |b_0|+\cdots+|b_n|$. La graduación $B^{\otimes_A n+1}$ induce una en el cociente $B_\#^{\otimes_A n+1}$. Se sigue que $\mathbb{HH}(B/A)$ y $\mathbb{HH}(B/\ell)$ son complejos de módulos graduados con morfismos de borde homogéneos de grado cero, y tales que el morfismo canónico de comparación $\mathbb{HH}(B/\ell)\to\mathbb{HH}(B/A)$ es compatible con la graduación.

Lema VI.1.32. Sea B una ℓ-álgebra y $A\subset B$ una ℓ-subálgebra conmutativa. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los conjuntos finitos de idempotentes ortogonales de A. Supongamos que

I) para cada $a_1,\cdots,a_n\in A$, existe $F\in\mathscr{F}$ tal que $\{a_1,\cdots,a_n\}\subset \mathrm{span}_\ell F$;

II) A contiene un sistema de unidades locales de B.

Entonces la proyección canónica
$$\mathbb{HH}(B/\ell) \twoheadrightarrow \mathbb{HH}(B/A)$$
es un cuasi-isomorfismo.

Demostración. Para cada $F \in \mathscr{F}$, $\ell F := \operatorname{span}_\ell F \subset A$ es una subálgebra unital con unidad $p_F = \sum_{p\in F} p$. La hipótesis I) implica que el sistema $\{\ell F\}_{F\in\mathscr{F}}$ es filtrante y que $\bigcup_{F\in\mathscr{F}} \ell F = A$. Por II), existe un sistema de unidades locales $\mathscr{E} \subset A$ que es un sistema de unidades locales de B; en particular $B = \bigcup_{p\in\mathscr{E}} pBp$. Por lo observado anteriormente, para cada $p \in \mathscr{E}$ existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $p \in \ell F$; por lo tanto $p \in p_F B p_F$ y entonces $pBp \subset p_F B p_F$. Esto implica que $B = \bigcup_{F\in\mathscr{F}} p_F B p_F$, lo cual implica que $\{p_F : F \in \mathscr{F}\}$ es un sistema de unidades locales para B. En particular la inclusión $A \subset B$ es el colímite sobre $F \in \mathscr{F}$ de las inclusiones unitales $\ell F \subset B_F := p_F B p_F$, y el morfismo de la proposición es el colímite sobre $F \in \mathscr{F}$ de las proyecciones $\mathbb{HH}(B_F/\ell) \to \mathbb{HH}(B_F/\ell F)$. En consecuencia podemos asumir que $A = \ell F$ es una suma directa de copias de ℓ, y que la inclusión $A \subset B$ es un morfismo unital de ℓ-álgebras. Bajo estas hipótesis el lema es un caso particular de [Lod98, Theorem 1.2.13]. ◇

VI.1.8. Homología cíclica

En esta sección damos una breve introducción de la homología cíclica de módulos (semi)cíclicos, siguiendo la presentación de [Lod98, Section 2.5].

Un ***ℓ-módulo cíclico*** es un ℓ-módulo simplicial $M_\bullet$ junto con una $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$-acción en M_n para cada $n \geq 0$, dada por morfismos $t_n : M_n \to M_n$ sujetos a las siguientes relaciones de compatibilidad:

$$t_n^{n+1} = \mathrm{id}, \tag{VI.1.33}$$
$$d_i t_n = -t_{n-1} d_{i-1} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n, \tag{VI.1.34}$$
$$d_0 t_n = (-1)^n d_n, \tag{VI.1.35}$$
$$s_i t_n = -t_{n+1} s_{i-1} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n,$$
$$s_0 t_n = (-1)^n t_{n+1}^2 s_n.$$

Un ***ℓ-módulo semicíclico*** (llamado un módulo precíclico en [Lod98, página 77]) es un ℓ-módulo semisimplicial $M_\bullet$ con morfismos $t_n : M_n \to M_n$ de orden $n+1$ que satisfacen (VI.1.33), (VI.1.34) y (VI.1.35). Por definición todo módulo cíclico es semicíclico. Nuestra motivación para considerar módulos semicíclicos proviene del siguiente ejemplo.

Ejemplo VI.1.36. Sea R una ℓ-álgebra unital. El ***ℓ-módulo cíclico estándar*** $C^{\mathrm{cyc}}(R)$ asociado a R [Lod98, Proposition 2.5.4] es el módulo simplicial subyacente a $\mathbb{HH}(R)$ junto con la $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$-acción en $\mathbb{HH}(R)_n = R^{\otimes n+1}$ dada por la permutación cíclica en tensores elementales. La definición de los operadores de degeneración depende de que R sea unital. Para un álgebra A no necesariamente unital, podemos definir los morfismos de cara y los operadores cíclicos de igual manera, por lo que se tiene definiido un módulo semicíclico $C^{\mathrm{cyc}}(A)$.

Ejemplo VI.1.37. Sean $A \subset B$ dos ℓ-álgebras como en el Lema VI.1.32. En particular $B = \bigcup_{p\in\mathscr{F}} pBp$ es una unión filtrante, cada esquina pBp con $p \in \mathscr{F}$ es unital, y $C^{\mathrm{cyc}}(pBp)$ es un módulo cíclico cuyas degeneraciones estás definidas por la inserción de p en el lugar apropiado. Si $p, q \in \mathscr{F}$ y $pBp \subset qBq$, entonces para cada $a_0, \ldots, a_n \in pBp$ se tiene que

$$\begin{aligned} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes q \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_i p \otimes q \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes pq \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &= a_0 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes p \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tienen morfismos de degeneraciones bien definidos en $C^{\mathrm{cyc}}(B) = \operatorname{colim}_{p\in\mathscr{F}} C^{\mathrm{cyc}}(pBp)$, por lo que $C^{\mathrm{cyc}}(B)$ resulta un módulo cíclico.

Dado un módulo semicíclico M, se definen operadores $b, b' \colon M_n \to M_{n-1}$ y $N \colon M_n \to M_n$ por $b = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i$, $b' = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i$ y $N = \sum_{i=0}^{n} t^i$, que satisfacen las relaciones $b(1-t) = (1-t)b'$ y $b'N = Nb$. En particular tenemos un bicomplejo $CC(M)$ con diferenciales que anti-conmutan del siguiente modo:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dotted, "b"'] & {} \arrow[d, dotted, "-b'"'] & {} \arrow[d, dotted, "b"'] & {} \arrow[d, dotted, "-b'"'] & \\
M_2 \arrow[d, "b"'] & M_2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & M_2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & M_2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, dotted, "N"'] \\
M_1 \arrow[d, "b"'] & M_1 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & M_1 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & M_1 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & \cdots \arrow[l, dotted, "N"'] \\
M_0 & M_0 \arrow[l, "1-t"'] & M_0 \arrow[l, "N"'] & M_0 \arrow[l, "1-t"'] & \cdots \arrow[l, dotted, "N"']
\end{tikzcd} \tag{VI.1.38}$$

La homología de Hochschild $H_*(M)$ de M es la homología de $\mathbb{HH}(M) = (M, b)$. La ***homología cíclica*** de M es la homología de la totalización de $CC(M)$,

$$\mathbb{HC}(M) = \operatorname{Tot}(CC(M)), \qquad HC_n(M) = H_n(\mathbb{HC}(M)). \tag{VI.1.39}$$

Observemos que el bicomplejo definido anteriormente puede extenderse, repitiendo las columnas infinitamente hacia la izquierda, para obtener un bicomplejo concentrado en el semiplano superior $CC^{\mathrm{per}}(M)$. El truncamiento al segundo cuadrante resulta un subcomplejo $CC^-(M)$. Los complejos ***periódico*** y ***cíclico negativo*** de M son las totalizaciones (tomando productos) $\mathbb{HP}(M) = \operatorname{Tot}(CC^{\mathrm{per}}(M))$ y $\mathbb{HN}(M) = \operatorname{Tot}(CC^-(M))$ respectivamente. Un morfismo $\phi : M \to N$ de complejos semicíclicos es un ***cuasi-isomorfismo*** si induce un isomorfismo en homología de Hochschild. Esto implica que ϕ induce un isomorfismo en homología cíclica y sus variantes.

