UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Análisis de problemas anisotrópicos no locales y aplicaciones variacionales

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Juan Ignacio Ceresa Dussel

Director de tesis: Dr. Julián Fernández Bonder.
Consejero de estudios: Dr. Ariel Salort.
Lugar de trabajo: Instituto de Cálculo UBA-CONICET.
Buenos Aires, 2025.

Resumen

Análisis de problemas anisotrópicos no locales y aplicaciones variacionales.

En esta tesis doctoral, nos hemos centrado en trabajar con problemas elípticos anisotrópicos. Lo primero que desarrollamos son los espacios de Sobolev anisotrópicos, tanto locales como no locales, a partir de los cuales construiremos toda nuestra teoría. Dentro de este marco, una piedra angular de nuestro trabajo es el estudio del comportamiento asintótico en la transición desde los casos no locales o fraccionarios hasta el caso local. A continuación, presentamos nuestro operador, una variante del p-Laplaciano fraccionario, y estudiamos diversos problemas clásicos relacionados con él, como el problema de Dirichlet cuando el término fuente es lineal o semilineal, así como el caso en el que consideramos ground state solutions, centrándonos principalmente en el comportamiento asintótico de las soluciones.

Posteriormente, en esta tesis nos enfocamos en resolver un problema de autovalores adecuado para este tipo de operadores. Sin embargo, debido a su falta de homogeneidad, modificamos el operador para obtener una versión homogénea que preserve los comportamientos previamente estudiados. Así, tras demostrar la existencia de autovalores en los casos local y no local, utilizando principalmente la teoría de Lusternik-Schnirelmann, analizamos su comportamiento asintótico.

Finalmente, en el último trabajo de esta tesis, nos centramos en problemas de optimización de dominio, en los cuales la función costo está relacionada con nuestro operador. Comenzamos estudiando el caso isotrópico, luego analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones cuando los parámetros fraccionarios tienden a uno, y finalmente generalizamos el análisis al caso anisotrópico.

Esta tesis tiene como eje central 3 artículos ya publicados y uno enviado para publicación.

- Ceresa Dussel, Ignacio and Fernández Bonder, Julián, *A Bourgain-Brezis-Mironescu formula for anisotropic fractional Sobolev spaces and applications to anisotropic fractional differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023.[16]
- Ceresa Dussel, Ignacio and Fernández Bonder, Julián, *Existence of eigenvalues for anisotropic and fractional anisotropic problems via Lusternik-Schnirelmann theory*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2024 .[15]
- Ceresa Dussel, Ignacio, *Shape optimization problems involving nonlocal and nonlinear operators*, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 2025.[14]
- Sabri Bahrouni, Julián Fernández Bonder, Ignacio Ceresa Dussel, Olimpio Miyagaki *Peridynamics and anisotropic fractional Sobolev spaces with variable exponents*, 2025.[3]

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales parciales elípticas, operadores anisotrópicos, valores propios, optimización de dominios, problemas no locales, espacios de Sobolev fraccionarios, problemas variacionales.

Abstract

Analysis of nonlocal anisotropic problems and variational applications.

In this doctoral thesis, we focus on anisotropic elliptic problems. The first step is the development of anisotropic Sobolev spaces, both local and nonlocal, which serve as the foundation for the entire theoretical framework. Within this setting, a cornerstone of our work is the study of the asymptotic behavior during the transition from nonlocal or fractional cases to the local case. Next, we introduce our operator, a variant of the fractional pp-Laplacian, and we study several classical problems related to it, such as the Dirichlet problem when the source term is linear or semilinear, as well as the case involving ground state solutions, with a primary focus on the asymptotic behavior of solutions.

Subsequently, this thesis addresses an eigenvalue problem tailored to this type of operator. However, due to the lack of homogeneity of the original operator, we construct a homogeneous version that preserves the previously studied behaviors. Thus, after proving the existence of eigenvalues in both the local and nonlocal cases—mainly using Lusternik-Schnirelmann theory—we analyze their asymptotic behavior.

Finally, in the last part of this thesis, we study domain optimization problems, in which the cost function is related to our operator. We begin by analyzing the isotropic case, then study the asymptotic behavior of solutions as the fractional parameters tend to one, and finally extend the analysis to the anisotropic case.

This thesis is based on three already published articles and one submitted for publication:

- Ceresa Dussel, Ignacio and Fernández Bonder, Julián, *A Bourgain–Brezis–Mironescu formula for anisotropic fractional Sobolev spaces and applications to anisotropic fractional differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2023.[16]
- Ceresa Dussel, Ignacio and Fernández Bonder, Julián, *Existence of eigenvalues for anisotropic and fractional anisotropic problems via Lusternik-Schnirelmann theory*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2024.[15]
- Ceresa Dussel, Ignacio, *Shape optimization problems involving nonlocal and nonlinear operators*, Journal of Elliptic and Parabolic Equations, 2025.[14]
- Sabri Bahrouni, Julián Fernández Bonder, Ignacio Ceresa Dussel, Olimpio Miyagaki, *Peridynamics and anisotropic fractional Sobolev spaces with variable exponents*, 2025[3].

Keywords: Elliptic partial differential equations, anisotropic operators, eigenvalues, domain optimization, nonlocal problems, fractional Sobolev spaces, variational problems.

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi director, Julián, por su paciencia, compromiso y por acompañar con dedicación cada etapa de este trabajo. A Ayelén, por estar siempre a mi lado en este camino, por su apoyo constante y por acompañarme en todo momento. A todos los profesores y colegas con los que me crucé a lo largo de estos años, quienes siempre estuvieron dispuestos a darme una mano y compartir sus conocimientos. También a la oficina 2200, espacio de mates y charlas, que tantas veces funcionó como lugar de apoyo y desahogo. A todo el aparato administrativo que sostiene silenciosamente el día a día, con una mención especial a Deby, por su enorme predisposición y ayuda permanente con los trámites del doctorado. A mi familia y amigos, por su cariño, comprensión y aliento en este proceso. Finalmente, a la universidad pública y al CONICET, sin cuyo apoyo este trabajo me habría resultado mucho más difícil y, tal vez, no me hubiera permitido conocer a tanta gente maravillosa.

Índice general

1. Introducción **11**

2. Espacios de Sobolev Anisotrópicos **17**
2.1. Bourgain–Brezis–Mironescu 20
2.2. Caso peridinámico 28
2.3. Maz'ya-Shaposhnikova 31

3. Pseudo $\vec{p}$– Laplaciano fraccionario anisotrópico **35**
3.1. Γ-convergencia 35
3.2. Caso semi-lineal 40
3.3. Soluciones Ground-state 43

4. Un problema de autovalores **49**
4.1. Espacio de Sobolev mixto 49
4.2. Ecuación de Euler-Lagrange 53
4.3. Caso no local 57
4.4. Propiedades generales de los autovalores 59
4.5. Existencia de autovalores 63

5. Problemas de optimización de dominio **69**
5.1. Caso isotrópico 69
5.2. Comportamiento asintótico 81
5.3. Caso anisotrópico 85

Capítulo 1

Introducción

La difusión es un proceso fundamental en la naturaleza que describe el movimiento de partículas desde regiones de mayor concentración hacia regiones de menor concentración. Este fenómeno, impulsado por la tendencia de los sistemas a alcanzar el equilibrio según las leyes de la termodinámica, se manifiesta en diversos contextos, desde el transporte de moléculas en sistemas biológicos hasta la transferencia de calor en materiales sólidos, así como en la dispersión de contaminantes en el medio ambiente e incluso en ciertos modelos económicos. En términos matemáticos, estos procesos se describen comúnmente mediante ecuaciones diferenciales parciales (EDP), siendo la ecuación del calor una de las formulaciones más conocidas. Esta ecuación describe cómo la temperatura $u(x, y)$ se distribuye y evoluciona en un medio con el tiempo debido a la conducción térmica.

A fin de realizar una aproximación al objeto de estudio de nuestra tesis, veamos brevemente la deducción de la ecuación del calor a través del paseo al azar en una dimensión. Consideremos una partícula que se encuentra inicialmente en la posición $x = 0$ sobre la recta real. Esta partícula puede moverse, con probabilidad $\frac{1}{2}$, hacia la derecha o hacia la izquierda una distancia h después de un cierto intervalo de tiempo τ. Llamemos $p(m, n)$ a la probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición mh en el tiempo $n\tau$. Luego

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2}p(m-1, n) + \frac{1}{2}p(m+1, n).$$

De forma análoga

$$p(m, n+1) - p(m, n) = \frac{1}{2}\left(p(m-1, n) - 2p(m, n) + p(m+1, n)\right).$$

Supongamos que p es la evaluación de una cierta función $u(x, t)$, definida en $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, sobre los puntos de una grilla $(mh, n\tau)$ con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos las variables continuas $x = mh$ y $t = n\tau$, entonces $u(x, t)$ verifica

$$\frac{u(x, t+\tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2}.$$

Finalmente, si asumimos que las variables h y τ están relacionadas mediante $h^2 = 2\tau$, y pasamos al límite cuando $h \to 0$ y $\tau \to 0$, obtenemos la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si además suponemos que la evolución de la temperatura en algún tiempo se estabiliza, es decir converge cuando $t \to \infty$, entonces este estado estacionario será independiente de t y cumplirá la muy conocida ecuación de *Laplace*

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Este mismo análisis lo podemos extender a $\mathbb{R}^n$, lo que nos lleva a la notación clásica que utiliza el operador Laplaciano Δ.

En el modelo anterior, los saltos están limitados a los vecinos más cercanos, no obstante, supongamos que las partículas pueden saltar a distancias mayores. Para modelar estos movimientos de largo alcance, asumimos que las partículas pueden saltar a posiciones arbitrarias con una probabilidad que depende de la distancia. Este comportamiento se describe mediante una distribución de probabilidad de salto $w(x)$ que típicamente sigue una ley de potencias

$$w(x) \sim \frac{1}{|x|^{1+2s}}, \quad 0 < s < 1.$$

Aquí, s es el parámetro fraccionario que controla la dispersión, para valores más pequeños de s, los saltos largos son más probables. A partir de esto, la probabilidad de encontrar una partícula en la posición x en el tiempo $t+\tau$ está dada por

$$P(x, t+\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} w(x-y)P(y,t)\, dy.$$

Este modelo refleja que las partículas pueden llegar a x desde cualquier posición y, con una probabilidad proporcional a $w(x-y)$. A partir del análisis previo se deduce la versión fraccionaria de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{C_s}{2}\, \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,t) - u(y,t)}{|x-y|^{1+2s}}\, dy,$$

donde la parte derecha es el operador Laplaciano fraccionario de orden s, con $0 < s \leq 1$ y donde *P.V.* denota el valor principal de la integral. Si nuevamente suponemos que la evolución de la temperatura en algún tiempo se estabiliza, entonces dicho estado estacionario será independiente de t y cumplirá la ecuación de *Laplace fraccionaria* o *Laplace no-local*. Estos operadores han sido estudiados en varios trabajos, por ejemplo [22], y tienen un amplio abanico de aplicaciones [30, 31, 32, 33, 34, 36, 39, 41, 45, 46]

Ahora, pensemos que tenemos que modelar fenómenos en los que la difusión o propagación no es uniforme ni sigue una dinámica lineal. Por ejemplo, en materiales con propiedades no homogéneas, en la dinámica de fluidos no

newtonianos o en modelos de filtración en medios porosos, la propagación de la temperatura, la concentración o la presión depende de una ley de difusión no lineal. Para capturar estos fenómenos, en lugar del operador de Laplace clásico, consideramos una versión no lineal que dependa de la norma del gradiente de u. Este operador, conocido como el p-Laplaciano, se define como

$$\Delta_p u = \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

donde $p > 1$ es un parámetro que controla la no linealidad del operador. En particular, este operador presenta un comportamiento difusivo distinto dependiendo del valor de p. Para $p = 2$ recuperamos el operador de Laplace clásico, para $p > 2$, el operador modela una difusión lenta o degenerada (medios porosos), y para $1 < p < 2$, se describe una difusión rápida o singular (fluidos no newtonianos).

Siguiendo la misma idea de generalización hacia operadores no locales, podemos definir la versión fraccionaria del p-Laplaciano, conocida como el p-Laplaciano fraccionario, que se expresa como

$$(-\Delta)_p^s u(x) = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2}(u(x) - u(y))}{|x - y|^{n+sp}} \, dy.$$

Este operador captura fenómenos de difusión donde la propagación no solo es no local, sino también no lineal. Es operador también ha sido ampliamente estudiado [26, 27]

Los anteriores operadores, tanto el caso local como el no local, son radiales e invariantes por rotaciones, pero qué ocurre cuando queremos modelar un fenómeno difusivo que tiene mayor velocidad en alguna dirección. Por ejemplo, pensemos en el siguiente problema, tenemos un liquido en un medio poroso.

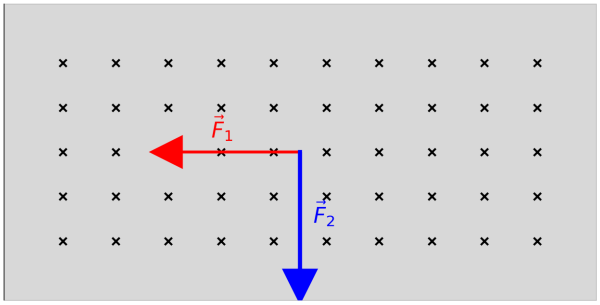

Figura 1.1: Medio poroso con dos fuerzas de diferente magnitud actuando simultáneamente.

Es claro que la velocidad de difusión va a depender de la dirección vertical u horizontal. Por ello en esta tesis vamos a pensar en fenómenos, que pueden ser locales o no, que tienen comportamiento *anisotrópico*.

Los operadores anisotrópicos han sido estudiados por varios autores [1, 23, 37, 48]. Una forma de medir la anisotropía de una función es a través de sus

derivadas, pues vamos a pensar en funciones que tengan derivadas parciales (o fraccionarias) en distintos espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y asociado a esta idea en [6, 21], en el caso local, trabajan con el operador *pseudo $\vec{p}$-Laplaciano*, definido de la siguiente forma

$$-\Delta_{\vec{p}}(u) := \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i}.$$

Donde $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_n)$, $1 < p_i < \infty$ para cada $i = 1, \cdots, n$, En el caso no local si $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_n)$, $0 < s_i < 1$ para cada $i = 1, \cdots, n$. En [17] definen el $\vec{p}$-Laplaciano fraccionario anisotrópico como

$$(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}(u) := \sum_{i=1}^{n} P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x - he_i) - u(x)|^{p_i-2}(u(x - he_i) - u(x))}{|h|^{1+s_i p_i}}\, dh.$$

Basándonos en el artículo de Bourgain, Brezis y Mironescu [8], ver también [44], estudiamos el comportamiento de los espacios de Sobolev anisotrópicos no locales cuando los parámetros fraccionarios tienden a 1. Es decir, cómo es la transición de los espacios locales a no locales. Una consecuencia inmediata de dicho estudio es la Γ convergencia de los funcionales de energía asociados al $\vec{p}$-Laplaciano fraccionario anisotrópico, la cual nos permite analizar el comportamiento asintótico de soluciones débiles de problemas como

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y acotado, y f es una función en un espacio adecuado.

Otro aspecto central de esta tesis, fue estudiar el caso donde la fuente es del tipo semilineal, es decir, que f también depende de la función. Un ejemplo típico de esta clase de problemas son los *autovalores* [28, 35, 38]. Sin embargo hay un problema importante que debemos resolver antes de seguir, la homogeneidad del operador. La homogeneidad de un operador diferencial se refiere a una propiedad de escalamiento que se mantiene bajo multiplicación por constantes. Formalmente, un operador $\mathcal{L}$ es homogéneo de grado α si para toda función u y para todo $\lambda > 0$, se cumple

$$\mathcal{L}(\lambda u) = \lambda^{\alpha} \mathcal{L} u.$$

En problemas de autovalores, normalmente buscamos autofunciones normalizadas. Si el operador es homogéneo de grado 0, entonces el re-escale no cambia la autofunción, lo que permite una normalización natural. Luego para encontrar el operador homogéneo más similar al $\vec{p}$-Laplaciano fraccionario anisotrópico estudiamos el cociente de Rayleigh entre una norma que mida la anisotropía de las derivadas y una norma que mida la anisotropía de la función, es decir (el siguiente cociente es sólo el caso local, también desarrollamos el caso no local pero no es necesario dar tantos detalles en una introducción)

$$Q(u) := \frac{\sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L^{p_i}(\Omega)}}{\|u\|_{\vec{p}}}.$$

Donde $\|u\|_{\vec{p}}$ es una norma mixta de Lebesgue, desarrollada en [7] definida de la siguiente forma

$$\|u\|_{\vec{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

Luego, nuestro problema de autovalores, del cual todavía no sabemos su forma explícita, es equivalente a encontrar puntos críticos de Q. Vamos a utilizar la teoría de Lusternik-Schnirelmann la cual es una herramienta importante en topología y análisis funcional, especialmente en teoría de puntos críticos.

Finalmente, consideremos el siguiente problema. *Si tomamos todos los subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ con volumen fijo y definimos una función F que asigna a cada conjunto su primer autovalor, ¿existe un conjunto que minimice F?* Esta clase de preguntas está enmarcada dentro los problemas de optimización de dominios y ha sido objeto de estudio [2, 12, 13, 19, 25, 20, 29, 47]. En su forma más general, estos problemas involucran un *funcional de costo* F y una clase de *dominios admisibles* $\mathcal{A}$. El objetivo es resolver el problema de minimización planteado como

$$\min_{A \in \mathcal{A}} F(A).$$

Problemas de esta naturaleza surgen de manera natural en la optimización estructural, particularmente cuando se busca determinar el diseño óptimo de un sistema gobernado por ecuaciones en derivadas parciales.

En gran parte de la literatura existente, el funcional de costo F se formula típicamente en términos de una función u_A, que actúa como la solución de una ecuación de estado a resolver en A en forma integral. Además, estos problemas suelen incluir restricciones sobre la constante de Lipschitz de ∂A. Sin embargo, en aplicaciones prácticas, tales restricciones han sido consideradas, en algunos casos, poco naturales. Como consecuencia, en su trabajo [13], los autores introdujeron la familia $\mathcal{A}$ de dominios admisibles como el conjunto de todos los subconjuntos *casi abiertos* (*quasi open*) de Ω con la única restricción de volumen, $|A| = c$. En cuanto a la función F, postularon que debe ser decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos y semicontinua inferiormente con respecto a una topología adecuada en $\mathcal{A}$. En términos más precisos, la relación de F con un conjunto A se definió de la siguiente manera: *Una sucesión $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a A si, para toda $f \in H^{-1}(\Omega)$, las soluciones de los problemas de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u_k &= f \quad \text{en } A_k, \\ u_k &= 0 \quad \text{en } \partial A_k, \end{cases}$$

convergen cuando $k \to \infty$ a la solución del problema correspondiente en A. Por un lado, en [25], los autores estudian el problema *lineal no local* donde se consideró el problema de minimización tomando en cuenta los problemas de Dirichlet no locales

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_k &= f \quad \text{en } A_k, \\ u_k &= 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \setminus A_k, \end{cases}$$

donde $(-\Delta)^s$ es el *Laplaciano fraccionario* y f pertenece a un espacio adecuado.

Por otro lado, en [29], los autores demostraron resultados análogos cuando la ecuación diferencial parcial es el *p-Laplaciano no lineal local* y establecieron, además, una caracterización de tipo minimax del segundo autovalor del operador p-Laplaciano en conjuntos p-casi abiertos. En [20], se demostró la existencia de un conjunto óptimo para minimizar el *k-ésimo autovalor variacional* del p-Laplaciano.

Nuestro objetivo es dar el siguiente paso natural, que consiste en minimizar problemas del tipo $\min_{A\in\mathcal{A}} F(A)$, donde la relación entre el funcional de costo y el dominio está determinada por el problema de Dirichlet *no local y no lineal*

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u_k = f & \text{en } A_k, \\ u_k = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus A_k. \end{cases}$$

Una vez que hemos estudiado el problema isotrópico, podemos terminar el estudio de optimización de dominios para caso anisotrópico y así finalizar el trabajo.

La tesis se organiza en 4 capítulos principales, comenzando con el estudio detallado de los espacios de Sobolev anisotrópicos, tanto locales como no locales, desarrollando sus propiedades funcionales y su comportamiento asintótico en los regímenes $s \to 1^-$ (teoremas tipo Bourgain-Brezis-Mironescu) y $s \to 0^+$ (tipo Mazya-Shaposhnikova). Luego, se presentan aplicaciones de estos espacios, como la $\Gamma-$convergencia de funcionales, problemas semilineales, soluciones tipo ground-state y su análisis asintótico. En el capítulo siguiente se aborda un problema de autovalores adecuado para el operador pseudo p-Laplaciano anisotrópico, tanto en su versión local como no local, demostrando la existencia de autovalores mediante teoría de Lusternik-Schnirelmann y estudiando su comportamiento límite. Finalmente, se dedica un capítulo al estudio de problemas de optimización de dominio, comenzando por el caso isotrópico y extendiendo los resultados al marco anisotrópico, considerando funcionales de costo relacionados con el operador estudiado y estableciendo resultados de existencia y convergencia. La tesis culmina con un apéndice donde se incluyen resultados conocidos utilizados en los capítulos anteriores.

Capítulo 2

Espacios de Sobolev Anisotrópicos

En este segundo capítulo comenzaremos con el estudio sobre los espacios de Sobolev en los que vamos a trabajar. Como mencionamos en la introducción, consideremos cualquier dirección i en $\{1,\dots,n\}$, un parámetro que mide la regularidad en dicha dirección $s \in (0,1]$, y otro que mide la integrabilidad $p \in (1,\infty)$. Con todo esto, definimos el i-ésimo espacio de Sobolev fraccionario (o fractional $i^{th}-$Sobolev space, en inglés) como

$$W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } J^i_{s,p}(u) < \infty\},$$

donde $J^i_{s,p}$ es una semi-norma definida de la siguiente forma:

$$J^i_{s,p}(u) =: \begin{cases} (1-s)s \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh\,dx & \text{si } \ s<1 \\ \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^p\,dx & \text{si } \ s=1. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Notemos que $W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo cuando está acompañado de la norma

$$\|u\|_{i,s,p} = \|u\|_p + (J^i_{s,p}(u))^{1/p},$$

donde $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p}$. Este espacio consiste en las funciones $L^p(\mathbb{R}^n)$ que poseen alguna regularidad en la i-ésima variable. Sin embargo, si queremos controlar el resto de variables, debemos recolectar los parámetros de integración y regularidad de cada coordenada, es decir, $\vec{s} = (s_1,\dots,s_n)$ y $\vec{p} = (p_1,\dots,p_n)$, con $s_i \in (0,1]$ y $p_i \in (1,\infty)$ para cada $i \in \{1\dots,n\}$, y definir el espacio de *Sobolev fraccionario anisotrópico* como

$$W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^n W_i^{s_i,p_i}(\mathbb{R}^n).$$

Este espacio también es un espacio de Banach reflexivo y separable con norma

$$\|u\|_{\vec{s},\vec{p}} = \sum_{i=1}^{n} \|u\|_{i,s_i,p_i},$$

ver, por ejemplo, [23].

Observación 2.0.1. A través de argumentos estándar de truncación y regularización, las funciones suaves con soporte compacto son densas en $W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pues, dada $u \in W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, su convolución con un regularizador ρ_ε, definida como $u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$, es una función suave que preserva la derivada débil en la dirección i, es decir, $(u_{x_i})_\varepsilon = (u_{x_i}) * \rho_\varepsilon$. Además, se cumple

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_i^{1,p}} \to 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0,$$

lo que muestra que $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Para garantizar soporte compacto, multiplicamos u_ε por una función de corte φ_R con $\varphi_R \to 1$ en todo $\mathbb{R}^n$ cuando $R \to \infty$. Luego, definiendo $u_{\varepsilon,R} = \varphi_R u_\varepsilon$, es una nueva aproximación que pertenece a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\|u_{\varepsilon,R} - u\|_{W_i^{1,p}} \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$ y $R \to \infty$. Por lo tanto, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Si consideramos un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$, entonces definimos el espacio de Sobolev fraccionario anisotrópico de funciones que se anulan en la frontera y fuera de Ω como

$$W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) = \{u \in W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \colon u|_{\Omega^c} = 0\}. \tag{2.0.2}$$

Observación 2.0.2. Esta no es la definición más común, generalmente se utiliza la siguiente definición

$$\widetilde{W}_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)},$$

donde la clausura está tomada respecto de la norma $\|\cdot\|_{\vec{s},\vec{p}}$. En el caso clásico [22], $\widetilde{W}_0^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega)$ si por ejemplo Ω es Lipschitz.

Aquí, por ahora, no requerimos que los parámetros de integración estén ordenados, entonces si definimos

$$p_{\min} = \min\{p_1, \ldots, p_n\} \qquad \text{and} \qquad p_{\max} = \max\{p_1, \ldots, p_n\}$$

por argumentos estándar de interpolación podemos dar una definición alternativa a

$$W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in L^{p_{\min}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_{\max}}(\mathbb{R}^n) \colon J_{\vec{s},\vec{p}}(u) < \infty\right\},$$

donde

$$J_{\vec{s},\vec{p}}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u). \tag{2.0.3}$$

En el caso local, i.e. cuando $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 1$, está probado en [23] que el espacio $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ está continuamente embebido en $L^{\vec{p}^{\,*}}(\mathbb{R}^n)$, donde $\vec{p}^{\,*}$ es el exponente de Sobolev asociado, dado por

$$\vec{p}^{\,*} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} - 1}.$$

En el caso fraccionario, teoremas de inmersión de Sobolev para dichos espacios fueron estudiados en [17]. En dicho trabajo definen las cantidades

$$\overline{\vec{s}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} \right)^{-1} \quad \text{y} \quad \overline{\vec{s}\vec{p}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i p_i} \right)^{-1}.$$

Asumiendo que $\overline{\vec{s}\vec{p}} < n$, definen el siguiente exponente crítico de Sobolev

$$\vec{p}^{\,*}_{\vec{s}} = \vec{p}^{\,*} = \frac{n\overline{\vec{s}\vec{p}}/\overline{\vec{s}}}{n - \overline{\vec{s}\vec{p}}}. \tag{2.0.4}$$

Además, si pedimos que $p_{\max} < \vec{p}^{\,*}$ entonces tenemos que para cada $1 \leq q < \vec{p}^{\,*}$ $W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \subset\subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$, y la siguiente desigualdad tipo Sobolev-Poincaré

$$0 < S = \inf_{\substack{u \in W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \\ \|u\|_{\vec{p}^*} = 1}} J_{\vec{s},\vec{p}}(u). \tag{2.0.5}$$

donde la constante S depende de $n, \vec{p}^{\,*}, \vec{p}^{\,*} - p_{\max}$ y una cota inferior s_0 de s_i con $i = 1, \ldots, n$.

