



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

**Un estudio poliedral del cálculo de los números \mathcal{P}_3 -hull y de
2-dominación de un grafo**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área
Ciencias Matemáticas

Lic. Manuela Blaum Akerman

Director de tesis: Dr. Javier Marengo
Consejero de estudios: Dr. Gabriel Acosta
Fecha de defensa: 7 de Marzo de 2022

Lugar de trabajo: Instituto de Ciencias - Universidad Nacional de General Sarmiento

A mis seres queridos

Un estudio poliedral del cálculo de los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo

Resumen

Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subconjunto $S \subseteq V$ se define el *conjunto \mathcal{P}_3 -intervalo de S* como $I(S) := S \cup \{v \in V : |S \cap N(v)| \geq 2\}$. Cuando el conjunto S verifica que $I(S) = S$, se dice que es *\mathcal{P}_3 -convexo*. La clase formada por los conjuntos \mathcal{P}_3 -convexos verifica los axiomas que definen una convexidad discreta en V : el conjunto vacío y el conjunto V son \mathcal{P}_3 -convexos, y la intersección de dos conjuntos \mathcal{P}_3 -convexos también lo es. El *número de 2-dominación de G* es la menor cantidad de elementos de un conjunto $S \subseteq V$ tal que $I(S) = V$, es decir, tal que todo vértice que no pertenece a S tiene al menos dos vecinos en S . Este parámetro es análogo al bien conocido número de dominación de un grafo.

Si se define $I^0(S) = S$ e $I^k(S) = I(I^{k-1}(S))$ para $k \in \mathbb{N}$, se puede ver que si $I^k(S) = I^{k+1}(S)$ entonces $I^k(S)$ es la *cápsula \mathcal{P}_3 -convexa de S* . El *número \mathcal{P}_3 -hull de G* es la menor cantidad de elementos que tiene un conjunto S cuya cápsula \mathcal{P}_3 -convexa es V , es decir tal que $I^k(S) = V$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$.

En la presente tesis nos dedicamos al estudio del número de 2-dominación y del número \mathcal{P}_3 -hull de un grafo desde un punto de vista poliedral, ambos problemas NP-completos en su versión de decisión. A pesar de que las técnicas poliedrales han mostrado su efectividad en la resolución de numerosos problemas de optimización combinatoria, hasta la fecha no se han realizado estudios de este tipo aplicados al cálculo de los parámetros mencionados. Planteamos modelos de programación lineal entera para calcular el número de 2-dominación y el número \mathcal{P}_3 -hull de un grafo, y analizamos distintas propiedades de los poliedros formados por las combinaciones convexas de las soluciones factibles de dichos modelos. Calculamos la dimensión de ambos poliedros, estudiamos la relación que existe entre ellos, presentamos distintas familias de facetas y, por último, brindamos descripciones minimales y completas de los poliedros correspondientes a algunas familias de grafos.

Palabras Clave: optimización combinatoria, combinatoria poliedral, convexidad \mathcal{P}_3 , facetas

A polyhedral study of the computation of the \mathcal{P}_3 -hull and the 2-domination numbers of a graph

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a graph and $S \subseteq V$ be a subset of vertices. We define the \mathcal{P}_3 -interval set of S as $I(S) := S \cup \{v \in V : |S \cap N(v)| \geq 2\}$. If the subset S verifies that $I(S) = S$, we say that it is \mathcal{P}_3 -convex. The class of \mathcal{P}_3 -convex sets verifies the axioms defining a discrete convexity in V : the empty set and V are \mathcal{P}_3 -convex, and the intersection of \mathcal{P}_3 -convex sets is also a convex set. The 2-domination number of G is the minimum cardinality of a set $S \subseteq V$ such that $I(S) = V$, that is to say, such that every vertex not in S has at least two neighbors in S . This parameter is analogous to the well-known domination number of a graph.

If we define $I^0(S) = S$ and $I^k(S) = I(I^{k-1}(S))$ for $k \in \mathbb{N}$, we can see that if $I^k(S) = I^{k+1}(S)$ then $I^k(S)$ is the \mathcal{P}_3 -convex hull of S . The \mathcal{P}_3 -hull number of G is the minimum cardinality of a set S , such that its \mathcal{P}_3 -convex hull is V , in other words, that $I^k(S) = V$ for some $k \in \mathbb{N}_0$.

In this thesis we study the 2-domination and the \mathcal{P}_3 -hull number of a graph from a polyhedral point of view, both NP-complete problems in their decision version. Although polyhedral techniques have been successfully applied to several combinatorial optimization problems, up to our knowledge there are not studies of this type applied to the computation of the mentioned parameters. We pose integer linear programming models for the calculation of the 2-domination and the \mathcal{P}_3 -hull number of a graph, and we analyze several properties of the polyhedra consisting of convex combinations of feasible solutions. We compute the dimension of both polyhedra, we explore their relationships, we present different families of facets, and, finally, we show complete and minimal descriptions of these polyhedra for some families of graphs.

Keywords: combinatorial optimization, \mathcal{P}_3 -convexity, polyhedral combinatorics, facets

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi director, Javier Marengo. Además de su gran capacidad académica y profesional, quiero destacar y agradecer su disposición, paciencia, energía, y sobre todo su enorme generosidad compartiendo conocimientos, ideas, experiencia, incluyendo a sus alumnos en muchísimos proyectos. En resumen, un director de lujo que siempre está cuando lo necesitas, ayudando y motivando. Esas cualidades contribuyen a generar un muy buen equipo de trabajo, y aquí aprovecho para agradecer al grupo del seminario de los martes (ahora lunes), que me hizo sentir cómoda y motivada desde el primer momento. Aquí nombro solo a algunos pero el agradecimiento va para todos: Ivo, Marcelo M., Ricardo, Javier M.V., Martín, Diego, Marcelo B., Federico, Sebastián, Santiago. A Mónica quiero agradecerle especialmente, por todo el apoyo y las experiencias compartidas en estos años.

También me gustaría agradecer a los jurados Graciela Nasini, Isabel Méndez Díaz y José Correa, por tomarse el trabajo de leer esta tesis y por todos sus comentarios que han sido de gran ayuda. Muchas gracias por su paciencia y dedicación.

A la Subcomisión de Doctorado del Departamento de Matemática, especialmente a Pablo y a Débora, gracias por sus innumerables respuestas a mis innumerables consultas, siempre rápida y amablemente. A Pablo le dirijo un agradecimiento especial, por ser parte de mi formación, por sus clases excelentes, por toda la dedicación que pone al trabajo y a sus alumnos. Tuve la suerte de poder aprender de él.

No menos importante es la gente a mi alrededor que no perdió la confianza y me instó a seguir adelante con el doctorado. Y aquí agradezco especialmente a Maru y Andrés, quienes nunca dejaron de insistir para que pueda encauzar lo que me gusta hacer, y lo que nunca pude o quise abandonar, que es estudiar matemática. Y lo mismo mi hijo Diegui, mi hermano Joaquín, y mi mamá quienes nunca se cansaron de darme ánimo.

Gracias a la FCEyN y a la UNGS, a sus comunidades, y a sus excelentes recursos humanos, que permitieron formarme, especializarme, trabajar en lo que me gusta, y ser parte de sus proyectos de educación y conocimiento para todos.

Y a les que todavía no nombré y hacen la vida más linda: Santi, Celia, Emi, Cami, Anita, Debo, Ceci, Vero, Fede y Luigi.

Índice general

1. Introducción	13
1.1. Convexidad y dominación en grafos	13
1.2. Convexidad \mathcal{P}_3	16
1.3. Complejidad computacional	20
1.4. Optimización combinatoria y programación lineal entera	22
1.5. Definiciones básicas	25
1.6. Organización de la tesis	27
2. Modelos de programación lineal entera y sus propiedades	29
2.1. Modelos de programación lineal entera	29
2.2. Polítopos de 2-dominación y \mathcal{P}_3 -hull. Algunas propiedades.	35
2.3. Algunos experimentos computacionales	41
2.4. Facetas asociadas a las cotas de las variables	43
2.5. Facetas definidas por las restricciones del modelo	46
3. Algunas familias de facetas	55
3.1. Desigualdades de vecindad	55
3.2. Desigualdades co-convexas y k -cuasi co-convexas	62
3.3. Desigualdades de rango local	70
4. Descripciones completas	75
4.1. Caminos	76
4.2. Ciclos	78
4.3. Grafos completos	83
4.4. El polítopo de 2-dominación para árboles	85
5. Conclusiones y trabajo futuro	101
Bibliografía	102

Capítulo 1

Introducción

1.1. Convexidad y dominación en grafos

A partir de la década del setenta la teoría axiomática de la convexidad ha sido estudiada por la comunidad científica [17, 77]. Siguiendo este enfoque, dado un conjunto finito \mathcal{X} , se dice que una colección de subconjuntos $\mathcal{C} \subseteq 2^{\mathcal{X}}$ es una *convexidad* en \mathcal{X} si los conjuntos \emptyset y \mathcal{X} pertenecen a \mathcal{C} , y además \mathcal{C} es cerrada por intersecciones, es decir, si $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}$ cada vez que C_1 y C_2 pertenecen a \mathcal{C} . A los conjuntos que pertenecen a \mathcal{C} se los llama *conjuntos convexos* y, como en el caso del espacio euclídeo, la *cápsula convexa* de un subconjunto de \mathcal{X} se define como el conjunto convexo minimal que lo contiene.

Desde la teoría de grafos, se han aplicado estas ideas al caso en que el conjunto \mathcal{X} está formado por los vértices de un grafo $G = (V, E)$, y se han estudiado distintas convexidades definidas sobre este conjunto (ver por ejemplo [2, 20, 21, 23, 24, 38, 39, 42, 45, 46, 48, 54]).

Una idea simple que permite construir una convexidad discreta en un grafo $G = (V, E)$ es la siguiente: dados dos vértices u y v en V , se definen los *caminos válidos* entre u y v como aquellos caminos que tienen sus extremos en u y v , y que además verifican cierta propiedad preestablecida (por ejemplo, estar formados por tres vértices, o ser el camino más corto entre esos dos vértices). De este modo se puede definir el *intervalo entre u y v* , al que notaremos $I[u, v]$, como la unión de todos los vértices pertenecientes a estos caminos válidos con extremos en u y v , y también el *conjunto intervalo* de un subconjunto de vértices $S \subseteq V$, al que notaremos $I(S)$, como la unión de S con todos los intervalos con ambos extremos en S . Con estas definiciones, y análogamente a lo que ocurre en el caso del espacio euclídeo, un subconjunto $C \subseteq V$ será *convexo* si dados u y v en C el intervalo $I[u, v]$ está contenido en C , es decir, si el conjunto intervalo verifica $I(C) \subseteq C$. Algunos ejemplos de este tipo de convexidades son la *convexidad geodésica* (en la cual los caminos válidos son los más

cortos entre dos vértices dados [46, 48, 54]), la *convexidad monofónica* (donde los caminos válidos son los caminos inducidos [42]), la *convexidad* \mathcal{P}_3 (en la cual los caminos válidos son los que tienen tres vértices [20, 21, 45]), la *convexidad* \mathcal{P}_3^* (si se consideran los caminos inducidos de tres vértices [2]) y la *convexidad de caminos triangulares* (donde los caminos solo pueden tener cuerdas entre vértices a distancia 2 [23, 39]). Para cada una de estas convexidades hay numerosos parámetros de interés asociados, por ejemplo su *número de convexidad* (el cardinal máximo de un conjunto convexo propio), su *número hull* (el cardinal mínimo de un conjunto tal que su cápsula convexa es V), y su *número de intervalo* (el cardinal mínimo de un conjunto S tal que $I(S)$ es V), entre otros. Muchos de estos parámetros son computacionalmente difíciles de calcular para grafos generales G , aunque algunos se facilitan al considerar clases de grafos particulares como árboles o cografos.

En esta tesis nos dedicamos fundamentalmente al estudio del *número* \mathcal{P}_3 -*hull* de un grafo $G = (V, E)$, que es el cardinal mínimo de un conjunto $S \subseteq V$ tal que su cápsula convexa, con la convexidad \mathcal{P}_3 , es V . Un aspecto interesante de esta convexidad es que puede utilizarse para modelar procesos de propagación en tiempo discreto de una determinada propiedad por los vértices de un grafo. Podemos considerar a los vértices (individuos) que poseen dicha propiedad inicialmente, y son capaces de propagarla, como los vértices de un conjunto $S \subseteq V$, y que pueden transmitir la propiedad al resto de los vértices del siguiente modo: un nuevo vértice adquiere la propiedad y puede comenzar a propagarla si al menos dos de sus vecinos la tienen (y la propagan) previamente. Este proceso se repite hasta que no queden más individuos susceptibles de adquirir la propiedad, y esto ocurre cuando, después de una cierta cantidad de pasos, el conjunto de los vértices *activos* (que poseen la propiedad y pueden transmitirla) es un conjunto \mathcal{P}_3 -convexo. Es decir, cuando se obtiene la cápsula \mathcal{P}_3 -convexa del conjunto inicial S . Si nos preguntamos acerca de la cantidad mínima de individuos que inicialmente deben estar activos (poseer la propiedad y poder transmitirla) para que la totalidad de los vértices adquiera la propiedad al finalizar el proceso, la respuesta es el número \mathcal{P}_3 -hull de G . Una de las principales aplicaciones de este proceso dinámico en tiempo discreto es modelar la propagación de opiniones en una red social o comunidad, que puede ser representada mediante un grafo, y donde la opinión de cada individuo (vértice) se ve influenciada por la opinión de sus contactos (vértices vecinos). Este tipo de modelos puede verse en trabajos tempranos tales como [52, 74] y en otros como [25]. También podemos encontrar en la literatura, aplicaciones al diseño de redes computacionales [8, 51, 71] así como a procesos de expresión génica [60].

A modo de ejemplo, calcularemos el número \mathcal{P}_3 -hull del grafo grilla de $n \times n$. Como muestra la Figura 1.1 podemos representar al grafo grilla G , como una cuadrícula, donde cada casillero representa a un vértice de G y dos vértices son vecinos si y solo si sus correspondientes casilleros son adyacentes. En la misma figura vemos en negro los casilleros que corresponden a vértices del conjunto S elegido inicialmente para propagar la propiedad. En la Figura 1.2 podemos ver en distintos colores los vértices que van adquiriendo la propiedad en cada paso del proceso de propagación, hasta que finalmente éste se estabiliza. Para la configuración inicial de la Figura 1.1 vemos que la propiedad no llega a propagarse a la totalidad de los vértices de G . Si en cambio se hubiese elegido el conjunto S como los vértices de alguna diagonal principal de la grilla, el proceso sí hubiera alcanzado a todos los vértices del grafo, y por lo tanto, si G es una grilla de $n \times n$, número \mathcal{P}_3 -hull de G es menor o igual a n . Utilizando el hecho de que el perímetro de la región formada por los vértices que tienen la propiedad

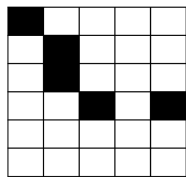


Figura 1.1: Propagadores iniciales.

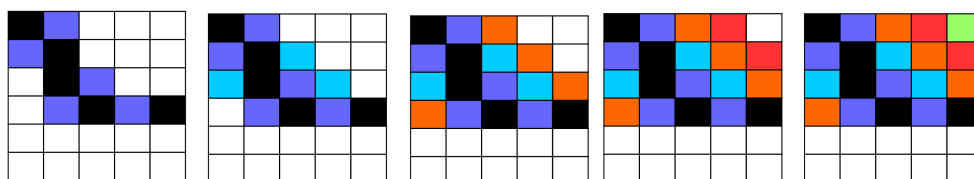


Figura 1.2: Proceso de propagación.

en el paso k decrece con $k \geq 0$, se puede probar la desigualdad contraria, y por lo tanto el número \mathcal{P}_3 -hull del grafo grilla de $n \times n$ es n [13].

Este tipo de modelos dinámicos de k -conversión o propagación aparece en la literatura bajo distintos nombres. En algunos trabajos se lo denomina *bootstrap percolation*, y el conjunto inicial es seleccionado al azar [5, 22] (utilizado por ejemplo para modelar fenómenos magnéticos), aunque también se ha estudiado el caso determinístico con la misma nomenclatura (por ejemplo en [75]). En [1] se pueden encontrar distintas aplicaciones de este modelo. Otra nomenclatura presente en la literatura es k -threshold process [41].

Como hemos visto, en un proceso dinámico de propagación, el número \mathcal{P}_3 -hull es el menor cardinal de un conjunto con la propiedad de convertir a la totalidad de los vértices del grafo en una cierta cantidad de pasos. En algunas situaciones se requiere que dicha conversión se realice en un solo paso, para lo cual es necesario que todos los vértices que no pertenecen al conjunto inicial S tengan al menos dos vecinos en S . Al número mínimo de elementos de un conjunto con esa propiedad se lo llama \mathcal{P}_3 -número de intervalo del grafo G , también conocido como *número de 2-dominación* por su analogía con el concepto usual de dominación.

Recordemos que un conjunto $S \subseteq V$ se dice *dominante* si todo $v \in V \setminus S$ tiene al menos un vecino en S , y que el *número de dominación* de un grafo G es la menor cantidad de elementos que tiene un conjunto dominante. Este concepto fue introducido por Berge [7], y hasta la actualidad continúa siendo estudiado debido a sus numerosas aplicaciones, sobre todo en el área de locación de instalaciones como escuelas, hospitales o depósitos (ver por ejemplo [30, 59]).

Durante las últimas décadas se han definido e investigado numerosas variantes del número de dominación de un grafo. En [59] se pueden encontrar alrededor de 75 variaciones de conjunto dominante, y algunas más se pueden encontrar en [40]. Muchas veces la definición pide que el conjunto

en cuestión sea una clique o un conjunto independiente. Otras definiciones piden que los vértices de $V \setminus S$ tengan como mínimo una cierta cantidad k de vecinos en S (*conjunto k -dominante*), o que todo vértice en V cumpla esta condición (*conjunto k -dominante total* o *k -tuple dominante* [66]), o que todo vértice en V esté a una distancia menor o igual que k del conjunto S (*conjunto $distance$ k -dominante* o en algunos trabajos *conjunto k -dominante* también [67, 69]).

La noción de conjunto k -dominante y número de k -dominación que utilizaremos en este trabajo fue introducida por Fink y Jacobson [50] y continuó siendo estudiada por ejemplo en [12, 49, 61]. Dado un grafo $G = (V, E)$, diremos que un conjunto $S \subseteq V$ es *k -dominante* si todo $v \in V \setminus S$ tiene al menos k vecinos en S , y el *número de k -dominación* será el mínimo cardinal de un conjunto k -dominante. Este parámetro posee una aplicación directa para la localización de instalaciones con tolerancia a $(k - 1)$ -fallas. Por ejemplo, en el diseño de una red de computadoras puede ser requerido elegir algunos nodos como servidores, de modo tal de que el resto de los nodos estén conectados como mínimo a k de estos servidores, y así, en caso de que $k - 1$ de los servidores fallen, la red podrá seguir en funcionamiento. Como en general se quiere minimizar el costo, será necesario minimizar la cantidad de servidores y para calcular ese número mínimo de servidores deberemos hallar el número de k -dominación. En esta tesis nos enfocaremos en el caso particular $k = 2$.

En las siguientes secciones de este capítulo realizaremos una breve introducción a los tópicos relacionados con el presente trabajo: formalizaremos definiciones y propiedades concernientes a la convexidad \mathcal{P}_3 (Sección 1.2), enumeraremos los conceptos más importantes sobre complejidad computacional (Sección 1.3), sobre optimización combinatoria (Sección 1.4), y por último brindaremos las definiciones básicas de la teoría de grafos y de la combinatoria poliedral (Sección 1.5).

1.2. Convexidad \mathcal{P}_3

En esta sección brindaremos las nociones básicas de convexidad definida de manera axiomática para luego pasar al caso que nos concierne que es el de la convexidad \mathcal{P}_3 . Comenzaremos con la definición de convexidad. Ésta se define de manera que se verifiquen las propiedades más elementales de los conjuntos convexos en \mathbb{R}^n . La siguiente definición, si bien está planteada para el caso del conjunto de vértices de un grafo dado, puede utilizarse de forma análoga para un conjunto finito cualquiera.

Definición 1.2.1. *Dado $G = (V, E)$, diremos que la colección $C \subseteq 2^V$ de subconjuntos de V es una convexidad en G si verifica*

- $\emptyset \in C$ y $V \in C$,
- si C_1 y C_2 pertenecen a C entonces $C_1 \cap C_2$ también pertenece a C .

Definición 1.2.2. *Dado un grafo $G = (V, E)$ y C una convexidad en G , diremos que un subconjunto $S \subseteq V$ es C -convexo si $S \in C$, y que es C -co-convexo si su complemento, \bar{S} , es C -convexo. Si $S \subseteq V$, se define $\text{hull}_C(S)$, la cápsula C -convexa de S como el conjunto C -convexo minimal que lo contiene.*

En la siguiente definición se intenta dar una versión análoga al segmento entre dos puntos del espacio euclídeo para el caso de dos vértices de un grafo conexo G , utilizando caminos entre ellos.

Definición 1.2.3. Dado \mathcal{P} el conjunto de caminos en el grafo G y $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, definimos el \mathcal{P}' -intervalo entre u y v como $I_{\mathcal{P}'}[u, v] := \{w \in V(p) : p \text{ es un camino entre } u \text{ y } v, \text{ y } p \in \mathcal{P}'\}$, donde $V(p)$ denota al conjunto de vértices del grafo p . Si S es un subconjunto de V definimos el conjunto \mathcal{P}' -intervalo de S como el conjunto $I_{\mathcal{P}'}(S) := S \cup \bigcup_{u, v \in S} I_{\mathcal{P}'}[u, v]$.

Con esta idea de intervalo entre dos vértices del grafo, se puede definir un conjunto convexo de manera análoga al caso del espacio euclídeo, como mostramos a continuación.

Definición 1.2.4. Diremos que un conjunto $S \subseteq V$ es convexo respecto de \mathcal{P}' o \mathcal{P}' -convexo (y omitiremos \mathcal{P}' cuando este claro por el contexto) si, para $u, v \in S, u \neq v$, se verifica que el intervalo entre u y v está contenido en S . Dicho de otro modo, si el conjunto intervalo de $S, I_{\mathcal{P}'}(S)$, está contenido en S .

Es fácil ver que la colección de subconjuntos de V así definida es una convexidad en G , es decir, verifica la Definición 1.2.1. Aunque cada convexidad tiene numerosos parámetros asociados, definiremos solamente el número \mathcal{P}_3 -hull y el de 2-dominación, que constituyen el objeto de estudio en esta tesis.

Definición 1.2.5. Si $S \subseteq V$ y $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, definimos

- el \mathcal{P}' -número de intervalo de G (o simplemente \mathcal{P}' -number) como el mínimo cardinal de un conjunto $S \subseteq V$ tal que $I_{\mathcal{P}'}(S) = V$,
- el número \mathcal{P}' -hull de G como el mínimo cardinal de un subconjunto S tal que su cápsula convexa $\text{hull}(S)$ es V .

En el presente trabajo nos concentraremos en la convexidad \mathcal{P}_3 , en la cual el conjunto \mathcal{P}' es el conjunto de los caminos \mathcal{P}_3 , es decir caminos formados por tres vértices. En este caso un conjunto S es convexo si no existe ningún vértice fuera de S que tenga al menos dos vecinos en S , ya que si esto sucede, existen $u, v \in S$ y $w \in V \setminus S$, tales que el camino de tres vértices uwv no está contenido en S , y por lo tanto el conjunto intervalo $I(S)$ no está contenido en S .

Definición 1.2.6. Un conjunto $S \subseteq V$ es \mathcal{P}_3 -convexo si $N_2(S) := S \cup \{i \in V : |N(i) \cap S| \geq 2\} \subseteq S$.

Para este caso particular de los caminos con tres vértices, hemos preferido la notación $N_2(S)$ en lugar de $I(S)$, por analogía con la notación de vecindad $N(S)$, ya que en ese conjunto están los vértices con al menos dos vecinos en S .

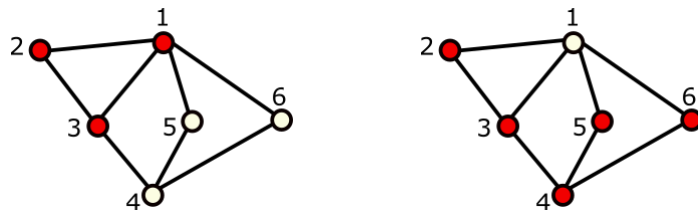


Figura 1.3: Convexidad \mathcal{P}_3 .

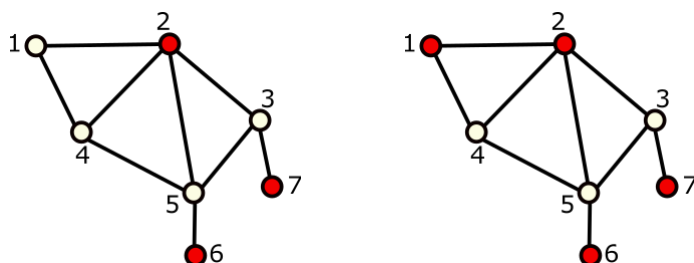


Figura 1.4: Conjunto de 2-conversión y conjunto 2-dominante.

En el grafo de la Figura 1.3 podemos ver que el conjunto $C_1 = \{1, 2, 3\}$ es \mathcal{P}_3 -convexo ya que $|N(i) \cap C_1| = 1$ para $i = 4, 5, 6$, mientras que $C_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ no es \mathcal{P}_3 -convexo ya que $|N(1) \cap C_2| = 4$.

La siguiente observación nos permite hallar la cápsula \mathcal{P}_3 -convexa de un subconjunto $S \subseteq V$.

Observación 1.2.1. Si definimos $N_2^0(S) := S$ y $N_2^r(S) := N_2(N_2^{r-1}(S))$ para $r \geq 1$, entonces la cápsula convexa de S respecto a \mathcal{P}_3 es $N_2^r(S)$, donde $r \in \mathbb{N}$ es tal que $N_2^r(S) = N_2^{r+1}(S)$.

Demostración. El conjunto $N_2^r(S)$ contiene a S y es \mathcal{P}_3 -convexo pues $N_2(N_2^r(S)) = N_2^{r+1}(S) = N_2^r(S)$. Además es minimal con esta propiedad ya que si $S \subseteq C$ con $C \subseteq V$ \mathcal{P}_3 -convexo, entonces $N_2^r(S) \subseteq N_2^r(C) = C$. \square

Definición 1.2.7. Dado $G = (V, E)$, $S \subseteq V$ y los conjuntos $N_2^j(S)$ para $j \geq 0$ definidos como en la observación anterior, decimos que S es un conjunto 2-dominante (respectivamente, un conjunto de 2-conversión) en G si $N_2(S) = V$ (respectivamente, si $N_2^r(S) = V$ para algún $r \geq 0$, es decir, si $\text{hull}(S) = V$).

En el grafo de la Figura 1.4 podemos ver que el conjunto $S = \{2, 6, 7\}$ es un conjunto de 2-conversión, ya que $N_2(S) = \{2, 6, 7, 3, 5\}$, $N_2^2(S) = \{2, 6, 7, 3, 5, 4\}$, y $N_2^3(S) = V$. También podemos ver que el conjunto $S_1 = \{1, 2, 6, 7\}$ es 2-dominante, ya que $N_2(S_1) = V$.

La siguiente definición corresponde a la Definición 1.2.5 para el caso particular de la convexidad \mathcal{P}_3 .

Definición 1.2.8. Dado $G = (V, E)$,

- el número de 2-dominación de G es el cardinal mínimo de un conjunto 2-dominante. A este parámetro lo notaremos $\gamma_2(G)$.
- El número \mathcal{P}_3 -hull de G es el cardinal mínimo de un conjunto de 2-conversión. A este parámetro lo notaremos $\text{hull}_{\mathcal{P}_3}(G)$ (o simplemente $\text{hull}(G)$ cuando esté claro por el contexto).

Observación 1.2.2. A cada conjunto $S \subseteq V$ podemos asociarle el parámetro $\delta(S) := \min\{r \geq 0 : N_2^r(S) = N_2^{r+1}(S)\}$. Es decir, $\delta(S)$ es la cantidad de iteraciones necesarias, o tiempo, para alcanzar la cápsula convexa de S . Notemos que $\delta(S) \leq \overline{|S|}$.

Observación 1.2.3. Un conjunto 2-dominante es un conjunto de 2-conversión con $\delta(S) \leq 1$, y entonces $\text{hull}(G) \leq \gamma_2(G)$. Por otro lado, si $S \subseteq V$ es un conjunto de 2-conversión entonces $N_2^{\delta(S)-1}(S)$ es un conjunto 2-dominante.

En la siguiente proposición mostramos una cota superior uniforme para el parámetro δ de los conjuntos de 2-conversión en un grafo G .

Proposición 1.2.1. Si $V = \{1, \dots, n\} \cup V_1$ es el conjunto de vértices de G donde $V_1 = \{n+1, \dots, n+k\}$ es el conjunto de vértices de grado 1 de G , $|V| \geq 2$ y $m := n+k - \max\{2, k\}$, entonces $0 \leq \delta(S) \leq m$ para todo $S \subseteq V$ conjunto de 2-conversión de G .

Demostración. Si S es un conjunto de 2-conversión de G , entonces $V_1 \subseteq S$, ya que de otro modo existe $1 \leq j \leq k$ tal que $n+j \notin N_2^k(S)$ para ningún $k \geq 0$. Entonces $|S| \geq k$. Por otro lado $|S| \geq 2$ ya que de otro modo $N_2(S) = S \neq V$. Luego

$$\delta(S) \leq \overline{|S|} \leq |V| - \max\{2, k\} = m.$$

□

Las siguientes propiedades referentes al parámetro $\delta(S)$ y a la cápsula convexa $\text{hull}(S)$ nos serán de utilidad a lo largo de la tesis.

Proposición 1.2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo y $S \subseteq V$. Entonces,

- a) $\delta(S) = 0$ si y solo si S es un conjunto \mathcal{P}_3 -convexo.
- b) Si $S_1 \subseteq S$ entonces $\text{hull}(S_1) \subseteq \text{hull}(S)$.
- c) Si $S_1 \subseteq S$ es tal que $\text{hull}(S_1) = \text{hull}(S)$, entonces $\delta(S_1) \geq \delta(S)$.
- d) $\text{hull}(N_2^t(S)) = \text{hull}(S)$ para todo $t \in \mathbb{N}_0$.

e) $\delta(N_2^t(S)) = \delta(S) - t$ para todo $0 \leq t \leq \delta(S)$.

Demostración. a) Se deduce del hecho de que $\delta(S) = 0$ si y solo si $S = N_2^0(S) = N_2^1(S) = N_2(S)$.

b) Si $S_1 \subseteq S$ entonces $\text{hull}(S_1) = N_2^{\delta(S_1)}(S_1) \subseteq N_2^{\delta(S_1)}(S) \subseteq \text{hull}(S)$.

c) Si $S_1 \subseteq S$ entonces $\text{hull}(S_1) = N_2^{\delta(S_1)}(S_1) \subseteq N_2^{\delta(S_1)}(S)$, luego $\text{hull}(S) \subseteq N_2^{\delta(S_1)}(S)$ y entonces $\delta(S) \leq \delta(S_1)$.

d) Tenemos que $S \subseteq N_2^t(S)$ para todo $t \geq 0$, luego $\text{hull}(S) \subseteq \text{hull}(N_2^t(S))$ para todo $t \in \mathbb{N}_0$. Por otro lado, $\text{hull}(S)$ es \mathcal{P}_3 -convexo y contiene a $N_2^t(S)$ para todo $t \geq 0$, por lo tanto $\text{hull}(N_2^t(S)) \subseteq \text{hull}(S)$.

e) Como $N_2^{\delta(S)-t}(N_2^t(S)) = N_2^{\delta(S)}(S) = \text{hull}(S) = \text{hull}(N_2^t(S))$ para todo $0 \leq t \leq \delta(S)$, entonces $\delta(N_2^t(S)) \leq \delta(S) - t$. Por otro lado $N_2^{\delta(N_2^t(S))+t}(S) = N_2^{\delta(N_2^t(S))}(N_2^t(S)) = \text{hull}(N_2^t(S)) = \text{hull}(S)$, entonces $\delta(S) \leq \delta(N_2^t(S)) + t$, lo cual demuestra la igualdad enunciada.

□

En este punto, podemos ver más claramente el modo en que la convexidad \mathcal{P}_3 puede utilizarse para modelar la propagación de una propiedad por los vértices de un grafo. A modo de ejemplo, supongamos que se modela la propagación de un rumor sobre una red social representada mediante un grafo cuyos vértices representan a los individuos y cuyas aristas indican si son contactos directos en dicha red. Supongamos que el rumor comienza a ser divulgado por un grupo S de individuos de la red, y que éste comienza a propagarse del siguiente modo: un individuo comienza a propagar el rumor cuando al menos dos de sus contactos directos lo estaban propagando. Si observamos este fenómeno en tiempo discreto, entonces claramente los individuos que están propagando el rumor en un instante t son los que pertenecen a $N_2^t(S)$, y el rumor deja de propagarse cuando después de algunos pasos, se obtiene la cápsula \mathcal{P}_3 -convexa de S . El cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull responde entonces a la pregunta de cuántos propagadores iniciales se necesitan, como mínimo, para que el rumor llegue a la totalidad de la red.

1.3. Complejidad computacional

La teoría de la complejidad computacional clasifica los problemas según su dificultad para ser resueltos por medio de algoritmos en modelos de cómputo clásicos [53]. Una medida de esta dificultad es la cantidad de operaciones que realiza un algoritmo (máquina de Turing determinística) que lo resuelve. Se considera que un problema es *tratable* cuando puede ser resuelto en tiempo (a lo sumo) polinomial en el tamaño de la instancia. Un *problema de decisión* (cuya respuesta puede ser solamente *sí* o *no*) de este tipo se dice que pertenece a la *clase P*.

También hay problemas de decisión que si bien no pertenecen a la clase P , tienen lo que se llama *verificación polinomial*, esto es, se puede chequear en tiempo polinomial si la respuesta es *sí* para una solución dada. Estos problemas pueden ser resueltos en tiempo polinomial por una máquina de Turing no determinística y se dice que estos problemas pertenecen a la *clase NP*.

Si bien está claro que $P \subseteq NP$, hasta el día de la fecha no se ha podido demostrar que la inclusión sea estricta, ni tampoco que ambas clases coincidan, siendo éste uno de los problemas abiertos más relevantes de la computación.

En 1971, Cook sentó las bases de la teoría de la NP-completitud [32], demostrando que un problema particular (el problema de *satisficibilidad* o simplemente SAT) es el más difícil de todos los problemas en NP, en el sentido de que, si éste pudiera ser resuelto en tiempo polinomial, entonces lo mismo ocurriría para todos los problemas NP. También mostró que hay más problemas con la misma propiedad. Todos estos problemas, de algún modo equivalentes en su dificultad, pertenecen a la clase de los problemas llamados *NP-completos*.

Desde esa fecha hasta la actualidad, la lista de problemas NP-completos ha ido creciendo ininterrumpidamente. De más está decir que para ninguno de ellos se ha encontrado una resolución polinomial, ya que en ese caso quedaría probado que $P=NP$. Es por esto que el hecho de que un problema pertenezca a esta clase, hace que debamos ser pesimistas en cuanto a la posibilidad de encontrar en el corto plazo un algoritmo efectivo que lo resuelva.

Con respecto al cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull, se ha establecido que su versión de decisión es NP-completo. Esto fue demostrado en forma independiente en [20] y en [25], respondiendo a la pregunta abierta planteada en [41], donde este resultado fue probado para el caso de un k -threshold process con $k \geq 3$. Sin embargo, para familias particulares de grafos, como árboles, ciertas grillas, y cografos, el problema resulta polinomial [20, 25].

La complejidad computacional del cálculo del número de k -dominación también ha sido estudiada y se ha demostrado que es un problema NP-completo en su versión de decisión para grafos generales [61], lo mismo que para grafos bipartitos, cordales e incluso grafos split [6, 67]. Por otro lado, se ha demostrado que este problema es polinomial para árboles, cactus, y grafos block [61, 67]. El caso particular $k = 2$ ha sido estudiado por ejemplo en [14, 21], demostrando que también es NP-completo en su versión de decisión para grafos generales.

1.4. Optimización combinatoria y programación lineal entera

Como veremos en el próximo capítulo, los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo pueden ser calculados minimizando una función lineal con variables enteras (más precisamente, binarias), restringida a un poliedro (intersección de semiespacios lineales). Es decir, ambos problemas pueden formularse como problemas de optimización lineal restringida a un conjunto discreto. A este tipo de problemas se los denomina *problemas de programación lineal entera (PLE)*, o *mixta* si la restricción de integralidad no se aplica a todas las variables ([72]). Formalmente, un problema de PLE consiste en

$$\min z = f(x_1, \dots, x_n) \tag{1.1}$$

con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, sujeta a

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$. Cuando no aparecen las condiciones de integralidad y en cambio $x \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un *problema de programación lineal (PL)* ([29]).

Resolver en forma efectiva problemas de optimización discreta es sumamente relevante, ya que estos problemas poseen numerosas aplicaciones, fundamentalmente en áreas de logística (diseño y asignación de rutas, distribución de mercadería, diseño de producción), planificación (diseño de torneos, asignación de aulas), diseño de redes de telecomunicación, asignación de recursos, diseño de portafolios de inversión, solo por nombrar algunos ejemplos [72].

Quizás el más representativo de los problemas de optimización combinatoria sea el *travelling salesman problem (TSP)* [68], en el cual el objetivo es determinar un recorrido de costo mínimo por una cierta cantidad de ciudades, visitando cada una de ellas exactamente una vez, y finalizando en la misma ciudad en la que comenzó el tour. Pese a su formulación sencilla, este problema es extremadamente difícil de resolver en forma exacta cuando la cantidad de ciudades es grande, lo mismo que sucede en numerosos problemas de optimización combinatoria. De hecho, tanto el TSP como la programación lineal entera en el caso general, en sus versiones de decisión, son NP-completos [63].

