



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Persistencia, soluciones periódicas y atractores en ecuaciones diferenciales con retardo**

Tesis presentada para obtener el título de Doctora de la Universidad  
de Buenos Aires en el área de Ciencias Matemáticas

**Melanie Bondorevsky**

Director de tesis: Pablo Amster  
Consejero de estudios: Gabriel Minian  
Lugar de Trabajo: IMAS - CONICET

Fecha: 22 de Mayo de 2023

Melt

## Resumen

El objetivo principal de esta tesis es investigar cierta clase de sistemas semi-dinámicos, los cuales provienen de sistemas de ecuaciones diferenciales con retardos (EDRs). Más precisamente, este trabajo está centrado en el estudio de propiedades de persistencia, existencia de soluciones periódicas y existencia de atractores en este contexto.

En esta tesis se trabaja específicamente con dos tipos de ecuaciones. En primer lugar, se estudian sistemas del tipo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1)$$

donde  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función continua y  $\tau > 0$  es el retardo. En presencia de retardos, una condición inicial para el sistema es una función continua  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$ , con  $\varphi(t) = x(t)$  para  $-\tau \leq t \leq 0$ .

En segundo lugar, con el objetivo de estudiar problemas que provienen de dinámica poblacional se analiza el siguiente tipo de sistemas de ecuaciones:

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_k)), \quad (2)$$

donde  $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $\tau_j > 0$  son los retardos,  $j = 1, \dots, k$ ,  $k \geq 2$ . En este caso, una condición inicial para el sistema es una función continua  $\varphi(t) : [-\tau^*, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ , con  $\tau^* = \max\{\tau_j, j = 1, \dots, k\}$ .

En particular, se centró la atención en ecuaciones tipo Nicholson para el caso  $N$  dimensional. Más precisamente, se ha considerado  $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$  una función continua, donde para cada  $i = 1, \dots, N$ ,  $F_i : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{N+k} \rightarrow \mathbb{R}$  está dada por

$$F_i = -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) x_i(t - \tau_j) e^{-x_i(t - \tau_j)} - H_i(t, x_1, \dots, x_N). \quad (3)$$

En este modelo, todos los términos son funciones no lineales. Específicamente,  $d_i$  representan las tasas de mortalidad de cada población,  $i = 1, \dots, N$ ,  $b_{i,l}$  las interacciones colaborativas entre poblaciones,  $l = 1, \dots, N$ ,  $p_{i,j}(t)$  las tasas de reproducción,  $j = 1, \dots, k$ ,  $\tau_j > 0$  son los tiempos necesarios de una misma población para alcanzar la maduración y  $H_i$  un término de recolección que depende de las  $N$  poblaciones.

En el contexto de sistemas dinámicos, la noción de persistencia juega un rol importante para estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema de EDRs, especialmente en sistemas que provienen de modelos biológicos. Por ejemplo, si un sistema de especies que interactúan entre sí es *persistente* (en un sentido apropiado) entonces es casi seguro que las especies no se extinguen.

Entre las diferentes nociones de persistencia, se buscó considerar aquellas que se mantienen bajo pequeñas perturbaciones. Se utilizaron específicamente tres nociones de persistencia: débil, fuerte y uniforme (fuerte). En particular, se ha buscado extender los resultados sobre persistencia para el caso más general posible.

A continuación, se estudió la existencia de soluciones  $T$ -periódicas. A diferencia del caso de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs), el espacio de condiciones iniciales es infinito dimensional. Esto implica que las herramientas clásicas de la teoría de EDOs no se aplican de manera directa. Es por ello que en este trabajo se utiliza teoría de grado de Leray-Schauder en el espacio de funciones continuas  $T$ -periódicas para probar los resultados. En el caso de ecuaciones tipo Nicholson, se incluyen ejemplos numéricos para ilustrar los resultados obtenidos.

Por último, bajo condiciones apropiadas, se estudia la existencia de atractores globales. Se demuestra que, en cierto sentido, las condiciones consideradas para la persistencia también son necesarias. Concretamente, si dichas condiciones no se cumplen, entonces ciertas hipótesis adicionales implican que cero es un atractor global. En particular, en el caso de ecuaciones tipo Nicholson esto se traduce, naturalmente, en la extinción de poblaciones.

En este trabajo de investigación cabe mencionar la utilización de funciones tipo guía, que pueden ser interpretadas como funciones tipo Lyapunov. Se considera una función continuamente diferenciable  $V : (0, +\infty)^N \rightarrow (0, +\infty)$  tal que  $V(x) \rightarrow 0$  si  $x \rightarrow 0$  en  $(0, +\infty)^N$ . La diferencia con las funciones clásicas de Lyapunov es que la condición que pedimos en este caso es  $\dot{V} > 0$ , a fin de asegurar que las trayectorias no pueden tender a 0.

Para la primera parte, el enfoque se ha centrado en buscar condiciones apropiadas sobre  $V(x)$  para garantizar que el origen sea un repulsor uniforme. En el caso particular de sistemas tipo Nicholson, a diferencia del enfoque anterior, se emplean funciones tipo guía, que no son continuamente diferenciables pero que, sin embargo, permiten evitar el uso de herramientas más técnicas. Una ventaja adicional del método es el hecho de que la persistencia para el sistema  $N$ -dimensional puede demostrarse mediante una reducción a un problema unidimensional.

El texto está organizado de la siguiente forma. El Capítulo 1 incluye el objetivo y la estructura de esta tesis. En el Capítulo 2 se provee una introducción al tema, teniendo en cuenta el marco de investigación y resultados relevantes para el estudio de EDRs. En los Capítulos 3 y 4 se presenta el análisis de persistencia, tanto para sistemas más generales como para sistemas tipo Nicholson. En el Capítulo 5 probamos bajo qué condiciones se puede garantizar la existencia de soluciones periódicas. En el Capítulo 6, se brindan condiciones suficientes para garantizar que

el origen es un atractor global de las trayectorias positivas. Por último, se incluye un capítulo 7 de conclusiones y trabajos futuros. Los problemas estudiados en esta tesis resultaron en dos publicaciones en revistas internacionales.

Para concluir, es importante señalar que la atención se centra en uno de los temas más importantes de la dinámica de poblaciones que es la supervivencia de la población total. Esperamos que este estudio contribuya a una mejor comprensión de este tipo de sistemas y de otros más generales en el contexto de la dinámica de poblaciones.

**Palabras Clave:** *ecuaciones diferenciales con retardo, sistemas semi-dinámicos, dinámica poblacional, persistencia débil, persistencia fuerte, persistencia uniforme, funciones guía, soluciones periódicas, grado topológico, atractor global.*

## Abstract

### Persistence, periodic solutions and attractors in delay differential equations

The main purpose of this thesis is to study a certain class of semi-dynamical systems that arise from systems of delayed differential equations (DDEs). In this context, qualitative properties are proven, namely, persistence, existence of periodic solutions and existence of attractors.

In this thesis two types of equations are specifically dealt with. In the first part, the systems are of the type:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (4)$$

where  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  is a continuous function and  $\tau > 0$  is the delay. In the presence of delays, an initial condition for the system is a continuous function  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$ , with  $x(t) = \varphi(t)$ , for  $-\tau \leq t \leq 0$ .

In the second part, with the aim of studying problems arising from population dynamics, the following type of systems of equations are analyzed:

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_k)), \quad (5)$$

where  $F : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{(k+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  is continuous and  $\tau_j > 0$  are the delays,  $j = 1, \dots, k$ ,  $k \geq 2$ . In this case, an initial condition for this system is a continuous function  $\varphi(t) : [-\tau^*, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ , with  $\tau^* = \max\{\tau_j, j = 1, \dots, k\}$ .

In particular, the attention was focused on Nicholson-type equations for the  $N$  dimensional case. More precisely, it has been considered  $F = (F_1, F_2, \dots, F_N)$  continuous, such that for each  $i = 1, \dots, N$ ,  $F_i : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{(k+N)} \rightarrow \mathbb{R}$  is given by

$$F_i = -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) x_i(t - \tau_j) e^{-x_i(t - \tau_j)} - H_i(t, x_1, \dots, x_N). \quad (6)$$

In this model, we considered nonlinear terms. Specifically,  $d_i$  represent mortality rates for each population,  $i = 1, \dots, N$ ,  $b_{i,l}$  collaborative interactions between populations,  $l = 1, \dots, N$ ,  $p_{i,j}$  reproductive rates,  $j = 1, \dots, k$ ,  $\tau_j$  the time required to reach maturity, and  $H_i$  a harvesting term that depends on the  $N$  populations.

In the context of dynamical systems, the notion of persistence plays an important role in the study of the behavior of the solutions of a DDEs system, especially in systems that are derived from biological models. For example, if a system of mutually interacting species is *persistent* (in an appropriate sense) then it is almost sure that the species will not become extinct.

Among the different notions of persistence, it was intended to consider those that are preserved under small perturbations. Three notions of persistence were specifically used: weak, strong and uniform (strong). In particular, we have aimed to extend the results on persistence to the most general case possible.

Subsequently, the existence of  $T$ -periodic solutions was studied. In contrast to the case of ordinary differential equations (ODEs), the space of initial conditions is infinite dimensional. This implies that the classical tools of ODEs theory do not apply directly. Therefore, in this work Leray-Schauder degree theory is used in the space of continuous  $T$ -periodic functions to prove the results. In the case of Nicholson-type equations, numerical examples are included to illustrate the results here obtained.

Lastly, under appropriate conditions, the existence of global attractors is studied. It is shown that, in a certain sense, the conditions considered in persistence are also necessary. In fact, if they are not fulfilled, then certain additional hypotheses imply that the zero equilibrium is a global attractor. In particular, in the case of Nicholson-type equations, this translates into population extinction.

In this work, it is worth mentioning the use of guiding-type functions, which can be interpreted as Lyapunov-type functions. A continuously differentiable function is considered  $V : (0, +\infty)^N \rightarrow (0, +\infty)$  such that  $V(x) \rightarrow 0$  as  $x \rightarrow 0$  in  $(0, +\infty)^N$ . The difference with classical Lyapunov functions is that the condition we are imposing for in this case is  $\dot{V} > 0$ , in order to ensure that trajectories cannot converge to zero.

For the first part, the approach was focused on finding appropriate conditions on  $V(x)$  to guarantee that the origin is a uniform repeller. In the particular case of Nicholson-type systems, unlike the previous approach, we employ guiding-type functions which are not continuously differentiable but which, nevertheless, allow us to avoid the use of more technical tools. An additional advantage of the method is the fact that persistence for the  $N$ -dimensional system can be proved by a reduction to a one-dimensional problem.

The text is organized as follows. Chapter 1 includes the purpose and structure of this thesis. Chapter 2 provides an introduction to the topic, taking into account the research framework and results relevant to the study of DDEs. In Chapters 3 and 4, the analysis of persistence is introduced, both for general and Nicholson-type systems. In Chapter 5 is presented the conditions under which the existence of periodic solutions can be proven. In Chapter 6, sufficient conditions guaranteeing that the trivial equilibrium is global attractor of the positive trajectories are obtained. Finally, a Chapter 7 with conclusions and future work is included. The problems studied in this thesis resulted in two publications in international journals.

To conclude, it is important to point out that the primary focus is on one of the most important topics in population dynamics, which is the survival of the total population. We hope that this research will contribute to a better understanding of these and other systems in the context of population dynamics.

**Keywords:** *delay differential equations, semi-dynamical systems, population dynamics, weak persistence, strong persistence, uniform persistence, guiding functions, periodic solutions, topological degree, global attractor.*



*Dedico este trabajo a todas las personas que me acompañaron en este camino.*

*Especialmente a Pablo y a Jazmín.*



# Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo de la tesis . . . . .	1
1.2	Estructura de la tesis . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1	Definiciones y notaciones básicas . . . . .	5
2.2	Ecuaciones diferenciales con retardo . . . . .	6
2.2.1	Motivación: Problemas poblacionales . . . . .	6
2.2.2	Introducción a los sistemas dinámicos . . . . .	10
2.2.3	Persistencia en ecuaciones diferenciales con retardo . . . . .	14
2.2.4	Soluciones periódicas . . . . .	16
2.3	Resultados previos . . . . .	18
2.3.1	Funciones tipo guía . . . . .	18
2.3.2	Teoremas de punto fijo . . . . .	18
2.3.3	Grado topológico . . . . .	20
2.3.4	Reducción de Lyapunov-Schmidt . . . . .	23
2.3.5	Otros resultados topológicos . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Persistencia en sistemas generales</b>	<b>27</b>
3.1	Persistencia débil y fuerte . . . . .	28
3.2	Persistencia uniforme . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Persistencia en sistemas tipo Nicholson</b>	<b>39</b>
4.1	Persistencia en el caso escalar . . . . .	40
4.2	Persistencia en el caso N-dimensional . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Soluciones periódicas</b>	<b>49</b>
5.1	Soluciones periódicas en sistemas generales . . . . .	50
5.2	Soluciones periódicas en Nicholson . . . . .	55

<b>6</b>	<b>Atractores</b>	<b>61</b>
6.1	Atractividad global del equilibrio trivial en sistemas generales . . . . .	61
6.2	Atractividad global del equilibrio trivial en Nicholson . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>67</b>
<b>8</b>	<b>Apéndice: Ejemplos numéricos</b>	<b>69</b>

# Chapter 1

## Introducción

### 1.1 Objetivo de la tesis

El objetivo principal de esta tesis es estudiar propiedades de persistencia, existencia de soluciones periódicas y de atractores en el contexto de ecuaciones diferenciales con retardo (EDRs).

En particular, nos interesa estudiar estas propiedades usando aplicaciones de funciones tipo guía y métodos topológicos, como la teoría de grado de Leray-Schauder en el espacio de funciones continuas  $T$ -periódicas. Estas herramientas son frecuentemente utilizadas en el análisis de sistemas ecuaciones diferenciales más generales donde, por ejemplo, el dominio de estos sistemas son espacios de dimensión infinita.

Esto ocurre, como veremos en los preliminares, con el espacio de fases de las EDRs, lo cual implica que las herramientas clásicas de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) no se aplican de manera directa. En este sentido, nuestro enfoque se centra en el análisis del comportamiento de las soluciones utilizando cierto sistema semi-dinámico, el cual es inducido por el conjunto de soluciones de las EDRs.

Inicialmente, nos preguntamos bajo qué condiciones se puede asegurar que el sistema semi-dinámico es débilmente, fuertemente, o uniformemente persistente. A partir de este primer análisis, se buscan hipótesis apropiadas para concluir los resultados de existencia de soluciones  $T$ -periódicas. Finalmente, nos planteamos una pregunta en la dirección contraria: ¿qué condiciones debemos imponer para asegurar que el 0 es un atractor global de las soluciones positivas? Cabe mencionar que este último análisis está inspirado por los resultados expuestos en los capítulos precedentes: a grandes rasgos, se trata de encontrar condiciones complementarias a las obtenidas para asegurar la persistencia.

## 1.2 Estructura de la tesis

El texto está organizado de la siguiente forma.

En el Capítulo 2 se introducen algunos conceptos fundamentales, comenzando por una breve introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo y a los sistemas dinámicos y semi-dinámicos. En este contexto, se presenta un breve resumen de la noción de persistencia que se empleará en esta tesis, incluyendo resultados previos que motivan este trabajo. Luego, se introduce el problema periódico y algunas de las técnicas que se emplearán para su tratamiento. Finalmente, se efectúa una revisión de las herramientas topológicas que se utilizan a lo largo de la tesis y varios resultados importantes para la obtención de los resultados.

A continuación se comienza con el estudio de persistencia, tanto para sistemas más generales como para sistemas tipo Nicholson. Intuitivamente, la persistencia de un sistema significa que las soluciones no constantemente nulas, con condición inicial no negativa, se mantienen alejadas del origen a medida que evoluciona el tiempo. Específicamente, el estudio se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 3, se analizan en principio las condiciones para obtener resultados de persistencia débil y fuerte. A continuación, se obtienen condiciones suficientes para la persistencia uniforme, vale decir, para que las soluciones positivas del sistema se encuentren eventualmente alejadas del equilibrio nulo a una distancia que no depende de la condición inicial.

El Capítulo 4 se enfoca en el estudio de persistencia para una generalización  $N$ -dimensional de la ecuación de Nicholson. El interés se centra particularmente en obtener cotas más explícitas para la persistencia fuerte y persistencia uniforme. Para organizar ideas, primero se estudia el caso escalar, en donde se prueba persistencia fuerte y uniforme. Sucesivamente, se analiza la persistencia el caso en dimensión  $N$ , en donde se aplican técnicas de funciones tipo guía.

En el Capítulo 5 se obtienen condiciones suficientes para garantizar la existencia de soluciones periódicas. El capítulo se divide en dos partes: en primer lugar, se analiza el caso de existencia de soluciones en sistemas más generales y en segundo lugar se estudia la existencia de soluciones para la generalización de la ecuación de Nicholson. Específicamente, se buscan conjuntos apropiados del espacio de funciones periódicas a fin de aplicar la teoría de grado topológico de Leray-Schauder. Como se verá, una dificultad para aplicar este método en esta clase de problemas radica en la obtención de cotas inferiores apropiadas; a tal fin, se emplean los resultados correspondientes al capítulo de persistencia.

En el Capítulo 6, se estudia la posibilidad de que el equilibrio nulo de un sistema sea un atractor (local o global) de las trayectorias positivas. Se demuestra que, en

cierto sentido amplio, las condiciones suficientes para la persistencia impuestas en los capítulos 3 y 4 también son necesarias: más precisamente, se verá que, cuando dichas condiciones no se verifican, entonces es posible encontrar hipótesis adicionales bajo las cuales el equilibrio nulo es un atractor global. Cabe señalar que en el caso de ecuaciones tipo Nicholson este resultado se traduce naturalmente en la extinción de las poblaciones.

Por último, se incluye un capítulo breve de conclusiones y posibles trabajos futuros, así como un apéndice donde se ilustran los resultados con algunos ejemplos numéricos.





# Chapter 2

## Preliminares

En este capítulo se introducen algunos conceptos fundamentales para el estudio de los problemas propuestos en la tesis. Ante todo, se da una serie de definiciones básicas; a continuación, se presenta una breve introducción a las ecuaciones diferenciales con retardo y a los sistemas dinámicos y semi-dinámicos. En este contexto, se presenta un breve resumen de la noción de persistencia que emplearemos aquí, incluyendo resultados previos que motivan este trabajo. Luego, se brinda una introducción al problema de encontrar órbitas periódicas de un sistema. El capítulo concluye con una presentación de las herramientas topológicas que se utilizan a lo largo de la tesis a fin de que su lectura resulte, dentro de lo posible, autocontenida. Por tal motivo, se brinda el marco teórico elemental de tales herramientas, junto a varios resultados relevantes para la obtención de nuestros resultados.

### 2.1 Definiciones y notaciones básicas

Aquí se introducen las definiciones y notaciones más básicas que se utilizan a lo largo de la tesis.

Para la norma y el producto escalar usuales de  $\mathbb{R}^n$  se emplea las notaciones  $|\cdot|$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Se escribe al cono positivo de  $\mathbb{R}^N$  como

$$\mathbb{R}_+^N := \{x \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq N\}.$$

Se denota al espacio de funciones continuas por

$$C[a, b] := \{u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$$

dotado de la norma  $\|u\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |u(t)|$ . La misma notación se emplea para espacios de funciones vectoriales  $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que en ocasiones también escribimos  $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ .

Por otro lado, se denota al espacio de funciones continuas  $T$ -periódicas por

$$C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas tales que } u(t+T) = u(t)\}.$$

Si se trata de funciones vectoriales, algunas veces se emplea la notación  $C_T$ . Se escribe al cono positivo de  $C_T$  como  $\mathcal{C}$  y al interior del cono positivo como  $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ . Se utilizará  $C^1$  para referirse a las funciones continuamente diferenciables.

En el capítulo de soluciones periódicas se consideran varias funciones. Aquí se mencionan las más usuales. Se denota al operador integral como

$$\mathcal{I}(\varphi(t)) := \int_0^t \varphi(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

y al promedio de una función

$$\bar{\varphi} := \frac{\mathcal{I}(\varphi(T))}{T}.$$

Dado un espacio métrico  $X$ , la bola abierta de radio  $r$  centrada en un punto  $x \in X$  será denotada  $B_r(x)$ . En particular, se escribirá  $B := B_1(0)$ . También se emplean las notaciones habituales  $A^\circ$ ,  $\bar{A}$ ,  $\partial A$  para referirse al interior, la clausura y la frontera de un conjunto  $A \subset X$ . Su complemento se escribirá en la forma  $A^c$ , aunque a veces resultará más claro expresarlo como diferencia entre conjuntos, que se denotará  $X \setminus A$ .

Para finalizar, se utilizan los símbolos  $\gg$  y  $\ll$  para referirse a cantidades que son mucho mayores o menores que otras. También se emplean las expresiones  $t \rightarrow a$  para referirse al límite,  $t \rightarrow a^\pm$  a los límites laterales, así como  $t \nearrow a$  y  $t \searrow a$ , cuando se quiera expresar, respectivamente, que  $t$  tiende al valor  $a$  de manera creciente o decreciente.

## 2.2 Ecuaciones diferenciales con retardo

Presentamos las ecuaciones diferenciales con retardo con una serie de ejemplos de dinámica poblacional. A continuación presentamos los diferentes tipos de retardos que se pueden considerar y, en particular, la clase de retardos que se utilizan a lo largo de la tesis.

### 2.2.1 Motivación: Problemas poblacionales

El método más elemental para describir el crecimiento de una población viene dado por el modelo de Malthus [38]. Sea  $N(t)$  la densidad de la población en el tiempo  $t$ .

Supongamos que  $p > 0$  es la tasa de nacimientos y  $d > 0$  la tasa de muertes. Aunque el modelo es muy sencillo, sirve como primera motivación. Según este modelo, la población aumenta cuando  $p > d$  y disminuye cuando  $p < d$ .

Como se trata de poblaciones, es lógico suponer que el valor inicial es  $N_0 > 0$ . Es claro que el comportamiento de la solución cuando  $t \rightarrow +\infty$  es

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) := +\infty, \text{ cuando } p > d.$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) := 0, \text{ cuando } p < d.$$

Notemos que el caso  $p = d$ , simplemente indica que la población es  $N_0$  para todo  $t$ .