Podemos resumir lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 2.0.3 (Teorema 2.1 [17]). *Sean $\overline{\vec{s}\vec{p}} < n$ y $p_{max} < \vec{p}^{\,*}$, entonces*

$$W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \subset\subset L^q_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

para cada $1 \leq q < p^*$.

2.1. Bourgain–Brezis–Mironescu

Basados en el trabajo de Bougain-Brezis-Mironescu [8], un objetivo primario de esta tesis fue estudiar el comportamiento asintótico de los espacios no locales a medida que el parámetro fraccionario tiende a 1. En nuestro caso, esto lo podemos estudiar de diferentes formas. Una opción es pensar que el mínimo de los $s_i \in \vec{s}$ tiende a 1. O también, cuando un grupo de parámetros s_i con $i \in \{1, \cdots, j\}$ con $j \leq n$, tienden a 1 pero el resto quedan fijos.

Para comenzar, nos centraremos en el estudio individual de cada espacio $W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n)$. Y para ello necesitamos varios lemas.

Lema 2.1.1. *Sea u una función en $W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$J_{s,p}^i(u) \leq \frac{1}{p}\left(2s\,\|u_{x_i}\|_p^p + (1-s)2^{p+1}\|u\|_p^p\right).$$

Demostración. Dado $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+he_i) - u(x)|^p\,dx \leq |h|^p \|\partial_{x_1} u\|_p^p.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dx\,dh =& \int_{-1}^{1} \frac{1}{|h|^{1+sp}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx\right)dh \\ &+ \int_{|h|>1} \frac{1}{|h|^{1+sp}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx\right)dh \\ =& I + II.\end{aligned}$$

Para acotar I,

$$I \leq \|\partial_{x_1} u\|_p^p\, 2\int_0^1 \frac{h^p}{|h|^{1+sp}}\,dh = \frac{2}{p(1-s)}\,\|\partial_{x_1} u\|_p^p. \tag{2.1.1}$$

Mientras que para acotar II,

$$II \leq 2^{p+1}\|u\|_p^p \int_1^\infty \frac{1}{|h|^{1+sp}}\,dh = 2^{p+1}\|u\|_p^p \frac{1}{sp}. \tag{2.1.2}$$

Luego, si combinamos (2.1.1) y (2.1.2) concluimos la prueba para funciones suaves. El resultado final se obtiene observando que las funciones suaves con soporte compacto son densas en $W_1^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, es decir, la Observación 2.0.1. □

El siguiente lema muestra que el funcional $J_{s,p}^i$ decrece cuando se aplica una regularización estándar a una función u. Sea $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\rho(x) = \begin{cases} c\,e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{si} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

donde $c = c(n) > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\rho_\varepsilon \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Así, la familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se conoce como *núcleo regularizante estándar.*

Lema 2.1.2. *Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$, donde ρ_ε es la regularización estándar. Entonces*

$$J^i_{s,p}(u_\varepsilon) \leq J^i_{s,p}(u)$$

para cada $\varepsilon > 0$.

Demostración. Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x + he_i) - u_\varepsilon(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left(u(x + he_i - y) - u(x - y)\right) \rho_\varepsilon(y) dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + he_i - y) - u(x - y)|^p \, \rho_\varepsilon(y)\, dy\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x + he_i - y) - u(x - y)|^p \; dx \right) \rho_\varepsilon(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + he_i) - u(x)|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Usamos la invarianza de la norma con respecto de la traslación y que ρ_ε tiene integral igual a 1. Finalmente multiplicando por $|h|^{-1-sp}$ e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtenemos la estimación deseada. □

Ahora, analizaremos el comportamiento de $J^i_{s,p}$ en relación con las truncaciones. Estas se pueden definir de la siguiente manera:

Sea $\eta \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ una función tal que $\eta = 1$ en $B(0,1)$, $\eta = 0$ fuera de $B(0,2)$, $0 \leq \eta \leq 1$ y $\|\nabla\eta\|_\infty \leq 2$. Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $\eta_k(x) = \eta(x/k)$.

Lema 2.1.3. *Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $u_k = \eta_k u$ la truncación de u por η_k entonces*

$$J^i_{s,p}(u_k) \leq C(n,p)\left(J^i_{s,p}(u) + \|u\|^p_p\right),$$

donde $C(n,p) > 0$ es independiente de k.

Demostración. Gracias a la clásica desigualdad $|a+b|^p \leq 2^p\{|a|^p + |b|^p\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
|u_k(x + he_i) - u_k(x)|^p \leq 2^{p-1}(&|\eta_k(x + he_i)|^p |u(x + he_i) - u(x)|^p \\
&+ |u(x)|^p |\eta_k(x + he_i) - \eta_k(x)|^p).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u_k(x + he_i) - u_k(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx \leq & 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx + \\
& 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta_k(x + he_i) - \eta_k(x)|^p}{h^{1+sp}}\, dh\, dx.
\end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\eta_k(x+he_i)-\eta_k(x)|^p}{h^{1+sp}}\,dh \le \left(\int_{|h|<1}+\int_{|h|\ge 1}\right)\frac{|\eta_k(x+he_i)-\eta_k(x)|^p}{h^{1+sp}}\,dh$$
$$= I + II.$$

Podemos acotar estos dos términos de la siguiente manera

$$I \le \|\partial_{x_1}\eta_k\|_\infty^p \int_{|h|<1}\frac{1}{|h|^{1+sp-p}}\,dh = \frac{2^{p+1}}{k^p}\frac{1}{p(1-s)}.$$

$$II \le 2^{p-1}\|\eta_k\|_\infty^p \int_{|h|\ge 1}\frac{1}{|h|^{1+sp}}\,dh = \frac{2^p}{sp}.$$

Con esto, se concluye la demostración del lema.

□

Los siguientes dos lemas, más técnicos que los anteriores, son resultados de [8] y son cruciales en los argumentos que usamos.

Lema 2.1.4. *Sea (X,μ) un espacio de medida finita y $G, H \in L^1(X)$, tales que*

$$(G(x)-G(y))(H(x)-H(y)) \ge 0. \tag{2.1.3}$$

Entonces

$$\int_X GH\,d\mu \ge \frac{1}{\mu(X)}\int_X G\,d\mu \int_X H\,d\mu.$$

Lema 2.1.5. *Sean $\phi,\psi\colon (0,1)\to\mathbb{R}$ funciones medibles y supongamos que $\phi(2h)\le\phi(h)$ para $h\in(0,1)$ y que ψ es no creciente. Luego dado un $r>-1$,*

$$\int_0^1 h^r\phi(h)\psi(h)\,dh \ge \frac{r+1}{2^{r+1}}\int_0^1 h^r\phi(h)\,dh\int_0^1 h^r\psi(h)\,dh.$$

Con la ayuda del lema previo podemos probar el siguiente resultado de inmersión.

Lema 2.1.6. *Sea $1<p<\infty$ y $0<s_1<s_2<1$ entonces*

$$J^i_{s_1,p}(u) \le 2^{(1-s_1)p}J^i_{s_2,p}(u) + \frac{(1-s_1)2^{p+1}}{p}\|u\|_p^p,$$

para todo $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dx\,dh = 2\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dx\,dh.$$

Por lo tanto, el lema quedará probado si mostramos que

$$(1-s_1)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+s_1p}}dx\,dh \\ \leq 2^{(1-s_1)p}(1-s_2)\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+s_2p}}\,dx\,dh \\ + \frac{(1-s_1)2^p}{s_1p}\|u\|_p^p.$$

Entonces llamemos

$$F(h)=\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx,$$

entonces

$$\begin{aligned} F(2h) &\leq 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+2he_i)-u(x+he_i)|^p\,dx\,dh\right) \\ &+ 2^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx\,dh\right) \\ &= 2^p\int_{\mathbb{R}^n}|u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx\,dh \\ &= 2^pF(h). \end{aligned}$$

Luego, podemos tomar $g(h)=F(h)/h^p$ y tener que $g(2h)\leq g(h)$ para todo $h>0$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dx\,dh &= \int_0^1\frac{F(h)}{|h|^{1+sp}}\,dh \\ &= \int_0^1\frac{g(h)}{|h|^{1-(1-s)p}}\,dh. \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Si tomamos $0<s_1<s_2<1$, entonces

$$\int_0^1\frac{g(h)}{|h|^{1-(1-s_2)p}}\,dh=\int_0^1\frac{1}{|h|^{1-(1-s_1)p}}g(h)\frac{1}{|h|^{(s_2-s_1)p}}\,dh.$$

Aplicando los Lemas 2.1.5 y 2.1.4 con $r=(1-s_1)p-1$ y $\psi(h)=h^{-(s_2-s_1)p}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1\frac{g(h)}{|h|^{1-(1-s_2)p}}\,dh &\geq \frac{(1-s_1)p}{2^{(1-s_1)p}}\int_0^1\frac{g(h)}{h^{1-(1-s_1)p}}\,dh\int_0^1\frac{1}{h^{1-(1-s_2)p}}dh \\ &= \frac{1}{2^{(1-s_1)p}}\frac{1-s_1}{1-s_2}\int_0^1\frac{g(h)}{h^{1-(1-s_1)p}}\,dh. \end{aligned}$$

Por (2.1.4)

$$\frac{1-s_1}{2^{(1-s_1)p}}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+s_1p}}\,dx\,dh \\ \leq (1-s_2)\int_0^1\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+s_2p}}\,dx\,dh.$$

Finalmente,

$$\int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+s_1 p}}\,dx\,dh \leq \frac{2^p \|u\|_p^p}{s_1 p},$$

completa la prueba. □

Ahora si, vamos a enunciar y demostrar el primer teorema de comportamiento asintótico.

Teorema 2.1.7. *Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $s \in (0,1)$ entonces*

$$\lim_{s\to 1} J^i_{s,p}(u) = J^i_{1,p}(u).$$

Demostración. Sea $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0,1)$ y $p \in (1,\infty)$. Usando un desarrollo de Taylor obtenemos la siguiente estimación

$$\left| \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p \right| \leq C|h|,$$

donde C depende de la norma C^2 de u y del parámetro p. Entonces al integrar sobre $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\,dh &= \int_{|h|\leq 1} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\,dh \\ &+ \int_{|h|>1} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\,dh.\end{aligned}$$

Mediante integración directa obtenemos

$$\int_{|h|\leq 1} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\,dh = \frac{2C}{1+p(1-s)},$$

$$\int_{|h|>1} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\,dh = 2^p \frac{\|u\|_\infty^p}{ps}.$$

Por lo tanto, si multiplicamos por $s(1-s)$ y remplazando

$$\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p$$

por

$$\left(\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p \right) |h|^{-1+p(1-s)}$$

concluimos que

$$\lim_{s\to 1} s(1-s) \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}} dh = \frac{2}{p}|u_{x_i}|^p. \tag{2.1.5}$$

El siguiente paso requiere intercambiar un límite con una integral, por lo tanto necesitaremos un mayorante integrable para (2.1.5).

Definimos

$$U_s(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh.$$

Como $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, existe una constate $R > 0$ tal que $\text{supp}(u) \subset Q_R$, donde $Q_R = [-R, R]^n$.

Por un lado, si $|x_i| \leq 2R$ entonces

$$|U_s(x)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh = \int_{|h|\leq 3R} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh + \int_{|h|>3R} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh.$$

Aquí podemos acotar de la siguiente forma

$$\int_{|h|\leq 3R} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh \leq \|u_{x_i}\|_\infty^p \frac{2(3R)^p}{p(1-s)}$$

y

$$\int_{|h|>3R} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh \leq \|u\|_\infty^p \frac{2(3R)^{-p(1/2)}}{sp}$$

Por otro lado, si $|x_i| > 2R$, usamos

$$|h| \geq |x_i| - |x_i + h| \geq |x_i| - R \geq \frac{1}{2}|x_i|$$

y tenemos

$$|U_s(x)| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x_i + h, x')|^p}{|h|^{1+sp}} dh \leq \left(\frac{2}{|x_i|}\right)^{1+sp} \int_{\mathbb{R}} |u(x_i, x')|^p dx_i.$$

Ya que

$$G(x') := \int_{\mathbb{R}} |u(x_i, x')|^p dx_i \in L^1(\mathbb{R}^{n-1}),$$

entonces

$$|s(1-s)U_s(x)| \leq C \left(\chi_{Q_{2R}}(x) + \chi_{\{|x_i|\geq 2R\}}(x) \left(\frac{2}{|x_i|}\right)^{1+(1/2)p} G(x') \right) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

donde C es una constante que depende de $R,\ p$ pero no de s. Así, aplicando el Teorema de Convergencia Dominada (TCD) obtenemos

$$\lim_{s\to 1} s(1-s) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx = \frac{2}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^p\, dx \qquad (2.1.6)$$

para todo $u \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.

Para extender a $W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, tomemos una $u \in W_i^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C_0^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $(u_k)_{x_i} \to u_{x_i}$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Como $s(1-s)[u]_{i,s,p} = (J^i_{s,p}(u))^{1/p}$ es una seminorma, entonces

$$\begin{aligned}|[u]_{i,s,p} - [u]_{i,1,p}| &\leq |[u]_{i,s,p} - [u_k]_{i,s,p}| + |[u_k]_{i,s,p} - [u_k]_{i,1,p}| + |[u_k]_{i,1,p} - [u]_{i,1,p}| \\ &= I + II + III.\end{aligned}$$

Usando el Lema 2.1.1,

$$I \leq |[u_k - u]_{1,s,p}| \leq C(n,p)\left(\|u_k - u\|_p + \|(u_k)_{x_i} - u_{x_i}\|_p\right),$$

que converge a 0 cuando $k \to \infty$ uniformemente en s.

El tercer termino es acotado por un argumento similar y el segundo término es consecuencia de (2.1.6). Por lo tanto, el limite puntual vale si $u \in W_1^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Para terminar la demostración del teorema resta ver que si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es tal que

$$\liminf_{s\to 1} J^i_{s,p}(u) < \infty, \tag{2.1.7}$$

entonces $u \in W_1^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Sea $u_{k,\varepsilon} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$u_{k,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * (u\eta_k).$$

Si aplicamos los lemas de regularización 2.1.2 y truncación 2.1.3 junto con la ecuación (2.1.7), obtenemos

$$\liminf_{s\to 1} J^i_{s,p}(u_{k,\varepsilon}) \leq C,$$

donde C es independiente de k y $\varepsilon > 0$.

Fijando k, ε y aplicando el límite puntual para funciones suaves tenemos que

$$C \geq \lim_{s\to 1} J^i_{s,p}(u_{k,\varepsilon}) = J^i_{1,p}(u_{k,\varepsilon}).$$

Es decir, existe una subsucesión $u_j = \{u_{k_j,\epsilon_j}\} \subset \{u_{k,\varepsilon}\}$ tal que $(u_j)_{x_i} \rightharpoonup u_{x_i}$ débilmente en en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Así $u \in W_1^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y concluimos nuestra prueba. □

En el teorema anterior, analizamos el comportamiento del funcional cuando la función está fija. Consideremos ahora el caso de tener una sucesión de funciones en diferentes espacio de Sobolev.

Teorema 2.1.8. *Sea $0 < s_k \to 1$ con $k \to \infty$. Supongamos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\sup_k \|u_k\|_p < \infty, \quad u_k \to u \text{ en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad y \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} J^i_{s_k,p}(u_k) < \infty. \tag{2.1.8}$$

Entonces,

$$J^i_{1,p}(u) \leq \liminf_{s_k\to 1} J^i_{s_k,p}(u_k). \tag{2.1.9}$$

Demostración. Sea $\{u_k\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que (2.1.8) se cumple, y sea $t \in (0,1)$ fijo pero arbitrario. Por la hipótesis de convergencia en $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ de la sucesión, podemos asumir además que $u_k \to u$ a.e en $\mathbb{R}^n$. Luego, utilizando el Lema de Fatou tenemos que

$$J^i_{t,p}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J^i_{t,p}(u_k).$$

Además, si usamos el Lema 2.1.6 con $M = \sup_k \|u_k\|_p$ obtenemos

$$J^i_{t,p}(u) \leq 2^{(1-t)p} \liminf_k J^i_{s_k,p}(u_k) + (1-t)\frac{2^{p+1}}{p} M^p.$$

Finalmente, tomando límite cuando $t \to 1$ y aplicamos el Teorema 2.1.7 concluimos lo deseado. □

Sin embargo, el resultado previo no es del todo bueno, en el sentido que debemos pedirle alguna compacidad a la sucesión de funciones, esto se debe a que sólo tenemos control sobre la variable en la que estamos trabajando. El próximo teorema es más potente, pues al tener control sobre todas las direcciones, entonces podemos debilitar la hipótesis de compacidad y obtenerla cómo resultado.

Teorema 2.1.9. *Sea $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ con $p_i \in (1,\infty)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Supongamos $s^k_i \to 1$ si $k \to \infty$ para $i = 1, \dots, j$ y sea $\vec{s}_k = (s^k_1, \dots, s^k_j, s_{j+1}, \dots, s_n)$. Por lo tanto $\vec{s}_k \to \vec{s}_0 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{j}, s_{j+1}, \dots, s_n)$. Sea $\{u_k\} \subset L^{p_{min}}(\mathbb{R}^n) \cap L^{p_{max}}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión tal que*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \{\|u_k\|_{p_{max}} + \|u_k\|_{p_{min}}\} < \infty \qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) < \infty.$$

Entonces, si $p_{max} < \vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*$ y $\overline{\vec{s}_0\vec{p}} < n$, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ si $j \to \infty$ en $L^{p_{max}}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y

$$J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u) \leq \liminf_{\vec{s}_k \to 1} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k).$$

Demostración. Como $\vec{s}_k \to \vec{s}_0$ entonces de la formula (2.0.4) deducimos que $\vec{p}_{\vec{s}_k}{}^* \to \vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*$ y podemos asumir que $p_{\max} < \vec{p}_{\vec{s}_k}{}^*$.

Tomemos $t \in (0,1)$ cercano a 1, tal que si $\mathbf{t} = (\underbrace{t, \dots, t}_{j}, s_{j+1}, \dots, s_n)$, entonces $p_{\max} < \vec{p}^*_{\mathbf{t}}$.

Aplicamos el Lema 2.1.6 y obtenemos

$$J_{\mathbf{t},\vec{p}}(u_k) \leq C(J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) + 1) \leq C.$$

Por lo tanto, podemos utilizar resultados tipo Rellich-Kondrashov para el espacio $W^{\mathbf{t},\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$, es decir el Teorema 2.0.3, y por lo tanto la convergencia de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ (pasando a una subsucesión en caso de ser necesario) en $L^{p_{\max}}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ está garantizada. □

2.2. Caso peridinámico

Una rama interesante de los problemas no locales son los problemas *peridinámicos* [51, 4]. En peridinámica cada punto interactúa directamente con todos los puntos dentro de una región finita denominada horizonte. Nuestro objetivo será analizar el comportamiento cuando estos horizontes tienden a 0.

Antes de extender nuestra teoría, tenemos que entender que aunque muy similar al caso anterior el análisis de comportamiento asintótico tiene diferencias conceptuales y técnicas. Por ejemplo ¿Qué ocurre cuando intentamos utilizar el Lema 2.1.6? Justamente al ir δ decreciendo es imposible utilizar ese lema clave, luego tenemos que utilizar otra técnica.

Dados $\delta > 0$, $0 < s < 1$ y $1 < p < \infty$. Vamos a analizar el comportamiento, cuando $\delta \to 0$ de la seminorma

$$[u]^i_{s,p,\delta} = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|\leq\delta} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx.$$

Primero debemos definir, de forma similar a lo anterior, el espacio funcional apropiado para trabajar. Introducimos en espacio de Sobolev anisotrópico peridinámico como

$$W_i^{s,p,\delta}(\mathbb{R}^n) \colon = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n),\ \text{tal que } [u]^i_{s,p,\delta} < \infty\}, \tag{2.2.1}$$

con la norma

$$\|u\|^i_{s,p,\delta} = \left([u]^i_{s,p,\delta}\right)^{\frac{1}{p}} + \|u\|_p.$$

Como antes, para controlar todas las variables juntas definimos $\vec{\delta} = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ con $\delta_i > 0$

$$W^{\vec{s},\vec{p},\vec{\delta}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^n W_i^{s_i,p_i,\delta_i}(\mathbb{R}^n).$$

El cual es un espacio de Banach reflexivo y separable con norma

$$\|u\|_{\vec{s},\vec{p},\vec{\delta}} = \sum_{i=1}^n \|u\|^i_{s_i,p_i,\delta_i}.$$

Recordando la notación (2.0.4), el siguiente teorema es una adaptación directa del Teorema 2.0.3 y omitiremos la prueba.

Teorema 2.2.1. *Sea $s_1, \ldots, s_n \in [s_0, 1)$ con $s_0 \in (0,1)$ y $p_1, \ldots, p_n$ cómo antes. Tal es que $\overline{\vec{s}\vec{p}} < n$. Entonces $W^{\vec{s},\vec{p},\vec{\delta}}(\mathbb{R}^n) \subset\subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \leq p < \vec{p}^{\,*}$. Más aún, $W^{\vec{s},\vec{p},\vec{\delta}}(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ continuamente para todo $1 \leq p \leq \vec{p}^{\,*}$.*

Lema 2.2.2. *Sea $u \in W_i^{1,p,\delta}(\mathbb{R}^N)$. Entonces se tiene la siguiente estimación*

$$[u]^i_{s,p,\delta} \leq 2\frac{\delta^{p(1-s)}}{p(1-s)} \|u_{x_i}\|^p_p.$$

Demostración. La prueba es similar al caso anterior. Dado $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx \le |h|^p \|u_{x_i}\|_p^p,$$

$$\begin{aligned}\int_{|h|<\delta}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dxdh &= \int_{|h|<\delta} \frac{1}{|h|^{1+sp}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x+he_i)-u(x)|^p\,dx\right)dh \\ &\le \|u_{x_i}\|_p^p\, 2\int_0^\delta \frac{h^p}{|h|^{1+sp}}\,dh \\ &= 2\frac{\delta^{p(1-s)}}{p(1-s)}\,\|u_{x_i}\|_p^p.\end{aligned}$$

Concluimos utilizando densidad de funciones suaves con soporte compacto. □

El siguiente lema muestra que el funcional $[\cdot]^i_{s,p,\delta}$ disminuye cuando se regulariza una función u y describe el comportamiento respecto a truncaciones. La demostración es igual al caso no peridinámico.

Lema 2.2.3. *Por un lado, sea $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, ρ_ε el núcleo regularizante estándar, entonces $u_\epsilon = \rho_\varepsilon * u$ verifica*

$$[u_\varepsilon]^i_{s,p,\delta} \le [u]^i_{s,p,\delta}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

Por otro lado, sea $\eta \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $\eta = 1$ en B_1, $\eta = 0$ en B_2^c, $0 \le \eta \le 1$ y $\|\nabla\eta\|_\infty \le 2$. Dado $k \in \mathbb{N}$, definimos $\eta_k(x) = \eta(x/k)$. Si $u_k = \eta_k u$ es la truncación de u por η_k, entonces

$$[u_k]^i_{s,p,\delta} \le 2^{p-1}[u]^i_{s,p,\delta} + \frac{2^{2p}\delta^{p(1-s)}}{k^p p(1-s)}\|u\|_p^p.$$

A continuación, enunciaremos los teoremas principales de esta sección.

Teorema 2.2.4. *Sea $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$, $0 < s < 1$, y $\delta > 0$. Entonces*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta^{p(1-s)}}[u]^i_{s,p,\delta} = \frac{2}{p(1-s)}\|u_{x_i}\|_p.$$

Demostración. Estimaciones clásicas para funciones suaves

$$\left|\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^p} - |u_{x_i}|^p\right| \le C|h|, \tag{2.2.2}$$

donde C depende de la suavidad de u, entonces

$$\int_{|h|<\delta}\left|\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}} - \frac{|u_{x_i}|^p}{|h|^{1+p(s-1)}}\right|dh \le \frac{2C\delta^{p(1-s)+1}}{p(1-s)+1}.$$

Así, cuando $\delta \to 0$ concluimos que

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|h|<\delta}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh = \lim_{\delta\to 0}\int_{|h|<\delta}\frac{|u_{x_i}|^p}{|h|^{1+p(s-1)}}\,dh$$
$$= \lim_{\delta\to 0} 2|u_{x_i}|^p\frac{\delta^{p(1-s)}}{p(1-s)}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{p(1-s)}}\int_{|h|<\delta}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh = \frac{2|u_{x_i}|^p}{p(1-s)}.$$

Otra vez, necesitamos un mayorante integrable

$$F_\delta(x) = \int_{|h|<\delta}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh.$$

Luego como $u \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, existe $R > \delta > 0$ tal que $\text{supp}(u) \subset Q_R$, donde $Q_R = [-R,R]^n$. Si $|x_i| \le 2R$

$$|F_\delta(x)| = \int_{|h|<\delta}\frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh \le \|u_{x_i}\|_\infty^p\frac{\delta^{p(1-s)}}{p(1-s)}, \tag{2.2.3}$$

$$\left|\frac{1}{\delta^{p(s-1)}}F_\delta(x)\right| \le C\chi_{Q_{2R}}(x),$$

donde C es una constante que depende de p, R y s. Finalmente si $|x_i| > 2R$ entonces $F_\delta(x) = 0$. Así, por TCD

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{p(1-s)}}[u]^i_{s,p,\delta} = \frac{2}{p(1-s)}\|u_{x_i}\|_p \tag{2.2.4}$$

para todo $u \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. □

Observación 2.2.5. La ecuación (2.2.2) nos dice que la convergencia en (2.2.4) es uniforme en subconjuntos acotados de $C^2(\mathbb{R}^n)$.

El anterior resultado lo podemos extender por densidad a las funciones $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ siguiendo la demostración del caso original.

