UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Equivalencias de bases en aproximación greedy

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Miguel Hernán Berasategui

Directora de tesis: Dra. Silvia Lassalle

Consejero de estudios: Dr. Daniel Carando

Lugar de Trabajo: IMAS/Departamento de Matemática, FCEyN, UBA

Buenos Aires, 17 de julio de 2024

Equivalencias de bases en aproximación greedy

Resumen: En esta tesis consideramos sistemas de coordenadas con funcionales biortogonales en espacios de Banach y p-Banach (que llamamos "bases"), y estudiamos distintas propiedades tipo "greedy", es decir, propiedades definidas en función del algoritmo greedy (thresholding greedy algorithm, o TGA) - o algoritmos derivados del mismo o similares-, que consiste esencialmente en aproximar cada vector f del espacio con proyecciones, tomando primero los elementos de la base en los que f tiene coordenadas de mayor módulo.

En particular, mostramos caracterizaciones de y equivalencias entre algunas de estas propiedades tipo greedy, como asimismo algunas conexiones entre las mismas y algunos tipos de incondicionalidad parcial, que ya habían sido estudiados antes de la introducción del algoritmo greedy.

Primero nos enfocamos en bases almost greedy y semi-greedy en espacios de Banach. Para ello, estudiamos propiedades generales de las sucesiones seminormalizadas en estos espacios, y obtenemos resultados que nos permiten demostrar la implicación

$$\text{semi-greedy} \Rightarrow \text{almost greedy} \tag{1}$$

para bases de Markushevich. Puesto que la implicación recíproca también es cierta - lo que se conoce desde la introducción de las bases semi-greedy -, esto completa la prueba de la equivalencia entre ambas propiedades en el contexto mencionado. Por otra parte, mostramos que la condición de que la base sea de Markushevich es necesaria para la implicación (1), ya que si no se pide tal condición, podemos construir una base semi-greedy que no es almost greedy.

Luego pasamos a estudiar propiedades de tipo greedy más débiles y sus conexiones con formas débiles de incondicionalidad en espacios de Banach o, más generalmente, p-Banach. En particular, mostramos que una base es quasi-greedy for largest coefficients si y solo sí es nearly unconditional, mientras que es truncation quasi-greedy si y solo si es bounded-oscillation unconditional. También probamos que las dos formas de incondicionalidad parcial recién mencionadas no son equivalentes, construyendo bases quasi-greedy for largest coefficients que no son truncation quasi-greedy.

Finalmente, estudiamos bases quasi-greedy en espacios de Banach. Esta propiedad estrictamente más fuerte que ser truncation quasi-greedy, y es la más débil para la cual el TGA converge. En este contexto, mostramos que para que una base sea quasi-greedy, es suficiente que las proyecciones en conjuntos greedy de cardinal en alguna (o cualquier) sucesión estrictamente creciente $\mathbf{n} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ acotada estén uniformemente acotadas.

Palabras clave: Algoritmo greedy, algoritmo greedy de Chevyshev, bases semi-greedy, incondicionalidad parcial, bases quasi-greedy.

Equivalences of bases in greedy approximation

Abstract: In this thesis we consider coordinate systems with biorthogonal functionals in Banach and p-Banach spaces (which we call "bases"), and study different greedy-type properties, that is, properties defined in terms of the Thresholding Greedy Algorithm (TGA) - or algorithms that are similar to or derived from it -, which essentially consists in approximating each vector f of the space by means of projections on finite sets containing elements of the basis in which the coordinates of f have the largest moduli.
In particular, we show characterizations of and equivalences between some of these greedy-type properties, as well as connections between them and some kinds of partial unconditionality - which have been studied before the introduction of the TGA.
In this context, first we focus on almost greedy and semi-greedy bases in Banach spaces. To this end, we study general properties of seminormalized sequences in such spaces, which allow us to prove the implication

$$\text{semi-greedy} \Rightarrow \text{almost greedy} \tag{1}$$

for Markushevich bases. Given that the reciprocal implication also holds - which is known since the introduction of semi-greedy bases -, this completes the proof of the equivalence between both properties, in the aforementioned context. Additionally, we prove that the Markushevich hypothesis is necessary for the implication (1), given that without it, we can construct a semi-greedy basis that is not almost greedy.
Then we study weaker greedy-like properties and their connections with weak forms of unconditionality in Banach or more generally p-Banach spaces. In particular, we show that a basis is quasi-greedy for largest coefficients if and only if it is nearly unconditional, whereas it is truncation quasi-greedy if and only if it is bounded-oscillation unconditional. Additionally, we prove that those two forms of parcial unconditionality are not equivalent to each other, by constructing bases that are quasi-greedy for largest coefficients but not truncation quasi-greedy.
Finally, we study quasi-greedy bases in Banach spaces. This property is strictly stronger than truncation quasi-greediness, and it is the weakest condition under which the TGA converges. In this context, we prove that a sufficient condition for a basis to be quasi-greedy is the uniform boundedness of projections on greedy sets whose cardinality lie some (or any) strictly increasing sequence $\mathbf{n} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ with $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ bounded.

Keywords: Thresholding greedy algorithm, Chebyshev thresholding greedy algorithm, semi-greedy bases, partial unconditionality, quasi-greedy bases.

Agradecimientos

Quisiera comenzar por agradecer a todas las personas que contribuyeron a esta tesis y a mi doctorado, y en particular:

A Silvia Lassalle, por la oportunidad para hacer este doctorado, por su dedicación a la dirección del mismo, por sus consejos y por su trabajo en nuestros artículos conjuntos.

A Daniel Carando, también por la oportunidad para hacer este doctorado, y a Daniel Galicer, por su apoyo para concluirlo.

A Pablo Berná, por las propuestas de trabajar con él y otros matemáticos de España y de otros países, por hacer posible mi estancia en España, por su confianza.

A José Luis Ansorena, por su propuesta de trabajar conjuntamente, por invitarme a una estancia de trabajo en Logroño, por su hospitalidad y calidez para recibirme.

A Fernando Albiac, por su trabajo en varios artículos conjuntos, por su aliento y buena disposición.

A Eugenio Hernández y Ursula Molter, por hacer posible mi estancia en España.

A Gustavo Garrigós, por su hospitalidad en Murcia, y por el tiempo y dedicación para evaluar esta tesis y sus consejos para mejorarla.

A Victoria Paternostro y Pedro Tradacete, por el tiempo y trabajo dedicados a evaluar esta tesis.

Finalmente, a mi familia: a mi madre, Elena, y a mi hermana Inés, por su apoyo incondicional.

Índice general

Introducción

En este trabajo, estudiamos el algoritmo greedy y algoritmos relacionados con el mismo, con respecto a sistemas de coordenadas (que llamamos *bases*) en espacios de Banach (o, más generalmente, p-Banach) separables: Sean $0 < p \leq 1$ y $\mathbb{X}$ un espacio p-Banach de dimensión infinita separable sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Decimos que una sucesión $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ es una *base* de $\mathbb{X}$ si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\mathcal{X}$ es fundamental, es decir que el subespacio lineal $[\mathcal{X}]$ que genera $\mathcal{X}$ es denso en $\mathbb{X}$.
2. Existe una sucesión $\mathcal{X}^* = (\mathbf{x}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio dual $\mathbb{X}^*$ - que llamamos *base dual* de $\mathcal{X}$ - tal que $\mathbf{x}_n^*(\mathbf{x}_k) = \delta_{nk}$ para todo $k, n \in \mathbb{N}$.

Si además

$$\mathbf{x}_n^*(f) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f = 0,$$

decimos que $\mathcal{X}^*$ es *total*, y que $\mathcal{X}$ es una *base de Markushevich*, mientras que $\mathcal{X}$ es una *base de Schauder* si

$$K_b := \sup_{f\in S_{\mathbb{X}}} \left\| \sum_{n=1}^{m} \mathbf{x}_n^*(f)\, \mathbf{x}_n \right\| < \infty,$$

donde $S_{\mathbb{X}}$ es la esfera unitaria de $\mathbb{X}$; en este caso, K_b se denomina *constante de la base*. Si además

$$K_u := \sup_{\substack{f\in S_{\mathbb{X}} \\ m\in\mathbb{N} \\ |a_n|\leq 1 \ \forall n\in\mathbb{N}}} \left\| \sum_{n=1}^{m} a_n \mathbf{x}_n^*(f)\, \mathbf{x}_n \right\| < \infty,$$

decimos que $\mathcal{X}$ es *incondicional* con constante de incondicionalidad K_u.
En esta tesis, a menos que indiquemos lo contrario, supondremos que tanto $\mathcal{X}$ como $\mathcal{X}^*$ son sucesiones acotadas en norma (o p-norma en el caso de $\mathcal{X}$).
Dada una base $\mathcal{X}$, el algoritmo greedy (TGA, por Thresholding Greedy Algorithm) toma, para cada $f \in \mathbb{X}$ y cada $m \in \mathbb{N}$, un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal $|A| = m$ tal que

$$\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \ \forall n \in A, \forall k \in \mathbb{N} \setminus A.$$

Tal conjunto se llama un *conjunto greedy* de f de m-elementos. Ese conjunto en general no es único, y notaremos $\mathcal{G}[\mathcal{X},\mathbb{X}](f,m,1)$ (o $\mathcal{G}(f,m,1)$ si no hay ambigüedad) a la colección de conjuntos con dichas propiedades (incluiremos el caso $m=0$, en el que $\mathcal{G}[\mathcal{X},\mathbb{X}](f,0,1)=\{\emptyset\}$), y $\Lambda_m(f)$ al único elemento de $\mathcal{G}(f,m,1)$ tal que para todo $A\in\mathcal{G}(f,m,1)$, se tiene que si $n\in\Lambda_m(f)\setminus A$ y $k\in A\setminus\Lambda_m(f)$, entonces $n<k$.
Las bases de Schauder greedy y quasi-greedy fueron introducidas por Konyagin y Temlyakov en 1999 [27]. Una base $\mathcal{X}$ es quasi-greedy si para todo $f\in\mathbb{X}$,

$$f=\sum_{m=1}^{\infty}P_{\Lambda_m(f)}(f), \tag{2}$$

donde para cada $A\subset\mathbb{N}$ finito, P_A denota la proyección

$$P_A(f)=\sum_{n\in A}\mathbf{x}_n^*(f)\,\mathbf{x}_n.$$

Observación. A lo largo de la tesis, mantendremos los nombres originales en inglés de las propiedades centrales que estudiamos, para mejorar la integración con la literatura del área.

Una condición equivalente a ser quasi-greedy (ver [6], [31]) y usada frecuentemente como definición de tales bases es que exista $C>0$ tal que para todo $f\in\mathbb{X}$ y todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\|P_A(f)\|\leq C\|f\|\ \ \forall A\in\mathcal{G}(f,m,1). \tag{3}$$

A la mínima constante C para la que vale (3) se la denomina *constante quasi-greedy* de la base - que notaremos K_{qg}.

Observación. Notemos que en las bases quasi-greedy, los operadores $f\to P_{\Lambda_{m(f)}}(f)$ no son lineales, pero son acotados. Sin embargo, se puede ver que no son continuos.

Las bases greedy cumplen una condición más fuerte que las quasi-greedy: se pide que exista $C>0$ tal que para todo $f\in\mathbb{X}$ y todo $m\in\mathbb{N}$,

$$\left\|f-P_{\Lambda_m}(f)\right\|\leq C\sigma_m(f),$$

donde

$$\sigma_m(f):=\inf_{\substack{g\in[\mathcal{X}]\\ |\mathrm{sop}(g)|\leq m}}\|f-g\|;$$

$$\mathrm{sop}(g):=\{n\in\mathbb{N}:\mathbf{x}_n^*(g)\neq 0\},$$

y $|A|$ denota el cardinal de un conjunto A.
Poco tiempo después de la introducción de las bases greedy y quasi-greedy, en 2003 [19]

Dilworth et. al definieron las bases almost greedy como aquellas para las que para todo $f \in \mathbb{X}$ y todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| f - P_{\Lambda_m}(f) \right\| \leq C \widetilde{\sigma}_m(f),$$

donde

$$\widetilde{\sigma}_m(f) = \inf_{A \in \mathbb{N}^{\leq m}} \|f - P_A(f)\|;$$
$$\mathbb{N}^{\leq m} := \{A \subset \mathbb{N} : |A| \leq m\}.$$

Observación. En las defenciones anteriores de bases semi-greedy y almost greedy, un argumento estándar de perturbaciones pequeñas muestra que el conjunto $\Lambda_m(f)$ puede reemplazarse por todo $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ en las definiciones, sin cambiar las propiedades ni las constantes involucradas; este cambio es usual en la literatura, y lo haremos en lo que sigue.
Un argumento de este tipo muestra que también se puede reemplazar $\Lambda_m(f)$ por la existencia de al menos un $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ que cumpla lo pedido.

La condición de ser base greedy es en cierto sentido la más exigente que se puede pedir involucrando al algoritmo greedy, ya que la aproximación por una proyección sobre un conjunto greedy de m elementos es, salvo una constante, la mejor que puede obtenerse por medio de combinaciones lineales de m elementos de la base. Por otra parte, la condición de ser quasi-greedy es la más débil para la cual el algoritmo greedy converge (es decir, para la que vale (2); notemos que esto implica que $\mathcal{X}^*$ es total). Finalmente, la condición de ser almost greedy es una propiedad intermedia natural. Estos tres tipos de bases no son equivalentes entre sí, y son centrales y probablemente las más estudiadas en el área, pero también se identificaron otras propiedades definidas en términos del TGA o variantes del mismo, y que son de importancia para su estudio. Entre las mismas se encuentran ser truncation quasi-greedy (cuyo nombre es reciente, pero que ha sido estudiada desde los primeros años de la teoría de aproximación greedy, ver por ejemplo [4], [6], [19]), y quasi-greedy for largest coefficients (ver por ejemplo [2], [4], [6]).
En conexión con esta teoría se estudiaron también propiedades que si bien no involucran en su definición al TGA o variantes del mismo (es decir, no son de "tipo greedy"), permiten conectar y mostrar equivalencias entre distintas propiedades de tipo greedy. En este sentido, algunas de las caracterizaciones más conocidas y usadas involucran dos propiedades llamadas *democracia* y *superdemocracia*: Una base $\mathcal{X}$ es *superdemocrática* si existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in A} \varepsilon_n \mathbf{x}_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n \in B} \gamma_n \mathbf{x}_n \right\| \tag{4}$$

para todo para de conjuntos finitos $A, B \subset \mathbb{N}$ con $|A| \leq |B|$ y todo $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in A} \in \S_{KK}^A$, $\gamma = (\gamma_n)_{n \in B} \in S_{\mathbb{K}}^B$. En tal caso, decimos que $\mathcal{X}$ es C-superdemocrática. Por otra parte, $\mathcal{X}$ es C-*democrática* si (4) vale cuando $\varepsilon_n = \gamma_k = 1$ para todo $n \in A$ y todo $k \in B$.

Las caracterizaciones mencionadas dicen que una base es greedy si y solo si es incondicional y democrática ([27]) o superdemocrática (ver por ejemplo [6]) , y es almost greedy si y solo si es quasi-greedy y democrática ([19]) o superdemocrática (ver por ejemplo [6], [18]).
Si bien originalmente la teoría de aproximación greedy se inició para bases de Schauder en espacios de Banach, el desarrollo se ha extendido a espacios p-Banach (por ejemplo, [6] [31]) y a bases de Markushevich o incluso bases en general, en el sentido de la definición que dimos anteriormente (ver por ejemplo [6], [13], [14], [29], [31]).
En el contexto del estudio del TGA, en [18] fue introducido un algoritmo que también considera conjuntos greedy, pero en lugar de proyecciones considera aproximaciones con vectores arbitrarios, que se llama *algoritmo greedy de Chebyshev*. En base a este algoritmo, se definen las bases semi-greedy, que son aquellas con la siguiente propiedad: para todo $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$, existe $g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]$ tal que

$$\|f - g\| \leq C\sigma_m(f),$$

donde C es una constante positiva. Se sigue de la definición que las bases greedy son semi-greedy, y se probó en [18] que las bases almost greedy también lo son.
En [18] también se estudiaron las relaciones entre el algoritmo greedy y otras áreas dentro del análisis. En particular, se demostró que las bases quasi-greedy son nearly unconditional - una propiedad introducida por Elton en 1978 ([23]), en el contexto de la búsqueda de subsucesiones de sucesiones débiles nulas en espacios de Banach que tuvieran propiedades similares a la incondicionalidad, aunque más débiles que la misma.
Durante el desarrollo de la teoría sobre el TGA, se fueron introduciendo y estudiando distintas variantes de las bases y los algoritmos mencionados. Entre los últimos se estudian variantes que consideran conjuntos t-greedy para algún $0 < t \leq 1$ (ver por ejemplo [20], [21], [29], [30]): dada una base $\mathcal{X}$ de $\mathbb{X}$, un conjunto $A \subset \mathbb{N}$ es un conjunto t-greedy de $f \in \mathbb{X}$ con respecto a $\mathcal{X}$ si

$$\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq t\left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \; \forall n \in A, \forall k \in \mathbb{N} \setminus A.$$

En este trabajo, notaremos por $\mathcal{G}[\mathcal{X}, \mathbb{X}](f, m, t)$ a la colección de conjuntos t-greedy de f de cardinal m con respecto a $\mathcal{X}$; podremos dejar la base y/o el espacio implícitos cuando sea claro.
Otra variante del algoritmo greedy estudiada consiste en la restricción de dicho algoritmo a conjuntos greedy (o t-greedy) cuyo cardinal está en un subconjunto propio de los enteros positivos dado. En este sentido, dada una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\mathbf{n} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, se definen las bases $\mathbf{n}$-quasi-greedy, que son aquellas en las que la condición (3) se cumple siempre que $|A| = n_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Estas bases fueron introducidas por Oikhberg en [29]. En dicho trabajo, el autor demostró que las bases $\mathbf{n}$-quasi-greedy no siempre son quasi-greedy. Sin embargo, en todos los ejemplos que construyó, la sucesión de cocientes $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es no acotada, quedando abierta hasta [10] la pregunta de si $\mathbf{n}$-quasi-greedy implica quasi-greedy cuando tal sucesión es acotada.

En esta tesis, estudiamos algunas bases y propiedades tipo-greedy, enfocándonos en las equivalencias entre varias de las propiedades estudiadas en la literatura, como así también en las equivalencias entre algunas de ellas y propiedades que se han estudiado en otros contextos, sin referencia al algoritmo greedy.
El primer capítulo está dedicado al estudio de la implicación semi-greedy $\Longrightarrow$ almost greedy en espacios de Banach; dado que la implicación recíproca es verdadera, esto permite determinar cuándo ambas propiedades son equivalentes.
Veremos bajo qué condiciones vale la implicación mencionada, cómo construir bases semi-greedy que no sean de Markushevich (y por ende, no quasi-greedy), y también como construir bases almost greedy a partir de tales bases. Estos resultados están principalmente basados en [11] y [12].
El segundo capítulo de esta tesis está dedicado al estudio de las conexiones entre el algoritmo greedy y formas parciales de incondicionalidad, que aparecen en el estudio de subsucesiones de sucesiones débiles nulas seminormalizadas, en espacios de Banach - aunque para obtener resultados más generales, extendemos nuestro estudio a espacios p-Banach.
En este trabajo, mostramos que dos formas conocidas de incondicionalidad parcial tienen equivalencias simples en términos de propiedades de tipo greedy estudiadas en la literatura; también mostramos que dichas dos propiedades no son equivalentes entre sí. Estos resultados están basados en [2], [3] y [4].
El tercer capítulo está dedicado a las bases **n**-quasi-greedy en espacios de Banach, más precisamente a probar que si $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, las bases **n**-quasi-greedy son quasi-greedy. Los resultados están basados en [10] - cuyo resultado principal usa otros de [2] y [9].

Notación y definiciones generales

En esta tesis, vamos a usar la siguiente notación y definiciones generales - además de las ya introducidas y las que introduciremos en cada capítulo.

- A menos que se indique lo contrario, todos los espacios llamados $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}$ o $\mathbb{V}$ son espacios p-Banach de sobre $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), para algún $0 < p \leq 1$. En estos casos, $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ o $\mathbb{Z}$ son espacios de dimensión infinita, $\mathbb{F}$ de dimensión finita, y $\mathbb{V}$ puede tener cualquier dimensión. Usaremos la misma convención para $\mathbb{X}_1$, $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{V}_1$, y en general para espacios denotados con subíndices.

- A menos que especifiquemos lo contrario, las demostraciones son válidas tanto para espacios sobre $\mathbb{R}$ como para espacios sobre $\mathbb{C}$.

- En los Capítulos 1 y 3, en los espacios p-Banach asumimos que $p = 1$, es decir que son espacios de Banach.

- Si $\mathbb{V}$ es un espacio p-Banach, llamamos $\mathbb{V}^*$ a su espacio dual, $B_{\mathbb{V}}$ al conjunto de elementos de $\mathbb{V}$ cuya p-norma es menor o igual que uno, y $S_{\mathbb{V}}$ al conjunto de elementos de $\mathbb{V}$ cuya p-norma es igual a uno.

- A menos que indiquemos una notación distinta en casos particulares, notaremos $\|\cdot\|_{\mathbb{V}}$ a la p-norma del espacio $\mathbb{V}$. En caso de que sea claro por el contexto cuál es la norma a la que nos referimos y sea conveniente, podemos notarla $\|\cdot\|$.

- Decimos que un subconjunto F de un espacio p-Banach $\mathbb{V}$ es:

  - *Acotado* si es acotado en p-norma.
  - *Acotado inferiormente* si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $f \in F$, se tiene que $C \leq \|f\|_{\mathbb{V}}$.
  - *Seminormalizado* si es acotado y acotado inferiormente (usamos esta notación y la siguiente aún cuando la p-norma no sea norma).
  - *Normalizado* si $\|f\|_{\mathbb{V}} = 1$ para todo $f \in F$.

- Sean $\mathbb{V}_1$ e $\mathbb{V}_2$ espacios p-Banach. Decimos que un conjunto indexado $\{f_\theta\}_{\theta\in\Theta} \subset \mathbb{V}_1$ *domina* a un conjunto indexado $\{g_\theta\}_{\theta\in\Theta} \subset \mathbb{V}_2$ si existe un operador lineal continuo $T : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ tal que $T(f_\theta) = g_\theta$ para todo $\theta \in \Theta$.

- A menos que indiquemos una notación distinta, asumiremos que los símbolos $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$ respectivamente denotan bases $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espacios $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ o $\mathbb{Z}$, con bases duales $(\mathbf{x}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{z}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$. También notamos

$$\zeta[\mathcal{X}] := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_n\|; \qquad \zeta'[\mathcal{X}] := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\mathbf{x}_n^*\right\|; \qquad \zeta''[\mathcal{X}] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\mathbf{x}_n\| \left\|\mathbf{x}_n^*\right\|.$$

  Usamos notaciones similar para $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{Z}$.

- Si f es un elemento de $\mathbb{V}$, $\hat{f}$ es el elemento de $\mathbb{V}^{**}$ tal que $\hat{f}(f^*) = f^*(f)$ para todo $f^* \in \mathbb{V}^*$. La *inclusión canónica* de $\mathbb{V}$ en su bidual $\mathbb{V}^{**}$ es la función $J_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^{**}$ dada por $J_{\mathbb{V}}(f) = \hat{f}$, que es una isometría si $p = 1$. Notamos entonces $\widehat{\mathbb{V}} = J_{\mathbb{V}}(\mathbb{V})$.

- Si $\left\{f_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia contenida en un espacio p-Banach $\mathbb{V}$, notamos $[f_\gamma : \gamma \in \Gamma]$ al subespacio vectorial de $\mathbb{V}$ generado por $\left\{f_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$, y $\overline{\left[f_\gamma : \gamma \in \Gamma\right]}$ a su clausura. Si $p = 1$, notamos $\overline{\left[f_\gamma : \gamma \in \Gamma\right]}^w$ a la clausura en la topología débil.

- Si A es un conjunto, notamos $|A|$ a su cardinal.

- Si $q \in (1, \infty)$, llamamos q' al único número real para el cual $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Si $q = 1$, definimos $q' = \infty$, y si $q = \infty$, $q' = 1$.

- Si $q \in [1, +\infty]$, x es un elemento de ℓ_q e y es un elemento de $\ell_{q'}$, notamos $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_q$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_{q'}$. También identificamos y con un elemento de $\left(\ell_q\right)^*$ de la manera usual, de modo que $y(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

- Dado $m \in \mathbb{N}_0$ y un conjunto A, notamos $A^{(m)}$ al conjunto de subconjuntos de m elementos de A, y $A^{\leq m}$ al conjunto de subconjuntos de a lo sumo m elementos de A.

- Dado un conjunto A, notamos $A^{<\infty}$ al conjunto de subconjuntos finitos de A.

- Dado $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, notamos $A_{<a}$ al conjunto de elementos de A menores que a. Usamos una notación similar para $>$, $\leq$, y $\geq$.

- Decimos que $\emptyset \neq A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ es un *intervalo* de números naturales si existen $a < b \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $A = [a, b] \cap \mathbb{N}$.

- Dados $A, B \subset \mathbb{N}$, notamos $A < B$ si para todo $a \in A$, $b \in B$, se tiene que $a < b$. Usamos una notación similar para $>$, $\leq$, y $\geq$.

- Dados un conjunto A, un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ y funciones $f, g : A \to B$, notamos $f \lesssim g$ si existe $C \geq 1$ tal que $f(a) \leq Cg(a)$ para todo $a \in A$ (si esto vale con $C = 1$, escribimos $f \leq g$). En caso de que $f \lesssim g$ y $g \lesssim f$, escribimos $f \approx g$.

- A menos que digamos lo contrario, la medida en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es la de Lebesgue.

- Dado un escalar $a \in \mathbb{K}$, como es usual definimos
$$\operatorname{sgn}(a) := \begin{cases} \frac{a}{|a|} & \text{si } a \neq 0; \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

- Dados $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $f \in \mathbb{X}$, y $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, definimos la proyección
$$P_A[\mathcal{X}, \mathbb{X}](f) := \sum_{n \in A} \mathbf{x}_n^*(f)\, \mathbf{x}_n,$$
con la convención de que la suma es cero si $A = \emptyset$.

- Dados $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, $\mathbb{N} \supset D \supset A$ y $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in D} \in S_{\mathbb{K}}^D$, definimos
$$\mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}, \mathbb{X}] := \sum_{n \in A} \varepsilon_n \mathbf{x}_n; \qquad \mathbf{1}_A[\mathcal{X}, \mathbb{X}] := \sum_{n \in A} \mathbf{x}_n,$$
como antes con la convención de que la suma es cero si $A = \emptyset$.

- Dadas $\mathcal{X}$ base de $\mathbb{X}$, definimos la *función fundamental superior* $\varphi_u = \varphi_u[\mathcal{X}, \mathbb{X}] : \mathbb{N} \to (0, \infty]$ de $\mathcal{X}$ como
$$\varphi_u[\mathcal{X}, \mathbb{X}](m) := \sup_{\substack{A \in \mathbb{N}^{\leq m} \\ \varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^A}} \mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}, \mathbb{X}].$$

- Decimos que una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ es *básica* si es una base de Schauder del subespacio $\overline{[f_n : n \in \mathbb{N}]}$.

- El símbolo $\mathbf{n}$ siempre denota una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de enteros positivos.

- Dada una base $\mathcal{X}$ de $\mathbb{X}$ y $f \in \mathbb{X}$, para $1 \leq q \leq \infty$ definimos $\|\cdot\|_{\ell_q} : \mathbb{X} \to [0, \infty]$ como
$$\|f\|_{\ell_q} := \left\|(\mathbf{x}_n^*(f))_{n \in \mathbb{N}}\right\|_{\ell_q} = \begin{cases} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|^q\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq q < \infty; \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

- Dada una base $\mathcal{X}$ de $\mathbb{X}$, para cada $f \in \mathbb{X}$ definimos $\varepsilon(f) := (\operatorname{sgn}(\mathbf{x}_n^*(f)))_{n \in \mathbb{N}} \in S_{\mathbb{X}}^{\mathbb{N}}$.

- Vamos a usar la convención $0 \cdot \infty = 0$.

En todos los casos anteriores en que sea aplicable, cuando no haya ambigüedad, podemos dejar la base y/o el espacio implícito(s).

Capítulo 1

Bases semi-greedy y almost greedy

En este capítulo, estudiamos las relaciones entre las bases almost greedy y semi-greedy en espacios de Banach. Las primeras fueron introducidas en [19], y son - junto con las bases greedy y quasi-greedy - uno de los tipos de bases más estudiadas en el área de aproximación greedy (ver por ejemplo [1], [6], [13], [18], entre otros).
Vamos a usar la siguiente definición, que como mencionamos es equivalente a la dada en la introducción.

Definición 1.0.1. *Sean $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$ y $C > 0$. Decimos que $\mathcal{X}$ es C*-almost greedy *si*

$$\|f - P_A(f)\| \leq C\widetilde{\sigma}_m(f)$$

para todo $f \in \mathbb{X}$, todo $m \in \mathbb{N}$, y todo $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$. Llamaremos constante almost greedy $K_a = K_a[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ *a la mínima constante C para la que $\mathcal{X}$ es C-almost greedy.*

Una caracterización central de las bases almost greedy es como bases quasi-greedy y (super)-democráticas. Esta caracterización fue probada en [19, Teorema 3.3] usando bases democráticas, aunque la equivalencia usando bases superdemocráticas también se sigue fácilmente usando [19, Lema 2.1], a su vez basado en [31, Proposición 2], y fue estudiada en la literatura, con extensiones a espacios p-Banach o mejoras en las constantes involucradas (ver por ejemplo, [6, Teorema 6.3], o [15, Teorema 1.3]). Más precisamente, se conoce el siguiente resultado:

Teorema 1.0.2. *[6, 19] Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$.*

- *Si $\mathcal{X}$ es almost greedy, existen constantes C_d, C_s y K_q que dependen solo de K_a (con $C_d \leq K_a$) tales que $\mathcal{X}$ es K_q-quasi-greedy (notemos que vale* (3) *con $C = K_a + 1$), C_d-democrática y C_s-superdemocrática.*

- *Si $\mathcal{X}$ es C_d-democrática y K_q-quasi-greedy, existe C dependiendo solo de C_d y K_q tal que $\mathcal{X}$ es C-almost greedy.*

Por otra parte, las bases semi-greedy fueron introducidas en [18] y, a diferencia de las bases recién mencionadas, están definidas en términos del algoritmo greedy de Chebyshev, en lugar del algortimo greedy. En este trabajo, para obtener resultados de mayor generalidad trabajaremos usando una versión débil del algoritmo greedy de Chebyshev: Siguiendo las líneas de la definición de bases branch semi-greedy de [21], definimos las bases t-semi-greedy, para cada $0 < t \leq 1$.

Definición 1.0.3. *[11, Definición 1.7] Sean $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $C > 0$ y $0 < t \leq 1$. Decimos que $\mathcal{X}$ es C-t-semi-greedy si para todo $f \in \mathbb{X}$ y todo $m \in \mathbb{N}$, existen $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$ y $g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]$ tales que*

$$\|f - g\| \leq C\sigma_m(f).$$

(en el caso $t = 1$ diremos que $\mathcal{X}$ es semi-greedy). La constante t-semi greedy $K_{s,t}$ es la mínima constante C para la que $\mathcal{X}$ es C-t-semi-greedy.

Al introducir las bases de Schauder semi-greedy en [18], los autores probaron que las bases de Schauder almost greedy son semi-greedy ([18, Teorema 3.2], cuya demostración no require que la base sea de Schauder). Posteriormente, se probó que si una base es almost greedy, la condición de la Definición 1.0.3 se cumple no solo para algún $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$, sino para todos ellos. Más precisamente, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.0.4. *[21, Teorema 7.1] Sean $\mathcal{X}$ una base almost greedy de $\mathbb{X}$, y $0 < t \leq 1$. Existe una constante $C_t > 0$ que depende solo de K_a y t tal que para todo $f \in \mathbb{X}$, todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$, existe $g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]$ tal que*

$$\|f - g\| \leq C_t\sigma_m(f).$$

En la dirección opuesta, se probó primero que las bases de Schauder semi-greedy son superdemocráticas ([18, Proposición 3.3]), y en espacios de cotipo finito son almost greedy ([18, Teorema 3.6]). La condición sobre el cotipo fue removida en [14, Teorema 1.10, Corolario 1.12], y luego en [14, Teorema 5.3] se probó la implicación de semi-greedy a almost greedy para una clase de bases de Markushevich más grande que las bases de Schauder.
En este capítulo, estudiamos las relaciones entre bases t-semi-greedy y almost greedy en general, y probamos que la equivalencia se mantiene para cualquier base de Markushevich, o equivalentemente, que toda base de Markushevich t-semi-greedy en un espacio de Banach es almost greedy.
También estudiamos la existencia de bases semi-greedy que no son de Markushevich y por lo tanto, no son almost greedy (ni quasi-greedy).
El capítulo se divide en dos secciones. En la primera de ellas, estudiamos algunas propiedades generales de las sucesiones seminormalizadas en espacios de Banach, que serán necesarias para algunos de los resultados mencionados anteriormente. En la segunda sección, vamos a demostrar dichos resultados, y algunos otros estrechamente relacionados con los mismos.

1.1. Propiedades de separación finito-dimensional.

En esta sección, vamos a probar que bajo condiciones bastante generales, las sucesiones en espacios de Banach tienen subsucesiones que - en un sentido que precisaremos seguidamente - se "alejan" de cualquier subespacio de dimensión finita. En particular, cualquier base de Markushevich tiene dicha propiedad. Estas propiedades serán claves para la demostración de la implicación semi-greedy $\Longrightarrow$ almost greedy, que daremos en la sección siguiente.
Para los resultados de esta sección, no asumiremos que las bases o sus bases duales son acotadas.
Comenzamos con una definición central para los resultados de este capítulo.

Definición 1.1.1. *[11, Definición 3.1] Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{X}$ una sucesión en un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Decimos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la* propiedad de separación finito-dimensional *(PSFD) si hay una constante positiva M tal que para cada subespacio separable $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$ y cada $\epsilon > 0$, existe una subsucesión básica $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con constante de la base no mayor que $M + \epsilon$ que tiene la siguiente propiedad: Para cada subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$, existe $j_{\mathbb{F}} \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\|f\| \leq (M + \epsilon) \|f + g\|, \tag{1.1}$$

para todo $f \in \mathbb{F}$ y toda $g \in \overline{[g_{n_k} : k > j_{\mathbb{F}}]}$. Llamamos a tal sucesión una sucesión separadora finito-dimensional *para $(\mathbb{Z}, M, \epsilon, (g_n)_{n\in\mathbb{N}})$, y llamamos al mínimo $M > 0$ para el cual se tiene esta propiedad la* constante de separación finito-dimensional *M_{fs} de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con respecto a $\mathbb{X}$, que notamos $M_{fs}((g_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{X})$.*
Como es usual, cuando sea claro por el contexto, podemos dejar implícita la sucesión y/o el espacio.

Observación 1.1.2. [11, Observación 3.2] Notemos que (reescalando y por densidad) para chequear que una subsucesión $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es separadora finito-dimensional para $(\mathbb{Z}, M, \epsilon)$, es suficiente verificar que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que (1.1) vale para f con $\|f\| = 1$ y para $g \in [g_{n_k} : k > j]$.

Notemos que la PSFD no varía si cambiamos o quitamos finitos elementos de una sucesión. Tampoco varía si la reordenamos, porque cualquier subsucesión de una sucesión separadora para $(\mathbb{Z}, M, \epsilon)$ también es separadora para $(\mathbb{Z}, M, \epsilon)$, y dado un reordenamiento $\left(g_{n_{\pi(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de una subsucesión $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existe una subsucesión de $\left(g_{n_{\pi(k)}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ que también es subsucesión de $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, vale la siguiente caracterización:

Lema 1.1.3. *[11, Lema 3.3] Sean $\mathbb{X}$ un espacio de Banach sobre $\mathbb{K}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{X}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ sucesiones de vectores y escalares respectivamente, $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección, y $l \in \mathbb{N}$. Entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la PSFD con constante M_{fs} si y solo si $(a_n g_{\pi(n)})_{n\geq l}$ la tiene.*

Para nuestro resultado siguiente, nos hacen falta dos lemas técnicos; el segundo es una variante de [7, Teorema 1.5.2].

Lema 1.1.4. *[7, Lema 1.5.1] Sea $S \subseteq \mathbb{X}^*$ un subconjunto acotado inferiormente tal que $0 \in \overline{S}^{w^*}$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ y todo subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}^*$, existe $f^* \in S$ tal que para todo $g^* \in \mathbb{F}$ y todo $b \in \mathbb{K}$,*

$$\|g^*\| \leq (1+\epsilon)\|g^* + bf^*\|.$$

Lema 1.1.5. *[11, Lema 3.5] Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach, Γ un conjunto no vacío con un orden parcial $\preceq$, y $\left\{g_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subseteq \mathbb{X}$ un conjunto con la siguiente propiedad: para todo $\epsilon > 0$, todo subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X}$ y todo $\gamma \in \Gamma$ existe $\gamma_0 \succ \gamma$ tal que para todo $g \in \mathbb{F}$ y todo $b \in \mathbb{K}$,*

$$\|g\| \leq (1+\epsilon)\left\|g + bg_{\gamma_0}\right\|.$$

Entonces, para cada subespacio separable $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$ y cada $\epsilon > 0$, existe una sucesión $(\gamma_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ estrictamente creciente en el orden $\preceq$ y una sucesión básica $\left(g_{\gamma_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ con constante de la base no mayor que $(1+\epsilon)$ que satisface lo siguiente: Para cada subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$ y cada $\xi > 0$, existe $j_{\mathbb{F},\xi} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $f \in \mathbb{F}$ y $g \in \overline{\left[g_{\gamma_k} : k > j_{\mathbb{F},\xi}\right]}$, se tiene que

$$\|f\| \leq (1+\xi)\|f + g\|.$$

En particular, si $\Gamma = \mathbb{N}$ y $\preceq$ es el orden usual de $\mathbb{N}$, se obtiene una subsucesión $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ con las propiedades del enunciado, y la sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de separación finito-dimensional con constante 1. En caso de que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sea acotada inferiormente, estas condiciones se cumplen si $\mathbb{X}$ es un espacio dual y $0 \in \overline{\{g_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}}^{w^*}$, o si $\mathbb{X}$ es cualquier espacio de Banach y $0 \in \overline{\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^{w}$.

