UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Invariantes aditivos de variedades de caracteres

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Lucas Gabriel de Amorin

Director: Martin Mereb
Consejero de estudios: Guillermo Cortiñas
Lugar de trabajo: Instituto de Investigaciones Matemáticas Luis A. Santaló (IMAS)

Buenos Aires, 2025.

Invariantes aditivos de variedades de caracteres

Resumen

En esta tesis estudiamos invariantes aditivos de variedades de caracteres con la conjetura de T. Hausel y M. Thaddeus como guía.

Empezamos probando una versión de la misma para variedades de caracteres asociadas a grupos isógenos al grupo general lineal y monodromía semisimple y genérica. Más aún, calculamos explícitamente los E-polinomios stringy de dichas variedades. Para este fin, generalizamos una clásica fórmula de Frobenius a situaciones tipo Clifford.

Posteriormente, estudiamos el motivo, el invariante aditivo universal, de las variedades de caracteres. Proponemos una generalización de la conjetura de Hausel y Thaddeus y la probamos para las variedades de caracteres del resultado anterior en rango bajo. La demostración se basa en una generalización de la descomposición celular de A. Mellit para variedades de caracteres asociadas al grupo general lineal.

Finalmente, desarrollamos herramientas computacionales para calcular el motivo de cocientes finitos en algunos ejemplos interesantes, basándonos en la descomposición isotópica introducida por J. Vogel en su tesis de doctorado. Como principal aplicación, determinamos el motivo de variedades de representaciones asociadas a nudos tóricos y grupos generales lineales de rango bajo.

Palabras clave: Variedades de caracteres, E-polinomios, motivos, conjetura de Hausel y Thaddeus, simetría espejo.

Additive invariants of character varieties

Abstract

In this thesis we study additive invariants of character varieties with T. Hausel and M. Thaddeus' conjecture as guideline.

We start proving it for character varieties associated with isogenenous groups to the general linear group and generic semisimple punctures. Moreover, we give explicit formulas for their stringy E-polynomials. To this end, we generalize a classical Frobenius formula to Clifford type settings.

Then, we study the motive, the universal additive invariant, of character varieties. We propose a generalization of Hausel and Thaddeus' conjeture. And we prove it for the character varieties appearing on the previous result of low rank. The proof is based on a generalization of A. Mellit's cell decomposition for character varieties associated with the general lineal group.

Finally, we develop computational tools to compute the motive of finite quotients in some interesting examples, base on the isotopyc decomposition introduced by J. Vogel in his PhD thesis. As main aplication, we determine the motive of character varities associated with torus knots and low rank general lineal groups.

Keywords: Character varieties, E-polynomials, motives, Hausel and Thaddeus' conjecture, Mirror Symmetry.

Índice general

Introducción

0.1. Un poco de historia

Sea C una superficie de Riemann compacta y $p \in C$ un punto base. Un problema clásico es estudiar las representaciones de $\pi_1(C \setminus \{p\})$. Nuestra historia comienza en 1965 con un resultado de M. Narasiman y C. Seshadri [NS65]. Ellos probaron que la hay una equivalencia:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Representaciones unitarias e}\\ \text{irreducibles de } \pi_1(C \setminus \{p\}) \text{ de}\\ \text{dimensión } n \text{ y monodromía } \xi \operatorname{Id}_k\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{Fibrados vectoriales holomorfos}\\ \text{y estables sobre } C\\ \text{de rango } n \text{ y grado } d\end{array}\right\}$$

donde ξ es una raíz de la unidad de orden d. Para obtener todas las representaciones, no necesariamente unitarias, hay que agrandar el lado derecho.

El espacio cotangente al moduli de fibrados vectoriales holomorfos estables de rango n y grado d sobre C admite una descripción concisa. Consiste de pares (V, Θ) donde V es un fibrado vectorial como antes y Θ es un morfismo del haz $\mathcal{V}$ de secciones de V a $\mathcal{V} \otimes \Omega_C$. A dichos pares se los llama fibrados de Higgs, incluso si V no es estable. En la década de los 90, C. Simpson [Sim92] probó que hay una correspondencia:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Representaciones irreducibles}\\ \text{de } \pi_1(C \setminus \{p\}) \text{ de dimensión}\\ n \text{ y monodromía } \xi \operatorname{Id}_k\end{array}\right\} \rightleftarrows \left\{\begin{array}{c}\text{Fibrados de Higgs}\\ \text{estables sobre } C\\ \text{de rango } n \text{ y grado } d\end{array}\right\}$$

donde ξ es una raíz de la unidad de orden d.

Más generalmente, sea G un grupo algebraico reductivo. Un G-fibrado de Higgs es un par (V, Θ) como antes, pero con V un G-fibrado principal y $\Theta : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \otimes \Omega_C(\mathfrak{g})$. Por otro lado, una G-representación de $\pi_1(C)$ es un morfismo de grupos $\pi_1(C) \to G$. Existen espacios de moduli gruesos $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(G)$ y $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$ de ambos objetos módulo isomorfismos, llamados Betti y Dolbeaut respectivamente. La correspondencia no abeliana de Hodge [Sim94a; Sim94b] es un difeomorfismo

$$\mathcal{M}_{\mathrm{B}}(G) \simeq \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$$

entre estos espacios.

La geometría de $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$ es interesante en sí misma. Tomar el polinomio característico de Θ define un morfismo $\pi_G : \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G) \to \mathcal{A}_G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ llamado la fibración de Hitchin [Hit87b; Hit87a]. Se trata de un sistema Hamiltoniano completamente integrable. Recordemos que $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$ es un cotangente en un abierto denso. La forma simpléctica de este cotangente se extiende a todo $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$ dándole una estructura simpléctica. Además, π_G es propia. En consecuencia, el teorema de Liouville-Arnold nos asegura que las fibras de π_G son genéricamente variedades abelianas. Esta configuración cae bajo la descripción propuesta por A. Strominger, S. Yau y E. Zaslow [SYZ96] para la simetría espejo. La pareja espejo asociada a $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G)$ debería fibrar sobre $\mathcal{A}_G$ con fibras duales a las de π_G.

Sea $\check{G}$ el grupo dual a G en el sentido de Langlands. Las bases de Hitchin $\mathcal{A}_G$ y $\mathcal{A}_{\check{G}}$ se identifican gracias al teorema de restricción de Chevalley. Tenemos un diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(G) \arrow[dr] & & \mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(\check{G}) \arrow[dl] \\ & \mathcal{A}_G \simeq \mathcal{A}_{\check{G}} & \end{tikzcd}$$

Las fibras de π_G y $\pi_{\check{G}}$ son genéricamente variedades abelianas duales [HT03; DP12]. Por lo tanto, es razonable conjeturar que $\mathcal{M}_{\mathrm{Dol}}(\check{G})$ es la simetría espejo de $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(G)$. Para corroborar esto, T. Hausel y M. Thaddeus [HT01] propusieron un test topológico para SL_n y PGL_n.

Sea d un entero positivo. Un SL_n-fibrado de Higgs torcido es un GL_n-fibrado de Higgs $(\mathcal{E}, \Theta)$ con $\mathcal{E}$ de grado d y Θ de traza cero. Como antes, hay un espacio de moduli grueso $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)$ asociado. El producto tensorial por fibrados de línea de grado cero induce una acción de la variedad Jacobiana $\mathrm{Jac}^0(C)$ de C en $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)$. El espacio de moduli de PGL_n-fibrados de Higgs torcidos $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{PGL}_n)$ es el cociente $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)/\mathrm{Jac}^0(C)$. Si d y n son coprimos, $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)$ es suave y $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{PGL}_n)$ es un orbifold. La conjetura de Hausel y Thaddeus de simetría espejo topológica [HT01] propone que

$$h^{p,q}(\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)) = h^{p,q}_{st}(\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{PGL}_n), \mathcal{G})$$

donde $\mathcal{G}$ es un gerbe unitario natural en $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{PGL}_n)$ y $h^{p,q}_{st}$ son los números de Hodge stringy introducidos por V. Batyrev y D. Dais [BD96], que incorporan términos de corrección para tener en cuenta las singularidades. Esta conjetura fue probada recientemente por M. Groechenig, D. Wyss y P. Ziegler [GWZ20] y por D. Maulik y J. Sheng [MS21] de forma independiente. La primera demostración prueba también la igualdad para otros grupos reductivos y para otros gerbes. Más aún, la misma admite una generalización a nivel de motivos de Chow [LW21].