El modelo logístico de Verhulst [49] es más apropiado, pues tiene en cuenta el hecho de la población se autorregula, condicionada por algún factor limitante. Se asume un valor máximo  $M$ , por lo que la población crece cuando  $N_0$  es menor que este valor y disminuye cuando es mayor. Una forma de obtener la ecuación consiste en suponer que la tasa de crecimiento  $\frac{N'(t)}{N(t)}$  es proporcional a la diferencia  $M - N(t)$ , i.e.

$$\frac{N'(t)}{N(t)} := c(M - N(t)), \text{ para cierto } c > 0, \text{ o bien}$$

$$N'(t) := N(t)(\beta - \alpha N(t)), \text{ para ciertos } \alpha, \beta > 0.$$

La ventaja de escribirla de la segunda forma es que permite considerar  $N \equiv 0$  como un equilibrio. Además, la ecuación tiene otro equilibrio, el valor  $M := \frac{\beta}{\alpha}$ .

Teniendo en cuenta estos modelos elementales, la idea de introducir un retardo surge de la hipótesis de que los nuevos individuos tardan un cierto tiempo  $\tau$  para alcanzar la madurez. En general, se entiende que dicha madurez viene dada por la capacidad de reproducción.

Con el agregado del retardo, la dinámica de la población  $N$  de acuerdo con el modelo malthusiano se describe mediante la ecuación diferencial

$$N'(t) := -dN(t) + bN(t - \tau). \quad (2.1)$$

Esto significa que la tasa de cambio incluye valores presentes y pasados de  $N$ . Notar que la condición inicial, por ejemplo, en  $t = 0$ , no es un número sino una función  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)$ . Este tipo de ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales con retardo (EDRs) o, alternativamente, ecuaciones con delay (EDDs).

Más adelante, se presenta una notación más conveniente para describir la dinámica de estas ecuaciones.

### La ecuación de Nicholson

La ecuación de Nicholson, llamada así por el matemático británico Robert J. Nicholson, ha sido ampliamente estudiada y utilizada como modelo matemático para describir la dinámica de poblaciones. Desde su propuesta en 1954 (ver [41]), se ha convertido en un modelo clásico en el campo de la ecología matemática y la biología teórica. En particular, esta ecuación ha demostrado ser una herramienta útil para comprender las interacciones entre diferentes especies en un ecosistema y cómo factores como la tasa de mortalidad y la tasa de reproducción influyen en la dinámica de las poblaciones.

A través de los años, se han propuesto varias extensiones y generalizaciones de la ecuación para abordar aspectos más complejos de las interacciones biológicas. Estas extensiones incluyen la consideración de múltiples especies, la inclusión de términos de competencia o colaboración, y la incorporación de factores ambientales (ver, por ejemplo, [6], [11], [17], [21], [42]).

La ecuación clásica de Nicholson [41] viene dada por

$$x'(t) = -dx(t) + px(t - \tau)e^{-ax(t-\tau)}, \text{ para } t \geq 0. \quad (2.2)$$

La función  $x(t)$  describe la densidad de la población, la constante  $d > 0$  representa la tasa de mortalidad,  $p > 0$  representa la tasa de producción de individuos,  $a^{-1} > 0$  es el valor en el que la función  $f(x) = xe^{-ax}$  cambia su monotonía. Más precisamente,  $f$  es decreciente para  $x > a^{-1}$ . Por último,  $\tau > 0$  se refiere al tiempo necesario para alcanzar la madurez reproductiva.

Como se puede observar, en el modelo de Nicholson (2.2) se incluye un factor en el término de crecimiento, que expresa la probabilidad de supervivencia de un individuo, dada por una distribución exponencial:  $\phi(N) = \frac{1}{N_0}e^{-\frac{N}{N_0}}$ , donde  $N_0 > 0$  es la población inicial. Más concretamente, este factor refleja el efecto de reducción en la tasa de crecimiento a medida que la población aumenta.

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $a = 1$ : a tal fin, alcanza con multiplicar la ecuación por  $a$  y reemplazar  $x$  por  $y := ax$ . Cabe aclarar que en este trabajo, se considerará únicamente que  $a = 1$ .

Para una deducción detallada de la ecuación, véase el trabajo de Gurney et al. [30] y el resumen de Berezansky, Braverman e Idels [11] donde se brinda un compendio de los principales resultados clásicos relativos a este modelo.

Aquí mencionamos algunos resultados relevantes (ver, por ejemplo, [11]) que servirán como motivación a lo largo de la tesis.

1. Si  $p \leq d$  entonces no existe un equilibrio no trivial y 0 es un atractor global de las soluciones positivas, vale decir: cualquier solución  $x(t)$  del problema con dato inicial positivo verifica que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .
2. Si  $p > d$ , existe exactamente un equilibrio positivo, que es asintóticamente estable para  $p \geq de^2$  y  $\tau < \tau^*(p)$ . En cambio, si  $p < de^2$ , la estabilidad asintótica se verifica para cualquier  $\tau > 0$ .

Además, si  $x$  es una solución con condición inicial positiva entonces

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) \geq \min \left\{ \ln \left( \frac{p}{d} \right), e^{-\tau d} \right\}. \quad (2.3)$$

3. Si  $p(t)$  y  $d(t)$  son funciones positivas  $T$ -periódicas entonces la ecuación tiene soluciones positivas  $T$ -periódicas si  $p(t) > d(t)$  para todo  $t > 0$ , mientras que si  $p(t) \leq d(t)$  para todo  $t$ , entonces no hay soluciones positivas  $T$ -periódicas. Más aún, al igual que en el caso autónomo  $p(t) \equiv p$  y  $q(t) \equiv q$ , se cumple que 0 es un atractor global de las trayectorias positivas.

En la ecuación clásica puede incluirse también un término de cosecha (o harvesting)  $-H(t, x(t))$ , que representa la posible extracción no lineal de individuos de la especie debido a razones externas.

Las conclusiones del caso escalar se generalizan para el sistema introducido en [12]:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -d_1 x_1(t) + b_1 x_2(t) + p_1 x_1(t - \tau) e^{-x_1(t - \tau)}, \\ x_2'(t) = -d_2 x_2(t) + b_2 x_1(t) + p_2 x_2(t - \tau) e^{-x_2(t - \tau)}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Para este sistema se puede probar (ver [7]), en analogía con el caso unidimensional:

1. Si  $p_i + b_i \leq d_i$  entonces 0 es un atractor global de las soluciones positivas.
2. Si  $b_i(t), d_i(t), p_i(t)$  son funciones positivas  $T$ -periódicas y  $b_i(t) < d_i(t) < p_i(t) + d_i(t)$  para todo  $t > 0$ , entonces existen soluciones  $T$ -periódicas.

En este trabajo se estudiará una extensión del sistema para  $N$  ecuaciones que incluyen varios retardos, con terminos de mortalidad  $d_i$  y de mutualismo  $b_{ij}$  no lineales y, además, con términos no lineales  $H_i$  de cosecha, que dependen de las  $N$ -coordenadas y son asintóticamente lineales.

Para una presentación más completa, comenzaremos nuestro análisis con el caso escalar, que guiará el estudio del sistema  $N$ -dimensional. Más concretamente, para

el caso general utilizaremos técnicas de funciones tipo guía que nos permitirán reducir el planteo a un problema unidimensional. Para analizar el caso escalar tendremos en cuenta los resultados previos de Berezansky, Braverman e Idels [11] y los extendaremos a nuestro marco.

Más en general, trabajaremos con sistemas que provienen de sistemas de ecuaciones diferenciales abstractas de la forma:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (2.5)$$

donde  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  es continua y  $\tau > 0$  es el retardo. En el Capítulo 3, consideraremos como conjunto de valores iniciales el interior del cono  $C([- \tau, 0], [0, +\infty)^N)$ . Una condición inicial en  $t = 0$  para el sistema puede ser expresada como  $x_0 = \varphi$ , con  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$  una función continua donde, como es habitual, la notación  $x_t$  expresa la función en  $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^N)$  definida por  $x_t(s) := x(t + s)$ . Muchos de los resultados que obtendremos se pueden extender para ecuaciones más generales en las que  $\tau$  puede ser una función  $\tau = \tau(t, x(t))$  o que, como anticipamos, tienen más de un retardo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_k)), \quad k \geq 2. \quad (2.6)$$

Los ejemplos previos son casos de retardos discretos, a diferencia de las ecuaciones con retardos distribuidos, que contienen términos que suelen escribirse como una convolución,

$$\int_{t-\tau}^t \phi(t-s)x(s) ds = \int_0^\tau \phi(s)x(t-s) ds, \quad (2.7)$$

en donde  $\phi$  satisface  $\int_0^\tau \phi(s) ds = 1$ . Esta situación incluye el caso de retardo no acotado  $\tau = +\infty$  en el que  $x'(t)$  depende de toda la historia  $\{x(s) : s \leq t\}$ . Sin embargo, el tratamiento de problemas de esta clase suele ser más delicado, debido a la pérdida de compacidad que -como veremos- resulta crucial a la hora de aplicar la teoría topológica de grado.

Aquí se consideran únicamente retardos discretos independientes de  $t$  para estudiar la generalización de la ecuación de Nicholson. Cabe destacar que se consideran múltiples retardos para una misma población, teniendo en cuenta los diferentes tiempos de maduración reproductiva presentes en dicha población.

## 2.2.2 Introducción a los sistemas dinámicos

En esta sección se da un breve esbozo de la teoría de los sistemas dinámicos: sistemas continuos, discretos y ciertas propiedades que se utilizan a lo largo de la tesis. Esto se hace principalmente para fijar ideas y ver la relación que guarda la dinámica con las ecuaciones diferenciales. Las referencias a esta introducción son [1] y [19].

## Sistemas dinámicos y semi-dinámicos

Intuitivamente, un sistema dinámico se puede definir de la siguiente manera. Se compone de un espacio  $X$ , llamado espacio de fases, el cual puede ser interpretado como el conjunto de todos los estados posibles de algún sistema físico; a su vez, hay una “regla de evolución”, que describe la forma en cualquier estado asumido por nuestro sistema físico cambia con el tiempo.

Más precisamente, consideramos el caso de tiempo continuo y supongamos que nuestro sistema físico es autónomo. Formalmente, si  $\Phi(t, x)$  es el estado del sistema alcanzado después de un intervalo de tiempo de longitud  $t$  cuando se inicia en el estado  $x$  ( $t \geq 0$ ,  $x \in X$ ), entonces  $\Phi(s, \Phi(t, x))$  es el estado alcanzado después de un intervalo de tiempo  $s + t$  comenzando a partir de  $x$ , i.e.,

$$\Phi(s, \Phi(t, x)) = \Phi(s + t, x). \quad (2.8)$$

Por la definición de  $\Phi$  también tenemos

$$\Phi(0, x) = x. \quad (2.9)$$

En lo anterior, permitimos solamente que  $s \geq 0$  y  $t \geq 0$ . Este tipo de sistemas se llaman sistemas semi-dinámicos y son habituales cuando se trabaja con retardos, ya que, en general, las EDRs solo se resuelven “hacia adelante” en el tiempo.

En otras palabras, un sistema semi-dinámico es una función  $\Phi : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$  tal que (2.8) y (2.9) valen para todo  $s, t \geq 0$  y  $x \in X$ .

En general, los sistemas dinámicos propiamente dichos incluyen el “tiempo inverso”, es decir,  $\Phi^{-1}(t, x)$  está definida y la condición (2.8) se cumple también para los valores negativos de  $s$  y  $t$ . En ese caso, tenemos una función  $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  tal que (2.8) y (2.9) valen para todo  $s, t \in \mathbb{R}$  y  $x \in X$ .

Más precisamente, suele emplearse la siguiente notación: definimos para cada  $t \in \mathbb{R}$ , la transformación  $\Phi_t : X \rightarrow X$  dada por:

$$\Phi_t(x) = \Phi(t, x) \quad (x \in X).$$

Más precisamente,  $\Phi_t$  asigna a todos los estados el estado que se alcanza después de un intervalo de tiempo de longitud  $t$ . Usando esta notación, (2.8) y (2.9) se pueden reescribir como

$$\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}, \quad \Phi_0 = id_X \quad (s, t \in \mathbb{R}). \quad (2.10)$$

De ello se desprende que, para cada  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi_t \circ \Phi_{-t} = \Phi_{-t} \circ \Phi_t = \Phi_0 = id_X$ . En consecuencia,  $\Phi_t : X \rightarrow X$  es una biyección con inversa  $\Phi_{-t}$ .

Cabe aclarar que se dice flujo a  $\{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$  y semi-flujo a  $\{\Phi_t : t \geq 0\}$ .

## Sobre los sistemas dinámicos discretos

Vamos a explicar brevemente por qué el estudio de los sistemas dinámicos discretos puede ser útil. Primero mencionamos una razón metodológica. Hay sistemas físicos para los que es natural que un modelo tenga tiempo discreto: por ejemplo, debido al hecho de que las mediciones se pueden hacer solamente en momentos discretos  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ . Así que, en la práctica, no siempre se conoce la órbita completa en el espacio de fases, sino solo una secuencia discreta de sus puntos y de las propiedades de estos últimos se deducen conclusiones sobre la órbita completa.

Otra razón para la investigación de sistemas discretos es la importancia de las llamadas funciones de Poincaré o funciones de primer retorno. La idea es la siguiente: Consideramos un flujo continuo, es decir,  $\{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$  actuando continuamente en un espacio  $X$ . Sea  $Y \subset X$  un subconjunto y asumamos que  $Y$  es tal que cada punto  $y \in Y$  retorna a  $Y$  después de un intervalo de tiempo finito de longitud  $t_y > 0$ . Concretamente, si  $y \in Y$ , entonces  $\Phi(t_y, y) \in Y$ , y suponemos que  $t_y$  es el primer momento de retorno a  $Y$ , es decir,  $\Phi(t, y) \notin Y$  para  $0 < t < t_y$ . Ahora, escribimos  $f(y) := \Phi(t_y, y)$  con  $y \in Y$ . Entonces  $f$  es una función del conjunto  $Y$  en sí mismo, y el conjunto  $\{f^n(y) : n \geq 0\}$  contiene exactamente todas las intersecciones de la semi-órbita positiva  $\{\Phi(t, y) : t \geq 0, y \in Y\}$  con  $Y$ . Intuitivamente, es evidente que este conjunto de intersecciones puede revelar una serie de características del flujo continuo original, y a veces una elección apropiada del conjunto  $Y$  facilita el estudio de las funciones de primer retorno.

Para concluir, incluimos las definiciones formales:

- Un sistema semi-dinámico discreto es una función  $\Phi : \mathbb{N}_0 \times X \rightarrow X$  tal que  $\Phi(0, x) = x$ ,  $x \in X$  y  $\Phi(n, \Phi(m, x)) = \Phi(n + m, x)$ , para  $n, m \geq 0$ ,  $x \in X$ .
- Un sistema dinámico discreto es una función  $\Phi : \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$  tal que  $\Phi(0, x) = x$ ,  $x \in X$ , y  $\Phi(n, \Phi(m, x)) = \Phi(n + m, x)$ , para  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in X$ .

## Relación entre las EDOs y los sistemas dinámicos

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales autónomas

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{2.11}$$

donde  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \in \mathbb{R}^N$ ,  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$  es una función continua, lo suficientemente suave como para asegurar la unicidad de las soluciones a los problemas de valor inicial, y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado con frontera suave. Es sabido que si las soluciones están definidas de forma única sobre  $\mathbb{R}$  entonces el flujo



asociado al sistema  $\phi : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ , dado por

$$\phi_t(x_0) = x(t) \quad (2.12)$$

induce un sistema dinámico.

Ilustremos el cambio de punto de vista entre las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos considerando el sistema anteriormente mencionado.

La solución asociada al es una curva  $\nu : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que a medida que el tiempo  $t$  varía,  $\nu(t)$  se mueve de acuerdo con la ecuación (2.11) y con  $x_0 = \nu(0)$ , de modo que  $x_0$  se asocia con el tiempo inicial  $t = 0$ . Por comodidad, escribimos  $\nu(t, x_0)$  para referirnos a  $\nu(t)$  con punto inicial  $x_0$ .

Como la ecuación es autónoma, las soluciones satisfacen la siguiente identidad:

$$\nu(t, \nu(s, x_0)) = \nu(t + s, x_0). \quad (2.13)$$

Supongamos que resolvemos la ecuación (2.11) a partir de  $x_0$ , y después de  $s$  unidades de tiempo, llegamos a  $q = \nu(s, x_0)$ . Si volvemos a resolver la ecuación, ahora a partir de  $q$ , entonces la identidad (2.13) dice que seguimos avanzando a lo largo de la curva anterior a la misma velocidad.

Cuando queremos enfatizar el papel del punto inicial, la solución que comienza en  $x_0$  también se llama la órbita de  $x_0$ . Se desprende de la unicidad de las soluciones que dos curvas solución diferentes no se intersecan; de esta forma, el espacio de fases queda dividido, foliado por estas curvas. Si cambiamos el punto  $x_0$ , nos puede pasar que cambiemos de una curva a otra, pero el movimiento dado por la ecuación original es en una de estas curvas.

El cambio de punto de vista hacia los sistemas dinámicos se produce cuando invertimos el énfasis entre  $t$  y  $x_0$ . En lo anterior, pensábamos el valor  $x_0$  como un parámetro fijo y  $t$  como variable de tiempo a lo largo de la curva solución. En su lugar, ahora consideramos el punto inicial como nuestra variable y el tiempo como un parámetro fijo. Para cada valor fijo  $t$ , definimos la función  $\phi_t(x) = \nu(t, x)$ . Para cada punto  $x$  nos preguntamos hacia dónde se ha movido en  $t$  unidades de tiempo. La función  $\phi_t$  es el flujo del sistema y la identidad se puede reescribir:

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}, \text{ para todo } t, s \geq 0. \quad (2.14)$$

En particular, observamos que el mapa  $\phi_0$  es la aplicación identidad.

### 2.2.3 Persistencia en ecuaciones diferenciales con retardo

Este trabajo está motivado por los resultados sobre la persistencia que tienen una importancia significativa en los modelos biológicos, véase por ejemplo [11], [20], [45], [46], [50].

Para introducir la noción de persistencia, seguimos el enfoque de Smith [48]. Sea  $X$  un espacio métrico y  $\rho(x) : X \rightarrow [0, +\infty)$  una función continua. Recordemos que un sistema semi-dinámico es una función continua  $\Phi : [0, +\infty) \times X \rightarrow X$  que cumple con las siguientes propiedades:

1.  $\Phi(0, x) = x \quad \forall x \in X$ ;
2.  $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x) \quad \forall x \in X, \forall s, t \geq 0$ .

Diremos que el sistema es:

- *débilmente  $\rho$ -persistente* si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

- *fuertemente  $\rho$ -persistente* si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

- *uniformemente  $\rho$ -persistente* si existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \rho(\Phi(t, x)) > \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

En este trabajo utilizamos la siguiente definición de persistencia. Consideremos una vez más el sistema con retardo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \tag{2.15}$$

con  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$  condición inicial positiva.

Diremos que el sistema es:

- *débilmente persistente* si

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > 0, \quad \forall \varphi \neq 0.$$

- *fuertemente persistente* si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > 0, \quad \forall \varphi \neq 0.$$

- *uniformemente (fuertemente) persistente* si existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > \varepsilon, \quad \forall \varphi \neq 0.$$

También diremos, de manera equivalente, que *las soluciones del sistema* son persistentes en vez de referirnos al sistema.

Cabe aclarar que en la literatura existen definiciones de persistencia más generales.

Los primeros resultados en este tema pertenecen a Butler, Freedman and Waltman [15], quienes demostraron que si  $X$  es un espacio métrico localmente compacto y el flujo verifica ciertas condiciones específicas, la persistencia uniforme es equivalente a formas más débiles de persistencia.

Con hipótesis similares, Butler and Waltman [16] obtuvieron una condición necesaria y suficiente para que un sistema dinámico sea uniformemente persistente. En el trabajo de Fonda [26] se puede encontrar una condición diferente, válida para un sistema semi-dinámico. En términos precisos, el sistema es uniforme persistente si y solo si existe  $U \subset X$  un entorno abierto de 0 y  $H : X \rightarrow (0, +\infty)$  una función continua tal que:

1.  $H(x) = 0 \iff x = 0$ .
2.  $\forall x \in U \setminus \{0\} \exists t_x > 0 : H(\Phi(t_x, x)) > H(x)$ .

Cabe resaltar que el estudio de persistencia en la ecuación de Nicholson y sus extensiones han sido estudiadas por diferentes autores, por ejemplo [10, 17, 21, 23, 37, 42, 48] y sus referencias. En [10] se estudian modelos abstractos que incluyen ecuaciones de Nicholson y otro modelo célebre debido a Mackey y Glass. Específicamente, se estudian ecuaciones escalares de la forma

$$x'(t) = \sum_{k=1}^m f_k(t, x(h_1(t)), \dots, x(h_l(t))) - g(t, x(t)),$$

con retardos más generales expresados en las funciones medibles  $h_j(t) = t - \tau_j(t)$ . Entre los resultados allí obtenidos, el Teorema 5.2 (ver [10]) brinda una condición suficiente para la persistencia uniforme, más precisamente, que las funciones  $f_k$  sean estrictamente crecientes en  $u_1, \dots, u_l$  y valga

$$\liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k=1}^m f_k(t, u, \dots, u)}{g(t, u)} > 1$$

uniformemente en  $t$ . Como se verá, este resultado se compara con los obtenidos en esta tesis.

En el artículo [42], Obaya y Sanz estudiaron la persistencia en el caso casi periódico de una ecuación general de tipo Nicholson:

$$X'(t) = -M(t)X(t) + D(t)X(t) + B(t, X(t - \tau)) \quad \text{si } t \geq 0. \quad (2.16)$$

En este marco,  $M(t)$  es una matriz diagonal de funciones continuas  $N \times N$  correspondiente a la tasa de mortalidad variable en el tiempo,  $D(t)$  es una matriz de funciones continuas  $N \times N$  que corresponde a la dispersión del modelo que varía en el tiempo, y la función  $B : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  es la tasa de natalidad. Sus resultados se aplican a una versión casi periódica de (2.16), que es un sistema localmente cooperativo, y muestran que la persistencia es equivalente a la persistencia de una linealización del sistema alrededor de la solución nula.

Asimismo, destacamos el trabajo de Faria, Obaya y Sanz [22], que extiende los resultados anteriores, aplicando las propiedades del sistema de EDOs lineales cooperativos  $X'(t) = [M(t) - D(t)]X(t)$ , y asumiendo condiciones para garantizar la estabilidad global exponencial. Finalmente, se aplican técnicas de comparación a un sistema cooperativo auxiliar para obtener, entre otros resultados, condiciones suficientes para la persistencia del sistema. En [21], Faria estudió varios modelos de población con retardos continuos o distribuidos. Para sistemas no monótonos que incluyen sistemas tipo Nicholson, extendió algunos de los resultados de [22] y demostró, además la existencia de al menos una solución periódica mediante el teorema del punto fijo de Schauder (ver Sección 2.3.2, Teorema 4). La prueba se basa en dos propiedades dinámicas cruciales del sistema: la disipación y la persistencia uniforme.