Ejemplo VI.1.40. Como en la Observación VI.1.29, si A es un anillo con unidades locales, entonces $\mathbb{HC}(A) := \mathbb{HC}(C^{\mathrm{cyc}}(A))$ calcula la homología cíclica de A; lo mismo es cierto para sus variantes negativa y periódica.

Ejemplo VI.1.41. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide amplio y $\mathcal{G}_{\mathrm{cyc}}$ el espacio débilmente booleano simplicial del Ejemplo VI.1.17. Tenemos una $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$-acción en $\mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}}$ dada por permutaciones cíclicas,

$$\tau_n \colon \mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}} \to \mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}}, \qquad \tau_n(g_0, g_1, \ldots, g_n) = (g_n, g_0, \ldots, g_{n-1}).$$

Luego cada módulo $\mathscr{C}_c(\mathcal{G}^n_{\mathrm{cyc}})$ viene equipado con una acción de $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ dada por $t_n = (-1)^n(\tau_n)_*$. Estos operadores son compatibles con la estructura simplicial y hacen de $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathcal{G}) = \mathscr{C}_c(\mathcal{G}^\bullet_{\mathrm{cyc}})$ un módulo cíclico.

Ejemplo VI.1.42. Los módulos $\{\mathbb{B}_n(\mathcal{G})\}_{n\geq 0}$ del Ejemplo VI.1.27 junto con operadores de caras y degeneración definidos allí forman un ℓ-módulo simplicial $\mathbb{B}(\mathcal{G})$. Sea

$$\tau_n \colon B_n(\mathcal{G}) \to B_n(\mathcal{G})$$
$$\tau_n(g_0, \ldots, g_n) = \begin{cases} ((g_0, \ldots, g_{n-1})^{-1}, g_0, \ldots, g_{n-2}, g_{n-1}g_n) & n \geq 1 \\ g_0 & n = 0. \end{cases}$$

Los operadores $t_n = (-1)^n(\tau_n)_*$ hacen de $\mathbb{B}(\mathcal{G})$ un módulo cíclico.

Ejemplo VI.1.43. Sea

$$\tau_n \colon \mathcal{G}^{(n)} \to \mathcal{G}^{(n)}$$
$$\tau_n(g_1, \ldots, g_n) = ((g_1, \ldots, g_n)^{-1}, g_1, \ldots, g_{n-1}).$$

El módulo simplicial $\mathbb{H}(\mathcal{G})$ equipado con los operadores $t_n = (-1)^n(\tau_n)_*$ es un módulo cíclica.

Observación VI.1.44. Sea M un ℓ-módulo cíclico y $M_{-1} = \operatorname{coker}(b\colon M_1 \to M_0)$. Por [Lod98, 2.5.7], el complejo $(M_\bullet, b')$ es siempre contráctil. Si además asumimos que $(M_\bullet, b)$ es (puramente) exacto en grados positivos, obtenemos un bicomplejo con columnas (puramente) exactas

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dotted, "b"'] & {} \arrow[d, dotted, "-b'"'] & {} \arrow[d, dotted, "b"'] & {} \arrow[d, dotted, "-b'"'] & \\
M_2 \arrow[d, "b"'] & M_2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & M_2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & M_2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, dotted, "N"'] \\
M_1 \arrow[d, "b"'] & M_1 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & M_1 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"'] & M_1 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"'] & {} \arrow[l, dotted, "N"'] \\
M_0 \arrow[d] & M_0 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & M_0 \arrow[l, "N"'] \arrow[d] & M_0 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d] & {} \arrow[l, dotted, "N"'] \\
M_{-1} \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & M_{-1} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & {} \arrow[l, dotted] \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Observación VI.1.45. Sea C un complejo cíclico y $s\colon C \to C[1]$ una la llamada degeneración extra que satisface $1 = sb' + b's$. Sea $B\colon C \to C[1]$, $B = (1-t)sN$. La tupla $M(C) = (C, b, B)$ es un ***complejo mixto***; esto quiere decir que $b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$. Es posible definir bicomplejos cíclico, cíclico negativa y cíclico periódico asociados a un complejo mixto [Kas87]. Sus totalizaciones son los módulos graduados que en grado n son $\mathbb{HC}(M) = \bigoplus_{j\geq 0} M_{n-2j}$, $\mathbb{HP}(M)_n = \prod_{j\in\mathbb{Z}} M_{n+2j} \supset \mathbb{HN}(M)_n = \prod_{j\geq 0} M_{n+2j}$, con morfismos de borde inducidos por $b+B$. En el caso de $M(C)$, la totalización de cada uno de los bicomplejos es cuasi-isomorfa a la definida anteriormente para C. Una forma explícita para el cuasi-isomorfismo $\mathbb{HC}(M(C)) \to \mathbb{HC}(C)$ puede encontrarse en [LQ84, Proposition 1.5]. La misma fórmula funciona en el caso de $\mathbb{HN}$ y $\mathbb{HP}$. Si M y N son complejos mixtos con b y B sus morfismos de borde descendientes y ascendentes respectivamente, un ***S-morfismo*** $G^\bullet\colon M \to N$ es una sucesión de morfismos lineales homogéneos $G^n\colon M \to N[2n]$, $n \geq 0$, tales que $[G^0, b] = 0$ y $[G^{n+1}, b] = -[G^n, B]$ para todo $n \geq 0$. Si $G^\bullet$ es un S-morfismo, entonces $G^\infty = \sum_{n\geq 0} G^n\colon \mathbb{HP}(M) \to \mathbb{HP}(N)$ es un morfismo de complejos, que envía $\mathbb{HN}(M) \to \mathbb{HN}(N)$ y por tanto induce un morfismo de complejos $\mathbb{HC}(M) \to \mathbb{HC}(N)$. Cada uno de estos morfismos es un cuasi-isomorfismo si G^0 lo es.

VI.2. El complejo de Hochschild de un álgebra de Steinberg

En esta sección relacionamos la homología de Hochschild de un álgebra de Steinberg con el complejo $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}$ del Ejemplo VI.1.17. A lo largo de la sección fijamos un grupoide amplio $\mathscr{G}$ con espacio de unidades X.

Lema VI.2.1. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los conjuntos finitos de idempotentes ortogonales de $\mathscr{A}_\ell(X)$ y sea $n \geq 1$. Para cada $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}_\ell(X)$ existe $F \in \mathscr{F}$ tal que $a_1, \ldots, a_n \in \ell F$.