Hay una conjetura análoga para los espacios de moduli Betti. La versión parabólica de la teoría no abeliana de Hodge da difeomorfismos entre $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{SL}_n)$ ($\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(\mathrm{PGL}_n)$) y cierto espacio de moduli $\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(\mathrm{SL}_n)$ ($\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(\mathrm{PGL}_n)$) de representaciones de $\pi_1(C \setminus \{p\})$. En particular, los anillos de cohomología de estos espacios coinciden. Ahora bien, estos difeomorfismos no son holomorfos y tampoco preservan los números de Hodge. La versión Betti de la conjetura de Hausel y Thaddeus [HT01] propone que

$$h^{p,q}(\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(\mathrm{SL}_n)) = h^{p,q}_{st}(\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(\mathrm{PGL}_n), \mathcal{G})$$

como antes.

Ambas conjeturas están relacionadas a través de una tercera conjetura de M. de Cataldo, T. Hausel y L. Migliorini [CHM12]. Los números de Hodge se definen a través de dos filtraciones en el anillo de cohomología, llamadas F y W. Por otro lado, el morfismo propio π_G induce una filtración P en la cohomología de $\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(G)$. La conjetura $P = W$ propone que

$$P_k H^*(\mathcal{M}^d_{\mathrm{Dol}}(G)) = W_{2k} H^*(\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(G)) = W_{2k+1} H^*(\mathcal{M}^d_{\mathrm{B}}(G))$$

para cualquier k. Hay dos demostraciones recientes de ella para GL_n de T. Hausel, A. Mellit, A. Minets y O. Schiffmann [Hau+22] por un lado y D. Maulik y J. Shen [MS24] por el otro. En consecuencia, se sabe que vale para PGL_n [CMS22a], si $\mathrm{mcd}(d, n) = 1$, y para SL_n [CMS22b], si n es primo. Junto con el teorema 0.5 de [MS21], implican la conjetura de Hausel y Thaddeus versión Betti.

0.2. ¿Qué hacemos en esta tesis?

El primer objetivo en este trabajo fue probar una versión Betti de la conjetura de Hausel y Thaddeus para grupos isógenos a SL_n, monodromías genéricas y torciones discretas, que son un caso particular de gerbes. Además de lograr este objetivo, proporcionamos fórmulas explícitas para sus números de Hodge stringy.

Antes de enunciar nuestro primer resultado necesitamos algunas definiciones. Definimos la variedad de SL_n-caracteres parabólica como el cociente GIT

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n) = \{(x,y,z) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})^g \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})^g \times \mathcal{C} : [x,y]z = 1\} // \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$$

donde $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n$ es una clase de conjugación, g es un entero positivo y $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ actúa vía conjugación simultánea. En esta variedad actúa $Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))^{2g}$ por multiplicación a izquierda en (x,y). Para cada divisor d de n, hay un subgrupo central asociado $F_d \subset \mathrm{SL}_n$ de cardinal d. La variedad de SL_n / F_d-caracteres parabólica es el orbifold

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d) = \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)/F_d^{2g}$$

Finalmente, sea $E_{st}(X; u, v)$ la función generatriz de $h_{st}^{p,q}(X)$.

Teorema 0.2.1. *Sea n un número natural. Para cualquier divisor d de n, F_d-torsión discreta $\mathcal{D}$ de orden d/K, y calse de conjugación semisimple genérica $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$,*

$$E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d); u, v) = \sum_{\tau} \frac{\left((-1)^n (uv)^{\frac{n^2}{2}} \mathcal{H}_{\tau'}(uv)\right)^{2g-1}}{(uv-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{s|n} s^{2g} C_{s,\tau} \Phi_g(n,d,s,K)$$

donde τ recorre todos los tipos de multi-partición de tamaño n, Φ_g es una función aritmética, $\mathcal{H}_{\tau'}$ son polinomios asociados a τ, y $C_{s,\tau}$ son constantes combinatoricas determinadas por s y τ.

Los polinomios $\mathcal{H}_{\tau'}$ son los polinomios normalizados de Hook de [Mer15]. Las constantes $C_{s,\tau}$ las definimos y calculamos en la sección 3.4. La función Φ_g esta dada por

$$\Phi_g(n,d,s,K) = \prod_{p|n \text{ prime}} \frac{(p - p^{1-2g}) p^{\phi_g(p,n,d,s,K)} + p^{1-2g} - 1}{p-1}$$

donde

$$\phi_g(p,n,d,s,K) = \mathrm{mín}(v_p(s), v_p(n) - v_p(d), v_p(d), v_p(n) - v_p(s), v_p(K))$$

y v_p es la valuación p-ádica. En particular, las simetrías de Φ_g implican la versión Betti de la simetría espejo topológica.

Corolario 0.2.1. *Sea n un número natural, d un divisor de n y $\mathcal{C}$ una clase de conjugación semisimple genérica de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$. Entonces*

$$E_{st}^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d); u, v) = E_{st}^{\check{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_{\frac{n}{d}}); u, v)$$

para cualesquiera torsiones discretas $\hat{\mathcal{D}}$ y $\check{\mathcal{D}}$ con la misma clase en $F_{\mathrm{mcd}(d,\frac{n}{d})}$.

Esta igualdad se puede refinar. Los números de Hodge stringy se construyen a través de contribuciones de los llamados sectores torcidos $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}^d(\mathrm{SL}_n)^a / F_d^{2g}$ donde $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}^d(\mathrm{SL}_n)^a$ es el conjunto de puntos fijos de $a \in F_d^{2g}$. Por otro lado, si la F_d-torsión discreta es la restricción de una F_n, el gerbe inducido en $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}^d(\mathrm{SL}_n / F_d)$ tiene una estructura $F_{\frac{n}{d}}$-equivariante. Por lo tanto, tiene sentido mirar las componentes isotípicas en el anillo de cohomología con respecto a un carácter$\xi : F_{\frac{n}{d}} \to \mathbb{C}^\times$. Esto induce una contribución isotípica $E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d); u, v)_\xi$ de $E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d); u, v)$. Para una definición más precisa, ver la sección 1.3.1. Enunciamos a continuación la relación entre ambas contribuciones. Para fórmulas explícitas, consultar el teorema 3.2.1.

Teorema 0.2.2. *Sea n un número natural, d un divisor de n y $\mathcal{C}$ una clase de conjugación semisimple genérica de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$. Para cualesquiera F_n-torsión discreta $\mathcal{D}$, carácter ξ de $F_{\frac{n}{d}}$ y $a \in F_{\frac{n}{d}}^{2g}$,*

$$E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); u, v)_\xi = E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a/F_d^{2g}, \mathcal{L}_{\mathcal{D},a}; u, v)(uv)^{F(a)}$$

si $\mathrm{ord}(\xi) = \mathrm{ord}(a)$, donde $\mathcal{L}_{\mathcal{D},a}$ es el sistema local asociado con $\mathcal{D}\big|_{F_{\frac{n}{d}}^2}$ y $F(a)$ es la mitad de la codimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$.

Probamos los resultados anteriores en el capítulo 3. La estrategia es similar a la de [HR08] y [Mer15] donde se computan los E-polinomios de ciertas familias de variedades de caracteres. La mayor diferencia es la inclusión de las contribuciones stringy, solamente presentes en trabajos no publicados de Hausel y Rodriguez-Villegas. Este también es el caso para otras referencias en la literatura como [HLR11] y [BH17]. Resultados en teoría de Hodge p-ádica implican que el E-polinomio (stringy) de una variedad está determinado por la función de contar puntos (stringy) de un spread out, ver [HR08, Apéndice por N. Katz] y [GWZ20, Sección 2.5]. En nuestro caso, los resultados anteriores se reducen a calcular $|(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q}|$ para $q-1$ suficientemente divisible y $a, b \in F_d^{2g}$, donde $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))$ se obtiene cambiando $\mathbb{C}$ por $\overline{\mathbb{F}}_q$ en la definición de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)$. Este es el contenido del teorema 3.4.1. Su demostración se basa en reducir a un cálculo con caracteres. Acá es donde aparece una nueva dificultad. En [HR08] y [Mer15], se usa una clásica fórmula de Frobenius [Fro68] para calcular el número de soluciones a

$$[x_1, y_1] \dots [x_g, y_g] z = 1$$

donde x_i, y_i son variables en un grupo finito G. En nuestro caso, hay dos condiciones extra $\pi(x_i) = a_i$, $\pi(y_i) = b_i$ para cierto morfismo cociente dado $\pi : G \to K$ a un grupo abeliano. Llamemos $N(a, b)$ a este número y sea $H = \ker \pi$. Al igual que en la fórmula de Frobenius, se puede probar que

$$N(a, b) = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)} \left(\frac{|H|}{\theta(1)} \right)^{2g-1} \Omega_\theta(a, b)\theta(z)$$

donde $\mathrm{Irr}(H)$ es el conjunto de caracteres irreducibles de H,

$$\Omega_\theta(a, b) = \prod_{i=1}^{g} \Omega_\theta(a_i, b_i)$$

para tuplas $a, b \in K^g$, y

$$\Omega_\theta(a, b) = \frac{\theta(1)}{|H|^2} \sum_{x, y \in H} \theta([x x_a, y y_b])$$

para $a, b \in K$ y x_a, y_b fijos con $\pi(x_a) = a$ y $\pi(y_b) = b$. Cuando K es trivial o cíclico, las funciones Ω_θ son triviales. Pero no en nuestro caso. En el capítulo 2, probamos varias propiedades de ellas.

