



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

**Una caracterización de marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  mediante procesos  
aleatorios estacionarios Gaussianos y aplicaciones**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el  
área de Ciencias Matemáticas

Lic. **Hernán Diego Centeno**

Director de Tesis: **Dr. Juan Miguel Medina**  
Consejero de Estudios: **Dr. Carlos Cabrelli**

Lugar de trabajo: **Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires**

Buenos Aires, 3 de marzo de 2026



# Una caracterización de marcos de $L^2(\mathbb{R})$ mediante procesos aleatorios estacionarios Gaussianos y aplicaciones

## Resumen

Es sabido que, en general, un marco  $AP$  de Gabor o afín es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  y a la inversa. Aquí, en parte como una consecuencia del Teorema Ergódico y empleando técnicas del análisis Gramiano dual, probamos una condición necesaria y suficiente para que un sistema de Gabor (Weyl-Heisenberg)

$$\mathcal{G} = \{g(t - k)e^{il(t-k)} : k \in \mathbb{K} = t_0\mathbb{Z}, l \in \mathbb{L} = \omega_0\mathbb{Z}\},$$

así como para que un sistema afín (Wavelet)

$$\mathcal{A} = \{a^{-j/2}\psi(a^{-j}t - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K} := b\mathbb{Z}\},$$

sea un marco  $AP$  de Gabor o afín respectivamente, en términos de procesos aleatorios estacionarios Gaussianos.

Mediante unas aplicaciones mostramos que las técnicas utilizadas en las demostraciones de los resultados principales son relevantes en sí mismas. En el caso de sistemas de Gabor primero obtenemos la completitud de  $\mathcal{G}$  en  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , donde  $\mu$  es la medida espectral asociada a un proceso aleatorio estacionario Gaussiano, y segundo, obtenemos una fórmula de reconstrucción para procesos aleatorios estacionarios Gaussianos. En el caso de sistemas afines relacionamos una propiedad de suavidad de procesos aleatorios estacionarios con la finitud de ciertas integrales singulares.

Además, como una aplicación del Teorema principal para sistemas afines, si  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  es un proceso aleatorio estacionario Gaussiano, estudiamos una conexión entre el decaimiento de las sucesiones estacionarias afines asociadas  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$ , para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , y una condición de suavidad en  $X$ .

**Palabras Clave:** Marcos. AP-Marcos. Funciones Casi Periódicas. Sistemas de Gabor. Sistemas Afines. Análisis Gramiano Dual. Procesos Aleatorios Estacionarios. Procesos Aleatorios Estacionarios Gaussianos.

# A characterization of frames for $L^2(\mathbb{R})$ by means of Gaussian stationary random processes and applications

## Abstract

It is known that, in general, a Gabor or affine  $AP$ -frame is a frame for  $L^2(\mathbb{R})$  and conversely. Here, in part as a consequence of the Ergodic Theorem and employing techniques of the dual Gramian analysis, we prove a necessary and sufficient condition for a Gabor (Weyl-Heisenberg) system

$$\mathcal{G} = \{g(t - k)e^{il(t-k)} : k \in \mathbb{K} = t_0\mathbb{Z}, l \in \mathbb{L} = \omega_0\mathbb{Z}\},$$

as well as for an affine (Wavelet) system

$$\mathcal{A} = \{a^{-j/2}\psi(a^{-j}t - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K} := b\mathbb{Z}\},$$

to be a Gabor or affine  $AP$ -frame respectively, in terms of Gaussian stationary random processes.

We show by some applications that the techniques employed in the proofs of the main results are relevant on their own. In the case of Gabor systems we obtain first the completeness of  $\mathcal{G}$  in  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , where  $\mu$  is the spectral measure associated to a stationary random process, and second, a frame-type reconstruction formulas for Gaussian stationary random processes. In the case of affine systems we relate a smoothness property of stationary random processes with the finiteness of certain singular integrals.

Also, as an application of the main Theorem for affine systems, if  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  is a Gaussian stationary random process, we study a connection between the decay of the associated affine stationary sequences  $(\langle X, \psi_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$ , for each  $j \in \mathbb{Z}$ , and a smoothness condition on  $X$ .

**Keywords:** Frames.  $AP$ -Frames. Almost Periodic Functions. Gabor Systems. Affine Systems. Dual Gramian Analysis. Stationary Random Processes. Gaussian Stationary Random Processes.

# Agradecimientos

A mi Director *Juan Miguel Medina*, que confió en mí desde aquellos días de inicio de la tesis de licenciatura, y que brindó su apoyo indispensable e invaluable como así también la motivación para que la presentación de esta tesis se haga realidad.

A mi Consejero de Estudios *Carlos Cabrelli*, que confió en mí y que con sus comentarios y sugerencias enriquecedoras hizo más amena la carrera de doctorado.

A los profesores del Departamento de Matemática de la FCEyN y FI UBA quienes con el dictado de sus clases me aportaron tantos conocimientos durante esta carrera: *Inés Armendáriz, Esteban Andruchow, Pablo Sevilla Peris, Daniel Carando, Ezequiel Rela, Juan Miguel Medina, Carlos Cabrelli*.

A mis colegas del Departamento de Matemática de la FCEyN UBA con quienes compartimos tardes de seminario de muestreo, intercambiando puntos de vista y muchas cuentas: *Rocío N., Diana C., Melisa S., Alejandra A-A., Carlos C.*

A mis colegas de la UNSAM con quienes compartimos tardes del Grupo Tikhonov, para “regularizar nuestras ideas”: *Marcela M., Erika P., Javier C.*

A mis colegas del Departamento de Matemática de la FI UBA con quienes compartimos materias como docentes: *Ricardo S., Rafael G-G., José Luis M-A., M. Eugenia Di-I., Miryam S., Martin M., Fernando De-R., Marcela M., Claudia L., Jorge C., Andrés N., Mónica O., Fan Z., Aníbal A., Daniel G., Julio M., Manuel P., Nelson M., Gabriel P., Lautaro G-C., Eduardo P., Verónica V., Eliana R-G, Luciano F., Guillermo H., Laura R., Mónica G., Erica R., Lucía A-P., Marcelo V., Juan Pablo V., Damián S., Nicolás V., Sebastián G.*

A mis colegas del Departamento de Matemática de la FCEyN UBA con quienes compartimos materias como docentes: *Jorge G., Julián F-B., Mercedes P-M., Pablo G., Mariano S-A., Marco F., Victoria P., Gabriela J., Rocío B., Florencia F-S., Francisco P., Sergio A., Ivan Q., Marcela F., Nahuel S-L.*

A mis colegas del CBC UBA con quienes compartimos materias como docentes: *Lucila A., Soledad P., Romina C., Javier G.*

A los responsables de los distintos establecimientos que me facilitaron los horarios de trabajo: *Sebastián Grynberg* (Director del Departamento de Matemática FIUBA), *Silvia Gígola / Ada Camillieri / Cristina Unger* (Coordinadoras de las materias AMII y AL FIUBA), *Paula Kuna* (coordinadora CBC Ciudad Universitaria), *María Alejandra Arec-co* (Directora de la Escuela de Graduados en Ingeniería Geodesta-Geofísica e Ingeniería Hidrográfica).

A mis amigos del “sur”: *Chino, Daul, Davidzito, Diegui, Estebita, Los Negritos.*

A mi familia: *todos y cada uno de ellos.*

Especialmente agradezco a *Juan Giribet, Pedro Massey, Irene Drelichman, Alexia Yavicoli* y *Celeste González* por haber aceptado formar parte del jurado de esta tesis y por

sus aportes a la misma.

*Dedicado a mis padres  
Violeta y Julio*



# Índice general

|                                                                          | Página     |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Resumen</b>                                                           | <b>I</b>   |
| <b>Abstract</b>                                                          | <b>II</b>  |
| <b>Agradecimientos</b>                                                   | <b>III</b> |
| <b>Introducción</b>                                                      | <b>1</b>   |
| <b>1. Preliminares</b>                                                   | <b>7</b>   |
| 1.1. Algunos Conceptos sobre Teoría de la Medida . . . . .               | 7          |
| 1.2. Algunos Conceptos sobre Espacios de Hilbert . . . . .               | 10         |
| 1.3. Operadores en Espacios de Hilbert . . . . .                         | 12         |
| 1.3.1. Operadores acotados . . . . .                                     | 12         |
| 1.3.2. Teorema Espectral para Operadores Unitarios . . . . .             | 15         |
| 1.3.3. Operadores No Acotados . . . . .                                  | 19         |
| 1.3.4. Operadores de Traslación, Modulación y Dilatación . . . . .       | 20         |
| 1.3.5. Operadores de Hilbert-Schmidt . . . . .                           | 21         |
| 1.4. Transformada de Fourier . . . . .                                   | 21         |
| 1.5. Algunos Espacios de Funciones . . . . .                             | 22         |
| 1.5.1. Espacios de Wiener . . . . .                                      | 22         |
| 1.5.2. Espacios de Sobolev . . . . .                                     | 23         |
| 1.5.3. Espacios de Funciones Casi Periódicas . . . . .                   | 24         |
| 1.6. Teoría de Marcos . . . . .                                          | 26         |
| 1.6.1. Generalidades . . . . .                                           | 26         |
| 1.6.2. Reconstrucción . . . . .                                          | 28         |
| 1.6.3. Marcos de Gabor de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .                    | 28         |
| 1.6.4. Marcos Afines de $L^2(\mathbb{R})$ . . . . .                      | 29         |
| 1.7. Algunos Conceptos sobre Integrales Singulares . . . . .             | 30         |
| <b>2. Procesos Aleatorios Estacionarios</b>                              | <b>33</b>  |
| 2.1. Algunos Conceptos sobre Procesos Aleatorios . . . . .               | 33         |
| 2.2. Algunos Conceptos sobre Procesos Aleatorios Estacionarios . . . . . | 35         |
| 2.3. Los Teoremas Ergódicos . . . . .                                    | 40         |
| 2.4. Relación con el Espacio $B^2(\mathbb{R})$ . . . . .                 | 41         |

|                                                                                                                              |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3. Análisis Gramiano y Gramiano Dual</b>                                                                                  | <b>45</b>  |
| 3.1. Sistemas Invariantes por Traslaciones . . . . .                                                                         | 45         |
| 3.2. Técnicas de Fibración en Sistemas Invariantes por Traslaciones . . . . .                                                | 46         |
| 3.3. Análisis Gramiano . . . . .                                                                                             | 49         |
| 3.4. Análisis Gramiano Dual . . . . .                                                                                        | 54         |
| <b>4. Sistemas de Gabor</b>                                                                                                  | <b>61</b>  |
| 4.1. Análisis Gramiano Dual en Sistemas de Gabor . . . . .                                                                   | 61         |
| 4.2. Marcos $AP$ de Gabor y Procesos Aleatorios Estacionarios . . . . .                                                      | 63         |
| 4.3. Sobre $\overline{\text{gen}}\{\langle X, g_{k,l} \rangle : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\} \subset H(X)$ . . . . . | 70         |
| 4.4. Reconstrucción de $X$ . . . . .                                                                                         | 78         |
| <b>5. Sistemas Afines</b>                                                                                                    | <b>81</b>  |
| 5.1. Análisis Gramiano Dual en Sistemas Afines . . . . .                                                                     | 81         |
| 5.1.1. Sistemas Afines Truncados . . . . .                                                                                   | 83         |
| 5.1.2. Sistemas Cuasi Afines . . . . .                                                                                       | 85         |
| 5.1.3. Matrices Gramianas Duales Aumentadas . . . . .                                                                        | 87         |
| 5.2. Marcos $AP$ Afines y Procesos Aleatorios Estacionarios . . . . .                                                        | 88         |
| 5.3. Procesos Fraccionarios Asociados a Procesos Aleatorios Estacionarios Gaussianos y Análisis de Suavidad . . . . .        | 96         |
| 5.3.1. Algunos Resultados sobre la Regularidad de Procesos Aleatorios Estacionarios en Sentido Amplio . . . . .              | 96         |
| 5.3.2. Regularidad de Procesos Aleatorios Estacionarios Gaussianos en términos de Marcos Afines . . . . .                    | 100        |
| <b>Bibliografía</b>                                                                                                          | <b>105</b> |

# Introducción

La *transformada de Gabor* o *transformada de Fourier de corta duración* (STFT), con respecto a una *función ventana* (no nula)  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , es el operador lineal  $V_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}})$  dado por

$$(V_g f)(t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x - t) e^{-ix\lambda} dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (t, \lambda) \in (\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}).$$

Aquí  $\widehat{\mathbb{R}}$  es el grupo de caracteres de  $\mathbb{R}$ , el cual es identificado con  $\mathbb{R}$ .

Análogamente, la *transformada wavelet continua* con respecto a una *función ondita* (no nula)  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ , es el operador lineal  $W_\psi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\})$  dado por

$$(W_\psi f)(b, a) = |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\psi}(a^{-1}(x - b)) dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (b, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tanto el rango de  $V_g$  como el de  $W_\psi$  pueden equiparse con un producto interno que los hace un *espacio de Hilbert con núcleo reproductivo* [SS16], los cuales están íntimamente relacionados con los procesos aleatorios de segundo orden (particularmente los estacionarios Gaussianos) [BTA04] y son especialmente útiles para la teoría de *muestreo* (*sampling*) [Ga15], entre otros.

Los problemas concernientes a  $V_g$  y a  $W_\psi$  forman parte del *análisis de Gabor* y del *análisis wavelet* respectivamente. Un problema importante en ambos casos es el *problema de la discretización*: en el caso Gabor, se buscan  $g \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\Gamma$  un subconjunto a lo sumo numerable de  $\mathbb{R} \times \widehat{\mathbb{R}}$  tales que las desigualdades

$$A \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{\gamma \in \Gamma} |(V_g f)(\gamma)|^2 \leq B \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \quad (1)$$

sean válidas para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , para ciertas constantes  $0 < A \leq B$ . En el caso wavelet es completamente análogo salvo que ahora  $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Las desigualdades (1) junto con la identidad

$$(V_g f)(\gamma) = \langle f, M^\lambda E^t g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (t, \lambda) := \gamma \in \Gamma,$$

donde  $M^\lambda$  es el operador de “modulación por  $\lambda$ ” (1.14) y  $E^t$  es el operador de “traslación por  $t$ ” (1.13), dicen que el sistema  $\{M^\lambda E^t g : (t, \lambda) = \gamma \in \Gamma\}$  es un *marco* de  $L^2(\mathbb{R})$  (o un *marco fundamental*). Por lo tanto, también lo es el *sistema de Gabor*

$$\mathcal{G}(g, \Gamma) := \{g_{t,\lambda}(x) = (E^t M^\lambda g)(x) : (t, \lambda) = \gamma \in \Gamma\}.$$

De suma importancia es cuando  $\Gamma$  posee una cierta estructura, por ejemplo el caso particular con el que trabajaremos en la tesis es cuando  $\Gamma := \mathbb{K} \times \mathbb{L}$ , donde  $\mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{L} = \omega_0\mathbb{Z}$ , con  $t_0 > 0$  y  $\omega_0 > 0$ .

En el caso wavelet, además del operador de traslación, también se utiliza el operador de “dilatación por  $a$ ” (1.15), siendo el razonamiento similar y llegando a las mismas conclusiones. Una diferencia a remarcar es que trabajaremos ahora con  $\Gamma := \mathbb{K} \times \mathbb{L}$ , donde  $\mathbb{K} := b\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{L} = \{a^j : j \in \mathbb{Z}\}$ , con  $a > 1$  y  $b > 0$ , y el correspondiente *sistema afín*

$$\mathcal{A}(\psi, a, b) := \{a^{j/2}\psi_{j,k}(t) = a^{-j/2}\psi(a^{-j}t - k) : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}.$$

Las caracterizaciones de marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ , particularmente cuando tenemos sistemas de Gabor o sistemas afines, constituyen un tema largamente estudiado en la literatura [Ch16, CSS98, Gr01, He11, Mey92, Pi09, RS95, RS97a, RS97b].

Los **resultados principales de esta tesis** están motivados en gran parte por una caracterización de marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ , tanto para sistemas de Gabor como para sistemas afines, obtenida recientemente por Yeon Hyang Kim & Amos Ron en [KR09] la cual involucra técnicas de funciones *casi periódicas* y de *análisis Gramiano dual*.

Las funciones casi periódicas (en el sentido de Bohr) son una generalización de las funciones periódicas habituales. Los primeros resultados acerca de las mismas fueron obtenidos por Herald Bohr entre 1924 y 1926. Dichas funciones encontraron aplicaciones en varias áreas del Análisis Matemático. En particular, están relacionadas con la teoría de procesos aleatorios estacionarios, ya que cualquiera de estos procesos es el límite en media cuadrática de polinomios trigonométricos generalizados. Además, el producto interno del espacio de Hilbert no separable  $B^2(\mathbb{R})$ , compuesto por *funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch*, es definido comúnmente mediante el promedio

$$\langle f, g \rangle_{B^2(\mathbb{R})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \bar{g}(t) dt.$$

Algunos resultados clásicos de la Teoría Ergódica, en el contexto de procesos aleatorios estacionarios, aseguran que estos promedios son estimadores naturales de varios valores estadísticos, como por ejemplo la *media* y la *covarianza*. Las investigaciones recientes están relacionadas con la Teoría de Marcos y es esto lo que principalmente nos interesa.

Los espacios más importantes de funciones casi periódicas son *no separables* y por lo tanto no pueden admitir marcos a lo sumo numerables (recientemente en [BIM18] se trata la noción de “*marcos no numerables*” para espacios de Hilbert no separables pero no seguiremos este camino). Sin embargo, varios autores [Gal04, KR09, Par01] introdujeron el concepto relacionado de *marco AP* para sistemas de Gabor y sistemas afines, demostrando condiciones bajo las cuales las desigualdades de tipo marco (1) aún son posibles como estimadores de la norma en estos espacios.

Por el contrario, como consecuencia de que los espacios de Besicovitch son espacios de Hilbert no separables, algunas cuestiones relacionadas con la posible aproximación de funciones utilizando estos coeficientes de marco (a lo sumo numerables) siguen abiertas o tienen a primera vista una respuesta negativa. Desde un punto de vista alternativo a la estadística de procesos aleatorios estacionarios, veremos en la Sección 4.3 que estos coeficientes de marco, o similares, dados por un sistema de Gabor más o menos general, siguen siendo relevantes y contienen la misma información estadística que todo el proceso muestreado original. S. P. Lloyd [Llo59] fue el primero en estudiar una formulación estadística más débil para el Teorema de Muestreo de Shannon.

Bajo ciertas condiciones no tan restrictivas resulta que, tanto para los sistemas de Gabor como para los sistemas afines, ser un *marco AP* de  $L^2(\mathbb{R})$  y ser un *marco* de  $L^2(\mathbb{R})$  son nociones equivalentes [KR09]. En esta tesis veremos cómo estas nociones están naturalmente conectadas o, más aún, son equivalentes a otra noción que involucra a procesos aleatorios estacionarios Gaussianos. Más específicamente, en el caso Gabor, a las desigualdades siguientes de tipo marco (véase (5.16) para sistemas afines)

$$A\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{a.s.},$$

donde  $g_{k,l}(t) := e^{il(t-k)}g(t-k)$ , con  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{L}$  como antes.

La caracterización dada aquí en términos de procesos aleatorios estacionarios Gaussianos, hasta donde sabemos, es una de las pocas existentes a esta fecha.

Debido a la diferente naturaleza entre los sistemas de Gabor y los sistemas afines (por ejemplo, si un sistema de Gabor  $\mathcal{G}$  es transformado por Fourier, el sistema transformado  $\hat{\mathcal{G}}$  es otra vez esencialmente un sistema de Gabor, pero generalmente esto no sucede para un sistema afín  $\mathcal{A}$ ) algunos resultados obtenidos aquí para sistemas afines han requerido procedimientos alternativos a los utilizados para los sistemas de Gabor (más directos), algunos de ellos fueron adaptados e inspirados por aquellos en [KR09], los cuales a su vez se relacionan en mayor medida con el análisis Gramiano dual desarrollado por Amos Ron & Zuowei Shen [RS95, RS97a, RS97b].

El análisis Gramiano dual aquí utilizado (en [RS05] fué extendido satisfactoriamente a sistemas más generales y abarcativos como lo son los *sistemas invariantes por traslaciones generalizados*) nos brinda información, por ejemplo, acerca de si un *sistema invariante por traslaciones* (un sistema de Gabor entra en esta categoría pero no así un sistema afín) tiene la propiedad de ser una *sucesión de Bessel*, un *marco* o una *base de Riesz* de  $L^2(\mathbb{R})$  por medio del estudio de *propiedades espectrales* de una familia de matrices infinitas (u operadores). En el caso Gabor, esta familia está dada a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$  por

$$\tilde{G}(\lambda) := \left( \hat{g}(\lambda + d) \bar{\hat{g}}(\lambda + d') \right)_{(d,d') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}},$$

donde  $\mathbb{D} = \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$  (véase (5.8) para el caso afín).

El Teorema 4.2.8 y el Teorema 5.2.6 son los resultados principales de la tesis y dan el nombre a la misma. Utilizando las técnicas empleadas y desarrolladas en sus demostraciones obtenemos nuevos resultados relacionados con procesos aleatorios estacionarios (Gaussianos) y con diversos temas del Análisis Armónico.

En el caso Gabor, dado un proceso aleatorio estacionario  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  daremos algunas condiciones generales bajo las cuales la sucesión de coeficientes aleatorios de Gabor asociada a  $X$ , dada por

$$\{\langle X, g_{k,l} \rangle : k \in \mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}, l \in \mathbb{L} := \omega_0\mathbb{Z}\},$$

resulte *densa* en el espacio de Hilbert generado por  $X$ :

$$H(X) := \overline{\text{gen}}\{X(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}),$$

donde  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  es el espacio de probabilidad subyacente al proceso  $X$ . Este es un problema clásico de la teoría de procesos aleatorios (véase [Do53, Roz67]). En particular,

veremos que cualquier sistema de Gabor que sea un marco  $AP$  (o equivalentemente un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ ) tiene esta propiedad de densidad. Además, bajo algunas condiciones no tan restrictivas, daremos una fórmula de reconstrucción de tipo marco para  $X$ .

En el caso afín los resultados obtenidos están relacionados a diferentes conceptos de suavidad. Para un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ , su  $\alpha$ -ésimo proceso derivado asociado  $D^\alpha X = (D^\alpha X(t))_{t \in \mathbb{R}}$ , con  $\alpha > 0$ , es definido formalmente por medio de una integral estocástica como

$$(D^\alpha X)(t) = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^\alpha e^{it\lambda} d\Phi(\lambda).$$

Este es significativo si puede verse como un *filtrado lineal invariante en el tiempo* de  $X$  (véase (2.7)) con un *filtro* (en este caso la función  $\lambda \mapsto |\lambda|^\alpha$ ) perteneciente a  $L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu)$ , donde  $\mu$  es la medida espectral asociada al proceso original  $X$ . En este caso,  $D^\alpha X$  también es un proceso aleatorio estacionario Gaussiano.

En la Sección 5.3 se muestra que esta condición de filtro es equivalente a dos condiciones esencialmente diferentes entre sí.

En primer lugar, para  $0 < \alpha < 1$ , la condición de filtro es equivalente a un cierto decaimiento de los coeficientes aleatorios afines asociados a  $X$ , dados por

$$\{\langle X, \psi_{j,k} \rangle : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K} := b\mathbb{Z}\}.$$

Esto se logra aplicando, tanto el Teorema 5.2.6, bajo las hipótesis de que un sistema afín  $\mathcal{A}$  y el sistema  $I^\alpha \mathcal{A}$  (el sistema  $\mathcal{A}$  transformado por el *potencial de Riesz*  $I^\alpha$ ) sean marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ , como así también las técnicas de procesos aleatorios estacionarios Gaussianos [Do53, DMcK08, GS04, Roz67], destacándose entre ellas el *isomorfismo de Kolmogorov* (2.4), junto con las técnicas del análisis Gramiano dual mencionadas anteriormente.

En segundo lugar, la condición de filtro es equivalente a una cierta *condición de integrabilidad* de tipo Sobolev, que involucra una *integral singular* cuyo integrando cambia dependiendo del rango de valores de  $\alpha$  considerado:

- El integrando es la función de covarianza asociada a  $X$ , para  $0 < \alpha < 1$ .
- El integrando es una diferencia centrada del proceso original  $X$ , para  $0 < \alpha < 2$ .

También, para  $\alpha = 1$ , recuperamos el resultado ya conocido de que esta condición de filtro es equivalente a la existencia de la derivada usual del proceso  $X$  como límite del cociente incremental en el sentido de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . En las demostraciones intervienen técnicas de procesos aleatorios estacionarios junto con aquellas de integrales singulares adaptadas en parte de [Mal95, Sa02, St87].

La Tesis está organizada de la siguiente manera: En el Capítulo 1 están todos los resultados preliminares necesarios para la comprensión y el desarrollo de los demás capítulos. En el Capítulo 2 no sólo están los preliminares concernientes a procesos aleatorios (estacionarios Gaussianos) sino también algunos resultados propios que, conjuntamente, son utilizados en los Capítulos 4 y 5 (capítulos principales). En el Capítulo 3 se encuentran los resultados destacados de las técnicas del análisis Gramiano Dual empleadas posteriormente también en los capítulos principales. En el Capítulo 4 están desarrollados todos los resultados obtenidos con respecto a los sistemas de Gabor, mencionados anteriormente más arriba, y que forman parte de la publicación:

*“AP-frames and Stationary Random Processes”* [CeMe22].

Finalmente, en el Capítulo 5, están todos los resultados obtenidos con respecto a los sistemas afines, mencionados anteriormente, y que están contenidos en:

*“Affine AP-frames and Stationary Random Processes”* [CeMe25].

Por otra parte, algunas de las técnicas propuestas en la Sección 5.3 de esta tesis, fueron también adaptadas y utilizadas en el contexto de funciones casi periódicas en la reciente publicación:

*“Smoothness and time-frequency analysis in Sobolev-Besicovitch spaces of almost periodic functions”* [MCFM26].



# Capítulo 1

## Preliminares

En este Capítulo se enuncian algunos resultados que serán necesarios a lo largo de esta tesis. Esto se hace de manera no exhaustiva, centrándonos principalmente en aquellos resultados requeridos para el desarrollo de los Capítulos 4 y 5 y dejando de lado aquellos que se consideran más o menos conocidos a la fecha actual o que solo son utilizados ocasionalmente en este trabajo. No obstante, el objetivo de una exposición auto-contenida está siempre presente. De la misma manera, si bien la mayoría de los resultados son enunciados sin demostración, se referencian uno o varios escritos donde las mismas están desarrolladas. También aprovechamos este capítulo para fijar notaciones y/o convenciones para los demás capítulos.

### 1.1. Algunos Conceptos sobre Teoría de la Medida

Un *espacio medible*  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  consta de un conjunto  $\mathcal{X}$  y una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $\mathcal{X}$ . A los elementos  $A \in \mathcal{A}$  se los llama *conjuntos medibles*. Cuando  $\mathcal{X}$  es un espacio topológico, consideraremos siempre el espacio medible  $(\mathcal{X}, \mathbf{B}(\mathcal{X}))$ , donde  $\mathbf{B}(\mathcal{X})$  es la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathcal{X}$  (generada por los abiertos de  $\mathcal{X}$ ), con la única excepción de  $\mathbb{R}$ , donde también consideraremos la  $\sigma$ -álgebra de *conjuntos medibles Lebesgue*.

Una función entre espacios medibles  $f : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$  se dice *medible* si  $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$  para todo  $A' \in \mathcal{A}'$ . Si  $f : (\mathcal{X}, \mathbf{B}(\mathcal{X})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}))$  es medible, diremos que  $f$  es *medible Borel* o *boreliana*.

Una *medida* sobre  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  es una función  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $\mu(\emptyset) = 0$  y  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva, es decir

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n), \quad \forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \text{ con } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ si } n \neq m. \quad (1.1)$$

Una medida  $\mu$  sobre  $(\mathcal{X}, \mathbf{B}(\mathcal{X}))$  se dirá *boreliana* o *de Borel*. Toda medida cumple la propiedad de *monotonía*:  $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$  si  $A_1 \subset A_2$  y  $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ . Decimos que  $\mu$  es: *finita* si  $\mu(\mathcal{X}) < \infty$ , y  $\sigma$ -*finita*, si existe una sucesión  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  tal que

$$\mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{y} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A la terna  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  la llamaremos *espacio de medida* (*finito* o  $\sigma$ -*finito* si  $\mu$  lo es).

**Ejemplo 1.1.1** ([Fo99, p. 25]). Sean  $(\mathcal{X}, \mathcal{P}(\mathcal{X}))$  y  $f : \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty]$ . Definimos  $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \rightarrow [0, \infty]$  como  $\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$ . Cuando  $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathcal{X}$ ,  $\mu$  es la *medida de conteo* que notaremos por “ $c$ ”, mientras que si  $f(x_0) = 1$  y  $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathcal{X} \setminus \{x_0\}$ ,  $\mu$  es la *medida de masa puntual* o *medida de Dirac en  $x_0$*  y la notaremos por “ $\delta_{x_0}$ ”. ♦

Decimos que una propiedad (P) *vale para casi todo  $x \in \mathcal{X}$*  con respecto a  $\mu$  sobre  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  (escribiremos “ $\mu$ -a.e en  $\mathcal{X}$ ” o “ $\mu$ -a.e para  $x \in \mathcal{X}$ ” para abreviar) si el conjunto  $N \subset \mathcal{X}$  donde no vale (P) está contenido en un conjunto  $Z \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(Z) = 0$ . Un espacio de medida  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  se dice *completo* si la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  es  $\mu$ -completa, es decir, si  $N \subset Z \in \mathcal{A}$  y  $\mu(Z) = 0$  implica que  $N \in \mathcal{A}$  (y por monotonía  $\mu(N) = 0$ ). Todo espacio de medida se puede completar (véase [Fo99, p. 26] o [Mal95, p. 17]). Las completaciones de medidas de Borel se denominan *medidas de Lebesgue-Stieltjes*. La *medida de Lebesgue*  $m_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$  y la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos *medibles Lebesgue*  $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \supset \mathbf{B}(\mathbb{R})$  es un caso particular (véase [Fo99, págs. 33-37]).

Dos funciones medibles  $f, g : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{X}', \mathcal{A}')$  son iguales  $\mu$ -a.e., si difieren en un conjunto de medida nula. Esto define una relación de equivalencia en el conjunto de funciones medibles. Para  $(\mathcal{Y}, d)$  un espacio métrico separable ( $\mathcal{Y}$  posee un subconjunto denso y numerable), también decimos que una sucesión de funciones medibles  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $f_n : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathbf{B}(\mathcal{Y}))$ , *converge  $\mu$ -a.e. a  $f$  en  $\mathcal{X}$*  si el conjunto de puntos en donde no converge tiene medida nula. En tal caso la función límite  $f$  resulta medible (véase [Mal95, p. 19]).

Para definir el concepto de función  $\mu$ -integrable sobre  $\mathcal{X}$ , se puede transitar el camino siguiente: primero se define la integral de una función *simple* no negativa, digamos  $\phi = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_j \geq 0$  y  $\mathbf{1}_{A_j}$  la función indicadora del conjunto  $A_j \in \mathcal{A}$  para  $1 \leq j \leq n$ , mediante

$$\int_{\mathcal{X}} \phi(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j).$$

En segundo lugar se extiende la definición a funciones medibles no negativas mediante

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) := \sup \left\{ \int_{\mathcal{X}} \phi(x) d\mu(x) : 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ simple} \right\}.$$

Resulta que toda función  $f$  medible no negativa es límite puntual de una sucesión creciente  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de funciones simples no negativas [Fo99, p. 47], y además, por el Teorema de Beppo-Levi (Teorema de convergencia monótona [Fo99, p. 50]) resulta que

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \phi_n(x) d\mu(x).$$

Otro resultado de vital importancia, y que utilizaremos repetidas veces en la Subsección 5.3.1, es el siguiente.

**Lema 1.1.2** (Lema de Fatou [Fo99, p. 52]). *Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones medibles no negativas en  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ . Entonces*

$$\int_{\mathcal{X}} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n(x) d\mu(x).$$

En tercer lugar, para  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  medible, uno puede escribir  $f = f^+ + f^-$ , donde  $f^+(x) = \max(f(x), 0)$  y  $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$  para  $x \in \mathcal{X}$ , y entonces definir

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) := \int_{\mathcal{X}} f^+(x) d\mu(x) - \int_{\mathcal{X}} f^-(x) d\mu(x),$$

siempre y cuando al menos una de las dos integrales de la derecha sea finita.

Finalmente, para  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  medible escribimos  $f = \Re f + i\Im f$ , y entonces definimos:

$$\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) := \int_{\mathcal{X}} \Re f(x) d\mu(x) + i \int_{\mathcal{X}} \Im f(x) d\mu(x).$$

Se define el espacio (de Banach) de (clases de equivalencia de) funciones  $\mu$ -integrables por

$$L^1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu) = L^1(\mathcal{X}, \mu) := \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^1(\mathcal{X}, \mu)} := \int_{\mathcal{X}} |f(x)| d\mu(x) < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

El siguiente teorema célebre se usa para justificar el intercambio de límites e integrales.

**Teorema 1.1.3** (Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue [Fo99, p. 54]). *Sean  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C}$  medible y  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathcal{X}, \mu)$  tales que:*

1.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $f$   $\mu$ -a.e. en  $\mathcal{X}$ .
  2. Existe  $g \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$  no negativa tal que  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -a.e. en  $\mathcal{X}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
- Entonces  $f \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$  y  $\int_{\mathcal{X}} f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} f_n(x) d\mu(x)$ .

Si  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  e  $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$  son espacios medibles, podemos considerar el espacio medible *producto*  $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ , donde  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  denota la  $\sigma$ -álgebra *producto* generada por los *rectángulos medibles* de  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ , es decir

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \text{gen}\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Si  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$  son espacios de medida ( $\sigma$ -finitos) la *medida producto* de  $\mu$  y  $\nu$ , notada por  $\mu \times \nu$ , es la única medida en  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  que satisface  $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \forall A \times B$  rectángulo medible. Cuando sea necesario intercambiar el orden de integración en integrales sobre  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  utilizaremos el teorema clásico siguiente.

**Teorema 1.1.4** (Teorema de Fubini-Tonelli [Fo99, p. 67]). *Sean  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$  e  $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finitos. Entonces:*

- a) (Tonelli) Si  $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -medible no negativa, entonces las funciones  $g(x) := \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) d\nu(y)$  y  $h(y) := \int_{\mathcal{X}} f(x, y) d\mu(x)$  (definidas  $\mu$ -a.e.  $x \in \mathcal{X}$  y  $\nu$ -a.e.  $y \in \mathcal{Y}$  respectivamente) son  $\mathcal{A}$ -medible y  $\mathcal{B}$ -medible no negativas respectivamente, y

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} f(x, y) d(\mu \times \nu) &= \int_{\mathcal{X}} \left( \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_{\mathcal{Y}} \left( \int_{\mathcal{X}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned} \quad (1.3)$$

- b) (Fubini) Si  $f \in L^1(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mu \times \nu)$  entonces:  $f_x(\cdot) := f(x, \cdot) \in L^1(\mathcal{Y}, \nu)$  a.e.  $x \in \mathcal{X}$  y  $f^y(\cdot) := f(\cdot, y) \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$  a.e.  $y \in \mathcal{Y}$ ,  $g \in L^1(\mathcal{X}, \mu)$  y  $h \in L^1(\mathcal{Y}, \nu)$ , y vale (1.3).

Por lo general  $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$  no es completo, sin embargo el Teorema 1.1.4, y la ecuación (1.3), siguen valiendo reemplazando  $\mu \times \nu$  por su completación.

Si  $\mu$  y  $\nu$  son dos medidas sobre  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ , decimos que  $\nu$  es *absolutamente continua* con respecto a  $\mu$ , notamos  $\nu \ll \mu$ , si  $\nu(A) = 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$  tal que  $\mu(A) = 0$ . También, decimos que  $\nu$  y  $\mu$  son *mutuamente singulares*, notamos  $\mu \perp \nu$ , si existen  $C, D \in \mathcal{A}$  tales que  $C \cap D = \emptyset$ ,  $C \cup D = \mathcal{X}$ ,  $\mu(C) = 0$  y  $\nu(D) = 0$ . En tal caso,  $\mu(A) = \mu(A \cap D)$  y  $\nu(A) = \nu(A \cap C)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Si  $\mu$  es una medida de Borel en  $\mathbb{R}$ , decimos que  $\mu$  es *discreta*, si existen sucesiones  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^1(\mathbb{N}, dc) := \ell^1(\mathbb{N})$  y  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  tales que  $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n \delta_{t_n}$ . También, decimos que  $\mu$  es *continua* si  $\mu(\{t\}) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Cualquier medida boreliana  $\mu$  en  $\mathbb{R}$  se puede descomponer como  $\mu = \mu_d + \mu_c$ , donde  $\mu_d$  es discreta y  $\mu_c$  es continua (véase [Fo99, p. 90]).

En analogía con (1.2), tenemos toda una clase de espacios (de Banach) de (clases de equivalencia de) funciones medibles para  $1 \leq p \leq \infty$ , denominados *espacios de Lebesgue*:

$$L^p(\mathcal{X}, \mu) := \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p(\mathcal{X}, \mu)} := \left( \int_{\mathcal{X}} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$L^\infty(\mathcal{X}, \mu) := \left\{ f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^\infty(\mathcal{X}, \mu)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathcal{X}} |f(x)| \right\}.$$

De especial importancia es el caso  $p = 2$ , el cual veremos con más detalle a continuación en la próxima sección. Utilizaremos la notación reducida  $L^p(\mathbb{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) cuando la medida subyacente sea la medida de Lebesgue  $m_{\mathbb{R}}$ .

## 1.2. Algunos Conceptos sobre Espacios de Hilbert

En esta sección,  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}})$  denota un espacio de Hilbert complejo, donde el producto interno  $\langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}}$  es lineal en el primer argumento y anti-lineal en el segundo. La *desigualdad de Cauchy-Schwarz* es una herramienta de uso inagotable en la teoría de espacios de Hilbert. Esta establece que para cualquier  $f, g \in \mathcal{H}$  vale que

$$|\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|g\|_{\mathcal{H}}, \quad (1.4)$$

con igualdad en (1.4) si y solo si  $f = \lambda g$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Como es habitual,  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2}$  denota la norma en  $\mathcal{H}$  inducida por el producto interno. Recordemos que una norma  $\|\cdot\|$  sobre un espacio normado  $E$  viene inducida por un producto interno si y solo si se verifica la *ley del paralelogramo*

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2), \quad \forall f, g \in E. \quad (1.5)$$

Así pues, un espacio de Banach  $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$  (espacio vectorial normado y completo) será un espacio de Hilbert si  $\|\cdot\|$  satisface (1.5). En tal caso la norma y el producto interno además satisfacen la *identidad de polarización*

$$4\langle f, g \rangle = \|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2, \quad \forall f, g \in \mathcal{B}.$$

Esta identidad se utiliza a menudo para calcular un producto interno de dos elementos  $f$  y  $g$  con el conocimiento del resultado de esas normas.

Decimos que  $f, g \in \mathcal{H}$  son *ortogonales* si  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ . En tal caso el *Teorema de Pitágoras* establece que  $\|f + g\|_{\mathcal{H}}^2 = \|f\|_{\mathcal{H}}^2 + \|g\|_{\mathcal{H}}^2$ . Dado un subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{H}$ , su ortogonal  $\mathcal{S}^{\perp} := \{f \in \mathcal{H} : \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall g \in \mathcal{S}\}$ , siempre es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ . Cuando  $\mathcal{S}$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ , obtenemos una descomposición de  $\mathcal{H}$  como *suma directa ortogonal*:  $\mathcal{H} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}^{\perp}$ .

La siguiente caracterización de convergencia de series de vectores ortogonales es muy útil (véase por ejemplo la demostración del Lema 1.3.20).

**Proposición 1.2.1.** *Sea  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión ortogonal en  $\mathcal{H}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{\mathcal{H}}^2$  es convergente.
- ii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  es convergente en  $\mathcal{H}$ .
- iii)  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f_n, g \rangle_{\mathcal{H}}$  es convergente para cada  $g \in \mathcal{H}$ .

Definimos ahora algunas propiedades importantes de sucesiones de vectores.

**Definición 1.2.2.** Decimos que una sucesión de vectores  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  es:

- *ortonormal*, si  $\langle e_j, e_k \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{j,k}$  para todos  $j, k \in \mathbb{I}$ .
- *base* de  $\mathcal{H}$ , si todo  $f \in \mathcal{H}$  se escribe de manera única como

$$f = \sum_{j \in \mathbb{I}} c_j e_j \quad \text{con} \quad c_j \in \mathbb{C} \quad \text{para todo} \quad j \in \mathbb{I}.$$

- *completa* en  $\mathcal{H}$ , si  $\overline{\text{gen}\{e_j : j \in \mathbb{I}\}} = \mathcal{H}$ .
- *total* en  $\mathcal{H}$ , si  $\langle f, e_j \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \ \forall j \in \mathbb{I}$  implica que  $f = 0$ .

*Observación 1.2.3.*  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es total in  $\mathcal{H}$  si y solo si es completa en  $\mathcal{H}$ . ◇

Las siguientes caracterizaciones definen una *base ortonormal* (BON) de  $\mathcal{H}$ , estas son bien conocidas y muy útiles a la vez.

**Proposición 1.2.4.** *Sea  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  una sucesión ortonormal. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es completa en  $\mathcal{H}$ .
- ii) Todo  $f \in \mathcal{H}$  se escribe de manera única como  $f = \sum_{j \in \mathbb{I}} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{H}} e_j$ .
- iii) Para todos  $f, g \in \mathcal{H}$  se satisface  $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j \in \mathbb{I}} \langle f, e_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_j, g \rangle_{\mathcal{H}}$ . (Parseval)
- iv) Para todo  $f \in \mathcal{H}$  se satisface  $\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j \in \mathbb{I}} |\langle f, e_j \rangle_{\mathcal{H}}|^2$ . (Plancherel)

La *dimensión* de  $\mathcal{H}$  ( $\dim \mathcal{H}$ ) se obtiene mediante el cardinal de una (BON) de  $\mathcal{H}$ . Como una aplicación del *Lema de Zorn*, todo espacio de Hilbert posee una BON y cualesquiera dos de ellas tienen el mismo cardinal.  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert *separable* si y solo si  $\dim \mathcal{H} \leq \aleph_0$ . Usaremos el término “*a lo sumo numerable*” para indicar que el cardinal de un conjunto cualquiera  $X$  es finito o es infinito numerable, y lo notaremos por  $\#X \leq \aleph_0$ . Cuando  $\mathcal{H}$  posee una BON no numerable se dice que es un *espacio de Hilbert no separable*. Por ejemplo,  $\mathcal{H} = B^2(\mathbb{K})$ , el espacio de funciones casi periódicas de Besicovitch (véase Subsección 1.5.3 y Observación 4.2.3) es no separable.

A continuación damos un ejemplo de espacio de Hilbert cuyas variantes abarcan gran parte de los espacios de Hilbert que aparecen en este trabajo.

**Ejemplo 1.2.5.** Sean  $\mathbb{I}$  un conjunto (de índices) arbitrario,  $\mu$  una medida (positiva) en  $\mathbb{I}$  y  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert. El siguiente espacio dotado con la respectiva norma

$$L^2_{\mathcal{H}}(\mathbb{I}, \mu) := \{f : \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{H} \text{ (fuertemente) medibles} : \|f\|_{L^2_{\mathcal{H}}(\mathbb{I}, \mu)}^2 < \infty\}.$$

$$\|f\|_{L^2_{\mathcal{H}}(\mathbb{I}, \mu)}^2 := \int_{\mathbb{I}} \|f(j)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(j).$$

es un espacio de Hilbert (la demostración es idéntica al caso 1. más abajo).

Los siguientes casos particulares aparecen en este trabajo:

1. Si  $\mathbb{I} = \mathbb{R}$ ,  $\mu = m_{\mathbb{R}}$  la medida de Lebesgue y  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ , obtenemos el bien conocido espacio de Lebesgue de (clases de) funciones de cuadrado integrable notado por  $L^2(\mathbb{R})$ .
2. Si  $\#\mathbb{I} \leq \aleph_0$ ,  $\mu = c$  la medida de contar y  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ , obtenemos el bien conocido espacio de sucesiones de cuadrado sumable que notaremos por  $\ell^2(\mathbb{I})$ .
3. Más general, si  $\#\mathbb{I} \leq \aleph_0$ ,  $\mu = c$  la medida de contar y  $\mathcal{H}$  cualquiera, obtenemos el espacio de Hilbert de sucesiones de cuadrado sumable a valores en  $\mathcal{H}$ . Equipado con su norma usual, lo notamos por:

$$\ell^2(\mathbb{I}, \mathcal{H}) := \{f := (f_j)_{j \in \mathbb{I}} : f_j \in \mathcal{H} \text{ y } \|f\|_{\ell^2(\mathbb{I}, \mathcal{H})}^2 < \infty\} \quad \text{con} \quad \|f\|_{\ell^2(\mathbb{I}, \mathcal{H})}^2 := \sum_{j \in \mathbb{I}} \|f_j\|_{\mathcal{H}}^2.$$

También trabajaremos con  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$  (véase Sección 3.2) el cual es un ejemplo de espacio separable.  $\blacklozenge$

Usaremos  $\ell^0(\mathbb{I}, \mathcal{H})$  para denotar el subespacio de  $\ell^2(\mathbb{I}, \mathcal{H})$  que comprende sucesiones con un número finito de entradas no nulas. Este resulta un subespacio denso.