Teorema 2.2.6. *Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $0 < s < 1 < p < \infty$ y $\delta > 0$ entonces*

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta^{p(1-s)}}[u]^i_{s,p,\delta} = \frac{2}{p(1-s)}\|u_{x_i}\|_p.$$

Principalmente estamos interesado en probar el caso de una sucesión, pues es donde tenemos que realizar una técnica diferente basada en [44].

Teorema 2.2.7. *Sea $\delta_k \to 0$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ una sucesión tal que*

$$\sup_k \|u_k\|_p < \infty, \quad u_k \to u \text{ en } L^p_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ y } \sup_k [u_k]_{s,p,\delta_k} < \infty.$$

Entonces,

$$\frac{2}{p(1-s)}\|u_{x_i}\|_p \leq \liminf_{\delta_k\to 0} \frac{1}{\delta_k^{p(1-s)}}[u_k]^i_{s,p,\delta_k}.$$

Demostración. Para la prueba vamos a guiarnos por [44], sean $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ fijos. A partir del Lema 2.2.3 obtenemos que

$$[u_k]^i_{s,p,\delta_k} \geq [u_{k,\varepsilon}]^i_{s,p,\delta_k} \geq \int_{B_R(0)} \int_{|h|\leq\delta_k} \frac{|u_{k,\varepsilon}(x+he_i) - u_{k,\varepsilon}(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx.$$

Además, para cada ε fijo, se tiene que $u_{k,\varepsilon} \to u_\varepsilon$ en $C^2(B_R(0))$. Usando la Observación 2.2.5, se concluye que

$$\frac{1}{\delta_k^{p(1-s)}} \int_{B_R(0)} \int_{|h|\leq\delta_k} \frac{|u_{k,\varepsilon}(x+he_i) - u_{k,\varepsilon}(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx \to \frac{2}{p(1-s)} \int_{B_R(0)} |(u_{x_i})_\varepsilon|^p\, dx$$

cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto,

$$\liminf_{\delta_k\to 0} \frac{1}{\delta_k^{p(1-s)}}[u_k]^i_{s,p,\delta_k} \geq \frac{2}{p(1-s)} \int_{B_R(0)} |(u_{x_i})_\varepsilon|^p\, dx.$$

Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ y luego $R \to \infty$, se obtiene el resultado deseado. □

Esta idea, más corta y con menos lemas técnicos, también puede ser utilizada en el análisis asintótico cuando $\vec{s} \to 1$. Pero nos pareció importante mostrar varias alternativas. A partir de ahora, no vamos a tocar más el tema peridinámico ni buscar operadores relacionados al funcional de energía previo. Sin embargo, el lector interesado puede ver [3, 5].

2.3. Maz'ya-Shaposhnikova

En la secciones anteriores estudiamos el comportamiento cuando $s \to 1$ o cuando $\delta \to 0$, y obtuvimos los resultados esperados. Otro punto interesante, basados en el artículo de Maz'ya y Shaposhnikova [40], es analizar el comportamiento cuando $s \to 0$, del cual esperaríamos que el espacio se comporte como $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.3.1. *Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y supongamos que existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $u \in W_i^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$. Entonces*

$$\lim_{s\to 0} J^i_{s,p}(u) = 4\frac{1}{p}\|u\|^p_p.$$

Demostración. En [40] probaron que para $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{s\to 0} s \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}dxdy = 2p^{-1}|S^{n-1}|\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.3.1}$$

para todo $u \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$ y algún $s_0 > 0$. Si aplicamos este resultado en dimensión 1 a

$$v(x_i) = u(x_i, x'),$$

donde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ está fijo, obtenemos

$$\lim_{s\to 0} s \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|v(x_i+h)-v(x_1)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i dh = \frac{4}{p}\int_{\mathbb{R}} |v(x_i)|^p\, dx_1.$$

En términos de u se lee

$$\lim_{s\to 0} s \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_1,x')|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i dh = \frac{4}{p}\int_{\mathbb{R}} |u(x_i,x')|^p\, dx_i, \tag{2.3.2}$$

Para probar nuestro resultado necesitamos integrar respecto de $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, es decir, necesitamos encontrar un mayorante integrable para

$$V_s(x') := s \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_i,x')|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i\, dh.$$

Dividamos $V_s(x')$ en dos integrales

$$V_s(x') = s\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{|h|\le 1} + \int_{\mathbb{R}}\int_{|h|\ge 1}\right) \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_i,x')|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i dh = I + II.$$

Para el primer término

$$\begin{aligned} I &= s\int_{\mathbb{R}}\int_{|h|\le 1} \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_i,x')|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i dh \\ &\le s_0 \int_{\mathbb{R}}\int_{|h|\le 1} \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_i,x')|^p}{|h|^{1+s_0 p}}\, dx_i dh. \end{aligned}$$

La desigualdad viene de que $s \le s_0$, y gracias a que $u \in W^{s_0,p}(\mathbb{R}^n)$ concluimos la integrabilidad de esta parte.

Para el segundo término

$$\begin{aligned} II &= s\int_{\mathbb{R}}\int_{|h|\ge 1} \frac{|u(x_i+h,x')-u(x_i,x')|^p}{|h|^{1+sp}}\, dx_i dh \\ &\le s\int_{\mathbb{R}} 2^p |u(x_i,x')|^p \int_{|h|\ge 1} \frac{1}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx_i \\ &\le \frac{2^p}{p}\int_{\mathbb{R}} |u(x_i,x')|^p\, dx_i. \end{aligned}$$

Este último término es integrable en $\mathbb{R}^{n-1}$ ya que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Así el teorema está probado.

□

En resumen, en esta sección analizamos cómo se comportan ciertos funcionales no locales cuando los parámetros que los definen tienden a sus valores extremos, como $s \to 1$, $s \to 0$ o $\delta \to 0$. El objetivo principal fue entender cómo los espacios funcionales no locales se relacionan con los clásicos espacios de Sobolev en el límite, así como describir de manera precisa qué ocurre con las estructuras no locales cuando las interacciones se vuelven locales o se debilitan. Estudiamos tanto funciones fijas como sucesiones, en distintos regímenes de convergencia, y empleamos herramientas como estimaciones directas, regularizaciones, truncaciones y desigualdades estructurales. En conjunto, los resultados obtenidos permiten entender cómo los espacios fraccionarios se conectan con los espacios de Sobolev clásicos, lo cual resulta fundamental para el análisis de problemas con estructuras anisotrópicas o que involucran interacciones no locales.

Capítulo 3

Pseudo $\vec{p}-$ Laplaciano fraccionario anisotrópico

En este capítulo, exploraremos una serie de aplicaciones fundamentales derivadas del estudio detallado realizado en el capítulo anterior sobre espacios de Sobolev anisotrópicos y su comportamiento asintótico. Las herramientas desarrolladas allí, en particular los teoremas tipo BBM, constituyen la base analítica sobre la que construiremos buena parte de nuestra teoría aplicada.

Nos enfocaremos principalmente en cómo estos resultados se aplican a distintos problemas variacionales y ecuaciones diferenciales, tanto locales como no locales, en presencia de anisotropía. En primer lugar, estudiaremos la Γ-convergencia de los funcionales de energía, lo que nos permitirá abordar rigurosamente el análisis del comportamiento asintótico de las soluciones de problemas asociados cuando los parámetros fraccionarios tienden a uno.

Finalmente, introduciremos el $\vec{p}$-Laplaciano fraccionario anisotrópico, y estudiaremos comportamiento asintótico de soluciones de problemas lineales, semilineales y de energía mínima.

3.1. Γ-convergencia

Una aplicación inmediata de los Teoremas 2.1.7 y 2.1.8 es la Γ-convergencia de funcionales $J^i_{s,p}$. Pero antes de probar dicho resultado es conveniente recordar la definición.

Dado un espacio métrico (X, d), se dice que una sucesión de funciones $f_k \colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ Γ-converge a una función límite f si se cumplen las siguientes dos condiciones

- **Desigualdad de límite inferior**: Para todo $x \in X$ y para toda sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_k \to x$, se tiene que

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f_k(x_k).$$

- **Desigualdad de límite superior**: Para todo $x \in X$ existe una sucesión, llamada *sucesión de recuperación* o *recovery sequence*, $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que
$$f(x) \geq \limsup_{k\to\infty} f_k(y_k).$$

La noción de Γ-convergencia es una herramienta útil en el Cálculo de Variaciones y fue introducida en los años 70 y desarrollada en [18] o [9]. Haremos uso de esta herramienta durante este trabajo, e iremos recapitulando las propiedades a medida que las necesitemos.

Volviendo a nuestro objetivo, observemos que los Teoremas 2.1.7 y 2.1.8 implican inmediatamente que $J^i_{s,p}$ Γ-converge a $J^i_{1,p}$ cuando $s \nearrow 1$ en $L^p(\Omega)$ para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Es decir, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1. *Sean $0 < s_k \leq 1 < p < \infty$ tal que $s_k \to 1$. Entonces $J^i_{s_k,p}$ Γ-converge a $J^i_{1,p}$ en $L^p(\Omega)$ para cualquier $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado.*

Demostración. La desigualdad (2.1.9) del Teorema 2.1.8 es exactamente la desigualdad del límite inferior. En el caso del límite superior simplemente podemos tomar la sucesión $u_k = u$ como sucesión de recuperación y utilizar el Teorema 2.1.7. □

Trabajemos con el funcional que mide la energía en todas las coordenadas,
$$J_{\vec{s},\vec{p}}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u).$$

Entonces, consideremos una sucesión $\vec{s}_k = (s^k_1, s^k_2, \ldots, s^k_n)$ donde $s^k_1, \ldots, s^k_j \to 1$ cuando $k \to \infty$ y $s^k_{j+1}, \ldots, s^k_n$ permanece constante. Entonces $\vec{s}_k \to \vec{s}_0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$.

En principio, no es cierto que la suma de funciones que Γ-convergen también lo haga. Muy brevemente supongamos que tenemos g_k y f_k funcionales que Γ-convergen a g y f respectivamente, es decir, ambos cumplen las desigualdades del límite superior y límite inferior. Sin embargo, nada nos asegura que $g_k + f_k$ Γ-converge a $g + f$ ya que la recovery sequence que funciona para g no necesariamente funciona para f.En nuestro caso particular la recovery sequence de cada funcional es la misma entonces la Γ-convergencia del funcional $J_{\vec{s}_k,\vec{p}}$ se cumple. Lo resumiremos en el siguiente corolario.

Corolario 3.1.2. *Sea $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ con $p_i \in (1, \infty)$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Sea $s^k_i \to 1$ si $k \to \infty$ para $i = 1, \ldots, j$, $\vec{s}_k = (s^k_1, \ldots, s^k_j, s_{j+1}, \ldots, s_n)$ y $\vec{s}_0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$. Entonces $J_{\vec{s}_k,\vec{p}}$ $\Gamma-$converge a $J_{\vec{s}_0,\vec{p}}$ en $L^{p_{max}}(\Omega)$ para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado.*

Demostración. La desigualdad del límite inferior para $J_{\vec{s}_k,\vec{p}}$ es consecuencia de las desigualdades de límite inferior de cada $J^i_{s^k_i,p_i}$ $(i = 1, \ldots, j)$ y de la continuidad de $J^i_{s_i,p_i}$ para $i = j+1, \ldots, n$.

La desigualdad del límite superior se sigue de tomar la sucesión constante $u_k = u$ para cada $J^i_{s_i^k,p_i}$, $i = 1, \dots, n$. □

Un resultado muy importante de la $\Gamma-$convergencia es la convergencia de mínimos. Aunque la demostración es conocida, al no ser ni larga ni técnica la daremos.

Teorema 3.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $F_j, F : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $j \in \mathbb{N}$, tales que F_j $\Gamma-$converge a F. Asumamos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $x_j \in X$ tal que*

$$F_j(x_j) = \operatorname*{ínf}_X F_j$$

y supongamos que la sucesión de mínimos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ es precompacta secuencialmente.

Entonces, todo punto de acumulación de $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es un mínimo de F y se tiene que

$$\operatorname*{ínf}_X F = \liminf_{j\to\infty} \operatorname*{ínf}_X F_j.$$

Demostración. La demostración es bien simple. Sea $x \in X$ un punto de acumulación de $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\lim_{j\to\infty} x_j = x$. Luego, por la desigualdad del límite inferior, tenemos que

$$\operatorname*{ínf}_X F \le F(x) \le \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} \operatorname*{ínf}_X F_j.$$

Por otro lado, de la desigualdad del límite superior, sabemos que, dado $y \in X$, existe $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $y_j \to y$ y

$$\limsup_{j\to\infty} \operatorname*{ínf}_X F_j \le \limsup_{j\to\infty} F_j(y_j) \le F(y).$$

Como $y \in X$ es arbitrario, podemos tomar el ínfimo en la última desigualdad y concluir que

$$\limsup_{j\to\infty} \operatorname*{ínf}_X F_j \le \operatorname*{ínf}_X F.$$

Combinando las desigualdades anteriores, se concluye el teorema. □

Para establecer rigurosamente la definición del operador anisotrópico, comenzaremos introduciendo el espacio dual topológico que le corresponde.

Definición 3.1.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado. Llamaremos $W^{-\vec{s},\vec{p}'}(\Omega)$ al espacio dual topológico de $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ y $W_i^{-s,p'}(\Omega)$ al de $W_{i,0}^{s,p}(\Omega)$.

Con la definición previa y notando $D_h^i u(x) = (u(x + he_i) - u(x))$ podemos trabajar con la derivada de cada funcional $(J^i_{s,p})'$: $W^{s,p}_{i,0}(\Omega) \to W_i^{-s,p'}(\Omega)$, la cual es continua y su expresión está dada por

$$\langle (J^i_{s,p})'(u), v\rangle := s(1-s)p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|D_h^i u|^{p-2}(x)\, D_h^i u(x)\, D_h^i v(x)}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx,$$

si $0 < s < 1$. Y

$$\langle (J^i_{1,p})'(u), v\rangle := 2\int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\, v_{x_i}\, dx,$$

si $s = 1$.

Las expresiones anteriores son diferenciables en el sentido de Gâteaux, además de ser lineales y continuas. Por lo tanto, son diferenciables en el sentido de Fréchet para cada $s \in (0, 1]$ y $p \in (1, \infty)$.

Por otro lado, si tomamos $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ y $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, entonces el operador

$$J_{\vec{s},\vec{p}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

es Fréchet diferenciable con derivada $J'_{\vec{s},\vec{p}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to W^{-\vec{s},\vec{p}'}(\Omega)$ dada por

$$J'_{\vec{s},\vec{p}}(u) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}(J^i_{s_i,p_i})'(u).$$

Así, definimos el *pseudo $\vec{p}$-laplaciano fraccionario anisotrópico* como

$$(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}u := J'_{\vec{s},\vec{p}}(u).$$

Si estamos en el caso donde $\vec{s} = (1, \ldots, 1)$ y $\vec{p} = (p, \ldots, p)$, entonces

$$(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}u := \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\left(|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}\right),$$

el clásico pseudo p-laplaciano, estudiado por ejemplo en [6].

Teniendo ya definido nuestro operador entonces nos es inmediato formular el siguiente problema asociado a la ecuación diferencial

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Las soluciones que vamos a buscar son débiles, es decir, $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ es una solución débil de (3.1.1) si

$$\langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}u, v\rangle = \int_\Omega fv\, dx$$

para toda $v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$.

Sin embargo, para que la noción de solución débil esté bien definida necesitamos imponer algunas condiciones de integrabilidad, las usuales, al término fuente f. Si consideramos el caso donde $f = f(x)$ entonces, el teorema de inmersión de Sobolev requiere que $f \in L^{(\vec{p}^{\,*})'}(\Omega)$ donde $(\vec{p}^{\,*})'$ es el exponente conjugado de Lebesgue de $\vec{p}^{\,*}$, definido en 2.0.4.

Existencia y unicidad de soluciones débiles de (3.1.1) es consecuencia directa de aplicar el Método Directo de cálculo de Variaciones, ya que una solución débil de (3.1.1) es el único mínimo del funcional

$$I(v) := J_{\vec{s},\vec{p}}(v) - \int_\Omega f v \, dx,$$

el cuál es estrictamente convexo, coercitivo y continuo en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$.

Recolectemos todo lo dicho en la siguiente proposición

Proposición 3.1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado, sea $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $s_i \in (0,1)$, $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \in (1, \infty)$ y $\vec{p}^{\,*}$ el exponente crítico de Sobolev definido en 2.0.4 y asumimos que $p_{max} < \vec{p}^{\,*}$ y $\overline{\vec{s}\vec{p}} < n$.*

Entonces para cada $f \in L^{(\vec{p}^{\,*})'}(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ a

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Como existencia y unicidad de soluciones está resuelto, podemos enfocarnos en el comportamiento asintótico de las soluciones. Para dicho objetivo, consideremos $\vec{s}_k := (s_1^k, \ldots, s_j^k, s_{j+1}, \ldots, s_n)$. Además, supongamos $s_1^k, \ldots, s_j^k \to 1$ y $s_{j+1}, \ldots, s_n$ se mantienen fijos. Consideremos los funcionales

$$I_k(v) := J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(v) - \int_\Omega f v \, dx.$$

Por la Proposición 3.1.5, existe un único mínimo u_k de I_k en $W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$. Entonces veamos el comportamiento de la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ cuando $k \to \infty$.

Definamos $\vec{s}_0 := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{j}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$ y

$$I_0(v) := J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(v) - \int_\Omega f v \, dx,$$

donde

$$J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(v) := \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{p_i} J^i_{1,p_i}(v) + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i,p_i}(v).$$

Con los resultados previos sobre $\Gamma-$convergencia podemos concluir el siguiente teorema.

Teorema 3.1.6. *Con la notación previa, los funcionales $\bar{I}_k \colon L^{p_{min}}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ definidos como*

$$\bar{I}_k(v) = \begin{cases} I_k(v) & \text{si } v \in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega), \\ \infty & \text{si no}, \end{cases}$$

$\Gamma-$convergen a $\bar{I} \colon L^{p_{min}}(\Omega) \to \bar{\mathbb{R}}$ definido como

$$\bar{I}(v) = \begin{cases} I(v) & \text{si } v \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega), \\ \infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Demostración. Por el Corolario 3.1.2 tenemos que $J_{\vec{s}_k,\vec{p}}$ $\Gamma-$converge a $J_{\vec{s}_0,\vec{p}}$ si $k \to \infty$. Además, el funcional que mapea $u \mapsto \int_\Omega fu\,dx$ es continuo en $L^{p_{\min}}(\Omega)$ por lo tanto los funcionales I_k $\Gamma-$convergen a I_0. □

Una consecuencia inmediata de este resultado es la convergencia de soluciones de (3.1.1) al correspondiente problema límite.

Corolario 3.1.7. *Sea $u_k \in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ solución débil de*

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u_k = f & \text{en } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Entonces $u_k \to u_0$ en $L_0^{p_{min}}(\Omega)$ donde $u_0 \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ es una solución débil

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u_0 = f & \text{en } \Omega \\ u_0 = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

3.2. Caso semi-lineal

En esta sección vamos a investigar el caso cuando el término fuente f depende también de la solucion u, es decir, $f = f(x,u)$. Es por ello que para tener una definición de solución débil, necesitamos imponer algunas condiciones, usuales, a f.

(f_1) $f : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory.

(f_2) Existe una constante $C > 0$ y un exponente $q \leq \vec{p}^{\,*}$ tal que

$$|f(x,z)| \leq C(1 + |z|^{q-1}).$$

Recordemos que (f_1) implica que $f(x,u(x))$ es medible siempre que $u(x)$ sea medible. Y (f_2) implica que si $u \in L^{\vec{p}^{\,*}}(\Omega)$, entonces $f(x,u(x)) \in L^{(\vec{p}^{\,*})'}(\Omega)$. Así, decimos que u es una solución débil de

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

si y sólo sí $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ y

$$\langle J'_{\vec{s},\vec{p}}(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx, \quad \text{para todo } v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega).$$

Bajo estas condiciones, podemos probar el siguiente resultado de estabilidad para soluciones débiles de (3.2.1).

Teorema 3.2.1. *Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $u_k \in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ solución débil de*

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u_k = f(x,u_k) & \text{en } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Además, supongamos que existe una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ precompacta en $L^{p_{min}}(\Omega)$, acotada en $L^q(\Omega)$ y que $\vec{s}_k \to \vec{s}_0$ cuando $k \to \infty$. Y finalmente supongamos que el exponente q de (f_2) satisface que $q < \vec{p}^{\,*}_{\vec{s}_0}$ y $\overline{\vec{s}_0\vec{p}} < n$. Entonces, cualquier punto de acumulación u de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pertenece a $W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ y es solución débil de

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Para dar una demostración no tan extensa, consideremos los siguiente lemas, los cuales son adaptaciones de [26, Lemas 2.7 y 2.8].

Lema 3.2.2. *Con las mismas hipótesis y notación del Teorema 3.2.1, sea $u \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ fijo y para cada $k \in \mathbb{N}$, $v_k \in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ tal que $\sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(v_k) < \infty$. Entonces para $t > 0$*

$$J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u + tv_k) \leq J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u) + t\langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u, v_k\rangle + o(t),$$

donde $o(t)$ es uniforme en $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. La prueba es consecuencia inmediata de la estimación

$$|a+tb|^p = \begin{cases} |a|^p + tp|a|^{p-2}ab + O(t^2) & \text{si } p \geq 2, \\ |a|^p + tp|a|^{p-2}ab + o(t^p) & \text{si } p < 2. \end{cases}$$

Donde $O(t^2)$ y $o(t^p)$ son uniformes en $|b|$. □

Lema 3.2.3. *Bajo las mismas hipótesis del Lema 3.2.2 y si $v_k \to v$ in $L^{p_{min}}(\Omega)$. Entonces, para cada $u \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ tenemos*

$$\langle J'_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u), v_k\rangle \to \langle J'_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u), v\rangle.$$

Demostración. Observemos que gracias al Teorema 2.1.9 $v \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ y todo está bien definido.

La idea será probar que

$$\langle -(\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u, v\rangle \leq \liminf_{k\to\infty} \langle -(\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u, v_k\rangle. \tag{3.2.3}$$

Pues, si probamos lo anterior para todo $u \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$, podemos conseguir la desigualdad inersa utilizando $-u$.
Por el Teorema 2.1.9 tenemos que

$$J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u+tv) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u+tv_k).$$

Y por el Teorema 2.1.7 tenemos que

$$J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u) = \lim_{\vec{s}\to\vec{s}_0} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u).$$

Luego, combinando las dos expresiones anteriores obtenemos

$$J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u+tv) - J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \left(J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u+tv_k) - J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u)\right).$$

Luego, aplicando el Lema 3.2.2

$$\langle(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0}u, v\rangle + o(1) \leq \liminf_{k\to\infty}\langle(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k}u, v_k\rangle + o(1).$$

De donde obtenemos (3.2.3). □

Con la ayuda de estos dos lemas podemos probar el Teorema 3.2.1.

Demostración. Para comenzar observemos que

$$\langle J'_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k), u_k\rangle \geq p_{\min} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k).$$

Entonces, usando (f_2) y el hecho de que cada u_k es una solución débil de (3.2.2), tenemos que

$$J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) \leq C(1 + \|u_k\|_q^q).$$

Como cada $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $L^q(\Omega)$, tenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) < \infty. \tag{3.2.4}$$

Por otro lado, ya que $u_k \to u$ in $L^{p_{\min}}(\Omega)$, pasando por una subsucesión de ser necesario, obtenemos que $u_k \to u$ a.e. en Ω. Más aún, usando el teorema de compacidad 2.1.9, obtenemos que $u \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$.

Ahora, definamos

$$\eta_k := (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k}u_k \in W^{-\vec{s}_k,\vec{p}\,'}(\Omega).$$

Veamos que $\{\eta_k\}$ es una sucesión acotada en $W^{-\vec{s}_0,\vec{p}\,'}(\Omega)$. Primero, notemos que $\vec{p}_{\vec{s}_k}{}^* \to \vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*$ si $k\to\infty$ y $q < \vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*$, entonces $(q-1)(\vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*)' < \vec{p}_{\vec{s}_k}{}^*$, para k grande. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle\eta_k, v\rangle &= \int_\Omega f(x,u_k)v\,dx \\
&\leq C\int_\Omega (1+|u_k|^{q-1})|v|\,dx \leq C\int_\Omega |v|\,dx + C\int_\Omega |u_k|^{q-1}|v|\,dx \\
&\leq C\|v\|_{\vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*} + C\|v\|_{\vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*}\left(\int_\Omega |u_k|^{(q-1)(\vec{p}^*_{\vec{s}_0})'}\,dx\right)^{1/(\vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*)'}.
\end{aligned}$$

Cómo $(q-1)(\vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*)' < \vec{p}_{\vec{s}_k}{}^*$, por el Teorema 2.0.3, de inmersión de Sobolev para el espacio anisotropico fraccionario, y la acotación uniforme sobre $J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k)$

(3.2.4), tenemos que $\|u_k\|_{(q-1)(\vec{p}^*_{\vec{s}_0})'} \leq C$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{\eta_k\}$ está acotado en $W^{-\vec{s}_0,\vec{p}\,'}(\Omega)$.

Nuevamente pasando a una subsucesión, existe $\eta \in W^{-\vec{s}_0,\vec{p}\,'}(\Omega)$ tal que $\eta_k \rightharpoonup \eta$ débil en $W^{-\vec{s}_0,\vec{p}\,'}(\Omega)$.

Al ser u_k solución débil de (3.2.2) entonces para cada $v \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ tenemos

$$0 = \langle \eta_k, v\rangle - \int_\Omega f(x,u_k)v\,dx.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$

$$0 = \langle \eta, v\rangle - \int_\Omega f(x,u)v dx,$$

donde el primer término converge débilmente, mientras que el segundo converge por convergencia dominada.