Teorema 0.2.3. *Sea G un grupo finito y $H \subset G$ un subgrupo normal tal que el cociente $K = G/H$ es abeliano. Sea θ un carácter irreducible de H. Si $a, b \in K^g$ son tuplas cuyas coordenadas generan K, $\Omega_\theta(a, b)$ se anula salvo que $\theta(kxk^{-1}) = \theta(x)$ para cualesquiera $x, k \in G$. En este último caso,*

1. *Ω_θ es bilineal y anti-simétrica,*
2. *$\Omega_\theta(x, x) = 1$ para cualquier $x \in G$,*
3. *$|\ker \Omega_\theta| = \frac{|K|}{e(\chi)^2}$ donde $e(\chi)$ es el índice de ramificación de cualquier carácter irreducible χ de G sobre θ, y,*

4. *si* $e(\chi) = 1$, $\xi \mapsto \Omega_{\xi\theta}(a,b)$ *es un carácter de* $\{\xi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times) : \xi\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K\}$ *para cualesquiera* $a, b \in K$.

Estas propiedades nos sirven para lidiar con Ω_θ en la configuración proveniente de nuestro problema original. Esto lo hacemos en la sección 2.2 luego de estudiar la teoría de Clifford de la misma. Clasificamos los caracteres invariantes en el teorema 2.2.1 y calculamos su ramificación en el teorema 2.2.2. La versión final de la fórmula para $N(a,b)$ la damos en el teorema 2.2.3.

Los resultados mencionados finalizan el primer objetivo de la tesis. Ahora bien, las demostraciones tienen poco contenido geométrico. Por lo tanto, el segundo objetivo de esta tesis fue buscar una demostración más geométrica de la versión Betti de la simetría espejo topológica.

Recordemos que del lado Dolbeaut la simetría espejo topológica admite una generalización motívica [LW21]. Además, las ideas de una demostración de D. Maulik, J. Shen y Q. Yin [MSY25] de P=W admiten generalizaciones motívicas [MSY24]. Por lo tanto, si confiamos en que P=W vale a nivel motívico, la conjetura de Hausel y Thaddes versión Betti debería tener una contraparte motívica.

El anillo de Grothendieck de variedades $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ se define como el grupo abeliano libre generado en clases de isomorfismo de variedades cocientado por las relaciones $[X] = [U] + [Z]$ siempre que $Z \subset X$ sea un cerrado y $U = X \setminus Z$. La estructura de anillo está dada por $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$. Llamamos motivo a la clase de una variedad X en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ y denotamos con q al motivo de la recta afín. Si un grupo abeliano finito Γ actúa en X, tenemos también una versión stringy del motivo:

$$[X]_{st} := \sum_\gamma \sum_Y [Y] q^{F(\gamma)}$$

donde γ recorre un conjunto de representantes de las clases de conjugación de Γ, Y recorre las componentes conexas de $[X^\gamma/\Gamma]$, y $F(\gamma)$ es el corrimiento fermionico asociado a γ. En nuestro caso, vale que $F(\gamma) = \frac{1}{2}\operatorname{codim} Y$.

Conjectura 0.2.1. *Sea G un grupo complejo, reductivo, conexo y simplemente conexo. Sean F un subgrupo finito del centro $Z(G)$ de G y ${}^L\tilde{G}$ el revestimiento universal del grupo dual a G en el sentido Langlands. Entonces*

$$[\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G/F)]_{st} = [\mathcal{M}_B^{\check{\mathcal{C}}}({}^L\tilde{G}/(Z(G)/F))]_{st}.$$

para cualesquiera clases de conjugación $\mathcal{C}$ y $\check{\mathcal{C}}$ genéricas.

Cabe destacar que hay un morfismo natural $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})[q^{\frac{1}{2}}] \to \mathbb{Z}[u^{\frac{1}{2}}, v^{\frac{1}{2}}]$ que envía al motivo stringy al E-polinomio stringy. Bajo este morfismo, la conjetura anterior para $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ y $F = Z(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ recupera la simetría espejo topológica para la torsión discreta trivial y clase de conjugación genérica.

Nuestra estrategia de ataque de la conjetura se basa en que ambos lados de la igualdad pueden ser descritos completamente en términos de teoría de raíces. Cuando G es $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, A. Mellit [Mel17] construyó una descomposición celular de (un fibrado vectorial sobre) $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$, y por lo tanto una descripción de $[\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))]$, completamente gobernada por el grupo simétrico. En el capítulo 4, generalizamos este resultado.

Teorema 0.2.4. *Sea G un grupo complejo, conexo y reductivo, $T \subset G$ un toro maximal, y $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_k) \in T^k$ una tupla genérica. Asumamos que C_k es regular. Entonces, para cualquier género g, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ admite un fibrado vectorial $Z(G)^{2g}$-equivariante de rango $r = \frac{1}{2}(\dim G - \operatorname{rk} G)$ que a su vez tiene una descomposición celular equivariante cuyas celdas son cocientes finitos de variedades de la forma $(\mathbb{C}^\times)^{d-2i} \times \mathbb{C}^{i+r}$ para algún i, donde d es la dimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$. Si G es de tipo A, no es necesario hacer cocientes.*

Las celdas y la descomposición están descritas en términos del grupo de Weyl y del sistema de raíces de G. La demostración del teorema sigue muy de cerca [Mel17]. La mayor diferencia se encuentra con la sección 6 de loc. cit., donde se introducen las superficies de Seifert para probar que ciertos estabilizadores son triviales. No conocemos un análogo para cualquier grupo G. En su lugar, realizamos una demostración puramente en términos del grupo de Weyl, evitando tener que usar estas superficies. Además, probamos que la descomposición celular proviene de una en $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ si $k = 1$.

El tercer objetivo de esta tesis surgió estudiando el problema anterior. ¿Cómo se puede calcular el motivo de un cociente finito? Una estrategia usual para calcular motivos es usar fibraciones localmente triviales. Ahora bien, al lidiar con cocientes es difícil de aplicar; usualmente una fibración localmente trivial no tiene por qué serlo de forma equivariante. Más precisamente, el problema que surge es el siguiente. Tomemos un grupo abeliano finito Γ y dos Γ-variedades X e Y. Asumamos que conocemos los motivos de X/Γ e Y/Γ. El objetivo es calcular el motivo de $(X\times Y)/\Gamma$. Ahora bien, la información anterior no es suficiente en general. A nivel cohomológico, $H^\cdot(X/\Gamma)$ y $H^\cdot(Y/\Gamma)$ son los subespacios de invariantes de $H^\cdot(X)$ y $H^\cdot(Y)$ bajo la acción inducida de Γ. Por otro lado, la fórmula de Künneth implica que

$$H^\cdot((X \times Y)/\Gamma) = \bigoplus_{\chi} H^\cdot(X)_\chi \otimes H^\cdot(Y)_{\chi^{-1}}$$

donde χ varía sobre todos los caracteres irreducibles de Γ y $H^\cdot(X)_\chi$ y $H^\cdot(Y)_\chi$ son las componentes isotípicas de $H^\cdot(X)$ y $H^\cdot(Y)$ asociados con χ. Por lo tanto, podemos determinar $H^\cdot((X \times Y)/\Gamma)$ a partir de las descomposiciones isotópicas de $H^\cdot(X)$ y $H^\cdot(Y)$. Ahora bien, a nivel de motivos no hay ningún candidato obvio para las piezas isotópicas $[X]_\chi$ y $[Y]_\chi$.

En su tesis doctoral [Vog24], J. Vogel propuso una definición. Su idea fue definir $[X]^\Gamma$ como una combinación lineal de productos de motivos y representaciones de Γ de forma tal que, para cualquier subgrupo H, $[X/H]$ puede ser recuperado sumando todos los motivos que están junto a representaciones donde H actúa trivialmente. No es cierto que en general valga la fórmula de Künneth

$$[X \times Y]^\Gamma = [X]^\Gamma \times [Y]^\Gamma$$

pero vale si X o Y son construidos a partir de acciones lineales en espacios afines. Por lo tanto, se puede calcular $[(X \times Y)/\Gamma]$ a partir de $[X]^\Gamma$ y $[Y]^\Gamma$ en dicho caso. La pregunta que surge es: ¿cómo calcular $[X]^\Gamma$? Estudiamos distintos ejemplos en el capítulo 5.