## 1.3. Operadores en Espacios de Hilbert

En esta sección fijaremos ideas acerca de qué hablamos cuando usamos el término *operadores* como así también cuándo diremos que son *acotados* o que son *no acotados*. Enunciamos también distintos tipos importantes de operadores acotados entre espacios de Hilbert. Muchos de los conceptos son válidos sobre espacios de Banach pero como no los necesitaremos con tal generalidad los tratamos sobre espacios de Hilbert. En esta sección  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$  y  $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{K}})$  serán dos espacios de Hilbert.

### 1.3.1. Operadores acotados

A toda función lineal  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  la llamaremos *operador*, salvo en el caso  $\mathcal{K} = \mathbb{C}$  donde usaremos el término *funcional*. Diremos que es *acotado* si  $\|T\| < \infty$ , donde este valor se puede obtener de diversas maneras equivalentes como

$$\|T\| = \inf\{M : \|Tf\|_{\mathcal{K}} \leq M\|f\|_{\mathcal{H}}\} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}} \neq 0} \frac{\|Tf\|_{\mathcal{K}}}{\|f\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \|Tf\|_{\mathcal{K}} = \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}} = 1} \|Tf\|_{\mathcal{K}}.$$

El espacio de operadores acotados de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$ , notado por  $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ , dotado con la norma  $\|\cdot\|$  resulta un espacio de Banach.

Decimos que  $T$  es *continuo* si  $(Tf_j)_{j \in \mathbb{I}}$  converge a  $Tf$  en  $\|\cdot\|_{\mathcal{K}}$  para cualquier sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  que converge a  $f$  en  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ . Resulta que  $T$  es acotado si y solo si  $T$  es continuo si y solo si  $T$  es continuo en 0. Algunos ejemplos:

**Ejemplo 1.3.1.** Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  es un operador y  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , entonces  $T$  es acotado.  $\blacklozenge$

**Ejemplo 1.3.2.** Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  es un operador que *preserva productos internos*, es decir, cumple que  $\langle Tf, Tg \rangle_{\mathcal{K}} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} \forall f, g \in \mathcal{H}$ , entonces  $T$  es acotado ( $\|T\| = 1$ ) e inyectivo ( $\text{Nu}(T) = \{0\}$ ).  $\blacklozenge$

**Ejemplo 1.3.3.** Si  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  es un operador *compacto*, es decir, cumple que  $\overline{T(B_{\mathcal{H}})}$ , con  $B_{\mathcal{H}} := \{f : \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ , es un conjunto compacto en  $\mathcal{K}$ , entonces  $T$  es acotado.  $\blacklozenge$

De suma importancia es la siguiente caracterización de los funcionales acotados.

**Teorema 1.3.4** (Teorema de representación de Riesz). *Sea  $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  un funcional acotado. Entonces existe un único  $g \in \mathcal{H}$  tal que  $\phi(f) = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := g^*(f)$ , para todo  $f \in \mathcal{H}$ . Además, la aplicación  $\mathcal{H} \ni g \mapsto g^* \in \mathcal{H}^*$  es un isomorfismo isométrico anti-lineal.*

El término isomorfismo lo emplearemos para significar que el operador es biyectivo, acotado y con operador inverso acotado. Con anti-lineal nos referimos a que es aditiva y saca escalares conjugados. Que  $\mathcal{H} \ni g \mapsto g^* \in \mathcal{H}^*$  sea isométrica nos permite calcular la norma de cualquier elemento  $g \in \mathcal{H}$  (sin recurrir al Teorema de Hahn-Banach) como

$$\|g\|_{\mathcal{H}} = \|g^*\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}}|.$$

Usando el Teorema de Riesz se puede probar el siguiente [Pou01, Theorem 9.13].

**Teorema 1.3.5.** *Sea  $q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  una forma sesqui-lineal, es decir,  $q$  es lineal en la primer variable y anti-lineal en la segunda. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  *$q$  es acotada, es decir, existe una constante  $B > 0$  tal que*

$$|q(f, g)| \leq B \|f\|_{\mathcal{H}} \|g\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}.$$

ii) *Existe un único  $T \in B(\mathcal{H})$  tal que  $q(f, g) = \langle Tf, g \rangle_{\mathcal{H}}, \forall f, g \in \mathcal{H}$ .*

*Además vale que  $\|T\| = \|q\| := \sup_{\|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1, \|g\|_{\mathcal{H}} \leq 1} |q(f, g)|$ .*

Dado un operador acotado  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$ , su *adjunto*  $T^* : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ , es el único operador acotado (siempre se cumple que  $\|T\| = \|T^*\|$ ) que satisface

$$\langle Tf, x \rangle_{\mathcal{K}} = \langle f, T^*x \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \forall x \in \mathcal{K}.$$

Las relaciones:  $(T^*)^* = T$ ,  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$  y  $(S + T)^* = S^* + T^*$ , dicen que la aplicación  $T \mapsto T^*$  es una involución anti-lineal en  $B(\mathcal{H}, \mathcal{H}) := B(\mathcal{H})$ . También vale que  $(ST)^* = T^* S^*$ , por lo que si  $T$  es un isomorfismo, entonces  $T^*$  también lo es y vale que  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ . Además, de las siguientes *fórmulas de ortogonalidad*:

$$\text{Nu}(T) = \mathcal{R}(T^*)^{\perp}, \quad \text{Nu}(T^*) = \mathcal{R}(T)^{\perp} \quad \text{y} \quad \text{Nu}(T)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(T^*)}, \quad \text{Nu}(T^*)^{\perp} = \overline{\mathcal{R}(T)}, \quad (1.6)$$

se deduce que  $T$  es inyectivo si y solo si  $\mathcal{R}(T^*)$  es denso en  $\mathcal{H}$ . Más abajo, en los Teoremas 1.3.27 y 1.3.28, enunciamos más resultados en esta línea. Ahora algunas definiciones de operadores destacados en  $B(\mathcal{H})$ .

**Definición 1.3.6.** Sea  $T \in B(\mathcal{H})$ . Decimos que  $T$  es:

- *Normal*, si  $TT^* = T^*T$ .
- *Autoadjunto*, si  $T = T^*$ .
- *Unitario*, si  $TT^* = I_{\mathcal{H}} = T^*T$ .
- *Proyección*, si  $T = T^2$ .
- *Proyección ortogonal*, si es proyección y autoadjunto.
- *Positivo*, si  $\langle Tf, f \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0$  para todo  $f \in \mathcal{H}$ .

*Observación 1.3.7.*  $T \in B(\mathcal{H})$  es unitario si y solo si  $T$  es una isometría sobreyectiva. Por esto mismo usaremos los términos *isomorfismo isométrico* y *operador unitario* indistintamente, incluso cuando  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ .  $\diamond$

*Observación 1.3.8.* Como es usual, en vez de  $T$ , emplearemos  $P$  para una proyección y  $P_{\mathcal{S}}$  para la proyección ortogonal sobre  $\mathcal{S}$  (subespacio cerrado de  $\mathcal{H}$ ).  $P_{\mathcal{S}}f = f \ \forall f \in \mathcal{S}$  y  $\text{Nu}(P_{\mathcal{S}}) = \mathcal{S}^{\perp}$ . Además, para  $\mathcal{S} \neq \{0\}$ , se tiene que  $\|P_{\mathcal{S}}\| = 1$ .  $\diamond$

Del hecho de que todo operador acotado y biyectivo sea un isomorfismo (por el *Teorema de la Aplicación Inversa*), junto con los Teoremas 1.3.27 y 1.3.28 para un operador acotado, obtenemos el siguiente resultado (véase [He11, Theorem 2.33]).

**Teorema 1.3.9.** Sea  $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$  con  $\mathcal{R}(T)$  cerrado en  $\mathcal{K}$  y consideremos el operador  $S : \text{Nu}(T)^{\perp} \rightarrow \mathcal{R}(T)$  definido por  $Sf = Tf \ \forall f \in \text{Nu}(T)^{\perp}$ . Entonces  $S$  es un isomorfismo y el operador  $T^{\dagger} := S^{-1}P_{\mathcal{R}(T)} \in B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$  satisface las siguientes:

- i)  $TT^{\dagger}x = x \ \forall x \in \mathcal{R}(T)$ .
- ii)  $TT^{\dagger} = P_{\mathcal{R}(T)}$ .
- iii)  $T^{\dagger}T = P_{\mathcal{R}(T^*)}$ .

El (único) operador  $T^{\dagger}$  (léase “te daga”) del Teorema 1.3.9 se denomina el *pseudo-inverso de Moore-Penrose* de  $T$ . El operador  $T^{\dagger}$  actúa como un inverso a derecha de  $T$  y en esta situación diremos que  $T$  es *parcialmente inversible* sobre  $\mathcal{R}(T)$ . Por supuesto, cuando  $T$  es un isomorfismo entonces  $T^{\dagger} = T^{-1}$ .

Para  $T \in B(\mathcal{H})$  tenemos asociados los conjuntos:  $\rho(T)$ , *conjunto resolvente* de  $T$ , y  $\sigma(T)$ , *espectro* de  $T$ , dados por

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ es inversible con inverso continuo}\} \quad \text{y} \quad \sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Para  $\lambda \in \rho(T)$ , el operador  $R_{\lambda} = (\lambda I - T)^{-1}$  se llama *resolvente* de  $T$  en  $\lambda$ . El espectro de  $T$  es un subconjunto compacto y no vacío de  $\mathbb{C}$ . Si  $f \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  es tal que  $Tf = \lambda f$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C}$ , decimos que  $f$  es un *autovector* de  $T$  con *autovalor* asociado  $\lambda$ . Todo autovalor de  $T$  pertenece al espectro de  $T$  y al conjunto de todos los autovalores se lo denomina el *espectro puntual* de  $T$ . Al subconjunto de aquellos  $\lambda$ 's en  $\sigma(T)$  que no son autovalores de  $T$  y tales que  $\mathcal{R}(\lambda I - T)$  no es denso en  $\mathcal{H}$  se denomina el *espectro residual* de  $T$ . El Teorema de Phillips establece que  $\sigma(T) = \overline{\sigma(T^*)}$  (véase [ReSi80, pág. 182]).

En la Subsección 1.3.2 presentamos el *teorema espectral para operadores unitarios*. A continuación, enunciamos el *teorema de descomposición espectral para operadores compactos autoadjuntos* (véase [Br11, Theorem 6.11] o [ReSi80, Theorem VI.16]).

**Teorema 1.3.10.** Sean  $\mathcal{H}$  un espacio de Hilbert separable y  $T \in B(\mathcal{H})$  compacto y autoadjunto. Entonces existe una B.O.N. de  $\mathcal{H}$  formada por autovectores de  $T$ . Concretamente:

$$Tf = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle f, e_n \rangle_{\mathcal{H}} e_n, \quad f \in \mathcal{H},$$

donde  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  y  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  B.O.N. de  $\mathcal{H}$  son tales que  $Te_n = \lambda_n e_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

Consideremos para cada  $n \in \mathbb{N}$  los subespacios  $\mathcal{S}_n = \text{gen}\{e_1, \dots, e_n\}$  y notemos por  $P_n$  las correspondientes proyecciones ortogonales sobre  $\mathcal{S}_n$ . Es inmediato que

$$\|P_n f - f\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall f \in \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \|T - P_n T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Supongamos que tenemos una sucesión de operadores (compactos y autoadjuntos)  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $T_n \in B(\mathcal{S}_n)$  (o bien  $T_n \in B(\mathcal{H})$  y  $T_n f = 0 \forall f \in \mathcal{S}_n^\perp$ ) para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tales que

$$\|T_n - P_n T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \left( \text{equivalentemente} \quad \|T_n - T\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right).$$

Los items a) y b) del siguiente teorema, son un caso particular de los Teoremas 18.1 y 18.2 en [KVZRS72, págs. 269-274].

**Teorema 1.3.11.** *Bajo las hipótesis anteriores valen:*

- a) *Para todo autovalor  $\lambda$  de  $T$ , existe una sucesión  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\lambda_n$  autovalor de  $T_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , que converge a  $\lambda$ . Recíprocamente, todo punto límite de cualquier sucesión  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $\lambda_n$  autovalor de  $T_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , es un autovalor de  $T$ .*
- b) *Toda sucesión  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $v_n$  autovector de  $T_n$  con correspondiente autovalor  $\lambda_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , contiene una subsucesión convergente: cualquier subsucesión  $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que sea convergente, tiene como límite un autovector  $v$  de  $T$  con correspondiente autovalor  $\lambda$ , con  $\lambda$  el límite de  $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ .*

*Observación 1.3.12.* El Teorema 1.3.11 es válido para operadores compactos en espacios de Banach. Este es una aplicación de una *teoría general de métodos de aproximación*. El aquí utilizado corresponde a una familia de métodos denominados *métodos de proyección* (*projection methods*). Para un estudio detallado véase por ejemplo [AK82, Chapter XIV] o [KVZRS72, Chapter 4].  $\diamond$

Para la teoría desarrollada en el Capítulo 3 (y también para el Lema 4.3.3), es importante considerar operadores (o matrices finitas y/o infinitas) que dependan de una variable y cuyas entradas resulten (al menos) funciones medibles. En [RS95, Lemma 2.3.5, p. 20] se demuestra el siguiente resultado para matrices.

**Proposición 1.3.13.** *Dada una matriz hermitiana  $A = A(\omega) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  (o un operador de rango finito), cuyas entradas son funciones medibles definidas para  $\omega \in \Omega$ , existen una matriz unitaria  $U = U(\omega)$  y una matriz diagonal  $\Delta = \Delta(\omega)$ , cuyas entradas son funciones medibles para todo  $\omega \in \Omega$  y tales que  $U^* A U = \Delta$ .*

Vale resaltar que tanto la base de autovectores  $\{u_1(\omega), \dots, u_N(\omega)\}$  como los correspondientes autovalores  $\lambda_1(\omega), \dots, \lambda_N(\omega)$  son funciones medibles en  $\Omega$ .

### 1.3.2. Teorema Espectral para Operadores Unitarios

En esta subsección seguimos mayormente el libro de Mousen Pourahmadi [Pou01]. También, algunos resultados se pueden encontrar en [Kat04, Mal95, Mar18, ReSi80, Roz67]. El camino elegido aquí sirve para mostrar que la construcción hecha para procesos aleatorios estacionarios en la Sección 2.2 se obtiene como una aplicación de este teorema. Además, sirve para comprender que la terminología allí empleada proviene de la expuesta a continuación.

**Lema 1.3.14** ([Pou01, Lemma 9.15]). Sea  $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ . Si  $U$  preserva productos internos sobre  $\mathcal{N}$ , entonces  $U$  se extiende a  $\overline{\text{gen}}\mathcal{N}$  de manera tal que preserva productos internos.

**Lema 1.3.15** ([Pou01, Lemma 9.16]). Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  una sucesión en  $\mathcal{H}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  es estacionaria, es decir, para todos  $j, k \in \mathbb{Z}$  el producto  $\langle f_{j+k}, f_j \rangle_{\mathcal{H}} := \gamma(k)$  solo depende de  $k$ .
- ii) Existe  $U : \overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$  isometría sobreyectiva tal que  $f_j = U^j f_0$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii) Por el Lema 1.3.14, la isometría  $U$  dada por  $Uf_j = f_{j-1}$ , para  $j \in \mathbb{Z}$ , se extiende a una isometría sobre  $\overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$ . Resta ver que  $U$  es sobreyectiva. Para  $g \in \overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$  existe  $h \in \overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$  tal que  $Uh = g$ , digamos

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n, \quad \text{con} \quad g_n = \sum_m c_{n,m} f_{j_m}, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C}.$$

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n, \quad \text{con} \quad h_n = \sum_m c_{n,m} f_{j_m+1}, \quad c_{n,m} \in \mathbb{C}.$$

ii)  $\Rightarrow$  i) Para  $j, k \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$\langle f_{j+k}, f_j \rangle_{\mathcal{H}} = \langle U^j U^k f_0, U^j f_0 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle U^k f_0, U^{-j} U^j f_0 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle U^k f_0, f_0 \rangle_{\mathcal{H}},$$

que solo depende de  $k \in \mathbb{Z}$ , de donde  $(f_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  es estacionaria. ■

El siguiente se conoce en la literatura como Teorema de Herglotz (véase por ejemplo [Mar18, págs. 133-136], [Pou01, Theorem 6.22] o [Kat04, p. 39]).

**Teorema 1.3.16.** Sea  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i)  $a$  es una sucesión definida positiva, es decir,

$$\sum_{n,m=1}^N \bar{c}_n c_m a(j_n - j_m) \geq 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad j_1, \dots, j_N \in \mathbb{Z}, \quad c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}.$$

ii) Existe una única medida positiva  $\mu$  sobre  $\mathbb{T} := (-\pi, \pi]$  tal que

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} d\mu(\lambda) = \widehat{\mu}(k),$$

donde  $\widehat{\mu}(k)$  denota la transformada de Fourier de la medida  $\mu$  en  $k \in \mathbb{Z}$  (véase (1.17)).

**Definición 1.3.17.** Decimos que una función  $E : \mathbf{B}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es una *medida espectral* (o medida a valores en proyecciones ortogonales) si:

- a)  $E(A)$  es una proyección ortogonal sobre un subespacio de  $\mathcal{H}$  para todo  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$ .
- b)  $E(\mathbb{T}) = P_{\mathcal{H}} = I$ .
- c)  $E$  es  $\sigma$ -aditiva (véase ecuación (1.1)).

Si  $E$  es una medida espectral sobre  $\mathbf{B}(\mathbb{T})$ , entonces  $E(\emptyset) = 0_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$  y además  $E$  es:

- *Monótona y subtractiva*, es decir, para  $A, B \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$  con  $A \subset B$ , vale que

$$E(A) \leq E(B) \quad \text{y} \quad E(B \setminus A) = E(B) - E(A).$$

- *Modular y multiplicativa*, es decir, para  $A, B \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$ , vale que

$$E(A \cup B) = E(A) + E(B) - E(A \cap B) \quad \text{y} \quad E(A \cap B) = E(A)E(B).$$

*Observación 1.3.18.* Notamos por  $P_{S_1} \leq P_{S_2}$  si  $\langle P_{S_1}f, f \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle P_{S_2}f, f \rangle_{\mathcal{H}}$  para todo  $f \in \mathcal{H}$ . “ $\leq$ ” es una relación de orden parcial sobre el conjunto de operadores positivos.  $\diamond$

**Ejemplo 1.3.19.** El ejemplo clásico de medida espectral es con el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T}, \mathbf{B}(\mathbb{T}), \mu)$ , siendo  $E(A) = \mathbf{1}_A$ , para  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$ .  $\blacklozenge$

**Lema 1.3.20** ([Pou01, Theorem 9.25]). *Sea  $E$  una función sobre  $\mathbf{B}(\mathbb{T})$  a valores en proyecciones ortogonales. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*i)  $E$  es una medida espectral.*

*ii)  $E(\mathbb{T}) = I$  y para cada  $f, g \in \mathcal{H}$ , la función  $\mu_{f,g} : \mathbf{B}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$  dada por*

$$\mu_{f,g}(A) := \langle E(A)f, g \rangle_{\mathcal{H}}, \quad A \in \mathbf{B}(\mathbb{T}), \quad (1.7)$$

*es  $\sigma$ -aditiva. Notaremos  $d\mu_{f,g}(\lambda) = d(E(\lambda)f, g)$ .*

*Demostración.* *i)  $\Rightarrow$  ii)* Si  $E$  es una medida espectral, ciertamente vale que  $E(\mathbb{T}) = I$ , y la  $\sigma$ -aditividad de  $\mu_{f,g}$ , definida por (1.7), se desprende de la de  $E$  junto con la propiedad de continuidad del producto interno.

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Falta ver la  $\sigma$ -aditividad de  $E$  (igualdad de operadores). Sea  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  con  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{B}(\mathbb{T})$  disjuntos dos a dos. Por la multiplicatividad de  $E$ , para cada  $f \in \mathcal{H}$ , resulta que  $(E(A_n)f)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  es ortogonal. Recurriendo dos veces a la Proposición 1.2.1, junto a la  $\sigma$ -aditividad de  $\mu_{f,f}$  obtenemos

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|E(A_n)f\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E(A_n)f, f \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{f,f}(A_n) = \mu_{f,f}(A) \leq \|f\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty,$$

con lo cual  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|E(A_n)f\|_{\mathcal{H}}^2$  es finita, de donde  $\sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)f$  es convergente en  $\mathcal{H}$  y por lo tanto también lo es  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E(A_n)f, g \rangle_{\mathcal{H}}$  para cualquier  $g \in \mathcal{H}$ . Ahora bien, por un lado

$$\left\langle E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)f, g \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle E(A)f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \mu_{f,g}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{f,g}(A_n),$$

y por otro lado

$$\left\langle \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)\right)f, g \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)f, g \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle E(A_n)f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{f,g}(A_n).$$

Así,  $E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)$ , probando la  $\sigma$ -aditividad de  $E$ .  $\blacksquare$

*Observación 1.3.21.* En el lema anterior hemos obtenido que para cada  $f \in \mathcal{H}$ , tenemos una medida positiva de Borel finita  $\mu_f := \mu_{f,f}$  sobre  $\mathbb{T}$ , la cual es de probabilidad si y solo si  $\|f\| = 1$ . Se las denomina *medidas espectrales escalares* asociadas a  $(\mathcal{H}, E)$ .

También tenemos una familia de *medidas espectrales vectoriales* asociadas a  $(\mathcal{H}, E)$ . Estas son de vital importancia para la teoría de sucesiones estacionarias. Para  $f \in \mathcal{H}$ , estas medidas  $\sigma$ -aditivas a valores en  $\mathcal{H}$  vienen dadas por

$$\Phi_f(A) := E(A)f, \quad A \in \mathbf{B}(\mathbb{T}). \quad (1.8)$$

Las mismas satisfacen una propiedad de ortogonalidad (implícito en el Lema 1.3.20), esta es,  $\forall f \in \mathcal{H}$  vale que

$$\Phi_f(A) \perp \Phi_f(B), \quad \Leftrightarrow \quad A, B \in \mathbf{B}(\mathbb{T}) \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset. \quad (1.9)$$

La fórmula  $\mu_f(A) = \langle E(A)f, E(A)f \rangle_{\mathcal{H}} = \|\Phi_f(A)\|_{\mathcal{H}}^2$ , para  $f \in \mathcal{H}$ , muestra la relación entre las medidas espectrales escalares y las vectoriales.  $\diamond$

Finalmente llegamos al resultado principal de la subsección. Para una demostración rigurosa véase por ejemplo [Pou01, Theorem 9.26] o [Mar18, págs 180-186].

**Teorema 1.3.22** (Teorema Espectral para Operadores Unitarios). *Sea  $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  unitario. Entonces existe una única medida espectral  $E$  sobre  $\mathbf{B}(\mathbb{T})$  tal que*

$$\langle Uf, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} d(E(\lambda)f, g), \quad f, g \in \mathcal{H}. \quad (1.10)$$

La dependencia de  $U$  en  $E$  se expresa simbólicamente por

$$U = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda} dE(\lambda). \quad (\text{representación espectral de } U) \quad (1.11)$$

*Demostración.* Haremos un esbozo de demostración.

- Para  $f \in \mathcal{H}$ , se define  $a_k := \langle U^k f, f \rangle_{\mathcal{H}}$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  es definida positiva y por el Teorema 1.3.16 (Herglotz), existe una única medida finita  $\mu_f$  sobre  $\mathbb{T}$  tal que

$$\langle U^k f, f \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} d\mu_f(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Usando la identidad de polarización, para cada  $k \in \mathbb{Z}$  se concluye que

$$\langle U^k f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} d\mu_{f,g}(\lambda), \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

- La asignación  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \ni (f, g) \mapsto \mu_{f,g}(\lambda)$  es una forma sesquilineal acotada contractiva. Por el Teorema 1.3.5, existe una única familia de operadores  $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbb{T}\}$  tal que

$$\mu_{f,g}(\lambda) = \langle E(\lambda)f, g \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \lambda \in \mathbb{T}, \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

- $E : \mathbf{B}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  resulta una medida espectral a valores en proyecciones ortogonales. Entonces para cada  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$\langle U^k f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} d(E(\lambda)f, g), \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

La ecuación (1.10) se obtiene tomando  $k = 1$ . ■

*Observación 1.3.23.* Siguiendo [Pou01, págs. 339-340], la representación espectral de  $U^k$ :

$$U^k f = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} dE(\lambda)f, \quad f \in \mathcal{H}, \quad (1.12)$$

es válida como un operador acotado, para cada  $k \in \mathbb{Z}$ , en el sentido de que la integral espectral del lado derecho de (1.12), para cada  $f \in \mathcal{H}$ , puede aproximarse por sumas “trigonométricas” finitas de proyecciones ortogonales de la forma

$$A_n f := \sum_{j=1}^n e^{ik\lambda_j} E(\Delta_j)f, \quad \text{con} \quad -\pi = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \pi \quad \text{y} \quad \Delta_j = (\lambda_{j-1}, \lambda_j].$$

Esto mismo motivó en parte los resultados principales de este trabajo. Nótese la similitud con el espacio de funciones casi periódicas (Subsección 1.5.3). ◇

Una generalización posible del Teorema 1.3.22 es el Teorema de Stone. Antes, unas definiciones. Decimos que una familia  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es un *grupo uni-paramétrico*, si  $U_{s+t} = U_s U_t \ \forall s, t \in \mathbb{R}$  y  $U_0 = I$ . Un grupo uni-paramétrico  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  es de *clase  $C_0$*  (o *fuertemente continuo*) si para cada  $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} U_t f = U_{t_0} f, \quad f \in \mathcal{H}.$$

**Teorema 1.3.24** ([Mar18, págs. 187-191]). *Sea  $(U_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un grupo uni-paramétrico de clase  $C_0$  formado por operadores unitarios. Entonces, para cada  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$ , existe un único operador autoadjunto  $E(A) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tal que*

$$\langle U_t f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d(E(\lambda)f, g), \quad f, g \in \mathcal{H}.$$

*Observación 1.3.25.* Así como la prueba del Teorema 1.3.22 se basa en el Teorema de Herglotz (incluso son equivalentes), una posible prueba del Teorema de Stone se basa en el Teorema de Bochner, y también ambos son equivalentes [Mar18, Chapter 7].  $\diamond$

*Observación 1.3.26.* En [ReSi80, Chapters VII y VIII] se puede ver mucho más acerca de los “Teoremas espectrales”, incluso para operadores autoadjuntos no acotados.  $\diamond$

### 1.3.3. Operadores No Acotados

Esta subsección está dedicada a los operadores *no acotados* y está adaptada parcialmente del libro de Haim Brézis [Br11]. En la práctica, estos operadores se presentan con más frecuencia que los acotados, vistos en la Subsección 1.3.1. Nuestro principal interés radica en que los principales operadores utilizados en este trabajo: operador de *síntesis*, de *análisis*, *pre-Gramiano*, *pre-Gramiano dual*, *Gramiano* y *Gramiano dual*, en un principio sin utilizar hipótesis adicionales entran en esta categoría (véase Sección 1.6 y 3.2). Debido a esto, enunciaremos las definiciones y los resultados básicos para dar un marco más general que nos permita lidiar con estos operadores de una manera más organizada.

Decimos que  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  es un *operador no acotado* con dominio  $\mathcal{D}(T)$  si simplemente es un operador (a priori no sabemos si es acotado) y que es *cerrado* si su *gráfico*  $\text{Gr}(T) := \{(f, Tf) : f \in \mathcal{D}(T)\}$  es cerrado en  $\mathcal{H} \times \mathcal{K}$  (dotado con la norma producto por ejemplo). En la mayoría de los casos (y el que nos interesa también) un operador no acotado  $T$  es cerrado y su dominio  $\mathcal{D}(T)$  es denso en  $\mathcal{H}$  (diremos que  $T$  está *densamente definido*). Para  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  no acotado y densamente definido su *adjunto* es el operador  $T^* : \mathcal{D}(T^*) \subset \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  con dominio

$$\mathcal{D}(T^*) := \{x \in \mathcal{K} : \exists c > 0 \text{ tal que } |\langle Tf, x \rangle_{\mathcal{K}}| \leq c \|f\|_{\mathcal{H}} \ \forall f \in \mathcal{D}(T)\}$$

que satisface (por ser densamente definido y apelando al Teorema de Riesz 1.3.4)

$$\langle Tf, x \rangle_{\mathcal{K}} = \langle f, T^* x \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{D}(T), \ \forall x \in \mathcal{D}(T^*).$$

$T^*$  siempre es cerrado y si además,  $T$  es cerrado, entonces por reflexividad de  $\mathcal{K}$ ,  $T^*$  también es densamente definido. Por supuesto, debido al *Teorema del gráfico cerrado*, si  $T$  es cerrado y  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ , entonces  $T$  es acotado. Decimos ahora que un operador densamente definido  $T$  es *autoadjunto* ( $T = T^*$ ), si  $T$  es *simétrico* ( $T \subset T^*$ ), es decir,

$D(T) \subset D(T^*)$  y  $Tf = T^*f \ \forall f \in D(T)$ , y además  $D(T) = D(T^*)$ . Es *positivo* ( $T \geq 0$ ), si  $\langle Tf, f \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0 \ \forall f \in D(T)$ . Para  $T$  cerrado y densamente definido, las fórmulas de ortogonalidad (1.6) siguen valiendo. Los teoremas siguientes también serán útiles tanto cuando el operador sea acotado como así también cuando este esté definido entre espacios de Banach.

**Teorema 1.3.27** ([Br11, Theorem 2.19]). *Sea  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  un operador cerrado y densamente definido. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{R}(T)$  es cerrado.
- ii)  $\mathcal{R}(T^*)$  es cerrado.
- iii)  $\mathcal{R}(T) = \text{Nu}(T^*)^\perp$ .
- iv)  $\mathcal{R}(T^*) = \text{Nu}(T)^\perp$ .

**Teorema 1.3.28** ([Br11, Theorem 2.20]). *Sea  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  un operador cerrado y densamente definido. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $T$  es sobreyectivo, es decir,  $\mathcal{R}(T) = \mathcal{K}$ .
- ii)  $T^*$  es acotado inferiormente, es decir, existe una constante  $A > 0$  tal que

$$A\|x\|_{\mathcal{K}} \leq \|T^*x\|_{\mathcal{H}} \quad \forall x \in \mathcal{D}(T^*).$$

- iii)  $\text{Nu}(T^*) = \{0\}$  y  $\mathcal{R}(T^*)$  es cerrado

*Observación 1.3.29.* Existe un resultado dual al anterior con las mismas hipótesis y en las tres equivalencias intercambiando  $T$  por  $T^*$  y  $\mathcal{K}$  por  $\mathcal{H}$  (véase [Br11, Theorem 2.21]).  $\diamond$

### 1.3.4. Operadores de Traslación, Modulación y Dilatación

**Definición 1.3.30.** Definimos los siguientes operadores destacados sobre  $L^2(\mathbb{R})$ . Para  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $t \in \mathbb{R}$ , definimos los operadores de *traslación* en  $k \in \mathbb{R}$ , *modulación* en  $\lambda \in \mathbb{R}$  y *dilatación* en  $a > 0$ , respectivamente por:

$$(E^k f)(t) = f(t - k). \quad (1.13)$$

$$(M^\lambda f)(t) = e^{it\lambda} f(t). \quad (1.14)$$

$$(D_a f)(t) = a^{1/2} f(at). \quad (1.15)$$

Estos son operadores invertibles cuyos respectivos inversos son del mismo tipo.

$$(E^k)^{-1} = E^{-k}, \quad (M^\lambda)^{-1} = M^{-\lambda} \quad \text{y} \quad (D_a)^{-1} = D_{a^{-1}}.$$

Además, estos son operadores unitarios. Las relaciones

$$E^k E^{k'} = E^{k'} E^k = E^{k+k'}, \quad M^\lambda M^{\lambda'} = M^{\lambda'} M^\lambda = M^{\lambda+\lambda'} \quad \text{y} \quad D_a D_{a'} = D_{a'} D_a = D_{aa'},$$

ponen de manifiesto que  $(E^k)_{k \in (\mathbb{R}, +)}$  y  $(M^\lambda)_{\lambda \in (\mathbb{R}, +)}$  constituyen *grupos uni-paramétricos*, mientras que  $(D_a)_{a \in (\mathbb{R}_+, \cdot)}$  constituye un semi-grupo uni-paramétrico. Además, tenemos las siguientes relaciones de conmutación:

$$E^k M^\lambda = e^{-ik\lambda} M^\lambda E^k, \quad M^\lambda D_a = D_a M^{\lambda a^{-1}} \quad \text{y} \quad D_a E^k = E^{ka^{-1}} D_a.$$

La relación de conmutación entre la transformada de Fourier  $\mathcal{F}$  (véase Sección 1.4) y cada uno de estos operadores serán de suma importancia. Estas son:

$$\mathcal{F}E^k = M^{-k}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F}M^\lambda = E^\lambda\mathcal{F} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}D_a = D_{a^{-1}}\mathcal{F}. \quad (1.16)$$

Si bien hemos considerado aquí a  $L^2(\mathbb{R})$  como dominio de definición de los operadores, estos pueden considerarse en varios espacios de diversa naturaleza, como por ejemplo los espacios de Lebesgue  $L^p(\mathbb{R})$ , para  $1 \leq p \leq \infty$ , y la *clase de Schwartz*  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (véase también las Subsecciones 1.5.2 y 1.5.3 para espacios de funciones casi periódicas).

### 1.3.5. Operadores de Hilbert-Schmidt

Sea  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  un operador.

**Definición 1.3.31.** Decimos que  $T$  es un operador de *Hilbert-Schmidt* si

$$\|T\|_{\text{HS}}^2 := \sum_{j \in \mathbb{I}} \|Te_j\|_{\mathcal{K}}^2 < \infty,$$

donde  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es una BON de  $\mathcal{H}$ .

*Observación 1.3.32.*  $T$  es un operador de Hilbert-Schmidt de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{K}$  si existe una BON  $(e_j)_{j \in \mathbb{I}}$  de  $\mathcal{H}$  tal que  $(Te_j)_{j \in \mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I}, \mathcal{K})$ . Se puede probar que el número  $\|T\|_{\text{HS}}^2$  no depende de la BON elegida y que  $\|T\| \leq \|T\|_{\text{HS}}$ , de donde  $T$  es un operador acotado. Además,  $T$  es también un *operador compacto*.  $\diamond$

Se puede encontrar más información sobre los operadores de Hilbert-Schmidt, por ejemplo, en [GV64, He11, ReSi80].

## 1.4. Transformada de Fourier

La *Transformada de Fourier* de  $f \in L^1(\mathbb{R})$  viene dada por:

$$\mathcal{F}f(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Es sabido que  $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$  (continua en  $\mathbb{R}$  y “se anula en  $\infty$ ”), donde

$$C_0(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \text{Dado } \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon \text{ compacto, tal que } |f(t)| < \varepsilon \forall t \in \mathbb{R} \setminus K_\varepsilon\}.$$

De forma análoga, si  $\widehat{f}$  es integrable,  $f$  puede recuperarse mediante la Transformada de Fourier inversa o anti transformada:

$$(\widehat{f})^\vee(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda x} d\lambda.$$

La transformada de Fourier es un isomorfismo topológico sobre la clase de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  (véase por ejemplo [Mal95, p. 150] o [ReSi80, Theorem IX.1]), la cual está definida por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \rho_{m,\alpha}(\varphi) := \sup_{t \in \mathbb{R}} |(1+t^2)^m D^\alpha \varphi(t)| < \infty, \forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Mediante un argumento de densidad (por ejemplo que  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ ), la transformada de Fourier se puede definir para  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . De hecho, en este caso, se tiene la identidad de Plancherel:

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

lo que expresa que la transformada de Fourier, sobre  $L^2(\mathbb{R})$ , es (múltiplo de) un operador unitario. Además de las fórmulas (1.16) vale resaltar la fórmula de la convolución

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g.$$

La transformada de Fourier se define también para otras clases de funciones e incluso para medidas. Por ejemplo, es un isomorfismo topológico (véase por ejemplo [ReSi80, Theorem IX.2]) sobre las *distribuciones temperadas*  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  (dual topológico de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ), donde es definida por

$$\widehat{u}(\phi) = u(\widehat{\phi}), \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

También, si  $\mu$  es una medida de Borel finita en  $\mathbb{R}$  entonces se define por

$$\widehat{\mu}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda} d\mu(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.17)$$

Para más detalles, véase, por ejemplo, [Be01, Fo99, He11, Kat04, Mal95, Mar18, Pi09].

Si  $\mathcal{G}$  denota cualquier familia o subconjunto de funciones para las que está definida su transformada de Fourier, denotaremos su imagen como  $\widehat{\mathcal{G}} = \mathcal{F}(\mathcal{G}) = \{\widehat{f} : f \in \mathcal{G}\}$ .

## 1.5. Algunos Espacios de Funciones

### 1.5.1. Espacios de Wiener

Necesitaremos la siguiente clase de funciones en la Sección 4.4 (véase [Be01, Ch16, Gr01, Kat04] para un estudio más profundo). El espacio de funciones de Wiener aparece en el tratamiento de las funciones periódicas y la *fórmula de suma de Poisson* [Gr01, págs. 14-16].

**Definición 1.5.1.** Una función  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  pertenece al *espacio de Wiener*  $W(\mathbb{R})$  si

$$\|f\|_W = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f(\cdot - n)\|_{L^\infty[0,1]} < \infty.$$

El subespacio de funciones continuas se denota por  $W_0(\mathbb{R})$ .

En cierto sentido,  $W(\mathbb{R}) \cap \widehat{W}(\mathbb{R})$  es el espacio funcional más grande donde la fórmula de suma de Poisson se cumple puntualmente. La siguiente estimación será muy útil en algunas acotaciones (véase [Gr01, Lemma 6.1.2]).

**Lema 1.5.2.** Para  $f \in W(\mathbb{R})$  y  $\gamma > 0$  vale la siguiente desigualdad:

$$\left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f(\cdot - \gamma n)| \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \left( \frac{1}{\gamma} + 1 \right) \|f\|_W.$$

### 1.5.2. Espacios de Sobolev

Estos espacios están relacionados con algunas aplicaciones desarrolladas en la Subsección 5.3. Por esto mismo solo consideramos aquellos que poseen estructura de espacio de Hilbert (caso  $p = 2$ ). Para un estudio más general véase por ejemplo [Br11, Mal95, St87].

Denotamos por  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  al espacio de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$  de soporte compacto que son derivables con continuidad tantas veces como se quiera.  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  es un subconjunto denso de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Estamos interesados en nociones más débiles de suavidad como las siguientes.

**Definición 1.5.3.** Para  $f \in L^2(\mathbb{R})$  decimos que existe la derivada de  $f$  en el *sentido de*  $L^2(\mathbb{R})$  y la notamos por  $f'$ , si vale el límite siguiente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{E^\varepsilon f - f}{\varepsilon} + f' \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

**Definición 1.5.4.** Para  $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ , es decir,  $f \in L^1(K)$  para todo  $K \subset \mathbb{R}$  compacto, decimos que existe la derivada de  $f$  en *sentido débil* (o en el sentido de distribuciones), si existe  $g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Notamos en tal caso  $f' = g$ .

Estas dos nociones de suavidad no resultan ser muy distintas entre sí.

**Proposición 1.5.5** ([Mal95, Theorem 3.3.2]). *Sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i) *Existe la derivada de  $f$  en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ .*
- ii) *Existe la derivada de  $f$  en sentido débil y  $f' \in L^2(\mathbb{R})$ .*

Consideremos el espacio

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f' \text{ existe en el sentido de } L^2(\mathbb{R})\},$$

y definimos inductivamente para  $m \in \mathbb{N}$  con  $m > 1$

$$W^{m,2}(\mathbb{R}) := \{f \in W^{1,2}(\mathbb{R}) : f' \in W^{m-1,2}(\mathbb{R})\}.$$

Al equiparlos con el producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W^{m,2}(\mathbb{R})}$  dado por

$$\langle f, g \rangle_{W^{m,2}(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^m \langle D^j f, D^j g \rangle_{L^2(\mathbb{R})},$$

donde  $D^0 f = f$ , los mismos resultan espacios de Hilbert separables, denominados *espacios de Sobolev de orden  $m$* . Notaremos por  $H^m(\mathbb{R})$  al espacio  $(W^{m,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{W^{m,2}(\mathbb{R})})$ .

Como los espacios de Sobolev de orden  $m$  son subespacios de  $L^2(\mathbb{R})$  se obtiene la siguiente caracterización por medio de la transformada de Fourier.

**Teorema 1.5.6** ([Mal95, Theorem 3.5.1]). Sean  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

i)  $f \in H^m(\mathbb{R})$ .

ii)  $\|f\|_{H^m(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\lambda)|^2 (1 + |\lambda|^2)^m d\lambda < \infty$ .

Este resultado permite definir  $(H^\alpha(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{H^\alpha(\mathbb{R})})$  para cualquier  $\alpha > 0$ , obteniendo así los espacios de Hilbert denominados “espacios de Sobolev de orden fraccionario  $\alpha$ ”. En la Sección 1.7 veremos más caracterizaciones en términos de integrales singulares, que relacionan *potenciales* con derivadas.

### 1.5.3. Espacios de Funciones Casi Periódicas

El contenido de esta subsección será necesario en los Capítulos 2, 4 y 5.

Una función casi periódica es una generalización natural de una función periódica. Aunque su definición tiene sentido en grupos arbitrarios y a valores en un espacio de Banach, nos centraremos en el caso del grupo (aditivo)  $\mathbb{R}$  a valores en  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.5.7.** Decimos que una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  es *casi periódica* si posee la propiedad de que para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $L > 0$ , tal que todo intervalo de la recta real de longitud mayor que  $L$  contiene un valor  $\tau$  que satisface

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t - \tau) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Denotamos por  $AP(\mathbb{R})$  al conjunto de funciones casi periódicas en  $\mathbb{R}$ . Se puede comprobar sin dificultad que  $AP(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$  [Kat04, p. 171], donde  $C_b(\mathbb{R})$  es el espacio (de Banach) de funciones continuas y acotadas en  $\mathbb{R}$  a valores en  $\mathbb{C}$  equipado con la norma supremo (o uniforme)  $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ .

*Observación 1.5.8.* Para otras definiciones equivalentes, e incluso susceptibles a una generalización para funciones con grupos como dominios y a valores en espacios de Banach, véase por ejemplo [Kat04, Pan90].  $\diamond$

$AP(\mathbb{R})$  tiene estructura de sub-álgebra cerrada de  $L^\infty(\mathbb{R})$  (véase [Kat04, p. 173]). El resultado siguiente, conocido por el nombre de *Teorema de aproximación* (véase [Pan90, Proposition 1.3]), muestra que  $(AP(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$  es un espacio de Banach.

**Teorema 1.5.9.** El espacio  $AP(\mathbb{R})$  es la clausura en norma uniforme del espacio  $\text{Trig}(\mathbb{R})$  de polinomios trigonométricos  $p(t) = \sum_{\lambda \in \sigma} c_\lambda e^{it\lambda}$  con  $\sigma \subset \mathbb{R}$  finito,  $c_\lambda \in \mathbb{C}$  y  $t \in \mathbb{R}$ .

*Observación 1.5.10.* En [Kat04, págs. 180-181] se demuestra que, dada  $f \in AP(\mathbb{R})$ , la sucesión aproximante de polinomios  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (polinomios de Bochner) puede elegirse de tal manera que satisfaga  $\sigma(p_n) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , donde  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$  es una enumeración ordenada del espectro de  $f$ . Este resultado, hasta donde sabemos, no tiene su correlato en cualquier otro grupo (abeliano) localmente compacto que no sea  $\mathbb{R}$ , y el mismo tiene un rol preponderante en las demostraciones de caracterizaciones de marcos  $AP$  en [KR09, Theorem 1.11 & Theorem 1.13].  $\diamond$

En  $AP(\mathbb{R})$  se puede introducir el producto interno:

$$\langle f, g \rangle_{AP(\mathbb{R})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

La norma  $\|\cdot\|_{AP(\mathbb{R})}$  inducida por este producto interno convierte a  $AP(\mathbb{R})$  en un espacio normado incompleto y no separable. La completación del espacio de polinomios trigonométricos  $\text{Trig}(\mathbb{R})$  (o de  $AP(\mathbb{R})$ ) con respecto a esta norma es el espacio de Hilbert  $(B^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{B^2(\mathbb{R})})$  de *funciones casi periódicas de Besicovitch*. En la literatura aplicada, estas funciones se denominan *señales de potencia finita*, en contraste con el espacio habitual  $L^2(\mathbb{R})$  de *señales de energía finita*. De hecho, los caracteres  $(e_\lambda(\cdot) := e^{i\lambda(\cdot)})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  forman una base ortonormal y el siguiente análogo, debido a Bohr (véase [Kat04, p. 179]), de la identidad de Plancherel se cumple:

$$\|f\|_{B^2(\mathbb{R})} = \|C(f)\|_{L^2(\mathbb{R}, dc)}, \quad (1.18)$$

donde  $C(f)(\lambda) = \langle f, e_\lambda \rangle_{B^2(\mathbb{R})}$  denota la *Transformada de Bohr* de  $f$  y  $c$  denota la medida de conteo. Obviamente,  $C(f)(\lambda) = 0$  para todos los  $\lambda$  excepto para un subconjunto a lo sumo numerable de ellos [Kat04, p. 174]. El conjunto de estos elementos no nulos (*frecuencias* de  $f$ ) se denomina *espectro normante* (*norm spectrum*) de  $f$ .