Veamos que

$$\langle \eta, v\rangle = \langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u, v\rangle.$$

Para este propósito utilicemos la monotonía del operador y el hecho de que u_k es solución débil de (3.2.2). De hecho,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u_k, u_k - v\rangle - \langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} v, u_k - v\rangle \\ &= \int_\Omega f(x,u_k)(u_k - v)\,dx - \langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} v, u_k - v\rangle. \end{aligned}$$

Tomando límite $k \to \infty$ y gracias al Lema 3.2.3,

$$0 \leq \int_\Omega f(x,u)(u-v)\,dx - \langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} v, u - v\rangle.$$

Si se elige $v := u - tw$, con un $w \in W^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ dado y $t > 0$, obtenemos que

$$0 \leq \langle \eta, w\rangle - \langle -\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0}(u - tw), w\rangle.$$

Así, tomamos límite cuando $t \to 0$ y obtenemos

$$0 \leq \langle \eta, w\rangle - \langle -\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0}(u), w\rangle.$$

Para obtener la otra desigualdad que nos falta y concluir la demostración, sólo basta tomar $-w$. □

3.3. Soluciones Ground-state

El propósito de esta sección es analizar el caso donde la sucesión de soluciones $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son *soluciones ground-state* (GS) (soluciones de energía mínima) del problema

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u_k = f(x,u_k) & \text{en } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Y su comportamiento límite a soluciones de

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Llamamos soluciones GS a un minimizante del siguiente funcional de energía

$$I_{\vec{s},\vec{p}}(u) = J_{\vec{s},\vec{p}}(u) - \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

restringido a la variedad de *Nehari*,

$$\mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}} = \{v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \setminus \{0\} : \langle (I_{\vec{s},\vec{p}})'(v), v\rangle = 0\}.$$

donde $F(x,z) = \int_0^z f(x,t)\,dt$ es una primitiva de f.

Nuevamente, sobre la no linealidad f, además de (f_1) y (f_2), se asumirá que se cumplen las siguientes hipótesis estructurales adicionales que son estándar cuando se consideran soluciones GS en problemas no lineales.

(f_3) $\dfrac{F(x,z)}{|z|^{p_{\max}}} \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$.

(f_4) $f(x,z) = \circ(|z|^{p_{max}-1})$ cuando $z \to 0$ uniformemente con respecto a $x \in \Omega$.

(f_5) Para casi todo $x \in \Omega$

$$\frac{f(x,z)}{|z|^{p_{\max}-1}} \text{ es estrictamente creciente en } (-\infty,0) \cup (0,\infty).$$

(f_6) Existe una constante $\mu > p_{\max}$ tal que

$$\mu F(x,z) \le z f(x,z)$$

Además, como en la subsección anterior, el exponente q en (f_2) debe ser subcrítico, es decir, $q < \vec{p}^*$.

En nuestro contexto, una solución GS, $u_{\vec{s}}$, es una solución de paso de la montaña.

Observación 3.3.1. Observemos que la variedad de Nehari, $\mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}}$, tiene la propiedad de que dada cualquier función distinta de cero $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, existe un $t > 0$ único tal que $tu \in \mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}}$. Denotamos este escalar como $t_u^{\vec{s}}$.

La existencia y unicidad de este escalar $t_u^{\vec{s}}$ se deduce mediante el uso de argumentos estándar en el Cálculo de Variaciones. Es decir, dados $t \in \mathbb{R}$ y $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ definimos la función

$$\phi(t) = J_{\vec{s},\vec{p}}(tu) - \int_\Omega F(x,tu)\,dx.$$

Por un lado, vemos que $\phi(0) = 0$ y $\phi'(t) \geq 0$ para pequeños valores de $t > 0$ (esto lo obtenemos de la definición de ϕ y (f_4)). Más aún, por (f_3) obtenemos que $\phi(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$. Entonces concluimos la existencia de por lo menos un punto crítico de ϕ.

Por otro lado, $\phi'(t)$ verifica lo siguiente

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \sum_{i=1}^{n} t^{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u) - \int_\Omega f(x,ut)tu\,dx \\ &= t^{p_{\max}}\Big[C + \underbrace{\sum_{p_i \neq p_{\max}} t^{p_i - p_{\max}} J^i_{s_i,p_i}(u) - \int_\Omega \frac{f(x,ut)u^{p_{\max}}}{|ut|^{p_{\max}-1}}\,dx}_{A}\Big].\end{aligned}$$

Por (f_5), A es estrictamente decreciente, por lo tanto el punto crítico es único.

De la Observación 3.3.1 vemos que una solución GS debe satisfacer

$$c_{\vec{s}} = I_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) = \inf_{v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)\setminus\{0\}} \sup_{t>0} I_{\vec{s},\vec{p}}(tv) > 0.$$

Nuestro objetivo es estudiar, bajo ciertas hipótesis que deduciremos más adelante, el comportamiento límite de soluciones GS. Para ello, necesitaremos varios lemas.

Lema 3.3.2. *Utilizando la notación previa,* $c_{\vec{s}_0} \geq \limsup_{\vec{s}\to\vec{s}_0} c_{\vec{s}}$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{N}_{\vec{s}_0,\vec{p}}$, por la Observación 3.3.1 existe $t_u^{\vec{s}} > 0$ tal que $t_u^{\vec{s}} u \in \mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}}$. Primero necesitamos analizar el comportamiento de los escalares $t_u^{\vec{s}}$ cuando $\vec{s} \to \vec{s}_0$.

Como $t_u^{\vec{s}} u \in \mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle (J_{\vec{s},\vec{p}})'(t_u^{\vec{s}}u), t_u^{\vec{s}}u\rangle &= \sum_{i=1}^{n} |t_u^{\vec{s}}|^{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u) \\ &= \int_\Omega f(x, t_u^{\vec{s}}u) t_u^{\vec{s}} u\,dx \\ &\geq \mu \int_\Omega F(x, t_u^{\vec{s}}u)\,dx \\ &= \mu |t_u^{\vec{s}}|^{p_{\max}} \int_\Omega \frac{F(x, t_{\vec{s}}u)|u|^{p_{\max}}}{|t_u^{\vec{s}}u|^{p_{\max}}}\,dx.\end{aligned}$$

Entonces, si asumimos que $t_u^{\vec{s}} \geq 1$, obtenemos

$$p_{\max} J_{\vec{s},\vec{p}}(u) \geq \mu \int_\Omega \frac{F(x, t_{\vec{s}}u)|u|^{p_{\max}}}{|t_u^{\vec{s}}u|^{p_{\max}}}\,dx. \tag{3.3.3}$$

Por nuestro teorema de convergencia puntual, Teorema 2.1.7, tenemos

$$J_{\vec{s},\vec{p}}(u) \to J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u) < \infty \text{ cuando } \vec{s} \to \vec{s}_0.$$

Es decir, el lado izquierdo de (3.3.3) está acotado y gracias a la hipótesis (f_3) concluimos que $\{t_u^{\vec{s}}\}_{\vec{s}}$ está acotado.

Tomemos $t_0 \geq 0$ un punto de acumulación de $\{t_u^{\vec{s}}\}_{\vec{s}}$ y $t_k := t_u^{\vec{s}_k}$ una subsucesión tal que $t_k \to t_0$ cuando $k \to \infty$. Veamos que $t_0 \neq 0$. De hecho, por la identidad de Nehari obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |t_k|^{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u) = \int_\Omega f(x, t_k u) t_k u \, dx,$$

y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} |t_k|^{p_i - p_{\min}} J^i_{s_i,p_i}(u) = \int_\Omega \frac{f(x, t_k u)}{|t_k u|^{p_{\min}-1}} |u|^{p_{\min}-1} u \, dx.$$

Entonces, si $t_0 = 0$ y $p_{\min} = p_{i_0}$, pasando al límite cuando $k \to \infty$ y usando (f_4), deducimos que

$$J^{i_0}_{s_{i_0},p_{\min}}(u) = 0.$$

Pero esto implicaría que u es independiente de x_{i_0} entonces $u = 0$, lo cual es una contradicción, entonces $t_0 > 0$.
Más aún, de (f_2) y (f_4) tenemos que

$$|f(x, t_k u) t_k u| \leq \varepsilon |t_k u|^{p_{\min}} + C_\varepsilon |t_k u|^q \leq C(|u|^{p_{\min}} + |u|^q) \in L^1(\Omega),$$

con $C > 0$ independiente de k. Así, usando el teorema de convergencia dominada,

$$\int_\Omega f(x, t_k u) t_k u \, dx \to \int_\Omega f(x, t_0 u) t_0 u \, dx \quad (\text{con } k \to \infty).$$

Entonces tenemos

$$\sum_{i=1}^{n} |t_0|^{p_i} J^i_{s_i^0,p_i}(u) = \int_\Omega f(x, t_0 u) t_0 u \, dx.$$

Al u estar en $\mathcal{N}_{\vec{s}_0,\vec{p}}$, entonces $t_0 = 1$ y $t_u^{\vec{s}} \to 1$ cuando $\vec{s} \to \vec{s}_0$.

Ahora, procedemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} c_{\vec{s}} \leq I_{\vec{s},\vec{p}}(t_u^{\vec{s}} u) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i,p_i}(t_u^{\vec{s}} u) - \int_\Omega F(x, t_u^{\vec{s}} u) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} |t_u^{\vec{s}}|^{p_i} J^i_{s_i,p_i}(u) - \int_\Omega F(x, t_u^{\vec{s}} u) \, dx. \end{aligned}$$

Podemos tomar límite cuando $\vec{s} \to \vec{s}_0$ en la desigualdad anterior para obtener

$$\limsup_{\vec{s} \to \vec{s}_0} c_{\vec{s}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} J^i_{s_i^0,p_i}(u) - \int_\Omega F(x, u) \, dx = I_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u),$$

donde nuevamente hemos utilizado el Teorema 2.1.7.

Finalmente, si tomamos el ínfimo sobre $u \in \mathcal{N}_{\vec{s}_0,\vec{p}}$ concluimos nuestra demostración. □

En nuestro siguiente lema demostramos que cualquier sucesión de soluciones GS de (3.3.2) está uniformemente acotada con respecto a $\vec{s}$ lejos del origen e infinito.

Lema 3.3.3. *Sea $u_s \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ una solución GS de (3.3.1). Entonces existen dos constantes $0 < c < C < \infty$ independiente de $\vec{s}$ tal que*

$$c \leq J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) \leq C.$$

Demostración. Sea $u_{\vec{s}} \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ una solución GS de (3.3.1). Por el lema previo, existe una constante $C > 0$, tal que

$$\begin{aligned} C &\geq I_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) - \frac{1}{\mu}\langle I'_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}), u_{\vec{s}}\rangle \\ &= J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu} J^i_{s_i,p_i}(u_{\vec{s}}) - \int_\Omega \left(F(x,u_{\vec{s}}) - \frac{1}{\mu} f(x,u_{\vec{s}})u_{\vec{s}} \right) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{\mu} \right) J^i_{s_i,p_i}(u_s) \\ &\geq \left(\frac{1}{p_{\max}} - \frac{1}{\mu} \right) J_{\vec{s},\vec{p}}(u). \end{aligned}$$

Para ver una cota inferior, como $u_{\vec{s}} \in \mathcal{N}_{\vec{s},\vec{p}}$, tenemos que

$$p_{\min} J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) \leq \int_\Omega f(x,u_{\vec{s}})u_{\vec{s}}\,dx \leq \int_\Omega \left(\varepsilon |u_{\vec{s}}|^{p_{\max}} + C_\varepsilon |u_{\vec{s}}|^q\right) dx. \tag{3.3.4}$$

Entonces por una desigualdad estilo Poincaré (2.0.5), obtenemos que

$$\text{mín}\{\|u\|^{p_{\min}}_{\vec{p}^*}, \|u\|^{p_{\max}}_{\vec{p}^*}\} \leq C J_{\vec{s},\vec{p}}(u), \tag{3.3.5}$$

donde C es independiente de $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$.

Usando la desigualdad de Hölder, (3.3.4) y (3.3.5) obtenemos que

$$\begin{aligned} J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}) \leq & C\varepsilon \,\text{máx}\{J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}}), J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}})^{p_{\max}/p_{\min}}\} \\ & + C_\varepsilon \,\text{máx}\{J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}})^{q/p_{\max}}, J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}})^{q/p_{\min}}\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si seleccionamos $\varepsilon > 0$ pequeño obtenemos que $J_{\vec{s},\vec{p}}(u_{\vec{s}})$ es acotado inferiormente, lejos del cero, tal como queríamos ver. □

Ya tenemos las herramientas suficientes para poder enunciar y demostrar nuestro resultado más importante respecto a las soluciones GS.

Teorema 3.3.4. *Sea $\vec{s}_k \to \vec{s}_0$ cuando $k \to \infty$, $\vec{p}$ tal que $1 < p_{min} \leq p_{max} < \vec{p}_0{}^* = \vec{p}_{\vec{s}_0}{}^*$ y $\overline{\vec{s}_0\vec{p}} < n$. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una solución GS $u_k \in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_k} u_k = f(x,u_k) & \text{en } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Entonces la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es precompacta en* $L^r(\Omega)$*, para cada* $1 < r < \vec{p}_0{}^*$ *y cualquier punto de acumulación,* u*, de la sucesión* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *pertenece a* $W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ *y es una solución GS de*

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}_0} u = f(x,u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Demostración. Primero notemos que si $\vec{s}_k \to \vec{s}_0$, entonces $\vec{p}_k{}^* := \vec{p}_{\vec{s}_k}{}^* \to \vec{p}_0{}^*$ cuando $k \to \infty$. Entonces, si $r < \vec{p}_0{}^*$, tenemos que $r < \vec{p}_k{}^*$ para cada k grande.

En vista de la ecuación (3.3.5) y la desigualdad de Hölder, si probamos que $\sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) < \infty$, entonces $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ estará acotado en $L^r(\Omega)$. Gracias al Lema 3.3.3 y usando la hipótesis (f_6) sobre f obtenemos

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) < \infty.$$

Finalmente, el Teorema 2.1.9 nos da la existencia de una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $u \in W_0^{\vec{s}_0,\vec{p}}(\Omega)$ tal que $u_{k_j} \to u_0$ en $L^r(\Omega)$.

Sólo falta ver que u_0 es una solución GS de (3.3.6) pues por el Teorema 3.2.1, u_0 es una solución débil de (3.3.6). Como $u_k \in \mathcal{N}_{\vec{s}_k,\vec{p}}$, tenemos que

$$0 < c \le p_{\min} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) \le \sum_{i=1}^{n} J^i_{s_i,p_i}(u_k) = \int_\Omega f(x,u_k)u_k\,dx \to \int_\Omega f(x,u_0)u_0\,dx,$$

cuando $k \to \infty$, entonces $u_0 \neq 0$ y se sigue que $u_0 \in \mathcal{N}_{\vec{s}_0,\vec{p}}$. Más aún,

$$\begin{aligned} \liminf_{k\to\infty} c_{\vec{s}_k} &= \liminf_{k\to\infty} I_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) = \liminf_{k\to\infty} J_{\vec{s}_k,\vec{p}}(u_k) - \int_\Omega F(x,u_k) \\ &\ge J_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u_0) - \int_\Omega F(x,u_0)\,dx = I_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u_0) \ge c_{\vec{s}_0}, \end{aligned}$$

donde en la desigualdad usamos el corolario de $\Gamma-$convergencia 3.1.2. Combinando esta estimación con el Lema 3.3.2 concluimos que

$$c_{\vec{s}_0} = I_{\vec{s}_0,\vec{p}}(u_0).$$

□

Capítulo 4

Un problema de autovalores

En la sección anterior desarrollamos y estudiamos existencia y análisis asintótico de ecuaciones diferenciales asociadas al operador $(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}$. Un paso siguiente, común en estos casos, es estudiar el problema de autovalores, para lo cual primero debemos plantear la forma adecuada del caso local. Y, como explicamos en la introducción, la mejor forma de encontrar un problema de autovalores adecuado es estudiar el cociente de Rayleigh adecuado.

En la década del 60', A.Benedek y R.Panzone [7] estudiaron funciones que tienen diferente integrabilidad según qué variable se está integrando. Es decir, consideraron diferentes parámetros de integración de la siguiente forma

$$1 < p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n < \infty. \tag{4.0.1}$$

Observación 4.0.1. En este capítulo es importante que los parámetros de integración estén en orden, pues si $p_i > p_{i+1}$ entonces $\frac{p_{i+1}}{p_i} < 1$ y entramos en un terreno totalmente diferente que escapa el alcance de esta tesis.

4.1. Espacio de Sobolev mixto

Se define el *espacio de Lebesgue mixto* como

$$L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = \{u \text{ una función medible tal que } \|u\|_{\vec{p}} < \infty\},$$

donde

$$\|u\|_{\vec{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{p_1} dx_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \dots \right)^{p_n/p_{n-1}} dx_n \right)^{1/p_n}.$$

Para subconjuntos Ω de $\mathbb{R}^n$, definiremos

$$L^{\vec{p}}(\Omega) = \{u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega\}.$$

Notemos que $L^{\vec{p}}(\Omega)$ y $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ son espacios de Banach reflexivos ya que para cada i se satisface $1 < p_i < \infty$, [7, Teorema 4.1].

Observación 4.1.1. La norma $\|.\|_{\vec{p}}$ puede ser definida por recurrencia,

$$\begin{aligned}
I_1(u) &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{p_1}\, dx_1\right)^{1/p_1},\\
I_2(u) &= \left(\int_{\mathbb{R}} I_1(u)^{p_2}\, dx_2\right)^{1/p_2},\\
&\vdots\\
I_j(u) &= \left(\int_{\mathbb{R}} I_{j-1}(u)^{p_j}\, dx_j\right)^{1/p_j},\\
&\vdots\\
I_n(u) &= \left(\int_{\mathbb{R}} I_{n-1}(u)^{p_n}\, dx_n\right)^{1/p_n},\\
I(u) &= I_n(u) = \|u\|_{\vec{p}}.
\end{aligned}$$

Observación 4.1.2. Para $u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$, se tiene:

- $I_j(u)$ es una función que depende de $(x_{j+1}, \ldots, x_n)$.
- Para casi todo $(y_{j+2}, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-j-2}$, la función $I_j(u)$ (como función de x_{j+1}), pertenece a $L^{p_{j+1}}(\mathbb{R})$.
- Si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión tal que $u_k \to u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ cuando $k \to \infty$ entonces

  $$I_j(u_k)(\cdot, y_{j+2}, \ldots, y_n) \to I_j(u)(\cdot, y_{j+2}, \ldots, y_n)$$

  en $L^{p_{j+1}}(\mathbb{R})$ para casi todo $(y_{j+2}, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n-j-2}$.

Ahora, centremos nuestra atención en funciones cuyas derivadas parciales tienen diferente integrabilidad. Dado $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ con $1 < p_i < \infty$, redefinimos el espacio de Sobolev anisotrópico de la siguiente manera

$$W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \colon u_{x_i} \in L^{p_i}(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \ldots, n\right\},$$

equipado con la siguiente norma

$$\|u\|_{1,\vec{p}} = \|u\|_{\vec{p}} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i} = \|u\|_{\vec{p}} + \|\nabla u\|_{\vec{p}}.$$

Observemos que $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo.

Ahora, dado un dominio acotado con frontera Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ como el la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{1,\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Para el caso fraccionario, recordando la notación

$$[u]_{s,p,i} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dhdx\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde e_i es el $i^{\text{ésimo}}$ vector base canónico en $\mathbb{R}^n$. Entonces al igual que en capítulos anteriores redefinimos el espacio de Sobolev anisotrópico fraccionario como

$$W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \colon [u]_{s_i,p_i,i} < \infty,\ i = 1, \dots, n \right\}.$$

Este espacio tiene una norma definida como

$$\|u\|_{\vec{s},\vec{p}} := \|u\|_{\vec{p}} + \sum_{i=1}^{n} [u]_{s_i,p_i,i} = \|u\|_{\vec{p}} + [u]_{\vec{s},\vec{p}}.$$

Nuevamente $W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach separable y reflexivo. Además, dado un dominio acotado con frontera Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ como la clausura de $C_c^\infty(\Omega)$ en $W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$.

Observación 4.1.3. En esta nueva definición del espacio anisotrópico, modificamos la forma de medir la anisotropía de la función: antes requeríamos que la función perteneciera a todos los espacios L^p, mientras que ahora sólo exigimos que cada coordenada pertenezca al espacio L^p correspondiente.

Los siguientes dos teoremas son versiones de la desigualdad de Poincaré y Rellich Kondrashov en el contexto de espacios $L^{\vec{p}}(\Omega)$.

Proposición 4.1.4 (Poincaré)**.** *Dado un Ω subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$. Existen constantes $C_1(\Omega, \vec{p}, n) > 0$ y $C_2(\Omega, \vec{p}, \vec{s}, n) > 0$ tal que para cada u en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, la siguiente desigualdad se cumple*

$$\|u\|_{\vec{p}} \leq C_1 \|\nabla u\|_{\vec{p}}. \tag{4.1.1}$$

Y para cada u en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, se cumple:

$$\|u\|_{\vec{p}} \leq C_2 [u]_{\vec{s},\vec{p}}. \tag{4.1.2}$$

Demostración. Sea u una función en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Por un lado observemos que $p_i \leq p_n$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ y $|\Omega| < \infty$, entonces por desigualdad de Hölder tenemos que $L^{p_n}(\Omega)$ está continuamente embebido en $L^{\vec{p}}(\Omega)$, es decir, existe una constante positiva $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{\vec{p}} \leq C \|u\|_{p_n}.$$

Por otro lado, la desigualdad de Poincaré para funciones en $W_0^{1,p_n}(\Omega)$ nos dice

$$\|u\|_{L^{p_n}(\Omega)} \leq C \|u_{x_n}\|_{p_n} \leq C \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i}.$$

Entonces, combinando estos resultados obtenemos (4.1.1).

Para la segunda desigualdad, tomemos u una función en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, podemos asumir que existe un $R>0$ tal que $\operatorname{supp} u \subset Q_R=[-R,R]^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
[u]^{p_1}_{s_1,p_1,1} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_1)-u(x)|^{p_1}}{|h|^{1+s_1p_1}}\,dh\,dx \\
&\geq \int_{Q_R}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_1)-u(x)|^{p_1}}{|h|^{1+s_1p_1}}\,dh\,dx \\
&\geq \int_{Q'_R}\int_{|x_1|\leq R}\int_{|x_1+he_1|\geq R} \frac{|u(x)|^{p_1}}{|h|^{1+s_1p_1}}\,dh\,dx_1\,dx' \\
&\geq \int_{Q'_R}\int_{|x_1|\leq R} |u(x)|^{p_1}\int_{|h|\geq 2R} \frac{1}{|h|^{1+s_1p_1}}\,dh\,dx_1\,dx' \\
&\geq C\|u\|^{p_1}_{p_1}.
\end{aligned}$$

Donde $Q'_R=[-R,R]^{n-1}$ y $dx'=dx_2\cdots dx_n$.

Argumentando de manera similar para cada i, existen constantes $C_i(\Omega,s_i,p_i)$ tal que

$$C_i[u]_{s_i,p_i,i}\geq \|u\|_{p_i}.$$

Por lo tanto, tomando $K=\max_i\{C_i\}$ tenemos que

$$K\sum_{i=1}^n [u]_{s,p,i}\geq \sum_{i=1}^n \|u\|_{p_i}\geq \|u\|_{p_n}\geq C\|u\|_{\vec{p}}.$$

Esto concluye la prueba de (4.1.2). □

Recordemos de secciones anteriores la siguiente notación

$$\bar{\vec{p}}:=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i}\right)^{-1}\quad \bar{\vec{s}}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_i}\right)^{-1}\text{ y }\overline{\vec{s}\vec{p}}=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_ip_i}\right)^{-1}.$$

$$\vec{p}^{\,*}:=\frac{n\bar{\vec{p}}}{n-\bar{\vec{p}}}.$$

$$\vec{p}_{\vec{s}}^{\,*}=\frac{n\frac{\overline{\vec{s}\vec{p}}}{\bar{\vec{s}}}}{n-\frac{\overline{\vec{s}\vec{p}}}{\bar{\vec{s}}}}.$$

Proposición 4.1.5 (Rellich-Kondrashov)**.** *Sea $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$ con $1<p_i<\infty$, $i=1,\dots,n$ tal que $\bar{\vec{p}}<n$. Entonces $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, para todo $1\leq q\leq \vec{p}^{\,*}$ y $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)\subset\subset L^q(\Omega)$ si $1\leq q<\vec{p}^{\,*}$. En particular $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)\subset\subset L^{\vec{p}}(\Omega)$.*

En el caso no local, con $\vec{s}=(s_1,\dots,s_n)$ $0<s_i<1$ para $i=1,\dots,n$. Si $\overline{\vec{s}\vec{p}}<n$ y $p_n<\vec{p}_{\vec{s}}^{\,*}$. Entonces $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$, para todo $1\leq q\leq \vec{p}_{\vec{s}}^{\,*}$ se tiene $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)\subset\subset L^q(\Omega)$ para $1\leq q<\vec{p}_{\vec{s}}^{\,*}$. En particular $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)\subset\subset L^{\vec{p}}(\Omega)$.

Demostración. La prueba de $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)\subset\subset L^q$ para cada $1<q<\vec{p}^{\,*}$ fue demostrada en [48, 23]. Para probar que $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)\subset L^{\vec{p}}(\Omega)$ observemos que $p_n<\vec{p}^{\,*}$ implica $L^{p_n}(\Omega)\subset L^{\vec{p}}(\Omega)$ de forma continua.

La demostración del caso no local es inmediata del Teorema 2.0.3 y la idea previa. □

4.2. Ecuación de Euler-Lagrange

Ahora ya estamos en posición de definir nuestro problema de autovalores a través de la ecuación de Euler-Lagrange (E-L) asociado al cociente de Rayleigh

$$\mathcal{Q}_{\vec{p}}(u) = \frac{\|\nabla u\|_{\vec{p}}}{\|u\|_{\vec{p}}}.$$

De hecho, siguiendo las ideas de [28] (también de [24]), mostraremos que la ecuación de E-L es la siguiente:

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{p}}\, u := \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Donde el operador $-\mathcal{L}_{\vec{p}}$ lo definimos como

$$-\mathcal{L}_{\vec{p}}\, u := -\operatorname{div}\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right) \tag{4.2.2}$$

y

$$\mathcal{F}_{\vec{p}}(u) = \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} |u|^{p_1-2} u, \tag{4.2.3}$$

donde $p_{n+1} = 1$.

Para comenzar, daremos una definición de solución débil del problema (4.2.1).

Definición 4.2.1. Sea u una función en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Decimos que u es solución débil del problema (4.2.1) si y sólo si u verifica

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} v_{x_i}\, dx = \lambda \int_\Omega \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) v\, dx,$$

para toda $v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

Ahora veamos alguna propiedades de nuestro operadores. Veamos que $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ un operador continuo.