Dos aclaraciones son necesarias. Una es que $[X]^\Gamma$ tiene menos información que el motivo equivariante de X pero más que el motivo a secas. La segunda es que la definición de J. Vogel requiere una elección que no es natural ni canónica, excepto para grupos cíclicos donde ninguna elección es necesaria. Por esta razón solo trabajamos con grupos cíclicos. Igualmente, esperamos que resultados similares valgan para otras familias de grupos, como los grupos simétricos, donde una elección natural se puede hacer.

Como principal aplicación de los resultados del capítulo 5, calculamos el motivo de otra familia de variedades de caracteres, cambiando $\pi_1(C)$ por el grupo fundamental de nudos tóricos, i.e. grupos con dos generadores x, y y una única relación $x^n = y^m$ para ciertos enteros coprimos n, m. Es esperable que el problema de calcular el motivo de una variedad de caracteres sea más simple a medida que la presentación del grupo con el que uno empieza lo sea. En esta dirección se han estudiado los grupos libres [FS21; FL12; FNZ21; Law08; LM16] y los nudos tóricos [KM12; LMN13; MP16; GM22]. En este último caso, una estrategia muy prometedora fue desarrollada por A. González-Prieto y V. Muñoz [GM22] para SL_r-representaciones. La completaron hasta $r \leq 4$. En el capítulo 6, extendemos su método, combinándolo con los resultados del capítulo anterior, a GL_r-representaciones y hacemos los cómputos para $r \leq 4$.

Remarcamos dos cosas. Primero, los casos ya conocidos para GL_r son $r = 2$ [LMN13] y $r = 3$ [MP16]. Segundo, [GM22] está basado en una fibración que no logramos reproducir completamente su definición. Damos una definición alternativa para la cual sus cómputos funcionan sin ningún cambio.

Nuestros resultados son los siguientes. Dados enteros positivos coprimos n y m, denotemos con $\mathcal{R}^{irr}(G)$ y $\mathcal{M}^{irr}(G)$ a las variedades de representaciones y caracteres del grupo fundamental del (n, m) nudo tórico en G respectivamente.

Teorema 0.2.5. *Sean n, m, r enteros positivos con n y m coprimos. Si r es coprimo con n y m,*

$$[\mathcal{R}^{irr}(\mathrm{GL}_r)] = \frac{q-1}{r}[\mathcal{R}^{irr}(\mathrm{SL}_r)]$$

en $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ donde q es la clase de la recta afín.

Conjeturamos que el resultado previo vale a nivel de las variedades de caracteres. Más aún, lo probamos para $r \leq 3$ mostrando que $[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{GL})] = [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] \cdot [\mathcal{M}_r^{irr}(\mathrm{GL})]$. Esperamos que esta igualdad valga para r arbitrario. Por otro lado, cuando r no es coprimo con n y m, la relación no es tan simple. En este caso, la cuenta depende fuertemente de dichas herramientas. En el siguiente resultado, notemos que la clase de $\mathcal{M}^{irr}(\mathrm{SL}_4)$ es conocida [GM22, Teorema 1.1].

Teorema 0.2.6. *Sean n y m enteros positivos coprimos con m impar. Denotemos con q a la clase de la recta afín en $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$. Entonces*

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{R}^{irr}(\mathrm{GL}_4)]}{[\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})]} - \frac{q-1}{4}[\mathcal{M}^{irr}(\mathrm{SL}_4)] = \delta_{2|n}\Bigg(-\frac{(n-2)(m-1)}{16}(q-1)(q^5+2q^4-q^3+3q^2+2q-2)\\
&+\frac{n-2}{8}\binom{m-1}{2}(q-1)q(q^4-2q^2-2) - \frac{(n-2)(m-1)}{8}(q-1)q(3q^2+2)\\
&+\frac{n-2}{32}\binom{m-1}{3}(q-1)q^2(q^7+2q^6+4q^5+5q^4-6q^3-6q^2-6q-6)\\
&-\frac{1}{2}\binom{m-1}{2}(q-1)q(q^2+q+3) + \frac{1}{8}\binom{m-1}{3}q^4(q^2+q-5)\Bigg)\\
&+\delta_{4|n}\Bigg(\frac{1}{128}\binom{m-1}{3}(q-1)q^2(q^7+2q^6-3q^4+6q^3+6q^2+6q+6)\\
&+\frac{1}{16}\binom{m-1}{2}q(3q^7+3q^6+q^4+3q^3-4q^2+4q-4)\\
&+\frac{m-1}{32}(q^5-3q^4+4q^3+q^2-4q+2) + \frac{m-1}{16}(q-1)q(3q^2+2q^2+2)\Bigg)
\end{aligned}$$

en la localización de $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ por el conjunto multiplicativo generado por q y $q^i - 1$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

Esto concluye la descripción de los resultados en esta tesis. Los contenidos de los capítulos 2 y 3 forman el artículo [AM24], que se encuentra en proceso de peer review. Mientras que los capítulos 5 y 6 son [Amo25]. Los resultados del capítulo 4 formarán parte de un artículo que estamos terminando de redactar. Para finalizar, recomendamos al lector saltearse el capítulo 1 de preliminares y volver a él cuando considere necesario.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Inversión de Möbius

1.1.1. Caso clásico

Para una exposición detallada ver [Hal67]. La función de Möbius se define como

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados y tienen una cantidad par de divisores primos} \\ -1 & \text{si } n \text{ es libre de cuadrados y tienen una cantidad impar de divisores primos} \\ 0 & \text{si } n \text{ no es libre de cuadrados} \end{cases}$$

para cualquier entero positivo n.

Teorema 1.1.1 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ dos funciones. Entonces*

$$g(n) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

para cualquier n, si y solo si

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

para cualquier n.

En particular, con $g \equiv 1$ se tiene que

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0$$

salvo que $n = 1$, en cuyo caso es 1. Los siguientes dos lemas se usarán en el capítulo 5. Su notación está fijada de forma tal que coincida con la del teorema 5.3.1.

Lema 1.1.1. *Sean $e|f_1, \ldots, f_j$ enteros positivos. Entonces*

$$\sum_{e_1,\ldots,e_j} \prod_{l=1}^{j} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } f_i \neq f_j \text{ para algunos } i, j \\ \mu\left(\frac{f_1}{e}\right) & \text{si } f_i = f_j \text{ para cualesquiera } i, j \end{cases}$$

donde la suma es sobre todas las tuplas $e_1, \ldots, e_j$ tales que cada e_l divide a f_l y $\mathrm{mcd}(e_1, \ldots, e_j) = e$.

Demostración. Sea $f = \mathrm{mcd}(f_1, \ldots, f_j)$. Notemos que

$$\sum_{e'|e|f} \sum_{e_1,\ldots,e_l} \prod_{l=1}^{j} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right) = \sum_{e'|e_l|f_l} \prod_{l=1}^{j} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right) = \prod_{l=1}^{j} \left(\sum_{e'|e_l|f_l} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right) \right) = \prod_{l=1}^{j} \delta_{f_l,e'}$$

para cualquier $e'|f$. Por lo tanto,

$$\sum_{e_1,\dots,e_l} \prod_{l=1}^{j} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right) = \mu\left(\frac{f}{e}\right) \prod_{i,j} \delta_{f_l,f_i}$$

por inversión de Möbius. □

Lema 1.1.2. *Para cualesquiera enteros positivos $e|d', k$,*

$$\sum_{d} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } d' \not| k \\ \mu\left(\frac{d'}{e}\right) & \text{si } d'|k \end{cases}$$

donde d recorre todos los divisores de d' con $\operatorname{mcd}(d,k) = e$.

Demostración. Si e no divide a k, el resultado es claro. Por otro lado,

$$\sum_{e'|e|\operatorname{mcd}(d',k)} \sum_{d} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) = \sum_{e'|d|d'} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) = \delta_{e',d'}$$

para cualquier $e'|\operatorname{mcd}(d',k)$. Por lo tanto, el resultado se sigue de la fórmula de inversión de Möbius. Notemos que cuando $e' = \operatorname{mcd}(d',k)$, la condición $e = d'$ es equivalente a $d'|k$. □

1.1.2. Inversión de Möbius en posets

Dado un poset $\mathcal{P}$ finito, se define su función de Möbius de la siguiente forma. Sea $A \in M_{\mathcal{P}\times\mathcal{P}}\mathbb{Z}$ la matriz cuyas entradas son

$$A_{a,b} = \begin{cases} 1 & \text{si } b > a \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Esta matriz es nilpotente y, por lo tanto, la matriz

$$\mu := (\operatorname{Id} + A)^{-1} = \operatorname{Id} - A + A^2 - \dots$$

está bien definida. Los valores de la función de Möbius son las entradas de esta matriz $\mu : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{Z}$, $\mu(a,b) = \mu_{a,b}$.