*Observación 1.5.11.* El espacio de Marcinkiewicz  $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$  dado por

$$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) : \|f\|_2^2 := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

resulta un espacio topológico seminormado completo y, la relación de equivalencia “ $\sim$ ” sobre  $\mathcal{M}^2(\mathbb{R})$  dada por  $f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_2 = 0$ , hace de  $M^2(\mathbb{R}) := \mathcal{M}^2(\mathbb{R}) / \sim$  un espacio de Hilbert. Se define  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$  como la clausura en  $M^2(\mathbb{R})$  de  $\text{Trig}(\mathbb{R})$ , de donde  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$  resulta un espacio de Hilbert. El espacio  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$  es isométricamente isomorfo al espacio de Besicovitch  $B^2(\mathbb{R})$  (véase por ejemplo [Pan90, págs. 11-13]).  $\diamond$

*Observación 1.5.12.* La definición de  $B^2(\mathbb{R})$  como una completación, sólo nos dice que los elementos del espacio son límites de sucesiones de Cauchy de polinomios trigonométricos y dificulta entender el significado de tales elementos. En cambio, el estudio en  $\mathcal{B}^2(\mathbb{R})$  es más accesible (véase [ABG06, págs. 33-56] y las referencias ahí citadas).  $\diamond$

Si  $\mathbb{K}$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{R}$ , digamos  $\mathbb{K} = t_0\mathbb{Z}$  para algún  $t_0 > 0$ , con *anulador* discreto  $\mathbb{K}^\perp$ , de forma análoga, se puede introducir el espacio de sucesiones casi periódicas  $AP(\mathbb{K})$ . De hecho, una sucesión casi periódica  $(x(k))_{k \in \mathbb{K}}$  puede caracterizarse como la restricción sobre  $\mathbb{K}$  de funciones en  $AP(\mathbb{R})$ . Este espacio puede dotarse con el producto interno

$$\langle x, y \rangle_{AP(\mathbb{K})} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} x(k) \overline{y(k)},$$

donde  $\mathbb{K}(N) = \{t_0 n : -N \leq n \leq N\}$  para  $N \in \mathbb{N}$ . De nuevo, estos espacios admiten una completación y  $(e_\lambda(\cdot))_{\lambda \in \mathbb{T}}$  es una base ortonormal no numerable de este, donde  $\mathbb{T} := [0, \frac{2\pi}{t_0})$ . Aquí, (1.18) toma la forma

$$\|x\|_{B^2(\mathbb{K})} = \|C(x)\|_{L^2(\mathbb{T}, dc)},$$

con  $C(x)(\lambda) = \langle x, e_\lambda \rangle_{B^2(\mathbb{K})}$ .

Observamos que algunos elementos de estos espacios de Hilbert no siempre se identifican como funciones escalares ordinarias. Sin embargo, con cierto abuso de notación (al igual que hacemos con el producto interno y/o la norma usual de  $L^2(\mathbb{R})$ ), cuando la norma de un determinado elemento esté bien definida como uno de estos promedios, escribiremos  $\|f\|_{B^2(\mathbb{R})}$ . Lo mismo ocurre con  $B^2(\mathbb{K})$ .

Finalmente, resumimos algunos datos destacados sobre  $B^2(\mathbb{R})$  (resultados análogos se aplican también para  $B^2(\mathbb{K})$ ):

1. (Propiedad de Riesz-Fischer) Sea  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Entonces existe una única  $f \in B^2(\mathbb{R})$  (como clase de equivalencia) tal que  $C(\lambda) = \langle f, e^{i\lambda(\cdot)} \rangle_{B^2(\mathbb{R})}$  si y solo si  $\|C\|_{L^2(\mathbb{R}, dc)} < \infty$ . En este caso  $f = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} C(\lambda) e^{i\lambda(\cdot)}$ , donde la convergencia es en la norma de  $B^2(\mathbb{R})$ .
2. Para  $f \in AP(\mathbb{R})$  y  $\tau \in \mathbb{R}$  resulta que  $E^\tau f = f(\cdot - \tau) \in AP(\mathbb{R})$  y además  $\|f\|_{B^2(\mathbb{R})} = \|E^\tau f\|_{B^2(\mathbb{R})}$ , por lo tanto,  $E^\tau$  se extiende unívocamente a una isometría en  $B^2(\mathbb{R})$ . Aquí, con cierto abuso, también denotaremos esta extensión como  $E^\tau$ . Además, se puede definir la *autocorrelación determinista* de  $f \in B^2(\mathbb{R})$  en  $\tau \in \mathbb{R}$  mediante  $\rho_f(\tau) := \langle f, E^\tau f \rangle_{B^2(\mathbb{R})}$ . Si  $f \in B^2(\mathbb{R})$  entonces  $\rho_f \in AP(\mathbb{R})$ , con

$$\rho_f(\tau) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |C(\lambda)|^2 e^{-i\lambda\tau},$$

y, por lo tanto,  $\rho_f$  es la transformada de Fourier de la medida discreta  $\nu = \sum_{\lambda} |C(\lambda)|^2 \delta_\lambda$ .

## 1.6. Teoría de Marcos

En esta sección revisamos algunos conceptos de la teoría de marcos en espacios de Hilbert separables. Para las demostraciones, véase por ejemplo [Ch16, He11].

### 1.6.1. Generalidades

Sean  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, - \rangle_{\mathcal{H}})$  un espacio de Hilbert separable e  $\mathbb{I}$  un conjunto de índices numerable. Dada una sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ , podemos asociar, en principio, dos operadores: el *operador de síntesis*  $T : \ell^0(\mathbb{I}) \subset \ell^2(\mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{H}$  y el *operador de análisis*  $\tilde{T} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{I}}$  definidos por

$$Td = \sum_{j \in \mathbb{I}} d_j f_j, \quad d = (d_j)_{j \in \mathbb{I}} \in \ell^0(\mathbb{I}),$$

$$\tilde{T}f = (\langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}})_{j \in \mathbb{I}}, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Sin hipótesis adicionales, el operador de síntesis solo está densamente definido y el operador de análisis es su adjunto (no acotado).

**Definición 1.6.1.** Decimos que  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  es una *sucesión de Bessel* para  $\mathcal{H}$  si existe una constante  $B > 0$  tal que

$$\|(\langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}})_{j \in \mathbb{I}}\|_{\ell^2(\mathbb{I})}^2 \leq B \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.19)$$

El número  $B$  se denomina una *cota Bessel* para  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$ .

**Proposición 1.6.2.** Para  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es una sucesión de Bessel para  $\mathcal{H}$ .
- ii)  $\tilde{T}$  es un operador acotado de  $\mathcal{H}$  en  $\ell^2(\mathbb{I})$ .
- iii)  $T$  es un operador acotado de  $\ell^2(\mathbb{I})$  en  $\mathcal{H}$ . Además, la serie  $\sum_{j \in \mathbb{I}} d_j f_j$  converge incondicionalmente en  $\mathcal{H}$  para todo  $d = (d_j)_{j \in \mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I})$ .

En el caso de la Proposición 1.6.2, el operador de análisis y el operador de síntesis son operadores acotados adjuntos entre sí en el sentido de Hilbert, y por lo tanto utilizaremos de aquí en adelante la notación  $\tilde{T} = T^*$ , principalmente para conservar la notación empleada por Ron & Shen en [RS95], que utilizaremos en el Capítulo 3. Además, la cota Bessel óptima se obtiene mediante  $B = \|T\|^2 = \|T^*\|^2$ .

**Definición 1.6.3.** Un marco (frame) de  $\mathcal{H}$  es una sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  tal que  $\forall f \in \mathcal{H}$  es  $(\langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}})_{j \in \mathbb{I}} \in \ell^2(\mathbb{I})$  y para la cual existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|(\langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}})_{j \in \mathbb{I}}\|_{\ell^2(\mathbb{I})}^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}. \quad (1.20)$$

Las constantes  $A$  y  $B$  se denominan *cota inferior* y *cota superior* de marco para  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$ , respectivamente.

Cuando  $A = B$ ,  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  se denomina *marco ajustado* de  $\mathcal{H}$  y, si además  $A = B = 1$ , se denomina *marco de Parseval*.

Siempre usaremos el término “marco de  $\mathcal{H}$ ” sin importar quién sea  $\mathcal{H}$  (en [RS95, RS97a, RS97b] se usa el término *marco fundamental* cuando  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ ).

*Observación 1.6.4.* Por la ecuación (1.20),  $\|f\| := \|(\langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}})_{j \in \mathbb{I}}\|_{\ell^2(\mathbb{I})}$  define una norma en  $\mathcal{H}$  que resulta equivalente a la original  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ .  $\diamond$

Está claro que cualquier marco de  $\mathcal{H}$  es una sucesión de Bessel de  $\mathcal{H}$ .

**Proposición 1.6.5.** Para  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es un marco de  $\mathcal{H}$ .
- ii)  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{I})$  es un operador acotado y acotado inferiormente.
- iii)  $T : \ell^2(\mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador acotado y sobreyectivo.

Cabe mencionar que, en este caso,  $\mathcal{R}(T)$  (imagen de  $T$ ) y  $\mathcal{R}(T^*)$  son subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$  y  $\ell^2(\mathbb{I})$  respectivamente (véase los Teoremas 1.3.28 y 1.3.27). Además, la cota inferior de marco óptima se obtiene mediante  $A = \|T^\dagger\|^{-2} = \|T^{*\dagger}\|^{-2}$ , donde  $T^\dagger$  y  $T^{*\dagger}$  denotan el pseudo-inverso de Moore-Penrose de  $T$  y  $T^*$ , respectivamente.

**Definición 1.6.6.** Una base de Riesz de  $\mathcal{H}$  es una sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  que es completa, cumple que la serie  $\sum_{j \in \mathbb{I}} c_j f_j$  converge incondicionalmente en  $\mathcal{H}$  para todo  $c \in \ell^2(\mathbb{I})$  y para la cual existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que

$$A\|c\|_{\ell^2(\mathbb{I})}^2 \leq \left\| \sum_{j \in \mathbb{I}} c_j f_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|c\|_{\ell^2(\mathbb{I})}^2 \quad \forall c \in \ell^2(\mathbb{I}). \quad (1.21)$$

La siguiente Proposición muestra que cualquier base de Riesz de  $\mathcal{H}$  es un marco de  $\mathcal{H}$ .

**Proposición 1.6.7.** Para  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es una base de Riesz de  $\mathcal{H}$ .

- ii)  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es una sucesión minimal en  $\mathcal{H}$ , es decir,  $f_k \notin \overline{\text{gen}}\{f_j : j \in \mathbb{I} \setminus \{k\}\}$  para todo  $k \in \mathbb{I}$ , y es un marco de  $\mathcal{H}$ .
- iii)  $T^* : \mathcal{H} \rightarrow \ell^2(\mathbb{I})$  es un isomorfismo.
- iv)  $T : \ell^2(\mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{H}$  es un isomorfismo.

*Observación 1.6.8.* Para que  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  sea una sucesión de Bessel/ marco/ base de Riesz, es suficiente comprobar que valen las desigualdades (1.19)/ (1.20)/ (1.21) en un subconjunto denso de  $\mathcal{H}$ .  $\diamond$

*Observación 1.6.9.* Las propiedades de Bessel/ marco/ base de Riesz, se preservan mediante la aplicación de isomorfismos isométricos.  $\diamond$

### 1.6.2. Reconstrucción

Sea  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  un marco de  $\mathcal{H}$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ . El *operador marco* asociado a  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  es el operador  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  dado por

$$Sf = \sum_{j \in \mathbb{I}} \langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}} f_j, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Tenemos que  $S = TT^*$  y  $S$  es un operador positivo e invertible satisfaciendo

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle AI_{\mathcal{H}}f, f \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle Sf, f \rangle_{\mathcal{H}} \leq \langle BI_{\mathcal{H}}f, f \rangle_{\mathcal{H}} = B\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

La sucesión  $(S^{-1}f_j)_{j \in \mathbb{I}}$  también es un marco de  $\mathcal{H}$  llamado *marco dual canónico* asociado a  $(f_j)_{j \in \mathbb{I}}$ . Cualquier  $f \in \mathcal{H}$  puede reconstruirse (o representarse) como

$$f = \sum_{j \in \mathbb{I}} \langle f, S^{-1}f_j \rangle_{\mathcal{H}} f_j = \sum_{j \in \mathbb{I}} \langle f, f_j \rangle_{\mathcal{H}} S^{-1}f_j.$$

### 1.6.3. Marcos de Gabor de $L^2(\mathbb{R})$

En esta subsección enunciamos algunos resultados concernientes a la propiedad de marco de  $L^2(\mathbb{R})$  de *sistemas de Gabor*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$ . Nombrados así en honor a Dennis Gabor. Los resultados principales de la Sección 4.2 están en parte inspirados por algunos de ellos.

**Definición 1.6.10.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible de Borel (ventana) y  $t_0, \omega_0$  constantes positivas. El *sistema de Gabor* (Weyl-Heisenberg) generado por los desplazamientos en tiempo-frecuencia de  $g$  es el conjunto:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(g, t_0, \omega_0) = \{g_{k,l}(t) = g(t - k)e^{il(t-k)} : k \in \mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}, l \in \mathbb{L} := \omega_0\mathbb{Z}\}.$$

El siguiente es conocido en la literatura como “*Painless Nonorthogonal Expansions*”.

**Teorema 1.6.11** ([He11, Theorem 11.4], [Gr01, Theorem 6.4.1]). Sean  $t_0 > 0$  y  $\omega_0 > 0$  fijos tales que  $0 < t_0\omega_0 \leq 1$  y sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\text{sop}(g) \subset [0, \omega_0^{-1}]$ . Entonces  $\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que

$$\omega_0 A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(t - nt_0)|^2 \leq \omega_0 B \quad \text{a.e. } t \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

En tal caso tenemos que  $A$  y  $B$  son las cotas de marco para  $\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$ . Además el operador de marco toma la forma de un operador de multiplicación

$$(Sf)(t) = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |g(t - t_0 n)|^2 \right) f(t) \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

La condición (1.22) es necesaria para que un sistema de Gabor arbitrario  $\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  (véase [He11, Theorem 11.6]). Otras condiciones necesarias para que un sistema de Gabor arbitrario  $\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$  sea un marco de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$  (véase [He11, Corollary 11.7]), por ejemplo son:

- $\mathcal{G}(S^{-1}g, t_0, \omega_0)$  es su marco dual canónico.
- $t_0 \omega_0 A \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq t_0 \omega_0 B$ .
- $0 < t_0 \omega_0 \leq 1$ .

Si nos corremos a la izquierda del valor crítico  $t_0 \omega_0 = 1$ , podemos entonces considerar una ventana  $g$  no necesariamente de soporte compacto, concretamente el resultado siguiente (probado independientemente por Yurii Lyubarski y por Kristian Seip & R. Wallsten) muestra que para la Gaussiana  $\varphi(t) := 2^{1/4} e^{-\pi t^2}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ , esta es una condición necesaria y suficiente (véase [Gr01, Theorem 7.5.3]).

**Teorema 1.6.12.**  $\mathcal{G}(\varphi, t_0, \omega_0)$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si  $t_0 \omega_0 < 1$ .

Otra condición suficiente para la existencia de marcos de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$  con ventanas más generales fué dada por David Walnut, quien probó que para  $t_0$  y  $\omega_0$  “suficientemente chicos” y  $g \in W(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0)$  es un marco de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$  (véase [Gr01, Theorem 6.5.1]).

También se obtienen otras condiciones mediante el uso de la *transformada de Zak* (véase por ejemplo [Ch16, Gr01, He11]).

#### 1.6.4. Marcos Afines de $L^2(\mathbb{R})$

En esta subsección enunciamos algunos resultados concernientes a la propiedad de marco de  $L^2(\mathbb{R})$  de sistemas afines  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi, a, b)$ . Los resultados principales de la Sección 5.2 están en parte inspirados por algunos de ellos.

**Definición 1.6.13.** Sea  $\Psi$  un subconjunto a lo sumo numerable de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que cada  $\psi \in \Psi$ ,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , sea una función medible de Borel (*conjunto wavelet madre*) y  $a > 1$ ,  $b > 0$  sean constantes fijas. Definimos

$$\psi_{j,k}(t) := a^{-j} \psi(a^{-j}t - k), \quad \psi \in \Psi, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{K} := b\mathbb{Z}, \quad (1.23)$$

y el *sistema afín (wavelet)* generado por desplazamientos en tiempo-escala de  $\Psi$  como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Psi, a, b) = \{a^{j/2} \psi_{j,k}(t) : \psi \in \Psi, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}.$$

*Observación 1.6.14.* El término  $a^{-j}$  que aparece en la definición de  $\psi_{j,k}$  en (1.23) se elige como un factor de normalización en  $L^1(\mathbb{R})$  (no en  $L^2(\mathbb{R})$ ), es decir  $\|\psi_{j,k}\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|\psi_{0,0}\|_{L^1(\mathbb{R})}$  para todos  $j \in \mathbb{Z}$  y  $k \in \mathbb{K}$ .  $\diamond$

Una condición necesaria para que  $\mathcal{A}(\psi, a, b)$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , debida a Charles Chui & Xianliang Shi, es la siguiente.

**Proposición 1.6.15** ([Ch16, Proposition 15.2.2], [He11, Theorem 12.6]). Sean  $a > 1$ ,  $b > 0$  y  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  fijos. Si  $\mathcal{A}(\psi, a, b)$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ , entonces

$$bA \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 \leq bB \quad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

De (1.24) se desprende que  $\widehat{\psi} \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

Una condición suficiente (véase [Ch16, Theorem 15.2.3]) para que  $\mathcal{A}(\psi, a, b)$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , es que sus cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$  se puedan obtener mediante

$$\begin{aligned} B &:= \frac{1}{b} \sup_{|\lambda| \in [1, a]} \left\{ \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda) \widehat{\psi}(a^j \lambda + k/b)| \right\} < \infty, \\ A &:= \frac{1}{b} \sup_{|\lambda| \in [1, a]} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 - \sum_{k \neq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda) \widehat{\psi}(a^j \lambda + k/b)| \right\} > 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Pasando por las cotas (1.25) en [Ch16, Proposition 15.2.6] se obtiene otra condición suficiente. También pueden obtenerse otras condiciones suficientes mediante el “Análisis de Multirresolución de marco” (véase por ejemplo [Ch16, Capítulo 17]).

## 1.7. Algunos Conceptos sobre Integrales Singulares

Lo expuesto en esta sección fué una fuente de inspiración para los resultados obtenidos en la Sección 5.3. En la Subsección 5.3.1, junto con técnicas de procesos aleatorios estacionarios, obtenemos resultados análogos a los aquí expuestos para operadores de derivación fraccionaria, mientras que en la Subsección 5.3.2, obtenemos algunos resultados como aplicación del Resultado Principal del Capítulo 5 (Teorema 5.2.6), que involucran directa o indirectamente a ciertos operadores de integración fraccionaria, que definimos más abajo.

Un *operador integral singular* es un operador de convolución  $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) con *núcleo singular*  $K : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  dado por

$$(Tf)(t) = (f * K)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - u) K(u) du,$$

mientras que un *operador integral singular truncado* es de la forma

$$(T_\varepsilon f)(t) = \int_{|u| \geq \varepsilon} f(t - u) K(u) du, \quad \varepsilon > 0.$$

Estamos interesados exclusivamente en los casos donde las singularidades de  $K$  se presentan en  $t = 0$  y  $t = \pm\infty$ , como así también cuando  $p = 2$ .

*Observación 1.7.1.* Imponiendo algunas condiciones sobre  $K$ , en [St87, Theorem 1, p. 29], se obtiene la acotación en  $L^p(\mathbb{R})$  del correspondiente operador integral singular  $T$  con núcleo  $K$ , mientras que en [St87, Theorem 2, p. 35], se obtienen las acotaciones en  $L^p(\mathbb{R})$  de los correspondientes operadores integrales singulares  $T$  y  $T_\varepsilon$  como así también que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon f = Tf$  en la norma de  $L^p(\mathbb{R})$ .  $\diamond$

Una familia de operadores integrales (débilmente) singulares (o también *operadores integrales fraccionarios*) que utilizaremos en la Subsección 5.3.2 son los siguientes.

**Definición 1.7.2.** Dado  $0 < \alpha < 1$  el *potencial de Riesz* de  $f$  de orden  $\alpha$  en  $t \in \mathbb{R}$  [Sa02, p. 37] es el operador de convolución

$$(I^\alpha f)(t) := \frac{1}{\gamma(\alpha)} (R_\alpha * f)(t), \quad (1.26)$$

con

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{1}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2})} \quad \text{y} \quad R_\alpha(t) = |t|^{\alpha-1}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.27)$$

*Observación 1.7.3.* La constante  $\gamma(\alpha)$  en (1.27) se elige de modo tal que la transformada de Fourier de  $I^\alpha \psi$ , en el sentido de distribuciones, resulte

$$\widehat{I^\alpha f}(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha} \widehat{f}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

véase por ejemplo [St87, Lemma 1, p. 117] o [Sa02, págs. 37-38]) para  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .  $\diamond$

El “*Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev de integración fraccionaria*” establece, en parte, que  $(I^\alpha f)(t)$  converge absolutamente a.e.  $t \in \mathbb{R}$  para  $0 < \alpha < 1$  y  $1 \leq p < \infty$  (véase [St87, Theorem 1, p. 119]).

En el Teorema 1.5.6 se relacionan dos propiedades que caracterizan a las funciones que pertenecen a los espacios de Sobolev de orden  $m \in \mathbb{N}$ . Otras caracterizaciones posibles son en términos de los llamados *potenciales de Bessel*  $\mathcal{J}_\alpha$ .

**Definición 1.7.4.** Para  $1 \leq p \leq \infty$  y  $\alpha \geq 0$  definimos los *espacios potenciales*  $\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R})$  como

$$\mathcal{L}_\alpha^p(\mathbb{R}) := \mathcal{J}_\alpha(L^p(\mathbb{R})), \quad \text{con norma} \quad \|\mathcal{J}_\alpha f\|_{p,\alpha} := \|f\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

con  $\mathcal{J}_\alpha : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$  el operador de convolución (inyectivo) dado por  $\mathcal{J}_\alpha f = G_\alpha * f$ , donde  $G_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\int_{\mathbb{R}} G_\alpha(t) dt = 1$  y  $\widehat{G_\alpha}(\lambda) = (1 + |\lambda|^2)^{-\alpha/2}$ .

De hecho, para  $m \in \mathbb{N}$  vale que  $f \in H^m(\mathbb{R})$  si y solo si  $f \in \mathcal{L}_m^2(\mathbb{R})$ , con normas equivalentes (véase [St87, Theorem 3, p. 135]) y, más aún, lo mismo vale para  $\alpha > 0$  en vez de  $m \in \mathbb{N}$  (véase más abajo).

Como afirmamos más arriba, los siguientes tres resultados inspiraron aquellos análogos obtenidos en [CeMe25] y que están desarrollados en la Subsección 5.3.1.

**Proposición 1.7.5** ([Mal95, p. 144]). Para  $0 < \alpha < 1$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $f \in H^\alpha(\mathbb{R})$ .
- ii)  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty$ .

**Proposición 1.7.6** ([St87, Proposition 4, p. 139]). Para  $0 < \alpha < 1$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $f \in \mathcal{L}_\alpha^2(\mathbb{R})$ .
- ii)  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty$ .

**Proposición 1.7.7** ([St87, Proposition 5, p. 140]). Para  $0 < \alpha < 2$  los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $f \in \mathcal{L}_\alpha^2(\mathbb{R})$ .
- ii)  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\int_{\mathbb{R}} \|f(\cdot + h) + f(\cdot - h) - 2f(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty$ .

Consideramos ahora unos *operadores de derivación fraccionaria*. La  $\alpha$ -ésima *derivada fraccionaria de Riesz* de una función  $f$  en  $t \in \mathbb{R}$  (una posible generalización de la *derivada fraccionaria de Marchaud*, véase por ejemplo [Sa02, p. 17]) está dada por

$$(D^\alpha f)(t) := \frac{1}{d(\alpha)} \int_{\mathbb{R}} [f(t+h) - f(t)] \frac{dh}{|h|^{1+\alpha}}, \quad (1.28)$$

mientras que la *derivada fraccionaria de Riesz truncada* es

$$(D_\varepsilon^\alpha f)(t) := \frac{1}{d(\alpha)} \int_{|h| \geq \varepsilon} [f(t+h) - f(t)] \frac{dh}{|h|^{1+\alpha}}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.29)$$

donde  $d(\alpha)$  funcionan como constantes de normalización y vienen dadas por

$$d(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - e^{-ih}}{|h|^{1+\alpha}} dh. \quad (1.30)$$

De hecho  $d(\alpha)$  son funciones analíticas sobre el semi-plano  $\Re(\alpha) > 0$  [Sa02, Theorem 3.4].

Vale resaltar la siguiente fórmula para la transformada de Fourier de la derivada fraccionaria de  $f$ , válida por ejemplo para  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  (véase [Sa02, Lemma 3.1, p. 57]):

$$\widehat{D^\alpha f}(\lambda) = |\lambda|^\alpha \widehat{f}(\lambda).$$

También enunciamos a continuación algunas propiedades relacionadas con los operadores de derivación fraccionaria que serán utilizadas en la demostración del Teorema 5.3.3, todas ellas se pueden ver por ejemplo en [Sa02, págs. 65-70].

Para  $0 < \alpha < 2$ , mediante operaciones sobre los núcleos de Riesz  $R_\alpha$ , se obtienen los núcleos  $K_\alpha = K_\alpha(|t|)$  dados por

$$K_\alpha(|t|) = \frac{1}{d(\alpha)|t|} \int_{|h| < |t|} [R_\alpha(h) - R_\alpha(h-1)] dh,$$

los cuales satisfacen:

- $K_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ . (Corollary Lemma 3.16) (1.31)
- $\int_{\mathbb{R}} K_\alpha(|t|) dt = 1$ . (Remark 3.20) (1.32)
- $\widehat{K_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{d(\alpha)|\lambda|^\alpha} \int_{|h| \geq 1} \frac{(e^{i\lambda h} - 1)}{|h|^{1+\alpha}} dh$ . (Corollary Theorem 3.19) (1.33)

Estos núcleos están relacionados por ejemplo [Sa02, Remark 3.18], con la derivada fraccionaria de Riesz truncada mediante

$$D_\varepsilon^\alpha R_\alpha(t) = \frac{1}{\varepsilon} K_\alpha\left(\frac{|t|}{\varepsilon}\right).$$

Terminamos con la siguiente proposición que involucra a los operadores de derivación fraccionaria (y sus truncados), la cual inspiró un resultado análogo para un proceso aleatorio estacionario  $X$ , desarrollado también en la Subsección 5.3.1.

**Proposición 1.7.8** ([St87, págs. 161-162]). *Para  $0 < \alpha < 2$  los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $f \in \mathcal{L}_\alpha^2(\mathbb{R})$ .
- ii)  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon^\alpha f$  existe en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ .

# Capítulo 2

## Procesos Aleatorios Estacionarios

En este capítulo enunciamos algunas definiciones y resultados concernientes a procesos aleatorios estacionarios. En la Sección 2.1 recordamos algunos conceptos sobre procesos aleatorios de segundo orden en general, para luego en la Sección 2.2 ocuparnos por completo de los estacionarios: en sentido amplio, en sentido estricto y Gaussianos. Para las técnicas empleadas aquí es de suma importancia el *isomorfismo de Kolmogorov* (2.4). En la Sección 2.3 enunciamos los teoremas ergódicos que utilizaremos como enlace entre los procesos aleatorios estacionarios y las funciones casi periódicas. En estas tres secciones hemos seguido parcialmente [BTA04, Do53, DMcK08, GS04, KW92, Mar18, Ro85, Roz67]. Si bien los resultados en mayor medida son conocidos, algunos de ellos son originados en nuestros trabajos [CeMe22, CeMe25]. Los mismos son presentados y demostrados en la Sección 2.4, la cual está dedicada a mostrar algunas relaciones entre los procesos aleatorios estacionarios y el espacio  $B^2(\mathbb{R})$  de funciones casi periódicas en el sentido de Besicovitch. Estos resultados originales serán utilizados en los Capítulos 4 y 5 (núcleo de esta tesis) para las demostraciones de los resultados principales.

### 2.1. Algunos Conceptos sobre Procesos Aleatorios

En esta sección utilizamos principalmente los libros [BTA04, GS04].

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad (un espacio de medida tal que  $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ ) y sea  $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  el espacio de Hilbert de variables aleatorias (funciones  $\mathcal{F}$ -medibles) de segundo orden en  $\Omega$  equipado con el producto interno

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(\Omega)} := \mathbf{E}(X\bar{Y}) = \int_{\Omega} X(\omega)\bar{Y}(\omega) d\mathbf{P}(\omega), \quad X, Y \in L^2(\Omega),$$

donde  $\mathbf{E}(\cdot)$  denota el operador de *esperanza matemática*. Como es usual, si  $\mathbf{P}(X = Y) = 1$ , diremos que  $X = Y$  a.s., en vez de decir que  $X = Y$   $\mathbf{P}$ -a.e. en  $\Omega$ .

Sea  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  un proceso aleatorio (o estocástico) de segundo orden con valores en  $\mathbb{C}$  definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , es decir, una función  $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $X(t, \cdot) := X(t) \in L^2(\Omega)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . El proceso tiene asociadas las siguientes funciones:

- La función de *media*  $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $m(t) = \mathbf{E}(X(t))$ .
- La función de *covarianza*  $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$K(s, t) = \mathbf{E}(X(s) - m(s))\overline{(X(t) - m(t))} = \text{Cov}(X(s), X(t)).$$

- La función de *correlación* o de *momento segundo*  $R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$R(s, t) = \mathbf{E}(X(s)\overline{X(t)}) = m(s)\overline{m(t)} + K(s, t).$$

Si  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  es un proceso aleatorio de segundo orden con valores en  $\mathbb{C}$  definido en  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  entonces el proceso  $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$  dado por  $Y(t, \omega) = X(t, \omega) - \mathbf{E}(X(t))$  tiene función de media nula y las funciones de covarianza de  $X$  e  $Y$  coinciden. Debido a esto, podemos suponer, cuando sea necesario, que un proceso dado tiene una función de media asociada nula y, por lo tanto, su función de covarianza coincide con su función de correlación. En tal caso utilizaremos “ $R$ ”, o bien  $R_X$  para destacar el proceso asociado.

Es sencillo comprobar que la función de covarianza asociada a un proceso aleatorio de segundo orden es una función (o núcleo) definida positiva en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $R$  satisface

$$\sum_{j,k=1}^N \bar{c}_j c_k R(t_j, t_k) \geq 0, \quad N \in \mathbb{N}, \quad t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}, \quad c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}.$$

El recíproco también es cierto y fué demostrado por Michel Loève en 1948 (véase [BTA04, Theorem 27]). Más aún, dada  $R$ , el proceso aleatorio con covarianza  $R$  se puede elegir con la propiedad adicional de ser Gaussiano (véase Definición 2.2.2).

Otra caracterización posible de funciones definidas positivas (o de covarianza) es que son precisamente los *núcleos reproductivos* de un *espacio de Hilbert con núcleo reproductivo* (RKHS), véase por ejemplo [BTA04, p. 13] o [SS16, p. 68].

**Definición 2.1.1.** Decimos que un espacio de Hilbert  $(\mathcal{H}_R(X), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  de funciones sobre  $X$  es un RKHS con núcleo reproductivo  $R : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  si:

- Para cada  $x \in X$ ,  $R(x, \cdot) \in \mathcal{H}_R(X)$ .
- Se satisface la *propiedad reproductiva*:  $f(x) = \langle f, R(x, \cdot) \rangle \forall f \in \mathcal{H}_R(X), x \in X$ .

Debido a lo anterior, si  $H(X) := \overline{\text{gen}}\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$  es el subespacio de Hilbert de  $L^2(\Omega)$  asociado a  $X$ , el isomorfismo isométrico  $L : H(X) \rightarrow \mathcal{H}_R(\mathbb{R})$ , dado por

$$(LY)(t) := \mathbf{E}(Y\overline{X(t)}), \quad Y \in H(X), \quad t \in \mathbb{R},$$

se denomina *isometría de Loève* y permite identificar  $H(X)$  con el RKHS  $\mathcal{H}_R(\mathbb{R})$ . Cabe destacar que  $(LX(t))(\cdot) = R(t, \cdot)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$  y que  $\mathcal{H}_R(\mathbb{R})$  está comprendido por funciones de la forma

$$f_Y(t) = \int_{\Omega} Y(\omega)\overline{X(t)}(\omega) d\mathbf{P}(\omega), \quad Y \in H(X), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En la Sección 2.2 presentamos varios ejemplos de procesos aleatorios estacionarios, los procesos principales de este trabajo. Para dichos procesos  $X$  tendremos otro isomorfismo isométrico asociado a  $H(X)$  aún más importante en este contexto, el llamado *isomorfismo de Kolmogorov* (véase (2.4)).

## 2.2. Algunos Conceptos sobre Procesos Aleatorios Estacionarios

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  un espacio de probabilidad y sea  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}} \subset L^2(\Omega)$  un proceso aleatorio complejo de media cero ( $\mathbf{E}(X(t)) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ ). Decimos que  $X$  es *continuo en media cuadrática* si

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathbf{E}|X(t) - X(s)|^2 = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

La continuidad en media cuadrática implica la existencia de un proceso aleatorio equivalente  $X^*$  (es decir, un proceso tal que  $\mathbf{P}(X(t) \neq X^*(t)) = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ), que es medible con respecto a la completación de la  $\sigma$ -álgebra producto  $\mathcal{F} \otimes \mathbf{B}(\mathbb{R})$  (véase por ejemplo [Do53, Theorem 2.6] o [GS04, Theorem 1, pág. 171]). A partir de esto, generalmente asumiremos, sin mayor mención, que trabajamos con dicho proceso equivalente al considerar algunas operaciones sobre  $X$  en función de  $t$ . Para simplificar y sin pérdida de generalidad (para nuestros propósitos), hemos establecido que  $X$  tenga media nula.

**Definición 2.2.1.** Decimos que  $X$  es:

- *Estacionario en sentido amplio*, si se verifica

$$\mathbf{E}(X(s)\overline{X(t)}) = R_X(s - t), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

- *Estacionario en sentido estricto o estrictamente estacionario*, si las familias de desplazamientos  $X^T = (X(t + T))_{t \in \mathbb{R}}$  tienen las mismas distribuciones finitas que  $X \ \forall T \in \mathbb{R}$ .

Un proceso estrictamente estacionario es estacionario en sentido amplio, pero la inversa no siempre es cierta. Si  $X$  es Gaussiano, ambos conceptos coinciden (véase [Ro85]).

**Definición 2.2.2.** Decimos que  $X$  es Gaussiano si para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  y para cada  $t_1 < \dots < t_n \in \mathbb{R}$ , el vector aleatorio  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  tiene distribución normal.

*Observación 2.2.3.* En general, si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio *complejo*, asumimos que  $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $X_i, i = 1, 2$  son dos procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio *reales* y correlacionados de forma cruzada. Si  $X$  es Gaussiano y complejo, impondremos, además de (2.1) y (2.2), la condición:

$$\mathbf{E}(X(t)X(s)) = 0, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Los procesos aleatorios Gaussianos complejos o vectores aleatorios que verifican la condición (2.3) se denominan *circulares*. Este requisito es habitual en la teoría de señales y, además, hace que  $X$  conserve la mayoría de las propiedades habituales de los procesos Gaussianos reales (véase por ejemplo [Med24, Pap02, Roz67]). En consecuencia, y dicho de otro modo, no distinguiremos entre procesos complejos y reales.  $\diamond$

Algunos ejemplos bien conocidos de procesos estacionarios, tanto con parámetro discreto ( $t \in \mathbb{Z}$  por ejemplo) como continuo ( $t \in \mathbb{R}$  por ejemplo), entre otros son: *cadena de Markov*, *procesos con incrementos independientes*, *promedios móviles* y *procesos con incrementos ortogonales* (véase por ejemplo [Do53, Pap02]).

Ahora presentamos algunas nociones sobre el análisis armónico de procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio. Si  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  es un proceso aleatorio estacionario en

sentido amplio, según el teorema de Bochner [Mar18, Theorem 6.9] (Teorema de Herglotz si  $t \in \mathbb{Z}$ ), existe una medida de Borel simétrica no negativa  $\mu_X$ , la *medida espectral* de  $X$ , tal que  $\widehat{\mu_X} = R_X$ . Recíprocamente, si  $\mu$  es una medida de Borel finita, existe  $X$ , un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con  $\mu$  como su medida espectral (véase [GS04, págs. 205-218] o [Mar18, págs. 213-214]). Además,  $X$  puede definirse como un proceso Gaussiano. El soporte de  $\mu_X$  se denomina el *espectro* de  $X$ .

El *Isomorfismo de Kolmogorov*  $\mathcal{I} : L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu_X) \rightarrow H(X)$  (véase [Roz67, págs. 28-33] o [Mar18, Theorem 8.11]), es el isomorfismo isométrico dado por la *integral estocástica*:

$$\mathcal{I}(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\Phi_X(\lambda), \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu_X), \quad (2.4)$$

donde  $\Phi_X$  es la *medida aleatoria espectral* (ortogonal) asociada a  $X$  [Roz67, págs. 14-17]. Las medidas  $\mu_X$  y  $\Phi_X$  están relacionadas por

$$\mathbf{E}|\mathcal{I}(\mathbf{1}_A)|^2 = \mathbf{E}|\Phi_X(A)|^2 = \mu_X(A), \quad A \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$$

y

$$\mathbf{E} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(\lambda) d\Phi_X(\lambda) \right|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\phi(\lambda)|^2 d\mu_X(\lambda), \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu_X).$$

Además, recurriendo al Teorema de Stone 1.3.24 (por ejemplo), el proceso  $X$  admite la *representación espectral* [Roz67, p. 18]

$$X(t) = \mathcal{I}(e_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\Phi_X(\lambda), \quad (2.5)$$

donde  $e_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  denota la función exponencial  $e_t(\lambda) = e^{it\lambda}$  y  $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . El sistema  $(e_t)_{t \in \mathbb{R}} \subset L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), \mu_X)$  se denomina una *representación* de  $X$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Siguiendo [Pou01, págs 340-341] detallamos a continuación, cómo se obtiene el isomorfismo de Kolmogorov en el caso discreto.

Sea  $X = (X(k))_{k \in \mathbb{Z}}$  una sucesión estacionaria en sentido amplio. Para cada  $k \in \mathbb{Z}$  es  $X(k) \in \mathcal{H} := H(X) \subset L^2(\Omega)$ . Por el Lema 1.3.15, tenemos definido el operador unitario (shift)  $U : H(X) \rightarrow H(X)$  tal que  $X(k) = U^k X(0)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Por el Teorema espectral 1.3.22 tenemos definidas: la *medida espectral*  $E$ ,  $\{E(\lambda) : \lambda \in \mathbb{T}\}$ , la *medida espectral escalar*  $\mu_{X(0)}(\cdot) = \langle E(\cdot)X(0), X(0) \rangle_{L^2(\Omega)}$  y la correspondiente *medida espectral vectorial*  $\Phi_{X(0)}(\cdot) = E(\cdot)X(0)$  (véase (1.8) y (1.9)), tales que es válida la siguiente *representación espectral* de  $X$

$$X(k) = \left( \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} dE(\lambda) \right) X(0) = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} dE(\lambda) X(0) = \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} d\Phi_{X(0)}(\lambda), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) también se puede ver como la transformada de Fourier de  $\Phi_{X(0)}$ .

Sea  $Y \in H(X)$  y sea  $g \in L^2(\mu_Y)$ . Teniendo en cuenta la Observación 1.3.23 y utilizando un argumento de aproximación, se define la *integral estocástica*

$$\int_{\mathbb{T}} g(\lambda) d\Phi_Y(\lambda),$$

de tal manera que la siguiente identidad, válida para combinaciones lineales del proceso y para polinomios trigonométricos, siga valiendo para sus correspondientes límites:

$$\left\langle \sum_j a_j X(j), \sum_k b_k X(k) \right\rangle_{H(X)} = \left\langle \sum_j a_j e^{ij(\cdot)}, \sum_k b_k e^{ik(\cdot)} \right\rangle_{L^2(\mu)}.$$

Así, la asignación  $L^2(\mu) \ni g \mapsto \int_{\mathbb{T}} g d\Phi \in H(X)$ , es precisamente el *isomorfismo de Kolmogorov* entre el *dominio espectral*  $L^2(\mu)$  y el *dominio temporal*  $H(X)$ . ♦

*Observación 2.2.5.* Una descripción detallada acerca de medidas aleatorias e integrales estocásticas, en general, se puede encontrar por ejemplo en [GS04, págs. 230-241], [Roz67, págs. 4-14] y [Rao11] (siendo esta última una exposición más profunda). ◇

**Ejemplo 2.2.6.** Un ejemplo de una medida aleatoria Gaussiana es el siguiente. Dado  $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ , elegimos cualquier base ortonormal  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  y  $(C(n))_{n \in \mathbb{N}}$  cualquier sucesión de variables aleatorias independientes tal que  $C(n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  (normal de media cero y varianza uno) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Luego definimos:

$$\Phi(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} C(n) \langle \varphi_n, \mathbf{1}_A \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}, \quad A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}).$$

En particular, cuando  $\mu$  es la medida de Haar  $m_{\mathbb{R}}$ ,  $\Phi$  es la llamada *medida de Wiener*. ♦

Las operaciones de *filtrado lineal invariante en el tiempo* sobre  $X$  se definen mediante:

$$Y(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) e^{it\lambda} d\Phi_X(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), d\mu_X). \quad (2.7)$$

Por consiguiente, el proceso aleatorio estacionario resultante  $Y = (Y(t))_{t \in \mathbb{R}}$  puede considerarse como la salida (output) de un sistema lineal con una respuesta en frecuencia dada por  $f$  (filtro) y una entrada (input) aleatoria  $X$ . En este caso, la covarianza de  $Y$  viene dada por:

$$R_Y(t-s) = \mathbf{E}(Y(t) \overline{Y(s)}) = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 e^{i\lambda(t-s)} d\mu_X(\lambda). \quad (2.8)$$

Para una exposición más detallada recomendamos [Roz67, Chapter 1, Section 8].

Por lo enunciado en la Sección 1.1, la medida espectral  $\mu_X$  puede descomponerse en una parte continua  $\mu_{X_c}$  y otra discreta  $\mu_{X_d}$ , y existen subconjuntos medibles  $C, D$  de  $\mathbb{R}$  tales que  $\mu_{X_c}(A) = \mu_X(A \cap C)$  y  $\mu_{X_d}(A) = \mu_X(A \cap D)$ . A partir de esto, podemos obtener una descomposición ortogonal (independiente en el caso Gaussiano) de  $X$ :

$$X(t) = \int_C e^{it\lambda} d\Phi_X(\lambda) + \int_D e^{it\lambda} d\Phi_X(\lambda) = X_c(t) + X_d(t) \quad \text{a.s. .}$$

Esto corresponde al caso en el que se reemplaza  $f = \mathbf{1}_C$  o  $f = \mathbf{1}_D$  en (2.7). Los procesos  $X_c$  y  $X_d$  se llaman respectivamente la parte *continua* y *discreta* de  $X$ . Si  $\mu_X$  es discreta entonces está concentrada en un subconjunto (a lo sumo numerable)  $D_X$  de  $\mathbb{R}$  con lo cual la ecuación (2.5) toma la forma de una serie aleatoria:

$$X(t) = \sum_{\lambda \in D_X} e^{it\lambda} \Phi(\{\lambda\}) \quad \text{a.s. .} \quad (2.9)$$

Para abreviar, escribiremos  $C(\lambda) = \Phi(\{\lambda\})$  a estos coeficientes aleatorios. En tal caso, diremos que el proceso  $X$  tiene *espectro discreto*, y en contraste, si  $\mu_X = \mu_{Xc}$ , diremos que  $X$  tiene *espectro continuo*.