Demostración. Elijamos una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ densa en $\mathbb{Z}$, y una sucesión de números positivos $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\epsilon_n) \leq (1+\epsilon)$, y elijamos un elemento cualquiera $\gamma_1 \in \Gamma$. Por hipótesis, podemos elegir $\gamma_2 \succ \gamma_1$ de manera que para todo $f \in \left[v_1, g_{\gamma_1}\right]$ y todo $b \in \mathbb{K}$,

$$\|f\| \leq (1+\epsilon_1)\left\|f + bg_{\gamma_2}\right\|.$$

Por un argumento inductivo, obtenemos una sucesión (γ_k) estrictamente creciente en el orden $\preceq$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, toda $f \in \left[v_s, g_{\gamma_s} : 1 \leq s \leq k\right]$ y todo $b \in \mathbb{K}$, se tiene que

$$\|f\| \leq (1+\epsilon_k)\left\|f + bg_{\gamma_{k+1}}\right\|.$$

Iterando, se deduce que para todo par de enteros positivos $j < l$, toda $f \in \left[v_s, g_{\gamma_s} : 1 \leq s \leq j\right]$ y escalares cualesquiera $(a_k)_{j<k\leq l}$,

$$\|f\| \leq \prod_{k=j}^{l-1}(1+\epsilon_k)\left\|f + \sum_{k=j+1}^{l} a_k g_{\gamma_k}\right\| \leq \prod_{k=j}^{\infty}(1+\epsilon_k)\left\|f + \sum_{k=j+1}^{l} a_k g_{\gamma_k}\right\|.$$

En particular, $\left(g_{\gamma_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante de la base no mayor que $\prod_{k=1}^{\infty}(1+\epsilon_k) \leq 1+\epsilon$, y el resultado del enunciado vale si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{F} \subset [v_n : 1 \leq n \leq k]$. Ahora un argumento estándar de densidad nos permite obtener el resultado para cualquier subespacio de dimensión finita de $\mathbb{Z} = \overline{[v_n : n \in \mathbb{N}]}$, y el resultado cuando $\Gamma = \mathbb{N}$ y $\leq$ es el orden usual de $\mathbb{N}$ se sigue del caso más general recién probado.
Ahora supongamos que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada inferiormente. Si $\mathbb{X}$ es un espacio dual, y $0 \in \overline{\{g_n^*\}}^{w^*}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces como $g_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \in \overline{\{g_n^*\}}^{w^*}_{n\geq l}$ para cada $l \in \mathbb{N}$. Luego, por el Lema 1.1.4, se cumplen las condiciones pedidas. Ahora bien, si $\mathbb{X}$ es cualquier espacio de Banach y $0 \in \overline{\{g_n\}}^{w}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces pasando al espacio bidual por medio de la inyección canónica $\mathbb{X} \hookrightarrow \mathbb{X}^{**}$ vemos que también se cumplen dichas condiciones. □

Seguidamente, vamos a considerar el caso en el que 0 podría no ser un punto de acumulación débil o débil estrella de la sucesión. En este caso, vamos a modificar la prueba de [11, Lema 3.7], y mejorar la cota superior obtenida para M_{fs}. En la prueba usaremos la siguiente notación: Dada una sucesión acotada $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{X}$, definimos $\beta((g_n)) := \overline{\{\widehat{g_n}\}}^{w*}_{n\in\mathbb{N}} \setminus \widehat{\mathbb{X}}$.

Lema 1.1.6. *Sea $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión acotada. Si $\overline{\{g_n\}}^{w}{}_{n\in\mathbb{N}}$ no es débil compacto, entonces $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de separación finito-dimensional con $M_{fs} \leq M$, donde*

$$M = 2\left(2 + \inf_{f^{**}\in\beta((g_n))}\left\{\frac{\|f^{**}\|}{\operatorname{dist}\left(f^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)}\right\}\right).$$

Demostración. Puesto que $\overline{\{g_n\}}^{w}_{n\in\mathbb{N}}$ no es débil compacto pero $\overline{\{\widehat{g_n}\}}^{w*}_{n\in\mathbb{N}}$ es débil estrella compacto, existe $f^{**} \in \beta((g_n)) = \overline{\{\widehat{g_n}\}}^{w*}_{n\in\mathbb{N}} \setminus \widehat{\mathbb{X}}$, por lo que M está bien definida. Dados $\epsilon > 0$ y un subespacio separable $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$, elegimos $0 < \xi < 1$ y $f_0^{**} \in \overline{\{\widehat{g_n}\}}^{w*}_{n\in\mathbb{N}} \setminus \widehat{\mathbb{X}}$ de manera que

$$(1+\xi)(2+\xi)\left(2+\xi+\frac{\left\|f_0^{**}\right\|}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)}\right) \leq M+\epsilon, \tag{1.2}$$

definimos $\mathbb{Z}_1 := \widehat{\mathbb{Z}} + \overline{\left[f_0^{**}, \widehat{g_n} : n \in \mathbb{N}\right]}$, y consideramos en $\mathbb{Z}_1$ la sucesión seminormalizada $\left(\widehat{g_n} - f_0^{**}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $\left(\widehat{g_{n_k}} - f_0^{**}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión básica con constante de la base no mayor que $(1+\xi)$ obtenida por aplicación del Lema 1.1.5. Como $f_0^{**} \notin \widehat{\mathbb{X}}$, existe una funcional lineal acotada f_1^{***} en $\widehat{\mathbb{X}} \oplus \left[f_0^{**}\right]$ tal que para todo $f \in \mathbb{X}$ y todo $b \in \mathbb{K}$,

$$f_1^{***}\left(\widehat{f} + b f_0^{**}\right) = b.$$

Supongamos que $\left\|\widehat{f}+bf_0^{**}\right\|=1$ y que $b\neq 0$. Entonces

$$\left|f_1^{***}\left(\widehat{f}+bf_0^{**}\right)\right|=|b|=|b|\frac{\left\|b^{-1}\widehat{f}+f_0^{**}\right\|}{\left\|b^{-1}\widehat{f}+f_0^{**}\right\|}=\frac{1}{\left\|b^{-1}\widehat{f}+f_0^{**}\right\|}\leq\frac{1}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**},\widehat{\mathbb{X}}\right)}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|f_1^{***}\right\|\leq\frac{1}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**},\widehat{\mathbb{X}}\right)}. \tag{1.3}$$

Por el teorema de Hahn-Banach, hay una extensión de f_1^{***} a $\mathbb{X}^{**}$ que preserva la norma; llamaremos a esta extensión también f_1^{***}.

Sea $\mathbb{F}_1:=\left[f_0^{**}\right]$. Por la elección de $\left(\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, existe $j_{\mathbb{F}_1,\xi}\in\mathbb{N}$ tal que para todo $g^{**}\in\overline{\left[\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}:k>j_{F_1,\xi}\right]}$ se tiene que

$$\left\|f_0^{**}\right\|\leq(1+\xi)\left\|f_0^{**}+g^{**}\right\|. \tag{1.4}$$

En particular, dado que $f_0^{**}\neq 0$, esto implica que $f_0^{**}\notin\overline{\left[\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}:k>j_{F_1,\xi}\right]}$. Luego, existe una funcional lineal acotada f_2^{***} definida en $\overline{\left[\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}:k>j_{\mathbb{F}_1,\xi}\right]}\oplus\left[f_0^{**}\right]$ dada por la fórmula

$$f_2^{***}\left(f^{**}+bf_0^{**}\right)=b.$$

para todo $f^{**}\in\overline{\left[\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}:k>j_{F_1,\xi}\right]}$ y todo $b\in\mathbb{K}$.

Como antes, para cada $f^{**}\in\overline{\left[\widehat{g}_{n_k}-f_0^{**}:k>j_{\mathbb{F}_1,\xi}\right]}$ y $b\neq 0$ tales que $\left\|f^{**}+bf_0^{**}\right\|=1$, por (1.4) tenemos que

$$\left|f_2^{***}\left(f^{**}+bf_0^{**}\right)\right|=|b|=\frac{1}{\left\|b^{-1}f^{**}+f_0^{**}\right\|}\leq\frac{1+\xi}{\left\|f_0^{**}\right\|}.$$

Por lo tanto,

$$\left\|f_2^{***}\right\|\leq\frac{1+\xi}{\left\|f_0^{**}\right\|}. \tag{1.5}$$

Nuevamente, por el Teorema de Hahn-Banach, podemos considerar que f_2^{***} está definida en todo $\mathbb{X}^{**}$. Ahora definimos, para $f^{**}\in\mathbb{X}^{**}$, los siguientes operadores lineales acotados:

$$\begin{aligned}T\left(f^{**}\right)&=f^{**}+\left(f_2^{***}-f_1^{***}\right)\left(f^{**}\right)f_0^{**};\\ L\left(f^{**}\right)&=f^{**}-\left(f_2^{***}-f_1^{***}\right)\left(f^{**}\right)f_0^{**}.\end{aligned}$$

Por (1.3) y (1.5) obtenemos que para todo $f^{**}\in S_{\mathbb{X}^{**}}$,

$$\left\|T\left(f^{**}\right)\right\|\leq\left\|f^{**}\right\|+\left\|f_2^{***}\right\|\left\|f^{**}\right\|\left\|f_0^{**}\right\|+\left\|f_1^{***}\right\|\left\|f^{**}\right\|\left\|f_0^{**}\right\|\leq 2+\xi+\frac{\left\|f_0^{**}\right\|}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**},\widehat{\mathbb{X}}\right)},$$

mientras que como $f_1^{***}\big|_{\widehat{\mathbb{X}}} = 0$, resulta que para todo $f \in S_{\mathbb{X}}$,

$$\left\|T\left(\widehat{f}\right)\right\| \leq \|f\| + \left\|f_2^{***}\right\| \|f\| \left\|f_0^{**}\right\| \leq 2 + \xi.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\|T\| \leq& 2 + \xi + \frac{\left\|f_0^{**}\right\|}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)};\\ \left\|T\big|_{\widehat{\mathbb{X}}}\right\| \leq& 2 + \xi.\end{aligned}$$

Puesto que los mismos argumentos se aplican también a L, de esto y (1.2) obtenemos

$$\|T\| \left\|L\big|_{\widehat{\mathbb{X}}}\right\| \leq (2 + \xi)\left(2 + \xi + \frac{\left\|f_0^{**}\right\|}{\operatorname{dist}\left(f_0^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)}\right) \leq \frac{M + \epsilon}{1 + \xi}. \tag{1.6}$$

Notemos L es la inversa de T, es decir $LT = TL = Id_{\mathbb{X}^{**}}$. Por lo tanto, como $T\left(\widehat{g_{n_k}} - f_0^{**}\right) = \widehat{g_{n_k}}$ para todo $k > j_{\mathbb{F}_1,\xi}$ y $\left(\widehat{g_{n_k}} - f_0^{**}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con constante no mayor que $1 + \xi$, se sigue de (1.6) que $(g_{n_k})_{k>j_{F_1,\xi}}$ es una sucesión básica con constante

$$K_b\left((g_{n_k})_{k>j_{F_1,\xi}}\right) \leq (1 + \xi)\left(\frac{M + \epsilon}{1 + \xi}\right) = M + \epsilon.$$

Ahora sea $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$ un subespacio de dimensión finita, y sea

$$j_{\mathbb{F}} := \text{máx}\left\{j_{L(\widehat{\mathbb{F}}),\xi}, j_{\mathbb{F}_1,\xi}\right\}.$$

Para cualquier $f \in \mathbb{F}$ y escalares $(a_k)_{j_{\mathbb{F}}<k\leq m}$, por la elección de $\left(\widehat{g_{n_k}} - f_0^{**}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\|f\| \leq \|T\| \left\|L\left(\widehat{f}\right)\right\| &\leq \|T\| (1 + \xi) \left\|L\left(\widehat{f}\right) + \sum_{j_{\mathbb{F}}<k\leq m} a_k \left(\widehat{g_{n_k}} - f_0^{**}\right)\right\| \\ &= \|T\| (1 + \xi) \left\|L\left(\widehat{f} + \sum_{j_{\mathbb{F}}<k\leq m} a_k \widehat{g_{n_k}}\right)\right\| \leq \|T\| \left\|L\big|_{\widehat{\mathbb{X}}}\right\| (1 + \xi) \left\|\widehat{f} + \sum_{j_{\mathbb{F}}<k\leq m} a_k \widehat{g_{n_k}}\right\| \\ &\leq (M + \epsilon) \left\|f + \sum_{j_{\mathbb{F}}<k\leq m} a_k g_{n_k}\right\|,\end{aligned}$$

donde aplicamos una vez más (1.6) para obtener la última desigualdad. Por un argumento de densidad, concluimos que $(g_{n_k})_{k>j_{F_1,\xi}}$ tiene las propiedades buscadas. □

Observación 1.1.7. *(cf. Observación 1.1.2)* [11, Observación 3.8] Notemos que la cota superior para M_{fs} dada por el Lema 1.1.6 no es afectada si cambiamos $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $(a_n g_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, para cualquier sucesión seminormalizada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y cualquier biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Corolario 1.1.8. *[11, Corolario 3.9]Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión seminormalizada. Los siguientes enunciados son equivalentes.*

i) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene una subsucesión básica.*

ii) *O bien* $0 \in \overline{\{g_n\}}^w_{n\in\mathbb{N}}$, *o bien* $\overline{\{g_n\}}^w_{n\in\mathbb{N}}$ *no es débil compacto.*

iii) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tiene la propiedad de separación finito-dimensional.*

Demostración. La equivalencia i) $\iff$ ii) fue probada en [26] (ver también [7, Teorema 1.5.6]).
Por los Lemas 1.1.5 y 1.1.6, se sigue que ii) $\implies$ iii). Por otra parte, es inmediato de las definiciones que iii) $\implies$ i). $\square$

Seguidamente, estudiamos la propiedad de separación finito-dimensional en el contexto de bases de Markushevich. Recordemos que para $0 < c \leq 1$, un subespacio $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}^*$ se dice c-normante para $\mathbb{X}$ si

$$c\,\|f\| \leq \sup_{\substack{f^*\in\mathbb{Z}\\ \|f^*\|=1}} |f^*(f)| \;\; \forall f \in \mathbb{X}.$$

Vamos a usar el siguiente resultado.

Lema 1.1.9. *[7, Proposición 3.2.3] Sea $\mathcal{X}$ una base de Schauder de $\mathbb{X}$ con constante K_b. Entonces $\overline{[\mathcal{X}^*]} \subset \mathbb{X}^*$ is K_b^{-1}-normante para $\mathbb{X}$.*

Recordemos también que una sucesión $(v_l)_{l\in\mathbb{N}}$ es una *base de bloques* de una base de Markushevich $\mathcal{X}$ si hay sucesiones de enteros positivos $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(m_l)_{l\in\mathbb{N}}$ con $n_l \leq m_l < n_{l+1}$ para todo $l \in \mathbb{N}$ y escalares $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$v_l = \sum_{k=n_l}^{m_l} b_k \mathbf{x}_k,$$

donde para cada $l \in \mathbb{N}$, al menos un escalar $n_l \leq b_k \leq m_l$ es no nulo. En particular, toda subsucesión de una base de Markushevich es una base de bloques de la misma.
La siguiente demostración es la de [11, Proposición 3.11], modificada usando el resultado mejorado del Lema 1.1.6.

Proposición 1.1.10. *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ una base de bloques seminormalizada de una base de Markushevich $\mathcal{Y}$ de un subespacio $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$. Entonces:*

(a) *O bien* $\overline{\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^w$ *no es débil compacto, o bien* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es débil nula. Por ende,* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tiene la PSFD.*

(b) *Si* $0 \in \overline{\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^w$ *o* $\mathbb{X}$ *es un espacio dual y* $0 \in \overline{\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^{w*}$*, entonces* $M_{fs} = 1$.

(c) *Si* $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *no es débil nula, entonces*

$$M_{fs} \leq 2\left(2 + \inf_{f^{**}\in\beta((z_k))}\left\{\frac{\|f^{**}\|}{\operatorname{dist}\left(f^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)}\right\}\right).$$

(d) *Si* $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ *y* $\overline{[\mathcal{Y}^*]}$ *es c-normante, entonces* $M_{fs} \leq c^{-1}$.

(e) *Si* $\mathbb{Y} = \mathbb{X}$ *e* $\mathcal{Y}$ *es una base de Schauder de* $\mathbb{X}$ *con constante* K_b*, entonces* $M_{fs} \leq K_b$.

Demostración. Para probar (a), supongamos que $\overline{\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}}^w$ es débil compacto. Como $\mathbb{Y}$ is débil cerrado, dada una subred (z_{k_λ}) existe una subred $\left(z_{k_{\lambda_\theta}}\right)$ y $g_0 \in \mathbb{Y}$ tales que

$$z_{k_{\lambda_\theta}} \xrightarrow{w} g_0.$$

Como $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de $\mathcal{Y}$, se sigue que $\mathbf{y}_n^*(g_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $g_0 = 0$ porque $\mathcal{Y}$ es base de Markushevich. Luego, $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es débil nula. Se sigue del Corolario 1.1.8 que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene la PSFD.
El Lema 1.1.5 implica (b), y (c) se sigue de (a) y el Lema 1.1.6.
Para demostrar (d), notemos que por (a), $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión básica $(z_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$. Sea $\mathbb{F} \subset \mathbb{X}$ un subespacio de dimensión finita, y fijemos $0 < \epsilon < 1$. Elijamos $0 < \xi < 1$ de manera que

$$0 < \frac{c^{-1}(1-\xi)^{-1}}{1 - c^{-1}(1-\xi)^{-1}\xi} \leq c^{-1} + \epsilon.$$

Sea $\left(g_j\right)_{1\leq j\leq m_1} \subset S_{\mathbb{F}}$ una ξ-red en la esfera unidad de $\mathbb{F}$.
Como $\overline{[\mathcal{Y}^*]}$ es c-normante, también lo es $[\mathcal{Y}^*]$. Por ende, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ y vectores unitarios $\left(g_j^*\right)_{1\leq j\leq m_1} \subset \left[\mathbf{y}_k^* \colon 1 \leq k \leq m_2\right]$ tales que $\left|g_j^*\left(g_j\right)\right| \geq c(1-\xi)$ para todo $1 \leq j \leq m_1$.
Ahora fijemos $f \in S_{\mathbb{F}}$ y $g \in \overline{[z_{k_l} \colon l > m_2]}$, y elijamos $1 \leq j \leq m_1$ de modo que $\left\|f - g_j\right\| \leq \xi$.
Notemos que $g \in \overline{[\mathbf{y}_k \colon k > m_2]}$, así que $\mathbf{y}_k^*(g) = 0$ para todo $1 \leq k \leq m_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
1 \leq & c^{-1}(1-\xi)^{-1}\left|g_j^*\left(g_j\right)\right| \leq c^{-1}(1-\xi)^{-1}\left\|g_j + g\right\| \\
\leq & c^{-1}(1-\xi)^{-1}\|f + g\| + c^{-1}(1-\xi)^{-1}\left\|g_j - f\right\| \\
\leq & c^{-1}(1-\xi)^{-1}\|f + g\| + c^{-1}(1-\xi)^{-1}\xi.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\|f\| = 1 \leq \frac{c^{-1}(1-\xi)^{-1}}{1-c^{-1}(1-\xi)^{-1}\xi}\|f+g\| \leq \left(c^{-1}+\epsilon\right)\|f+g\|.$$

Parar terminar la demostración de la proposición, notemos que (e) se sigue de (d) y el Lema 1.1.9. □

Observación 1.1.11. [11, Observación 3.12] Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{X}$ es cualquier base de bloques de una base de Markushevich, podemos normalizarla y aplicar la Proposición 1.1.10 y luego el Lema 1.1.3, así que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la PSFD.

Recordemos que un espacio tiene la propiedad de Schur si la convergencia débil de sucesiones implica la convergencia en norma (y por lo tanto, es equivalente a la misma). Para estos espacios - que llamamos *espacios de Schur* -, tenemos el siguiente lema:

Lema 1.1.12. *Sea $\mathcal{X}$ una base seminormalizada de $\mathbb{X}$. Si $\mathbb{X}$ es un espacio de Schur y $\mathcal{X}^*$ es seminormalizada, entonces $\mathcal{X}$ tiene la PSFD.*

Demostración. Supongamos que no la tiene. Por el Corolario 1.1.8, $\overline{\{\mathbf{x}_n : n\in\mathbb{N}\}}^{w}_{k\in\mathbb{N}}$ es débil compacto y no contiene al cero. Por el Teorema de Eberlein-Šmullyan (ver por ejemplo [7, Teorema 1.6.3]), existe una subsucesión $\left(\mathbf{x}_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que es débil convergente. Como $\mathbb{X}$ es un espacio de Schur, la convergencia es en norma. Pero esto es imposible porque si $n \neq m$, entonces

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \geq \frac{1}{\zeta'}\left|\mathbf{x}_n^*(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m)\right| = \frac{1}{\zeta'}.$$

□

Las cota superiores para M_{fs} obtenidas en el Lema 1.1.6 y la Proposición 1.1.10(c) mejoran los resultados correspondientes de [11, Lema 3.7, Proposición 3.11 (c)]. Seguidamente, probaremos que tanto estas nuevas cotas como las dadas en la Proposición 1.1.10 (d) y (e) son óptimas salvo por constantes absolutas. A tal fin, usaremos la construcción de [11, Ejemplo 4.4], que también será de utilidad más adelante, en la Sección 1.2.

Ejemplo 1.1.13. *Sea $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base canónica de ℓ_1. Dado $\alpha > 1$, definimos para todo $n \geq 2$*

$$\mathbf{x}_n := \mathbf{e}_n + \alpha(-1)^n\mathbf{e}_1; \qquad \mathbf{x}_n^* := \mathbf{e}_n^*\big|_{\overline{[\mathbf{x}_n : n\geq 2]}},$$

y definimos

$$\mathcal{X} := (\mathbf{x}_n)_{n\geq 2}; \qquad \mathbb{X} := \overline{[\mathcal{X}]}.$$

Entonces $\mathcal{X}$ es una base de Schauder de $\mathbb{X}$ equivalente a $\mathcal{E}$, y valen las siguientes afirmaciones.

$$\alpha + 1 \geq K_b; \tag{1.7}$$

$$\frac{\alpha+1}{2} \leq M_{fs}(\mathcal{X}, \mathbb{X}) \leq K_b; \tag{1.8}$$

$$4(\alpha+2) \geq 2\left(2 + \inf_{f^{**} \in \overline{\{\mathcal{X}\}}^{w^*} \setminus \widehat{\mathbb{X}}} \left\{ \frac{\|f^{**}\|}{\operatorname{dist}\left(f^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)} \right\}\right) \geq M_{fs}(\mathcal{X}, \mathbb{X}). \tag{1.9}$$

Notemos que (1.7) implica que $\overline{[\mathcal{X}^*]} \subset \mathbb{X}^*$ es $(\alpha+1)^{-1}$-normante.

Demostración. Primero observemos que que $\|\mathbf{x}_n\| = \alpha + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.
Ahora fijemos $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}, l \in \mathbb{N}$ y escalares $(a_n)_{2 \leq n \leq m+l}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{m} |a_n| \leq \left\| \sum_{n=2}^{m} a_n \mathbf{x}_n \right\| &= \alpha \left| \sum_{n=2}^{m} (-1)^n a_n \right| + \sum_{n=2}^{m} |a_n| \leq (\alpha+1) \sum_{n=2}^{m} |a_n| \\ &\leq (\alpha+1) \sum_{n=2}^{m+l} |a_n| \leq (\alpha+1) \left\| \sum_{n=2}^{m+l} a_n \mathbf{x}_n \right\|.\end{aligned}$$

Esto prueba tanto la equivalencia de $\mathcal{X}$ con $\mathcal{E}$ como (1.7).
La desigualdad a la derecha de (1.8) se sigue de la Proposición 1.1.10 (e). Para demostrar la desigualdad a la izquierda, fijemos $\epsilon > 0$, y sea $(\mathbf{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión separadora finito dimensional para $\left(\mathbb{X}, M_{fs}, \epsilon, \mathcal{X}\right)$. Fijemos $\mathbb{F} := [\mathbf{x}_2]$, y sea $k > j_{\mathbb{F}}$. Entonces

$$\alpha + 1 = \|\mathbf{x}_2\| \leq \left(M_{fs} + \epsilon\right) \left\| \mathbf{x}_2 + (-1)^{n_k+1} \mathbf{x}_{n_k} \right\| = 2\left(M_{fs} + \epsilon\right),$$

y el resultado se sigue tomando límite para $\epsilon \to 0$.
Ahora probemos (1.9): Nuevamente la desigualdad de la derecha se sigue de la Proposición 1.1.10(c). Para demostrar la desigualdad restante, primero tomemos $f_0^{**} \in \mathbb{X}^{**}$ y una subred $(\widehat{\mathbf{x}}_{n_\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ que converge a f_0^{**} en la topología débil estrella. Puesto que $\alpha > 1$, se sigue de (1.8) que $M_{fs} > 1$. Luego, por la Proposición 1.1.10 (b) se deduce que $0 \notin \overline{\{\mathcal{X}\}}^{w}_{k \in \mathbb{N}}$, y entonces $f_0^{**} \neq 0$. Además, se sigue de la convergencia débil estrella que $f_0^{**}(\mathbf{x}_n^*) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Como $\mathcal{X}$ es en particular una base de Markushevich, esto implica que $f_0^{**} \notin \widehat{\mathbb{X}}$. Notemos que $\left\|f_0^{**}\right\| \leq \alpha + 1$. Ahora daremos una cota inferior para la distancia de f_0^{**} a $\widehat{\mathbb{X}}$. A tal fin, fijemos $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y escalares $(a_n)_{2 \leq n \leq m}$, y sea $f := \sum_{n=2}^{m} a_n \mathbf{x}_n$. Para estimar $\left\|\widehat{f} - f_0^{**}\right\|$ por debajo, consideramos dos casos: Si

$$\sum_{n=2}^{m} |a_n| \leq \frac{1}{2}, \tag{1.10}$$

tomamos $g_0^* = (g_{0,n})_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ tal que

$$g_{0,1}^* = 0 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad g_{0,n} = 1 \ \forall n \geq 2.$$

Usando la identificación canónica de ℓ_∞ con el espacio dual de ℓ_1, y restringiendo g_0^* a $\mathbb{X}$, vamos a considerar a g_0^* como un elemento de $\mathbb{X}^*$. Notemos que $g_0^*(\mathbf{x}_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la convergencia débil estrella, se deduce que $f_0^{**}\left(g_0^*\right) = 1$. Puesto que

$$\left\|g_0^*\right\|_{\mathbb{X}^*} \leq \left\|g_0^*\right\| = 1,$$

se tiene que

$$\left\|\widehat{f} - f_0^{**}\right\| \geq \left|\left(\widehat{f} - f_0^{**}\right)(g_0^*)\right| \geq \left|f_0^{**}(g_0^*)\right| - \left|g_0^*(f)\right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{m} |a_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, si no vale (1.10), sea $\varepsilon_n := \operatorname{sgn}(a_n)^{-1}$ para todo $2 \leq n \leq m$, y $g_1^* := \sum_{n=2}^m \varepsilon_n \mathbf{x}_n^*$. Como para todo $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $\mathbf{x}_n^*$ es la restricción a $\mathbb{X}$ de $\mathbf{e}_n^* \in \ell_\infty$, se deduce que

$$\left\|g_1^*\right\|_{\mathbb{X}^*} \leq \left\|\sum_{n=2}^{m} \varepsilon_n \mathbf{e}_n^*\right\|_{\ell_\infty} = 1,$$

y como $f_0^{**}\left(g_1^*\right) = 0$, se sigue que

$$\left\|\widehat{f} - f_0^{**}\right\| \geq \left|\left(\widehat{f} - f_0^{**}\right)(g_1^*)\right| = \sum_{n=2}^{m} |a_n| \geq \frac{1}{2}.$$

Considerando ambos casos, concluimos que

$$\operatorname{dist}\left(f_0^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

Por ende, tomando ínfimo obtenemos

$$2\left(2 + \inf_{f^{**}\in\overline{\{\widehat{\mathcal{X}}\}}^{w^*}\setminus\widehat{\mathbb{X}}} \left\{\frac{\|f^{**}\|}{\operatorname{dist}\left(f^{**}, \widehat{\mathbb{X}}\right)}\right\}\right) \leq 2\left(2 + \frac{\alpha+1}{\frac{1}{2}}\right) = 4(\alpha+2).$$

□

La propiedad de separación finito-dimensional es clave para la demostración de la implicación semi-greedy $\Longrightarrow$ almost greedy de [11], pero es posible mejorar algunas de las constantes que se obtienen por medio de una propiedad similar, que ha sido estudiada en [12]. Seguidamente, damos las demostraciones correspondientes, que son similares a algunas dadas previamente en esta sección. Usaremos la siguiente notación:

- Dado $\delta > 0$, diremos que un subconjunto $\emptyset \subsetneq S \subset \mathbb{X}$ es δ-uniformemente discreto si $\|f - g\| \geq \delta$ para todo par de elementos distintos $f, g \in S$.
- En el caso de una sucesión (o de un conjunto indexado) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente discreta si $\|f_n - f_m\| \geq \delta$ siempre que $n \neq m$.

Lema 1.1.14. *[12, Lemma 2.5] Sea $E \subset \mathbb{X}$ un conjunto infinito, acotado, y uniformemente discreto, y $\mathbb{F} \subset \mathbb{X}$ un subespacio de dimensión finita. Dado $\epsilon > 0$, existen $f \neq g \in E$ tales que para todo $b \in \mathbb{K}$ y todo $h \in \mathbb{F}$,*

$$\|h\| \leq (1+\epsilon)\|h + b(f-g)\|.$$

Demostración. Elijamos primero $\delta > 0$ de modo que E sea δ-uniformemente discreto, y luego $0 < \epsilon' < \epsilon$ tal que

$$0 < \frac{1}{1 - 4\delta^{-1}\epsilon' - \epsilon'} < 1 + \epsilon. \tag{1.11}$$

Sea $\{h_1, \ldots, h_n\}$ una ϵ'-red en $S_{\mathbb{F}}$, y sean $\left\{h_1^*, \ldots, h_n^*\right\} \subset S_{\mathbb{X}^*}$ tales que $h_j^*\left(h_j\right) = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Como S es infinito y acotado, existe $h_0^{**} \in \mathbb{X}^{**}$ un punto de acumulación débil estrella de $\widehat{E} \subset \mathbb{X}^{**}$. Por lo tanto, existen $f \neq g \in E$ tales que para cada $1 \leq k \leq n$,

$$\text{máx}\left\{\left|h_0^{**}(h_k^*) - h_k^*(f)\right|, \left|h_0^{**}(h_k^*) - h_k^*(g)\right|\right\} \leq \epsilon'.$$

Fijemos $h \in S_{\mathbb{F}}$, y sea $1 \leq k \leq n$ tal que

$$\|h_k - h\| \leq \epsilon'.$$

Ahora elijamos $b \in \mathbb{K}$. Si $|b| \leq 2\delta^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|h + b(f-g)\| \geq \|h_k + b(f-g)\| - \epsilon' \geq &\left|h_k^*(h_k + b(f-g))\right| - \epsilon' \\
\geq &1 - |b|\left|h_k^*(f-g)\right| - \epsilon' \\
\geq &1 - 2\delta^{-1}\left|h_0^{**}(h_k) - h_k^*(f) + h_k^*(g) - h_0^{**}(h_k)\right| - \epsilon' \\
\geq &1 - 4\delta^{-1}\epsilon' - \epsilon'.
\end{aligned}$$

Luego, por (1.11),

$$\|h\| = 1 \leq (1+\epsilon)\|h + b(f-g)\|.$$

Por otra parte, si $|b| > 2\delta^{-1}$, entonces

$$\|h + b(f-g)\| \geq |b|\,\|f-g\| - \|h\| \geq 1 = \|h\|.$$

Esto completa la demostración para $h \in S_{\mathbb{F}}$, y reescalando obtenemos el resultado para $h \in \mathbb{F}$. $\square$

Lema 1.1.15. *[12, Lema 2.6] Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{X}$ una sucesión acotada y uniformemente discreta. Para cada subespacio separable $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$ y cada $\epsilon > 0$, existe una subsucesión $\left(g_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\left(g_{n_{2j-1}} - g_{n_{2j}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es básica con constante no mayor que $(1+\epsilon)$, y satisface lo siguiente: Para cada subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$ y cada $\xi > 0$, existe $r_{\mathbb{F},\xi} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $g \in \mathbb{F}$ y todo $f \in \overline{\left[g_{n_{2j-1}} - g_{n_{2j}} : j > r_{\mathbb{F},\xi}\right]}$,*

$$\|g\| \leq (1+\xi)\|g+f\|.$$

Demostración. Sea $\Gamma := \{(k,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : k \neq j\}$, con el orden parcial $\leq$ definido por

$$(k,j) \prec (k',j') \iff \text{máx}\{k,j\} < \text{mín}\{k',j'\}.$$

Como $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq k}}$ es uniformemente discreta para cada $k \in \mathbb{N}$, por Lema 1.1.14 se tiene que el conjunto de diferencias $\left\{g_k - g_j\right\}_{(k,j)\in\Gamma}$ cumple con las condiciones del Lema 1.1.5. Luego, existe una sucesión $(k_n, j_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ estrictamente creciente en el orden $\leq$ tal que $\left(g_{k_n} - g_{j_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica con las propiedades de dicho lema. Reenumerando, obtenemos la sucesión del enunciado (una prueba diferente puede verse en [12]). □

Corolario 1.1.16. *[12, Corolario 2.7] Sea $\mathcal{X}$ una base de Markushevich seminormalizada de $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, con constante de separación finito-dimensional no mayor que M. Entonces para cada subespacio separable $\mathbb{Z} \subset \mathbb{X}$ y cada $\epsilon > 0$, existe una subsucesión básica $(\mathbf{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que satisface la siguiente condición: para cada subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$, existe $s_{\mathbb{F},\epsilon} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $f \in \mathbb{F}$, toda $g \in \overline{[\mathbf{x}_{n_k} : k \geq s_{\mathbb{F},\epsilon}]}$ y toda $h \in \overline{[\mathbf{x}_{n_{2k-1}} - \mathbf{x}_{n_{2k}} : k \geq s_{\mathbb{F},\epsilon}]}$,*

$$\|f\| \leq \text{mín}\{(M+\epsilon)\|f+g\|, (1+\epsilon)\|f+h\|\}.$$

Demostración. La Proposición 1.1.10 nos da una sucesión separadora $(\mathbf{x}_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ para $(\mathbb{Z}, M, \epsilon)$. Por otra parte, como $\mathcal{X}^*$ es acotada, $\mathcal{X}$ es uniformemente discreta, y entonces también lo es $(\mathbf{x}_{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto, existe una subsucesión $\left(\mathbf{x}_{n_{l_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ con las propiedades del Lema 1.1.15. Tomando para cada subespacio de dimensión finita $\mathbb{F} \subset \mathbb{Z}$, $s_{\mathbb{F},\epsilon} := 1 + \text{máx}\{r_{\mathbb{F},\epsilon}, j_{\mathbb{F},\epsilon}\}$, se deduce que la subsucesión $\left(\mathbf{x}_{n_{l_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene las propiedades buscadas. □

1.2. De semi-greedy a almost greedy

En esta sección, mostraremos que las bases de Markushevich semi-greedy en espacios de Banach son almost greedy, y probaremos otros resultados sobre las relaciones entre los algoritmos greedy y Chebyshev-greedy. La implicación mencionada fue demostrada por primera vez por Dilworth et. al para bases de Schauder en espacios con cotipo finito en [18], mientras que Berná mostró en [13] que la condición de cotipo finito no es necesaria. En [11], la prueba de [13] fue modificada usando la PSFD para obtener el resultado para bases de Markushevich; asimismo, se dio el resultado para una variante formalmente más débil de las bases semi-greedy. Estas demostraciones usan la equivalencia entre quasi-greedy + (super)-democrática y almost greedy (ver [19, Teorema 3.3]) para probar la implicación. Una prueba directa de la implicación semi-greedy $\Longrightarrow$ almost greedy - como asimismo una mejora en la constante quasi-greedy en la implicación semi-greedy $\Longrightarrow$ quasi-greedy - fue dada en [12]. En esta tesis, vamos a dar la prueba siguiendo en general [12], lo que también nos permite obtener algunos resultados más generales sobre parámetros definidos para cualquier base - no necesariamente semi-greedy.

Definición 1.2.1. *Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $0 < t \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$.*

- *El* parámetro t-quasi-greedy $\overline{\mathbf{g}}(m,t) = \overline{\mathbf{g}}(m,t)[\mathcal{X},\mathbb{X}]$ *se define como*

$$\overline{\mathbf{g}}(m,t) := \inf_{C>0}\{\|P_A(f)\| \leq C\|f\|,\ \forall f \in \mathbb{X}, \forall A \in \mathcal{G}(f,m,t)\}.$$

- *El* parámetro de t-supression-quasi-greedy $\widehat{\mathbf{g}}(m,t) = \widehat{\mathbf{g}}(m,t)[\mathcal{X},\mathbb{X}]$ *se define como*

$$\widehat{\mathbf{g}}(m,t) := \inf_{C>0}\{\|f - P_A(f)\| \leq C\|f\|,\ \forall f \in \mathbb{X}, \forall A \in \mathcal{G}(f,m,t)\}.$$

Para $t = 1$, el parámetro $\overline{\mathbf{g}}(m,1)$ fue considerado en [4], y el parámetro quasi-greedy dado por $\mathbf{g}_m := \max_{n\leq m}\overline{\mathbf{g}}(n,1)$ también fue estudiado, por ejemplo en [16].