Teorema 1.1.2 (Fórmula de inversión de Möbius)**.** *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito. Sean $f : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ dos funciones. Entonces*

$$g(a) = \sum_{a \le b} f(b)$$

para cualquier a, si y solo si

$$f(a) = \sum_{a \le b} \mu(a,b) g(b)$$

para cualquier a.

Corolario 1.1.1. *Sea $\mathcal{P}$ un poset finito con máximo m. Entonces*

$$\sum_{a \le b} \mu(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq m \\ 1 & \text{si } a = m \end{cases}$$

para todo $a \in \mathcal{P}$.

Demostración. Considerar f como la función indicadora de m. □

Ejemplo 1.1.1. Si $\mathcal{P}$ es el poset de los divisores de un natural n, donde $a \leq b$ si $b|a$, se tiene que

$$\mu(a,b) = \begin{cases} \mu\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y el teorema anterior recupera la fórmula de Möbius clásica.

Ejemplo 1.1.2. Si $\mathcal{P}$ es un poset finito y $\mathcal{P}^{op}$ es el poset con el orden inverso, $A_{\mathcal{P}^{op}} = A^t_{\mathcal{P}}$ y, por lo tanto, $\mu_{\mathcal{P}^{op}}(a,b) = \mu_{\mathcal{P}}(b,a)$ para cualesquiera $a, b \in \mathcal{P}$.

Ejemplo 1.1.3. Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son dos posets finitos, la función de Möbius del poset producto $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ cumple que

$$\mu_{\mathcal{P}\times\mathcal{Q}}((a,b),(a',b')) = \mu_{\mathcal{P}}(a,a')\mu_{\mathcal{Q}}(b,b')$$

para cualesquiera $a, b \in \mathcal{P}$ y $a', b' \in \mathcal{Q}$.

1.1.3. Un teorema de Rota

Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos posets. Una conexión de Galois entre ellos es un par de funciones $\pi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ y $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ que invierten el orden tales que

1. $\pi(\rho(p)) \geq p$ para todo $p \in \mathcal{P}$, y
2. $\rho(\pi(q)) \geq q$ para todo $q \in \mathcal{Q}$.

Teorema 1.1.3 (G. Rota [Rot64])**.** *Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos posets finitos con mínimos $0_{\mathcal{P}}$ y $0_{\mathcal{Q}}$ y máximos $1_{\mathcal{P}}$ y $1_{\mathcal{Q}}$. Sea (π, ρ) una conexión de Galois entre ellos tal que*

1. *$\pi(a) = 0$ si y solo si $a = 1$, y*
2. *$\rho(0) = 1$.*

Entonces

$$\mu_{\mathcal{Q}}(0,1) = \sum_{\rho(a)=0} \mu_{\mathcal{P}}(0,a).$$

Ejemplo 1.1.4. Sean G y H dos grupos finitos. Consideremos los posets $\mathcal{S}_H$, $\mathcal{S}_G$ y $\mathcal{P}$ de subgrupos de H, G y $H \times G$ ordenados por la inclusión. Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{S}_H^{op} \times \mathcal{S}_G^{op}$. Consideremos $\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ y $\pi : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ dados por

$$\pi(T_1, T_2) = T_1 \times T_2$$

y

$$\rho(T) = (p_1(T), p_2(T))$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones $H \times G \to H$ y $H \times G \to G$ respectivamente. El par (π, ρ) es una conexión de Galois entre $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. Más aún, las hipótesis del teorema de Rota se cumplen. Por lo tanto,

$$\sum_{\rho(T)=(H,G)} \mu_{\mathcal{P}}(\{1\}, T) = \mu_{\mathcal{Q}}((H,G), \{1\}) = \mu_{\mathcal{S}_H}(\{1\}, H)\mu_{\mathcal{S}_G}(\{1\}, G).$$

En el resto de esta sección probaremos la siguiente aplicación del teorema de Rota que usaremos en el capítulo 3.

Lema 1.1.3. *Sea $\mathcal{P}$ el poset de subgrupos de S_n ordenado por la inclusión. Se tiene que*

$$\sum_W \mu(\{1\}, W) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

donde W recorre todos los subgrupos de S_n que actúan transitivamente en $\{1, \ldots, n\}$.

Daremos una demostración autocontenida de este hecho. Procederemos por inducción en n. Para $n = 1$ es cierto. Supongamos que $n \geq 2$ y que el resultado vale para todo $m < n$. Consideremos el conjunto X de conjuntos $\mathcal{S}$ de subconjuntos disjuntos de $\{1, \dots, n\}$ tales que $\{1, \dots, n\} = \cup_{S \in \mathcal{S}} S$. Notar que para cualquier subgrupo $W \subset S_n$, sus órbitas definen un elemento $\mathcal{O}_W$ de X. Además, W actúa de forma transitiva si y solo si $|\mathcal{O}_W| = 1$. Luego,

$$\sum_W \mu(1, W) = -\sum_{k \geq 2} \sum_{|\mathcal{O}_W| = k} \mu(1, W)$$

Diremos que $\mathcal{S}' \leq \mathcal{S}$ si todo elemento de $\mathcal{S}'$ esta contenido en alguno de $\mathcal{S}$. Fijemos $\mathcal{S} \in X$. Llamemos $S_1, \dots, S_k$ a los elementos de $\mathcal{S}$. El grupo de permutaciones σ que preservan cada S_i es isomorfo a $S(\mathcal{S}) := S(S_1) \times \cdots \times S(S_k)$. Luego, hay una correspondencia biyectiva entre subgrupos $W \subset S_n$ con $\mathcal{O}_W \leq \mathcal{S}$ y subgrupos de $S(\mathcal{S})$. Notemos además que $\mathcal{O}_W = \mathcal{S}$ si y solo si $\pi_i(W)$ actúa transitivamente en S_i, donde $\pi_i : S(\mathcal{S}) \to S(S_i)$ es la proyección canónica. Luego, del ejemplo 1.1.4 se sigue que

$$\sum_{\mathcal{O}_W = \mathcal{S}} \mu(1, W) = \left(\sum_{W \subset S(S_1)} \mu(1, W) \right) \dots \left(\sum_{W \subset S(S_k)} \mu(1, W) \right)$$

donde cada suma de la derecha recorre los subgrupos de $S(S_i)$ que actúan transitivamente en S_i. Aplicando la hipótesis inductiva tenemos que

$$\sum_W \mu(1, W) = -\sum_{k \geq 2} \sum_{|\mathcal{S}| = k} \prod_{i=1}^{k} (-1)^{|S_i| - 1} (|S_i| - 1)!$$

Por otro lado, hay exactamente un $\mathcal{S} \in X$ con $|\mathcal{S}| = 1$, concretamente $\mathcal{S} = \{\{1, \dots, n\}\}$. De la ecuación anterior, se sigue que lo que queremos probar es equivalente a

$$\sum_k (-1)^k \sum_{|\mathcal{S}| = k} \prod_{i=1}^{k} (|S_i| - 1)! = 0.$$

Por otro lado, dada una permutación $\sigma \in S_n$, sus órbitas definen un elemento en $\mathcal{S}_\sigma \in X$. Notar que, dado $\mathcal{S}$, hay exactamente $\prod_{i=1}^{k} (|S_i| - 1)!$ permutaciones con $\mathcal{S}_\sigma = \mathcal{S}$. Luego, la ecuación anterior equivale a

$$\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\#\sigma} = 0$$

donde $\#\sigma$ es el número de órbitas de σ.

Probemos inductivamente que vale esta ecuación para $n \geq 2$. Para $n = 2$ vale. Supongamos que $n \geq 3$. Separemos la suma en dos partes. Las permutaciones que fijan n y las que no. En el primer caso encontramos

$$-\sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{\#\sigma}$$

que se anula por hipótesis inductiva. En el otro conjunto, llamémoslo G, tenemos una función $f : G \to S_{n-1}$ dada por borrar n en la expresión en ciclos de cada permutación. Notemos que $\#f(\sigma) = \#\sigma$. Pero además, la fibra de cualquier elemento de S_{n-1} tiene cardinal n. Luego,

$$\sum_{\sigma \in G} (-1)^{\#\sigma} = n \sum_{\sigma \in S_{n-1}} (-1)^{\#\sigma}$$

que también se anula por hipótesis inductiva.

1.2. Representaciones de grupos finitos

1.2.1. Teoría de caracteres

Sea G un grupo finito. Una representación de G sobre un cuerpo k es un morfismo de grupos $\rho : G \to \operatorname{GL} V$ donde V es algún espacio vectorial sobre k. En esta tesis siempre asumiremos que V es de dimensión finita y usualmente que $k = \mathbb{C}$. Solamente en los capítulos finales de esta tesis usaremos $k = \mathbb{Q}$. En esta sección resumiremos brevemente los resultados básicos que conforman el estudio de representaciones de G a través de sus caracteres, referimos al lector a [Ser78] para una exposición más detallada. Antes de adentrarnos en esto, enunciamos dos resultados útiles sobre las representaciones de G.