Lema 4.2.2. *Sea $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$ tal que $1 < p_i < \infty$ y $\vec{p}\,' = (p_1', \dots, p_n')$ el exponente conjugado de Lebesgue coordenada a coordenada. Sea $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ el funcional definido en (4.2.3), entonces $\mathcal{F}_{\vec{p}}$: $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n) \to L^{\vec{p}\,'}(\mathbb{R}^n)$ es continuo.*

Demostración. Para ver que está bien definido observemos que si $u \in L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_{\vec{p}}(u)|^{p_1'}\, dx_1 \right)^{1/p_1'} &= \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{(p_1-1)p_1'}\, dx_1 \right)^{1/p_1'} \\ &= \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_1} I_1(u)^{p_1/p_1'} \\ &= \prod_{i=2}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_1} I_1(u)^{p_2-1}. \end{aligned}$$

Iterando este procedimiento concluimos que

$$\|\mathcal{F}_{\vec{p}}(u)\|_{\vec{p}\,'} = \|u\|_{\vec{p}}.$$

Para ver continuidad de $\mathcal{F}_{\vec{p}}$, tomemos $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \to u$ en $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ y definamos

$$\tilde{I}_1(k) := \left(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) - \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)|^{p_1'}\, dx_1\right)^{1/p_1'},$$

$$\tilde{I}_{i+1}(k) := \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{I}_i(k)^{p_{i+1}'}\, dx_{i+1}\right)^{1/p_{i+1}'} \qquad \text{para } i = 1,\dots,n-1.$$

Luego

$$\|\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) - \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)\|_{\vec{p}\,'} = \tilde{I}_n(k).$$

Por lo tanto, será suficiente mostrar que, pasando por una subsucesión,

$$\tilde{I}_i(k) \to 0 \text{ cuando } k\to\infty \quad \text{c.t.p. } (x_{i+1},\dots,x_n), \qquad i = 1,\dots,n.$$

Y que para casi todo punto $(x_{i+2},\dots,x_n)$ se tiene

$$\tilde{I}_i(k)(x_{i+1}) \le h_i(x_{i+1})$$

para $h \in L^{p_{i+1}'}(\mathbb{R})$.

Veamos la cuenta para $i = 1$. Por la observación 4.1.2, $\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) \to \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)$ c.t.p. Entonces para ver que $\tilde{I}_1(k) \to 0$ en casi todo punto $x' = (x_2,\dots,x_n)$, necesitamos encontrar un mayorante integrable de $|\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) - \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)|^{p_1'}$ para $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ c.t.p.

Notemos que

$$|\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) - \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)|^{p_1'} \le C\left(\prod_{i=1}^n I_i(u_k)^{(p_{i+1}-p_i)p_1'}|u_k|^{p_1} + \prod_{i=1}^n I_i(u)^{(p_{i+1}-p_i)p_1'}|u|^{p_1}\right).$$

Y nuevamente por la Observación 4.1.2

$$I_i(u_k)(\cdot, x_{i+2},\dots,x_n) \to I_i(u)(\cdot, x_{i+2},\dots,x_n)$$

en $L^{p_{i+i}}(\mathbb{R})$ c.t.p $(x_{i+2},\dots,x_n)$. Entonces existe $h_i = h_i(\cdot, x_{i+2},\dots,x_n) \in L^{p_{i+1}}(\mathbb{R})$ tal que

$$I_i(u_k)(x_1, x_{i+2},\dots,x_n) \le h_i(x_1, x_{i+2},\dots,x_n).$$

Más aún, dado que $u_k(\cdot,x') \to u(\cdot,x')$ en $L^{p_1}(\mathbb{R})$ obtenemos la existencia de $h_0(x)$, $h_0(\cdot,x') \in L^{p_1}(\mathbb{R})$ tales que

$$|u_k(x)| \le h_0(x).$$

Así

$$|\mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) - \mathcal{F}_{\vec{p}}(u)|^{p_1'} \le C\left(\prod_{i=1}^n h_i^{(p_{i+1}-p_i)p_1'}h_0^{p_1} + \prod_{i=1}^n I_i(u)^{(p_{i+1}-p_i)p_1'}|u|^{p_1}\right) =: \Phi(x_1,x').$$

Cómo $\Phi(\cdot, x') \in L^1(\mathbb{R})$ para casi todo punto $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, obtenemos que

$$\tilde{I}_1(k) \to 0.$$

De forma idéntica se prueba la cuenta para $i = 2, \cdots, n$. □

Utilizaremos la siguiente notación

$$H(u) = \|\nabla u\|_{\vec{p}} \quad \text{y} \quad I(u) = \|u\|_{\vec{p}}. \tag{4.2.4}$$

Veamos que estos funcionales son diferenciables en el sentido de Fréchet.

Lema 4.2.3. *Los funcionales $I\colon L^{\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $H\colon W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el sentido de Gateaux, lejos del cero y sus derivadas estan dadas por las siguientes expresiones:*

$$\frac{d}{dt} I(u+tv)|_{t=0} = \langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} |u|^{p_1-2} uv \, dx, \tag{4.2.5}$$

donde $p_{n+1} = 1$ y

$$\frac{d}{dt} H(u+tv)|_{t=0} = \langle H'(u), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} v_{x_i} \, dx. \tag{4.2.6}$$

Es decir $H' = \mathcal{L}_{\vec{p}}$ y $I' = \mathcal{F}_{\vec{p}}$.

Demostración. Primero probemos (4.2.5).

Sea $u, v \in L^{\vec{p}}(\Omega)$ y $t \in \mathbb{R}$. Recordando la Observación de recurrencia 4.1.1, desarrollamos

$$\frac{d}{dt} I_1(u+tv)\bigg|_{t=0} = I_1(u)^{1-p_1} \int_{\mathbb{R}} |u|^{p_1-2} uv \, dx_1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I_2(u+tv)\bigg|_{t=0} &= I_2(u)^{1-p_2} \int_{\mathbb{R}} I_1(u+tv)^{p_2-1} \frac{d}{dt} I_1(u+tv)\bigg|_{t=0} dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I_2(u)^{1-p_2} I_1(u)^{p_2-p_1} |u|^{p_1-2} uv \, dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Así, por recurrencia llegamos a

$$\frac{d}{dt} I_n(u+tv)\bigg|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} |u|^{p_1-2} uv \, dx,$$

donde $p_{n+1} = 1$.

Para probar (4.2.6),

$$\frac{dH(u+tv)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i} + tv_{x_i}|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}-1} \int_{\mathbb{R}^n} p_i |u_{x_i} + tv_{x_i}|^{p_i-2} (u_{x_i} + tv_{x_i}) v_{x_i} \, dx.$$

Evaluando en $t = 0$ y cancelando los p_i

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(u+tv)\Big|_{t=0} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}-1} \int_{\mathbb{R}^n} p_i |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} v_{x_i} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} v_{x_i} \, dx. \end{aligned}$$

Así los funcionales H e I en el sentido de Gateaux. □

Proposición 4.2.4. *Los funcionales I y H dados en (4.2.4) son diferenciables en el sentido de Fréchet.*

Demostración. En el Lema 4.2.3 vimos que ambos funcionales son diferenciables en el sentido de Gateaux, $I' = \mathcal{F}_{\vec{p}}$ y $H' = \mathcal{L}_{\vec{p}}$. Además, en 4.2.2 probamos que $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ es continuo, lo que concluye la prueba para I.

La continuidad de H' se deduce de la monotonia de H' pues

$$\begin{aligned} |\langle H'(u), v\rangle| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} v_{x_i} \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}|^{p_i-1} |v_{x_i}| \, dx \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i/p_i'} \|v_{x_i}\|_{p_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i} = \|\nabla v\|_{\vec{p}}. \end{aligned}$$

□

Ahora podemos enunciar y probar nuestro resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.5. *Sea $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Entonces u es un punto critico de*

$$\mathcal{Q}_{\vec{p}}(u) = \frac{\|\nabla u\|_{\vec{p}}}{\|u\|_{\vec{p}}}$$

si y sólo si u es solución débil de

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{p}} u = \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Prueba de 4.2.5 . Sea

$$\mathcal{Q}_{\vec{p}}(u) = \frac{H(u)}{I(u)}.$$

Por el Lema 4.2.3, obtenemos que, si $u \neq 0$,

$$\langle \mathcal{Q}'_{\vec{p}}(u), v\rangle = \frac{1}{I(u)}\left(\langle H'(u), v\rangle - \mathcal{Q}_{\vec{p}}(u)\langle I'(u), v\rangle\right).$$

Entonces, $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ es un punto crítico de $\mathcal{Q}_{\vec{p}}$ si y sólo si

$$\langle H'(u), v\rangle = \mathcal{Q}_{\vec{p}}(u)\langle I'(u), v\rangle.$$

Y esto es equivalente a que u sea solución débil de

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{p}}\, u = \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

con $\lambda = \mathcal{Q}_{\vec{p}}(u)$. □

4.3. Caso no local

Podemos considerar el cociente de Rayleigh no local

$$\mathcal{Q}_{\vec{s},\vec{p}}(u) = \frac{[u]_{\vec{s},\vec{p}}}{\|u\|_{\vec{p}}}.$$

Veamos que la siguiente expresión es la ecuación de E-L asociada a $\mathcal{Q}_{\vec{s},\vec{p}}$

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\, u = \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{4.3.1}$$

donde $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ es el mismo operador que en el caso local y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\, u &= \text{P.V.} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} \right|^{p_i-2} \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} \frac{dh}{|h|^{1+s_i}}\, dx, \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|h|>\varepsilon} \left| \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} \right|^{p_i-2} \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} \frac{dh}{|h|^{1+s_i}}\, dx. \end{aligned}$$

Donde

$$D_h^{s,i} u(x) := \frac{D_h^i u(x)}{|h|^s}.$$

El operador $\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}$ claramente es la versión fraccionaria de $\mathcal{L}_{\vec{p}}$ y lo tenemos que entender en el sentido débil. Es decir, dados $u, v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$,

$$\langle -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\, u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} \right|^{p_i-2} \frac{D_h^{s_i,i} u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} D_h^{s_i,i} v(x) \frac{dh}{|h|}\, dx.$$

Entonces una función u en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ es solución débil de (4.3.1) si

$$\langle -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\, u, v\rangle = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) v \, dx$$

para toda $v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$.

Nuevamente, introducimos la notación

$$H_{\vec{s}}(u) = [u]_{\vec{s},\vec{p}}. \tag{4.3.2}$$

De esta forma tenemos un lema análogo al Lema 4.2.3.

Lema 4.3.1. *El funcional $H_{\vec{s}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es Gateaux diferenciable lejos del cero y su derivada está dada por*

$$\langle H'_{\vec{s}}(u), v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{D_h^{s_i,i}u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}}\right|^{p_i-2} \frac{D_h^{s_i,i}u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} D_h^{s_i,i}v(x)\frac{dh}{|h|}\, dx.$$

Además, es diferenciable en sentido Fréchet.

Demostración. La prueba es análoga al caso local. Pues, la derivada de Gâteaux de la seminorma fraccionaria

$$[u]_{s,p,i} = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

en la dirección v y evaluada en $t=0$ es

$$\frac{d}{dt}[u+tv]_{s,p,i}\Big|_{t=0} =$$
$$[u]_{s,p,i}^{1-p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^{p-2}(u(x+he_i)-u(x))(v(x+he_i)-v(x))}{|h|^{1+sp}}\, dhdx.$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}[u+tv]_{s,p,i}\Big|_{t=0} = [u]_{s,p,i}^{1-p}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|D_h^i u(x)|^{p-2}(D_h^i u(x))(D_h^i v(x))}{|h|^{1+sp}}\, dhdx.$$

Podemos reacomodar y obtener

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{D_h^{s_i,i}u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}}\right|^{p_i-2} \frac{D_h^{s_i,i}u(x)}{[u]_{s_i,p_i,i}} D_h^{s_i,i}v(x)\frac{1}{|h|}\, dh\, dx.$$

Luego la prueba finaliza tomando sumatoria y notando que es continua. □

Podemos enunciar el teorema para la ecuación de Euler-Lagrange en el caso no local, obviamente la demostración es análoga al caso local.

Teorema 4.3.2. *Sea u una función en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$. Entonces u es un punto crítico de*

$$\mathcal{Q}_{\vec{s},\vec{p}}(u) = \frac{[u]_{\vec{s},\vec{p}}}{\|u\|_{\vec{p}}}$$

si y sólo si u es solución debil del problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\, u = \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

4.4. Propiedades generales de los autovalores

Luego de derivar las ecuaciones E-L, las cuales representan a nuestros problemas de autovalores, veamos, en caso de existir, qué propiedades tienen.

Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de $-\mathcal{L}_{\vec{p}}$ en Ω con condiciones de borde del tipo Dirichlet si el problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{p}}\, u = \lambda \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

admite una solución débil no trivial $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Llamaremos a u autofunción de $\mathcal{L}_{\vec{p}}$ con autovalor λ. Además, notaremos $\Sigma^{\vec{p}}$ a la colección de dichos autovalores.

Similarmente, decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de $\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}$ en Ω condiciones de borde del tipo Dirichlet si el problema

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}} u = \lambda^{\vec{s}} \mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases}$$

admite una solución débil no trivial $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$. Llamaremos a u, autofunción de $\mathcal{L}_{\vec{p},\vec{s}}$ con autovalor $\lambda^{\vec{s}}$. Además, notaremos $\Sigma^{\vec{s},\vec{p}}$ a la colección de dichos autovalores.

Proposición 4.4.1. *$\Sigma^{\vec{p}}, \Sigma^{\vec{s},\vec{p}} \subset (0,\infty)$ son subconjuntos cerrados.*

Demostración. Sea $\lambda \in \Sigma^{\vec{p}}$ y $u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ una autofunción asociada. Tomemos

a u como función test en la formulación débil del problema. Por un lado,

$$\begin{aligned}
\langle H'(u), u\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} u_{x_i}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} \right|^{p_i-2} \frac{u_{x_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}} u_{x_i}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i}^{1-p_i} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^{p_i}\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i}^{1-p_i} \|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{p_i}.
\end{aligned}$$

Por el otro, y algo más complicado,

$$\begin{aligned}
\langle I'(u), u\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} |u|^{p_1-2} u u\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} |u|^{p_1}\, dx.
\end{aligned}$$

Recordando la notación dada en la Observación 4.1.1 y $x' = (x_2, \cdots, x_n)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{p_1}\, dx_1 \right) dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} I_1(u)^{p_1} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=2}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} I_1(u)^{p_2-p_1} I_1(u)^{p_1} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{i=2}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} I_1(u)^{p_2} dx'.
\end{aligned}$$

Nuevamente, pero notando $x' = (x_3, \cdots, x_n)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \prod_{i=2}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} \left(\int_{\mathbb{R}} I_1(u)^{p_2}\, dx_2 \right) dx' &= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \prod_{i=2}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} I_2(u)^{p_2} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-2}} \prod_{i=3}^{n} I_i(u)^{p_{i+1}-p_i} I_2(u)^{p_3} dx'.
\end{aligned}$$

Repitiendo este procedimiento es fácil ver que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} I_n(u)^{p_{n+1}-p_n} I_{n-1}(u)^{p_n}\,dx_n &= I_n(u)^{p_{n+1}-p_n}\int_{\mathbb{R}} I_{n-1}(u)^{p_n}\,dx_n \\ &= I_n(u)^{p_{n+1}-p_n} I_n(u)^{p_n} \\ &= I_n(u)^{p_{n+1}} = I(u).\end{aligned}$$

Es decir, la formulación $\langle H'(u), u\rangle = \lambda\langle I'(u), u\rangle$ es equivalente a

$$\|\nabla u\|_{\vec{p}} = \lambda\|u\|_{\vec{p}}.$$

Por lo tanto, $\lambda > 0$ y $\Sigma^{\vec{p}} \subset (0,\infty)$. De forma análoga, podemos demostrar que $\Sigma^{\vec{s},\vec{p}} \subset (0,\infty)$.

Ahora veamos que sean espacios cerrados, comenzando por $\Sigma^{\vec{p}}$. Sea $\{\lambda_k\}$ una sucesión de autovalores tal que $\lambda_k \to \lambda \in \mathbb{R}$ si $k \to \infty$ y $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ la sucesión de autofunciones $L^{\vec{p}}$ normalizadas correspondiente. Observemos que

$$\|\nabla u_k\|_{\vec{p}} = \lambda_k\|u_k\|_{\vec{p}} = \lambda_k.$$

De donde obtenemos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Luego, pasando a una subsucesión obtenemos

$$u_k \rightharpoonup u \text{ en } W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \text{ y } u_k \to u \text{ en } L^{\vec{p}}(\Omega).$$

Por el Lema 4.2.2, $\mathcal{F}_{\vec{p}}$ es continuo. Entonces

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{p}} u_k, v\rangle = \lambda_k\langle \mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k), v\rangle \to \lambda\langle \mathcal{F}_p(u), v\rangle.$$

Como cada u_k es una autofunción $L^{\vec{p}}$-normalizada entonces

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{p}}\, u_k, u_k\rangle = \lambda_k \to \lambda.$$

Utilizando el Lema 4.5.3 de la siguiente sección para obtener que $u_k \to u$ en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

Gracias a la convergencia anterior podemos pasar al límite en la formulación débil,

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{p}}\, u_k, v\rangle = \lambda_k\langle \mathcal{F}_p(u_k), v\rangle$$

y conseguir

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{p}}\, u, v\rangle = \lambda\langle \mathcal{F}_{\vec{p}}(u), v\rangle$$

para cualquier $v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$. Es decir, u es una autofunción asociada a λ y el caso local estaría completo. Nuevamente, la prueba del caso no local es totalmente análoga. □

Como ya mencionamos, un punto principal de este trabajo es estudiar los comportamientos asintóticos. Aquí, nos interesa analizar el comportamiento conjunto $\Sigma^{\vec{s},\vec{p}}$ cuando los parámetros fraccionarios $\vec{s} = (s_1,\ldots,s_n)$ verifican $s_i \to 1$, $i = 1,\ldots,n$.

Para ello usamos la teoría desarrollada en secciones anteriores en particular el Teorema 2.1.9 y Lema 3.2.3, los cuales reescribimos de la siguiente forma

Proposición 4.4.2. *Sea $\{\vec{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de parámetros fraccionarios tales que $\vec{s}_k \to (1,\dots,1)$ cuando $k\to\infty$. Sea $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$ parámetros de integración tales que $1<p_1\le p_2\le\cdots\le p_n<\infty$. Para cada $k\in\mathbb{N}$, $u_k\in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ es una función tal que*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k\|_{\vec{s}_k,\vec{p}}<\infty. \tag{4.4.1}$$

Entonces existe una función $u\in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\subset\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{k_j}\to u \quad \text{en } L^{\vec{p}}(\Omega) \quad y \quad \|\nabla u\|_{\vec{p}}\le \liminf_{k\to\infty}[u_k]_{\vec{s}_k,\vec{p}}.$$

Lema 4.4.3. *Sea $\{\vec{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de parámetros fraccionarios que satisface $\vec{s}_k\to(1,\dots,1)$ si $k\to\infty$. Sean $v_k\in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ sucesión de funciones que satisface (4.4.1). Sin pérdida de generalidad supongamos que existe $v\in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tal que $v_k\to v$ en $L^{\vec{p}}(\Omega)$ si $k\to\infty$. Entonces para cada función $u\in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ fija se cumple*

$$\langle \mathcal{L}_{\vec{p}}^{\vec{s}_k}u, v_k\rangle \to \langle \mathcal{L}_{\vec{p}}u, v\rangle \quad \text{con } k\to\infty.$$

Gracias a esto, podemos enunciar y demostrar nuestro teorema de comportamiento asintótico.

Teorema 4.4.4. *Sea $\{\vec{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de parámetros fraccionarios tales que $\vec{s}_k\to(1,\dots,1)$ cuando $k\to\infty$. Sea $\vec{p}=(p_1,\dots,p_n)$ parámetros de integración tales que $1<p_1\le p_2\le\cdots\le p_n<\infty$. Sea $\lambda_k\in\Sigma^{\vec{s}_k,\vec{p}}$ una sucesión de autovalores de*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{s},\vec{p}}\,u=\lambda\mathcal{F}_{\vec{p}}(u) & \text{en } \Omega,\\ u=0 & \text{en } \mathbb{R}^n\setminus\Omega. \end{cases}$$

Si $\lambda_k\to\lambda$ entonces $\lambda\in\Sigma^{\vec{p}}$.

Además, si $u_k\in W_0^{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ es una sucesión de autofunciones $L^{\vec{p}}$-normalizadas donde cada u_k está asociada a λ_k. Entonces cualquier punto de acumulación u en $L^{\vec{p}}(\Omega)$ de dicha sucesión satisface que $u\in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ y es una autofunción asociada a λ.

Demostración. Sea $\{\vec{s}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ sucesión de parámetros fraccionarios y $\{\lambda^{\vec{s}_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de autovalores que converge a un λ cuando $k\to\infty$. Para cada $\lambda^{\vec{s}_k}$ tomemos una autofunción u_k, las cuales podemos suponer $L^{\vec{p}}$-normalizadas.

Como $\|u_k\|_{\vec{p}}=1$ y la sucesión $\lambda_{\vec{s}_k}$ es convergente, por lo tanto acotada, entonces la sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ satisface (4.4.1) y podemos aplicar la Proposición 4.4.2 para obtener una subsucesión, la cual también notaremos como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $u\in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tal que $u_k\to u$ en $L^{\vec{p}}(\Omega)$.

Así, estamos en condiciones de usar el Lema 4.4.3 y concluimos la prueba por argumentos de monotonia clásicos. □

4.5. Existencia de autovalores

En la sección previa, probamos algunas propiedades que cumplen los autovalores en caso de existir. En esta sección, establecemos la existencia de valores propios usando la teoría de Lusternik-Schnirelmann.

Primero, recordamos algunos resultados abstractos de la teoría de puntos críticos que serán esenciales en nuestra demostración de existencia de valores propios.

Sea X un espacio de Banach reflexivo y las aplicaciones $\phi, \psi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Supondremos que ϕ y ψ verifican las hipótesis (H1)–(H4) a continuación:

(H1) $\phi, \psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ son pares con $\phi(0) = \psi(0) = 0$, y el conjunto de nivel

$$\mathcal{M} = \{u \in X : \psi(u) = 1\}$$

es acotado.

(H2) ϕ' es completamente continua. Además, para cualquier $u \in X$ se cumple que

$$\langle \phi'(u), u\rangle = 0 \iff \phi(u) = 0,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota los paréntesis de dualidad para el par (X, X^*).

(H3) ψ' es continua, acotada y, cuando $k \to \infty$, se cumple que

$$u_k \rightharpoonup u, \quad \psi'(u_k) \rightharpoonup v \quad \text{y} \quad \langle \psi'(u_k), u_k\rangle \to \langle v, u\rangle$$

entonces $u_k \to u$ en X.

(H4) Para todo $u \in X \setminus \{0\}$ se cumple que

$$\langle \psi'(u), u\rangle > 0, \ \lim_{t\to\infty} \psi(tu) = \infty \text{ y } \inf_{u\in M} \langle \psi'(u), u\rangle > 0.$$

Además, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{K}_n = \{K \subset \mathcal{M} \colon K \text{ es simétrico, compacto, con } \phi|_K > 0 \text{ y } \gamma(K) \geq n\},$$

donde $\gamma(K)$ es el género de Krasnoselskii del conjunto K. Finalmente, definimos

$$c_n = \begin{cases} \sup_{K\in\mathcal{K}_n} \min_{u\in K} \phi(u) & \text{si } \mathcal{K}_n \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } \mathcal{K}_n = \emptyset. \end{cases}$$

El siguiente resultado abstracto general se demuestra en [50] (ver también [42, Theorem 9.27]).

Teorema 4.5.1. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $\phi, \psi \in C^1(X, \mathbb{R})$. Supongamos que ϕ, ψ satisfacen* (H1)–(H4)*. Entonces*

1. *$c_1 < \infty$ y $c_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

2. *Si $c = c_n > 0$, entonces podemos encontrar un elemento $u \in \mathcal{M}$ que es solución de*

$$\mu\psi'(u) = \phi'(u), \quad (\mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}, \tag{4.5.1}$$

para un valor propio $\mu \neq 0$ tal que $\phi(u) = c$.

3. *Más generalmente, si $c = c_n = c_{n+k} > 0$ para algún $k \geq 0$, entonces el conjunto de soluciones $u \in \mathcal{M}$ de (4.5.1) tal que $\phi(u) = c$ tiene género $\geq k + 1$.*

4. *Si $c_n > 0$ para todo $n \geq 1$, entonces existe una sucesión $\{(\mu_n, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de soluciones de (4.5.1) con $\phi(u_n) = c_n$, $\mu_n \neq 0$ para todo $n \geq 1$, y $\mu_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

5. *Si además requerimos que*

$$\langle \phi'(u), u\rangle = 0 \text{ si y solo si } \phi(u) = 0 \text{ si y solo si } u = 0,$$

entonces, $c_n > 0$ para todo $n \geq 1$, y existe una sucesión $\{(\mu_n, u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de soluciones de (4.5.1) tal que $\phi(u_n) = c_n$, $\mu_n \neq 0$, $\mu_n \to 0$, y $u_n \rightharpoonup 0$ en X cuando $n \to \infty$.

Nuestro objetivo es aplicar el Teorema 4.5.1 en el caso en que $X = W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, $(\phi, \psi) = (I, H)$ y en el caso en que $X = W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ y $(\phi, \psi) = (I, H_{\vec{s}})$, donde los operadores I, H y $H_{\vec{s}}$ fueron introducidos en (4.2.4) y (4.3.2).

Para mejorar la legibilidad del trabajo, demostraremos las propiedades de H y $H_{\vec{s}}$ a través de una serie de lemas.