Definición 1.2.2. *Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $0 < t \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$.*

- *El* parámetro superior de Chebyshev-Lebesgue*,* $\mathbf{L}^u_{ch}(m,t) = \mathbf{L}^u_{ch}(m,t)[\mathcal{X},\mathbb{X}]$ *se define como*

$$\mathbf{L}^u_{ch}(m,t) := \inf_{C>0}\left\{\|f-g\| \leq C\sigma_m(f) \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{X},\ \forall A \in \mathcal{G}(f,m,t), \\ \exists g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]. \end{array}\right\}.$$

- *El* parámetro inferior de Chevyshev-Lebesgue*,* $\mathbf{L}^l_{ch}(m,t) = \mathbf{L}^l_{ch}(m,t)[\mathcal{X},\mathbb{X}]$ *se define como*

$$\mathbf{L}^l_{ch}(m,t) := \inf_{C>0}\left\{\|f-g\| \leq C\sigma_m(f) : \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{X},\ \exists A \in \mathcal{G}(f,m,t), \\ \exists g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]. \end{array}\right\}.$$

Como es usual, podemos dejar la base y el espacio implícitos cuando no hay ambigüedad.

Observación 1.2.3. Bajo las hipótesis de la Definición 1.2.2, es claro que hay una mínima $C > 0$ en la definición de $\mathbf{L}^u_{ch}(m,t)$. Lo mismo vale para $\mathbf{L}^l_{ch}(m,t)$ si $\mathcal{X}$ es una base de Markushevich, dado que para todo $f \in \mathbb{X}$ con $|\operatorname{sop}(f)| > m$, el conjunto $\mathcal{G}(f,m,t)$ es finito por el Lema 1.2.6 que demostramos seguidamente, mientras que si $|\operatorname{sop}(f)| \leq m$, entonces para todo $A \in \mathcal{G}(f,m,t)$, se tiene que $f \in [\mathbf{x}_n : n \in A]$.

Observación 1.2.4. El parámetro superior de Chebyshev-Lebesgue es la constante de Chebyshev-Lebesgue introducida en [20] y también estudiada en [16].

Nuestro siguiente teorema establece una relación entre $\widehat{\mathbf{g}}$, M_{fs} y $\mathbf{L}^l_{ch}$, la cual en particular mejora la cota superior para la constante suppression-quasi-greedy para bases de Markushevich semi-greedy en espacios de Banach. Esta constante se define como

$$K_{sqg} := \inf_{K>0} \{\|f - P_A(f)\| \leq K \|f\| \ \ \forall f \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{G}(f, m, 1)\} \tag{1.12}$$

Observación 1.2.5. Notemos que existe una constante $K > 0$ para la que vale (1.12) si y solo si $\mathcal{X}$ es quasi-greedy.

Más precisamente, el Teorema 4.2 de [11] muestra que si $\mathcal{X}$ es C-s-semi-greedy, entonces es K_{sqg}-suppression quasi-greedy con $K_{sqg} \leq M_{fs}C(1 + (M_{fs} + 1)Cs^{-2})$. Seguidamente probaremos (demostración de [12, Proposición 6.5]) que $K_{sqg} \leq M_{fs}C(1 + 2Cs^{-2})$. A tal fin, vamos a usar dos lemas auxiliares, el segundo de los cuales mejora [29, Lema 2.2] para bases de Markushevich.

Lema 1.2.6. *[12, Lemma 3.13] Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$ y $0 < t \leq 1$. Si $f \in \mathbb{X}$ y $m \in \mathbb{N}$ son tales que $|\mathrm{sop}(f)| \geq m$, entonces $\mathcal{G}(f, m, t)$ es un conjunto finito y $\mathbf{x}_n^*(f) \neq 0$ para todo $n \in A$ con $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$.*

Demostración. Sean

$$B := \bigcup_{A \in \mathcal{G}(f,m,t)} A \qquad \text{y} \qquad b := \inf_{n \in B} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|,$$

y elijamos $j \in \mathrm{sop}(f)$ de manera que

$$\left|\left\{n \in \mathbb{N} : \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right|\right\}\right| \geq m.$$

Como $\mathcal{X}^*$ es débil estrella nula, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| < t \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right| \forall n > n_0.$$

Por lo tanto, $B \subset \{1, \ldots, n_0\}$, y $\mathcal{G}(f, m, t)$ es finito, así que b es un mínimo. Ahora sean $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$ y $n \in A$ con $\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| = b$. Si $b = 0$, tomando $l \in \mathrm{sop}(f) \setminus A$ tenemos que $0 = b \geq t \left|\mathbf{x}_l^*(f)\right| > 0$, una contradicción. □

Lema 1.2.7. *[12, Lema 3.14] Sean $\mathcal{X}$ una base de Markushevich de $\mathbb{X}$, $f \in \mathbb{X}$, y $\epsilon > 0$. Valen las siguientes afirmaciones:*

(I) *Dado $D \in \mathbb{N}^{<\infty}$, existe $g \in [\mathcal{X}]$ tal que $\|g - f\| < \epsilon$ y $P_D(g - f) = 0$.*

(II) *Dados $m_0 \in \mathbb{N}$ y $0 < t \leq 1$, existe $g \in [\mathcal{X}]$ tal que $\|g - f\| < \epsilon$ y, para cada $1 \leq m \leq m_0$, $\mathcal{G}(f, m, t) = \mathcal{G}(g, m, t)$ y $P_A(g - f) = 0$ para cada $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$.*

Demostración. Para probar (i), elijamos $h \in [\mathcal{X}]$ de manera que $\|f - P_D(f) - h\| < (1 + \|P_D\|)^{-1} \epsilon$, y definamos $g := h - P_D(h) + P_D(f)$. Tenemos que

$$\|f - g\| \leq \|f - P_D(f) - h\| + \|P_D(h - f + P_D(f))\| \leq (1 + \|P_D\|) \|f - P_D(f) - h\| < \epsilon.$$

Para probar (ii) podemos asumir que f tiene soporte infinito (de lo contrario, aproximamos f por f), así que las hipótesis del Lema 1.2.6 valen para $m = m_0$. Sean

$$B := \bigcup_{A \in \mathcal{G}(f, m_0, t)} A \qquad \text{y} \qquad b := \min_{n \in B} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|.$$

Primero notemos que si $m_0 > 1$, $1 \leq m < m_0$ y $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$, entonces $A \cup A_1 \in \mathcal{G}(f, m_0, t)$ para cada $A_1 \in \mathcal{G}(f - P_A(f), m_0 - m, 1)$. Por ende, $A \subset B$. Esto muestra que

$$B = \bigcup_{\substack{1 \leq m \leq m_0 \\ A \in \mathcal{G}(f, m, t)}} A. \tag{1.13}$$

Dado que $\mathcal{X}^*$ es débil estrella nula y $b > 0$ por el Lema 1.2.6, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| < 2^{-1} t b$ para todo $n \geq n_0$. Sean

$$D := \{1, \ldots, n_0\}; \qquad \epsilon_1 := \frac{t \min\{\epsilon, 1, b\}}{2(1 + \zeta')},$$

y sea g obtenida por aplicación de (i) a f, D y ϵ_1. Para ver que g tiene las propiedades buscadas, primero notemos que $B \subset D$ y para cada $n \in B$ y cada $k \notin D$,

$$\left|\mathbf{x}_k^*(g)\right| \leq \left|\mathbf{x}_k^*(f - g)\right| + \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \leq \zeta' \|f - g\| + 2^{-1} t b < t b \leq t \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| = t \left|\mathbf{x}_n^*(g)\right|. \tag{1.14}$$

Puesto que $n_0 > m_0$ y $|B| \geq m_0$, se sigue que $A \subset D$ para todo $A \in \mathcal{G}(g, m, t)$ y todo $1 \leq m \leq m_0$. Afirmamos que también $A \subset B$ para todo $A \in \mathcal{G}(g, m, t)$ y todo $1 \leq m \leq m_0$. Para probarlo, supongamos que esto es falso, y sean $1 \leq m \leq m_0$ y $A \in \mathcal{G}(g, m, t)$ tales que $A \not\subset B$. Como $|B| \geq |A|$, existe $n_1 \in B \setminus A$. Puesto que $A \cup B \subset D$, tenemos que

$$\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_n^*(g)\right| \geq t \left|\mathbf{x}_{n_1}^*(g)\right| = t \left|\mathbf{x}_{n_1}^*(f)\right| \geq t b \ \forall n \in A. \tag{1.15}$$

Ahora bien, se sigue de (1.13) y la elección de A que $A \notin \mathcal{G}(f, m, t)$. Por ende, existen $n_2 \in A$ y $n_3 \notin A$ tales que

$$\left|\mathbf{x}_{n_2}^*(f)\right| < t \left|\mathbf{x}_{n_3}^*(f)\right|. \tag{1.16}$$

Dado que

$$\left|\mathbf{x}_{n_2}^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_{n_2}^*(g)\right| \geq t \left|\mathbf{x}_{n_3}^*(g)\right|,$$

esto implica que $\mathbf{x}_{n_3}^*(f) \neq \mathbf{x}_{n_3}^*(g)$, y entonces $n_3 \notin D$, lo que junto con (1.16) y la elección de D implica que

$$\left|\mathbf{x}_{n_2}^*(f)\right| < \frac{t^2 b}{2},$$

lo que contradice (1.15) porque $n_2 \in A$. Queda probado que

$$\bigcup_{\substack{1\leq m\leq m_0\\ A\in\mathcal{G}(g,m,t)}} \subset B.$$

Ahora fijemos $1 \leq m \leq m_0$ y elijamos $A \in \mathcal{G}(f,m,t)$. Para ver que $A \in \mathcal{G}(g,m,t)$, fijemos $n \in A$ y $k \notin A$. Si $k \in D$, entonces

$$\left|\mathbf{x}_n^*(g)\right| = \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq t\left|\mathbf{x}_k(f)\right| = t\left|\mathbf{x}_k(g)\right|,$$

mientras que si $k \notin D$, entonces $t\left|\mathbf{x}_k^*(g)\right| \leq t^{-1}\left|\mathbf{x}_k^*(g)\right| \leq \left|\mathbf{x}_n^*(g)\right|$ por (1.14). Luego, $A \in \mathcal{G}(g,m,t)$.
De manera similar, sean $A \in \mathcal{G}(g,m,t)$, $n \in A$ y $k \notin A$. Dado que $n \in A \subset B \subset D$, el caso $k \in D$ se prueba como antes pero intercambiando f y g, mientras que si $k \notin D$, entonces

$$t\left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| < b \leq \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|.$$

Se deduce que $A \in \mathcal{G}(f,m,t)$, lo que completa la demostración. □

Ahora podemos probar la cota mencionada anteriormente para la constante suppression quasi-greedy de las bases de Markushevich t-semi-greedy, y también un resultado más general sobre las relaciones entre los parámetros $\widehat{\mathbf{g}}$ y $\mathbf{L}_{ch}^l$.

Teorema 1.2.8. *[12, Proposición 6.5] Sea $\mathcal{X}$ una base de Markushevich de $\mathbb{X}$. Para todo $0 < s \leq 1$, $0 < t \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$, tenemos la siguiente estimación:*

$$\widehat{\mathbf{g}}(m,t) \leq M_{fs}\mathbf{L}_{ch}^l\left(2\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor, s\right)\left(1 + 2\mathbf{L}_{ch}^l\left(2\left\lfloor\frac{m+1}{2}\right\rfloor, s\right)t^{-1}s^{-2}\right). \tag{1.17}$$

En particular, si $\mathcal{X}$ es C-s-semi-greedy, es $M_{fs}C(1+2Cs^{-2})$-suppression quasi-greedy.

Demostración. Elijamos $0 < \epsilon < 1$ y sea $(\mathbf{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada por una aplicación del Corolario 1.1.16 a $\mathcal{X}$ y $\left(\mathbb{X}, M_{fs}, \epsilon\right)$.
Fijemos $f \in \mathbb{X}$ con soporte finito, y $A \in \mathcal{G}(f,m,t)$. Podemos asumir que $f \neq P_A(f)$ (si no, no hay nada que probar). Luego,

$$a := \max_{n\notin A}\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| > 0.$$

Elijamos $n_0 > \operatorname{sop}(f)$, y sean

$$\begin{aligned} m_1 &:= \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor; \\ \mathbb{F} &:= [\mathbf{x}_n : 1 \le n \le n_0]; \\ E_1 &:= \left\{ n_{2(s_{\mathbb{F},\epsilon}+j)-1} : 1 \le j \le m_1 \right\}; \\ E_2 &:= \left\{ n_{2(s_{\mathbb{F},\epsilon}+j)} : 1 \le j \le m_1 \right\}; \\ h &:= f + ats(1-\epsilon)\left(\mathbf{1}_{E_1} - \mathbf{1}_{E_2}\right). \end{aligned}$$

Notemos que $s_{\mathbb{F},\epsilon} > n_0$ (de otro modo, $\mathbf{x}_{s_{\mathbb{F},\epsilon}} \in \mathbb{F}$ y $\left\|\mathbf{x}_{s_{\mathbb{F},\epsilon}}\right\| \le \left(M_{fs} + \epsilon\right)\left\|\mathbf{x}_{s_{\mathbb{F},\epsilon}} - \mathbf{x}_{s_{\mathbb{F},\epsilon}}\right\| = 0$, una contradicción). Por ende, los conjuntos E_1, E_2 y A son disjuntos dos a dos. Como $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$, tenemos que

$$\left|\left\{1 \le n \le n_0 : \left|\mathbf{x}_n^*(h)\right| \ge at\right\}\right| \ge |A| + 1 = m + 1 \ge 2m_1.$$

Luego,

$$D \subset \{1, \ldots, n_0\}, \ \forall D \in \mathcal{G}(h, 2m_1, s).$$

Se sigue que existe $g_1 \in \mathbb{F}$ tal que

$$\|h - g_1\| \le \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, \sigma_{2m_1}(h) \le \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, \|f\|.$$

Por lo tanto, por el Corolario 1.1.16,

$$\begin{aligned} ats(1-\epsilon)\left\|\mathbf{1}_{E_1} - \mathbf{1}_{E_2}\right\| &\le \|h - g_1\| + \|f - g_1\| \le (2+\epsilon)\|h - g_1\| \\ &\le (2+\epsilon)\, \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, \|f\|. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Ahora definamos

$$g_2 := f - P_A(f) - s^{-1}(1+\epsilon)\, a\left(\mathbf{1}_{E_1} - \mathbf{1}_{E_2}\right).$$

Dado que

$$\left|\mathbf{x}_n^*(f - P_A(f))\right| \le a, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

tenemos que $\mathcal{G}(g_2, 2m_1, s) = \{E_1 \cup E_2\}$. Por ende, existe $g_3 \in \mathbb{X}$ con $\operatorname{sop}(g_3) \subset E_1 \cup E_2$ tal que

$$\begin{aligned} \|g_2 - g_3\| &\le \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, \sigma_{2m_1}(g_2) \\ &\le \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, \|f\| + \mathbf{L}_{ch}^l(2m_1, s)\, s^{-1}(1+\epsilon)\, a\left\|\mathbf{1}_{E_1} - \mathbf{1}_{E_2}\right\|. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Nuevamente por el Corolario 1.1.16, combinando (1.18) y (1.19) obtenemos

$$\begin{aligned}\|f - P_A(f)\| &\leq \left(M_{fs} + \epsilon\right) \|g_2 - g_3\| \\ &\leq \left(M_{fs} + \epsilon\right) \mathbf{L}^l_{ch}(2m_1, s) \left(1 + \mathbf{L}^l_{ch}(2m_1, s)\, t^{-1} s^{-2} (1+\epsilon)(2+\epsilon)(1-\epsilon)^{-1}\right) \|f\| .\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, se sigue que

$$\|f - P_A(f)\| \leq M_{fs} \mathbf{L}^l_{ch}(2m_1, s) \left(1 + 2\mathbf{L}^l_{ch}(2m_1, s)\, t^{-1} s^{-2}\right) \|f\| . \tag{1.20}$$

Ahora bien, si $\operatorname{sop}(f)$ no es finito, dado $\delta > 0$ por el Lema 1.2.7 existe f_1 con soporte finito tal que

$$P_A(f_1) = P_A(f); \qquad\qquad \|f - f_1\| < \delta,$$

y para el cual vale (1.20) reemplazando f por f_1, así que tomando límite se completa la prueba de (1.17).
Finalmente, si $\mathcal{X}$ es C-s-semi-greedy, entonces tomando supremo en (1.20) tenemos que

$$\begin{aligned}\sup_{m\in\mathbb{N}} \widehat{\mathbf{g}}(m, 1) \leq & M_{fs} \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ es par}}} \mathbf{L}^l_{ch}(n, s) \left(1 + 2 \sup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n \text{ es par}}} \mathbf{L}^l_{ch}(n, s)\, s^{-2}\right) \\ \leq & M_{fs} C \left(1 + 2C s^{-2}\right),\end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{X}$ es quasi-greedy con constante como en el enunciado. □

Seguidamente, vamos a probar que las bases de Markushevich semi-greedy son almost greedy, con una prueba directa, es decir sin usar que son quasi-greedy ni propiedades como democracia o superdemocracia. También obtendremos un resultado más general que relaciona los algoritmos greedy y greedy de Chebyshev para bases de Markushevich en general; a tal fin, definimos el parámetro de Lebesgue disjunto.

Definición 1.2.9. *[12, Definición 6.7] Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$, $0 < t \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$.*

- *El* parámetro de Lebesgue, $\mathbf{L}(m,t) = \mathbf{L}(m,t)[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ *se define como*

$$\mathbf{L}(m,t) := \inf_{C>0} \left\{ \|f - P_A(f)\| \leq C\|f - g\| : \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{X},\ \forall A \in \mathcal{G}(f, m, t), \\ \forall g \in [\mathcal{X}] : \left|\operatorname{sop}(g)\right| \leq m \end{array} \right\}.$$

- *El* parámetro de Lebesgue disjunto, $\mathbf{L}_d(m,t) = \mathbf{L}_d(m,t)[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ *se define como*

$$\mathbf{L}_d(m,t) := \inf_{C>0} \left\{ \|f - P_A(f)\| \leq C\|f - g\| : \begin{array}{l} \forall f \in \mathbb{X},\ \forall A \in \mathcal{G}(f, m, t), \\ \forall g \in [\mathcal{X}] : \left|\operatorname{sop}(g)\right| \leq m, \operatorname{sop}(g) \cap A = \emptyset. \end{array} \right\}.$$

El parámetro de Lebesgue para $t = 1$ ha sido estudiado, por ejemplo, en [15], [16], [24]. La variante disjunta es una extensión natural que nos permitirá mejorar algunos de nuestros resultados. También vamos a usar el siguiente resultado auxiliar.

Lema 1.2.10. *Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$ y $C > 0$. Son equivalentes:*

i) *$\mathcal{X}$ es C-almost greedy.*

ii) *Para todo $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$, se tiene que*

$$\|f - P_A(f)\| \leq C \inf_{B \in (\mathbb{N} \setminus A)^{(m)}} \|f - P_B(f)\|.$$

iii) *Para todo $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ y $B \in (\mathbb{N} \setminus A)^{(m)}$, se tiene que*

$$\|f - P_A(f)\| \leq C \|f - P_B(f)\|.$$

iv) *Para todo $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ y $B \in \mathbb{N}^{\leq m}$, se tiene que*

$$\|f - P_A(f)\| \leq C \|f - P_B(f)\|.$$

Demostración. Es claro que i) implica iv), mientras que la implicación recíproca se obtiene tomando ínfimo; el mismo argumento muestra que ii) es equivalente a iii). También es inmediato que i) implica iii), así que solo hace falta ver que iii) implica iv). Dados $f \in \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ y $B \in \mathbb{N}^{\leq m}$, fijemos $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{X}^*$ es débil estrella nula (cf. [1, Lema 2.4]), existe $D > B \cup A$ tal que

$$|B \cup D| = m; \qquad\qquad \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \leq \frac{\epsilon}{(m+1)(\zeta+1)} \ \forall n \in D.$$

(notemos que $D = \emptyset$ si y solo si $|B| = m$). Sea $B_1 := B \cup D$. Puesto que $A \setminus B_1 \in \mathcal{G}(f - P_{A \cap B_1}(f), |A \setminus B_1|, 1)$ y $|B_1 \setminus A| = |A \setminus B_1|$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f - P_A(f)\| &= \left\|f - P_{A \cap B_1}(f) - P_{A \setminus B_1}(f - P_{A \cap B_1}(f))\right\| \\
&\leq C \left\|f - P_{A \cap B_1}(f) - P_{B_1 \setminus A}(f - P_{A \cap B_1}(f))\right\| = \left\|f - P_{B_1}(f)\right\| \\
&\leq \|f - P_B(f)\| + \|P_D(f)\| \leq \|f - P_B(f)\| + \sum_{n \in D} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \|\mathbf{x}_n\| \\
&\leq \|f - P_B(f)\| + \epsilon.
\end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, hemos obtenido iv). □

Ahora podemos dar la prueba directa mencionada anteriormente.

Teorema 1.2.11. *Sea $\mathcal{X}$ una base de Markushevich de $\mathbb{X}$ y $M := M_{fs}(\mathcal{X}, \mathbb{X})$. Para todo $0 < s \leq 1$, $0 < t \leq 1$ y $m \in \mathbb{N}$, tenemos las siguientes cotas:*

(I) $\mathbf{L}_d(m,t) \leq M\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\left(1+2(M+1)\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)t^{-1}s^{-2}\right)$.

(II) *Si m es par, además tenemos*

$$\mathbf{L}_d(m,t) \leq M\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\left(1+4\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)t^{-1}s^{-2}\right).$$

(III) *Si m es impar, $m>1$, entonces*

$$\mathbf{L}_d(m,t) \leq M\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\left(1+\left(4\mathbf{L}_{ch}^{l}(m-1,s)+2\mathbf{L}_{ch}^{l}(2,s)\right)t^{-1}s^{-2}\right).$$

En particular, si $\mathcal{X}$ es C-s-semi-greedy, es K-almost greedy con

$$K \leq \min\left\{MC\left(1+2C(M+1)s^{-2}\right), \max\left\{MC\left(1+6Cs^{-2}\right), 1+\zeta\zeta'+\zeta''\right\}\right\}.$$

Demostración. Notemos que por el Lema 1.2.7, por los mismos argumentos que en la prueba de la Proposición 1.2.8 se sigue que para probar los resultados, podemos suponer que todos los vectores involucrados tienen soporte finito.
Ahora elijamos $0<\epsilon<1$, y sea $(\mathbf{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión dada por el Corolario 1.1.16 para $(\mathbb{X}, M, \epsilon)$. Para probar (I), elegimos $f \in \mathbb{X}$ con soporte finito y $A \in \mathcal{G}(f,m,t)$. Como antes, podemos asumir que $P_A(f) \neq f$, así que $\left|\operatorname{sop}(f)\right| > m$. Fijemos $g \in \mathbb{X}$ de manera que

$$\left|\operatorname{sop}(g)\right| \leq m \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sop}(g)\cap A = \emptyset,$$

definimos $a := \min_{n\in A}\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|$, y elegimos $n_0 > \operatorname{sop}(f)\cup\operatorname{sop}(g)$. Ahora definimos

$$\begin{aligned}
\mathbb{F} &:= [\mathbf{x}_n : 1 \leq n \leq n_0];\\
E_l &:= \left\{n_{2s_{\mathbb{F},\epsilon}+j+lm} : 1 \leq j \leq m\right\}, \ \forall l \in \{0,1\};\\
h &:= f - P_A(f) + a(1+\epsilon)s^{-1}t^{-1}\left(\mathbf{1}_{E_0}+\mathbf{1}_{E_1}\right).
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\left|\mathbf{x}_n^*(h)\right| = \left|\mathbf{x}_n^*(f-P_A(f))\right| \leq t^{-1}a, \ \forall n \notin E_0\cup E_1. \tag{1.21}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{G}(h,2m,s) = \{E_0\cup E_1\}.$$

Se sigue que existe $h_1 \in \mathbb{X}$ con $\operatorname{sop}(h_1) \subset E_0\cup E_1$ tal que

$$\|h-h_1\| \leq \mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\,\sigma_{2m}(h).$$

Luego,

$$\|f-P_A(f)\| \leq (M+\epsilon)\|h-h_1\| \leq (M+\epsilon)\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\|h+P_A(f)-g\|$$

$$\leq (M+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\left(\|f-g\|+a(1+\epsilon)\,s^{-1}t^{-1}\left\|\mathbf{1}_{E_0}+\mathbf{1}_{E_1}\right\|\right). \tag{1.22}$$

Sean

$$g_l := f-g-a(1-\epsilon)\,s\mathbf{1}_{E_l},\ \forall l\in\{0,1\}.$$

Como $\operatorname{sop}(g)\cap A=\emptyset$, tenemos que

$$\left|\left\{1\leq n\leq n_0 : \left|\mathbf{x}_n^*(f-g)\right|\geq a\right\}\right|\geq |A|=m.$$

Se sigue que para cada $l\in\{0,1\}$, cada elemento de $\mathcal{G}(g_l,m,s)$ está contenido en $\{1,\dots,n_0\}$, así que existe $f_l\in\mathbb{F}$ tal que

$$\|g_l-f_l\|\leq \mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)\,\sigma_m(g_l).$$

Esto implica que para cada $l\in\{0,1\}$,

$$\begin{aligned} a(1-\epsilon)\,s\left\|\mathbf{1}_{E_l}\right\| &\leq \|g_l-f_l\|+\|f-g-f_l\|\leq (1+M+\epsilon)\|g_l-f_l\| \\ &\leq (1+M+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)\,\sigma_m(g_l) \\ &\leq (1+M+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)\,\|f-g\|. \end{aligned} \tag{1.23}$$

De (1.22) y (1.23) obtenemos

$$\begin{aligned} &\|f-P_A(f)\| \\ &\leq (M+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(2m,s)\left(1+2(1+M+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)(1+\epsilon)(1-\epsilon)^{-1}s^{-2}t^{-1}\right)\|f-g\|. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, esto completa la prueba de (i).
Para probar (ii), se usa el mismo argumento anterior, con las siguientes modificaciones: Sea $\varepsilon=\left(\varepsilon_n:=(-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, y reemplacemos $\mathbf{1}_{E_l}$ por $\mathbf{1}_{\varepsilon,E_l}$ en las definiciones de h y de g_l, para $l\in\{0,1\}$.
Como $|E_l|=m$ es par, $\mathbf{1}_{\varepsilon,E_l}$ es una suma que cumple con las condiciones del Corolario 1.1.16, y entonces en lugar de (1.23) obtenemos

$$\begin{aligned} a(1-\epsilon)s\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,E_l}\right\| &\leq \|g_l-f_l\|+\|f-g-f_l\|\leq (1+1+\epsilon)\|g_l-f_l\| \\ &\leq (2+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)\,\sigma_m(g_l)\leq (2+\epsilon)\,\mathbf{L}_{ch}^{l}(m,s)\,\|f-g\|\ \ \forall l\in\{0,1\}, \end{aligned}$$

y la prueba se completa como en el caso anterior.
Finalmente, supongamos que m es impar y mayor que 1. La prueba es como la dada para m par, con las siguientes modificaciones: Para $l\in\{0,1\}$, sea

$$E_l := \left\{n_{2s_{\mathbb{F},\epsilon}+j+l(m-1)} : 1\leq j\leq m-1\right\},$$

y sea $E_2 := \left\{n_{2s_{\mathbb{F},\epsilon}+2m-1}, n_{2s_{\mathbb{F},\epsilon}+2m}\right\}$. Definimos

$$\begin{aligned} h &:= f - P_A(f) + a(1+\epsilon)s^{-1}t^{-1}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,E_0} + \mathbf{1}_{\varepsilon,E_1} + \mathbf{1}_{\varepsilon,E_2}\right); \\ g_l &:= f - g - a(1-\epsilon)s\mathbf{1}_{\varepsilon,E_l}, \ \forall l \in \{0,1,2\}, \end{aligned}$$

con ε como antes, es decir $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$. Dado que $|E_0| = |E_1| = m-1$, para $l \in \{0,1\}$ obtenemos

$$\begin{aligned} a(1-\epsilon)s\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,E_l}\right\| &\leq \|g_l - f_l\| + \|f - g - f_l\| \leq (1+1+\epsilon)\|g_l - f_l\| \\ &\leq (2+\epsilon)\mathbf{L}_{ch}^{l}(m-1,s)\,\sigma_{m-1}(g_l) \leq (2+\epsilon)\mathbf{L}_{ch}^{l}(m-1,s)\|f-g\|, \end{aligned}$$

mientras que $|E_2| = 2$, así que

$$\begin{aligned} a(1-\epsilon)s\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,E_2}\right\| &\leq \|g_2 - f_2\| + \|f - g - f_2\| \leq (1+1+\epsilon)\|g_2 - f_2\| \\ &\leq (2+\epsilon)\mathbf{L}_{ch}^{l}(2,s)\sigma_2(g_2) \leq (2+\epsilon)\mathbf{L}_{ch}^{l}(2,s)\|f-g\|, \end{aligned}$$

y la prueba se completa como en el caso par.
Finalmente, supongamos que $\mathcal{X}$ es C-s-semi-greedy. Combinando (I), (II), (III) obtenemos que

$$\mathbf{L}_d(m,1) \leq MC \min\left\{1 + 2C(M+1)s^{-2}, 1 + 6Cs^{-2}\right\}$$

para todo $m \geq 2$, mientras que

$$\mathbf{L}_d(1,1) \leq MC\left(1 + 2C(M+1)s^{-2}\right).$$

Por ende, para completar la demostración solo hace falta probar que si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A = \{k\} \in \mathcal{G}(f,1,1)$ y $j \neq k$, entonces

$$\|f - P_A(f)\| \leq (1 + \zeta\zeta' + \zeta'')\left\|f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\|.$$

Esto se sigue de que A es un conjunto greedy de f y la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} \|f - P_A(f)\| &\leq \left\|f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\| + \|P_A(f)\| + \left\|\mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\| \\ &= \left\|f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\| + \left\|P_A\left(f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right)\right\| + \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right|\left\|\mathbf{x}_j\right\| \\ &\leq (1+\zeta'')\left\|f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\| + \left|\mathbf{x}_k^*\left(f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right)\right|\zeta \\ &\leq (1 + \zeta'' + \zeta\zeta')\left\|f - \mathbf{x}_j^*(f)\mathbf{x}_j\right\|. \end{aligned}$$

□

Observación 1.2.12. Notemos que en la Proposición 1.2.8 y en el Teorema 1.2.11, que $\mathcal{X}$ sea una base de Markushevich solo se usa para garantizar que tenga la PSFD, es decir que esta condición es suficiente para demostrar que una base semi-greedy es almost greedy. Por otra parte, las bases quasi-greedy - y en particular las bases almost greedy - siempre son de Markushevich, así que ser base de Markushevich o tener la PSFD son condiciones equivalentes para bases semi-greedy.

Corolario 1.2.13. *Toda base semi-greedy en un espacio de Schur es almost greedy.*

Demostración. Esto se sigue de combinar el Lema 1.1.12 y la Observación 1.2.12. □

El Teorema 1.2.11 muestra que las bases de Markushevich semi-greedy son almost greedy, pero en la cota superior que obtenemos para la constante almost greedy, hay un factor M_{fs} (cuadrático, o lineal pero involucrando ζ, ζ' y ζ'' para acotar las proyecciones en conjuntos de cardinal 1). De manera similar, la Proposición 1.2.8 da una cota superior para la constante suppression quasi-greedy que contiene un factor lineal M_{fs}. Esto contrasta con las pruebas de que las bases almost greedy son semi-greedy, las que solo involucran las constantes quasi-greedy y democrática o superdemocrática, que a su vez pueden acotarse en términos de la constante almost greedy ([18, Teorema 3.2], [19, Teorema 3.3]). En este contexto, podemos preguntarnos si esta asimetría es una consecuencia de nuestra prueba, o es esencial. En otras palabras, nos preguntamos si es posible obtener cotas superiores para la constante almost greedy de las bases de Markushevich semi-greedy que no involucren el factor M_{fs} (o algún factor $M \gtrsim M_{fs}$) en las cotas superiores obtenidas. La misma construcción del Ejemplo 1.1.13 permite demostrar que no es posible hacerlo.

Ejemplo 1.2.14. *[11, Ejemplo 4.4] Fijemos $\alpha > 1$, y sean $\mathbb{X}$ y $\mathcal{X}$ el espacio y la base del Ejemplo 1.1.13 respectivamente, y sean K_a, K_{sq} y $K_{sg,t}$ las constantes almost greedy, suppression quasi-greedy y t-semi-greedy para $0 < t \leq 1$ respectivamente. Entonces*

$$K_a \geq K_{sq} \geq \frac{(\alpha+1)\, M_{fs}}{8\,(\alpha+2)} \qquad y \qquad K_{sg,t} \leq 4t^{-1}.$$

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1, es incondicional y democrática. Luego, es greedy, y por lo tanto, almost greedy y semi-greedy. Por (1.9), tenemos que

$$K_{sq} \geq \frac{\|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_3\|}{\|\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_3\|} = \frac{\alpha+1}{2} = \frac{\alpha+1}{8\,(\alpha+2)}\,(4\,(\alpha+2)) \geq \frac{(\alpha+1)\, M_{fs}}{8\,(\alpha+2)}.$$

Para $0 < t \leq 1$, estimemos ahora la constante t-semi-greedy. Fijemos $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, y $B \in \mathcal{G}\,[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,(f,m,t)$, y tomemos $g \in \mathbb{X}$ con $\operatorname{sop}(g) \subset B$ de modo que

$$\|f-g\| \leq \|f-h\| \ \ \forall h \in \mathbb{X} : \operatorname{sop}(h) \subset B.$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $A \subseteq \mathbb{N}_{\geq 2}$ con $|A| = m$ y escalares $(a_n)_{n\in A}$ tales que

$$\left\| f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n \right\| \leq \sigma_m\,[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,(f) + \epsilon.$$

Si $A = B$, elejimos $b_n = a_n$ para cada $n \in A$. Si no, sea π una bijección de $B \setminus A$ a $A \setminus B$. Para cada $n \in B$, definimos

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{si } n \in A; \\ (-1)^{n+\pi(n)} a_{\pi(n)} & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Para estimar la norma de $f - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n$ en términos de la norma de $f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n$, consideramos las coordenadas con respecto a la base canónica de ℓ_1. Para la primera coordenada tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right) =& \mathbf{e}_1^*(f) - \sum_{n\in B\cap A} a_n \mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}_n) - \sum_{n\in B\setminus A} a_{\pi(n)}(-1)^{n+\pi(n)}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}_n)\\
=& \mathbf{e}_1^*(f) - \sum_{n\in B\cap A} a_n \mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}_n) - \sum_{n\in B\setminus A} a_{\pi(n)}\alpha(-1)^{n+\pi(n)}(-1)^n\\
=& \mathbf{e}_1^*(f) - \sum_{n\in B\cap A} a_n \mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}_n) - \sum_{n\in A\setminus B} a_n\alpha(-1)^n\\
=& \mathbf{e}_1^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right).
\end{aligned}$$

Ahora veamos las coordenadas para cada $l > 1$. Para $l \in \mathbb{N} \setminus A \cup B$, se tiene que

$$\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right) = \mathbf{e}_l^*(f) = \mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right).$$

Si $l \in A \cap B$, entonces

$$\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in N} b_n \mathbf{x}_n\right) = \mathbf{e}_l^*(f) - b_l = \mathbf{e}_l^*(f) - a_l = \mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right).$$

Por otra parte, si $l \in B \setminus A$, estimemos las coordenadas l y $\pi(l)$ simultáneamente. Dado que $\pi(l) \notin B$ se deduce que $\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_l^*(f)\right| \geq t\left|\mathbf{x}_{\pi(l)}^*(f)\right| = t\left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*(f)\right|$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right)\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right)\right| =& \left|\mathbf{e}_l^*(f) - b_l\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*(f)\right|\\
=& \left|\mathbf{e}_l^*(f) - (-1)^{l+\pi(l)} a_{\pi(l)}\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*(f)\right|\\
\leq& 2t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right| + \left|a_{\pi(l)}\right|\\
\leq& 2\,\text{máx}\left\{2t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right|\right\}\\
\leq& 2\,\text{máx}\left\{2t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|, 2\left|a_{\pi(l)}\right| - 2t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|\right\}\\
=& 4\,\text{máx}\left\{\left|t^{-1}\mathbf{e}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|\right\}. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\left|\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right)\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right)\right| = \left|\mathbf{e}_l^*(f)\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*(f) - a_{\pi(l)}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \max\left\{\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*(f)\right|\right\}\\
&\geq \max\left\{\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|\right\}\\
&\geq t \max\left\{t^{-1}\left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - \left|\mathbf{e}_l^*(f)\right|\right\}. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Comparando (1.24) y (1.25) obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right)\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*\left(f - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right)\right|\\
&\leq 4t^{-1}\left(\left|\mathbf{e}_l^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n\mathbf{x}_n\right)\right| + \left|\mathbf{e}_{\pi(l)}^*\left(f - \sum_{n\in A} a_n\mathbf{x}_n\right)\right|\right).
\end{aligned}
$$

Combinando las estimaciones anteriores concluimos que

$$
\left\|f - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right\| \leq 4t^{-1}\left\|f - \sum_{n\in A} a_n\mathbf{x}_n\right\|.
$$

Por lo tanto,

$$
\|f-g\| \leq 4t^{-1}\left\|f - \sum_{n\in A} a_n\mathbf{x}_n\right\| \leq 4t^{-1}\sigma_m(f) + 4t^{-1}\epsilon,
$$

y la prueba se completa tomando límite para $\epsilon \to 0$. □

El Ejemplo 1.2.14 muestra que la implicación semi-greedy ⇒ almost greedy para bases de Markushevich depende de una manera esencial de la propiedad de separación finito-dimensional de las mismas. Esto sugiere la pregunta de si existen bases semi-greedy que no sean de Markushevich, en contraste con las bases almost greedy que siempre lo son. El siguiente ejemplo muestra que tales bases semi-greedy existen, incluso en muchos espacios clásicos. Para el mismo, recordemos que una base $\mathcal{X}$ de $\mathbb{X}$ es *C-subsimétrica* ($C > 0$) si para toda sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, todo par de sucesiones de escalares $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{\mathbb{K}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, y todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, se tiene que

$$
C^{-1}\left\|\sum_{k\in A} a_k\mathbf{x}_k\right\| \leq \left\|\sum_{k\in A} \varepsilon_k a_k\mathbf{x}_{n_k}\right\| \leq C\left\|\sum_{k\in A} a_k\mathbf{x}_k\right\|.
$$

Notemos que si $\mathcal{X}$ es 1-subsimétrica, entonces para todo par de sucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, todo par de sucesiones de escalares $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{\mathbb{K}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, y todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, tenemos la igualdad

$$
\left\|\sum_{k\in A} \varepsilon_k a_k\mathbf{x}_{n_k}\right\| = \left\|\sum_{k\in A} a_k\mathbf{x}_k\right\|.
$$

Observación 1.2.15. Las bases subsimétricas son incondicionales y democráticas, y por lo tanto greedy.