Hasta ahora hemos considerado un proceso  $X$  a valores en  $\mathbb{C}$ , es decir  $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Antes de enunciar algunos resultados acerca de la convergencia a.s. de series aleatorias que serán necesarios más adelante, es pertinente aclarar que si cambiamos  $\mathbb{C}$  por un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  (como hacemos en II. y III. a continuación), la familia  $\{X(t, \omega) : t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$  se puede interpretar, dependiendo el contexto, básicamente de las siguientes tres formas (al igual que se hace cuando  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$  o  $\mathbb{R}$ ):

- I.  $\{X(\cdot, \omega) : \omega \in \Omega\}$ , una familia de trayectorias en  $\mathbb{C}$  (o funciones) que pertenecen a  $\mathcal{H}$ .
- II.  $\{X(t, \cdot) : t \in \mathbb{R}\}$ , una familia de variables aleatorias a valores en  $\mathcal{H}$ .
- III. Como una función  $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ , la cual es  $(\mathbf{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}, \mathbf{B}(\mathcal{H}))$ -medible.

Si  $X$  es una variable aleatoria a valores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la notación  $X \in L^2_{\mathcal{H}}(\Omega)$  significa que  $\|X\| \in L^2(\Omega)$ . También, si existe  $f \in \mathcal{H}$  tal que  $\langle X, g \rangle \in L^1(\Omega)$  y  $\mathbf{E}(\langle X, g \rangle) = \langle f, g \rangle \forall g \in \mathcal{H}$ , escribimos  $X \in L^1_{\mathcal{H}}(\Omega)$  y definimos la esperanza de  $X$  por  $\mathbf{E}(X) := \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = f \in \mathcal{H}$ , y la varianza de  $X$  como  $\mathbf{V}(X) := \mathbf{E}(\|X - \mathbf{E}(X)\|^2)$ .

**Proposición 2.2.7** ([Ka93, Theorem 2, p. 30]). *Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{H}}(\Omega)$  una sucesión de variables aleatorias independientes. Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es tal que  $\mathbf{E}(X_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$  y  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{V}(X_n) < \infty$ , entonces  $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$  converge a.s. en  $\mathcal{H}$ .*

Las siguientes Proposiciones 2.2.8 y 2.2.9 se obtienen como corolarios de [KW92, Theorem 2.2.1, p. 32].

**Proposición 2.2.8** ([KW92, Teorema de las tres series de Kolmogorov, p. 35]). *Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias independientes a valores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . La serie aleatoria  $\sum_{n \in \mathbb{N}} X_n$  converge a.s. si y solo si para  $a > 0$  convergen:*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(\|X_n\| \geq a), \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}(X_n \mathbf{1}_{\{\|X_n\| \leq a\}}) \quad \text{y} \quad \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{V}(X_n \mathbf{1}_{\{\|X_n\| \leq a\}}).$$

**Proposición 2.2.9** ([KW92, Sección 2.2, p. 36]). *Sean  $p > 0$  y  $\xi_n$  variables aleatorias independientes a valores reales para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Si para  $\alpha, \beta, \delta > 0$  tenemos que*

$$\mathbf{P}(|\xi_n| > \alpha) \geq \beta \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(|\xi_n| \mathbf{1}_{\{|\xi_n| > t\}}) \leq \delta t^p \mathbf{P}(|\xi_n| > t) \quad \forall t > \alpha, \forall n \in \mathbb{N},$$

*entonces para cada  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ , la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \xi_n$  converge a.s. si y solo si converge en media  $p$ .*

*En particular, si la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \xi_n$  es Gaussiana, la convergencia vale para todo  $p < \infty$ .*

Finalmente, enunciamos un resultado sobre el intercambio de una integral estocástica con una integral ordinaria con respecto a la medida de Lebesgue. Este lema simple es una adaptación de uno presentado en [GS04, Lemma 4, p. 237].

**Lema 2.2.10.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y sean  $g(\lambda, x)$  y  $h(x)$  dos funciones de Borel medibles en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}$  respectivamente tales que:*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda, x)|^2 d\mu_X(\lambda) dx < \infty \quad \text{y} \quad h \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.10)$$

Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) \left( \int_{\mathbb{R}} g(\lambda, x) d\Phi_X(\lambda) \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} h(x) g(\lambda, x) dx \right) d\Phi_X(\lambda) \quad \text{a.s. .}$$

Terminamos esta sección con varios ejemplos acerca de lo expuesto más arriba.

**Ejemplo 2.2.11.** Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con una representación espectral dada por la ecuación (2.5). Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , es posible escribir una expresión alternativa para el producto interno  $\langle X, f \rangle$ , que ahora define una variable aleatoria. De hecho,

$$\langle X, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} X(t) \bar{f}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\Phi_X(\lambda) \right) \bar{f}(t) dt.$$

Dado que podemos hallar  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $f = f_1 f_2$  a.e., entonces, si escribimos en la ecuación (2.10) con  $g(\lambda, t) = e^{it\lambda} f_1(t)$  y  $h = f_2$ , obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(\lambda, t)|^2 d\mu_X(\lambda) dt = R_X(0) \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty.$$

Por lo tanto, es posible intercambiar ambas integrales para obtener que

$$\langle X, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \bar{f}(t) dt \right) d\Phi_X(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\bar{f}}(\lambda) d\Phi_X(\lambda) \quad \text{a.s. .} \quad (2.11)$$

◆

**Ejemplo 2.2.12.** Bajo condiciones adicionales, a partir del Ejemplo 2.2.11, podemos dar una interpretación más intuitiva de la operación de filtrado de la ecuación (2.7) como una convolución. Supongamos que  $f = \widehat{\varphi}$ , con  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ . Entonces

$$Y(t) = (X * \varphi)(t) = \int_{\mathbb{R}} X(s) \varphi(t-s) ds = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda t} d\Phi_X(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

◆

**Ejemplo 2.2.13.** La integral estocástica del Ejemplo 2.2.11, en el caso general, debe interpretarse como un límite en media cuadrática. Sin embargo, si además  $X$  es un proceso Gaussiano con espectro discreto, es decir,

$$X(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t},$$

con  $C(\lambda)$  variables aleatorias Gaussianas no correlacionadas, entonces

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{f}(\lambda)|^2 \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 \leq \|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu_X(\{\lambda\}) < \infty,$$

y un argumento similar a la Proposición 2.4.1 da que

$$\langle X, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\bar{f}}(\lambda) d\Phi_X(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \widehat{\bar{f}}(\lambda) C(\lambda),$$

donde la serie de la parte derecha converge a.s. .

◆

## 2.3. Los Teoremas Ergódicos

Los estimadores naturales de la media, la varianza y otros estadísticos de un proceso aleatorio estacionario  $X$  son promedios temporales apropiados. Decimos que el proceso estrictamente estacionario  $X$  es *métricamente transitivo* si los únicos conjuntos medibles que son invariantes bajo la *traslación*  $X \mapsto X^T = (X(t+T))_{t \in \mathbb{R}}$  tienen probabilidad cero o uno. Si consideramos el espacio medible  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Sigma)$ , donde  $\Sigma$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos cilíndricos, entonces el *Teorema Ergódico de Birkhoff* establece (véase, por ejemplo, [DMcK08, p. 76] o [Roz67, Theorem 5.1, p. 157]):

**Teorema 2.3.1.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estrictamente estacionario. Si  $f$  es una función  $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \Sigma)$ -medible y  $\mathbf{E}|f(X)| < \infty$  entonces:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(X(t)) dt = \mathbf{E}(f(X)|\mathcal{S}) \quad \text{a.s.}$$

y en la  $p$ -media para  $1 \leq p < \infty$ , donde  $\mathcal{S}$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos invariantes por traslaciones.

Se puede deducir que  $X$  es métricamente transitivo si y solo si en el límite anterior vale que  $\mathbf{E}(f(X)|\mathcal{S}) = \mathbf{E}(f(X))$  para cada  $f$ . La transitividad métrica, si  $X$  es Gaussiano, se puede describir elegantemente en términos de su medida espectral  $\mu$  mediante el *teorema de Maruyama* (véase, por ejemplo, [DMcK08, p. 76] o [Roz67, págs. 163-166]):

**Teorema 2.3.2.** *Un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  es métricamente transitivo si y solo si su medida espectral  $\mu$  es continua.*

Si  $X$  es sólo estacionario en sentido amplio, el *teorema ergódico en media* de Von Neumann también proporciona una respuesta (véase [Roz67, Theorem 6.2, p. 25]):

**Teorema 2.3.3.** *Si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio, entonces la igualdad*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = \mathbf{E}(X(0))$$

*se cumple si y solo si  $\mu(\{0\}) = 0$ . El límite se toma en el sentido de media cuadrática.*

Téngase en cuenta que estos resultados se pueden adaptar a los promedios bilaterales, ya que

$$\int_{-T}^T f(X(t)) dt = \int_0^T f(X(t)) dt + \int_0^T f(X(-t)) dt.$$

Aplicaremos directamente este recurso sin mencionarlo. En particular, consideraremos los promedios, realizando un abuso de notación por ahora (véase Proposición 2.4.1 más abajo para su justificación), dados por las normas AP

$$\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt$$

o  $\|X\|_{B^2(\mathbb{K})}^2$  en el caso discreto, ya que los mismos resultados se cumplen para sucesiones aleatorias estacionarias reemplazando las integrales por sumas.

## 2.4. Relación con el Espacio $B^2(\mathbb{R})$

A esta altura, podemos describir con más detalle cómo se relacionan el espacio  $B^2(\mathbb{R})$  y los procesos aleatorios estacionarios. En general, un elemento de  $B^2(\mathbb{R})$  puede no ser definible como una función en  $\mathbb{R}$  (véase, por ejemplo, [JLZ98]). Pero, al menos, podemos obtener una ventaja aparente si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio continuo en media cuadrática, ya que podemos considerar un proceso medible y equivalente [GS04]. Si, además,  $X$  es estrictamente estacionario, nótese que, por el Teorema 2.3.1, el valor de  $\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}$  (o  $\|X\|_{B^2(\mathbb{Z})}$  en el caso de una sucesión aleatoria) siempre existe y es finito a.s.. Los procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio son siempre el límite en media cuadrática de polinomios trigonométricos aleatorios. Sin embargo, observamos que  $X$  no siempre puede describirse como un elemento de  $B^2(\mathbb{R})$  o, equivalentemente, no siempre es el límite en la norma  $B^2(\mathbb{R})$  de polinomios trigonométricos. Sería conveniente describir brevemente y con más detalle la estructura de  $X$ . Los resultados de esta sección serán útiles en los Capítulos 4 y 5. Los resultados de esta sección son originados en nuestras publicaciones [CeMe22, CeMe25].

Comprobemos primero que si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con espectro discreto entonces es el límite (la suma) a.s. de una serie de Fourier no armónica convergente para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con espectro discreto, entonces la serie (2.9) converge a.s. para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Este hecho se deduce de la Proposición 2.2.8. Siendo  $a > 0$ , entonces, por la desigualdad de Chebichev, tenemos

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{P}(|C(\lambda)| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 < \infty.$$

Nótese que cada  $C(\lambda)$  es simétrica, de donde

$$\mathbf{E}(e^{i\lambda t} C(\lambda) \mathbf{1}_{\{|C(\lambda)| \leq a\}}) = e^{i\lambda t} \mathbf{E}(C(\lambda) \mathbf{1}_{\{|C(\lambda)| \leq a\}}) = 0.$$

Por lo tanto

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} e^{i\lambda t} \mathbf{E}(C(\lambda) \mathbf{1}_{\{|C(\lambda)| \leq a\}}) = 0.$$

Finalmente, se puede comprobar fácilmente que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}(|C(\lambda)|^2 \mathbf{1}_{\{|C(\lambda)| \leq a\}}) < \infty.$$

Entonces, para todo  $t \in \mathbb{R}$  tenemos la convergencia a.s. de la serie dada por (2.9). ■

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano.*

a) *Si  $X$  tiene espectro discreto, entonces  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s..*

*Además, si (2.9) es la representación espectral de  $X$ , entonces:*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t} \quad \text{converge a.s. } \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |C(\lambda)|^2 \quad \text{a.s..}$$

b) Si  $X$  tiene espectro continuo y  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s., entonces  $X$  es el proceso trivial nulo, es decir, para todo  $t \in \mathbb{R}$  es  $X(t) = 0$  a.s..

Lo mismo se aplica a  $X$ , una sucesión aleatoria estacionaria en sentido amplio con respecto a  $B^2(\mathbb{K})$ .

*Demostración.* (Haremos un esbozo de demostración para el caso de  $\mathbb{R}$ )

a) Si  $X$  tiene espectro discreto, existe  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  a lo sumo numerable tal que vale (2.9):

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t} \quad \text{a.s.},$$

donde la serie converge en el sentido de media cuadrática. Dado que las  $C(\lambda)$  son variables aleatorias no correlacionadas y tales que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(\{\lambda\}) < \infty,$$

entonces, para cada  $t \in \mathbb{R}$  (2.9) converge a.s. (véase la Proposición 2.4.1). Además, una aplicación directa de la Proposición 2.2.7, con el espacio de Hilbert  $\mathcal{H} = B^2(\mathbb{R})$ , da que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t}$  converge en la norma de  $B^2(\mathbb{R})$  a.s..

b) Recordando la Propiedad 2. al final de la Subsección 1.5.3 y puesto que  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s., resulta que  $\mathbf{P}(\Omega_{AP}) = 1$ , donde

$$\Omega_{AP} = \{\omega \in \Omega : \rho_X(\cdot, \omega) \in AP(\mathbb{R})\}.$$

Para  $D$  un subconjunto denso y numerable de  $\mathbb{R}$  definimos, para cada  $d \in D$ ,

$$\Omega_d = \{\omega \in \Omega_{AP} : \rho_X(d, \omega) = R_X(d)\} \quad \text{y} \quad \Omega_0 = \bigcap_{d \in D} \Omega_d.$$

Adaptamos la prueba dada en [Med24, Proposition 2, p. 15] para concluir que  $\mathbf{P}(\Omega_0) = 1$ .

Para cada  $\tau \in \mathbb{R}$  definimos  $Y_\tau = (X(t)X(t+\tau) - R_X(\tau))_{t \in \mathbb{R}}$ . Supongamos que  $X$  es real (después, el caso complejo, se procede como en [Med24]). Entonces

$$\begin{aligned} R_{Y_\tau}(t) &= \mathbf{E}(Y_\tau(t)Y_\tau(0)) \\ &= \mathbf{E}(X(t)X(0)X(t+\tau)X(\tau)) - R_X^2(\tau) \\ &= R_X^2(t) + R_X(t-\tau)R_X(t+\tau), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado la siguiente fórmula, válida para distribuciones Gaussianas multivariadas que además satisfacen  $\mathbf{E}(X_j) = 0 \forall 1 \leq j \leq 4$  [Pap02, p. 258]:

$$\mathbf{E}(X_1X_2X_3X_4) = \mathbf{E}(X_1X_2)\mathbf{E}(X_3X_4) + \mathbf{E}(X_1X_3)\mathbf{E}(X_2X_4) + \mathbf{E}(X_1X_4)\mathbf{E}(X_2X_3).$$

Definimos  $d\mu_X^\tau(\lambda) = e^{i\tau\lambda} d\mu_X(\lambda)$ . Entonces

$$\begin{aligned} R_X^2(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d(\mu_X * \mu_X)(\lambda) \\ R_X(t-\tau)R_X(t+\tau) &= \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d(\mu_X^\tau * \mu_X^{-\tau})(\lambda), \end{aligned}$$

de donde

$$R_{Y_T}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d(\mu_X * \mu_X + \mu_X^T * \mu_X^{-T})(\lambda).$$

Ya que  $\mu_X$  es continua, también lo es la medida espectral de  $Y_T$ , al ser suma de dos convoluciones. Así, por el Teorema 2.3.3, para cada  $\tau \in \mathbb{R}$ , tenemos que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T Y_\tau(t) dt = 0,$$

en norma de  $L^2(\Omega)$ . Equivalentemente, tenemos que  $\rho_X(\tau) = R_X(\tau)$  a.s..

Sin embargo, ya que  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s. y por la Propiedad 2. de la Subsección 1.5.3, el siguiente límite existe a.s.:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t+\tau) dt = \rho_X(\tau).$$

Pasando a una subsucesión  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  si fuera necesario, también existe a.s. el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_N} \int_{-T_N}^{T_N} X(t)X(t+\tau) dt = R_X(\tau).$$

Así, notemos que  $\rho_X(d, \omega) = R_X(d) \forall d \in D$  y  $\omega \in \Omega_0$ , y que para cada  $\omega \in \Omega_0$  es  $\rho_X(\cdot, \omega) - R_X \in C(\mathbb{R})$ , entonces  $\rho_X(t, \omega) = R_X(t) \forall t \in \mathbb{R}$  y  $\omega \in \Omega_0$ .

Supongamos ahora que

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}|X(0)|^2 = R_X(0) = \mu_X(\mathbb{R}) > 0.$$

Entonces apelando nuevamente a la Propiedad 2. de la Subsección 1.5.3, para cualquier  $\omega \in \Omega_0$ ,  $\rho_X(\cdot, \omega)$  es la Transformada de Fourier de una medida aleatoria discreta no nula. Pero, ya que por otro lado  $R_X$  es la transformada de Fourier de una medida continua, y por la unicidad de la transformada de Fourier, llegamos a una contradicción. ■

El resultado siguiente muestra la relación de ortogonalidad entre la parte continua y la parte discreta de un proceso (o sucesión) aleatorio estacionario Gaussiano. Esta será importante para la demostración de los resultados principales de este trabajo.

**Lema 2.4.3.** *a) Sea  $(Z(k))_{k \in \mathbb{K}}$  una sucesión aleatoria estacionaria Gaussiana de media cero. Entonces:*

$$\|Z\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|Z_c\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \|Z_d\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \quad \text{a.s..}$$

*b) Sea  $(Z(t))_{t \in \mathbb{R}}$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano de media cero. Entonces:*

$$\|Z\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \|Z_c\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 + \|Z_d\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{a.s..}$$

*Demostración.* Probaremos ahora el caso discreto a), el argumento para el caso de parámetro continuo b) es casi el mismo.

Por el Teorema 2.3.1, dado que las sucesiones  $(Z(k))_{k \in \mathbb{K}}$ ,  $(Z_c(k))_{k \in \mathbb{K}}$  y  $(Z_d(k))_{k \in \mathbb{K}}$  son estrictamente estacionarias, los límites

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |Z(k)|^2,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |Z_c(k)|^2 \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |Z_d(k)|^2$$

existen con probabilidad uno. Observando que la sucesión  $(Z_c(k)\overline{Z_d(k)})_{k \in \mathbb{K}}$  también es estrictamente estacionaria, de manera similar se deduce que el siguiente límite existe a.s. .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} Z_d(k)\overline{Z_c(k)} \quad (2.12)$$

Por lo tanto, será suficiente comprobar que este límite es igual a 0. Por otro lado, dado que  $Z_d(k)$  y  $Z_c(k)$  son ortogonales, de hecho independientes por ser Gaussianas, entonces

$$\mathbf{E}(Z_d(k)\overline{Z_c(k)}) = \mathbf{E}(Z_d(0))\mathbf{E}(\overline{Z_c(0)}) = 0.$$

Definamos la sucesión estacionaria  $Y(k) = Z_d(k)\overline{Z_c(k)}$  para  $k \in \mathbb{K}$ . Comprobemos que su medida espectral es continua. De la independencia de  $Z_d(k)$  y  $Z_c(k)$ , su covarianza viene dada por

$$R_Y(k) = \mathbf{E}(Y(k)\overline{Y(0)}) = \mathbf{E}(Z_d(k)\overline{Z_d(0)})\mathbf{E}(Z_c(k)\overline{Z_c(0)}) = \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda k} d(\mu_c * \mu_d)(\lambda).$$

Ahora bien, como  $\mu_c$  es continua,  $\mu_c * \mu_d$  también es una medida continua. Por lo tanto, según el teorema ergódico en media de Von Neumann (Teorema 2.3.3), la varianza de

$$\frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} \overline{Z_d(k)} Z_c(k)$$

tiende a 0 cuando  $N$  tiende a  $\infty$  y entonces la ecuación (2.12) es igual a cero. ■

El lema siguiente es inocente pero no por eso menos útil.

**Lema 2.4.4.** Sean  $f \in C(\mathbb{R}^N)$ ,  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$  un vector aleatorio con una densidad de probabilidad conjunta  $p_X$  tal que  $\text{supp}(p_X) = \mathbb{R}^N$  y  $C \subseteq \mathbb{R}$  un subconjunto cerrado tal que  $\mathbf{P}(f(X) \in C) = 1$ . Entonces  $f(x) \in C$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ .

*Demostración.* Si existe  $x \in \mathbb{R}^N$  tal que  $f(x) \in C^c$ , por la continuidad de  $f$  existe un entorno abierto de  $x$ , digamos  $U(x)$ , tal que  $U(x) \subseteq f^{-1}(C^c)$  y por tanto:

$$\mathbf{P}(f(X) \in C^c) \geq \mathbf{P}(X \in U(x)) = \int_{U(x)} p_X(y) dy > 0,$$

ya que  $p_X > 0$  sobre un conjunto de medida positiva. ■

Terminamos comentando que la mayoría de lo descrito en este capítulo puede desarrollarse, con un poco de cuidado, en grupos abelianos localmente compactos (LCA groups), imponiéndose algunas condiciones adicionales no tan restrictivas (véase [Med24]).

# Capítulo 3

## Análisis Gramiano y Gramiano Dual

En este capítulo enunciamos los resultados más importantes de la teoría de marcos con respecto a los sistemas invariantes por traslaciones (*shift-invariant systems*), desarrollada por Amos Ron & Zuowei Shen en [RS95] y por Carl de Boor, Ronald DeVore & Amos Ron en [BDR94]. Estamos interesados principalmente en los sistemas invariantes por traslaciones  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$ , donde el conjunto generador  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  es infinito numerable, y queremos saber condiciones necesarias y suficientes por las cuales estos sistemas forman una sucesión de Bessel o un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ . Para el estudio de marcos ajustados (*tight frames*), marcos duales, bases de Riesz y otros, nos remitimos a [BDR94, RS95] y las referencias allí incluidas. La principal referencia del capítulo será [RS95], donde están demostrados la mayoría de los resultados presentados aquí (decidimos incluir algunas pequeñas demostraciones propias de aquellos que no lo están o que solo están indicadas). Como alternativa, se pueden consultar los libros [He11, Capítulo 10] y [Ch16, Capítulos 9, 10], donde en las demostraciones son utilizadas técnicas más sofisticadas del análisis funcional. Los resultados enunciados aquí, como así también las técnicas empleadas (las cuales no son exactamente las mismas ya que nosotros trabajaremos con una medida finita en el dominio de frecuencias cuando involucremos un proceso aleatorio estacionario, en contrapartida de la medida de Lebesgue aquí utilizada), son una piedra angular de las Secciones 4.1, 4.2, 5.1 y 5.2. Por estos motivos, decidimos dedicar un capítulo entero a este tema. Al final, enumeramos en el Cuadro 3.1 algunas notaciones que difieren con aquellas en [RS95]. Estos cambios se deben a solapamientos con otras notaciones empleadas en este trabajo.

### 3.1. Sistemas Invariantes por Traslaciones

Un subconjunto  $\mathcal{X}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  se dice *invariante por traslaciones* (SI para abreviar) si es invariante bajo todos los posibles desplazamientos de números  $t_0$ -enteros (para algún  $t_0 > 0$ ), es decir:  $f \in \mathcal{X}$  implica que  $E^k f \in \mathcal{X}$  para todo  $k \in \mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}$ , donde  $E^k : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  es el operador de traslación definido por (1.13). Un subespacio cerrado  $\mathcal{V}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  el cual también es un conjunto SI lo llamaremos un *subespacio invariante por traslaciones* de  $L^2(\mathbb{R})$ . Dado  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$ , denotaremos por

$$\mathcal{S}(\Phi, t_0) := \{E^k \phi : \phi \in \Phi, k \in \mathbb{K}\},$$

al conjunto de trasladados de  $\Phi$ , mientras que al espacio SI cerrado más pequeño que contiene a  $\Phi$  lo notaremos por

$$\mathcal{V}(\Phi, t_0) = \overline{\text{gen}} \mathcal{S}(\Phi, t_0).$$

Para  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  su *producto de corchetes* (*bracket product*) está definido por

$$[f, g](\cdot) := \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\cdot + d) \bar{g}(\cdot + d) = \sum_{d \in \mathbb{D}} E^d f(\cdot) \overline{E^d g(\cdot)},$$

donde  $\mathbb{D}$  es el reticulado adjunto de  $\mathbb{K}$ , es decir,  $\mathbb{D} := \{d \in \mathbb{R} : d \cdot t_0 \in 2\pi\mathbb{Z}\} = \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$ . Nótese que  $[f, g]$  es la  $\frac{2\pi}{t_0}$ -periodización de  $f \cdot \bar{g}$ .

Siempre tenemos que el producto de las densidades de un reticulado y su reticulado adjunto es igual a  $2\pi$ , en nuestro caso esto se obtiene mediante un cálculo simple  $|\mathbb{K}| \cdot |\mathbb{D}| = t_0 \cdot \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi$ . Sea  $\mathbb{T} := [0, \frac{2\pi}{t_0})$  un *dominio fundamental* (o conjunto *transversal*) asociado a  $\mathbb{D}$ , es decir, un sistema de representantes de  $\mathbb{R}/\mathbb{D}$  que satisface

$$\mathbb{R} = \bigcup_{d \in \mathbb{D}} (\mathbb{T} + d) \quad \text{y} \quad \mathbb{T} + d \cap \mathbb{T} + d' = \emptyset, \quad \forall d \neq d' \in \mathbb{D}.$$

Tenemos que  $[f, g] \in L^1(\mathbb{T})$  (con la medida subyacente  $m_{\mathbb{R}}$  restringida a  $\mathbb{T}$ ) para cualquier  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  y, más aún, tenemos que

$$\|[f, f]\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}} |f(\lambda + d)|^2 \right| d\lambda = \sum_{d \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}+d} |f(\lambda)|^2 d\lambda = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

## 3.2. Técnicas de Fibración en Sistemas Invariantes por Traslaciones

Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  a lo sumo numerable y consideremos el sistema SI  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$ . El operador de análisis  $T_{\Phi}^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{K} \times \Phi}$  y el operador de síntesis  $T_{\Phi} : \ell^0(\mathbb{K} \times \Phi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  asociados a  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  toman la forma

$$T_{\Phi}^* f = (\langle f, E^k \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{(k, \phi) \in \mathbb{K} \times \Phi} \quad \text{y} \quad T_{\Phi} c = \sum_{(k, \phi) \in \mathbb{K} \times \Phi} c_{k, \phi} E^k \phi.$$

Recordamos el espacio de Hilbert de sucesiones de cuadrado sumables a valores en  $L^2(\mathbb{T})$ , indexadas por  $\Phi$  y equipado con la norma usual:

$$\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T})) := \left\{ (\tau_{\phi})_{\phi \in \Phi} : \tau_{\phi} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \ \|(\tau_{\phi})_{\phi \in \Phi}\|_{\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))}^2 := \sum_{\phi \in \Phi} \|\tau_{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 < \infty \right\}.$$

Si  $\tau \in \ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))$  entonces  $\tau(\lambda) = (\tau_{\phi}(\lambda))_{\phi \in \Phi} \in \ell^2(\Phi)$  a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . En este espacio, la transformada de Fourier  $\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{K} \times \Phi) \rightarrow \ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))$  viene dada por

$$\mathcal{F}c = \widehat{c} := (\widehat{c}_{\phi})_{\phi \in \Phi}, \quad \text{con} \quad \widehat{c}_{\phi}(\cdot) := \sum_{k \in \mathbb{K}} c_{\phi}(k) e^{-ik(\cdot)}, \quad \phi \in \Phi. \quad (3.1)$$

O sea, para cada  $\phi \in \Phi$ ,  $\widehat{c}_\phi$  es la transformada de Fourier usual de  $\ell^2(\mathbb{K})$  en  $L^2(\mathbb{T})$ , que le asigna a  $(c_\phi(k) := c_{k,\phi})_{k \in \mathbb{K}}$  su serie de Fourier. Así pues,  $\mathcal{F}$  dada por (3.1) también resulta un operador unitario. De esta forma, podemos identificar (y así lo haremos sin mencionarlo) los espacios  $\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)$  y  $\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))$  cuando sea necesario. De nuevo, si  $c \in \ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)$  entonces  $\widehat{c}(\lambda) = (\widehat{c}_\phi(\lambda))_{\phi \in \Phi} \in \ell^2(\Phi)$  a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

Por un lado podemos aplicar la transformada de Fourier a  $T_\Phi c$  para obtener

$$\widehat{T_\Phi c} = \sum_{(k,\phi) \in \mathbb{K} \times \Phi} c_{k,\phi} \widehat{E^k \phi} = \sum_{(k,\phi) \in \mathbb{K} \times \Phi} c_{k,\phi} e^{-ik(\cdot)} \widehat{\phi} = \sum_{\phi \in \Phi} \sum_{k \in \mathbb{K}} c_\phi(k) e^{-ik(\cdot)} \widehat{\phi} = \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_\phi(\cdot) \widehat{\phi}.$$

Así, tenemos un operador bien definido, asociado a  $T_\Phi$ , llamado *pre-Gramiano*:

$$J_\Phi : \widehat{\ell^0}(\mathbb{K} \times \Phi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \text{dado por} \quad J_\Phi \widehat{c} = \widehat{T_\Phi c}.$$

Más importante aún, con abuso de notación, podemos considerar  $J_\Phi$  como una función definida a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  (ya que  $\Phi$  es un subconjunto de  $L^2(\mathbb{R})$ ) dada por la matriz

$$J_\Phi(\lambda) = (\widehat{\phi}(\lambda + d))_{(d,\phi) \in \mathbb{D} \times \Phi}. \quad (3.2)$$

y entonces a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  tenemos  $(\widehat{T_\Phi c}(\lambda + d))_{d \in \mathbb{D}} = J_\Phi(\lambda) \widehat{c}(\lambda)$ .

$J_\Phi(\lambda)$  se denomina la *fibra* de  $T_\Phi$  en  $\lambda \in \mathbb{T}$ . De aquí el nombre de “*técnicas de fibración*” (*fibrization techniques*). De manera natural,  $J_\Phi(\lambda)$  puede considerarse como un operador densamente definido de  $\ell^2(\Phi)$  en  $\ell^2(\mathbb{D})$ . Lo trataremos como una matriz o como un operador según conveniencia.

Como es señalado en [RS95], el objetivo es estudiar el operador de síntesis  $T_\Phi$  a través del comportamiento de las fibras  $\{J_\Phi(\lambda) : \lambda \in \mathbb{T}\}$ .

Por otra parte, podemos aplicar (formalmente) la transformada de Fourier al operador de análisis  $T_\Phi^*$ . Al utilizar las propiedades de los adjuntos junto con la propiedad isométrica de la transformada de Fourier, obtenemos

$$\langle \widehat{T_\Phi^* f}, \tau \rangle = \langle \widehat{T_\Phi^* f}, \widehat{c} \rangle = \langle f, T_\Phi c \rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{T_\Phi c} \rangle = \langle \widehat{f}, J_\Phi \tau \rangle = \langle J_\Phi^* \widehat{f}, \tau \rangle,$$

donde cada producto interno pertenece al espacio de Hilbert correcto en consideración. Por lo tanto tenemos que  $\widehat{T_\Phi^* f} = J_\Phi^* \widehat{f}$  para cualquier  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

El operador  $J_\Phi^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{T})^\Phi$  dado por

$$J_\Phi^* f = ([f, \widehat{\phi}])_{\phi \in \Phi} = \left( \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\cdot + d) \widehat{\phi}(\cdot + d) \right)_{\phi \in \Phi},$$

se denomina el operador *pre-Gramiano* asociado a  $T_\Phi^*$ .

Para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  la matriz  $J_\Phi^*(\lambda)$  (o el operador de multiplicación por una matriz densamente definido de  $\ell^2(\mathbb{D})$  en  $\ell^2(\Phi)$ ) está dada por

$$J_\Phi^*(\lambda) = (\widehat{\phi}(\lambda + d))_{(d,\phi) \in \mathbb{D} \times \Phi}. \quad (3.3)$$

$J_\Phi^*(\lambda)$  se denomina la *fibra* de  $T_\Phi^*$  en  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

Comparando las ecuaciones (3.2) y (3.3) obtenemos la relación de conmutatividad deseada entre la evaluación en  $\lambda \in \mathbb{T}$  y la toma de adjunto en la fibra, es decir:

$$(J_\Phi(\lambda))^* = J_\Phi^*(\lambda), \quad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T}.$$

El objetivo es el mismo que en el caso del operador de síntesis: queremos estudiar las propiedades del operador de análisis  $T_\Phi^*$  a través del comportamiento de las fibras  $\{J_\Phi^*(\lambda) : \lambda \in \mathbb{T}\}$ .

Finalmente llegamos a las definiciones más importantes (aunque formalmente y posiblemente no bien definidas por el momento) de este capítulo.

**Definición 3.2.1.** El *Operador Gramiano* construido a partir del operador pre-Gramiano  $J_\Phi$  es el operador autoadjunto

$$G = G_\Phi := J_\Phi^* J_\Phi : \widehat{\ell^0}(\mathbb{K} \times \Phi) \rightarrow \widehat{\ell^0}(\mathbb{K} \times \Phi) \quad (3.4)$$

Llamamos *matrices Gramianas* a los valores del Gramiano  $G$  en  $\lambda \in \mathbb{T}$ , es decir:

$$G(\lambda) := J_\Phi^*(\lambda) J_\Phi(\lambda) = ([\widehat{\phi}, \widehat{\phi}'](\lambda))_{(\phi, \phi') \in \Phi \times \Phi}. \quad (3.5)$$

Al igual que en el caso de las fibras, las matrices Gramianas pueden considerarse a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  como operadores densamente definidos de  $\ell^2(\Phi)$  en (con suerte) sí mismo.

**Definición 3.2.2.** El *Operador Gramiano dual* construido a partir del operador pre-Gramiano  $J_\Phi^*$  es el operador autoadjunto

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}_\Phi := J_\Phi J_\Phi^* : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}). \widetilde{G}f = \|[f, \widehat{\phi}]\|_{\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))}^2. \quad (3.6)$$

Llamamos *matrices Gramianas duales* a los valores del Gramiano dual  $\widetilde{G}$  en  $\lambda \in \mathbb{T}$ , es decir:

$$\widetilde{G}(\lambda) := J_\Phi(\lambda) J_\Phi^*(\lambda) = \left( \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{\phi}(\lambda + d) \overline{\widehat{\phi}(\lambda + d')} \right)_{(d, d') \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}}. \quad (3.7)$$

Al igual que en el caso de las fibras, las matrices Gramianas duales pueden considerarse a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  como operadores densamente definidos de  $\ell^2(\mathbb{D})$  en (con suerte) sí mismo.

*Observación 3.2.3.* Las ecuaciones (3.4), (3.5), (3.6) y (3.7) no siempre están bien definidas. Veremos que si el sistema SI  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel entonces tendremos operadores acotados bien definidos en los respectivos espacios de Hilbert.  $\diamond$

El *espectro* del espacio SI  $\mathcal{V}(\Phi, t_0)$  generado por  $\Phi$  (no confundir con  $\sigma(T)$  el espectro de un operador  $T$ ) es el conjunto soporte (salvo conjuntos de medida nula) de la función  $J_\Phi : \mathbb{T} \rightarrow \ell^0(\mathbb{D} \times \Phi)$  y lo denotamos por

$$\sigma\mathcal{V}(\Phi, t_0) = \text{supp}(J_\Phi) = \{\lambda \in \mathbb{T} : J_\Phi(\lambda) \neq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{T} : G(\lambda) \neq 0\}.$$

Equivalentemente,

$$\sigma\mathcal{V}(\Phi, t_0) = \{\lambda \in \mathbb{T} : [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\lambda) \neq 0 \text{ para algún } \phi \in \Phi\}.$$

De hecho, la equivalencia se deduce inmediatamente de la siguiente ecuación

$$\sum_{\phi \in \Phi} [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\lambda) = \sum_{\phi \in \Phi} \sum_{d \in \mathbb{D}} |\widehat{\phi}(\lambda + d)|^2 = \|J_\Phi(\lambda) \mathbf{1}_{(d, \phi)}\|_{\ell^2(\mathbb{D} \times \Phi)}^2,$$

donde  $\mathbf{1}_{(d, \phi)}(d', \phi') = \delta_{d, d'} \delta_{\phi, \phi'}$  (producto de deltas de Kronecker).

De manera análoga al espectro del espacio SI  $\mathcal{V}(\Phi, t_0)$  generado por  $\Phi$ , podemos definir su *espectro dual* como

$$\widetilde{\sigma}\mathcal{V}(\Phi, t_0) = \text{supp}(J_\Phi^*) = \{\lambda \in \mathbb{T} : J_\Phi^*(\lambda) \neq 0\} = \{\lambda \in \mathbb{T} : \widetilde{G}(\lambda) \neq 0\}.$$

### 3.3. Análisis Gramiano

Comenzamos relacionando propiedades de  $T_\Phi$  y de  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  con propiedades de  $G$ . Para cada  $\tau = \widehat{c} \in \widehat{\ell^0}(\mathbb{K} \times \Phi)$  tenemos que

$$G\tau = J_\Phi^* J_\Phi \widehat{c} = J_\Phi^* \widehat{T_\Phi c} = \widehat{T_\Phi^* T_\Phi c}.$$

Recordemos que por la Proposición 1.6.2 tenemos que  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  resulta una sucesión de Bessel para  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si

$$T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi), L^2(\mathbb{R})) \quad \text{o, equivalentemente} \quad T_\Phi^* \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}), \ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)).$$

Así,  $T_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi), L^2(\mathbb{R}))$  si y solo si

$$J_\Phi \in \mathcal{B}(\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T})), L^2(\mathbb{R})) \quad \text{o, equivalentemente} \quad J_\Phi^* \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}), \ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))),$$

si y solo si

$$G \in \mathcal{B}(\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))).$$

Debido a esto, queda demostrada la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.1.** *Sean  $T_\Phi$  y  $G$  los operadores densamente definidos asociados al sistema SI  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  introducido en la Sección 3.2. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel para  $L^2(\mathbb{R})$ .
  - ii)  $T_\Phi$  es un operador bien definido y acotado en  $\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)$ .
  - iii)  $G$  es un operador bien definido y acotado de  $\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))$  en sí mismo.
- En tal caso la cota Bessel  $B$  de  $\mathcal{S}$  coincide con  $B = \|T_\Phi\|^2 = \|G\|$ .

Razonando como en la proposición anterior se prueba la siguiente.

**Proposición 3.3.2.** *Supongamos que  $T_\Phi$  es acotado (por lo tanto  $G$  lo es). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii)  $T_\Phi$  es un operador sobreyectivo.
- iii)  $G$  es un operador sobreyectivo.

En tal caso tenemos que  $A = \|T_\Phi^\dagger\|^2 = \|G^\dagger\|$ .

Ahora, relacionamos las matrices Gramianas  $G(\lambda)$  para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Primero, algunos tecnicismos. Damos una prueba del siguiente lema la cual sólo está indicada en [RS95].

**Lema 3.3.3.** *La evaluación conmuta con la aplicación de  $G$ , es decir:*

$$(G\tau)(\lambda) = G(\lambda)\tau(\lambda), \quad \tau \in \ell^0(\Phi, L^2(\mathbb{T})), \quad \text{a.e. } \lambda \in \mathbb{T}.$$

*Demostración.* Se trata de un cálculo sencillo. Por un lado,

$$\begin{aligned} G(\lambda)\tau(\lambda) &= ([\widehat{\phi'}, \widehat{\phi}](\lambda))_{(\phi', \phi) \in \Phi \times \Phi} \widehat{c}(\lambda) \\ &= \left( \sum_{\phi \in \Phi} \sum_{d \in \mathbb{D}} \widehat{\phi'}(\lambda + d) \widehat{\phi}(\lambda + d) \widehat{c}_\phi(\lambda) \right)_{\phi' \in \Phi} \\ &= \left( \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_\phi(\lambda) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi'}](\lambda) \right)_{\phi' \in \Phi}. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(G\tau)(\lambda) &= (J_{\Phi}^* J_{\Phi} \widehat{c})(\lambda) \\
&= \left( J_{\Phi}^* \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_{\phi}(\cdot) \widehat{\phi} \right)(\lambda) \\
&= \left( \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_{\phi}(\cdot) J_{\Phi}^* \widehat{\phi} \right)(\lambda) \\
&= \left( \left( \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_{\phi}(\cdot) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi'}](\cdot) \right)_{\phi' \in \Phi} \right)(\lambda) \\
&= \left( \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{c}_{\phi}(\lambda) [\widehat{\phi}, \widehat{\phi'}](\lambda) \right)_{\phi' \in \Phi}.
\end{aligned}$$

Esto prueba la igualdad a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . ■

*Observación 3.3.4.* En el Lema anterior hemos obtenido que

$$(\widehat{T_{\Phi}^* T_{\Phi} c}(\lambda))_{\phi \in \Phi} = G(\lambda) \widehat{c}(\lambda) \quad (3.8)$$

para cualquier  $c \in \ell^0(\mathbb{K} \times \Phi)$  y a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Si además,  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel, entonces (3.8) es válida para cualquier  $c \in \ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)$  y a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . ◇

Ahora, fijamos algunas notaciones y convenciones relativas a tres funciones (medibles a posteriori (3.10)) destacadas asociadas a los operadores Gramianos  $G(\lambda)$  para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{G} : \mathbb{T} &\rightarrow [0, \infty], & \text{dada por} & \quad \mathbf{G}(\lambda) := \|G(\lambda)\|, \\
\mathbf{G}^{-\dagger} : \mathbb{T} &\rightarrow [0, \infty], & \text{dada por} & \quad \mathbf{G}^{-\dagger}(\lambda) := \|G(\lambda)^{\dagger}\|, \\
\mathbf{G}^{-} : \mathbb{T} &\rightarrow [0, \infty], & \text{dada por} & \quad \mathbf{G}^{-}(\lambda) := \|G(\lambda)^{-1}\|.
\end{aligned}$$

Si los operadores involucrados  $G(\lambda)$ ,  $G(\lambda)^{\dagger}$  o  $G(\lambda)^{-1}$  no están bien definidos o son no acotados, consideramos que el valor de  $\mathbf{G}(\lambda)$ ,  $\mathbf{G}^{-\dagger}(\lambda)$  o  $\mathbf{G}^{-}(\lambda)$  es  $\infty$  respectivamente.

Para la conexión entre las matrices Gramianas  $G(\lambda)$ , las funciones  $\mathbf{G}(\lambda)$ ,  $\mathbf{G}^{-\dagger}(\lambda)$  y  $\mathbf{G}^{-}(\lambda)$ , y las propiedades de Bessel, de marco y de base de Riesz de un sistema SI  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$ , en [RS95] los autores estudian en primer lugar el caso de sistemas SI *principales* (PSI), es decir  $\Phi = \{\phi\}$ , luego siguen con el caso de sistemas SI *finitamente generados* (FSI), es decir  $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$ , y terminan con el caso general de un sistema SI cuyo conjunto generador  $\Phi$  es infinito numerable. Nos interesa el caso general porque nuestro estudio de sistemas de Gabor y sistemas afines (afines truncados y cuasi afines) lo requerirá. Enunciamos (casi) sin pruebas los casos de sistemas PSI y FSI e invitamos al lector a ver [BDR94, RS95] para una presentación detallada.

Como se dijo en el párrafo anterior, comenzamos considerando un conjunto generador puntual  $\Phi = \{\phi\}$ . Escribimos  $\mathcal{S}(\phi, t_0)$  y  $\mathcal{V}(\phi, t_0)$  para el sistema PSI y el espacio PSI asociados respectivamente. Los operadores de análisis y síntesis toman la forma más simple

$$T_{\phi}^* f = (\langle f, E^k \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})})_{k \in \mathbb{K}} \quad \text{y} \quad T_{\phi} c = \sum_{k \in \mathbb{K}} c_k E^k \phi.$$

Además, el espectro del espacio SI  $\sigma \mathcal{V}(\Phi, t_0)$  es simplemente el soporte (salvo conjuntos de medida nula) de  $\widetilde{\phi}$  (véase Definición 3.3.7 más abajo).

La prueba de la proposición siguiente está repartida en varias partes en [RS95].