La forma general de tales sistemas es

$$x_i(t) = -d_i(t)x_i(t) + \sum_{j \neq i} a_{ij}(t)x_j(t) + M_i(t, x_t),$$

donde cada  $M_i$  se expresa como

$$M_i(t, x_t) := \sum_{k=1}^m \beta_{ik}(t)h_{ik}(t, x(t - \tau_{ik}(t))),$$

o bien con retardos distribuidos. Cabe mencionar que el trabajo [21] ha sido una motivación central para la presente tesis donde, como se verá, se reemplazan algunos de los términos lineales por otros más generales.

## 2.2.4 Soluciones periódicas

El estudio de las órbitas periódicas de un sistema de EDO es un problema extensamente estudiado y de gran interés en el marco de los sistemas dinámicos. Un antecedente notable en la aplicación de métodos topológicos es, sin duda, el de Poincaré

[44], quien desarrolló tales técnicas para el estudio de sistemas de la mecánica celeste. Entre los métodos surgidos a fines del siglo XIX se destaca la llamada precisamente aplicación de Poincaré, que consiste en buscar puntos fijos del flujo de un sistema evaluado al cabo de un período. Para encontrar tales puntos, se puede recurrir a distintos teoremas de punto fijo o, más en general, al grado de Brouwer. Para el caso retardado, como el espacio de valores iniciales es infinito, no se puede aplicar dicho grado y utilizaremos, en cambio, las técnicas del grado de Leray-Schauder.

Comentamos brevemente cómo se utiliza el operador definido por Poincaré en el contexto de ecuaciones ordinarias.

## La aplicación de Poincaré

Por simplicidad, consideremos el problema periódico escalar

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u(T). \quad (2.17)$$

La idea consiste en definir  $x(t)$  como la solución de la ecuación con dato inicial  $u(0) = u_0$  y luego definir  $P(u_0) := u(T)$ . Asumiendo que  $f$  es continua y localmente Lipschitz en la segunda variable, sabemos que la aplicación  $P$  (por Poincaré), tiene dominio abierto y resulta continua. Por otra parte, como el problema es de primer orden, las trayectorias no se cruzan, debido a la unicidad en el problema de valores iniciales. Esto implica, además, que el dominio de  $P$  es un intervalo: si las soluciones correspondiente a dos valores iniciales  $u_1 < u_2$  están definidas hasta  $t = T$ , entonces lo mismo ocurre para cualquier valor inicial  $u_0$  en el intervalo  $(u_1, u_2)$ .

Para una lectura más detallada, ver por ejemplo [2].

Es claro que, para resolver el problema (2.17), alcanza con encontrar un valor inicial  $u_0$  tal que  $P(u_0) = u_0$ . De esta forma, se puede aplicar la versión unidimensional del teorema de punto fijo de Brouwer:

**Teorema 1 (Brouwer)** *Sea  $P : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $P([a, b]) \subset [a, b]$ , entonces  $P$  tiene al menos un punto fijo.*

En general, para un sistema de ecuaciones ordinarias la aplicación de Poincaré se define en un conjunto abierto  $A := \text{dom}(P) \subset \mathbb{R}^n$ ; en tal caso, la versión general del teorema de Brouwer permite hallar puntos fijos, en caso de que exista un conjunto  $C \subset A$  homeomorfo a la bola cerrada unitaria que se mantiene invariante, es decir, tal que  $P(C) \subset C$ . Un procedimiento similar se puede establecer para sistemas de ecuaciones con retardo aunque se requieren algunas condiciones adicionales ya que, como se verá, la extensión usual del teorema de Brouwer a dimensión infinita requiere que el operador involucrado sea compacto.

## 2.3 Resultados previos

En esta sección definimos las funciones guía que se utilizan en todo este trabajo, comentamos algunos teoremas de punto fijo relevantes en el análisis no lineal, para luego introducir el grado de Brouwer y el de Leray-Schauder. A continuación, presentamos el método de Lyapunov-Schmidt y el teorema de continuación que emplearemos en el capítulo referido a la existencia de soluciones periódicas.

### 2.3.1 Funciones tipo guía

La noción de *funciones guía* fue presentada inicialmente por Krasnoselskii [33]. La idea era estudiar la existencia de soluciones periódicas en el contexto de ODEs y para ciertas ecuaciones diferenciales con retardo. Más adelante, Mawhin [39] extendió este concepto para el caso general de EDRs.

En este trabajo, diremos que  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow (0, +\infty)$  es una *función tipo guía* si es  $C^1$  y si

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) = 0.$$

El ejemplo obvio es  $V(x) := |x|^2$ , donde  $|\cdot|$  denota la norma euclidiana de  $\mathbb{R}^N$ , aunque se podrían usar muchas otras elecciones de  $V$  en aplicaciones.

A diferencia de las funciones guía introducidas por Krasnoselskii [33], nuestras condiciones involucran conjuntos de la forma  $\{V(x(t)) < \rho\}$  en lugar de  $\{|x(t)| \geq \rho\}$ , para cierto  $\rho > 0$ .

A su vez, se puede comparar con las funciones de Lyapunov, la diferencia es que requeriremos que  $\dot{V} > 0$  para  $x$  en un entorno del origen donde, como es habitual,

$$\dot{V}(t) = \left. \frac{d(V \circ x)}{dt} \right|_t.$$

### 2.3.2 Teoremas de punto fijo

En esta sección, se presenta una enumeración breve de los teoremas de punto fijo más importantes, los cuales son fundamentales dentro los métodos topológicos en el contexto de problemas no lineales.

La demostración clásica de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial ordinaria con valores iniciales se basa en el método de aproximaciones sucesivas de Picard. En 1917, Banach [9] prueba que el método de Picard es de hecho un caso particular de un resultado mucho más general. Primero recordamos la siguiente definición:

Sean  $X, Y$  espacios métricos, se dice que  $T : X \rightarrow Y$  es una contracción si existe  $\alpha < 1$  tal que:

$$\forall x, y \in X, \quad d_Y(T(x), T(y)) \leq \alpha d_X(x, y).$$

Presentamos entonces el teorema de punto fijo de Banach [9]:

**Teorema 2 (Banach)** *Sea  $X$  un espacio métrico completo y sea  $T : X \rightarrow X$  una contracción. Entonces,  $T$  tiene un único punto fijo  $\hat{x}$ . Más aún,  $\hat{x}$  puede ser calculado de manera iterativa a partir de la sucesión  $x_{n+1} = T(x_n)$ , empezando por cualquier  $x_0 \in X$ .*

Este célebre resultado tiene gran cantidad de aplicaciones en distintos campos. En el análisis no lineal ha sido empleado para probar diversos resultados de existencia y unicidad. Sin embargo, las condiciones que se requieren para su aplicación suelen ser muy restrictivas y, en muchos casos, los operadores de punto fijo asociados a un problema no resultan contractivos. Por tal motivo, expondremos a continuación algunas otras herramientas útiles para encontrar soluciones de ciertas ecuaciones funcionales (aunque no necesariamente únicas).

Otro teorema muy conocido e importante de punto fijo se lo debemos a Brouwer [13]. La formulación usual es para la bola unitaria cerrada  $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ , pero el resultado sigue valiendo si se reemplaza  $\overline{B}$  por cualquier conjunto homeomorfo: por ejemplo, cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  que sea convexo y compacto (vale decir, cerrado y acotado).

**Teorema 3 (Brouwer)** *Sea  $T : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  continua, entonces  $T$  tiene al menos un punto fijo.*

En 1943, Kakutani [32] probó que este resultado deja de ser cierto para espacios de dimensión infinita.

De hecho, el operador  $T$  debe cumplir ciertas hipótesis adicionales. Esto es lo que ocurre en el último teorema de punto fijo de esta sección, que extiende el anterior y tiene importantes aplicaciones en problemas no lineales. En su forma general, fue enunciado y demostrado por Leray y Schauder en 1934 [47]; damos aquí un caso particular, debido a Schauder:

**Teorema 4 (Schauder)** *Sea  $X$  un espacio normado, y sea  $C \subset X$  un conjunto convexo, cerrado y acotado. Supongamos que  $T : C \rightarrow C$  es una función continua tal que  $\overline{T(C)}$  es compacto. Entonces  $T$  tiene al menos un punto fijo.*

Las pruebas de estos resultados se pueden encontrar en [2].

### 2.3.3 Grado topológico

En la sección previa se han enunciado teoremas fundamentales para probar la existencia de puntos fijos o ceros de ciertas funciones continuas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  o de dimensión infinita. El grado topológico originalmente fue introducido como una herramienta más fina, que en algún sentido cuenta dichos ceros y permite, entre otras cosas, dar resultados de multiplicidad.

Aquí se presentan dos grados, el más conocido que es el grado de Brouwer, que se define en espacios de dimensión finita y, luego, introducimos el grado de Leray-Schauder que extiende el grado de Brouwer para ciertos operadores definidos en espacios de dimensión infinita.

#### El grado de Brouwer

Sea  $\Omega$  un conjunto abierto y acotado de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  tal que  $f$  no se anula en el borde, es decir en  $\partial\Omega$ . Se dice que  $0$  es un valor regular de  $f$  si la función diferencial  $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es sobreyectiva para todo  $x \in f^{-1}(0)$ . Cabe aclarar que, en este caso, el teorema de la dimensión muestra que esta condición equivale a decir que  $Df(x)$  es biyectiva. Bajo tales hipótesis, se define el grado de Brouwer de  $f$  de la siguiente forma

$$\deg_B(f, \Omega, 0) := \sum_{x \in f^{-1}(0) \cap \Omega} \text{sgn}(J_f(x)),$$

donde  $J_f$  es el Jacobiano de  $f$ , es decir  $J_f(x) = \det Df(x)$ . Esta definición se puede extender de una manera apropiada para todas las funciones  $f$  continuas, con la única condición de que  $f \neq 0$  en  $\partial\Omega$ .

Enunciamos las propiedades más usuales y que emplearemos en la tesis. Las pruebas de estos resultados se puede leer en [2].

#### 1. Normalización:

$$\deg_B(I, \Omega, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in \Omega; \\ 0, & \text{si } 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

2. **Solución:** Si  $\deg_B(f, \Omega, 0) \neq 0$  entonces  $f$  tiene al menos un cero en  $\Omega$ .

3. **Aditividad-escisión:** Si  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$  son abiertos disjuntos y  $f$  no se anula en  $\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , entonces

$$\deg_B(f, \Omega, 0) = \deg_B(f, \Omega_1, 0) + \deg_B(f, \Omega_2, 0).$$



4. **Invariancia por homotopías:** Si  $h : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$  es continua tal que  $h_\lambda := K(\cdot, \lambda)$  no se anula en  $\partial\Omega$  para  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$\deg_B(f, \Omega, 0) \text{ es constante.}$$

Cabe aclarar el grado de Brouwer no es privativo de  $\mathbb{R}^n$  sino que se puede definir en cualquier espacio de dimensión finita  $V$ , conjugando con cualquier isomorfismo  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

## El grado de Leray-Schauder

Sea  $X$  es un espacio de Banach y sea  $\Omega \subset X$  un abierto acotado que contiene al 0. El ejemplo de Kakutani muestra que no es posible definir un grado topológico general para funciones continuas, pero sí para las llamadas *perturbaciones compactas de la identidad*, vale decir, funciones de la forma  $F = I - K$ , donde  $I$  es la función identidad en  $X$  y  $K : \bar{\Omega} \rightarrow X$  un operador compacto. Hay que pedir, además, que  $F$  no se anule en el borde del dominio, vale decir, que  $K$  no tenga puntos fijos en  $\partial\Omega$ . Como  $K$  es compacto, podemos fijar  $\varepsilon < \text{dist}(0, F(\partial\Omega))$  y tomar una  $\varepsilon$ -aproximación  $K_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow V_\varepsilon$  de  $K$  con  $\dim V_\varepsilon < \infty$ . Esto no es trivial, pero Schauder mostró que siempre se puede hacer.

Luego, se define el grado de Leray-Schauder

$$\deg_{LS}(F, \Omega, 0) := \deg_B((I - K_\varepsilon)|_{\bar{\Omega} \cap V_\varepsilon}, \Omega \cap V_\varepsilon, 0).$$

Veamos que lo anterior está bien definido. Para ello, se emplea el siguiente lema [2]:

**Lema 1** *Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua tal que  $\text{Im}(g) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^k$  para cierto  $k < n$ . Supongamos que para cierto abierto acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  vale  $g(x) \neq x$  para todo  $x \in \partial\Omega$ . Entonces*

$$\deg_B(I - g, \Omega, 0) = \deg_B((I - g)|_{\bar{\Omega} \cap \mathbb{R}^k}, \Omega \cap \mathbb{R}^k, 0).$$

**Lema 2** *En la situación anterior,  $\deg_{LS}(F, \Omega, 0)$  no depende de  $K_\varepsilon$ .*

*Demostración.* Sea  $\hat{K}_\varepsilon : \bar{\Omega} \rightarrow \hat{V}_\varepsilon$  otra  $\varepsilon$ -aproximación de rango finito y consideremos el subespacio  $V := V_\varepsilon + \hat{V}_\varepsilon$ . Si  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo tal que  $\phi(V_\varepsilon) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \simeq \mathbb{R}^k$ , entonces por el lema se deduce para  $f = (I - K_\varepsilon)|_V$  que

$$\begin{aligned} \deg_B(f, \Omega \cap V, 0) &= \deg_B(\phi f \phi^{-1}, \phi(\Omega \cap V), 0) \\ &= \deg_B(\phi f \phi^{-1}|_{\phi(\Omega \cap V) \cap \mathbb{R}^k}, \phi(\Omega \cap V) \cap \mathbb{R}^k, 0) = \deg_B(f|_{\bar{\Omega} \cap V_\varepsilon}, \Omega \cap V_\varepsilon, 0). \end{aligned}$$

De la misma forma, se prueba que

$$\deg_B(\hat{f}, \Omega \cap V, 0) = \deg_B(\hat{f}|_{\overline{\Omega \cap \hat{V}_\varepsilon}}, \Omega \cap \hat{V}_\varepsilon, 0),$$

donde  $\hat{f} = (I - \hat{K}_\varepsilon)|_V$ . En consecuencia, la buena definición queda demostrada, porque la homotopía

$$\lambda f + (1 - \lambda)\hat{f}$$

no se anula en el borde de  $\Omega \cap V$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \lambda f(x) + (1 - \lambda)\hat{f}(x) &= x - [\lambda K_\varepsilon(x) + (1 - \lambda)\hat{K}_\varepsilon(x)] \\ &= x - K(x) - [\lambda(K_\varepsilon(x) - K(x)) + (1 - \lambda)(\hat{K}_\varepsilon(x) - K(x))], \end{aligned}$$

de donde se deduce, para  $x \in \partial\Omega$ , que

$$\|\lambda f(x) + (1 - \lambda)\hat{f}(x)\| \geq \|x - K(x)\| - \varepsilon > 0.$$

□

A partir de la definición, no es difícil comprobar que se cumplen todas las propiedades esperadas. Las pruebas de estos resultados se puede leer en [2].

### 1. Normalización:

$$\deg_{LS}(I, \Omega, 0) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \in \Omega; \\ 0, & \text{si } 0 \notin \Omega. \end{cases}$$

2. **Solución:** Si  $\deg_{LS}(I - K, \Omega, 0) \neq 0$  entonces  $K$  tiene al menos un punto fijo en  $\Omega$ .

3. **Aditividad-escisión:** Si  $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$  son abiertos disjuntos y  $K$  no tiene puntos fijos en  $\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , entonces

$$\deg_{LS}(I - K, \Omega, 0) = \deg_{LS}(I - K, \Omega_1, 0) + \deg_{LS}(I - K, \Omega_2, 0).$$

4. **Invariancia por homotopías:** Si  $K : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$  es compacto y el operador  $K_\lambda := K(\cdot, \lambda)$  no tiene puntos fijos en  $\partial\Omega$  para  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces  $\deg_{LS}(I - K_\lambda, \Omega, 0)$  es constante.

En lo sucesivo, haremos uso de ambos grados, el de Brouwer y de Leray-Schauder. Emplearemos en general la notación ‘deg’ sin aclarar de cuál se trata, salvo en casos de ambigüedad.

Cabe notar que esta herramienta permite resolver problemas que se escriben en la forma  $L(u) = N(u)$ , donde  $L$  tiene inversa compacta. Dichos casos se conocen

en la literatura como *no resonantes*; sin embargo, esto no se verifica para el **problema** periódico cuando  $L(x) := x'$ , ya que el núcleo del operador  $L$  (definido en un subespacio denso de  $C_T$ ) es no trivial: específicamente, se trata del subespacio de funciones constantes. En la próxima sección veremos una forma típica de sortear esta dificultad.

### 2.3.4 Reducción de Lyapunov-Schmidt

En esta sección vamos ver un método que permite reducir el estudio de un problema de la forma  $L(u) = N(u)$  a otro en dimensión finita. El plan es proyectar sobre el núcleo de  $L$ , lo que da lugar a la llamada *descomposición de Lyapunov-Schmidt*.

Para fijar ideas, vamos a ver el procedimiento para el problema periódico

$$u'(t) = f(t, u(t)),$$

donde  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua y  $T$ -periódica en  $t$ . En este contexto, podemos escribir el problema en la forma  $L(u) = N(u)$  donde los operadores  $L : C_T^1 \subset C_T \rightarrow C_T$  y  $N : C_T \rightarrow C_T$  se definen como

$$L(u(t)) = u'(t), \quad Nu(t) := f(t, u(t)).$$

Es inmediato verificar que

$$\ker(L) = \{\varphi \in C_T^1 : \varphi \text{ es constante}\} \simeq \mathbb{R}^n,$$

$$\text{Im}(L) = \{\varphi \in C_T : \bar{\varphi} = 0\} =: \tilde{C}_T.$$

En estas condiciones, se puede definir una inversa a derecha compacta  $K : \tilde{C}_T \rightarrow C_T$  y reescribir el problema en la forma

$$\overline{N(u)} = 0, \quad u = \bar{u} + K[N(u) - \overline{N(u)}],$$

que en realidad es lo mismo que

$$u = \bar{u} + \overline{N(u)} + K[N(u) - \overline{N(u)}].$$

Agregando un parámetro  $\lambda \in [0, 1]$ , queda definida la homotopía

$$F(u, \lambda) := u - \left[ \bar{u} + \overline{N(u)} + \lambda K[N(u) - \overline{N(u)}] \right],$$

donde el operador que aparece entre corchetes es compacto.

De esta forma, si para cierto abierto acotado  $\Omega \subset C_T$  vale que  $F_\lambda := F(\cdot, \lambda) \neq 0$  sobre  $\partial\Omega$ , entonces

$$\deg_{LS}(F_1, \Omega, 0) = \deg_{LS}(F_0, \Omega, 0).$$

Luego, cuando este último grado es distinto de 0 podemos asegurar que  $F_1$  tiene algún cero en  $\Omega$ , es decir, una solución del problema original. La gracia ahora es notar que  $F_0$  es una perturbación compacta de la identidad pero, para calcular su grado, no hace falta molestarse en buscar la aproximación de rango finito, ya que el operador  $u \mapsto \bar{u} + \overline{N(u)}$  cae directamente en  $\ker(L) \simeq \mathbb{R}^n$ . De acuerdo con la definición, vale entonces

$$\deg_{LS}(F_0, \Omega, 0) = \deg_B(F_0|_{\overline{\Omega} \cap \ker(L)}, \Omega \cap \ker(L), 0).$$

Más aún, cuando  $u$  constante, resulta  $\bar{u} = u$  y entonces  $F_0(u) = -\overline{N(u)}$ : de esta forma (omitiendo el isomorfismo  $\ker(L) \simeq \mathbb{R}^n$ ), se tiene que

$$\deg_{LS}(F_0, \Omega, 0) = \deg_B(\phi, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0),$$

donde

$$\phi(u) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u) dt. \quad (2.18)$$

Una última observación -que comprobaremos en el Capítulo 5- es el hecho de que, para  $\lambda > 0$ , la ecuación  $F(u, \lambda) = 0$  equivale a decir que  $u \in C_T^1$  satisface

$$u'(t) = \lambda f(t, u(t)).$$

En resumen, hemos probado el siguiente teorema de continuación [28] que será adaptado convenientemente en el capítulo correspondiente a la existencia de soluciones periódicas

**Teorema 5** *Sea  $f$  continua y  $T$ -periódica en  $t$  y sea  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por (2.18). Supongamos que existe un abierto acotado  $\Omega \subset C_T$  tal que*

1.  $u'(t) \neq \lambda f(t, u(t))$  para  $u \in \partial\Omega$  y  $\lambda \in (0, 1)$ .
2.  $\phi(u) \neq 0$  para  $u \in \partial\Omega \cap \mathbb{R}^n$ .
3.  $\deg_B(\phi, \Omega \cap \mathbb{R}^n, 0) \neq 0$ .

*Entonces el problema  $u'(t) = f(t, u(t))$  tiene al menos una solución  $u \in \overline{\Omega}$ .*

Cabe mencionar, que en la primera condición alcanza con tomar  $\lambda \in (0, 1)$  ya que, si no se cumple para  $\lambda = 1$ , entonces existe una solución  $u \in \partial\Omega$ . La ventaja de escribirlo de esta forma consiste en que, en ocasiones, para encontrar cotas estrictas es más práctico suponer  $\lambda < 1$ .

### 2.3.5 Otros resultados topológicos

Vamos a enunciar ahora un resultado conocido que, según se puede probar, es equivalente al teorema de Brouwer. Si bien no lo emplearemos de manera directa, describe una situación con la que nos encontraremos en nuestro estudio de sistemas tipo Nicholson. La idea intuitiva es sencilla, pues no consiste en otra cosa que en una generalización del teorema de Bolzano para dimensiones mayores: dada una función continua definida sobre un intervalo cerrado  $I \subset \mathbb{R}^n$  cuyas coordenadas cambian de signo en las correspondientes caras de  $\partial I$ , existe algún punto  $x \in I$  en el que se anulan todas las coordenadas a la vez:

**Teorema 6 (Poincaré-Miranda)** *Sea  $f : [-1, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua tal que*

$$x_j f_j(x) \geq 0 \text{ si } x_j = \pm 1$$

*para todo  $j$ . Entonces  $f$  tiene algún cero.*

La demostración puede ser encontrada en [35].