Ahora veremos que las bases subsimétricas no equivalentes a la base canónica de ℓ_1 pueden usarse para construir bases semi-greedy que no son almost greedy. La construcción es una modificación de la dada en [11, Ejemplo 4.5].

Ejemplo 1.2.16. *Sea $\mathbb{Y}$ un espacio de Banach. Si $\mathbb{Y}$ tiene una base subsimétrica $\mathcal{Y}$ y no es isomorfo a ℓ_1, entonces $\mathbb{Y}$ tiene una base semi-greedy $\mathcal{X}$ que no es de Markushevich.*

Demostración. Renormando podemos suponer que $\mathcal{Y}$ es normalizada y 1-subsimétrica. Definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n :=& \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_1 \ \text{ para todo } n \geq 2; \\ \mathbf{x}_n^* :=& \mathbf{y}_n^* \ \text{ para todo } n \geq 2. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\mathcal{X} = (\mathbf{x}_n)_{n\geq 2}$ no es base de Markushevich, pero es semi-greedy. Más aún, para todo $0 < t \leq 1$, $f \in \mathbb{Y}$, $m \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{G}(f, m, t)$, existe $g \in [\mathbf{x}_n : n \in A]$ tal que

$$\|f - g\| \leq \left(1 + 12t^{-1}\right) \sigma_m(f). \tag{1.26}$$

Probemos primero que $\overline{[\mathcal{X}]} = \mathbb{Y}$, para lo que basta ver que $\mathbf{y}_1 \in \overline{[\mathcal{X}]}$. A tal fin, fijemos $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{Y}$ es incondicional y no equivalente a la base canónica de ℓ_1, existen $B \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{<\infty}$ y escalares positivos $(b_n)_{n\in B}$ tales que

$$\left\|\sum_{n\in B} b_n \mathbf{y}_n\right\| \leq \epsilon = \epsilon \sum_{n\in B} b_n.$$

Tenemos que

$$\left\|\mathbf{y}_1 - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right\| = \left\|\sum_{n\in B} b_n \mathbf{y}_n\right\| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto, $\mathbf{y}_1 \in \overline{[\mathcal{X}]}$, así que $\mathcal{X}$ es una base de $\mathbb{Y}$. Puesto que $\mathbf{x}_n^*(\mathbf{y}_1) = 0$ para todo $n \geq 2$, esto también prueba que $\mathcal{X}$ no es una base de Markushevich.
Para probar (1.26), damos un argumento similar al de la prueba del Ejemplo 1.2.14. Dados $0 < t \leq 1$, $f \in \mathbb{Y}$, $m \in \mathbb{N}$, y un conjunto $B \in \mathcal{G}[\mathcal{X}, \mathbb{Y}](f, m, t)$, elegimos $g \in [\mathbf{x}_n : n \in B]$ de manera que

$$\|f - g\| \leq \|f - h\| \ \ \forall h \in [\mathbf{x}_n : n \in B].$$

Fijamos $\epsilon > 0$, y elegimos $A \in \mathbb{N}_{\geq 2}^{(m)}$ y $(a_n)_{n\in A} \subset \mathbb{K}$ tales que

$$\left\|f - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right\| \leq \sigma_m[\mathcal{X}, \mathbb{Y}](f) + \epsilon.$$

Sea $g_A := \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n$. Si $A = B$, entonces $\|f - g\| \le \|f - g_A\| \le \sigma_m[\mathcal{X}, \mathbb{Y}](f) + \epsilon$. Si $A \neq B$, sea

$$\pi\colon B \setminus A \to A \setminus B$$

la biyección que preserva el orden natural heredado de $\mathbb{N}$. Para cada $n \in B$, definimos

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{si } n \in A; \\ a_{\pi(n)} & \text{si } n \in B \setminus A. \end{cases}$$

Sea $g_B := \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n$. Vamos a estimar la norma de $f - g_B$ en términos de la norma de $f - g_A$. A tal fin, primero notemos que si $l \in (\mathbb{N}_{\ge 2} \setminus (A \cup B))$ o $l \in A \cap B$, entonces

$$\mathbf{y}_l^*(f - g_B) = \mathbf{y}_l^*(f - g_A).$$

Esta igualdad también vale para $l = 1$, puesto que

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1^*(f - g_B) =& \mathbf{y}_1^*(f) - \sum_{n\in B\cap A} a_n - \sum_{n\in B\setminus A} a_{\pi(n)} = \mathbf{y}_1^*(f) - \sum_{n\in B\cap A} a_n - \sum_{n\in A\setminus B} a_n \\ =& \mathbf{y}_1^*(f - g_A). \end{aligned}$$

Para cada $l \in B \setminus A$, como $B \in \mathcal{G}[\mathcal{X}, \mathbb{Y}](f, m, t)$ tenemos que $\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_l^*(f)\right| \ge t\left|\mathbf{x}_{\pi(l)}^*(f)\right| = t\left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f)\right|$. Por lo tanto, tomando conjuntamente las coordenadas l y $\pi(l)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f - g_B)\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f - g_B)\right|\right\} &= \text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f) - b_l\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f)\right|\right\} \\ &\le \text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f) - a_{\pi(l)}\right|, t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|\right\} \\ &\le t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right| + \left|a_{\pi(l)}\right| \\ &\le 3\,\text{máx}\left\{t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|\right\}. \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f - g_A)\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f - g_A)\right|\right\} =& \text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f) - a_{\pi(l)}\right|\right\} \\ \ge& t\,\text{máx}\left\{t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|, \left|a_{\pi(l)}\right| - t^{-1}\left|\mathbf{y}_l^*(f)\right|\right\}. \end{aligned}$$

Combinando ambas desigualdades, obtenemos

$$\text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f - g_B)\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f - g_B)\right|\right\} \le 3t^{-1}\,\text{máx}\left\{\left|\mathbf{y}_l^*(f - g_A)\right|, \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f - g_A)\right|\right\}. \tag{1.27}$$

Ahora consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} B_1 &:= \left\{l \in B \setminus A : \left|\mathbf{y}_l^*(f - g_A)\right| \ge \left|\mathbf{y}_{\pi(l)}^*(f - g_A)\right|\right\}; \\ B_2 &:= (B \setminus A) \setminus B_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \pi(B_1);\\
A_2 &:= (A \setminus B) \setminus A_1 = \pi(B_2).
\end{aligned}$$

Usando la acotación (1.27), la 1-subsimetría de $\mathcal{Y}$ y la desigualdad triangular, y teniendo en cuenta que π preserva el orden de $\mathbb{N}$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\left\| P_{B\setminus A}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\| \leq& \left\|P_{B_1}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\| + \left\|P_{B_2}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\|\\
\leq& 3t^{-1}\left\|P_{B_1}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_A)\right\| + 3t^{-1}\left\|P_{A_2}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_A)\right\|\\
\leq& 6t^{-1}\|f-g_A\| \leq 6t^{-1}(\sigma_m(f)+\epsilon).
\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
\left\| P_{A\setminus B}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\| \leq& \left\|P_{A_1}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\| + \left\|P_{A_2}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\|\\
\leq& 3t^{-1}\left\|P_{B_1}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_A)\right\| + 3t^{-1}\left\|P_{A_2}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_A)\right\|\\
\leq& 6t^{-1}\|f-g_A\| \leq 6t^{-1}(\sigma_m(f)+\epsilon).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\left\|P_{(\mathbb{N}\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B)}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_B)\right\| =& \left\|P_{(\mathbb{N}\setminus(A\cup B))\cup(A\cap B)}[\mathcal{Y},\mathbb{Y}](f-g_A)\right\| \leq \|f-g_A\|\\
\leq& \sigma_m(f)+\epsilon.
\end{aligned}$$

De las desigualdades anteriores se deduce que

$$\|f-g\| \leq \|f-g_B\| \leq \left(1+12t^{-1}\right)(\sigma_m(f)+\epsilon).$$

La demostración se completa tomando límite para $\epsilon \to 0$. □

Observación 1.2.17. *Las hipótesis del Ejemplo 1.2.16 son equivalentes a que $\mathbb{Y}$ tenga una base subsimétrica $\mathcal{Y}$ no equivalente a la base canónica de ℓ_1.*

Corolario 1.2.18. *Todo espacio de Schur con una base subsimétrica es isomorfo a ℓ_1.*

Demostración. Esto se deduce combinando el Corolario 1.2.13 y el Ejemplo 1.2.16. □

Observación 1.2.19. *En [25, Corolario 1], se demostró con técnicas diferentes que todo espacio de Schur con una base simétrica es isomorfo a ℓ_1. El Corolario 1.2.18 extiende el resultado a bases subsimétricas.*

En el Ejemplo 1.27, se construye una base semi-greedy que no es almost greedy a partir de una base subsimétrica. La construcción sugiere una manera de revertir el proceso. Seguidamente, usamos estas ideas para obtener una base de Markushevich almost greedy partiendo de una base t-semi-greedy que no es de Markushevich. Antes probamos un lema auxiliar.

Lema 1.2.20. *[11, Lema 4.8] Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$ tal que $\zeta''[\mathcal{X}] < \infty$, y sean $f \in \mathbb{X}$ y $m \in \mathbb{N}$. Si $\sigma_m(f) = 0$, entonces $\left|\operatorname{sop}(f)\right| \leq m$ y $f = P_{\operatorname{sop}(f)}(f)$.*

Demostración. Supongamos que $\sigma_m(f) = 0$, y tomemos una sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset [\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}]$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\left|\operatorname{sop}(f_k)\right| \leq m \qquad \text{y} \qquad \|f - f_k\| \leq \frac{1}{k}.$$

Sea $B := \operatorname{sop}(f)$. Si $|B| > m$, tomemos $A \subset B$ con $A \in \mathbb{N}^{(m+1)}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in A \setminus \operatorname{sop}(f_k)$. Pasando a una subsucesión de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y reenumerando, podemos suponer que $n_k = n_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego,

$$0 < \left|\mathbf{x}_{n_1}^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_{n_1}^*(f - f_k)\right| \leq \frac{\left\|\mathbf{x}_{n_1}^*\right\|}{k} \ \forall k \in \mathbb{N},$$

una contradicción. Concluimos que $|B| \leq m$. Ahora definimos para cada $k \in \mathbb{N}$, $g_k := P_B(f_k)$. Por la desigualdad triangular y la elección de f_k, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f - g_k\| &\leq \frac{1}{k} + \sum_{n\in\left(\operatorname{sop}(f_k)\setminus B\right)} \left\|\mathbf{x}_n^*(f_k)\,\mathbf{x}_n\right\| = \frac{1}{k} + \sum_{n\in\left(\operatorname{sop}(f_k)\setminus B\right)} \left\|\mathbf{x}_n^*(f_k - f)\,\mathbf{x}_n\right\| \\ &\leq \frac{1}{k} + m\zeta''[\mathcal{X}]\,\|f - f_k\| \leq \frac{(1 + m\zeta''[\mathcal{X}])}{k}.\end{aligned}$$

Como $g_k \in [\mathbf{x}_n : n \in B]$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y B es finito, se sigue que $f \in [\mathbf{x}_n : n \in B]$, y entonces $f = P_B(f)$. □

Observación 1.2.21. El Lema 1.2.20 no requiere que la base $\mathcal{X}$ o su base dual sean seminormalizadas.

Cerramos este capítulo mostrando que se puede obtener una base almost greedy a partir de una base t-semi-greedy que no es de Marskushevich. En la demostración, vamos a usar una estimación de la constante almost greedy del Teorema 1.2.11 con $M_{fs} = 1$ en lugar de las estimaciones de las constantes que pueden obtenerse de [11].

Teorema 1.2.22. *[11, Proposición 4.9] Sea $\mathcal{X}$ una base t-semi-greedy de $\mathbb{X}$. Si $\mathcal{X}$ no es una base de Markushevich, existen $\mathbf{y}_0 \in S_{\mathbb{X}}$ e $\mathbf{y}_0^* \in S_{\mathbb{X}^*}$ tales que si $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_0^*(\mathbf{x}_n)\,\mathbf{y}_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{Y} := (\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una base almost greedy de $\mathbb{X}$, con base dual $\mathcal{Y}^* = (\mathbf{y}_n^*)_{n\in\mathbb{N}_0}$ donde $\mathbf{y}_n^* = \mathbf{x}_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, se tiene que*

$$\overline{\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^{w} \subset [\mathbf{y}_0] \cup \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \tag{1.28}$$

y para todo $f \in \mathbb{X}$,

$$\mathbf{x}_n^*(f) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \iff f \in [\mathbf{y}_0]. \tag{1.29}$$

Demostración. Puesto que $\mathcal{X}$ no es una base de Markushevich, por Observación 1.2.12 $\mathcal{X}$ no tiene la PSFD. Por los Lemas 1.1.5 y 1.1.6, $\overline{\{\mathbf{x}_n\}}^{w}_{n\in\mathbb{N}}$ es débil compacto y no contiene al cero. Por lo tanto, existe $g_0 \in \mathbb{X}\setminus\{0\}$ y una subred $(\mathbf{x}_{n_\theta})_{\theta\in\Theta}$ tales que

$$\mathbf{x}_{n_\theta} \xrightarrow{w} g_0. \tag{1.30}$$

Por el teorema de Hahn-Banach, existe $g_0^* \in \mathbb{X}^*$ tal que $\|g_0\|\left\|g_0^*\right\| = 1$ y $g_0^*(g_0) = 1$. Definimos ahora

$$\mathbf{y}_0 := \frac{g_0}{\|g_0\|} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{y}_0^* := \frac{g_0^*}{\left\|g_0^*\right\|}.$$

Notemos que $\mathbf{x}_n^*(\mathbf{y}_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por (1.30). Afirmamos que vale (1.29). Para probarlo, supongamos que no vale, y tomemos $g \in S_{\mathbb{X}}\setminus[\mathbf{y}_0]$ tal que $\mathbf{x}_n^*(g) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $g^* \in \mathbb{X}^*$ tal que $g^*(\mathbf{y}_0) = 0$ y $g^*(g) = 1$. Elijamos $0 \neq f \in [\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}]$ de manera que

$$\|f-g\| \leq \frac{1}{2K_{sg,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}](1+\zeta'[\mathcal{X}])(1+\|g^*\|)},$$

y sea $A := \mathrm{sop}(f)$. Como $g^*(g_0) = 0$, por (1.30) existe $\theta_0 \in \Theta$ tal que

$$\left|g^*(\mathbf{x}_{n_\theta})\right| \leq \frac{1}{(1+|A|)} \ \forall\theta \in \Theta, \theta \geq \theta_0.$$

Elijamos $B \subset \{n_\theta : \theta \geq \theta_0\}$ con $|B| = |A| \geq 1$ Puesto que $B \in \mathcal{G}[\mathcal{X},\mathbb{X}](g,|B|,t)$, por hipótesis existen escalares $(a_n)_{n\in B}$ tales que

$$\left\|g - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right\| \leq K_{sg,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,\sigma_{|B|}(g) \leq K_{sg,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,\|g-f\| \leq \frac{1}{2(1+\zeta'[\mathcal{X}])(1+\|g^*\|)}.$$

Notemos también que para cada $n \in B$,

$$|b_n| = \left|\mathbf{x}_n^*\left(g - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right)\right| \leq \zeta'[\mathcal{X}]\left\|g - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right\| < \frac{1}{2(1+\|g^*\|)} < \frac{1}{2},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|g - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right\| &\geq \frac{1}{\|g^*\|}\left|g^*\left(g - \sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right)\right| \geq \frac{1}{\|g^*\|}\left(g^*(g) - \left|g^*\left(\sum_{n\in B} b_n\mathbf{x}_n\right)\right|\right)\\ &\geq \frac{1}{\|g^*\|}\left(1 - \frac{1}{2}\sum_{n\in B}|g^*(\mathbf{x}_n)|\right) \geq \frac{1}{\|g^*\|}\left(1 - \frac{|B|}{2(1+|A|)}\right) > \frac{1}{2\|g^*\|},\end{aligned}$$

una contradicción. Queda probado (1.29), y entonces también (1.28) porque si $f \in \overline{\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^{w} \setminus \{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\mathbf{x}_n^*(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Definimos ahora el operador lineal $T : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ como

$$T(f) := f - \mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_0$$

para todo $f \in \mathbb{X}$ (notemos que $T(f) = f - g_0^*(f)\,g_0$).
Es claro que T es un proyector, $\|T\| \le 2$, y $\mathbb{X} = [\mathbf{y}_0] \oplus T(\mathbb{X})$.
Sea $\mathcal{Y}$ como en el enunciado, y definamos $\mathbf{z}_n := \mathbf{y}_n = T(\mathbf{x}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{Z} = (\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Como $\mathbf{x}_n^*(\mathbf{y}_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\mathcal{Z}$ es una base de $\mathbb{Z} := T(\mathbb{X})$ con base dual $\mathcal{Z}^*$ tal que $\mathbf{z}_n^* = \mathbf{x}_n^*\big|_{\mathbb{Z}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, de (1.29) se deduce que $\mathcal{Z}$ es una base de Markushevich de $\mathbb{Z}$. Seguidamente, veremos que $\mathcal{Z}$ es t-semi-greedy.
Fijemos $g \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{N}$. Para aproximar g por medio de un vector con soporte en un conjunto de $\mathcal{G}(g, m, t)$, por el Lema 1.2.20 podemos asumir que $\sigma_m[\mathcal{Z}, \mathbb{Z}](g) \neq 0$ (de lo contrario, aproximamos g por g). Dado $\epsilon > 0$, sean $A \in \mathbb{N}^{(m)}$ y escalares $(a_n)_{n\in A}$ tales que

$$\left\| g - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{z}_n \right\| \le (1+\epsilon)\,\sigma_m[\mathcal{Z}, \mathbb{Z}](g).$$

Sea $h_1 := g + \sum_{n\in A} a_n \mathbf{y}_0^*(\mathbf{x}_n)\,\mathbf{y}_0$. Por hipótesis, existen $B \in \mathcal{G}[\mathcal{X}, \mathbb{X}](h_1, m, t)$ y escalares $(b_n)_{n\in B}$ tales que

$$\left\| h_1 - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n \right\| \le K_{s,t}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]\,\sigma_m[\mathcal{X}, \mathbb{X}](h_1).$$

Se deduce que

$$\begin{aligned}
\left\| g - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{z}_n \right\| &= \left\| T\left(h_1 - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n\right) \right\| \le \|T\| \left\| h_1 - \sum_{n\in B} b_n \mathbf{x}_n \right\| \\
&\le 2K_{s,t}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]\,\sigma_m[\mathcal{X}, \mathbb{X}](h_1) \le 2K_{s,t}[\mathcal{X}, \mathbb{X}] \left\| g - \sum_{n\in A} a_n \mathbf{z}_n \right\| \\
&\le 2(1+\epsilon)\,K_{s,t}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]\,\sigma_m[\mathcal{Z}, \mathbb{Z}](g).
\end{aligned}$$

Dado que

$$\mathbf{z}_n^*(g) = \mathbf{x}_n^*(g) = \mathbf{x}_n^*(h_1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene que $B \in \mathcal{G}[\mathcal{Z}, \mathbb{Z}](g, m, t)$. Esto prueba que $\mathcal{Z}$ es una base t-semi-greedy de $\mathbb{Z}$ con constante $K_{s,t}[\mathcal{Z}, \mathbb{Z}] \le 2(1+\epsilon)\,K_{s,t}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$. Se sigue de (1.30) que

$$\mathbf{z}_{n_\theta} = \mathbf{x}_{n_\theta} - g_0^*(\mathbf{x}_{n_\theta})\,g_0 \xrightarrow{w} 0,$$

en donde la convergencia es en la topología débil de $\mathbb{Z}$.
Por el Lema 1.1.5, se sigue que $\mathcal{Z}$ tiene la FDSP, con $M_{fs}(\mathcal{Z},\mathbb{X}) = 1$. Por el Teorema 1.2.11, se deduce que $\mathcal{Z}$ es una base almost greedy de $\mathbb{Z}$ con constante almost greedy

$$\begin{aligned}K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}] \leq& K_{s,t}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left(1+4K_{s,t}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\,t^{-2}\right)\\ \leq& 2(1+\epsilon)K_{s,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\left(1+8(1+\epsilon)K_{s,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,t^{-2}\right),\end{aligned}$$

y tomando límite para $\epsilon \to 0$, concluimos que

$$K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}] \leq 2K_{s,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\left(1+8K_{s,t}[\mathcal{X},\mathbb{X}]\,t^{-2}\right).$$

Como $\mathcal{Z}$ es una base de Markushevich de $\mathbb{Z}$, se sigue por construcción que $\mathcal{Y}$ es una base de Markushevich de $\mathbb{X}$. Para ver que $\mathcal{Y}$ es almost greedy, usamos el Lema 1.2.10. Fijemos $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{G}[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f,m,1)$, y $B \in (\mathbb{N}_0 \setminus A)^{(m)}$. Sea $g := T(f)$. Primero consideremos el caso en que $0 \notin B$ y $0 \notin A$. Como $\mathbf{y}_n^*(f) = \mathbf{z}_n^*(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \in \mathcal{G}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g,m,1)$ y las proyecciones sobre A y sobre B de g y de f son las mismas con respecto a $\mathcal{Z}$ y a $\mathcal{Y}$. En otras palabras,

$$\begin{aligned}P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f) =& P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](g) = P_A[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](f) = P_A[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g);\\ P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f) =& P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](g) = P_B[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](f) = P_B[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\left\|f - P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| =& \left\|f - P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](g)\right\| \leq \|g - P_A[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\| + \left\|\mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_0\right\|\\ \leq& K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\,\|g - P_B[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\| + \left\|\mathbf{y}_0^*(f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f))\,\mathbf{y}_0\right\|\\ \leq& K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|g - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| + \left\|f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|\\ \leq& (K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+1)\left\|f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| + K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_0\right\|\\ =& (K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+1)\left\|f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| + K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_0^*(f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f))\,\mathbf{y}_0\right\|\\ \leq& (2K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+1)\left\|f - P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|.\end{aligned}$$

Si $0 \in A$, entonces $0 \notin B$. Sean $n_0 \in B$, $B_0 := B \setminus \{n_0\}$ y $A_0 := A \setminus \{0\}$. Puesto que

$$\mathbf{z}_n^*(g) = \mathbf{y}_n^*(f) \;\; \forall n \in \mathbb{N},$$

se tiene que $A_0 \in \mathcal{G}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g,m-1,1)$. Dado que $n_0 \notin A$, considerando nuevamente las proyecciones con respecto a $\mathcal{Z}$ y a $\mathcal{Y}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|f - P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| =& \left\|g - P_{A_0}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\right\| \leq K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|g - P_{B_0}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\right\|\\ =& K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|g - P_{B_0}[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|f-P_{B_0}[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|+K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_0\right\|\\
&= K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|f-P_{B_0}[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|+K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_0^*(f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f))\,\mathbf{y}_0\right\|\\
&\leq 2K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|+K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_{n_0}^*(f)\,\mathbf{y}_{n_0}\right\|\\
\underset{A\in\mathcal{G}[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f,m,1)}{\leq}\; &2K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|+K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_{n_0}\right\|\\
&= 2K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|+K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|\mathbf{y}_{n_0}\right\|\left|\mathbf{y}_0^*(f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f))\right|\\
&\leq K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](2+\zeta[\mathcal{Y}])\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|\\
&\leq K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](3+\zeta[\mathcal{X}])\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|.
\end{aligned}
$$

Finalmente, supongamos que $0\in B$, $0\notin A$. Sea $B_1 := B\setminus\{0\}$, y elijamos $n_1\in A$. Como $A\in\mathcal{G}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g,m,1)$, y dado que

$$
\left|\mathbf{y}_0^*(f)\right|\leq\left|\mathbf{y}_{n_1}^*(f)\right|=\left|\mathbf{y}_{n_1}^*(f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}])(f)\right|\quad\text{y}\qquad g-P_{B_1}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)=f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f),
$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left\|f-P_A[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\| &= \|f-P_A[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\|\leq\|g-P_A[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\|+\left\|\mathbf{y}_0^*(f)\,\mathbf{y}_0\right\|\\
&\leq K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]\left\|g-P_{B_1}[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](g)\right\|+\left|\mathbf{y}_{n_1}^*(f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f))\right|\\
&\leq (K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+\zeta'[\mathcal{Y}])\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|\\
&= (K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+\zeta'[\mathcal{X}])\left\|f-P_B[\mathcal{Y},\mathbb{X}](f)\right\|.
\end{aligned}
$$

Combinando las estimaciones anteriores y usando el Lema 1.2.10, concluimos que $\mathcal{Y}$ es almost greedy, con

$$
K_a[\mathcal{Y},\mathbb{X}]\leq\text{máx}\left\{K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+\zeta'[\mathcal{X}],K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}](3+\zeta[\mathcal{X}]),2K_a[\mathcal{Z},\mathbb{Z}]+1\right\}.
$$

□

Capítulo 2

Tipos de incondicionalidad parcial y el algoritmo greedy.

En el estudio de la geometría de espacios de Banach, las bases de Schauder y sucesiones básicas han jugado un papel importante. En este contexto, dada una sucesión en un espacio de Banach, se han estudiado condiciones bajo las cuales se pueden extraer subsucesiones básicas incondicionales o con propiedades al menos similares a la incondicionalidad. Un resultado de Bessaga y Pełczyńsky [17] establece que en espacios de Banach con base incondicional, toda sucesión normalizada débil nula admite una subsucesión incondicional. Este resultado deja de ser válido en espacios de Banach generales, como mostraron más tarde Maurey y Rosenthal [28]. Eso llevó a la búsqueda de subsucesiones con propiedades similares aunque más débiles que ser incondicional. En tal sentido, en su tesis [23], Elton introdujo las bases de Schauder *nearly unconditional* y probó que toda sucesión seminormalizada débil nula en un espacio de Banach contiene una subsucesión básica con la propiedad mencionada, que se define de la siguiente manera:

Definición 2.0.1. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* nearly unconditional *si para cada $0 < t \leq 1$ existe $C_t > 0$ tal que*

$$\|P_A(f)\| \leq C_t \|f\| \tag{2.1}$$

siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

$$f \in Q := \left\{g \in \mathbb{X} : \|g\|_{\ell_\infty} \leq 1\right\};$$
$$A \subset A(f,t) := \left\{n \in \mathbb{N} : \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq t\right\}. \tag{2.2}$$

Bajo estas hipótesis, para cada $0 < t \leq 1$ denotaremos $\phi(t) = \phi[\mathcal{X}, \mathbb{X}](t)$ al mínimo número positivo para el cual vale (2.1).

Observación 2.0.2. El nombre de bases nearly unconditional puede motivarse por la similitud entre esta definición y la siguiente equivalencia, de uso muy frecuente en la literatura: una base $\mathcal{X}$ es incondicional si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|P_A(f)\| \leq C\,\|f\| \;\; \forall f \in \mathbb{X}, \forall A \in \mathbb{N}^{<\infty}.$$

Observación 2.0.3. La definición clásica de bases nearly unconditional es para bases de Schauder y espacios de Banach, pero la extendemos naturalmente a bases en general y espacios p-Banach; también haremos esta extensión en las Definiciones 2.0.4 y 2.1.1.

El resultado de Elton fue extendido parcialmente en [18], en donde se demostró que si se agregan condiciones no muy restrictivas sobre la sucesión, es posible obtener una subsucesión quasi-greedy - una propiedad estrictamente más fuerte; ver [18, Proposición 4.5, Ejemplo 4.8, Teorema 5.4]. Este es un resultado importante y que puede aplicarse en la mayoría de los espacios que se estudian; sin embargo, el resultado de Elton no fue mejorado en el caso general - es decir, para toda sucesión débil nula seminormalizada en un espacio de Banach - hasta que en 2009, Dilworth et al probaron que dados $d, D \in \mathbb{R}_{\geq 1}$, es posible obtener obtener una subsucesión básica que es (D,d)-*bounded-oscillation unconditional* con constante $C \leq 8d$ ([22, Teorema 2.1]), una propiedad que definimos seguidamente:

Definición 2.0.4. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$, y $C, D, d \geq 1$. Decimos que $\mathcal{X}$ es (D,d)-bounded-oscillation unconditional con constante C (o C-(D,d)-BOU) si para todo $f \in \mathbb{X}$ y todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, se tiene que*

$$\|P_A(f)\| \leq C\,\|f\|$$

siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

- *La* oscilación de f en A*, dada por*

$$o(f,A) := \begin{cases} \max\limits_{\substack{n \in A \\ k \in A \cap \operatorname{sop}(f)}} \frac{|\mathbf{x}_n^*(f)|}{|\mathbf{x}_k^*(f)|} & si\ A \cap \operatorname{sop}(f) \neq \emptyset; \\ 0 & si\ A \cap \operatorname{sop}(f) = \emptyset. \end{cases}$$

  es menor que o igual a D.

- *Existen $n \in \mathbb{N}$ y una partición $\left\{A_j\right\}_{1 \leq j \leq n}$ de A con $n \leq \min(A_1)$ y $A_j < A_{j+1}$ para cada $1 \leq j \leq n-1$ tales que $o\left(f, A_j\right) \leq d$ para cada $1 \leq j \leq n$.*

En este capítulo, estudiamos las conexiones entre las formas de incondicionalidad parcial recién mencionadas y el algoritmo greedy. Demostramos que tanto las bases nearly unconditional como las bounded-oscillation unconditional tienen caracterizaciones simples en términos de propiedades estudiadas en relación con el algoritmo greedy. Además, mostramos que ambas formas de incondicionalidad parcial no son equivalentes; más precisamente, la

propiedad de ser bounded-oscillation unconditional es estrictamente más fuerte que la de ser nearly unconditional.
La primera sección está dedicada al estudio de las bases nearly unconditional, mientras que la segunda se enfoca en las bases bounded-oscillation unconditional y en la no equivalencia entre ellas.

2.1. Bases nearly unconditional y el algoritmo greedy.

El estudio de las conexiones entre las bases nearly unconditional y el algoritmo greedy comenzó en [18], en donde los autores descubrieron que si se pide $A = A(f, t)$ en la Definición 2.0.1, se obtiene una propiedad equivalente.

Definición 2.1.1. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* thresholding bounded *si para cada* $0 < t \leq 1$ *existe* $C_t > 0$ *tal que*

$$\|P_A(f)\| \leq C_t \|f\| \tag{2.3}$$

siempre que $f \in \mathcal{Q}$ *y* $A = A(f, t)$.
Bajo estas hipótesis, para cada $0 < t \leq 1$ *denotaremos* $\theta(t) = \theta[\mathcal{X}, \mathbb{X}](t)$ *al mínimo número positivo* C_t *para el cual vale* (2.3).

Es inmediato que una base nearly unconditional es thresholding bounded, con $\theta \leq \phi$. Como mencionamos, la implicación recíproca también vale.

Proposición 2.1.2. *[18, Proposición 4.1] Sea $\mathcal{X}$ una base de Schauder thresholding bounded de un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Entonces $\mathcal{X}$ es nearly unconditional, con* $\phi(t) \leq 4\theta(1)\, t^{-1}\theta(t)$.

Este resultado es en cierto sentido una sorpresa, porque la incondicionalidad es una propiedad estrictamente más fuerte que ser quasi-greedy (ver por ejemplo [5], [27], o [30]), y las bases nearly unconditional parecen relacionarse con las bases incondicionales (vía las equivalencias de la Observación 2.0.2 y (3)) de la misma manera que las bases thresholding bounded se relacionan con las bases quasi-greedy. Siguiendo esta línea de trabajo, en [4] se introdujo una definición similar, que resulta de relajar una propiedad estrictamente más débil que ser quasi-greedy, y que definimos a continuación.

Definición 2.1.3. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* truncation quasi-greedy *(TQG) si existe* $C > 0$ *tal que*

$$\min_{n \in A} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\| \leq C \|f\| \quad \forall f \in \mathbb{X}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{G}(f, m, 1). \tag{2.4}$$

Bajo estas hipótesis, decimos que $\mathcal{X}$ es C-TQG. La constante truncation quasi-greedy $K_{tqg} = K_{tqg}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ *es mínima constante* $C > 0$ *para la que vale* (2.4).

Aunque su nombre es reciente (ver [4], [5]), la propiedad de ser truncation quasi-greedy se identificó en los primeros años de la teoría sobre el algoritmo greedy (ver por ejemplo [19, Lema 2.2]). Se conoce que las bases quasi-greedy son truncation quasi-greedy ([6, Teorema 4.13] o [19, Lema 2.2]), y hay ejemplos que muestran que la implicación es estricta (ver por ejemplo [19, Ejemplo 4.8]). Esto sugiere investigar si la propiedad que resulta de relajar la Definición 2.1.3 siguiendo las líneas generales de las Definiciones 2.0.1 y 2.1.1 es equivalente a ser nearly unconditional, lo que lleva a considerar la siguiente definición:

Definición 2.1.4. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* nearly truncation quasi-greedy *si para cada* $0 < t \leq 1$ *existe* $C_t > 0$ *tal que*

$$\min_{n \in A(f,t)} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| \leq C_t \|f\| \ \ \forall f \in \mathcal{Q}, \forall\ 0 < t \leq 1. \tag{2.5}$$

Bajo estas hipótesis, para cada $0 < t \leq 1$ *denotaremos* $\lambda(t) = \lambda[\mathcal{X}, \mathbb{X}](t)$ *al mínimo número positivo* C_t *para el cual vale* (2.5).

Veremos que esta propiedad es equivalente ser nearly unconditional. Antes de probarlo, veamos una caracterización de la función λ: Dada una base nearly truncation quasi-greedy, definimos $\rho : (0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ de la siguiente manera: (ver [2])

$$\rho(t) := \min_{C>0} \left\{ t \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| \leq C \|f\| \ \ \forall f \in \mathcal{Q} \right\}.$$

Es inmediato que $\rho \leq \lambda$. Notemos que - al igual que ϕ y θ ([18, Proposición 4.1]) - ρ es no creciente, pues dados $0 < a < b \leq 1$ y $f \in \mathcal{Q}$, se tiene que

$$b \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,b)}\right\| = \frac{b}{a} a \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon\left(\frac{a}{b}f\right),A\left(\frac{a}{b}f,a\right)}\right\| \leq \frac{b}{a}\rho(a) \left\|\frac{a}{b}f\right\| = \rho(a)\|f\|.$$

Usando este resultado, podemos ver que $\rho = \lambda$: en efecto, dados $0 < t \leq 1$ y $f \in \mathcal{Q}$, tomamos $b = \min_{n \in A(f,t)} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|$, y obtenemos

$$\min_{n \in A(f,t)} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| = b \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| = b \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,b)}\right\| \leq \rho(b)\|f\| \leq \rho(t)\|f\|,$$

lo que implica, por la Definición 2.1.4, que $\lambda(t) \leq \rho(t)$. De ahora en adelante, para simplificar nuestras demostraciones usaremos la definición de ρ como definición de λ.

Observación 2.1.5. (cf. [4, Lema 3.2]) La definición original de λ en [4] está dada para $0 < t < 1$, pero si λ existe para tales t, se puede definir en 1 y resulta finita. En efecto, si definimos λ y ρ solo en el intervalo $(0,1)$, la prueba de la equivalencia entre ambas definiciones sigue siendo válida, así que en particular λ es no creciente. Por otra parte, si fijamos $0 < \delta < 1$, dado $f \in \mathcal{Q}$, existe $0 < \epsilon < \delta$ tal que $A(f,1) = A(f, 1-\epsilon)$, y entonces

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,1)}\right\| = \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,1-\epsilon)}\right\| \leq \lambda(1-\epsilon)\|f\| \leq \lambda(1-\delta)\|f\|,$$

lo que prueba que $\lambda(1)$ es finita y es no mayor que $\lambda(1^-)$ (luego veremos que λ es continua).

Seguidamente, veremos que una base es nearly truncation quasi-greedy si y solo si es nearly unconditional. A tal fin, vamos a usar un resultado auxiliar de [6]. Para esto, introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.6. *Una base $\mathcal{X}$ es* suppression unconditional for constant coefficients *(SUCC) si existe $C > 0$ tal que para todo $A \subset B \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{B}$, se tiene que*

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq C \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\|. \tag{2.6}$$

Observación 2.1.7. Las bases nearly truncation quasi-greedy son SUCC. En efecto, si fijamos $0 < \epsilon < 1$, para todo $A \subset B \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{B}$ se tiene que

$$A\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + (1-\epsilon)\,\mathbf{1}_{\varepsilon,B\setminus A}, 1\right) = A,$$

y entonces

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq \lambda\,(1) \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + (1-\epsilon)\,\mathbf{1}_{\varepsilon,B\setminus A}\right\|.$$

Se sigue tomando límite para $\epsilon \to 0$ que $\mathcal{X}$ es $\lambda\,(1)$-SUCC. Esto también vale para las bases thresholding bounded, por [18, Proposición 4.2] o por el argumento recién dado.

Lema 2.1.8. *[6, Corolario 2.3 y Lemas 3.2, 3.6] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$, $0 < p \leq 1$. Si $\mathcal{X}$ es C-SUCC, existen constantes positivas $c_1 \geq 1$, $s > 1$ dependiendo solo de C y p tales que*

$$\left\|\sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n\right\| \leq c_1 \left\|\sum_{n\in A} b_n \mathbf{x}_n\right\|$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y escalares $(a_n)_{n\in A}, (b_n)_{n\in A}$ tales que

$$|a_n| \leq 1 \leq |b_n| \leq s$$

para todo $n \in A$.