**Proposición 3.3.5.** Dadas  $\phi, f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\|T_\phi^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}, \widehat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2. \quad (3.9)$$

*Demostración.* La igualdad

$$\langle f, E^k \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{f}, \widehat{E^k \phi} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle \widehat{f}, \widehat{\phi} e_k \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle [\widehat{f}, \widehat{\phi}], e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})},$$

implica que  $T_\phi^* f$  es la sucesión de coeficientes de Fourier de la función  $[\widehat{f}, \widehat{\phi}] \in L^1(\mathbb{T})$ , esto es,  $\widehat{T_\phi^* f} = [\widehat{f}, \widehat{\phi}]$ . En particular vale (3.9). ■

*Observación 3.3.6.* Se sigue de la proposición previa que  $\langle f, E^k \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$  para todo  $k \in \mathbb{K}$  si y solo si  $[\widehat{f}, \widehat{\phi}] = 0$  a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ , ya que

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} \langle f, E^k \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} e_k(\cdot)$$

es la serie de Fourier de  $[\widehat{f}, \widehat{\phi}]$ . Esto implica que dos espacios PSI  $\mathcal{V}(\phi, t_0)$  y  $\mathcal{V}(\phi', t_0)$  son ortogonales si y solo si  $[\widehat{\phi}, \widehat{\phi'}] = 0$  a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . ◇

La siguiente función tiene un rol preponderante en lo que sigue (a falta de mejor notación empleamos la utilizada en [RS95]).

**Definición 3.3.7.** Para  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  definimos  $\widetilde{\Phi} : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$  mediante

$$\widetilde{\Phi}(\lambda) := \left( \sum_{\phi \in \Phi} [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\lambda) \right)^{1/2}.$$

El resultado siguiente se demuestra en [RS95, Theorem 2.2.14] mientras que el caso particular de  $\Phi = \{\phi\}$  es demostrado previamente en [RS95, Theorem 2.2.7].

**Teorema 3.3.8.** Sea  $\mathcal{V}$  un espacio PSI y  $\Phi \subset \mathcal{V}$  a lo sumo numerable.

a) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel para  $\mathcal{V}$  con cota de Bessel  $B$ .
- ii)  $\widetilde{\Phi} \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi\|^2 = \|\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2 = \|\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\sigma\mathcal{V})}^2$ .

b) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es un marco para  $\mathcal{V}$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii)  $\widetilde{\Phi}, 1/\widetilde{\Phi} \in L^\infty(\sigma\mathcal{V})$ .

En tal caso tenemos que  $A = \|T_\Phi^\dagger\|^2 = \|1/\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\sigma\mathcal{V})}^2$ .

A continuación, enunciamos algunos resultados sobre sistemas y espacios FSI. Seguiremos el enfoque elegido en [RS95] que incorpora los resultados anteriores sobre sistemas y espacios PSI. Para un conjunto generador finito  $\Phi$ , se estudia primero el caso donde

$$\mathcal{V}(\Phi, t_0) = \bigoplus_{\phi \in \Phi} \mathcal{V}(\phi, t_0),$$

para luego reducir el caso general a este caso particular.

**Lema 3.3.9** ([RS95, Result 2.3.1]). Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  finito y sea  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- a)  $f \in \mathcal{V}(\Phi, t_0)$ .
- b) Existe  $\tau = (\tau_\phi)_{\phi \in \Phi}$ , con cada  $\tau_\phi$  una función  $2\pi$ -periódica, tal que  $\widehat{f} = \sum_{\phi \in \Phi} \tau_\phi \widehat{\phi}$ .

Por la Observación 3.3.6 la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} \mathcal{V}(\phi, t_0)$  es ortogonal si y solo si las matrices Gramianas  $G(\lambda)$  asociadas a  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  son diagonales a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

**Proposición 3.3.10** ([RS95, Proposition 2.3.3]). Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  finito y supongamos que las matrices Gramianas  $G(\lambda)$  son diagonales a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

a) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii) Para cada  $\phi \in \Phi$ ,  $\widetilde{\phi} \in L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi\|^2 = \max_{\phi \in \Phi} \|T_\phi\|^2 = \max_{\phi \in \Phi} \|\widetilde{\phi}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2$ .

b) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es un marco para  $\mathcal{V}(\Phi, t_0)$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii) Para cada  $\phi \in \Phi$ ,  $\widetilde{\phi}, 1/\widetilde{\phi} \in L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))$ .

En tal caso tenemos que  $A = \|T_\Phi^\dagger\|^2 = \max_{\phi \in \Phi} \|T_\phi^\dagger\|^2 = \max_{\phi \in \Phi} \|1/\widetilde{\phi}\|_{L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))}^2$ .

Notamos por  $\mu_{\max}(\lambda)$ ,  $\mu_{\min}(\lambda)$  y  $\mu_{\min}^+(\lambda)$  (funciones medibles en  $\mathbb{T}$ , véase Proposición 1.3.13) a los autovalores máximo, mínimo y mínimo no nulo de  $G(\lambda)$  respectivamente.

**Teorema 3.3.11** ([RS95, Theorem 2.3.6]). Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  finito con correspondiente matriz Gramiana  $G(\lambda)$  y funciones de autovalores  $\mu_{\max}$  y  $\mu_{\min}^+$ .

a) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $\mu_{\max} \in L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi\|^2 = \|\mu_{\max}\|_{L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))}$ .

b) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es un marco para  $\mathcal{V}(\Phi, t_0)$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii)  $\mu_{\max}, 1/\mu_{\min}^+ \in L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))$ .

En tal caso tenemos que  $A = \|T_\Phi^\dagger\|^2 = \|1/\mu_{\min}^+\|_{L^\infty(\sigma\mathcal{V}(\phi, t_0))}$ .

*Observación 3.3.12.* Cuando el conjunto generador  $\Phi$  es finito, digamos  $\#\Phi = N$ , la matriz Gramiana  $G(\lambda)$  es una matriz hermitica de  $N \times N$ . En este caso, las funciones de norma y las funciones de autovalores asociadas están relacionadas por  $\mu_{\max} = \mathbf{G}$ ,  $1/\mu_{\min} = \mathbf{G}^-$  y  $1/\mu_{\min}^+ = \mathbf{G}^{-\dagger}$ .  $\diamond$

Ahora, la idea es aproximar un espacio SI general mediante espacios FSI. De esta manera se obtienen caracterizaciones satisfactorias de sucesiones de Bessel y de bases estables. Lamentablemente, la propiedad de marco de  $L^2(\mathbb{R})$  es esquiva para este enfoque. Esto se debe al hecho conocido de que todo espacio FSI es un subespacio propio de  $L^2(\mathbb{R})$ . Sin embargo, existe un enfoque alternativo que consiste en el estudio del espectro de los operadores de fibras  $G(\lambda)$  [RS95, Section 3.4]. En la Sección 3.4 nos ocuparemos de ello mediante el análisis Gramiano dual.

Sea  $\mathcal{X}$  un conjunto arbitrario. Una sucesión  $(\mathcal{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se dice una *filtración* de  $\mathcal{X}$  si

$$\mathcal{X}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{X}_{n-1} \subset \mathcal{X}_n \subset \mathcal{X}_{n+1} \subset \cdots \quad \text{y} \quad \mathcal{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{X}_n.$$

Sean  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable y  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una filtración de  $\Phi$  por conjuntos finitos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  notamos  $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}(\Phi_n, t_0)$  y  $T_n = T_{\Phi_n}$ . Se deduce que  $(\mathcal{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una filtración de  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  por sistemas FSI.

Sean  $G_n(\lambda)$  la matriz Gramiana asociada al conjunto generador  $\Phi_n$  y  $\mu_{\max}^n(\lambda)$  la función de autovalor máximo asociada a la matriz  $G_n(\lambda)$ . Aplicando los Teoremas 2.3.6 y 3.2.1 en [RS95] se prueba el siguiente.

**Teorema 3.3.13** ([RS95, Corollary 3.2.2]). *Sean  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable,  $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una filtración de  $\Phi$  por conjuntos finitos y  $(\mu_{\max}^n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$  como arriba. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $(\mu_{\max}^n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión acotada en  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi\|^2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu_{\max}^n\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

No es difícil comprobar que, de manera monótona, para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  vale

$$\mu_{\max}^n(\lambda) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbf{G}(\lambda). \quad (3.10)$$

Por lo tanto  $\mathbf{G}$  resulta una función medible y

$$\|\mu_{\max}^n\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}.$$

Finalmente llegamos a la caracterización de la propiedad de Bessel deseada en términos de la función norma  $\mathbf{G}$ .

**Teorema 3.3.14** ([RS95, Theorem 3.2.3]). *Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable con matriz Gramiana  $G(\lambda)$  y función norma  $\mathbf{G}(\lambda) = \|G(\lambda)\|$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $\mathbf{G} \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi\|^2 = \|\mathbf{G}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

### 3.4. Análisis Gramiano Dual

En palabras de Ron & Shen: el enfoque Gramiano (Sección 3.3) es eficiente para el estudio de aquellas propiedades de  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  que son “visibles” a través del operador de síntesis  $T_\Phi$ , principalmente las propiedades de ortogonalidad y estabilidad (base estable). En contraste, otras propiedades de  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  como ser un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  (marco fundamental o un marco fundamental ajustado) se analizan mejor con la ayuda del operador de análisis  $T_\Phi^*$ . Estos enfoques se complementan entre sí y en el estudio de sistemas SI generales, el caso en el que estamos interesados principalmente, el uso simultáneo del análisis Gramiano y del análisis Gramiano dual resulta el más adecuado. Empleamos el análisis Gramiano dual desarrollado en [RS95, Subsection 3.3].

Al igual que en el caso de las matrices Gramianas, podemos definir a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  tres funciones (medibles a posteriori, por razones análogas que para las funciones asociadas a las matrices Gramianas) asociadas a las matrices Gramianas duales:  $\mathbf{G}^*, \mathbf{G}^{*\dagger}, \mathbf{G}^{*-} : \mathbb{T} \rightarrow [0, \infty]$  dadas por

$$\mathbf{G}^*(\lambda) := \|\tilde{G}(\lambda)\|, \quad \mathbf{G}^{*\dagger}(\lambda) := \|\tilde{G}(\lambda)^\dagger\| \quad \text{y} \quad \mathbf{G}^{*-}(\lambda) := \|\tilde{G}(\lambda)^{-1}\|. \quad (3.11)$$

Si el operador involucrado  $\tilde{G}(\lambda)$ ,  $\tilde{G}(\lambda)^\dagger$  o  $\tilde{G}(\lambda)^{-1}$  no está bien definido o es no acotado, asumimos que el valor de  $\mathbf{G}^*(\lambda)$ ,  $\mathbf{G}^{*\dagger}(\lambda)$  o  $\mathbf{G}^{*-}(\lambda)$  es  $\infty$  respectivamente.

En el estudio de los operadores Gramianos duales o las matrices Gramianas duales, debemos abordar previamente algunas cuestiones técnicas. Comenzaremos con el operador Gramiano dual. Como se señala en la Observación 3.2.3 la definición del operador Gramiano dual  $\tilde{G} := J_\Phi J_\Phi^*$  puede no tener sentido en absoluto si  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  no es una sucesión de Bessel. Una alternativa para evitar desde un principio este problema es considerar a  $\tilde{G}$  como el operador asociado a una forma cuadrática  $q$  de la siguiente manera

$$q(f, f) = \langle \tilde{G}f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle J_\Phi^* f, J_\Phi^* f \rangle_{\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))} = \left\| \sum_{\phi \in \Phi} | [f, \hat{\phi}] |^2 \right\|_{L^1(\mathbb{T})}, \quad (3.12)$$

la cual está densamente definida en  $L^2(\mathbb{R})$  (por ejemplo en el subespacio  $\mathcal{S}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  formado por las funciones de banda limitada en  $\mathbb{R}$ ).

*Observación 3.4.1.* Técnicamente, la ecuación (3.12), es la fórmula de una forma cuadrática  $q : \text{Dom}(q) = Q(q) \times Q(q) \rightarrow \mathbb{C}$  (con  $Q(q)$  denso en  $\mathcal{H}$ ) sobre los elementos de la diagonal  $\Delta(q) := \{(f, f) : f \in Q(q)\}$ . Sin embargo, es bien sabido que una forma cuadrática queda completamente definida sobre la diagonal. Para más detalles acerca de la definición y algunos resultados importantes acerca de formas cuadráticas no acotadas (cerradas), véase por ejemplo [ReSi80, págs. 276-283].  $\diamond$

Una situación peor ocurre en el caso de las matrices Gramianas duales  $\tilde{G}(\lambda)$ , donde alguna entrada  $(d, d')$  en (3.7) podría no converger absolutamente. Comencemos por resolver esta cuestión. En la proposición siguiente hemos agregado algunas cuentas omitidas en la demostración original en [RS95, Proposition 3.3.1].

**Proposición 3.4.2.** *Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable y supongamos que  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ . Entonces, para cada  $d, d' \in \mathbb{D}$ , la entrada  $(d, d')$  de  $\tilde{G}(\lambda)$  converge absolutamente a.e. a un elemento de  $L^1(\mathbb{T})$ .*

*Demostración.* En primer lugar, para cualquier  $d, d' \in \mathbb{D}$  la desigualdad de Cauchy-Schwarz conduce a

$$\begin{aligned} |\tilde{G}(\lambda)(d, d')|^2 &\leq \left( \sum_{\phi \in \Phi} |\hat{\phi}(\lambda + d)|^2 \right) \left( \sum_{\phi \in \Phi} |\overline{\hat{\phi}}(\lambda + d')|^2 \right) \\ &= \tilde{G}(\lambda)(d, d) \tilde{G}(\lambda)(d', d'). \end{aligned}$$

Por lo tanto, alcanza con probar el resultado para  $d = d' \in \mathbb{D}$ .

Para cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  por (3.9) tenemos que

$$\|T_\phi^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}, \hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2,$$

de donde

$$\sum_{\phi \in \Phi} \|\hat{f}, \hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = 2\pi \sum_{\phi \in \Phi} \|T_\phi^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K})}^2 \leq 2\pi B \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \quad (3.13)$$

donde en la última desigualdad se utiliza la propiedad de Bessel (para  $T_\Phi^*$ ). Ahora, al elegir  $\hat{f} := \mathbf{1}_{\mathbb{T}+d}$ , es inmediato que  $[\hat{f}, \hat{\phi}] = (E^d \hat{\phi})|_{\mathbb{T}}$  para cada  $\phi \in \Phi$ , y entonces

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in \Phi} \|\hat{f}, \hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{\phi \in \Phi} \|(E^d \hat{\phi})|_{\mathbb{T}}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \int_{\mathbb{T}} |\hat{\phi}(\lambda + d)|^2 d\lambda \\ &= \sum_{\phi \in \Phi} \|\hat{\phi}^2\|_{L^1(\mathbb{T}+d)} \\ &= \tilde{G}(\lambda)(d, d), \end{aligned}$$

con lo cual la suma correspondiente a  $\tilde{G}(\lambda)(d, d)$  es convergente en  $L^1(\mathbb{T})$  y por lo tanto también es puntualmente convergente en  $\mathbb{T}$ . ■

Como ocurre usualmente, la propiedad de Bessel es el punto de partida para estudiar la propiedad de marco. En adelante, en esta subsección, a menos que se especifique lo contrario, suponemos que la serie correspondiente a  $\tilde{G}(\lambda)(d, d')$  converge absolutamente para todo  $d, d' \in \mathbb{D}$  y a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ .

Volvemos al operador Gramiano dual tratado como la forma cuadrática (3.12). Queremos justificar la evaluación de las matrices Gramianas duales. Para  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ , buscamos validar la siguiente igualdad

$$(\tilde{G}\hat{f})(\lambda) = \tilde{G}(\lambda)\hat{f}|_\lambda, \quad (3.14)$$

donde utilizaremos las notaciones  $\hat{f}|_\lambda := \hat{f}|_{\lambda+\mathbb{D}}$  y  $(\hat{f}|_\lambda)^* := \overline{\hat{f}|_{\lambda+\mathbb{D}}}$ .

En la segunda parte de la siguiente proposición efectivamente se logra justificar la validez de (3.14).

**Proposición 3.4.3** ([RS95, Lemma 3.3.2]). *Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable.*

a) *Si para algunos  $d, d' \in \mathbb{D}$ , la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} |\hat{\phi}(\cdot + d)\overline{\hat{\phi}}(\cdot + d')|$  resulta infinita en un subconjunto de medida positiva, entonces  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  no es una sucesión de Bessel.*

b) Si para todos  $d, d' \in \mathbb{D}$ , la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} |\widehat{\phi}(\lambda + d)\overline{\widehat{\phi}(\lambda + d')}|$  resulta finita a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ , entonces, para cualquier función  $f$  de banda limitada, se cumple

$$\|T_{\Phi}^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (\widehat{f}|_{\lambda})^* \widetilde{G}(\lambda) \widehat{f}|_{\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \langle \widetilde{G}(\lambda) \widehat{f}|_{\lambda}, \widehat{f}|_{\lambda} \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} d\lambda. \quad (3.15)$$

*Demostración.* a) Suponiendo que  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel llegamos a una contradicción en (3.13).

b) Sea  $f$  una función de banda limitada, es decir,  $\text{supp}(\widehat{f})$  es un conjunto compacto (salvo conjuntos de medida nula). Por un lado tenemos que

$$2\pi \|T_{\Phi}^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)}^2 = \|(T_{\Phi}^* f)^{\wedge}\|_{\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))}^2 = \|J_{\Phi}^* \widehat{f}\|_{\ell^2(\Phi, L^2(\mathbb{T}))}^2 = \langle \widetilde{G} \widehat{f}, \widehat{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

y, por otro lado

$$\langle \widetilde{G} \widehat{f}, \widehat{f} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| \sum_{\phi \in \Phi} |[\widehat{f}, \widehat{\phi}]|^2 \right\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \sum_{\phi \in \Phi} |[\widehat{f}, \widehat{\phi}](\lambda)|^2 d\lambda.$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} \sum_{\phi \in \Phi} |[\widehat{f}, \widehat{\phi}](\lambda)|^2 &= \sum_{\phi \in \Phi} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}} \widehat{f}(\lambda + d) \overline{\widehat{\phi}(\lambda + d)} \overline{\widehat{f}(\lambda + d')} \widehat{\phi}(\lambda + d') \\ &= \sum_{d, d' \in \mathbb{D}} \widehat{f}(\lambda + d) \overline{\widehat{f}(\lambda + d')} \sum_{\phi \in \Phi} \widehat{\phi}(\lambda + d') \overline{\widehat{\phi}(\lambda + d)} \\ &= \sum_{d, d' \in \mathbb{D}} \overline{\widehat{f}(\lambda + d')} \widetilde{G}(\lambda)(d, d') \widehat{f}(\lambda + d) \\ &= (\widehat{f}|_{\lambda})^* \widetilde{G}(\lambda) \widehat{f}|_{\lambda}, \end{aligned}$$

juntando todas las identidades, obtenemos el resultado deseado. ■

Continuamos con una condición bajo la cual  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel y por lo tanto la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} |\widehat{\phi}(\lambda + d)\overline{\widehat{\phi}(\lambda + d')}|$  es finita a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  para todos  $d, d' \in \mathbb{D}$ .

**Proposición 3.4.4** ([RS95, Proposition 2.1.4]). Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  a lo sumo numerable y supongamos que  $\widetilde{\Phi} \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ . Entonces  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel y  $\|T_{\Phi}^*\| \leq \|\widetilde{\Phi}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$ .

*Demostración.* Mediante un cálculo directo, para cualquier  $\phi, f \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos

$$|[\widehat{f}, \widehat{\phi}]|^2 \leq [\widehat{f}, \widehat{f}][\widehat{\phi}, \widehat{\phi}] \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|[\widehat{f}, \widehat{f}]\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Utilizando estas fórmulas junto con la igualdad

$$\|T_{\Phi}^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)}^2 = \sum_{\phi \in \Phi} \|T_{\phi}^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K})}^2$$

en la ecuación (3.9), obtenemos

$$\begin{aligned} \|T_{\Phi}^* f\|_{\ell^2(\mathbb{K} \times \Phi)}^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\phi \in \Phi} \|[\widehat{f}, \widehat{f}][\widehat{\phi}, \widehat{\phi}]\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|[\widehat{f}, \widehat{f}]\|_{L^1(\mathbb{T})} \|\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2 \\ &= \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \|\widetilde{\Phi}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Ahora seguimos el mismo camino que en el contexto del análisis Gramiano. Para  $d \in \mathbb{D}$  sea  $\mathcal{S}_d$  el subespacio de  $L^2(\mathbb{R})$  dado por

$$\mathcal{S}_d := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset \mathbb{T} + d\}.$$

$\mathcal{S}_d$  es un sistema PSI con generador  $\phi = \mathbf{1}_{\mathbb{T}+d}^\vee$ . De hecho, una adaptación de [RS95, Result 2.2.9] prueba que  $f \in \mathcal{S}_d$  si y solo si  $\widehat{f} = \tau \mathbf{1}_{\mathbb{T}+d}$  con  $\tau$  una función  $\frac{2\pi}{t_0}$ -periódica. Consideremos  $T_{\Phi,d}^* = T_{\Phi|_{\mathcal{S}_d}}^*$ . Para  $\lambda \in \mathbb{T}$  y  $f \in \mathcal{S}_d$  la forma cuadrática  $(\widehat{f}|_\lambda)^* \widetilde{G}(\lambda) \widehat{f}|_\lambda$  se reduce a

$$\widehat{f}(\lambda + d) \widetilde{G}(\lambda)(d, d) \widehat{f}(\lambda + d) = \widetilde{G}(\lambda)(d, d) |\widehat{f}(\lambda + d)|^2.$$

Por lo tanto, la ecuación (3.15) se convierte en

$$\|T_{\Phi,d}^* f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widetilde{G}(\cdot)(d, d) |\widehat{f}(\cdot + d)|^2\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Ya que, para  $f \in \mathcal{S}_d$ , también tenemos que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \| |\widehat{f}(\cdot + d)|^2 \|_{L^1(\mathbb{T})},$$

las cotas inferior y superior para  $\|T_{\Phi,d}^*\|$  y aquellas para la norma  $L^1(\mathbb{T})$  de la función  $L^1(\mathbb{T}) \ni \tau \mapsto \widetilde{G}(\cdot)(d, d) \tau$  coinciden.

**Proposición 3.4.5** ([RS95, Proposition 3.3.3]). *Sean  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable y  $d \in \mathbb{D}$ . Supongamos que la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} |\widehat{\phi}(\lambda)|^2$  converge a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ .*

a) *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  $T_{\Phi,d}^*$  es un operador acotado en  $\mathcal{S}_d$ .

ii)  $\widetilde{G}(\cdot)(d, d) \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

*En tal caso tenemos que  $\|T_{\Phi,d}^*\|^2 = \|\widetilde{G}(\cdot)(d, d)\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .*

b) *Supongamos que  $T_{\Phi,d}^*$  es un operador acotado en  $\mathcal{S}_d$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  $T_{\Phi,d}^*$  es un operador parcialmente invertible en  $\mathcal{S}_d$ .

ii)  $1/\widetilde{G}(\cdot)(d, d) \in L^\infty(\widetilde{\sigma}\mathcal{S}_d)$ .

*En tal caso tenemos que  $\|T_{\Phi,d}^{*\dagger}\|^2 = \|1/\widetilde{G}(\cdot)(d, d)\|_{L^\infty(\widetilde{\sigma}\mathcal{S}_d)}$ .*

El siguiente paso es obtener el resultado para Gramianos duales, análogo al Teorema 3.3.11 para Gramianos de sistemas FSI. Esto lleva a reemplazar los espacios PSI  $\mathcal{S}_d$ , con  $d \in \mathbb{D}$ , por espacios FSI. Por lo tanto, consideramos un conjunto finito  $\mathbb{F} \subset \mathbb{D}$  y, notando por  $\mathbb{T}_{\mathbb{F}} := \mathbb{T} + \mathbb{F}$ , consideramos el espacio de funciones de banda limitada

$$\mathcal{S}_{\mathbb{F}} := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset \mathbb{T}_{\mathbb{F}}\}.$$

Como antes, invocando el Lema 3.3.9 junto con  $\mathcal{S}_d$  siendo un espacio PSI, se obtiene que  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$  es un espacio FSI con conjunto generador  $\{\mathbf{1}_{\mathbb{T}+d}^{\vee} : d \in \mathbb{F}\}$ .

Para cualquier  $g : \mathbb{T}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $\lambda \in \mathbb{T}$  le asociamos el vector  $g_{\mathbb{F}}(\lambda) := (g(\lambda + d))_{d \in \mathbb{F}}$ . Además, notamos por  $\widetilde{G}_{\mathbb{F}}(\lambda)$  a la matriz Gramiana dual que se obtiene a partir de  $\widetilde{G}(\lambda)$  eliminando todas las filas y columnas indexadas por  $\mathbb{D} \setminus \mathbb{F}$  y notamos por  $T_{\Phi, \mathbb{F}}^* = T_{\Phi|_{\mathcal{S}_{\mathbb{F}}}}^*$  al operador de análisis restringido a  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$ . En este contexto tenemos

$$\|T_{\Phi, \mathbb{F}}^* f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \|(\widehat{f}_{\mathbb{F}})^* \widetilde{G}_{\mathbb{F}} \widehat{f}_{\mathbb{F}}\|_{L^1(\mathbb{T})} \quad \text{y} \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}_{\mathbb{F}}\|_{L^1(\mathbb{T})}^2.$$

En la misma línea que para las matrices Gramianas consideramos ahora las funciones de autovalores asociadas a las matrices Gramianas duales  $\widetilde{G}_{\mathbb{F}}$ :  $\widetilde{\mu}_{\text{máx}}^{\mathbb{F}}$ ,  $\widetilde{\mu}_{\text{mín}}^{\mathbb{F}}$  y  $\widetilde{\mu}_{\text{mín}}^{+, \mathbb{F}}$  denotan el autovalor mayor, menor y menor no nulo de  $\widetilde{G}_{\mathbb{F}}$  respectivamente.

**Proposición 3.4.6** ([RS95, Proposition 3.3.4]). *Sea  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable y sean  $\mathbb{F}$ ,  $G_{\mathbb{F}}$ ,  $\widetilde{\mu}_{\text{máx}}^{\mathbb{F}}$ ,  $\widetilde{\mu}_{\text{mín}}^{+, \mathbb{F}}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$  y  $T_{\Phi, \mathbb{F}}^*$  como arriba. Supongamos que  $\sum_{\phi \in \Phi} |\widehat{\phi}|^2$  es finita a.e. en  $\mathbb{T}$ .*

*a) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*i)  $T_{\Phi, \mathbb{F}}^*$  es un operador acotado en  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$ .*

*ii)  $\widetilde{\mu}_{\text{máx}}^{\mathbb{F}} \in L^{\infty}(\mathbb{T})$ .*

*En tal caso tenemos que  $\|T_{\Phi, \mathbb{F}}^*\|^2 = \|\widetilde{\mu}_{\text{máx}}^{\mathbb{F}}\|_{L^{\infty}(\mathbb{T})}$ .*

*b) Supongamos que  $T_{\Phi, \mathbb{F}}^*$  es un operador acotado en  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*i)  $T_{\Phi, \mathbb{F}}^*$  es un operador parcialmente invertible en  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$ .*

*ii)  $1/\widetilde{\mu}_{\text{mín}}^{+, \mathbb{F}} \in L^{\infty}(\widetilde{\sigma}\mathcal{S}_{\mathbb{F}})$ .*

*En tal caso tenemos que  $\|T_{\Phi, \mathbb{F}}^{\dagger}\|^2 = \|1/\widetilde{\mu}_{\text{mín}}^{+, \mathbb{F}}\|_{L^{\infty}(\widetilde{\sigma}\mathcal{S}_{\mathbb{F}})}$ .*

Para la deseada caracterización final, empleamos el mismo dispositivo que utilizamos en el contexto del análisis Gramiano. Queremos extender la Proposición 3.4.6 de  $\mathcal{S}_{\mathbb{F}}$  a  $L^2(\mathbb{R})$ . Sea  $(\mathbb{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una filtración de  $\mathbb{D}$  y  $(\mathbb{T}_{\mathbb{F}_n} := \mathbb{T} + \mathbb{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la filtración inducida de  $\mathbb{R}$ . Esto conduce a una sucesión creciente de espacios FSI  $(\mathcal{S}_{\mathbb{F}_n})_{n \in \mathbb{N}}$  cuya unión (límite)  $\mathcal{S}$  es un subespacio denso de  $L^2(\mathbb{R})$ . Más precisamente,  $\mathcal{S}$  es el espacio bien conocido de funciones de banda limitada en  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.4.7** ([RS95, Theorem 3.3.5]). *Sean  $\Phi \subset L^2(\mathbb{R})$  infinito numerable,  $\widetilde{G}(\lambda)$  la matriz Gramiana dual asociada a  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  y  $G^*$ ,  $G^{*-}$  como en (3.11). Entonces:*

*a) Si la suma  $\sum_{\phi \in \Phi} |\widehat{\phi}|^2$  diverge en un conjunto de medida positiva entonces  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  no es una sucesión de Bessel.*

b) Supongamos que  $\sum_{\phi \in \Phi} |\hat{\phi}|^2$  es finita a.e. en  $\mathbb{T}$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel para  $L^2(\mathbb{R})$  con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $\mathbf{G}^* \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

En tal caso tenemos que  $B = \|T_\Phi^*\|^2 = \|\mathbf{G}^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

c) supongamos que  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es una sucesión de Bessel. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii)  $\tilde{G}(\lambda)$  posee inverso acotado a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  y  $1/\mathbf{G}^{*-} \in L^\infty(\mathbb{T})$ .

En tal caso tenemos que  $A = \|T_\Phi^{*-1}\|^2 = \|1/\mathbf{G}^{*-}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

*Observación 3.4.8.* Vale decir que en [Ch16, Section 10.1] se obtienen los mismos resultados con un enfoque similar, siguiendo mayormente la publicación [CSS98].  $\diamond$

| Nombre                                       | Ron & Shen                                                                                                                                                                              | Este Trabajo                                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Dominio de funciones                         | $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$                                                                                                                                                        | $\mathbb{R}$                                                                                                                                                                                              |
| Espacio de funciones de cuadrado integrable  | $L_2(\mathbb{R}^d), d \in \mathbb{N}$                                                                                                                                                   | $L^2(\mathbb{R})$                                                                                                                                                                                         |
| Reticulado                                   | $\mathbb{Z}^d$                                                                                                                                                                          | $\mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}, t_0 > 0$                                                                                                                                                                    |
| Dominio fundamental                          | $\omega \in \mathbb{T}^d := [-\pi, \pi)^d$                                                                                                                                              | $\lambda \in \mathbb{T} = [0, \frac{2\pi}{t_0})$                                                                                                                                                          |
| Reticulado dual                              | $2\pi\mathbb{Z}^d$                                                                                                                                                                      | $\mathbb{D} := \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$                                                                                                                                                                |
| Conjunto de trasladados de $\Phi$            | $E_\Phi$                                                                                                                                                                                | $\mathcal{S}(\Phi, t_0)$                                                                                                                                                                                  |
| Espacio SI generado por $\Phi$               | $S(\Phi)$                                                                                                                                                                               | $\mathcal{V}(\Phi, t_0)$                                                                                                                                                                                  |
| Espectros del espacio SI generado por $\Phi$ | $\sigma\Phi$ y $\tilde{\sigma}\Phi$                                                                                                                                                     | $\sigma\mathcal{V}(\Phi, t_0)$ y $\tilde{\sigma}\mathcal{V}(\Phi, t_0)$                                                                                                                                   |
| Operadores de análisis y de síntesis         | $\mathcal{T}_\Phi^*$ y $\mathcal{T}_\Phi$                                                                                                                                               | $T_\Phi^*$ y $T_\Phi$                                                                                                                                                                                     |
| Norma de operadores Gramianos                | $\Lambda(\omega) = \ G(\omega)\ $<br>$\lambda^+(\omega) = \ G(\omega)_\perp^{-1}\ ^{-1}$<br>$\lambda(\omega) = \ G(\omega)^{-1}\ ^{-1}$                                                 | $\mathbf{G}(\lambda) = \ G(\lambda)\ $<br>$\mathbf{G}^{-\dagger}(\lambda) = \ G(\lambda)^\dagger\ $<br>$\mathbf{G}^-(\lambda) = \ G(\lambda)^{-1}\ $                                                      |
| Norma de operadores Gramianos duales         | $\tilde{\Lambda}(\omega) = \ \tilde{G}(\omega)\ $<br>$\tilde{\lambda}^+(\omega) = \ \tilde{G}(\omega)_\perp^{-1}\ ^{-1}$<br>$\tilde{\lambda}(\omega) = \ \tilde{G}(\omega)^{-1}\ ^{-1}$ | $\mathbf{G}^*(\lambda) = \ \tilde{G}(\lambda)\ $<br>$\mathbf{G}^{*- \dagger}(\lambda) = \ \tilde{G}(\lambda)^\dagger\ $<br>$\mathbf{G}^{*-}(\lambda) = \ \tilde{G}(\lambda)^{-1}\ $                       |
| Funciones de autovalores                     | $\Lambda(\omega) / \tilde{\Lambda}(\omega)$<br>$\lambda^+(\omega) / \tilde{\lambda}^+(\omega)$<br>$\lambda(\omega) / \tilde{\lambda}(\omega)$                                           | $\mu_{\text{máx}}(\lambda) / \tilde{\mu}_{\text{máx}}(\lambda)$<br>$\mu_{\text{mín}}^+(\lambda) / \tilde{\mu}_{\text{mín}}^+(\lambda)$<br>$\mu_{\text{mín}}(\lambda) / \tilde{\mu}_{\text{mín}}(\lambda)$ |

Cuadro 3.1: Algunas notaciones de [RS95] y sus reemplazos en este trabajo

# Capítulo 4

## Sistemas de Gabor

En este capítulo conectamos sistemas regulares de Gabor (con un reticulado como conjunto de índices), marcos *AP* de Gabor, análisis Gramiano dual y procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio. Seguimos nuestra publicación [CeMe22]. En la Sección 4.1 recordamos la definición de un sistema de Gabor y, considerándolo como un sistema invariante por traslaciones, enunciamos una caracterización útil de los marcos de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$  en términos de matrices Gramianas duales (Teorema 4.1.3). Aprovechando esto último junto con una caracterización existente entre marcos de Gabor y marcos *AP* de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$ , en la Sección 4.2 demostramos una caracterización de marcos de Gabor de  $L^2(\mathbb{R})$  en términos de ciertas desigualdades de tipo marcos *AP* que involucra normas *AP* de un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  y de la sucesión de coeficientes aleatorios de Gabor asociada al mismo. Con base en los resultados obtenidos en la Sección 4.2, obtenemos primero, en la Sección 4.3, condiciones necesarias y suficientes para la completitud de esta sucesión de coeficientes aleatorios de Gabor en el espacio de Hilbert generado por  $X$ , y luego, en la Sección 4.4, habiendo impuesto algunas condiciones adicionales sobre la función ventana  $g$  como así también en las matrices Gramianas duales, llevamos a cabo la reconstrucción de  $X$  por medio de dicha sucesión.

### 4.1. Análisis Gramiano Dual en Sistemas de Gabor

En esta sección aplicamos los resultados del Capítulo 3 a los sistemas de Gabor siguiendo [RS97a].

Recordamos la Definición 1.6.10 correspondiente a un *sistema de Gabor*.

**Definición 4.1.1.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible de Borel (ventana) y  $t_0, \omega_0$  constantes positivas. El *sistema de Gabor* generado por los desplazamientos en tiempo-frecuencia de  $g$  es el conjunto:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(g, t_0, \omega_0) = \{g_{k,l}(t) = g(t - k)e^{il(t-k)} : k \in \mathbb{K} := t_0\mathbb{Z}, l \in \mathbb{L} := \omega_0\mathbb{Z}\}.$$

Es para tener en cuenta que  $\widehat{\mathcal{G}}$  ( $\mathcal{G}$  transformado por Fourier) es otra vez esencialmente un sistema de Gabor:

$$\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g}_{k,l}(\lambda) = (M^{-k}E^l\widehat{g})(\lambda) = \widehat{g}(\lambda - l)e^{-ik\lambda} : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\}, \quad (4.1)$$

donde  $M^{-k}$  representa el operador de modulación con frecuencia  $-k$  definido por (1.14).

Motivados en parte por algunos problemas de interpolación para procesos aleatorios estacionarios, trabajaremos preferentemente con (4.1). El sistema de Gabor  $\mathcal{G}$  es de hecho un sistema SI ya que

$$g_{k,l}(t) = (E^k(M^l g))(t), \quad k \in \mathbb{K}, \quad l \in \mathbb{L},$$

y llamando

$$\Phi := \{\phi_l := M^l g : l \in \mathbb{L}\}$$

podemos reescribirlo como

$$\mathcal{G}(g, t_0, \omega_0) = \mathcal{S}(\Phi, t_0).$$

Dado que nos encontramos en el contexto de los sistemas SI, podemos aplicar la maquinaria del Capítulo 3. De aquí en adelante, utilizaremos  $\mathbb{L}$ , con el orden habitual, en lugar de  $\Phi$  como conjunto de índices, ya que este está reservado para la medida aleatoria asociada a un proceso aleatorio estacionario  $X$ .

*Observación 4.1.2.* Con respecto a la teoría de los sistemas SI y al menos con respecto al trabajo que aquí desarrollaremos, no hay pérdida de generalidad al considerar un solo generador  $\{g\}$  en lugar de un conjunto finito  $\{g_1, \dots, g_n\}$ . Elegimos una sola función para evitar una notación sobrecargada.  $\diamond$

En este punto volvemos a introducir una modificación menor con respecto a [RS97a, p. 13] (sin la constante  $\frac{1}{t_0}$  multiplicando la suma (4.2) a continuación). Al menos formalmente, para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  (o  $\lambda \in \mathbb{R}$  indistintamente), la matriz Gramiana dual infinita  $\tilde{G}(\lambda)$  con entrada  $(d, d')$  está dada por

$$\tilde{G}(\lambda)(d, d') = \sum_{l \in \mathbb{L}} \hat{g}(\lambda - l + d) \bar{\hat{g}}(\lambda - l + d'), \quad d, d' \in \mathbb{D}. \quad (4.2)$$

La ecuación (4.2) es un caso particular de la ecuación (3.7) ya que

$$\hat{\phi}_l(\lambda) = \hat{g}(\lambda - l) = (E^l \hat{g})(\lambda), \quad l \in \mathbb{L}.$$

Recordamos la definición formal de las matrices Gramianas duales como el producto matricial de las fibras  $\tilde{G}(\lambda) = J(\lambda)J^*(\lambda)$ , con  $J(\lambda)(d, l) = \hat{g}(\lambda - l + d)$  para  $l \in \mathbb{L}$  y  $d \in \mathbb{D}$  (también modificadas eliminando el factor  $\frac{1}{\sqrt{t_0}}$ ), donde  $J^*(\lambda)$  denota la transpuesta conjugada (adjunta) de  $J(\lambda)$ .

Es posible caracterizar los sistemas de Gabor que son marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  en términos de  $\tilde{G}(\lambda)$ , que actúa como un operador  $\tilde{G}(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$ , o alternativamente, por medio de las fibras  $J(\lambda) : \ell^2(\mathbb{L}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$ . De hecho, una condición necesaria es la continuidad de  $\tilde{G}(\lambda)$  y además como caso particular del Teorema 3.4.7 b) Ron & Shen demostraron:

**Teorema 4.1.3.** ([RS97a, Theorem 3.2], [Ch16, p. 264] and [Gr01, p. 117]). Sea  $\mathcal{G} \subset L^2(\mathbb{R})$  un sistema de Gabor con matriz Gramiana dual asociada  $\tilde{G}(\lambda)$  definida como en (4.2). Entonces:

$\mathcal{G}$  (y/o  $\hat{\mathcal{G}}$ ) es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con constantes  $0 < A \leq B < \infty$  si y solo si

$$t_0 A \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \langle \tilde{G}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq t_0 B \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2, \quad (4.3)$$

para casi todos (con respecto a la medida de Lebesgue)  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todos los  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$ .

Nótese que la ecuación (4.3) significa que  $J(\lambda) : \ell^2(\mathbb{L}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$ ,  $J^*(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{L})$  y  $\tilde{G}(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$  son operadores acotados con inversos acotados para casi todos los  $\lambda$  con respecto a la medida de Lebesgue. De hecho, la condición (4.3) puede reformularse como:

$$t_0 A \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \|J^*(\lambda)x\|_{\ell^2(\mathbb{L})}^2 \leq t_0 B \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2. \quad (4.4)$$

Además, téngase en cuenta que  $\tilde{G}(\lambda)$  es autoadjunto y, más aún, define un operador positivo con dominio en  $\ell^2(\mathbb{D})$  para casi todos los  $\lambda$ 's.

## 4.2. Marcos $AP$ de Gabor y Procesos Aleatorios Estacionarios

Esta sección contiene los principales resultados del Capítulo, los cuales fueron originados en nuestra publicación [CeMe22].

Como  $B^2(\mathbb{R})$  no es separable, ninguna colección contable de elementos de su espacio dual puede ser total en él. Sin embargo, mediante un proceso de promediado adecuado se puede estimar la norma  $B^2(\mathbb{R})$ . De hecho, esto motiva la siguiente definición para los sistemas de Gabor [KR09, Kim13, Par01].

**Definición 4.2.1.** Sea  $\mathcal{G} \subset L^1(\mathbb{R})$  un sistema de Gabor. Decimos que  $\mathcal{G}$  es un *marco  $AP$  de Gabor* si existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que para cada  $f \in AP(\mathbb{R})$ :

$$A \|f\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle f, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B \|f\|_{B^2(\mathbb{R})}^2.$$

*Observación 4.2.2.* Notemos que los productos internos  $\langle f, g_{k,l} \rangle$  son finitos ya que  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$  y  $g_{k,l} \in L^1(\mathbb{R}) \forall k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}$ .  $\diamond$

*Observación 4.2.3.* La definición 4.2.1 afirma que la norma habitual  $\|\cdot\|_{B^2(\mathbb{R})}$  es equivalente a la norma  $\|(\langle \cdot, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{\ell^2(\mathbb{L}, B^2(\mathbb{K}))}$ . Este recurso se explota en [BFG17].  $\diamond$

En [KR09, Theorem 1.11], con la condición moderada adicional (C2) de (4.5) a continuación, se demuestra que un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  de Gabor es un marco  $AP$  de Gabor y viceversa. Además, las cotas inferior y superior de marco de  $L^2(\mathbb{R})$  coinciden con las cotas inferior y superior de marco  $AP$  respectivamente.

A lo largo de esta sección,  $\mathcal{G} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  será un sistema de Gabor que verifica las condiciones adicionales:

$$\begin{aligned} (C1) \quad & M := \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} |\widehat{g}(\lambda + d)|^2 < \infty, \\ (C2) \quad & \tilde{G}(\cdot)(0, d) \in C(\mathbb{R}) \quad \forall d \in \mathbb{D}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bajo estos supuestos, dado un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ , recordando el Ejemplo 2.2.11 (ecuación (2.11)) podemos calcular sus coeficientes aleatorios de marco y obtener, para cada  $l \in \mathbb{L}$ , la sucesión aleatoria  $(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  dada por:

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k} \tilde{g}(\lambda - l) d\Phi(\lambda). \quad (4.6)$$

Es inmediato que estas sucesiones aleatorias pertenecen a  $H(X)$  y que también son Gaussianas. Además, para cada  $l \in \mathbb{L}$ ,  $(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  es estacionaria, ya que a partir de (2.8) la covarianza de esta sucesión toma la forma:

$$\mathbf{E}(\langle X, g_{k,l} \rangle \overline{\langle X, g_{k',l} \rangle}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda(k-k')} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu(\lambda), \quad (4.7)$$

que sólo depende de la diferencia  $k - k' \in \mathbb{K}$ . Caracterizaremos  $\mathcal{G}$  mediante estos coeficientes. La condición de acotación a priori (C1) de (4.5) es otra forma de suponer que la función  $\widetilde{\Phi}$  de la Definición 3.3.7, ahora reescrita como

$$\widetilde{\Phi}(\lambda)^2 := \sum_{\phi \in \Phi} [\widehat{\phi}, \widehat{\phi}](\lambda) = \sum_{l \in \mathbb{L}} \sum_{d \in \mathbb{D}} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2,$$

pertenece a  $L^\infty(\mathbb{T})$ . Esta propiedad garantiza la propiedad de Bessel de  $\mathcal{G}$  (véase Proposición 3.4.4). Además, las condiciones de continuidad a priori como (C2) de (4.5), como se señala en [KR09] para el caso de  $AP(\mathbb{R})$ , se deben al hecho de que la configuración  $L^2(\mathbb{R})$  está asociada con la medida de Lebesgue en el dominio de frecuencia, mientras que en la configuración actual el dominio de frecuencia está asociado a procesos aleatorios estacionarios con una medida espectral de Borel finita arbitraria  $\mu$ . Como resultado, las condiciones de tipo marco como (4.3) que son válidas a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$  con respecto a la medida de Lebesgue serán válidas *para cada*  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Recordemos los conjuntos finitos  $\mathbb{K}(N) = \{nt_0 \in \mathbb{K} : -N \leq n \leq N\}$ , para  $N \in \mathbb{N}$ , y definamos  $\mathbb{L}(N)$  y  $\mathbb{D}(N)$  de manera similar.

**Lema 4.2.4.** *Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de Gabor. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  $\mathcal{G}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .

ii) Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que:

$$A \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{1}{t_0} \sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{a.s.} \quad (4.8)$$

para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  con medida espectral discreta.