Teorema 1.2.1. *Toda representación (de dimensión finita) de un grupo finito es unitaria, es decir, admite un producto interno invariante.*

Teorema 1.2.2. *Toda representación (de dimensión finita) de un grupo finito es suma directa de representaciones simples. En particular, ser simple es lo mismo que ser irreducible.*

Un función de clase de G es una función $f : G \to \mathbb{C}$ invariante para la acción por conjugación de G, es decir, tal que $f(ghg^{-1}) = f(h)$ para cualesquiera $g, h \in G$. Denotamos con $\mathrm{Cl}(G)$ al conjunto de tales funciones. Definimos la convolución de dos funciones de clase f_1 y f_2 como

$$(f_1 \star f_2)(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$$

La suma de $\mathbb{C}$ y la convolución de funciones dan una estructura de $\mathbb{C}$-álgebra a $\mathrm{Cl}(G)$. Además, la operación

$$\langle f_1, f_2 \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}$$

es un producto interno en $\mathrm{Cl}(G)$.

Una forma de construir funciones de clase es a través de representaciones. Sea $\rho : G \to \operatorname{GL} V$ una representación de G (de dimensión finita). Entonces

$$\chi_V(g) := \operatorname{Tr}(\rho(g))$$

es una función de clase. Notar que $\chi_V(1) = \dim V$ y que $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$, al ser V unitaria. Llamamos carácter de V a χ_V. Recíprocamente, un carácter determina una representación.

Teorema 1.2.3. *Sean V y W dos representaciones de G. Entonces V es isomorfa a W si y solo si $\chi_V \simeq \chi_W$.*

Decimos que un carácter es irreducible si su representación asociada lo es. Denotaremos con $\operatorname{Irr}(G)$ al conjunto de caracteres irreducibles de G.

Teorema 1.2.4 (Relaciones de ortogonalidad de Schur)**.** *Sean $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ dos representaciones irreducibles de G. Entonces*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_1(g))_{ij} \overline{(\rho_2(g))_{kl}} = \begin{cases} \frac{1}{\dim V} & si\ V \simeq W, i = l, j = K \\ 0 & si\ no \end{cases}$$

para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$ y $1 \leq k, l \leq m$.

Teorema 1.2.5 (Schur)**.** *Los caracteres irreducibles forman una base ortonormal de $\mathrm{Cl}(G)$.*

Luego, se puede probar que, si $R(G)$ es el anillo de Grothendieck de la categoría de representaciones de G, la función $V \to \chi_V$ determina un isomorfismo $R(G) \simeq \mathrm{Cl}(G)$. En consecuencia, tenemos un producto interno en $R(G)$ dado por

$$\langle V_1, V_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \mathrm{Tr}(g|V_1)\,\mathrm{Tr}(g^{-1}|V_2)$$

para cualesquiera dos representaciones V_1, V_2 de G.

Veamos un ejemplo. Sea δ la función característica del neutro e. Notemos que δ es función de clase. Luego, debe ser

$$\delta = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \langle \delta, \chi\rangle \chi$$

dado que los caracteres irreducibles forman una base ortonormal. Ahora bien

$$\langle \delta, \chi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \delta(g)\overline{\chi(g)} = \frac{\chi(1)}{|G|}$$

para cualquier χ. En conclusión,

$$\delta = \frac{1}{|G|}\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \chi(1)\chi.$$

Finalizamos esta sección enunciado un resultado clásico de Frobenius. Dadas tuplas $x, y \in G^g$, escribimos $[x, y]$ para

$$[x_1, y_1]\cdots[x_g, y_g] = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}.$$

Teorema 1.2.6 (Frobenius)**.** *Sean G un grupo finito, g un entero positivo, y z un elemento de G. Entonces*

$$|\{(x, y) \in G^{2g} : [x, y]z = 1\}| = \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)} \left(\frac{|G|}{\chi(1)}\right)^{2g-1} \chi(z).$$

1.2.2. Teoría de Clifford

Recordemos algunos preliminares sobre teoría de Clifford. Una referencia es [KG75]. Sea

$$0 \to H \to G \xrightarrow{\pi} K \to 0$$

una sucesión exacta de grupos finitos con K abeliano. Llamamos a tal sequencia una configuración de Clifford. La teoría de Clifford relaciona la teoría de carácteres de G y H.

Hay dos acciones importantes. La primera es de K en $\mathrm{Irr}(H)$ y esta dada por $(a \cdot \theta)(x) = \theta(axa^{-1})$. Para definir la segunda, notemos que el morfismo cociente $\pi : G \to K$ induce una inclusión $\mathrm{Irr}(K) \subset \mathrm{Irr}(G)$. Esto determina una acción de $\mathrm{Irr}(K)$ en $\mathrm{Irr}(G)$ por multiplicación; $(\xi \cdot \chi)(x) = \xi(\pi(x))\chi(x)$. Denotemos con $[\chi]$ y Stab_χ a la órbita y al estabilizador de χ respectivamente.

Teorema 1.2.7 (Teorema 1 de [KG75])**.** *Sean $H \to G \xrightarrow{\pi} K$ una configuración de Clifford y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces existe un entero $e(\chi)$ tal que*

$$\chi\big|_H = e(\chi)\sum_{\theta'\in[\theta]} \theta'$$

donde θ es cualquier constituyente irreducible de $\chi\big|_H$. Este entero cumple que

$$e(\chi)^2 = \frac{|K|}{|[\chi]|\cdot|[\theta]|}$$

y, si K es cíclico, $e(\chi) = 1$. Finalmente, sea χ' otro carácter de G. Entonces $\chi'\big|_H = \chi\big|_H$ si y solo si $\chi' \in [\chi]$.

Notemos adicionalmente que $\theta(1) = \theta'(1)$ para cualquier $\theta' \in [\theta]$. Por lo tanto, $\chi(1) = e(\chi)\,|[\theta]|\,\theta(1)$.

Lema 1.2.1. *Sean $H \to G \xrightarrow{\pi} K$ una configuración de Clifford y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Sea $K' = \bigcap_{\xi \in \mathrm{Stab}_\chi} \ker \xi$ y $H' = \pi^{-1}(K')$. Entonces $e_{G/H}(\chi) = e_{G/H'}(\chi)$. En particular, si Stab_χ es cíclico, entonces $e(\chi) = 1$.*

Demostración. Notemos que $\mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_\chi)$ es isomorfo a K/K'. Luego $G/H' \simeq K/K' \simeq \mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_\chi)$. Es suficiente con probar que si θ y θ' son constituyentes irreducibles de $\chi\big|_{H'}$, entonces no existe ningún carácter no trivial $\xi \in \mathrm{Irr}(K')$ tal que $\xi\theta = \theta'$. En efecto, esto implicaría que $\theta\big|_H$ es irreducible y diferente de $\theta'\big|_H$, si $\theta \neq \theta'$. Por lo tanto, $e_{G/H}(\chi) = e_{G/H'}(\chi)$.

Asumamos que $\xi\theta = \theta'$. Entonces, para cualesquiera $k \in K$ y $g \in H'$, $\xi(kgk^{-1})(k \cdot \theta)(g) = (k \cdot \theta')(g)$. Ahora bien, K es abeliano y ξ puede ser extendido a $\hat{\xi} \in \mathrm{Irr}(K)$. Por lo tanto, $\xi(kgk^{-1}) = \xi(g)$. Se sigue que $\chi\big|_{H'} = \sum_k k \cdot \theta$ es fijado por ξ. Entonces $\hat{\xi}\chi\big|_{H'} = \xi\chi\big|_{H'} = \chi\big|_{H'}$. Debe existir $\epsilon \in \mathrm{Irr}(G/H')$ tal que $\hat{\xi}\chi = \epsilon\chi$. Pero, $\mathrm{Irr}(G/H') = \mathrm{Stab}_\chi$ fija χ. Por lo tanto, $\hat{\xi}\chi = \chi$. Esto implica que $\hat{\xi}$ es constantemente uno en K', es decir, ξ es trivial. □

Lema 1.2.2. *Sea $G \to K$ una configuración de Clifford y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tal que $e(\chi)^2 = |\,\mathrm{Stab}_\chi|$. Si Stab_χ tiene a lo sumo dos generadores, $\mathrm{Stab}_\chi \simeq \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z}$.*

Demostración. Si $e(\chi) = 1$, no hay nada que probar. Si no, Stab_χ no puede ser cíclico. Por hipótesis, podemos escribir $\mathrm{Stab}_\chi = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Notemos que como $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ son cíclicos, $e(\chi)|n, m$. Por lo tanto, $n = m = e(\chi)$. □

1.2.3. Representaciones de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$

Revisemos algunos aspectos de la clasificación de J. Green [Gre55] de los caracteres de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$. Para los preliminares en particiones, multi-partitiones, y sus asociados números y polinomios referimos al lector a [Mer15, Section 2.1]. Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las particiones.