Lema 4.5.2. *Sean $H\colon W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ y $H_{\vec{s}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos previamente. Entonces $H'\colon W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \to W^{-1,\vec{p}'}(\Omega)$ y $H'_{\vec{s}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to W^{-\vec{s},\vec{p}'}(\Omega)$ son acotados y monótonos.*

Demostración. Veamos que H' is acotado de una forma muy directa,

$$\begin{aligned}
|\langle H'(u), v\rangle| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}|^{p_i-2} u_{x_i} v_{x_i}\, dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}|^{p_i-1} |v_{x_i}|\, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i/p_i'} \|v_{x_i}\|_{p_i}}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i} = \|\nabla v\|_{\vec{p}}.
\end{aligned}$$

Así, H' es un operador acotado. Además, a partir de este resultado podemos obtener su monotonía. Pues

$$\langle H'(u), v\rangle + \langle H'(v), u\rangle \leq |\langle H'(u), v\rangle| + |\langle H'(v), u\rangle| \leq \|\nabla v\|_{\vec{p}} + \|\nabla u\|_{\vec{p}}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle H'(u) - H'(v), u - v\rangle &= \langle H'(u), u\rangle + \langle H'(v), v\rangle - (\langle H'(u), v\rangle + \langle H'(v), u\rangle) \\ &= \|\nabla u\|_{\vec{p}} + \|\nabla v\|_{\vec{p}} - (\langle H'(u), v\rangle + \langle H'(v), u\rangle) \geq 0.\end{aligned}$$

Lo que nos da la monotonía del operador H'. La cuenta que demuestra continuidad y monotonía de $H'_{\vec{s}}$ es completamente análoga y nuevamente omitiremos su demostración. □

Lema 4.5.3. *Los operadores H y $H_{\vec{s}}$ verifican la hipótesis* (H3)*. Es decir $H'\colon W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \to W^{-1,\vec{p}\,'}(\Omega)$ y $H'_{\vec{s}}\colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to W^{-\vec{s},\vec{p}'}(\Omega)$ son operadores continuos y acotados. Además, cuando $k \to \infty$, se cumple*

$$u_k \rightharpoonup u,\ H'(u_k) \rightharpoonup v \text{ y } \langle H'(u_k), u_k\rangle \to \langle v, u\rangle \Rightarrow u_k \to u \text{ en } W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \quad (4.5.2)$$

$$u_k \rightharpoonup u,\ H'_{\vec{s}}(u_k) \rightharpoonup v \text{ y } \langle H'_{\vec{s}}(u_k), u_k\rangle \to \langle v, u\rangle \Rightarrow u_k \to u \text{ en } W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega). \quad (4.5.3)$$

Demostración. Gracias al Lema 4.5.2 sólo queda ver que H' y $H'_{\vec{s}}$ son continuos y verifican (4.5.2) y (4.5.3) respectivamente.

Primero, aseguramos que H' es un operador continuo, de hecho sólo observemos que podemos reescribir a H' como

$$H'(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{G_{p_i}(u_{x_i})}{\|u_{x_i}\|_{p_i}^{p_i-1}},$$

donde $G_{p_i}(u) := |u|^{p_i-2}u$. Esta notación es beneficiosa pues $G_{p_i}\colon L^{p_i}(\mathbb{R}^n) \to L^{p_i'}(\mathbb{R}^n)$ es continuo. Por lo cual, nuestra aseveración es correcta. De igual forma,

$$H'_{\vec{s}}(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{G_{p_i}(D_h^{s_i,i}u(x))}{[u_{x_i}]_{s,p_i}^{p_i-1}}.$$

Gracias a que $G_{p_i}\colon L^{p_i}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \to L^{p_i'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ es continuo, podemos concluir que $H'_{\vec{s}}$ también es un operador continuo.

Para verificar (4.5.2), sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, $H'(u_k) \rightharpoonup v$ en $W^{-1,\vec{p}'}(\Omega)$ y $\langle H'(u_k), u_k\rangle \to \langle v, u\rangle$ entonces tenemos que mostrar que $u_k \to u$ in $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$.

Sea $w \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ arbitraria, por la monotonía de H' (Lema 4.5.2) tenemos que

$$0 \leq \langle H'(w) - H'(u_k), w - u_k\rangle.$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$, llegamos a que

$$0 \leq \langle H'(w), w - u\rangle - \langle v, w - u\rangle.$$

Ahora, podemos elegir $w = u + tz$ con $t > 0$ y deducimos que

$$0 \leq \langle H'(u + tz) - v, tz\rangle.$$

Dividiendo todo por t y tomando límite cuando $t \to 0+$ conseguimos que para todo $z \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ se tiene

$$0 \leq \langle H'(u) - v, z \rangle.$$

Entonces $H'(u) = v$. Más aún,

$$\|\nabla u_k\|_{\vec{p}} = \langle H'(u_k), u_k \rangle \to \langle v, u \rangle = \langle H'(u), u \rangle = \|\nabla u\|_{\vec{p}}.$$

Como el espacio $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ es uniformemente convexo podemos decir que convergencia débil y convergencia en norma implican que $u_k \to u$ fuerte como queríamos. La misma cuenta nos muestra que también se cumple (4.5.3). □

Finalmente podemos enunciar y demostrar el teorema que nos asegura existencia de soluciones a nuestros problemas de autovalores.

Teorema 4.5.4. *Existe una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ de puntos críticos de $\mathcal{Q}_{\vec{p}}$ con valores críticos asociados $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lambda_k \to \infty$ si $k \to \infty$. Más aún, estos valores críticos tienen la siguiente caracterización,*

$$\lambda_k = \inf_{K \in \mathcal{K}_k} \sup_{u \in K} H(u). \tag{4.5.4}$$

Donde, para cada $k \in \mathbb{N}$ se define

$$\mathcal{K}_k = \{K \subset \mathcal{M} \text{ compacto, simetrico con } H'(u) > 0 \text{ en } K \text{ y } \gamma(K) \geq k\},$$

con

$$\mathcal{M} = \{u \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) : H(u) = 1\}$$

y γ es el Krasnoselskii genus de K.

En particular, u_k es solución débil de

$$\begin{cases} -\mathcal{L}_{\vec{p}}\, u_k = \lambda_k \mathcal{F}_{\vec{p}}(u_k) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Demostración. Debemos confirmar que los funcionales I y H satisfacen las hipótesis del Teorema 4.5.1.

Las condiciones (H1) y (H3) son consecuencia directa de los Lemas 4.2.3 y 4.5.3, respectivamente.

La condición (H4) se cumple porque al tener Poincaré el funcional H sirve como norma del espacio $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$.Además, tenemos la igualdad $\langle H'(u), u \rangle = H(u)$.

Para demostrar que (H2) es válida, basta observar que si $u_k \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$, por compacidad de la inmersión $W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \subset\subset L^{\vec{p}}(\Omega)$, se deduce que $u_k \to u$ en $L^{\vec{p}}(\Omega)$ y, usando el Lema 4.2.2, obtenemos que $I'(u_k) \to I'(u)$ en $L^{\vec{p}'}(\Omega) \subset W^{-1,\vec{p}'}(\Omega)$.

Finalmente, ya que $\langle I'(u), u \rangle = I(u) = \|u\|_{\vec{p}}$, cada uno es cero si y solo si $u = 0$.

Aplicamos la teoría de Lusternik-Schnirelmann, Teorema 4.5.1, a los funcionales I y H sobre el conjunto de nivel $\mathcal{M}$ para concluir que existe una sucesión de números $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}} \searrow 0$ y funciones $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega)$ normalizadas tales que $H(u_k) = 1$, y

$$\mu_k \langle H'(u_k), v\rangle = \langle I'(u_k), v\rangle \quad \forall v \in W_0^{1,\vec{p}}(\Omega) \tag{4.5.5}$$

y $I(u_k) = c_k$ donde

$$c_k = \sup_{K\subset\mathcal{K}_k} \min_{u\in K} I(u). \tag{4.5.6}$$

Usando que $\langle H'(u), u\rangle = H(u)$ y $\langle I'(u), u\rangle = I(u)$, uno obtiene inmediatamente que $c_k = \mu_k$.

Así, si denotamos $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, usando (4.5.5), tenemos que u_k es una solución débil de (5.1.5) con valor propio λ_k, y a partir de (4.5.6) también se obtiene la validez de (4.5.4).

□

Observación 4.5.5. Los valores propios obtenidos en el Teorema 4.5.4 son comúnmente llamados valores propios de Lusternik-Schnirelmann o simplemente **valores propios LS** y se denotan por $\Sigma_{LS}^{\vec{p}}$.

De manera similar, enunciamos un Teorema para el caso fraccionario. La demostración es una ligera variación del Teorema 4.5.4 y se omite.

Teorema 4.5.6. *Existe una sucesión $\{u_k^{\vec{s}}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ de puntos críticos de $\mathcal{Q}_{\vec{s},\vec{p}}$ con valores críticos $\{\lambda_k^{\vec{s}}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tales que $\lambda_k^{\vec{s}} \to \infty$ cuando $k \to \infty$. Además, estos valores críticos tienen la siguiente caracterización variacional:*

$$\lambda_k^{\vec{s}} = \inf_{K\in\mathcal{K}_k^{\vec{s}}} \sup_{u\in K} H_{\vec{s}}(u) \tag{4.5.7}$$

donde, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{K}_k^{\vec{s}} = \{K \subset \mathcal{M}_{\vec{s}} \text{ compacto, simétrico con } H'_{\vec{s}}(u) > 0 \text{ en } K \text{ y } \gamma(K) \geq k\}$$

$$\mathcal{M}_{\vec{s}} = \{u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) : H_{\vec{s}}(u) = 1\}$$

y γ es el género de Krasnoselskii de K.

Estos valores propios asociados al problema fraccionario se denotarán por $\Sigma_{LS}^{\vec{s},\vec{p}}$.

Capítulo 5

Problemas de optimización de dominio

En la introducción explicamos cuál era la motivación para trabajar en problemas de optimización de dominios. Sin embargo, vamos a recordar un poco de qué trata este tema.

Los problemas de optimización de dominios han sido ampliamente estudiados en matemáticas, especialmente en el ámbito de la optimización estructural, donde el objetivo es determinar un dominio óptimo que minimice un funcional de costo F. En el enfoque clásico, F se expresa en términos de una función u_A, que es solución de una ecuación de estado definida sobre el dominio A. Tradicionalmente, se han impuesto restricciones de regularidad en la frontera del dominio (como continuidad de Lipschitz), pero enfoques más recientes han introducido conjuntos quasiabiertos como clase admisible, restringiendo únicamente el volumen $|A| = c$.

Este trabajo amplía los resultados clásicos al contexto en el que la ecuación de estado está gobernada por operadores no locales y no lineales, en particular queremos utilizar nuestro operador anisotrópico, el p-Laplaciano fraccionario anisotrópico. Sin embargo, el caso **isotrópico** no está estudiado, por lo tanto nos centraremos en ese caso antes de generalizar los resultados para el caso anisotrópico.

5.1. Caso isotrópico

Aunque son definiciones clásicas, no hemos trabajado en los espacios $W_0^{s,p}(\Omega)$. Dado un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ acotado y $0 < s \leq 1 < p < \infty$ definimos

$$W_0^{s,p}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{s,p}}$$

donde

$$\|\cdot\|_{s,p}^p = \begin{cases} \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy & \text{si } 0<s<1 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\,dx & \text{si } s=1 \end{cases}$$

Gracias a la desigualdad de Poincaré [22], podemos usar la norma anterior y obtener un espacio de Banach, reflexivo y separable.

Dado que en nuestro análisis los conjuntos admisibles serán quasi abiertos, será necesario introducir la noción de *capacidad* asociada a un conjunto. En [49, 43] se define la (s,p)-Capacidad de un conjunto $A \subset \Omega$ de la siguiente forma.

Definición 5.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $A \subset \Omega$. Para cualquier $0 < s \leq 1 < p < \infty$, definimos la (s,p)-Capacidad de A como

$$\mathrm{Cap}(s,p)(A) = \text{ínf}\left\{\|u\|_{s,p}^p : u \in W_0^{s,p}(\Omega), u \geq 0, A \subset \{u \geq 1\}^\circ\right\}.$$

Observación 5.1.2 (Interpretación intuitiva). La (s,p)-Capacidad mide el "tamaño"de un conjunto en términos de su influencia sobre funciones en $W_0^{s,p}(\Omega)$ en lugar de la simple medida de Lebesgue. Además, a diferencia de la medida estándar, algunos conjuntos con medida positiva pueden tener capacidad cero, lo que implica que su influencia en el espacio de funciones es despreciable.

Luego, si una propiedad $P(x)$ se cumple para cada $x \in E$ salvo para $x \in Z \subset E$ con $\mathrm{Cap}(s,p)(Z) = 0$ entonces $P(x)$ se cumple (s,p)-casi todo punto en E o en su forma abreviada *q.e.* en E (usamos las siglas en inglés ((s,p)-quasi everywhere).

También extendemos el concepto de continuidad de funciones a continuidad q.e.

Definición 5.1.3. Para una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, decimos que es quasi continua (q.c.) si para todo $\varepsilon > 0$, existe una abierto relativo $G \subset \Omega$ tal que $\mathrm{Cap}(s,p)(G) < \varepsilon$ y $u|_{\Omega\setminus G}$ es continua.

El siguiente teorema nos habilita a trabajar con los representantes quasi continuos.

Teorema 5.1.4 ([49],Teorema 3.7)**.** *Para toda $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$, existe una única función quasi continua $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u} = u$ c.t.p en Ω.*

Luego de definir la capacidad de un conjunto, podemos establecer lo que vamos a considerar un conjunto quasi abierto.

Definición 5.1.5. $A \subset \Omega$ es considerado un conjunto (s,p)-*quasi abierto* si para cada $\varepsilon > 0$ existe A^ε conjunto abierto de Ω tal que $\mathrm{Cap}(s,p)(A \triangle A^\varepsilon) \leq \varepsilon$, donde $\triangle$ es la diferencia simétrica de conjuntos.

Representamos a la clase de todos los conjuntos (s,p)-quasi abiertos de Ω como $\mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$, y para cada $A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$ definimos el espacio

$$W_0^{s,p}(A) = \{u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n) \,|\, u = 0 \text{ q.e en } \mathbb{R}^n \setminus A\}.$$

$W_0^{s,p}(A)$ con norma heredada de $W_0^{s,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado, por lo tanto, reflexivo. Si A es abierto, la definición previa de $W_0^{s,p}(A)$ es equivalente a la usual.

A continuación daremos las definiciones de solución débil para el *p-Laplaciano* y *p-Laplaciano fraccionario.*

Definición 5.1.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. Sean s y p tales que $0 < s \leq 1 < p < \infty$, p' el conjugado de Lebesgue de p y $f \in L^{p'}(\Omega)$. Decimos que $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ es solución débil de

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

si u verifica

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v\rangle = \int_\Omega f v \, dx.$$

Aquí

$$\langle (-\Delta_p)^s u, v\rangle := \begin{cases} \displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy & \text{si } s<1, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} uv\, dx & \text{si } s=1, \end{cases}$$

para toda $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$.

Además usaremos el Principio de Comparación para el p-Laplaciano Fraccionario, probado en [38].

Teorema 5.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sean $u, v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ soluciones débiles de*

$$(-\Delta)_p^s u \leq (-\Delta)_p^s v \quad \text{en } \Omega,$$

y

$$u \leq v \quad \text{en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega,$$

entonces,

$$u \leq v \quad \text{en } \Omega.$$

Observación 5.1.8. Si consideramos el funcional $J_{s,p} : W_0^{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido como

$$J_{s,p}(u) = \begin{cases} \frac{((1-s))}{p} \displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dx\, dy & \text{si } s<1, \\ \frac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx & \text{si } s=1. \end{cases}$$

Entonces $J_{s,p}$ es un funcional continuo con derivada de Gateaux continua

$$J'_{s,p}\colon W^{-s,p'}(\Omega) \to W_0^{s,p}(\Omega),$$

dada por

$$\langle J'_{s,p}(u), v\rangle = \begin{cases} (1-s)\displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}\,dx\,dy & \text{si } s<1, \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}uv\,dx & \text{si } s=1. \end{cases}$$

Monotonía, convexidad y coercividad de este operador asegura, como en el caso estándar de conjuntos abiertos, existencia y unicidad de soluciones débiles a (5.1.1). Entonces, dado $A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$, **notamos como $u_A^s \in W_0^{s,p}(A)$ a la única solución débil de**

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s v = 1 & \text{en } A, \\ v = 0 & \text{q.e. en } \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Además, usaremos el siguiente concepto de convergencia de conjuntos, la cual es una versión fraccionaria de la γ-convergencia de conjuntos definida en [18].

Definición 5.1.9. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$ y $A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$. Decimos que $A_k \xrightarrow{\gamma} A$ si $u^s_{A_k} \to u^s_A$ en $L^p(\Omega)$.

Ahora, veamos algunas propiedades relacionadas con u^s_A.

Lema 5.1.10. *Para cada $A \in \mathcal{A}_{s,p}$ y u^s_A definido anteriormente se satisface*

$$u^s_A = \max_{w\in W_0^{s,p}(\Omega)} \{w \le 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus A \text{ y } (-\Delta_p)^s w \le 1 \text{ en } \Omega\}.$$

Demostración. Definamos el siguiente conjunto convexo

$$K_A = \{w \in W_0^{s,p}(\Omega) \colon w \le 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus A\},$$

y llamemos ω_A al único minimizador de $I_s \colon K_A \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_s(w) = J_{s,p}(w) - \int_\Omega w\,dx.$$

Dado que ω_A es el único minimizador del funcional I_s sobre el conjunto convexo K_A, satisface la condición

$$I_s(\omega_A) \le I_s(v), \quad \forall v \in K_A.$$

Lo anterior implica

$$\langle I'_s(\omega_A), v-\omega_A\rangle \ge 0, \quad \forall v \in K_A.$$

Es decir,

$$\langle J'_{s,p}(\omega_A), v-\omega_A\rangle - \int_\Omega (v-\omega_A)\,dx \ge 0, \quad \forall v \in K_A.$$

Reordenando términos, obtenemos la siguiente desigualdad variacional

$$\langle J'_{s,p}(\omega_A), v - \omega_A \rangle \geq \int_\Omega (v - \omega_A)\, dx, \quad \forall v \in K_A. \tag{5.1.2}$$

Tomamos como función test $v = \omega_A^+$. Dado que $\omega_A^- = -\min(\omega_A, 0)$ y $\omega_A^+ = \max(\omega_A, 0)$, se cumple la identidad

$$\omega_A^+ - \omega_A = \omega_A^-.$$

Sustituyendo $v = \omega_A^+$ en la desigualdad variacional

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\Omega \omega_A^+ - \omega_A\, dx = \int_\Omega \omega_A^-\, dx \leq \langle J'_{s,p}(\omega_A), \omega_A^- \rangle \\ \leq - \iint_{\{\omega_A \leq 0\} \times \{\omega_A \leq 0\}} \frac{|\omega_A(x) - \omega_A(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}\, dxdy. \end{aligned}$$

De la anterior desigualdad podemos deducir que $\omega_A^- = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$. En consecuencia, dado que ω_A pertenece a K_A, se sigue que ω_A está en $W_0^{s,p}(A)$. Pero como u_A^s representa al mínimo de I_s en $W_0^{s,p}(A)$, concluimos que $\omega_A = u_A^s$.

Ahora, dada $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $v \geq 0$, tenemos que $-v \in K_A$. Luego, si aplicamos (5.1.2) obtenemos

$$\langle J'_{s,p}(u_A^s), -v - u_A^s \rangle = \langle J'_{s,p}(u_A^s), -v \rangle + \langle J'_{s,p}(u_A^s), -u_A^s \rangle \geq \int_\Omega -v - u_A^s\, dx. \tag{5.1.3}$$

Teniendo en cuenta que

$$\langle J'_{s,p}(u_A^s), -u_A^s \rangle = \int_\Omega -u_A^s\, dx,$$

la desigualdad (5.1.3) puede ser expresada como

$$\langle J'_{s,p}(u_A^s), v \rangle \leq \int_\Omega v\, dx.$$

Al ser $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ no negativo pero arbitrario, obtenemos $(-\Delta_p)^s u_A^s \leq 1$ en Ω. Finalmente, si tomamos $w \leq 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$ y $(-\Delta_p)^s w \leq 1$ en Ω, entonces

$$(-\Delta_p)^s w \leq (-\Delta_p)^s u_A^s \text{ en } A \quad \text{ y } w \leq u_A^s \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus A.$$

Por principio de comparación, $w \leq u_A^s$ en $\mathbb{R}^n$, como queríamos demostrar para concluir el lema. □

Lema 5.1.11. *Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos quasi abiertos de Ω tal que $u_{A_k}^s$ converge débil en $W_0^{s,p}(\Omega)$ a una función u. Además, sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $v_k = 0$ q.e en $\Omega \setminus A_k$ y $v_k \to v$ débil en $W_0^{s,p}(\Omega)$. Entonces $v = 0$ q.e. donde $\{u = 0\}$.*

Antes de comenzar con la prueba, es conveniente repasar el concepto de *conjunto subdiferencial* de una función convexa. En [11, 42] están las pruebas de las propiedades que vamos a utilizar aquí. Además, tambien es necesario un resultado importante de la Γ-convergencia.

Definición 5.1.12. Sea X un espacio de Banach y $\phi\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función convexa, no idénticamente $+\infty$. El *dominio efectivo* de ϕ se define como

$$Dom(\phi) = \{x \in X : \phi(x) < \infty\}.$$

Entonces, para $x \in Dom(\phi)$ el *subdiferencial* de ϕ en x es el conjunto $\partial\phi(x) \subset X^*$ definido por

$$\partial\phi(x) = \{x^* \in X^*\colon \phi(x+h) - \phi(x) \geq \langle x^*, h\rangle \text{ para toda } h \in X\}$$

La siguiente proposición recolecta todas las propiedades que vamos a utilizar.

Proposición 5.1.13. *Sea $\Gamma_0(X)$ el cono convexo de funciones semicontinuas inferiormente en el espacio de Banach X la cuales no son idénticamente ∞. Entonces*

- *Para cada $x \in Dom(\partial\phi) := \{x \in X\colon \partial\phi(x) \neq \emptyset\}$ el conjunto $\partial\phi(x)$ es no vacío, convexo y w^*-cerrado.*
- *Si ϕ es convexa y continua en $x_0 \in Dom(\phi)$, entonces $\partial\phi(x_0)$ es w^*-compacto.*
- *Si X es un espacio de Banach reflexivo y $\phi \in \Gamma_0(X)$, entonces $Dom(\partial\phi)$ es denso en $Dom(\phi)$.*
- *Finalmente, si $\phi^*(x^*) = \sup_{y\in X}\{\langle x^*, y\rangle - \phi(y)\}$ entonces*

$$x^* \in \partial\phi(x) \iff \phi(x) + \phi^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle.$$

Además, usaremos un teorema relacionado a la Γ-convergencia. Sea $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, definimos el conjunto de minimizadores de F como

$$M(F) = \{x \in X : F(x) = \inf_{y\in X} F(y)\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, un ε-minimizador de F en X es un punto $x \in X$ que satisface

$$F(x) \leq \inf_{y\in X} F(y) + \varepsilon.$$

El conjunto de todos los ε-minimizadores de F en X se denotará por $M_\varepsilon(F)$.

Decimos que una sucesión (F_h) es equi-coerciva si existe una función semicontinua inferiorme y coerciva $\Phi : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$F_h \geq \Phi \quad \text{en } X \text{ para todo } h \in \mathbb{N}.$$

Teorema 5.1.14. *[18, Teorema 7.23] Supongamos que (F_h) es equi-coerciva y Γ-converge a una función F en X. Entonces, para cada vecindad U de $M(F)$ en X, existen $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que*

$$M(F_h) \subset M_\varepsilon(F_h) \subset U$$

para todo $h \geq k$.

Además, si F no es idénticamente $+\infty$, entonces para cada $x \in M(F)$, para cada vecindad V de x, y para cada $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_\varepsilon(F_h) \cap V \neq \emptyset$$

para todo $h \geq k$.

Prueba del Lema 5.1.11. Definamos los funcionales

$$\Phi_k(w) = \begin{cases} J_{s,p}(w) & \text{si } w \in W_0^{s,p}(A_k) \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

en el espacio $L^p(\Omega)$. De resultados de compacidad de la $\Gamma-$convergencia, existe una subsucesión que Γ-converge a un funcional Φ en $L^p(\Omega)$. A su vez, el dominio de Φ, $Dom(\Phi)$, está contenido en $L^p(\Omega)$ y como $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $W_0^{s,p}(\Omega)$, tenemos que

$$\Phi(v) \leq \liminf_{k\to\infty} \Phi_k(v_k) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{s,p}(v_k) < \infty,$$

es decir $v \in Dom\,(\Phi)$.

Por la Proposición 5.1.13, $Dom(\partial\Phi)$ es denso en $Dom(\Phi)$. Entonces mostraremos que para todo $\omega \in Dom(\partial\Phi)$, tenemos que $\omega = 0$ en $\{u = 0\}$.

Fijemos $\omega \in Dom(\partial\Phi)$ y $f \in \partial\Phi(\omega)$, nuevamente por la Proposición 5.1.13 ω es un punto mínimo de

$$\Psi(z) = \Phi(z) - \langle f, z\rangle.$$

Sea ω_k el mínimo del funcional

$$\Psi_k(z) = \Phi_k(z) - \langle f, z\rangle.$$

Como Ψ_k Γ-converge a Ψ, gracias al Teorema 5.1.14, tenemos que $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}} \rightharpoonup \omega$ en $W_0^{s,p}(\Omega)$. Cómo $f \in L^{p'}$ entonces para cada $\varepsilon > 0$ podemos definir una función f_ε tal que $\|f_\varepsilon - f\|_{L^{p'}} < \varepsilon$, y $\omega_{k,\varepsilon}$ es solución al problema

$$\begin{cases} (-\Delta_p)^s \omega_{k,\varepsilon} = f_\varepsilon & \text{en } A_k, \\ \omega_{k,\varepsilon} = 0 & \text{q.e en } \Omega \setminus A_k. \end{cases}$$

Usando la siguiente desigualdad

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a-b) \geq \begin{cases} c_1(|a|+|b|)^{p-2}|a-b|^2 & \text{si } 1 < p < 2 \\ c_2|a-b|^p & \text{si } 2 \leq p, \end{cases} \tag{5.1.4}$$

obtenemos que

$$\|\omega_{k,\varepsilon} - \omega_k\|_{s,p}^p \leq \min\{c_1, c_2\}\|f_\varepsilon - f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\omega_{k,\varepsilon} - \omega_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

Por desigualad de Poincaré

$$\|\omega_{k,\varepsilon} - \omega_k\|_{s,p}^{1-1/p} \leq C\|f_\varepsilon - f\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Luego, pasando por una subsucesión de ser necesario, $\{\omega_{k,\varepsilon}\}$ converge débil en $W_0^{s,p}(\Omega)$ a una función ω_ε. Por lo tanto, gracias a la semicontinuidad inferior de la norma, obtenemos que $\|\omega_\varepsilon - \omega\|_{s,p} \leq c\varepsilon$.