Por otra parte, para probar la existencia de soluciones periódicas mediante grado topológico, es habitual emplear la invariancia homotópica. Como vimos, esta propiedad requiere que la homotopía no se anule en el borde del dominio. En muchas aplicaciones, dicho dominio consiste en el conjunto de aquellas curvas periódicas que se mantienen dentro de cierta región acotada de  $\mathbb{R}^n$ , cuya frontera es una variedad compacta. En tal caso, los elementos del borde resultan ser tangentes a dicha variedad y, en consecuencia, perpendiculares a la normal exterior  $\nu$ . En el Capítulo 5 haremos uso de esta propiedad, con el objetivo de definir una homotopía precisamente con dicha normal. El teorema que sigue es un celebrado resultado de la topología diferencial que nos será de utilidad en el cálculo del grado topológico de  $\nu$ , que se relaciona directamente con un conocido invariante de la topología llamado *característica de Euler*. La definición original es para poliedros y surge de la *fórmula de Euler-Descartes*, pero se puede extender de manera sencilla empleando -por ejemplo- herramientas del álgebra homológica.

La prueba del teorema de Hopf se puede leer en [40].

**Teorema 7 (Hopf Theorem)** *Si  $\nu$  es la normal exterior de una variedad orientada y compacta  $M$ , entonces el grado de  $\nu$  es igual a  $\chi(M)$ , la característica de Euler de  $M$ .*



# Chapter 3

## Persistencia en sistemas generales

En este capítulo estudiamos condiciones para garantizar persistencia en sistemas semi-dinámicos. Para ello, recordemos que trabajamos con sistemas que provienen de ecuaciones diferenciales con retardo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

donde  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  es continua y  $\tau > 0$  es el retardo. A lo largo de este capítulo, consideraremos como conjunto de valores iniciales el interior del cono  $C([- \tau, 0], [0, +\infty)^N)$ . También recordemos que una condición inicial en  $t = 0$  para el sistema puede ser expresada de la siguiente manera

$$x_0 = \varphi, \quad (3.2)$$

con  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$  una función continua y  $x_t \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^N)$ , definida por  $x_t(s) = x(t + s)$ .

En este contexto, el sistema semi-dinámico está dado por las soluciones del sistema de EDRs. Más precisamente, el semi-flujo asociado es

$$\Phi : \text{dom}(\Phi) \subset [0, +\infty) \times C([- \tau, 0], (0, +\infty)^N) \rightarrow C([- \tau, 0], (0, +\infty)^N)$$

dado por

$$\Phi(t, \varphi) = x_t.$$

Dado que el espacio de valores iniciales es de dimensión infinita, la propiedad standard de compacidad local no se cumple: en efecto, ningún abierto no vacío del espacio de fases tiene clausura compacta. Consideraremos una función guía y propondremos condiciones adecuadas para compensar la falta de compacidad con el fin de extender algunos resultados válidos para el caso sin retardo.

Nuestro objetivo es encontrar condiciones suficientes para que las soluciones del sistemas se mantengan alejadas del origen. En otras palabras, buscamos condiciones

que garanticen la persistencia del sistema. Para comenzar, proponemos responder la pregunta: ¿En qué situación el origen es un repulsor uniforme de las soluciones? Es decir, nos interesa concluir bajo qué condiciones podemos asegurar la persistencia uniforme del sistema.

A partir de esa pregunta inicial, dividimos este capítulo en dos partes. Estudiamos en principio las condiciones para obtener resultados de persistencia débil y fuerte. A partir de este primer análisis, estudiamos condiciones suficientes para probar que el sistema es uniformemente persistente.

### 3.1 Persistencia débil y fuerte

Como mencionamos anteriormente, estudiamos persistencia en el interior del cono positivo de  $C([-τ, 0], [0, +∞)^N)$ . Gracias a la siguiente condición, podemos garantizar que el interior del cono positivo es invariante por el semi-flujo. Esto significa que las soluciones con datos iniciales positivos se mantienen positivas a través del tiempo. Más precisamente, a lo largo de este análisis supondremos que:

**(H1)**  $f_j(t, x, y) > 0$  para todo par de valores  $x, y$  tal que  $x_j = 0$  e  $y \neq 0$ .

En efecto, si vale la hipótesis y suponemos que  $\min_k x_k(t_0) = x_j(t_0) = 0$  por primera vez en algún  $t_0 > 0$ , entonces se obtiene una contradicción ya que

$$0 \geq x'_j(t_0) = f_j(t_0, x(t_0), x(t_0 - \tau)) > 0.$$

Recordemos que, a partir de lo detallado en los preliminares, la ecuación escalar de Nicholson con  $p \leq d$  muestra que **(H1)** por sí sola no basta para garantizar la persistencia débil de soluciones con datos iniciales positivos. En efecto, en ese caso las soluciones con dato inicial positivo no se anulan y, sin embargo, el equilibrio nulo es un atractor global para las trayectorias positivas.

Con este modelo en mente, recordamos la función tipo guía que fue introducida en los preliminares (ver Sección 2.3.1). Consideramos  $V : (0, +∞)^N \rightarrow (0, +∞)$  una función  $C^1$  tal que

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) = 0.$$

En lo que sigue, escribimos  $v(t) := V(x(t))$  y  $v'(t) := \langle \nabla V(x), f(t, x, x(t - \tau)) \rangle$ .

Una manera sencilla de evitar el efecto del retardo en el estudio de la persistencia consiste en suponer que 0 es un repulsor uniforme para el campo  $f(\cdot, \cdot, y)$  cuando  $y$  está cerca del origen:



**Proposición 1** *Asumamos que (H1) se cumple y además vale*

**(H2)** *existen  $t_0, r_0 > 0$  tales que*

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > 0 \quad \text{para } t > t_0 \text{ y } V(x), V(y) < r_0.$$

*Entonces el sistema es débilmente persistente.*

*Demostración.* En primer lugar notemos que gracias a **(H1)** sabemos que todas las trayectorias con condiciones iniciales positivas se mantienen positivas. Tomemos  $x(t)$  una solución positiva tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0.$$

Dado que  $x(t) \neq 0$  para todo  $t$ , se deduce que  $v$  está bien definida y tiende a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Fijemos  $t_n \in [0, n]$  tal que

$$v(t_n) = \min_{t \in [0, n]} v(t).$$

Como  $v(t) \rightarrow 0$ , a partir de cierto  $n$  vale  $v(t_n) < v(0)$  y, en consecuencia,  $v'(t_n) \leq 0$ . Además, es claro que

$$v(t_n) \rightarrow 0 \quad \text{y, como } \min_{t \in [0, M]} v(t) > 0 \quad \forall M \geq 0, \quad \text{se deduce que } t_n \rightarrow +\infty.$$

En consecuencia, agrandando  $n$  si hace falta, podemos asumir que  $t_n > t_0$ ,

$$v(t_n - \tau) \leq v(t_n) < r_0,$$

de donde obtenemos

$$0 \geq v'(t_n) = \langle \nabla V(x(t_n)), f(t_n, x(t_n), x(t_n - \tau)) \rangle,$$

lo cual es una contradicción. □

**Observación 1** • *Notemos que (H2) por sí sola no implica necesariamente que las soluciones sigan siendo no negativas. Por ejemplo, para  $f(x, y) = x - y + r_0$  y  $V(x) = x$  vale  $f(x, y) > 0$  si  $0 < x, y < r_0$ , aunque es fácil encontrar soluciones con condición inicial positiva que se vuelven negativas.*

- *Una suposición estándar en los modelos de población es que  $f(t, 0, 0) = 0$ , es decir, que 0 es un punto de equilibrio; en este caso, (H2) implica obviamente que este equilibrio no puede ser asintóticamente estable.*

Sin embargo, la condición **(H2)** no se cumple en muchos modelos, incluso en el caso escalar. Por ejemplo, la ecuación de Nicholson (2.2), donde la función  $f(x, y) = -dx + pye^{-y}$  verifica, para cualquier  $x > 0$ , que  $f(x, y) < 0$  si  $y > 0$  es suficientemente pequeño. En cambio, como se menciona en la introducción (ver Sección 2.2.1), se satisface una condición más débil cuando  $p > d$ , a saber:  $f(x, x) > 0$  para  $0 < x < r := \ln \frac{p}{d}$ . La situación puede generalizarse para sistemas en términos del campo  $f(\cdot, x, x)$  en la forma

**(H3)** existen  $t_0, r_0 > 0$  tales que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle > 0 \text{ para } t > t_0, V(x) < r_0.$$

Sin embargo, Puede suceder que  $|x(t)| - |x(t - \tau)|$  sea grande, lo cual significa que esta última condición no es suficiente para garantizar persistencia. Evitaremos esta dificultad considerando hipótesis de monotonía sobre  $V$  y control sobre la derivada logarítmica de  $V$ .

**Proposición 2** *Asumamos que se cumplen **(H1)** y **(H3)**. Supongamos, además, que vale*

$$\textbf{(H4)} \quad \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq \langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle \text{ si } V(y) \geq V(x).$$

*Entonces el sistema es fuertemente persistente.*

*Demostración.* Supongamos que existe una sucesión  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x(s_n) \rightarrow 0$  y fijemos  $t_n \in [0, s_n]$  tal que

$$v(t_n) = \min_{t \in [0, s_n]} v(t).$$

Como antes,  $t_n \rightarrow +\infty$  y, para  $n$  suficientemente grande resulta

$$v(t_n) < r_0, \quad v'(t_n) \leq 0. \quad v(t_n - \tau) \geq v(t_n).$$

Empleando **(H4)**, obtenemos

$$0 \geq \langle \nabla V(x(t_n)), f(t_n, x(t_n), x(t_n - \tau)) \rangle \geq \langle \nabla V(x(t_n)), f(t_n, x(t_n), x(t_n)) \rangle,$$

una contradicción ya que, por **(H3)**, esta última expresión es estrictamente positiva.

□

**Observación 2** *Como veremos en el próximo capítulo, la Proposición 2 también se verifica en el sistema de Nicholson estudiado en [7], con una función no suave  $V(x) = \min\{x_1, x_2\}$ :*

$$\nabla V(x_1, x_2) = \begin{cases} (1, 0) & x_1 < x_2 \\ (0, 1) & x_1 > x_2. \end{cases}$$

Como ya hemos observado, debido al hecho de que la distancia entre  $x(t)$  y  $x(t - \tau)$  puede ser grande, la suposición de monotonía global no puede ser sustituida por una más débil de monotonía local. No obstante, en la ecuación de Nicholson con  $V(x) = x$  la monotonía se verifica solamente cerca del origen, pero esto resulta ser suficiente porque se verifica una hipótesis adicional, que controla la derivada logarítmica de  $v$ . En el caso general, esto se puede expresar de la siguiente manera:

**Proposición 3** *Asumamos que (H1) y (H3) se cumplen, y además*

**(H5)** *existe  $\eta > 0$  tal que*

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq \langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle \text{ si } V(x) \leq V(y) \leq \eta$$

y

**(H6)** *existe  $k > 0$  tal que  $\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq -kV(x)$ .*

*Entonces el sistema es fuertemente persistente.*

*Demostración.* Comencemos observando que **(H6)** implica

$$v(t - \tau) \leq e^{k\tau} v(t) \text{ para todo } t \geq \tau.$$

En efecto, puesto que

$$v'(t) = \langle \nabla V(x(t)), f(t, x(t), x(t - \tau)) \rangle \geq -kV(x(t)) = -kv(t),$$

deducimos que

$$\ln v(t) - \ln v(t - \tau) \geq -k\tau,$$

es decir:  $v(t) \geq e^{-k\tau} v(t - \tau)$ .

Por lo tanto, la demostración sigue como en la proposición anterior, tomando  $n$  lo suficientemente grande para que se cumpla también  $v(t_n) \leq e^{-k\tau} \eta$ . En tal caso, vale

$$v(t_n) \leq v(t_n - \tau) \leq e^{k\tau} v(t_n) \leq \eta,$$

lo que permite aplicar **(H5)**. □

Notemos que, a partir de lo anterior, se puede deducir persistencia fuerte bajo **(H1)**, **(H2)** y **(H6)**. En efecto, si  $v(s_n) \rightarrow 0$ , podemos definir como antes una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t_n) \rightarrow 0$  y  $v'(t_n) \leq 0$ . La condición **(H6)** implica que también vale  $v_n(t_n - \tau) \rightarrow 0$ , y empleando **(H2)** se llega a una contradicción.

## 3.2 Persistencia uniforme

En esta sección procuraremos obtener un valor  $\mu > 0$  tal que el conjunto  $V^\mu := V^{-1}(0, \mu)$  resulte repulsivo, es decir, todas las trayectorias con datos iniciales positivos queden fuera de dicho conjunto para valores suficientemente grandes de  $t$ . En tal caso, la persistencia uniforme se deduce entonces del hecho de que  $V^\mu$  contiene un conjunto de la forma  $\{x \in \mathcal{C} : 0 < |x| < \xi\}$  para cierto  $\xi > 0$ . En otras palabras, como  $\{0 < |x| < \xi\} \subset V^\mu$ , entonces se verifica que todas las trayectorias escapan del conjunto  $V^\mu$  y no vuelven a entrar. En consecuencia,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| > \xi,$$

vale decir, el sistema es uniformemente persistente.

Cabe mencionar que la persistencia uniforme se deduce fácilmente bajo las hipótesis **(H1)**, **(H2)** combinadas con **(H4)**, **(H5)** y **(H6)**. En efecto, supongamos que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) = i$ , donde  $i \geq 0$  es una constante menor que  $e^{-k\tau} \min\{r_0, \eta\}$ . Ya sabemos, por la sección previa, que  $i > 0$ . Entonces, alcanza con tomar una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t_n) \rightarrow i$  y  $v'(t_n) \rightarrow 0$  ya que, en tal caso, o bien  $v(t_n - \tau) \leq v(t_n)$  y luego  $v(t_n - \tau) \rightarrow i$ , o bien  $v(t_n - \tau) \geq v(t_n)$  y entonces  $v(t_n - \tau) \leq e^{k\tau} v(t_n) < \min\{r_0, \eta\}$ . En las dos situaciones se obtiene una contradicción, pues **(H2)** implica en rigor que  $v'(t) \geq c > 0$  cuando  $x(t)$  y  $x(t - \tau)$  se encuentran en el intervalo compacto  $[i - \delta, r_0 - \delta]$  para  $0 < \delta < i$ .

En virtud de esta última observación, vamos a enfocar nuestro estudio en condiciones más débiles que **(H2)**. Concretamente, intentaremos responder a la pregunta: ¿qué hipótesis adicionales debemos agregar en las proposiciones 2 y 3 para lograr que la persistencia sea uniforme?

Teniendo esto en cuenta, retomando el razonamiento anterior, asumamos **(H1)** y **(H3)** y supongamos que vale

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) = i < r_0.$$

Resulta conveniente separar las distintas situaciones posibles para entender las dificultades; mas específicamente, consideremos los siguientes casos:

1.  $v(t) \geq i$  para todo  $t \gg 0$ . Si  $v(t) > i$  a partir de cierto  $t_0$ , entonces podemos elegir, como en la sección previa, para cada  $n > t_0$ , un valor  $t_n \in [t_0, n]$  tal que  $v(t_n) = \min_{t \in [t_0, n]} v(t)$ ; en caso contrario, podemos tomar directamente una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t_n) = i$ . En cualquiera de las dos situaciones, obtenemos una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v(t_n) = i,$$

$v'(t_n) \leq 0$  y  $v(t_n - \tau) \geq v(t_n)$ . De aquí se deduce una contradicción cuando asumimos que vale también **(H4)**.

2.  $v(t)$  oscila en torno a  $i$ . Entonces podemos elegir una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t_n) \rightarrow i^-$  y  $v'(t_n) \rightarrow 0$ . Por ejemplo, podemos fijar  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(s_n) > i$  y a continuación  $t_n \geq s_n$  que satisfaga  $v(t_n) = \min_{[s_n, +\infty)} v(t)$ . Notemos, sin embargo, que si  $t_n$  está cerca de  $s_n$ , entonces puede ocurrir que  $v(t_n - \tau) < v(t_n)$ , de modo que **(H3)** y **(H4)** no son de utilidad. Observemos, a efectos de futuras consideraciones, que en esta última situación también se verifica que  $v(t_n - \tau) \rightarrow i^-$ .
3.  $v(t) \rightarrow i^-$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ . De nuevo, las condiciones anteriores no pueden aplicarse de forma directa. Aquí puede ocurrir incluso que no exista ninguna sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  con  $v'(t_n) \leq 0$ , por ejemplo si  $v(t) \nearrow i$ .

Para poder examinar con más detalle los dos últimos “casos difíciles”, recordemos una vez más que las hipótesis **(H1)**, **(H3)** junto con **(H4)** o la combinación de **(H5)** y **(H6)** implican que  $i > 0$ .

Para fijar las ideas, consideremos en primer lugar la ecuación escalar autónoma, es decir, con  $N = 1$  y  $f$  independiente de  $t$ . Supongamos por ejemplo que **(H3)** se verifica con  $V(x) = x$ ; entonces, por continuidad, para cada  $i \in (0, r_0)$  existen  $\delta = \delta(i) > 0$  y  $c = c(i) > 0$  tales que  $f(x, y) > c$  para  $x, y \in (i - \delta, i)$ . Esto, a su vez, implica:

1. Si  $x(t_n - \tau), x(t_n) \rightarrow i^-$  y  $x'(t_n) \leq 0$  entonces  $0 \geq f(x(t_n), x(t_n - \tau))$ , una contradicción porque  $f(x(t_n), x(t_n - \tau)) > 0$  cuando  $n$  es grande.
2. Si  $x(t) \rightarrow i$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , entonces  $x'(t) > c$  para  $t \gg 0$  por lo que  $x(t) \rightarrow +\infty$ , lo cual es una contradicción.

Esto se puede generalizar para un sistema, como se describe en el siguiente resultado.

**Teorema 8** *Asumamos que se cumplen **(H1)**, **(H3)** y **(H4)**. Si además vale **(H7)** existe  $r_0 > 0$  tal que, para todo  $i \in (0, r_0)$*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i^-} \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > 0,$$

*entonces el sistema es uniformemente persistente.*

Más precisamente, todas las soluciones del sistema con  $\varphi_j(t) \geq 0$  para todo  $j$  y  $t \in [-\tau, 0]$  satisfacen

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) \geq r_0,$$

es decir,  $x(t) \notin V^{r_0}$  para  $t$  suficientemente grande.

*Demostración.* Supongamos que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t) = i \in (0, r_0)$  y, de acuerdo con **(H7)**, fijemos una constante  $c > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i^-} \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > c.$$

A partir de las consideraciones anteriores, podemos ya excluir el caso  $v(t) \rightarrow i^+$ . Si  $v(t) \rightarrow i^-$  para  $t \rightarrow +\infty$ , entonces para  $t \gg 0$  vale

$$v'(t) = \langle \nabla V(x(t)), f(t, x(t), x(t - \tau)) \rangle > c.$$

Esto implica que  $v(t) \rightarrow +\infty$ , lo que es absurdo. Esto prueba que  $v$  oscila en torno a  $i$ , de modo que existe una sucesión  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(s_n) > i$  y  $v(s_n) \rightarrow i^+$ . Tomemos ahora  $t_n \geq s_n$  tal que  $v(t_n) = \min_{t \in [s_n, +\infty)} v(t)$ , entonces  $v(t_n) \rightarrow i^-$  y, para  $n$  suficientemente grande, se verifica que  $v'(t_n) \leq 0$  y  $v(t_n) \leq v(t_n - \tau)$  para infinitos valores de  $n$ , o bien  $v(t_n - \tau) \rightarrow i^-$ . Empleando respectivamente **(H4)** o **(H7)** se deduce que

$$0 \geq v'(t_n) \geq \langle \nabla V(x(t_n)), f(t_n, x(t_n), x(t_n)) \rangle,$$

lo que contradice **(H3)**. □

La conclusión es ligeramente diferente cuando se sustituye la hipótesis de monotonía global **(H4)** por **(H5)** y **(H6)** ya que, en este caso, necesitamos garantizar en primer lugar que las trayectorias entran dentro de la región donde vale **(H5)**.

**Teorema 9** *Supongamos que **(H1)**, **(H3)**, **(H5)**, **(H6)** y **(H7)** se cumplen, entonces el sistema es uniformemente persistente.*

Más precisamente, todas las soluciones del sistema con  $\varphi_j(t) \geq 0$  para todo  $j$  y  $t \in [-\tau, 0]$  satisfacen

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) \geq \min\{r_0, e^{-k\tau}\eta\}.$$

*Demostración.* Siguiendo los pasos de la demostración anterior, si asumimos también que  $i < e^{-k\tau}\eta$ , entonces para la sucesión  $\{t_n\}$  la condición **(H6)** permite demostrar que vale  $v(t_n - \tau) \leq e^{k\tau}v(t_n) < \eta$ , de modo que en vez de **(H4)** se aplica **(H5)**. □

Por último, inspirándonos en la ecuación de Nicholson, cabe mencionar que **(H7)** no se satisface en muchas situaciones cuando  $N > 1$ : consideremos, por ejemplo,

$V(x) = |x|^2$  y  $f(x, y) = y$ . En cualquier caso, como ya hemos observado, la mayoría de los modelos asumen que  $f(t, 0, 0) = 0$  y, en consecuencia, se espera que, a medida que la solución se acerca a 0, la distancia entre  $x(t)$  y  $x(t - \tau)$  sea comparativamente pequeña. Esto significa que la condición podría relajarse suponiendo que la desigualdad se cumple únicamente cuando la distancia entre  $x$  e  $y$  es suficientemente pequeña. En términos más precisos, podemos definir

$$\theta(i) := \limsup_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i} |f(t, x, y)|$$

y observar que si  $v(t) \rightarrow i^-$  entonces por la desigualdad del valor medio

$$|x(t) - x(t - \tau)| \leq \tau |x'(\xi)| \quad \xi \in (t - \tau, t)$$

deducimos:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} |x(t) - x(t - \tau)| \leq \tau \theta(i).$$

De esta manera, recordando que  $\theta(i)$  es el límite superior de  $|f(t, x, y)|$  cuando  $t \rightarrow +\infty$  y  $V(x), V(y) \rightarrow i$ , obtenemos el siguiente teorema.