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii) Recordemos del comienzo de esta sección que si  $X$  es estacionario y Gaussiano, entonces para cada  $l \in \mathbb{L}$ , la sucesión de coeficientes aleatorios  $(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$ , dada por

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k} \overline{\widehat{g}}(\lambda - l) d\Phi(\lambda)$$

también es estacionaria (véase ecuación (4.7)) y Gaussiana. Si  $X$  tiene espectro discreto, existe  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  a lo sumo numerable tal que

$$X(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t}$$

converge a.s. para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde las  $C(\lambda)$ 's son variables aleatorias normales, de media cero e independientes tales que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 = \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

Además, por la Proposición 2.4.2,  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s.. En este caso,  $C(\lambda) = 0$  a.s. excepto para a lo sumo numerables  $\lambda$ 's, entonces los coeficientes aleatorios  $\langle X, g_{k,l} \rangle$  de la ecuación (4.6) toman la forma de una serie convergente a.s. para cada  $k \in \mathbb{K}$  y  $l \in \mathbb{L}$ :

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \bar{g}(\lambda - l) e^{i\lambda k} C(\lambda),$$

ya que, como en el Ejemplo 2.2.13, tenemos que

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |\bar{g}(\lambda - l)|^2 \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 \leq \|\bar{g}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \mu(\mathbb{R}) < \infty,$$

y el mismo argumento es válido para cualquier reordenamiento de esta suma, entonces:

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \left( \sum_{d \in \mathbb{D}} \bar{g}(\lambda - l + d) C(\lambda + d) \right) e^{i\lambda k} = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} D(\lambda, l) e^{i\lambda k} \quad \text{a.s.} \quad (4.9)$$

Por lo tanto, existe  $\Omega_l^s \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbf{P}(\Omega_l^s) = 1$  donde, para cada  $k \in \mathbb{K}$ , la serie (4.9) converge. Por otra parte, debido al Teorema 2.3.1 existe  $\Omega_l^e \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbf{P}(\Omega_l^e) = 1$  y donde  $\|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}$  existe y es finito. Definimos para cada  $l \in \mathbb{L}$ :  $\Omega_l = \Omega_l^e \cap \Omega_l^s$ , y por tanto la ecuación (4.9) implica que  $D(\lambda, l)$  es la Transformada de Bohr de la sucesión  $(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}} \in B^2(\mathbb{K})$  sobre  $\Omega_l$ . Luego, la fórmula de Wiener (1.19) afirma que:

$$\|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|D(\cdot, l)\|_{L^2(\mathbb{T}, dc)}^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} |D(\lambda, l)|^2,$$

y entonces sobre  $\bigcap_{l \in \mathbb{L}} \Omega_l$ :

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{l \in \mathbb{L}} \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} |D(\lambda, l)|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{l \in \mathbb{L}} |D(\lambda, l)|^2.$$

Por otra parte, siguiendo el análisis sobre el subconjunto  $\bigcap_{l \in \mathbb{L}} \Omega_l$ ,

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} |D(\lambda, l)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{L}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} \bar{g}(\lambda - l + d) C(\lambda + d) \right|^2,$$

y teniendo en cuenta la condición (C1) de (4.5), si definimos

$$C_N(\lambda, d) = C(\lambda + d) \mathbf{1}_{\mathbb{D}(N)}(d), \quad \lambda \in \mathbb{T}, \quad d \in \mathbb{D}, \quad N \in \mathbb{N},$$

resulta que

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} \bar{g}(\lambda - l + d) C(\lambda + d) \right|^2 = \langle \tilde{G}(\lambda) C_N(\lambda), C_N(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \quad (4.10)$$

y

$$\left| \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} \widehat{g}(\lambda - l + d) C(\lambda + d) \right|^2 \leq M \sum_{d \in \mathbb{D}} |C(\lambda + d)|^2.$$

Recordando que

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} |C(\lambda + d)|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |C(\lambda)|^2 < \infty,$$

por el Teorema de Lebesgue (considerando la medida de conteo  $dc$ ) se puede intercambiar la suma sobre  $l \in \mathbb{L}$  con el límite y así, por la ecuación (4.10):

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{l \in \mathbb{L}} |D(\lambda, l)|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \widetilde{G}(\lambda) C_N(\lambda), C_N(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})}.$$

Pero, recordando que  $\mathcal{G}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , de la ecuación (4.3) y la condición de continuidad (C2) de (4.5)

$$t_0 A \sum_{d \in \mathbb{D}} |C_N(\lambda, d)|^2 \leq \langle \widetilde{G}(\lambda) C_N(\lambda), C_N(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq t_0 B \sum_{d \in \mathbb{D}} |C_N(\lambda, d)|^2,$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{T}$  y la afirmación se desprende de la ecuación (1.18):

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{d \in \mathbb{D}} |C_N(\lambda, d)|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} |C(\lambda + d)|^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} |C(\lambda)|^2 = \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2.$$

ii)  $\Rightarrow$  i) Sea  $N \in \mathbb{N}$  y definamos el proceso

$$X(t) = \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} C(d) e^{i(d-\lambda)t},$$

con  $C(d) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$  variables aleatorias independientes y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mediante un cálculo directo, a partir de la definición de la Transformada de Fourier, y dado que  $e^{idk} = 1$  para todos los  $d \in \mathbb{D}$  y  $k \in \mathbb{K}$ :

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} C(d) \int_{\mathbb{R}} e^{i(d-\lambda)t} \overline{g_{k,l}(t)} dt = \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} C(d) \widehat{g}(d - \lambda - l) e^{-i\lambda k}.$$

Así pues,

$$|\langle X, g_{k,l} \rangle|^2 = \sum_{d, d' \in \mathbb{D}(N)} \overline{C(d')} C(d) \widehat{g}(d' - \lambda - l) \widehat{g}(d - \lambda - l),$$

sumando sobre  $k \in \mathbb{K}(M)$ , para todo  $M \in \mathbb{N}$ , tenemos:

$$\frac{1}{(2M+1)t_0} \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} |\langle X, g_{k,l} \rangle|^2 = \frac{1}{t_0} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}(N)} \overline{C(d')} C(d) \widehat{g}(d' - \lambda - l) \widehat{g}(d - \lambda - l), \quad (4.11)$$

y por lo tanto se puede obtener el valor del límite cuando  $M \rightarrow \infty$ .

Por otra parte:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} |C(d)|^2. \quad (4.12)$$

Combinando las desigualdades (4.8) con las ecuaciones (4.11), (4.12) y entonces sumando sobre  $l \in \mathbb{L}$  se sigue a.s. que

$$A \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} |C(d)|^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{L}} \frac{1}{t_0} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}(N)} \overline{C}(d') C(d) \widehat{g}(d' - \lambda - l) \widehat{\overline{g}}(d - \lambda - l) \leq B \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} |C(d)|^2.$$

O equivalentemente, dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $C(d) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_d^2)$  variables aleatorias independientes,  $d \in \mathbb{D}(N)$ , si definimos el vector aleatorio finito  $Z(d) = C(d) \mathbf{1}_{\mathbb{D}(N)}(d)$  se cumple que

$$t_0 A \|Z\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \langle \widetilde{G}(\lambda) Z, Z \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq t_0 B \|Z\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2.$$

Recordando el Lema 2.4.4 con  $p_Z$  la densidad de probabilidad Gaussiana de  $Z$ , se obtiene que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{D}(N)}$ :

$$t_0 A \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \langle \widetilde{G}(\lambda) x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq t_0 B \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2.$$

Recordando que  $\widetilde{G}(\lambda) = J(\lambda) J^*(\lambda)$ , y ya que  $N$  es arbitrario, esto es equivalente a:

$$t_0 A \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \|J^*(\lambda) x\|_{\ell^2(\mathbb{L})}^2 \leq t_0 B \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2, \quad (4.13)$$

para todas las sucesiones finitas  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$ . Por lo tanto,  $J^*(\lambda)$  está acotado con inversa continua, ya que el subconjunto de sucesiones finitas es denso en  $\ell^2(\mathbb{D})$ . Entonces, (4.13) es válido para cualquier  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$ . Y la afirmación ahora se demuestra recordando el Teorema 4.1.3 (véase (4.4)). ■

Para procesos aleatorios estacionarios Gaussianos con espectro continuo tenemos la siguiente caracterización de las desigualdades (4.8).

**Lema 4.2.5.** *Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de Gabor. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que*

$$t_0 A \leq \sum_{l \in \mathbb{L}} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 \leq t_0 B \quad (4.14)$$

*para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

ii) *Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que las desigualdades (4.8) se cumplen para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  con espectro continuo.*

*Demostración.* Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con espectro continuo. Entonces, recordando la ecuación (4.7), para cada  $l \in \mathbb{L}$  la sucesión de coeficientes aleatorios  $(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  de la ecuación (4.6), también es estacionaria y Gaussiana. Observando que esta sucesión tiene espectro continuo (para una prueba que incluye esta afirmación, véase el Lema 4.2.7), entonces por el Teorema 2.3.2,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)t_0} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, g_{k,l} \rangle|^2 = \mathbf{E} |\langle X, g_{0,l} \rangle|^2 = \frac{1}{t_0} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu(\lambda) \quad a.s. \quad (4.15)$$

Un argumento similar se aplica al proceso original  $X$ :

$$\|X\|_{B^2(\mathbb{R})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \mathbf{E}|X(0)|^2 = \mu(\mathbb{R}) \quad a.s. \quad (4.16)$$

Ahora, establecemos  $\Omega_c$  como el subconjunto donde se cumple la ecuación (4.16) y, para cada  $l \in \mathbb{L}$ ,  $\Omega_l$  como el subconjunto donde se cumple la ecuación (4.15). Claramente, si

$$\tilde{\Omega} := \bigcap_{l \in \mathbb{L}} (\Omega_c \cap \Omega_l)$$

entonces  $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1$  y en consecuencia la ecuación (4.16) es verdadera sobre  $\tilde{\Omega}$  así como

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)t_0} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, g_{k,l} \rangle|^2 = \frac{1}{t_0} \sum_{l \in \mathbb{L}} \mathbf{E} |\langle X, g_{0,l} \rangle|^2 = \frac{1}{t_0} \int_{\mathbb{R}} \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu(\lambda). \quad (4.17)$$

Ahora, podemos demostrar ambas implicaciones.

*i)  $\Rightarrow$  ii)* Si las desigualdades (4.14) son verdaderas, como las ecuaciones (4.16) y (4.17) se cumplen sobre  $\tilde{\Omega}$  es inmediato que las desigualdades (4.8) se cumplen a.s. .  
*ii)  $\Rightarrow$  i)* Sea  $U \subset \mathbb{R}$  cualquier subconjunto Boreliano con medida de Lebesgue finita. Definimos el proceso

$$X(t) := \int_U e^{i\lambda t} d\Phi(t),$$

donde se elige  $\Phi$  como la medida aleatoria de Wiener (Ejemplo 2.2.6). Suponiendo que se cumplen las desigualdades (4.8) y observando que en este caso  $\mu$  es la restricción de la medida de Lebesgue  $m_{\mathbb{R}}$  sobre  $U$ , la ecuación (4.16) combinada con (4.17) implica que:

$$A m_{\mathbb{R}}(U) \leq \int_U \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2 d\lambda \leq B m_{\mathbb{R}}(U),$$

y entonces las desigualdades (4.14) se cumplen  $m_{\mathbb{R}}$ -a.e. pero, por la condición de continuidad (C2) de (4.5), se prueba la afirmación para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ . ■

*Observación 4.2.6.* Vale la pena señalar que las desigualdades (4.14) son una condición de estabilidad en la entrada (0,0) de la matriz Gramiana dual ya que

$$\tilde{G}(\lambda)(0,0) = \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2.$$

Desigualdades como las de (4.14) se utilizan ampliamente en la literatura de los marcos de Gabor. Por ejemplo, en [Ch16, Proposition 11.3.4] o [He11, Theorem 11.6] (véase Subsección 1.6.3) se demuestra que (4.14) es una condición necesaria para que un sistema de Gabor sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , lo que ahora queda claro por el Teorema 3.4.7. ◇

Recordemos que dado  $l \in \mathbb{L}$  la sucesión de coeficientes aleatorios  $\langle X, g_{k,l} \rangle$  también es estacionaria. Entonces tenemos:

**Lema 4.2.7.** *Para cada  $l \in \mathbb{L}$ , definimos  $Z^l(k) = \langle X, g_{k,l} \rangle$ , con  $k \in \mathbb{K}$ . Entonces:*

$$Z_c^l(k) = \langle X_c, g_{k,l} \rangle \quad y \quad Z_d^l(k) = \langle X_d, g_{k,l} \rangle.$$

*Demostración.* El resultado se desprende de los siguientes hechos. En primer lugar, observemos que para cada  $l \in \mathbb{L}$ :

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \langle X_c, g_{k,l} \rangle + \langle X_d, g_{k,l} \rangle.$$

Sean  $\gamma$  y  $\rho$  las medidas espectrales de  $(\langle X_c, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  y  $(\langle X_d, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  respectivamente. Recordemos que  $\gamma$  es la única medida tal que

$$\mathbf{E}(\langle X_c, g_{k,l} \rangle \overline{\langle X_c, g_{0,l} \rangle}) = \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda k} d\gamma(\lambda),$$

para todo  $k \in \mathbb{K}$ . Pero si  $\mu_c$  es la parte continua de  $\mu$ , la medida espectral de  $X$ , un cálculo directo muestra que,

$$\mathbf{E}(\langle X_c, g_{k,l} \rangle \overline{\langle X_c, g_{0,l} \rangle}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu_c(\lambda) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}+d} e^{i\lambda k} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu_c(\lambda).$$

Por lo tanto  $\gamma$  viene dada por:

$$\gamma(A) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \int_{A+d} |\widehat{g}(\lambda - l)|^2 d\mu_c(\lambda),$$

para todo  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$ . Entonces, en particular, para cualquier  $\lambda_0 \in \mathbb{T}$  y eligiendo  $A = \{\lambda_0\}$ ,  $\gamma(\{\lambda_0\}) = 0$ .

Por otra parte, la parte discreta de  $\mu$  puede escribirse como  $\mu_d = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \delta_\lambda$ , con  $\Lambda$  un subconjunto a lo sumo numerable de  $\mathbb{R}$ ,  $\delta_\lambda$  la medida puntual de masa concentrada en  $\lambda$ , y  $c_\lambda > 0$ . Por lo tanto, un argumento similar al utilizado para obtener  $\gamma$ , muestra que si  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T})$ , entonces

$$\rho(A) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_A |\widehat{g}(\xi - l)|^2 c_{\lambda+d} d\delta_{\lambda+d}(\xi),$$

la cual es claramente discreta. ■

Finalmente llegamos a la caracterización de marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  mediante procesos aleatorios estacionarios Gaussianos arbitrarios.

**Teorema 4.2.8.** *Sea  $\mathcal{G}$  un sistema de Gabor. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{G}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ii) Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que las desigualdades (4.8) se cumplen para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ .

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii) Observando que  $X$  se puede descomponer en dos procesos aleatorios ortogonales (o, de hecho, independientes)  $X_c(t)$  y  $X_d(t)$  tales que  $X(t) = X_c(t) + X_d(t)$  con medidas espectrales continua y discreta respectivamente, obtenemos que:

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \langle X_c, g_{k,l} \rangle + \langle X_d, g_{k,l} \rangle.$$

Por los Lemas 2.4.3 a) y 4.2.7 entonces, con probabilidad uno, para cada  $l \in \mathbb{L}$ :

$$\|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|(\langle X_c, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \|(\langle X_d, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2,$$

y por lo tanto, dado que  $\mathbb{L}$  es numerable, con probabilidad uno

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X_c, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \sum_{l \in \mathbb{L}} \|(\langle X_d, g_{k,l} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2. \quad (4.18)$$

De manera similar, por los Lemas 2.4.3 b) y 4.2.7,

$$\|X\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|X_c\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \|X_d\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \quad \text{a.s.} \quad (4.19)$$

Si  $\mathcal{G}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces, por el Lema 4.2.4, el resultado es válido para  $X_d$ . Además, por el Teorema 4.1.3, tomando el vector canónico  $x = e_0$ ,  $e_0(d) = \mathbf{1}_{\{0\}}(d)$  en la ecuación (4.3), obtenemos

$$t_0 A \leq \langle \tilde{G}(\lambda) e_0, e_0 \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2 \leq t_0 B,$$

con  $\|e_0\|_{\ell^2(\mathbb{D})} = 1$  y entonces las desigualdades (4.14) son válidas. Por lo tanto, por el Lema 4.2.5, las desigualdades (4.8) también son válidas para  $X_c$ .

Finalmente, como la afirmación es válida para  $X_c$  y para  $X_d$ , la conclusión deseada se deduce recordando las ecuaciones (4.18) y (4.19).

ii)  $\Rightarrow$  i) Esta es una consecuencia directa del Lema 4.2.4 ya que las desigualdades (4.8) en particular son válidas para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano con medida espectral discreta  $\mu$  que satisface  $\mu(\{0\}) = 0$ . ■

*Observación 4.2.9.* Para determinar si  $\mathcal{G}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  es suficiente comprobar las desigualdades (4.8) para procesos aleatorios estacionarios Gaussianos con medida espectral discreta  $\mu$ . Este es el conjunto “más pequeño” obtenido en este trabajo (no sabemos si es el más pequeño en general) para que esto ocurra. ◇

### 4.3. Sobre $\overline{\text{gen}}\{\langle X, g_{k,l} \rangle : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\} \subset H(X)$

Los resultados obtenidos en esta sección forman parte de nuestra publicación [CeMe22].

En la Sección 4.2 caracterizamos los marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  (o marcos  $AP$  de Gabor) en términos de estimaciones de la norma  $AP(\mathbb{R})$  de procesos aleatorios estacionarios Gaussianos. A diferencia de los marcos de Hilbert habituales, estas estimaciones no dan ninguna información sobre un posible procedimiento de reconstrucción a partir de la sucesión de los coeficientes aleatorios de marco. Además, desde la perspectiva de la no separabilidad de los espacios  $B^2(\mathbb{R})$ , una respuesta negativa a esta pregunta parece razonable. Sin embargo, dado un proceso aleatorio  $X$ , podemos solucionar esto si restringimos nuestro problema a representar  $H(X)$  mediante los coeficientes aleatorios de  $X$  con respecto a un sistema de Gabor. El problema de teoría de la información de representar un proceso aleatorio estocásticamente continuo utilizando coeficientes obtenidos a partir de mediciones con un conjunto completo dado de vectores de un espacio de Hilbert de funciones, fué tratado por primera vez, en una forma general, en [CaMa71, CaMa73]. Esta es una *formulación*

*débil* del problema de muestreo clásico. En particular, si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio (o similar), se pueden obtener algunas condiciones elegantes en el dominio de la frecuencia (véase por ejemplo [Lee78]).

De acuerdo con el isomorfismo de Kolmogorov (2.4) para encontrar condiciones bajo las cuales los coeficientes aleatorios

$$\langle X, g_{k,l} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k} \bar{g}(\lambda - l) d\Phi(\lambda)$$

verifican que

$$\overline{\text{span}}\{\langle X, g_{k,l} \rangle : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\} = H(X),$$

es equivalente a buscar condiciones para que  $\widehat{\mathcal{G}} \subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$  sea denso en  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ . Esta es una formulación más débil del Teorema de Muestreo de Shannon en el contexto de los procesos aleatorios estudiados inicialmente por S. P. Lloyd [Llo59]. Aunque no podría ser posible encontrar una expansión de la serie de reconstrucción en términos de las muestras, estas aún podrían llevar, en cierto sentido, toda la información de  $X$ .

Consideramos nuevamente formalmente la matriz infinita  $\widetilde{G}(\lambda)$  como en la ecuación (4.2). Adicionalmente introducimos el siguiente recurso auxiliar: si  $\mu$  es una medida de Borel finita y  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{R})$  definimos una nueva medida  $\nu$  por

$$\nu(A) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \mu(A + d). \quad (4.20)$$

Es inmediato que  $\nu$  dada por (4.20) es una medida de Borel  $\sigma$ -finita, que  $\nu(\mathbb{T}) = \mu(\mathbb{R}) < \infty$  y que es *periódica* en el sentido de:

$$\nu(A + d) = \nu(A) \quad \text{para cada } A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}), \text{ para todo } d \in \mathbb{D}.$$

Es claro que, para cada  $d \in \mathbb{D}$ , la medida  $\mu_d$ , dada por  $\mu_d(A) = \mu(A + d)$ , es absolutamente continua con respecto a  $\nu$ . Por lo tanto, existe su derivada de Radon-Nykodim  $w_d$ , es decir,  $d\mu_d = w_d d\nu$  con  $w_d \in L^1(\mathbb{R}, \nu)$  (véase por ejemplo [Fo99, p. 90]). Además, si denotamos por  $w := w_0$  entonces es bastante sencillo comprobar que  $w_d = w(\cdot + d)$   $\nu$ -a.e..

**Definición 4.3.1.** Definimos las matrices infinitas  $W(\lambda)$ ,  $\widetilde{G}_N(\lambda)$  y  $D(\lambda)$  para cada  $d, d' \in \mathbb{D}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  y  $\lambda \in \mathbb{T}$  como:

$$\begin{aligned} W(\lambda)(d, d') &= w(\lambda + d) \delta(d, d'), \\ \widetilde{G}_N(\lambda)(d, d') &= \widetilde{G}(\lambda)(d, d') \mathbf{1}_{N\mathbb{T}^2}(d, d'), \\ D(\lambda) &= W(\lambda) \widetilde{G}(\lambda) W(\lambda). \end{aligned}$$

Una condición necesaria para que  $\widehat{\mathcal{G}}$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  es que  $\widetilde{G}(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$  defina un operador acotado positivo a.e.. Sin embargo, como en esta sección descartaremos inicialmente la condición de que  $\widehat{\mathcal{G}}$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  (y también la condición (4.5)), aquí sólo impondremos la siguiente condición: Existe una función medible  $M$  finita  $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$  tal que para todo  $N \in \mathbb{N}$

$$\|\widetilde{G}_N(\lambda)\| = \sup_{\|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq 1} \sum_{l \in \mathbb{L}} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}(N)} \widehat{g}(\lambda - l + d) x_d \right|^2 \leq M(\lambda). \quad (4.21)$$

Observamos que la condición (4.21) es equivalente a que la matriz  $\tilde{G}(\lambda)$  defina un operador acotado  $\tilde{G}(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$   $\nu$ -a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Además,  $\tilde{G}(\lambda)$  es positivo en  $\mathbb{T}$ . Antes de presentar las propiedades principales de  $D(\lambda)$  y  $W(\lambda)$ , necesitamos el siguiente resultado auxiliar cuya demostración fué omitida en nuestro trabajo original [CeMe22].

**Lema 4.3.2.** *Sean  $f$  una función medible de Borel sobre  $\mathbb{R}$  y  $\nu$  definida como en (4.20).*

a) *Si  $f$  es no negativa  $\mu$ -a.e. en  $\mathbb{R}$  o  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$  entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \int_{\mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\lambda + d) w(\lambda + d) d\nu(\lambda).$$

b)  $\sum_{d \in \mathbb{D}} w_d = 1$   $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ .

c) *Si  $f$  es no negativa  $\mu$ -a.e. en  $\mathbb{R}$  entonces:  $f = 0$   $\mu$ -a.e. en  $\mathbb{R}$  si y solo si*

$$\sum_{d \in \mathbb{D}} f(\cdot + d) w(\cdot + d) = 0$$

$\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ .

*Demostración.* a) El resultado se sigue de considerar  $\mathbb{R} = \bigcup_{d \in \mathbb{D}} \mathbb{T} + d$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f d\mu &= \sum_{d \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}+d} f(\lambda) d\mu(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\lambda + d) d\mu(\lambda + d) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\lambda + d) w(\lambda + d) d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

b) Sea  $B \subseteq \mathbb{T}$ ,  $A = \bigcup_{d \in \mathbb{D}} B + d$  y  $f = \mathbf{1}_A$ . Así pues, por (4.20)

$$\int_B \sum_{d \in \mathbb{D}} w_d d\nu = \nu(B).$$

c) Resulta claro usando el ítem previo. ■

La matriz  $D(\lambda)$  tiene propiedades análogas a las de  $\tilde{G}(\lambda)$ , como ser positiva, es decir, acotada y tal que  $\langle D(\lambda)x, x \rangle \geq 0$  para todo  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$ . Por el contrario de  $\tilde{G}(\lambda)$ ,  $D(\lambda)$  es siempre un operador compacto.

**Lema 4.3.3.** *Sean  $\tilde{G}_N(\lambda)$ ,  $W(\lambda)$  y  $D(\lambda)$  los operadores introducidos en la Definición 4.3.1, y sea  $\tilde{G}(\lambda)$  satisfaciendo la condición (4.21), entonces:*

a) *La matriz  $D(\lambda)$  define  $[\nu]$ -a.e en  $\lambda \in \mathbb{T}$  un operador compacto positivo  $D(\lambda) : \ell^2(\mathbb{D}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{D})$  tal que  $\|D(\lambda)\| \leq M(\lambda)$ .*

- b) Cada componente de  $D(\lambda)$ ,  $D(\lambda)(d, d')$  con  $d, d' \in \mathbb{D}$ , define una función medible de Borel en  $\lambda$  y existe una base ortonormal de  $\ell^2(\mathbb{D})$ , formada por autovectores de  $D(\lambda)$ ,  $(v_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$   $v_n(\lambda)$  tiene componentes medibles en función de  $\lambda \in \mathbb{T}$ .
- c) Para cada sucesión  $x(\lambda) \in \ell^2(\mathbb{D})$  con componentes medibles, ambas proyecciones ortogonales  $P_{\text{Nu}(D(\lambda))}x(\lambda)$  y  $P_{\overline{\mathcal{R}(D(\lambda))}}x(\lambda)$ , tienen componentes medibles.

*Observación 4.3.4.* En b) y c) estamos considerando sucesiones  $(x(\lambda)(d))_{d \in \mathbb{D}} \in \ell^2(\mathbb{D})$  tales que  $\lambda \mapsto x(\lambda)(d)$  es medible para cada  $d \in \mathbb{D}$ . Para abreviar escribiremos indistintamente  $P_{\text{Nu}(D(\lambda))}x(\lambda) = (P_{\text{Nu}(D)}x)(\lambda)$  o incluso, si el contexto lo deja claro,  $P_{\text{Nu}(D)}x$ , etc. sin mención explícita de la variable  $\lambda$ .  $\diamond$

*Demostración.* a) De la ecuación (4.21),  $\tilde{G}(\lambda)$  es un operador continuo  $\nu$ -a.e. sobre  $\mathbb{T}$ . Teniendo en cuenta que  $D(\lambda)$  se define por el producto de matrices, o composición de operadores, dado por  $D(\lambda) = W(\lambda)\tilde{G}(\lambda)W(\lambda)$ , será suficiente comprobar que  $W(\lambda)$  es un operador de *Hilbert-Schmidt* (Definición 1.3.31). De hecho, para casi todos los  $\lambda$ :

$$\sum_{d, d' \in \mathbb{D}} |W(\lambda)(d, d')|^2 = \sum_{d, d' \in \mathbb{D}} |w(\lambda + d)|^2 \delta_{d, d'} = \sum_{d \in \mathbb{D}} |w(\lambda + d)|^2 \leq \left( \sum_{d \in \mathbb{D}} w(\lambda + d) \right)^2 \leq 1.$$

En particular esto implica que  $\|W(\lambda)\| \leq 1$  y así  $\|D(\lambda)\| \leq M(\lambda)$   $\nu$ -a.e..

Finalmente, tomemos  $\lambda \in \mathbb{T}$  tal que (4.21) se cumple. Por lo tanto

$$\langle D(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = \langle \tilde{G}(\lambda)W(\lambda)x, W(\lambda)x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \geq 0,$$

ya que  $\tilde{G}(\lambda)$  es positivo para tal  $\lambda$ .

b) Nuevamente para cualquier  $\lambda$  para el cual se cumple la ecuación (4.21), si  $d \in \mathbb{D}$  podemos considerar el vector canónico  $e_d$  y obtener:

$$\begin{aligned} D(\lambda)(d, d) &= \langle W(\lambda)\tilde{G}(\lambda)W(\lambda)e_d, e_d \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle w(\lambda + d)\tilde{G}(\lambda)e_d, w(\lambda + d)e_d \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l + d)|^2 w^2(\lambda + d) \\ &\leq M(\lambda), \end{aligned}$$

ya que  $0 \leq w_d \leq 1$  a.e. por el Lema 4.3.2 b). Por otra parte, dado que  $D(\lambda)$  es positivo, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene para cualquier  $d, d' \in \mathbb{D}$ :

$$\begin{aligned} |D(\lambda)(d, d')|^2 &= |\langle D(\lambda)e_d, e_{d'} \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})}|^2 \\ &\leq \langle D(\lambda)e_d, e_d \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \langle D(\lambda)e_{d'}, e_{d'} \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= D(\lambda)(d, d) D(\lambda)(d', d') \\ &\leq (M(\lambda))^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, los coeficientes de  $D(\lambda)$  son el límite de las series medibles y convergentes. Por el punto anterior a),  $D(\lambda)$  es compacto y positivo para casi todos los  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Entonces, para cada  $\lambda$  donde  $D(\lambda)$  es compacto y positivo, y por lo tanto autoadjunto, también tiene

una base ortonormal de autovectores  $(v_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$  y un conjunto de autovalores no negativos  $(\sigma_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$  tales que  $D(\lambda)v_n(\lambda) = \sigma_n(\lambda)v_n(\lambda)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  (Teorema 1.3.10). Definimos  $D_N(\lambda) = W(\lambda)\tilde{G}_N(\lambda)W(\lambda)$  para cada  $N \in \mathbb{N}$ . Ya que  $\|W(\lambda)\| \leq 1$ , entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|D_N(\lambda) - D(\lambda)\| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \|\tilde{G}_N(\lambda) - \tilde{G}(\lambda)\| = 0 \quad \nu\text{-a.e.}.$$

De hecho,  $D_N(\lambda)$  es una matriz con un número finito de entradas no nulas. Además, por a) cada coeficiente de  $D_N(\lambda)$  resulta medible. Ahora bien, como  $D_N(\lambda)$  es de rango finito y Hermitiano, resulta diagonalizable unitariamente, y en una forma medible además (por ejemplo apelando a la Proposición 1.3.13). Sea  $\lambda \in \mathbb{T}$  tal que  $D(\lambda)$  es diagonalizable. Recordemos que para cada autovalor  $\sigma_n(\lambda)$  de  $D(\lambda)$  con autovector  $v_n(\lambda)$ , existen sucesiones de autovalores  $(\sigma_{nN}(\lambda))_{N \in \mathbb{N}}$  y autovectores  $(v_{nN}(\lambda))_{N \in \mathbb{N}}$ ,

$$D_N(\lambda)v_{nN}(\lambda) = \sigma_{nN}(\lambda)v_{nN}(\lambda), \quad N \in \mathbb{N},$$

de tal manera que (véase Teorema 1.3.11 con  $D_N := T_N$  para  $N \in \mathbb{N}$ ):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{nN}(\lambda) = \sigma_n(\lambda) \quad \text{y} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|v_{nN}(\lambda) - v_n(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0,$$

entonces para cada  $d \in \mathbb{D}$ :

$$\|v_{nN}(\lambda) - v_n(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})} \geq |v_{nN}(\lambda)(d) - v_n(\lambda)(d)|.$$

Por lo tanto, cada componente de  $v_n$  es medible ya que es el límite de una sucesión de funciones medibles.

c) Es una consecuencia directa de b) ya que existe una base ortonormal  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\overline{\mathcal{R}(D(\lambda))}$  tal que cada componente de  $v_n$  es medible. Además, como cada  $\langle v_n, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})}$  es una función medible de la variable  $\lambda$ , para cada  $\lambda$  donde  $D$  es compacto tenemos que

$$(P_{\overline{\mathcal{R}(D)}}x)(\lambda) = \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle v_n, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} v_n \right)(\lambda).$$

Finalmente, juntando todo, se sigue el resultado mediante un argumento similar a la prueba de la afirmación b). ■

Para  $x = x(\lambda) \in \mathbb{C}^{\mathbb{D}}$ , y notando  $W = W(\lambda)$ , definimos la siguiente norma (funcional) ponderada en  $\ell_W^2(\mathbb{D})$  mediante

$$\|x\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{d \in \mathbb{D}} |x(d)|^2 w(\cdot + d).$$

Algunas propiedades agradables y sencillas de  $D(\lambda)$  son:

$$\langle D(\lambda)x, y \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq M(\lambda) \|x\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} \|y\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})}$$

y

$$\|D(\lambda)x\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} \leq M(\lambda) \|x\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} \quad \nu\text{-a.e. en } \mathbb{T}.$$

En este punto introducimos el siguiente dispositivo. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  una función medible. Definimos las sucesiones funcionales (en [RS95] se usa la notación  $f_{|\lambda}$ )

$$F(\lambda) = (f(\lambda + d))_{d \in \mathbb{D}}, \quad \text{para cada } \lambda \in \mathbb{T}.$$

Si  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$  entonces  $\langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})}$  está bien definido  $\nu$ -a.e.. De hecho, por el Lema 4.3.2

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}^2 = \int_{\mathbb{T}} \|F(\lambda)\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})}^2 d\nu(\lambda) < \infty$$

de donde  $\|F(\lambda)\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} < \infty$   $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ , y por lo tanto tenemos

$$\langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq M(\lambda) \|F(\lambda)\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} \|F(\lambda)\|_{\ell_W^2(\mathbb{D})} < \infty.$$

Ahora, se puede demostrar el siguiente.

**Lema 4.3.5.** Sean  $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g}_{k,l} : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$  un sistema de Gabor y  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

$$i) \langle f, \widehat{g}_{k,l} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} = 0 \text{ para todos } k \in \mathbb{K} \text{ y } l \in \mathbb{L}.$$

$$ii) \langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0 \text{ } \nu\text{-a.e. en } \mathbb{T}.$$

*Demostración.*  $i) \Leftrightarrow ii)$  Por el Lema 4.3.2,

$$\begin{aligned} \langle f, \widehat{g}_{k,l} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \overline{\widehat{g}}(\lambda - l) e^{ik\lambda} d\mu(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{T}} e^{ik\lambda} \left( \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\lambda + d) \overline{\widehat{g}}(\lambda - l + d) w(\lambda + d) \right) d\nu(\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la unicidad de la transformada de Fourier de medidas (véase por ejemplo [Kat04, p. 36]) aplicado a las medidas

$$\left( \sum_{d \in \mathbb{D}} f(\lambda + d) \overline{\widehat{g}}(\lambda - l + d) w(\lambda + d) \right) d\nu(\lambda), \quad l \in \mathbb{L},$$

tenemos que  $\langle f, \widehat{g}_{k,l} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} = 0$  para todos  $k \in \mathbb{K}$  y  $l \in \mathbb{L}$  si y solo si para cada  $l \in \mathbb{L}$

$$\sum_{d \in \mathbb{D}} \overline{\widehat{g}}(\lambda - l + d) f(\lambda + d) w(\lambda + d) = 0 \quad \nu\text{-a.e. en } \mathbb{T}.$$

Pero esto es cierto si y solo si

$$\sum_{l \in \mathbb{L}} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}} \overline{\widehat{g}}(\lambda - l + d) f(\lambda + d) w(\lambda + d) \right|^2 = \langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0$$

$\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ . ■

Para a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  definimos

$$\mathbb{S}(\lambda) = \overline{\text{gen}}\{a_d(\lambda), d \in \mathbb{D}\},$$

donde

$$a_d(\lambda) = e_d \mathbf{1}_{A_d}(\lambda) \quad \text{y} \quad A_d = \{\lambda \in \mathbb{T} : w(\lambda + d) > 0\}.$$

De las definiciones anteriores de  $W(\lambda)$  y  $D(\lambda) = W(\lambda) \widetilde{G}(\lambda) W(\lambda)$  se deduce inmediatamente que  $\mathbb{S}(\lambda) = \overline{\mathcal{R}(W(\lambda))}$  y que  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)} : \mathbb{S}(\lambda) \rightarrow \mathbb{S}(\lambda)$ .

*Observación 4.3.6.* Nótese que para cualquier  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$  la proyección ortogonal sobre  $\mathbb{S}(\lambda)$  está dada por

$$P_{\mathbb{S}(\lambda)}x = \sum_{d \in \mathbb{D}} \langle a_d(\lambda), x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} a_d(\lambda) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \langle e_d, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \mathbf{1}_{A_d}(\lambda) e_d = \sum_{d \in \mathbb{D}} x(d) \mathbf{1}_{A_d}(\lambda) e_d.$$

Es fácil verificar que  $P_{\mathbb{S}(\lambda)}e_d = a_d(\lambda)$  y si  $x(\lambda) = (x_d(\lambda))_{d \in \mathbb{D}} \in \ell^2(\mathbb{D})$  tiene componentes medibles (como funciones de  $\lambda$ ) entonces cada componente de  $P_{\mathbb{S}(\lambda)}x(\lambda)$  también es medible. Además,

$$\|P_{\mathbb{S}(\lambda)}x\|_{\ell^2_{w(\cdot)}(\mathbb{D})}^2 = \sum_{d \in \mathbb{D}} |x(d)|^2 w(\cdot + d) \quad \text{y} \quad \|P_{\mathbb{S}(\lambda)}x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{d \in \mathbb{D}} |x(d)|^2 \mathbf{1}_{A_d}.$$

◇

Con esto en mente podemos probar uno de los principales resultados de esta sección.

**Teorema 4.3.7.** *Sea  $\widehat{\mathcal{G}} = \{\widehat{g}_{k,l} : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\} \subset L^2(\mathbb{R}, \mu)$  un sistema de Gabor. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\widehat{\mathcal{G}}$  es completo en  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ .
- ii)  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}$  es definida positiva  $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ .

*Demostración.* ii)  $\Rightarrow$  i) Sea  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$  tal que  $\langle f, \widehat{g}_{k,l} \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} = 0$  para todos  $k \in \mathbb{K}$  y  $l \in \mathbb{L}$ . Por el Lema 4.3.5, esto es cierto si y solo si  $\langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0$   $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ . Pero

$$\begin{aligned} \langle D(\lambda)P_{\mathbb{S}(\lambda)}F(\lambda), P_{\mathbb{S}(\lambda)}F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} &= \langle P_{\mathbb{S}(\lambda)}D(\lambda)P_{\mathbb{S}(\lambda)}F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De la hipótesis, y recordando que por el Lema 4.3.2 b) es  $w_d \leq 1$   $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$ , esto significa que

$$0 = \|(P_{\mathbb{S}}F)(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 = \sum_{d \in \mathbb{D}} |f(\lambda + d)|^2 \mathbf{1}_{A_d}(\lambda) \geq \sum_{d \in \mathbb{D}} |f(\lambda + d)|^2 w(\lambda + d)$$

$\nu$ -a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$ . O equivalentemente, por el Lema 4.3.2,  $f = 0$   $\mu$ -a.e. en  $\mathbb{R}$ .

i)  $\Rightarrow$  ii) Por el Lema 4.3.3 a),  $D(\lambda)$  es positivo  $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$  y entonces lo mismo se cumple para la restricción  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}$ , es decir  $\langle D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}(\lambda)$ . Por lo tanto, bastará con demostrar que  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}$  es inyectiva  $\nu$ -a.e. en  $\mathbb{T}$  para probar que  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}$  es definida positiva. Por el contrario, supongamos que  $\nu(C) > 0$  donde

$$C = \{\lambda \in \mathbb{T} : \text{Nu}(D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}) \neq \{0\}\}.$$

Notemos que  $P_{\text{Nu}(D|_{\mathbb{S}})} = P_{\mathbb{S}}P_{\text{Nu}(D)}$  (porque  $\text{Nu}(D|_{\mathbb{S}}) = \text{Nu}(D) \cap \mathbb{S}$ ), por lo tanto podemos escribir:

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{d \in \mathbb{D}} \left\{ \lambda \in \mathbb{T} : \|(P_{\text{Nu}(D|_{\mathbb{S}})}a_d)(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})} > 0 \right\} \\ &= \bigcup_{d \in \mathbb{D}} \left\{ \lambda \in \mathbb{T} : \|(P_{\mathbb{S}}P_{\text{Nu}(D)}a_d)(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})} > 0 \right\} \\ &= \bigcup_{d \in \mathbb{D}} C_d. \end{aligned}$$

Así, por la Observación 4.3.6 junto con el Lema 4.3.3, para cada  $d \in \mathbb{D}$ , tenemos que  $\|P_{\mathbb{S}}P_{\text{Nu}(D)}a_d\|_{\ell^2(\mathbb{D})}$  es medible, lo cual justifica que cada  $C_d$  y  $C$  son conjuntos medibles. También, por esto, si  $\nu(C) > 0$  entonces existe  $d_0 \in \mathbb{D}$  tal que  $\nu(C_{d_0}) > 0$ . Definamos la sucesión

$$x(\lambda) = (P_{\mathbb{S}}P_{\text{Nu}(D)}a_{d_0})(\lambda), \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{T}$$

y la función medible  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$f(\lambda) = \sum_{d \in \mathbb{D}} x_d(\lambda - d) \mathbf{1}_{\mathbb{T}+d}(\lambda).$$

Entonces  $f(\lambda + d) = x_d(\lambda)$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{T}$  y  $d \in \mathbb{D}$ . Por lo tanto  $F(\lambda) = x(\lambda)$  y

$$\langle D(\lambda)F(\lambda), F(\lambda) \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = \langle D(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0$$

por la construcción de  $x$ . Por otra parte, para cada  $\lambda \in C_{d_0}$  tenemos, por la definición de  $\mathbb{S}(\lambda)$ ,

$$\sum_{d \in \mathbb{D}} |x_d(\lambda)|^2 \mathbf{1}_{A_d}(\lambda) = \|x(\lambda)\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 > 0.$$

Por lo tanto, existen  $d_1 \in \mathbb{D}$  y un conjunto medible  $\tilde{C} \subseteq C_{d_0} \cap A_{d_1}$  tales que  $\nu(\tilde{C}) > 0$  y  $x_{d_1}(\lambda) \neq 0$  para cada  $\lambda \in \tilde{C}$ . Finalmente,

$$\|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})} = \|P_{\mathbb{S}}P_{\text{Nu}(D)}a_{d_0}\|_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq \|a_{d_0}\|_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq 1 \quad \nu\text{-a.e. en } \mathbb{T}$$

y por lo tanto  $|f| \leq 1$   $\mu$ -a.e. en  $\mathbb{R}$ , de donde  $f \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ . Pero entonces por hipótesis resulta que  $f = 0$ , lo cual es una contradicción. ■

*Observación 4.3.8.* El Lema 4.3.5 y el Teorema 4.3.7 están inspirados en el trabajo de [RS95]. Compárese con las Proposiciones 3.4.5 y 3.4.3. Para más detalles, véase también [RS95, Sección 3.4]. ◇

**Ejemplo 4.3.9.** Este ejemplo está motivado por [WZ94].

Sea  $\widehat{\mathcal{G}} \subset L^2(\mathbb{R}, \mu) \cap L^2(\mathbb{R})$  un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que se cumple (C2) de (4.5). Comprobemos que  $\widehat{\mathcal{G}}$  es completo en  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ .

Sea  $x$  una sucesión en  $\mathbb{S}(\lambda)$  tal que  $\langle D(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = 0$ . Como  $D(\lambda) = W(\lambda)\tilde{G}(\lambda)W(\lambda)$  y por la ecuación (4.3), que ahora es válida para cada  $\lambda$  debido a la condición de continuidad (C2), obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle D(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} = \langle W(\lambda)\tilde{G}(\lambda)W(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &= \langle \tilde{G}(\lambda)W(\lambda)x, W(\lambda)x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \\ &\geq t_0 B \|W(\lambda)x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \end{aligned}$$

de donde  $W(\lambda)x = 0$  y por lo tanto  $x = 0$ , ya que  $W(\lambda)$  es inyectiva sobre  $\mathbb{S}(\lambda)$ .

La condición de continuidad solo se introduce para extender la validez a.e.  $\lambda \in \mathbb{T}$  de una cierta propiedad a la validez de esa propiedad ahora para cada  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Sea

$$E = \{\lambda \in \mathbb{T} : \langle \tilde{G}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \geq t_0 B \|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2\}.$$

El mismo ejemplo funciona reemplazando la condición de continuidad de (4.5) con el requisito más débil  $\nu(E^c) = 0$ .