Teorema 1.2.8 (J. Green)**.** *Los caracteres de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ que no se anulan en todos las matrices diagonalizables y regulares están en biyección con multi-particiones $\Lambda : \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times) \to \mathcal{P}$ tales que*

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)} |\Lambda(\xi)| = n.$$

Más aún, para tal multi-partición Λ, el valor de su carácter asociado en un matriz diagonal y regular $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ es

$$\left(\prod_{\xi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)} \chi^{\Lambda(\xi)}(1) \right) \left(\sum_{\substack{\{1,\ldots,n\} = \sqcup_\xi I_\xi \\ |I_\xi| = |\Lambda(\xi)|}} \prod_{\xi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)} \prod_{i \in I_\xi} \xi(\mu_i) \right)$$

donde $\chi^{\Lambda(\xi)}$ es el carácter del grupo simétrico $S_{|\Lambda(\xi)|}$ asociado a $\Lambda(\xi)$.

Demostración. Este enunciado es una aplicación directa de los teoremas 13, 14, 12, 7, el lema 5.1, y el ejemplo 1 al final de la página 423 de [Gre55]. □

El tipo $\tau : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ de una multi-partición Λ asocia a cada partición λ el cardinal m_λ de la fibra de Λ sobre ella. El término constante el la fórmula para el carácter en el teorema solo depende del tipo de la partición y es

$$d_\tau := \left(\prod_\xi \chi^{\Lambda(\xi)}(1) \right) = \prod_\xi \frac{|\Lambda(\xi)|!}{\prod h_{\Lambda(\xi)}(i,j)}$$

donde $h_{\Lambda(\xi)}(i,j)$ es la longitud gancho de la celda (i,j) en el diagrama de Ferres de $\Lambda(\xi)$.

La dimensión de la representación asociada también está determinada por el tipo. En [Mac79, page 286] es probado que

$$\tau(1) := \frac{\prod_{i=1}^{n}(q^i-1)}{q^{-n(v')}H_\tau(q)}$$

donde $H_\tau(q)$ es el polinomio gancho asociado a τ. Además, para cada tipo τ,

$$\frac{|\operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\tau(1)} = (-1)^n q^{\frac{n^2}{2}}\mathcal{H}_{\tau'}(q)$$

donde τ' es el tipo dual a τ y $\mathcal{H}_{\tau'}$ es el polinomio gancho normalizado [Mer15, Definition 2.1.13].

En la configuración de Clifford $\operatorname{SL}_n(\mathbb{F}_q) \to \operatorname{GL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^\times$, la acción de $\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$ admite una buena descripción en el lenguaje de multi-particiones. En [KG75, propocisión al final de la página 133], se prueba que la misma está dada por

$$(\alpha \cdot \Lambda)(\xi) = \Lambda(\alpha^{-1}\xi)$$

para $\alpha, \xi \in \operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$ y $\Lambda : \operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times) \to \mathcal{P}$. En particular, notemos que el cardinal de $\operatorname{Stab}_\Lambda$ siempre divide a n.

1.2.4. Inducción y restricción

Para un subgrupo $H \subset G$, existen dos operaciones $\operatorname{Res}_H^G : R(G) \to R(H)$ y $\operatorname{Ind}_H^G : R_\mathbb{Q}(H) \to R_\mathbb{Q}(G)$ llamadas restricción e inducción de representaciones. La primera está dada por pensar una representación $G \to \operatorname{GL} V$ de G cómo una de H vía componer con $H \to G$. Por otro lado, si V es una representación de H, es un módulo sobre el álgebra de funciones $\mathbb{C}[H]$. Además, $\mathbb{C}[G]$ es un bimódulo sobre $\mathbb{C}[H]$ vía multiplicar a izquierda y derecha. Luego, podemos definir

$$\operatorname{Ind}_H^G(V) := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$$

que es un módulo sobre $\mathbb{C}[G]$ y, por lo tanto, una representación de G. Algunas propiedades básicas:

Teorema 1.2.9. *Sean $H \subset G' \subset G$ grupos finitos. Entonces*

1. $\operatorname{Res}_H^G(\operatorname{Ind}_H^G(V)) = \frac{|G|}{|H|}V$ *si G es abeliano,*
2. $\operatorname{Res}_H^{G'}(\operatorname{Res}_{G'}^G(V)) = \operatorname{Res}_H^G(V)$, *and*
3. $\operatorname{Ind}_{G'}^G(\operatorname{Ind}_H^{G'}(V)) = \operatorname{Ind}_H^G(V)$

para cualquier representación V.

Teorema 1.2.10. *Sean $H_1, H_2 \subset G$ grupos finitos. Entonces*

1. $\operatorname{Ind}_{H_1}^G(V_1)V = \operatorname{Ind}_{H_1}^G(V_1 \operatorname{Res}_{H_1}^G(V))$,
2. $\operatorname{Ind}_{H_1}^G(V_1)\operatorname{Ind}_{H_2}^G(V_2) = \frac{|G|}{|H_1H_2|}\operatorname{Ind}_{H_1\cap H_2}^G(\operatorname{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(V_1)\operatorname{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_2}(V_2))$, *and*
3. $\operatorname{Res}_{H_1}^G(\operatorname{Ind}_{H_2}^G(V_2)) = \frac{|G||H_1\cap H_2|}{|H_2||H_1|}\operatorname{Ind}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(\operatorname{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_2}(V))$ *si G es abeliano*

para cualesquiera representaciones V_1, V_2 y V de H_1, H_2 y G respectivamente.

Se pueden definir la restricción e inducción a nivel de caracteres. si χ es un carácter de G, la restricción a H es simplemente la restricción como función. Por otro lado, para la inducción tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.11. *(Fórmula de Frobenius para la inducción) Sean $H \subset G$ grupos finitos y V una representación de G con carácter χ. Entonces el carácter $\mathrm{Ind}_H^G(\chi)$ de $\mathrm{Ind}_H^G(V)$ esta dado por*

$$\mathrm{Ind}_H^G(\chi)(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{g'} \chi(g'gg'^{-1})$$

donde la suma es sobre todos los $g' \in G$ tales que $g'gg'^{-1} \in H$.

Finalmente, enunciamos la reciprocidad de Frobenius.

Teorema 1.2.12. *(Reciprocidad de Frobenius) Sean $H \subset G$ grupos finitos. Entonces*

$$\langle V_1, \mathrm{Ind}_H^G(V_2)\rangle_G = \langle \mathrm{Res}_H^G(V_1), V_2\rangle_H$$

para cualesquiera $V_1 \in R(G)$ y $V_2 \in R(H)$.

1.2.5. Representaciones racionales

Referimos al lector a [Ser78] para una exposición detallada; aquí solo resumiremos lo que utilizaremos en los capítulos finales de esta tesis. Para un grupo finito Γ, denotemos con $R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ al anillo de Grothendieck de su categoría de representaciones de dimensión finita definidas sobre $\mathbb{Q}$. Remarcamos que la restricción e inducción de representaciones que discutimos en la sección anterior definen $\mathrm{Ind}_H^\Gamma : R_{\mathbb{Q}}(H) \to R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ y $\mathrm{Res}_H^\Gamma : R_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \to R_{\mathbb{Q}}(H)$.

En el resto de esta sección supondremos que Γ es cíclico. Para cada divisor d de $|\Gamma|$, denotaremos con $\mathbb{Q}^d$ a la acción por permutación de coordenadas inducida por el único cociente de Γ de cardinal d. A veces, notaremos con T_Γ a la representación trivial $\mathbb{Q}^1$.

Lema 1.2.3. *Sea Γ un grupo cíclico finito. Entonces $R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ tiene como $\mathbb{Z}$-base a $\{\mathbb{Q}^d\}_d$, donde d recorre todos los divisores positivos de Γ.*

Demostración. Todas las representaciones definadas sobre $\mathbb{Q}$ e irreducibles (sobre $\mathbb{Q}$) de Γ son de la forma $\mathbb{Q}[x]/\Phi_d(x)$ donde $d||\Gamma|$ y $\Phi_d(x)$ es el polinomio ciclotomico asociado a d. Luego, es suficiente con notar que la representación $\mathbb{Q}[x]/\Phi_d(x)$ aparece con multiplicidad uno en $\mathbb{Q}^d$ y que todas las otras representaciones simples de $\mathbb{Q}^d$ son de la forma $\mathbb{Q}[x]/\Phi_{d'}(x)$ para algunos $d' < d$. □

Lema 1.2.4. *Para cualesquiera $d, d'|n$,*

$$\mathbb{Q}^d \cdot \mathbb{Q}^{d'} = \mathrm{mcd}(d, d')\mathbb{Q}^{\mathrm{lcm}(d,d')}$$

en $R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$.