**Teorema 10** *El Teorema 8 y el Teorema 9 siguen siendo válidos si se sustituye (H7) por:*

(H8) *Existe  $C(i) > \tau \theta(i)$  y existe  $r_0 > 0$  tal que, para todo  $i \in (0, r_0)$*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i^-, |x-y| \leq C(i)} \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > 0.$$

*Demostración.* En las demostraciones previas, comprobemos en primer lugar que el caso  $v(t) \rightarrow i^-$  no se puede dar. Precisamente, los cálculos anteriores muestran que, si  $v(t) \rightarrow i^-$ , entonces  $|x(t) - x(t - \tau)| < C(i)$  para  $t \gg 0$ . Luego, la condición (H8) implica, como antes, que  $v'(t) \geq c > 0$  para  $t \gg 0$ , lo que es absurdo. Solo resta verificar la situación en que  $v$  oscila alrededor de  $i$  en la que, como antes, podemos construir una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t_n) \rightarrow i^-$ ,  $v'(t_n) \leq 0$ . Si  $v(t_n) \leq v(t_n - \tau)$  para infinitos valores de  $n$ , entonces el resultado vale igual que antes; en caso contrario,  $v(t_n - \tau) \rightarrow i^-$  y nuevamente se tiene la cota  $|x(t_n) - x(t_n - \tau)| < C(i)$ , lo que permite aplicar (H8) para obtener la contradicción  $v'(t_n) > 0$  si  $n \gg 0$ .  $\square$

Para ilustrar los resultados de este capítulo, concluimos esta sección con un ejemplo sencillo en el que se aplican las condiciones anteriores:

**Ejemplo 1** *Consideremos una función  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , definida por*

$$f(t, x, y) = -a(t)x + g(x, y),$$

con  $0 < a < a(t) < A$  para todo  $t \geq 0$ ,  $g_j(x, y) = \varphi(|y|)e^{-x_j}$ , para  $1 \leq j \leq N$ ,  $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tal que  $\varphi(s) > 0$  para  $s > 0$  y  $V(x) = \frac{|x|^2}{2}$ .

Veamos que efectivamente, bajo condiciones apropiadas, las soluciones positivas verifican la persistencia débil, fuerte y uniforme. En primer lugar, **(H1)** se cumple porque  $g_j(x, y) > 0$  para  $y \neq 0$ . Observemos, además, que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle = \langle x, g(x, y) \rangle - a(t)|x|^2 = \varphi(|y|) \sum_{j=1}^N x_j e^{-x_j} - a(t)|x|^2.$$

Como  $e^r \rightarrow 1^-$  para  $r \rightarrow 0^-$ , para cada  $\varepsilon > 0$  fijo existe  $\delta > 0$  tal que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > (1 - \varepsilon)\varphi(|y|) \sum_{j=1}^N x_j - a(t)|x|^2$$

si  $|x| < \delta$ . Por otra parte, como  $x_j > 0$  para todo  $j$ , se tiene que  $\sum_j x_j \geq |x|$  lo que, a su vez, implica

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > |x| \left[ (1 - \varepsilon)\varphi(|y|) - a(t)|x| \right].$$

Esto demuestra que, si  $\varphi(0) > 0$ , entonces vale **(H2)**: específicamente, alcanza con fijar cualquier  $r > 0$  y definir  $C := (1 - \varepsilon) \min_{s \leq r} \varphi(s)$ , de modo que **(H2)** se verifica para  $r_0 := \min\{r, \frac{C}{A}\}$ . De esta forma, la Proposición 1 garantiza la persistencia débil.

Si, por el contrario,  $\varphi(0) = 0$ , entonces **(H2)** no se cumple y se necesita una condición adicional. Por ejemplo, si  $\varphi$  es creciente y  $|x|$  tiende a cero más rápido que  $\varphi(|x|)$ , entonces se verifican las condiciones **(H3)**-**(H4)** y la persistencia fuerte se deduce de la Proposición 2. En términos más precisos, podemos asumir que  $\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s)}{s} > A$ ; de esta forma, tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeño, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle > |x|^2 \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\varphi(|x|)}{|x|} - a(t) \right] > 0 \text{ para } 0 < |x| < \delta$$

y **(H3)** se satisface para  $r_0 := \delta$ . Además, la monotonía de  $\varphi$  implica **(H4)** de manera inmediata. Puede ocurrir también que  $\varphi$  sea creciente solamente en un entorno de 0; en tal caso, el resultado se sigue de la Proposición 3, porque vale **(H5)** y, por otra parte, **(H6)** se satisface trivialmente con  $k = A$  pues  $g \geq 0$ . Para demostrar que las soluciones son uniformemente persistentes observamos que si, como antes, suponemos  $\liminf_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s)}{s} > A$ , entonces podemos fijar  $\varepsilon$  y  $r_0 > 0$  tales que  $(1 - \varepsilon) \frac{\varphi(i)}{i} > A$  para  $0 < i < r_0$ . Por continuidad, para cada  $i$  fijo se tiene que  $(1 - \varepsilon) \frac{\varphi(|y|)}{|x|} > A$  cuando  $V(x)$  y  $V(y)$  están suficientemente cerca de  $i$ ; luego, se verifica

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i^-} \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq \liminf_{t \rightarrow +\infty, V(x), V(y) \rightarrow i^-} |x|^2 \left[ (1 - \varepsilon) \frac{\varphi(|y|)}{|x|} - a(t) \right].$$



*Pero este límite es estrictamente positivo, de modo que vale (H7). Claramente, en este ejemplo la condición (H8) también se cumple.*



# Chapter 4

## Persistencia en sistemas tipo Nicholson

En este capítulo estudiaremos sistemas de ecuaciones tipo Nicholson, enfocados particularmente en obtener cotas más explícitas para la persistencia fuerte y persistencia uniforme.

A diferencia de nuestro enfoque anterior, aquí emplearemos las funciones  $u(t) := \max\{x_i(t)\}$  y  $v(t) := \min\{x_i(t)\}$ , que no son suaves pero, como veremos a continuación, permiten evitar el uso de herramientas más técnicas. Una ventaja adicional del método es el hecho de que la persistencia del sistema  $N$ -dimensional puede demostrarse mediante una reducción a un problema unidimensional. Cabe aclarar que el tratamiento es diferente con respecto a la ecuación escalar, debido a la presencia de los términos de mutualismo, que no permiten la aplicación de técnicas de desacoplamiento.

La generalización de la ecuación de Nicholson en  $N$  dimensiones que estudiamos en este trabajo es un sistema de  $N$  ecuaciones, donde  $k \geq 2$  y para cada  $i = 1, \dots, N$

$$x'_i(t) = -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) x_i(t - \tau_j) e^{-x_i(t - \tau_j)} - H_i(t, x_1, \dots, x_N). \quad (4.1)$$

En primer lugar, para cada población  $x_i$ , las funciones continuas  $d_i(t, x_i) \geq 0$  y  $b_{i,l}(t, x_l) \geq 0$  representan respectivamente la tasa de mortalidad y las interacciones de mutualismo con la población  $x_l$ ,  $l = 1, \dots, N$ . Como es habitual, se asume  $d_i(t, 0) = 0 = b_{i,l}(t, 0)$ . Por otra parte  $p_{i,j}(t) > 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , también es continua y corresponde a la tasa de reproducción de individuos. Recordemos que la función  $f(x) := x e^{-x}$  representa la probabilidad de que un individuo sobreviva hasta alcanzar la madurez reproductiva y el retardo  $\tau_j > 0$  modela el tiempo que transcurre hasta alcanzar

dicha madurez. En este caso, se asume que distintos grupos de individuos pueden tener retardos diferentes y, cabe aclarar, los resultados que se obtienen a continuación siguen valiendo si se asumen retardos diferentes para las distintas poblaciones, vale decir,  $\{\tau_{ij}\}$  con  $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, k$ . Por conveniencia, recordemos también que  $f$  crece hasta alcanzar su máximo absoluto en  $x = 1$ , con  $f(1) = \frac{1}{e}$ , y luego decrece asintóticamente hacia el 0. A lo largo del capítulo, denotaremos por  $x_{i,\tau_j}(t)$  a la coordenada retardada  $x_i(t - \tau_j)$  y  $f(x_{i,\tau_j}(t)) := x_{i,\tau_j}(t)e^{-x_{i,\tau_j}(t)}$ . Finalmente, la función continua  $H_i(t, x_1, \dots, x_N) \geq 0$  representa la recolección, que puede ser no lineal. Claramente, se asume también  $H_i(t, 0) = 0$ . Cabe mencionar que los términos de recolección juegan un papel importante en el balance de la recolección total, sin distinguir entre las especies. En este marco, con retardos diferentes para las distintas poblaciones, una condición inicial no negativa para el sistema (4.1) estará dada por una función continua  $\varphi : [-\tau^*, 0] \rightarrow [0, +\infty)^N$ , donde  $\tau^* = \max\{\tau_j\}$ .

## 4.1 Persistencia en el caso escalar

Para empezar, consideramos una ecuación escalar con varios retardos y, a fin de extender resultados previos en la literatura, también consideramos que la tasa de mortalidad y el término recolección pueden ser no lineales. Aunque ambos términos pueden unificarse (cosa que efectivamente haremos), en la ecuación se mantienen separados para una mayor comprensión del modelo. En general, el tipo de no-linealidad del término de mortalidad puede tener una naturaleza diferente a la del término de recolección. Nuestra versión de la ecuación escalar de Nicholson es la siguiente:

$$x'(t) = -d(t, x(t)) + \sum_{j=1}^k p_j(t)x(t - \tau_j)e^{-x(t - \tau_j)} - H(t, x(t)) \quad (4.2)$$

con  $d(t, x), p_j(t)$  y  $H(t, x)$  como antes.

Cabe mencionar que las condiciones obtenidas a continuación pueden considerarse naturales, en el sentido que amplían las condiciones previamente conocidas obtenidas cuando  $d$  y  $H$  son funciones lineales (ver Capítulo 2, sección 2.2.1).

Fijemos  $G(t, x) := d(t, x) + H(t, x)$ , supongamos que  $\frac{G(t, x)}{x}$  está acotada superiormente y definamos:

$$G^0(t) := \limsup_{x \rightarrow 0^+} \frac{d(t, x) + H(t, x)}{x}.$$

Además, supondremos que el límite es uniforme en  $t$ . En particular esto se cumple cuando  $d(t, 0) = H(t, 0)$ , siempre que  $d$  y  $H$  sean funciones suaves.

**Observación 3** Es fácil ver que si la condición inicial (escalar) satisface  $\varphi > 0$ , entonces  $x_t > 0$  para todo  $t$ . En términos del capítulo previo, se trata de la condición **(H1)**: en efecto, la función

$$F(t, x, y) := -d(t, x) + \sum_{j=1}^k p_j(t) y_j e^{-y_j} - H(t, x)$$

verifica  $F(t, 0, y) > 0$  para  $y \neq 0$ .

**Observación 4** Observemos que como  $\frac{G(t, x)}{x}$  está acotada superiormente, existe  $k_0 > 0$ , tal que  $G(t, x(t)) \leq k_0 x(t)$ . Esto, a su vez, implica que  $x(t) \geq e^{-k_0 \tau^*} x_{\tau_j}(t)$  para cada  $1 \leq j \leq k$ . En efecto, dado que  $x'(t) \geq -k_0 x(t)$ , tenemos que  $\ln x(t) - \ln x_{\tau_j}(t) \geq -k_0 \tau_j$ , con lo que  $x(t) \geq e^{-k_0 \tau^*} x_{\tau_j}(t)$ . Nuevamente podemos comparar esto con las hipótesis del capítulo anterior: en este caso, se trata claramente de **(H6)**, con  $V(x) := x$ .

Para garantizar la persistencia fuerte en el caso escalar, se asumirá la siguiente condición:

$$G^0(t) < (1 - \delta) \sum_{j=1}^k p_j(t) \quad (4.3)$$

para algún  $\delta < 1$  y todo  $t$ . Esta condición puede pensarse como una extensión natural del caso clásico  $x'(t) = -dx(t) + px(t - \tau)e^{-x(t - \tau)}$ , donde la persistencia uniforme se verifica para  $p > d$  y, en efecto, en este caso vale  $G^0(t) \equiv d$ .

Con esto en mente, enunciamos nuestro primer resultado:

**Proposición 4** Supongamos que (4.3) se cumple, entonces las soluciones de (4.2) son fuertemente persistentes.

*Demostración.* Supongamos que  $x(t)$  es una solución no trivial tal que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$  y fijemos  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x(t_n) = \min_{t \in [0, t_n]} x(t)$ . Esto implica que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = 0$ ,  $x'(t_n) \leq 0$  y  $x(t_n) \leq x_{\tau_j}(t_n)$  para  $n$  suficientemente grande. A su vez, para  $n \gg 0$  se verifica que  $x(t_n) \leq e^{-k_0 \tau^*}$  y, en consecuencia,  $x_{\tau_j}(t_n) \leq 1$ . Como anticipamos, esto significa que ambos valores se ubican en la región en la que  $f$  es creciente, vale decir:  $f(x(t_n)) \leq f(x_{\tau_j}(t_n))$ .

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^k p_j(t_n) f(x_{\tau_j}(t_n)) \geq \sum_{j=1}^k p_j(t_n) f(x(t_n)) \quad \text{para } n \gg 0.$$

De (4.3), deducimos que

$$\frac{G(t_n, x(t_n))}{x(t_n)} < (1 - \delta) \sum_{j=1}^k p_j(t_n) \quad \text{para } n \text{ grande.}$$

Además, podemos encontrar  $n_0$  tal que  $e^{-x(t_n)} > 1 - \delta$  para  $n \geq n_0$ ; de esta forma, si suponemos que  $x(t_n) < \min\{e^{-k_0\tau^*}, -\ln(1 - \delta)\}$  entonces obtenemos

$$0 \geq x'(t_n) \geq x(t_n) \left[ \sum_{j=1}^k p_j(t_n) e^{-x(t_n)} - \frac{G(t_n, x(t_n))}{x(t_n)} \right] > 0,$$

lo que es absurdo.  $\square$

Sin embargo, notemos que la condición anterior no es suficiente para asegurar que todas las soluciones permanezcan asintóticamente alejadas de cero de manera uniforme. Este problema se evita asumiendo que existe  $c > 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^k p_j(t) \geq c \quad (4.4)$$

para todo  $t$ . Se comprueba fácilmente que, junto con (4.3), la condición (4.4) implica la existencia de  $r_0 > 0$  tal que, para cada  $r \in (0, r_0)$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, x, y \rightarrow r^-} \sum_{j=1}^k p_j(t) f(y) - G(t, x) > 0. \quad (4.5)$$

En efecto, alcanza con fijar un valor positivo  $\hat{\delta} < \delta$  y  $\eta := c(\delta - \hat{\delta})$ , donde  $c$  es la constante definida por (4.4). De esta forma, resulta

$$(1 - \delta) \sum_{j=1}^k p_j(t) < (1 - \hat{\delta}) \sum_{j=1}^k p_j(t) - \eta$$

para todo  $t$ . Luego, alcanza con elegir  $\mu > 0$  tal que  $\frac{G(t, x)}{x} < G^0(t) + \eta$  para todo  $t$  y todo  $x \in (0, \mu)$ ; en consecuencia, para  $r_0 < \min\{\mu, -\ln(1 - \hat{\delta})\}$  el resultado se obtiene escribiendo

$$\sum_{j=1}^k p_j(t) f(y) - G(t, x) = x \left( \frac{y}{x} \sum_{j=1}^k p_j(t) e^{-y} - \frac{G(t, x)}{x} \right)$$

**Observación 5** La condición (4.5) es análoga a la condición **(H7)** del capítulo previo.

**Teorema 11** Supongamos que (4.3) y (4.4) se cumplen, entonces las soluciones de (4.2) son uniformemente persistentes.

*Demostración.* Supongamos que  $x(t)$  es una solución tal que  $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) = r \in (0, r_0)$ . Asumimos que  $r_0 < e^{-k_0\tau^*}$ ; de esta forma, ya sabemos que si  $x(t)$  se encuentra cerca de  $r$  entonces  $x(t - \tau) < 1$  y se puede aplicar la monotonía de  $f$ . Como en el capítulo previo, resulta conveniente analizar por separado los siguientes 3 casos:

1. La solución verifica  $x(t) \geq r$  para todo  $t \gg 0$ .
2. La solución verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = r^-$ .
3. La solución  $x(t)$  oscila alrededor de  $r$ .

Para el primer caso, podemos suponer, igual que en el capítulo previo, que existe  $t_0$  tal que  $x(t) > r$  para todo  $t \geq t_0$ . Para  $n$  grande, fijamos  $t_n \in [t_0, n]$  tal que  $x(t_n) = \min_{t \in [t_0, n]} x(t)$ . Se deduce que  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $x'(t_n) \leq 0$  y  $x(t_n) \leq x_{\tau_j}(t_n)$ . Como  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = r$ , para  $n \gg 0$  vale  $x(t_n) < r_0$  y, como anticipamos, esto último implica que  $x_{\tau_j}(t_n) < 1$ . Como antes, si asumimos  $r_0 < -\ln(1 - \delta)$  entonces para  $n \gg 0$  vale

$$\frac{G(t_n, x(t_n))}{x(t_n)} < (1 - \delta) \sum_{j=1}^k p_j(t_n);$$

por lo tanto,

$$0 \geq \sum_{j=1}^k p_j(t) e^{-x(t_n)} - \frac{G(t, x(t_n))}{x(t_n)} > 0,$$

lo que es absurdo.

Analicemos los otros dos casos: Si  $x(t) \rightarrow r^-$ , entonces también  $x_{\tau_j}(t) \rightarrow r^-$ . Por (4.5) podemos elegir una constante  $c_0 > 0$  tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, x, y \rightarrow r^-} \sum_{j=1}^k p_j(t) f(y) - G(t, x) > c_0.$$

Se deduce que  $x'(t) > c_0$  para  $t \gg 0$  y, al igual que en el capítulo previo, esto es absurdo porque implica que  $x(t) \rightarrow +\infty$ . Por último, en el tercer caso, existe una sucesión  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x(s_n) > r$  y  $x(s_n) \rightarrow r^+$ . Igual que en el capítulo previo, podemos elegir  $t_n \geq s_n$  tal que  $x(t_n) = \min_{t \in [s_n, +\infty)} x(t)$ , entonces  $x(t_n) \rightarrow r^-$  y, para  $n$  suficientemente grande, vale  $x'(t_n) \leq 0$ . Por comodidad, podemos llamar

$$y_{n,j} := \begin{cases} x_{\tau_j}(t_n) & \text{si } x_{\tau_j}(t_n) \leq x(t_n) \\ x(t_n) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces para todo  $j$  vale  $y_{n,j} \rightarrow r$  para  $n \rightarrow \infty$  y

$$0 \geq x'(t_n) \geq -d(t, x(t_n)) + \sum_{j=1}^k p_j(t_n) f(y_{n,j}) - H(t_n, x(t_n)) > 0$$

si  $n \gg 0$ , lo que es absurdo. □

## 4.2 Persistencia en el caso N-dimensional

Esta sección se basará esencialmente en la técnica de las funciones guía, que ya fue utilizada en el capítulo 3. Un hecho relevante en este enfoque es que el análisis del sistema puede reducirse a un caso unidimensional. En términos más precisos, la demostración de persistencia fuerte se basará en la elección, como función guía, de la función  $v(t) = \min\{x(t)\}$ , permitiendo así aplicar los resultados del caso  $N = 1$ .

El resultado principal de esta sección se refiere a la persistencia uniforme de las soluciones para la ecuación  $N$ -dimensional de Nicholson. La demostración se llevará a cabo después de probar la persistencia fuerte como primer paso. Cabe aclarar que, a diferencia del capítulo previo, en este caso la función  $V$  no es de clase  $C^1$ .

Recordamos el sistema que estamos considerando, a saber:

$$x'_i(t) = -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) f(x_{i,\tau_j}(t)) - H_i(t, x). \quad (4.6)$$

Las funciones  $b_{i,l}(t, x_l), p_{i,j}(t), d_i(t, x_i), H_i(t, x)$  son no negativas y posiblemente no lineales. Escribimos  $G_i(t, x) = d_i(t, x) + H_i(t, x)$  y supondremos como antes que, para todo  $i$ , el cociente  $\frac{G_i(t, x)}{x_i}$  se encuentra acotado superiormente. Específicamente, supondremos que existe  $k_0 > 0$  tal que  $G_i(t, x(t)) \leq k_0 x_i(t)$  para  $1 \leq i \leq N$ . Se deduce que  $x_i(t) \geq e^{-k_0 \tau^*} x_{i,\tau_j}(t)$  para  $1 \leq j \leq k$ .

Mostraremos la persistencia fuerte y uniforme bajo condiciones apropiadas, las cuales pueden pensarse como una adaptación de las analizadas en el caso escalar. Notemos que cada ecuación tiene una suma extra de términos  $b_{i,l}$ , que se interpretan como las interacciones de cooperación mutua entre las poblaciones.

En términos más precisos, garantizaremos la persistencia fuerte y uniforme imponiendo condiciones sobre dos funciones auxiliares  $G_i^0$  and  $b_{0,i,l}$ , que se presentarán más adelante. Si reducimos el problema al caso de términos lineales, las condiciones sobre  $G_i^0$  y  $b_{0,i,l}$  pueden traducirse en las descritas en [11]. Precisamente, supondremos que las funciones son asintóticamente lineales y a partir de ello, con condiciones adecuadas nos permitirán concluir los resultados.

Para  $i, l = 1, \dots, N$ , definimos

$$G_i^0(t) := \limsup_{x_i \rightarrow 0^+} \frac{G_i(t, x)}{x_i},$$

$$b_{0,i,l}(t) := \liminf_{x_l \rightarrow 0^+} \frac{b_{i,l}(t, x_l)}{x_l}, \text{ para } l \neq i.$$

Asumimos que todos los límites son uniformes en  $t$  y  $G_i^0$  también es uniforme en  $x_l$  con  $l \neq i$ .