Demostración. Basta ver que la conclusión del lema es válida cuando cada elemento a_i es la función característica de algún abierto compacto de X, ya que estos elementos generan a $\mathscr{A}_\ell(X)$. Sean $A_1, \ldots, A_n \subset X$ subespacios compacto-abiertos. Para cada $I \subset [n]_+ = \{1, \ldots, n\}$ sean $I^c = [n]_+ \setminus I$ y $A_I = \bigcap_{i\in I} A_i \setminus \bigcup_{j\in I^c} A_j$. Como X es Hausdorff, cada subconjunto A_I es compacto-abierto, así que $\chi_{A_I} \in \mathscr{A}_\ell(X)$. Más todavía, tenemos que $A_I \cap A_J = 0$ para cada $I \neq J$ y también que para cada $i \in [n]_+$, $A_i = \bigsqcup_{i\in I} A_I$. En consecuencia $F = \{\chi_{A_I} : I \subset [n]_+\} \in \mathscr{F}$ y $\chi_{A_i} = \sum_{i\in I} \chi_{A_I} \in \ell F$. ◇

Corolario VI.2.2. La proyección canónica

$$\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/k) \to \mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}^{(0)}))$$

es un cuasi-isomorfismo.

Demostración. El Lema VI.2.1 implica que $A = \mathscr{A}_\ell(X)$ cumple con la hipótesis (I) del Lema VI.1.32. Además, los χ_K con $K \subset X$ compacto-abierto forman un sistema de unidades locales de $B = \mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$, por lo que la hipótesis (II) del lema citado también se satisface. Basta aplicar entonces el Lema VI.1.32. ◇

Lema VI.2.3. Para cada $n \geq 0$ tenemos un epimorfismo de $\mathscr{A}_\ell(X)$-bimódulos

$$\mathscr{A}_\ell(X) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(X)\otimes_\ell \mathscr{A}_\ell(X)^{\mathrm{op}}} \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)}) \twoheadrightarrow \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}}),\ \chi_U \otimes \chi_{[A_0|\cdots|A_n]} \mapsto \chi_{(UA_0|\cdots|A_nU)}.$$

Demostración. Como X es Hausdorff, se tiene que $\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} = \{(g_0, \dots, g_n) \in \mathscr{G}^{(n+1)} : r(g_0) = s(g_n)\}$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{G}^{(n+1)}$. En consecuencia tenemos un morfismo de restricción $\mathrm{res}\colon \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)}) \to \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}})$ que envía $\chi_{[A_0|\cdots|A_n]}$ a $\chi_{(A_0|\cdots|A_n)}$. Basta ver que esta aplicación desciende al cociente por conmutadores $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)})_\natural$. Esto equivale a ver que $\mathrm{res}(\chi_U \cdot \chi_{[A_0|\cdots|A_n]}) = \mathrm{res}(\chi_{[A_0|\cdots|A_n]} \cdot \chi_U)$ para cada abierto compacto $U \subset X$ y bisecciones abiertas y compactas $A_0, \dots, A_n \subset \mathscr{G}$, lo cual se sigue del Lema VI.1.20 iii). ◇

Teorema VI.2.4. Sea $n \geq 0$. Si $\mathscr{G}$ es un grupoide amplio, se tiene un morfismo suryectivo de módulos semicíclicos

$$\mu\colon C^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X)) \to \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{cyc}}), \tag{VI.2.5}$$
$$\mu(\phi_0 \otimes \cdots \otimes \phi_n)(g_0, \dots, g_n) := \phi_0(g_0) \cdots \phi_n(g_n).$$

Más aún, si $\mathscr{G}$ es un grupoide Λ-graduado, entonces μ es un morfismo homogéneo de grado cero entre ℓ-módulos $(\Lambda \times \mathbb{N}_0)$-graduados.

Demostración. Empleando la notación (VI.1.30) para $\mathscr{A}_\ell(X)$-bimódulos, y aplicando el Corolario VI.1.26, tenemos isomorfismos

$$\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X))_n = \mathscr{C}_c(\mathscr{G})_\#^{\otimes_{\mathscr{A}_\ell(X)} n+1} \cong \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)})_\#.$$

Aplicando el Lema VI.2.3 obtenemos los epimorfismos deseados, que definen un morfismo de módulos semicíclicos pues vienen inducidos por una inclusión de espacios semicíclicos. ◇

VI.3. Primeros cálculos

En esta sección nos concentramos en el cálculo de la homología cíclica del complejo $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$, con la intención de obtener información sobre $\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}))$ en casos favorables. Tomamos como inspiración el cálculo de la homología de Hochschild y la homología cíclica (periódica, negativa) de álgebras de grupo debido a Burghelea ([Bur85]), como se presenta en [Lod98, Sección 7.5].

VI.3.1. Subespacios invariantes de $\mathrm{Iso}(\mathscr{G})$ y sumandos directos $\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}))$

Fijemos un grupoide amplio $\mathscr{G}$. Decimos que $W \subset \mathrm{Iso}(\mathscr{G})$ es ***invariante*** si

$$\mathscr{G} \bullet W = \{gwg^{-1} : s(g) = r(w), w \in W\} \subset W.$$

Un tal subespacio define un subobjeto cíclico de $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{cyc}}$; concretamente

$$\Gamma(\mathscr{G}, W)_n := \{(g_0, \dots, g_n) \in \mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} : g_0 \cdots g_n \in W\}.$$

Observemos también que cada espacio $\Gamma(\mathscr{G}, W)_n$ es abierto (resp. cerrado) si W es abierto (resp. cerrado), dado que $\Gamma(\mathscr{G}, W)_n$ es la preimagen de W bajo el morfismo producto $\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}} \to \mathrm{Iso}(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{G}$ es Λ-graduado, la restricción del morfismo de graduación hace de W un $\mathscr{G}$-espacio Λ-graduado. Una verificación directa relaciona a los espacios $\Gamma(\mathscr{G}, W)$ con la homología de grupoides.

Lema VI.3.1. La asignación

$$\mathscr{G}^{(n)} \times_{\mathscr{G}^{(0)}} W \to \Gamma(\mathscr{G}, W)_n, \; ((g_1, \ldots, g_n), w) \mapsto (w(g_1 \ldots g_n)^{-1}, g_1, \ldots, g_n)$$

es un homeomorfismo con inversa $(g_0, \ldots, g_n) \mapsto ((g_1, \ldots, g_n), g_0 g_1 \cdots g_n)$. Equipando a W con la estructura de $\mathscr{G}$-espacio a izquierda dada por la conjugación, el homeomorfismo anterior es un isomorfismo de espacios simpliciales entre $\Gamma(\mathscr{G}, W)$ y el espacio simplicial $\mathscr{G}^{(\bullet)}{}_s \times_r W$ asociado a la homología de grupoides de $\mathscr{G}$ con coeficientes en W. La estructura cíclica de $\Gamma(\mathscr{G}, W)$ se corresponde con en el lado izquierdo con la dada por

$$t((g_1, \ldots, g_n), w) = ((w(g_1 \cdots, g_n)^{-1}, g_1, \ldots, g_{n-1}), g_n w g_n^{-1}).$$

En particular, tenemos un isomorfismo de módulos cíclicos

$$\mathbb{H}(\mathscr{C}_c(\Gamma(\mathscr{G}, W))) \cong \mathbb{H}(\mathscr{G}, W).$$

$\diamond$

Corolario VI.3.2. Para todo grupoide amplio $\mathscr{G}$ se tiene que $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) \cong \mathbb{H}(\mathscr{G}, \mathscr{G}^{\mathrm{Iso}})$. $\diamond$

Observación VI.3.3. Si $\mathscr{G}$ es un grupoide amplio Λ-graduado, y equipamos $\mathscr{G}^{(n)}$ con la graduación trivial y W con la graduación canónica como subespacio de $\mathscr{G}$, entonces el homeomorfismo del Lema VI.3.1 es compatible con la graduación de $\Gamma(\mathscr{G}, W)$ inducida por la de $\mathscr{G}^n_{\mathrm{cyc}}$.