Ahora podemos probar la equivalencia mencionada.

Teorema 2.1.9. *[2, Proposición 3.3][4, Teorema 3.4][18, Proposición 4.5] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$\mathcal{X}$ es nearly unconditional.*

ii) *$\mathcal{X}$ es thresholding bounded.*

iii) *$\mathcal{X}$ es nearly truncation quasi-greedy.*

Más aún, tenemos

$$\lambda(t) \lesssim \theta(t) \leq \phi(t) \lesssim \frac{\lambda(t)}{1+\log\left(\frac{1}{t}\right)}. \tag{2.7}$$

Demostración. Es inmediato por las definiciones que I) implica II), como así también que $\theta \leq \phi$. Ahora sean $c_1, s > 0$ las constantes del Lema 2.1.8. Para probar que II) implica III), fijemos $f \in \mathcal{Q}$ y $0 < t \leq 1$. Si $t \geq s^{-1}$, entonces

$$t\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| \leq c_1\left\|P_{A(f,t)}(f)\right\| \leq c_1\theta(t)\|f\|.$$

Si $t < s^{-1}$, elegimos $n \in \mathbb{N}$ de manera que $s^{-n-1} \leq t < s^{-n}$ y definimos

$$\begin{aligned}
A_1 &:= A\left(f, s^{-1}\right);\\
A_{n+1} &:= A(f,t) \setminus A(f, s^{-n});\\
A_{k+1} &:= A\left(f, s^{-k-1}\right) \setminus A\left(f, s^{-k}\right)\ \forall 1 \leq k \leq n-1 \text{ si } n \geq 2.
\end{aligned}$$

Puesto que θ es no creciente,

$$\begin{aligned}
\left\|P_{A_1}(f)\right\| \leq&\theta\left(s^{-1}\right)\|f\| \leq \theta(t)\|f\|;\\
\left\|P_{A_{n+1}}(f)\right\|^p =&\left\|P_{A(f,t)}(f) - P_{A(f,s^{-n})}(f)\right\|^p\\
\leq&\theta^p(t)\|f\|^p + \theta^p(s^{-n})\|f\|^p \leq 2\theta^p(t)\|f\|^p;\\
\left\|P_{A_{k+1}}(f)\right\|^p =&\left\|P_{A\left(f,s^{-k-1}\right)}(f) - P_{A\left(f,s^{-k}\right)}(f)\right\|^p\\
\leq&\theta^p\left(s^{-k-1}\right)\|f\|^p + \theta^p\left(s^{-k}\right)\|f\|^p \leq 2\theta^p(t)\|f\|^p\ \ \forall 1 \leq k \leq n-1 \text{ si } k \geq 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
t^p\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\|^p \leq&t^p\sum_{k=1}^{n+1}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A_k}\right\|^p \leq c_1^p\sum_{k=1}^{n+1}t^p s^{pk}\left\|P_{A_k}(f)\right\|^p\\
\leq&s^p c_1^p\sum_{k=1}^{n+1}s^{p(k-n-1)}\left\|P_{A_k}(f)\right\|^p \leq 2c_1^p s^p\theta^p(t)\sum_{l=0}^{\infty}s^{-pl}\|f\|\\
=&\frac{2c_1^p s^p}{1-s^{-p}}\theta^p(t)\|f\| = \frac{2c_1^p s^{2p}}{s^p-1}\theta^p(t)\|f\|.
\end{aligned}$$

Tomando raíz p-ésima y considerando que esto vale para todo $f \in \mathcal{Q}$ y todo $0 < t < 1$, y dado que de las definiciones se obtiene $\lambda(1) = \theta(1)$, concluimos que $\mathcal{X}$ es nearly truncation quasi-greedy, con

$$\lambda(t) \leq \frac{2^{\frac{1}{p}}c_1 s^2}{(s^p-1)^{\frac{1}{p}}}\theta(t)\ \ \forall 0 < t \leq 1.$$

Para ver que III) implica I), fijamos $f \in \mathcal{Q}$, $0 < t \leq 1$ y $A \subset A(f,t)$. Si $t \geq s^{-1}$, entonces como $A \subset A\left(f, s^{-1}\right)$, se tiene que

$$\|P_A(f)\| \leq c_1 s s^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A\left(f,s^{-1}\right)}\right\| \leq c_1 s \lambda\left(s^{-1}\right)\|f\| \leq c_1 s \lambda(t)\|f\|. \tag{2.8}$$

Si $t < s^{-1}$, elegimos $n \in \mathbb{N}$ y definimos $\{A_k\}_{1\leq k\leq n+1}$ como en la prueba de que II) implica III). Para cada $1 \leq k \leq n+1$, sea $B_k := A \cap A_k$. Puesto que

$$\begin{aligned}
&B_1 \subset A\left(f, s^{-1}\right),\\
&B_{n+1} \subset A(f,t) \setminus A\left(f, s^{-n}\right), \text{ y}\\
&B_{k+1} \subset A\left(f, s^{-k-1}\right) \setminus A\left(f, s^{-k}\right) \ \forall 1 \leq k \leq n-1 \text{ si } n \geq 2,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|P_{B_1}(f)\right\| &\leq c_1 s \lambda(t)\|f\| \text{ por (2.8);}\\
\left\|P_{B_{k+1}}(f)\right\| &= s^{-k}\left\|s^k P_{B_{k+1}}(f)\right\| \leq c_1 s^{-k}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A\left(f,s^{-k-1}\right)}\right\|\\
&\leq c_1 s \lambda\left(s^{-k-1}\right)\|f\| \leq c_1 s \lambda(t)\|f\| \ \forall 1 \leq k \leq n-1 \text{ si } k \geq 2;\\
\left\|P_{B_{n+1}}(f)\right\| &\leq c_1 s^{-n}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| \leq c_1 st\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,t)}\right\| \leq c_1 s \lambda(t)\|f\|.
\end{aligned}$$

Luego, por p-convexidad,

$$\begin{aligned}
\|P_A(f)\| &\leq \left(\sum_{k=1}^{n+1}\left\|P_{B_k}(f)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1 s \lambda(t)(n+1)^{\frac{1}{p}}\|f\|\\
&\leq c_1 s\left(1 + \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{\log(s)}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(t)\|f\|.
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{Q}$ es arbitraria, concluimos que $\mathcal{X}$ es nearly unconditional, con

$$\phi(t) \leq c_1 s\left(1 + \frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{\log(s)}\right)^{\frac{1}{p}} \lambda(t) \ \forall\, 0 < t \leq 1.$$

□

El Teorema 2.1.9 muestra la equivalencia entre tres propiedades dadas en términos de funciones de tipo "umbral" - ϕ, λ, θ -, definidas en el intervalo $(0,1]$. En [18, Proposición 4.1] se demostró que es suficiente que θ esté definida en un intervalo $[a,1]$ para algún $0 < a < 1$ fijo para que esté definida en todo el intervalo $(0,1]$ y por lo tanto, para que la base sea thresholding bounded.
Esto sugiere preguntarse si esto también es válido si solo pedimos que ϕ, θ o λ esté definida para $t = 1$. Esto es equivalente a que $\mathcal{X}$ tenga otra propiedad de tipo greedy introducida en [6], que definimos seguidamente.

Definición 2.1.10. *Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* quasi-greedy for largest coefficients *(QGLC) si existe $C > 0$ tal que*

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq C \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\| \tag{2.9}$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ y $f \in \mathcal{Q}$ con $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$. Notamos $K_{ql} = K_{ql}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ a la mímima constante C que verifica esta desigualdad.

Observación 2.1.11. La constante C_{ql} de [6, Definición 4.6] verifica $K_{ql} \leq C_{ql} \leq \left(1 + K_{ql}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$, y por lo tanto las definiciones son equivalentes.

Observación 2.1.12. *[2, Lema 2.1]* Notemos que si $\mathcal{X}$ es nearly unconditional, entonces es QGLC y

$$\theta(1) = \lambda(1) = \phi(1) = K_{ql}.$$

En efecto, se sigue inmediatamente de las definiciones que $\lambda(1) = \theta(1) \leq \phi(1) = K_{ql}$. Además, dados $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(f, 1)$, para cada $0 < \epsilon < 1$ se tiene que $A\left(f - \epsilon P_{A(f,1)\setminus A}(f), 1\right) = A$. Entonces si $g_\epsilon := f - \epsilon P_{A(f,1)\setminus A}(f)$,

$$\|P_A(f)\|^p \leq \|P_A(f - g_\epsilon)\|^p + \|P_A(g_\epsilon)\|^p \leq \|P_A\|^p \|f - g_\epsilon\|^p + \theta(1)^p \|g_\epsilon\|^p \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} \theta(1)^p \|f\|^p,$$

de donde obtenemos que $\phi(1) \leq \theta(1)$.

Observación 2.1.13. Notemos también que toda base quasi-greedy for largest coefficients es K_{ql}-SUCC ([6, Proposición 4.7], [31]).

Seguidamente, probaremos que las bases quasi-greedy for largest coefficients son nearly unconditional. En la demostración, usamos la siguiente notación: dado $0 < a \leq 1$, decimos que una base $\mathcal{X}$ es a-nearly unconditional si las condiciones de la Definición 2.0.1 se cumplen para todo $a \leq t \leq 1$; usamos la misma terminología para las bases thresholding bounded, en este caso teniendo en cuenta la Definición 2.1.1.

Teorema 2.1.14. *[2, Teorema 2.6] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Entonces $\mathcal{X}$ es quasi-greedy for largest coefficients si y solo si es nearly unconditional.*

Demostración. Por la Observación 2.1.12, solo tenemos que probar el "solo si". A tal fin, sean c_1 y s las constantes del Lema 2.1.8, y elijamos $s^{-1} < a < 1$ de manera que $\left(1 + K_{ql}^{p}\right) c_1^p a^{-1} (1 - a) \leq 2^{-1}$. Dados $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(f, a)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|P_A(f)\|^p &= \left\| \sum_{n \in A} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}_n^*(f)) \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \mathbf{x}_n \right\|^p \\
&\leq \left\| \sum_{n \in A} \operatorname{sgn}(\mathbf{x}_n^*(f)) \left(1 - \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|\right) \mathbf{x}_n \right\|^p + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\|^p
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left\| \sum_{n\in A} \operatorname{sgn}\left(\mathbf{x}_n^*(f)\right)\left(1-\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|\right)\mathbf{x}_n \right\|^p + K_{ql}^p \left\| \sum_{n\in A} \operatorname{sgn}\left(\mathbf{x}_n^*(f)\right)\mathbf{x}_n + f - P_A(f) \right\|^p \\
&\leq K_{ql}^p \|f\|^p + \left(1+K_{ql}^p\right) \left\| \sum_{n\in A} \operatorname{sgn}\left(\mathbf{x}_n^*(f)\right)\left(1-\left|\mathbf{x}_n^*(f)\right|\right)\mathbf{x}_n \right\|^p \\
&\leq K_{ql}^p \|f\|^p + \left(1+K_{ql}^p\right) c_1^p \left\| \sum_{n\in A} a^{-1}(1-a)\,\mathbf{x}_n^*(f)\,\mathbf{x}_n \right\| \\
&= K_{ql}^p \|f\|^p + \left(1+K_{ql}^p\right) c_1^p a^{-1}(1-a)\|P_A(f)\|^p \leq K_{ql}^p \|f\|^p + \frac{1}{2}\|P_A(f)\|^p .
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\|P_A(f)\| \leq 2^{\frac{1}{p}} K_{ql} \|f\| .$$

Tomando supremo sobre toda $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(f,a)$ y teniendo en cuenta que $A(f,b) \subset A(f,a)$ si $a \leq b \leq 1$, se sigue que $\mathcal{X}$ es a-nearly unconditional, con

$$\phi(b) \leq \phi(a) \leq 2^{\frac{1}{p}} K_{ql} \;\forall a \leq b \leq 1.$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}$ también es a-thresholding bounded, con $\theta(b) \leq \phi(b)$ para todo $a \leq b \leq 1$. Ahora fijemos $a \leq b_1, b_2 < 1$. Dados $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(f, b_1 b_2)$, sea $B := A(f, b_1) \cap A$. Como $b_1^{-1}\left(f - P_{A(f,b_1)}(f)\right) \in \mathcal{Q}$ y $A \setminus B \subset A\left(b_1^{-1}\left(f - P_{A(f,b_1)}(f)\right), b_2\right)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|P_A(f)\|^p &\leq \|P_B(f)\|^p + \left\|P_{A\setminus B}(f)\right\|^p \\
&\leq (\phi(b_1)\|f\|)^p + b_1^p \left\|P_{A\setminus B}\left(b_1^{-1}\left(f - P_{A(f,b_1)}(f)\right)\right)\right\|^p \\
&\leq (\phi(b_1)\|f\|)^p + (b_1\phi(b_2))^p \left\|b_1^{-1}\left(f - P_{A(f,b_1)}(f)\right)\right\|^p \\
&\leq ((\phi(b_1))^p + (\phi(b_2))^p(1+(\theta(b_1))^p))\|f\|^p .
\end{aligned}
$$

Razonando como antes, deducimos que $\mathcal{X}$ es $b_1 b_2$-nearly unconditional y thresholding bounded, con

$$\theta(b_1 b_2) \leq \phi(b_1 b_2) \leq ((\phi(b_1))^p + (\phi(b_2))^p(1+(\theta(b_1))^p))^{\frac{1}{p}} . \tag{2.10}$$

Tomando $b_1 = b_2 = a$, se sigue que $\mathcal{X}$ es a^2-nearly unconditional y a^2-thresholding bounded. Iterando, esto en particular dice que $\mathcal{X}$ es a^{2^n}-nearly unconditional para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces es nearly unconditional (y thresholding bounded). □

En [18, Proposición 4.1] se probó que si $\mathcal{X}$ es una base de Schauder thresholding bounded de un espacio de Banach, existen constantes positivas c, d tales que $\theta(t) \leq ct^{-d}$ para todo $0 < t \leq 1$. La demostración dada no requiere que la base sea de Schauder; más aún, el resultado se extiende a espacios p-Banach, y vale también si reemplazamos thresholding bounded por nearly unconditional, con algunas modificaciones menores en la prueba. A continuación veremos que c y d solo dependen de $\phi(1)$ y de p.

Lema 2.1.15. *[2, Lema 2.4] Sea $\mathcal{X}$ una base nearly unconditional de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Entonces existen constantes positivas d_1, d_2 dependiendo solo de p y $\phi(1)$ tales que*

$$\phi(t) \leq d_1 t^{-d_2} \qquad \forall t \in (0,1]. \tag{2.11}$$

Demostración. Notemos que la estimación (2.10) de la prueba del Teorema 2.1.14 se aplica a $0 < b_1, b_2 \leq 1$ cualesquiera, y entonces

$$\begin{aligned}\phi(b_1 b_2) &\leq ((\phi(b_1))^p + (\phi(b_2))^p (1 + (\theta(b_1))^p))^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\phi(b_1) + \phi(b_2)(1 + \theta(b_1))) \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}-1} 3\phi(b_2)\phi(b_1) =: C\phi(b_2)\phi(b_1).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Tomando $t = b_1 = b_2$ e iterando, obtenemos

$$\phi(t^n) \leq C^{n-1}\phi(t)^n \ \ \forall\ 0 < t < 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ahora fijemos $0 < a < 1$ como en el Teorema 2.1.14. Notemos que por el Lema 2.1.8, a depende solo de p y K_{ql}, pues $\mathcal{X}$ es en particular K_{ql}-SUCC. Luego, también la estimación $\phi(a) \leq 2^{\frac{1}{p}} K_{ql}$ depende solo de p y K_{ql}. Dado $0 < t \leq 1$, elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n < t \leq a^{n-1}$. Si $n = 1$, entonces $\phi(t) \leq \phi(a)$. Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(t) &\leq \phi(a^n) \leq C^{-1}(C\phi(a))^n = C^{-1} t^{-\frac{\log((C\phi(a))^n)}{\log(t^{-1})}} \leq C^{-1} t^{-\frac{\log((C\phi(a))^n)}{\log(a^{1-n})}} \\ &= C^{-1} t^{-\left(\frac{n}{n-1}\right)\frac{\log(C\phi(a))}{\log(a^{-1})}} \leq C^{-1} t^{-2\left(\frac{\log(C\phi(a))}{\log(a^{-1})}\right)}\end{aligned} \tag{2.13}$$

Combinando las desigualdades para los casos $n = 1$ y $n > 1$, se obtiene que

$$\phi(t) \leq \text{máx}\left\{\phi(a), C^{-1} t^{-2\left(\frac{\log(C\phi(a))}{\log(a^{-1})}\right)}\right\} \leq \phi(a)\, t^{-2\left(\frac{\log(C\phi(a))}{\log(a^{-1})}\right)} \ \forall\ 0 < t \leq 1.$$

□

Dado $0 < a < 1$, la estimación de ϕ dada por Lema 2.1.15 nos da una constante $d(a) > 0$ tal que $\phi(t) \leq \phi(a)\, t^{-d(a)}$ para cada $0 < t \leq 1$. Sin embargo, el valor de $d(a)$ en el exponente de (2.13) es no acotado cuando a tiende a 1, incluso si $p = 1$. Las mismas consideraciones se aplican a la estimación para θ dada en [18, Proposición 4.1] (que también se puede obtener de (2.12) con $p = 1$ y θ en lugar de ϕ). Como veremos seguidamente, un estudio de la lipschitzianidad sobre intervalos cerrados contenidos en $(0,1]$ de la función ϕ permite, en el caso de espacios de Banach, eliminar la dependencia de a en el exponente, y reemplazar $d(a)$ por $K_{ql} = \phi(1)$. También obtendremos algunos resultados sobre las funciones ϕ, θ y λ en espacios p-Banach que a nuestro criterio podrían ser de algún interés en sí mismas. Para estudiar las propiedades mencionadas, primero vamos a dar una nueva cota para $\phi(ab)$, y cotas similares para $\lambda(ab)$ y $\theta(ab)$ cuando $0 < a \leq b \leq 1$.

Lema 2.1.16. *[2, Lema 2.2] Sea $\mathcal{X}$ una base nearly unconditional de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Para todo $0 < a \leq b \leq 1$, valen las siguientes afirmaciones:*

$$\phi(ab) \leq (((1-b)\phi(b))^p + (\phi(a))^p(1+((1-b)\theta(b))^p))^{\frac{1}{p}}; \tag{2.14}$$

$$\theta(ab) \leq (((1-b)\theta(b))^p + (\theta(a))^p(1+((1-b)\theta(b))^p))^{\frac{1}{p}}; \tag{2.15}$$

$$\lambda(ab) \leq \lambda(a)(1+((1-b)\theta(b))^p)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.16}$$

Demostración. (2.14): Si $b = 1$, el resultado es inmediato. Si $b < 1$, dados $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(f, ab)$, sean $B := A \cap A(f, b)$ y $g := b^{-1}\left(f - (1-b)P_{A(f,b)}(f)\right)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \|P_A(f)\|^p &\leq (1-b)^p \|P_B(f)\|^p + \|P_A(f) - (1-b)P_B(f)\|^p \\ &\leq (1-b)^p(\phi(b))^p\|f\|^p + b^p\|P_A(g)\|^p. \end{aligned}$$

Notemos que $g \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A(g, a)$. Por ende,

$$\begin{aligned} \|P_A(g)\|^p &\leq (\phi(a))^p\|g\|^p = (\phi(a))^p b^{-p}\left\|f - (1-b)P_{A(f,b)}(f)\right\|^p \\ &\leq b^{-p}(\phi(a))^p\|f\|^p + (1-b)^p b^{-p}(\phi(a)))^p(\theta(b))^p\|f\|^p. \end{aligned}$$

Combinando las estimaciones anteriores y tomando supremo para $f \in \mathcal{Q}$ obtenemos (2.14).
(2.15): Se prueba con el mismo argumento que (2.14), con $A = A(f, ab)$.
(2.16): Como antes, asumimos que $0 < b < 1$ y, dada $f \in \mathcal{Q}$, definimos $g := b^{-1}\left(f - (1-b)P_{A(f,b)}(f)\right)$.
Dado que $g \in \mathcal{Q}$, $A(f, ab) = A(g, a)$ y $\varepsilon(g) = \varepsilon(f)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (ab)^p\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,ab)}\right\|^p &\leq b^p(\lambda(a))^p\|g\|^p = (\lambda(a))^p\left\|f - (1-b)P_{A(f,b)}(f)\right\|^p \\ &\leq (\lambda(a))^p(1+((1-b)\theta(b))^p)\|f\|^p. \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todas las $f \in \mathcal{Q}$, obtenemos la cota superior para $\lambda(ab)$ del enunciado. □

Proposición 2.1.17. *[2, Proposición 2.8, Corolario 2.9, Teorema 2.10] Sea $\mathcal{X}$ una base nearly unconditional de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Valen las siguientes afirmaciones:*

I) *Las funciones ϕ, θ y λ son continuas en $(0, 1]$ y localmente p-Lipschitz en $(0, 1)$.*

II) *Si $p = 1$, las funciones ϕ, θ y λ son derivables en casi todo punto del intervalo $(0, 1)$, con*

$$0 \geq \phi'(y) \geq -\frac{K_{ql}(1+\phi(y))}{y};$$

$$0 \geq \theta'(y) \geq -\frac{K_{ql}(1+\theta(y))}{y};$$

$$0 \geq \lambda'(y) \geq -\frac{K_{ql}\lambda(y)}{y}$$

para todo $0 < y < 1$ en el que la derivada respectiva existe.

iii) *Si $p = 1$, entonces ϕ, θ y λ son Lipschitz en $[a, 1]$ para cada $0 < a < 1$, con constantes Lipschitz $L_{a,\phi}, L_{a,\theta}$ y $L_{a,\lambda}$ acotadas como sigue:*

$$\begin{aligned} L_{a,\phi} &\leq \frac{K_{ql}\left(1+\phi\left(a\right)\right)}{a}; \\ L_{a,\theta} &\leq \frac{K_{ql}\left(1+\theta\left(a\right)\right)}{a}; \\ L_{a,\lambda} &\leq \frac{K_{ql}\lambda\left(a\right)}{a}. \end{aligned}$$

Demostración. i) Primero probamos la continuidad por la izquierda en 1: Sean c_1 y s las constantes del Lema 2.1.8. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ y $2^{-1} < \delta < 1$ de manera que

$$\phi\left(1\right)\left(1+\epsilon_1\right)^{\frac{1}{p}} \leq \phi\left(1\right)+\epsilon \qquad \text{y} \qquad 1+2\left(2\left(1-\delta\right)c_1\lambda\left(2^{-1}\right)\right)^p \leq 1+\epsilon_1. \tag{2.17}$$

Ahora fijemos $f \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A\left(f, \delta\right)$, y sea $g := f - P_A\left(f\right) + \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}$. Como $g \in \mathcal{Q}$ y $A \subset A\left(g, 1\right) \subset A(f, 2^{-1})$, se sigue que

$$\begin{aligned} \left\|P_A\left(f\right)\right\|^p &\leq \left\|P_A\left(g\right)\right\|^p + \left\|P_A\left(f\right) - \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\|^p \\ &\leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left\|g\right\|^p + \left\|P_A\left(f\right) - \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\|^p \\ &\leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left\|f\right\|^p + \left(\left(\phi\left(1\right)\right)^p+1\right)\left\|P_A\left(f\right) - \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\|^p \\ &\leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left\|f\right\|^p + 2\left(\phi\left(1\right)\right)^p\left\|\sum_{n\in A}\operatorname{sgn}\left(\mathbf{x}_n^*\left(f\right)\right)\left(1-\left|\mathbf{x}_n^*\left(f\right)\right|\right)\mathbf{x}_n\right\|^p \\ &\leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left\|f\right\|^p + 2^{p+1}\left(\phi\left(1\right)\right)^p\left(1-\delta\right)^p c_1^p 2^{-p}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,2^{-1})}\right\|^p \\ &\leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left(1+2^{p+1}\left(1-\delta\right)^p c_1^p\left(\lambda(2^{-1})\right)^p\right)\left\|f\right\|^p \leq \left(\phi\left(1\right)\right)^p\left(1+\epsilon_1\right)\left\|f\right\|^p. \end{aligned}$$

Luego, tomando supremo para f y A como antes, obtenemos

$$\phi\left(\delta\right) \leq \left(1+\epsilon_1\right)^{\frac{1}{p}}\phi\left(1\right) \leq \phi\left(1\right)+\epsilon.$$

Como ϕ es no creciente, esto prueba que ϕ es continua por la izquierda en 1. La continuidad por la izquierda de θ se prueba con el mismo argumento, tomando $A = A(f, \delta)$. Para probar la continuidad por la izquierda de λ, tomamos $0 < \epsilon_1 < \epsilon$ y $2^{-1} < \delta < 1$ de manera que valga (2.17) reemplazando ϕ por λ, y definimos

$$g := f - P_{A(f,\delta)}\left(f\right) + \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,\delta)}.$$

Argumentando como en la prueba para ϕ, tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\delta\right)^p\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,\delta)}\right\|^p &\leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(g),A(g,1)}\right\|^p \leq \left(\lambda\left(1\right)\right)^p\left\|g\right\|^p \\ &\leq \left(\lambda\left(1\right)\right)^p\left\|f\right\|^p + \left(\lambda\left(1\right)\right)^p\left\|P_{A(f,\delta)}\left(f\right) - \mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,\delta)}\right\|^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (\lambda(1))^p \|f\|^p + (\lambda(1))^p c_1^p (1-\delta)^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A(f,2^{-1})}\right\|^p \\
&\leq (\lambda(1))^p \|f\|^p + 2^p (\lambda(1))^p c_1^p (1-\delta)^p \left(\lambda(2^{-1})\right)^p \|f\|^p \\
&\leq (\lambda(1))^p (1+\epsilon_1) \|f\|^p .
\end{aligned}$$

La prueba de la continuidad por la izquierda de λ en 1 se completa como en el caso de ϕ. Para ver que ϕ es localmente p-Lipschitz en $(0,1)$, primero fijemos $0 < t < 1$ y consideremos el intervalo $\left[t^2, t\right]$. Dados $x < y$ en dicho intervalo, tenemos que $t \leq b := xy^{-1} < 1$. Como ϕ y θ son no crecientes, usando (2.14) y Lagrange deducimos que

$$\begin{aligned}
0 \leq &\phi(x) - \phi(y) = (\phi^p(yb))^{\frac{1}{p}} - (\phi^p(y))^{\frac{1}{p}} \underset{\exists x<z<y}{=} \frac{1}{p}\phi^{\frac{1-p}{p}}(z)\left(\phi^p(yb) - \phi^p(y)\right) \\
\leq &\frac{\phi^{\frac{1-p}{p}}(x)}{p}\left(\phi^p(b) + \theta^p(b)\phi^p(y)\right)(1-b)^p = \frac{\phi^{\frac{1-p}{p}}(x)}{py^p}\left(\phi^p(b) + \theta^p(b)\phi^p(y)\right)(y-x)^p \quad (2.18)\\
\leq &\left(\frac{\phi^{\frac{1-p}{p}}\left(t^2\right)}{pt^p}\left(\phi^p(t) + \theta^p(t)\phi^p\left(t^2\right)\right)\right)(y-x)^p .
\end{aligned}$$

Luego, ϕ es p-Lipschitz en $\left[t^2, t\right]$. El mismo argumento cambiando ϕ por θ nos da el resultado para θ, mientras que para λ, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq &\lambda(x) - \lambda(y) = (\lambda^p(x))^{\frac{1}{p}} - (\lambda^p(y))^{\frac{1}{p}} \underset{\exists x<z<y}{=} \frac{1}{p}\lambda^{\frac{1-p}{p}}(z)\left(\lambda^p(yb) - \lambda^p(y)\right) \\
\leq &\frac{\lambda^{\frac{1-p}{p}}(x)}{p}\left(\theta^p(b)\lambda^p(y)\right)(1-b)^p = \frac{\lambda^{\frac{1-p}{p}}(x)}{py^p}\theta^p(b)\lambda^p(y)(y-x)^p \quad (2.19)\\
\leq &\left(\frac{\lambda^{\frac{1-p}{p}}\left(t^2\right)}{pt^p}\theta^p(t)\lambda^p\left(t^2\right)\right)(y-x)^p . \quad (2.20)
\end{aligned}$$

ii) Notemos primero que como ϕ es no creciente (o porque es localmente Lipschitz), es derivable en casi todo punto del intervalo $(0,1)$. Sea $0 < y < 1$ un punto en que existe $\phi'(y)$, y tomemos $0 < t^2 < y < t < 1$. Dado $t^2 < x < y$, tenemos que $t < b := xy^{-1} < 1$, y por la estimación (2.18) para $p = 1$, la continuidad por izquierda de ϕ en 1 y la Observación 2.1.12 se sigue que

$$0 \leq \frac{\phi(x) - \phi(y)}{y - x} \leq \frac{\phi(b) + \theta(b)\phi(y)}{y} \underset{x\to y}{\longrightarrow} \frac{\phi(1) + \theta(1)\phi(y)}{y} = \frac{K_{ql}(1+\phi(y))}{y},$$

lo que da el resultado para ϕ. El resultado para θ se prueba por el mismo argumento, y el caso de λ es similar, usando la cota (2.19).

iii) Primero notemos que como ϕ es localmente Lipschitz en $(0,1)$, por compacidad es Lipschitz en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$, con $0 < a < b < 1$. Ahora fijemos $0 < a < 1$.

Para ver que ϕ es Lipschitz en $[a, 1]$ con constante como en el enunciado, primero fijemos $a < b < 1$. Dados $a \leq x < y \leq b$, usando II) y teniendo en cuenta que $t \to \frac{1+\phi(t)}{t}$ es no creciente en $(0, 1]$, deducimos que

$$|\phi(y) - \phi(x)| = \phi(x) - \phi(y) = -\int_x^y \phi'(t)\,dt \leq \int_x^y K_{ql}\left(\frac{1+\phi(t)}{t}\right)dt$$
$$\leq K_{ql}\left(\frac{1+\phi(a)}{a}\right)|y - x|.$$

Esto muestra que la constante Lipschitz de ϕ en $[a, b]$ está acotada como en el enunciado. Como $b \in (a, 1)$ es arbitrario y ϕ es continua en $(a, 1]$, esto completa la demostración de la cota para $L_{a,\phi}$. Las cotas para $L_{a,\theta}$ y $L_{a,\lambda}$ se prueban de la misma manera. □

Corolario 2.1.18. *[2, Teorema 2.10] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Las funciones $\lambda(t)\, t^{K_{ql}}$, $(\phi(t) + 1)\, t^{K_{ql}}$ y $(\theta(t) + 1)\, t^{K_{ql}}$ son no decrecientes en $(0, 1]$. Por lo tanto, en particular se tiene que*

$$\phi(t) \leq \frac{K_{ql} + 1}{t^{K_{ql}}} - 1 \qquad \forall\, 0 < t \leq 1, \tag{2.21}$$

y

$$\lambda(t) \leq \frac{K_{ql}}{t^{K_{ql}}} \qquad \forall\, 0 < t \leq 1. \tag{2.22}$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.17, para casi todo $0 < a < 1$ tenemos que

$$(\log(1 + \phi(a)))' \geq -\frac{K_{ql}}{a}.$$

Como $\log(1 + \phi(a))$ es Lipschitz en $[t, 1]$ para todo $0 < t < 1$, integrando la derivada entre dos puntos $0 < t_1 < t_2 \leq 1$ obtenemos

$$(\log(1 + \phi(t_2))) - (\log(1 + \phi(t_1))) \geq -K_{ql}(\log(t_2) - \log(t_1)),$$

así que

$$(\phi(t_1) + 1)\, t_1^{K_{ql}} \leq (\phi(t_2) + 1)\, t_2^{K_{ql}}. \tag{2.23}$$

Hemos probado que $(\phi(t) + 1)\, t^{K_{ql}}$ es no decreciente. La prueba es similar para θ y λ. Finalmente, para obtener (2.21) tomamos $t_2 = 1$ en (2.23) y aplicamos la Observación 2.1.12; un argumento similar demuestra (2.22). □

Cerramos esta sección con una caracterización de las bases quasi-greedy for largest coefficients en términos de una propiedad formalmente más débil, lo que podría en algunos casos hacer más sencillo determinar si una base es QGLC, y por lo tanto nearly unconditional. Más precisamente, probaremos que podemos relajar la Definición 2.1.10 pidiendo solo que (2.9) valga para un $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ fijo, y eso es suficiente para que la base sea quasi-greedy for largest coefficients.

Lema 2.1.19. *[2, Proposición 2.11] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach space $\mathbb{X}$, y supongamos que existen $K > 0$ y $\widetilde{\varepsilon} \in S_{\mathbb{K}}^{\mathbb{N}}$ tales que*

$$\left\|\mathbf{1}_{\widetilde{\varepsilon},A}\right\| \leq K \left\|\mathbf{1}_{\widetilde{\varepsilon},A} + f\right\|$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y toda $f \in \mathcal{Q}$ tales que $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$.
Entonces, $\mathcal{X}$ es quasi-greedy for largest coefficients.

Demostración. Primero notemos que la propiedad de ser C-quasi-greedy for largest coefficients para alguna constante $C > 0$ se mantiene si multiplicamos cada elemento de la base por un escalar de módulo 1. Por lo tanto, en las condiciones del enunciado, reemplazando $\mathbf{x}_n$ por $\widetilde{\varepsilon_n}\mathbf{x}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos suponer que $\widetilde{\varepsilon_n} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora fijemos $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ y $f \in \mathcal{Q}$ tales que $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$. Definimos $B := \{n \in A : \varepsilon_n = 1\}$, $g_1 := -f - \mathbf{1}_B$ y $g_2 = f - \mathbf{1}_{A\setminus B}$. Tenemos que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\| = \|\mathbf{1}_B\| \leq K \|\mathbf{1}_B + g_2\| = K \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|,$$

y

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\setminus B}\right\| = \left\|\mathbf{1}_{A\setminus B}\right\| \leq K \left\|\mathbf{1}_{A\setminus B} + g_1\right\| = K \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|.$$

Como

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|^p \leq 2 \operatorname{máx}\left\{\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\|^p, \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\setminus B}\right\|^p\right\},$$

se sigue que (2.9) vale para signos reales, con $C = K_1 := 2^{\frac{1}{p}}K$. Luego si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la prueba está completa. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, usamos una variante del argumento de [10, Proposición 2.16]: Sea

$$\mathbb{Y} := \{f \in \mathbb{X} : \mathbf{x}_n^*(f) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Entonces $\mathbb{Y}$ es un espacio p-Banach sobre $\mathbb{R}$ con la p-norma restringida, y $\mathcal{X}$ es una base de $\mathbb{Z} := \overline{[\mathcal{X}]} \subset \mathbb{Y}$. Luego, por el resultado para el caso de coeficientes reales, se sigue que $\mathcal{X}$ es quasi-greedy for largest coefficients, y por lo tanto, suppression uncondicional for constant coefficients. Afirmamos que existen $K_2 \geq 1$ y $0 < \delta < 1$ tales que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|_{\mathbb{X}} \leq K_2 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}} \tag{2.24}$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, toda $f \in \mathcal{Q}$ tal que $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$, y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ tal que

$$\operatorname*{máx}_{n\in A} |\varepsilon_n - 1| \leq \delta.$$

Para probar la afirmación, sea c_1 la constante del Lema 2.1.8 para $[\mathcal{X}, \mathbb{Z}]$, y definamos

$$\delta := \frac{1}{4^{\frac{1}{p}} c_1 K}.$$

Dados A, ε como en la afirmación, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{X}}^p \le K^p \|\mathbf{1}_A + f\|_{\mathbb{X}}^p \le K^p \left\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|_{\mathbb{X}}^p + K^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}}^p \\
\le &K^p \left\|\sum_{n\in A} \operatorname{Re}(1-\varepsilon_n)\, \mathbf{x}_n\right\|_{\mathbb{Z}}^p + K^p \left\|\sum_{n\in A} \operatorname{Im}(1-\varepsilon_n)\, \mathbf{x}_n\right\|_{\mathbb{Z}}^p + K^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}}^p \\
\le &2c_1^p K^p \delta^p \|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{X}}^p + K^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}}^p = \frac{1}{2} \|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{X}}^p + K^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}}^p .
\end{aligned}$$

Luego,

$$\|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{X}}^p \le 2K^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}}^p .$$

Dado que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|_{\mathbb{X}}^p \le \left\|\sum_{n\in A} \operatorname{Re}(\varepsilon_n)\, \mathbf{x}_n\right\|_{\mathbb{Z}}^p + \left\|\sum_{n\in A} \operatorname{Im}(\varepsilon_n)\, \mathbf{x}_n\right\|_{\mathbb{Z}}^p \le 2c_1^p \|\mathbf{1}_A\|_{\mathbb{X}}^p ,$$

la afirmación queda demostrada, con $K_2 = 4^{\frac{1}{p}} c_1 K$.
Para completar la prueba del lema, elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ y una partición $\{E_k\}_{1\le k\le k_0}$ de $S_{\mathbb{K}}$ tales que si $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_k$ para algún $1 \le k \le k_0$, entonces $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \le \delta$. Dados $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^A$, y $f \in Q$ con $A \cap \operatorname{sop}(f) = \emptyset$, definimos

$$A_k := \{n \in A : \varepsilon_n \in E_k\}$$

para cada $1 \le k \le k_0$, y elegimos $1 \le k_1 \le k_0$ tal que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A_k}\right\|_{\mathbb{X}} \le \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A_{k_1}}\right\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall 1 \le k \le k_0.$$

Ahora tomamos $n_1 \in A_{k_1}$. Notemos que si $n \in A_{k_1}$, entonces

$$\left|1 - \varepsilon_{n_1}^{-1} \varepsilon_n\right| \le \delta.$$

Por p-convexidad y la elección de k_1, deducimos que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|_{\mathbb{X}} \le &k_0^{\frac{1}{p}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A_{k_1}}\right\|_{\mathbb{X}} = k_0^{\frac{1}{p}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon_{n_1}^{-1}\varepsilon,A_{k_1}}\right\|_{\mathbb{X}} \\
\le &k_0^{\frac{1}{p}} K_2 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon_{n_1}^{-1}\varepsilon,A_{k_1}} + \mathbf{1}_{\varepsilon_{n_1}^{-1}\varepsilon,A\setminus A_{k_1}} + \varepsilon_{n_1}^{-1} f\right\|_{\mathbb{X}} = k_0^{\frac{1}{p}} K_2 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|_{\mathbb{X}} ,
\end{aligned}$$

lo que completa la demostración. □

2.2. Bases bounded-oscillation unconditional.

En esta sección, estudiamos las bases bounded-oscillation unconditional y su relación con el algoritmo greedy. Como veremos, esta propiedad no depende (salvo la constante) de los parámetros D y d de la Definición 2.0.4, y es equivalente a ser truncation quasi-greedy. Con respecto a dichos parámetros, notemos primero que si $\mathcal{X}$ es C-(D,d)-BOU para algunas constantes $D, d \geq 1$, entonces es C-$(1,1)$-BOU. Notemos también que $\mathcal{X}$ es C-$(1,1)$-BOU si y solo si

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq C \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ y $f \in \mathbb{X}$ tales que $A \cap \operatorname{sop}(f) = \emptyset$. Esta caracterización muestra que ser $(1,1)$-BOU es la propiedad que se obtiene si quitamos la condición $f \in \mathcal{Q}$ de la definición de bases quasi-greedy for largest coefficients. En particular, por el Teorema 2.1.14, esto implica que toda base $(1,1)$-BOU es nearly unconditional. Pero además, la caracterización sugiere adaptar los argumentos de la Sección 2.1 a estas bases, y definir una función similar a la función ϕ (Definición 2.0.1) que hemos estudiado en dicha sección.