El trabajo fundacional sobre el TSP fue escrito por Dantzig, Fulkerson y Johnson en el año 1954 [34]. En este trabajo, además de resolver una instancia de este problema con 49 ciudades, se establecieron los fundamentos teóricos para el desarrollo de las técnicas que, hasta la actualidad, han resultado exitosas para resolver problemas de programación lineal entera en forma exacta: la *combinatoria poliedral* y los *algoritmos de planos de corte* [72].

Un algoritmo de planos de corte consiste básicamente en realizar los pasos que describimos a continuación.

1. Desechar las restricciones de integralidad de las variables, obteniendo de este modo un problema de programación lineal al que llamaremos *relajación lineal* del problema original.
2. Resolver la relajación lineal. Si el óptimo x^* tiene todas sus coordenadas enteras entonces es el óptimo del problema original. Si no, continuar al paso siguiente. Observemos que $z^* = f(x^*)$ es una cota inferior para el mínimo buscado.
3. Buscar una desigualdad lineal que sea válida para todas las soluciones enteras de las restricciones originales, pero que sea violada por x^* . Si puede encontrarse, esta desigualdad se agrega a la formulación y se repite el procedimiento.

Estos algoritmos se basan fuertemente en el hecho de que la programación lineal (PL) se puede resolver eficientemente en el caso general, ya sea mediante el método simplex [35], que en la práctica resulta efectivo aunque no tiene garantía teórica de ejecución en tiempo polinomial, o utilizando algún algoritmo que sí sea polinomial como el método del elipsoide [65] o los métodos de punto interior ([62]).

Al paso 3 se lo denomina *problema de separación* y al hiperplano definido por la desigualdad válida buscada se lo denomina *plano de corte*. Las estrategias para hallar estos cortes pueden dividirse en dos grandes grupos: buscar desigualdades propias del problema, o buscar desigualdades generadas por algoritmos generales, como es el caso de los cortes de Gomory [55].

El uso de cortes propios del problema produce, en general, mejores resultados y más aún si estos cortes se ajustan a la región factible, es decir, a las soluciones de (1.2). Una posible estrategia para hallar estos cortes es estudiar el poliedro

$$P = \text{conv}\{x \in \mathbb{Z}_+^n : Ax \leq b\} \quad (1.3)$$

(donde *conv* indica cápsula convexa usual), ya que nuestro problema original resulta equivalente a minimizar $z = f(x_1, \dots, x_n)$ sujeta a que $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$. El estudio del poliedro P es lo que habitualmente se denomina *estudio poliedral* del problema original. En la Figura 1.5 podemos ver un diagrama de las soluciones factibles de (1.2), el poliedro asociado (1.3) y la región factible de la relajación lineal.

En el mejor de los casos, un estudio poliedral nos permitirá hallar una descripción completa del poliedro P mediante desigualdades lineales, cuyo problema de separación asociado sea polinomial. Cuando esto sea posible podremos hallar el óptimo buscado simplemente aplicando algún algoritmo para el problema de programación lineal. Esta situación solo podría darse, eventualmente, en los casos en que el problema considerado pueda ser resuelto mediante un algoritmo polinomial [57].

Además de lo expuesto en el párrafo anterior, encontrar la descripción completa de un poliedro asociado a un problema de PLE polinomial posee interés teórico, ya que aporta evidencia a favor de

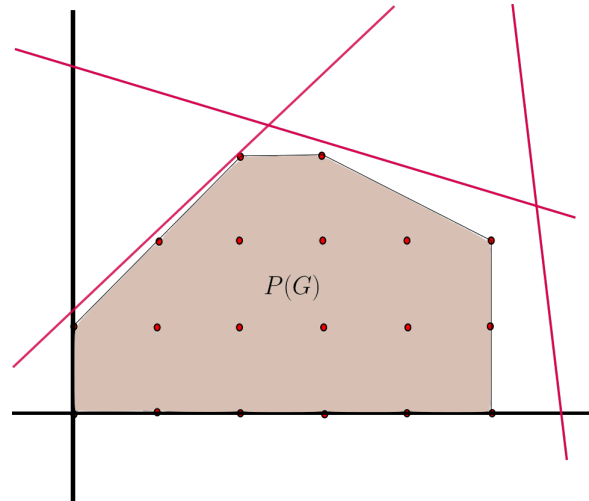


Figura 1.5: Geometría de un PLE.

la conjetura generalizada de que si un problema de PLE es polinomial, entonces es posible hallar la descripción completa del poliedro asociado a alguna formulación del problema. El resultado teórico que sustenta esta conjetura es que, como probaron Grötschel, Lovasz y Schrijver en el año 1981 en [57], hay una equivalencia en cuanto a su posibilidad de ser resuelto en tiempo polinomial, entre los problemas de optimización y separación sobre un poliedro. En este caso, para los problemas que sabemos que admiten una formulación que puede ser resuelta en tiempo polinomial, el resultado nos garantiza que el problema de separación correspondiente es polinomial, aunque en principio esto no garantiza una descripción completa polinomial. Sin embargo, en la práctica esto sí sucede, y de ahí surge esa conjetura. Podemos citar algunos trabajos donde se muestran descripciones completas de ciertos polítopos asociados a distintos problemas de optimización combinatoria resolubles en tiempo polinomial, como por ejemplo [3, 9, 28, 37, 43].

Si en cambio el problema no es polinomial, deberemos conformarnos con hallar familias de desigualdades válidas. Por lo expuesto anteriormente, es esperable que cuanto más se ajusten las desigualdades buscadas al poliedro P , más rápidamente nos acercaremos al óptimo buscado, por lo tanto resulta ideal hallar desigualdades que definan *facetas* (caras propias maximales) del poliedro P . Es por esto que la búsqueda de familias de facetas de P constituye uno de los principales objetivos de un estudio poliedral.

Las técnicas poliedrales han sido aplicadas con éxito no solo al TSP y sus variantes ([4, 58]), sino también a numerosos problemas NP-completos relevantes, como por ejemplo *coloreo de grafos* ([16, 19, 31, 36, 70]), el *linear ordering problem* ([56]), el *problema de conjunto independiente máximo* ([28, 73, 76]) por citar sólo algunos ejemplos.

Con respecto al problema de dominación en grafos, así como a sus variantes, si bien han sido ampliamente estudiados, hay pocos trabajos con un enfoque poliedral. Podemos mencionar algunos como [3, 9, 15, 47], aunque ninguno se ocupa de los parámetros de nuestro interés.

Lo que nos proponemos en esta tesis, ya que hasta donde llega nuestro conocimiento no se ha hecho hasta la actualidad, es realizar un estudio poliedral para el cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull así como para el número de 2-dominación de un grafo G .

1.5. Definiciones básicas

En esta sección presentamos las notaciones y definiciones básicas que utilizaremos repetidamente a lo largo de la tesis. Dado un conjunto \mathcal{X} , notaremos $2^{\mathcal{X}}$ al conjunto de partes de \mathcal{X} , $|\mathcal{X}|$ al cardinal de \mathcal{X} y $\overline{\mathcal{X}}$ al complemento de \mathcal{X} .

Teoría de grafos

Un *grafo* G consiste en un conjunto de *vértices* $V(G)$ y un conjunto $E(G)$ (o simplemente V y E cuando esté claro el contexto), formado por ciertos pares no ordenados de vértices a los que llamaremos *aristas de G* . En este caso la notación utilizada será $G = (V, E)$. A cada arista $e \in E$ la notaremos uv (ó vu) cuando $e = \{u, v\}$. Consideraremos únicamente grafos *simples*, es decir grafos donde $uu \notin E$ para todo $u \in V$. Diremos que $u \in V$ es *vecino* de $v \in V$ (o equivalentemente que u y v son *adyacentes*), cuando $uv \in E$. Definimos la *vecindad (abierto) de $v \in V$* como el conjunto formado por los vecinos de v , al que notaremos $N(v)$, mientras que la *vecindad cerrada* será notada $N[v]$, y está definida como $\{v\} \cup N(v)$. El *grado* de un vértice v , al que notaremos $\deg(v)$ es la cantidad de vecinos de v , es decir $|N(v)|$.

Un *camino* es un grafo simple cuyos vértices pueden ser ordenados de modo tal que dos vértices son adyacentes si y solo si son consecutivos. Al camino de n vértices lo notaremos \mathcal{P}_n , es decir $V(\mathcal{P}_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(\mathcal{P}_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\}$. Diremos que \mathcal{P}_n tiene *longitud $n-1$* . Notaremos C_n al *grafo ciclo de n vértices*, es decir al grafo cuyos vértices admiten un orden tal que $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_n v_1\}$, y \mathcal{K}_n al *grafo completo de n vértices*, es decir, al grafo que verifica que para todo par de vértices $v \neq u$ se tiene que $uv \in E$. Un *árbol* es un grafo conexo que no contiene ningún ciclo.

Diremos que un grafo H es un *subgrafo* del grafo G (o simplemente que H está contenido en G , y notaremos $H \subseteq G$), si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Dado un grafo $G = (V, E)$ y un subconjunto $S \subseteq V$, llamamos *sub-grafo inducido por S* al grafo G_S tal que $V(G_S) = S$ y $E(G_S) = \{uv \in E : u, v \in S\}$. Llamamos *matriz de adyacencia de G* a la matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq |V|}$ tal que $a_{ij} = 1$ si y solo si $i \in N(j)$, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario.

Un *camino de longitud k* en un grafo $G = (V, E)$ es un camino contenido en G , con k aristas de la forma $\{v_0 v_1, \dots, v_{k-1} v_k\}$ al que notaremos simplemente $v_0 v_1 \dots v_k$. En ese caso, también diremos que es un *camino entre v_0 y v_k* . Un grafo G se dice *conexo* si todo par de vértices distintos pertenece a un camino en G . En este trabajo sólo consideraremos grafos conexos. Para más detalles sobre las definiciones brindadas y propiedades de grafos se puede consultar [78].

Teoría poliedral

Un conjunto $\{v_i : 0 \leq i \leq r\} \subset \mathbb{R}^m$ es *afínmente independiente* si el conjunto $\{v_i - v_{i_0} : 1 \leq i \leq r, i \neq i_0\}$ es linealmente independiente o equivalentemente, si

$$\sum_{i=0}^r \lambda_i v_i = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^r \lambda_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \text{for} \quad 0 \leq i \leq r.$$

Un conjunto $T \subseteq \mathbb{R}^m$ es un *subespacio afín* o una *variedad lineal afín* si existe un subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^m$ y un vector v tales que $T = S + \{v\}$. La *dimensión afín de T* se define como $\dim_{\text{afín}}(T) := \dim(S)$, por lo tanto, es la cantidad máxima de vectores afínmente independientes en T menos 1.

Un *poliedro* $P \subseteq \mathbb{R}^m$ es la intersección finita de semiespacios cerrados, es decir, es un subconjunto de la forma

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax \leq b\}, \tag{1.4}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Si P es acotado lo llamaremos *polítopo*. Equivalentemente [79], un polítopo $P \subseteq \mathbb{R}^m$ es la *cápsula convexa* (conjunto formado por todas las *combinaciones convexas*) de un número finito de vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$, es decir

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, k \right\}.$$

La *dimensión* de un poliedro P , $\dim(P)$, es la mínima dimensión de un subespacio afín que lo contiene. Dicho de otro modo, es la máxima cantidad de puntos afínmente independientes en P menos 1. Diremos que $P \subseteq \mathbb{R}^m$ tiene *dimensión completa* si $\dim(P) = m$.

Dado un poliedro P en \mathbb{R}^m , diremos que

$$\pi x = \sum_{i=1}^m \pi_i x_i \leq \pi_0$$

es una *desigualdad válida para P* si $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m : \pi x \leq \pi_0\}$, es decir, si todo punto de P la verifica. Una *cara* de P es un poliedro de la forma $F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^m : \pi x = \pi_0\} \subseteq P$, donde $\pi x \leq \pi_0$ es una desigualdad válida para P y $F \neq \emptyset$. Llamamos *faceta* de P a una cara propia maximal de P y decimos que una desigualdad válida $\pi x \leq \pi_0$ *define faceta* si

$$\dim(P \cap \{x \in \mathbb{R}^m : \pi x = \pi_0\}) = \dim(P) - 1.$$

Las caras de dimensión 0 se denominan *vértices* o *puntos extremos* de P . Si P está dado como solución de un sistema de desigualdades lineales (1.4) entonces $x_0 \in P$ es un punto extremo de P si y solo si existe una submatriz inversible $A_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que x_0 es la única solución del sistema $A_0 x = b$.

Equivalentemente, un punto extremo no puede ser combinación convexa de dos puntos distintos de x_0 en P , y por lo tanto, todo punto extremo de P que pertenece a una cara F de P es también un punto extremo del poliedro F . Diremos que un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^m$ es un *poliedro entero* si todos sus vértices tienen todas sus coordenadas enteras. En [79] pueden encontrarse las demostraciones de las propiedades mencionadas, así como numerosas definiciones y propiedades de geometría poliedral.

1.6. Organización de la tesis

La tesis está organizada como describimos a continuación. En el Capítulo 2 iniciamos el estudio poliedral. Dado que éste es el primer estudio de este tipo que se realiza para el cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull, comenzamos brindando una formulación del problema. En primer lugar, en la Sección 2.1, planteamos un modelo de optimización lineal con variables binarias cuyo resultado es el número \mathcal{P}_3 -hull de un grafo dado. Un modelo análogo puede aplicarse para calcular el número de 2-dominación de un grafo. En esta misma sección analizamos exhaustivamente las restricciones propuestas para demostrar que el modelo es correcto, y establecemos la terminología básica que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo.

En la Sección 2.2 definimos los poliedros asociados a cada uno de los modelos, y demostramos sus propiedades básicas: ambos tienen dimensión completa y además el poliedro asociado al número de 2-dominación, así como sus facetas, resultan ser la proyección del poliedro asociado al número \mathcal{P}_3 -hull sobre sus últimas coordenadas (Teorema 2.2.2). Este resultado justifica de algún modo nuestro interés en el poliedro de 2-dominación. Además de ser un parámetro ampliamente estudiado con anterioridad al número \mathcal{P}_3 -hull, el estudio de su poliedro asociado nos proveerá parte de la estructura del poliedro asociado al número hull.

En la Sección 2.3 mostramos los resultados preliminares de algunos experimentos computacionales. Utilizamos el software PORTA (Polyhedron Representation Transformation Algorithm) [27], para encontrar la descripción completa y minimal (es decir, la totalidad de las facetas) del poliedro \mathcal{P}_3 -hull para grafos con muy pocos vértices y con estructuras muy sencillas. Aún así podemos ver que los poliedros resultantes poseen una gran cantidad de facetas y vértices. En las Secciones 2.4, 2.5 realizamos un análisis de las desigualdades del modelo para establecer condiciones bajo las cuales éstas definan facetas de los respectivos poliedros. Algo interesante acerca de estos resultados es que logramos establecer condiciones necesarias y suficientes para que esto ocurra, lo cual nos garantiza que éstas condiciones no pueden ser relajadas para lograr facetitud (Teoremas 2.4.2 y 2.5.1). La gran mayoría de los resultados obtenidos en este capítulo se encuentra en [10].

El Capítulo 3 está dedicado exclusivamente al estudio de familias de desigualdades válidas que no aparecen como restricciones en el modelo original. En la Sección 3.1 introducimos una primera familia que surge de manera natural al interpretar el proceso de propagación de los vértices inicialmente activos para ir activando a sus vecinos. También en este caso establecemos y demostramos condicio-

nes necesarias y suficientes para que las desigualdades mencionadas definan facetas de los poliedros correspondientes (Teorema 3.1.1). En las secciones subsiguientes, las desigualdades que estudiamos poseen una interpretación natural en términos de la convexidad \mathcal{P}_3 , y pudimos establecer condiciones necesarias y suficientes para que definan facetas de los correspondientes poliedros (Teorema 3.2.1). Al generalizar estas desigualdades de manera natural, obtuvimos resultados un poco más débiles para el caso del poliedro \mathcal{P}_3 -hull, en el sentido que pudimos establecer condiciones suficientes pero también probar que estas podrían relajarse un poco (Teoremas 3.2.4 y 3.2.5) para que estas desigualdades definan facetas del poliedro hull. En el caso del poliedro de 2-dominación en cambio, pudimos obtener condiciones necesarias y suficientes para que estas desigualdades definan facetas de su poliedro asociado (Teorema 3.2.3). En la Sección 3.3, generalizamos nuevamente las desigualdades de la sección anterior, obteniendo de este modo una familia de desigualdades válidas que no solo poseen interés para el estudio de los problemas particulares tratados en este trabajo, sino que hemos observado que su estructura puede replicarse en distintos problemas de optimización combinatoria.

En el Capítulo 4 nos abocamos a mostrar descripciones completas de los poliedros \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación para familias particulares de grafos. Estos resultados poseen interés desde el punto de vista teórico, ya que brindan la contraparte poliedral de resultados (algunos evidentes) sobre el cálculo efectivo de los parámetros correspondientes, como ser el caso de grafos camino (Sección 4.1), ciclos (Sección 4.2) y grafos completos (Sección 4.3) (Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 y 4.3.1). Para el caso de grafos árbol (Sección 4.4) presentamos la descripción completa del poliedro del 2-dominación (Teorema 4.4.1), que por resultados anteriores nos brinda parte de la descripción completa del poliedro \mathcal{P}_3 -hull. Los resultados de los Capítulos 3 y 4 se encuentran mayoritariamente en [11].

Para finalizar, en el Capítulo 5 mencionamos algunas conclusiones del trabajo así como posibles líneas de trabajo futuro.

Capítulo 2

Modelos de programación lineal entera y sus propiedades

En este capítulo comenzamos un estudio poliedral asociado al cálculo de los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo. En primer lugar, es necesario formular los problemas en el lenguaje de la programación lineal entera, para luego definir los poliedros que estudiaremos. La relación que existe entre los conceptos de 2-dominación y 2-conversión tiene su contraparte poliedral, exhibida en el Teorema 2.2.2. En este teorema demostramos que el polítopo de 2-dominación es una proyección del \mathcal{P}_3 -hull, así como cada una de sus facetas lo es. Este hecho nos permitirá enfocarnos simultáneamente en el estudio de ambos poliedros.

En la Sección 2.3 mostramos los resultados de algunos experimentos computacionales utilizando el software PORTA. Estos resultados permiten observar la enorme cantidad de facetas y puntos extremos de los poliedros que estudiamos, aún para casos de grafos de naturaleza muy sencilla. Las Secciones 2.4 y 2.5 se dedican a analizar la facetitud de las restricciones de los modelos propuestos.

2.1. Modelos de programación lineal entera

En esta sección, discutiremos formulaciones de los problemas del cálculo de los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo, como problemas de programación lineal entera. Mostraremos las restricciones de los modelos y, por último, el Teorema 2.1.1 demostrará que ambas formulaciones son correctas.

Sea $V = \{1, \dots, n\} \cup V_1$ el conjunto de vértices de G , donde $V_1 = \{n + 1, \dots, n + k\}$ es el conjunto de vértices de grado 1. Para cada $i \in V \setminus V_1$, sea $C_i := |N(i) \cap V_1|$, es decir, la cantidad de vecinos del

vértice i que tienen grado 1 para $1 \leq i \leq n$.

Recordemos brevemente el proceso de propagación (o 2-conversión) en tiempo discreto de una propiedad a través de los vértices de un grafo que queremos modelar. Diremos que un vértice i está *activo* en t si verifica la propiedad en tiempo t , y por lo tanto tiene la capacidad de transmitirla. Un vértice estará activo ya sea porque inicialmente tenía la propiedad (y no la perdió) o porque la adquirió en algún momento a través de dos de sus vecinos. Los vértices activos pueden influir a sus vecinos de modo que si un vértice i tiene al menos dos vecinos en t entonces i puede activarse en $t + 1$. En nuestro caso, es necesario que finalmente todos los vértices de G terminen activos, por lo tanto es necesario que todos los vértices de grado 1 comiencen activos en tiempo inicial $t = 0$, y que nunca dejen de estarlo. Asociaremos entonces, una variable binaria para cada vértice i en $V \setminus V_1$, que además dependerá del tiempo t y que indicará si en tiempo t el vértice i está activo. Como la cantidad de pasos necesaria para que un conjunto S de vértices inicialmente activos, que contiene a V_1 , se establezca en su cápsula convexa es a lo sumo $m := n + k - \max\{2, k\}$ (ver Observación 1.2.1), consideraremos $0 \leq t \leq m$.

En resumen, definiremos un *vector de estado en tiempo* $t \in \{0, \dots, m\}$ como un vector de coordenadas binarias $x_t = (x_{it})_{1 \leq i \leq n} \in \{0, 1\}^n$ tal que $x_{it} = 1$ si y solo si el vértice i se encuentra activo en tiempo t .

Las siguientes desigualdades aseguran que sólo puedan estar activos en tiempo t los vértices que ya lo estaban en el tiempo $t - 1$, o aquellos con al menos dos vecinos activos en el tiempo $t - 1$, incluyendo como vértices activos en todo momento a los vértices de grado 1.

$$2x_{i(t+1)} \leq 2x_{it} + \sum_{j \in N(i) \setminus V_1} x_{jt} + C_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq t \leq m - 1. \quad (2.1)$$

Además, para que el proceso de propagación termine con todos los vértices de V activos, debemos agregar las restricciones

$$x_{im} = 1 \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

En lo que sigue, mostraremos que estas restricciones son suficientes para calcular el número \mathcal{P}_3 -hull de un grafo con una función objetivo adecuada. Para esto necesitamos la siguiente definición.

Definición 2.1.1. Sea $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m} \in \{0, 1\}^{n(m+1)}$ un vector binario tal que $x_t = (x_{it})_{1 \leq i \leq n}$. Definimos el soporte de x en el tiempo t como el subconjunto de vértices

$$S_t^x := \{i \in V : x_{it} = 1\} \cup V_1 \quad \text{para } 0 \leq t \leq m.$$

Dicho de otro modo, el soporte es el conjunto de vértices activos en el tiempo t . El siguiente lema tiene una demostración inmediata y muestra que las desigualdades (2.1) modelan la propagación según la regla que estamos considerando. Es decir, los vértices activos en t ya lo estaban en $t - 1$ o al menos dos de sus vecinos lo estaban en $t - 1$.

Lema 2.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple conexo con $V \setminus V_1 = \{1, \dots, n\}$. Sea $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m}$ un vector binario tal que $x_t \in \{0, 1\}^n$ para $0 \leq t \leq m$. Entonces x verifica las desigualdades (2.1) si y solo si

$$S_t^x \subseteq N_2(S_{t-1}^x) \quad \text{para todo } 1 \leq t \leq m. \quad (2.3)$$

Demostración. Sea $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m}$ un vector binario solución de (2.1), si $S_t^x \not\subseteq N_2(S_{t-1}^x)$ para algún $1 \leq t \leq m$, entonces existe algún $l \in S_t^x$ (es decir, $x_{lt} = 1$ o $l \in V_1$) tal que $l \notin N_2(S_{t-1}^x)$ (es decir, $x_{l(t-1)} = 0$ y $|N(l) \cap S_{t-1}^x| \leq 1$), pero entonces x no verifica

$$2x_{lt} \leq \sum_{i \in N(l) \setminus V_1} x_{i(t-1)} + 2x_{l(t-1)} + C_l$$

ya que $|N(l) \cap S_{t-1}^x| \leq 1$ implica que $\sum_{i \in N(l) \setminus V_1} x_{i(t-1)} + C_l \leq 1$. Con el mismo argumento se demuestra la implicación recíproca. \square

Estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, que asegura que todo conjunto de 2-conversión es el soporte, en $t = 0$, de alguna solución factible de las restricciones consideradas, y viceversa.

Teorema 2.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo con $V \setminus V_1 = \{1, \dots, n\}$, y sea $S \subseteq V$. Entonces S es un conjunto de 2-conversión (es decir $\text{hull}(S) = V$) si y solo si existe $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m} \in \{0, 1\}^{n(m+1)}$ solución factible de (2.1) y (2.2) tal que $S_0^x = S$.

Demostración. Sea $S \subseteq V$ tal que $\text{hull}(S) = V$. Sabemos que $\delta(S) \leq m$ (ver Observación 1.2.1). Definimos el vector $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m} \in \{0, 1\}^{n(m+1)}$ tal que $x_{it} = 1$ si y solo si $i \in N_2^t(S) \setminus V_1$ para $t = 0, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$. En particular, $S_0^x = N_2^0(S) = S$, $N_2^m(S) = V$ y entonces $x_{im} = 1$ para $i = 1, \dots, n$. Además, $N_2^t(S) \subseteq N_2^{t+1}(S)$ y entonces $S_t^x = N_2(S_{t-1}^x)$. Luego, por el Lema 2.1.1, x verifica (2.1) y (2.2).

Por otro lado, si x es una solución factible de (2.1) y (2.2) tal que $S_0^x = S$ entonces $S_t^x \subseteq N_2(S_{t-1}^x)$. En particular, $S_1^x \subseteq N_2(S_0^x)$, $S_2^x \subseteq N_2(S_1^x) \subseteq N_2(N_2(S_0^x)) = N_2^2(S_0^x)$ y, finalmente, $V = S_m^x \subseteq N_2^m(S_0^x)$, entonces $\text{hull}(S) = V$. \square

Como corolario inmediato obtenemos una formulación del problema del cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull como un problema de programación lineal entera.

Corolario 2.1.1. El número \mathcal{P}_3 -hull de G se puede calcular como

$$\text{hull}(G) = k + \min \sum_{i=1}^n x_{i0},$$

donde $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m} \in \{0, 1\}^{n(m+1)}$ verifica (2.1) y (2.2).

Observemos que el tiempo, es decir, la cantidad de pasos, necesario para propagar la propiedad a todos los vértices de V no es relevante para nuestros propósitos, por lo tanto no incluimos en el modelo las restricciones

$$x_{it} \leq x_{i(t+1)} \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 0 \leq t \leq m-1,$$

ni tampoco

$$x_{i(t+1)} \geq x_{jt} + x_{kt} - 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n, j, k \in N(i) \text{ y } 0 \leq t \leq m-1.$$

Dicho de otro modo, el hecho de que el vértice i tenga al menos dos vecinos que propagan la propiedad en el tiempo t no implicará necesariamente que i se active en $t+1$, y además no pediremos que el proceso sea irreversible. En resumen, para calcular el número \mathcal{P}_3 -hull de G , solo será necesario considerar las restricciones (2.1) y (2.2), permitiendo soluciones en las cuales $x_{it} = 0$ aunque $x_{i(t-1)} = 1$ y $x_{i(t+1)} = 0$ aunque $x_{jt} = x_{kt} = 1$ para i, t y $j, k \in N(i)$. Como veremos más adelante, el hecho de no considerar estas restricciones simplifica el estudio del poliedro asociado al modelo correspondiente, sin modificar el problema de optimización.

Reescribiremos ahora el modelo en forma matricial, reemplazando además las igualdades (2.2) en el resto de las restricciones (2.1). Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ la matriz de adyacencia del subgrafo de G inducido por los vértices de grado al menos 2, \overline{V}_1 , y sean $I_n \in \{0, 1\}^{n \times n}$ la matriz identidad y $C = (C_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el vector columna donde $C_i := |N(i) \cap V_1|$. Si $x_t = (x_{it})_{1 \leq i \leq n}$ para $0 \leq t \leq m$, podemos expresar las restricciones (2.1) como

$$2x_{t+1} \leq (A + 2I_n)x_t + C \text{ para } 0 \leq t \leq m-1. \quad (2.4)$$

Además, reemplazando $x_{im} = 1$, en las restricciones correspondientes a $t = m-1$ obtenemos

$$\overbrace{(2, \dots, 2)}^n \leq (A + 2I_n)x_{m-1} + C.$$

En resumen, una formulación del problema del cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull como un problema de programación lineal entera es:

$$\text{mín } z := |V_1| + \sum_{i=1}^n x_{i0}$$

sujeto a

$$2x_{t+1} \leq (A + 2I)x_t + C \text{ para } 0 \leq t \leq m-2, \quad (2.5)$$

$$\overbrace{(2, \dots, 2)}^n \leq (A + 2I)x_{m-1} + C, \quad (2.6)$$

$$x_t \in \{0, 1\}^n \text{ para } 0 \leq t \leq m-1, \quad (2.7)$$

donde $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm} = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$, $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{nt}) \in \mathbb{R}^n$ para cada $0 \leq t \leq m-1$ (el vector de estado del grafo G en tiempo t), y $m = n + k - \max\{2, k\}$.

Por la Observación 1.2.2, una formulación para calcular el número de 2-dominación de G es

$$\text{mín } z := |V_1| + \sum_{i=1}^n x_i$$

sujeto a:

$$\overbrace{(2, \dots, 2)}^n \leq (A + 2I)x + C, \quad (2.8)$$

$$x \in \{0, 1\}^n. \quad (2.9)$$

El siguiente teorema es una consecuencia directa del Lema 2.1.1, y establece condiciones necesarias y suficientes para que el vector $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1}$ sea una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7).

Teorema 2.1.2. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo, $V = \{1, \dots, n\} \cup V_1$ con $\deg(i) \geq 2$ para $1 \leq i \leq n$ y $V_1 = \{n+1, \dots, n+k\}$. Sea $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm}$ un vector tal que $x_t \in \{0, 1\}^n$. Entonces x es una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) si y solo si*

$$N_2(S_{m-1}^x) = V \quad \text{y} \quad S_t^x \subseteq N_2(S_{t-1}^x) \quad \text{para cada } 1 \leq t \leq m-1.$$

Los siguientes dos corolarios son muy sencillos de demostrar y los utilizaremos repetidamente a lo largo de este trabajo.

Corolario 2.1.2. *Sea $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1}$ un vector tal que $x_t \in \{0, 1\}^n$. Si x es una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) entonces*

$$\text{hull}(S_t^x) = V \quad \text{y} \quad \delta(S_t^x) \leq m-t \quad \text{para } 0 \leq t \leq m-1.$$

Demostración. Como consecuencia del teorema anterior tenemos que

$$V = N_2(S_{m-1}^x) \subseteq N_2(N_2(S_{m-2}^x)) = N_2^2(S_{m-2}^x) \subseteq \dots \subseteq N_2^{m-t}(S_t^x)$$

para todo $0 \leq t \leq m-1$ y entonces $N_2^{m-t}(S_t^x) = V$. □

Corolario 2.1.3. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo y sea $S \subseteq V$ tal que $\text{hull}(S) = V$. Sea $0 \leq t_0 \leq m-1$ tal que $\delta(S) \leq m-t_0$. Entonces, existe $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm}$, solución factible de (2.5), (2.6), (2.7), tal que*

$$S_t^x = V \quad \text{para } 0 \leq t < t_0 \quad \text{y} \quad S_{t_0}^x = S.$$

Demostración. Sea e_i el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n para $1 \leq i \leq n$. Definimos $x \in \mathbb{R}^{nm}$ del siguiente modo:

$$x_t = \sum_{1 \leq i \leq n} e_i \quad \text{para } 0 \leq t < t_0,$$

$$x_{t_0} = \sum_{i \in S \setminus V_1} e_i,$$

y

$$x_{t_0+k} = \sum_{i \in N^k(S) \setminus V_1} e_i \quad \text{para } k = 1, \dots, m-1-t_0.$$

Resulta claro que $S_t^x = V$ para $0 \leq t < t_0$, $S_{t_0}^x = S$ y $S_{t_0+k}^x = N_2^k(S)$ para $k = 1, \dots, m-1-t_0$, luego

$$N_2(S_{m-1}^x) = N_2(S_{t_0+(m-1-t_0)}^x) = N_2(N_2^{m-1-t_0}(S)) = N_2^{m-t_0}(S) = V,$$

(la última igualdad se debe a la hipótesis de que $\delta(S) \leq m-t_0$). Entonces, por el Teorema 2.1.1 podemos deducir que x es factible. \square

El corolario anterior nos permite construir una solución factible cuyo soporte en un determinado t coincide con un conjunto dado, cuya cápsula convexa es V , utilizando la cota sobre su parámetro δ para que la conversión se complete en los pasos que quedan, es decir en $m-t$ pasos. En el siguiente corolario también establecemos la existencia de una solución factible cuyo soporte en t es un conjunto de 2-conversión dado, pero en lugar de tener una cota sobre su parámetro δ , utilizaremos datos sobre su cardinal. Esto nos permitirá que la solución construída tenga una forma particular, que nos resultará conveniente para muchas de las demostraciones que realizaremos a lo largo de la tesis.

Corolario 2.1.4. Sean $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo y $C \subseteq V \setminus V_1$, $C \neq \emptyset$, tal que $\text{hull}(\overline{C}) = V$. Si $|C| = s \leq m-t$ entonces la sucesión de subconjuntos de V dada por

- $S_t = V$ si $0 \leq t < t_0$,
- $S_{t_0} = \overline{C}$,
- $S_{t_0+r} = S_{t_0+r-1} \cup \{l_r\}$ donde $l_r \in N_2(S_{t_0+r-1}) \setminus S_{t_0+r-1}$, si $r = 1, \dots, s-1$,
- $S_t = V$ para $t_0 + s \leq t \leq m-1$

está bien definida y, además, existe una solución factible $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm}$ de (2.5), (2.6) y (2.7) tal que $S_t^x = S_t$ para $t = 0, \dots, m-1$.

Demostración. Para ver que la sucesión está bien definida, tenemos que ver que $N_2(S_{t_0+r-1}) \setminus S_{t_0+r-1} \neq \emptyset$, para $r = 1, \dots, s-1$. Supongamos que esto no sucede y sea r el menor natural tal que $N_2(S_{t_0+r-1}) = S_{t_0+r-1}$. En este caso, $\text{hull}(S_{t_0+r-1}) = S_{t_0+r-1}$, como además $V = \text{hull}(S_{t_0}) \subseteq \text{hull}(S_{t_0+r-1})$, tenemos que $S_{t_0+r-1} = V$, pero esto no es posible ya que $|S_{t_0+r-1}| = |V| - s + r - 1 < |V|$ si $r \leq s-1$. Por lo tanto los conjuntos S_{t_0+r} están bien definidos. Además verifican las condiciones del Teorema 2.1.2, ya que claramente $S_{t+1} \subseteq N_2(S_t)$ y $V = N_2(S_{t_0+s-1}) \subseteq N_2(S_{m-1})$, por lo tanto existe una solución factible de las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) cuyo soporte en t , S_t^x , coincide con S_t para $0 \leq t \leq m-1$. \square

2.2. Polítopos de 2-dominación y \mathcal{P}_3 -hull. Algunas propiedades.

En esta sección definimos los polítopos que constituyen el objeto de estudio de esta tesis. Calculamos la dimensión de cada uno y estudiamos la relación entre ambos, así como entre sus facetas.

Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \{0, 1\}^{n \times n}$ la matriz de adyacencia del subgrafo de G inducido por los vértices de grado al menos 2, es decir \overline{V}_1 , y sean $I_n \in \{0, 1\}^{n \times n}$ la matriz identidad y $C = (C_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el vector columna donde $C_i := |N(i) \cap V_1|$. En las siguientes definiciones consideramos $x_t = (x_{it})_{1 \leq i \leq n}$ para $0 \leq t \leq m$.

Definición 2.2.1. Llamamos polítopo de 2-dominación de G a

$$P_{2dom}(G) := \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^n : \overbrace{(2, \dots, 2)}^n \leq (A + 2I)x + C\}, \quad (2.10)$$

donde *conv* indica cápsula convexa en el sentido usual.

Definición 2.2.2. Llamamos polítopo \mathcal{P}_3 -hull de G a

$$P_{hull}(G) := \text{conv}\{x \in \{0, 1\}^{nm} : 2x_{t+1} \leq (A + 2I)x_t + C \text{ y } \overbrace{(2, \dots, 2)}^n \leq (A + 2I)x_{m-1} + C\}, \quad (2.11)$$

donde *conv* indica cápsula convexa en el sentido usual.

En el siguiente lema mostramos un conjunto de soluciones factibles en $P_{hull}(G)$, formado por el vector cuyas coordenadas valen todas 1, y los vectores binarios que tienen una única coordenada nula. Luego, en el teorema que sigue demostraremos que dicho conjunto es afínmente independiente. Esto nos permitirá deducir propiedades importantes de los polítopos previamente definidos.

Lema 2.2.1. Sean $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$ y E_{it} el it -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{nm} para $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m-1$. Entonces los vectores

$$x^0 := \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} E_{it} \quad \text{y} \quad x^{i_0 t_0} := \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z} \setminus (i_0, t_0)} E_{it},$$

verifican las restricciones del modelo (2.5), (2.6) y (2.7) para $1 \leq i_0 \leq n$ y $0 \leq t_0 \leq m-1$, es decir, pertenecen a $P_{hull}(G)$.

Demostración. Para x^0 tenemos que $S_t^{x^0} = V$ para todo $0 \leq t \leq m-1$. Entonces, es trivial que x^0 satisface las hipótesis del Teorema 2.1.2 y luego, es una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7). Análogamente, para el vector $x^{i_0 t_0}$, tenemos que $S_t^{x^{i_0 t_0}} = V$ para todo $0 \leq t \leq m-1$, $t \neq t_0$ y $S_{t_0}^{x^{i_0 t_0}} = V \setminus \{i_0\}$. Claramente, $N_2(V \setminus \{i_0\}) = V$ ya que $\deg(i_0) \geq 2$, y entonces estos vectores también verifican las condiciones del Teorema 2.1.2. \square

Estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, que establece que tanto el poliedro \mathcal{P}_3 -hull como el de 2-dominación tienen dimensión completa.