Recordemos que un grupoide se dice ***principal*** si $\mathrm{Iso}(\mathscr{G}) = \mathscr{G}^{(0)}$.

Proposición VI.3.4. Si $\mathscr{G}$ es un grupoide principal, entonces $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) \cong \mathbb{H}(\mathscr{G})$ como módulos cíclicos.

Demostración. Como $\mathscr{G}$ es principal, $\mathscr{G}^\bullet_{\mathrm{cyc}} = \Gamma(\mathscr{G}, \mathscr{G}^{(0)})$. Ahora resta aplicar el Lema VI.3.1. $\diamond$

Lema VI.3.5. Si W es un subespacio abierto (resp. abierto y cerrado) de $\mathrm{Iso}(\mathscr{G})$, entonces $\mathbb{H}(\mathscr{G}, W)$ es un subcomplejo (resp. sumando directo) de $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$. Más aún, si W es abierto y cerrado en $\mathscr{G}$, entonces la inclusión $\Gamma(\mathscr{G}, W)_\bullet \subset \mathscr{G}^{\bullet+1}$ induce una sección $\mathbb{H}(\mathscr{G}, W) \to \mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X))$.

Demostración. La primera afirmación es una consecuencia inmediata del Lema VI.3.1 y de que si Z es un subespacio abierto y cerrado de un espacio Y, entonces $\mathscr{C}_c(Y) \cong \mathscr{C}_c(Z) \oplus \mathscr{C}_c(Y \setminus Z)$. Como $\Gamma(\mathscr{G}, W)_n$ es la preimagen de W a través de la función continua producto $\mathscr{G}^{(n+1)} \to \mathscr{G}$, si W es abierto y cerrado en $\mathscr{G}$ entonces $\Gamma(\mathscr{G}, W)_n$ es un subespacio abierto y cerrado de $\mathscr{G}^{(n+1)}$. Por lo tanto la inclusión define un morfismo $\mathscr{C}_c(\Gamma(\mathscr{G}, W)) \to \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)})$, que puede ser postcompuesto con la proyección $\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X))_n = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n+1)})_\natural$. Su inversa a derecha está dada por la composición de (VI.2.5) con la proyección $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) \to \mathscr{C}_c(\Gamma(\mathscr{G}, W))$.

$\diamond$

Corolario VI.3.6. Para cada grupoide amplio $\mathscr{G}$, el módulo semicíclico $\mathbb{H}(\mathscr{G})$ es un submódulo semicíclico de $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$. Si $\mathscr{G}$ es Hausdorff, entonces $\mathbb{H}(\mathscr{G})$ es un sumando directo de tanto $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$ como $\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X))$, y conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{HH}(\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})/\mathscr{A}_\ell(X)) \arrow[r, "(VI.2.5)"] & \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) \\
\mathbb{H}(\mathscr{G}) \arrow[u, hook] \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

$\diamond$

VI.3.2. Homología con coeficientes en órbitas discretas de $\mathrm{Iso}(\mathscr{G})$

Sea $\eta \in \mathrm{Iso}(\mathscr{G})$ y supongamos que $\mathscr{G} \bullet \eta$ es discreto. Llamemos $s(\eta) = r(\eta) = x$ y $\mathscr{H} := (\mathscr{G}_x^x)_\eta$ al subgrupo centralizador de η.

Como $s\colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}^{(0)}$ es étale, la fibra $\mathscr{G}^x$ sobre x es discreta, y así lo son entonces todos sus subespacios como $\mathscr{G}_x^x$ y todos los centralizadores de este último grupo. En particular s hace de $\mathscr{G}^x$ un $\mathscr{H}$-espacio étale.

Lema VI.3.1. El $\mathscr{H}$-módulo $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x)$ es playo.

Demostración. Por la Proposición VI.1.21, y el hecho de que $\mathscr{G}^x$ es un $\mathscr{H}$-espacio étale, es suficiente ver que la acción $\mathscr{G}^x \curvearrowleft \mathscr{H}$ es básica; es decir, basta ver que la función

$$\mathscr{G}^x \times \mathscr{H} \to \mathscr{G}^x \times_{\mathscr{G}^x/\mathscr{H}} \mathscr{G}^x,\ (\alpha, h) \mapsto (\alpha, \alpha h)$$

es un homeomorfismo. Esto sucede porque la función en cuestión es una biyección entre espacios discretos. ◇

Lema VI.3.2. Se tiene un homeomorfismo

$$\mathscr{G}^x/\mathscr{H} \to \mathscr{G} \bullet \eta, \quad [g] \mapsto g\eta g^{-1}.$$

Demostración. La función es una biyección entre espacios discretos. ◇

Proposición VI.3.3. $H_*(\mathscr{G}, \mathscr{G}^x/\mathscr{H}) \cong H_*(\mathscr{H})$.

Demostración. Adaptamos la demostración del Lema de Schapiro para grupoides de [Mil, Lemma 2.19] a nuestro contexto. Consideramos la resolución playa estándar de $\mathscr{C}_c(\mathscr{H}^\bullet) \to \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^{(0)}) = \ell$ como $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{H})$-módulo, dual a la del Ejemplo VI.1.27. Por el Lema VI.3.1 tenemos que $P_\bullet = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{H})} \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^\bullet)$ es una resolución playa de $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{H})} \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^{(0)})$. Aplicando ahora la Proposición VI.1.22, el módulo a que estamos resolviendo es $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{H})} \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^{(0)}) \cong \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x \times_{\mathscr{H}} \mathscr{H}^{(0)}) = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x/\mathscr{H})$. En consecuencia podemos calcular $H_\bullet(\mathscr{G}, \mathscr{G}^x/\mathscr{H})$ como la homología del complejo $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})} P_\bullet$. Como $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})} \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^x) = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)} \times_{\mathscr{G}} \mathscr{G}^x) = \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^{(0)})$, se sigue que $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})} P_\bullet \cong \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^{(0)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{H})} \mathscr{C}_c(\mathscr{H}^\bullet)$ cuya homología es $H_*(\mathscr{H})$. ◇

Teorema VI.3.4. Sean $\mathscr{G}$ un grupoide amplio y Hausdorff y $X = \mathscr{G}^{(0)}$. Supongamos que $\mathrm{Iso}(\mathscr{G}) \setminus X$ es discreto. Sea $\mathscr{R} \subset X$ tal que todo elemento de $\mathscr{R}$ tiene isotropía no trivial y cada elemento de X con isotropía no trivial es isomorfo en $\mathscr{G}$ a exactamente un elemento de $\mathscr{R}$. Para cada $x \in \mathscr{R}$, fijemos un conjunto de representantes Z_x de las clases no triviales de conjugación de $\mathscr{G}_x^x$. Tenemos un cuasi-isomorfismo de módulos cíclicos

$$\mathbb{H}(\mathscr{G}) \oplus \bigoplus_{x \in \mathscr{R}} \bigoplus_{\eta \in Z_x} \mathbb{H}((\mathscr{G}_x^x)_\eta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}).$$

Más todavía, si $\mathscr{G}$ es Λ-graduado, entonces bajo el cuasi-isomorfismo anterior la componente homogénea de grado m de $\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G})$ se corresponde con

$$\bigoplus_{x \in \mathscr{R}} \bigoplus_{\substack{\eta \in Z_x, \\ |\eta| = m}} \mathbb{H}((\mathscr{G}_x^x)_\eta)$$

si $m \in \Lambda \setminus \{0\}$ y con

$$\mathbb{H}(\mathscr{G}) \oplus \bigoplus_{x \in \mathscr{R}} \bigoplus_{\substack{\eta \in Z_x, \\ |\eta| = 0}} \mathbb{H}((\mathscr{G}_x^x)_\eta).$$

si $m = 0$.