La condición de ser un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  no es necesaria. El Teorema 4.3.7 se cumple bajo supuestos más débiles, como lo muestra el siguiente ejemplo más abajo. ♦

**Ejemplo 4.3.10.** Sean  $I = [0, \frac{\pi}{t_0})$  y  $\mu(A) = m_{\mathbb{R}}(A \cap I)$  donde  $m_{\mathbb{R}}$  es la medida de Lebesgue. Tomamos  $\widehat{g} = \mathbf{1}_I$ ,  $\mathbb{L} = \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{K} = t_0\mathbb{Z}$ . En este caso  $\widehat{\mathcal{G}}$  no es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ . De hecho,  $\widehat{\mathcal{G}}$  no es completo en  $L^2(\mathbb{R})$  ya que  $\langle f, g_{k,l} \rangle = 0$  para todos los  $k \in \mathbb{K}$  y  $l \in \mathbb{L}$  y para toda  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\widehat{f} = 0$  a.e. en  $I^c$ . Sin embargo,  $D(\lambda)|_{\mathbb{S}(\lambda)}$  es claramente definida positiva  $\nu$ -a.e. para  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Dado que  $\nu(A) = m_{\mathbb{R}}(A \cap I)$  para  $A \subset \mathbb{T}$  y por lo tanto  $\widetilde{G}(\lambda) = e_0^T e_0$  y  $\mathbb{S}(\lambda) = \text{gen}\{e_0\}$  si  $\lambda \in I$ .  $\blacklozenge$

## 4.4. Reconstrucción de $X$

Los resultados obtenidos en esta sección forman parte de nuestra publicación [CeMe22].

Sea  $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}}$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con una representación dada por (2.5). Hemos visto que si  $\widehat{\mathcal{G}}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces el espacio lineal generado por el conjunto numerable de coeficientes aleatorios  $\{\langle X, g_{k,l} \rangle, k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\}$  es denso en  $H(X)$ . Ahora, buscamos una fórmula de reconstrucción para  $X$ . Motivados por el operador de marco de Gabor clásico, definimos (formalmente) un nuevo proceso aleatorio basado en  $X$  y un sistema de Gabor  $\mathcal{G}$  como

$$(S_g X)(t) := \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{l \in \mathbb{L}} \langle X, g_{k,l} \rangle g_{k,l}(t). \quad (4.22)$$

Como es habitual, a veces escribimos brevemente  $SX$  en lugar de  $(S_g X)(t)$ . Demostremos que, para un sistema de Gabor adecuado, la serie que define  $SX$  converge en  $H(X)$ .

**Lema 4.4.1.** *Sea  $g \in W(\mathbb{R}) \cap \widehat{W}(\mathbb{R})$ . Entonces la serie (4.22) converge en  $H(X)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  y además:*

$$(SX)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} \frac{1}{t_0} \sum_{d \in \mathbb{D}} e^{itd} \widetilde{G}(\lambda)(0, d) d\Phi(\lambda) \quad \text{a.s.} \quad (4.23)$$

*Demostración.* Para  $N, M \in \mathbb{N}$  escribimos

$$S_{M,N}X := \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} \sum_{l \in \mathbb{L}(N)} \langle X, g_{k,l} \rangle g_{k,l}.$$

Dado que tenemos un número finito de índices en la suma doble anterior, podemos intercambiarla con la integral obteniendo

$$(S_{M,N}X)(t) = \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} \sum_{l \in \mathbb{L}(N)} \widetilde{g}_{k,l}(\lambda) g_{k,l}(t) \right) d\Phi(\lambda).$$

Como  $g \in W(\mathbb{R}) \cap \widehat{W}(\mathbb{R})$ , recordando el Lema 1.5.2 y el isomorfismo de Kolmogorov (2.4),

para  $N, M \in \mathbb{N}$  y  $t \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|(S_{M,N}X)(t)|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} \sum_{l \in \mathbb{L}(N)} \widehat{g}_{k,l}(\lambda) g_{k,l}(t) \right|^2 d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} |g(t-k)| \sum_{l \in \mathbb{L}(N)} |\widehat{g}(\lambda-l)| \right)^2 d\mu(\lambda) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \sum_{k \in \mathbb{K}} |g(t-k)| \sum_{l \in \mathbb{L}} |\widehat{g}(\lambda-l)| \right)^2 d\mu(\lambda) \\ &\leq C(t_0, \omega_0) \mu(\mathbb{R}) \|g\|_W^2 \|\widehat{g}\|_W^2 < \infty. \end{aligned}$$

Fijemos  $l \in \mathbb{L}$  y  $t \in \mathbb{R}$ . Sea  $f_{l,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la función dada por  $f_{l,t}(\lambda) = \widehat{g}(\lambda-l)e^{it\lambda}$  y consideremos su  $\frac{2\pi}{t_0}$ -periodización

$$F_{l,t}(\lambda) = \sum_{d \in \mathbb{D}} \widehat{g}(\lambda-l+d) e^{it(\lambda+d)} \quad \lambda \in \mathbb{T}.$$

Para  $k \in \mathbb{K}$  su  $k$ -ésimo coeficiente de Fourier es  $\widehat{F_{l,t}}(k) = t_0 g_{k,l}(t)$ . Dados  $l \in \mathbb{L}$  y  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_{l,t}$  es igual a su serie de Fourier para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  ya que  $f_{l,t} \in W(\mathbb{R}) \cap \widehat{W}(\mathbb{R})$  (véase por ejemplo [Gr01, p. 105]). Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}_{k,l}(\lambda) g_{k,l}(t) &= \sum_{k \in \mathbb{K}} \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}(\lambda-l) e^{ik\lambda} g_{k,l}(t) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}(\lambda-l) \sum_{k \in \mathbb{K}} g_{k,l}(t) e^{ik\lambda} \\ &= \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}(\lambda-l) \frac{1}{t_0} F_{l,t}(\lambda) \\ &= \frac{1}{t_0} \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}(\lambda-l) \sum_{d \in \mathbb{D}} \widehat{g}(\lambda-l+d) e^{it(\lambda+d)} \\ &= \frac{1}{t_0} \sum_{d \in \mathbb{D}} e^{it(\lambda+d)} \sum_{l \in \mathbb{L}} \widehat{g}(\lambda-l+d) \widehat{g}(\lambda-l) \\ &= \frac{1}{t_0} \sum_{d \in \mathbb{D}} e^{it(\lambda+d)} \widetilde{G}(\lambda)(0, d). \end{aligned}$$

lo cual es válido para todos los  $t \in \mathbb{R}$  y  $\lambda \in \mathbb{T}$ , lo que demuestra (4.23). ■

Nótese que el proceso aleatorio definido por (4.23) para todo  $t$  no es necesariamente un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio. Finalmente, esto se puede solucionar si asumimos que  $\widetilde{G}(\lambda)$  es diagonal para todo  $\lambda \in \mathbb{T}$ , lo que es equivalente a la condición  $\widetilde{G}(\lambda)(0, d) = 0$  para  $d \neq 0$  y todo  $\lambda \in \mathbb{T}$ . Bajo este supuesto podemos probar:

**Teorema 4.4.2.** *Sean  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y  $\mathcal{G} = \{g_{k,l} : k \in \mathbb{K}, l \in \mathbb{L}\}$  un sistema de Gabor generado por  $g \in W(\mathbb{R}) \cap \widehat{W}(\mathbb{R})$ . Si  $\widetilde{G}(\lambda)$  es diagonal para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces:*

- a)  $((SX)(t))_{t \in \mathbb{R}}$  define un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio.
- b) Si además se cumple la condición (4.14)  $\mu$ -a.e.,  $X$  se puede recuperar a partir de  $SX$  en el sentido de que existe un operador acotado  $M : H(X) \rightarrow H(X)$  con inverso acotado tal que  $M(X(t)) = (SX)(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demostración.* Si  $\tilde{G}(\lambda)$  es diagonal:

$$\frac{1}{t_0} \sum_{d \in \mathbb{D}} e^{it(\lambda+d)} \tilde{G}(\lambda)(0, d) = \frac{1}{t_0} e^{it(\lambda)} \tilde{G}(\lambda)(0, 0) = \frac{1}{t_0} e^{it\lambda} \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2,$$

y por lo tanto, recordando (4.23),  $SX$  es un proceso aleatorio que admite la representación

$$(SX)(t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_0(\lambda) e^{it\lambda} d\Phi(\lambda),$$

donde  $\tilde{g}_0(\lambda) := \frac{1}{t_0} \tilde{G}(\lambda)(0, 0) \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , ya que

$$\tilde{g}_0(\lambda) := \frac{1}{t_0} \sum_{l \in \mathbb{L}} |\hat{g}(\lambda - l)|^2 \leq C(t_0, \omega_0) \|\hat{g}\|_W^2.$$

Claramente  $SX$  define un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y vale a).

b) Sea  $\tilde{M} : L^2(\mathbb{R}, \mu) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$  el operador de multiplicación por  $\tilde{g}_0$ . Si (4.14) se cumple, mediante un cálculo sencillo  $\tilde{M}$  es invertible y además

$$A\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} \leq \|\tilde{M}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)} \leq B\|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mu)}.$$

Usando el isomorfismo isométrico de Kolmogorov (2.4) entre  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  y  $H(X)$  definimos  $M : H(X) \rightarrow H(X)$  por:

$$M(I(f)) = I(\tilde{M}(f)) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_0(\lambda) f(\lambda) d\Phi(\lambda), \quad f \in L^2(\mathbb{R}, \mu).$$

Si  $f(\lambda) = e_t(\lambda) = e^{it\lambda}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , entonces

$$M(X(t)) = M(I(e_t)) = I(\tilde{M}(e_t)) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}_0(\lambda) e^{it\lambda} d\Phi(\lambda) = (SX)(t).$$

■

Nótese que  $\tilde{g}_0 \in L^2(\mathbb{R}, \mu) \setminus L^1(\mathbb{R})$  y por lo tanto no podemos definir  $SX$  (o equivalentemente  $M(X)$ ) mediante una convolución como en el Ejemplo 2.2.12. A diferencia del Lema 4.2.5 donde se requiere que la condición (4.14) se cumpla para todo  $\lambda$ , en el Teorema 4.4.2 se relaja para que sea válida  $\mu$ -a.e.. Esto se debe a que en este contexto estamos tratando con  $H(X)$  el espacio de Hilbert abarcado por un único proceso aleatorio con medida espectral  $\mu$ . En particular, la condición (4.14) junto con  $\tilde{G}(\lambda)$  siendo diagonal implica que  $\mathcal{G}$  define un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ . Las tres condiciones se verifican si, por ejemplo, dejamos que  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (clase de Schwartz) sea tal que  $\hat{g} \in C^\infty$  con soporte compacto y  $t_0$  y  $\omega_0$  se eligen suficientemente pequeños.

# Capítulo 5

## Sistemas Afines

En este Capítulo se incluyen los resultados obtenidos en nuestro trabajo [CeMe25]. La Sección 5.1 contiene los fundamentos del análisis Gramiano dual aplicado a los sistemas invariantes por traslaciones “afín truncado” y “cuasi afín”, asociados a un sistema afín. Además, se introducen las matrices Gramianas duales aumentadas para remediar un problema de redundancia intrínseca presente en las matrices Gramianas duales y así mejorar las técnicas del análisis Gramiano dual. Los resultados principales del capítulo se incluyen en la Sección 5.2 y pueden considerarse como una extensión de los resultados principales obtenidos en la Sección 4.2 para sistemas de Gabor. La Sección 5.3 está dedicada a las aplicaciones. La herramienta principal en la Subsección 5.3.1 es el isomorfismo de Kolmogorov (2.4) relacionado con un proceso aleatorio estacionario. Obtenemos una generalización de algunos resultados bien conocidos sobre condiciones equivalentes de suavidad de funciones en espacios fraccionarios de Sobolev que involucran integrales singulares. En la Subsección 5.3.2 aplicamos el resultado principal de este capítulo (Teorema 5.2.6) junto con las técnicas empleadas en su demostración para estudiar la regularidad de los procesos aleatorios estacionarios Gaussianos. Para ello imponemos la condición de marco de  $L^2(\mathbb{R})$  para un sistema afín  $\mathcal{A}$  y para su transformado por Riesz  $I^\alpha \mathcal{A}$ .

### 5.1. Análisis Gramiano Dual en Sistemas Afines

Comenzamos recordando la Definición 1.6.13 correspondiente a un *sistema afín*. Si bien la definición es bastante general, no obstante en la Sección 5.2 sólo trabajaremos con un conjunto generador  $\Psi = \{\psi\}$ .

**Definición 5.1.1.** Sea  $\Psi$  un subconjunto a lo sumo numerable de  $L^2(\mathbb{R})$  tal que cada  $\psi \in \Psi$ ,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , sea una función medible de Borel y  $a > 1$ ,  $b > 0$  sean constantes fijas. Definimos el *sistema afín* (*wavelet*) generado por desplazamientos en tiempo-escala de  $\Psi$  como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Psi, a, b) = \{a^{j/2}\psi_{j,k}(t) = a^{-j/2}\psi(a^{-j}t - k) : \psi \in \Psi, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}. \quad (5.1)$$

Podemos reescribir el sistema afín (5.1) mediante la acción de los operadores de *traslación*  $E^k$ , con  $k \in \mathbb{K}$  (véase (1.13)), y los operadores de *dilatación*  $D_{a^j}$ , con  $j \in \mathbb{Z}$  (véase (1.15)), como sigue:

$$\mathcal{A} = \{a^{j/2}\psi_{j,k} = D_{a^{-j}}E^k\psi = E^{a^j k}D_{a^{-j}}\psi : \psi \in \Psi, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}.$$

Además, por conveniencia y cuando sea necesario, identificaremos  $\mathcal{A}$  como un conjunto de índices de la siguiente manera

$$\mathcal{A} = \Psi \times \mathbb{Z} \times \mathbb{K} = \{(\psi, j, k) = D_{a^j} E^k \psi : \psi \in \Psi, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}.$$

Un tema crucial en el análisis wavelet es caracterizar cuándo  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ . Recordando que la transformada de Fourier es un operador unitario,  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si  $\hat{\mathcal{A}}$  también lo es. Nótese que  $\hat{\mathcal{A}}$  puede no ser un sistema afín, ya que

$$\hat{\mathcal{A}} = \{a^{j/2} \hat{\psi}_{j,k}(\lambda) = (D_{a^j} M^{-k} \hat{\psi})(\lambda) = a^{j/2} \hat{\psi}(a^j \lambda) e^{-ika^j \lambda} : \psi \in \Psi, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}. \quad (5.2)$$

Motivados en parte por algunos problemas de interpolación para procesos aleatorios estacionarios en sentido amplio, trabajaremos preferentemente con (5.2).

Otro inconveniente importante de un sistema afín  $\mathcal{A}$  en contraste con su contraparte de Gabor  $\mathcal{G}$  es la falta de una estructura invariante por traslaciones. Por lo tanto, la teoría de los sistemas SI no es directamente aplicable a  $\mathcal{A}$ . Sin embargo, esta dificultad se logra sortear mediante el uso de *productos de corchetes afines* (*affine bracket products*) y *sistemas cuasi afines* (*quasi affine systems*) en [RS97b]. Describiremos brevemente estas nociones y enunciaremos los resultados relevantes obtenidos por este enfoque centrándonos en las propiedades de Bessel y de marcos. Para la aplicación de los métodos de invariancia por traslaciones, el parámetro “ $a$ ” será un **entero mayor o igual** a 2. También, sin pérdida de generalidad, consideramos  $b = 1$  (lo mismo se hace en [RS97b, KR09]). Hacemos esto para evitar que la constante  $b$  aparezca en muchas de las desigualdades de tipo marco (como pasa con  $t_0$  en el caso Gabor). Sin embargo, mantenemos la notación  $\mathbb{K}$  en vez de  $\mathbb{Z}$  para remarcar que lo expuesto vale para cualquier  $b > 0$ .

**Definición 5.1.2.** Para un sistema afín  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Psi, a, b)$  definimos el *producto de corchetes afín*  $\Psi[\cdot, \cdot] : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  por

$$\Psi[\lambda, \lambda'] := \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{j=\kappa(\lambda-\lambda')}^{+\infty} \hat{\psi}(a^j \lambda) \overline{\hat{\psi}(a^j \lambda')}, \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

donde  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  es la  $\frac{2\pi}{b}$ -*a*-ádica función de valuación dada por

$$\kappa(\lambda) = \inf\{j \in \mathbb{Z} : a^j \lambda \in \mathbb{D}\}.$$

Usamos la convención de que  $\Psi[\lambda, \lambda'] = +\infty$  a menos que su suma definitoria (5.3) sea absolutamente convergente.

En primer lugar,  $\kappa(0) = -\infty$ , y  $\kappa(\lambda) = +\infty$  a menos que  $\lambda$  sea un entero  $\frac{2\pi}{b}$ -*a*-ádico:

$$\kappa(\lambda) = m \quad \Leftrightarrow \quad a^m \lambda = d \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = a^{-m} d \quad \text{para algún } d \in \mathbb{D}.$$

Por lo tanto  $\Psi[\lambda, \lambda'] = 0$  al menos que  $\lambda - \lambda' \in a^{-m} \mathbb{D}$  para algún  $m \in \mathbb{Z}$ .

En segundo lugar,  $\mathbf{1}_{\mathbb{D}}(a^j(\lambda - \lambda')) = 1$  si y solo si  $a^j(\lambda - \lambda') \in \mathbb{D}$  si y solo si  $\lambda - \lambda' \in a^{-j} \mathbb{D}$ . Cuando  $a \notin \mathbb{Q}$  también tenemos que  $\lambda - \lambda' \in a^{-j} \mathbb{D}$  si y solo si  $\lambda, \lambda' \in a^{-j} \mathbb{D}$ .

Claramente tenemos la propiedad de invariancia  $\Psi[a^j \lambda, a^j \lambda'] = \Psi[\lambda, \lambda']$  para todo  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  y cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ .

### 5.1.1. Sistemas Afines Truncados

Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín. Dado  $j \in \mathbb{Z}$  el *sistema afín truncado*  $\mathcal{A}_j$  se define por

$$\mathcal{A}_j := \{(\psi, j', k) : \psi \in \Psi, j' \geq -j, k \in \mathbb{K}\} = \Psi \times \mathbb{Z}_{\geq -j} \times \mathbb{K}.$$

Por lo tanto, el sistema afín truncado  $\mathcal{A}_j$  se obtiene a partir de  $\mathcal{A}$  eliminando todos los niveles de dilatación  $D_{a^{j'}} E^k \psi$  con  $j' < -j$ . Esto hace que  $\mathcal{A}_j$  sea un sistema invariante por traslaciones en  $ba^j \mathbb{Z}$ , ya que para cualquier  $j' \geq -j$  y  $k', k \in \mathbb{K}$  tenemos que

$$E^{ka^j} (D_{a^{j'}} E^{k'}) = E^{ka^{j+j'} a^{-j'}} (E^{k' a^{-j'}} D_{a^{j'}}) = E^{(ka^{j+j'} + k') a^{-j'}} D_{a^{j'}} = E^{k'' a^{-j'}} D_{a^{j'}} = D_{a^{j'}} E^{k''},$$

donde  $k'' := ka^{j'+j} + k' \in \mathbb{K}$  ya que  $a^{j'+j} \in \mathbb{N}$  (ya que  $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ).

Llamamos  $\mathcal{A}_{j-} := \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_j$  y abreviamos los operadores de síntesis correspondientes como  $T := T_{\mathcal{A}}$ ,  $T_j := T_{\mathcal{A}_j}$  y  $T_{j-} := T_{\mathcal{A}_{j-}}$ . Para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$  el operador

$$V^j : \ell^2(\mathcal{A}_0) \rightarrow \ell^2(\mathcal{A}_j) \quad \text{dado por} \quad (V^j c)(j', k, \psi) = c(j' + j, k, \psi),$$

es una isometría tal que  $T_0 = D_{a^j} T_j V^j$ , y por lo tanto  $T_0^* = V^{-j} T_j^* D_{a^{-j}}$ . Estas factorizaciones revelan una fuerte dependencia entre  $T_0$  y  $T_j$  (por lo tanto entre  $T_0^*$  y  $T_j^*$ ) para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ . Además, en el lenguaje de la teoría de operadores, para cualquier  $j, j' \in \mathbb{Z}$  tenemos que  $T_j$  y  $T_{j'}$  son unitariamente equivalentes (por lo tanto  $T_j^*$  y  $T_{j'}^*$  también lo son).

**Teorema 5.1.3** ([RS97b, Theorem 4.3]). *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín.*

a) *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $\mathcal{A}_j$  es una sucesión de Bessel para algún / cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ .

*En tal caso tenemos que  $B = \|T\|^2 = \|T_j\|^2$  para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ .*

b) *Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel. Sea  $H$  un subespacio de  $L^2(\mathbb{R})$  y  $H' := \overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} D^j H}$ . Si, para algún  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $T_j^*$  está acotado inferiormente en  $D^{-j} H$ , entonces  $T^*$  está acotado inferiormente en  $H'$  y se cumple  $\|T^*|_{H'}\|^{-1} \leq \|T_j^*|_H\|^{-1}$ .*

Para obtener una caracterización de marcos afines de  $L^2(\mathbb{R})$  (truncados), en una dirección, el Teorema 5.1.3 b) todavía se puede aplicar al caso particular, aunque muy importante, del subespacio

$$H_r := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\widehat{f}) \subset \mathbb{R} \setminus (-r, r)\} \quad (r \geq 0),$$

Mientras que en la otra dirección será válida si se requiere además, por ejemplo, alguna condición de suavidad leve:

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{j=0}^{+\infty} c(\psi, j) < \infty, \tag{5.4}$$

donde

$$c(\psi, j) := \left\| \sum_{d \in A_j} |\widehat{\psi}(\cdot + d)|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad \text{con} \quad A_j := \{d \in \mathbb{D} : |d| > 2^j\}.$$

**Teorema 5.1.4** ([RS97b, Corollary 4.4 y Lemma 4.7]). *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín con conjunto generador finito  $\Psi$ . Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel que satisface (5.4). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .

ii) Para algún  $r \geq 0$ ,  $T_{0,r}^* = T_0^*|_{H_r}$  es acotado inferiormente en  $H_r$ .

En tal caso tenemos que  $A = \|T^{*-1}\|^2 = \|T_0^{*-1}\|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \|T_{0,r}^{*-1}\|^2$ .

*Observación 5.1.5.* La condición de suavidad (5.4) fué eliminada por Charles Chui, Xianliang Shi & Joachim Stöckler en [CSS98, Theorem 2]. Su trabajo aborda el estudio de sistemas afines y cuasi afines, en palabras de sus autores, con un “método de demostraciones totalmente diferente”. No obstante esta condición tiene su importancia en el estudio de sistemas GSI, ya que implica la llamada “*small tail condition*” (véase [RS05]).  $\diamond$

Aplicamos la teoría del análisis Gramiano dual al sistema afín truncado  $\mathcal{A}_0$ . Dado  $j \in \mathbb{N}_0$  consideramos el grupo cociente  $\Gamma_j := \mathbb{K}/a^j\mathbb{K}$ . Definimos el conjunto de índices  $\Phi$  como

$$\Phi := \{(\psi, j, \gamma) : \psi \in \Psi, j \geq 0, \gamma \in \Gamma_j\}. \quad (5.5)$$

De hecho, el conjunto  $\Phi$  como en (5.5) es un conjunto generador para  $\mathcal{A}_0$  y, por lo tanto,

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{S}(\Phi, b).$$

La transformada de Fourier de  $\phi = (\psi, j, \gamma) = D_{a^j} E^\gamma \psi$  es la función

$$\widehat{\phi}(\lambda) = (\mathcal{F} D_{a^j} E^\gamma \psi)(\lambda) = (D_{a^{-j}} M^{-\gamma} \widehat{\psi})(\lambda) = a^{-j/2} e^{-i\gamma a^{-j} \lambda} \widehat{\psi}(a^{-j} \lambda).$$

Denotamos por  $\widetilde{G}_0(\lambda)$  la matriz Gramiana dual asociada a  $\mathcal{A}_0$  cuya entrada  $(d, d')$  toma la forma

$$\widetilde{G}_0(\lambda)(d, d') = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{j \geq 0} \widehat{\psi}(a^{-j}(\lambda + d)) \overline{\widehat{\psi}(a^{-j}(\lambda + d'))} a^{-j} \sum_{\gamma \in \Gamma_j} e^{-i\gamma a^{-j}(d-d')}.$$

La suma de exponenciales es cero a menos que  $e^{-i(\cdot)a^{-j}(d-d')}$  sea el *character* identidad de  $\Gamma_j$ , es decir, a menos que

$$-j \geq \kappa(d - d') = \inf\{m \in \mathbb{Z} : a^m(d - d') \in \mathbb{D}\},$$

y en tal caso resulta que

$$a^{-j} \sum_{\gamma \in \Gamma_j} e^{-i\gamma a^{-j}(d-d')} = a^{-j} \#\Gamma_j = 1,$$

consecuentemente

$$\widetilde{G}_0(\lambda)(d, d') = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{j=\kappa(d-d')}^0 \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \overline{\widehat{\psi}(a^j(\lambda + d'))}.$$

Al definir el *producto de corchete afín truncado de orden m* como

$$\Psi_m[\lambda, \lambda'] = \sum_{\psi \in \Psi} \sum_{j=\kappa(\lambda-\lambda')}^m \widehat{\psi}(a^j \lambda) \widehat{\psi}(a^j \lambda'),$$

podemos escribir la entrada  $(d, d')$  de  $\widetilde{G}_0(\lambda)$  como

$$\widetilde{G}_0(\lambda)(d, d') = \Psi_0[\lambda + d, \lambda + d']. \quad (5.6)$$

Para  $r \geq 0$  recordemos el operador de análisis  $T_{0,r}^* = T_{0|H_r}^* = T_{\mathcal{A}_0|H_r}^*$  y denotemos por  $\widetilde{G}_{0,r}(\lambda)$  la matriz Gramiana dual asociada, que se obtiene a partir de  $\widetilde{G}_0(\lambda)$  eliminando todas las entradas  $(d, d')$  para las cuales  $|\lambda + d| \leq r$  y  $|\lambda + d'| \leq r$ . También consideramos las funciones norma asociadas:

$$\mathbf{G}_0^*(\lambda) = \|\widetilde{G}_0(\lambda)\| \quad \text{y} \quad \mathbf{G}_{0,r}^{*-}(\lambda) = \|\widetilde{G}_{0,r}(\lambda)^{-1}\|.$$

**Teorema 5.1.6** ([RS97b, Theorem 4.14]). *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín.*

a) *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i)  *$\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .*

ii)  *$\mathbf{G}_0^* \in L^\infty(\mathbb{T})$  y  $B = \|\mathbf{G}_0^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .*

b) *Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel. Si para algún  $r \geq 0$ ,  $\mathbf{G}_{0,r}^{*-} \in L^\infty(\mathbb{T})$ , entonces  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  y su cota inferior de marco  $A$  satisface*

$$\frac{1}{A} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}_{0,r}^{*-}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \quad (5.7)$$

c) *Si  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  satisfaciendo el supuesto (5.4), entonces  $\mathbf{G}_{0,r}^{*-} \in L^\infty(\mathbb{T})$  para todos los  $r$  suficientemente grandes y en (5.7), se mantiene la igualdad.*

### 5.1.2. Sistemas Cuasi Afines

Sean  $\mathcal{A}$  un sistema afín y  $\mathcal{A}_0$  su contraparte truncada obtenida al eliminar los elementos  $(j, k, \psi) \in \mathcal{A}$  cuyo índice  $j < 0$ . El sistema *cuasi afín* asociado a  $\mathcal{A}$  es el sistema SI

$$\mathcal{A}^q := \mathcal{A}_0 \cup \{a^{j/2}(\psi, j, k) : \psi \in \Psi, j < 0, k \in a^j \mathbb{K}\}.$$

Por lo tanto, el sistema cuasi afín  $\mathcal{A}^q$  se obtiene a partir de  $\mathcal{A}$  modificando (en lugar de eliminar) el sistema en los niveles de dilatación negativos. El sistema cuasi afín se puede reescribir como  $\mathcal{A}^q := \mathcal{A}_0 \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ , donde

$$Y_n := \mathcal{S}(\Phi_n, b) \quad \text{con} \quad \Phi_n := a^{-n/2} D_{a^{-n}} \Psi.$$

Dado que la matriz Gramiana dual  $\widetilde{G}_0(\lambda)$  de  $\mathcal{A}_0$  ya se ha calculado en la subsección anterior (véase (5.6)), para obtener la matriz Gramiana dual  $\widetilde{G}(\lambda)$  de  $\mathcal{A}^q$  (notada por

$\tilde{G}^q$  en [RS97b]) queda por calcular la matriz Gramiana dual de  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ . Pero, dado que  $\hat{\Phi}_n = \hat{\Psi}(a^n \cdot)$ , su entrada  $(d, d')$  toma la forma

$$\sum_{\psi \in \Psi} \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{\psi}(a^n(\lambda + d)) \overline{\hat{\psi}(a^n(\lambda + d'))} = \Psi[\lambda + d, \lambda + d'] - \Psi_0[\lambda + d, \lambda + d'],$$

por lo tanto (véase [RS97b, Proposition 5.1])

$$\tilde{G}(\lambda)(d, d') = \Psi[\lambda + d, \lambda + d'], \quad d, d' \in \mathbb{D}. \quad (5.8)$$

Sean  $\tilde{G}^*(\lambda) = \|\tilde{G}(\lambda)\|$  y  $\tilde{G}^{*-}(\lambda) = \|\tilde{G}(\lambda)^{-1}\|$  las funciones norma asociadas a  $\tilde{G}(\lambda)$  (con las convenciones habituales). Por el Teorema 3.4.7 sabemos que  $\mathcal{A}^q$  es una sucesión de Bessel si y solo si  $\tilde{G}^* \in L^\infty(\mathbb{T})$  y también es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si tanto  $\tilde{G}^*$  como  $\tilde{G}^{*-}$  pertenecen a  $L^\infty(\mathbb{T})$ .

**Proposición 5.1.7** ([RS97b, Lemma 5.2]). *Sean  $\mathcal{A}^q$  un sistema cuasi afín y  $r \geq 0$ . Denotemos por  $T_q^*$  el operador de análisis asociado a  $\mathcal{A}^q$  y su restricción a  $H_r$  por  $T_{q,r}^*$ .*

a) *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}^q$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B_q$ .
- ii)  $T_{q,r}^*$  es acotado en  $H_r$  y  $B_q = \|T_{q,r}^*\|^2$ .

b) *Supongamos que  $\mathcal{A}^q$  es una sucesión de Bessel. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}^q$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cota inferior de marco  $A_q$ .
- ii)  $T_{q,r}^*$  es acotado inferiormente en  $H_r$  y  $A_q = \|T_{q,r}^{*-1}\|^{-2}$ .

**Teorema 5.1.8** ([RS97b, Lemma 5.4 y Theorem 5.5]). *Sean  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Psi, a, b)$  un sistema afín y  $\mathcal{A}^q$  su contraparte cuasi afín. Supongamos que  $\Psi$  satisface el supuesto (5.4).*

a) *Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel.
- ii)  $\mathcal{A}^q$  es una sucesión de Bessel.

*En tal caso las cotas Bessel coinciden.*

b) *Supongamos que  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ii)  $\mathcal{A}^q$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .

*En tal caso las respectivas cotas de marco coinciden.*

Combinando el Teorema 5.1.8 con el Teorema 3.4.7 llegamos finalmente a una caracterización de marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  en términos de las funciones norma  $\tilde{G}^*$  y  $\tilde{G}^{*-}$  asociadas a las matrices Gramianas duales  $\tilde{G}(\lambda)$  de  $\mathcal{A}^q$ .

**Teorema 5.1.9** ([RS97b, Theorem 5.6]). Sean  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Psi, a, b)$  un sistema afín y  $\mathcal{A}^a$  su contraparte cuasi afín. Supongamos que  $\Psi$  satisface el supuesto (5.4).

a) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel con cota Bessel  $B$ .
- ii)  $\tilde{\mathbf{G}}_q^* \in L^\infty(\mathbb{T})$  y  $B = \|\tilde{\mathbf{G}}_q^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ .

b) Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

- i)  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  con cotas de marco  $0 < A \leq B < \infty$ .
- ii)  $\tilde{\mathbf{G}}_q^*, \tilde{\mathbf{G}}_q^{*-} \in L^\infty(\mathbb{T})$  y  $A = 1/\|\tilde{\mathbf{G}}_q^{*-}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$ , por lo tanto

$$A\|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2 \leq \langle \tilde{G}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})} \leq B\|x\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2,$$

para casi todos (con respecto a la medida de Lebesgue)  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todos los  $x \in \ell^2(\mathbb{D})$ .

### 5.1.3. Matrices Gramianas Duales Aumentadas

Podemos considerar, al menos formalmente, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$  las matrices infinitas autoadjuntas no negativas “aumentadas”  $(\mathbf{G}_j(\lambda)(q, q'))_{(q, q') \in Q^2}$  y  $(\tilde{\mathbf{G}}(\lambda)(q, q'))_{(q, q') \in Q^2}$  definidas por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_j(\lambda)(q, q') &= \hat{\psi}(a^j(\lambda + q))\overline{\hat{\psi}(a^j(\lambda + q'))}\mathbf{1}_{\mathbb{D}}(a^j(q - q')) \quad j \in \mathbb{Z}, \\ \tilde{\mathbf{G}}(\lambda)(q, q') &= \Psi[\lambda + q, \lambda + q'], \quad q, q' \in Q := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} a^{-j}\mathbb{D}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

El conjunto de índices  $Q$  comprende todos los números  $\frac{2\pi}{b}$ -enteros  $a$ -ádicos. Si, por ejemplo,  $\mathcal{A}$  es una sucesión de Bessel [RS97b, Lemma 3.5], entonces a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$  tenemos

$$\langle \tilde{\mathbf{G}}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(Q)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(Q)}, \quad \forall x \in \ell^2(Q). \quad (5.10)$$

En lugar de (5.8), a veces es preferible trabajar con (5.9). Como se señala en [KR09], para cada  $j \in \mathbb{N}$  la matriz  $\tilde{G}(a^j\lambda)$  se obtiene a partir de  $\tilde{\mathbf{G}}(\lambda)$  eliminando todas las filas y columnas indexadas por  $Q \setminus a^{-j}\mathbb{D}$ . Esto elimina la redundancia que surge en  $\tilde{G}(\lambda)$  como una submatriz de  $\tilde{G}(a\lambda)$ .

Como hemos hecho en la Subsección 5.1.2, es posible caracterizar sistemas afines que son marcos de  $L^2(\mathbb{R})$  en términos de  $\tilde{\mathbf{G}}(\lambda)$  que actúa como un operador  $\tilde{\mathbf{G}}(\lambda) : \ell^2(Q) \rightarrow \ell^2(Q)$ . Asociamos a  $\tilde{\mathbf{G}}$  las funciones norma

$$\mathbf{g}^*(\lambda) = \|\tilde{\mathbf{G}}(\lambda)\| \quad \text{y} \quad \mathbf{g}^{*-}(\lambda) = \|\tilde{\mathbf{G}}(\lambda)^{-1}\|$$

con las convenciones usuales.

Para  $x \in \ell^0(Q)$  soportado en un subconjunto finito  $\tilde{Q}$  de  $Q$ , existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tal que  $a^N\tilde{Q} \subset \mathbb{D}$ . De hecho, si  $\tilde{Q} = \{q_1 := a^{j_1}d_1, \dots, q_n := a^{j_n}d_n\}$  entonces  $N = \max\{|j_1|, \dots, |j_n|\}$  funciona. Dado que para cada  $q, q' \in a^{-N}\mathbb{D}$  tenemos  $\kappa(q - q') = N$  y por lo tanto

$$\Psi[a^N(\lambda + q), a^N(\lambda + q')] = \Psi[\lambda + q, \lambda + q'],$$

a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} \langle \tilde{G}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(Q)} &= \sum_{q, q' \in Q} x(q)\bar{x}(q')\Psi[\lambda + q, \lambda + q'] \\ &= \sum_{d, d' \in \mathbb{D}} y(d)\bar{y}(d')\Psi[a^N\lambda + d, a^N\lambda + d'] \\ &= \langle \tilde{G}(\lambda)y, y \rangle_{\ell^2(\mathbb{D})}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde  $y \in \ell^0(\mathbb{D})$  con  $y(d) = x(a^{-N}d)$ ,  $d \in \mathbb{D}$ , y por lo tanto  $\|x\|_{\ell^2(Q)}^2 = \|y\|_{\ell^2(\mathbb{D})}^2$ .

El Teorema 5.1.9 es válido para la matriz Gramiana dual aumentada  $\tilde{G}$  (véase [KR09, Corolario 3.2]) y de hecho, este puede utilizarse junto con la ecuación (5.11) (mediante un argumento de densidad) para proporcionar una prueba de tal afirmación que enunciamos a continuación.

**Teorema 5.1.10.** *Sean  $\mathcal{A} \subset L^1(\mathbb{R})$  un sistema afín con matriz asociada  $\tilde{G}(\lambda)$  definida como en (5.9). Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  (equivalentemente  $\hat{\mathcal{A}}$ ) es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ii) Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que

$$A\|x\|_{\ell^2(Q)}^2 \leq \langle \tilde{G}(\lambda)x, x \rangle_{\ell^2(Q)} \leq B\|x\|_{\ell^2(Q)}^2, \quad (5.12)$$

para casi todos (con respecto a la medida de Lebesgue)  $\lambda \in \mathbb{R}$  y todos los  $x \in \ell^2(Q)$ .

Además,  $A = 1/\|\mathbf{g}^{*-}\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$  y  $B = \|\mathbf{g}^*\|_{L^\infty(\mathbb{T})}$  son las cotas de marco para  $\mathcal{A}$ .

## 5.2. Marcos $AP$ Afines y Procesos Aleatorios Estacionarios

Los resultados obtenidos en esta sección forman parte de nuestra publicación [CeMe25].

Como  $B^2(\mathbb{R})$  es no separable, ninguna colección contable de elementos de su espacio dual puede ser total en él. Sin embargo, mediante un proceso de promediado adecuado se puede estimar la norma  $B^2(\mathbb{R})$ . Al igual que en el caso Gabor, esto motiva la siguiente Definición 5.2.1 para sistemas afines [KR09, Kim13, Par01].

**Definición 5.2.1.** Sea  $\mathcal{A} \subset L^1(\mathbb{R})$  un sistema afín. Decimos que  $\mathcal{A}$  es un *marco  $AP$  afín* si existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que para cada  $f \in AP(\mathbb{R})$  que satisface  $C(f)(0) = 0$ , se cumplen las siguientes desigualdades:

$$A\|f\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle f, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B\|f\|_{B^2(\mathbb{R})}^2.$$

En [KR09, Theorem 1.13], con una condición adicional leve (la condición (A2) de (5.13) que aparece a continuación), se demuestra que un sistema afín es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  si y solo si es un marco  $AP$  afín y además las respectivas cotas de marco coinciden.

En esta sección y en el resto del capítulo trabajaremos con  $\Psi = \{\psi\}$  y el sistema afín

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\psi, a, b) = \{a^{j/2}\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\},$$

con  $a \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  y  $b = 1$  (recordando que lo expuesto es válido para cualquier  $b > 0$ ). Además, de aquí en adelante en esta sección,  $\mathcal{A} \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  será un sistema afín que verifica las condiciones adicionales:

$$\begin{aligned} (A1) \quad M_{\psi,j} &:= \sup_{\lambda \in \mathbb{T}} \sum_{d \in \mathbb{D}} |\widehat{\psi}(a^j(\lambda + d))|^2 \leq M_{\psi} < \infty \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \\ (A2) \quad \widetilde{G}(\cdot)(0, q) &\in C(\mathbb{R} \setminus \{0, q\}) \quad \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Bajo estos supuestos, dado un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ , recordando el Ejemplo 2.2.11 (ecuación (2.11)) podemos calcular sus coeficientes aleatorios de marco y obtener, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , la sucesión aleatoria  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  dada por:

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k a^j} \overline{\widehat{\psi}(a^j \lambda)} d\Phi(\lambda), \quad k \in \mathbb{K}. \quad (5.14)$$

Es inmediato que estas sucesiones pertenecen a  $H(X)$  y también son Gaussianas. Además, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  es estacionaria, ya que a partir de (2.8) la covarianza de esta sucesión toma la forma:

$$\mathbf{E}(\langle X, \psi_{j,k} \rangle \overline{\langle X, \psi_{j,k'} \rangle}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ia^j \lambda(k-k')} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu(\lambda), \quad (5.15)$$

que sólo depende de la diferencia  $k - k' \in \mathbb{K}$ . Caracterizaremos  $\mathcal{A}$  mediante estos coeficientes. Al igual que en el caso Gabor, las condiciones de continuidad a priori como (A2) de la ecuación (5.13), como se señala en [KR09] para el caso de  $AP(\mathbb{R})$ , se deben al hecho de que la configuración  $L^2(\mathbb{R})$  está asociada con la medida de Lebesgue en el dominio de la frecuencia, mientras que en la configuración actual el dominio de la frecuencia está asociado a procesos aleatorios estacionarios con una medida espectral de Borel finita arbitraria  $\mu$ . Como resultado, condiciones tales como (5.12) que son válidas a.e.  $\lambda \in \mathbb{R}$  con respecto a la medida de Lebesgue serán válidas *para cada*  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Es importante notar que, a diferencia de lo que ocurre en el caso Gabor, “esta regla” es válida para  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

**Lema 5.2.2.** *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ii) Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que

$$A\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{a.s.} \quad (5.16)$$

*para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  con medida espectral discreta  $\mu$  que satisface  $\mu(\{0\}) = 0$ .*

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii) Recordemos que si  $X$  es estacionario y Gaussiano entonces, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , la sucesión  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  dada por (5.14) también es estacionaria (véase (5.15)) y Gaussiana. Si  $X$  tiene espectro discreto, existe  $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  a lo sumo numerable

tal que  $X(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} C(\lambda) e^{i\lambda t}$  converge a.s. para todo  $t \in \mathbb{R}$ , donde los  $C(\lambda)$ 's son variables aleatorias normales, de media cero e independientes tales que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 = \mu(\mathbb{R}) < \infty$ . Además, por la Proposición 2.4.2,  $X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s. . En este caso,  $C(\lambda) = 0$  a.e. excepto para los  $\lambda \in \Lambda$  a lo sumo numerables, entonces los coeficientes  $\langle X, \psi_{j,k} \rangle$  en (5.14) toman la forma de una serie convergente a.s. para cada  $j$  y  $k$ :

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} e^{i\lambda k a^j} \widehat{\psi}(a^j \lambda) C(\lambda),$$

ya que, como en el Ejemplo 2.2.13, tenemos que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 \mathbf{E}|C(\lambda)|^2 \leq \|\widehat{\psi}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \mu(\mathbb{R}) < \infty.$$

El mismo argumento es válido para cualquier reordenamiento de esta serie.

Para cada  $j \in \mathbb{Z}$  sean  $\mathbb{D}_j := a^{-j}\mathbb{D}$  y  $\mathbb{T}_j := a^{-j}\mathbb{T}$ . Entonces, para cada  $j \in \mathbb{Z}$  y  $k \in \mathbb{K}$ , por periodización, tenemos la igualdad a.s.

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \left( \sum_{d \in \mathbb{D}_j} \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) C(\lambda + d) \right) e^{i\lambda k a^j} = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} D(\lambda, j) e^{i\lambda k a^j}, \quad (5.17)$$

ya que  $e^{idka^j} = 1$  para cualquier  $d \in \mathbb{D}_j$  y  $k \in \mathbb{K}$ . Por lo tanto, existe  $\Omega_j^s \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbf{P}(\Omega_j^s) = 1$  donde, para cada  $k \in \mathbb{K}$ , la serie (5.17) converge. Por otra parte, debido al Teorema 2.3.1 existe  $\Omega_j^e \in \mathcal{F}$  tal que  $\mathbf{P}(\Omega_j^e) = 1$  y donde  $\|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}$  existe y es finito. Definimos para cada  $j \in \mathbb{Z}$ :  $\Omega_j = \Omega_j^e \cap \Omega_j^s$ . Ahora bien, como  $ka^j \in \mathbb{K}_j$  para cada  $k \in \mathbb{K}$ , entonces para cada  $j \in \mathbb{Z}$  el sistema  $\{\{e^{i\lambda k a^j}\}_{k \in \mathbb{K}} : \lambda \in \mathbb{T}_j\}$  es una base ortonormal de  $B^2(\mathbb{K})$ . Por lo tanto, la ecuación (5.17) implica que  $D(\lambda, j)$  es la Transformada de Bohr de la sucesión  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}} \in B^2(\mathbb{K})$  sobre  $\Omega_j$  y entonces la fórmula de Wiener (1.19) afirma que:

$$\|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|D(\cdot, j)\|_{L^2(\mathbb{T}_j, dc)}^2 = \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} |D(\lambda, j)|^2,$$

y entonces sobre  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \Omega_j$ :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} |D(\lambda, j)|^2.$$

Queremos cambiar el orden de la suma en la última igualdad. Para ello cambiamos los índices de la suma. Para empezar tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} |D(\lambda, j)|^2 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \left| \sum_{d \in \mathbb{D}_j} \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) C(\lambda + d) \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}_j} C(\lambda + d) \overline{C}(\lambda + d') \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d')). \end{aligned}$$

La condición de acotación (A1) de (5.13) produce la estimación

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}_j} |C(\lambda + d) \overline{C}(\lambda + d') \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d'))| &= \\
&= \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \left( \sum_{d \in \mathbb{D}_j} |C(\lambda + d) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d))| \right)^2 \\
&\leq M_\psi \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \sum_{d \in \mathbb{D}_j} |C(\lambda + d)|^2 \\
&= M_\psi \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie es absolutamente (e incondicionalmente) convergente y, por lo tanto, el siguiente cambio en el orden de suma es válido

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}_j} C(\lambda + d) \overline{C}(\lambda + d') \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d')) &= \\
&= \sum_{d, d' \in \mathbb{D}_j} \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} C(\lambda + d) \overline{C}(\lambda + d') \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d')).
\end{aligned}$$

Definimos la siguiente relación de equivalencia en  $\mathbb{R}$

$$\lambda \sim_Q \lambda' \quad \text{si y solo si} \quad \lambda - \lambda' \in Q := \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{D}_j.$$

Sea  $\Delta$  un sistema de representantes de  $\sim_Q$ . Por lo tanto, si  $\lambda \in \mathbb{R}$  entonces existen únicos  $\delta \in \Delta$  y  $q \in Q$  tales que  $\lambda = \delta + q$ . Mediante cálculos sencillos, se puede probar que para cada  $j \in \mathbb{Z}$  los siguientes conjuntos son idénticos.

$$\begin{aligned}
R_j &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \lambda + d, y = \lambda + d', \lambda \in \mathbb{T}_j, d, d' \in \mathbb{D}_j\}, \\
S_j &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \delta + q, y = \delta + q', \delta \in \Delta, q - q' \in \mathbb{D}_j\}.
\end{aligned}$$

Estos conducen a la igualdad siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} |D(\lambda, j)|^2 &= \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} \sum_{d, d' \in \mathbb{D}_j} C(\lambda + d) \overline{C}(\lambda + d') \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d)) \widehat{\psi}(a^j(\lambda + d')) \\
&= \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{q, q' \in Q} C(\delta + q) \overline{C}(\delta + q') \widehat{\psi}(a^j(\delta + q)) \widehat{\psi}(a^j(\delta + q')) \mathbf{1}_{\mathbb{D}_j}(q - q') \\
&= \sum_{\delta \in \Delta} \langle \widetilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)},
\end{aligned}$$

donde  $C_\delta := (C(\delta + q))_{q \in Q} \in \ell^2(Q)$ .