Teorema 2.2.1. *Los polítopos $P_{\text{hull}}(G)$ y $P_{2\text{dom}}(G)$ definidos en (2.11) y (2.10) respectivamente, tienen dimensión completa para todo grafo simple y conexo $G = (V, E)$.*

Demostración. Es fácil ver que el conjunto de $nm + 1$ vectores definidos en el Lema 2.2.1, $\{x^0, x^{i_0 t_0} : (i_0, t_0) \in \mathcal{Z}\} \subseteq P_{\text{hull}}(G) \subseteq \mathbb{R}^{nm}$, es afinmente independiente, ya que $\{x^0 - x^{i_0 t_0} : (i_0, t_0) \in \mathcal{Z}\}$ es el conjunto de vectores canónicos de \mathbb{R}^{nm} y entonces $\dim(P_{\text{hull}}(G)) \geq nm$. Del mismo modo, se puede ver que el conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^n e_i, \sum_{i=1}^n e_i - e_j : 1 \leq j \leq n \right\}$$

está incluido en $P_{2\text{dom}}(G)$ y es afinmente independiente. \square

El próximo teorema brinda la contraparte poliedral de la relación entre los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo (ver Observación 1.2.3), mostrando que el poliedro de 2-dominación y sus facetas resultan de proyectar el poliedro \mathcal{P}_3 -hull y sus facetas sobre las últimas n coordenadas, correspondientes a $t = m - 1$. Para su demostración haremos uso del resultado enunciado en siguiente lema, que utilizaremos en repetidas oportunidades a lo largo de la tesis.

Lema 2.2.2. *Sea $P \subseteq \mathbb{R}^k$ un poliedro de dimensión completa y $F \subseteq P$ una cara de P tal que*

$$F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^k : \pi x = \pi_0\}$$

donde $\pi \in \mathbb{R}^k$, $\pi_0 \in \mathbb{R}$ y $\pi x \leq \pi_0$ es una desigualdad válida para P . Entonces F es una faceta de P si y solo si se verifica que

$$F \subseteq \{x \in \mathbb{R}^k : \lambda x = \lambda_0\} \Rightarrow (\lambda, \lambda_0) = \alpha(\pi, \pi_0) \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Demostración. Si la faceta F no cumple la propiedad (2.12), entonces $\dim(F) \leq k - 2$ ya que está contenida en el subespacio afín definido por las ecuaciones $\pi x = \pi_0$ y $\lambda x = \lambda_0$, para algún vector (λ, λ_0) que no es múltiplo de (π, π_0) . Por otro lado, una cara que verifica la propiedad (2.12) necesariamente es una faceta, ya que de otro modo existe un subespacio afín de dimensión menor o igual que $k - 2$ que la contiene. Este subespacio está definido por al menos dos ecuaciones, alguna de las cuales necesariamente no es múltiplo de la ecuación $\pi x = \pi_0$. \square

Teorema 2.2.2. *Sea $p : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección sobre las últimas n coordenadas, es decir*

$$p((x_t)_{0 \leq t \leq m-1}) = x_{m-1}.$$

Entonces $p(P_{\text{hull}}(G)) = P_{2\text{dom}}(G)$. Además, la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{i(m-1)} \leq \lambda \quad (2.13)$$

define una faceta (resp. es una desigualdad válida) de $P_{hull}(G)$ si y solo si la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \lambda \quad (2.14)$$

define una faceta (resp. es una desigualdad válida) de $P_{2dom}(G)$.

Demostración. La inclusión $p(P_{hull}(G)) \subseteq P_{2dom}(G)$ es directa, ya que es válida para las soluciones factibles de las desigualdades (2.5) y (2.6), y $P_{2dom}(G)$ es convexo. Por otro lado, si $x_{m-1} \in \{0, 1\}^n$ verifica (2.6), es fácil ver que $x = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1}$ tal que $x_{it} = 1$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t \leq m-2$ verifica (2.5) y (2.6). Por lo tanto $P_{2dom}(G) \subseteq p(P_{hull}(G))$ y luego los polítopos son iguales.

Supongamos ahora que (2.13) es una desigualdad válida para $P_{hull}(G)$. Si $x \in P_{2dom}(G)$ entonces existe un punto $(x_t)_{0 \leq t \leq m-1} \in P_{hull}(G)$ tal que $x_{m-1} = x$ y entonces x verifica la desigualdad (2.13) que en consecuencia también es válida para $P_{2dom}(G)$. De manera análoga se puede ver que si (2.14) es una desigualdad válida para $P_{2dom}(G)$, entonces (2.13) es válida para $P_{hull}(G)$.

Sean

$$F_{hull} := P_{hull}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_{i(m-1)} = \lambda\}$$

y

$$F_{2dom} := P_{2dom}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_i = \lambda\}.$$

Supongamos que F_{hull} es una faceta de $P_{hull}(G)$ y que F_{2dom} es una cara de $P_{2dom}(G)$ de dimensión menor que $n-1$, es decir $\dim(F_{2dom}) \leq n-2$. Entonces, por el Lema 2.2.2,

$$F_{2dom} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i = \alpha\}$$

para algún $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha)$ que no es múltiplo de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda)$. Esto implica que

$$F_{hull} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_{i(m-1)} = \lambda\} \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_{i(m-1)} = \alpha\},$$

lo cual no es posible ya que F_{hull} es una faceta del polítopo de dimensión completa $P_{hull}(G)$.

Supongamos ahora que F_{2dom} es una faceta de $P_{2dom}(G)$. Para cada $x \in F_{2dom}$ podemos definir $p^{-1}(x) = (x_t)_{0 \leq t \leq m-1}$ tal que $x_{m-1} = x$ y $x_{it} = 1$ para $0 \leq t \leq m-2$ y $1 \leq i \leq n$. Es decir, todas las coordenadas de $p^{-1}(x)$ valen 1 excepto las correspondientes a $t = m-1$ que coinciden con las de x . Es fácil ver que estos todos estos puntos $p^{-1}(x)$ con $x \in F_{2dom}$ pertenecen a $P_{hull}(G)$ ya que verifican las restricciones (2.5) y (2.6), y además verifican que $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_{i(m-1)} = \lambda$ ya que los x lo hacen. Por lo tanto, estos puntos pertenecen a F_{hull} .

Para cada $x \in F_{2dom}$ consideremos el conjunto $A^x := \{p^{-1}(x)\} \cup \{p^{-1}(x) - E_{i_0 t_0} : 0 \leq t_0 \leq m-2, 1 \leq i_0 \leq n\}$. Se puede ver que $A^x \subseteq F_{hull}$ para todo $x \in F_{2dom}$ ya que

- todos los puntos de A^x verifican $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_{i(m-1)} = \lambda$, pues las coordenadas correspondientes a $t = m - 1$ coinciden con las de x y estas verifican dicha ecuación al pertenecer a F_{2dom} , y además
- todos los puntos de A^x verifican las restricciones (2.6), ya que las coordenadas correspondientes a $t = m - 1$ coinciden con las de x y estas verifican (2.8) pues pertenecen a $P_{2dom}(G)$. Además, todas las coordenadas correspondientes a $t \leq m - 2$ valen 1 excepto una correspondiente a algún $1 \leq i_0 \leq n$, $0 \leq t_0 \leq m - 2$. Como el grado del vértice i_0 es al menos 2, es fácil ver que se verifican las condiciones del Teorema 2.1.2, y entonces $A^x \subseteq F_{hull}$.

Para concluir la demostración veamos que F_{hull} cumple la condición enunciada en el Lema 2.2.2, y por lo tanto es una faceta de $P_{hull}(G)$. Supongamos que $F_{hull} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \alpha_{it} x_{it} = \alpha\}$ y tomemos $x^1 \in F_{2dom}$. Tenemos que $p^{-1}(x^1)$ y $p^{-1}(x^1) - E_{i_0 t_0}$ deben verificar la ecuación $\sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \alpha_{it} x_{it} = \alpha$ para $1 \leq i_0 \leq n$ y $0 \leq t_0 \leq m - 2$, entonces

$$\sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}, t \neq m-1} \alpha_{it} + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i(m-1)} x_i^1 = \alpha \quad (2.15)$$

y

$$\sum_{(i,t) \in \mathcal{Z} \setminus \{(i_0, t_0)\}, t \neq m-1} \alpha_{it} + \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_{i(m-1)} x_i^1 = \alpha. \quad (2.16)$$

Restando (2.15) y (2.16) tenemos que $\alpha_{i_0 t_0} = 0$ para $1 \leq i_0 \leq n$ y $0 \leq t_0 \leq m - 2$.

Entonces, $p^{-1}(x)$ debe verificar $\sum_i \alpha_{i(m-1)} x_{i(m-1)} = \alpha$ para todo $x \in F_{2dom}$, y luego todo $x \in F_{2dom}$ verifica esta igualdad también. Necesariamente entonces, por el Lema 2.2.2, la ecuación tiene que ser múltiplo de $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x_{i(m-1)} = \lambda$, por lo tanto $(0, \dots, 0, \alpha_{1(m-1)}, \dots, \alpha_{n(m-1)}, \alpha)$ es múltiplo de $(0, \dots, 0, \lambda_{1(m-1)}, \dots, \lambda_{n(m-1)}, \lambda)$ y eso completa la demostración. \square

Tanto el número de 2-dominación como el número \mathcal{P}_3 -hull poseen interés en sí mismos, más allá de la evidente relación entre ellos, la cual muestra el Teorema 2.2.2 desde el punto de vista poliedral. En lo que sigue, definiremos nuevos parámetros que generalizaran en algún sentido a los parámetros que estudiamos. El número de 2-dominación es el menor cardinal de un subconjunto $S \subseteq V$ que propaga una determinada propiedad al resto de los vértices en (a lo sumo) un paso, es decir, que verifica $N_2(S) = V$, mientras que para calcular el número \mathcal{P}_3 -hull pedimos que el conjunto S active a la totalidad de los vértices en (a lo sumo) m pasos. Es natural entonces preguntarnos por la menor cantidad de elementos de un subconjunto S que convierta al resto de los vértices en (a lo sumo) k pasos, donde $1 \leq k \leq m$, es decir $N_2^k(S) = V$. Estos nuevos parámetros, a los cuales notaremos $\gamma_k(G)$, además de tener interés teórico, pueden servir para aproximar, en algún sentido al número \mathcal{P}_3 -hull, como veremos a continuación.

Definición 2.2.3. Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Definimos $\gamma_2^k := \min\{|S| : \text{hull}(S) = V \text{ y } \delta(S) \leq k\} = \min\{|S| : N_2^k(S) = V\}$. Este parámetro puede ser calculado como

$$\gamma_2^k(G) = |V_1| + \min \sum_{i=1}^n x_{i(m-k)}$$

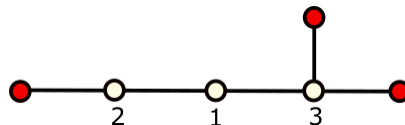


Figura 2.1: Grafo G .

sujeto a las restricciones (2.5) para $t = m - k, \dots, m - 2$, la restricción (2.6), y $x_{it} \in \{0, 1\}$ para $i = 1, \dots, n$, $t = m - k, \dots, m - 1$. Definimos el poliedro asociado

$$P_k(G) := \text{conv}\{(x_t)_{m-k \leq t \leq m-1} \in \{0, 1\}^{nk} : x_t \text{ verifica (2.5) para } t = m - k, \dots, m - 1, \text{ y } x_{m-1} \text{ verifica (2.6)}\}.$$

El siguiente teorema generaliza al Teorema 2.2.2 y su demostración es completamente análoga.

Teorema 2.2.3. Sea $p_k : \mathbb{R}^{nm} \rightarrow \mathbb{R}^{nk}$ la proyección definida como $p((x_t)_{0 \leq t \leq m-1}) = (x_t)_{m-k \leq t \leq m-1}$ para $1 \leq k \leq m$. Entonces,

1. $P_k(G) = p_k(P_{\text{hull}}(G))$ es un polígono de dimensión completa en \mathbb{R}^{nk} para $1 \leq k \leq m$,
2. $\sum_{t=m-k}^{m-1} \sum_{i=1}^n \lambda_{it} x_{it} \leq \lambda$ define una faceta (resp. es una desigualdad válida) de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si define una faceta (resp. es una desigualdad válida) de $P_k(G)$.

A continuación mostraremos dos ejemplos de cómo puede ser utilizado este último teorema. En ambos ejemplos el cálculo del número \mathcal{P}_3 -hull es inmediato, sin embargo nuestro propósito es mostrar la parte poliedral de estos problemas y como podríamos utilizar estos resultados en otros casos no triviales.

Ejemplo 1: En la Figura 2.2 podemos observar la salida luego de utilizar el software PORTA para hallar la descripción completa del poliedro de \mathcal{P}_3 -hull para el grafo G de la Figura 2.1. Observemos que en este caso $V \setminus V_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $m = 3$, y las restricciones del modelo (2.5), (2.6) que definen al poliedro \mathcal{P}_3 -hull son:

$$2x_{10} + x_{30} + x_{20} \geq 2x_{11}, \quad 2x_{20} + x_{10} + 1 \geq 2x_{21}, \quad 2x_{30} + x_{10} + 2 \geq 2x_{31}, \quad (2.17)$$

$$2x_{11} + x_{31} + x_{21} \geq 2x_{12}, \quad 2x_{21} + x_{11} + 1 \geq 2x_{22}, \quad 2x_{31} + x_{11} + 2 \geq 2x_{32}, \quad (2.18)$$

$$2x_{12} + x_{32} + x_{22} \geq 2, \quad 2x_{22} + x_{12} + 1 \geq 2, \quad 2x_{32} + x_{12} + 2 \geq 2, \quad (2.19)$$

junto con $x_{it} \in \{0, 1\}$ para $i = 1, 2, 3$ y $t = 0, 1, 2$. Por otro lado, las restricciones (2.19) definen a $P_1(G)$, el poliedro de 2-dominación de G y las restricciones (2.18)-(2.19) definen a $P_2(G)$, siempre junto a la condición de que todas las variables sean binarias.

Sobre la base de la descripción completa que nos brinda PORTA (Figura 2.2) y del Teorema 2.2.3 podemos realizar las siguientes afirmaciones.

```

DIM = 9

VALID
1 1 1 1 1 1 1 1 1

INEQUALITIES_SECTION
( 1) -x1,0 -x2,0 <= -1
( 2) -x1,1 -x2,1 <= -1
( 3) -x1,2-x3,2 <= -1
( 4) -x1,2 -x2,2 <= -1
( 5) -x3,0 <= 0
( 6) -x3,1 <= 0
( 7) -x1,0-x3,0 +x1,1 <= 0
( 8) -x1,1-x3,1 +x1,2 <= 0
( 9) +x3,2 <= 1
(10) +x2,2 <= 1
(11) +x1,2 <= 1
(12) +x3,1 <= 1
(13) +x2,1 <= 1
(14) +x1,1 <= 1
(15) +x3,0 <= 1
(16) +x2,0 <= 1
(17) +x1,0 <= 1

END

```

Figura 2.2: Salida de PORTA para $P_{hull}(G)$, donde G es el grafo de la Figura 2.1.

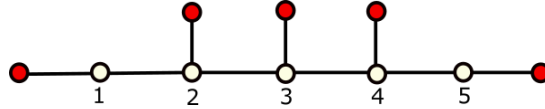


Figura 2.3: Grafo G' utilizado en el Ejemplo 2.

1. Una descripción completa y minimal del poliedro de 2-dominación de G , $P_{2dom}(G) = P_1(G) \subseteq \mathbb{R}^3$, está dada por las restricciones

$$x_{12} + x_{32} \geq 1, \quad (2.20)$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 1 \text{ y} \quad (2.21)$$

$$x_{i2} \leq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

2. Una descripción completa y minimal del poliedro $P_2(G) \subseteq \mathbb{R}^6$, está dada por las restricciones (2.20)-(2.22) junto con

$$x_{11} + x_{21} \geq 1,$$

$$x_{11} + x_{31} \geq x_{12},$$

$$x_{31} \geq 0 \text{ y}$$

$$x_{i1} \leq 1 \quad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

Ejemplo 2: Dado el grafo G' de la Figura 2.3 utilizamos el software PORTA para intentar hallar una descripción completa y minimal del poliedro \mathcal{P}_3 -hull de G' . En este caso $n = m = 5$. Observamos que luego de 12 horas el programa no pudo encontrar la descripción completa de $P_{hull}(G')$ y que la cantidad de soluciones factibles es 2.756.097. Lo mismo ocurrió al buscar la descripción completa de $P_4(G')$. En este caso hay 136.161 soluciones factibles. En cambio, el programa encuentra en pocos minutos la descripción completa de $P_3(G')$, formada por 76 facetas. Aunque no pudimos hallar la descripción completa de $P_{hull}(G')$, el Teorema 2.2.3 nos asegura que las 76 desigualdades que describen totalmente a $P_3(G')$ definen facetas también de $P_{hull}(G')$, y entonces estarán presentes en la descripción buscada.

2.3. Algunos experimentos computacionales

En esta sección mostraremos algunos resultados obtenidos utilizando el software PORTA, con el objetivo de hallar la descripción completa de los polítopos $P_k(G)$ para $k = 1 \dots m$ (ver Definición 2.2.3). En todos los casos, la estructura del grafo G es sencilla y además consideramos un número pequeño de vértices, pese a lo cual podemos observar la gran cantidad tanto de facetas como de puntos extremos de los polítopos estudiados, a medida que n ó k se incrementan. Todos los experimentos fueron realizados con procesador Intel(R) Core(TM) i5-6200U 230GHz 240GHz, con un tiempo límite

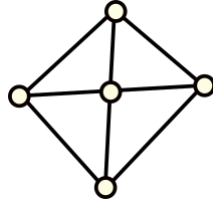


Figura 2.4: Grafo 4-rueda.

de uso de CPU de 10 horas. Representamos con un signo de interrogación los casos en los que se excedió ese límite de tiempo sin hallar la descripción buscada.

En la Tabla 2.1 podemos observar los resultados obtenidos para grillas de $s \times r$ a las que notaremos $Gr_{s \times r}$. Notemos que para la grilla de 2×3 , la cantidad de variables es 6, 12, 18 y 24 para $k = 1, 2, 3, 4$ respectivamente. Además $P_1(G) = P_{2dom}(G)$ y $P_4(G) = P_{hull}(G)$ ya que $m = 4$. Para la grilla de 3×3 , las variables son 9, 18, 27 y 36, además $P_1(G) = P_{2dom}(G)$ y $P_7(G) = P_{hull}(G)$ ya que $m = 7$.

$s \times r$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
2×3	12/18	36/364	903/7432	?/151816
3×3	27/89	?/10495	?/1291591	?/?

Tabla 2.1: Cantidad de facetas/extremos de $P_k(Gr_{s \times r})$.

En la Tabla 2.2 mostramos los resultados obtenidos para grafos rueda (ver Figura 2.4) a los que notaremos W_s . Para $s = 4$ la cantidad de variables es 5, 10, 15 y 20 para $k = 1, 2, 3, 4$ respectivamente, además $P_3(W_4) = P_{hull}(W_4)$ ya que $m = 3$. Para $s = 5$ la cantidad de variables es 6, 12, 18 y 24 respectivamente y $P_4(W_5) = P_{hull}(W_5)$.

s	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
4	18/19	125/352	1027/6972
5	33/32	1197/1109	?/39018
6	44/57	4466/3588	?/229530

Tabla 2.2: Cantidad de facetas/extremos de $P_k(W_s)$.

En la Tabla 2.3 mostramos los resultados obtenidos para una familia particular de árboles llamados grafos *caterpillar*. Estos grafos están formados por un camino de n vértices, donde cada vértice i puede tener una cantidad c_i de vecinos de grado 1 para $i = 1, \dots, n$. En este caso trabajamos el caso $c_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$, a los que notaremos como $C_{n,1}$. En la Figura 2.3 se puede ver representado $C_{5,1}$.

Observemos que $P_k(C_{k,1}) = P_{hull}(C_{k,1}) \subseteq \mathbb{R}^{k^2}$ y que al igual que en los ejemplos anteriores, la cantidad de facetas y puntos extremos crece marcadamente a medida que aumenta k . Estos ejemplos muestran la dificultad de nuestro estudio poliedral, si bien fueron realizados sobre grafos con estructuras muy simples y con pocos vértices, los polítopos obtenidos tienen una gran cantidad de caras, e

n	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
4		102/10665	-
5	87/6468	?/130248	?/2639182
6	274/43887	?/1677801	?/64205655

Tabla 2.3: Cantidad de facetas/extremos de $P_k(C_{n,1})$.

incluso en la mayoría de los casos PORTA no puede hallar en un tiempo razonable el poliedro \mathcal{P}_3 -hull de G . De todos modos, utilizando el Teorema 2.2.3, sabemos que las desigualdades halladas que definen facetas de $P_k(G)$ también definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$.

2.4. Facetas asociadas a las cotas de las variables

En esta sección analizaremos las desigualdades $0 \leq x_{it} \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m - 1$, que claramente son válidas para $P_{\text{hull}}(G)$, así como ocurre para $0 \leq x_i \leq 1$, con $1 \leq i \leq n$, y el poliedro $P_{2\text{dom}}(G)$. En los siguientes teoremas mostraremos que las desigualdades $x_{it} \leq 1$ siempre definen facetas, mientras que para $x_{it} \geq 0$ son necesarias hipótesis adicionales sobre i y t .

Teorema 2.4.1. *Si $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m - 1$, entonces $F_{it} := P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{it} = 1\}$ es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$, es decir, la desigualdad $x_{it} \leq 1$ define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.*

Demostración. Fijemos $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m - 1$. Sabemos que $\dim(F_{it}) \leq nm - 1$ ya que $F_{it} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{it} = 1\}$. Consideremos ahora las soluciones factibles x^0 y $x^{i_0 t_0}$, para $1 \leq i_0 \leq n$ y $0 \leq t_0 \leq m - 1$, definidas en el Lema 2.2.1. Tenemos que $x^0 \in F_{it}$ y $x^{i_0 t_0} \in F_{it}$ para $(i_0, t_0) \neq (i, t)$ y además forman un conjunto afínmente independiente, ya que el conjunto $\{x^0 - x^{i_0 t_0} : (i_0, t_0) \in \mathcal{Z} \setminus \{(i, t)\}\} = \{E_{i_0 t_0} : (i_0, t_0) \in \mathcal{Z} \setminus \{(i, t)\}\}$ donde $E_{i_0 t_0}$ denota al $i_0 t_0$ -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{nm} , es un conjunto linealmente independiente. Entonces $nm - 1 \leq \dim(F_{it})$, con lo cual hemos demostrado que $\dim(F_{it}) = nm - 1$. \square

De este último teorema y del Teorema 2.2.2 se desprende en forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 2.4.1. *La cara $F_i := P_{2\text{dom}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 1\}$ es una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$, es decir, la desigualdad $x_i \leq 1$ define una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$, para todo $1 \leq i \leq n$.*

En el siguiente teorema analizamos condiciones para que las desigualdades válidas $x_{it} \geq 0$ definan facetas de $P_{\text{hull}}(G)$ para $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m - 1$.

Teorema 2.4.2. Si $0 \leq t < m - 1$ y $1 \leq i \leq n$, $H_{it} := P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{it} = 0\}$ es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = V$ para todo $j \neq i$, $1 \leq j \leq n$. La desigualdad $x_{i(m-1)} \geq 0$ define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = V$ y además $\delta(V \setminus \{i, j\}) = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

Demostración. Fijemos $1 \leq i_0 \leq n$ y $0 \leq t_0 \leq m - 1$ y supongamos que existe un vértice $1 \leq j \leq n$, $j \neq i_0$ tal que $\text{hull}(V \setminus \{i_0, j\}) \neq V$ (ó $\delta(V \setminus \{i_0, j\}) > 1$ para el caso $t_0 = m - 1$). Entonces, por el Corolario 2.1.2, todas las soluciones factibles x de (2.5), (2.6) y (2.7) en $H_{i_0 t_0}$ verifican que $x_{j t_0} = 1$, ya que de otro modo $\text{hull}(S_{i_0}^x) \subseteq \text{hull}(V \setminus \{i_0, j\}) \neq V$. Entonces,

$$H_{i_0 t_0} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{j t_0} = 1\}.$$

En este caso, por el Lema 2.2.2, $H_{i_0 t_0}$ no es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.

Por otro lado, veremos que si $\text{hull}(V \setminus \{i_0, j\}) = V$ para todo $j \neq i_0$, $1 \leq j \leq n$, entonces $H_{i_0 t_0}$ verifica la condición del Lema 2.2.2 y entonces es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{nm}$ un hiperplano afín tal que

$$H_{i_0 t_0} \subseteq \mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\} \quad (2.23)$$

con $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m - 1\}$. Sea $x^{i_0 t_0}$ la solución factible que verifica (2.5), (2.6) y (2.7) definida de modo que $S_t^{x^{i_0 t_0}} = V$ para todo $t \neq t_0$ y $S_{t_0}^{x^{i_0 t_0}} = V \setminus \{i_0\}$. Claramente, $x^{i_0 t_0} \in H_{i_0 t_0}$ ya que su coordenada $i_0 t_0$ -ésima vale 0. También se puede ver que los vectores $x^{i_0 t_0} - E_{it}$ para $t \neq t_0$ y $1 \leq i \leq n$, tienen su coordenada $i_0 t_0$ -ésima nula y además verifican las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7), ya que todos los vértices considerados tienen grado al menos 2, y como $t \neq t_0$ hay una única variable que vale 0 entre las que corresponden al mismo tiempo t , lo cual garantiza que se cumplan las hipótesis del Teorema 2.1.2. Hemos visto entonces que los vectores $x^{i_0 t_0}$ y $x^{i_0 t_0} - E_{it}$ para $t \neq t_0$ y $1 \leq i \leq n$ pertenecen a $H_{i_0 t_0}$, y luego deben verificar la ecuación que define a \mathcal{A} . En consecuencia tenemos que $\lambda_{it} = 0$ para todo $t \neq t_0$, $0 \leq t \leq m - 1$ y $1 \leq i \leq n$.

Además, por el Corolario 2.1.3, la hipótesis de que $\text{hull}(V \setminus \{i_0, j\}) = V$ para cada $j \neq i_0$ y $\delta(V \setminus \{i_0, j\}) = 1$ si $t_0 = m - 1$, garantiza que existe una solución factible $x^j = (x_t^j)_{0 \leq t \leq m-1}$ que verifica (2.5), (2.6) y (2.7), tal que $S_{i_0}^{x^j} = V \setminus \{i_0, j\}$. En particular, todas estas soluciones pertenecen a $H_{i_0 t_0}$, y entonces verifican la ecuación que define a \mathcal{A} . Evaluando $x^{i_0 t_0}$ y x^j en dicha ecuación y restando, podemos ver que $\lambda_{j t_0} = 0$ para todo $j \neq i_0$. Podemos concluir entonces que \mathcal{A} está definido por la ecuación $\lambda_{i_0 t_0} x_{i_0 t_0} = 0$. Por el Lema 2.2.2, $H_{i_0 t_0}$ es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. \square

Corolario 2.4.2. Sean $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m - 2$. Entonces $H_{it} = P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{it} = 0\}$ es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si el vértice i verifica alguna de las siguientes condiciones,

- $\text{deg}(i) \geq 3$,
- $\text{deg}(i) = 2$ y $\text{deg}(j) \geq 3$ para todo $j \in N(i) \setminus V_1$.

Capítulo 2. Modelos de PLE y sus propiedades

Demostración. Sean $i \in V \setminus V_1$ tal que $\deg(i) \geq 3$ y $j \in V \setminus V_1$, $j \neq i$, se puede ver que $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = V$ pues,

- si $j \in N(i)$, como i tiene grado al menos 3, existen al menos dos vecinos de i en $V \setminus \{i, j\}$, luego $V \setminus \{j\} \subseteq N_2(V \setminus \{i, j\})$. Además $N_2(V \setminus \{j\}) = V$ pues j no tiene grado 1, entonces $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = N_2^2(V \setminus \{i, j\}) = V$.
- Si $j \notin N(i)$, tanto i como j tienen al menos 2 vecinos en $V \setminus \{i, j\}$ y entonces $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = N_2(V \setminus \{i, j\}) = V$.

Supongamos ahora que $\deg(i) = 2$ y sea $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$.

- Si $j \notin N(i)$, entonces $N_2(V \setminus \{i, j\}) = V$ ya que tanto i como j tienen al menos dos vecinos en $V \setminus \{i, j\}$, pues ambos tienen grado al menos 2.
- Si $j \in N(i)$, para que $j \in N_2(V \setminus \{i, j\})$ es necesario que $\deg(j) \geq 3$, ya quede otro modo $V \setminus \{i, j\}$ es \mathcal{P}_3 -convexo. En este caso $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = N_2^2(V \setminus \{i, j\}) = V$.

Hemos visto que todo vértice i que cumpla alguna de las condiciones del enunciado también cumple que $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) = V$ y entonces, por el Teorema 2.4.2, H_{it} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. También quedó demostrado que si el vértice no cumple ninguna de estas condiciones, es decir si tiene grado 2 y alguno de sus vecinos también, por el Teorema 2.4.2, H_{it} no es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. \square

Corolario 2.4.3. *Sea $1 \leq i \leq n$, entonces $H_{i(m-1)} = P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(m-1)} = 0\}$ es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si $\deg(j) \geq 3$ para todo $j \in N[i] \setminus V_1$.*

Demostración. Consideremos $1 \leq i \leq n$. Por el Teorema 2.4.2, $H_{i(m-1)}$ es faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si $N_2(V \setminus \{i, j\}) = V$ para todo $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Si consideramos un vértice $j \in N(i) \setminus V_1$ podemos ver que es necesario que tanto i como j tengan, al menos, 2 vecinos más en V y por lo tanto su grado debe ser mayor o igual que 3. Esta condición es también suficiente para que $N_2(V \setminus \{i, j\}) = V$ para todo $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, ya que si $j \notin N(i)$ tiene, al menos, 2 vecinos en $V \setminus \{i, j\}$. \square

De este último corolario, por el Teorema 2.2.2, se obtiene el siguiente resultado para $P_{2\text{dom}}(G)$.

Corolario 2.4.4. *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo y sea $i \in V$, $1 \leq i \leq n$. Son equivalentes,*

- $H_i = P_{2\text{dom}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$ es una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$,
- $N_2(V \setminus \{i, j\}) = V$ para todo $j \in V \setminus V_1$,
- $\deg(j) \geq 3$ para todo $j \in N[i] \setminus V_1$.



Figura 2.5: $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) \neq V$.

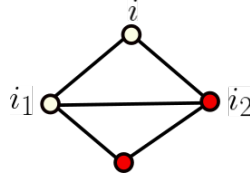


Figura 2.6: $\text{hull}(V \setminus \{i, i_1\}) = V$.

A modo de ejemplo, en la Figura 2.5 podemos observar que $\text{hull}(V \setminus \{i, j\}) \neq V$. Por lo tanto, si $x_{i0} = 0$ (el vértice i no está activo en $t = 0$), necesariamente $x_{j0} = 1$ (el vértice j tiene que estarlo), y entonces $x_{i0} = 0$ no define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$, tal como nos asegura el teorema anterior. En cambio, en la Figura 2.6 podemos ver que $\text{hull}(V \setminus \{i, i_1\}) = V$, y entonces, tanto $x_{i0} = 0$ como $x_{i_10} = 0$ definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$.

Por otro lado, si observamos la Figura 2.2 correspondiente a la descripción completa de $P_{\text{hull}}(G)$, donde G es el grafo representado en la Figura 2.1, podemos hacer las siguientes observaciones.

- Todas las desigualdades $x_{it} \leq 1$ están presentes en la descripción, tal como asegura el Teorema 2.4.1.
- El vértice $i = 3$ tiene grado 3, por lo tanto $x_{30} \geq 0$ y $x_{31} \geq 0$ definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$. Sin embargo $j = 1$ es un vecino de grado 2, por lo tanto $x_{32} \geq 0$ no define una faceta del poliedro mencionado (ni de $P_{2\text{dom}}(G)$).
- En cambio, los vértices $i = 1$ e $i = 2$ tienen grado 2 y también tienen vecinos de grado 2, por lo tanto las correspondientes desigualdades $x_{it} \geq 0$ no definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$.

2.5. Facetas definidas por las restricciones del modelo

En esta sección estudiaremos cada una de las restricciones (2.5), (2.6) y (2.8), estableciendo condiciones sobre i y t para que dichas desigualdades definan facetas de $P_{\text{hull}}(G)$ o de $P_{2\text{dom}}(G)$. En la siguiente observación mostramos una condición necesaria muy fácil de verificar, para que las desigualdades estudiadas definan facetas.

Proposición 2.5.1. *Sean $G = (V, E)$ un grafo simple y conexo e $i \in V \setminus V_1$. Si i tiene algún vecino de grado 1, entonces las desigualdades (2.5) y (2.6) correspondientes a i no definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$ para ningún $t = 0, \dots, m - 1$.*

Demostración. Sea $t_0 \in \{0, \dots, m-2\}$. La cara definida por la desigualdad (2.5) correspondiente a i y a t_0 es

$$L_{it_0} := P_{hull} \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 2x_{it_0} + \sum_{j \in N(i) \setminus V_1} x_{jt_0} + C_i = 2x_{i(t_0+1)}\}.$$

Si i tiene algún vecino de grado 1, i.e., $C_i \geq 1$, entonces toda solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) que también verifique $2x_{it_0} + \sum_{j \in N(i) \setminus V_1} x_{jt_0} + C_i = 2x_{i(t_0+1)}$, necesariamente debe cumplir que $x_{i(t_0+1)} = 1$, por lo tanto $L_{it_0} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(t_0+1)} = 1\}$. Por el Lema 2.2.2 eso no es posible si L_{it_0} es una faceta de $P_{hull}(G)$. Para $t = m-1$, la cara definida por la desigualdad (2.6) correspondiente a i es

$$L_{i(m-1)} := P_{hull} \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 2x_{i(m-1)} + \sum_{j \in N(i) \setminus V_1} x_{j(m-1)} + C_i = 2\}.$$

En este caso, si $C_i \geq 1$, necesariamente $x_{i(m-1)} = 0$, y entonces, nuevamente por el Lema 2.2.2, $L_{i(m-1)}$ no es una faceta de $P_{hull}(G)$. \square

En el siguiente teorema, establecemos condiciones necesarias y suficientes para que la desigualdad (2.5) para algún $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq m-2$ defina una faceta de $P_{hull}(G)$.

Teorema 2.5.1. *Dados $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t < m-1$ tales que $N(i) \subseteq \overline{V_1}$ (i.e., $C_i = 0$), sea*

$$L_{it} := P_{hull}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 2x_{it} + \sum_{j \in N(i)} x_{jt} = 2x_{i(t+1)}\}.$$

Si $|N[i]| = s \leq m-t$ entonces L_{it} es una faceta de $P_{hull}(G)$ si y solo si

1. $\deg(i) \geq 3$,
2. $\text{hull}(\overline{N[i]}) = V$ y
3. para cada $k \in \overline{N[i]} \setminus V_1$ existen j_1^k y j_2^k en $N(i)$ tales que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\}) = V$.

Demostración. En primer lugar, observemos que una solución factible x de las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) pertenece a L_{it} si y solo si las coordenadas de x verifican alguna de las siguientes condiciones,

- (a) $x_{it} = x_{i(t+1)} = x_{jt} = 0$ para todo $j \in N(i)$,
- (b) $x_{it} = x_{i(t+1)} = 1$ y $x_{jt} = 0$ para todo $j \in N(i)$, o
- (c) $x_{it} = 0$ y $x_{i(t+1)} = x_{j_1 t} = x_{j_2 t} = 1$ para j_1 y j_2 in $N(i)$, $j_1 \neq j_2$ y $x_{jt} = 0$ para todo $j \in N(i) \setminus \{j_1, j_2\}$.

Notemos también que si $\deg(i) = 2$, entonces $N(i) = \{j_1, j_2\}$, y luego todas las soluciones factibles en L_{it} deben verificar la ecuación $x_{j_1 t} = x_{j_2 t}$. Por otro lado, si $\text{hull}(\overline{N[i]}) \neq V$, tenemos que $L_{it} \subset \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(t+1)} = 1\}$, ya que de otro modo, si alguna solución factible x en L_{it} verifica que $x_{i(t+1)} = 0$

su soporte verifica que $S_t^x \subseteq \overline{N[i]}$ y eso no puede suceder si $\text{hull}(\overline{N[i]}) \neq V$. Análogamente, si existe $k \in \overline{N[i]} \setminus V_1$ tal que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{j_1, j_2\}) \neq V$ para todo j_1 y j_2 en $N(i)$, entonces $L_{it} \subset \{x : \mathbb{R}^{nm} : x_{kt} = 1\}$, ya que de otro modo debe existir una solución factible x en L_{it} tal que su soporte verifica $\text{hull}(S_t^x) \subseteq \text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{j_1, j_2\}) \neq V$, lo cual no es posible por el Teorema 2.1.2. En ninguno de estos casos, por el Lema 2.2.2, L_{it} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Hemos demostrado entonces que las condiciones (1)-(3) son necesarias

Para probar que son suficientes, tomemos i_0, t_0 que cumplan las hipótesis del teorema, y supon-
gamos que

$$L_{i_0 t_0} \subseteq \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}, \quad (2.24)$$

donde $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Veremos que la ecuación que define a \mathcal{B} es un múltiplo de la ecuación que define a $L_{i_0 t_0}$. Para esto, consideramos los vectores definidos a continuación.