Definición 2.2.1. *Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Definimos $\Phi : (0,1] \to [1,\infty]$ como*

$$\Phi(t) := \inf_{M \in [1,\infty]} \left\{ \|P_A(f)\| \leq M \|f\| \;\; \forall f \in \mathbb{X}, \forall A \in \mathbb{N}^{<\infty} : o(f,A) \leq \frac{1}{t} \right\}.$$

Notemos que:

- En esta definición, se obtiene la misma M si para cada $f \in \mathbb{X}$, solo consideramos los conjuntos $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ que intersequen a $\operatorname{sop}(f)$. Usaremos esta equivalencia de ahora en más.
- Φ es no creciente.
- $\Phi(1) < \infty$ si y solo si $\mathcal{X}$ es $(1,1)$-BOU.
- Si $\mathcal{X}$ es nearly unconditional, entonces $\phi \leq \Phi$.

Observación 2.2.2. Definimos la función tomando valores en $[1,\infty]$ por conveniencia, pero vamos a estudiar solo bases para las que es finita.

El siguiente lema muestra que Φ tiene una propiedad útil que permite acotar su valor en un producto por una (p-)suma de su valor en los factores. En particular, esto implica que si Φ es finita para algún $0 < t_0 < 1$, entonces lo es para todo $0 < t < 1$ y, en tal caso, está acotada por una función logarítmica.

Lema 2.2.3. *[3, Lemas 2.1, 2.2] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$, y $n \in \mathbb{N}$. Dados $\left(t_j\right)_{1\leq j\leq n} \subset (0,1)$, tenemos que*

$$\Phi\left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \Phi^p\left(t_j\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.25}$$

Luego, si existe $0 < t_0 < 1$ para el cual $\Phi(t_0)$ es finita, entonces es finita para todo $0 < t \leq 1$, y se tiene que

$$\Phi(t) \leq 2^{\frac{1}{p}}\Phi(t_0)\left(\frac{\log\left(\frac{1}{t}\right)}{\log\left(\frac{1}{t_0}\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall\ 0 < t \leq t_0 < 1.$$

Demostración. Para probar (2.25), podemos asumir que $\Phi\left(t_j\right)$ es finita para todo $1 \leq j \leq n$. Sea $t := \prod_{j=1}^{n} t_j$, y fijemos $f \in \mathbb{X}$ y $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ con $A \cap \operatorname{sop}(f) \neq \emptyset$ de manera que $o(f, A) \leq t^{-1}$. Para estimar $\|P_A(f)\|$, podemos suponer $A \subset \operatorname{sop}(f)$ (si no, cambiamos A por su intersección con el soporte de f). Sean $b := \min_{k\in A}\left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|$ y $t_0 := 1$. Para cada $1 \leq j \leq n$, sea

$$A_j := \left\{k \in A : b\prod_{0\leq i\leq j-1} t_i^{-1} \leq |\mathbf{x}_k^*(f)| < b\prod_{0\leq i\leq j} t_i^{-1}\right\},$$

con "<" reemplazado por "≤" en el caso $j = n$. Entonces $\left\{A_j\right\}_{1\leq j\leq n}$ es una partición de A tal que $o\left(f, A_j\right) \leq t_j^{-1}$ para cada $1 \leq j \leq n$. Por lo tanto,

$$\|P_A(f)\|^p = \left\|P_{A_0}(f)\right\|^p \leq \sum_{1\leq j\leq n}\left\|P_{A_j}(f)\right\|^p \leq \sum_{1\leq j\leq n}\Phi\left(t_j\right)^p\|f\|^p,$$

de donde obtenemos (2.25). En particular, para cada $0 < t < 1$,

$$\Phi(t^n) \leq n^{\frac{1}{p}}\Phi(t). \tag{2.26}$$

Dado que Φ es no creciente, esto implica que si $\Phi(t)$ es finita por algún $0 < t < 1$, lo es para todo $0 < t < 1$.
Ahora supongamos que Φ es finita para algún (y entonces para todo) $0 < t < 1$, y fijemos t en dicho intervalo. Dado $0 < a < t$, elegimos $n \in \mathbb{N}$ de manera que $t^{n+1} \leq a < t^n$. Como Φ es no creciente y

$$n\log\left(\frac{1}{t}\right) = \log\left(\frac{1}{t^n}\right) \leq \log\left(\frac{1}{a}\right),$$

usando (2.26) deducimos que

$$\Phi(a) \leq \Phi\left(t^{n+1}\right) \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \Phi(t) \leq 2^{\frac{1}{p}} \Phi(t) \left(\frac{\log\left(\frac{1}{a}\right)}{\log\left(\frac{1}{t}\right)}\right)^{\frac{1}{p}},$$

lo que completa la demostración. □

El siguiente resultado se demuestra con una variante del argumento del Teorema 2.1.14. En la demostración vamos a usar el siguiente resultado.

Lema 2.2.4. *[6, Corolario 2.3] Sean $B \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y $\left(f_j\right)_{j\in B}$ una sucesión finita de vectores en un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Dados escalares $\left(a_j\right)_{j\in B} \subset [0,1]$, existe $A \subset B$ tal que*

$$\left\|\sum_{j\in B} a_j f_j\right\| \leq A_p \left\|\sum_{j\in A} f_j\right\|,$$

donde

$$A_p = \frac{1}{(2^p - 1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Proposición 2.2.5. *[3, Teorema 1.5] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Si $\Phi(1) < \infty$, entonces para todo $0 < t \leq 1$, se tiene que $\Phi(t) < \infty$. Además, para todo $0 < t < 1$,*

$$\Phi(t) \leq \begin{cases} \xi(t) & \text{si } 1 - \frac{1}{\Phi(1)A_p} < t < 1; \\ 2^{\frac{1}{p}} \left(\operatorname{ínf}_{1-\frac{1}{\Phi(1)A_p}<a<1} \frac{\xi(a)}{\log^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{a}\right)}\right) \log^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

donde

$$\xi(t) = \frac{A_p \Phi(1)}{\left(1 - (1-t)^p \Phi^p(1) A_p^p\right)^{\frac{1}{p}}} \ \forall \left(1 - \frac{1}{\Phi(1)A_p}\right) < t < 1.$$

Demostración. Fijemos $0 < t < 1$ de manera que $(1-t)\Phi(1)A_p < 1$, y elijamos $f \in \mathbb{X}$ y $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ tales que $0 < o(f,A) \leq t^{-1}$. Reescalando, podemos asumir que $\|P_A(f)\|_{\ell_\infty} = 1$. Sea $B \subset A$ tal que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),D}\right\| \leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\|$$

para todo $D \subset A$. Por el Lema 2.2.4 y la elección de B,

$$\|P_A(f)\| \leq A_p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\|.$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\|^{p} \leq \Phi^{p}(1)\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}+f-P_{B}(f)\right\|^{p}\\
\leq&\Phi^{p}(1)\|f\|^{p}+(1-t)^{p}\Phi^{p}(1)\left\|\sum_{n\in B}(1-t)^{-1}\operatorname{sgn}\left(\mathbf{x}_{n}^{*}(f)\right)\left(1-\left|\mathbf{x}_{n}^{*}(f)\right|\right)\mathbf{x}_{n}\right\|^{p}\\
\leq&\Phi^{p}(1)\|f\|^{p}+(1-t)^{p}\Phi^{p}(1)A_{p}^{p}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\|^{p},
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\| \leq \frac{\Phi(1)}{\left(1-(1-t)^{p}\Phi^{p}(1)A_{p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\|f\|.$$

Combinando las estimaciones anteriores, obtenemos

$$\left\|P_{A}(f)\right\| \leq \frac{A_{p}\Phi(1)}{\left(1-(1-t)^{p}\Phi^{p}(1)A_{p}^{p}\right)^{\frac{1}{p}}}\|f\|.$$

Como f es arbitraria, esto prueba que $\Phi(t) \leq \xi(t)$. Por el Lema 2.2.3, obtenemos que $\Phi(a) < \infty$ para todo $0 < a \leq 1$. Finalmente, el Lema 2.2.3 también da la cota superior en el caso restante. □

Corolario 2.2.6. Sea $\mathcal{X}$ una base $(1,1)$-BOU. Para cada $d, D \geq 1$, existe $C > 0$ tal que $\mathcal{X}$ es C-(D,d)-BOU.

Demostración. Por la Proposición 2.2.5, $\Phi\left(D^{-1}\right) < \infty$, y es inmediato por las definiciones que $\mathcal{X}$ es $\Phi(D^{-1})$-(D,d)-BOU. □

Seguidamente, probamos la equivalencia entre bases truncation quasi-greedy y bases bounded-oscillation unconditional.

Teorema 2.2.7. *[3, Teorema 1.5](cf. [6, Teoremas 4.8, 4.13(i)] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. Valen las siguientes afirmaciones:*

(I) *Si $\mathcal{X}$ es truncation quasi-greedy, entonces es bounded-oscillation unconditional, con*

$$\Phi(1) \leq K_{tqg}^{2}.$$

(II) *Si $\mathcal{X}$ es bounded-oscillation unconditional, entonces es truncation quasi-greedy, con*

$$K_{tqg} \leq A_{p}^{2}\Phi(1) \inf_{1-\frac{1}{A_{p}\Phi(1)}<t<1} \frac{1}{t(1-t^{p})^{\frac{1}{p}}\left(1-(1-t)^{p}A_{p}^{p}\Phi^{p}(1)\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Demostración. La implicación TQG $\Longrightarrow$ $(1,1)$-BOU es conocida (ver [6, Proposición 4.16, Corolario 4.17]), pero por conveniencia damos una prueba corta que no depende de otros resultados: Dados $f \in \mathbb{X}$, $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ con $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$ y $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$, definimos $B := \left\{n \in \mathbb{N} : \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| \geq 1\right\}$. Puesto que $A \in \mathcal{G}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + \mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}, |A|, 1\right)$ y $A \cup B \in \mathcal{G}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f, |A| + |B|, 1\right)$, se deduce que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq K_{tqg} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + \mathbf{1}_{\varepsilon(f),B}\right\| \leq K_{tqg}^2 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|.$$

(II) Fijemos $f \in \mathbb{X}$, $m \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$. Podemos asumir que $\|P_A(f)\|_{\ell_\infty} = 1$ y que $a := \min_{n \in A} \left|\mathbf{x}_n^*(f)\right| > 0$. Consideramos dos casos: si $1 - \frac{1}{\Phi(1)A_p} < a < 1$, elegimos $B \subset A$ de manera que

$$\|P_D(f)\| \leq \|P_B(f)\| \quad \forall D \subset A.$$

Por el Lema 2.2.4 y la Proposición 2.2.5, tenemos que

$$a \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\| \leq A_p \|P_B(f)\| \leq A_p \Phi(a) \|f\| \leq A_p \xi(a) \|f\|.$$

Si $1 - \frac{1}{\Phi(1)A_p} \geq a$, elegimos $1 - \frac{1}{\Phi(1)A_p} < t < 1$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $t^{n+1} < a \leq t^n$. Para cada $0 \leq j \leq n$, sea

$$A_j := \left\{k \in A : t^{j+1} < \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \leq t^j\right\}.$$

Para cada $0 \leq j \leq n$, elegimos $B_j \subset A_j$ de manera que

$$\|P_D(f)\| \leq \left\|P_{B_j}(f)\right\| \ \forall D \subset A_j.$$

Aplicando nuevamente el Lema 2.2.4 y la Proposición 2.2.5, se deduce que

$$\begin{aligned}
a \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A}\right\| &\leq \frac{1}{t} \left(\sum_{j=0}^{n} t^p a^p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A_j}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{t} \left(\sum_{j=0}^{n} t^{p(n-j)} t^{p(j+1)} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon(f),A_j}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{t} A_p \left(\sum_{j=0}^{n} t^{p(n-j)} \left\|P_{B_j}(f)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \frac{1}{t} A_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^{pk}\right)^{\frac{1}{p}} \Phi(t) \|f\| \leq \frac{A_p}{t(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \xi(t) \|f\|.
\end{aligned}$$

Dado que la cota superior para el segundo caso que hemos considerado es siempre mayor que la cota superior para el primero, tomando supremo y considerando la definición de ξ concluimos que $\mathcal{X}$ es truncation quasi-greedy con

$$K_{tqg} \leq A_p^2 \Phi(1) \inf_{1 - \frac{1}{A_p \Phi(1)} < t < 1} \frac{1}{t(1-t^p)^{\frac{1}{p}} \left(1 - (1-t)^p A_p^p \Phi^p(1)\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

□

Ahora que hemos establecido las caracterizaciones de bases nearly unconditional y bounded-oscillation unconditional en términos de propiedades que no involucran funciones de tipo "umbral" - Teoremas 2.1.14 y 2.2.7, Proposición 2.2.5 y Corolario 2.2.6 -, podemos hacer uso de las mismas para probar que estas propiedades no son equivalentes. En el contexto de extracción de sucesiones con algún tipo de incondicionalidad débil, esto muestra que el resultado de [22, Teorema 2.2] mejora el de Elton más allá de la mejora en cotas superiores para ϕ en la subsucesión obtenida. Por otra parte, desde el punto de vista del área de aproximación greedy, también es importante mostrar que ser truncation quasi-greedy es una propiedad estrictamente más fuerte que ser quasi-greedy for largest coefficients - o, equivalentemente, que ser nearly truncation quasi-greedy. Más aún, probaremos que ser truncation quasi-greedy es una propiedad mucho más fuerte, en el sentido que veremos seguidamente. A tal fin, consideramos otra forma de incondicionalidad parcial, que fue identificada en conexión con el algoritmo greedy desde el inicio de la teoría (ver por ejemplo, [19, Lema 2.2]), y estudiada más recientemente en [6].

Definición 2.2.8. *[6, Definición 3.3] Sean $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$ y $C \geq 1$. Decimos que $\mathcal{X}$ es C-*lattice partially unconditional *(C-LPU) si*

$$\left\| \sum_{n\in A} a_n \mathbf{x}_n \right\| \leq C \left\| \sum_{n\in A} b_n \mathbf{x}_n \right\|$$

para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, y escalares $(a_n)_{n\in A}, (b_n)_{n\in A}$ tales que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos K_{lpu} a la mínima constante C para la que vale la desigualdad de la definición.

Observación 2.2.9. Notemos que para el caso $p = 1$, por convexidad podemos solamente considerar $(a_n)_{n\in A} \subset S_{\mathbb{K}}^{A}$ en la Definición 2.2.8, y la constante K_{lpu} obtenida no varía.

Se sabe que las bases truncation quasi-greedy son lattice partially unconditional (esto puede deducirse de las definiciones y el Lema 2.1.8; ver también [6, Proposición 4.16]). Por otra parte, hasta [3] no conocemos ejemplos en la literatura de bases con la segunda propiedad pero sin la primera. Demostraremos que ser nearly unconditional no implica ser lattice partially unconditional, mientras que estas dos propiedades juntas tampoco implican ser truncation quasi-greedy, ni siquiera si agregamos la condición de que la base sea (super)democrática (una propiedad relevante en el contexto del estudio del TGA, que se usa frecuentemente para "conectar" propiedades de tipo greedy; ver por ejemplo [6], [19] [27], entre otros).
Para hacer un estudio más profundo de estos tipos de incondicionalidad parcial, demostraremos también que lattice partially unconditional no implica nearly unconditional. Antes de enunciar los resultados, recordamos una definición que será útil para simplificar la notación en algunas de nuestras demostraciones.

Definición 2.2.10. *[6], [19] Sea $\mathcal{X}$ una base de un espacio p-Banach $\mathbb{X}$. La* función fundamental superior *$\varphi_u = \varphi_u[\mathcal{X}, \mathbb{X}] : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ está dada por*

$$\varphi_u[\mathcal{X}, \mathbb{X}](m) = \sup_{\substack{A\in\mathbb{N}^{\leq m}\\ \varepsilon\in S_{\mathbb{K}}^{A}}} \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,A} \right\|.$$

Observación 2.2.11. Notemos que una base $\mathcal{X}$ es C-superdemocrática si y solo si

$$\varphi_u [\mathcal{X}, \mathbb{X}] (m) \leq C \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, A} \right\| \; \forall A \in \mathbb{N}^{(m)}, \forall \varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}.$$

Ahora podemos enunciar los resultados principales de lo que resta del capítulo.

Teorema 2.2.12. *[3, Teorema 3.1] Existe un espacio de Banach $\mathbb{X}$ con una base de Schauder monótona normalizada $\mathcal{X}$ que es nearly unconditional y lattice partially unconditional, pero que no es truncation quasi-greedy. Más aún, para cada $1 \leq p < \infty$, podemos construir la base de modo que sea superdemocrática con $\varphi_u [\mathcal{X}, \mathbb{X}] (n) \approx n^{\frac{1}{p}}$.*

Teorema 2.2.13. *[3, Teorema 4.4] Existe un espacio de Banach $\mathbb{X}$ con una base de Schauder monótona normalizada $\mathcal{X}$ que es nearly unconditional pero no es lattice partially unconditional. Además, dado $1 \leq p < \infty$ podemos construir la base de manera que sea superdemocrática con $\varphi_u [\mathcal{X}, \mathbb{X}] (n) \approx n^{\frac{1}{p}}$.*

Teorema 2.2.14. *[3, Teorema 4.5] Existe un espacio de Banach $\mathbb{X}$ con una base de Schauder monótona normalizada $\mathcal{X}$ que es lattice partially unconditional pero no es nearly unconditional. Además, dado $1 \leq p < \infty$, podemos construir la base de manera que sea superdemocrática con $\varphi_u [\mathcal{X}, \mathbb{X}] (n) \approx n^{\frac{1}{p}}$.*

Para demostrar los tres resultados anteriores, nuestra estrategia es la siguiente: teniendo en cuenta que las definiciones de las propiedades que estamos estudiando se extienden de manera natural a espacios de dimensión finita, y que toda base algebraica de uno de dichos espacios tiene todas las propiedes mencionadas, vamos a construir primero sucesiones de espacios de Banach de dimensión finita con bases cuyas constantes para las propiedades que queremos preservar se mantienen uniformemente acotadas, mientras que las constantes asociadas a la propiedad que buscamos no tener, se incrementan arbitrariamente. Luego, vamos a sumar estos espacios en el sentido ℓ_q, para algún $1 \leq q < \infty$, y así obtendremos una base con las propiedades buscadas.
Comencemos con un lema que nos permitirá concatenar bases y espacios de una manera conveniente.

Lema 2.2.15. *Sean $1 \leq q < \infty$ y, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $d(m) \in \mathbb{N}$, y sea $\mathbb{X}_m$ un espacio de Banach $d(m)$-dimensional con una norma $\|\cdot\|_{\mathbb{X}_m}$ y una base $\mathcal{X}_m := (\mathbf{x}_{n,m})_{1 \leq n \leq d(m)}$. Para $1 \leq q < \infty$, definimos $\mathbb{X}$ como el espacio*

$$\mathbb{X} = \ell_q \left(\oplus_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{X}_m \right),$$

esto es para $x = (x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ con $x_m \in \mathbb{X}_m$ para cada m,

$$\|x\|_{\mathbb{X}} := \left\| \left(\|x_m\|_{\mathbb{X}_m} \right)_{m \in \mathbb{N}} \right\|_{\ell_q},$$

siempre que la suma sea finita. Supongamos que las normas de las bases y sus respectivas bases duales are uniformemente acotadas, es decir existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K} \leq \text{mín}\left\{\left\|\mathbf{x}_{n,m}\right\|, \left\|\mathbf{x}_{n,m}^*\right\|\right\} \leq \text{máx}\left\{\left\|\mathbf{x}_{n,m}\right\|, \left\|\mathbf{x}_{n,m}^*\right\|\right\} \leq K$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $1 \leq n \leq d(m)$.
Sea $\mathcal{X}$ la base de $\mathbb{X}$ que resulta de concatenar las bases $\mathcal{X}_m$. Más precisamente, para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $J_m : \mathbb{X}_m \to \mathbb{X}$ la inclusión canónica. Entonces $\mathcal{X} = \left(J_m\left(\mathbf{x}_{n,m}\right)\right)_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 1\leq n\leq d(m)}}$. Valen las siguientes afirmaciones:

I) *Sea P una de las siguientes propiedades: Schauder, QGLC, TQG, LPU. Entonces $\mathcal{X}$ tiene la propiedad P si y solo si las constantes asociadas con P de las bases $(\mathcal{X}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ están uniformemente acotadas.*

II) *$\mathcal{X}$ es superdemocrática si y solo si existe $C > 0$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada A un conjunto de índices de la base $\mathcal{X}_m$,*

$$C^{-1}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right]\right\| \leq |A|^{\frac{1}{q}} \leq C\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right]\right\|. \tag{2.27}$$

En tal caso, tenemos que (2.27) vale también para $\mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]$ (con A un conjunto de índices de $\mathcal{X}$) en lugar de $\mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m]$.

Demostración. I) Para P=Schauder, este es un resultado estándar. Para las otras propiedades, como $\mathbb{X}_m$ es isométrico a un subespacio de $\mathbb{X}$ y la base de $\mathbb{X}_m$ es isométricamente equivalente a la del subespacio respectivo, la implicación "solo si" es inmediata. Para la implicación en el otro sentido, asumimos P=QGLC, ya que las otras pruebas usan un argumento similar, con ajustes menores. Sea C_1 una cota superior para las constantes QGLC de todas las bases $\mathcal{X}_m$. Fijemos un conjunto finito de índices de $\mathcal{X}$ (es decir $A \subset \{(n,m)\}_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ 1\leq n\leq d(m)}}$), $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ y $f \in \mathbb{X}$ con $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$ y $\|f\|_{\ell_\infty} \leq 1$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $A_m := \{(n,m) : 1 \leq n \leq d(m)\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}, \mathbb{X}]\right\|_{\mathbb{X}}^q =& \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\cap A_m}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right]\right\|_{\mathbb{X}_m}^q \\
\leq& C_1^q \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\cap A_m}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right] + P_{A\cap A_m}(f)\right\|_{\mathbb{X}_m}^q \\
=& C_1^q \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}[\mathcal{X}, \mathbb{X}] + f\right\|_{\mathbb{X}}^q.
\end{aligned}$$

II) Como en la prueba de I), solo hace falta probar el "si": Elegimos A, ε, C_1 y A_m como en la prueba de I), y entonces

$$\begin{aligned}
C_1^{-q}|A| =& \sum_{m\in\mathbb{N}} C_1^{-q}|A_m \cap A| \leq \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\cap A_m}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right]\right\|_{\mathbb{X}_m}^q = \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\|^q \\
=& \sum_{m\in\mathbb{N}} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A\cap A_m}\left[\mathcal{X}_m, \mathbb{X}_m\right]\right\|_{\mathbb{X}_m}^q \leq C_1^q \sum_{m\in\mathbb{N}} |B_m| = C_1^q|B|.
\end{aligned}$$

□

El siguiente lema auxiliar afirma la existencia de bases con propiedades convenientes, que utilizaremos luego en nuestra construcción.

Lema 2.2.16. *Sea $1 \le p < \infty$. Existe un espacio de Banach $\mathbb{Y}_p$ con una base $\mathcal{Y}_p$ que tiene las siguientes propiedades:*

- *$\mathcal{Y}_p$ es una base de Schauder normalizada 1-incondicional.*
- *$\mathcal{Y}_p$ es superdemocrática con $\varphi_u\left[\mathcal{Y}_p, \mathbb{Y}_p\right](n) \approx n^{\frac{1}{p}}$. Si $1 < p < \infty$, tenemos además $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| = |A|^{\frac{1}{p}}$ para todo $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$.*
- *$\mathcal{Y}_p$ está dominada por la base canónica de ℓ_p.*
- *Existe una sucesión decreciente de números reales positivos $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell_p} = \left\|\left(\frac{c_n}{n^{\frac{1}{p'}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_1} = \infty;$$

$$M_0 := 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j\right\|_{\mathbb{Y}} < \infty.$$

Demostración. Si $1 < p < \infty$, sea $\mathbb{Y}_p$ la completación de c_{00} con la norma

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup_{\substack{A\in\mathbb{N}^{<\infty}\\ A\neq\emptyset}} |A|^{-\frac{1}{p'}} \sum_{n\in A} |a_n|.$$

Se sigue inmediatamente de la definición que la base canónica $\mathcal{Y}_p = (\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Y}$ es normalizada y 1-incondicional. Ahora bien, para cada $B \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{B}$, se tiene que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\| = \sup_{\substack{A\in\mathbb{N}^{<\infty}\\ A\neq\emptyset}} |A|^{-\frac{1}{p'}} |A \cap B| = |B|^{-\frac{1}{p}}.$$

Para ver que $\mathcal{Y}_p$ está dominada por la base canónica de ℓ_p, tomemos $\emptyset \neq A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y escalares $(a_n)_{n\in A}$. Como

$$|A|^{-\frac{1}{p'}} \sum_{n\in A} |a_n| \underset{\text{Hölder}}{\le} \left(\sum_{n\in A} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

tomando supremo se obtiene el resultado.
Finalmente, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\emptyset \neq A \in \mathbb{N}^{<\infty}$,

$$|A|^{-\frac{1}{p'}} \sum_{n\in A\cap\{1,\ldots,m\}} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \le |A|^{-\frac{1}{p'}} \sum_{n=1}^{|A|} \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}} \lesssim 1,$$

así que uno puede tomar $c_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Alternativamente, se puede usar la base canónica del espacio de Lorentz débil $\ell_{p,\infty}$ (que es un espacio de Banach vía un isomorfismo), y la misma sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si $p = 1$, sea $\mathcal{Y}$ la base canónica del espacio de Tsirelson original, y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \ell_1$ una sucesión tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n \mathbf{y}_n$ converge. Por la incondicionalidad de $\mathcal{X}$, podemos suponer que $c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También podemos suponer que $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (si $c_n = 0$, lo cambiamos por $\frac{1}{n^2}$ por ejemplo), y que $c_n \neq c_m$ si $n \neq m$ (por ejemplo, sumando a cada c_n algún escalar positivo menor o igual que $\frac{1}{n^2}$ de manera que esta condición se cumpla). Usando nuevamente la incondicionalidad de $\mathcal{Y}$, podemos reordenar la sucesión y la base de manera de obtener una sucesión decreciente. □

Ahora comenzaremos a construir los espacios de dimensión finita que luego concatenaremos para demostrar los Teoremas 2.2.12, 2.2.13, 2.2.14 (en todas estas construcciones, el objectivo es solamente demostrar que las bases tienen o no tienen las propiedades buscadas, según el caso; no hemos intentado optimizar las constantes obtenidas).

Lema 2.2.17. *Sea $1 \leq p < \infty$. Existe una constante $C_p > 0$ tal que para todo $M \in \mathbb{N}$, existen un conjunto finito $\emptyset \subsetneq E_M \subset \mathbb{N}$ y un espacio de dimensión finita $\mathbb{X}_M$ con una base de Schauder monótona normalizada $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n\in E_M}$ que tiene las siguientes propiedades:*

I) *La constante truncation quasi-greedy K_{tqg} de $\mathcal{X}_M$ es mayor que M.*

II) *$\mathcal{X}_M$ es C_p-QGLC.*

III) *$\mathcal{X}_M$ es C_p-LPU.*

IV) *Para cada $D \subset E_M$ y cada $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$,*

$$C_p^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Demostración. Por el Lema 2.2.16, existe un espacio de Banach $\mathbb{Y}$ con una base normalizada $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_p$ que tiene las siguientes propiedades:

- $\mathcal{Y}$ es 1-incondicional. Por lo tanto, en particular $\mathcal{Y}$ es 1-QGLC, 1-TQG y 1-LPU.
- Existe $K_1 \geq 1$ tal que

$$K_1^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \tag{2.28}$$

  para cada $D \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y cada $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$. Si $1 < p < \infty$, podemos tomar $K_1 = 1$.
- Existe una sucesión decreciente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(0, \frac{1}{4p}\right]$ tal que

$$\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell_p} = \left\|\left(\frac{c_n}{n^{\frac{1}{p'}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_{\ell_1} = \infty;$$

$$M_0 := 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j \right\|_{\mathbb{Y}} < \infty. \tag{2.29}$$

Definimos $C_p := 12pK_1$, y elegimos $m_1 \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ de manera que

$$\sum_{n=1}^{m_1} c_n^p > \left(10M^2 M_0\right)^p. \tag{2.30}$$

Sean $M_2 := 5c_{m_1}^{-1}$ y $A := \{1, \ldots, m_1\}$. Elegimos intervalos de números naturales $(I_n)_{1\leq n\leq m_1}$ and $(B_n)_{1\leq n\leq m_1}$ de modo que se cumpla lo siguiente:

$$A < I_n < B_n < I_{n+1} < B_{n+1} \qquad \forall 1 \leq n \leq m_1 - 1;$$

$$2M_2 c_n \leq \sum_{k\in I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} \leq 3M_2 c_n \ \forall n \in A; \tag{2.31}$$

$$\sum_{k=1}^{|B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \leq M_2 c_n \leq \sum_{k=1}^{|B_n|+1} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \ \forall n \in A. \tag{2.32}$$

Sean $I := \bigcup_{n\in A} I_n$, $B := \bigcup_{n\in A} B_n$ y $E_M := A \cup B \cup I$.
Para cada $n \in A$, sea $C_n := \{n\} \cup I_n \cup B_n$, y sea $\mathcal{A}$ el conjunto de sucesiones finitas $\Delta = (\delta_n)_{n\in E_M}$ que tienen las siguientes propiedades:

1) Para cada $n \in E_M$, $|\delta_n| \leq 1$.

2) Para cada $n \in A$,

$$M_2 c_n \delta_n + \sum_{k\in I_n} \delta_k c_k + \sum_{k\in B_n} \delta_k = 0.$$

3) Para cada $k \in I$, $|\delta_k| \leq k^{-\frac{1}{p'}}$.

4) Para cada $n \in A$ y cada $D \subset B_n$,

$$\sum_{j\in D} \left|\delta_j\right| \leq \sum_{k=1}^{|D|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}.$$

Le damos a E_M el orden $\preceq$ definido como sigue:

- Si $n_1, n_2 \in A$, $n_1 < n_2$ y $k \in I_{n_1} \cup B_{n_1}$, entonces $n_1 \prec k \prec n_2$.
- Si $n_1, n_2 \in I \cup B$, entonces $n_1 \prec n_2$ si y solo si $n_1 < n_2$.

Ahora definimos para cada sucesión finita $f = (f_n)_{n\in E_M} \in \mathbb{K}^{E_M}$ la seminorma

$$\|f\|_{\triangleleft} := \sup_{\Delta\in\mathcal{A}} \sup_{n\in A} \sup_{l\in C_n} \left(\sum_{1\le j<n} \left| \delta_j f_j + \sum_{k\in I_j} \delta_k f_k + \sum_{k\in B_j} \delta_k f_k \right|^p + \left| \sum_{n\le j\le l} \delta_j f_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y la norma:

$$\|f\|_{\mathbb{X}_M} := \text{máx} \left\{ \|f\|_{\ell_\infty}, \|P_A(f)\|_{\mathbb{Y}}, \|P_I(f)\|_{\mathbb{Y}}, \|f\|_{\triangleleft} \right\},$$

en donde computamos la norma $\|g\|_{\mathbb{Y}}$ mediante la identificación $g \leftrightarrow \sum_{n\in E_M} g_n \mathbf{y}_n$ para cada $g \in \mathbb{K}^{E_M}$.
Sea $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n\in E_M}$ la base canónica de $\mathbb{X}_M := \left(\mathbb{K}^{E_M}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}_M}\right)$, ordenada por $\preceq$. Por construcción, $\mathcal{X}_M$ es una base monótona (con respecto al orden $\preceq$) y normalizada de $\mathbb{X}_M$, con base dual normalizada.
Vamos a hallar ahora una cota superior para la constante quasi-greedy for largest coefficients de $\mathcal{X}_M$, K_{ql}. A tal fin, fijamos $D \subset E_M$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$ y $f \in \mathcal{Q}$ $(= \mathcal{Q}[\mathcal{X}_M, \mathbb{X}_M])$ tales que $\text{sop}(f) \cap D = \emptyset$, y definimos

$$D_1 := D \cap A; \qquad D_2 := D \cap I; \qquad D_3 =: D \cap B.$$

Puesto que $\mathcal{Y}$ es 1-QGLC y vale (2.28), tenemos que

$$K_1^{-1} |D_1|^{\frac{1}{p}} \le \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D_1} \right\|_{\mathbb{Y}} = \left\| P_A(\mathbf{1}_{\varepsilon,D}) \right\|_{\mathbb{Y}} \le \left\| P_A(\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) \right\|_{\mathbb{Y}} \le \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Para cada $\Delta \in \mathcal{A}$, $n \in A$ y $l \in C_n$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{1\le j<n} \left| \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) + \sum_{k\in I_j} \delta_k \mathbf{x}_{M,k}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) + \sum_{k\in B_j} \delta_k \mathbf{x}_{M,k}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) \right|^p + \left| \sum_{n\le j\le l} \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ =& \left(\sum_{1\le j<n} \left| \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) \right|^p + \left| \delta_n \mathbf{x}_{M,n}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le |D_1|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Tomando supremo y combinando las estimaciones anteriores se infiere que

$$K_1^{-1} |D_1|^{\frac{1}{p}} \le \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D_1} \right\|_{\mathbb{X}_M} \le K_1 \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

De manera similar, primero tenemos que

$$K_1^{-1} |D_2|^{\frac{1}{p}} \le \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D_2} \right\|_{\mathbb{Y}} = \left\| P_I(\mathbf{1}_{\varepsilon,D}) \right\|_{\mathbb{Y}} \le \left\| P_I(\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) \right\|_{\mathbb{Y}} \le \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Para estimar $\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon,D_2} \right\|_{\triangleleft}$, fijemos Δ, n, l como antes. Usando 3) deducimos que

$$\left(\sum_{1\le j<n} \left| \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}) + \sum_{k\in I_j} \delta_k \mathbf{x}_{M,k}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}) + \sum_{k\in B_j} \delta_k \mathbf{x}_{M,k}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}) \right|^p + \left| \sum_{n\le j\le l} \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^*(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j\in A} \left(\sum_{k\in I_j\cap D} |\delta_k| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j\in A} \left(\sum_{k=1}^{|I_j\cap D|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq p|D_2|^{\frac{1}{p}}.$$

Combinando las cotas obtenidas se deduce que

$$K_1^{-1}|D_2|^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_m} \leq pK_1 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f\right\|_{\mathbb{X}_M}. \tag{2.33}$$

Si $D_3 \neq \emptyset$, sea $A_3 := \{n \in A : D \cap B_n \neq \emptyset\}$. Para cada $n \in A_3$, escribimos $D \cap B_n = \{k_{1,n} < \ldots < k_{|D\cap B_n|,n}\}$; para cada $1 \leq j \leq |D \cap B_n|$, definimos $\delta_{k_{j,n}} := j^{-\frac{1}{p'}}\varepsilon_{k_{j,n}}^{-1}$, y luego definimos

$$\delta_n := -\frac{1}{M_2 c_n} \sum_{j=1}^{|D\cap B_n|} \delta_{k_{j,n}}.$$

Para todo otro $k \in E_M$, definimos $\delta_k := 0$. Entonces por construcción $\Delta = \left(\delta_j\right)_{j\in E_M} \in \mathcal{A}$ y, dado que $M_2c_n \geq 5 > 2$ para cada $n \in A$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f\right\|_{\mathbb{X}_M} \\
&\geq \left(\sum_{n\in A} \left| \delta_n \mathbf{x}_n^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) + \sum_{k\in I_n} \delta_k \mathbf{x}_k^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) + \sum_{k\in B_n} \delta_k \mathbf{x}_k^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n\in A_3} \left| \delta_n \mathbf{x}_n^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f) + \sum_{k=1}^{|D\cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\sum_{n\in A_3} \left| -|\delta_n| + \sum_{k=1}^{|D\cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{n\in A_3} \left(\sum_{k=1}^{|D\cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{4}|D_3|^{\frac{1}{p}},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

en donde usamos para la última desigualdad que

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \geq \frac{l^{\frac{1}{p}}}{2} \ \forall p \geq 1, \forall l \in \mathbb{N}. \tag{2.35}$$