**Proposición 5** *Las soluciones del sistema (4.6) son fuertemente persistentes si, para cierto  $\delta > 0$ , se verifica que*

$$G_i^0(t) < (1 - \delta) \left( \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{0,i,l}(t) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) \right), \quad (4.7)$$

*Demostración.* Supongamos que  $x(t)$  es una solución tal que  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0$  y elegimos una sucesión  $s_n \nearrow +\infty$  tal que  $|x(s_n)| \leq |x(t)|$  para  $t \leq s_n$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x(s_n)| = 0$ . Por lo tanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_i(s_n) = 0$  para  $i = 1, \dots, N$ . Definimos  $v(t) := \min\{x_i(t)\}$  y tomemos  $t_n$  tal que  $v(t_n) = \min_{t \in [s_0, s_n]} v(t)$ . Tomando una subsucesión, podemos asumir que existe  $i_0 \in \{1, \dots, N\}$  tal que  $x_{i_0}(t_n) = v(t_n)$  para todo  $n$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $i_0 = 1$ , es decir  $x_1(t_n) = v(t_n)$ . Esto implica que  $x_1'(t_n) \leq 0$  y  $x_1(t_n) \leq x_{1,\tau_j}(t_n)$  para  $n$  grande. Para simplificar, vamos a utilizar la notación  $x_i(t_n) = x_i$ . Siguiendo el razonamiento del caso escalar, sabemos que para  $n$  grande vale

$$x_1' \geq x_1 \left[ \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_1} + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n) e^{-x_1} - \frac{G_1(t_n, x)}{x_1} \right],$$

y como  $x_1 \leq x_l$  para todo  $l \in \{2, \dots, N\}$ ,

$$x_1' \geq x_1 \left[ \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_l} + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n) e^{-x_1} - \frac{G_1(t_n, x)}{x_1} \right].$$

Por (4.7) se tiene, para  $n$  suficientemente grande:

$$\frac{G_1(t_n, x)}{x_1} < \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_l} + (1 - \delta) \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n).$$

Más aún, como  $x(t_n) \rightarrow 0$ , entonces existe  $n_0$  tal que  $e^{-x_1(t_n)} > 1 - \delta$ . Luego para  $n \geq n_0$ , se obtiene la siguiente contradicción;

$$0 \geq \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_l} + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n) e^{-x_1} - \frac{G_1(t_n, x)}{x_1} > 0.$$

□

La prueba de la persistencia uniforme en el caso  $N$ -dimensional es un poco más técnica. Teniendo en cuenta el caso escalar, consideramos la siguiente condición: Asumamos que existe  $c > 0$  tal que

$$\sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) \geq c \quad (4.8)$$

para todo  $t$ . Como antes, (4.7) y (4.8) implican la existencia de  $r_0 > 0$  tal que para cada  $r \in (0, r_0)$ ,

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty, x_i, y_i \rightarrow r^-} \sum_{j=1}^k p_j(t) f(y_j) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) - G_i(t, x) > 0. \quad (4.9)$$

Finalmente, estamos en condiciones de demostrar el resultado principal de este capítulo:

**Teorema 12** *Supongamos que (4.7) - (4.8) se cumplen, entonces las soluciones de (4.6) son uniformemente persistentes.*

*Demostración.* Comencemos fijando  $r_0$  lo suficientemente pequeño como para utilizar la condición (4.9) y supongamos que  $x(t)$  es una solución tal que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = \varepsilon_0 < r_0.$$

Es claro que

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = r_i \leq \varepsilon_0 \text{ para todo } i.$$

Como en el problema escalar, conviene analizar separadamente diferentes casos: llamando  $\tilde{r} := \liminf_{t \rightarrow +\infty} v(t)$ , donde  $v(t) = \min\{x_i(t)\}$ , supondremos en primer lugar que  $\tilde{r} = 0$ . En este caso, podemos fijar  $t_n \rightarrow +\infty$  de forma tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v(t_n) = 0$  y  $v(t_n) = \min_{t \in [t_0, t_n]} v(t)$ . Como antes, tomando una subsucesión podemos elegir  $i_0$  tal que  $x_{i_0}(t_n) = v(t_n)$  para todo  $n$  y, siguiendo un razonamiento análogo al de la prueba de la Proposición 5, se obtiene una contradicción.

Examinemos primero el caso en el que  $v$  se mantiene mayor o igual que  $\tilde{r}$  para  $t \gg 0$ . Al igual que en ocasiones anteriores, podemos suponer que  $v(t) > \tilde{r}$  para todo  $t \geq t_0$ . Fijamos entonces para cada  $n > t_0$  un valor  $t_n \in [t_0, n]$  tal que  $v(t_n) = \min_{t \in [t_0, t_n]} v(t)$ . Se cumple que  $t_n \rightarrow +\infty$  y, pasando otra vez a una subsucesión, podemos fijar  $i_0$  tal que  $v(t_n) = x_{i_0}(t_n)$  para todo  $n$ . Nuevamente supondremos, por comodidad, que  $i_0 = 1$ . Se cumple entonces que  $x'_1(t_n) \leq 0$  y  $x_{1,\tau_j}(t_n) \geq x_1(t_n)$  para  $n \gg 0$ . Aplicando el mismo procedimiento que antes, obtenemos

$$x'_1 \geq x_1 \left[ \sum_{l=1, l \neq 1}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_1} + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n) e^{-x_1} - \frac{G_1(t_n, x)}{x_1} \right],$$

Como  $x_1 \leq x_l$ , resulta

$$x'_1 \geq x_1 \left[ \sum_{l=1, l \neq 1}^N \frac{b_{1,l}(t_n, x_l)}{x_l} + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_n) e^{-x_1} - \frac{G_1(t_n, x)}{x_1} \right].$$

Finalmente, recordemos que el valor  $r_0$  fue elegido de modo que se pueda aplicar (4.9); en consecuencia, como  $x_i(t)$  esté suficientemente cerca de cero para  $n \gg 0$  y todo  $i$ , se obtiene una contradicción.

Supongamos ahora que lo anterior no ocurre, es decir, existe una sucesión  $\hat{t}_n \rightarrow \infty$  tal que  $v(\hat{t}_n) < \tilde{r}$ . Tomando una subsucesión, podemos asumir que  $v(\hat{t}_n) = x_{i_0}(\hat{t}_n)$  para cierto  $i_0$  fijo, y por simplicidad podemos suponer  $i_0 = 1$ . De modo exactamente igual al caso escalar, si existe una sucesión  $s_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x_1(s_n)$ , entonces podemos encontrar una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $x_1(t_n) \rightarrow \tilde{r}^-$ ,  $x'_1(t_n) \leq 0$  y  $x_{1,\tau_j}(t_n) \leq x_1(t_n)$  para todo  $j$  lo que, como antes, lleva a una contradicción.

La última situación posible es que, a partir de cierto  $t_0$ , valga  $x_1(t) < \tilde{r}$ . Debido a (4.9) y al hecho de que  $x_{1,\tau_j} \rightarrow \tilde{r}^-$ , podemos elegir una constante  $c_0 > 0$  tal que para valores grandes de  $t$ , se cumple que

$$\sum_{j=1}^k p_j(t) f(x_1) + \sum_{l=1, l \neq i_0}^N b_{1,l}(t, x_l) - G_1(t, x) > c_0.$$

Esto significa que  $x'_1(t) > c_0$  para  $t \gg 0$ , lo que es absurdo pues implicaría que  $x_1(t) \rightarrow +\infty$ .  $\square$



# Chapter 5

## Soluciones periódicas

En este capítulo estudiamos existencia de soluciones  $T$ -periódicas en sistemas de EDRs. Recordemos que en el Capítulo 2, hemos introducido métodos topológicos para resolver este tipo de problemas.

En este sentido, en este capítulo nos enfocamos en utilizar herramientas de grado topológico para garantizar la existencia de soluciones y, como veremos a continuación, nos interesará particularmente encontrar subconjuntos apropiados del cono positivo  $\mathcal{C} \subset C_T$ , para poder aplicar la teoría de grado de Leray-Schauder.

Cabe aclarar que, bajo ciertas condiciones extras, veremos cómo los resultados de persistencia son útiles a la hora de encontrar soluciones periódicas. En particular, bajo condiciones apropiadas la existencia de tales soluciones se puede deducir directamente de la permanencia ; sin embargo, como veremos a continuación, los resultados de los capítulos previos permitirán una demostración directa, sin necesidad de recurrir a herramientas más técnicas. El punto de partida será, entonces, el conjunto de condiciones para la persistencia obtenido en los capítulos 3 y 4.

Comenzaremos analizando el caso para sistemas semi-dinámicos más generales. En la primera parte del presente capítulo, probaremos la existencia de un subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y un subconjunto  $U \subset \mathcal{C}$  donde podremos utilizar el grado de Brouwer y Leray-Schauder, respectivamente. La demostración de nuestro primer resultado se basa en un teorema importante de Hopf (Sección 2.3.2, Teorema 7), mencionado en el capítulo de Preliminares, específicamente en la sección de Resultados previos.

En segundo lugar, analizamos la existencia de soluciones periódicas en sistemas de ecuaciones tipo Nicholson. Como antes, consideramos técnicas de grado topológico pero, en este caso, nuestro resultado principal se basa en mostrar que, mediante homotopías, se llega a una situación similar a la del teorema de Poincaré-Miranda (Sección 2.3.2, Teorema 6), también mencionado en la sección de Resultados previos.

## 5.1 Soluciones periódicas en sistemas generales

En esta sección, analizaremos la existencia de soluciones periódicas para sistemas generales con retardo. Una técnica habitual para este tipo de sistemas es transformar el problema en una ecuación de punto fijo para un operador compacto  $K : \mathcal{C} \rightarrow C_T$ , donde  $\mathcal{C} \subset C_T$  denotaba el interior del cono positivo. Para ello, empleamos el método de reducción de Lyapunov-Schmidt (ver secciones 2.3.3 y 2.3.4 del capítulo de Preliminares). El objetivo consiste en encontrar un subconjunto apropiado  $U \subset \mathcal{C}$  y definir una homotopía  $H(\lambda, x) : [0, 1] \times U \rightarrow C_T$ , que no se anule para  $x \in \partial U$  y todo  $\lambda \in [0, 1]$ . De esta forma, el cálculo del grado de Leray-Schauder para el problema original se reducirá al cálculo del grado de Brouwer de cierta función definida en un abierto de  $\mathbb{R}^N$ . Para esto se emplearán las condiciones que garantizan la persistencia, combinadas con algunas hipótesis adicionales. Para fijar ideas, podemos pensar en el caso escalar en el que, a grandes rasgos, la persistencia permite obtener cotas inferiores *a priori* de las soluciones, y se requiere alguna condición adicional que asegure también la existencia de cotas superiores. Para un sistema, la situación es algo más delicada pero, a partir de lo visto, ya es posible sospechar que las condiciones **(H1)**, **(H3)** y **(H4)** que recordaremos a continuación, impiden que, si  $x(t)$  es un cero de la homotopía para  $\lambda > 0$ , entonces las coordenadas de  $x(t)$  tomen valores demasiado cercanos a 0. Esta idea intuitiva se formaliza en el primer resultado del presente capítulo, en el que una condición adicional **(H9)** cumple el rol que, en el caso escalar, corresponde a la obtención de cotas superiores.

Para empezar, recordamos el problema general enunciado en el Capítulo 3:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (5.1)$$

donde  $f : [0, +\infty) \times [0, +\infty)^{2N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  es continua y  $\tau > 0$  es el retardo. A su vez, recordemos las condiciones:

**(H1)**  $f_j(t, x, y) > 0$  para todo par de valores  $x, y$  tal que  $x_j = 0$  e  $y \neq 0$ ,

**(H3)** existen  $t_0, r_0 > 0$  tales que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle > 0 \text{ para } t > t_0, V(x) < r_0,$$

**(H4)**  $\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq \langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle$  si  $V(y) \geq V(x)$ ,

donde  $V : (0, +\infty)^N \rightarrow (0, +\infty)$  es una función  $C^1$  y verifica

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} V(x) = 0.$$

Observamos, además, que consideraremos una inversa compacta a derecha del operador lineal  $L(x(t)) := x'(t)$  definido en el subespacio de funciones de promedio 0, es decir  $\{x \in C_T^1 : \bar{x} = 0\}$ .

**Teorema 13** *Asumamos que  $f$  es  $T$ -periódica en la primera coordenada, (H1), (H3), (H4) se cumplen y además que*

(H9) *existe  $R > r_0$ , con  $r_0$  de (H3), tal que*

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle < 0 \text{ para } r_0 \leq V(y) \leq V(x) = R.$$

*Llamemos  $\Omega = \{x \in [0, +\infty)^N : V(x) \in (r_0, R)\} \subset \mathbb{R}^N$  y supongamos que la característica de Euler de  $\Omega$  es distinta de cero. Entonces existe al menos una solución positiva  $T$ -periódica del sistema (5.1) cuya imagen está contenida en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Comencemos repasando el método de continuación. Dada una función  $\varphi \in C_T$ , recordemos que

$$\mathcal{I}(\varphi(t)) = \int_0^t \varphi(s) ds, \text{ y el promedio de } \varphi \text{ es: } \bar{\varphi} = \frac{1}{T} \mathcal{I}(\varphi(T)).$$

Además, el operador de Nemitskii  $\mathcal{N} : C_T \rightarrow C_T$  asociado al problema es:

$$\mathcal{N}(x(t)) := f(t, x(t), x(t - \tau)).$$

Dado el conjunto abierto y acotado  $\Omega = \{x \in [0, +\infty)^N : V(x) \in (r_0, R)\} \subset \mathbb{R}^N$ , llamamos

$$U = \{x \in \mathcal{C} : x(t) \in \Omega \text{ para todo } t > 0\} \subseteq \mathcal{C} \subset C_T.$$

El operador compacto mencionado en la introducción de este capítulo es  $K : \mathcal{C} \rightarrow C_T$  dado por

$$K(x(t)) := \bar{x} - t \overline{\mathcal{N}(x(t))} + \mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t))) - \overline{\mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t)))}.$$

Veamos que  $K$  está bien definido. Para comprobarlo, verifiquemos que  $K(x)$  es una función  $T$ -periódica: en efecto, como  $f$  es  $T$ -periódica, para  $x(t) \in \mathcal{C}$  se verifica que

$$K(x(t+T)) - K(x(t)) = -T \overline{\mathcal{N}(x)} + \int_t^{t+T} \mathcal{N}(x(s)) ds = -\mathcal{I}(\mathcal{N}(x(T))) + \mathcal{I}(\mathcal{N}(x(T))) = 0.$$

Por otro lado, es claro que  $K$  es compacto y se cumple que

$$\overline{K(x(t))} = \bar{x} - \frac{T \overline{\mathcal{N}(x(t))}}{2}.$$

Como anticipamos, el operador  $K$  expresa la reducción de Lyapunov-Schmidt.

Observemos que  $x \in \mathcal{C}$  es un punto fijo de  $K$  si y solo si  $x$  es una solución de la ecuación (5.1). En efecto, si  $x(t) = K(x(t))$  para todo  $t$ , tomando promedio obtenemos que

$$\bar{x} - \frac{T \overline{\mathcal{N}(x(t))}}{2}, \text{ por lo tanto } \overline{\mathcal{N}(x(t))} = 0.$$

Luego,

$$x(t) = K(x(t)) = \bar{x} + \mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t))) - \overline{\mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t)))}.$$

Derivando esta última expresión, se deduce que

$$x'(t) = \mathcal{N}(x(t)).$$

Recíprocamente, la igualdad  $x'(t) = \mathcal{N}(x(t))$ , combinada con el hecho de que  $x(t)$  es  $T$ -periódica, implica que

$$\overline{\mathcal{N}(x(t))} = 0 \text{ y } x(t) = c + \mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t))), \text{ para cierta } c \in \mathbb{R}.$$

Tomando promedio, se deduce que

$$c = \bar{x} - \overline{\mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t)))}.$$

Así, se obtiene:

$$K(x(t)) = c + \mathcal{I}(\mathcal{N}(x(t))) = x(t). \text{ Es decir, } x \text{ es un punto fijo de } K.$$

Lo anterior motiva la definición del operador continuo  $K_0 : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^N$  dado por

$$K_0(x(t)) := \bar{x} - \frac{T\overline{\mathcal{N}(x(t))}}{2}.$$

A su vez, consideramos para  $\lambda \in [0, 1]$ , la homotopía  $H : [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow C_T$  y los operadores  $K_\lambda : \bar{U} \rightarrow C_T$ , dados por

$$H(\lambda, x(t)) := x(t) - K_\lambda(x(t)), \text{ donde } K_\lambda(x(t)) := \lambda K|_{\bar{U}}(x(t)) + (1 - \lambda)K_0(x(t)).$$

El hecho de que  $\overline{K(x(t))} = K_0(x(t))$  implica que, como antes, para  $\lambda > 0$  se cumple:  $x \in \bar{U}$  es un punto fijo de  $K_\lambda$  si y solo si  $x'(t) = \lambda \mathcal{N}(x(t))$ , es decir

$$x'(t) = \lambda f(t, x(t), x(t - \tau)).$$

Afirmamos que  $K_\lambda$  no tiene puntos fijos en  $\partial U$ . Intuitivamente, puede verse como una consecuencia del hecho de que el semi-flujo apunta hacia el interior en  $\partial \Omega$ . En términos más precisos, tenemos que analizar por separado las posibilidades de que una solución de la ecuación anterior toque alguna de las diferentes regiones del borde de  $\Omega$ .

Por empezar, ya sabemos por **(H1)** que una solución  $x \in \bar{U}$  verifica  $x_i(t) > 0$  para todo  $t$ , es decir,  $x(t) \notin \bar{\Omega} \cap \{x_i = 0\}$ .

Por otro lado, observemos que para  $x \in \{V = R\}$  o  $x \in \{V = r_0\}$  la normal exterior es  $\nabla V(x(t))$  y  $-\nabla V(x)$ , respectivamente. En el primer caso, para  $x, y \in \bar{\Omega}$



con  $V(x) = R$ , la condición **(H9)** implica que  $\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle < 0$ . Ahora bien, notemos que si  $x \in \bar{U}$  es punto fijo de  $K_\lambda$  y para cierto  $t$  vale  $V(x(t)) = R$ , entonces en dicho punto la normal exterior debería ser perpendicular al vector  $x'(t)$ . Sin embargo

$$\langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle = \lambda \langle \nabla V(x(t)), f(t, x(t), x(t - \tau)) \rangle < 0,$$

lo que es absurdo. De manera análoga, si se cumplen **(H3)** y **(H4)** entonces vale  $\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle > 0$  cuando  $V(x) = r_0$  y  $V(x) \leq V(y)$ . En consecuencia, si suponemos que  $x \in \bar{U}$  es un punto fijo de  $K_\lambda$  tal que  $V(x(t)) = r_0$  para algún  $t$ , se obtiene  $\langle \nabla V(x(t)), x'(t) \rangle > 0$ , lo que es absurdo.

Falta analizar ahora lo que ocurre para  $\lambda = 0$ . Por simplicidad, podemos identificar  $\mathbb{R}^N$  con el subespacio de funciones constantes de  $C_T$ ; de esta forma, tenemos que  $U \cap \mathbb{R}^N = \Omega$ . Observemos, además, que los puntos fijos de  $K_0$  son constantes; luego, las condiciones **(H3)**, **(H4)** y **(H9)** implican que  $I - K_0$  no se anula en  $\partial U \cap \Omega$ . Esto significa que

$$\deg(I - K, U, 0) = \deg(I - K_0, U, 0).$$

Por otra parte, la imagen de  $K_0$  está contenida en  $\mathbb{R}^N$ , de modo que el grado de Leray-Schauder de  $I - K_0$  se calcula directamente como el grado de Brouwer de su restricción a  $\Omega$ . A tal fin, definimos ahora otra homotopía,

$$H_0(x, \lambda) := \lambda[x - K_0(x)] - (1 - \lambda)\nu(x), \quad \text{para } (x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times [0, 1],$$

donde  $\nu$  es la normal exterior extendida de manera continua al interior del dominio. Las hipótesis permiten ver que  $H_0$  no se anula cuando  $x \in \partial\Omega$ . En efecto, observemos que, para  $x$  constante, resulta  $K_0(x) = x - \frac{T}{2} \int_0^T f(t, x, x) dt$  y entonces

$$\langle H_0(x, \lambda), \nu(x) \rangle = \left\langle \frac{\lambda}{2} \int_0^T f(t, x, x) dt - (1 - \lambda)\nu(x), \nu(x) \right\rangle.$$

De acuerdo con el análisis previo, este último término es siempre negativo cuando  $x$  pertenece a las diferentes regiones de  $\partial\Omega$ . De esta forma, por la invariancia homotópica del grado y el teorema de Hopf (ver 2.3.2, Teorema 7), concluimos que

$$\deg_{LS}(I - K, U, 0) = \deg_B(I - K_0, \Omega, 0) = \deg_B(-\nu, \Omega, 0) = (-1)^N \chi(\Omega) \neq 0.$$

□

Como vimos, en los resultados de persistencia la hipótesis **(H4)** se puede reemplazar por **(H5)** y **(H6)**, que por comodidad recordamos aquí:

**(H5)** existe  $\eta > 0$  tal que

$$\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq \langle \nabla V(x), f(t, x, x) \rangle \text{ si } V(x) \leq V(y) \leq \eta$$

y

**(H6)** existe  $k > 0$  tal que  $\langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle \geq -kV(x)$ .

En consecuencia, se obtiene el siguiente resultado de manera análoga al teorema previo:

**Teorema 14** *Si  $f$  es  $T$ -periódica en la primera coordenada, **(H1)**, **(H3)**, **(H5)**, **(H6)** y **(H9)** se cumplen, entonces existe al menos una solución positiva  $T$ -periódica de (5.1).*

Cabe destacar que, cuando el sistema es autónomo, las condiciones anteriores garantizan la existencia de un equilibrio positivo y, además, el conjunto de aquellas condiciones iniciales que toman valores en  $\Omega$  es (positivamente) invariante para el semiflujo. En términos más precisos, consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), x(t - \tau)) \\ x_0(s) &= \varphi(s), \quad s \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (5.2)$$

y asumimos que **(H1)**, **(H3)** y **(H9)** se cumplen, de modo que para  $x \in \partial\Omega$  el campo

$$\phi : x \mapsto f(x, x)$$

apunta hacia adentro. Esto implica que la homotopía dada por

$$\lambda\phi(x) - (1 - \lambda)\nu(x)$$

no se anula sobre  $\partial\Omega$  para  $\lambda \in [0, 1]$ . De esta forma, si asumimos que  $\chi(\Omega) \neq 0$ , entonces concluimos que  $\deg(\phi, \Omega, 0) \neq 0$ . Esto quiere decir que  $\phi$  tiene un cero  $x^* \in \Omega$ , que corresponde a un equilibrio del sistema.

Notemos que, debido al retardo, la condición **(H3)** sola no alcanza para asegurar que el semiflujo no escapa de  $\Omega$ ; sin embargo, si además asumimos **(H4)**, o bien **(H5)** y **(H6)**, entonces cualquier solución con condición inicial  $\varphi$  tal que  $\varphi(t) \in \bar{\Omega}$  para  $t \in [-\tau, 0]$  satisface  $x(t) \in \Omega$  para todo  $t > 0$ . Se pueden obtener resultados de estabilidad para el equilibrio  $x^*$  bajo condiciones adicionales mediante el uso de la teoría clásica de ecuaciones diferenciales con retardo (por ejemplo, empleando funcionales de Lyapunov).

## 5.2 Soluciones periódicas en Nicholson

En esta segunda parte, investigamos la existencia de soluciones  $T$ -periódicas en el sistema tipo Nicholson en  $N$  dimensiones estudiado en el capítulo previo. Recordemos que el sistema está dado por:

$$x'_i(t) = -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) f(x_{i,\tau_j}(t)) - H_i(t, x), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

Como antes, los términos con retardo son

$$f(x_{i,\tau_j}(t)) = x_i(t - \tau_j) e^{-x_i(t - \tau_j)}.$$

Además, asumiremos ahora que  $p_{i,j} \in C_T$  y las funciones  $d_i$ ,  $b_{i,l}$  y  $H_i$  son  $T$ -periódicas en la variable  $t$ . Como antes, por conveniencia llamaremos  $G_i(t, x) := d_i(t, x) + H_i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ .

Como en la sección previa, utilizaremos el método de continuación, adaptándolo de manera conveniente a este sistema. A tal fin, recordemos que  $\mathcal{C}$  es el interior del cono positivo de  $C_T$  y definamos los operadores

$$\Phi := (\phi_1, \dots, \phi_N) : \mathcal{C} \rightarrow C_T, \quad \mathcal{K} : \mathcal{C} \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) \rightarrow C_T,$$

de la siguiente manera:

$$\phi_i(x)(t) := -d_i(t, x_i) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) f(x_{i,\tau_j}(t)) - H_i(t, x),$$

$\mathcal{K}(\Phi(t)) := x(t)$ , la única solución de la ecuación  $x'(t) = \Phi(t)$  tal que  $\bar{x} = 0$ .

Además, como en la sección previa, vamos a identificar el conjunto de funciones constantes positivas de  $\mathcal{C}$  con  $(0, +\infty)^N$ . Finalmente, con miras a calcular el grado del operador asociado de manera sencilla, definimos  $g : (0, +\infty)^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  como

$$g(x) = -\overline{\Phi(x)} = -\frac{1}{T} \int_0^T \Phi(x)(t) dt.$$

Recordemos que en el capítulo previo asumimos que los siguientes límites son uniformes:

$$G_i^0(t) := \limsup_{x_i \rightarrow 0^+} \frac{G_i(t, x)}{x_i},$$

$$b_{0i,l}(t) := \liminf_{x_l \rightarrow 0^+} \frac{b_{i,l}(t, x_l)}{x_l}, \quad \text{para } l \neq i,$$

Además, vimos que la siguiente condición asegura la persistencia:

$$G_i^0(t) < (1 - \delta) \left( \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{0i,l}(t) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) \right). \quad (5.4)$$

Al igual que en el caso general, necesitaremos condiciones adicionales que permitan obtener cotas superiores de las soluciones. Con tal objetivo en mente, definimos

$$G_{i,\infty}(t) := \liminf_{x_i \rightarrow +\infty} \frac{G_i(t, x)}{x_i},$$

$$b_{i,l}^\infty(t) := \limsup_{x_l \rightarrow +\infty} \frac{b_i(t, x_l)}{x_l}, l \neq i$$

donde asumimos que los límites son uniformes en  $t$  y  $G_{i,\infty}$  es uniforme en  $x_l$  con  $l \neq i$ . A su vez, asumimos que existe  $\beta > 0$  tal que

$$G_{i,\infty}(t) > \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}^\infty(t) + \beta. \quad (5.5)$$

Esto permite enunciar el siguiente lema:

**Lema 3** *Supongamos que valen (5.4) y (5.5) y que las funciones  $b_{i,l}$  son crecientes. Entonces todas las coordenadas de las soluciones positivas del sistema  $x' = \lambda\Phi(x)$  están uniformemente acotadas para  $\lambda \in (0, 1]$ .*

*Demostración.* Consideremos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  una solución del sistema  $x' = \lambda\Phi(x)$  y fijemos  $R := \max_{1 \leq i \leq N} \{x_i(t), t \in [0, T]\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $R = \|x_1\|_\infty$  y fijar  $t^* \in [0, T]$  tal que  $x_1(t^*) = R$ . De la primera ecuación del sistema  $x' = \lambda\Phi(x)$ , se deduce que  $x'_1(t^*) = 0$ , por lo tanto

$$G_1(t^*, x(t^*)) = \sum_{l=2}^N b_{1,l}(t^*, x_l(t^*)) + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t^*) f(x_{1,\tau_j}(t^*)).$$

Dado que  $f(x_{1,\tau_j}(t^*)) \leq \frac{1}{e}$  y  $R$  es el valor máximo entre  $x_1^*, \dots, x_N^*$  deducimos

$$G_1(t^*, x(t^*)) = R \frac{G_1(t^*, x(t^*))}{R} \leq R \left( \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t^*, x_l(t^*))}{x_l(t^*)} \right) + \frac{p^*}{e},$$

donde

$$p^* = \max_{1 \leq i \leq N, t \in [0, T]} \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t).$$

En consecuencia,

$$R \left( \frac{G_1(t^*, x(t^*))}{R} - \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t^*, x_l(t^*))}{x_l(t^*)} \right) \leq \frac{p^*}{e}. \quad (5.6)$$

Por (5.5), existe una constante  $\tilde{R}$  tal que para  $x_1 \geq \tilde{R}$  se verifica

$$\frac{G_1(t, x)}{x_1} > \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t, x_l)}{x_l} + \beta \quad (5.7)$$

De esta forma, para  $R \geq \tilde{R}$ , resulta

$$\frac{G_1(t^*, x(t^*))}{R} > \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t^*, x_l(t^*))}{x_l(t^*)} + \beta.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (5.6), resulta entonces  $\beta < \frac{p^*}{Re}$  y, en definitiva,  $R \leq \max\{\tilde{R}, \frac{p^*}{e\beta}\} := R_0$ . Concluimos que  $x_i(t) \leq R_0$  para  $i = 1, \dots, N$  y todo  $t$ .

Probaremos ahora la existencia de cotas inferiores. A tal fin, definimos el valor  $\varepsilon := \min_{1 \leq i \leq N} \{x_i(t), t \in [0, T]\}$ . Como antes, podemos suponer que tal mínimo se realiza en la primera coordenada y fijar  $t_* \in [0, T]$  tal que  $x_1(t_*) = \varepsilon$ . Nuevamente, se tiene que  $x_1'(t_*) = 0$ , vale decir:

$$G_1(t_*, x(t_*)) = \sum_{l=2}^N b_{1,l}(t_*, x_l(t_*)) + \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_*) f(x_{1,\tau_j}(t_*)).$$

Podemos suponer que  $R_0 > 1$  y fijar  $R_1 < 1$  tal que  $f(R_1) = f(R_0)$ . Es claro que también podemos asumir  $\varepsilon < R_1$  pues, en caso contrario,  $R_1$  es una cota inferior para  $x$ . Como  $f$  crece hasta  $x = 1$  y luego decrece, tenemos dos posibilidades: si  $x_{1,\tau_j}(t_*) > 1$ , entonces  $f(x_{1,\tau_j}(t_*)) \geq f(R_0) = f(R_1) \geq f(\varepsilon)$ ; en caso contrario,  $f(x_{1,\tau_j}(t_*)) \geq f(\varepsilon)$  por ser  $f$  creciente en  $[0, 1]$ . Concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{G_1(t_*, x(t_*))}{\varepsilon} - \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_*, x_l(t_*))}{x_l(t_*)} &\geq \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_*) e^{-\varepsilon} \\ &\geq \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_*) + p^*(e^{-\varepsilon} - 1). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Teniendo en cuenta (5.4) y el hecho de que las funciones  $p_{1,j}$  son positivas y periódicas, podemos fijar  $\tilde{\varepsilon} > 0$  y  $\gamma < p^*$  tales que para  $0 < x_1 < \tilde{\varepsilon}$  se cumple:

$$\frac{G_1(t, x)}{x_1} - \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t, x_l)}{x_l} < \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t) - \gamma.$$

En particular, para  $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$  se deduce

$$\frac{G_1(t_*, x(t_*))}{x_1(t_*)} - \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t_*, x_l(t_*))}{x_l(t_*)} < \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t_*) - \gamma$$

y, combinando esto con (5.8), resulta  $-\gamma > p^*(e^{-\varepsilon} - 1)$ , es decir:

$$e^{-\varepsilon} < 1 - \frac{\gamma}{p^*}.$$

Esto significa que  $\varepsilon > \min\{\tilde{\varepsilon}, -\ln(1 - \frac{\gamma}{p^*})\} := \varepsilon_0$  y, finalmente,  $x_i(t) \geq \varepsilon_0$  para todo  $i$  y todo  $t$ .  $\square$

Estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de esta sección:

**Teorema 15** *Supongamos que se cumplen las hipótesis del lema anterior, entonces el sistema (5.3) tiene al menos una solución  $T$ -periódica no trivial.*

*Demostración.* Consideremos la siguiente homotopía definida para  $x \in \mathcal{C}$  y  $\lambda \in [0, 1]$

$$F_\lambda(x) = x - \bar{x} - \overline{\Phi(x)} - \lambda\mathcal{K}(\Phi(x) - \overline{\Phi(x)}).$$

Al igual que en el caso abstracto, para  $\lambda > 0$  se verifica que  $x \in \mathcal{C}$  es una solución de  $x' = \lambda\Phi(x)$  si y solo si  $x$  es un cero de  $F_\lambda$ .

Teniendo en cuenta los valores  $\varepsilon_0$  y  $R_0$  obtenidos en el lema anterior, definimos  $U = \{x \in \mathcal{C} : \varepsilon < x_i(t) < R\}$  para ciertos valores positivos  $\varepsilon < \varepsilon_0$  y  $R > R_0$ . Esta elección garantiza que  $F_\lambda$  no se anula en la frontera de  $U$  cuando  $\lambda > 0$ . Demostraremos que  $F_0$  tampoco se anula en  $\partial U$  y que su grado respecto de 0 es distinto de cero. A partir de la invariancia de grado, esto implicará que  $\deg(F_1, U, 0) \neq 0$ , de donde se sigue la existencia de una solución  $T$ -periódica del sistema en el conjunto  $U$  (y, por lo tanto, no trivial).

En primer lugar, observemos que la imagen de  $I - F_0$  está contenida en el subespacio de las funciones constantes, que identificamos con  $\mathbb{R}^N$ . Por otra parte, la restricción de  $F_0$  a dicho subespacio coincide con la función  $g$ ; luego, llamando

$$\Omega := U \cap \mathbb{R}^N = (\varepsilon, R)^N,$$

basta con demostrar que  $g$  no se anula en  $\partial\Omega$  y que  $\deg(g, \Omega, 0) \neq 0$ . En rigor, probaremos que  $g$  es homotópica a una traslación de la identidad, que tiene un (único) cero en  $\Omega$ .

Concretamente, veremos que  $g$  satisface una condición del tipo Poincaré-Miranda, pues cada una de sus coordenadas tiene un signo diferente en las correspondientes caras del paralelepípedo  $\partial\Omega$ , es decir:

$$\begin{cases} g_1(\varepsilon, x_2, \dots, x_N) < 0, \\ g_2(x_1, \varepsilon, \dots, x_N) < 0, \\ \vdots \\ g_N(x_1, x_2, \dots, \varepsilon) < 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(R, x_2, \dots, x_N) > 0, \\ g_2(x_1, R, \dots, x_N) > 0, \\ \vdots \\ g_N(x_1, x_2, \dots, R) > 0, \end{cases}$$

donde siempre se asume  $\varepsilon \leq x_i \leq R$ . Tomando cualquier  $q \in \Omega$ , lo anterior implica que la homotopía lineal

$$\lambda g + (1 - \lambda)(I - q)$$

no se anula en  $\partial\Omega$ . En efecto, supongamos que  $x$  pertenece a alguna de las caras de  $\partial\Omega$ , por ejemplo  $x = (\varepsilon, x_2, \dots, x_N)$ . En tal caso,  $g_1(x) < 0$  y también  $x_1 = \varepsilon < q_1$ , lo que prueba que la primera coordenada de la homotopía es estrictamente negativa en  $x$ .

Para ver que  $g$  verifica las propiedades mencionadas, tomemos  $x_1 = \varepsilon \leq x_i \leq R$ ,  $i = 2, \dots, N$  y calculemos

$$\begin{aligned} g_1(\varepsilon, x_2, \dots, x_N) &= \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( G_1(t, \varepsilon, x_2, \dots, x_N) - \sum_{l=2}^N b_{1,l}(t, x_l) - \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t) f(\varepsilon) \right) dt. \end{aligned}$$

Empleando (5.4), podemos elegir  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  tal que  $e^{-\varepsilon} > 1 - \delta$  y entonces vale

$$\frac{G_1(t, \varepsilon, x_2, \dots, x_N)}{\varepsilon} < \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t, x_l)}{\varepsilon} + e^{-\varepsilon} \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t),$$

de donde se deduce que  $g_1(\varepsilon, x_2, \dots, x_N) < 0$ . Un razonamiento análogo vale para probar que  $g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_N) < 0$  con  $2 \leq i \leq N$ .

Consideremos ahora las caras superiores, comenzando por la primera, vale decir:  $\varepsilon \leq x_i \leq R = x_1$ .

Como antes, escribimos

$$\begin{aligned} g_1(R, x_2, \dots, x_N) &= \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left( G_1(t, R, x_2, \dots, x_N) - \sum_{l=2}^N b_{1,l}(t, x_l) - \sum_{j=1}^k p_{1,j}(t) f(R) \right) dt. \end{aligned}$$

Por (5.5), se deduce que para  $R \gg 0$

$$\frac{G_1(t, R, x_2, \dots, x_N)}{R} > \sum_{l=2}^N \frac{b_{1,l}(t, x_l)}{R} + \beta.$$

Por lo tanto, si además elegimos  $R$  de manera tal que  $\frac{\beta}{p^*} > e^{-R}$ , entonces obtenemos  $g_1(R, x_2, \dots, x_N) > 0$ . En forma análoga se prueba que  $g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, R, \dots, x_N)$  para  $2 \leq i \leq N$ .

A partir de lo anterior, concluimos:

$$\deg(F_1, U, 0) = \deg(F_0, U, 0) = \deg(g, \Omega, 0) = \deg(I - q, \Omega, 0) = 1$$

□





# Chapter 6

## Atractores

En esta capítulo estudiaremos la posibilidad de que el equilibrio nulo de un sistema sea un atractor (local o global) de las trayectorias positivas. Demostraremos que, en cierto sentido amplio, las condiciones suficientes para la persistencia impuestas en los capítulos 3 y 4 también son necesarias: más precisamente, veremos que si no se cumplen entonces, ciertas condiciones adicionales implican que el cero es un atractor global. Esto generaliza la situación detallada en la introducción para el modelo escalar de Nicholson

$$x'(t) = -dx(t) + px(t - \tau)e^{-x(t-\tau)} \quad (6.1)$$

donde, para  $p > d$  se verifica la persistencia uniforme, mientras que si  $p \leq d$  entonces todas las trayectorias positivas convergen a 0. Veremos primero un resultado general para el caso abstracto

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \quad (6.2)$$

y, a continuación, el ejemplo particular del sistema estudiado en el Capítulo 4, para el cual se obtendrán condiciones más específicas.

### 6.1 Atractividad global del equilibrio trivial en sistemas generales

Inspirándonos en los modelos poblacionales, para enunciar nuestro resultado establecemos una condición que permita obtener una cota superior para el semi-flujo. Como siempre, supondremos que vale **(H1)**, a fin de garantizar en primer lugar que las soluciones con dato inicial positivo se mantienen siempre positivas. Consideremos una función  $V$  como en el Capítulo 3, una función continua  $a : [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$

y llamemos:

$$\begin{aligned} F(t, x, y) &= \langle \nabla V(x), f(t, x, y) \rangle + a(t)V(x), \\ F^*(t, r) &= \sup_{V(x), V(y) \leq r} \frac{F(t, x, y)}{a(t)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Por ejemplo, en la ecuación de Nicholson con  $V(x) = x$ , podemos elegir  $a(t) = d$ , que corresponde a la tasa de mortalidad.

Emplearemos nuevamente la notación  $v(t) := V(x(t))$  donde  $x$  es una solución de (6.2) y  $V^\mu := V^{-1}(0, \mu)$ . Por conveniencia, definimos además la función

$$\phi^*(r) := \sup_{t \geq 0} F^*(t, r),$$

que supondremos continua.

**Teorema 16** *Supongamos que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\mu > 0$  tal que  $V^\mu \subset B_\varepsilon(0)$  y supongamos que existe  $R_0$  tal que  $\phi^*(r) < r$  para  $0 < r \leq R_0$ . Entonces toda solución con datos iniciales  $\varphi$ , tal que  $\varphi_j(t) < R_0$  para todo  $j$  y todo  $t \in [-\tau, 0]$ , tiende a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Observemos, en primer lugar, que si  $v \leq r$  en  $[t - \tau, t]$  y  $v'(t) \geq 0$ , entonces

$$a(t)v(t) \leq F(t, x(t), x(t - \tau))$$

es decir,

$$v(t) \leq F^*(t, r).$$

De esta forma, si para  $t_1 \geq 0$  sabemos que  $v(t) < R_0$  si  $t \leq t_1$ , entonces pueden ocurrir dos cosas:

- $v(t_1) > R_1 := \phi(R_0)$  y entonces  $v'(t_1) < 0$ , o bien
- $v(t_1) \leq R_1$ , y entonces  $v(t) \leq R_1$  para todo  $t \geq t_1$ . En efecto, si esto no ocurre, entonces existe un valor  $t^* > t_1$  tal que  $v(t^*) > R_1$ , pero en tal caso  $v'(t)$  sería positivo para algún  $t \in (t_1, t^*)$  con  $v(t) > R_1$ , lo que es absurdo.

Lo anterior implica que  $v$  está globalmente definida y es decreciente para  $t \geq 0$ , o bien permanece dentro del intervalo  $(0, R_1]$  a partir de cierto  $t_1 \geq 0$ . En este último caso, como además vale por hipótesis  $R_1 < R_0$ , podemos repetir el razonamiento: definiendo  $R_2 := \phi^*(R_1)$ , se cumple que  $v$  decrece en  $[t_1, +\infty)$  o bien  $v(t) \leq R_2$  a partir de cierto  $t_2 > t_1$ . De esta forma, si definimos recursivamente  $R_{k+1} := \phi^*(R_k) < R_k$ , pueden darse dos situaciones diferentes:

1. Existe  $t_k \rightarrow +\infty$  tal que  $v(t) \in (0, R_k]$  para  $t \geq t_k$ .

2. Existen  $k$  y  $t_k$  tales que  $v(t) \in (R_{k+1}, R_k]$  y decrece estrictamente para  $t \geq t_k$ .

En el primer caso, como la sucesión  $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$  es estrictamente decreciente, se deduce que

$$\phi^*\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} R_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^*(R_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} R_k.$$

Debido al hecho de que  $\phi^*(r) < r$ , concluimos que  $R_k \rightarrow 0$  y, en consecuencia,  $v(t) \rightarrow 0$  para  $t \rightarrow +\infty$ .

Para completar la prueba, demostraremos que la segunda situación no puede darse. En efecto, si  $v(t)$  decrece y converge a cierto  $r > 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ , entonces podemos fijar  $\tilde{r} > r$  tal que  $\phi^*(\tilde{r}) < r$  y  $\tilde{t}$  tal que  $v(t) \leq \tilde{r}$  para  $t \geq \tilde{t}$ . Se sigue que  $v(t) \leq \phi^*(\tilde{r}) < r$  para  $t \geq \tilde{t} + \tau$ , lo que contradice el hecho de que  $v(t) \rightarrow r$ .

De esta forma, dado  $\varepsilon > 0$  fijamos  $\mu > 0$  tal que  $V^\mu \subset B_\varepsilon(0)$  y un valor  $t_0$  tal que  $v(t) < \mu$  para  $t > t_0$ . Se deduce que  $|x(t)| < \varepsilon$  para  $t > t_0$ , lo que completa la prueba.  $\square$

**Ejemplo 2** En el modelo de Nicholson escalar (6.1) con  $p \leq d$ , podemos considerar  $V(x) = \frac{x^2}{2}$  y  $a = 2d$ . Luego resulta  $F(x, y) = pxye^{-y}$ , de donde

$$\phi^*(r) = \max_{x, y \leq \sqrt{2r}} \frac{p}{2d} xye^{-y} \leq \begin{cases} \frac{p}{d} r e^{-\sqrt{2r}} & \text{si } r \leq \frac{1}{2} \\ \frac{p}{d} \frac{\sqrt{2r}}{2e} & \text{si } r > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esto muestra que  $\phi^*(r) < r$  para todo  $r > 0$ , por lo que concluimos que 0 es un atractor global para todas las soluciones positivas. El resultado sigue siendo cierto si  $p$  y  $d$  son funciones continuas positivas, bajo la hipótesis de que  $p(t) \leq d(t)$  para todo  $t$ .

## 6.2 Atractividad global del equilibrio trivial en Nicholson

El objetivo de esta sección es demostrar que, bajo condiciones adecuadas, la solución trivial es un atractor global para las trayectorias positivas del problema

$$x'_i(t) = -d_i(t, x_i(t)) + \sum_{l=1, l \neq i}^N b_{i,l}(t, x_l(t)) + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) f(x_{i,\tau_j}(t)) - H_i(t, x(t)), \quad (6.4)$$

donde recordemos que los términos con retardos son  $f(x_{i,\tau_j}(t)) = x_i(t - \tau_j)e^{-x_i(t - \tau_j)}$ . Al igual que en los capítulos previos, escribiremos  $G_i := d_i + H_i$ .