- El vector que representa un proceso tal que todos los vértices están activos antes del instante t_0 , en t_0 solo se encuentran activos los vértices en $\overline{N[i_0]}$, y en cada paso que sigue se activa exactamente un vértice, es decir,

$$x^0 = \underbrace{((1, 1, \dots, 1))}_{t=0}, \dots, \underbrace{((1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0-1}, \underbrace{(\overset{i_0}{0}, \overset{N(i_0)}{0}, \dots, \overset{i_0}{0}, 1, 1, \dots, 1)}_{t=t_0 \text{ (s ceros)}}, \underbrace{(\overset{i_0}{0}, \overset{N(i_0)}{0}, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)}_{t=t_0+1 \text{ (s-1 ceros)}}, \dots, \underbrace{((1, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0+s-1 \text{ (1 cero)}}.$$

Formalmente,

$$S_t^{x^0} = V \text{ si } t < t_0 \text{ o } t \geq t_0 + s + 1, S_{t_0}^{x^0} = \overline{N[i_0]} \text{ y}$$

$$S_{t_0+r}^{x^0} = \overline{N[i_0]} \cup \{i_1, \dots, i_r\} \text{ para } 1 \leq r \leq s,$$

donde $\{i_1, \dots, i_s\}$ se eligen de modo tal que $i_l \in N_2(S_{t_0+l-1}^{x^0}) \setminus S_{t_0+l-1}^{x^0}$ para $l = 1, \dots, s$. Observemos que x^0 está bien definido y resulta una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) en virtud del Corolario 2.1.4, ya que $t_0 \leq m-s$. Además, $x^0 \in L_{i_0 t_0}$ ya que $x_{i_0 t_0} = x_{j t_0} = 0$ para todo $j \in N(i_0)$ por definición de x^0 , y $x_{i_0(t_0+1)} = 0$ ya que $i_0 \notin S_{t_0+1}^{x^0} \subseteq N_2(\overline{N[i_0]})$. Por lo tanto x^0 verifica la ecuación que define a $L_{i_0 t_0}$.

- El vector que representa un proceso en el que todos los vértices están activos antes de t_0 , en t_0 los vecinos de i_0 no están activos mientras que i_0 y el resto de los vértices sí lo están, y en cada paso que sigue se activa exactamente un vértice. Es decir, $x^{i_0} = (x_t^{i_0})_{0 \leq t \leq m-1} \in L_{i_0 t_0}$ tal que

$$S_t^{x^{i_0}} = V \text{ si } t < t_0 \text{ o } t \geq t_0 + s, S_{t_0}^{x^{i_0}} = \overline{N(i_0)} \text{ y}$$

$$S_{t_0+r}^{x^{i_0}} = \overline{N(i_0)} \cup \{i_1, \dots, i_r\} \text{ para } 1 \leq r \leq s-1,$$

donde $\{i_1, \dots, i_{s-1}\}$ se eligen de manera que $i_l \in N_2(S_{t_0+l-1}^{x^{i_0}}) \setminus S_{t_0+l-1}^{x^{i_0}}$ para $l = 1, \dots, s-1$. Del mismo modo que en el caso anterior, por el Corolario 2.1.4, se puede ver que x^{i_0} está bien definido, que es una solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) (pues $t_0 \leq m - (s-1)$) y que pertenece a $L_{i_0 t_0}$.

- El vector que representa un proceso en el cual todos los vértices están activos antes de t_0 , en t_0 el vértice i_0 y sus vecinos, excepto dos de ellos, no están activos mientras que el resto de los vértices en $\overline{V_1}$ sí lo están, y en cada paso que sigue se activa exactamente un vértice. Es decir, para algún par de vértices $j_1, j_2 \in N(i_0)$, $j_1 \neq j_2$, $x^{j_1 j_2} = (x_t^{j_1 j_2})_{0 \leq t \leq m-1} \in L_{i_0 t_0}$ tal que

$$S_t^{x^{j_1 j_2}} = V \text{ si } t < t_0 \text{ o } t \geq t_0 + s - 1, \quad S_{t_0}^{x^{j_1 j_2}} = \{j_1, j_2\} \cup \overline{N[i_0]}$$

$$S_{t_0+r}^{x^{j_1 j_2}} = \{j_1, j_2\} \cup \overline{N[i_0]} \cup \{i_0, \dots, i_{r-1}\} \text{ para } 1 \leq r \leq s-2,$$

donde $i_l \in N_2(S_{t_0+l}^{x^{j_1 j_2}}) \setminus S_{t_0+l}^{x^{j_1 j_2}}$ para $l = 1, \dots, s-3$. Nuevamente, el Corolario 2.1.4 garantiza que todos estos vectores están bien definidos y son soluciones factibles de (2.5), (2.6) y (2.5) (ya que $t_0 \leq m - (s-2)$). Además todos ellos pertenecen a $L_{i_0 t_0}$ ya que verifican la ecuación que la define.

Consideremos un par de vértices $j_1 \neq j_2$, ambos en $N(i_0)$. Es fácil probar que $x^{j_1 j_2} - E_{it}$ (donde E_{it} es el it -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{nm}) también pertenece a $L_{i_0 t_0}$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t < t_0$ ó $t \geq t_0 + s - 2$. Esto se debe a que $S_t^{x^{j_1 j_2}} = V$ para todo $0 \leq t < t_0$ ó $t \geq t_0 + s - 2$, luego $N_2(S_t^{x^{j_1 j_2}} \setminus \{i\}) = V$ y entonces $x^{j_1 j_2} - E_{it}$ verifica las condiciones del Teorema 2.1.2. Como tanto $x^{j_1 j_2} - E_{it}$ como $x^{j_1 j_2}$ deben verificar la ecuación que define a \mathcal{B} (2.24), podemos evaluar ambas soluciones en dicha ecuación y luego, al restar, obtenemos que $\lambda_{it} = 0$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t < t_0$ ó $t \geq t_0 + s - 2$.

Ahora veremos que $\lambda_{i(t_0+s-3)} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, considerando tres casos: $i \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$, $i = i_0$ ó $i \in N(i_0)$.

- Llamaremos k al vértice en $\overline{N[i_0]} \setminus V_1$. La hipótesis 3 del teorema nos asegura que existen $j_1^k, j_2^k \in N(i_0)$ tales que $\text{hull}(\overline{N[i_0]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\}) = V$. Entonces, $\text{hull}(\overline{N[i_0]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\} \cup \{i_0, \dots, i_{t_0+s-4}\}) = V$ con $\delta(\overline{N[i_0]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\} \cup \{i_0, \dots, i_{t_0+s-4}\}) \leq 2$. Además, podemos asegurar que $2 \leq m - (t_0 + s - 3)$, ya que $s \leq m - t_0$. En consecuencia, es posible definir una solución factible $\widehat{x}^{j_1^k j_2^k}$ en $L_{i_0 t_0}$ tal que $(\widehat{x}^{j_1^k j_2^k})_t = (x^{j_1^k j_2^k})_t$ para $t \leq t_0 + s - 4$ y $(\widehat{x}^{j_1^k j_2^k})_{t_0+s-3} = (x^{j_1^k j_2^k})_{t_0+s-3} - e_k$ (donde e_k es el k -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^n). Reemplazando ambas soluciones en la ecuación que define a \mathcal{B} y restando, obtenemos que $\lambda_{k(t_0+s-3)} = 0$. Es importante recalcar en este punto, que ya hemos demostrado que $\lambda_{it} = 0$ si $t \geq t_0 + s - 2$, es decir que aunque las dos soluciones que evaluamos no coincidan para esos valores de t , al restar obtenemos $\lambda_{k(t_0+s-3)} = 0$.
- Si $i = i_0$, éste pertenece a $\text{hull}(\overline{N[i_0]} \cup \{j_1, j_2\})$ para cualquier par de vértices $j_1, j_2 \in N(i_0)$, por lo tanto podemos proceder como en el ítem anterior y definir una solución factible en $L_{i_0 t_0}$ que coincida con $x^{j_1 j_2}$ para todo $t \leq t_0 + s - 4$, y tal que en $t_0 + s - 3$ coincidan todas las coordenadas excepto la correspondiente a i_0 , que vale 0. Aquí es importante que $t_0 + s - 3 > t_0 + 1$ (es decir que $s > 4$ ya que de otro modo, la nueva solución definida no pertenecerá a $L_{i_0 t_0}$). De este modo podemos demostrar que $\lambda_{i_0(t_0+s-3)} = 0$.

- Llamaremos j a un vértice en $N(i_0)$. Sabemos que j tiene (al menos) un vecino distinto de i_0 . Si tiene un vecino en $\overline{N[i_0]}$, entonces $j \in \text{hull}(S_{t_0+s-3}^{x^{j_1}} \setminus \{j\})$ donde x^{j_1} es la solución definida anteriormente con $j_1 \in N(i_0) \setminus \{j\}$. Si en cambio j tiene sus vecinos en $N(i_0)$ debemos elegir a $j_1 \in N(i_0) \cap N(j)$. En ambos casos podemos definir una solución factible en $L_{i_0 t_0}$ que coincida con x^{j_1} para todo $t \leq t_0 + s - 4$, y tal que en $t_0 + s - 3$ coincidan todas las coordenadas excepto la correspondiente a j , que vale 0. De este modo podemos demostrar que $\lambda_{j(t_0+s-3)} = 0$.

Utilizando los mismos argumentos demostraremos que $\lambda_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $t > t_0 + 1$. Supongamos que hemos mostrado que $\lambda_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $t > t_0 + r$ con $r \geq 2$, veremos que $\lambda_{i(t_0+r)} = 0$ para $i = 1, \dots, n$. En los tres casos analizados vimos que $i \in \text{hull}(S_{t_0+r}^{j_1 j_2} \setminus \{i\})$ eligiendo convenientemente j_1 y j_2 en $N(i_0)$. Por lo tanto $\text{hull}(S_{t_0+r}^{j_1 j_2} \setminus \{i\}) = V$, además

$$\delta(S_{t_0+r}^{j_1 j_2} \setminus \{i\}) \leq |\overline{S_{t_0+r}^{j_1 j_2} \setminus \{i\}}| = (s - 2 - r) + 1 = s - r - 1 \leq m - (t_0 + r)$$

ya que $s \leq m - t_0 + 1$ por hipótesis. Esta observación nos permite construir la solución $\widehat{x^{j_1 j_2}}$ que coincide con $x^{j_1 j_2}$ hasta $t = t_0 + r - 1$ y de ese modo obtenemos que $\lambda_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $t = t_0 + r$. En el caso $t = t_0 + 1$ podemos razonar en forma análoga para $i \neq i_0$ y lo mismo para $t = t_0$ e $i \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$.

En resumen, hemos mostrado que $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \lambda_{i_0 t_0} x_{i_0 t_0} + \sum_{j \in N(i_0)} \lambda_{j t_0} x_{j t_0} + \lambda_{i_0(t_0+1)} x_{i_0(t_0+1)} = \lambda\}$. Reemplazando x^0 y x^{i_0} en la ecuación de \mathcal{B} , se obtiene que $\lambda = 0$ y $\lambda_{i_0 t_0} = -\lambda_{i_0(t_0+1)}$. Por último, reemplazando $x^{j_1 j_2}$ en la mencionada ecuación para cualquier par $j_1, j_2 \in N(i_0)$, y también $x^{j_1 j_2}, x^{j_1 j_2}$ para $j \neq j_1, j_2$ (recordemos que $\deg(i_0) \geq 3$), se deduce que $\lambda_{j_1 t_0} + \lambda_{j_2 t_0} + \lambda_{i_0(t_0+1)} = 0$ y $\lambda_{j_1 t_0} = \lambda_{j_2 t_0}$.

Por todo lo expuesto, $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 2\lambda_{j_1 t_0} x_{i_0 t_0} + \sum_{j \in N(i_0)} \lambda_{j t_0} x_{j t_0} - 2\lambda_{j_1 t_0} x_{i_0(t_0+1)} = 0\}$, es decir, la ecuación que define a \mathcal{B} es un múltiplo de la ecuación que define a $L_{i_0 t_0}$, y entonces, por el Lema 2.2.2, hemos demostrado que $L_{i_0 t_0}$ es una faceta of $P_{\text{hull}}(G)$. \square

El siguiente teorema brinda condiciones necesarias y suficientes sobre un vértice $i \in V \setminus V_1$ para que la restricción (2.6) correspondiente defina una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Luego, gracias al Teorema 2.2.2, podremos deducir un resultado análogo para las restricciones (2.8) y $P_{2\text{dom}}(G)$.

Teorema 2.5.2. *Sea $1 \leq i \leq n$ tal que $N(i) \subseteq \overline{V_1}$ y*

$$L_i := P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 2x_{i(m-1)} + \sum_{j \in N(i)} x_{j(m-1)} = 2\}.$$

Entonces, L_i es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si

1. $N_2(\overline{N(i)}) = V$,
2. para cada $k \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{i\}) = V$ o bien existen $j_1^k, j_2^k \in N(i)$ tales que $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\}) = V$, y

Capítulo 2. Modelos de PLE y sus propiedades

3. si $|N(i)| = s$, existen $i_1 \neq j_1, \dots, i_s \neq j_s \in N(i)$ tales que $N_2(\overline{N[i]} \cup \{i_r, j_r\}) = V$ para $r = 1, \dots, s$ y el conjunto $\{e_{i_1} + e_{j_1}, \dots, e_{i_s} + e_{j_s}\} \subseteq \mathbb{R}^s$ es linealmente independiente.

Demostración. Observemos que una solución factible de las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) $x \in \mathbb{R}^{nm}$ pertenece a L_i si y solo si sus coordenadas verifican que

- a. $x_{i(m-1)} = 1$ y $x_{j(m-1)} = 0$ para todo $j \in N(i)$ o
b. existen j_1 y j_2 en $N(i)$ tal que $x_{j_1(m-1)} = x_{j_2(m-1)} = 1$ y $x_{j(m-1)} = 0$ para todo $j \in N(i) \setminus \{j_1, j_2\}$.

Si el vértice $i_0 \in V \setminus V_1$ no cumple la condición 1 del enunciado, entonces toda solución factible $x \in \mathbb{R}^{nm}$ que verifica las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) y que pertenece a L_{i_0} , debe verificar que $x_{i_0(m-1)} = 0$, entonces $L_{i_0} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i_0(m-1)} = 0\}$ y luego, por el Lema 2.2.2, L_{i_0} no es una faceta de $P_{hull}(G)$. Además, si existe $k \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$ que no cumple ninguna de las condiciones del ítem 2 del enunciado, tenemos que $L_{i_0} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{k(m-1)} = 0\}$ y nuevamente por el Lema 2.2.2, L_{i_0} no es una faceta de $P_{hull}(G)$. Por otro lado, si no se cumple la condición 3, podemos hallar una ecuación no trivial $\sum_{j \in N(i)} \alpha_j x_j = 0$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$ para todo $j \in N(i)$, ya que en este caso la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^s generado por los vectores $e_{j_1} + e_{j_2}$ con $j_1, j_2 \in N(i)$ y $N_2(\overline{N[i]} \cup \{j_1, j_2\}) = V$ es estrictamente menor que s . Esta ecuación también es verificada por las soluciones factibles que cumplen la condición a., y por lo tanto es verificada por todos los puntos de L_{i_0} , contradiciendo una vez más su facetitud, por el Lema 2.2.2.

Consideremos ahora $i_0 \in V$ que cumple las condiciones del enunciado. Veremos que L_{i_0} es una faceta de $P_{hull}(G)$. Para demostrarlo definimos las siguientes soluciones factibles en L_{i_0} .

- La solución x^{i_0} cuyas coordenadas son todas 1 excepto en $t = m - 1$ donde $S_{m-1}^{x^{i_0}} = \overline{N(i_0)}$,
- la soluciones $x^{i_r j_r}$ para $r = 1, \dots, s$, donde i_r, j_r son los pares de vértices que verifican la condición 3 del enunciado. Definidas de modo que todas las coordenadas valen 1 para $t < m - 1$ y $S_{m-1}^{x^{i_r j_r}} = \overline{N[i_0]} \cup \{i_r, j_r\}$.

Las hipótesis del teorema y el Teorema 2.1.2 garantizan que tanto x^{i_0} como $x^{i_r j_r}$ sean soluciones factibles de (2.5), (2.6) y (2.7) en L_{i_0} . Supongamos ahora que

$$L_{i_0} \subseteq \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}. \quad (2.25)$$

Como x^{i_0} y $x^{i_0} - E_{it}$ (donde E_{it} es el it -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{nm}) son factibles y pertenecen a L_{i_0} para $1 \leq i \leq n$ y $t < m - 1$ deben verificar la ecuación que define a \mathcal{B} . Al evaluarlas y luego restar obtenemos que $\lambda_{it} = 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $t < m - 1$. Análogamente, para cada $k \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$ la hipótesis 2 del teorema garantiza que $\lambda_{k(m-1)} = 0$. Entonces

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{i \in N[i_0]} \lambda_{i(m-1)} x_{i(m-1)} = \lambda\}. \quad (2.26)$$

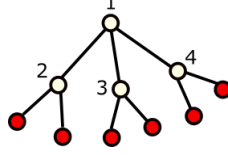


Figura 2.7: Hipótesis del Teorema 2.5.1 (a).

Como la solución $x^{i_0} \in L_{i_0}$ debe verificar la ecuación que define a \mathcal{B} , tenemos que $\lambda_{i_0(m-1)} = \lambda$. Por otro lado, al evaluar las soluciones $x^{r_j} \in L_{i_0}$ definidas anteriormente en dicha ecuación tenemos que todos los vectores $e_{i_r} + e_{j_r}$ deben verificar que $\sum_{i \in N(i_0)} \lambda_{i(m-1)} x_{i(m-1)} = \lambda$, como además verifican que $\sum_{i \in N(i_0)} x_{i(m-1)} = 2$ y son linealmente independientes, entonces estas dos ecuaciones deben ser múltiplos, y entonces la ecuación que define a \mathcal{B} es un múltiplo de la que define a la cara L_{i_0} . Aplicando el resultado del Lema 2.2.2, L_{i_0} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. \square

Del teorema anterior obtenemos el siguiente resultado para $P_{2\text{dom}}(G)$, cuya demostración es inmediata gracias al Teorema 2.2.2.

Corolario 2.5.1. *Sea $1 \leq i \leq n$ tal que $N(i) \subseteq \overline{V_1}$ y*

$$L_i := P_{2\text{dom}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : 2x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j = 2\}.$$

Entonces, L_i es una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$ si y solo si

1. $N_2(\overline{N(i)}) = V$,
2. *para cada $k \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{i\}) = V$ o bien existen $j_1^k, j_2^k \in N(i)$ tales que $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{k\} \cup \{j_1^k, j_2^k\}) = V$, y*
3. *si $|N(i)| = s$, existen $i_1 \neq j_1, \dots, i_s \neq j_s \in N(i)$ tales que $N_2(\overline{N[i]} \cup \{i_r, j_r\}) = V$ para $r = 1, \dots, s$ y el conjunto $\{e_{i_1} + e_{j_1}, \dots, e_{i_s} + e_{j_s}\}$ es linealmente independiente.*

En la Figura 2.7 podemos observar un ejemplo para el cual se verifican todas las hipótesis del Teorema 2.5.1 para el vértice $i = 1$ en $t = 0$, y por lo tanto la desigualdad $2x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} \geq 2x_{11}$ define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. En cambio, en la Figura 2.8 observamos un ejemplo para el cual, si bien la misma desigualdad es válida para el polítopo correspondiente, no define una faceta, ya que no se verifica la hipótesis 2 del Teorema 2.5.1 pues $\text{hull}(\overline{N[1]}) \neq V$.

También podemos observar en la descripción completa del grafo G de la Figura 2.1 (ver salida de PORTA en la Figura 2.2) que ninguna de las restricciones del modelo (2.5), (2.6) está presente en dicha descripción. Esto se debe a que los vértices $i = 1$ e $i = 2$ tienen grado 2, mientras que el vértice $i = 3$, si bien verifica que tiene grado 3 y $\overline{N(3)} = V$ (hipótesis 1 y 2 del Teorema 2.5.1), tiene vecinos en V_1 .

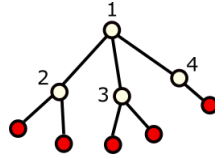


Figura 2.8: Hipótesis del Teorema 2.5.1 (b).

Concluimos esta sección con una observación acerca de la hipótesis $|N[i]| \leq m - t$ presente en el Teorema 2.5.1. En la demostración de dicho teorema hemos utilizado la hipótesis de que $|N(i)| \leq m - t$ para asegurar la existencia de soluciones factibles que tengan una estructura adecuada, que nos permita modificar una sola de sus coordenadas sin perder la factibilidad (ver Corolario 2.1.4). Esa hipótesis por lo tanto, no es necesaria para que L_{it} sea una faceta de $P_{hull}(G)$. Por ejemplo, para el grafo G de la Figura 2.7, si consideramos $i = 1$ y $t = 2$, podemos ver que $|N[1]| = 4$ es mayor que $m - t = 4 - 2 = 2$. Sin embargo, la desigualdad $2x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 2x_{13}$ define una faceta de $P_{hull}(G)$. A pesar de ser una hipótesis técnica, siempre se verifica para $t = 0$, y también para casos de t más grandes y vecindades relativamente chicas, o viceversa.

En este capítulo hemos planteado modelos de PLE para calcular el número \mathcal{P}_3 -hull y el de 2-dominación de un grafo. Comenzamos los correspondientes estudios poliedrales y analizamos las restricciones de los modelos planteados (2.5), (2.6) y (2.7), estableciendo condiciones necesarias y suficientes para que estas desigualdades definan facetas del poliedro $P_{hull}(G)$ o de $P_{2dom}(G)$. En el capítulo que sigue continuamos el estudio de estos poliedros, presentando y estudiando familias de desigualdades válidas que no están presentes como restricciones de nuestros modelos.

Capítulo 3

Algunas familias de facetas

En este capítulo continuamos el estudio poliedral iniciado en el capítulo anterior. En lugar de analizar las restricciones del modelo, analizamos desigualdades válidas para los poliedros \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo que se pueden derivar de aquellas restricciones, o bien que surgen de distintas propiedades de la convexidad \mathcal{P}_3 .

3.1. Desigualdades de vecindad

Una forma alternativa de garantizar que un vértice necesite al menos dos vecinos activos en tiempo $t-1$ para activarse en tiempo t (si es que no lo estaba), es pedir que al dejar de lado a uno de sus vecinos, al menos uno de los restantes esté activo en $t-1$. Esto puede ser descrito mediante las desigualdades que definiremos a continuación, a las que llamaremos *desigualdades de vecindad de i en t* .

Definición 3.1.1. Sea i un vértice en \overline{V}_1 tal que $\deg(j) \geq 2$ para todo $j \in N(i)$, es decir, tal que $N[i] \subseteq \overline{V}_1$. Si $j \in N(i)$ y $0 \leq t \leq m-2$, llamamos desigualdad de vecindad de i respecto a j en t a

$$x_{i(t+1)} \leq x_{it} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{kt}, \quad (3.1)$$

y desigualdad de vecindad de i respecto a j en $m-1$ a

$$1 \leq x_{i(m-1)} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{k(m-1)}. \quad (3.2)$$

Si en cambio existe un único $j_0 \in N(i) \cap V_1$, la desigualdad de vecindad de i en t se define como

$$x_{i(t+1)} \leq x_{it} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j_0\}} x_{kt}, \quad (3.3)$$

y la desigualdad de vecindad de i en $m - 1$ como

$$1 \leq x_{i(m-1)} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j_0\}} x_{k(m-1)}. \quad (3.4)$$

En primer lugar probaremos que estas desigualdades son válidas para $P_{\text{hull}}(G)$.

Lema 3.1.1. *Si $x \in P_{\text{hull}}(G)$ e $i \in \overline{V_1}$ es tal que $N(i) \subseteq \overline{V_1}$ entonces x verifica (3.1) para todo $j \in N(i)$ y $t = 0, \dots, m - 2$, y (3.2) para todo $j \in N(i)$. Si $i \in \overline{V_1}$ es tal que existe un único $j_0 \in N(i) \cap V_1$, todo $x \in P_{\text{hull}}(G)$ verifica (3.3) para todo $t = 0, \dots, m - 2$ y (3.4).*

Demostración. Fijemos i_0 tal que $N[i_0] \subseteq \overline{V_1}$, $j_0 \in N(i_0)$ y $0 \leq t_0 \leq m - 2$. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}^{nm}$ solución factible de las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) que no verifica (3.1), es decir, cuyas coordenadas verifican que $x_{i_0(t_0+1)} > x_{i_0 t_0} + \sum_{k \neq j_0} x_{k t_0}$. En este caso, $i_0 \in S_{t_0+1}^x \setminus S_{t_0}^x$ y $k \in \overline{S_{t_0}^x}$ para todo $k \in N(i) \setminus \{j_0\}$, entonces $|S_{t_0}^x \cap N(i_0)| \leq 1$ pero esto no puede ocurrir ya que $i_0 \in S_{t_0+1}^x \subseteq N_2(S_{t_0}^x)$. Por otro lado, si x no verifica (3.2), tenemos que $1 > x_{i_0(m-1)} + \sum_{k \neq j_0} x_{k(m-1)}$ y luego $i_0 \notin N_2(S_{m-1}^x)$. Esto tampoco puede ocurrir si x es una solución factible.

De modo completamente análogo se demuestra la validez de las desigualdades (3.3) para $0 \leq t \leq m - 2$ y (3.4) para el caso en el cual $i \in \overline{V_1}$ y $\{j_0\} = N(i) \cap V_1$. \square

El siguiente teorema establece condiciones necesarias y suficientes sobre un vértice $i \in V$ y alguno de sus vecinos $j \in N(i)$, para que la desigualdad de vecindad correspondiente (3.1) defina una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.

Teorema 3.1.1. *Sean $i \in V$ tal que $N[i] \subseteq \overline{V_1}$ y $0 \leq t \leq m - 2$ tal que $|N(i)| = s \leq m - t$. Para $j \in N(i)$ definimos*

$$F_{ij}^t := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(t+1)} = x_{it} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{kt}\} \cap P_{\text{hull}}(G).$$

Entonces F_{ij}^t es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si

1. $\text{hull}(\overline{N(i)}) = V$,
2. $\text{hull}(\overline{N[i]} \cup \{j\}) = V$ y
3. para todo $l \in \overline{N[i]} \setminus V_1$ existe $k_l \in N[i] \setminus \{j\}$ tal que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{l\} \cup \{k_l\} \cup \{j\}) = V$.

Demostración. Observemos que un vector x en F_{ij}^t que verifica (2.5), (2.6) y (2.7) necesariamente debe cumplir alguna de las siguientes condiciones,

$$(a) \quad x_{it} = x_{i(t+1)} = 1 \text{ y } \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{kt} = 0,$$

$$(b) \quad x_{it} = 0 \text{ y } x_{i(t+1)} = \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{kt} = 1 \text{ ó}$$

$$(c) \quad x_{it} = x_{i(t+1)} = \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{kt} = 0.$$

En primer lugar, notemos que la condición (b) implica que $x_{jt} = 1$. Supongamos entonces que $\text{hull}(\overline{N(i)}) \neq V$, en este caso también se cumple que $\text{hull}(\overline{N[i]}) \neq V$, y entonces cualquier solución factible $x \in F_{ij}^t$ que verifique (a) o (c) también debe verificar que $x_{jt} = 1$. Entonces, en este caso tenemos que

$$F_{ij}^t \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{jt} = 1\}.$$

Análogamente, si $\text{hull}(\overline{N[i] \cup \{j\}}) \neq V$ entonces $N[i] \setminus \{j\} \cap S_i^x \neq \emptyset$ para todo $x \in P_{\text{hull}(G)}$, entonces $x \in F_{ij}^t$ no puede verificar la condición (c), y luego

$$F_{ij}^t \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(t+1)} = 1\}.$$

Tomemos ahora $l \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, y supongamos que para todo $k \in N(i)$, $k \neq j$ vale que

$$\text{hull}(\overline{N[i] \setminus \{l\} \cup \{k\} \cup \{j\}}) \neq V.$$

En este caso, por el Teorema 2.1.1, ninguna solución factible puede tener su soporte incluído en dicho conjunto. Dicho de otro modo, las soluciones factibles que verifiquen que $x_{lt} = 0$ deben valer 1 en las coordenadas correspondientes a, por lo menos, 2 vértices de $N(i)$ distintos de j . Por lo tanto todas las soluciones factibles $x \in P_{\text{hull}(G)}$ que verifican (a), (b) ó (c) deben verificar también $x_{lt} = 1$, y entonces

$$F_{ij}^t \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{lt} = 1\}.$$

En todos los casos, por el Lema 2.2.2, F_{ij}^t no es una faceta de $P_{\text{hull}(G)}$.

Para demostrar la implicación recíproca, tomemos $t = t_0$ y supongamos que

$$F_{ij}^{t_0} \subseteq \mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(r,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{rt} x_{rt} = \lambda\},$$

donde $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Utilizando las hipótesis del teorema, vamos a definir algunas soluciones factibles en $F_{ij}^{t_0}$ que nos permitirán demostrar que la ecuación que define a \mathcal{H} es un múltiplo de la que define a $F_{ij}^{t_0}$.

- En primer lugar, consideramos $x^0 = (x_t^0)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm}$ definido de modo que

$$S_t^{x^0} = V \text{ para } t < t_0 \text{ o } t > t_0 + s, \quad S_{t_0}^{x^0} = \overline{N(i)} \text{ y } S_{t_0+r}^{x^0} = S_{t_0+r-1}^{x^0} \cup \{l_r\},$$

donde $l_1 = i$ y $l_r \in N_2(S_{t_0+r-1}^{x^0}) \setminus S_{t_0+r-1}^{x^0}$ para $2 \leq r \leq s$. Este vector verifica las hipótesis del Corolario 2.1.4, pues cumple la condición 1 del enunciado y además $t_0 \leq m - s$, por lo tanto está bien definido y verifica las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7). Además, x^0 pertenece a $F_{ij}^{t_0}$ pues verifica la ecuación que la define.

- Análogamente, por la condición 2, existe $\widehat{x}^0 = (\widehat{x}_t^0)_{0 \leq t \leq m-1}$ solución factible en $F_{ij}^{t_0}$ tal que

$$S_t^{\widehat{x}^0} = V \text{ para } t < t_0 \text{ o } t > t_0 + s, S_{t_0}^{\widehat{x}^0} = \overline{N[i] \cup \{j\}} \text{ y } S_{t_0+r}^{\widehat{x}^0} = S_{t_0+r-1}^{\widehat{x}^0} \cup \{l_r\},$$

donde $l_r \in N_2(S_{t_0+r-1}^{\widehat{x}^0}) \setminus S_{t_0+r-1}^{\widehat{x}^0}$ para $1 \leq r \leq s$.

- Finalmente, definimos $y^k = (y_t^k)_{0 \leq t \leq m-1}$ para $k \in N(i) \setminus \{j\}$, solución factible en $F_{ij}^{t_0}$ de modo que

$$S_t^{y^k} = V \text{ para } t < t_0 \text{ o } t \geq t_0 + s, S_{t_0}^{y^k} = \overline{N[i] \cup \{j\} \cup \{k\}} \text{ y } S_{t_0+r}^{y^k} = S_{t_0+r-1}^{y^k} \cup \{l_r\},$$

con $l_1 = i$ y $l_r \in N_2(S_{t_0+r-1}^{y^k}) \setminus S_{t_0+r-1}^{y^k}$ para $2 \leq r \leq s-1$.

Es fácil ver que $y^k - E_{rt} \in F_{ij}^{t_0}$ para $0 \leq t < t_0$, $t \geq t_0 + s - 1$ y $1 \leq r \leq n$, ya que únicamente una coordenada vale 0 en estas soluciones, y corresponde al vértice r (que tiene grado al menos 2) en t . Entonces, tanto y^k como $y^k - E_{rt}$ deben verificar la ecuación que define a \mathcal{H} . Al evaluar estas dos soluciones en dicha ecuación y restar, obtenemos que $\lambda_{rt} = 0$ para $0 \leq t < t_0$, $t \geq t_0 + s - 1$ y $1 \leq r \leq n$. Es decir, hemos visto que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(r,t) \in \mathcal{Z}_1} \lambda_{rt} x_{rt} = \lambda\},$$

donde $\mathcal{Z}_1 = \{1, \dots, n\} \times \{t_0, \dots, t_0 + s - 2\}$.

En lo que sigue veremos que $\lambda_{r(t_0+s-2)} = 0$ para todo $r = 1, \dots, n$.

- Consideremos en primer lugar $r \in \overline{N[i]} \setminus V_1$. Por la condición 3, sabemos que existe $k_r \in N(i) \setminus \{j\}$ tal que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{r\} \cup \{k_r\} \cup \{j\}) = V$. Entonces, podemos definir una solución factible $\widehat{y}^r \in F_{ij}^{t_0}$ que coincide con y^{k_r} si $t \leq t_0 + s - 3$ y además $S_{t_0+s-2}^{\widehat{y}^r} = S_{t_0+s-2}^{y^{k_r}} \setminus \{r\}$. Esto es posible ya que

$$V = \text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{r\} \cup \{k_r\} \cup \{j\}) \subseteq \text{hull}(S_{t_0+s-2}^{y^{k_r}} \setminus \{r\}) \text{ y}$$

$$\delta(S_{t_0+s-2}^{y^{k_r}} \setminus \{r\}) \leq |\overline{S_{t_0+s-2}^{y^{k_r}} \setminus \{r\}}| \leq 2 \leq m - (t_0 + s - 2),$$

pues $s \leq m - t_0$. Evaluando y^{k_r} e \widehat{y}^r en la ecuación de \mathcal{H} y restando podemos concluir que $\lambda_{r(t_0+s-2)} = 0$ si $r \in \overline{N[i]} \setminus V_1$.

- Si en cambio $r \in N(i) \setminus \{j\}$, consideramos la solución y^r definida anteriormente. Sea \widehat{y}^r una solución factible en $F_{ij}^{t_0}$ que coincide con y^r para $t < t_0 + s - 3$ y tal que $S_{t_0+s-2}^{\widehat{y}^r} = S_{t_0+s-2}^{y^r} \setminus \{r\}$. La existencia de esta solución está garantizada por el hecho de que $s \leq m - t_0$ y además, por la condición 2, $\text{hull}(S_{t_0+s-2}^{y^r} \setminus \{r\}) = V$. Razonando como en el caso anterior concluimos que $\lambda_{r(t_0+s-2)} = 0$ si $r \in N(i) \setminus \{j\}$. Para el vértice j podemos proceder exactamente igual ya que $\text{hull}(S_{t_0+s-2}^{y^j} \setminus \{j\}) = V$, en este caso por la condición 1 del enunciado.
- Para el vértice i , podemos considerar las soluciones y^k para cualquier $k \in N(i) \setminus \{j\}$ y una solución que coincida con ella hasta $t_0 + s - 3$ y tal que en $t_0 + s - 2$ su soporte coincida con $S_{t_0+s-2}^{y^k} \setminus \{i\}$ (siempre que $t_0 + s - 2 \neq t_0 + 1$).

Capítulo 3. Algunas familias de facetas

Una vez que probamos que $\lambda_{rt} = 0$ para $r = 1, \dots, n$ y $t > t_0 + l$, con los mismos argumentos de los tres casos analizados con anterioridad, podemos concluir que $\lambda_{r(t_0+l)} = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Esto es así, ya que para todo $r = 1, \dots, n$ hemos visto que $\text{hull}(S_{t_0+l}^{y^k} \setminus \{r\}) = V$, eligiendo $k \in N(i) \setminus \{j\}$ convenientemente, y además $\delta(S_{t_0+l}^{y^k} \setminus \{r\}) \leq s - l - 2 \leq m - (t_0 + l)$, ya que $s \leq m - t_0 \leq m - t_0 + 2$. De este modo podemos concluir que $\lambda_{rt} = 0$ si $1 \leq r \leq n$, $t \neq t_0, t_0 + 1$ y lo mismo para $r \neq i$, $t = t_0 + 1$, $r \in \overline{N(i)} \setminus V_1$, $t = t_0$. Para ver que $\lambda_{jt_0} = 0$ notemos que x^0 y $x^0 + E_{jt_0}$ (donde E_{jt_0} es el jt_0 -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^{nm}) son factibles y pertenecen a $L_{ij}^{t_0}$. En resumen, tenemos que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \lambda_{it_0}x_{it_0} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} \lambda_{kt_0}x_{kt_0} + \lambda_{i(t_0+1)}x_{i(t_0+1)} = \lambda\}.$$

Reemplazando \bar{x}^0 , x^0 y y^k definidos con anterioridad, tenemos que $\lambda = 0$, $\lambda_{it_0} = -\lambda_{i(t_0+1)}$ y $\lambda_{kt_0} = -\lambda_{i(t_0+1)}$ para $k \neq j$ respectivamente. Entonces, la ecuación que define a \mathcal{H} es un múltiplo de la que define a $F_{ij}^{t_0}$, que resulta por lo tanto una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. \square

El siguiente resultado establece condiciones necesarias y suficientes para que la desigualdad (3.2) correspondiente a algún $i = 1, \dots, n$, $j \in N(i)$ defina una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Luego, por el Teorema 2.2.2, obtendremos un resultado análogo para $P_{2\text{dom}}(G)$.

Teorema 3.1.2. *Para cada $i \in V$ tal que $N[i] \subseteq \overline{V}_1$, $j \in N(i)$ sea*

$$F_{ij}^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 1 = x_{i(m-1)} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{k(m-1)}\} \cap P_{\text{hull}}(G).$$

Entonces, F_{ij}^{m-1} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si se cumple que

1. $N_2(\overline{N[i]} \cup \{i\}) = V$,
2. $N_2(\overline{N[i]} \cup \{j, k\}) = V$ para todo $k \in N(i) \setminus \{j\}$,
3. si $r \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, existe $k_r \in N[i]$ tal que $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{r\} \cup \{j, k_r\}) = V$.

Demostración. Observemos que un vector x en F_{ij}^{m-1} que verifica (2.5), (2.6) y (2.7) necesariamente debe cumplir alguna de las siguientes condiciones,

- (a) $x_{i(m-1)} = 1$ y $\sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{k(m-1)} = 0$, ó
- (b) $x_{i(m-1)} = 0$ y $\sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_{k(m-1)} = 1$.