Ahora, sumando sobre  $j \in \mathbb{Z}$ , dado que  $\langle \widetilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} \geq 0$  para cada  $j \in \mathbb{Z}$ ,

podemos cambiar el orden de suma (por el Teorema de Fubini) para obtener

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\lambda \in \mathbb{T}_j} |D(\lambda, j)|^2 \\
&= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{\delta \in \Delta} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} \\
&= \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} \\
&= \sum_{\delta \in \Delta} \langle \tilde{\mathbf{G}}(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)},
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se utiliza la ecuación (5.10). Como asumimos que  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , al aplicar el Teorema 5.1.10 tenemos

$$A \|C_\delta\|_{\ell^2(Q)}^2 \leq \langle \tilde{\mathbf{G}}(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} \leq B \|C_\delta\|_{\ell^2(Q)}^2.$$

El resultado se desprende de lo siguiente:

$$\sum_{\delta \in \Delta} \|C_\delta\|_{\ell^2(Q)}^2 = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{q \in Q} |C(\delta + q)|^2 = \sum_{\lambda} |C(\lambda)|^2 = \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2.$$

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Sea  $\tilde{Q} \subset Q$  un conjunto finito y  $X(t) = \sum_{q \in \tilde{Q}} C(q) e^{i(q+\lambda)t}$  un proceso aleatorio con  $C(q) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2)$  variables aleatorias independientes,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Mediante un cálculo directo, a partir de la definición de la transformada de Fourier, para todo  $j \in \mathbb{Z}$  y  $k \in \mathbb{K}$ , tenemos:

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{q \in \tilde{Q}} C(q) \int_{\mathbb{R}} e^{i(q+\lambda)t} \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = \sum_{q \in \tilde{Q}} C(q) \widehat{\psi}(a^j(q + \lambda)) e^{i(q+\lambda)ka^j},$$

por lo tanto

$$|\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{q, q' \in \tilde{Q}} C(q) \overline{C(q')} \widehat{\psi}(a^j(q' + \lambda)) \widehat{\psi}(a^j(q + \lambda)) e^{i(q-q')ka^j},$$

y sumando sobre  $k$ , entonces para todo  $N \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \\
&= \sum_{q, q' \in \tilde{Q}} C(q) \overline{C(q')} \widehat{\psi}(a^j(q' + \lambda)) \widehat{\psi}(a^j(q + \lambda)) \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(M)} e^{i(q-q')ka^j}, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Dado que para cualquier  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$  se cumple

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} e^{i(\lambda - \lambda')ka^j} = \mathbf{1}_{\mathbb{D}_j}(\lambda - \lambda'), \quad (5.19)$$

entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_{q, q' \in \tilde{Q}} C(q) \overline{C}(q') \widehat{\psi}(a^j(q' + \lambda)) \overline{\widehat{\psi}}(a^j(q + \lambda)) \mathbf{1}_{\mathbb{D}_j}(q - q').$$

Por otro lado:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \sum_{q \in \tilde{Q}} |C(q)|^2. \quad (5.20)$$

Combinando las desigualdades (5.16) con las ecuaciones (5.18), (5.19), (5.20) y luego sumando sobre  $j \in \mathbb{Z}$  se deduce que

$$A \sum_{q \in \tilde{Q}} |C(q)|^2 \leq \sum_{q, q' \in \tilde{Q}} C(q) \overline{C}(q') \tilde{G}(\lambda)(q, q') \leq B \sum_{q \in \tilde{Q}} |C(q)|^2,$$

o equivalentemente, dados  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $C(q) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2)$  variables aleatorias independientes,  $q \in \tilde{Q}$ , si definimos el vector aleatorio finito  $Z(q) = C(q) \mathbf{1}_{\tilde{Q}}(q)$  se cumple que

$$A \|Z\|_{\ell^2(\tilde{Q})}^2 \leq \langle \tilde{G}(\lambda) Z, Z \rangle_{\ell^2(\tilde{Q})} \leq B \|Z\|_{\ell^2(\tilde{Q})}^2.$$

Recordando el Lema 2.4.4 con  $p_Z$  la densidad de probabilidad Gaussiana de  $Z$ , se obtiene que para todos  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^{\tilde{Q}}$ :

$$A \|x\|_{\ell^2(Q)}^2 \leq \langle \tilde{G}(\lambda) x, x \rangle_{\ell^2(Q)} \leq B \|x\|_{\ell^2(Q)}^2. \quad (5.21)$$

Por lo tanto,  $\tilde{G}(\lambda)$  es acotado con inverso continuo, ya que el subconjunto de sucesiones finitas es denso en  $\ell^2(Q)$ . Entonces, (5.21) es válido para cualquier  $x \in \ell^2(Q)$ . Y la afirmación se demuestra recordando el Teorema 5.1.10 (véase (5.12)). ■

**Lema 5.2.3.** *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que*

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 \leq B \quad (5.22)$$

*para todo  $\lambda$ .*

ii) *Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que las desigualdades (5.16) se cumplen para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$  con espectro continuo.*

*Observación 5.2.4.* Vale la pena señalar en este caso que  $\mu(\{0\}) = 0$  y  $\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \mu(\mathbb{R})$ .

*Demostración.* Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con espectro continuo. Entonces, recordando la ecuación (5.15), para cada  $j \in \mathbb{Z}$  la sucesión de coeficientes  $(\langle X, g_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  de la ecuación (5.14), también es estacionaria y Gaussiana. Observando que esta sucesión tiene espectro continuo (para una prueba que incluye esta afirmación, véase el Lema 5.2.5), entonces por el Teorema 2.3.2,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \mathbf{E} |\langle X, \psi_{j,0} \rangle|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu(\lambda) \quad \text{a.s.} \quad (5.23)$$

Un argumento similar se aplica al proceso original  $X$ :

$$\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \mathbf{E}|X(0)|^2 = \mu(\mathbb{R}) \quad \text{a.s.} \quad (5.24)$$

Ahora, establecemos  $\Omega_c$  como el subconjunto donde se cumple la ecuación (5.24), y para cada  $j$ ,  $\Omega_j$  como el subconjunto donde se cumple la ecuación (5.23). Claramente, si

$$\tilde{\Omega} := \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} (\Omega_c \cap \Omega_j)$$

entonces  $\mathbf{P}(\tilde{\Omega}) = 1$  y en consecuencia la ecuación (5.24) es verdadera sobre  $\tilde{\Omega}$  así como

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)} \sum_{k \in \mathbb{K}(N)} |\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbf{E} |\langle X, \psi_{j,0} \rangle|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu(\lambda). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ahora podemos probar ambas implicaciones.

Si las desigualdades (5.22) son verdaderas, como las ecuaciones (5.24) y (5.25) se cumplen sobre  $\tilde{\Omega}$  es inmediato que las desigualdades (5.16) se cumplen a.s. .

Por el contrario, sea  $U \subset \mathbb{R}$  cualquier subconjunto de Borel de medida de Lebesgue finita. Definimos el proceso

$$X(t) := \int_U e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda),$$

donde se elige  $\Phi$  como la medida aleatoria de Wiener (Ejemplo 2.2.6). Suponiendo que se cumplen las desigualdades (5.16) y observando que en este caso  $\mu$  es la restricción de la medida de Lebesgue  $m_{\mathbb{R}}$  sobre  $U$ , la ecuación (5.24) combinada con (5.25) implica que:

$$A m_{\mathbb{R}}(U) \leq \int_U \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\lambda \leq B m_{\mathbb{R}}(U),$$

y entonces las desigualdades (5.22) se cumplen  $m_{\mathbb{R}}$ -a.e., pero la condición de continuidad (A2) de (5.13) prueba la afirmación para cada  $\lambda$ . ■

Recordemos que dado  $j \in \mathbb{Z}$  la sucesión de coeficientes aleatorios  $(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  también es estacionaria.

**Lema 5.2.5.** *Para cada  $l \in \mathbb{L}$ , definimos  $Z^l(k) = \langle X, \psi_{j,k} \rangle$ , con  $k \in \mathbb{K}$ . Entonces:*

$$Z_c^j(k) = \langle X_c, \psi_{j,k} \rangle \quad \text{y} \quad Z_d^j(k) = \langle X_d, \psi_{j,k} \rangle.$$

*Demostración.* Primero, notemos que para cada  $j$ :

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \langle X_c, \psi_{j,k} \rangle + \langle X_d, \psi_{j,k} \rangle.$$

Sean  $\gamma$  y  $\rho$  las medidas espectrales de las sucesiones  $(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  y  $(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}$  respectivamente. Recordemos que  $\gamma$  es la única medida tal que

$$\mathbf{E}(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle \overline{\langle X_c, \psi_{j,0} \rangle}) = \int_{\mathbb{T}_j} e^{i\lambda k} d\gamma(\lambda),$$

para todo  $k \in \mathbb{K}$ . Pero si  $\mu_c$  es la parte continua de  $\mu$ , la medida espectral de  $X$ , un cálculo directo muestra que,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle \overline{\langle X_c, \psi_{j,0} \rangle}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k a^j} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu_c(\lambda) \\ &= \sum_{d \in \mathbb{D}_j} \int_{\mathbb{T}_j + d} e^{i\lambda k a^j} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu_c(\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por unicidad de la Transformada de Fourier,  $\gamma$  viene dada por:

$$\gamma(A) = \sum_{d \in \mathbb{D}_j} \int_{A+d} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu_c(\lambda),$$

para todo  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T}_j)$ . Entonces, en particular, para cualquier  $\lambda_0 \in \mathbb{T}_j$  y eligiendo  $A = \{\lambda_0\}$ ,  $\gamma(\{\lambda_0\}) = 0$ . Por lo tanto,  $\gamma$  es continua. Por otro lado, la parte discreta de  $\mu$  se puede escribir como  $\mu_d = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \delta_\lambda$ , con  $\Lambda$  un subconjunto a lo sumo numerable de  $\mathbb{R}$ ,  $\delta_\lambda$  la medida puntual de masa concentrada en  $\lambda$ , y  $c_\lambda > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle \overline{\langle X_d, \psi_{j,0} \rangle}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k a^j} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu_d(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda k a^j} |\widehat{\psi}(a^j \xi)|^2 d\delta_\lambda(\xi). \end{aligned}$$

Esto demuestra que si  $A \in \mathbf{B}(\mathbb{T}_j)$ , entonces

$$\rho(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \sum_{d \in \mathbb{D}_j} c_{\lambda+d} \int_A |\widehat{\psi}(a^j \xi)|^2 d\delta_{\lambda+d}(\xi),$$

la cual es claramente discreta. ■

Finalmente llegamos al resultado principal del capítulo.

**Teorema 5.2.6.** *Sea  $\mathcal{A}$  un sistema afín. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ .
- ii) Existen constantes  $0 < A \leq B < \infty$  tales que las desigualdades (5.16) se cumplen para cada proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ .

*Demostración.* i)  $\Rightarrow$  ii) Observando que  $X(t)$  se puede descomponer en dos procesos ortogonales (o, de hecho, independientes)  $X_c(t)$  y  $X_d(t)$  tales que  $X(t) = X_c(t) + X_d(t)$  a.s. con medida espectral continua y discreta respectivamente, obtenemos que:

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \langle X_c, \psi_{j,k} \rangle + \langle X_d, \psi_{j,k} \rangle.$$

Por los Lemas 2.4.3 a) y 5.2.5 entonces, con probabilidad uno, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ :

$$\|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \|(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2,$$

y por lo tanto, como  $\mathbb{Z}$  es numerable, tenemos la igualdad a.s.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2. \quad (5.26)$$

De manera similar, por Lemas 2.4.3 b) y 5.2.5,

$$\|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \|X_c\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 + \|X_d\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 \quad \text{a.s.} \quad (5.27)$$

Si  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces, por el Lema 5.2.2, el resultado es válido para  $X_d$ . Además, por el Teorema 5.1.10, tomando el vector canónico  $x = e_0$ ,  $e_0(q) = \mathbf{1}_{\{0\}}(q)$  en la ecuación (5.12) obtenemos

$$A \leq \langle \tilde{G}(\lambda) e_0, e_0 \rangle_{\ell^2(Q)} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(a^j \lambda)|^2 \leq B,$$

con  $\|e_0\|_{\ell^2(Q)} = 1$ . Por lo tanto, las desigualdades (5.22) son válidas. Ahora, por el Lema 5.2.3, las desigualdades (5.16) también son válidas para  $X_c$ .

Finalmente, como la afirmación es válida para  $X_c$  y  $X_d$ , la conclusión deseada se deduce recordando las ecuaciones (5.26) y (5.27).

*ii)  $\Rightarrow$  i)* Esta es una consecuencia directa del lema 5.2.2 ya que las desigualdades (5.16) en particular son válidas para cada proceso con medida espectral discreta. ■

## 5.3. Procesos Fraccionarios Asociados a Procesos Aleatorios Estacionarios Gaussianos y Análisis de Suavidad

Los resultados obtenidos en esta sección forman parte de nuestra publicación [CeMe25].

En varias aplicaciones resulta relevante estudiar qué información estadística se puede extraer de los coeficientes discretos y aleatorios  $\langle X, \psi_{j,k} \rangle$  [CaMa71, CaMa73]. En esta sección aplicaremos los resultados de la Sección 5.2 para caracterizar la *suavidad* de las trayectorias de un proceso aleatorio estacionario Gaussiano  $X$ . Probaremos que los coeficientes afines dan una buena descripción del comportamiento de tales procesos. De hecho, veremos que una versión apropiadamente ponderada de (5.16) hace este trabajo de manera análoga a algunas caracterizaciones de espacios de Sobolev clásicos (véase por ejemplo el Capítulo 6 de [Mey92]).

### 5.3.1. Algunos Resultados sobre la Regularidad de Procesos Aleatorios Estacionarios en Sentido Amplio

La suavidad puede describirse de varias maneras, que bajo ciertas condiciones, pueden resultar equivalentes. Generalmente, esto se logra estudiando los incrementos  $X(t+h) -$

$X(t)$ , el decaimiento de la medida espectral o la existencia de las derivadas (en norma). Previo a la introducción de la maquinaria de la Sección 5.2 haremos una breve pero más precisa descripción de lo que se entiende aquí por *suavidad*. Veremos que esto comparte varias características con la descripción clásica dada por Elias Stein para los espacios de Lebesgue y Sobolev ordinarios en [St87].

El siguiente resultado (inspirado por las Propositiones 1.7.5 y 1.7.6) establece la equivalencia entre la “suavidad” del proceso  $X$  y una condición de integrabilidad satisfecha por la función de covarianza  $R_X$ , relacionando de esta manera la teoría de *integrales singulares* [Mal95, St87, Sa02] con las derivadas fraccionarias de un proceso aleatorio estacionario.

**Teorema 5.3.1.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con medida espectral  $\mu$  y sea  $0 < \alpha < 1$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty$ .
- ii)  $\int_{\mathbb{R}} |R_X(0) - R_X(h)| \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty$ .

*Demostración.* En primer lugar, téngase en cuenta que

$$\mathbf{E}|X(h) - X(0)|^2 = 2R_X(0) - 2\Re R_X(h) = 2\Re(R_X(0) - R_X(h)) = 2|\Re(R_X(0) - R_X(h))|$$

y  $|\Re z| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  conduce a

$$\int_{\mathbb{R}} |R_X(0) - R_X(h)| \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty \quad \text{si y solo si} \quad \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}|X(h) - X(0)|^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty.$$

Por el isomorfismo de Kolmogorov (2.4) tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}|X(h) - X(0)|^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{ih\lambda} - 1|^2 d\mu(\lambda) \right) \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}}. \quad (5.28)$$

Definimos

$$F_\alpha(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} |e^{ih\lambda} - 1|^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Razonando como en [Mal95, p. 144] o [St87, Proposition 4, p. 140], existe una constante  $C_\alpha > 0$  tal que  $F_\alpha(\lambda) = C_\alpha |\lambda|^{2\alpha}$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Dado que

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}|X(h) - X(0)|^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} = \int_{\mathbb{R}} F_\alpha(\lambda) d\mu(\lambda) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda),$$

La equivalencia se obtiene cambiando el orden de integración en (5.28). ■

Cuando  $\alpha = 1$  realmente tenemos una propiedad en términos de la derivada en media cuadrática del proceso. Omitimos la prueba de este resultado enunciado a continuación ya que está bien documentada en la literatura, por ejemplo, [GS04, Roz67], de hecho comparte algunas características del enunciado más general del Teorema 5.3.3.

**Teorema 5.3.2.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con medida espectral  $\mu$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$i) \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\mu(\lambda) < \infty.$$

$$ii) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \text{ existe en el sentido de } L^2(\Omega) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

El caso  $\alpha = 1$  muestra que el proceso derivado (usual)  $\frac{dX}{dt}$  existe en el sentido de  $L^2(\Omega)$  y justifica las manipulaciones formales:

$$\frac{dX}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{it\lambda} d\Phi(\lambda) \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial(e^{it\lambda})}{\partial t} d\Phi(\lambda).$$

En la misma línea, terminamos esta subsección con una caracterización análoga de la suavidad del proceso relacionada con integrales singulares y derivadas fraccionarias, que nos permiten trabajar con un rango más amplio de  $\alpha \in (0, 2)$ . Por la  $\alpha$ -ésima derivada fraccionaria  $D^\alpha X$  de un proceso aleatorio estacionario  $X$  entendemos, al menos formalmente, el proceso aleatorio dado por

$$(D^\alpha X)(t) = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^\alpha e^{it\lambda} d\Phi(\lambda). \quad (5.29)$$

Por (2.7), cuando  $\lambda \mapsto |\lambda|^\alpha$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}, \mathbf{B}(\mathbb{R}), d\mu)$ ,  $D^\alpha X$  resulta ser un proceso aleatorio estacionario bien definido. El siguiente teorema se asemeja a un resultado clásico de la teoría de integrales singulares y espacios de Sobolev fraccionarios (véase las Proposiciones 1.7.7 y 1.7.8), y en su demostración se pone de manifiesto la analogía con las ecuaciones (1.28) y (1.29). En particular, esto muestra que (5.29) también puede interpretarse, de una manera más clásica, como un límite apropiado de los incrementos de  $X$ .

**Teorema 5.3.3.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio con medida espectral  $\mu$  y sea  $0 < \alpha < 2$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$i) \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty.$$

$$ii) \int_{\mathbb{R}} \mathbf{E}|X(t+h) + X(t-h) - 2X(t)|^2 \frac{dh}{|h|^{1+2\alpha}} < \infty.$$

$$iii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|h| \geq \varepsilon} (X(t+h) - X(t)) \frac{dh}{|h|^{1+\alpha}} \text{ existe en el sentido de } L^2(\Omega) \text{ para cada } t \in \mathbb{R}.$$

*Demostración.* Por el mismo procedimiento que en el Teorema 5.3.1, por un lado tenemos

$$\mathbf{E}|X(t+h) + X(t-h) - 2X(t)|^2 = |6\Re(R_X(0) - R_X(h)) - 2\Re(R_X(2h) - R_X(0))|$$

y por otro lado, para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos

$$\mathbf{E}|X(t+h) + X(t-h) - 2X(t)|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{ith} + e^{-ith} - 2|^2 d\mu(\lambda).$$

- $i) \Leftrightarrow ii)$  La prueba es similar a la del Teorema 5.3.1 y se omite.  
 $i) \Rightarrow iii)$  La hipótesis garantiza la buena definición del proceso

$$Y_\alpha(t) = c(\alpha) \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^\alpha e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) = c(\alpha)(D^\alpha X)(t),$$

donde  $c(\alpha)$  es una constante que se especificará más adelante. Además,  $Y_\alpha$  es un proceso aleatorio estacionario en sentido amplio y continuo en media cuadrática. Para  $0 < \varepsilon < 1$  consideramos el proceso

$$(D_\varepsilon^\alpha X)(t) = \int_{|h| \geq \varepsilon} \frac{(X(t+h) - X(t))}{|h|^{1+\alpha}} dh. \quad (5.30)$$

Al hacer la sustitución  $h = \varepsilon y$  podemos reescribir (5.30) como

$$(D_\varepsilon^\alpha X)(t) = \frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{|y| \geq 1} \frac{(X(t + \varepsilon y) - X(t))}{|y|^{1+\alpha}} dy.$$

Ahora, al introducir la representación integral estocástica de  $X$  seguida de un cambio de orden de integración (Lema 2.2.10) y al multiplicar por  $\frac{|\lambda|^\alpha}{|\lambda|^\alpha} \mathbf{1}_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\lambda)$ , convenientemente reagrupado, obtenemos

$$(D_\varepsilon^\alpha X)(t) = d(\alpha) \int_{\mathbb{R}} \left( |\lambda|^\alpha \widehat{K}_\alpha(\varepsilon\lambda) \right) e^{it\lambda} d\Phi(\lambda), \quad (5.31)$$

donde

$$\widehat{K}_\alpha(\lambda) = \frac{1}{d(\alpha)|\lambda|^\alpha} \int_{|y| \geq 1} \frac{(e^{i\lambda y} - 1)}{|y|^{1+\alpha}} dy, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

con  $K_\alpha \in L^1(\mathbb{R})$  y la constante  $d(\alpha)$  (la misma de la ecuación (1.30)) es tal que  $\widehat{K}_\alpha(0) = \int_{\mathbb{R}} K_\alpha(t) dt = 1$  (aquí se usa  $0 < \alpha < 2$ , véase ecuaciones (1.31), (1.32) y (1.33)). Declaramos  $c(\alpha) = d(\alpha)$ . Dado que  $\widehat{K}_\alpha$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  que se anula en el infinito ( $\widehat{K}_\alpha \in C_0(\mathbb{R})$ ), esta resulta acotada y satisface  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \widehat{K}_\alpha(\varepsilon\lambda) = \widehat{K}_\alpha(0) = 1$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, en la igualdad

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|(D_\varepsilon^\alpha X)(t) - Y_\alpha(t)|^2 &= c(\alpha)^2 \mathbf{E} \left| \int_{\mathbb{R}} \left( |\lambda|^\alpha [\widehat{K}_\alpha(\varepsilon\lambda) - 1] \right) e^{it\lambda} d\Phi(\lambda) \right|^2 \\ &= c(\alpha)^2 \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} |\widehat{K}_\alpha(\varepsilon\lambda) - 1|^2 d\mu(\lambda), \end{aligned}$$

podemos aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (recordemos que  $\mu$  es una medida finita) para obtener el resultado deseado.

$iii) \Rightarrow i)$  Supongamos ahora que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (D_\varepsilon^\alpha X)(t)$  existe en el sentido de  $L^2(\Omega)$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ , donde  $(D_\varepsilon^\alpha X)(t)$  es como en (5.31). Por lo tanto, por el Lema de Fatou

$$\infty > \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}|(D_\varepsilon^\alpha X)(t)|^2 \geq \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\widehat{K}_\alpha(\varepsilon\lambda)|^2 \right) d\mu(\lambda) = c(\alpha)^2 \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda).$$

■

### 5.3.2. Regularidad de Procesos Aleatorios Estacionarios Gaussianos en términos de Marcos Afines

Dado  $\mathcal{A} := \{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}$  un sistema afín en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $0 < \alpha < 1$  consideramos el sistema  $I^\alpha \mathcal{A} := \{I^\alpha \psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{K}\}$ , donde  $(I^\alpha \psi_{j,k})(t)$  denota el *potencial de Riesz* de  $\psi_{j,k}$  de orden  $\alpha$  en  $t \in \mathbb{R}$  (véase Definición 1.7.2, ecuaciones (1.26) y (1.27)).

Bajo la condición adicional de ser Gaussiano, una caracterización equivalente de la suavidad de  $X$  (en cualquiera de las interpretaciones equivalentes de la Subsección 5.3.1) se da en los dos lemas siguientes. Esto implica el decaimiento de los coeficientes aleatorios de marco  $\langle X, \psi_{j,k} \rangle$ . Recordemos que por los resultados de la sección anterior es necesario y suficiente estudiar cuándo  $|\lambda|^{2\alpha} d\mu$  define una medida finita.

**Lema 5.3.4.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con medida espectral discreta  $\mu$  que satisface  $\mu(\{0\}) = 0$  y sea  $0 < \alpha < 1$ . Supongamos que  $\mathcal{A}$  es un sistema afín tal que  $\mathcal{A}$  e  $I^\alpha \mathcal{A}$  son marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

- i)  $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty$ .
- ii)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 < \infty \quad \text{a.s.}$

*Demostración.* Hemos visto en la demostración del Lema 5.2.2 que

$$\|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{\delta \in \Delta} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)},$$

para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , por lo tanto

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} \quad \text{a.s.} \quad (5.32)$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} a^{-2j\alpha} \langle \tilde{\mathbf{G}}_j(\delta) C_\delta, C_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} &= \\ &= a^{-2j\alpha} \sum_{q, q' \in Q} C(\delta + q) \overline{C}(\delta + q') \widehat{\psi}(a^j(\delta + q)) \widehat{\psi}(a^j(\delta + q')) \mathbf{1}_{\mathbb{D}_j}(q - q') \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a^{-2j\alpha} C(\delta + q) \overline{C}(\delta + q') \widehat{\psi}(a^j(\delta + q)) \widehat{\psi}(a^j(\delta + q')) &= \\ &= C(\delta + q) |\delta + q|^\alpha \widehat{I^\alpha \psi}(a^j(\delta + q)) \overline{C}(\delta + q') |\delta + q'|^\alpha \widehat{I^\alpha \psi}(a^j(\delta + q')). \end{aligned}$$

Definimos en primer lugar:

$$D_\delta^\alpha(q) := D^\alpha(\delta + q) = C(\delta + q) |\delta + q|^\alpha, \quad \delta \in \Delta, \quad q \in Q.$$

Nótese que estos son precisamente los coeficientes aleatorios del proceso  $D^\alpha X$  si éste existe. Escribimos también

$$\tilde{\mathbf{G}}_j^\alpha(\delta)(q, q') := \widehat{I^\alpha \psi}(a^j(\delta + q)) \widehat{I^\alpha \psi}(a^j(\delta + q')) \mathbf{1}_{\mathbb{D}_j}(q - q'), \quad \delta \in \Delta, \quad q, q' \in Q,$$

con lo cual podemos reescribir la ecuación (5.32) como

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle \tilde{G}_j^\alpha(\delta) D_\delta, D_\delta \rangle_{\ell^2(Q)} = \sum_{\delta \in \Delta} \langle \tilde{G}^\alpha(\delta) D_\delta^\alpha, D_\delta^\alpha \rangle_{\ell^2(Q)}$$

donde la última igualdad se sigue por un razonamiento como el del Lema 5.2.2. Puesto que  $I^\alpha \mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , existen constantes  $0 < A_\alpha \leq B_\alpha < \infty$  tales que

$$A_\alpha \|D_\delta^\alpha\|_{\ell^2(Q)}^2 \leq \langle \tilde{G}^\alpha(\delta) D_\delta^\alpha, D_\delta^\alpha \rangle_{\ell^2(Q)} \leq B_\alpha \|D_\delta^\alpha\|_{\ell^2(Q)}^2.$$

Ahora, la igualdad

$$\sum_{\delta \in \Delta} \|D_\delta^\alpha\|_{\ell^2(Q)}^2 = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{q \in Q} |C(\delta + q)|^2 |\delta + q|^{2\alpha} = \|D^\alpha X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2,$$

lleva a la equivalencia:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 < \infty \quad \text{a.s.} \quad \Longleftrightarrow \quad \|D^\alpha X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 < \infty \quad \text{a.s.}$$

Finalmente, podemos demostrar la afirmación observando que si  $X$  tiene espectro discreto, entonces  $(D^\alpha X)(t)$  toma la forma de una serie de elementos aleatorios Gaussianos e independientes en  $\mathcal{H} := \overline{\text{gen}}\{e^{i\lambda t} : \lambda \in \Lambda\} \subset B^2(\mathbb{R})$  el cual es un espacio de Hilbert separable. Al observar que

$$\mathbf{E} \|D^\alpha X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda),$$

la doble implicación  $i) \Leftrightarrow ii)$  se sigue de inmediato ya que:  $D^\alpha X \in B^2(\mathbb{R})$  a.s. si y solo si  $\mathbf{E} \|D^\alpha X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 < \infty$ . Dado que para series Gaussianas de elementos aleatorios independientes en un espacio de Hilbert separable, la convergencia a.s. y en media  $p$  ( $p = 2$  en este caso) son equivalentes por la Proposición 2.2.9. ■

Si  $X$  es un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con medida espectral continua, por el Teorema Ergódico tenemos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \mathbf{E} |\langle X, \psi_{j,0} \rangle|^2 \quad \text{a.s.} \quad (5.33)$$

El siguiente resultado muestra que el Lema 5.3.4 es válido para procesos aleatorios estacionarios Gaussianos con medida espectral continua.

**Lema 5.3.5.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con medida espectral continua  $\mu$  y sea  $0 < \alpha < 1$ . Supongamos que  $\mathcal{A}$  es un sistema afín tal que  $\mathcal{A}$  e  $I^\alpha \mathcal{A}$  son marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$i) \quad \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty.$$

$$ii) \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 < \infty \quad \text{a.s.}$$

*Demostración.* Para empezar, por (5.33) tenemos

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \mathbf{E} |\langle X, \psi_{j,0} \rangle|^2 \quad \text{a.s. .}$$

Ya que

$$\mathbf{E} |\langle X, \psi_{j,0} \rangle|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu(\lambda),$$

entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 d\mu(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2}{|a^j \lambda|^{2\alpha}} d\mu(\lambda) \quad \text{a.s. .} \end{aligned}$$

Ahora, puesto que  $\widehat{I^\alpha \mathcal{A}}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , existen constantes  $0 < A_\alpha \leq B_\alpha < \infty$  tales que

$$A_\alpha \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2}{|a^j \lambda|^{2\alpha}} \leq B_\alpha \quad \text{a.e. } \lambda,$$

por lo tanto

$$A_\alpha \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B_\alpha \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) \quad \text{a.s.}$$

lo que prueba la equivalencia buscada. ■

Juntando los dos últimos lemas obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.6.** *Sea  $X$  un proceso aleatorio estacionario Gaussiano con medida espectral  $\mu$  que satisface  $\mu(\{0\}) = 0$  y sea  $0 < \alpha < 1$ . Supongamos que  $\mathcal{A}$  es un sistema afín tal que  $\mathcal{A}$  e  $I^\alpha \mathcal{A}$  son marcos de  $L^2(\mathbb{R})$ . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

$$i) \int_{\mathbb{R}} (|\lambda|^2 + 1)^\alpha d\mu(\lambda) < \infty.$$

$$ii) \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a^{-2j} + 1)^\alpha \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 < \infty \quad \text{a.s. .}$$

*Demostración.* Dado que  $X$  es un proceso aleatorio estacionario Gaussiano y  $\mathcal{A}$  es un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ , el Teorema 5.2.6 da como resultado

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \leq B \|X\|_{B^2(\mathbb{R})}^2 < \infty \quad \text{a.s. .} \quad (5.34)$$

$i) \Rightarrow ii)$  Dado que  $|\lambda|^{2\alpha} \leq (|\lambda|^2 + 1)^\alpha$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , por hipótesis y por monotonía obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty.$$

Dado que  $X$  se puede descomponer como  $X = X_d + X_c$ , con  $X_d$  y  $X_c$  procesos aleatorios estacionarios Gaussianos con medidas espectrales discreta y continua  $\mu_{X,d}$  y  $\mu_{X,c}$  respectivamente, que satisfacen

$$\langle X, \psi_{j,k} \rangle = \langle X_d, \psi_{j,k} \rangle + \langle X_c, \psi_{j,k} \rangle$$

para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{K}$  y también que

$$\|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 = \|(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \|(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \quad \text{a.s.}$$

para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu_{X,d}(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu_{X,c}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2\alpha} d\mu(\lambda) < \infty.$$

El resultado se obtiene aplicando los Lemas 5.3.4 y 5.3.5 a  $X_d$  y  $X_c$  respectivamente junto con (5.34). De hecho, dado que  $(a^{-2j} + 1)^\alpha \leq 2^\alpha(a^{-2j\alpha} + 1)$  para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$ , por monotonía obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a^{-2j} + 1)^\alpha \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a^{-2j} + 1)^\alpha \|(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \\ &\quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a^{-2j} + 1)^\alpha \|(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 \\ &\leq 2^\alpha \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X_d, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \\ &\quad 2^\alpha \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X_c, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 + \\ &\quad 2^\alpha \sum_{j \in \mathbb{Z}} a^{-2j\alpha} \|(\langle X, \psi_{j,k} \rangle)_{k \in \mathbb{K}}\|_{B^2(\mathbb{K})}^2 < \infty \quad \text{a.s.} \end{aligned}$$

ii)  $\Rightarrow$  i) El razonamiento es similar a la implicación anterior pero invirtiendo el orden. Primero usamos la desigualdad  $a^{-2j\alpha} \leq (a^{-2j} + 1)^\alpha$  para cualquier  $j \in \mathbb{Z}$  y luego la desigualdad  $(|\lambda|^2 + 1)^\alpha \leq 2^\alpha(|\lambda|^{2\alpha} + 1)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . ■

Obsérvese que la utilidad de los últimos resultados depende de verificar previamente que  $I^\alpha \mathcal{A}$  es también un marco de  $L^2(\mathbb{R})$ . El siguiente ejemplo sencillo muestra que esto no es un gran obstáculo en principio.

**Ejemplo 5.3.7** (Bandpass wavelets). Recordemos que si  $\psi$  es de *banda limitada*, entonces las caracterizaciones de la Sección 5.2 se reducen a lo siguiente. Una condición necesaria y suficiente para que  $\mathcal{A}$  sea un marco de  $L^2(\mathbb{R})$  es que se cumpla lo siguiente:

$$A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2 \leq B \quad \text{a.e.}, \quad (5.35)$$

donde  $A, B$  son las cotas de marco de  $\mathcal{A}$ . Supongamos además que  $\psi$  es de *pasa banda*, es decir, existen  $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$  tales que  $\widehat{\psi}$  se anula fuera de  $D = \{\lambda_0 < |\lambda| < \lambda_1\}$ . Este

es el caso, por ejemplo, de la familia de *wavelets de Meyer* (véase [He11, págs. 422-425]). Ahora debemos verificar (5.35) para

$$\widehat{I^\alpha \psi_{j,k}}(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^\alpha} \widehat{\psi_{j,k}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De hecho, podemos estimar la cota inferior de marco como

$$A_\alpha = \frac{A}{\lambda_1^{2\alpha}} \leq \sum_{j: \lambda_0 \leq |a^j \lambda| \leq \lambda_1} \frac{|\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2}{|a^j \lambda|^{2\alpha}} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{\psi}(a^j \lambda)|^2}{|a^j \lambda|^{2\alpha}} \quad \text{a.e. } \lambda.$$

La cota superior  $B_\alpha = B/\lambda_0^{2\alpha}$  se puede obtener de manera similar. ◆

*Observación 5.3.8.* Terminamos este trabajo mencionando la similitud entre los resultados obtenidos en esta subsección con aquellos (véase por ejemplo algunos de los resultados contenidos en [Mey92, págs. 50-54 y págs 199-201]) concernientes a los *espacios de Besov*  $B_p^{\alpha,q}(\mathbb{R})$ , y en particular al espacio de Sobolev  $H^\alpha = B_1^{\alpha,2}(\mathbb{R})$ . Los mismos motivaron fuertemente el desarrollo aquí expuesto. ◆

# Bibliografía

- [AK82] Akilov G. P., Kantorovich L. V., *Functional Analysis*, Pergamon Press, Second Edition (1982)
- [ABG06] Andres J., Bersani A. M., Grande R. F., *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 26, pp. 121-188, Roma (2006)
- [Be01] Benedetto J., *Spectral Synthesis*, Springer (1975)
- [BTA04] Berlnet A., Thomas-Agnan C., *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London (2004)
- [BIM18] Bilalov B. T., Ismailov M. I., Mamedova Z. V., *Uncountable Frames in Non-Separable Hilbert Spaces and their Characterization*, Azerbaijan Journal of Mathematics, 8 (1) pp. 151-178 (2018)
- [BFG17] Boggiatto P., Fernández C., Galbis A., *Gabor systems and almost periodic functions*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 42, pp. 65-87 (2017)
- [BDR94] de Boor C., DeVore R., Ron A., *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in  $L_2(\mathbb{R}^d)$* , J. Functional Anal. 119, pp. 37-78 (1994)
- [BL11] Bownik M., Lemvig J., *Affine and quasi-affine frames for rational dilations*, Trans. Am. Math. Soc. 363, pp. 1887-1924 (2011)
- [Br11] Brezis H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer New York (2011)
- [CaMa71] Cambanis S., Masry E., *On the representation of weakly continuous stochastic processes*, Information Sciences, Vol. 3 (4), 277-290, Oct. (1971)
- [CaMa73] Cambanis S., Masry E., *The Representation of Stochastic Processes Without Loss of Information*, SIAM J. Appl. Math., Vol. 25, No. 4, pp. 628-633. Dec. (1973)
- [CeMe22] Centeno H. D., Medina J. M., *AP-frames and Stationary Random Processes*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 61, pp. 1-24 (2022)
- [CeMe25] Centeno H. D., Medina J. M., *Affine AP-frames and Stationary Random Processes*, Cornell University Library, math.PR. arXiv:2507.15090 (2025)

- [Ch16] Christensen O., *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Birkhäuser, 2nd Edition (2016)
- [CSS98] Chui C. K., Shi X., Stöckler J., *Affine frames, quasi-affine frames, and their duals*, Adv. Comput. Math. 8(1-2), pp. 1-17 (1998)
- [Do53] Doob J. L., *Stochastic Processes*, Wiley (1953)
- [DS52] Duffin R. J., Schaeffer A. C., *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Am. Math. Soc. 72, pp. 341-366 (1952)
- [DMcK08] Dym H., McKean H. P., *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*, Dover (2008)
- [Fo99] Folland G. B., *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, Wiley, Second Edition (1999)
- [Gal04] Galindo F., *Some Remarks on: "On the windowed Fourier transform and wavelet transform of almost periodic functions"*, Appl. Comput. Harmonic Anal. 16 (3), pp. 174-181 (2004)
- [Ga15] García A. G., *Operator Theory, Sampling Theory and Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, Springer Basel, pp. 1-22 (2015)
- [GV64] Gel'fand I. M., Vilenkin N. Ya., *Generalized Functions: Volume 4, Applications of Harmonic Analysis*, English transl. Academic Press, New York (1964)
- [GS04] Gikhman I. I., Skorokhod A. V., *The Theory of Stochastic Processes*, Vol. I., Springer, Berlin (2004)
- [Gr01] Gröchenig K., *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser (2001)
- [He11] Heil C., *A Basis Theory Primer, Expanded edition*, Birkhäuser Boston, MA (2011)
- [JLZ98] Jacob B., Larsen M., Zwart H., *Corrections and extensions of "Optimal control of linear systems with almost periodic input" by G. Da Prato and A. Ichikawa*, SIAM J. Control Optimiz. 36, pp. 1473-1480 (1998)
- [Ka93] Kahane J. P., *Some Random Series of Functions*, 2nd. Ed., Cambridge (1993)
- [Kat04] Katznelson Y., *An Introduction to Harmonic Analysis*, 3rd edition. Cambridge University Press, Cambridge (2004)
- [KR09] Kim Y. H., Ron A., *Time Frequency Representations of Almost Periodic Functions*, Constr. Approx. 29, pp. 303-323 (2009)
- [Kim13] Kim Y. H., *Representations of Almost-Periodic Functions Using Generalized Shift-Invariant Systems in  $\mathbb{R}^d$* , J. Fourier Anal Appl. 19, pp. 857-876 (2013)

- [KVZRS72] Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Va. B., Stetsenko V. Va., *Approximate Solution of Operator Equations*, Wolters-Noordhoff (1972)
- [KW92] Kwapień S., Wołczyński W. A., *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*, Birkhäuser, (1992)
- [Lee78] Lee A. J., *Sampling theorems for non stationary processes*, Trans. of the A.M.S. V. 242, pp. 225-241 (1978)
- [Llo59] Lloyd S. P., *A Sampling Theorem For Stationary (wide sense) stochastic processes*, Trans. of the A.M.S. 92 (1), pp. 1-12 (1959)
- [Mal95] Malliavin P., *Integration and Probability*, Springer New York (1995)
- [Mar18] Maruyama T., *Fourier Analysis of Economic Phenomena*, Springer, (2018)
- [Med24] Medina J. M., *Laws of Large Numbers, Spectral Translates and Sampling over LCA Groups*, J. Fourier Anal. Appl. 30 (67), pp. 1-32 (2024)
- [MCFM26] Medina J. M., Centeno H. D., Florentín R. F., Miralles M., *Smoothness and time-frequency analysis in Sobolev-Besicovitch spaces of almost periodic functions*, Journal of Approximation Theory, Vol. 315, 106255 (2026)
- [Mey92] Meyer Y., *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advance Mathematics No. 37 (1992)
- [Pan90] Pankov A. A., *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Springer Netherlands (1990)
- [Pap02] Papoulis A., Pillai U., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill (2002)
- [Par01] Partington J. R., *On the Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform of Almost Periodic Functions*, Appl. Comput. Anal. Appl. 10, pp. 45-60 (2001)
- [Pi09] Pinsky M., *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society (2009)
- [Pou01] Pourahmadi M., *Foundations of Time Series Analysis and Prediction Theory*, Wiley series in Statistics (2001)
- [Rao11] Rao M. M., *Random and Vector Measures*, World Scientific Eds. (2011)
- [ReSi80] Reed M., Simon B., *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol 1: Functional Analysis*, Academic Press INC., London (1980)
- [RS95] Ron A., Shen Z., *Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of  $L^2(\mathbb{R}^d)$* , Canad. J. Math., 47 pp. 1051-1094 (1995)

- [RS97a] Ron A., Shen Z., *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in  $L^2(\mathbb{R}^d)$* , Duke Math. J. 89, pp. 237-282 (1997)
- [RS97b] Ron A., Shen Z., *Affine systems in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ : The analysis of the analysis operator*, J. Funct. Anal. 148, pp. 408-447 (1997)
- [RS05] Ron A., Shen Z., *Generalized Shift-Invariant Systems*, Constr. Approx. 22, pp. 1-45 (2005)
- [Ro85] Rosenblatt M., *Stationary Sequences and Random Fields*, Birkhäuser (1985)
- [Roz67] Rozanov Y., *Stationary Random Processes*, Holden-Day (1967)
- [SS16] Saitoh S., Sawano S., *Theory of Reproducing Kernels and Applications*, vol. 44 Springer (2016).
- [Sa02] Samko S. G., *Hypersingular Integrals and Their Applications*, CRC Press (2002)
- [St87] Stein E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press (1987)
- [WZ94] Walter G., Zhang J., *A wavelet-based KL-like expansion for wide-sense stationary random processes*, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 42, no. 7, pp. 1737-1745, July (1994)