Tomando $c_\varepsilon = \|f_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$, por principio del máximo, obtenemos $|\omega_{k,\varepsilon}| \leq c_\varepsilon u_{A_k}$ c.t.p. en Ω para cada $k \in \mathbb{N}$. Así, $|\omega_\varepsilon| \leq c_\varepsilon u$ c.t.p. en Ω. Como estamos trabajando con el representante quasi continuos de ω_ε, entonces podemos concluir que $\omega_\varepsilon = 0$ q.e en $\{u = 0\}$. □

Lema 5.1.15. *Sean A y $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, conjuntos quasi abiertos de Ω, tales que $u_{A_k}^s \rightharpoonup u$ en $W_0^{s,p}(\Omega)$, donde $u \leq u_A^s$ en Ω. Sea $A^\varepsilon = \{u_A^s > \varepsilon\}$ y supongamos que $u_{A_k\cup A^\varepsilon}^s$ converge débil a alguna función u_ε en $W_0^{s,p}(\Omega)$. Entonces, $u_\varepsilon \leq u_A^s$ q.e. en Ω.*

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ definamos

$$v_\varepsilon = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\min(u_A^s, \varepsilon).$$

Luego v_ε satisface lo siguiente

$$\begin{cases} v_\varepsilon \in W_0^{s,p}(\Omega); \\ 0 \leq v_\varepsilon \leq 1 \text{ en } \Omega; \\ v_\varepsilon = 0 \text{ en } A^\varepsilon; \\ v_\varepsilon = 1 \text{ en } \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Si tomamos $w_k = \min(v_\varepsilon, u_{A_k\cup A^\varepsilon})$, entonces $w_k = 0$ en A^ε y $w_k = 0$ en $\Omega \setminus (A_k \cup A^\varepsilon)$, por lo tanto $w_k = 0$ en $\Omega \setminus A_k$ y w_k converge a $\min(v_\varepsilon, u_\varepsilon)$. Por el Lema 5.1.11 tenemos que $\min(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$ en $\{u = 0\}$. Así, $\min(v_\varepsilon, u_\varepsilon) = 0$ en $\Omega \setminus A$, pero como $v_\varepsilon = 1$ en $\Omega \setminus A$, tenemos que $u_\varepsilon = 0$ en $\Omega \setminus A$.

Finalmente, como $(-\Delta_p)^s u_{A_k\cup A^\varepsilon} \leq 1$ en Ω, tenemos que $(-\Delta_p)^s u_\varepsilon \leq 1$ en Ω. Por el Lema 5.1.10 tenemos $u_\varepsilon \leq u_A^s$ en Ω, lo que completa la prueba. □

Ahora, si podemos enunciar y demostrar nuestro resultado.

Teorema 5.1.16. *Dados $0 < s < 1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sean $F_s : \mathcal{A}_{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ funcionales que satisfacen:*

(H_1) *F_s es semicontinuo inferiormente con respecto a la γ-convergencia. Es decir, $A_k \xrightarrow{\gamma} A$ implica $F_s(A) \leq \liminf_{k\to\infty} F_s(A_k)$.*

(H_2) *F_s es decreciente respecto de la inclusión de conjuntos. Es decir,*

$$F_s(A) \geq F_s(B) \text{ si } A \subset B.$$

Entonces para cada $0 < c < |\Omega|$*, el problema*

$$\text{mín}\{F_s(A) : A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega), |A| \leq c\}, \tag{5.1.5}$$

tiene una solución.

Vamos a dar idea de cómo es la prueba. Dado $A \in \mathcal{A}_{s,p}$, ya vimos que u_A^s es solución de

$$\text{máx}\{w \in W_0^{s,p}(\Omega) \colon w \leq 0 \in \mathbb{R}^n \setminus A, (-\Delta_p)^s w \leq 1\}.$$

Además, u_A^s pertenece al conjunto

$$\mathcal{K}_s = \{w \in W_0^{s,p}(\Omega) : w \geq 0, (-\Delta_p)^s w \leq 1 \text{ en } \Omega\}. \tag{5.1.6}$$

Luego, si definimos un funcional G en $\mathcal{K}_s$ que satisface

($G1$) G es decreciente en $\mathcal{K}_s$.

($G2$) G es semicontinuo inferiormente en $\mathcal{K}_s$ con respecto a la topología fuerte en $L^p(\Omega)$.

($G3$) $G(u_A^s) = F_s(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}_{s,p}$.

Podemos concluir que el problema

$$\text{mín}\{G(w) : w \in \mathcal{K}_s, |\{w > 0\}| < c\}$$

tiene una solución w_0.

Además, si llamamos $A_0 = \{w_0 > 0\}$, entonces $u_{A_0}^s$ es un punto mínimo de G en todo $\mathcal{K}_s$ sujeto a la condición $|\{w > 0\}| \leq c$. Luego A_0 es un minimizador para F_s en $\mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$ sujeto a la condición $|A| \leq c$.

Veamos que la idea anterior funciona. Para ello comencemos con las propiedades del conjunto $\mathcal{K}_s$.

Lema 5.1.17. *Sea* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_s$ *una sucesión. Entonces, existe* $u \in \mathcal{K}_s$ *y una subsucesión* $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ *tal que* $u_{k_j} \to u$ *en* $L^p(\Omega)$.

Más aún, para cualquier par u, v *en* $\mathcal{K}_s$*, el máximo de* u *y* v*, también está en* $\mathcal{K}_s$.

Demostración. Dado $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_s$, como cada u_k verifica $(-\Delta_p)^s u_k \leq 1$ en Ω entonces para cada función test no-negativa $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tenemos que

$$\langle J'_{s,p}(u_k), v\rangle \leq \int_\Omega v\, dx.$$

Tomando $v := u_k$, deducimos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotado en $W_0^{s,p}(\Omega)$, por lo tanto existe una subsucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $u \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ en $W_0^{s,p}(\Omega)$.
Si llamamos

$$\eta_k(x,y) = \frac{|u_k(x) - u_k(y)|^{p-2}(u_k(x) - u_k(y))}{|x-y|^{\frac{n+sp}{p'}}},$$

entonces η_k es una sucesión acotada en $L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, donde p' es el conjugado de Lebesgue de p. Entonces, existe $\eta(x,y) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\eta_k \rightharpoonup \eta$ débilmente en $L^{p'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \eta_k(x,y) \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}\, dx\, dy \to \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \eta(x,y) \frac{v(x)-v(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}}\, dx\, dy.$$

Como $u_k \to u$ en casi todo punto en $\mathbb{R}^n$, obtenemos que

$$\eta_k(x,y) \to \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+sp}}$$

en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\eta(x,y) = \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{\frac{n+sp}{p'}}}.$$

Finalmente, notemos que para cualquier $v \in W_0^{s,p}(\Omega)$ se satisface

$$\langle J'_{s,p}(u), v\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle J'_{s,p}(u_k), v\rangle \leq \int_\Omega v\, dx.$$

Luego, $u \in \mathcal{K}_s$ y podemos concluir la primera parte de la prueba.
Llamemos $w = \max\{u, v\}$ y consideremos el conjunto convexo

$$E = \{z \in W_0^{s,p}(\Omega) \colon z \leq w \text{ in } \Omega\}.$$

Sea z_0 el único minimizador del funcional $I \colon E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(z) = J_{s,p}(z) - \int_\Omega z\, dx.$$

Por la naturaleza variacional de funcional anterior, z_0 verifica

$$\langle J'_{s,p}(z_0), z - z_0\rangle \geq \int_\Omega (z - z_0)\, dx \quad \forall z \in E. \tag{5.1.7}$$

Veamos que $(-\Delta_p)^s z_0 \leq 1$. Sea $\phi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ tal que $\phi \leq 0$ y el funcional $i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, definido como $i(t) = I(z_0 + t\phi)$.

Ya que $i'(0) \geq 0$, entonces para cada $\phi \in W_0^{s,p}(\Omega)$ no positivo, se satisface que

$$\langle J'_{s,p}(z_0), \phi\rangle \geq \int_\Omega \phi\, dx.$$

Luego

$$\langle J'_{s,p}(z), \phi\rangle \leq \int_\Omega \phi\, dx$$

para cada $\phi \in W_0^{s,p}(\Omega)$, $\phi \geq 0$, consiguiendo lo que queríamos ver.

Ahora, si probamos que $z_0 \geq u$ (y por razones simétricas $z_0 \geq v$), obtendremos que $z_0 \geq w$. Al estar z_0 en E, la desigualdad inversa también se satisface y podemos concluir que $z_0 = w \in \mathcal{K}_s$.

Sea $\eta = \max\{z_0, u\}$, luego $\eta \in E$ y podemos usarla como función test en (5.1.7), es decir

$$\langle J'_{s,p}(z_0), \eta - z_0 \rangle \geq \int_{\mathbb{R}^n} (\eta - z_0)\, dx.$$

Notemos también que al tener $\eta - z_0 \geq 0$ y $(-\Delta_p)^s u \leq 1$ en Ω, se sigue que

$$\langle J'_{s,p}(u), \eta - z_0 \rangle \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\eta - z_0)\, dx.$$

Combinando ambas desigualdades y por monotonía del operador tenemos

$$0 \leq \langle J'_{s,p}(z_0) - J'_{s,p}(u), \eta - z_0) \rangle \leq -J_{s,p}((u - z_0)^+).$$

Luego $(u - z_0)^+ = 0$ en $\mathbb{R}^n$, lo que implica que $z_0 \geq u$ en $\mathbb{R}^n$ como queríamos probar. □

Ahora, podemos volver a la prueba del Teorema 5.1.16.

Demostración. Sea F_s un funcional que verifica las hipótesis (H_1) y (H_2). Definamos el conjunto

$$\mathcal{A}^c_{s,p} = \{A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega) \colon |A| \leq c\},$$

y para cada $w \in \mathcal{K}_s$ definimos

$$m(w) = \inf\{F(A) \colon A \in \mathcal{A}^c_{s,p}(\Omega), u^s_A \leq w\}. \tag{5.1.8}$$

Como ya mencionamos antes, este funcional no es semicontinuo inferiormente. Para solucionar esto, definimos G como la *envoltura semicontinua inferior* de m en $\mathcal{K}_s$ con la topología fuerte de L^p, i.e,

$$G(w) = \inf\{\liminf_{k\to\infty} m(w_k)\}, \tag{5.1.9}$$

donde el ínfimo lo tomamos sobre todas las sucesiones $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{K}_s$ tal que $w_k \to w$ en $L^p(\Omega)$.

Veamos que G es decreciente en $\mathcal{K}_s$. Sean $u, v \in \mathcal{K}_s$ funciones que verifiquen $u \leq v$, y sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_s$ una sucesión que $u_k \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $m(u_k) \to G(u)$. Por el Lema 5.1.17, tenemos que $v_k = \max\{v, u_k\} \in \mathcal{K}_s$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y $v_k \to v = \max\{v, u\}$ en $L^p(\Omega)$. En consecuencia , como m es no creciente y $v_k \geq u_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$G(v) \leq \liminf_{k\to\infty} m(v_k) \leq \lim_{k\to\infty} m(u_k) = G(u).$$

Ahora probemos que G verifica (G_3), i.e.

$$G(u^s_A) = F(A), \text{ para cada } A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega). \tag{5.1.10}$$

Dado $A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega)$, de (5.1.9) obtenemos que $G(u_A^s) \leq F(A)$. Para probar la desigualdad inversa es suficiente ver que

$$F(A) \leq \liminf_{k\to\infty} m(w_k)$$

para cualquier sucesión $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_s$ que cumpla $w_k \to u_A^s$ en $L^p(\Omega)$. Por definición de m, existe $A_k \in \mathcal{A}_{s,p}^c(\Omega)$ tal que

$$F(A_k) \leq m(w_k) + \frac{1}{k} \text{ y } u_{A_k}^s \leq w_k.$$

Ya que $u_{A_k}^s \in \mathcal{K}_s$ para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{u_{A_k}^s\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{s,p}(\Omega)$, y por el Lema 5.1.17, pasando por una subsucesión, existe $u \in \mathcal{K}_s$ tal que $u_{A_k}^s \to u$ en $L^p(\Omega)$. Como $w_k \to u_A^s$ en $L^p(\Omega)$, de $u_{A_k}^s \leq w_k$ obtenemos $u \leq u_A^s$.

Luego, dado $\varepsilon > 0$ consideremos el conjunto $A^\varepsilon = \{u_A^s > \varepsilon\}$. Notemos que $u_{A_k\cup A^\varepsilon}^s \in \mathcal{K}_s$ y existe $u^\varepsilon \in \mathcal{K}_s$ tal que $u_{A_k\cup A^\varepsilon}^s \to u^\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$. Por lo tanto, por el Lema 5.1.15 tenemos que $u^\varepsilon \leq u_A^s$.

Veamos que $(u_A^s - \varepsilon)^+ \leq u_A^s$. Primero notemos que

$$(u_A^s-\varepsilon)^+(x) - (u_A^s-\varepsilon)^+(y) = \begin{cases} u_A^s(x) - u_A^s(y) & \text{si } x, y \in A^\varepsilon, \\ u_A^s(x) - \varepsilon & \text{si } x \in A^\varepsilon \text{ y } y \notin A^\varepsilon, \\ \varepsilon - u_A^s(y) & \text{si } y \in A^\varepsilon \text{ y } x \notin A^\varepsilon, \\ 0 & \text{si no .} \end{cases}$$

Para cada $v \in W_0^{s,p}(A^\varepsilon)$ tal que $v \geq 0$, obtenemos que

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|(u_A(x)-\varepsilon)^+ - (u_A(y)-\varepsilon)^+|^{p-2}((u_A(x)-\varepsilon)^+ - (u_A(y)-\varepsilon)^+)(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}} \leq \iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|u_A(x)-u_A(y)|^{p-2}(u_A(x)-u_A(y))(v(x)-v(y))}{|x-y|^{n+sp}}.$$

Entonces

$$(-\Delta_p)^s(u_A^s-\varepsilon)^+ \leq (-\Delta_p)^s u_A^s = 1 = (-\Delta_p)^s u_{A^\varepsilon}^s \text{ en } A^\varepsilon.$$

Como $0 = (u_A^s-\varepsilon)^+ = u_{A^\varepsilon}^s$ en $\mathbb{R}^n \setminus A^\varepsilon$, por el principio de comparación se sigue que $(u_A^s-\varepsilon)^+ \leq u_{A^\varepsilon}^s$ en $\mathbb{R}^n$.
En conclusión, hemos obtenido la siguiente cadena de desigualdades

$$(u_A^s-\varepsilon)^+ \leq u_{A^\varepsilon}^s \leq u_{A_k\cup A^\varepsilon}^s.$$

Como ya vimos que $u^\varepsilon \leq u_A^s$ y $u_{A_k\cup A^\varepsilon}^s \to u^\varepsilon$, entonces concluimos

$$(u_A^s-\varepsilon)^+ \leq u^\varepsilon \leq u_A^s.$$

Al ser el conjunto $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ uniformemente acotado en $W_0^{s,p}(\Omega)$, por medio de una subsucesión, obtenemos que $u^\varepsilon \to u_A^s$ en $L^p(\Omega)$. Así, existe una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_{A_k\cup A^{\varepsilon_k}} \to u_A^s \text{ en } L^p(\Omega). \tag{5.1.11}$$

Si recordamos la Definición 5.1.9, la convergencia (5.1.11) implica que $(A_k \cup A^{\varepsilon_k})$ $\gamma-$converge a A, y obtenemos la desigualdad deseada,

$$F(A) \leq \liminf_{k\to\infty} F(A_k \cup A^{\varepsilon_k}) \leq \liminf_{k\to\infty} F(A_k) \leq \liminf_{k\to\infty} m(w_k).$$

Ahora vamos a enfocarnos en la parte final de la prueba. Sea $\{w_k\} \subset \mathcal{K}_s$ una sucesión que satisface $|\{w_k > 0\}| \leq c$ y

$$\lim_{k\to\infty} G(w_k) = \inf\{G(w)\colon w \in \mathcal{K}_s,\ |\{w_k > 0\}| \leq c\} := g.$$

Entonces existe un $w_0 \in \mathcal{K}_s$ tal que $w_k \to w_0$ en $L^p(\Omega)$ y $|\{w_0 > 0\}| \leq c$, y ya que G es semicontinuo en $\mathcal{K}_s$ obtenemos

$$g \leq G(w_0) \leq \liminf_{k\to\infty} G(w_k) = g.$$

Es decir, w_0 verifica

$$w_0 = \min\{G(w)\colon w \in \mathcal{K}_s,\ |\{w > 0\}| \leq c\}. \tag{5.1.12}$$

Finalmente, si consideramos el conjunto $A_0 = \{w_0 > 0\}$ tenemos que $A_0 \in \mathcal{A}^c_{s,p}(\Omega)$, y por el Lema 5.1.10 tenemos que $w_0 \leq u^s_{A_0}$. Además, para cada $A \in \mathcal{A}^c_{s,p}(\Omega)$ sabemos que $u^s_A \in \mathcal{K}_s$ y $|\{u^s_A > 0\}| \leq c$. Entonces como G es decreciente verifica (5.1.10) y (5.1.12). Es decir tenemos

$$F(A_0) = G(u^s_{A_0}) \leq G(w_0) \leq G(u^s_A) = F(A).$$

Así, A_0 es solución del problema (5.1.5). □

5.2. Comportamiento asintótico

Antes de pasar al estudio del caso anisotrópico, basándonos en [8, 26], analizaremos el comportamiento cuando $s \nearrow 1$.

Para realizar dicho análisis, necesitamos asumir un comportamiento asintótico del funcional de costo F_s. Para ello, debemos definir una noción de convergencia para los conjuntos cuando s varía.

Definición 5.2.1. Sea $0 < s_k \nearrow 1$, $A_k \in \mathcal{A}_{s_k,p}(\Omega)$ y $A \in \mathcal{A}_{1,p}$. Decimos que $\mathcal{A}_k \xrightarrow{\gamma,k} \mathcal{A}$ si $u^{s_k}_{A_k} \to u^1_A$ en $L^p(\Omega)$.

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.2.2. *Para cada $0 < s \leq 1$, sea $F_s\colon \mathcal{A}_{s,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ un funcional que verifica (H_1), (H_2) y*

(H_3) continuidad respecto de A; es decir, si $A \in \mathcal{A}_{1,p}(\Omega)$, entonces

$$F_1(A) = \lim_{s\nearrow 1} F_s(A).$$

(H_4) Para cada $0 < s_k \nearrow 1$ y $A_k \to A$, se tiene

$$F_1(A) \leq \liminf_k F_{s_k}(A_k).$$

Entonces

$$\min\{F_1(A) : A \in \mathcal{A}_{1,p}(\Omega), |A| \leq c\} = \lim_{s \nearrow 1} \min\{F_s(A) : A \in \mathcal{A}_{s,p}(\Omega), |A| \leq c\}.$$

Nuestro objetivo principal es establecer que una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$, tal que $u_k \in \mathcal{K}_{s_k}$, es precompacta y que todo punto de acumulación pertenece a $\mathcal{K}_1$.

Lema 5.2.3. *Sea $0 < s_k \nearrow 1$ y $u_k \in \mathcal{K}_{s_k}$. Entonces, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $u \in \mathcal{K}_1$, donde*

$$\mathcal{K}_1 = \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : \ w \geq 0, \ (-\Delta_p)w \leq 1\}.$$

Demostración. Como cada $\mathcal{K}_{s_k}$ es un conjunto acotado, y $W_0^{1,p}(\Omega) \subset W_0^{s_k,p}(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de [10] la constante en la desigualdad Poincaré

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega, p, s)[u]^p_{s,p},$$

tiene una dependencia de s de la forma $C(\Omega, p, s) \leq (1 - s)C(\Omega, p)$. Entonces, existe una constante C tal que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(1 - s_k)[u_k]_{s_k,p} \leq C.$$

Aplicando el Teorema 2 de [8] podemos concluir que existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{k_j} \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Finalmente, es claro que $u \geq 0$ y luego por los resultados en [26, 10] obtenemos que $(-\Delta_p)u \leq 1$ para concluir la prueba. □

Lo siguiente que tenemos que analizar es la continuidad de u^s_A cuando s se aproxima a 1.

Lema 5.2.4. *Para cada $A \in \mathcal{A}_1(\Omega)$, $u^s_A \to u_A$ en $L^p(\Omega)$ cuando $s \nearrow 1$.*

Demostración. Recordemos que u^s_A es el minimizador del funcional

$$I_s(w) = \begin{cases} J_{s,p}(w) - \int_\Omega w\,dx & \text{si } w \in W_0^{s,p}(A), \\ \infty & \text{otro caso .} \end{cases}$$

Por [44], tenemos que $J_{s,p}(w)$ Γ-converge a $J_{1,p}(w)$ en L^p. Entonces, el minimizador de $J_{s,p}(w) - \int_\Omega w\,dx$ converge al minimizador de $J_{1,p}(w) - \int_\omega w\,dx$ en $L^p(\Omega)$. □

Los siguientes dos lemas son los contrapartes de los Lemas 5.1.11 y 5.1.15.

Lema 5.2.5. *Sea $0 < s_k \nearrow 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $A_k \in \mathcal{A}_{s_k}(\Omega)$ tal que $u_{A_k}^{s_k} \to u$ en $L^p(\Omega)$. Sea $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ tal que $w_k \in W_0^{s_k,p}(A_k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\sup_{k\in\mathbb{N}}(1-s_k)[w_k]_{s_k,p}^p < \infty$. Supongamos además que $w_k \to w$ en $L^p(\Omega)$. Entonces, $w \in W_0^{1,p}(\{u > 0\})$.*

Demostración. La prueba es análoga a la del Lema 5.1.11 con la utilización de los resultados de compacidad de [8]. □

Lema 5.2.6. *Sea $s_k \nearrow 1$ y para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $A_k \in \mathcal{A}_{s_k}(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}_1(\Omega)$. Supóngamos que $u_{A_k}^{s_k} \to u$ en $L^p(\Omega)$ y que $u \le u_A$. Entonces, si $u_{A_k\cup A^\varepsilon}^{s_k} \to u^\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$, donde $A^\varepsilon := \{u_A > u\}$, se cumple que $u^\varepsilon \le u_A$.*

Demostración. Por el Lema 5.2.3 tenemos que u y u^ε están en $W_0^{s,p}(\Omega)$. Definamos una función

$$v_\varepsilon := 1 - \frac{1}{\varepsilon} min\{u_A, \varepsilon\}.$$

Notemos que $0 \le v^\varepsilon \le 1$ y $v^\varepsilon = 0$ en A^ε. Luego definamos

$$u_{k,\varepsilon} := u_{A_k^\varepsilon \cup A_\varepsilon}^s \text{ y } w_{k,\varepsilon} := \text{mín}\{v_\varepsilon, u_{k,\varepsilon}\}.$$

Claramente, se satisface que $w_{k,\varepsilon} \ge 0$, ya que el principio de comparación nos da $u_{k,\varepsilon} \ge 0$, y $v_\varepsilon \ge 0$ por lo mencionado antes. Como $v_\varepsilon = 0$ en A_ε, también tenemos que $w_{k,\varepsilon} = 0$ en A_ε. Más aún, como $u_{k,\varepsilon} = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus (A_k \cup A_\varepsilon)$, tenemos que $w_{k,\varepsilon} = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus (A_k \cup A_\varepsilon)$, y en consecuencia $w_{k,\varepsilon} \in W_0^{s_k,p}(A_k)$.

Observemos que $w_{k,\varepsilon} \to w_\varepsilon := \text{mín}\{v_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ en $L^p(\Omega)$. Luego, aplicando el Lema 5.2.6, obtenemos $w_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\{u > 0\})$ y $w_\varepsilon = 0$ en $\{u = 0\}$. Como la relación $0 \le u \le u_A$ implica la inclusión $\{u_A = 0\} \subset \{u = 0\}$, entonces $w_\varepsilon \in W_0^{1,p}(\{u_A > 0\})$. Más aún, como $\{u_A > 0\} \subset A$, tenemos que $w_\varepsilon = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$. Ya que $v_\varepsilon = 1$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$, entonces $u_\varepsilon = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$, y en particular $u_\varepsilon \le 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Finalmente veamos que $-\Delta_p u_\varepsilon \le 1$ en Ω. Observemos que $u_{k,\varepsilon} \in \mathcal{K}_{s_k}$ y $u_{k,\varepsilon} \to u_\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$. Entonces, por el Lema 5.2.3, $u_\varepsilon \in K^1$ y $-\Delta_p u_\varepsilon \le 1$ en Ω. Si recordamos el Lema 5.1.10 con $s = 1$,

$$u_A = \max_{w\in W_0^{1,p}(\Omega)} \{w \le 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus A \text{ y } (-\Delta_p)w \le 1 \text{ en } \Omega\},$$

concluimos que $u^\varepsilon \le u_A$. □

Proposición 5.2.7. *Sea $0 < s_k \nearrow 1$, $A_k \in \mathcal{A}_{s_k,p}^c(\Omega)$ tales que $u_{A_k}^{s_k} \to u$ en $L^p(\Omega)$. Entonces existe $\tilde{A}_k \in \mathcal{A}_{s_k,p}(\Omega)$ tal que $A_k \subset \tilde{A}_k$ y $\tilde{A}_k$ γ-converge a $A := \{u > 0\}$.*

Demostración. Como $u_{A_k}^{s_k} \in \mathcal{K}_{s_k}$ y $u_{A_k}^{s_k} \to u$, por el Lema 5.2.3 se tiene que $u \in \mathcal{K}_1$, y por el Lema 5.1.10, $u \le u_A$.

Consideremos $A^\varepsilon := \{u_A > \varepsilon\}$ y observemos que

$$u_{A^\varepsilon}^{s_k} \le u_{A_k\cup A^\varepsilon}^{s_k}.$$

Como $u^{s_k}_{A_k\cup A^\varepsilon} \in \mathcal{K}_{s_k}$, por el Lema 5.2.3, existe $u^\varepsilon \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que $u^{s_k}_{A_k\cup A^\varepsilon} \to u^\varepsilon$ en $L^p(\Omega)$.