En primer lugar, podemos ver que todas las soluciones x que verifican (b) necesariamente cumplen que $x_{j(m-1)} = 1$, pues de otro modo $i \notin N_2(S_{m-1}^x) \subseteq N_2(\overline{N[i]} \cup \{k\})$ donde k es algún vecino de i . Entonces, alguna solución x que verifique la condición (a) debe cumplir que $x_{j(m-1)} = 0$, ya que

de otro modo $F_{ij}^{m-1} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{j(m-1)} = 1\}$ y no sería una faceta. para que esto ocurra, debe valer que $N_2(\{i\} \cup \overline{N[i]}) = V$. Además, todo $k \in N(i) \setminus \{j\}$ debe cumplir que $N_2(\{j, k\} \cup \overline{N[i]}) = V$, ya que de otro modo, todas las soluciones factibles en F_{ij}^{m-1} verifican la condición $x_{k(m-1)} = 0$ y entonces $F_{ij}^{m-1} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{k(m-1)} = 0\}$. En ese caso, F_{ij}^{m-1} no es una faceta de $P_{hull}(G)$. Por último, si no vale la condición 3, existe $r \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, tal que $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{r\} \cup \{j, k\}) \neq V$ para todo $k \in N[i]$, y por lo tanto, ninguna solución factible en F_{ij}^{m-1} puede verificar que $x_{r(m-1)} = 0$, en ese caso $F_{ij}^{m-1} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{r(m-1)} = 1\}$. En conclusión, hemos visto que las tres condiciones son necesarias.

Para ver que las condiciones son suficientes fijemos $i = i_0$, y consideremos las siguientes soluciones factibles.

- $x^0 \in F_{i_0 j}^{m-1}$ tal que $S_t^{x^0} = V$ si $t \leq m-2$ y $S_{m-1}^{x^0} = \{i_0\} \cup \overline{N[i_0]}$,
- para $k \in N(i) \setminus \{j\}$, $x^k \in F_{i_0 j}^{m-1}$ tal que $S_t^{x^k} = V$ si $t \leq m-2$ y $S_{m-1}^{x^k} = \{j, k\} \cup \overline{N[i_0]}$.

La existencia de estas soluciones está garantizada por las condiciones 1 y 2 del enunciado y el Corolario 2.1.2. Supongamos que la cara $F_{i_0 j}^{m-1}$ esta contenida en algún hiperplano, es decir

$$F_{i_0 j}^{m-1} \subseteq \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}.$$

Donde $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Como x^0 y $x^0 - E_{it}$ pertenecen a $F_{i_0 j}^{m-1}$, evaluando y restando tenemos que $\lambda_{it} = 0$ para $i = 1, \dots, n$ y $0 \leq t \leq m-2$. Lo mismo sucede con x^{k_r} y $x^{k_r} - E_{r(m-1)}$ (donde $r \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$ y $k_r \in N[i_0]$ verifica la condición 3 del enunciado), y con x^0 y $x^0 + E_{j(m-1)}$ obteniendo de este modo que $\lambda_{j(m-1)} = \lambda_{r(m-1)} = 0$ para todo $r \in \overline{N[i_0]} \setminus V_1$. Evaluando las soluciones x^0 y x^k para $k \in N(i_0) \setminus \{j\}$ obtenemos finalmente que la ecuación que define a \mathcal{H} debe ser un múltiplo de la que define a $F_{i_0 j}^{m-1}$, la cual resulta ser entonces una faceta de $P_{hull}(G)$. \square

Por el Teorema 2.2.2 obtenemos el siguiente corolario inmediato.

Corolario 3.1.1. *Para cada $i \in V$ tal que $N[i] \subseteq \overline{V_1}$, $j \in N(i)$ sea*

$$F_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^n : 1 = x_i + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j\}} x_k\} \cap P_{2dom}(G).$$

Entonces, F_{ij} es una faceta de $P_{2dom}(G)$ si y solo si se cumple que

1. $N_2(\overline{N[i]} \cup \{i\}) = V$,
2. $N_2(\overline{N[i]} \cup \{j, k\}) = V$ para todo $k \in N(i) \setminus \{j\}$,
3. si $r \in \overline{N[i]} \setminus V_1$, existe $k_r \in N[i]$ tal que $N_2(\overline{N[i]} \setminus \{r\} \cup \{j, k_r\}) = V$.

Los siguientes teoremas analizan la facetitud de las desigualdades (3.3) y (3.4) para el caso en que el vértice i tiene un único vecino de grado 1. Omitiremos sus demostraciones por ser análogas a las de los teoremas previos de esta misma sección.

Teorema 3.1.3. Sean $i \in \overline{V_1}$ tal que $\{j_0\} = N(i) \cap V_1$ y $0 \leq t \leq m - 2$ tal que $|N[i] \setminus \{j_0\}| = s \leq m - t$. Definimos

$$F_i^t := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{i(t+1)} = x_{it} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j_0\}} x_{kt}\} \cap P_{\text{hull}}(G).$$

Entonces F_i^t es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si

1. $\text{hull}(\overline{N[i]} \cup \{j_0\}) = V$,
2. para todo $l \in \overline{N[i]} \setminus V_1$ existe $k_l \in N[i] \setminus \{j_0\}$ tal que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{l\} \cup \{k_l\} \cup \{j_0\}) = V$.

Teorema 3.1.4. Sea $i \in \overline{V_1}$ tal que $\{j_0\} = N(i) \cap V_1$. Definimos

$$F_i^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : 1 = x_{i(m-1)} + \sum_{k \in N(i) \setminus \{j_0\}} x_{k(m-1)}\} \cap P_{\text{hull}}(G).$$

Entonces F_i^{m-1} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si

1. $N_2(\overline{N[i]} \cup \{j_0, k\}) = V$ para todo $k \in N[i] \setminus \{j_0\}$
2. para todo $l \in \overline{N[i]} \setminus V_1$ existe $k_l \in N[i] \setminus \{j_0\}$ tal que $\text{hull}(\overline{N[i]} \setminus \{l\} \cup \{k_l\} \cup \{j_0\}) = V$.

Podemos observar que las desigualdades de vecindad proveen, junto con la integralidad de las variables, una descripción alternativa de las soluciones factibles de los modelos originales. A pesar de ser más numerosas, en muchos casos definen facetas de los poliedros que consideramos.

A continuación mostraremos un ejemplo para ilustrar cuando se verifican o no las condiciones de los Teoremas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 y 3.1.4. Sea G el grafo representado en la Figura 2.1, cuya salida de PORTA correspondiente a la descripción completa de $P_{\text{hull}}(G)$ se observa en la Figura 2.2, podemos verificar las siguientes afirmaciones.

- La desigualdad (7) es la desigualdad de vecindad de $i = 1$ respecto a $j = 2$ en $t = 0$ y la desigualdad (8) la misma pero en $t = 1$. Ambas definen facetas del poliedro \mathcal{P}_3 -hull, ya que verifican las hipótesis del Teorema 3.1.1, pues $N(1) = \{2, 3\} \subset \overline{V_1}$, $\text{hull}(\overline{N(1)}) = \text{hull}(\{1\} \cup V_1) = V$ y $\text{hull}(\overline{N[1]} \cup \{2\}) = \text{hull}(\{2\} \cup V_1) = V$.
- La desigualdad de vecindad de $i = 1$ respecto a $j = 3$ en $t = 0$ no define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ pues no se verifica la hipótesis $\text{hull}(\overline{N[1]} \cup \{3\}) = V$. Lo mismo ocurre para $t = 1$.
- La desigualdad (3) es la desigualdad de vecindad de $i = 1$ respecto a $j = 2$ en $t = 2$, la cual define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ ya que se verifican las hipótesis del Teorema 3.1.2. Lo mismo ocurre para $i = 1$ respecto a $j = 3$ en $t = 2$ (desigualdad (4)).
- El vértice $i = 2$ tiene un único vecino de grado 1, sin embargo las desigualdades válidas de vecindad en $t = 0$ y $t = 1$ (3.3) no definen facetas de $P_{\text{hull}}(G)$, ya que $\text{hull}(\overline{N[2]} \cup V_1) \neq V$, y por lo tanto no se verifican las hipótesis del Teorema 3.1.3. En cambio, para $t = 2$, se verifican las hipótesis del Teorema 3.1.4 ya que $N_2(\overline{N[2]} \cup V_1 \cup \{2\}) = N_2(\overline{N[2]} \cup V_1 \cup \{1\}) = N_2(\overline{N[2]} \setminus \{3\} \cup V_1 \cup \{1\}) = V$. La desigualdad (4) corresponde a esta faceta.
- No hay desigualdades válidas de vecindad correspondientes al vértice $i = 3$ ya que dicho vértice tiene dos vecinos en V_1 .

3.2. Desigualdades co-convexas y k -cuasi co-convexas

En esta sección presentaremos familias de desigualdades válidas que, si bien serán generalizadas en la sección siguiente, poseen una interpretación interesante en términos de la convexidad \mathcal{P}_3 .

Recordemos que un conjunto C se dice \mathcal{P}_3 -co-convexo si su complemento es \mathcal{P}_3 -convexo. Estos conjuntos pueden interpretarse como conjuntos cuyos vértices nunca se activarán si los vértices activos pertenecen a su complemento, ya que $N_2(\overline{C}) = \overline{C}$. En particular, si $C \subseteq V \setminus V_1$ es un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo no vacío entonces, para todo $0 \leq t \leq m-1$, cada solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) tiene que verificar $x_{it} = 1$ para al menos un vértice $i \in C$, lo cual conduce a la siguiente desigualdad válida que llamaremos *desigualdad co-convexa en tiempo t asociada a C* :

$$\sum_{i \in C} x_{it} \geq 1. \quad (3.5)$$

Por otro lado, existen conjuntos $C \subseteq V$ para los cuales puede ocurrir que se produzca la activación de algunos o de todos sus vértices, aún cuando el proceso comience en \overline{C} , pero es posible que este proceso necesite más tiempo del que se dispone. Por ejemplo, en $t = m-1$ es necesario que los vértices activos conviertan a todo V en un solo paso, por lo tanto si $N_2(\overline{C}) \neq V$, no importa cual sea $\text{hull}(\overline{C})$, necesitamos algún vértice activo dentro de C . Esta es la idea que motiva la definición de *conjunto k -cuasi-co-convexo* y de sus correspondientes desigualdades válidas.

Definición 3.2.1. Si $1 \leq k \leq m$, diremos que el conjunto $C \subseteq V \setminus V_1$ es k -cuasi-co-convexo en G si $N_2^k(\overline{C}) \neq V$. Para un conjunto k -cuasi-co-convexo C llamamos desigualdad k -cuasi-co-convexa asociada a C a la desigualdad

$$\sum_{i \in C} x_{i(m-k)} \geq 1. \quad (3.6)$$

Observación 3.2.1. Observemos que los conjuntos co-convexos son, en particular, k -cuasi co-convexos para todo $k = 1, \dots, m$, y que si un conjunto es k -cuasi co-convexo para algún k en $\{1, \dots, m\}$, entonces también es k_1 -cuasi co-convexo para todo $k_1 \leq k$. Aunque los conjuntos co-convexos son m -cuasi co-convexos, no necesariamente vale la condición recíproca, ya que puede ocurrir que $\text{hull}(\overline{C}) \neq V$ aunque $N_2(\overline{C}) \neq \overline{C}$.

En el siguiente lema mostraremos que (3.6) es una desigualdad válida para $P_{\text{hull}(G)}$ si C es k -cuasi co-convexo, y por lo tanto las desigualdades (3.5) también lo son si C es co-convexo.

Lema 3.2.1. Si $C \subseteq V \setminus V_1$ y $N_2^k(\overline{C}) \neq V$ para algún $k = 1, \dots, m$, entonces la desigualdad (3.6) es válida para $P_{\text{hull}(G)}$. Además, la desigualdad

$$\sum_{i \in C} x_i \geq 1$$

es válida para $P_{2\text{dom}(G)}$ si $N_2(\overline{C}) \neq V$.

Demostración. Si (3.6) no es válida para $P_{\text{hull}}(G)$ entonces existe $x \in \mathbb{R}^{nm}$ que verifica las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7), y tal que $\sum_{i \in C} x_{i(m-k)} = 0$, luego $x_{i(m-k)} = 0$ para todo $i \in C$ y por lo tanto $S_{m-k}^x \subseteq \overline{C}$. Como x es factible, por el Corolario 2.1.2, $\text{hull}(S_{m-k}^x) = V$ y $\delta(S_{m-k}^x) \leq k$, entonces $N_2^k(S_{m-k}^x) = V$ y entonces lo mismo ocurre para \overline{C} , lo que contradice nuestra hipótesis de que C es k -cuasi-co-convexo. La demostración es análoga para $P_{2\text{dom}}(G)$ y la desigualdad 1-cuasi-co-convexa correspondiente. \square

El siguiente lema muestra una condición necesaria para que la desigualdad k -cuasi co-convexa asociada a C defina una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.

Lema 3.2.2. *Sea $F_{Ck} := P_{\text{hull}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{i \in C} x_{i(m-k)} = 1\}$ donde C es un conjunto k -cuasi-co-convexo contenido en \overline{V}_1 para $1 \leq k \leq m$. Si F_{Ck} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ entonces C es un conjunto k -cuasi co-convexo minimal, es decir, no contiene estrictamente a ningún conjunto k -cuasi co-convexo no vacío. La misma condición es necesaria para que $F_C := P_{2\text{dom}}(G) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in C} x_i = 1\}$, donde C es un conjunto 1-cuasi-co-convexo contenido en \overline{V}_1 , sea una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$.*

Demostración. Sea C_1 un conjunto k -cuasi-co-convexo minimal incluido estrictamente en C . Si C_1 es no vacío, entonces cada solución factible de (2.5), (2.5) y (2.5) $x \in F_{Ck}$, debe verificar la ecuación $\sum_{i \in C_1} x_{i(m-k)} = 1$ ya que x verifica

$$\sum_{i \in C} x_{i(m-k)} = \sum_{i \in C_1} x_{i(m-k)} + \sum_{i \in C \setminus C_1} x_{i(m-k)} = 1$$

y además $\sum_{i \in C \setminus C_1} x_{i(m-k)} \geq 0$ y $\sum_{i \in C_1} x_{i(m-k)} \geq 1$ por ser desigualdades válidas para $P_{\text{hull}}(G)$. Entonces

$$F_{Ck} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{i \in C_1} x_{i(m-k)} = 1\}, \quad (3.7)$$

lo cual no es posible, por el Lema 2.2.2, si F_{Ck} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Por el Teorema 2.2.2 se obtiene el mismo resultado para F_C y $P_{2\text{dom}}(G)$. \square

La condición de minimalidad establecida en el lema anterior no es suficiente para asegurar que la desigualdad correspondiente defina una faceta de $\mathcal{P}_3(G)$, como muestra el ejemplo de la Figura 3.1. En ésta, podemos observar que $C = \{1, 2, 3\}$ es un conjunto co-convexo (y por lo tanto es k -cuasi co-convexo para $k = 1, \dots, 4$). También se puede ver que es co-convexo minimal. Sin embargo la desigualdad válida $x_{10} + x_{20} + x_{30} \geq 1$ no define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ ya que la ecuación $x_{40} = 1$ debe verificarse para todo punto de F_C . Esto se debe a que si un único vértice de C está activo, es necesario que el vértice 4 también lo esté. También podemos observar que el conjunto C no es 1-cuasi co-convexo minimal, ya que $C_1 = \{1, 2\} \subset C$ también es 1-cuasi co-convexo, y entonces la desigualdad válida $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 1$ no define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ ya que está *dominada* por la desigualdad $x_{13} + x_{23} \geq 1$, en el sentido en que vale la inclusión (3.7). Este ejemplo muestra que es necesario agregar más hipótesis sobre el conjunto C para garantizar que la ecuación (3.6) defina una faceta. El siguiente lema muestra condiciones equivalentes a la minimalidad para un conjunto k -cuasi co-convexo.

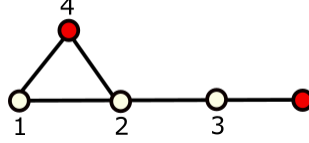


Figura 3.1: $C = \{1, 2, 3\}$ es un conjunto co-convexo minimal.

Lema 3.2.3. *Sea C un conjunto k -cuasi co-convexo en G , entonces C es minimal si y solo si $N_2^k(\overline{C} \cup \{i\}) = V$ para todo $i \in C$.*

Demostración. Si existe $i \in C$ tal que $N_2^k(\overline{C} \cup \{i\}) \neq V$ entonces el conjunto $C \setminus \{i\}$ es un subconjunto propio de C y es k -cuasi co-convexo, ya que $\overline{C \setminus \{i\}} = \overline{C} \cup \{i\}$. Entonces C no es minimal. Recíprocamente, si existe $C_1 \subset C$ tal que $N_2^k(\overline{C_1}) \neq V$, tenemos que $\overline{C} \cup \{i\} \subseteq \overline{C_1}$ para algún $i \in C \setminus C_1$ y luego $V = N_2^k(\overline{C} \cup \{i\}) \subseteq N_2^k(\overline{C_1})$, entonces C es minimal. \square

Observación 3.2.2. *Del lema anterior no puede desprenderse que la misma condición sea válida para conjuntos co-convexos. Esto es así ya que si C es un conjunto co-convexo minimal, sabemos que no contiene a otro co-convexo, pero sí podría contener a un m -cuasi co-convexo.*

Lema 3.2.4. *Sea $C \subseteq V$ un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo. Entonces C es \mathcal{P}_3 -co-convexo minimal si y solo si para todo $i \in C$, se cumple que $\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\}) = V$.*

Demostración. Supongamos que C es co-convexo minimal y que existe $i \in C$ tal que $\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\}) \neq V$. Como $\overline{C} \cup \{i\} \subseteq \text{hull}(\overline{C} \cup \{i\})$ entonces $\overline{\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\})} \subseteq \overline{\overline{C} \cup \{i\}} = C \setminus \{i\}$ y luego

$$\emptyset \neq \overline{\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\})} \subseteq C \setminus \{i\} \subset C.$$

Esto no puede ocurrir si C es co-convexo minimal, ya que $\overline{\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\})}$ es co-convexo.

Por otro lado, si $\text{hull}(\overline{C} \cup \{i\}) = V$ para todo $i \in C$ y $C_1 \subsetneq C$ es un subconjunto no vacío, supongamos que la inclusión es estricta, es decir, que existe $i_0 \in C \setminus C_1$. En este caso tenemos que $V = \text{hull}(\overline{C} \cup \{i_0\}) \subseteq \text{hull}(\overline{C_1}) = \overline{C_1}$ ya que $\overline{C_1}$ es \mathcal{P}_3 -convexo. Esto contradice el supuesto de que $C_1 \neq \emptyset$. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema, que establece condiciones necesarias y suficientes sobre un conjunto co-convexo $C \subseteq V$ para que la correspondiente desigualdad (3.5) defina una faceta de $P_{\text{hull}(G)}$.

Teorema 3.2.1. *Sea $C \subseteq \overline{V_1}$ un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo no vacío tal que $|C| = r \leq m - t$. Si $F_{C_t} := P_{\text{hull}(G)} \cap \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{i \in C} x_{it} = 1\}$, entonces F_{C_t} es una faceta de $P_{\text{hull}(G)}$ si y solo si C es un conjunto co-convexo minimal y además, para todo $j \in \overline{C} \setminus V_1$ existe $i_j \in C$ tal que $\text{hull}(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$.*

Capítulo 3. Algunas familias de facetas

Demostración. Como vimos en el Lema 3.2.2, si F_{C_t} es una faceta entonces C debe ser minimal. Supongamos ahora que para algún vértice $j \in \overline{C} \setminus V_1$ y todo $i \in C$ se cumple que $\text{hull}(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}) \neq V$. Si $x \in F_{C_t}$ es un vector que verifica (2.5), (2.6) y (2.7), por el Corolario 2.1.2 sabemos que $N_2^{m-t}(S_t^x) = V$, y entonces es necesario que $j \in S_t^x$, ya que de otro modo existiría $i \in C$ tal que $N_2^{m-t}(S_t^x) \subseteq N_2^{m-t}(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}) \neq V$. Entonces, si $j \in S_t^x$ debe valer que $x_{jt} = 1$ y en este caso

$$F_{C_t} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{jt} = 1\},$$

lo cual no es posible si F_{C_t} es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ por el Lema 2.2.2. Hemos demostrado entonces que las condiciones del enunciado son necesarias para que F_{C_t} sea una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.

Para demostrar la implicación recíproca, fijemos $t = t_0$ y supongamos que existe un hiperplano afín \mathcal{H} tal que

$$F_{C_{t_0}} \subseteq \mathcal{H} := \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\},$$

donde $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Probaremos que $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{i \in C} x_{it_0} = 1\}$. Por simplicidad, supondremos que $C = \{1, \dots, r\}$ y $\overline{C} \setminus V_1 = \{r+1, \dots, n\}$. Para cada $1 \leq j \leq r$, podemos definir un vector $x^j = (x_{it}^j)_{0 \leq t \leq m-1} \in \mathbb{R}^{nm}$ tal que

- $S_t^{x^j} = V$ si $0 \leq t < t_0$ o $t \geq r + t_0$,
- $S_{t_0}^{x^j} = \{j\} \cup \overline{C}$ y
- $S_{t_0+k}^{x^j} = \{j\} \cup \overline{C} \cup \{l_1, \dots, l_k\}$, con $l_k \in N_2(S_{t_0+k-1}^x) \setminus S_{t_0+k-1}^x$ para $1 \leq k \leq r-1$.

Es decir, x^j tiene la siguiente forma

$$x^j = \underbrace{((1, 1, \dots, 1))}_{t=0}, \dots, \underbrace{((1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0-1}, \underbrace{((0, \dots, 0, \overset{j}{\underset{1}{\square}}, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0 \text{ (} r-1 \text{ ceros)}}, \underbrace{((0, \dots, 0, \overset{j}{\underset{1}{\square}}, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0+1 \text{ (} r-2 \text{ ceros)}}, \dots, \underbrace{((1, 1, 0, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1))}_{t=t_0+r-2 \text{ (1 cero)}}).$$

Por el Corolario 2.1.4, cada x^j está bien definido y verifica las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7). Además, x^j pertenece a $F_{C_{t_0}}$ ya que cumple la ecuación que la define.

Consideremos ahora el vector $y^{it} := x^1 - E_{it}$ donde $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq t_0 - 1$ o $t \geq r + t_0 - 1$. Es fácil ver que y^{it} también es una solución factible que pertenece a $F_{C_{t_0}}$, entonces x^1 y y^{it} verifican la ecuación que define a \mathcal{H} , lo cual implica que $\lambda_{it} = 0$ para $1 \leq i \leq n$, $0 \leq t \leq t_0 - 1$ y también para $t \geq r + t_0 - 1$.

Hasta ahora hemos visto que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}_1} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}, \quad (3.8)$$

donde $\mathcal{Z}_1 = \{1, \dots, n\} \times \{t_0, \dots, r + t_0 - 2\}$.

Ahora consideremos $t = r + t_0 - 2$ y $1 \leq i \leq r$, vamos a mostrar que $\lambda_{it} = 0$. Sea x^i la solución en $F_{C_{t_0}}$ definida más arriba y y^i una solución factible tal que $y_t^i = x_t^i$ para $0 \leq t \leq r + t_0 - 3$ y $y_{r+t_0-2}^i = x_{r+t_0-2}^i - e_i$. La existencia de ésta solución se puede garantizar debido a que $\text{hull}(S_{r+t_0-2}^x \setminus \{i\}) = V$ pues $\overline{C} \cup \{i_1\} \subseteq S_{r+t_0-2}^x \setminus \{i\}$ para algún $i_1 \in C \setminus \{i\}$, y además $\delta(S_{r+t_0-2}^x \setminus \{i\}) \leq 2 \leq m - (r + t_0 - 2)$. Reemplazando x^i y y^i en (3.8), deducimos que $\lambda_{i(r+t_0-2)} = 0$ para $i = 1, \dots, r$.

Para $j \in \overline{C} \setminus V_1$, es decir $r + 1 \leq j \leq n$, las hipótesis nos aseguran que existe $i_j \in C$, $1 \leq i_j \leq r$, tal que $\text{hull}(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$. Consideremos x^{i_j} la solución factible definida anteriormente e y^j una solución factible en $F_{C_{t_0}}$ que verifica que

$$y_t^j = x_t^{i_j} \text{ para } 0 \leq t \leq r + t_0 - 3 \text{ y } y_{r+t_0-2}^j = x_{r+t_0-2}^{i_j} - e_j.$$

Reemplazando ambas soluciones en (3.8), podemos concluir que $\lambda_{j(r+t_0-2)} = 0$ para $j = r + 1, \dots, n$.

Una vez que demostramos que $\lambda_{it} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $t > t_0 + s$ con $s \geq 1$, es fácil ver que $\lambda_{i(t_0+s)} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Esto se debe a que en todos los casos podemos asegurar la existencia de una solución factible x en $F_{C_{t_0}}$ que coincida si $t \leq t_0 + s - 1$ con alguna de solución x^{i_k} para algún i_k conveniente en C , y que en $t = t_0 + s$ su soporte sea $S_{t_0+s}^x \setminus \{i\}$. Este conjunto verifica que $\text{hull}(S_{t_0+s}^x \setminus \{i\}) = V$ y además $\delta(S_{t_0+s}^x \setminus \{i\}) \leq r - s \leq m - (t_0 + s)$.

En suma, hemos visto que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{it_0} x_{it_0} = \lambda\}.$$

Reemplazando ahora x^i para $1 \leq i \leq r$ y y^j para $j = r + 1, \dots, n$ definidas antes, vemos que $\lambda_{1t_0} = \dots = \lambda_{rt_0} = \lambda$ y $\lambda_{jt_0} = 0$ para $r + 1 \leq j \leq n$. Por último, al evaluar las soluciones x^j para $j = 1, \dots, r$ obtenemos que la ecuación que define a \mathcal{H} es un múltiplo de la que define a $F_{C_{t_0}}$ la cual resulta una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ en virtud del Lema 2.2.2. \square

El siguiente corolario es consecuencia directa del teorema anterior, ya que es el caso particular $t = 0$. En este caso se puede obviar la hipótesis sobre el cardinal de C , ya que siempre se verifica.

Corolario 3.2.1. *Si $C \subset V$ es un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo, la desigualdad $\sum_{i \in C} x_{i0} \geq 1$ define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si C es minimal y, para todo $j \in \overline{C}$, existe $i_j \in C$ tal que la cápsula \mathcal{P}_3 -convexa de $\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}$ es V .*

El siguiente teorema es la versión del Teorema 3.2.1 para $t = m - 1$.

Teorema 3.2.2. *Si $C \subset V$ es un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo, la desigualdad $\sum_{i \in C} x_{i(m-1)} \geq 1$ define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si $N_2(\overline{C} \cup \{i\}) = V$ para todo $i \in C$ y, para todo $j \in \overline{C}$, existe $i_j \in C$ tal que $N_2(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$.*

Omitimos la demostración de este teorema ya que es análoga a la de Teorema 3.2.1. Se consideran las soluciones factibles $x^j \in F_{C(m-1)}$ para $j \in C$, que verifican que $S_t^{x^j} = V$ para $0 \leq t \leq m - 2$ y $S_{m-1}^{x^j} = \overline{C} \cup \{j\}$. Se puede ver que $x^1 - E_{it}$ también son soluciones factibles en $F_{C(m-1)}$ si $0 \leq t \leq m - 2$, $1 \leq i \leq n$. Lo mismo para cada $j \in \overline{C} \setminus V_1$, ya que la hipótesis garantiza que tanto x^{i_j} como $x^{i_j} - E_{j(m-1)}$ son soluciones factibles en $F_{C(m-1)}$.

Observemos que en el teorema anterior, la hipótesis de minimalidad fue reemplazada por la condición $N_2(\overline{C} \cup \{i\}) = V$ para todo $i \in C$. Esto es así ya que la minimalidad asegura que para todo $i \in C$ existe algún $k \geq 1$ tal que $N_2^k(\overline{C} \cup \{i\}) = V$, pero la demostración necesita la hipótesis pedida que es más fuerte. Entonces, podemos formular el teorema anterior como mostramos a continuación.

Teorema 3.2.3. *Sea $C \subseteq V \setminus V_1$ un conjunto 1-cuasi-co-convexo. La desigualdad (3.6) define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ si y solo si C es minimal y además, para cada $j \in \overline{C} \setminus V_1$ existe $i_j \in C$ tal que $N_2(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$.*

El Teorema 2.2.2 asegura el siguiente resultado para el poliedro de 2-dominación.

Corolario 3.2.2. *Si $C \subset V$ es un conjunto \mathcal{P}_3 -co-convexo (respectivamente, 1-cuasi co-convexo), la desigualdad $\sum_{i \in C} x_i \geq 1$ define una faceta de $P_{2\text{dom}}(G)$ si y solo si $N_2(\overline{C} \cup \{i\}) = V$ para todo $i \in C$ (respectivamente, C es minimal) y, para todo $j \in \overline{C}$, existe $i_j \in C$ tal que $N_2(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$.*

Observación 3.2.3. *Podemos ver que para $i \in \overline{V_1}$ y $j \in N(i) \subseteq \overline{V_1}$, el conjunto $N_{ij} := N[i] \setminus \{j\}$ es 1-cuasi-co-convexo en G , pues $i \notin N_2(N[i] \setminus \{j\})$. Entonces la desigualdad de vecindad de i respecto a j*

$$x_{i(t+1)} \leq x_{it} + \sum_{k \neq j} x_{ikt}$$

para $t = m - 1$ coincide con la desigualdad 1-cuasi-co-convexa asociada a N_{ij} .

En lo que sigue, estudiaremos las desigualdades k -cuasi co-conexas. El próximo teorema establece condiciones necesarias sobre un conjunto $C \subseteq V$ para que la desigualdad válida (3.6) defina una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$. Lamentablemente, estas condiciones no son suficientes.

Teorema 3.2.4. *Sea $C \subseteq V \setminus V_1$ un conjunto k -cuasi-co-convexo. Si la desigualdad correspondiente (3.6) define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$ entonces*

1. C es un conjunto k -cuasi co-convexo minimal en G ,
2. para cada $j \in \overline{C} \setminus V_1$ existe algún $i_j \in C$ tal que $N_2^k(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$,

3. para cada $j \in V \setminus V_1$ y cada $1 \leq r \leq k-1$, existe algún $i_{jr} \in C$ tal que $N_2^{k-r}(N_2^r(\overline{C} \cup \{i_{jr}\}) \setminus \{j\}) = V$.

Demostración. Sea

$$F_C := \{x \in P_{\text{hull}}(G) : \sum_{i \in C} x_{i(m-k)} = 1\}, \quad (3.9)$$

ya hemos visto que la condición 1 es necesaria para que F_C sea una faceta del poliedro hull. Además, si existe algún $j \in \overline{C} \setminus V_1$ tal que $N_2^k(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}) \neq V$ para todo $i \in C$, entonces para toda solución factible x de (2.5), (2.6) y (2.7) debe valer que $x_{j(m-k)} = 1$ ya que de otro modo $S_{m-k}^x \subseteq \overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}$ para algún $i \in C$, y esto no es posible, ya que por el Corolario 2.1.2 tenemos que $N_2^k(S_{m-k}^x) = V$. Hemos demostrado que si $N_2^k(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}) \neq V$ para todo $i \in C$, entonces

$$F_C \subset \{x \in \mathbb{R}^{nm} : x_{j(m-k)} = 1\}.$$

Esto contradice el hecho de que F_C es una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$, por el Lema 2.2.2. Por último, si existe $j \in V \setminus V_1$ y $r \in \{1, \dots, k-1\}$ tal que $N_2^{k-r}(N_2^r(\overline{C} \cup \{i\}) \setminus \{j\}) \neq V$ para todo $i \in C$, entonces un argumento similar muestra que

$$F_C \subset \{x \in P_{\text{hull}}(G) : x_{j(m-k+r)} = 1\}, \quad (3.10)$$

ya que si $x_{j(m-k+r)} = 0$ para alguna solución factible x entonces $S_x^{m-k+r} \subseteq N_2^r(\overline{C} \cup \{i\}) \setminus \{j\}$ y luego $N_2^{k-r}(S_x^{m-(k-r)}) \subseteq N_2^{k-r}(N_2^r(\overline{C} \cup \{i\}) \setminus \{j\}) \neq V$. La inclusión (3.10) contradice una vez más la facetitud de (3.6). Por lo tanto, las tres condiciones enunciadas son necesarias. \square

Teorema 3.2.5. Si $C \subseteq V$ es un conjunto k -cuasi co-convexo tal que C verifica las condiciones 1 y 2 del Teorema 3.2.4 y, además, para cada $j \in V \setminus V_1$ y $1 \leq r \leq k-1$ existe $i_{jr} \in C$ tal que $j \in N_2^r(\overline{C} \cup \{i_{jr}\})$ y $N_2^{k-r}(N_2^r(\overline{C} \cup \{i_{jr}\}) \setminus \{j\}) = V$, entonces la desigualdad asociada (3.6) define una faceta de $P_{\text{hull}}(G)$.

Demostración. Como C es minimal, por el Lema 3.2.3, podemos definir $x^i \in \mathbb{R}^{nm}$ para cada $i \in C$, una solución factible en F_C (ver (3.9) tal que $S_0^{x^i} = \dots = S_{m-k-1}^{x^i} = V$, $S_{m-k}^{x^i} = \overline{C} \cup \{i\}$, $S_{m-k+1}^{x^i} = N_2(\overline{C} \cup \{i\})$, \dots , $S_{m-1}^{x^i} = N_2^{k-1}(\overline{C} \cup \{i\})$). Supongamos ahora que

$$F_C \subseteq \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^{nm} : \sum_{(j,s) \in \mathcal{Z}} \lambda_{js} x_{js} = \lambda\}, \quad (3.11)$$

donde $\mathcal{Z} = \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m-1\}$. Supongamos que el vértice $1 \in C$ y sea x^1 la solución factible definida anteriormente. Es fácil ver que $x^1 - E_{js}$ también es una solución factible si $1 \leq j \leq n$ y $0 \leq s \leq m-k-1$, entonces evaluando ambas soluciones en la ecuación que define a \mathcal{H} y restando, tenemos que $\lambda_{js} = 0$ para dichos valores de j y s .

Para $1 \leq j \leq n$ y $r = k-1$, la hipótesis del teorema nos asegura que existe $i_{j(k-1)} \in C$ tal que $j \in N_2^{k-1}(\overline{C} \cup \{i_{j(k-1)}\})$ y $N_2(N_2^{k-1}(\overline{C} \cup \{i_{j(k-1)}\}) \setminus \{j\}) = V$, entonces $x^{i_{j(k-1)}}$ y $x^{i_{j(k-1)}} - E_{j(m-1)}$ son soluciones factibles en F_C y entonces $\lambda_{j(m-1)} = 0$. Una vez que probamos que $\lambda_{jt} = 0$ para $1 \leq j \leq n$ y $t = m-k+s, \dots, m-1$ para algún $2 \leq s \leq k-1$ se puede ver que $\lambda_{jt} = 0$ para $1 \leq j \leq n$ y $t = m-k+s-1$. Esto se debe a que para $1 \leq j \leq n$ y $r = s-1$, las hipótesis nos aseguran que existe un $i_{j(s-1)} \in C$ tal que

Capítulo 3. Algunas familias de facetas

- $j \in N_2^{s-1}(\overline{C} \cup \{i_{jr}\})$ (por lo tanto, si $x^{i_{jr}}$ es la solución factible definida anteriormente su coordenada $j(m-k+s-1)$ vale 1) y
- $N_2^{k-s+1}(N_2^{s-1}(\overline{C} \cup \{i_{jr}\}) \setminus \{j\}) = V$. Esto nos permite definir una nueva solución factible que coincida con $x^{i_{jr}}$ para $0 \leq t \leq m - (k-s+2) = m - k + s - 2$ y tal que en $t = m - k + s - 1 = m - (k-s+1)$ su soporte sea $N_2^{s-1}(\overline{C} \cup \{i_{jr}\}) \setminus \{j\}$.

Evaluando estas dos soluciones factibles y restando obtenemos el resultado buscado. De este modo podemos probar que $\lambda_{jt} = 0$ para $1 \leq j \leq n$ y $t \geq m - k + 1$. Finalmente, la hipótesis de que para cada $j \in \overline{C} \setminus V_1$ existe algún $i_j \in C$ tal que $N_2^k(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}) = V$, nos permite definir una solución factible y^j tal que $S_t^{y^j} = V$ para $t = 0, \dots, m - k - 1$ y $S_{m-k}^{y^j} = \overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i_j\}$. Evaluando x^{i_j} e y^j en la ecuación que define a \mathcal{H} y restando, tenemos que $\lambda_{j(m-k)} = 0$ si $j \in \overline{C} \setminus V_1$. Al evaluar todas las soluciones x^i para $i \in C$ comprobamos que $\lambda_{i(m-k)} = \lambda$ y luego, la ecuación que define a \mathcal{H} es un múltiplo de la que define a F_C , siendo entonces esta una faceta de $P_{hull}(G)$. \square

Concluiremos la presente sección con algunos ejemplos. En primer lugar, observemos la descripción completa del polítopo \mathcal{P}_3 -hull del grafo G representado en la Figura 2.1, que hemos obtenido utilizando el software PORTA (Figura 2.2). Podemos realizar las siguientes observaciones.