Demostración. Como se tiene una descomposición en conjuntos abiertos, cerrados e invariantes de la forma

$$\mathrm{Iso}(\mathscr{G}) = X \sqcup \bigsqcup_{x\in\mathscr{R}} \bigsqcup_{\eta\in Z_x} \mathscr{G}\bullet\eta$$

entonces

$$\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{G}) \cong \mathbb{H}(\mathscr{G}, X) \oplus \bigoplus_{x\in\mathscr{R}} \bigoplus_{\eta\in Z_x} \mathbb{H}(\mathscr{G}, \mathscr{G}\bullet\eta).$$

Aplicando el Lema VI.3.2 y la Propsosición. VI.3.3 se concluye la prueba. ◇

Observación VI.3.5. El Teorema VI.3.4 aplica en particular a todo grupoide discreto, lo cual recupera como caso particular el cálculo de Burghelea de la homología de Hochschild de las álgebras de grupo [Bur85, Theorem I' 1)]. El análogo para la homología cíclica ([Bur85, Theorem I' 2)]) será generalizado más adelante en el Teorema VI.3.2.

VI.3.3. Acciones de semigrupos con puntos fijos esparcidos

Reformulamos ahora el Teorema VI.3.4 para el caso del grupoide de gérmenes de la acción de un semigrupo. Sea $\mathscr{S}$ un ***semigrupo inverso***, es decir, un semigrupo tal que para todo elemento $s\in\mathscr{S}$ existe un único s^* que es el ***inverso*** de s en el sentido de que $ss^*s = s^*$ y $s^*ss^* = s$. El conjunto $\mathscr{S}\supset\mathscr{E}(\mathscr{S})$ de idempotentes forma un subsemigrupo conmutativo [Pat99, Proposition 2.1.1]. Sea X un espacio localmente compacto y Hausdorff. El conjunto

$$\mathscr{I}(X) = \{f : U \to V : U, V \subset X \text{ abiertos y } f \text{ es homeomorfismo}\}.$$

es un semigrupo inverso con las inversas parciales y la composición parcial. Una acción $\mathscr{S}\curvearrowright X$ es un morfismo de semigrupos $\phi\colon\mathscr{S}\to\mathscr{I}(X)$. Escribiremos $\mathrm{Dom}(s)$ para el dominio de $\phi(s)$ y $s\cdot x = \phi(s)(x)$. La ***órbita*** de $x\in X$ es

$$\mathrm{Or}(x) = \{s\cdot x : s\in\mathscr{S}, \mathrm{Dom}(s)\ni x\}.$$

Estas son clases de equivalencias de la relación inducida por la acción; escribimos $X/\mathscr{S}$ para el espacio cociente. El ***estabilizador*** de $x\in X$ es

$$\mathrm{Stab}(x) = \{s\in\mathscr{S} : \mathrm{Dom}(s)\ni x, s\cdot x = x\}/\sim$$

donde si $s, t\in\mathscr{S}$ y $x\in\mathrm{Dom}(s)\cap\mathrm{Dom}(t)$, entonces $s\sim t$ si existe $p\in\mathscr{E}(\mathscr{S})$ tal que $x\in\mathrm{Dom}(p)$ y $sp = tp$. La acción $\mathscr{S}\curvearrowright X$ da lugar a un grupoide $\mathscr{S}\rtimes X$, el ***grupoide de gérmenes*** o ***grupoide de transformación*** de la acción [Exe08, Section 4]. Se define como el cociente de $\mathscr{S}\times X$ por la relación de equivalencia $(s,x)\sim(t,y)$ si $x = y$ y existe $p\in\mathscr{E}(\mathscr{S})$ tal que $x\in\mathrm{Dom}(p)$ y $sp = tp$. Las unidades son de la forma $[p,x]$ con $p\in\mathscr{E}(\mathscr{S})$ y $x\in\mathrm{Dom}(p)$. Como los idempotentes en un semigrupo inverso conmutan, dados $e, f\in\mathscr{E}$ y $x\in\mathrm{Dom}(e)\cap\mathrm{Dom}(f)$ tenemos que $[e,x] = [ef,x] = [fe,x] = [f,x]$; por lo tanto $(\mathscr{S}\rtimes X)^{(0)}$ puede identificarse con X víaa $[p,x]\mapsto x$. Las funciones de salida y llegada se definen como $s([t,x]) = x$, $s([t,x]) = t\cdot x$, la composición por $[t', t\cdot x][t,x] = [t't,x]$ y las inversas como $[t,x]^{-1} = [t^*,x]$. En [Ste10, Definition 5.2 and Proposition 5.13] y [Ste10, Theorem 5.17] se dan condiciones para que $\mathscr{S}\rtimes X$ sea amplio o Hausdorff respectivamente.

Observación VI.3.1. Se tiene una biyección $(\mathscr{S}\rtimes X)_x^x\cong\mathrm{Stab}(x)$, $[s,x]\mapsto[s]$; de esto se sigue que el producto de $\mathscr{S}$ hace de $\mathrm{Stab}(x)$ un grupo.

Observación VI.3.2. Todo grupoide amplio $\mathscr{G}$ es un grupoide de gérmenes de la acción del semigrupo $\mathscr{B}(\mathscr{G})$ de bisecciones compactas en su espacio de unidades; si U es una bisección compacta entonces $\mathrm{Dom}(U) := s(U)$ y $U\cdot x := y$ si $r(s^{-1}(x)\cap U) = \{y\}$.

Observación VI.3.3. Si Λ es un grupo abeliano y $c\colon S\to\Lambda$ un morfismo de semigrupos, entonces $\mathscr{S}\rtimes X$ es graduado poniendo $|[s,x]| = c(s)$.

Definición VI.3.4. Decimos que una acción $\mathscr{S} \curvearrowright X$ tiene ***puntos fijos esparcidos*** si para cada $s \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{E}(\mathscr{S})$ existe como máximo un punto $x \in \mathrm{Dom}(s)$ tal que $s \cdot x = x$.