Por otra parte, para cada $\Delta' = (\delta'_n)_{n\in E_M} \in \mathcal{A}$, cada $n \in A$ y cada $l \in C_n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{1\leq j<n} \left| \delta'_j \mathbf{x}_{M,j}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}) + \sum_{k\in I_j} \delta'_k \mathbf{x}_{M,k}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}) + \sum_{k\in B_j} \delta'_k \mathbf{x}_{M,k}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}) \right|^p + \left| \sum_{n\leq j\leq l} \delta'_j \mathbf{x}_{M,j}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{j\in A} \left(\sum_{k\in B_j\cap D} \left|\delta'_j\right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j\in A} \left(\sum_{k=1}^{|B_j\cap D|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq p|D_3|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por ende,

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}\right\|_{\triangleleft} \leq p|D_3|^{\frac{1}{p}}. \tag{2.36}$$

(notemos que el mismo argumento muestra que (2.36) también vale si reemplazamos D_3 por cualquier otro subconjunto de B).
Combinando (2.34) y (2.36) con nuestras estimaciones para $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{X}_M}$, $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M}$, $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}\right\|_{\mathbb{X}_M}$ y la desigualdad triangular, concluimos que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (4p + (p+1)\,K_1)\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D} + f\right\|_{\mathbb{X}_M},$$

y tomando supremo obtenemos la estimación $K_{ql} \leq 4p + (p+1)\,K_1 \leq C_p$.
Más aún, tomando $f = 0$ en los cálculos anteriores y considerando (2.28) obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq & \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{X}_M} + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_3}\right\|_{\mathbb{X}_M} \\ \leq & (2p + 2K_1)|D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p|D|^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

y

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \geq \text{máx}\left\{\frac{|D_1|^{\frac{1}{p}}}{K_1}, \frac{|D_2|^{\frac{1}{p}}}{K_1}, \frac{|D_3|^{\frac{1}{p}}}{4}\right\} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{12K_1} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{C_p}.$$

Por lo tanto, iv) queda demostrado.
Estimemos ahora la constante de la propiedad lattice partially unconditional K_{lpu}. Elegimos $D \subset E_M$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{D}$, y $(a_n)_{n\in D}$ con $|a_n| \geq 1$ para cada $n \in D$. Sea $f := \sum_{n\in D} a_n \mathbf{x}_{M,n}$. Como antes, definimos

$$D_1 := D \cap A; \qquad D_2 := D \cap I; \qquad D_3 = D \cap B.$$

Usando las estimaciones de la prueba de ii), (2.28) y que $\mathcal{Y}$ es 1-LPU, obtenemos

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{X}_M} &= \text{máx}\left\{\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{Y}}, \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\triangleleft}\right\} \leq K_1\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq K_1\left\|P_A(f)\right\|_{\mathbb{Y}} \leq K_1\left\|f\right\|_{\mathbb{X}_M}; \\ \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} &= \text{máx}\left\{\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{Y}}, \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\triangleleft}\right\} \leq pK_1\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq pK_1\left\|P_I(f)\right\|_{\mathbb{Y}} \leq pK_1\left\|f\right\|_{\mathbb{X}_M}.\end{aligned}$$

Si $D_3 \neq \emptyset$, sean $A_3 := \{n \in A : B_n \cap D \neq \emptyset\}$ y

$$\begin{aligned} A_{3,1} &:= \left\{n \in A_3 : \sum_{k\in I_n\setminus D}\frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} \geq \sum_{k=1}^{|B_n|}\frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}\right\}; & A_{3,2} &:= A_3 \setminus A_{3,1}; \\ D_{3,1} &:= \bigcup_{n\in A_{3,1}} D \cap B_n; & D_{3,2} &:= D_3 \setminus D_{3,1}. \end{aligned}$$

Si $A_{3,1} \neq \emptyset$, fijemos $n_0 \in A_{3,1}$, y escribamos $B_{n_0} \cap D := \left\{k_{1,n_0} < \ldots < k_{|B_{n_0} \cap D|,n_0}\right\}$. Para cada $1 \leq j \leq |B_{n_0} \cap D|$, sea

$$\delta_{k_{j,n_0}} := \frac{1}{j^{\frac{1}{p'}} \operatorname{sgn}\left(a_{k_{j,n_0}}\right)}.$$

Dado que $n_0 \in A_{3,1}$, existen escalares $\left(\delta_j\right)_{j \in I_{n_0} \setminus D}$ con $\left|\delta_j\right| \leq j^{-\frac{1}{p'}}$ para cada $j \in I_{n_0} \setminus D$ tales que

$$\sum_{j \in I_{n_0} \setminus D} \delta_j c_j + \sum_{j=1}^{|B_{n_0} \cap D|} \delta_{k_{j,n_0}} = 0.$$

Procedemos de esta manera para todo $n \in A_{3,1}$, y para cualquier otro $j \in E_M$, definimos $\delta_j := 0$. Entonces $\Delta = \left(\delta_j\right)_{j \in E_M} \in \mathcal{A}$ por construcción, y

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathbb{X}_M} \geq \|f\|_{\triangleleft} &\geq \left(\sum_{n \in A} \left|\delta_n \mathbf{x}^*_{M,n}(f) + \sum_{k \in I_n} \delta_k \mathbf{x}^*_{M,k}(f) + \sum_{k \in B_n} \delta_k \mathbf{x}^*_{M,k}(f)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n \in A_{3,1}} \left(\sum_{j=1}^{|B_n \cap D|} \frac{|a_{k_j}|}{j^{\frac{1}{p'}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\left(\sum_{n \in A_{3,1}} \sum_{j=1}^{|B_n \cap D|} \frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\underset{(2.35)}{\geq} \frac{1}{2} \left|D_{3,1}\right|^{\frac{1}{p}} \geq \frac{1}{2p} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon, D_{3,1}}\right\|_{\triangleleft},
\end{aligned}$$

en donde usamos (2.36) con $D_{3,1}$ en lugar de D_3 para la última desigualdad. Para estimar $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon, D_{3,2}}\right\|_{\triangleleft}$, podemos suponer que $A_{3,2} \neq \emptyset$. Fijemos entonces $n \in A_{3,2}$. Puesto que $\left|c_j\right| \leq (4p)^{-1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, deducimos por (2.31) y (2.32) que

$$\begin{aligned}
|D \cap I_n|^{\frac{1}{p}} &\geq 4 \sum_{k \in I_n \cap D} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} = 4\left(\sum_{k \in I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} - \sum_{k \in I_n \setminus D} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}}\right) \\
&\geq 4\left(\sum_{k \in I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} - \sum_{k=1}^{|B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}\right) \geq 4 \sum_{k=1}^{|B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \underset{(2.35)}{\geq} 2|B_n|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|D_{3,2}| = \sum_{n \in A_{3,2}} |D \cap B_n| \leq \sum_{n \in A_{3,2}} |D \cap I_n| \leq |D_2|.$$

Tomando raíces p-ésimas y combinando la desigualdad anterior con (2.28) y (2.36) (en este último caso, tomando $D_{3,2}$ en lugar de D_3), deducimos que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon, D_{3,2}}\right\|_{\triangleleft} \leq p|D_{3,2}|^{\frac{1}{p}} \leq p|D_2|^{\frac{1}{p}} \leq pK_1 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon, D_2}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq pK_1 \|P_I(f)\|_{\mathbb{Y}} \leq pK_1 \|f\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Combinando todas las estimaciones y usando la desigualdad triangular, obtenemos

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (pK_1 + 2p + (p+1)\,K_1)\,\|f\|_{\mathbb{X}_M} \leq C_p\,\|f\|_{\mathbb{X}_M}\,.$$

Para completar la demostración del lema, solo resta probar ɪ). A tal fin, consideramos $f_0 := \mathbf{1}_B + \sum_{n\in A} M_2 c_n \mathbf{x}_{M,n} + \sum_{k\in I} c_k \mathbf{x}_{M,k}$ y $f_1 := \mathbf{1}_B$. Se sigue de la definición de $\mathcal{A}$, (2.31) y (2.32) que

$$\begin{aligned}\|f_0\|_{\triangleleft} &= \sup_{\Delta\in\mathcal{A}}\sup_{n\in A}\sup_{l\in C_n}\left|\sum_{n\leq j\leq l}\delta_j \mathbf{x}_j^*(f_0)\right| \\ &\leq \sup_{n\in A}\left(M_2 c_n + \sum_{k=1}^{|B_n|}\frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} + \sum_{k\in I_n}\frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}}\right) \leq 5M_2 c_1 < 5M_2.\end{aligned}$$

Además, $\|P_A(f_0)\|_{\mathbb{Y}} \leq M_2 M_0$ y $\|P_I(f_0)\|_{\mathbb{Y}} \leq M_0$ por la definición de M_0, así que $\|f_0\|_{\mathbb{X}_M} \leq 5M_2M_0$. Ahora para cada $n\in A$, escribimos $B_n = \{k_{1,n} < \ldots < k_{|B_n|,n}\}$, y para cada $1 \leq j \leq |B_n|$, sea $\delta_{k_{j,n}} := j^{-\frac{1}{p'}}$. Definimos

$$\delta_n := -\,(M_2 c_n)^{-1}\sum_{j=1}^{|B_n|}\frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}} \qquad \forall n\in A,$$

y $\delta_k := 0$ para todo otro $k\in E_M$. Por construcción, $\Delta = (\delta_k)_{k\in\mathbb{X}_M}\in\mathcal{A}$. Teniendo en cuenta que $M_2 c_n > 2$ para cada $n\in A$, la elección de A y (2.32), deducimos que

$$\begin{aligned}\|f_1\|_{\mathbb{X}_M} &\geq \left(\sum_{n\in A}\left|\delta_n \mathbf{x}_n^*(f_1) + \sum_{k\in I_n}\delta_k \mathbf{x}_k^*(f_1) + \sum_{k\in B_n}\delta_k \mathbf{x}_k^*(f_1)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n\in A}\left(\sum_{j=1}^{|B_n|}\frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n\in A}\left|\frac{M_2 c_n}{2}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 5M_2M_0M^2.\end{aligned}$$

Como

$$\|f_1\|_{\mathbb{X}_M} \leq K_{tqg}\,\|\mathbf{1}_{A\cup B}\|_{\mathbb{X}_M} \leq K_{tqg}^2\,\|f_0\|_{\mathbb{X}_M}\,,$$

combinando las estimaciones anteriores se sigue que $K_{tqg} > M$, lo que completa la demostración. □

Demostración del Teorema 2.2.12. Fijamos $1 \leq p < \infty$, y aplicamos el Lema 2.2.17 para todo $M\in\mathbb{N}_{\geq 4}$. Luego concatenamos los espacios de dimensión finita $(\mathbb{X}_M)_{M\in\mathbb{N}_{\geq 4}}$ por medio del Lema 2.2.15, con $q = p$ para obtener una base superdemocrática con $\varphi_u(n) \approx n^{\frac{1}{p}}$, o con $q \neq p$ para obtener una base que no es democrática. □

Seguidamente, construiremos los espacios para las demostraciones de los Teoremas 2.2.13 y 2.2.14. Las construcciones son similares a la del Lema 2.2.17, pero más cortas. Comenzamos con la construcción que usaremos para probar el Teorema 2.2.13.

Lema 2.2.18. *Sea $1 \leq p < \infty$. Existe una constante positiva C_p tal que, para cada $M \in \mathbb{N}$, existen un conjunto $\emptyset \neq E_M \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}_M$ con una base monótona normalizada $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n\in E_M}$ que tiene las siguientes propiedades:*

I. *$\mathcal{X}_M$ es C_p-quasi-greedy for largest coefficients.*

II. *Para cada $D \subset E_M$ y cada $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$,*
$$C_p^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

III. *$\mathcal{X}_M$ tiene constante lattice partially unconditional $K_{lpu} > M$.*

Demostración. Por medio del Lema 2.2.16, elegimos un espacio de Banach $\mathbb{Y}$ con una base normalizada $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_p$ que tiene las siguientes propiedades:

- $\mathcal{Y}$ es 1-incondicional. Por lo tanto, en particular $\mathcal{Y}$ es 1-QGLC, 1-TQG y 1-LPU.
- Existe $K_1 \geq 1$ tal que
$$K_1^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \tag{2.37}$$
para todo $D \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$.
- Existe una sucesión decreciente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(0, \frac{1}{4p}\right]$ tal que
$$\|(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell_p} = \infty;$$
$$M_0 := 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|\sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j\right\|_{\mathbb{Y}} < \infty.$$

Definimos $C_p := 8pK_1$ y elegimos $m_1 \in \mathbb{N}$ de manera que
$$\sum_{n=1}^{m_1} c_n^p > (8M_0M)^p.$$

Ahora elegimos $M_2 > 2c_{m_1}^{-1}$, definimos $A := \{1, \dots, m_1\}$, y elegimos intervalos de números naturales $\{B_n\}_{n\in A}$ de manera que $A < B_n < B_{n+1}$ para cada $1 \leq n \leq m_1 - 1$, y
$$\sum_{k=1}^{|B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \leq M_2 c_n \leq \sum_{k=1}^{|B_n|+1} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \quad \forall n \in A. \tag{2.38}$$

Sean $B := \bigcup_{n\in A} B_n$, $E_M := A \cup B$ y $\mathcal{A}$ el conjunto de sucesiones finitas $\Delta = (\delta_n)_{n\in E_M}$ que tiene las siguientes propiedades:

1) Para cada $n \in E_M$, $|\delta_n| \leq 1$.

2) Para cada $n \in A$,
$$M_2 c_n \delta_n + \sum_{k \in B_n} \delta_k = 0.$$

3) Para cada $n \in A$ y cada $D \subset B_n$,
$$\sum_{j \in D} |\delta_j| \leq \sum_{k=1}^{|D|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}.$$

Le damos a E_M el orden $\preceq$, definido de la siguiente manera:

- Si $n_1, n_2 \in A$ or $n_1, n_2 \in B$, entonces $n_1 \preceq n_2$ si y solo si $n_1 \leq n_2$.
- Si $n_1 \in A$ y $n_2 \in B_{n_1}$, entonces $n_1 \prec n_2$.
- Si $n_1, n_2 \in A$, $n_1 < n_2$ y $k \in B_{n_1}$, entonces $k \prec n_2$.

Ahora definimos para cada sucesión finita $f = (f_n)_{n \in E_M} \in \mathbb{K}^{E_M}$ la seminorma
$$\|f\|_{\triangleleft} := \sup_{\Delta \in \mathcal{A}} \sup_{n \in A} \sup_{l \in \{n\} \cup B_n} \left(\sum_{1 \leq j < n} \left| \delta_j f_j + \sum_{k \in B_j} \delta_k f_k \right|^p + \left| \sum_{n \leq j \leq l} \delta_j f_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$
y la norma
$$\|f\|_{\mathbb{X}_M} := \max\left\{ \|f\|_{\ell_\infty}, \|P_A(f)\|_{\mathbb{Y}}, \|f\|_{\triangleleft} \right\},$$
en donde computamos la norma $\|g\|_{\mathbb{Y}}$ mediante la identificación $g \leftrightarrow \sum_{n \in E_M} g_n \mathbf{y}_n$ para cada $g \in \mathbb{K}^{E_M}$.
Sea $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n \in E_M}$ la base canónica de $\mathbb{X}_M := \left(\mathbb{K}^{E_M}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}_M}\right)$, ordenada por $\preceq$. Por construcción, $\mathcal{X}_M$ es una base de Schauder monótona (para el orden $\preceq$) normalizada, con base dual normalizada.
Ahora vamos a encontrar una cota superior para la constante K_{ql} de $\mathcal{X}_M$. A tal fin, fijamos $\emptyset \subsetneq D \subset E_M$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$, y $f \in \mathcal{Q}$ tales que $\operatorname{sop}(f) \cap D = \emptyset$, y definimos $D_1 := A \cap D$ y $D_2 := B \cap D$. Puesto que $\mathcal{Y}$ es 1-QGLC y vale (2.37), se tiene que
$$K_1^{-1} |D_1|^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D_1} \right\|_{\mathbb{Y}} = \left\| P_A(\mathbf{1}_{\varepsilon, D}) \right\|_{\mathbb{Y}} \leq \left\| P_A(\mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f) \right\|_{\mathbb{Y}} \leq \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}. \tag{2.39}$$
Para cada $\Delta \in \mathcal{A}$, $n \in A$ y $l \in \{n\} \cup B_n$, tenemos que
$$\left(\sum_{1 \leq j < n} \left| \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon, D_1}) + \sum_{k \in B_j} \delta_k \mathbf{x}_{M,k}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon, D_1}) \right|^p + \left| \sum_{n \leq j \leq l} \delta_j \mathbf{x}_{M,j}^* (\mathbf{1}_{\varepsilon, D_1}) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j \in D_1} \left| \delta_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq |D_1|^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando supremo y combinando las estimaciones anteriores inferimos que

$$K_1^{-1} |D_1|^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D_1} \right\|_{\mathbb{X}_M} \leq K_1 \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}. \tag{2.40}$$

Si $D_2 \neq \emptyset$, sea $A_2 := \{n \in \mathbb{N} : D \cap B_n \neq \emptyset\}$. Para cada $n \in A_2$, escribimos $D \cap B_n = \{k_{1,n} < \ldots k_{|D \cap B_n|, n}\}$ y, para cada $1 \leq j \leq |D \cap B_n|$, definimos $\delta_{k_{j,n}} := j^{-\frac{1}{p'}} \varepsilon_{k_{j,n}}^{-1}$. Finalmente, sea

$$\delta_n := -\frac{1}{M_2 c_n} \sum_{k \in D \cap B_n} \delta_k.$$

Se sigue de (2.38) que $|\delta_n| \leq 1$ para cada $n \in A_2$. Más aún, para tales n, como $M_2 c_n > 2$ se tiene que

$$|\delta_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{k \in D \cap B_n} |\delta_k| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{|D \cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}.$$

Para todo otro $k \in E_M$, definimos $\delta_k := 0$. Por construcción, $\Delta = \left(\delta_j\right)_{j \in E_M} \in \mathcal{A}$, y tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M} &\geq \left(\sum_{n \in A} \left| \delta_n \mathbf{x}_n^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right) + \sum_{k \in B_n} \delta_k \mathbf{x}_k^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n \in A_2} \left| \delta_n \mathbf{x}_n^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right) + \sum_{k=1}^{|D \cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(\sum_{n \in A_2} \left| - |\delta_n| + \sum_{k=1}^{|D \cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in A_2} \left(\sum_{k=1}^{|D \cap B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \underset{(2.35)}{\geq} \frac{|D_2|^{\frac{1}{p}}}{4}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Por otra parte, para cada $\Delta' = (\delta'_n) \in \mathcal{A}$, cada $n \in A$ y cada $l \in \{n\} \cup B_n$, se tiene que

$$\left(\sum_{1 \leq j < n} \left| \delta'_j \mathbf{x}_{M,j}^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D_2} \right) + \sum_{k \in B_j} \delta'_k \mathbf{x}_{M,k}^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D_2} \right) \right|^p + \left| \sum_{n \leq j \leq l} \delta'_j \mathbf{x}_{M,j}^* \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D_2} \right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j \in A} \left(\sum_{k \in B_j \cap D} \left| \delta'_j \right| \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j \in A} \left(\sum_{k=1}^{|B_j \cap D|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq p|D_2|^{\frac{1}{p}}.$$

De esto y (2.41) se sigue que

$$\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D_2} \right\|_{\triangleleft} \leq p|D_2|^{\frac{1}{p}} \leq 4p \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}. \tag{2.42}$$

Combinando (2.42) con nuestras estimaciones para $\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D_1} \right\|_{\triangleleft}$, $\left\| P_A \left(\mathbf{1}_{\varepsilon, D} \right) \right\|_{\mathbb{Y}}$ y la desigualdad triangular, concluimos que

$$\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} \right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (4p + K_1) \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M} \leq C_p \left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} + f \right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Como $D \subset E_M$ es arbitrario, la prueba de i. está completa. Notemos además que tomando $f = 0$ en la prueba de i., y considerando (2.37), obtenemos

$$\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} \right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (p + K_1)|D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p |D|^{\frac{1}{p}};$$

$$\left\| \mathbf{1}_{\varepsilon, D} \right\|_{\mathbb{X}_M} \geq \text{máx} \left\{ \frac{|D_1|^{\frac{1}{p}}}{K_1}, \frac{|D_2|^{\frac{1}{p}}}{4} \right\} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{8K_1} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{C_p}.$$

Por lo tanto, ii. está probado.
Para demostrar iii., consideramos $f_0 := \mathbf{1}_B + \sum_{n \in A} M_2 c_n \mathbf{x}_{M,n}$, y $f_1 := \mathbf{1}_{E_M}$. Se sigue de la definición de $\mathcal{A}$ y de (2.38) que

$$\|f_0\|_{\triangleleft} = \sup_{\Delta \in \mathcal{A}} \sup_{n \in A} \sup_{l \in \{n\} \cup B_n} \left| \sum_{n \leq j \leq l} \delta_j \mathbf{x}^*_j (f_0) \right| \leq \sup_{n \in A} \left(M_2 c_n + \sum_{k=1}^{|B_n|} \frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}} \right) \leq 2M_2 c_1 < 2M_2.$$

Además, $\|P_A (f_0)\|_{\mathbb{Y}} \leq M_2 M_0$, así que combinando las cotas obtenemos

$$\|f_0\|_{\mathbb{X}_M} \leq 2M_2 M_0.$$

Para cada $n \in A$, escribimos $B_n := \{k_{1,n}, \ldots, k_{|B_n|,n}\}$ y, para cada $1 \leq j \leq |B_n|$, definimos $\delta_{k_{j,n}} := j^{-\frac{1}{p'}}$; luego definimos

$$\delta_n := -(M_2 c_n)^{-1} \sum_{j=1}^{|B_n|} \frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}}.$$

Por construcción, $\Delta = (\delta_k)_{k \in E_M} \in \mathcal{A}$. Teniendo en cuenta que $M_2 c_n > 2$ para cada $n \in A$, la elección de A y (2.38), se deduce que

$$\|f_1\|_{\mathbb{X}_M} \geq \left(\sum_{n \in A} \left| \delta_n \mathbf{x}^*_n (f_1) + \sum_{k \in B_n} \delta_k \mathbf{x}^*_k (f_1) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \left(\sum_{n\in A} \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{|B_n|} \frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}} + \sum_{j=1}^{|B_n|} \frac{1}{j^{\frac{1}{p'}}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{n\in A} \left| \frac{M_2 c_n}{4} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} > 2M_2 M_0 M.$$

Puesto que $\|f_1\|_{\mathbb{X}_M} \leq K_{lpu} \|f_0\|_{\mathbb{X}_M}$, combinando las cotas obtenidas concluimos que $K_{lpu} > M$, lo que termina la demostración. □

Demostración del Teorema 2.2.13. El teorema se demuestra de la misma manera que el Teorema 2.2.12, usando el Lema 2.2.18 en lugar del Lemma 2.2.17. □

Cerramos este capítulo demostrando el Teorema 2.2.14. Como en los dos casos anteriores, primero construimos los espacios de dimensión finita.

Lema 2.2.19. *Sea $1 \leq p < \infty$. Existe una constante positiva C_p tal que, para cada $M \in \mathbb{N}$, existen un conjunto $\emptyset \neq E_M \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}_M$ con una base monótona de Schauder $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n\in E_M}$ que tiene las siguientes propiedades:*

I. *$\mathcal{X}_M$ es C_p-lattice partially unconditional.*

II. *Para cada $D \subset E_M$ y cada $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$,*

$$C_p^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M}.$$

III. *$\mathcal{X}_M$ tiene constante $K_{ql} > M$.*

Demostración. Por el Lema 2.2.16, podemos elegir un espacio de Banach $\mathbb{Y}$ con una base normalizada $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_p$ que tiene las siguientes propiedades

- $\mathcal{Y}$ es 1-incondicional. Por lo tanto, en particular $\mathcal{Y}$ es 1-QGLC, 1-TQG y 1-LPU.
- Existe $K_1 \geq 1$ tal que

$$K_1^{-1} \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \leq |D|^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{Y}} \tag{2.43}$$

  para todo $D \in \mathbb{N}^{<\infty}$ y todo $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$.

- Hay una sucesión decreciente $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(0, \frac{1}{4p}\right]$ tal que

$$\left\| \left(\frac{c_n}{n^{\frac{1}{p'}}} \right)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_{\ell_1} = \infty;$$

$$M_0 := 1 + \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{y}_j \right\|_{\mathbb{Y}} < \infty.$$

Elegimos $C_p := 3pK_1$ y luego $m_1 > (3MC_pM_0)^p$; definimos $A := \{1, \ldots, m_1\}$, y elegimos intervalos de números naturales $\{I_n\}_{n\in A}$ de manera que

$$\begin{aligned} &A < I_n < I_{n+1}; \\ &1 < \sum_{k\in I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} < \frac{3}{2} \qquad \forall n \in A. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Sean $I := \bigcup_{n\in A} I_n$ y $E_M := A \cup I$; definimos $\mathcal{A}$ como el conjunto de sucesiones finitas $\Delta = (\delta_n)_{n\in E_M}$ que tienen las siguientes propiedades:

1) Para cada $n \in E_M$, $|\delta_n| \leq 1$.

2) Para cada $n \in A$,

$$\delta_n + \sum_{k\in I_n} \delta_k c_k = 0.$$

3) Para cada $k \in I$, $|\delta_k| \leq k^{-\frac{1}{p'}}$.

Le damos a E_M el orden $\preceq$, que definimos del siguiente modo:

- Si $n_1 \in A$ y $n_2 \in I_{n_1}$, entonces $n_1 \prec n_2$.
- Si $n_1, n_2 \in A$, $n_1 < n_2$ y $k_1 \in I_{n_1}$, entonces $k_1 \prec n_2$.
- Si $n_1, n_2 \in A$ o $n_1, n_2 \in I$, entonces $n_1 \preceq n_2$ si y solo si $n_1 \leq n_2$.

Ahora definimos para cada sucesión finita $f = (f_n)_{n\in E_M} \in \mathbb{K}^{E_M}$ la seminorma

$$\|f\|_{\triangleleft} := \sup_{\Delta\in\mathcal{A}} \sup_{n\in A} \sup_{l\in\{n\}\cup I_n} \left(\sum_{1\leq j<n} \left| \delta_j f_j + \sum_{k\in I_j} \delta_k f_k \right|^p + \left| \sum_{\substack{j\in\{n\}\cup I_n \\ j\leq l}} \delta_j f_j \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y la norma

$$\|f\|_{\mathbb{X}_M} := \text{máx}\left\{ \|f\|_{\ell_\infty}, \|P_I(f)\|_{\mathbb{Y}}, \|f\|_{\triangleleft} \right\}.$$

Sea $\mathcal{X}_M = (\mathbf{x}_{M,n})_{n\in E_M}$ la base canónica de $\mathbb{X}_M := \left(\mathbb{K}^{E_M}, \|\cdot\|_{\mathbb{X}_M}\right)$, ordenada por $\preceq$. Por construcción, $\mathcal{X}_M$ es una base monótona (para el orden $\preceq$) normalizada de $\mathbb{X}_M$, con base dual normalizada.

Para probar I., fijamos primero $\emptyset \neq D \subset E_M$, $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^D$, y $(a_n)_{n\in D}$ tales que $|a_n| \geq 1$ para cada $n \in D$. Definimos

$$D_1 := D \cap A \qquad D_2 := D \cap I; \qquad f := \sum_{n\in D} a_n \mathbf{x}_{M,n}.$$

Dado que $\mathcal{Y}$ es 1-LPU por ser 1-incondicional, y como vale (2.43), tenemos que

$$K_1^{-1}|D_2|^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{Y}} = \left\|S_I\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right)\right\|_{\mathbb{Y}} \leq \|S_I(f)\|_{\mathbb{Y}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}_M}. \tag{2.45}$$

Para cada $\Delta \in \mathcal{A}$, $n \in A$ y cada $l \in \{n\} \cup I_n$, se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{1\leq j<n}\left|\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right) + \sum_{k\in I_j}\delta_k\mathbf{x}^*_{M,k}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right)\right|^p + \left|\sum_{\substack{j\in\{n\}\cup I_n\\ j\leq l}}\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{1\leq j<n}\left|\sum_{k\in I_j}\delta_k\mathbf{x}^*_{M,k}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right)\right|^p + \left|\sum_{\substack{j\in I_n\\ j\leq l}}\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{|I_j\cap D|}\frac{1}{k^{\frac{1}{p'}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq p|D_2|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Tomando supremo, combinando las estimaciones anteriores y considerando (2.43), obtenemos

$$\frac{|D_2|^{\frac{1}{p}}}{K_1} \leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq pK_1\|f\|_{\mathbb{X}_M}; \tag{2.46}$$

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (p+K_1)|D_2|^{\frac{1}{p}}. \tag{2.47}$$

De manera similar, para cada $\Delta \in \mathcal{A}$, $n \in A$ y cada $l \in \{n\} \cup I_n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{1\leq j<n}\left|\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right) + \sum_{k\in I_j}\delta_k\mathbf{x}^*_{M,k}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right)\right|^p + \left|\sum_{\substack{j\in\{n\}\cup I_n\\ j\leq l}}\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\sum_{1\leq j<n}\left|\delta_j\mathbf{x}^*_{M,j}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right)\right|^p + \left|\delta_n\mathbf{x}^*_{M,n}\left(\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq |D_1|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\triangleleft} \leq |D_1|^{\frac{1}{p}}. \tag{2.48}$$

Si $D_1 \neq \emptyset$, sean

$$D_{1,1} := \left\{n \in D_1 : \sum_{k\in I_n\setminus D}\frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} \geq \frac{1}{2}\right\}; \qquad D_{1,2} := D_1 \setminus D_{1,1}.$$

Si $D_{1,1} \neq \emptyset$, dado $n \in D_{1,1}$ definimos

$$\delta_n : \frac{1}{2\,\mathrm{sgn}\,(a_n)}.$$

Por la definición de $D_{1,1}$, existen escalares $\left(\delta_j\right)_{j\in I_n\setminus D}$ con $|\delta_j| \leq j^{-\frac{1}{p'}}$ para todo $j \in I_n \setminus D$ tales que

$$\delta_n + \sum_{j\in I_n\setminus D} c_j\delta_j = 0;$$

Sea $\delta_j = 0$ para cualquier otro $j \in E_M$. Entonces $\Delta = (\delta_k)_{k\in E_M} \in \mathcal{A}$, y

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbb{X}_M} \geq \|f\|_{\triangleleft} &\geq \left(\sum_{n\in D_{1,1}} \left|\delta_n \mathbf{x}^*_{M,n}(f) + \sum_{k\in I_n} \delta_k \mathbf{x}^*_{M,k}(f)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{n\in D_{1,1}} \left(\frac{|a_n|}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \frac{|D_{1,1}|^{\frac{1}{p}}}{2}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Por otra parte, si $D_{1,2} \neq \emptyset$, para cada $n \in D_{1,2}$ por (2.44) se tiene que

$$\sum_{k\in D\cap I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} \geq \frac{1}{2},$$

lo que en particular implica que $D \cap I_n \neq \emptyset$. Luego,

$$|D_{1,2}|^{\frac{1}{p}} \leq |D_2|^{\frac{1}{p}} \leq K_1 \|f\|_{\mathbb{X}_M} \qquad \text{(por (2.45))}. \tag{2.50}$$

Como (2.48) también vale si reemplazamos D_1 por cualquier otro subconjunto de A, (2.49) y (2.50) implican que

$$\left\|\mathbf{1}_{D_{1,2}}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq K_1 \|f\|_{\mathbb{X}_M}; \qquad\qquad \left\|\mathbf{1}_{D_{1,1}}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq 2\|f\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Combinando las desigualdades anteriores con (2.46), deducimos que

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} &\leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_{1,1}}\right\|_{\mathbb{X}_M} + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_{1,2}}\right\|_{\mathbb{X}_M} + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} \\ &\leq (2 + K_1 + pK_1)\|f\|_{\mathbb{X}_M} \leq C_p \|f\|_{\mathbb{X}_M},\end{aligned}$$

lo que completa la demostración de ı.. Además, tomando $f = \mathbf{1}_{\varepsilon,D}$ en los cálculos anteriores (es decir, tomando $a_n = \varepsilon_n$ para todo $n \in D$), (2.45), (2.46), (2.47), (2.49) y (2.50) implican que

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_1}\right\|_{\mathbb{X}_M} + \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D_2}\right\|_{\mathbb{X}_M} \leq (K_1 + p + K_1)|D|^{\frac{1}{p}} \leq C_p|D|^{\frac{1}{p}};$$

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,D}\right\|_{\mathbb{X}_M} \geq \text{máx}\left\{\frac{|D_{1,1}|^{\frac{1}{p}}}{2}, \frac{|D_2|^{\frac{1}{p}}}{K_1}, \frac{|D_{1,2}|^{\frac{1}{p}}}{K_1}\right\} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{6K_1} \geq \frac{|D|^{\frac{1}{p}}}{C_p},$$

así que ii. queda demostrado.
Resta probar iii.. A tal fin, definimos

$$f_0 := \mathbf{1}_A; \qquad\qquad f_1 := f_0 + \sum_{k\in I} c_k \mathbf{x}_{M,k}.$$

Entonces, por ii. y la elección de A, se tiene que

$$3M_0MC_p < |A|^{\frac{1}{p}} \leq C_p \|f_0\|_{\mathbb{X}_M} \leq C_p K_{ql} \|f_1\|_{\mathbb{X}_M}.$$

Notemos que $\|f_1\|_{\mathbb{X}_M} = \text{máx}\{1, \|f_1\|_{\triangleleft}, \|S_I(f_1)\|_{\mathbb{Y}}\}$. Por definición de $\mathcal{A}$ y (2.44),

$$\|f_1\|_{\triangleleft} = \sup_{\Delta\in\mathcal{A}} \sup_{n\in A} \sup_{l\in I_n\cup B_n} \left|\sum_{\substack{j\in\{n\}\cup I_n \\ j\leq l}} \delta_j \mathbf{x}_j^*(f_1)\right| \leq 1 + \text{máx}_{n\in A} \sum_{k\in I_n} \frac{c_k}{k^{\frac{1}{p'}}} \leq 3.$$

Puesto que $\|S_I(f_1)\|_{\mathbb{Y}} \leq M_0$, combinando las estimaciones se deduce que $K_{ql} > M$, lo que termina la demostración. □

Demostración del Teorema 2.2.14. El teorema se demuestra de la misma manera que el Teorema 2.2.12, usando el Lema 2.2.19 en lugar del Lemma 2.2.17. □

Capítulo 3

Bases quasi-greedy y n-quasi-greedy

Las bases de Markushevich $\mathbf{n}$-t-quasi-greedy fueron introducidas por T. Oikhberg en [29], como una versión más débil de las bases quasi-greedy. Dados $0 < t \leq 1$, $C > 0$ y $\mathbf{n} = (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos, una base $\mathcal{X}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ es $\mathbf{n}$-t-quasi-greedy si para todo $f \in \mathbb{X}$ y toda sucesión de conjuntos $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $A_k \in \mathcal{G}(f, n_k, t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} P_{A_k}(f) = f.$$

Para $t = 1$ y $\mathbf{n} \neq \mathbb{N}$ fijo, esta condición relaja la definición de bases quasi-greedy, pidiendo solo que la convergencia del algoritmo greedy ocurra cuando aproximamos un vector por medio de proyecciones sobre conjuntos greedy cuyos cardinales están en un subconjunto propio fijo de $\mathbb{N}$. Si $0 < t < 1$, las bases quasi-greedy son también $\mathbb{N}$-t-quasi-greedy por [20, Lema 2.1, Lema 6.3], y por lo tanto $\mathbf{n}$-t-quasi-greedy.
En su artículo introductorio, Oikhberg demostró ([29, Teorema 2.1]) la condición de ser $\mathbf{n}$-t-quasi-greedy es equivalente a que exista $C > 0$ tal que para todo $f \in \mathbb{X}$, $k \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{G}(f, n_k, t)$,

$$\|P_A(f)\| \leq C\,\|f\|, \tag{3.1}$$

en cuyo caso, diremos que $\mathcal{X}$ es C-$\mathbf{n}$-t-quasi-greedy. Esto es también equivalente (cf. prueba de la Proposición 4.1 de [29]) a que exista $K > 0$ tal que para todo $f \in \mathbb{X}$, $k \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{G}(f, n_k, t)$,

$$\|f - P_A(f)\| \leq K\,\|f\|, \tag{3.2}$$

en cuyo caso, diremos que $\mathcal{X}$ es K-$\mathbf{n}$-t-suppression quasi-greedy.
De aquí en más, podremos dejar t o $\mathbf{n}$ implícitos cuando $t = 1$ o $\mathbf{n} = \mathbb{N}$ respectivamente.

Observación 3.0.1. *La equivalencia de [29, Teorema 2.1] extiende el resultado correspondiente para bases quasi-greedy ([6, Teorema 4.1], [31, Teorema 1]).*

Observación 3.0.2. Notemos que la definición de base **n**-t-quasi-greedy implica que toda base con esta propiedad es de Markushevich. También lo implica la condición dada por (3.1) (ver [8, Lema 3.4]), así que la equivalencia entre ambas condiciones no requiere la hipótesis de que la base sea de Markushevich.

El estudio de las bases **n**-quasi-greedy - o más generalmente, **n**-t-quasi-greedy - tiene, a nuestro juicio, dos motivaciones principales:
La primera motivación es investigar si existen bases de Schauder **n**-quasi-greedy (para alguna sucesión **n**) en espacios que no tengan bases de Schauder quasi-greedy, por ejemplo $C[0, 1]$ (ver [19], [29]); de hecho, algunas de las preguntas dejadas por Oikhberg en el artículo mencionado (por ejemplo, [29, Preguntas 1, 2 y 3]) sugieren que esta fue tal vez una de las motivaciones principales para la introducción de las bases **n**-quasi-greedy.
La segunda motivación es estudiar las condiciones sobre **n** bajo las cuales las bases **n**-quasi-greedy son quasi-greedy - en otras palabras, las condiciones bajo las cuales ambas propiedades son equivalentes -, ya que este estudio permite avanzar la teoría general sobre el comportamiento del TGA, y además puede proporcionar una manera más eficiente de determinar si una base es quasi-greedy, ya que puede ser más sencillo probar que es **n**-quasi-greedy para alguna sucesión **n** conveniente.
Nuestro estudio de las bases **n**-quasi-greedy y quasi-greedy en este trabajo está enfocado en la segunda motivación mencionada. En este sentido, los primeros resultados se encuentran en [29], cuya Proposición 3.1 muestra que existen bases **n**-quasi-greedy que no son quasi-greedy para toda sucesión **n** que tiene *saltos arbitrariamente grandes*, lo que significa que la sucesión de cocientes $\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ es no acotada. Como veremos, esta condición resulta ser también necesaria para que existan tales bases - lo que constituye el resultado principal de este capítulo -, aunque esto solo fue demostrado recientemente en [10].