- El conjunto $C = \{1, 2\}$ es \mathcal{P}_3 -co-convexo (ya que $N_2(V_1 \cup \{3\}) = V_1 \cup \{3\}$), además $\text{hull}(\overline{C} \cup \{1\}) = \text{hull}(\overline{C} \cup \{2\}) = V$, luego por el Lema 3.2.4 es minimal. También se cumple que $\text{hull}(\overline{C} \setminus \{3\} \cup \{1\}) = V$. Es decir, se verifican las hipótesis del Teorema 3.2.1 y del Teorema 3.2.2, por lo tanto $x_{10} + x_{20} \geq 1$, $x_{11} + x_{21} \geq 1$ y $x_{12} + x_{22} \geq 1$ están presentes en la descripción completa del poliedro $P_{hull}(G)$ (desigualdades (1), (2) y (4) de la Figura 2.2).
- El conjunto $C = \{1, 3\}$ es 1-cuasi co-convexo, ya que $N_2(\overline{C}) = \overline{C} \cup \{3\} \neq V$. Además, se verifican las hipótesis del Teorema 3.2.3, ya que $N_2(\overline{C} \cup \{1\}) = N_2(\overline{C} \cup \{3\}) = V$ y $N_2(\overline{C} \setminus \{2\} \cup \{1\}) = V$, por lo tanto la correspondiente desigualdad cuasi co-convexa $x_{12} + x_{32} \geq 1$ define una faceta de $P_{hull}(G)$ y de $P_{2dom}(G)$, como puede verse en la Figura 2.2 (desigualdad (3)). Para este ejemplo en particular, hemos podido identificar a todas las facetas presentes en la descripción completa del polítopo \mathcal{P}_3 -hull.

Por otro lado, la Figura 3.2 ilustra el caso de un árbol \mathcal{T} y un conjunto 2-cuasi co-convexo $C = \{1, 2, 3\}$ que verifica las condiciones del Teorema 3.2.5, ya que es minimal (pues $N_2^2(\overline{\{1, 2\}}) = V$ y lo mismo ocurre para $\{1, 3\}$ y $\{2, 3\}$), y además $N_2(N_2(\overline{\{1, 2, 3\}} \cup \{2\}) \setminus \{j\}) = V$ para $j = 1, 2, 3$. Dicho teorema nos asegura que $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 1$ define una faceta de $P_{hull}(\mathcal{T})$. Notemos que el mismo conjunto es 1-cuasi co-convexo, ya que $N_2(\overline{\{1, 2, 3\}}) \neq V$ pero no es minimal pues $N_2(\overline{\{1, 2\}}) \neq V$, luego la desigualdad $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 1$ no define una faceta de $P_{hull}(\mathcal{T})$.

Por último, la Figura 3.3 muestra la descripción completa del polítopo de 2-dominación para el grafo \hat{G} representado en la Figura 3.4. Podemos realizar las siguientes observaciones.

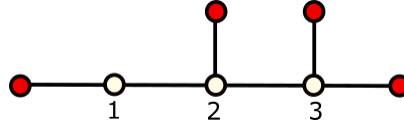


Figura 3.2: Conjunto 2-cuasi co-convexo.

- El conjunto $C_1 = \{1, 2\}$ es co-convexo y verifica las condiciones del Teorema 3.2.2, ya que es minimal y para cualquier $j \in \overline{C_1}$ existe algún $i \in C$ tal que $N_2(\overline{C} \setminus \{j\} \cup \{i\}) = V$, por lo tanto $x_1 + x_2 \geq 1$ define una faceta de $P_{2dom}(\hat{G})$ como puede verse en la Figura 3.3 (desigualdad (4)).
- Los conjuntos $C_2 = \{1, 6\}$, $C_3 = \{2, 3, 4\}$, $C_4 = \{3, 4, 5\}$, $C_5 = \{5, 6, 7\}$, $C_6 = \{3, 4\}$, $C_7 = \{4, 5, 6\}$ y $C_8 = \{4, 5, 8\}$ son 1-cuasi co-convexos y verifican las condiciones del Teorema 3.2.3, por lo tanto las correspondientes desigualdades cuasi co-convexas forman parte de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$, como podemos ver en la Figura 3.3 (desigualdades (5) a (11)).
- Las desigualdades (12) a (17) de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$ (Figura 3.3) corresponden a las desigualdades $x_i \geq 0$ para $i = 3, 4, 5, 7, 8$, ya que se verifican las condiciones del Teorema 2.4.2.
- Las desigualdades (18) a (24) de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$ (Figura 3.3) corresponden a las restricciones $x_i \leq 1$, que siempre están presentes en la descripción completa de $p_{2dom}(\hat{G})$, como lo asegura el Teorema 2.4.1.
- La desigualdad (3) de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$ (Figura 3.3) corresponde a la restricción original del modelo (2.6) para $i = 4$. Como se verifican las hipótesis del Teorema 2.5.1, sabemos que define una faceta del poliedro estudiado.
- Con lo visto hasta el momento no podemos identificar a las desigualdades (1) y (2) de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$.

3.3. Desigualdades de rango local

En las secciones anteriores estudiamos distintas familias de desigualdades válidas, entre ellas las desigualdades co-convexas y las cuasi co-convexas. Presentaremos ahora una generalización de las desigualdades mencionadas. La idea para construir estas desigualdades es similar a la idea utilizada en los trabajos [18, 33], donde se estudian los poliedros asociados al problema de coloreo y al de clasificación, respectivamente.

Definición 3.3.1. Sea $S \subseteq V \setminus V_1$ un conjunto k -cuasi co-convexo, es decir $N_2^k(\overline{S}) \neq V$ para algún $k \in \{1, \dots, m\}$. Definimos

$$h_S := \min\{|H| : H \subseteq S \text{ y } N_2^k(\overline{S} \cup H) = V\}.$$

```

DIM = 8

VALID
1 1 1 1 1 1 1 1

INEQUALITIES_SECTION
( 1) -x1-x2-x3- x4-x5-x6-x7 <= -3
( 2) -x1-x2-x3-2x4-x5-x6 <= -3
( 3) -x3-2x4-x5 -x8 <= -2
( 4) -x1-x2 <= -1
( 5) -x1 -x6 <= -1
( 6) -x2-x3- x4 <= -1
( 7) -x3- x4-x5 <= -1
( 8) -x3- x4 -x8 <= -1
( 9) -x4-x5-x6 <= -1
(10) -x4-x5 -x8 <= -1
(11) -x5-x6-x7 <= -1
(12) -x3 <= 0
(13) -x4 <= 0
(14) -x5 <= 0
(15) -x7 <= 0
(16) -x8 <= 0
(17) +x8 <= 1
(18) +x7 <= 1
(19) +x6 <= 1
(20) +x5 <= 1
(21) +x4 <= 1
(22) +x3 <= 1
(23) +x2 <= 1
(24) +x1 <= 1

END

```

Figura 3.3: Salida de PORTA con la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$, siendo \hat{G} el grafo representado en la Figura 3.4.

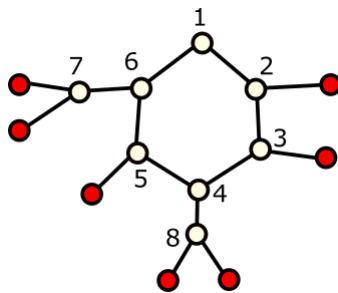


Figura 3.4: Grafo \hat{G} para el ejemplo analizado en la Sección 3.2.

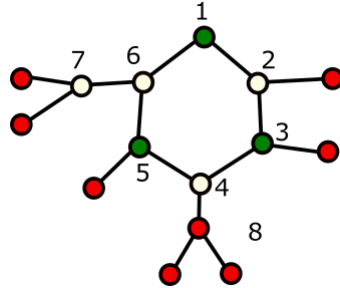


Figura 3.5: El conjunto $H = \{1, 3, 5\}$ verifica que $N_2(\overline{C_1} \cup H) = V$.

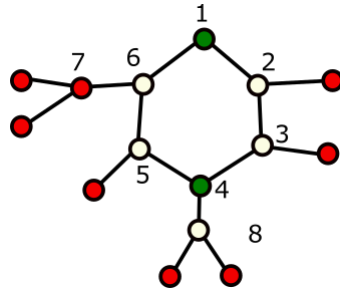


Figura 3.6: El conjunto $H = \{1, 4\}$ verifica que $N_2(\overline{C_2} \cup H) = V$.

Notemos que para $k = m$, el parámetro h_S puede interpretarse como el número \mathcal{P}_3 -hull restringido al subconjunto S . Análogamente, si $k = 1$ el parámetro h_S puede verse como el número de 2-dominación del conjunto S . En ambos casos estamos considerando como vértices inicialmente activos a todos los vértices que no pertenecen a S . Por ejemplo en el grafo \hat{G} representado en la Figura 3.4 podemos observar que

- el conjunto $C_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es 1-cuasi co-convexo. Si consideramos a los vértices de su complemento como vértices activos, podemos ver que el conjunto $H = \{1, 3, 5\}$ verifica que $N_2(\overline{C_1} \cup H) = V$ (Figura 3.5) y que no hay otro conjunto con menos de 3 vértices que verifique esa condición. Por lo tanto $h_{C_1} = 3$.
- El conjunto $C_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ también es 1-cuasi co-convexo, en este caso $h_{C_2} = 2$, ya que $H = \{1, 4\}$ verifica que $N_2(\overline{C_2} \cup H) = V$ (Figura 3.6).

Proposición 3.3.1. Si x es una solución factible en $P_{\text{hull}}(G)$ y $S \subseteq V \setminus V_1$ es un conjunto k -cuasi co-convexo, entonces x verifica

$$\sum_{i \in S} \frac{x_{i(m-k)}}{h_S} \geq 1.$$

Es decir, la desigualdad anterior es válida para $P_{\text{hull}}(G)$.

Demostración. Si x es una solución factible en $P_{\text{hull}}(G)$, entonces por el Corolario 2.1.2 tenemos que $N_2^k(S_{m-k}^x) = V$. Esto implica que $N_2^k(S_{m-k}^x \cap S \cup S_{m-k}^x \cap \overline{S}) = V$ y entonces $N_2^k(\overline{S} \cup T) = V$ para T

Capítulo 3. Algunas familias de facetas

definido como $T := S_{m-k}^x \cap S$, pero entonces, por la definición de h_S , $|T| \geq h_S$, y luego la desigualdad es válida. \square

Continuando con el ejemplo del grafo representado en la Figura 3.4, las desigualdades $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 3$ y $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \geq 2$ son válidas para $P_{2dom}(\hat{G})$. Sin embargo solo la primera desigualdad forma parte de la descripción completa de $P_{2dom}(\hat{G})$, como se puede observar en la Figura 3.3 (desigualdad (1)). Esto está justificado por las siguientes observaciones.

- $P_{2dom}(\hat{G}) \cap \{x \in \mathbb{R}^8 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 = 2\} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)$ ya que no hay otra combinación de dos vértices en C_2 distintos de $i = 1, j = 4$ tal que $N_2(\overline{C_2} \cup \{i, j\}) = V$. Entonces la desigualdad define un punto extremo de $P_{2dom}(\hat{G})$.
- La cara $F := P_{2dom}(\hat{G}) \cap \{x \in \mathbb{R}^8 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3\}$ no puede estar incluida en otro hiperplano afín distinto de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 3$. Supongamos que $F \subseteq \{x \in \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^8 a_i x_i = a\}$. Como $N_2(\{2, 4, 6\}) = N_2(\{2, 4, 6, 8\}) = V$, tenemos que $a_8 = 0$ y $a_2 + a_4 + a_6 = a$. También $N_2(\{2, 5, 6\}) = N_2(\{2, 3, 6\}) = V$, y entonces $a_5 = a_4 = a_3$. Por otro lado, $N_2(\{1, 4, 7\}) = N_2(\{1, 4, 6\}) = N_2(\{1, 4, 5\}) = V$ y entonces $a_5 = a_6 = a_7$, y como $N_2(\{1, 3, 6\}) = N_2(\{1, 3, 5\}) = N_2(\{1, 2, 5\}) = V$, tenemos que $a_1 = a_2 = a_3$. Es decir, probamos que el único hiperplano que contiene a F es de la forma $\sum_{i=1}^8 a_i x_i = 3a_1$, es decir, un múltiplo de la desigualdad que estamos estudiando. Por lo tanto la desigualdad $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 3$ define una faceta de $P_{2dom}(\hat{G})$.

A continuación mostraremos cómo estas desigualdades pueden reforzarse todavía más, utilizando, ya no un número hull restringido a un subconjunto, como es el caso de h_S , sino un número hull al que notaremos $h_S(i)$, y que puede tomar distintos valores para cada vértice $i \in S$.

Definición 3.3.2. Sean $S \subseteq V \setminus V_1$ y $T \subseteq S$, diremos que T es un H_k -conjunto para S si $N_2^k(\overline{S} \cup T) = V$. Para cada $i \in S$ definimos

$$h_S^k(i) := \min\{|T| : T \text{ es un } H_k\text{-conjunto para } S \text{ e } i \in T\}.$$

Si $k = m$, el parámetro $h_S^m(i)$ puede interpretarse como un número \mathcal{P}_3 -hull local, en el sentido en que está restringido a S y depende de cada vértice i , ya que cada H_m -conjunto T verifica que $\text{hull}(\overline{S} \cup T) = V$. Este parámetro dependerá también del conjunto de referencia S que estemos considerando. Para el grafo representado en la Figura 3.7, si consideramos $S = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede ver que $h_S^1(1) = 1$ ya que $\{1\}$ es un H_1 -conjunto para S ($N_2(\overline{S} \cup \{1\}) = V$), en tanto que $h_S^1(2) = 2$ ya que $\{2, 3\}$ es un H_1 -conjunto para S de cardinal mínimo. Análogamente, $h_S^1(3) = h_S^1(4) = 2$.

Proposición 3.3.2. Si $x \in \mathbb{R}^{nm}$ es una solución factible en $P_{\text{hull}}(G)$ y $S \subseteq V \setminus V_1$ es un subconjunto tal que $N_2^k(\overline{S}) \neq V$, entonces x verifica

$$\sum_{i \in S} \frac{x_{i(m-k)}}{h_S^k(i)} \geq 1. \quad (3.12)$$

Es decir, la anterior es una desigualdad válida para $P_{\text{hull}}(G)$.

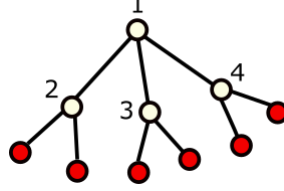


Figura 3.7: El conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ es 1-quasi co-convexo

Demostración. Si x es una solución factible en $P_{\text{hull}}(G)$ y $S \subseteq V \setminus V_1$ es un subconjunto tal que $N_2^k(\bar{S}) \neq V$, por el Corolario 2.1.2 tenemos que

$$N_2^k(S_{m-k}^x) = N_2^k((S_{m-k}^x \cap S) \cup (S_{m-k}^x \cap \bar{S})) \subseteq N_2^k((S_{m-k}^x \cap S) \cup \bar{S}).$$

Entonces, el conjunto $T = S_{m-k}^x \cap S$ es un H_k -conjunto en S . Además,

$$\sum_{i \in S} \frac{x_{i(m-k)}}{h_S(i)} = \sum_{i \in S \cap S_{m-k}^x} \frac{1}{h_S(i)}.$$

Como además $h_S(i) \leq |T|$ para todo $i \in T$ tenemos que

$$\sum_{i \in T} \frac{1}{h_S(i)} \geq \sum_{i \in T} \frac{1}{|T|} = 1,$$

y entonces la desigualdad es válida. \square

Para concluir, se puede ver que las desigualdades k -cuasi co-convexas (3.5) son un caso particular de esta última familia de desigualdades (3.12) donde $h_C^k(i) = 1$ para todo $i \in C$. Continuando con el ejemplo de la Figura 3.7 podemos ver que el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4\}$ verifica que $N_2(\bar{S}) \neq V$, es decir es un conjunto 1-cuasi co-convexo. Su correspondiente desigualdad 1-cuasi-co-convexa es $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 1$, que no define una faceta ya que no verifica las hipótesis del Teorema 3.2.4, pues $N_2(\bar{S} \cup \{2\}) \neq V$. También hemos visto que $h_S^1(1) = 1$ y que $h_S^1(2) = h_S^1(3) = h_S^1(4) = 2$, y entonces la desigualdad (3.12) correspondiente es

$$\frac{x_{13}}{1} + \frac{x_{23}}{2} + \frac{x_{33}}{2} + \frac{x_{43}}{2} \geq 1,$$

que resulta ser una de las restricciones originales del modelo, (2.6), y que en este caso define una faceta del poliedro correspondiente.

Capítulo 4

Descripciones completas

En los capítulos previos comenzamos el estudio de los poliedros \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo. El propósito de dicho estudio es proveer los fundamentos teóricos que contribuyan al cálculo efectivo de los parámetros estudiados, por ejemplo, utilizando las facetas encontradas para el diseño y la implementación de un algoritmo de planos de corte (ver Sección 1.4). Estos resultados son relevantes ya que las técnicas poliedrales han mostrado ser muy efectivas para resolver problemas de programación lineal que en su versión de decisión son NP-completos, y que por lo tanto no se conoce hasta la fecha ningún algoritmo exacto que los resuelva en forma efectiva. Como el cálculo de ambos parámetros es NP-completo en su versión de decisión para un grafo general, creemos que nuestros resultados pueden contribuir a su cómputo.

En este capítulo cambiamos el enfoque de nuestro trabajo y nos dedicamos a estudiar los poliedros asociados a familias de grafos para los cuales el problema del cálculo de los parámetros es polinomial. Esto ocurre de manera trivial para caminos, ciclos y grafos completos y, como fue demostrado por ejemplo en [20], para árboles. Nuestro objetivo no es ya encontrar algunas familias de facetas, sino hallar la descripción completa de los polítopos, es decir, todas sus facetas para las familias de grafos mencionadas. Esto es lo que hacemos en las Secciones 4.1, 4.2 y 4.3, donde mostramos la descripción completa del poliedro \mathcal{P}_3 -hull (y por lo tanto del poliedro de 2-dominación) para caminos, ciclos y grafos completos respectivamente, mientras que para el caso de árboles mostramos la descripción completa del poliedro de 2-dominación (Sección 4.4).

A continuación describimos brevemente la estrategia que utilizaremos para hallar las descripciones completas de los polítopos. Sea P el poliedro que queremos describir mediante desigualdades, dado como combinación convexa de ciertos vectores binarios. En primer lugar encontramos desigualdades que definen facetas de P , por ejemplo aplicando los resultados de los Capítulos 2 y 3 a las familias de grafos que estemos analizando. Además, la utilización del software PORTA, puede ser de utilidad para hallar más familias de facetas o bien sospechar que hemos encontrado la descripción completa. Si llamamos \hat{P} al poliedro dado por todas las desigualdades que hemos encontrado, para ver

que $\hat{P} = P$ basta probar que

- \hat{P} está incluido en el poliedro correspondiente a la relajación lineal del problema y
- los puntos extremos o vértices de \hat{P} tienen todas sus coordenadas enteras (binarias).

La parte más difícil en general es demostrar el segundo ítem, excepto en los casos en los cuales la matriz de los coeficientes de las desigualdades que definen a \hat{P} tiene alguna propiedad particular. Uno de estos casos está dado por las matrices *totalmente unimodulares*, que son aquellas que verifican que todas sus submatrices cuadradas inversibles tienen determinante igual a 1 ó -1 . En estos casos, gracias a la Regla de Crámer, es fácil ver que los vértices de \hat{P} tienen coordenadas enteras. Cuando esto no ocurra deberemos utilizar argumentos ad-hoc.

En el caso de árboles, es fácil ver que en general hay facetas definidas por desigualdades con coeficientes distintos de ± 1 (como es el caso de las restricciones del modelo, las desigualdades (2.6)), y por lo tanto la matriz correspondiente no es totalmente unimodular. De ahí que la descripción completa del poliedro de 2-dominación para árboles (Teorema 4.4.1) sea el resultado más importante de esta tesis, no solo por la dificultad de su demostración, sino porque además esta descripción completa de $\mathcal{P}_{2dom}(\mathcal{T})$ provee un algoritmo polinomial para el cálculo del número de 2-dominación de un árbol, que consiste en aplicar alguno de los algoritmos que resuelven PL (el método del elipsoide, por ejemplo), utilizando la descripción de la región factible mediante las desigualdades que hemos hallado.

4.1. Caminos

En esta sección mostramos que para un camino de $n + 2$ vértices, al que notaremos \mathcal{P}_{n+2} , las desigualdades co-convexas asociadas a los conjuntos $C_i = \{i, i + 1\}$ para $i = 1, \dots, n - 1$, y las cotas de las variables $x_{it} \leq 1$ para $i = 1, \dots, n$ son suficientes para describir en forma completa y minimal al poliedro correspondiente. Para probar este resultado utilizaremos las siguientes propiedades, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [72].

Lema 4.1.1. (Corolario 2.10, página 544 [72]) Si $A \in \{0, 1\}^{r \times s}$ es una matriz de intervalo, es decir una matriz donde los coeficientes no nulos de una fila están en columnas consecutivas de dicha fila, entonces A es totalmente unimodular.

Lema 4.1.2. (Proposición 2.1, página 540 [72]) Si $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es totalmente unimodular.
- $A^t \in \mathbb{R}^{s \times r}$ es totalmente unimodular.
- $(A, I) \in \mathbb{R}^{r \times (s+r)}$, donde $I \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es la matriz identidad, es totalmente unimodular.

Capítulo 4. Descripciones completas

- La matriz que se obtiene al multiplicar una fila o una columna de A por -1 es totalmente unimodular.

Lema 4.1.3. (Proposición 2.2, página 541 [72]) Si $A \in \mathbb{R}^{r \times s}$ es totalmente unimodular, entonces

$$P(b) = \{x \in \mathbb{R}_+^s : Ax \leq b\}$$

es un poliedro entero (es decir, sus puntos extremos tienen coordenadas enteras) para todo $b \in \mathbb{Z}^r$.

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema, que brinda la descripción completa del polítopo hull, y por lo tanto del de 2-dominación, para caminos.

Teorema 4.1.1. Sea \mathcal{P}_{n+2} el grafo camino con $V \setminus V_1 = \{1, \dots, n\}$. Entonces las desigualdades

$$x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \quad \text{para } 0 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq n-1, \quad (4.1)$$

$$x_{it} \leq 1 \quad \text{para } 0 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq n. \quad (4.2)$$

describen al poliedro $P_{\text{hull}}(\mathcal{P}_{n+2}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ en forma completa y minimal.

Demostración. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ el poliedro definido por las desigualdades del enunciado, es decir

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{n^2} : x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq n-1, \\ x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq n\}.$$

Para $i = 1, \dots, n-1$, los conjuntos $C_i = \{i, i+1\} \subseteq V \setminus V_1$ son \mathcal{P}_3 -co-convexos y además verifican las condiciones del Teorema 3.2.1, ya que $N_2(\overline{C_i} \cup \{i\}) = V$ y lo mismo ocurre para $i+1$ y al extraer $j \in \overline{C_i} \setminus V_1$. Esto implica que las desigualdades (4.1) son válidas y definen facetas de $P_{\text{hull}}(\mathcal{P}_{n+2})$ para $0 \leq t \leq n-2$ y lo mismo ocurre para $t = n-1$ por el Teorema 3.2.2. Además, por el Teorema 2.4.1, las desigualdades $x_{it} \leq 1$ también definen facetas de $P_{\text{hull}}(\mathcal{P}_{n+2})$ para todo i y t , entonces tenemos que $P_{\text{hull}}(\mathcal{P}_{n+2}) \subseteq P$.

Veremos que los puntos extremos de P tienen coordenadas binarias y que, además, verifican las restricciones del modelo, que en este caso son

$$2x_{1(t+1)} \leq 2x_{1t} + x_{2t} + 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-2, \quad (4.3)$$

$$2x_{n(t+1)} \leq 2x_{nt} + x_{(n-1)t} + 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-2, \quad (4.4)$$

$$2x_{i(t+1)} \leq 2x_{it} + x_{(i-1)t} + x_{(i+1)t} \text{ para } 0 \leq t \leq n-2, 2 \leq i \leq n-1, \quad (4.5)$$

$$2 \leq 2x_{1(n-1)} + x_{2(n-1)} + 1, \quad (4.6)$$

$$2 \leq 2x_{n(n-1)} + x_{(n-1)(n-1)} + 1, \quad (4.7)$$

$$2 \leq 2x_{i(n-1)} + x_{(i-1)(n-1)} + x_{(i+1)(n-1)} \text{ para } 2 \leq i \leq n-1, \quad (4.8)$$

$$0 \leq x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-1, 1 \leq i \leq n. \quad (4.9)$$

Si $x \in P$ entonces $x_{it} \geq 1 - x_{(i+1)t} \geq 0$ y $x_{nt} \geq 1 - x_{(n-1)t} \geq 0$ para $1 \leq i \leq n-1$, $0 \leq t \leq n-1$, entonces x verifica las cotas para las variables del modelo. Además, para $2 \leq i \leq n-1$, $0 \leq t \leq n-1$,

$$2 \leq (x_{it} + x_{(i+1)t}) + (x_{it} + x_{(i-1)t}) = 2x_{it} + x_{(i+1)t} + x_{(i-1)t}.$$

En particular, para $t = n-1$ tenemos que x verifica las desigualdades (4.8) y, como $2 \geq 2x_{i(t+1)}$, entonces también se verifican (4.5) para $0 \leq t \leq n-1$. Además,

$$\begin{aligned} 2 &\leq (x_{1t} + x_{2t}) + (x_{1t} + 1) = 2x_{1t} + x_{2t} + 1 \text{ y} \\ 2 &\leq (x_{nt} + x_{(n-1)t}) + (x_{nt} + 1) = 2x_{nt} + x_{(n-1)t} + 1, \end{aligned}$$

entonces x verifica (4.3), (4.4), (4.6), y (4.7).

Probaremos que el poliedro P es entero. Sea $A \in \{0, 1\}^{n(n-1) \times n^2}$ la matriz cuyas filas son los coeficientes de las desigualdades (4.1). Es fácil ver que A es una matriz de intervalo (es decir, los coeficientes no nulos de cada fila son consecutivos) ya que los únicos coeficientes no nulos de la i -ésima fila están en las columnas i e $i+1$. Entonces, por el Lema 4.1.1, A es totalmente unimodular. Más aún, por el Lema 4.1.2, $(A^T, -I)^T$ también lo es y entonces, por el Lema 4.1.3, el polítopo $P = \{x \in \mathbb{R}_+^{n^2} : Ax \geq b, -Ix \geq \widehat{b}\}$ donde $b = (1, \dots, 1)^T$ y $\widehat{b} = (-1, \dots, -1)^T$ es entero, y luego coincide con $P(\mathcal{P}_{n+2})$. \square

En virtud del Teorema 2.2.2 tenemos el siguiente corolario directo para el polítopo de 2-dominación.

Corolario 4.1.1. *Las desigualdades*

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} &\geq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1, \\ x_i &\leq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

proveen una descripción completa y minimal del poliedro $P_{2dom}(\mathcal{P}_{n+2}) \subseteq \mathbb{R}^n$.

4.2. Ciclos

En esta sección mostraremos una descripción completa del polítopo $P_{hull}(C_n)$ para C_n un ciclo de n vértices. En este caso será necesario distinguir entre valores pares e impares de n . Utilizaremos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [72].

Lema 4.2.1. *(Corolario 2.8, Sección III.1, página 544 [72]) Sea A una matriz con coeficientes 0, 1 ó -1 , con no más de dos elementos distintos de cero en cada columna. Entonces A es totalmente unimodular si y solo si las filas de A se pueden particionar en dos subconjuntos Q_1 y Q_2 tales que, si una columna contiene dos elementos no nulos, entonces se verifica que*

Capítulo 4. Descripciones completas

a. si ambos elementos tienen el mismo signo, entonces uno de ellos pertenece a una fila en Q_1 y el otro está en una fila contenida en Q_2 o

b. si los signos de ambos elementos son opuestos, entonces ambos pertenecen a filas contenidas en el mismo subconjunto.

Teorema 4.2.1. Sea C_n un ciclo con n vértices. Entonces, las desigualdades

$$x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n-1, \quad (4.10)$$

$$x_{nt} + x_{1t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \quad (4.11)$$

son válidas para $P_{\text{hull}}(C_n)$. Además, si n es par, $n \geq 4$, estas desigualdades junto con

$$x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n. \quad (4.12)$$

proveen una descripción completa y minimal del poliedro $P_{\text{hull}}(C_n) \subseteq \mathbb{R}^{n(n-2)}$.

Demostración. Consideremos los conjuntos $C_i = \{i, i+1\}$ para $i = 1, \dots, n-1$ y $C_n = \{1, n\}$, es fácil ver que son \mathcal{P}_3 -co-convexos y que cumplen las hipótesis del Teorema 3.2.1 para $t = 0, \dots, n-4$ y del Teorema 3.2.2 para $t = n-3$, por lo tanto las desigualdades asociadas (4.10), (4.11) son válidas y definen facetas de $P_{\text{hull}}(C_n)$.

Supongamos ahora que n es par. Sea $\widehat{P} \subset \mathbb{R}^{n(n-2)}$ el polítopo definido como

$$\begin{aligned} \widehat{P} := \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : & x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n-1, \\ & x_{nt} + x_{1t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \\ & x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Todas las desigualdades que definen a este poliedro son válidas para $P_{\text{hull}}(C_n)$, entonces tenemos que $P_{\text{hull}}(C_n) \subseteq \widehat{P}$.

Probaremos que \widehat{P} es un poliedro entero. Como n es par, es fácil ver que la matriz $A \in \mathbb{R}^{n(n-2) \times n(n-2)}$ cuyas filas están formadas por los coeficientes de las desigualdades co-convexas que definen a \widehat{P} , verifica las condiciones del Lema 4.2.1 ya que

- $A \in \{0, 1\}^{n(n-2) \times n(n-2)}$,
- cada columna de A tiene exactamente 2 elementos no nulos,
- sus filas se pueden separar en dos subconjuntos: Q_1 (filas it con i impar, $t = 0, \dots, n-3$) y Q_2 (filas it con i par, $t = 0, \dots, n-3$). Se verifica la propiedad de que los dos elementos no nulos de una misma columna no se encuentran en filas en el mismo Q_i , ya que las filas $1t$ están en Q_1 y las filas nt están en Q_2 , dado que n es par.

Por lo tanto la matriz A es totalmente unimodular y entonces \widehat{P} es entero. También es fácil ver que los puntos de \widehat{P} verifican las desigualdades del modelo (omitimos estos detalles de la demostración por ser análogos a los de la demostración del teorema anterior). Hemos probado entonces que $\widehat{P} = P_{\text{hull}}(C_n)$. \square

Notemos que el argumento para demostrar la unimodularidad de la matriz de coeficientes que utilizamos en la anterior demostración no es válido si n es impar. De hecho, para ciclos impares es necesario agregar desigualdades para obtener una descripción completa del poliedro.

Lema 4.2.2. *Si C_n es un ciclo, entonces las desigualdades de rango en t*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \quad (4.13)$$

son válidas para $P_{\text{hull}}(C_n)$. Además, la desigualdad (4.13) define una faceta de $P_{\text{hull}}(C_n)$ si y solo si n es impar.

Demostración. Comenzaremos probando que las desigualdades son válidas. Si x es un vector binario en $P_{\text{hull}}(C_n)$ entonces

$$(x_{1t} + x_{2t}) + \dots + (x_{(n-1)t} + x_{nt}) + (x_{nt} + x_{1t}) = 2 \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq n$$

ya que $x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1$ para $i = 1, \dots, n-1$, $t = 0, \dots, n-3$ y $x_{nt} + x_{1t} \geq 1$ para $t = 0, \dots, n-3$ son desigualdades válidas para $P_{\text{hull}}(C_n)$. Entonces

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq \frac{n}{2}$$

y luego, como el lado izquierdo de la desigualdad es entero para toda solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7), la desigualdad $\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ es válida para $P_{\text{hull}}(C_n)$.

Si n es impar y $t_0 \in \{0, \dots, n-3\}$, supongamos que la cara F_{t_0} está contenida en un hiperplano \mathcal{B} , es decir

$$F_{t_0} := P(C_n) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it_0} = \frac{n+1}{2}\} \subseteq \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, sea $x^i = (x_t^i)_{0 \leq t \leq n-2} \in \mathbb{R}^{n(n-2)}$ la solución factible de (2.5), (2.6) y (2.7) definida del siguiente modo, $x_t^i := \sum_{1 \leq k \leq n} e_k$ para $t \neq t_0$, donde e_k es el k -ésimo vector canónico \mathbb{R}^n , y para $t = t_0$,

$$x_{t_0}^i := \begin{cases} \sum_{\frac{i+1}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2}} e_{2k} + \sum_{0 \leq k \leq \frac{i-1}{2}} e_{2k+1} & \text{si } i \text{ es impar,} \\ \sum_{\frac{i}{2} \leq k \leq \frac{n-1}{2}} e_{2k+1} + \sum_{1 \leq k \leq \frac{i}{2}} e_{2k} & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

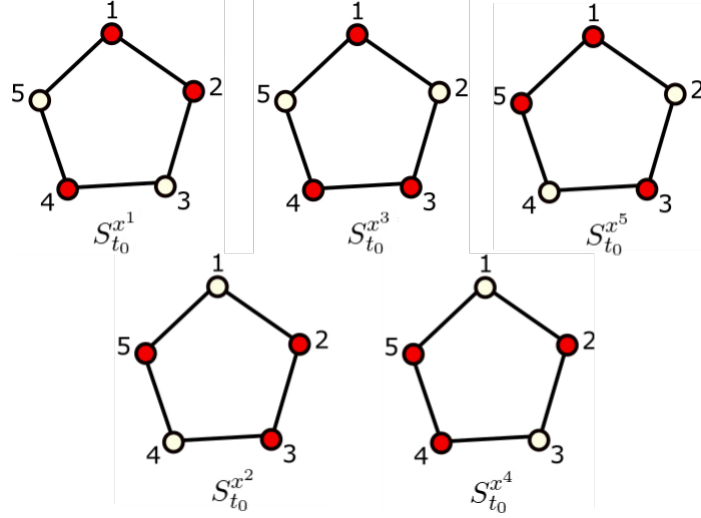


Figura 4.1: Soluciones factibles en $P_{hull}(C_5)$.

Es decir, si i es impar los vértices activos en t_0 de la solución x^i son los impares desde 1 hasta i y los pares desde $i + 1$ hasta $n - 1$, mientras que si i es par son los pares desde 2 hasta i y los impares desde $i + 1$ hasta n . En la Figura 4.1 podemos ver representadas dichas soluciones en t_0 para C_5 .

Utilizando el Teorema 2.1.2, es fácil ver que estas n soluciones pertenecen a F_{t_0} , y que todos los vectores de la forma $\{x^1 - E_{it} : 0 \leq t \leq n - 3, t \neq t_0, 1 \leq i \leq n\}$, donde E_{it} es el it -ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^{n(n-2)}$, también pertenecen a dicha cara. Evaluando las soluciones x^1 y $x^1 - E_{it}$ en la ecuación que define a \mathcal{B} podemos concluir que $\lambda_{it} = 0$ para $1 \leq i \leq n, 0 \leq t \leq n - 2, t \neq t_0$. Es decir

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{it_0} x_{it_0} = \lambda\}.$$

Si ahora evaluamos las soluciones x^1, x^3, \dots, x^n obtenemos que $\lambda_{2t_0} = \lambda_{3t_0}, \lambda_{4t_0} = \lambda_{5t_0}, \dots, \lambda_{(n-1)t_0} = \lambda_{nt_0}$. Si en cambio evaluamos x^2, x^4, \dots, x^{n-1} obtenemos que $\lambda_{3t_0} = \lambda_{4t_0}, \lambda_{5t_0} = \lambda_{6t_0}, \dots, \lambda_{(n-2)t_0} = \lambda_{(n-1)t_0}$. Por último, evaluando x^1 y x^{n-1} tenemos que $\lambda_{1t_0} = \lambda_{nt_0}$. En conclusión

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{1t_0} x_{it_0} = \lambda_{1t_0} \frac{(n+1)}{2}\}.$$

Por lo tanto, por el Lema 2.2.2, concluimos que F_{t_0} es una faceta de $P_{hull}(C_n)$ si n es impar. En cambio, si n es par se puede ver que

$$F_{t_0} = P(C_n) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it_0} = \frac{n}{2}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : x_{1t_0} + x_{2t_0} = 1\},$$

ya que si

$$2 \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it_0} = x_{1t_0} + x_{nt_0} + \sum_{1 \leq i \leq n-1} (x_{(i+1)t_0} + x_{it_0}) = n,$$

como cada término $x_{(i+1)t_0} + x_{it_0}$, $x_{1t_0} + x_{nt_0}$ es mayor o igual que 1, es necesario que cada uno de ellos sea igual 1. Entonces, por el Lema 2.2.2, F_{t_0} no es una faceta de $P_{\text{hull}}(C_n)$ cuando n es par. \square

Estamos en condiciones de mostrar una descripción completa y minimal del poliedro hull para ciclos impares.

Teorema 4.2.2. *Sea C_n el grafo ciclo de n vértices, con n impar y $n \geq 5$. Entonces, las desigualdades*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq \frac{n+1}{2} \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \quad (4.14)$$

$$x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n-1, \quad (4.15)$$

$$x_{nt} + x_{1t} \geq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \quad (4.16)$$

$$x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n, \quad (4.17)$$

proveen una descripción completa y minimal de $P_{\text{hull}}(C_n) \subseteq \mathbb{R}^{n(n-2)}$.

Demostración. Sea $\widehat{P} \subseteq \mathbb{R}^{n(n-2)}$ el poliedro definido por las desigualdades (4.14) a (4.17). Ya hemos visto que todas las desigualdades que lo definen son válidas y definen facetas de $P_{\text{hull}}(C_n)$. Probaremos que \widehat{P} es entero y que sus puntos verifican las restricciones (2.5), (2.6) y (2.7) que definen a $P_{\text{hull}}(C_n)$.