Ejemplo VI.3.5. Sea E un grafo finito y regular, y sea $X_E = \{e_1e_2\cdots : r(e_i) = s(e_{i+1})\ \forall i \geq 1\}$ el conjunto de caminos infinitos de E. Considerando a E^1 con la topología discreta, equipamos a X_E con la topología subespacio de $(E^1)^{\mathbb{N}}$; resulta así compacto y Hausdorff. Asociado a E se tiene un semigrupo

$$S_E = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \text{ caminos finitos tales que } r(\alpha) = r(\beta)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Notamos $\alpha\beta^* := (\alpha, \beta)$. La multiplicación del semigrupo está dada por

$$\alpha\beta^* \cdot \gamma\delta^* := \begin{cases} (\alpha\mu)\delta^* & \text{si } \gamma = \beta\mu \\ \alpha(\delta\mu)^* & \text{si } \beta = \gamma\mu \end{cases}$$

y $\emptyset \cdot x = x \cdot \emptyset = \emptyset$. La inversa de $\alpha\beta^*$ es $\beta\alpha^*$, y $\emptyset^* = \emptyset$.

El semigrupo S_E actúa en X_E; el dominio de $\alpha\beta^*$ es $\beta X_E = \{\beta f_1 f_2 \cdots : s(f_1) = r(\beta),\ r(f_i) = s(f_{i+1})\} = \{\beta\theta : r(\beta) = s(\theta),\ \theta \in X_E\}$ y la acción se define como $\alpha\beta^* \cdot (\beta\theta) := \alpha\theta$. Si $\alpha\beta^* \cdot \beta\theta = \beta\theta$, entonces $\alpha = \beta^*$ y $\alpha\alpha^*$ es idempotente. En consecuencia, la acción tiene puntos fijos esparcidos.

Lema VI.3.6. Si $\mathscr{S} \curvearrowright X$ es una acción con puntos fijos esparcidos, entonces $\mathrm{Iso}(\mathscr{S} \ltimes X) \setminus X$ es discreto.

Demostración. Sea $[s, x] \in \mathrm{Iso}(\mathscr{S} \ltimes X) \setminus X$; in particular $s \notin \mathscr{E}(\mathscr{S})$. Como la acción tiene puntos fijos esparcidos, el conjunto

$$[s, \mathrm{Dom}(s)] \cap \mathrm{Iso}(\mathscr{S} \ltimes X) = \{[s, y] : y \in \mathrm{Dom}(s), s \cdot y = y\} = \{[s, x]\}.$$

es abierto en $\mathrm{Iso}(\mathscr{S} \ltimes X)$. ◇

Teorema VI.3.7. Sea $\mathscr{S}$ un semigrupo inverso y X un espacio localmente compacto Hausdorff. Supongamos que tenemos una acción $\mathscr{S} \curvearrowright X$ con puntos fijos esparcidos y que $\mathscr{S} \ltimes X$ es amplio y Hausdorff. Fijamos una familia de representantes $\mathscr{R} \subset X$ de $X/\mathscr{S}$ y para cada $x \in \mathscr{R}$ un conjunto de representantes Z_x de las clases de conjugación no triviales de $\mathrm{Stab}(x)$. Existen entonces cuasi-isomorfismos de módulos cíclicos

$$\mathbb{H}(\mathscr{S} \ltimes X) \oplus \bigoplus_{x \in \mathscr{R}} \bigoplus_{\eta \in Z_x} \mathbb{H}(\mathrm{Stab}(x)_\eta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{S} \ltimes X).$$

La graduación en $\mathscr{S} \ltimes X$ inducida por un morfismo de semigrupos $c : \mathscr{S} \to \Lambda$ induce una descomposición

$${}_m\mathbb{H}^{\mathrm{cyc}}(\mathscr{S} \ltimes X) \sim \begin{cases} \mathbb{H}(\mathscr{S} \ltimes X) \oplus \bigoplus_{x \in \mathscr{R}} \bigoplus_{\eta \in Z_x, c(\eta) = 0} \mathbb{H}(\mathrm{Stab}(x)_\eta) & m = 0 \\ \bigoplus_{x \in X} \bigoplus_{\eta \in Z_x,, c(\eta) = m}\, {}_m\mathbb{H}(\mathrm{Stab}(x)_\eta) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. En vista de la Observación VI.3.1 basta indicar que, por el Lema VI.3.6, podemos aplicar el Teorema VI.3.4. ◇

VI.3.4. Homología cíclica de grupoides

En esta sección calculamos la homología cíclica del módulo cíclico $\mathbb{H}(\mathscr{G})$ descrito en el Ejemplo VI.1.43, así como las variantes negativa y periódica. Necesitaremos algunas herramientas y terminología básica del álgebra homológica relativa que recordamos a continuación. Una ***extensión*** de $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulos

$$K \overset{i}{\rightarrowtail} E \overset{p}{\twoheadrightarrow} Q.$$

se dice ***semi-escindida*** si p tiene una sección $\mathscr{A}(X)$-lineal. Un $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulo P es ***relativamente proyectivo*** si $\hom_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})}(P, -)$ envía extensiones semi-escindidas a sucesiones exactas, y ***relativamente***

libre si $P \cong \mathscr{A}_\ell(\mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{A}(X)} N$ para algún $\mathscr{A}(X)$-módulo N. Una ***resolución (relativamente) proyectiva*** de un $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulo M es un complejo exacto de $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulos

$$\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

que admite una homotopía de contracción $\mathscr{A}_\ell(X)$-lineal, y tal que cada módulo P_i es relativamente proyectivo. Como en el contexto del álgebra homológica clásica, los módulos relativamente proyectivos son relativamente libres. Un morfismo entre dos $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulos se extiende a un morfismos de complejos entre resoluciones proyectivas, y una tal extensión es única a menos de homotopía $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-lineal.

Lema VI.3.1. Sean $\mathscr{G}$ un grupoide amplio con espacio de unidades X y $n \geq 1$. El $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulo unital $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n)})$ es relativamente libre con respecto a $\mathscr{A}_\ell(X)$; en particular, es relativamente proyectivo.

Demostración. En efecto, tenemos que $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n)}) \cong \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(n-1)}) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(X)} \mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$. ◇

Teorema VI.3.2. Sea $\mathscr{G}$ un grupoide amplio. Tenemos cuasi-isomorfismos

$$\mathbb{HC}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{n\geq 0} \mathbb{H}(\mathscr{G})[-2n],\ \mathbb{HN}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_{n\geq 0} \mathbb{H}(\mathscr{G})[2n],\ \mathbb{HP}(\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{H}(\mathscr{G})[2n].$$

de complejos de ℓ-módulos. Consecuentemente tenemos isomorfismos

$$HC_*(\mathscr{G}) \cong \bigoplus_{i\geq 0} H_{*-2i}(\mathscr{G}),\ HN_*(\mathscr{G}) \cong \prod_{i\geq 0} H_{*+2i}(\mathscr{G}),\ HP_*(\mathscr{G}) \cong \prod_{i\in\mathbb{Z}} H_{*+2i}(\mathscr{G}).$$