**Teorema 17** *Supongamos que existe  $c > 0$  tal que  $\sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) \geq c > 0$  y*

$$\frac{G_i(t, x)}{x_i} \geq \sum_{l=1, l \neq i}^N \frac{b_i(t, x_l)}{x_l} + \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (6.5)$$

*se verifica para todo  $t$ , entonces toda solución positiva (4.6) con condición inicial  $\varphi > 0$ , tiende a 0 cuando  $t \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Sea  $x$  una solución positiva y definamos  $u(t) := \max\{x_i(t)\}$ . Observemos que, para demostrar nuestro resultado, basta con mostrar que  $u \rightarrow 0$ . Afirmamos que si  $u \searrow \alpha$  entonces  $\alpha = 0$ . En primer lugar, supongamos que  $0 < \alpha < 1$ . En este caso, está claro que, como  $u_{\tau_j}(t) < 1$  para  $t \gg 0$  y  $x_{i,\tau_j}(t) \leq u_{\tau_j}(t)$ , obtenemos:

$$\frac{x_{i,\tau_j}(t)e^{-x_{i,\tau_j}(t)}}{u(t)} \leq \frac{u_{\tau_j}(t)e^{-u_{\tau_j}(t)}}{u(t)}.$$

Esto implica,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x_{i,\tau_j}(t))}{u(t)} = e^{-\alpha}.$$

Para analizar el caso cuando  $\alpha \geq 1$ , elijamos  $\varepsilon > 0$  tal que  $\alpha \leq u(t) \leq \alpha + \varepsilon$  para  $t \gg 0$ . Tomamos  $\gamma < 1$  tal que  $\gamma e^{-\gamma} := (\alpha + \varepsilon)e^{-(\alpha + \varepsilon)}$ . Si  $x_{i,\tau_j}(t) \leq \gamma$  obtenemos

$$\frac{x_{i,\tau_j}(t)e^{-x_{i,\tau_j}(t)}}{u(t)} \leq \frac{u(t)e^{-u(t)}}{u(t)} \leq e^{-\alpha}.$$

Si  $x_{i,\tau_j}(t) > \gamma$ ,  $e^{-x_{i,\tau_j}(t)} \leq e^{-\gamma}$  entonces

$$\frac{x_{i,\tau_j}(t)e^{-x_{i,\tau_j}(t)}}{u(t)} \leq \frac{x_{i,\tau_j}(t)e^{-\gamma}}{u(t)} \leq \frac{u_{\tau_j}(t)e^{-\gamma}}{u(t)} \rightarrow e^{-\gamma}.$$

Elijamos  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $\max\{e^{-\alpha}, e^{-\gamma}\} \leq (1 - \varepsilon_0)$ , entonces

$$u'(t) \leq u(t) \left( \sum_{i=1, i \neq l}^N \frac{b_i(t, x_l)}{u(t)} + (1 - \varepsilon_0) \sum_{j=1}^k p_{i,j}(t) - \frac{G_i(t, x)}{u(t)} \right).$$

Teniendo en cuenta (6.5), deducimos que  $u'(t) \leq c_0 u(t)$  para  $c_0 < 0$ . En otras palabras,  $\ln u(t)' \leq c_0$ , se sigue que

$$\int_{T+\tau^*}^t \ln u(t)' dt \leq \int_{T+\tau^*}^t c_0 dt,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln u(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} [c_0(t - T - \tau^*) + \ln u(T + \tau^*)] = -\infty.$$

## 6.2. ATRACTIVIDAD GLOBAL DEL EQUILIBRIO TRIVIAL EN NICHOLSON65

Para completar la prueba, tenemos que demostrar que  $u$  converge a algún  $\alpha$ . Si  $u'(t_0) \geq 0$  para algún  $t_0$ , obtenemos  $u(t_0) \leq \frac{1}{e}$ . En efecto, ya que  $u_{\tau_j}(t_0)e^{-u_{\tau_j}(t_0)} \leq \frac{1}{e}$ ,

$$0 \leq u(t_0) \left( \sum_{i=1, i \neq l}^N \frac{b_i(t_0, x_l)}{u(t_0)} + \frac{\sum_{j=1}^k p_{i,j}(t_0)}{e u(t_0)} - \frac{G_i(t_0, x(t_0))}{u(t_0)} \right),$$

de donde

$$\frac{G_i(t_0, x(t_0))}{u(t_0)} \leq \sum_{i=1, i \neq l}^N \frac{b_i(t_0, x_l)}{u(t_0)} + \frac{\sum_{j=1}^k p_{i,j}(t_0)}{e u(t_0)}.$$

A partir de (6.5), obtenemos  $u(t_0) \leq \frac{1}{e}$ . Recordemos que  $\tau^* = \max_j \{\tau_j\}$ , luego  $u_{\tau_j}(t)e^{-u_{\tau_j}(t)} \leq f\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{1}{e}$  para  $t \geq t_1 + \tau^*$ . Nuevamente, si  $u'(t_2) \geq 0$  para algún  $t_2 \geq t_1 + \tau^*$ , entonces  $u(t_2) \leq f\left(\frac{1}{e}\right) = f^2(1) := f \circ f(1)$ . Repitiendo el argumento anterior, se define una sucesión  $u_n := u(t_n) \leq f^n(1) < f^{n-1}(1)$  con  $t_n \geq t_{n-1} + \tau^*$ . De aquí se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(1) = 0,$$

lo cual completa la demostración □



# Chapter 7

## Conclusiones y trabajos futuros

En esta tesis se han estudiado algunos sistemas semi-dinámicos asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales con retardo motivados por modelos de dinámica poblacional. Como caso particular, se ha estudiado una extensión del modelo clásico de Nicholson para  $N$  poblaciones, con varios retardos y términos de recolección no lineales. Se han obtenido condiciones suficientes para la persistencia de las soluciones y, además, se ha probado que dichas condiciones cumplen un rol relevante en el problema de encontrar órbitas periódicas, en presencia de alguna hipótesis adicional (usual en los modelos poblacionales) que garantice cotas superiores para las trayectorias. Por otra parte, cuando las condiciones obtenidas para la persistencia no se verifican, se ha probado que, bajo hipótesis apropiadas, el equilibrio trivial es -de manera local o global- asintóticamente estable para las trayectorias positivas. En particular, las condiciones obtenidas para los sistemas tipo Nicholson extienden resultados previos de la literatura.

En virtud de los resultados antes detallados, la tesis aquí presentada puede considerarse como punto de partida para estudios más amplios y aplicaciones diversas. Un tema de relevancia, por ejemplo, es el estudio de condiciones suficientes para la atractividad de las órbitas periódicas aquí obtenidas. En modelos clásicos como el de Nicholson autónomo, se conocen condiciones explícitas que aseguran que el (único) equilibrio no nulo es un atractor; dichas condiciones se extienden de manera natural para el caso no autónomo, lo que permite deducir la atractividad de la (única) solución periódica positiva. Es esperable que una situación análoga se observe en situaciones más generales, como muestran los ejemplos numéricos presentados en el apéndice. Esta línea de estudio será abordada en trabajos futuros.

Por otra parte, resulta de interés estudiar la posible aplicación de las técnicas aquí desarrolladas a sistemas de ecuaciones en diferencias, con el fin de comparar las condiciones obtenidas con algunos de los resultados clásicos de la teoría de sistemas

discretos. En tal sentido, el trabajo llevado a cabo en esta tesis constituye un gran estímulo para continuar con esta labor en los próximos años.



# Chapter 8

## Apéndice: Ejemplos numéricos

Para una presentación más completa, ilustraremos algunos de nuestros resultados con ejemplos numéricos. En concreto, consideramos un sistema tipo Nicholson para el caso  $N = 2$ , teniendo en cuenta términos no lineales, tanto en las tasas de natalidad y mortalidad, como en los términos de mutualismo y recolección. Los términos con retardos eran  $f(x_{i,\tau_j}(t))$  son  $x_i(t - \tau_j)e^{-x_i(t-\tau_j)}$

$$\begin{cases} x_1'(t) = -d_1(t, x_1) + b_1(t, x_2) + p_{1,1}f(x_{1,\tau_1}(t)) + p_{1,2}f(x_{1,\tau_2}(t)) - H_1(t, x) \\ x_2'(t) = -d_2(t, x_2) + b_2(t, x_1) + p_{2,1}f(x_{2,\tau_1}(t)) + p_{2,2}f(x_{2,\tau_2}(t)) - H_2(t, x) \end{cases} \quad (8.1)$$

Aquí tomamos  $\tau_1 = 5$ ,  $\tau_2 = 3$ ,  $p_{2,1} = p_{1,1}$ ,  $p_{2,2} = p_{1,2}$ . Es decir,

$$\begin{cases} x_1'(t) = -d_1(t, x_1) + b_1(t, x_2) + p_{1,1}f(x_{1,5}(t)) + p_{1,2}f(x_{1,3}(t)) - H_1(t, x) \\ x_2'(t) = -d_2(t, x_2) + b_2(t, x_1) + p_{1,1}f(x_{2,5}(t)) + p_{1,2}f(x_{2,\tau_2}(t)) - H_2(t, x) \end{cases} \quad (8.2)$$

A su vez, tomamos

$$\begin{cases} d_1 = 0.5 + 0.1 \sin(t), & p_{1,1} = 0.6 + 0.2 \cos(t), \\ d_2 = 1.1 + 0.2 \sin(t), & p_{1,2} = 1.2 + 0.7 \cos(t). \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} b_1 = (1 + 0.2 \sin(t))\left(\frac{x_2}{1+x_2}\right), & H_1 = \arctan\left(\frac{x_1}{1+x_2}\right), \\ b_2 = (1 + 0.4 \sin(t))\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right), & H_2 = \arctan\left(\frac{x_2}{1+x_1}\right). \end{cases} \quad (8.4)$$

Se muestran a continuación las trayectorias de  $x_1$  y  $x_2$  bajo diferentes condiciones.

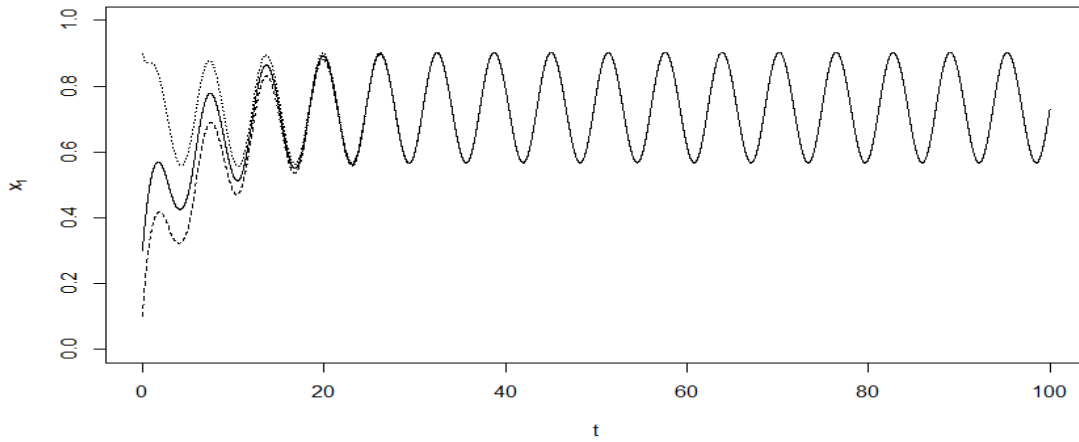


Figure 8.1: Ejemplo de persistencia uniforme y soluciones periódicas en la ecuación de Nicholson para  $x_1$ .

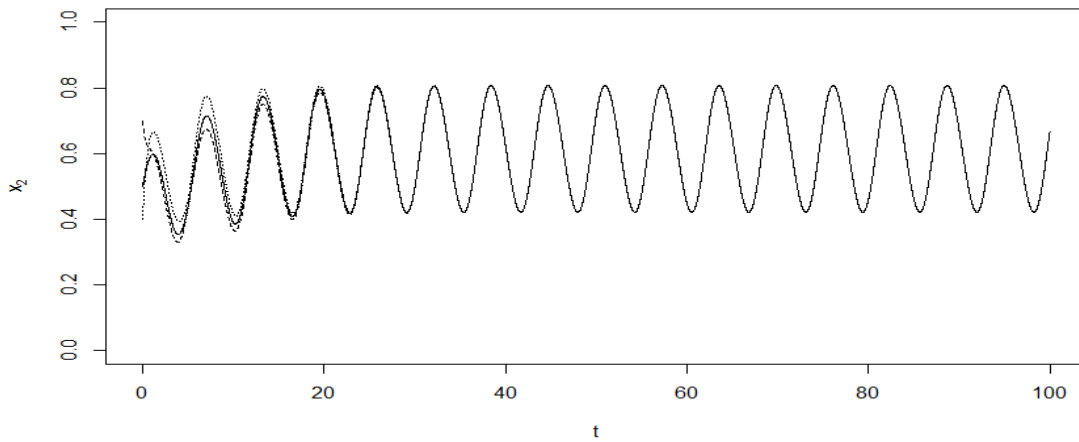


Figure 8.2: Ejemplo de persistencia uniforme y soluciones periódicas en la ecuación de Nicholson para  $x_2$ .

De los gráficos (8.1) y (8.2) se deduce que las condiciones enunciadas en el Capítulo 5, Teorema 15 implican la persistencia uniforme y la existencia de soluciones periódicas del sistema. Se puede observar, además, que los resultados numéricos aparentemente apuntan a que las soluciones periódicas son atractivas. Sin embargo, esta conclusión no se deduce de los resultados anteriores. En un trabajo futuro se estudiará si esto ocurre bajo condiciones análogas a las que permiten, en el caso escalar autónomo, probar que el equilibrio no trivial es asintóticamente estable.

El siguiente ejemplo numérico ilustra que la solución trivial es un atractor bajo las condiciones del Teorema 17. Ahora elegimos

$$\begin{cases} d_1 = 10.5 + 2 \sin(t), & p_{1,1} = 5.5 + 3.5 \cos(t), \\ d_2 = 10.8 + 3 \sin(t), & p_{1,2} = 3.6 + 2.1 \cos(t). \end{cases}$$

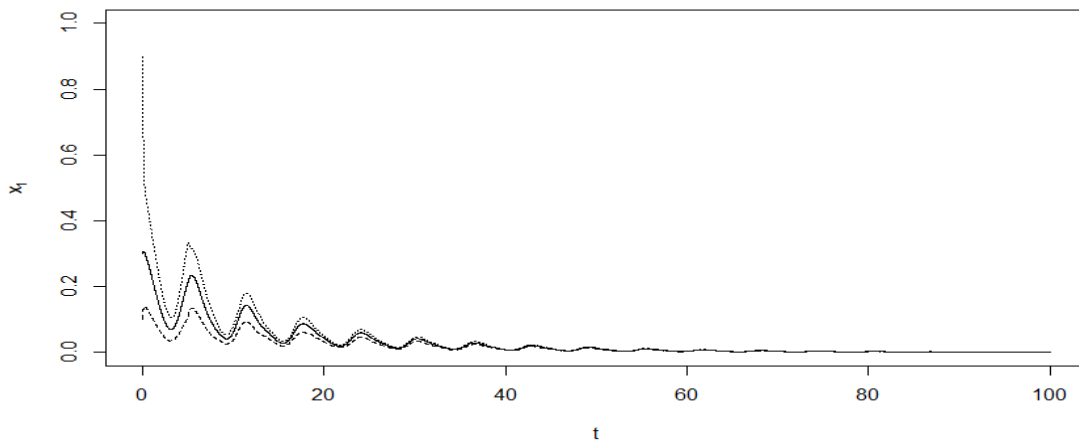


Figure 8.3: Ejemplo de la atractividad global del equilibrio trivial en la ecuación de Nicholson para  $x_1$ .

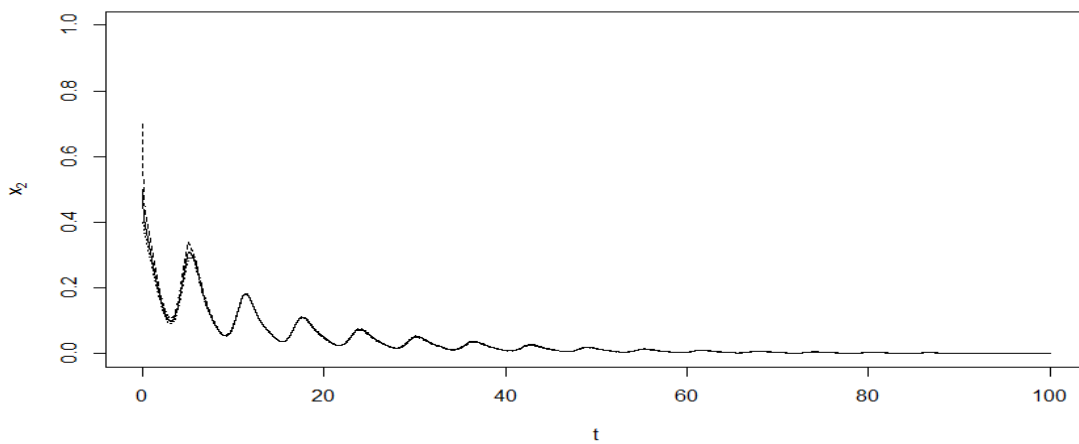


Figure 8.4: Ejemplo de la atractividad global del equilibrio trivial en la ecuación de Nicholson para  $x_2$ .

melt

# Bibliography

- [1] E. Akin, *Topological dynamics: A survey*. Mathematics Department, the city college 137 (2007).
- [2] P. Amster, *Topological methods in the study of boundary value problems*. Springer (2014).
- [3] P. Amster, R. Balderrama, L. Idels, *Existence of periodic solutions in the modified Wheldon model of CML*. Electronic Journal of Differential Equations 272 (2013) 1–14.
- [4] P. Amster, M. Bondorevsky, *Persistence and periodic solutions in systems of delay differential equations*. Applied Mathematics and Computation, 403 (2021), 126–193.
- [5] P. Amster, M. Bondorevsky, *On persistence of a Nicholson-type system with multiple delays and nonlinear harvesting*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 67 (2022).
- [6] P. Amster, A. Déboli, *Existence of positive  $T$ -periodic solutions of a generalized Nicholson's blowflies model with a nonlinear harvesting term*. Applied Mathematics Letters 25, no. 9 (2012) 1203–1207.
- [7] P. Amster, A. Déboli, *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of Periodic Solutions of a Nicholson Type Delay System*. Differ. Equ. Dyn. Syst. 27 (4) (2016) 439–447. doi: 10.1007/s12591-016-0285-y.
- [8] P. Amster, M. P. Kuna, G. Robledo, *Multiple solutions for periodic perturbations of a delayed autonomous system near an equilibrium*. Communications on Pure and Applied Analysis 18 (4) (2019) 1695–1709. doi: 10.3934/cpaa.2019080.
- [9] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*. Fundamenta mathematicae 3.1 (1922) 133–181.

- [10] L. Berezensky, E. Braverman, *Boundedness and persistence of delay differential equations with mixed nonlinearity*. Applied Mathematics and Computation 279 (2016) 154–169.
- [11] L. Berezensky, E. Braverman, L. Idels, *Nicholson's blowflies differential equation revisited: main results and open problems*. Appl. Math. Model 34 (2010) 1405–1417.
- [12] L. Berezensky, L. Idels, L. Troib, *Global dynamics of Nicholson-type delay system with applications*. Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011), 436–445.
- [13] LEJ. Brouwer, *Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich*. Math Ann 69 (1910), 176–180.
- [14] T. Burton, V. Hutson, *Repellers in systems with infinite delay*. J. Math. Anal. Appl. 137 (1989) 240–263
- [15] G. Butler, H. Freedman, P. Waltman, *Uniformly persistent systems*. Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986) 425–429.
- [16] G. J. Butler, P. Waltman, *Persistence in dynamical systems*. J. Differential Equations 63 (1986) 255–263.
- [17] W. Chen, *Permanence for Nicholson-type delay systems with patch structure and nonlinear density-dependent mortality terms*. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 2012, no. 73 (2012) 1–14.
- [18] E. Coddington, N. Levinson, T. Teichmann, *Theory of ordinary differential equations* (1956)
- [19] J. De Vries, *Elements of topological dynamics*. Springer Science & Business Media, vol 257 (2013)
- [20] S. Ellermeyer, S. Pilyugin, R. Redheffer, *Persistence criteria for a chemostat with variable nutrient input*. Journal of Differential Equations 171 (1) (2001) 132–147.
- [21] T. Faria, *Periodic solutions for a non-monotone family of delayed differential equations with applications to Nicholson systems*. Journal of Differential Equations 263, no. 1 (2017) 509–533.
- [22] T. Faria, R. Obaya, A. Sanz, *Asymptotic behaviour for a class of non-monotone delay differential systems with applications*. J. Dyn. Diff. Equat. 30 (2018) 911–935.

- [23] T. Faria, *Permanence for nonautonomous differential systems with delays in the linear and nonlinear terms*. Mathematics 9.3 (2021) 263.
- [24] H. Freedman, P. Moson, *Persistence definitions and their connections*. Proc. Am. Math. Soc. 109 (4) (1990) 1025–1033.
- [25] H. Freedman, S. Ruan, *Uniform persistence in functional differential equations*. Journal of Differential Equations 115 (1) (1995) 173–192.
- [26] A. Fonda, *Uniformly persistent semidynamical systems*. Proc. Am. Math. Soc. 104 (1) (1988) 111–116.
- [27] A. Fonda, *Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations*. Proc. Am. Math. Soc. 99 (1) (1987) 79–85.
- [28] R. Gaines and J. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*. Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 568, Springer, New York (1977).
- [29] T.C. Gard, *Uniform persistence in multispecies population models*. Math. Biosciences 85 (1987), 93–104.
- [30] W. Gurney, S. Blythe and R. Nisbet, *Nicholson’s blowflies revisited*. Nature 287 (5777) (1980) 17–21.
- [31] H. Hopf, *Vektorfelder in  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 96 (1927) 225–250.
- [32] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer’s fixed point theorem*. Duke Math. J. 8 (1941) 457–459.
- [33] M. A. Krasnoselskii, *An alternative principle for establishing the existence of periodic solutions of differential equations with a lagging argument*. Soviet Math. Dokl. 4 (1963) 1412–1415.
- [34] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, 1984.
- [35] W. Kulpa, *The poincaré-miranda theorem*. The American Mathematical Monthly, 104 (6), 1997) 545–550.
- [36] J. Li, C. Du, *Existence of positive periodic solutions for a generalized Nicholson’s blowflies model*. Journal of Computational and Applied Mathematics 221, no. 1 (2008) 226–233.

- [37] B. Liu, S. Gong, *Permanence for Nicholson-type delay systems with nonlinear density-dependent mortality terms*. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* 12, no. 4 (2011) 1931–1937.
- [38] T. Malthus, D. Winch, *An Essay on the Principle of Population*. Cambridge university press, 1992.
- [39] J. Mawhin, *Periodic solutions of nonlinear functional differential equations*. *Journal of Differential Equations* 10.2 (1971) 240–261.
- [40] J. W. Milnor, D. W. Weaver, *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton university press, 1997.
- [41] A. J. Nicholson, *An outline of the dynamics of animal populations*. *Australian journal of Zoology* 2 (1) (1954) 9–65.
- [42] R. Obaya, A. Sanz, *Uniform and strict persistence in monotone skew-product semiflows with applications to non-autonomous Nicholson systems*. *Journal of Differential Equations* 261, no. 7 (2016) 4135–4163.
- [43] G. Ossandon, D. Sepulveda, *Existence of periodic solution of Nicholson-type system with nonlinear density-dependent mortality*. arXiv:2001.10522 (2020).
- [44] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1893).
- [45] S. Ruan, G. Wolkowicz, *Persistence in plankton models with delayed nutrient recycling*. *Canad. Appl. Math. Quart* 3 (1995) 219–235.
- [46] S. Ruan, X. Q. Zhao, *Persistence and extinction in two species reaction–diffusion systems with delays*. *Journal of differential equations* 156 (1) (1999) 71–92.
- [47] J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, vol. 51 (1934).
- [48] H. Smith, H. Thieme, *Dynamical Systems and Population Persistence*. American Mathematical Society, 2011.
- [49] P. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. *Correspondence mathématique et physique* 10 (1838) 113–129.
- [50] L. Wang, D. Jiang and G. Wolkowicz, *Global Asymptotic Behavior of a Multi-species Stochastic Chemostat Model with Discrete Delays*. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2019) 1–24.