Notemos que $\widehat{P} = P_0 \times \cdots \times P_{n-3}$, donde cada $P_t \subseteq \mathbb{R}^n$ es el polítopo definido por las desigualdades $2 \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq n+1$, $x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1$ para $1 \leq i \leq n$ ($n+1 := 1$) y $x_{it} \leq 1$ para $1 \leq i \leq n$. Esto es así ya que $(x_t)_{0 \leq t \leq n-3} \in \widehat{P}$ si y solo si x_t verifica las desigualdades mencionadas que definen a P_t para $t = 0, \dots, n-3$. Podemos ver que $\dim(P_t) = n$, y además si $x = (x_t)_{0 \leq t \leq n-3}$ es un punto extremo de \widehat{P} , cada x_t es un punto extremo de P_t para $0 \leq t \leq n-3$. Probaremos que cada $x_t \in \mathbb{R}^n$ punto extremo de P_t tiene coordenadas enteras. En primer lugar, demostraremos una propiedad más débil.

Afirmación: Si x_t es un punto extremo de P_t entonces existe algún i , $1 \leq i \leq n$, tal que $x_{it} = 1$.

Demostración de la afirmación. Si x_t es extremo entonces es solución de un sistema $Ax = b$, donde A es una submatriz no singular de $n \times n$ cuyas filas son los coeficientes de n de las desigualdades que definen a P_t . Supongamos que $x_{it} \neq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces las n filas de A deben corresponder a n de las desigualdades (4.14), (4.15), (4.16). Luego, tenemos las siguientes posibilidades,

- las n desigualdades son (4.15) y (4.16) para el t que estamos considerando. Es decir, $x_{it} + x_{(i+1)t} = 1$ para $1 \leq i \leq n$, en este caso $x_{it} = \frac{1}{2}$ para todo $i = 1, \dots, n$, pero este punto $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ no pertenece a P_t ya que $\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} = \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2}$, o
- una fila de A corresponde a la desigualdad (4.14) y las demás $n-1$ corresponden a algunas de (4.15) o (4.16). Es decir, $x_{it} + x_{(i+1)t} = 1$ para $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$ para algún j , por ejemplo

podemos suponer que $j = n$, entonces $x_t = (x_{1t}, 1 - x_{1t}, x_{1t}, \dots, x_{1t})$ y $\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} = \frac{n-1}{2} + x_{1t} = \frac{n+1}{2}$ y luego $x_{1t} = 1$.

Acabamos de demostrar que todo punto extremo x_t está contenido en alguna faceta de P_t de la forma

$$F_i = P_t \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_{it} = 1\}. \diamond$$

Finalmente, probaremos que los puntos extremos de F_i son enteros. Supongamos que $x_t \in F_1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_{1t} = 1, \sum_{2 \leq j \leq n} x_{jt} \geq \frac{n-1}{2}, \\ &\quad x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 2 \leq i \leq n-1, \\ &\quad x_{2t} \geq 0, \\ &\quad x_{nt} \geq 0, \\ &\quad x_{it} \leq 1 \text{ para } 2 \leq i \leq n\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x_{1t} = 1, x_{it} + x_{(i+1)t} \geq 1 \text{ para } 2 \leq i \leq n-1, \\ &\quad x_{it} \leq 1 \text{ para } 2 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Como $F_1 \subseteq \mathbb{R}_+^n$ y la matriz formada por los coeficientes de las desigualdades que lo definen es una matriz de intervalo (por lo tanto totalmente unimodular), entonces x_t tiene coordenadas enteras. Una vez más, omitimos la prueba de que los puntos de \widehat{P} verifican las restricciones del modelo que definen a $P_{\text{hull}}(C_n)$ por ser completamente análoga a las realizadas en las demostraciones anteriores. \square

Nuevamente, gracias al Teorema 2.2.2, tenemos el siguiente corolario inmediato.

Corolario 4.2.1. *Sea C_n el ciclo de n vértices, para $n \geq 4$. Entonces, si n es par, las desigualdades*

$$\begin{aligned} x_i + x_{i+1} &\geq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n-1, \\ x_n + x_1 &\geq 1, \\ x_i &\leq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n-2, \end{aligned}$$

proveen una descripción completa y minimal de $P_{2\text{dom}}(C_n) \subseteq \mathbb{R}^n$. Mientras que si n es impar hay que considerar también la desigualdad

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \frac{n+1}{2}.$$

4.3. Grafos completos

Para el caso del grafo completo \mathcal{K}_n las desigualdades de rango y las cotas de las variables alcanzan para describir en forma completa y minimal el poliedro asociado, como muestra el siguiente teorema.

Teorema 4.3.1. Sea \mathcal{K}_n el grafo completo de n vértices, para $n \geq 4$. Entonces, las desigualdades

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq 2 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \quad (4.18)$$

$$0 \leq x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n. \quad (4.19)$$

proveen una descripción completa y minimal del poliedro $P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n) \subseteq \mathbb{R}^{n(n-2)}$.

Demostración. Las desigualdades (4.18) son válidas para $P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n)$ ya que no hay vértices de grado 1 en \mathcal{K}_n . Además definen facetas de dicho poliedro pues $N_2(\{i, j\}) = V$ para todo par $i \neq j \in V$. Esto permite asegurar la existencia de soluciones $x^{i_0 j_0 t_0}$ tales que $S_t^{x^{i_0 j_0 t_0}} = V$ para todo $0 \leq t \leq n-2, t \neq t_0$ y $S_t^{x^{i_0 j_0 t_0}} = \{i_0, j_0\}$, de modo que si

$$F_{t_0} = P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it_0} = 2\} \subseteq \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{(i,t) \in \mathcal{Z}} \lambda_{it} x_{it} = \lambda\}$$

tanto $x^{i_0 j_0 t_0}$ como $x^{i_0 j_0 t_0} - E_{it}$ deben verificar la ecuación que define a \mathcal{B} y por lo tanto $\lambda_{it} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n, 0 \leq t \leq n-3, t \neq t_0$. Evaluando $x^{i_0 j_0 t_0}$ y $x^{i_0 j_0 t_0} - E_{it}$ y restando, obtenemos que $\lambda_{i_0 t_0} = \lambda_{i_1 t_0}$ y entonces $2\lambda_{i_0 t_0} = \lambda$ para todo $1 \leq i \leq n$. En otras palabras, la ecuación que define a \mathcal{B} es múltiplo de la que define a F_{t_0} y entonces, por el Lema 2.2.2, esta resulta una faceta de $P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n)$.

Lo mismo ocurre para (4.19), en virtud del Teorema 2.4.1 y del Teorema 2.4.2. Luego $P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n)$ está incluido en el poliedro

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{n(n-2)} : \sum_{1 \leq i \leq n} x_{it} \geq 2 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, \\ 0 \leq x_{it} \leq 1 \text{ para } 0 \leq t \leq n-3, 1 \leq i \leq n\}.$$

Probaremos ahora que P es entero y que sus puntos verifican las restricciones del modelo, que en este caso son,

$$2x_{i(t+1)} \leq 2x_{it} + \sum_{j \neq i} x_{jt} \text{ para } 1 \leq i \leq n \text{ y } 0 \leq t \leq n-3, \\ 2 \leq 2x_{i(n-3)} + \sum_{j \neq i} x_{j(n-3)} \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

Tomemos $x \in P$ y fijemos $1 \leq i \leq n$ y $0 \leq t \leq n-3$. Por las desigualdades (4.18) y (4.19) tenemos que,

$$2x_{it} + \sum_{j \neq i} x_{jt} = x_{it} + \sum_{j=1}^n x_{jt} \geq x_{it} + 2 \geq 2 \geq 2x_{i(t+1)},$$

luego x verifica las desigualdades del modelo.

Para ver que P es entero, consideremos la matriz $A \in \{0, 1\}^{(n-2) \times n(n-2)}$ tal que $a_{\widehat{t}, it} = 0$ para $\widehat{t} \neq t$ y $a_{\widehat{t}, it} = 1$ para $1 \leq i \leq n$ (es decir, A es la matriz de coeficientes de las primeras $n-2$ desigualdades que definen a P). Esta matriz es una matriz de intervalo y entonces, por el Lema 4.1.1, es totalmente unimodular. Más aún, por el Lema 4.1.2, $(A^T, I, -I)^T$ también es totalmente unimodular, y entonces el polígono $P = \{x \in \mathbb{R}_+^{n(n-2)} : Ax \geq b, Ix \geq \widehat{b}, -Ix \geq \widehat{b}\}$ donde $b = (2, \dots, 2)^T$, $\widehat{b} = (0, \dots, 0)^T$ y $\widehat{b} = (-1, \dots, -1)^T$, es entero y coincide con $P_{\text{hull}}(\mathcal{K}_n)$. \square

Nuevamente, tenemos el siguiente corolario, cuya demostración es inmediata por el Teorema 2.2.2.

Corolario 4.3.1. *Sea \mathcal{K}_n el grafo completo de n vértices, para $n \geq 4$. Entonces, las desigualdades*

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \geq 2,$$

$$0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } 1 \leq i \leq n.$$

proveen una descripción completa y minimal del poliedro $P_{2\text{dom}}(\mathcal{K}_n) \subseteq \mathbb{R}^n$.

4.4. El polígono de 2-dominación para árboles

En esta sección mostraremos el resultado más importante de esta tesis, la descripción completa del polígono de 2-dominación, $P_{2\text{dom}}(\mathcal{T})$, cuando \mathcal{T} es un árbol. El Teorema 4.4.1 establece que las desigualdades de rango local definidas en la Sección 3.3, junto con las cotas de las variables son suficientes para describir dicho poliedro. En virtud del Teorema 2.2.2, estas desigualdades también formarán parte de la descripción completa minimal del polígono asociado al número \mathcal{P}_3 -hull.

En primer lugar debemos identificar aquellos conjuntos de vértices que hacen que la correspondiente desigualdad de rango local defina una faceta de $P_{2\text{dom}}(\mathcal{T})$. Esto depende no sólo del grado de cada vértice, sino también del de todos sus vecinos, por lo tanto clasificaremos a los vértices de \mathcal{T} en cuatro grupos según estas características. Si \mathcal{T} es un árbol, con $V \setminus V_1 = \{1, \dots, n\}$ y V_1 el conjunto de hojas, llamamos

- $A \subseteq V \setminus V_1$ al conjunto de vértices de grado 2 de \mathcal{T} . Notaremos $A_1 \subseteq A$ a los vértices de grado 2 que además tienen algún vecino de grado 1.
- El conjunto $B \subseteq V \setminus V_1$ está formado por los vértices $i \in V$ tales que $\deg(i) \geq 3$ y que además tienen al menos dos vecinos $j_1, j_2 \in N(i)$ tales que $\deg(j_k) \leq 2$ para $k = 1, 2$. Notaremos $B_1 \subseteq B$ al conjunto de vértices $i \in B$ tales que $N(i) \cap A = \emptyset$. Es decir, los vecinos de $i \in B_1$ son hojas o tienen al menos grado 3.

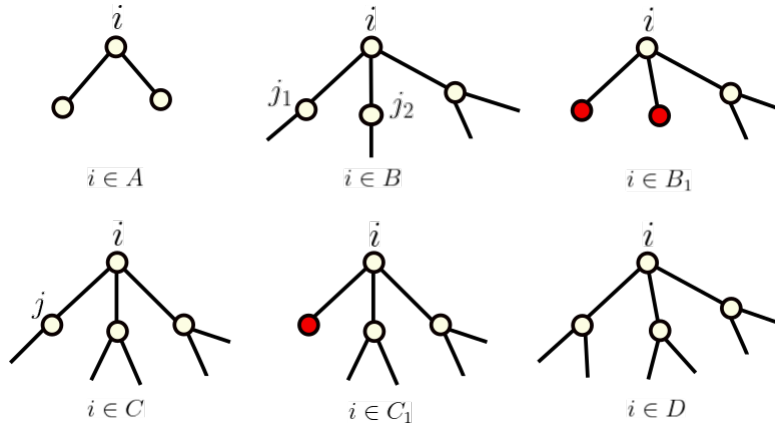


Figura 4.2: Clasificación de los vértices de un árbol.

- El conjunto $C \subseteq V \setminus V_1$ está formado por los vértices $i \in V$ tales que $\deg(i) \geq 3$ y que además tienen un único vecino $j \in N(i)$ tal que $\deg(j) \leq 2$. Notaremos $C_1 \subseteq C$ al subconjunto de vértices $i \in C$ tales que $N(i) \cap A = \emptyset$. Es decir, los vecinos de $i \in C_1$ tienen grado al menos 3 excepto uno que es hoja.
- Por último, llamamos $D \subseteq V \setminus V_1$ al conjunto de vértices $i \in V$ con $\deg(i) \geq 3$ y tales que $\deg(j) \geq 3$ para todo $j \in N[i]$. Es decir, tanto $i \in D$ como sus vecinos tienen grado al menos 3.

En la Figura 4.2 podemos ver representados los distintos tipos de vértices internos de un árbol según la clasificación anterior.

El siguiente lema muestra distintas facetas del poliedro de 2-dominación de un árbol \mathcal{T} , asociadas a sus distintas clases de vértices.

Lema 4.4.1. Sea \mathcal{T} un árbol, con $V \setminus V_1 = \{1, \dots, n\}$.

1. Para cada $i \in A$, i.e., $\deg(i) = 2$, los conjuntos $R_{ij} := \{i, j\}$ son 1-quasi-co-convexos para todo $j \in N(i) \setminus V_1$. Además, las desigualdades válidas $x_i + x_j \geq 1$ definen facetas de $P_{2dom}(\mathcal{T})$.
2. Para cada $i \in D$, i.e., $\deg(i) \geq 3$ y $\deg(j) \geq 3$ para todo $j \in N(i)$, los conjuntos $Q_{ij} := N[i] \setminus \{j\}$ son 1-quasi-co-convexos en V . Además, las correspondientes desigualdades válidas $\sum_{k \in N[i] \setminus \{j\}} x_k \geq 1$ definen facetas de $P_{2dom}(\mathcal{T})$. Para estos vértices i , las desigualdades del modelo, $2x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j \geq 2$ y $x_i \geq 0$ también definen facetas de $P_{2dom}(\mathcal{T})$.
3. Para cada $i \in C$, i.e., $\deg(i) \geq 3$ e i tiene exactamente un vecino j de grado a lo sumo 2, el conjunto $S_i := N[i] \setminus \{j\}$ es 1-quasi-co-convexo en V . Además, la desigualdad válida correspondiente $\sum_{k \in N[i] \setminus \{j\}} x_k \geq 1$ define una faceta de $P_{2dom}(\mathcal{T})$. Si $\deg(j) = 1$ (i.e., j es una hoja, $i \in C_1$) la desigualdad $x_i \geq 0$ también define una faceta de $P_{2dom}(\mathcal{T})$.

Demostración. La demostración es consecuencia inmediata del Teorema 3.2.3 en virtud de las siguientes observaciones.

Capítulo 4. Descripciones completas

- Si $i \in A$ y $j \in N(i) \setminus V_1$, el conjunto R_{ij} verifica que $N_2(\overline{R_{ij}}) \neq V$ (es decir, R_{ij} es 1-cuasi co-convexo), $N_2(\overline{R_{ij}} \cup \{i\}) = V$, $N_2(\overline{R_{ij}} \cup \{j\}) = V$, y por último, si $k \in \overline{R_{ij}} \setminus V_1$ se verifica que $N_2(\overline{R_{ij}} \setminus \{k\} \cup \{j\}) = V$.
- Si $i \in D$ y $j \in N(i)$, el conjunto Q_{ij} verifica que $N_2(\overline{Q_{ij}}) \neq V$ ya que el vértice i tiene un único vecino, j , en $\overline{Q_{ij}}$ (es decir, Q_{ij} es 1-cuasi co-convexo), además $N_2(\overline{Q_{ij}} \cup \{k\}) = V$ para todo $k \in \overline{Q_{ij}}$, ya que en este caso, si $k = i$ el resto de los vecinos de i tiene al menos dos vecinos más en $\overline{Q_{ij}}$ (ya que tienen grado al menos 3), y si $k \neq i$, entonces $i \in N_2(\overline{Q_{ij}} \cup \{k\})$ y lo mismo le ocurre al resto de los vecinos de i . Por último, $N_2(\overline{Q_{ij}} \setminus \{k\} \cup \{i\}) = V$ si $k \in \overline{Q_{ij}} \setminus V_1$.
- Si $i \in C$ entonces $N_2(\overline{S_i}) \neq V$, por lo tanto S_i es 1-cuasi co-convexo. Además $N_2(\overline{S_i} \cup \{k\}) = V$ para todo $k \in S_i$ y $N_2(\overline{S_i} - \{k\} \cup \{i\}) = V$ para todo $k \in \overline{S_i} \setminus V_1$.

□

Cuando esté claro por el contexto y con el objetivo de no introducir notación adicional, llamaremos indistintamente R_{ij} a la desigualdad $x_i + x_j \geq 1$ o al conjunto $\{i, j\}$ para $i \in A$ y $j \in N(i) \setminus V_1$. Análogamente, si $i \in D$ y $j \in N(i)$, Q_{ij} denotará también a la desigualdad definida en el Lema 4.4.1, M_i a la desigualdad asociada a $N[i]$, y lo mismo para $i \in C$ y su desigualdad asociada a la que notaremos S_i . Llamaremos E_i a la desigualdad $x_i \geq 0$.

El siguiente teorema muestra que las desigualdades definidas en el Lema 4.4.1 junto con las cotas superiores de las variables proveen una descripción completa y minimal del polítopo de 2-dominación para un árbol, $P_{2dom}(\mathcal{T})$.

Teorema 4.4.1. *Sea \mathcal{T} un árbol. Entonces, su polítopo de 2-dominación $P_{2dom}(\mathcal{T})$ está dado por las siguientes desigualdades,*

$$R_{ij} : x_i + x_j \geq 1 \quad \text{para } i \in A, j \in N(i) \text{ o } i \in B \cup C, j \in N(i) \cap A, \quad (4.20)$$

$$S_i : x_i + \sum_{j \in N(i) \setminus (V_1 \cup A)} x_j \geq 1 \quad \text{para } i \in C, \quad (4.21)$$

$$M_i : 2x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j \geq 2 \quad \text{para } i \in D, \quad (4.22)$$

$$Q_{ik} : x_i + \sum_{j \in N(i) \setminus \{k\}} x_j \geq 1 \quad \text{para } i \in D, k \in N(i), \quad (4.23)$$

$$E_i : x_i \geq 0 \quad \text{para } i \in B_1 \cup C_1 \cup D, \quad (4.24)$$

$$x_i \leq 1 \quad \text{para } i \in V \setminus V_1. \quad (4.25)$$

Más aún, la anterior es una descripción minimal de dicho polítopo.

Para la demostración del teorema anterior necesitamos algunos resultados previos, que mostraremos en los siguientes dos lemas.

Lema 4.4.2. *Para todo vértice $s \in V \setminus V_1$ la desigualdad $E_s : x_s \geq 0$ es válida para el poliedro $P_{\mathcal{T}}$ definido por las desigualdades (4.20).*

Demostración. Si $s \in B_1 \cup C_1 \cup D$ el resultado es trivial ya que la correspondiente desigualdad aparece explícitamente en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$. Para $s \in A \cup (B \setminus B_1) \cup (C \setminus C_1)$, cada $\bar{x} \in P_{\mathcal{T}}$ debe verificar $\bar{x}_s + \bar{x}_j \geq 1$ para algún $j \in N(s)$, y luego $\bar{x}_s \geq 0$, ya que $\bar{x}_j \leq 1$ es válida. \square

Para la demostración del Teorema 4.4.1 necesitaremos mostrar que los puntos extremos de $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ son enteros, es decir, tienen coordenadas binarias. El siguiente lema postula un resultado más débil pero que nos permitirá aplicar un razonamiento inductivo y obtener de ese modo el resultado buscado. Los párrafos de la demostración que comiencen con el símbolo \dagger corresponden a ejemplos, introducidos con el objetivo de ilustrar las construcciones realizadas.

Lema 4.4.3. *Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto extremo no nulo de $P_{\mathcal{T}}$, existe algún vértice i , $1 \leq i \leq n$, tal que $\bar{x}_i = 1$.*

Demostración. Supongamos que $\bar{x}_i < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Consideremos una raíz arbitraria de \mathcal{T} , que no sea una hoja, a la cual llamaremos vértice 1. De este modo, para cada vértice $i \neq 1$ se puede definir el conjunto de vértices *predecesores* de i , al que notaremos $\mathcal{P}(i)$, como el conjunto formado por los vértices que pertenecen al camino entre i y la raíz 1, y también el vértice *padre* de i , al cual notaremos $p(i)$, como el único vecino y predecesor de i , un *hijo* de i , que es un vecino de i que no es su padre y por último, un vértice *hermano* de i , que es un vértice j tal que $p(j) = p(i)$. Ordenaremos los vértices de $V \setminus V_1$ de modo que $i < j$ cuando $i, j \in V \setminus V_1$ verifican que $\text{dist}(i, 1) < \text{dist}(j, 1)$.

Sea P el conjunto formado por todas las desigualdades R_{ij}, S_i, M_i y Q_{ik} definidas en el enunciado del Teorema 4.4.1, es decir las desigualdades que definen a $P_{\mathcal{T}}$ y que no son cotas de las variables. Llamemos $P_i \subseteq P$ al subconjunto de dichas desigualdades que corresponden a un vértice i , esto es

$$P_i = \{R_{ij} : j \in N(i) \setminus V_1 \text{ e } i < j\} \text{ para } i \in A, \quad (4.26)$$

$$P_i = \{R_{ij} : j \in N(i), j \in A \text{ e } i < j\} \text{ para } i \in B, \quad (4.27)$$

$$P_i = S_i \cup \{R_{ij} : j \in N(i), j \in A \text{ e } i < j\} \text{ para } i \in C \text{ y} \quad (4.28)$$

$$P_i = M_i \cup \{Q_{ik} : j \in N(i)\} \text{ para } i \in D. \quad (4.29)$$

\dagger En la Figura 4.3 podemos ver un ejemplo de un posible orden para los vértices de un árbol T . En el mismo ejemplo podemos ver que $A = \{6, 8, 11\}$, $B = \{2, 3, 4, 9, 10\}$, $B_1 = \{2, 3, 9, 10\}$, $C = \{5, 7\}$ y $D = \{1\}$. Además

$$P_1 = \{2x_1 + \sum_{i=2}^5 x_i \geq 2, x_1 + \sum_{j \in N(1) \setminus \{k\}} x_j \geq 1 \text{ con } k = 2, 3, 4, 5\},$$

$$P_2 = P_3 = P_6 = P_8 = P_9 = P_{10} = P_{11} = \emptyset,$$

$$P_4 = \{x_4 + x_6 \geq 1\}$$

$$P_5 = \{x_5 + x_1 + x_7 + x_9 \geq 1, x_5 + x_8 \geq 1\}$$

$$P_7 = \{x_7 + x_5 + x_{10} \geq 1, x_7 + x_{11} \geq 1\}.$$

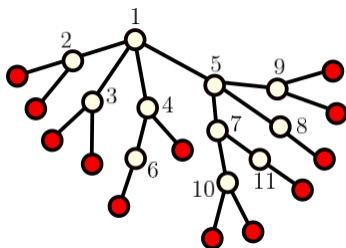


Figura 4.3: Árbol T .

Sea $P^=$ (resp. $P^<$) el subconjunto de desigualdades presentes en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$ que son verificadas con igualdad (resp. con desigualdad estricta) por el punto \bar{x} . Llamemos $P_0^= \subseteq P^=$ a las desigualdades de la forma $E_i : x_i \geq 0$, y $P_i^= \subseteq P^= \setminus P_0^=$ a $P_i^= = P_i \cap P^=$. Como estamos suponiendo que $\bar{x}_i < 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, $P^= = P_0^= \cup P_1^= \cup \dots \cup P_n^=$.

Definimos el *soporte* de cada subconjunto de desigualdades P_i , σ_i , como el subconjunto de vértices en $V \setminus V_1$ que verifican que la variable correspondiente aparece con un coeficiente no nulo en alguna de las desigualdades de P_i , es decir,

- si $i \in A$: $\sigma_i = \{i\} \cup \{j \in N(i) \setminus V_1 : j > i\}$ ó $\sigma_i = \emptyset$ si $j < i$ para todo $j \in N(i) \setminus V_1$,
- si $i \in B$: $\sigma_i = \{i\} \cup (\{j \in N(i) : j > i\} \cap A)$, ó $\sigma_i = \emptyset$ si todo vecino de grado 2 de i verifica $j < i$,
- si $i \in C$: $\sigma_i = N[i]$, ó $\sigma_i = N[i] \cap \{j \geq i\}$ si el predecesor de i , $p(i)$, pertenece a A ,
- si $i \in D$: $\sigma_i = N[i]$.

Si definimos $\sigma_{\mathcal{P}(1)} = \emptyset$, se puede ver que la siguiente es una partición de $V \setminus V_1$,

$$V \setminus V_1 = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \sigma_i \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{P}(i)} \sigma_j.$$

†Por ejemplo, para el árbol representado en la Figura 4.3 los soportes son

- $\sigma_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
- $\sigma_4 = \{4, 6\}$,
- $\sigma_5 = \{1, 5, 7, 8, 9\}$,
- $\sigma_7 = \{5, 7, 10, 11\}$.

La partición del conjunto $V \setminus V_1 = \{1, \dots, 11\}$ es

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \cup [\sigma_4 \setminus \sigma_1] \cup [\sigma_5 \setminus \sigma_1] \cup [\sigma_7 \setminus (\sigma_1 \cup \sigma_5)] = \\ & = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{6\} \cup \{7, 8, 9\} \cup \{10, 11\}. \end{aligned}$$

Sea F el subconjunto de vértices i en $V \setminus V_1$ tal que su coordenada correspondiente \bar{x}_i es fraccionaria, si llamamos $F_i = F \cap \sigma_i \setminus \cup_{j \in \mathcal{P}(i)} \sigma_j$ entonces $|F| = \sum_{1 \leq i \leq n} |F_i|$. Recordemos que estamos suponiendo que si $\bar{x}_i \neq 0$ entonces $i \in F$.

Como \bar{x} es un punto extremo de $P_{\mathcal{T}}$, el rango de la matriz cuyas filas están formadas por los coeficientes de las ecuaciones en $P^=$ es n , y luego existe una base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n formada por n de esas filas y que contiene a $P_0^=$, es decir $P_0^= \subseteq \mathcal{B}$ y si $\mathcal{B}_i := \mathcal{B} \cap P_i^=$, entonces $|P_0^=| + \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathcal{B}_i| = n$.

La siguiente afirmación es muy sencilla de demostrar y nos permitirá relacionar el cardinal de F (la cantidad de coordenadas fraccionarias, o no nulas) con la cantidad de desigualdades en $P^= \setminus P_0^=$.

Afirmación 1. Si $j \in V$ es tal que $\deg(j) = 2$ ó $\deg(k) = 2$ para algún $k \in N(j)$ entonces \bar{x}_j es fraccionaria (es decir, $\bar{x}_j \neq 0$ o equivalentemente $j \in F$).

Demostración de la Afirmación 1. Dado que $\bar{x}_j + \bar{x}_k \geq 1$ para algún $k \in N(j)$ y $\bar{x}_k < 1$, entonces $0 < \bar{x}_j < 1$. \diamond

Como consecuencia de la Afirmación 1, si un vértice $i \in \bar{F}$ (es decir, si $\bar{x}_i = 0$) entonces $i \in B_1 \cup C_1 \cup D$, y luego $x_i \geq 0$ es una desigualdad que define una faceta, presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$, y entonces $E_i \in P_0^=$. Como estamos suponiendo que $n = |\{s \in V \setminus V_1 : \bar{x}_s = 0\}| + |F| = |P_0^=| + |F|$ entonces, si \bar{x} es un punto extremo, tenemos que

$$|F| = \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathcal{B}_i| \quad (4.30)$$

En las siguientes afirmaciones, mostramos algunas cotas para el cardinal de F_i y el de \mathcal{B}_i .

Afirmación 2. Si $j \in C$ (es decir, si $\deg(j) \geq 3$ y $\deg(k) \leq 2$ para un único $k \in N(j)$) entonces existen al menos dos coordenadas fraccionarias \bar{x}_l y \bar{x}_s para $l, s \in N[j] \setminus \{k\}$, es decir, $l, s \in F$.

Demostración de la Afirmación 2. Dado que $\bar{x}_j + \sum_{l \in N[j] \setminus \{k\}} \bar{x}_l \geq 1$, al menos dos términos deben ser distintos de cero y por lo tanto fraccionarias. \diamond

Afirmación 3. Si $j \in D$ (i.e., $\deg(l) \geq 3$ para $l \in N[j]$) entonces

1. si $\bar{x}_j = 0$, existen al menos tres coordenadas fraccionarias \bar{x}_l con $l \in N(j)$. Además, $Q_{jk} \in P^<$ para todo $k \in N(j)$. En particular, $|\mathcal{B}_j| \leq 1$ ya que $P_j^= \subseteq \{M_j\}$.
2. Si \bar{x}_j es fraccionaria entonces j tiene al menos dos vecinos con coordenadas fraccionarias. Más aún, si Q_{jk} y Q_{jl} pertenecen a $P^=$ entonces $E_s \in P_0^=$ para todo $s \in N(j) \setminus \{k, l\}$. En particular $Q_{js} \in P^<$ para todo $s \in N(j) \setminus \{k, l\}$ y M_j es una combinación lineal de las desigualdades Q_{jk} , Q_{jl} y $x_s \geq 0$ in $P^=$, que definen facetas, y entonces tenemos que $|\mathcal{B}_j| \leq 2$.

Demostración de la Afirmación 3.

1. Como \bar{x} debe verificar M_j , entonces $\sum_{s \in N(j)} \bar{x}_s \geq 2$, y esto solo es posible si al menos tres términos son distintos de cero, pues $\bar{x}_i < 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Además, si $Q_{jk} \in P^\neq$ para algún $k \in N(j)$, entonces $\sum_{s \in N(j) \setminus k} \bar{x}_s = 1$ y, reemplazando en M_j , $\bar{x}_k = 1$ lo cual estamos suponiendo que no es posible.
2. Como $Q_{jk} : \bar{x}_j + \sum_{l \in N(j) \setminus \{k\}} \bar{x}_l \geq 1$ es válida, existe al menos un $l \neq k$ tal que $\bar{x}_l \neq 0$, pero \bar{x} debe verificar también Q_{jl} , y entonces alguna otra coordenada debe ser fraccionaria. Supongamos ahora que Q_{jk} y Q_{jl} pertenecen a P^\neq , i.e.,

$$\bar{x}_j + \sum_{s \in N(j) \setminus \{k\}} \bar{x}_s = \bar{x}_j + \sum_{s \in N(j) \setminus \{l\}} \bar{x}_s = 1.$$

Sumando estas ecuaciones tenemos que

$$2\bar{x}_j + 2 \sum_{s \in N(j) \setminus \{l,k\}} \bar{x}_s + \bar{x}_k + \bar{x}_l = 2\bar{x}_j + \sum_{s \in N(j)} \bar{x}_s + \sum_{s \in N(j) \setminus \{l,k\}} \bar{x}_s = 2,$$

lo cual solo es posible si $M_j \in P^\neq$ y $\sum_{s \in N(j) \setminus \{l,k\}} \bar{x}_s = 0$. Por la Afirmación 1, los vértices $s \in N(j) \setminus \{k, l\}$ no tienen vecinos de grado 2, y entonces $x_s \geq 0$ definen facetas. Además, hemos visto que $Q_{jk} + Q_{jl} = M_j + \sum_{s \in N(j) \setminus \{k,l\}} E_s$. \diamond

La idea a partir de ahora es, utilizando las afirmaciones anteriores y separando los vértices del árbol adecuadamente, mostrar que $|F| > \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathcal{B}_i|$, contradiciendo de este modo (4.30), y por lo tanto \bar{x} no puede ser un punto extremo. Comenzamos analizando $|F_i|$ y $|\mathcal{B}_i|$ para $i = 1$, la raíz de \mathcal{T} por un lado, y para $i > 1$ por otro lado, separando en casos según si $i \in A$, $i \in B$, $i \in C$ ó $i \in D$.

- Si $1 \in A \setminus A_1$, entonces $|\mathcal{B}_1| \leq 2$ ya que $|P_1| = 2$ (ver (4.26)) y $\mathcal{B}_1 \subseteq P_1^\neq \subseteq P_1$. En este caso $|F_1| = 3$ por la Afirmación 1, ya que tanto la coordenada correspondiente al vértice 1 como las correspondientes a sus dos hijos deben ser fraccionarias. En cambio, si algún hijo de 1 es una hoja (i.e., $1 \in A_1$) tenemos que $|\mathcal{B}_1| \leq 1$ (pues $|P_1| = 1$) y $|F_1| = 2$. Para los vértices $i \in A \setminus A_1$ distintos de la raíz ($i > 1$), tenemos que $|\mathcal{B}_i| \leq 1 = |F_i| = 1$. Esto ocurre ya que en este caso $|P_i| = 1$ entonces $|P_i^\neq| \leq 1$, y $\sigma_i = \{i, c(i)\}$ (donde $c(i)$ es el hijo de i), e $i \in \sigma_{p(i)}$ (donde $p(i)$ es el padre de i) entonces $\sigma_i \setminus \sigma_{p(i)} = c(i)$ el cual pertenece a F por la Afirmación 1. Si $i > 1$ e $i \in A_1$ entonces $|\mathcal{B}_i| = |F_i| = 0$.
- Si $1 \in B$, entonces $|\mathcal{B}_1| \leq |N(1) \cap A|$ (ya que este es el número de desigualdades en P_1 , es decir, que corresponden al vértice $i = 1$ si este pertenece a B , ver (4.27)), y además $|N(1) \cap A| + 1 \leq |F_1|$ (pues el vértice 1 y todos sus vecinos de grado 2 corresponden a coordenadas fraccionarias por la Afirmación 1, además, todos ellos están en el soporte de $i = 1$ y por lo tanto en F_1). Si $1 \in B_1$, $|\mathcal{B}_1| = 0 \leq |F_1|$ ya que $N(1) \cap A = \emptyset$. Consideremos ahora $i \in B$ y $i > 1$, en este caso deberemos considerar distintas situaciones dependiendo de qué tipo de vértice sea el padre de i , $p(i)$. En la Figura 4.4 podemos ver representadas las distintas posibilidades, los vértices coloreados son los que pertenecen al soporte de i y no al de sus predecesores, y las líneas representan al soporte de las distintas desigualdades correspondientes a i . Se puede ver que

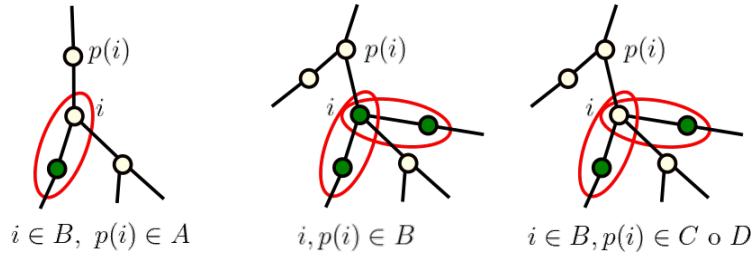


Figura 4.4: Vértice $i \in B$.

- si $p(i) \in A$, entonces $|\mathcal{B}_i| \leq |N(i) \cap A| - 1 \leq |F_i|$,
 - si $p(i) \in B$, entonces $|\mathcal{B}_i| \leq |N(i) \cap A| < |N(i) \cap A| + 1 \leq |F_i|$ (pues en este caso $p(i) \notin \sigma_{p(i)}$),
 - si $p(i) \in C \cup D$, entonces $|\mathcal{B}_i| \leq |N(i) \cap A| \leq |F_i|$.
- Si $1 \in C_1$, entonces $|\mathcal{B}_1| \leq 1$ (pues $|P_1| = 1$, ver (4.28)) y además, por la Afirmación 2, $|F_1| \geq 2$. Si $i \in C_1$ y $i > 1$, entonces $|F_i| \geq 1$.

Hasta aquí hemos visto que si todos los vértices de \mathcal{T} pertenecen a $A \cup B \cup C_1$ entonces $\sum_{i=1}^n |F_i| > \sum_{i=1}^n |\mathcal{B}_i|$, ya que la desigualdad es estricta en la raíz $i = 1$ y se mantiene en el resto de los vértices. Lamentablemente, para $i \in C \setminus C_1$ o $i \in D$ no es cierto que $|\mathcal{B}_i| \leq |F_i|$, sin embargo la siguiente observación será de utilidad para poder agrupar los vértices en forma adecuada y obtener un resultado similar.

Afirmación 4. Sea $i_1 \in C \cup D$ tal que $|\mathcal{B}_{i_1}| = 2$ y $|F_{i_1}| = 1$, entonces

1. $i_1 > 1$,
2. $p(i_1) \in C \cup D$,
3. $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| \leq 1$,
4. $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| + \sum_{1 \leq k \leq r} |\mathcal{B}_{i_k}| \leq |F_{p(i_1)}| + \sum_{1 \leq k \leq r} |F_{i_k}|$ para $\{i_2, \dots, i_r\}$ el conjunto de *hermanos* (vértices con el mismo padre) de i_1 , que pertenecen a $C \cup D$ y verifican $|\mathcal{B}_{i_k}| = 2$ y $|F_{i_k}| = 1$. Si $p(i) = 1$, la desigualdad anterior es estricta.

Demostración de la Afirmación 4. Si $i_1 = 1 \in (C \setminus C_1) \cup D$ entonces, por las Afirmaciones 2 y 3 tenemos que $|F_{i_1}| \geq 2$, luego $i_1 > 1$ ya que estamos asumiendo que $|F_{i_1}| = 1$. Por otro lado, si $p(i_1) \in A$ entonces $i_1 \in C \setminus C_1$ (ya que es la única posibilidad para tener un vecino de grado 2) y entonces $|\mathcal{B}_{i_1}| \leq 1$, lo cual tampoco es posible ya que estamos suponiendo que $|\mathcal{B}_{i_1}| = 2$. Si $p(i_1) \in B$, entonces $|F_{i_1}| \geq 2$, luego $p(i_1) \in C \cup D$. Notemos que, por la Afirmación 2 y la Afirmación 3, $|\mathcal{B}_i| \leq 2$ y $|F_i| \geq 1$ para todo $i \in C \cup D$.