para todo $* \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. Sea $\mathbb{B}(\mathscr{G})$ el módulo cíclico del Ejemplo VI.1.42; notar que $(\mathbb{B}(\mathscr{G}), b)$ es una resolución de $\mathbb{B}(\mathscr{G})_{-1} = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)})$ por $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-módulos relativamente libres. Por lo tanto, si $n > 0$, todo morfismo de complejos $\mathbb{B}(\mathscr{G}) \to \mathbb{B}(\mathscr{G})[n]$ es $\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})$-linealmente homotópico a cero, dado que extiende al morfismo nulo $\mathscr{C}_c(\mathscr{G}^{(0)}) \to 0$. Como en la Observación VI.1.45, consideramos el complejo mixto asociado $M = (\mathbb{B}(\mathscr{G}), b, B)$ y ponemos $N = (\mathbb{B}(\mathscr{G}), b, 0)$. Definiremos un S-morfismo $G^\bullet\colon M \to N$ recursivamente del siguiente modo: en primer lugar ponemos $G^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{B}(\mathscr{G})}$. Como hemos observado B es homotópica a cero, de manera que existe una homotopía $\mathscr{A}(\mathscr{G})$-lineal G^1 que cumple $[G^1, b] = -B = -G^0 B = -[G^0, B]$. Sea $n \geq 1$ y supongamos definida G^n tal que $[G^n, b] = -G^{n-1}B$. Luego $G^n B b = -G^n b B = (-bG^n + G^{n-1}B)B = -bG^n B$, así que $G^n B$ es un morfismo de complejos $\mathscr{A}(\mathscr{G})$-lineal $\mathbb{B}(\mathscr{G}) \to \mathbb{B}(\mathscr{G})[2n+1]$ y por lo tanto es homotópico a cero. Esto dice que existe $G^{n+1}\colon \mathbb{B}(\mathscr{G}) \to \mathbb{B}(\mathscr{G})[2(n+1)]$ tal que $[G^{n+1}, b] = -G^n B = -[G^n, B]$. Hemos construido entonces un S-morfismo

$$\hat{G}^\bullet = \mathscr{C}_c(\mathscr{G}^0) \otimes_{\mathscr{A}_\ell(\mathscr{G})} G^\bullet : \bar{M} = (\mathbb{H}(\mathscr{G}), b, B) \to \bar{N} = (\mathbb{H}(\mathscr{G}), b, 0)$$

tal que $\hat{G}^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{H}(\mathscr{G})}$, lo cual implica que induce cuasi-isomorfismos a nivel de $\mathbb{HC}$, $\mathbb{HP}$ y $\mathbb{HN}$. ◇

Bibliografía

[AAP05] Gene Abrams and Gonzalo Aranda Pino, *The Leavitt path algebra of a graph*, J. Algebra **293** (2005), no. 2, 319–334, DOI 10.1016/j.jalgebra.2005.07.028. ↑1

[Abr15] Gene Abrams, *Leavitt path algebras: the first decade*, Bull. Math. Sci. **5** (2015), no. 1, 59–120, DOI 10.1007/s13373-014-0061-7. ↑13

[AASM17] Gene Abrams, Pere Ara, and Mercedes Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, 2017. ↑13, 14, 26, 30, 38

[AT11] Gene Abrams and Mark Tomforde, *Isomorphism and Morita equivalence of graph algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 7, 3733–3767, DOI 10.1090/S0002-9947-2011-05264-5. ↑38

[ALPS11] Gene Abrams, Adel Louly, Enrique Pardo, and Christopher Smith, *Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras*, J. Algebra **333** (2011), 202–231, DOI 10.1016/j.jalgebra.2011.01.022. ↑58

[ART23] Gene Abrams, Efren Ruiz, and Mark Tomforde, *Morita equivalence for graded rings*, J. Algebra **617** (2023), 79–112, DOI 10.1016/j.jalgebra.2022.10.036. ↑7

[AGBGP04] P. Ara, M. A. González-Barroso, K. R. Goodearl, and E. Pardo, *Fractional skew monoid rings*, J. Algebra **278** (2004), no. 1, 104–126, DOI 10.1016/j.jalgebra.2004.03.009. ↑66

[AHLS18] Pere Ara, Roozbeh Hazrat, Huanhuan Li, and Aidan Sims, *Graded Steinberg algebras and their representations*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 1, 131–172, DOI 10.2140/ant.2018.12.131. ↑2, 10, 11, 17, 27, 28

[AMP07] P. Ara, M. A. Moreno, and E. Pardo, *Nonstable K-theory for graph algebras*, Algebr. Represent. Theory **10** (2007), no. 2, 157–178, DOI 10.1007/s10468-006-9044-z. ↑1, 14, 26

[AP14] Pere Ara and Enrique Pardo, *Towards a K-theoretic characterization of graded isomorphisms between Leavitt path algebras*, J. K-Theory **14** (2014), no. 2, 203–245, DOI 10.1017/is014006003jkt269. ↑1, 15, 66, 67

[Arn21] Guido Arnone, *Álgebras de Leavitt y K-teoría bivariante hermitiana graduada*, tesis de licenciatura, Buenos Aires, 2021, `https://web.dm.uba.ar/files/tesis_lic/2021/arnone.pdf`. ↑7, 44, 61, 63

[AC23] Guido Arnone and Guillermo Cortiñas, *Graded K-theory and Leavitt path algebras*, J. Algebraic Combin. **58** (2023), no. 2, 399–434, DOI 10.1007/s10801-022-01184-5. ↑4, 44, 53

[Arn23] Guido Arnone, *Lifting morphisms between graded Grothendieck groups of Leavitt path algebras*, J. Algebra **631** (2023), 804–829, DOI 10.1016/j.jalgebra.2023.05.018. MR4594882 ↑4

[Arn25] ______, *Graded homotopy classification of Leavitt path algebras over finite primite graphs*, Rev. Mat. Iberoam., posted on 2025, online first, DOI 10.4171/RMI/1515. ↑4

[ACM24] Guido Arnone, Guillermo Cortiñas, and Devarshi Mukherjee, *Homology of Steinberg algebras* (2024). ↑4

[BK72] A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 304, Springer, Cham, 1972.Zbl 0259.55004 ↑77

[Bur85] Dan Burghelea, *The cyclic homology of the group rings*, Comment. Math. Helv. **60** (1985), no. 3, 354–365, DOI 10.1007/BF02567420. ↑1, 84, 87

[Büh10] Theo Bühler, *Exact categories*, Expo. Math. **28** (2010), no. 1, 1–69, DOI 10.1016/j.exmath.2009.04.004. ↑11

[Car18] Toke Meier Carlsen, *$*$-isomorphism of Leavitt path algebras over $\mathbb{Z}$*, Adv. Math. **324** (2018), 326–335, DOI 10.1016/j.aim.2017.11.018. ↑34, 40

[CDOE24] Toke Meier Carlsen, Adam Dor-On, and Søren Eilers, *Shift equivalences through the lens of Cuntz-Krieger algebras*, Anal. PDE **17** (2024), no. 1, 345–377, DOI 10.2140/apde.2024.17.345. MR4702320 ↑39

[CFST14] Lisa Orloff Clark, Cynthia Farthing, Aidan Sims, and Mark Tomforde, *A groupoid generalisation of Leavitt path algebras*, Semigroup Forum **89** (2014), no. 3, 501–517, DOI 10.1007/s00233-014-9594-z. ↑1, 76

[CT07] Guillermo Cortiñas and Andreas Thom, *Bivariant algebraic K-theory*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 71–123. ↑2, 8, 20, 44, 45, 48, 49, 52, 56

[Cor11] Guillermo Cortiñas, *Algebraic v. topological K-theory: a friendly match*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 103–165. ↑9, 19

[CM21] Guillermo Cortiñas and Diego Montero, *Algebraic bivariant K-theory and Leavitt path algebras*, J. Noncommut. Geom. **15** (2021), no. 1, 113–146, DOI 10.4171/jncg/397. ↑3, 10, 62