Además, por el Lema 5.2.4, $u^{s_k}_{A^\varepsilon} \to u_{A^\varepsilon}$ fuertemente en $L^p(\Omega)$. Luego, podemos pasar al límite cuando $k \to \infty$ en la desigualdad anterior y concluir que

$$u_{A^\varepsilon} \leq u_\varepsilon.$$

Se puede comprobar que $u_{A^\varepsilon} = (u_A - \varepsilon)^+$ y por el Lema 5.2.6 tenemos

$$(u_A - \varepsilon)^+ \leq u_\varepsilon \leq u_A.$$

Por lo tanto, existe una sucesión $0 < \varepsilon_k \downarrow 0$ tal que

$$u^{s_k}_{A_k\cup A^{\varepsilon_k}} \to u_A$$

fuertemente en $L^p(\Omega)$. Es decir, $A_k \cup A_{\varepsilon_k} =: \tilde{A}_k$ γ-converge a A. □

Ahora podemos dar la demostración del Teorema 5.2.2.

Demostración. Por un lado, por el Teorema 5.1.16, para cada k existe $A_k \in \mathcal{A}^c_{s_k,p}(\Omega)$ tal que

$$F_{s_k}(A_k) = \min\{F_{s_k}(A) : A \in \mathcal{A}^c_{s_k,p}(\Omega)\}.$$

Entonces, si $A \in \mathcal{A}^c_{1,p}(\Omega)$, por la condición (H_3) obtenemos que

$$\limsup_{k\to\infty} F_{s_k}(A_k) \leq \lim_{k\to\infty} F_{s_k}(A) = F_1(A).$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{k\to\infty} \min\{F_{s_k}(A) : A \in \mathcal{A}^c_{s_k,p}(\Omega)\} \leq \min\{F_1(A) : A \in \mathcal{A}^c_{1,p}(\Omega)\}. \tag{5.2.1}$$

Por otro lado, por el Lema 5.2.3, existe un $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tal que $u^{s_k}_{A_k} \to u$ en $L^p(\Omega)$. Por la Proposición 5.2.7, existen $\tilde{A}_k \in \mathcal{A}^c_{s_k,p}(\Omega)$ tales que $A_k \subset \tilde{A}_k$ y $\tilde{A}_k$ γ-converge a $A := \{u > 0\}$. Como $u^{s_k}_{A_k} \to u$, entonces $|A| \leq c$.

De las hipótesis (H_2) y (H_4) concluimos que

$$F_1(A) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{s_k}(\tilde{A}_k) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{s_k}(A_k).$$

De aquí se sigue que

$$\min\{F_1(A) : A \in \mathcal{A}^c_{1,p}(\Omega)\} \leq \liminf_{k\to\infty} \min\{F_{s_k}(A) : A \in \mathcal{A}^c_{s_k,p}(\Omega)\}. \tag{5.2.2}$$

Finalmente, combinando (5.2.1) y (5.2.2), la prueba está completa. □

5.3. Caso anisotrópico

En esta sección final, enunciaremos y justificaremos las herramientas necesarias para establecer un teorema análogo al Teorema 5.1.16, así como su comportamiento asintótico en el contexto de espacios anisotrópicos. Dado que la demostración es idéntica a la del caso isótropico, salvo por el reemplazo de las normas, omitiremos su desarrollo. Vamos a recordar cuál es la definición de los espacios donde vamos a trabajar. Dado $i = 1, \dots, n$, $s \in (0, 1]$ y $p \in (1, \infty)$, definimos el espacio fraccionario de Sobolev i^{esimo} como

$$W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ tal que } [u]_{s,p,i} < \infty\},$$

donde

$$[u]_{s,p,i} = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\, dh\, dx & \text{si } \ s < 1 \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\partial_{x_i} u|^p\, dx & \text{si } \ s = 1. \end{cases}$$

Por conveniencia, usaremos la notación

$$\mathcal{D}_{s_i,p_i}(u) := \frac{|D_{h,i}(u)(x)|^{p_i}}{|h|^{1+s_i p_i}},$$
$$\mathcal{D}'_{s_i,p_i}(u) := \frac{|D_{h,i}(u)(x)|^{p_i-2} D_{h,i}(u)(x)}{|h|^{1+s_i p_i}}.$$

Donde $D_{h,i}(u)(x) = (u(x+he_i) - u(x))$. Recordemos que $W_i^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\|_{s,p,i} = \|u\|_p + ([u]_{s,p,i})^{1/p},$$

que es separable y reflexivo. Dados $\vec{s} = (s_1, \cdots, s_n)$ y $\vec{p} = (p_1, \cdots, p_n)$, definimos los parámetros

$$\overline{\vec{s}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i} \right)^{-1}, \quad \overline{\vec{sp}} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_i p_i} \right)^{-1} \text{ y } \vec{p}_{\vec{s}}{}^{*} = \frac{n\overline{\vec{sp}}/\overline{\vec{s}}}{n - \overline{\vec{sp}}}.$$

Tal que

1. $0 < s_i \leq 1$ para todo $i \in \{1, \cdots n\}$.
2. $1 < p_1 \leq \cdots \leq p_n < \infty$.
3. $p_n < \vec{p}\,{}^{*}_{\vec{s}}$ y $\overline{\vec{sp}} < n$.

Entonces, definimos

$$W^{\vec{s},\vec{p}}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{i=1}^{n} W_i^{s_i,p_i}(\mathbb{R}^n).$$

Este espacio de Sobolev anisotrópico es un espacio de Banach separable y reflexivo con la norma

$$\|u\|_{\vec{s},\vec{p}} = \sum_{i=1}^{n} \|u\|_{s_i,p_i,i}.$$

Si consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, entonces definimos el espacio de Sobolev anisotrópico de funciones que se anulan en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ como

$$W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\vec{s},\vec{p}}} \tag{5.3.1}$$

Gracias a la siguiente proposición podemos usar la norma

$$\|u\|_{\vec{s},\vec{p}} := \sum_{i=1}^{n} ([u]_{s_i,p_i,i})^{1/p_i}.$$

Proposición 5.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto acotado. Existe una constante $C(\Omega,p) > 0$ tal que para todo $u \in W_0^{s,p,i}(\Omega)$ se cumple que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C[u]_{s,p,i}.$$

Por lo tanto, existe una constante positiva $C(\Omega,\vec{p}) > 0$ tal que para todo $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, la siguiente desigualdad se cumple para cualquier $i \in 1,\dots,n$.

$$\|u\|_{L^{p_i}(\Omega)} \leq C\|u\|_{\vec{s},\vec{p}}.$$

Demostración. Sea u una función en $W_0^{s,p,i}(\Omega)$, podemos suponer que existe $R > 1$ tal que $\operatorname{supp} u \subset Q_R = [-R,R]^n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[u]_{s,p,i}^p &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh\,dx \\
&\geq \int_{Q_R}\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh\,dx \\
&\geq \int_{Q'_R}\int_{|x_i|\leq R}\int_{|x_i+h|\geq R} \frac{|u(x)|^p}{|h|^{1+sp}}\,dh\,dx_i\,dx' \\
&\geq \int_{Q'_R}\int_{|x_i|\leq R} |u(x)|^p \int_{|h|\geq 2R} \frac{1}{|h|^{1+sp}}\,dh\,dx_i\,dx' \\
&\geq \int_{Q'_R}\int_{|x_i|\leq R} |u(x)|^p \int_{|h|\geq 2R} \frac{1}{|h|^{1+p}}\,dh\,dx_i\,dx' \\
&\geq C\|u\|_p^p,
\end{aligned}$$

donde $Q'_R = [-R,R]^{n-1}$ y $dx' = dx_1\cdots,dx_{i-1},dx_{i+1},dx_n$. □

Dado que estamos tratando con dominios admisibles en cuanto a la capacidad de un conjunto, definiremos el análogo de $\operatorname{Cap}(s,p)$, es decir, $\operatorname{Cap}(\vec{s},\vec{p})$.

Definición 5.3.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\vec{s}$, $\vec{p}$ definidos anteriormente. Dado $A \subset \Omega$, definimos la capacidad de Gagliardo $(\vec{s}, \vec{p})$ de A relativa a Ω como

$$\mathrm{Cap}(\vec{s}, \vec{p})(A) = \text{ínf}\left\{\|u\|_{\vec{s},\vec{p}} : u \in C_c^\infty(\Omega), u \geq 0, A \subset \{u \geq 1\}^\circ\right\}.$$

En este contexto, decimos que un subconjunto A de Ω es un conjunto $(\vec{s}, \vec{p})$-quasi abierto si existe una sucesión decreciente $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos de Ω tal que $\mathrm{Cap}(\vec{s}, \vec{p})(\omega_k) \to 0$, cuando $k \to +\infty$, y $A \cup \omega_k$ es un conjunto abierto para todo $k \in \mathbb{N}$.

Denotamos por $\mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ la clase de todos los subconjuntos $(\vec{s}, \vec{p})$-quasi abiertos de Ω. Y la noción de convergencia la definiremos de la siguiente manera.

Definición 5.3.3. Sea $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ y $A \in \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$. Decimos que $A_k \xrightarrow{\gamma_{\vec{s}}} A$ si $u_{A_k}^{\vec{s}} \to u_A^{\vec{s}}$ en $L^{p_{\max}}(\Omega)$.

Además, si $\vec{s}_k := (s_1^k, \cdots, s_n^k) \nearrow \vec{1} := (1, \cdots, 1)$. Dado $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}_{\vec{s}_k,\vec{p}}(\Omega)$ y $\{A\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}_{(1,\cdots,1),\vec{p}}(\Omega)$. Decimos que $A_k \xrightarrow{\gamma_1} A$ si $u_{A_k}^{s_k} \to u_A^{\vec{1}}$ en $L^{p_{\max}}(\Omega)$.

Definición 5.3.4. Una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice $(\vec{s}, \vec{p})$-quasi continua (q.c.) si para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto relativamente abierto $G \subset \Omega$ tal que $\mathrm{Cap}(\vec{s}, \vec{p})(G) < \varepsilon$ y $u|_{\Omega\setminus G}$ es continua.

El teorema presentado a continuación nos permite operar con el representante quasi continuo de una función $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$. Su demostración es análoga al caso isotrópico dada en [49].

Teorema 5.3.5. *Para todo $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, existe una única función relativamente quasi continua $\tilde{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{u} = u$ c.t.p en Ω.*

Finalmente, recordando que $D_h^i(u)(x) = (u(x + he_i) - u(x))$ y la definición de nuestro operador. Sea $0 < s < 1 < p < \infty$,

$$\langle (J_{s,p}^i)'(u), v\rangle := s(1-s)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}} \frac{|D_{h,i}(u)|^{p-2}D_{h,i}(u)D_{h,i}(v)}{|h|^{1+sp}}\, dhdx,$$

y si $s = 1$,

$$\langle (J_{1,p}^i)'(u), v\rangle := 2\int_{\mathbb{R}^n} |u_{x_i}|^{p-2}\partial_{x_i}u\ \partial_{x_i}v\, dx.$$

Si tomamos $\vec{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ y $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, entonces el operador

$$J_{\vec{s},\vec{p}} \colon W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

es Fréchet diferenciable con derivada

$$J'_{\vec{s},\vec{p}}(u) := \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}(J_{s_i,p_i}^i)'(u).$$

Así, definimos nuestro operador como

$$(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}u := (J_{\vec{s},\vec{p}})'(u).$$

Definición 5.3.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, $\vec{s}$ y $\vec{p}^{\,*}$ definidos anteriormente, $(\vec{p}^{\,*})'$ es el conjugado de Lebesgue coordenada a coordenada de $\vec{p}^{\,*}$ y $f \in L^{(\vec{p}^{\,*})'}(\Omega)$. Decimos que $u \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ es una solución débil de

$$\begin{cases} (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ en } \mathbb{R}^n \setminus \Omega, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

si u verifica

$$\langle (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} u, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx.$$

Como antes, la coercividad y monotonía de los operadores asegura, como en el caso estándar de un conjunto abierto, la existencia de soluciones débiles para (5.3.6). Por lo tanto, dado $A \in \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, denotamos por $u_A^{\vec{s}} \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(A)$ la única solución débil de

$$(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}} v = 1 \text{ en } A, \quad v = 0 \text{ q.e. en } \mathbb{R}^n \setminus A. \tag{5.3.3}$$

Una herramienta potente asociada con las soluciones débiles es el principio de comparación. Aunque bien conocido en el caso isotrópico, en el escenario anisotrópico resulta necesario formularlo explícitamente y justificarlo.

Proposición 5.3.7 (Principio de comparación)**.** *Sean $u, v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ tales que $(-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}(u) \leq (-\Delta_{\vec{p}})^{\vec{s}}(v)$ en Ω en el sentido de que*

$$\sum_{i=1}^n \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left[\mathcal{D}'_{s_i,p_i}(v)\right](\phi(x+he_i) - \phi(x)) \, dh \, dx \geq \sum_{i=1}^n \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left[\mathcal{D}'_{s_i,p_i}(u)\right](\phi(x+he_i) - \phi(x)) \, dh \, dx,$$

en Ω siempre que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $\phi > 0$. Si $u \leq v$ en $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, entonces $u \leq v$ a.e en Ω.

Demostración. La demostración se basa en [38], con algunos cambios.

Sean $u, v \in W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$ funciones que verifican las hipótesis. Entonces, para cualquier $\phi \geq 0$ en $W_0^{\vec{s},\vec{p}}(\Omega)$, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \left[\mathcal{D}'_{s_i,p_i}(v) - \mathcal{D}'_{s_i,p_i}(u)\right](\phi(x+he_i) - \phi(x)) \, dh \, dx \geq 0. \tag{5.3.4}$$

Queremos mostrar que cada integrando es no positivo para la elección $\phi(x) = (u-v)^+$. La identidad

$$|b|^{p-2}b - |a|^{p-2}a = (p-1)(b-a)\int_0^1 |a + t(b-a)|^{p-2} \, dt.$$

tomando $a = u(x+he_i) - u(x)$ y $b = v(x+he_i) - v(x)$, entonces

$$[\mathcal{D}'_{s_i,p_i}(v) - \mathcal{D}'_{s_i,p_i}(u)] = (p_i - 1)\left[u(x) - v(x) - (u(x+he_i) - v(x+he_i))\right] Q_i(x, x+he_i)$$

donde

$$Q_i(x, x+he_i) = \int_0^1 |(u(x+he_i) - u(x)) \\ + t\left((v(x+he_i) - v(x)) - (u(x+he_i) - u(x))\right)|^{p_i - 2}\, dt.$$

Nótese que $Q_i \geq 0$ y $Q_i = 0$ si y solo si $u(x+he_i) = u(x)$ y $v(x+he_i) = v(x)$. Elegimos la función de prueba $\phi = (u-v)^+$ y escribimos $\psi = (u-v)$. Cada integrando de (5.3.4) es

$$(p_i - 1)Q_i(x, x+he_i)|h|^{-1-s_i p_i},$$

multiplicado por

$$[\psi(x) - \psi(x+he_i)][\phi(x+he_i) - \phi(x)] = \\ - \left[\psi^+(x+he_i) - \psi^+(x)\right]^2 - \psi^-(x+he_i)\psi^+(x) - \psi^-(x)\psi^+(x+he_i).$$

Por lo tanto, cada integrando contiene solo términos negativos y, para evitar una contradicción, es necesario que

$$\psi^+(x+he_i) = \psi^+(x) \text{ o } Q_i(x, x+he_i) = 0$$

en casi todo punto $(x, x+he_i)$. Por lo tanto, debe cumplirse la identidad

$$(u(x+he_i) - v(x+he_i))^+ = (u(x) - v(x))^+.$$

Se deduce que $u(x) - v(x) = C$ con C constante, y por las condiciones de frontera, se concluye que $C = 0$ y que $v \geq u$. □

Para concluir el trabajo, gracias a las propiedades y definiciones del caso anisotrópico, estamos preparados para formular el problema de minimización.

Teorema 5.3.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Sea $F_{\vec{s}} : \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que*

($H_1^{\vec{s}}$) *$F_{\vec{s}}$ es semicontinuo inferior con respecto a la $\gamma_{\vec{s}}$-convergencia; es decir, $A_k \xrightarrow{\gamma_{\vec{s}}} A$ implica $F_{\vec{s}}(A) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{\vec{s}}(A_k)$.*

($H_2^{\vec{s}}$) *$F_{\vec{s}}$ es decreciente con respecto a la inclusión de conjuntos; es decir, $F_{\vec{s}}(A) \geq F_{\vec{s}}(B)$ siempre que $A \subset B$.*

se cumplen. Entonces, para todo $0 < c < |\Omega|$, el problema

$$\min\{F_{\vec{s}}(A) : A \in \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega), |A| \leq c\}, \tag{5.3.5}$$

tiene solución.
Si $F_{\vec{s}}$ también verifica

($H_3^{\vec{s}}$) *Continuidad con respecto a A; es decir, si $A \in \mathcal{A}_1(\Omega)$, entonces*

$$F_{\vec{1}}(A) = \lim_{\vec{s} \nearrow (1,\cdots,1)} F_{\vec{s}}(A).$$

$(H_4^{\vec{s}})$ *Para todo* $\vec{s}_k \nearrow (1, \cdots, 1)$ *y* $A_k \xrightarrow{\gamma_1} A$, *entonces*

$$F_1(A) \leq \liminf_{k\to\infty} F_{\vec{s}_k}(A_k).$$

Entonces

$$\text{mín}\{F_1(A) : A \in \mathcal{A}_{(1,\cdots,1),\vec{p}}(\Omega), |A| \leq c\} = \lim_{\vec{s}\nearrow(1,\cdots,1)} \text{mín}\{F_{\vec{s}}(A) : A \in \mathcal{A}_{\vec{s},\vec{p}}(\Omega), |A| \leq c\}.$$

Demostración. La demostración es análoga al caso isotrópico utilizando los lemas y propiedades correspondientes para el caso anísotrópico. □

Bibliografía

[1] Robert A. Adams. Anisotropic sobolev inequalities. *Casopis pro pestovani matematiky*, 113(3):267–279, 1988. Mathematical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences. 13

[2] Grégoire Allaire. *Shape optimization by the homogenization method*, volume 146 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2002. 15

[3] Sabri Bahrouni, Julián Fernández Bonder, Ignacio Ceresa Dussel, and Olimpio Miyagaki. Peridynamics and anisotropic fractional Sobolev spaces with variable exponents. *arXiv preprint arXiv:2408.09170*, 2024. 3, 5, 31

[4] José C. Bellido and Alejandro Ortega. Spectral stability for the peridynamic fractional p-Laplacian. *Appl. Math. Optim.*, 84(suppl. 1):S253–S276, 2021. 28

[5] José C. Bellido and Alejandro Ortega. Spectral stability for the peridynamic fractional p-Laplacian. *Applied Mathematics & Optimization*, 84(S1):253–276, 2021. 31

[6] Marino Belloni and Bernd Kawohl. The pseudo-p-Laplace eigenvalue problem and viscosity solutions as $p \to \infty$. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(1):28–52, 2004. 14, 38

[7] A. Benedek and R. Panzone. The space $ lp̂ $ with mixed norm. *Duke Mathematical Journal*, 28:301–324, 1961. 15, 49

[8] Jean Bourgain, Haim Brezis, and Petru Mironescu. Another look at sobolev spaces. In *Optimal control and partial differential equations*, pages 439–455. IOS, Amsterdam, 2001. MR #3586796. 14, 20, 22, 81, 82, 83

[9] Andrea Braides. Γ-*Convergence for Beginners*, volume 22 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*. Oxford University Press, Oxford, 2002. 36

[10] Lorenzo Brasco, Enea Parini, and Marco Squassina. Stability of variational eigenvalues for the fractional p-laplacian. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A*, 36(4):1813–1845, 2016. 82

[11] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011. 74

[12] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo. *Variational methods in shape optimization problems*, volume 65 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2005. 15

[13] Giuseppe Buttazzo and Gianni Dal Maso. An existence result for a class of shape optimization problems. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 122(2):183–195, 1993. 15

[14] Ignacio Ceresa Dussel. Shape optimization problems involving nonlocal and nonlinear operators. *J. Elliptic Parabol. Equ.*, 11(1):199–221, 2025. 3, 5

[15] Ignacio Ceresa Dussel and Julián Fernández Bonder. Existence of eigenvalues for anisotropic and fractional anisotropic problems via Lusternik-Schnirelmann theory. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 64(2):577–596, 2024. 3, 5

[16] Ignacio Ceresa Dussel and Julián Fernández Bonder. A Bourgain-Brezis-Mironescu formula for anisotropic fractional sobolev spaces and applications to anisotropic fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 519(2):25 pages, 2023. 3, 5

[17] Jamil Chaker, Minhyun Kim, and Marvin Weidner. The concentration-compactness principle for the nonlocal anisotropic p-Laplacian of mixed order. *Nonlinear Anal.*, 232:Paper No. 113254, 18, 2023. 14, 19

[18] Gianni Dal Maso. *An introduction to* Γ*-convergence*, volume 8 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993. 36, 72, 75

[19] Anne-Laure Dalibard and David Gérard-Varet. On shape optimization problems involving the fractional laplacian. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 19(4):976–1013, 2013. 15

[20] Marco Degiovanni and Dario Mazzoleni. Optimization results for the higher eigenvalues of the p-laplacian associated with sign-changing capacitary measures. *Journal of the London Mathematical Society*, 104(1):97–146, 2021. 15, 16

[21] L. M. Del Pezzo and J. D. Rossi. Eigenvalues for a nonlocal pseudo-p-laplacian. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 36(12):6737–6765, 2016. 14

[22] Eleonora Di Nezza, Giampiero Palatucci, and Enrico Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional sobolev spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 136(5):521–573, 2012. 12, 18, 70

[23] A. El Hamidi and J. M. Rakotoson. Extremal functions for the anisotropic sobolev inequalities. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 24(5):741–756, 2007. 13, 18, 19, 52

[24] Julián Fernández Bonder, Ariel Salort, and Hernán Vivas. Homogeneous eigenvalue problems in Orlicz-Sobolev spaces. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 63(2):429–453, 2024. 53

[25] Julián Fernández Bonder, Antonella Ritorto, and Ariel Martín Salort. Shape optimization problems for nonlocal operators. *Advances in Calculus of Variations*, 11(4):357–371, 2018. 15

[26] Julián Fernández Bonder and Ariel Salort. Stability of solutions for nonlocal problems. *Nonlinear Analysis*, 200:112080, 2020. 13, 41, 81, 82

[27] Julián Fernández Bonder, Analía Silva, and Juan F. Spedaletti. Gamma convergence and asymptotic behavior for eigenvalues of nonlocal problems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - A*, 41(5):2125–2140, 2021. 13

[28] G. Franzina and P. Lindqvist. An eigenvalue problem with variable exponents. *Nonlinear Analysis*, 85:1–16, 2013. 14, 53

[29] Nicola Fusco, Shirsho Mukherjee, and Yi Ru-Ya Zhang. A variational characterisation of the second eigenvalue of the p-laplacian on quasi open sets. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 119(3):579–612, 2019. 15, 16

[30] Giambattista Giacomin and Joel L. Lebowitz. Phase segregation dynamics in particle systems with long-range interactions. i. macroscopic limits. *Journal of Statistical Physics*, 87(1-2):37–61, 1997. 12

[31] Guy Gilboa and Stanley Osher. Nonlocal operators with applications to image processing. *Multiscale Modeling & Simulation*, 7(3):1005–1028, 2008. 12

[32] Patrícia Gonçalves. Hydrodynamics for symmetric exclusion in contact with reservoirs. In *Stochastic dynamics out of equilibrium*, volume 282 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 137–205. Springer, Cham, 2019. 12

[33] Nicolas Humphries et al. Environmental context explains Lévy and brownian movement patterns of marine predators. *Nature*, 465:1066–1069, 2010. 12

[34] Nikolai Laskin. Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals. *Physics Letters A*, 268(4–6):298–305, 2000. 12

[35] An Le. Eigenvalue problems for the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, 64(5):1057–1099, 2006. 14

[36] Sergei Levendorski. Pricing of the american put under Lévy processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(3):303–335, 2004. 12

[37] G. M. Lieberman. Gradient estimates for anisotropic elliptic equations. *Advances in Differential Equations*, 10(7):767–812, 2005. 13

[38] E. Lindgren and P. Lindqvist. Fractional eigenvalues. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 49(1–2):795–826, 2014. 14, 71, 88

[39] Annalisa Massaccesi and Enrico Valdinoci. Is a nonlocal diffusion strategy convenient for biological populations in competition? *Journal of Mathematical Biology*, 74(1–2):113–147, 2017. 12

[40] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova. On the Bourgain, Brezis, and Mironescu theorem concerning limiting embeddings of fractional sobolev spaces. *Journal of Functional Analysis*, 195(2):230–238, 2002. 31, 32

[41] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1):1–77, 2000. 12

[42] Dumitru Motreanu, Viorica Venera Motreanu, and Nikolaos Papageorgiou. *Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems*. Springer, New York, 2014. 63, 74

[43] A. G. O'Farrell. Function spaces and potential theory (grundlehren der mathematischen wissenschaften 314) by david r. adams and lars inge hedberg: 366 pp., dm.148.–, isbn 3 540 57060 8 (springer, 1996). *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(5):622–639, 1997. 70

[44] A. C. Ponce. A new approach to sobolev spaces and connections to γ-convergence. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 19:229–255, 2004. 14, 30, 31, 82

[45] A. M. Reynolds and C. J. Rhodes. The Lévy flight paradigm: random search patterns and mechanisms. *Ecology*, 90(4):877–887, 2009. 12

[46] Wim Schoutens. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, New York, 2003. 12

[47] Jan Sokołowski and Jean-Paul Zolésio. *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. 15

[48] M. Troisi. Teoremi di inclusione per spazi di Sobolev non isotropi. *Ricerche Mat.*, 18:324, 1969. 13, 52

[49] M. Warma. The fractional relative capacity and the fractional Laplacian with neumann and robin boundary conditions on open sets. *Potential Analysis*, 42(2):499–547, 2015. 70, 87

[50] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. III: Variational methods and optimization*. Springer-Verlag, New York, 1985. Translated from the German by Leo F. Boron. 63

[51] Kun Zhou and Qiang Du. Mathematical and numerical analysis of linear peridynamic models with nonlocal boundary conditions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48(5):1759–1780, 2010. 28