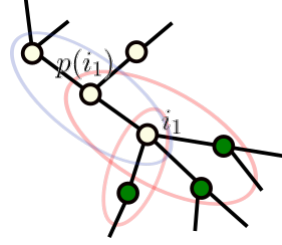


Figura 4.5: $i_1, p(i_1) \in C$.

Veamos que vale el punto 3. En primer lugar, analizaremos el caso i_1 y $p(i_1) \in C$. En la Figura 4.5 podemos observar esta situación representada, tanto i_1 como $p(i_1)$ están en el soporte de algún predecesor de i_1 , y por lo tanto no pertenecen a F_{i_1} . Como \bar{x} debe verificar S_{i_1} con igualdad (pues, por hipótesis, $|B_{i_1}| = 2$ y además $P_{i_1} = \{S_{i_1}, R_{i_1j}\}$) y hay una única variable distinta de cero en F_{i_1} (ya que, por hipótesis, este conjunto tiene cardinal 1) que corresponde al vecino de i_1 de grado 2 (por la Afirmación 1 sabemos que debe ser fraccionaria), entonces \bar{x} verifica $x_{p(i_1)} + x_{i_1} = 1$. Luego, si $S_{p(i_1)} \in \mathcal{B}_{p(i_1)}$, las variables correspondientes a los demás vecinos de $p(i_1)$ con grado al menos tres deben valer 0, y entonces $S_{p(i_1)}$ es una combinación lineal de S_{i_1} y de las facetas $E_s \in P_0^-$, lo cual no es posible ya que \mathcal{B} es una base. Entonces $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| \leq 1$. Las demostraciones del resto de los casos son análogas.

Por último, veamos que vale el punto 4. Supongamos que existe $i_2 \in C \cup D$, hermano de i_1 tal que $|\mathcal{B}_{i_2}| = 2$ y $|F_{i_2}| = 1$. Notemos que, en este caso, \bar{x}_{i_1} y \bar{x}_{i_2} son fraccionarios, ya que de otro modo, por el ítem 1 de la Afirmación 3, $|F_{i_1}| > 1$. Vamos a analizar las distintas posibilidades para i_1 e i_2 .

- Supongamos que $i_1, i_2 \in D$. En este caso, existe un único hijo de i_1 , llamémoslo $c(i_1) \in F_{i_1}$, y un hijo de i_2 , llamémoslo $c(i_2) \in F_{i_2}$, tales que las variables correspondientes en \bar{x} son no nulas. En la Figura 4.6 (a) podemos ver representada esta situación, los vértices coloreados corresponden a coordenadas fraccionarias. En este caso \bar{x} debe verificar que $\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{p(i_1)} = 1$, $\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{c(i_1)} = 1$, $\bar{x}_{i_2} + \bar{x}_{p(i_2)} = 1$ y $\bar{x}_{i_2} + \bar{x}_{c(i_2)} = 1$. Por el ítem 2 de la Afirmación 3, sabemos que M_{i_j} es una combinación lineal de $Q_{i_j p(i_j)}$, $Q_{i_j c(i_j)}$ y algunas E_s para $j = 1$ y $j = 2$. Analicemos ahora las posibilidades para $\mathcal{B}_{p(i_1)}$.

 - si $p(i_1) \in D$, $\mathcal{B}_{p(i_1)} = \emptyset$, ya que $M_{p(i_1)}$, $Q_{p(i_1)i_1}$ y $Q_{p(i_1)i_2}$ son combinaciones lineales de las 4 ecuaciones en $\mathcal{B}_{i_1} \cup \mathcal{B}_{i_2}$ (cualesquiera que estas sean), y de las facetas $E_s \in P_0^-$. Además, $Q_{p(i_1)k} \notin P^+$ para $k \neq i_1, i_2$. Por otro lado, $|F_{p(i_1)}| \geq 2$ pues las coordenadas correspondientes a i_1 e i_2 son fraccionarias y estos vértices pertenecen al soporte de $p(i_1)$. Más aún, si $p(i_1) = 1$, entonces $p(i_1)$ también pertenece a su propio soporte y entonces en este caso $|F_{p(i_1)}| \geq 3$. Hemos visto que $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| + |\mathcal{B}_{i_1}| + |\mathcal{B}_{i_2}| = 4 \leq |F_{p(i_1)}| + |F_{i_1}| + |F_{i_2}|$. Si existen más hermanos de i_1 , $i_j \in C \cup D$, $j = 3, \dots, r$, tal que $|\mathcal{B}_{i_j}| = 2$ y $|F_{i_j}| = 1$ entonces $|F_{p(i_1)}| \geq r$ (o $|F_{p(i_1)}| \geq 1 + r$ si $p(i_1) = 1$), y entonces $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| + \sum_{1 \leq k \leq r} |\mathcal{B}_{i_k}| = 2r \leq |F_{p(i_1)}| + \sum_{1 \leq k \leq r} |F_{i_k}|$ y la desigualdad es estricta si $p(i_1) = 1$.
 - Si $p(i_1) \in C$, $S_{p(i_1)} \notin P_{p(i_1)}^-$ y entonces tenemos las siguientes posibilidades.

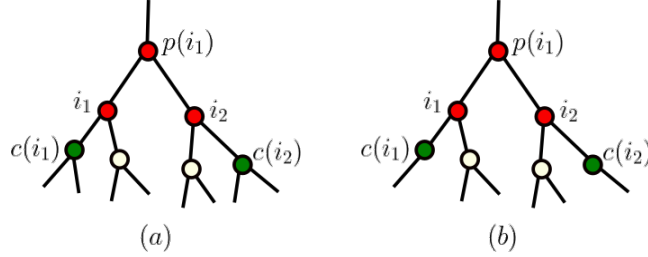


Figura 4.6: Vértices hermanos $i_1, i_2 \in D$ e $i_1, i_2 \in C$.

- $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| = 1$ y $|F_{p(i_1)}| \geq 3$ (si $R_{p(i_1)j} \in P_{p(i_1)}^-$) y entonces $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| + |\mathcal{B}_{i_1}| + |\mathcal{B}_{i_2}| = 5 \leq |F_{p(i_1)}| + |F_{i_1}| + |F_{i_2}|$, ó
- $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| = 0$ y $|F_{p(i_1)}| \geq 2$, luego $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| + |\mathcal{B}_{i_1}| + |\mathcal{B}_{i_2}| = 4 \leq |F_{p(i_1)}| + |F_{i_1}| + |F_{i_2}|$.

Si $p(i_1) = 1$, entonces $|\mathcal{B}_{p(i_1)}| \leq 1$ y $|F_{p(i_1)}| \geq 3$. Argumentando como en el ítem anterior podemos ver que estas desigualdades pueden generalizarse si hay más hermanos de i_1 que verifiquen que $|\mathcal{B}_{i_j}| = 2$ y $|F_{i_j}| = 1$.

- Supongamos ahora que $i_1, i_2 \in C \setminus C_1$. Podemos ver representada esta configuración en la Figura 4.6 (b). En este caso \bar{x} debe verificar $\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{p(i_1)} = 1$ y $\bar{x}_{i_2} + \bar{x}_{p(i_1)} = 1$, ya que el único hijo cuya variable correspondiente es no nula debe ser el de el de grado 2 (por la Afirmación 1), y también $\bar{x}_{i_1} + \bar{x}_{c(i_1)} = 1$ y $\bar{x}_{i_2} + \bar{x}_{c(i_2)} = 1$ (ya que $|\mathcal{B}_{i_1}| = |\mathcal{B}_{i_2}| = 2$), entonces podemos seguir el mismo razonamiento que en el ítem previo.
- La demostración es análoga para $i_1 \in D, i_2 \in C \setminus C_1$. \diamond

Ya estamos en condiciones de agrupar los vértices de \mathcal{T} de una manera adecuada que nos permita demostrar que $|F| > \sum_{1 \leq i \leq n} |\mathcal{B}_i|$. Consideremos para esto la partición de $V \setminus V_1$ definida a continuación.

- Para todo $i_1 \in C \cup D$ tal que $|\mathcal{B}_{i_1}| = 2$ y $|F_{i_1}| = 1$, notemos $i = p(i_1)$, definimos $\mathcal{A}_i := \{i, i_1, \dots, i_r\}$ donde $\{i_2, \dots, i_r\}$ es conjunto de hermanos de i_1 incluidos en $C \cup D$ que verifican que $|\mathcal{B}_{i_k}| = 2$ y $|F_{i_k}| = 1$.
- Para cada vértice $i \in V \setminus V_1$ tal que $j \notin \mathcal{A}_i$ para todos los conjuntos definidos en el ítem previo, definimos $\mathcal{A}_i = \{i\}$.

Llamemos s a la cantidad de conjuntos \mathcal{A}_i distintos. Por los resultados previos, tenemos que

$$\sum_{i \in \mathcal{A}_1} |\mathcal{B}_i| < \sum_{i \in \mathcal{A}_1} |F_i| \text{ y } \sum_{i \in \mathcal{A}_j} |\mathcal{B}_i| \leq \sum_{i \in \mathcal{A}_j} |F_i| \text{ para } j = 2, \dots, s.$$

Entonces

$$|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^s \sum_{i \in \mathcal{A}_j} |\mathcal{B}_i| < \sum_{1 \leq i \leq n} |F_i| = |F|$$

contradiendo de este modo la igualdad (4.30) que debe valer si \bar{x} es un punto extremo. Hemos probado entonces, que un punto extremo no nulo de $P_{\mathcal{T}}$ necesariamente tiene alguna coordenada igual a 1. \square

Ahora estamos en condiciones de demostrar el resultado principal.

Demostración. Demostración del Teorema 4.4.1.

Por el Lema 4.4.1, las desigualdades R_{ij} , S_i , M_i , Q_{ik} , E_i y $x_i \leq 1$ definidas en el enunciado del teorema definen facetas de $P_{2dom}(\mathcal{T})$ para los vértices i, j, k en los conjuntos indicados. Para demostrar que la descripción brindada es completa, es suficiente mostrar que los puntos extremos del poliedro $P_{\mathcal{T}}$ definido por estas desigualdades tienen todas sus coordenadas enteras y que además satisfacen las restricciones del modelo original (2.6).

Afirmación 1 Los puntos de $P_{\mathcal{T}}$ verifican las restricciones (2.6).

Demostración de la Afirmación 1. Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in P_{\mathcal{T}}$. Para un vértice $i \in \{1, \dots, n\}$, supongamos que $C_i \leq 1$ ya que de otro modo la restricción (2.6) para i es redundante. Tenemos entonces las siguientes posibilidades,

- Caso 1 $\deg(i) = 2$ y $C_i = 0$ (i.e., $i \in A$ y no tiene vecinos que sean hojas): en este caso, $N(i) = \{j, k\} \subseteq V \setminus V_1$ y entonces x verifica $x_i + x_j \geq 1$ y $x_i + x_k \geq 1$. Sumando estas desigualdades tenemos que $2x_i + x_j + x_k \geq 2$.
- Caso 2 $\deg(i) = 2$ y $C_i = 1$ (i.e., $i \in A_1$ tiene un único vecino hoja): en este caso, si $N(i) \setminus V_1 = \{j\}$ entonces x verifica $x_i + x_j \geq 1$. Entonces, como $x_i \geq 0$, $2x_i + x_j \geq 1$.
- Caso 3 $\deg(i) \geq 3$ y $\deg(j) \geq 3$ para todo $j \in N(i)$ (i.e., $i \in D$): en este caso la desigualdad (2.6) aparece en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$.
- Caso 4 $\deg(i) \geq 3$ y $\deg(j) \geq 3$ para $j \in N(i) \setminus \{k\}$ y $\deg(k) = 2$ (i.e., $i \in C$): en este caso tenemos que x verifica $x_i + \sum_{j \in N(i) \setminus \{k\}} x_j \geq 1$ y $x_i + x_k \geq 1$, entonces $2x_i + \sum_{j \in N(i)} x_j \geq 2$.
- Caso 5 $\deg(i) \geq 3$ y $\deg(j) \geq 3$ para $j \in N(i) \setminus \{k\}$ y $\deg(k) = 1$ (i.e., $i \in C_1$): en este caso tenemos que $x_i + \sum_{j \in N(i) \setminus \{k\}} x_j \geq 1$ y, como $x_i \geq 0$, $2x_i + \sum_{j \in N(i) \setminus \{k\}} x_j \geq 1$.
- Caso 6 $\deg(i) \geq 3$, $C_i = 0$ e i tiene al menos dos vecinos de grado 2 (i.e., $i \in B$): en este caso $x_i + x_j \geq 1$, $x_j + x_k \geq 1$, entonces $2x_i + x_j + x_k \geq 2$. Luego, como $x_l \geq 0$ para todo $l \in N(i) \setminus V_1$ y $\deg(l) \geq 3$, $2x_i + x_j + x_k + \sum_{l \in N(i) \setminus V_1 : \deg(l) \geq 3} x_l \geq 2$. Si $C_1 = 1$, $x_i + x_j \geq 1$ y entonces $2x_i + x_j + \sum_{l \in N(i) \setminus V_1 : \deg(l) \geq 3} x_l \geq 1$. \diamond

Afirmación 2 El polítopo $P_{\mathcal{T}}$ es entero, es decir, sus puntos extremos tienen coordenadas enteras.

Demostración de la Afirmación 2. Por inducción en $n = |V(\mathcal{T}) \setminus V_1(\mathcal{T})|$.

1. Si $n = 1$, entonces \mathcal{T} es grafo estrella y entonces $P_{\mathcal{T}}$ es el segmento $0 \leq x \leq 1$ cuyos extremos son $x = 0$ y $x = 1$, ambos enteros.
2. Sea $\bar{x} \in P_{\mathcal{T}}$ un punto extremo. Por el lema anterior, existe (al menos) un vértice i_0 tal que $\bar{x}_{i_0} = 1$. Para $\{i_1, \dots, i_k\} = N(i_0) \setminus V_1$, sea \mathcal{T}_j la componente conexa de $V(\mathcal{T}) \setminus \{i_0\}$ que contiene a i_j , agregando a i_0 como una hoja. Claramente \mathcal{T}_j es un árbol, y $|V(\mathcal{T}_j) \setminus V_1(\mathcal{T}_j)| < n$ para $j = 1, \dots, k$. Entonces, por hipótesis inductiva, los puntos extremos de $P_{\mathcal{T}_j}$ son enteros. Para finalizar la demostración mostraremos que $\pi_j(\bar{x})$ es un punto extremo de \mathcal{T}_j para $j = 1, \dots, k$, donde π_j es la proyección de \mathbb{R}^n sobre las coordenadas correspondientes a $V(\mathcal{T}_j) \setminus V_1(\mathcal{T}_j)$. Supongamos por ejemplo que $\pi_1(\bar{x}) \in \mathbb{R}^s$ no es un punto extremo de $P_{\mathcal{T}_1}$, en este caso existe $0 < \alpha < 1$ y dos puntos $y, z \in P_{\mathcal{T}_1}$ tales que $\pi_1(\bar{x}) = \alpha y + (1 - \alpha)z$. Definimos $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{y}_i = y_i$ para $i \in V(\mathcal{T}_1) \setminus V_1(\mathcal{T}_1)$, $\bar{y}_{i_0} = 1$ y $\bar{y}_i = \bar{x}_i$ para el resto de los vértices en $V(\mathcal{T}) \setminus V_1(\mathcal{T})$, y definimos $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$ de modo análogo. Veremos que \bar{y} y \bar{z} son soluciones factibles en $P_{\mathcal{T}}$, es decir, que verifican las desigualdades que definen a $P_{\mathcal{T}}$.

En primer lugar, podemos observar que, si I es alguna de las desigualdades presentes en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$ dada en el enunciado, y el soporte de I (es decir los vértices cuya variable correspondiente tiene coeficiente no nulo en la desigualdad I) está incluido en $\overline{V(\mathcal{T}_1)}$, entonces \bar{y} verifica I ya que estas variables coinciden con las de \bar{x} , siendo ésta una solución factible en $P_{\mathcal{T}}$.

Por otro lado, toda desigualdad de la forma R_{i_0j} , S_{i_0} , M_{i_0} ó Q_{i_0k} es verificada por \bar{y} , dado que $\bar{y}_{i_0} = 1$, y algunas de ellas forman parte de la descripción de $P_{\mathcal{T}}$, dependiendo de si $i_0 \in A, B, C$ o D .

Finalmente, observemos que $\deg_{\mathcal{T}}(i) = \deg_{\mathcal{T}_1}(i)$ para todo $i \in V(\mathcal{T}_1) - \{i_0\}$, y que C_i (el número de vecinos de grado 1 de i) es el mismo en \mathcal{T} y en \mathcal{T}_1 excepto para $i = i_1$. Luego, una desigualdad de la forma R_{ij} , S_i , M_i ó Q_{ik} correspondiente a un vértice $i \in V(\mathcal{T}_1) \setminus V_1(\mathcal{T}_1) - \{i_1\}$ está presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}}$ si y solo si está presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}_1}$, y entonces \bar{y} la verifica.

Como las cotas de las variables son desigualdades válidas, por las observaciones previas, solamente deberemos demostrar que \bar{y} y \bar{z} verifican las desigualdades R_{i_1j} , S_{i_1} , M_{i_1} y Q_{i_1k} .

- a) Si $i_1 \in A$ en \mathcal{T} entonces $R_{i_1i_0}$ es válida para \bar{y} , y además R_{i_1j} está presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}_1}$ (y entonces es válida para \bar{y}) pues $i_1 \in A$ en \mathcal{T}_1 . Lo mismo ocurre si $i_1 \in B$ en \mathcal{T} .
- b) Si $i_1 \in C$ en \mathcal{T} hay dos casos para analizar.
 - Si $i_0 \notin A$, entonces $i_1 \in B$ en \mathcal{T}_1 . Las desigualdades correspondientes a i_1 en $P_{\mathcal{T}}$ son S_{i_1} y R_{i_1j} y ambas son verificadas por \bar{y} pues i_0 pertenece al soporte de S_{i_1} (entonces se cumple para \bar{y}) y, más aún, R_{i_1j} está presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}_1}$.

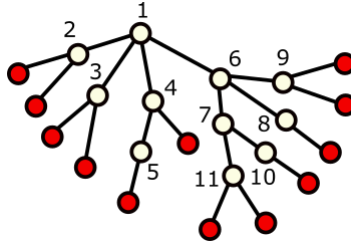


Figura 4.7: Árbol T utilizado en el ejemplo de la Sección 4.4.

- Si $i_0 \in A$, entonces $i_1 \in C$ en \mathcal{T}_1 . Las correspondientes desigualdades en $P_{\mathcal{T}}$ son S_{i_1} , también presente en $P_{\mathcal{T}_1}$, y $R_{i_1 i_0}$ que es trivialmente válida para \bar{y} .
- c) Si $i_1 \in D$ en \mathcal{T} entonces $i_1 \in C$ en \mathcal{T}_1 . Las desigualdades correspondientes a i_1 en $P_{\mathcal{T}}$ son M_{i_1} , $Q_{i_1 i_0}$ y $Q_{i_1 j}$ para $j \neq i_0$ vecino de i_1 . Notemos que $S_{i_1} = Q_{i_1 i_0}$ está presente en la descripción de $P_{\mathcal{T}_1}$, entonces $S_{i_1} + x_{i_0} + x_{i_1} = M_{i_1}$ es válida si $x_{i_0} = 1$, y entonces es válida para \bar{y} , además i_0 pertenece al soporte de $Q_{i_1 j}$ para $j \neq i_0$, y entonces son válidas para \bar{y} .

Hemos visto que $\pi_j(\bar{x})$ es un punto extremo de P_{T_j} para todo $j = 1, \dots, k$, y entonces todas sus coordenadas son enteras. Lo mismo ocurre entonces para \bar{x} , con lo cual nuestra demostración está completa. \square

En la Figura 4.8 podemos ver la descripción completa del árbol T representado en la Figura 4.7. La partición de los vértices que no son no hojas de T es: $A_1 = \{5, 8, 10\}$, $B_1 = \{2, 3, 9, 11\}$, $B \setminus B_1 = \{4\}$, $C \setminus C_1 = \{6, 7\}$ y $D = \{1\}$. El Teorema 4.4.1 garantiza que las siguientes desigualdades conforman la descripción completa de $P_{2dom}(T)$:

- $x_i \leq 1$ para $1 \leq i \leq 11$ (desigualdades (16)-(26) en la Figura 4.8),
- $x_i \geq 0$ para $i \in B_1 \cup C_1 \cup D = \{1, 2, 3, 9, 11\}$ (desigualdades (11)-(15) en la Figura 4.8),
- $M_1 : 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 2$, $Q_{16} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2$, $Q_{14} : x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \geq 2$, $Q_{13} : x_1 + x_2 + x_4 + x_6 \geq 2$, $Q_{12} : x_1 + x_3 + x_4 + x_6 \geq 2$, ya que $D = \{1\}$ (desigualdades (1) y (6)-(9) en la Figura 4.8),
- $R_{54} : x_5 + x_4 \geq 1$, $R_{86} : x_8 + x_6 \geq 1$, $R_{10,7} : x_{10} + x_7 \geq 1$ (desigualdades (2)-(4) en la Figura 4.8),
- $S_6 : x_6 + x_1 + x_7 + x_9 \geq 1$, $S_7 : x_7 + x_6 + x_1 \geq 1$, ya que $C = \{6, 7\}$ (desigualdades (5)-(10) en la Figura 4.8).

Como hemos mencionado anteriormente, la descripción del polítopo de 2-dominación brindada en este último teorema no sólo es interesante desde un punto de vista teórico, sino que provee un

```

DIM = 11

VALID
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

INEQUALITIES_SECTION
( 1) -2x1-x2-x3-x4 -x6 <= -2
( 2)          -x4-x5 <= -1
( 3)          -x6 -x8 <= -1
( 4)          -x7 -x10 <= -1
( 5)          -x6-x7 -x11 <= -1
( 6) - x1-x2-x3-x4 <= -1
( 7) - x1-x2-x3 -x6 <= -1
( 8) - x1-x2 -x4 -x6 <= -1
( 9) - x1 -x3-x4 -x6 <= -1
(10) - x1 -x6-x7 -x9 <= -1
(11) - x1 <= 0
(12) -x2 <= 0
(13) -x3 <= 0
(14)          -x9 <= 0
(15)          -x11 <= 0
(16)          +x11 <= 1
(17)          +x10 <= 1
(18)          +x9 <= 1
(19)          +x8 <= 1
(20)          +x7 <= 1
(21)          +x6 <= 1
(22)          +x5 <= 1
(23)          +x4 <= 1
(24)          +x3 <= 1
(25)          +x2 <= 1
(26) + x1 <= 1

END

```

Figura 4.8: $P_{2dom}(T)$ para T árbol de la Figura 4.3.

algoritmo polinomial para el cálculo del número de 2-dominación de un árbol, que consiste en aplicar alguno de los algoritmos conocidos de PL, como el método del elipsoide. Además, por el Teorema 2.2.2, sabemos que todas las desigualdades presentes en la descripción brindada forman parte también de una descripción completa minimal del poliedro \mathcal{P}_3 -hull para un árbol \mathcal{T} , y entonces podrán ser utilizadas en un algoritmo de planos de corte que calcule dicho parámetro.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

Los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo han recibido la atención de la comunidad científica tanto desde el campo de los problemas de dominación en grafos, como así también desde la teoría de las convexidades discretas. Ambos parámetros son difíciles de calcular en el caso general y poseen numerosas aplicaciones. Pese a esto, hasta la fecha de la publicación de este trabajo, no se han realizado estudios poliedrales que contribuyan a su cálculo o al estudio de sus propiedades.

En los Capítulos 2 y 3 de esta tesis hemos mostrado distintas familias de facetas de los poliedros \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación de un grafo. Creemos que estos resultados contribuirán a la implementación de un algoritmo que calcule ambos parámetros. En este sentido, y como línea de trabajo futuro, será necesario estudiar los problemas de separación asociados a cada una de las familias de desigualdades válidas encontradas. Asimismo es posible continuar la búsqueda de familias de desigualdades válidas y facetas.

En el Capítulo 4 brindamos descripciones completas de los poliedros \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación para algunas familias de grafos. Como comentamos tanto en la introducción como al inicio de dicho capítulo, en principio el aporte de estos resultados es teórico, ya que algunos de estos parámetros se calculan de manera trivial (camino, ciclos, grafos completos), y para árboles existen algoritmos polinomiales que calculan su número de 2-dominación (ver por ejemplo [21]). El interés de estos resultados es mostrar la contraparte poliedral de los resultados algorítmicos existentes, es decir sumar evidencia a favor de la conjetura que afirma que si un problema de optimización lineal sobre un poliedro K pertenece a la clase \mathcal{P} (es decir, si se sabe que existe un algoritmo que lo resuelve en tiempo a lo sumo polinomial en el tamaño de la entrada), entonces K puede ser descrito mediante un sistema con una cantidad (a lo sumo) polinomial de desigualdades lineales. Como ya hemos mencionado, el origen de esta conjetura es la equivalencia entre los problemas de optimización y separación mostrada en [57]. Por otro lado, la descripción completa de $P_{2dom}(\mathcal{T})$ donde \mathcal{T} es un árbol, brinda un algoritmo alternativo para el número de 2-dominación en árboles, que consiste en aplicar algún método polino-

mial para PL sobre el modelo dado por las desigualdades de la caracterización completa obtenidas. Sería interesante obtener la descripción completa de $P_{hull}(\mathcal{T})$, así como de dicho poliedro para otras familias de grafos, esto nos permitiría seguir abonando la conjetura mencionada más arriba, e incluso podría sernos útil para demostrar la polinomialidad de alguno de los problemas que no hayan sido clasificados aún por su complejidad.

Más allá de los resultados obtenidos, creemos que la formulación que utilizamos, así como las técnicas para hallar familias de desigualdades válidas, condiciones de facetitud y descripciones completas de algunos poliedros asociados, podrían intentar ser aplicados al estudio de otros problemas de optimización combinatoria, por ejemplo a algunos problemas relacionados a los estudiados en este trabajo, tales como:

- el cálculo del *número de k -dominación* de un grafo [50]. Esto es, el cardinal mínimo de un conjunto $S \subseteq V$ que sea k -dominante, es decir, tal que todo vértice fuera de S tiene al menos k -vecinos en S ,
- el cálculo del *número de k -conversión* de un grafo. Esto es, el cardinal mínimo de un conjunto S tal que, agregándole los vértices que tengan al menos k vecinos en S y repitiendo este proceso una cierta cantidad de veces, llegan a activar a la totalidad de V . Es decir, este problema es la versión dinámica del problema citado en el ítem anterior,
- el cálculo del cardinal mínimo de un *target set* S , donde un target set es un conjunto que verifica que, dada una función $\tau : V \rightarrow \mathbb{N}$, si definimos $N_\tau(S) = S \cup \{i \in V : |N(i) \cap S| \geq \tau(i)\}$, $N_\tau^0(S) = S$ y $N_\tau^r(S) = N_\tau(N_\tau^{r-1}(S))$ para $r \geq 1$, entonces para algún $r \geq 0$ se cumple que $N_\tau^r(S) = V$. Este problema generaliza al anterior, ya que modela un proceso de propagación en tiempo discreto por los vértices de un grafo, pero permite que cada vértice tenga una cantidad mínima de vecinos activos en el paso anterior para activarse, esta cantidad mínima está dada por $\tau(i)$. En un proceso de k -conversión, tenemos que $\tau(i) = k$ para todo $i \in V$. Este problema fue formulado inicialmente por Chen [25] y estudiado por ejemplo en [26, 44, 64].

Como hemos visto, desde que fueron introducidas hasta la actualidad, las diferentes variantes del número de dominación así como diversos parámetros asociados a convexidades discretas en grafos, continúan siendo ampliamente estudiados por la comunidad científica. Creemos que los resultados obtenidos en esta tesis colaboran en el estudio de los números \mathcal{P}_3 -hull y de 2-dominación, brindando un enfoque poliedral que puede ser profundizado o bien trasladado a otros parámetros como los mencionados anteriormente.

Bibliografía

- [1] J. Adler and U. Lev. Bootstrap percolation: Visualizations and applications. *Brazilian Journal of Physics*, 33:641–644, 2003.
- [2] R. Araujo, R. Sampaio, and J. Szwarcfiter. The convexity of induced paths of order three. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44:109–114, 2013.
- [3] G. Argiroffo, M. Escalante, and M. E. Ugarte. The 2-dominating set polytope of cycles and related graph classes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 44:269–274, 2013.
- [4] E. Balas and M. Fischetti. *Polyhedral Theory for the Asymmetric Traveling Salesman Problem*, volume 12, pages 117–168. 02 2006.
- [5] J. Balogh and B. Bollobás. Sharp thresholds in bootstrap percolation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 326(3):305–312, 2003.
- [6] T. J. Bean, M. A. Henning, and H. C. Swart. On the integrity of distance domination in graphs. *Australas. J. Combin.*, 10:29–43, 1994.
- [7] C. Berge. *Theory of graphs and its applications*, 1962.
- [8] J.C. Bermond, J. Bond, D. Peleg, and S. Perennes. The power of small coalitions in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 127(3):399–414, 2003.
- [9] S. Bianchi, G. Nasini, P. Tolomei, and L. M. Torres. On dominating set polyhedra of circular interval graphs. *Discrete Mathematics*, 344(4):112283, 2021.
- [10] M. Blaum and J. Marengo. Computing the P_3 -hull number of a graph, a polyhedral approach. *Discrete Applied Mathematics*, 255:155–166, 2019.
- [11] M. Blaum and J. Marengo. Valid inequalities and complete characterizations of the 2-domination and the P_3 -hull number polytopes. *Procedia Computer Science*, 2021. The proceedings of Lagos 2021, the eleventh Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2021).
- [12] M. Blidia, M. Chellali, and O. Favaron. Independence and 2-domination in trees. *Australasian J. Comb.*, 33:317–327, 2005.

-
- [13] B. Bollobás. *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*. Cambridge University Press, 2006.
- [14] F. Bonomo, B. Bresar, L. N. Grippo, M. Milanic, and M. D. Safe. Domination parameters with number 2: Interrelations and algorithmic consequences. *Discrete Applied Mathematics*, 235:23–50, 2018.
- [15] M. Bouchakour, T.M. Contenza, C.W. Lee, and A.R. Mahjoub. On the dominating set polytope. *European Journal of Combinatorics*, 29(3):652–661, 2008.
- [16] M. Braga and J. Marenco. A polyhedral study of the acyclic coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 35:35–40, 2009.
- [17] J. R. Calder. Some elementary properties of interval convexities. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-3(3):422–428, 1971.
- [18] M. Campêlo, V. A. Campos, and R. C. Corrêa. On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156(7):1097–1111, 2008.
- [19] M. Campêlo, R. Corrêa, and Y. Frota. Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89(4):159–164, 2004.
- [20] C. Centeno, M. Dourado, L. Penso, D. Rautenbach, and J. Szwarcfiter. Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science*, 412:3693–3700, 2011.
- [21] C. Centeno, M. Dourado, and J. Szwarcfiter. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 32:11–18, 2009.
- [22] J. Chalupa, P. L. Leath, and G. R. Reich. Bootstrap percolation on a bethe lattice. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, 12(1):31–35, 1979.
- [23] M. Changat and J. Mathew. On triangle path convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 206:91–95, 1999.
- [24] M. Changat, H. Mulder, and G. Sierksma. Convexities related to path properties on graphs. *Discret. Math.*, 290:117–131, 2005.
- [25] N. Chen. On the approximability of influence in social networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(3):1400–1415, 2009.
- [26] C. Chiang, L. Huang, B. Li, J. Wu, and H. Yeh. Some results on the target set selection problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 25:702–715, 2013.
- [27] T. Christof and A. Lobel. Porta: Polyhedron representation transformation algorithm. 1997.
- [28] V. Chvátal. On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 18(2):138–154, 1975.
- [29] Vasek Chvatal, Vaclav Chvatal, et al. *Linear programming*. Macmillan, 1983.

BIBLIOGRAFÍA

- [30] E. J. Cockayne. Domination in undirected graphs—a survey. *Theory and Applications of Graphs in Americas Bicentennial Year*, pages 141–147, 1978.
- [31] P. Coll, J. Marengo, I. Méndez-Díaz, and P. Zabala. Facets of the graph coloring polytope. *Annals of Operations Research*, 116:79–90, 2002.
- [32] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings of the Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, 1971.
- [33] R. C. Corrêa, M. Blaum, J. Marengo, I. Koch, and M. Mydlarz. An integer programming approach for the 2-class single-group classification problem. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 346:321–331, 2019.
- [34] G. Dantzig, R. Fulkerson, and S. Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2(4):393–410, 1954.
- [35] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1991.
- [36] D. Delle Donne and J. Marengo. A branch-and-cut algorithm for the minimum-adjacency vertex coloring problem. *Discrete Optimization*, 8(4):540–554, 2011.
- [37] D. Delle Donne and J. Marengo. Polyhedral studies of vertex coloring problems: The standard formulation. *Discrete Optimization*, 21:1–13, 2016.
- [38] M. Dourado, F. Protti, and J. Szwarcfiter. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 158(12):1268–1274, 2010.
- [39] M. Dourado and R. Sampaio. Complexity aspects of the triangle path convexity. *Discrete Applied Mathematics*, 206:39–47, 2016.
- [40] P. Dreyer. Applications and variations of domination in graphs. 01 2000.
- [41] P. Dreyer and F. Roberts. Irreversible k -threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. *Discrete Applied Mathematics*, 157:1615–1627, 2009.
- [42] P. Duchet. Convex sets in graphs. ii: Minimal path convexity. *J. Comb. Theory*, 44:307–316, 1988.
- [43] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards Section B Mathematics and Mathematical Physics*, page 125, 1965.
- [44] S. Ehard and D. Rautenbach. On some tractable and hard instances for partial incentives and target set selection. *Discrete Optimization*, 34, 2019.
- [45] P. Erdős, E. Fried, A. Hajnal, and E. C. Milner. Some remarks on simple tournaments. *Algebra Universalis*, 2:238–245, 1972.
- [46] M. Everett and S. B. Seidman. The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3):217–223, 1985.

-
- [47] M. Farber. Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 7(2):115–130, 1984.
- [48] M. Farber and R. Jamison. On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 66(3):231–247, 1987.
- [49] O. Favaron. On a conjecture of Fink and Jacobson concerning k -domination and k -dependence. *J. Combinat. Theory Ser. B*, 39:101–110, 1985.
- [50] J. F. Fink and M. S. Jacobson. n -Domination in graphs. *Graph Theory with Application to Algorithms and Computer Science*, John Wiley and Sons, New York, pages 282–300, 1985.
- [51] P. Flocchinia, F. Geurtsb, and N. Santoroc. Optimal irreversible dynamos in chordal rings. *Discrete Applied Mathematics*, 113:23–42, 2001.
- [52] R.P. French. A formal theory of social power. *Psychology Review*, 63:181–194, 1956.
- [53] M. Garey and D. Johnson. Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness. 1978.
- [54] J. Gimbel. Some remarks on the convexity number of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 19:357–361, 2003.
- [55] R. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 64:275–278, 1958.
- [56] M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt. Facets of the linear ordering polytope. *Mathematical Programming*, 33:43–60, 1985.
- [57] M. Grötschel, L. Lovasz, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2):169 – 197, 1981.
- [58] M. Grötschel and M. Padberg. On the symmetric travelling salesman problem i: Inequalities. *Mathematical Programming*, 16:265–280, 1979.
- [59] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater. *Fundamentals of domination in graphs*. CRC press, 1998.
- [60] S. Huang. Gene expression profiling, genetic networks, and cellular states: an integrating concept for tumorigenesis and drug discovery. *Journal of Molecular Medicine*, 77:469–480, 1999.
- [61] M. S. Jacobson and K. Peters. Complexity questions for n -domination and related parameters. *Congr. Numer.* 68, pages 7–22, 1989.
- [62] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '84, page 302311, New York, NY, USA, 1984. Association for Computing Machinery.
- [63] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. volume 40, pages 85–103, 1972.

BIBLIOGRAFÍA

- [64] L. Keiler, C. V. Lima, A. Karolinna Maia, R. Sampaio, and I. Sau. Target set selection with maximum activation time. *arXiv e-prints*, 2020.
- [65] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244:1093–1096, 1979.
- [66] V. R. Kulli. On n -total domination number in graphs. *Graph Theory. Combinatorics, Algorithms, and Applications*, pages 319–324, 1989.
- [67] J. K. Lan and G. J. Chang. Algorithmic aspects of the k -domination problem in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 161(10):1513–1520, 2013.
- [68] E. L. Lawler. *The Traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization*. Wiley, 1985.
- [69] A. Meir and J.W. Moon. Relations between packing and covering number of a tree. *Pacific J. Math.*, 61:225–233, 1975.
- [70] I. Méndez-Díaz and P. Zabala. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics*, 154(5):826–847, 2006.
- [71] N. Mustafa and A. Pekec. Listen to your neighbors: How (not) to reach a consensus. *SIAM J. Discrete Math.*, 17:634–660, 2004.
- [72] G. Nemhauser and L. Wolsey. *Integer and combinatorial optimization*. Wiley- Interscience, 1988.
- [73] M. W. Padberg. On the facial structure of set packing polyhedra. *Math. Program.*, 5(1):199–215, 1973.
- [74] S. Poljak and M. Sůra. On periodical behaviour in societies with symmetric influences. *Combinatorica*, 3:119–121, 1983.
- [75] E. Riedl. Largest and smallest minimal percolating sets in trees. *The electronic journal of combinatorics*, 19(1):64, 2012.
- [76] F. Rossi and S. Smriglio. A branch-and-cut algorithm for the maximum cardinality stable set problem. *Operations Research Letters*, 28(2):63–74, 2001.
- [77] M.L.J. van de Vel. *Theory of Convex Structures*. North-Holland, 1993.
- [78] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2 edition, 2000.
- [79] G. Ziegler. *Lectures on polytopes*. Springer, 1995.