[CM20] Guillermo Cortiñas and Diego Montero, *Homotopy classification of Leavitt path algebras*, Adv. Math. **362** (2020), 106961, 26, DOI 10.1016/j.aim.2019.106961. ↑2, 3, 65, 68

[CV22] Guillermo Cortiñas and Santiago Vega, *Bivariant hermitian K-theory and Karoubi's fundamental theorem*, J. Pure Appl. Algebra **226** (2022), no. 12, Paper No. 107124, 32, DOI 10.1016/j.jpaa.2022.107124. ↑7, 68

[Cor] Guillermo Cortiñas, *Álgebra II*+1/2, Cursos y seminarios de matemática, Serie B, vol. Fascículo 13, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. ↑26

[Cor22] Guillermo Cortiñas, *Classifying Leavitt path algebras up to involution preserving homotopy*, Math. Ann., posted on 2022, DOI 10.1007/s00208-022-02436-2. ↑2, 3, 28, 46, 54, 58, 62, 63

[CK80] Joachim Cuntz and Wolfgang Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 251–268, DOI 10.1007/BF01390048. ↑1

[Cun87] Joachim Cuntz, *A new look at KK-theory*, K-Theory **1** (1987), no. 1, 31–51, DOI 10.1007/BF00533986. ↑2

[Dad80] Everett C. Dade, *Group-graded rings and modules*, Math. Z. **174** (1980), no. 3, 241–262, DOI 10.1007/BF01161413. ↑8

[Ell14] Eugenia Ellis, *Equivariant algebraic kk-theory and adjointness theorems*, J. Algebra **398** (2014), 200–226. ↑2, 43, 44, 45, 46, 53

[Exe08] Ruy Exel, *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **39** (2008), no. 2, 191–313, DOI 10.1007/s00574-008-0080-7. MR2419901 ↑74, 87

[GCNI18] Cristóbal Gil Canto and Alireza Nasr-Isfahani, *The commutative core of a Leavitt path algebra*, J. Algebra **511** (2018), 227–248, DOI 10.1016/j.jalgebra.2018.06.016. ↑38

[GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser, Cham, 1999.Zbl 0949.55001 ↑77

[Haz13a] Roozbeh Hazrat, *The graded structure of Leavitt path algebras*, Israel J. Math. **195** (2013), no. 2, 833–895, DOI 10.1007/s11856-012-0138-5. ↑13, 37

[Haz13b] ———, *The graded Grothendieck group and the classification of Leavitt path algebras*, Math. Ann. **355** (2013), no. 1, 273–325, DOI 10.1007/s00208-012-0791-3. ↑1, 14, 15

[Haz13c] R. Hazrat, *The dynamics of Leavitt path algebras*, J. Algebra **384** (2013), 242–266, DOI 10.1016/j.jalgebra.2013.03.012. ↑1

[Haz14] Roozbeh Hazrat, *Leavitt path algebras are graded von Neumann regular rings*, J. Algebra **401** (2014), 220–233, DOI 10.1016/j.jalgebra.2013.10.037. ↑58

[Haz16] ———, *Graded rings and graded Grothendieck groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 435, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. ↑6, 8, 11, 12, 15, 25, 37, 66, 68

[HL20] Roozbeh Hazrat and Huanhuan Li, *The talented monoid of a Leavitt path algebra*, J. Algebra **547** (2020), 430–455, DOI 10.1016/j.jalgebra.2019.11.033. ↑33

[Kas87] Christian Kassel, *Cyclic homology, comodules, and mixed complexes*, Journal of Algebra **107** (1987), 195–216, DOI 10.1016/0021-8693(87)90086-X.Zbl 0617.16015 ↑83

[KR99] K. H. Kim and F. W. Roush, *The Williams conjecture is false for irreducible subshifts*, Ann. of Math. (2) **149** (1999), no. 2, 545–558, DOI 10.2307/120975. ↑38, 39

[Kri80] Wolfgang Krieger, *On dimension functions and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 239–250, DOI 10.1007/BF01390047. ↑1

[Lea62] W. G. Leavitt, *The module type of a ring*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 113–130, DOI 10.2307/1993743. ↑5

[Li] Xin Li, *Ample groupoids, topological full groups, algebraic K-theory spectra and infinite loop spaces*, Forum Math. Pi, available at `arXiv:2209.08087`. ↑74, 78

[LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. ↑15, 38, 39, 63

[Lod98] Jean-Louis Loday, *Cyclic homology*, 2nd ed., Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998. Appendix E by María O. Ronco; Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili. MR1600246 ↑80, 81, 83, 84

[LQ84] Jean-Louis Loday and Daniel Quillen, *Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices*, Commentarii Mathematici Helvetici **59** (1984), 565–591, DOI 10.1007/BF02566367, available at `https://eudml.org/doc/139991`.Zbl 0565.17006 ↑83

[Mil] Alistair Miller, *Ample groupoid homology and étale correspondences*, available at `arXiv:2304.13473`. ↑3, 78, 79, 86

[Pat99] Alan L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 170, Birkhäuser, Cham, 1999.Zbl 0913.22001 ↑87

[Pre20] Raimund Preusser, *Leavitt path algebras of hypergraphs*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **51** (2020), no. 1, 185–221, DOI 10.1007/s00574-019-00150-3. ↑18, 26

[Qui73] Daniel Quillen, *Higher algebraic K-theory. I*, Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., vol. Vol. 341, Springer, Berlin-New York, 1973, pp. 85–147. ↑11

[Rie16] Emily Riehl, *Category Theory in Context*, Dover Publications Inc., December 30, 2016. ↑47

[Rig21] Simon W. Rigby, *Tensor products of Steinberg algebras*, J. Aust. Math. Soc. **111** (2021), no. 1, 111–126, DOI 10.1017/S1446788719000302. ↑

[Sch] Marco Schlichting, *Higher algebraic K-theory (after Quillen, Thomason and others)*, disponible en `https://cms.dm.uba.ar/Members/gcorti/workgroup.swisk/en/sedano.pdf`. ↑11

[Sch10a] ———, *Hermitian K-theory of exact categories*, J. K-Theory **5** (2010), no. 1, 105–165, DOI 10.1017/is009010017jkt075. ↑2, 20, 22, 24

[Sch10b] ———, *The Mayer-Vietoris principle for Grothendieck-Witt groups of schemes*, Invent. Math. **179** (2010), no. 2, 349–433, DOI 10.1007/s00222-009-0219-1. ↑24

[Ste10] Benjamin Steinberg, *A groupoid approach to discrete inverse semigroup algebras*, Adv. Math. **223** (2010), no. 2, 689–727, DOI 10.1016/j.aim.2009.09.001. ↑1, 74, 75, 76, 87

[Vaš23] Lia Vaš, *The functor K_0^{gr} is full and only weakly faithful*, Algebr. Represent. Theory **26** (2023), no. 6, 2877–2890, DOI 10.1007/s10468-023-10199-w. ↑2

[Wei89] Charles A. Weibel, *Homotopy algebraic K-theory*, Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 461–488, DOI 10.1090/conm/083/991991. ↑20

[Wag72] J. B. Wagoner, *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*, Topology **11** (1972), 349–370, DOI 10.1016/0040-9383(72)90031-6. ↑49

[Wei13] Charles A. Weibel, *The K-book*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 145, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. An introduction to algebraic K-theory. ↑11