Observación 3.0.3. Notemos que combinando el resultado principal mencionado con [20, Lema 2.1, Lema 6.3], se sigue que si **n** tiene *saltos acotados* (es decir, no arbitrariamente grandes), las bases **n**-quasi-greedy son t-quasi-greedy para todo $0 < t \leq 1$.

Previamente, en [29, Proposición 4.1], se demostró que las bases **n**-quasi-greedy son quasi-greedy si **n** cumple la siguiente condición: existe $l \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $l * \mathbf{n}$ constituida por todas las sumas de la forma $n_{k_1} + \ldots n_{k_j}$, para $1 \leq j \leq l$ y $k_1, \ldots k_j$ enteros positivos cualesquiera (posiblemente repetidos) y ordenada de manera estrictamente creciente, tiene la siguiente propiedad: existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $l * \mathbf{n} \cap [im, im + m] \neq \emptyset$. Notemos que esta condición implica tener saltos acotados, pero no incluye por ejemplo a sucesiones como $\mathbf{n} = \left(j^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ para algún $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ fijo, entre otras sucesiones con saltos acotados. La prueba de la equivalencia entre ser **n**-quasi-greedy y ser quasi-greedy para cualquier sucesión **n** con saltos acotados se dio primero para bases de Schauder en [8, Teorema 5.2], pero las técnicas usadas en dicha prueba usan de manera central la acotación de las sumas parciales en el orden en que la base es de Schauder, y a nuestro entender, no puede ser generalizada a todas las bases de Markushevich. Por este motivo, para probar el caso general, usaremos argumentos diferentes. Primero vamos a demostrar que bajo tales condiciones, las bases **n**-quasi-greedy son thresholding bounded. A tal fin, extendemos primero la definición de bases quasi-greedy for largest coefficients al contexto de sucesiones **n** con saltos. En la prueba y en lo que resta, **n** siempre denota una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, y dado $j \in \mathbb{N}$, decimos que $j \in \mathbf{n}$ si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $j = n_k$.

Definición 3.0.4. *[8, Definición 8] Sea $\mathcal{X}$ una base de $\mathbb{X}$. Decimos que $\mathcal{X}$ es* **n**-quasi-greedy for largest coefficients *(**n**-QGLC) si existe $C > 0$ tal que*

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq C \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\| \tag{3.3}$$

para todo $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| \in \mathbf{n}$ y toda $f \in \mathcal{Q}$ con $\operatorname{sop}(f) \cap A = \emptyset$. En caso de que valga (3.3)*, decimos que $\mathcal{X}$ es C-**n**-QGLC.*

Nuestro siguiente objectivo es mostrar que si **n** tiene saltos acotados y es $\mathcal{X}$ es **n**-quasi-greedy for largest coefficients, es quasi-greedy for largest coefficients. En la prueba, vamos a usar un lema auxiliar; para simplificar la notación, de aquí en adelante diremos que **n** tiene saltos l-acotados si $n_{k+1} \leq l n_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Lema 3.0.5. *[9, Lema 2] Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach,* **n** *una sucesión con saltos l-acotados, $\emptyset \neq A \in \mathbb{N}^{<\infty}$, y $\left(f_j\right)_{j\in A} \subset \mathbb{X}$. Entonces o bien*

$$\max_{E\subset A}\left\|\sum_{j\in E} f_j\right\| \leq (n_1 - 1)\max_{j\in A}\left\|f_j\right\|$$

o bien existe $B \subset A$ con $|B| \in \mathbf{n}$ tal que

$$\max_{E\subset A}\left\|\sum_{j\in E} f_j\right\| \leq l\left\|\sum_{j\in B} f_j\right\|.$$

Demostración. Sea

$$\mathbb{F} := \left\{\sum_{j\in A} a_j f_j \ : a_j \in \mathbb{R}\ \forall j \in A\right\}.$$

Entonces $\mathbb{F}$ es un espacio normado de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ con la norma heredada de $\mathbb{X}$; por la igualdad de normas en $\mathbb{X}$ y $\mathbb{F}$, alcanza con establecer el resultado en $\mathbb{F}$. A tal fin, sea $D \subset A$ tal que

$$\left\|\sum_{j\in D} f_j\right\| \geq \left\|\sum_{j\in E} f_j\right\| \forall E \subset A.$$

Si $|D| < n_1$, entonces

$$\left\| \sum_{j\in E} f_j \right\| \leq \left\| \sum_{j\in D} f_j \right\| \leq (n_1 - 1) \max_{j\in A} \left\| f_j \right\| \;\; \forall E \subset A. \tag{3.4}$$

Por otra parte, si $|D| \geq n_1$, sea $k_0 := \max_{k\in\mathbb{N}} \{n_k \leq |D|\}$, y elijamos $f^* \in S_{\mathbb{F}^*}$ tal que

$$f^*\left(\sum_{j\in D} f_j\right) = \left\| \sum_{j\in D} f_j \right\|.$$

Notemos que si $\emptyset \subsetneq E \subset D$, entonces

$$\sum_{j\in E} f^*\left(f_j\right) \leq \left\| \sum_{j\in E} f_j \right\| \leq \left\| \sum_{j\in D} f_j \right\| = \sum_{j\in D} f^*\left(f_j\right).$$

Por lo tanto,

$$f^*\left(f_j\right) \geq 0 \; \forall j \in D.$$

Elegimos ahora $B \subset D$ con $|B| = n_{k_0}$ de manera que

$$f^*\left(f_j\right) \geq f^*\left(f_i\right) \;\; \forall j \in B, \forall i \in D \setminus B.$$

Dado que $|D| < n_{k_0+1} \leq l n_{k_0} = l|B|$, para cada $E \subset A$ se tiene que

$$\left\| \sum_{j\in E} f_j \right\| \leq \left\| \sum_{j\in D} f_j \right\| = \sum_{j\in D} f^*\left(f_j\right) \leq l \sum_{j\in B} f^*\left(f_j\right) \leq l \left\| \sum_{j\in B} f_j \right\|.$$

La prueba de se completa combinando la desigualdad anterior con (3.4). □

Corolario 3.0.6. *[9, Proposición 6] Supongamos que* **n** *tiene saltos l-acotados, y $\mathcal{X}$ es una base* **n***-K-quasi-greedy for largest coefficients de un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Entonces $\mathcal{X}$ es C-quasi-greedy for largest coefficients, con*

$$C \leq \max\left\{(n_1 - 1)\,\zeta\,[\mathcal{X}]\,\zeta'\,[\mathcal{X}]\,, lK\right\}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{X}$ es thresholding bounded.

Demostración. Fijemos $A \in \mathbb{N}^{<\infty}$ con $0 < |A| \notin \mathbf{n}$, y sean f y $\varepsilon \in S_{\mathbb{K}}^{A}$ como en la Definición 2.1.10. Si $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq (n_1 - 1)\,\zeta\,[\mathcal{X}]$, entonces

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq (n_1 - 1)\,\zeta\,[\mathcal{X}] \leq (n_1 - 1)\,\zeta\,[\mathcal{X}]\,\zeta'\,[\mathcal{X}]\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|.$$

En caso contrario, por el Lema 3.0.5, existe $B \subset A$ con $|B| \in \mathbf{n}$ tal que $\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq l \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\|$. Por lo tanto,

$$\left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A}\right\| \leq l \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B}\right\| \leq lK \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,B} + \mathbf{1}_{\varepsilon,A\setminus B} + f\right\| = lK \left\|\mathbf{1}_{\varepsilon,A} + f\right\|.$$

Como A y ε son arbitrarios, esto prueba que $\mathcal{X}$ es lK-quasi-greedy for largest coefficients con C acotada como en el enunciado, y la demostración del corolario se completa aplicando los Teoremas 2.1.9 y 2.1.14. □

Para nuestro resultado principal, también vamos a usar un lema auxiliar probado en [29].

Lema 3.0.7. *[10, Lema 2.8], [29, Proposición 4.11] Sea $\mathcal{X}$ una base C-$\mathbf{n}$-t-suppression quasi-greedy de un espacio de Banach $\mathbb{X}$. Para todo $f \in \mathbb{X}$ y $A \in \mathcal{G}(f, |A|, t)$ con $|A| \in m * \mathbf{n}$, se tiene que*

$$\|x - P_A(f)\| \leq C^m \|f\|.$$

Por lo tanto, $m * \mathbf{n}$ es C^m-t-suppression quasi-greedy.

Demostración. Esto es parte de la demostración de [29, Proposition 4.1]. □

El Lema 3.0.7 muestra que una base $\mathcal{X}$ es $\mathbf{n}$-t-quasi-greedy si y solo si es $k * \mathbf{n}$-t-quasi-greedy para todo $k \in \mathbb{N}$. En [29], este lema es parte de la prueba de la Proposición 4.1, y fue usado para demostrar un resultado que mencionamos anteriormente: si existen $m, k \in \mathbb{N}$ tales que para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $k * \mathbf{n} \cap [im, im + m] \neq \emptyset$, entonces toda base $\mathbf{n}$-quasi-greedy es quasi-greedy. En efecto, como se muestra en [29, Lema 2.4, Proposición 4.1], bajo estas condiciones, dados $f \in \mathbb{X}$ y $A \in \mathcal{G}(f, |A|, t)$, existe $B \in \mathcal{G}(f, |B|, t)$ tal que $|B| \in k * \mathbf{n}$ y, o bien $A \subset B$ y $|B \setminus A| \leq m$, o bien $B \subset A$ y $|A \setminus B| \leq m$. Dado que $m \in \mathbb{N}$ está fijo y tanto $\mathcal{X}$ como $\mathcal{X}^*$ son acotadas, esto permite demostrar que la base es quasi-greedy aproximando $P_A(f)$ por $P_B(f)$ y usando la desigualdad triangular y la acotación de $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$. Sin embargo, en el caso general de sucesiones $\mathbf{n}$ con saltos acotados, esa condición sobre los conjuntos greedy no tiene por qué cumplirse, lo que nos impide generalizar la prueba. Aún así, podremos usar el resultado del Lema 3.0.7 con un propósito diferente, más precisamente para ver que si $\mathbf{n}$ tiene saltos acotados, para nuestros propósitos podemos asumir que son 2-acotados, lo que permitirá simplificar la demostración del Teorema 3.0.13.

Lema 3.0.8. *[10, Lema 2.8] Sean $l \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ y $\mathbf{n}$ una sucesión con saltos l-acotados. Entonces $l * \mathbf{n}$ tiene saltos 2-acotados.*

Demostración. Dado $1 \leq l_0 \leq l$, elijamos una sucesión finita de números naturales $\left(k_j\right)_{1\leq j\leq l_0}$ tal que o bien $l_0 = 1$, o bien $k_j \leq k_{j+1}$ para todo $1 \leq j \leq l_0 - 1$. Sea $m = \sum_{j=1}^{l_0} n_{k_j}$. Queremos encontrar $m' \in l * \mathbf{n}$ tal que $m < m' \leq 2m$.

- Si $l_0 = 1$, entonces tomamos $m' := 2m = 2n_{k_1} \in l * \mathbf{n}$.

- Si $1 < l_0 < l$, entonces

$$2m = 2\sum_{j=1}^{l_0} n_{k_j} > m' := n_{k_1} + \sum_{j=1}^{l_0} n_{k_j} > \sum_{j=1}^{l_0} n_{k_j} = m.$$

- Si $l_0 = l > 1$ y $k_1 < k_l$, entonces

$$2m = 2\sum_{j=1}^{l} n_{k_j} = 2n_{k_1} + 2\sum_{j=2}^{l} n_{k_j} > m' := n_{k_l} + \sum_{j=2}^{l} n_{k_j} > \sum_{j=1}^{l} n_{k_j} = m.$$

- Si $l_0 = l > 1$ y $k_1 = k_l$, entonces $k_j = k_l$ para todo $1 \le j \le l$. Por ende,

$$2m = 2\sum_{j=1}^{l} n_{k_j} = 2ln_{k_l} > m' := n_{k_{l+1}} + (l-1)n_{k_l} > \sum_{j=1}^{l} n_{k_j} = m.$$

Ya que hemos considerado todos los casos posibles, la demotración está completa.

$\square$

Observación 3.0.9. En [10, Lema 2.9], se considera separadamente el caso $\mathbf{n} = \mathbb{N}$. En esta tesis, la definición de tener saltos acotados es ligeramente diferente, para incluir precisamente ese caso, por lo que no hace falta considerarlo por separado.

También será conveniente poder tomar una sucesión $\mathbf{n}$ con $n_1 = 1$.

Corolario 3.0.10. *[10, Corolario 2.10] Sea* $\mathbf{n}$ *una sucesión con saltos l-acotados, y* $\mathcal{X}$ *una base* C-$\mathbf{n}$*-quasi-greedy de un espacio de Banach* $\mathbb{X}$*. Existe una sucesión* $\mathbf{m} = (m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *con* $m_1 = 1$ *y saltos* 2*-acotados tal que that* $\mathcal{X}$ *es* K-$\mathbf{m}$*-quasi-greedy con* $K \le \text{máx}\left\{1 + \zeta''[\mathcal{X}](n_1 - 1), C^l\right\}$.

Demostración. Por el Lema 3.0.7, $\mathcal{X}$ es C_1-$l * \mathbf{n}$-QG con $C_1 \le C^l$, y por el Lema 3.0.8, $l * \mathbf{n}$ tiene saltos 2-acotados. Si $n_1 = 1$, no hay nada más que probar. Si $n_1 > 1$, sea $\mathbf{m}$ la sucesión estrictamente creciente obtenida de $l * \mathbf{n}$ agregando todos los números $1 \le n < n_1$. Es inmediato que $\mathbf{m}$ tiene saltos 2-acotados, y dado que

$$\|f - P_A(f)\| \le (1 + (n_1 - 1)\zeta''[\mathcal{X}])\|f\| \ \forall f \in \mathbb{X}, \forall A \in \mathbb{N}^{<n_1},$$

concluimos que $\mathbf{m}$ tiene las propiedades buscadas. $\square$

Para la prueba del Teorema 3.0.13, es conveniente definir para cada base thresholding bounded $\mathcal{X}$ de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ la función $\theta_c = \theta_c[\mathcal{X}, \mathbb{X}] : (0,1] \to [1,\infty)$ dada por

$$\theta_c(t) := \inf_{C>0} \left\|f - P_{A(f,t)}(f)\right\| \le C\|f\| \ \forall f \in Q.$$

Notemos que para todo $0 < t \le 1$, $|\theta_c(t) - \theta(t)| \le 1$.
También vamos a usar la siguiente caracterización de θ y θ_c para $0 < t < 1$:

Lema 3.0.11. *Sea $\mathcal{X}$ una base thresholding bounded de un espacio de Banach $\mathbb{X}$, y*

$$\mathcal{Q}_0 := \left\{x \in \mathcal{Q} : \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right| \neq \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \forall k, j \in \operatorname{sop}(f) : k \neq j\right\}.$$

Sean ϑ and ϑ_c las funciones definidas en el intervalo $(0,1]$ que se obtienen reemplazando $\mathcal{Q}$ por $\mathcal{Q}_0$ en las definiciones de θ y θ_c respectivamente. Entonces para todo $0 < t < 1$, se tiene que $\theta(t) = \vartheta(t)$ y $\theta_c(t) = \vartheta_c(t)$.

Demostración. Se sigue de las definiciones que $\vartheta(t) \leq \theta(t)$ y $\vartheta_c(t) \leq \theta_c(t)$ para todo $0 < t \leq 1$. Para probar las implicaciones recíprocas en el intervalo $(0,1)$, fijemos $0 < t < 1$ y $f \in \mathcal{Q}$. Para ver que $\left\|P_{A(f,t)}(f)\right\| \leq \vartheta(t)\|f\|$, podemos asumir que $f \notin \mathcal{Q}_0$ y que $A(f,t) \neq \emptyset$. Sea $a := \max_{j \notin A(f,t)} \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right|$. Puesto que $a < t$, existe una sucesión $\left(a_j\right)_{j \in \mathbb{N} \setminus A(f,t)}$ tal que

- $\left\|\left(a_j\right)_{\in \mathbb{N} \setminus A(f,t)}\right\|_{\ell_1} < \epsilon$.
- Para cada $j \in \mathbb{N} \setminus A(f,t)$, se tiene que $a + \left|a_j\right| < b := \frac{a+t}{2}$.
- Para cada $j_1, j_1 \in \mathbb{N} \setminus A(f,t)$ tales que $j_1 \neq j_2$, $\left|\mathbf{x}_{j_1}^*(f) + a_{j_1}\right| \neq \left|\mathbf{x}_{j_2}^*(f) + a_{j_2}\right|$.

Ahora elegimos $\left(a_j\right)_{j \in A(f,t)}$ con las siguientes propiedades:

- Para cada $j \in A(f,t)$, $t \leq \left|a_j + \mathbf{x}_j^*(f)\right| \leq 1$.
- Para cada $j_1, j_1 \in A(f,t)$ tales que $j_1 \neq j_2$, se tiene que $\left|\mathbf{x}_{j_1}^*(f) + a_{j_1}\right| \neq \left|\mathbf{x}_{j_2}^*(f) + a_{j_2}\right|$.
- Para cada $j \in A(f,t)$, $\left|a_j\right| \leq \frac{\epsilon}{(1+|A(f,t)|)(1+\zeta[\mathcal{X}])}$.

Ahora sea $g := f + \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \mathbf{x}_j$. Entonces por construcción, tenemos que

$$\begin{aligned}
& g \in \mathcal{Q}_0; \\
& A(f,t) = A(g,t); \\
& \|f - g\| \leq \left\|\left(a_j\right)_{j \in \mathbb{N}}\right\|_{\ell_1} \leq 2\epsilon; \\
& \left\|P_{A(f,t)}(f-g)\right\| \leq \left\|\left(a_j\right)_{j \in A(f,t)}\right\|_{\ell_1} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como

$$\left\|P_{A(g,t)}(g)\right\| \leq \vartheta(t)\|g\|,$$

se deduce que

$$\left\|P_{A(f,t)}(f)\right\| \leq \epsilon + \left\|P_{A(g,t)}(g)\right\| \leq \epsilon + \vartheta(t)\|g\| \leq \epsilon + 2\epsilon\vartheta(t)\|f\| + \vartheta(t)\|f\|.$$

Tomando límite para $\epsilon \to 0$, obtenemos $\left\|P_{A(f,t)}(f)\right\| \leq \vartheta(t)\|f\|$, lo que concluye la prueba de que $\theta(t) \leq \vartheta(t)$. La prueba de que $\theta_c(t) \leq \vartheta_c(t)$ es similar. □

De aquí en adelante, vamos a usar las caracterizaciones recién dadas de θ y θ_c en el intervalo $(0,1)$ cuando sea conveniente, considerando solamente vectores en $\mathcal{Q}_0$.

Observación 3.0.12. Notemos que si $f \in \mathcal{Q}_0$, $A \in \mathcal{G}(f, m, 1)$ para algún $m \in \mathbb{N}$, y existe $j \notin A$ tal que $\mathbf{x}_j^*(f) \neq 0$, entonces existe $0 < t \leq 1$ tal que $A = A(f, t)$. Esta propiedad - que no vale en general para elementos de $\mathcal{Q}$ - nos permitirá simplificar la prueba del Teorema 3.0.13.

Teorema 3.0.13. *[10, Teorema 2.12] Sea* $\mathbf{n}$ *una sucesión con saltos acotados. Si $\mathcal{X}$ es una base de Markushevich* $\mathbf{n}$*-quasi-greedy de un espacio de Banach $\mathbb{X}$, entonces $\mathcal{X}$ es quasi-greedy.*

Demostración. Por el Corolario 3.0.10, podemos asumir que $\mathbf{n}$ tiene saltos 2-acotados y que $n_1 = 1$. Por los Teoremas 2.1.9 y 2.1.14 y el Corolario 3.0.6, $\mathcal{X}$ es thresholding bounded.
Elijamos $K_1 > 1$ de manera que $\mathcal{X}$ sea K_1-$\mathbf{n}$-quasi-greedy, y supongamos, para llegar a un absurdo, que $\mathcal{X}$ no es quasi-greedy. Entonces

$$\theta_c(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \infty.$$

Tenemos la siguiente
Afirmación: Existe $d_1 > 0$ tal que

$$\theta_c(t) \leq d_1 \left(1 + \left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{d_1}\right) \quad \forall\ 0 < t \leq 1. \tag{3.5}$$

Para probar la Afirmación, primero elegimos $0 < t_0 < e^{-1}$ de manera que $\theta_c(t_0) \geq K_1^2$. Sea $0 < t \leq t_0$, elijamos $f \in \mathcal{Q}_0$, y sea $A := A\left(f, t^2\right)$. Para encontrar una cota superior para $\|f - P_A(f)\|$ en términos de $\|f\|$, podemos asumir que $0 \neq P_A(f) \neq f$. Ahora hacemos un análisis de casos:

Caso 1 : Si $|A| \in \mathbf{n}$, entonces por nuestra elección de t_0 y porque θ_c es no creciente, tenemos que $\|f - P_A(f)\| \leq K_1 \|f\| \leq \theta_c(t) \|f\|$.

Caso 2 : Si existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que $|A| = n_{k_1} + n_{k_2}$, entonces por las consideraciones del caso anterior y el Lema 3.0.7,

$$\|f - P_A(f)\| \leq K_1^2 \|f\| \leq \theta_c(t) \|f\|.$$

Caso 3 : Si no estamos en ninguno de los casos anteriores, definimos

$$k_0 := \max_{k \in \mathbb{N}} \{n_k < |A|\},$$

elegimos $B \subset A$ tal que $B \in \mathcal{G}(f, n_{k_0}, 1)$, y definimos $m_1 := |A| - |B|$. Notemos que $1 \leq m_1 < n_{k_0}$. Sea $D_1 \subset B$ tal que $D_1 \in \mathcal{G}(f, m_1, 1)$ y sea $D_2 := A \setminus B$. Notemos que $D_2 \in \mathcal{G}(f - P_B(f), m_1, 1)$. Para $j = 1, 2$, definimos

$$b_j := \max_{k \in D_j} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|; \qquad a_j := \min_{k \in D_j} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|.$$

Se sigue por construcción que

$$t^2 \leq a_2 \leq b_2 = \max_{k\in D_2=A\setminus B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| < \min_{k\in B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \leq a_1$$
$$\leq b_1 = \max_{k\in A} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| = \max_{k\in B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| = \|f\|_{\ell_\infty}.$$

Luego,

$$t^2 \leq \min_{k\in A} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| \leq \frac{\min_{k\in A} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|}{\max_{k\in A} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|} = \frac{\min_{k\in A} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|}{\min_{k\in B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|} \frac{\min_{k\in B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|}{\max_{k\in B} \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right|} \leq \frac{a_2}{b_2}\frac{a_1}{b_1}$$

Por lo tanto, existe $1 \leq j_0 \leq 2$ tal que

$$\frac{a_{j_0}}{b_{j_0}} \geq t.$$

Caso 3 a. Si $j_0 = 1$, sea $f_1 := f - P_{D_1}(f)$. Tenemos que

$$b_1^{-1} f \in \mathcal{Q}_0; \qquad D_1 \subset A\left(b_1^{-1} f, t\right).$$

Por la Observación 3.0.12, $D_1 = A\left(b_1^{-1} f, t_1\right)$ para algún $t \leq t_1 \leq 1$, así que

$$\|f_1\| = b_1 \left\|\frac{f}{b_1} - P_{D_1}\left(\frac{f}{b_1}\right)\right\| \leq b_1 \theta_c(t_1) \left\|\frac{f}{b_1}\right\| \leq \theta_c(t)\|f\|.$$

Ahora bien, $A \setminus D_1 \in \mathcal{G}(f_1, n_{k_0}, 1)$, así que

$$\|f - P_A(f)\| = \left\|f_1 - P_{A\setminus D_1}(f_1)\right\| \leq K_1\|f_1\| \leq K_1\theta_c(t)\|f\|. \tag{3.6}$$

Caso 3 b. Si $j_0 = 2$, sea $f_1 := f - P_B(f)$. Tenemos que

$$\|f_1\| \leq K_1\|f\|; \qquad b_2^{-1} f_1 \in \mathcal{Q}_0; \qquad D_2 \subset A\left(b_2^{-1} f_1, t\right).$$

Dado que $D_2 \in \mathcal{G}\left(b_2^{-1} f_1, m_1, 1\right)$, como antes existe $t \leq t_1 \leq 1$ tal que $D_2 = A\left(b_2^{-1} f_1, t_1\right)$, así que

$$\left\|f_1 - P_{D_2}(f_1)\right\| = b_2 \left\|\frac{f_1}{b_2} - P_{D_2}\left(\frac{f_1}{b_2}\right)\right\| \leq \theta_c(t_1)\|f_1\| \leq \theta_c(t)\|f_1\|.$$

Puesto que $f_1 - P_{D_2}(f_1) = f - P_A(f)$, combinando las desigualdades anteriores se deduce que

$$\|f - P_A(f)\| \leq K_1\theta_c(t)\|f\|. \tag{3.7}$$

De las estimaciones de los casos Caso 1 y Caso 2, junto con (3.6) y (3.7) para el Caso 3, considerando que $0 < t \leq t_0$ es arbitrario concluimos que

$$\theta_c\left(t^2\right) \leq K_1\theta_c(t) \quad \forall\, 0 < t \leq t_0. \tag{3.8}$$

Para completar la demostración de la Afirmación, usamos una variante del argumento de [2, Proposition 3.4]. Primero notemos que para cada $0 < t \leq t_0$,

$$\theta_c\left(t^4\right) = \theta_c\left(\left(t^2\right)^2\right) \leq K_1\theta_c\left(t^2\right) \leq K_1^2\theta_c\left(t\right).$$

Inductivamente, se sigue que

$$\theta_c\left(t^{2^n}\right) \leq K_1^n\theta_c\left(t\right) \quad \forall\ 0 < t \leq t_0 \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Como $K_1 > 1$ existe $d > 0$ tal que

$$K_1 = 2^d. \tag{3.10}$$

Ahora sea $0 < a < t_0^2$, y elijamos $t_0^2 \leq t \leq t_0$ y $n \in \mathbb{N}$ de manera que $a = t^{2^n}$. De (3.9) y (3.10), considerando que $0 < t \leq t_0 < e^{-1}$ y que θ_c es no creciente, se deduce que

$$\begin{aligned}\theta_c\left(a\right) = & \theta_c\left(t^{2^n}\right) \leq K_1^n\theta_c\left(t\right) = 2^{dn}\theta_c\left(t\right) = \left(\frac{\log\left(\frac{1}{t^{2^n}}\right)}{\log\left(\frac{1}{t}\right)}\right)^d\theta_c(t) \leq \theta_c\left(t_0^2\right)\left(1 + \log^d\left(\frac{1}{a}\right)\right)\\ \leq & d_1\left(1 + \log^{d_1}\left(\frac{1}{a}\right)\right),\end{aligned}$$

donde

$$d_1 := \max\left\{d, \theta_c\left(t_0^2\right)\right\}.$$

Puesto que θ_c es no creciente, se tiene que $\theta_c\left(t\right) \leq d_1$ para todo $t_0^2 \leq t \leq 1$, lo que completa la prueba de la Afirmación.
Ahora fijemos $0 < t < 1$, $f \in \mathcal{Q}_0$, y sea $A := A\left(f, t\right)$. Como antes, podemos asumir que $0 \neq P_A\left(f\right) \neq f$. Consideramos los siguientes casos:

Caso (i) Si $|A| \in \mathbf{n}$ o $|A| \in 2 * \mathbf{n}$, entonces por el Lema 3.0.7

$$\|f - P_A\left(f\right)\| \leq K_1^2\left\|f\right\|.$$

Caso (ii) De otro modo, como en la prueba del Caso 3 más arriba, sea $k_0 := \max_{k\in\mathbb{N}}\left\{n_k < |A|\right\}$, elijamos $B \subset A$ de manera que $B \in \mathcal{G}\left(x, n_{k_0}, 1\right)$, y sea $m_1 := |A| - |B|$. Nuevamente, $1 \leq m_1 < n_{k_0}$. Sean

$$a := \min_{j\in A}|\mathbf{x}_j^*\left(f\right)|; \qquad b := \min_{j\in B}|\mathbf{x}_j^*\left(f\right)|.$$

Notemos que $t \leq a < b$. Hay dos posibilidades:

Caso (II) .1. Si

$$\frac{a}{b} \leq \frac{1}{\theta_c(t)}, \tag{3.11}$$

elegimos $D \subset B$ tal que $D \in \mathcal{G}(f, n_{k_0} - m_1, 1)$, y definimos

$$f_1 := f - P_B(f) + \frac{a}{b} P_D(f).$$

Dado que

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{x}_j^*(f_1)\right| &= \frac{a}{b}\left|\mathbf{x}_j^*(f)\right| \geq a \geq \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_k^*(f_1)\right| \quad \forall j \in D, \forall k \notin A;\\
\left|\mathbf{x}_j^*(f_1)\right| &= \left|\mathbf{x}_j^*(f)\right| \geq a \geq \left|\mathbf{x}_k^*(f)\right| = \left|\mathbf{x}_k^*(f_1)\right| \quad \forall j \in A \setminus B, \forall k \notin A,
\end{aligned}$$

se sigue que $(A \setminus B) \cup D \in \mathcal{G}(f_1, n_{k_0}, 1)$. Luego,

$$\|f - P_A(f)\| = \left\|f_1 - P_{(A\setminus B)\cup D}(f_1)\right\| \leq K_1 \|f_1\|.$$

Por la Observación 3.0.12, existe $b \leq b_1 \leq 1$ tal que $D = A(f, b_1)$. Por (3.11) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|f_1\| &\leq \|f - P_B(f)\| + \frac{a}{b}\|P_D(f)\| \leq K_1\|f\| + \frac{\theta(b_1)}{\theta_c(t)}\|f\|\\
&\leq K_1\|f\| + \frac{\theta(t)}{\theta_c(t)}\|f\| \underset{|\theta_c(t)-\theta(t)|\leq 1}{\leq} (K_1 + 2)\|f\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f - P_A(f)\| \leq K_1(K_1 + 2)\|f\| \leq 3K_1^2\|f\|. \tag{3.12}$$

Caso (II) .2. Si

$$\frac{a}{b} > \frac{1}{\theta_c(t)},$$

sea $f_1 := f - P_B(f)$. Tenemos que

$$\|f_1\| \leq K_1\|f\|; \qquad b^{-1}f_1 \in \mathcal{Q}_0; \qquad A \setminus B \in \mathcal{G}\left(b^{-1}f_1, m_1, 1\right),$$

y

$$\left|\mathbf{x}_j^*\left(b^{-1}f_1\right)\right| \geq \frac{a}{b} \geq \frac{1}{\theta_c(t)} \quad \forall j \in A \setminus B.$$

Por la Observación 3.0.12, existe $(\theta_c(t))^{-1} \leq t_1 \leq 1$ tal que $A \setminus B = A\left(b^{-1} f_1, t_1\right)$, lo que implica que

$$\left\|f_1 - P_{A\setminus B}(f_1)\right\| = b\left\|\frac{f_1}{b} - P_{A\setminus B}\left(\frac{f_1}{b}\right)\right\| \leq \theta_c(t_1)\|f_1\| \leq \theta_c\left(\frac{1}{\theta_c(t)}\right)\|f_1\|.$$

Como

$$f_1 - P_{A\setminus B}(f_1) = f - P_A(f),$$

combinando las desigualdades anteriores se sigue que

$$\|f - P_A(f)\| \leq K_1 \theta_c\left(\frac{1}{\theta_c(t)}\right)\|f\|. \tag{3.13}$$

Combinando (3.12) y (3.13) se sigue que en cualquier caso,

$$\|f - P_A(f)\| \leq 3K_1^2\left(1 + \theta_c\left(\frac{1}{\theta_c(t)}\right)\right)\|f\|.$$

Considerando que $0 < t < 1$ es arbitrario, concluimos que

$$\theta_c(t) \leq 3K_1^2\left(1 + \theta_c\left(\frac{1}{\theta_c(t)}\right)\right) \ \forall\ 0 < t < 1,$$

lo que junto con (3.5) nos da

$$\theta_c(t) \leq 3K_1^2\left(1 + d_1\left(1 + (\log(\theta_c(t)))^{d_1}\right)\right) \ \forall\ 0 < t < 1.$$

Por ende,

$$1 \leq \frac{3K_1^2\left(1 + d_1\left(1 + (\log(\theta_c(t)))^{d_1}\right)\right)}{\theta_c(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0,$$

una contradicción.

$\square$

Bibliografía

[1] F. Albiac, J.L. Ansorena, *Characterization of 1-almost-greedy bases*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), 13–24.

[2] F. Albiac, J. L. Ansorena, and M. Berasategui, Elton's near unconditionality of bases as a threshold-free form of greediness, *J. Funct. Anal.* **285** Issue 7 (2023), article 110060.

[3] F. Albiac, J. L. Ansorena, and M. Berasategui, Linear versus nonlinear forms of partial unconditionality of bases, *J. Funct. Anal.* **287** Issue 9 (2024), article 110594.

[4] F. Albiac, J. L. Ansorena, M. Berasategui, P. M. Berná, S. Lassalle, Weak forms of unconditionality of bases in greedy approximation, *Studia Math.* **267** (2022), 1-17.

[5] F. Albiac, J.L. Ansorena, M. Berasategui, P.M. Berná, S. Lassalle, *Bidemocratic bases and their connections with other greedy-type bases*, Constr. Approx. **57** (2023), 125 - 160.

[6] F. Albiac, J.L. Ansorena, P.M. Berná, P. Wojtaszczyk, *Greedy approximation for biorthogonal systems in quasi-Banach spaces*, Dissertationes Math. **560** (2021), 1–88.

[7] F. Albiac, N. J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory, Second*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 233, Springer, [Cham], 2016. With a foreword by Gilles Godefory.

[8] M. Berasategui, P. M. Berná, *Quasi-greedy bases for sequences with gaps*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl, **208** (2021), 112294.

[9] M. Berasategui, P. M. Berná, *Extensions of democracy-like properties for sequences with gaps*, Math. Inequal. App. **25**, no. 4 (2022), 1155-1189.

[10] M. Berasategui, P. M. Berná, *Greedy-like bases for sequences with gaps*, Banach J. Math. Anal. **18** 14 (2024).

[11] M. Berasategui, S. Lassalle, *Weak greedy algorithms and the equivalence between semi-greedy and almost greedy Markushevich bases*, J. Fourier Anal. Appl. **29** N. 20 (2023).

[12] M. Berasategui, S. Lassalle *Weak weight-semi-greedy Markushevich bases*, P. Roy. Soc. Edinb. A 1-62, doi:10.1017/prm.2023.53. (2023).

[13] P. M. Berná, *Equivalence between almost greedy and semi-greedy bases*, J. Math. Anal. Appl. **470** (2019), 218–225.

[14] P. Berná, *Characterization of Weight-semi-greedy bases*, J. Fourier Anal. Appl. (2020) **26** (1) (2020), 1–21.

[15] P. M. Berná, O. Blasco, G. Garrigós, *Lebesgue inequalities for greedy algorithm in general bases*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), 369–392.

[16] P. M. Berná, O. Blasco, G. Garrigós, E. Hernández, T. Oikhberg, *Embeddings and Lebesgue-type inequalities for the greedy algorithm in Banach spaces* Constr. Approx. **48** (2018), 415–451.

[17] C. Bessaga, A. Pełczyński, *On Bases and Unconditional Convergence of Series in Banach Spaces*, Studia Math. **17** (2), (1958), 151-164.

[18] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, *On the existence of almost greedy bases in Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003), 67–101.

[19] S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, V. N. Temlyakov, *The thresholding greedy algorithm, greedy bases, and duality*, Constr. Approx. **19** (2003), 575–597.

[20] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, T. Oikhberg, *Lebesgue constants for the weak greedy algorithm*, Rev. Mat. Complut. **28** (2015), 393–409.

[21] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, T. Schlumprecht, P. Wojtaszczyk, *Weak thresholding greedy algorithms in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **263** (2012), 3900–3921.

[22] S. J., Dilworth, E. Odell, Th. Schlumprecht, A. Zsák, *Partial Unconditionality*, Houston J. Math **35** (2009) n. 4, 1251-1311.

[23] J. H. Elton, *Weakly null normalized sequences in Banach spaces*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1978. Thesis (Ph.D.)-Yale University.

[24] G. Garrigós, E. Hernández, T. Oikhberg, *Lebesgue type inequalities for quasi-greedy bases*, Constr. Approx. **38** (3) (2013), 447–470.

[25] Anna Kamińska and Mieczysław Mastyło, *The Dunford-Pettis Property for Symmetric Spaces*, Canad. J. Math.
textbf52 (4) (2000), 789-803.

[26] M. Kadets, A Pełczyński, *Basic sequences, bi-orthogonal systems and norming sets in Banach and Fréchet spaces*. (Russian) Studia Math. **25**(1965), 297-323.

[27] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, *A remark on greedy approximation in Banach spaces*, East J. Approx. **3** (1999), 365–379.

[28] , B. Maurey, H. O. Rosenthal, *Normalized weakly null sequence with no unconditional subsequence*, Studia Math. **61** (1977) n. 1, 77–98.

[29] T. Oikhberg, *Greedy algorithms with gaps*, J. Approx. Theory, 255 (2018), 176–190.

[30] V. N. Temlyakov, *Greedy Approximation*, Acta Numer. **17** (2008), 235– 409.

[31] P. Wojtaszczyk, *Greedy algorithm for general biorthogonal systems*, J. Approx. Theory **107** (2000), 293–314.