Demostración. En efecto, los elementos de la base $\{e_i \otimes e_j\}$ de $\mathbb{Q}^d \otimes \mathbb{Q}^{d'}$ son permutados con órbitas de cardinal $\mathrm{lcm}(d, d')$. □

Lema 1.2.5. *Sea Γ un grupo cíclico finito. Existe un algoritmo de división en $\mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$; si $f = gh$, existe un algoritmo que determina h en función de f y g.*

Demostración. Usamos la base $\{\mathbb{Q}^d\}$. Escribamos $h = \sum h_d \otimes \mathbb{Q}^d$, $f = \sum f_d \otimes \mathbb{Q}^d$, y $g = \sum g_d \otimes \mathbb{Q}^d$. Notemos que cuando calculamos f_d vía el producto gh, solo necesitamos los valores $g_{d'}$ y $h_{d'}$ para $d'|d$. Más precisamente,

$$f_d \otimes \mathbb{Q}^d = \sum_{d_1,d_2} \mathrm{mcd}(d_1, d_2) g_{d_1} h_{d_2} \otimes \mathbb{Q}^d$$

donde d_1 y d_2 recorren todos los divisores de d tales que $\operatorname{lcm}(d_1, d_2) = d$. Por lo tanto,

$$h_d \left(\sum_{d_1|d} d_1 g_{d_1} \right) = f_d - \sum_{d_2<d} \sum_{d_1} \operatorname{mcd}(d_1, d_2) g_{d_1} h_{d_2}$$

donde en el lado izquierdo d_1 recorre todos los divisores de d tales que $\operatorname{lcm} = (d_1, d_2)d$. El resultado se sigue. □

1.3. Invariantes aditivos

1.3.1. E-polinomios

En esta sección, resumiremos lo que necesitaremos sobre los E-polinomios y su relación con contar puntos sobre cuerpos finitos. Para una exposición detallada, consultar [HR08, Apéndice por N. Katz] y [GWZ20, Sección 2]. Comenzamos con las definisiones de los E-polinomios y de sus variantes.

Sea X una variedad compleja algebraica. En [Del71] y [Del74], Deligne definió una estructura mixta de Hodge (MHS por sus siglas en inglés) en la cohomología de soporte compacto $H_c^*(X, \mathbb{C})$. Es decir, existen dos filtraciones

$$W_{-1} = 0 \subset W_0 \subset \cdots \subset W_{2j} = H^{2j}(X, \mathbb{C})$$

y

$$F_0 = H^{2j}(X, \mathbb{C}) \supset F_1 \supset \cdots \supset F_m \supset F_{m+1} = 0$$

tales que en cada pieza graduada de W la filtración inducida por F es una estructura de Hodge; cada pieza es la suma directa de cada elemento en la filtración y de su conjugado complejo. Utilizando esta estructura se definen los números virtuales de Hodge con soporte compacto como

$$h_c^{p,q}(X) := \sum_k (-1)^k \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{gr}_p^F \operatorname{gr}_{p+q}^W H_c^k(X, \mathbb{C}))$$

y el E-polinomio

$$E(X; u, v) := \sum_{p,q} h_c^{p,q}(X) u^p v^q$$

Hay varias generalizaciones. Primero, se puede reemplazar $\mathbb{C}$ por cualquier sistema local $\mathcal{L}$ de rango uno para obtener las versiones torcidas $E(X, \mathcal{L}; u, v)$. Asumamos además que hay un grupo finito Γ actuando en X y una estructura equivariante en $\mathcal{L}$. Dado que la MHS de Deligne es funtorial, hay una MHS inducida en $H_c^*(X, \mathcal{L})^\Gamma$ y en cada componente isotípica. Luego, definimos

$$E(X/\Gamma, \mathcal{L}; u, v) := \sum_{p,q,k} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{gr}_p^F \operatorname{gr}_{p+q}^W H_c^k(X, \mathcal{L})^\Gamma) u^p v^q$$

y

$$E(X/\Gamma, \mathcal{L}; u, v)_\xi := \sum_{p,q,k} (-1)^k \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{gr}_p^F \operatorname{gr}_{p+q}^W H_c^k(X, \mathcal{L})_\xi) u^p v^q$$

donde $H_c^{p,q}(X, \mathcal{L})_\xi$ es la componente isotípica respecto a un carácter $\xi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$. Remarquemos que $E(X/\Gamma, \mathcal{L}; u, v)_\xi = E(X/\Gamma, \mathcal{L}_\xi; u, v)$ donde $\mathcal{L}_\xi := \mathcal{L} \otimes \mathbb{C}_\xi$ y $\mathbb{C}_\xi$ es el sistema local de rango uno trivial con estructura equivariante dada por ξ.

Consideremos ahora un orbifold $\mathcal{X} = [X/\Gamma]$. La cohomología de orbifolds fue introducida por [VW95], [CR00], y [Rua03], entre otros. La principal novedad es considerar las contribuciones stringy. Esta idea conlleva a la definición del E-polinomio stringy de un orbifold. Revisemos su construcción.

El stack de inercia o de cuerdas fastamales $I\mathcal{X}$ consiste de lazos en $\mathcal{X}$ que son trivial en el espacio cociete X/Γ, ver [LU02]. Más concretamente, consiste de pares $(x,[\gamma])$ donde $[\gamma]$ es la clase de conjugación de algún $\gamma \in \Gamma$ y $x \in X$ es invariante bajo la acción de γ. Como stack,

$$I\mathcal{X} \simeq \bigsqcup_{[\gamma]\in[\Gamma]} [X^\gamma/C(\gamma)]$$

donde $[\Gamma]$ es el conjuto de clases de conjugación de Γ, X^γ es el conjunto de puntos fijos de γ y $C(\gamma)$ es el centralizador de γ. La cohomología de orbifold de $\mathcal{X}$ es la cohomología de $I\mathcal{X}$ módulo shifs, llamados shift fermiónicos. Los mismos son las funciones localmente constantes en $X^\gamma/C(\gamma)$ dadas por

$$F(\gamma) = \sum w_j$$

donde γ actúa en $TX\big|_{X^\gamma}$ con autovalores $e^{2\pi i w_j}$, $w_j \in [0,1)$. Definimos el E-polinomio stringy como

$$E_{st}(\mathcal{X};u,v) = \sum_{[\gamma]\in[\Gamma]} \sum_{\mathcal{Y}} E(\mathcal{Y};u,v)(uv)^{F(\gamma)\big|_{\mathcal{Y}}}$$

donde $\mathcal{Y}$ recorre las componentes conexas de $X^\gamma/C(\gamma)$. Remarcamos que esta definición no depende de la presentación $\mathcal{X} = [X/\Gamma]$. Más aún, bajo ciertas hipótesis, $E_{st}(\mathcal{X};u,v)$ es el E-polinomio de una resolución crepante de X/Γ, consultar [BD96].

También hay versiones torcidas. Hay una asignación natural (see [GWZ20, Section 2.2]) que a cada gerbe $\mathcal{G} \in H^2_{et}(\mathcal{X},\mathbb{C}^\times)$ le asocia una familia de sistemas locales $\mathcal{L}_\mathcal{G} \in H^1_{et}(I\mathcal{X},\mathbb{C}^\times)$. Definimos

$$E^{\mathcal{G}}_{st}(\mathcal{X};u,v) = \sum_{[\gamma]\in[\Gamma]} \sum_{\mathcal{Y}} E(\mathcal{Y},\mathcal{L}_\mathcal{G}\big|_{\mathcal{Y}};u,v)(uv)^{F(\gamma)\big|_{\mathcal{Y}}}$$

para cada gerbe. Un caso particular son las llamadas torciones discretas $\mathcal{D} \in H^2(\Gamma,U(1))$, ver [Rua03]. Las mismas inducen gerbes en $\mathcal{X}$ via los morfismo naturales $H^2(\Gamma,U(1)) \to H^2(\mathcal{X},U(1)) \to H^2(\mathcal{X},\mathbb{C}^\times)$ y, por lo tanto, podemos definir $E^{\mathcal{D}}_{st}(\mathcal{X};u,v)$.

Finalmente, asumamos que Γ es un subgrupo de un grupo abeliano $\hat{\Gamma}$ y que la estructura Γ-equivariante del gerbe $\mathcal{G}$ se extiende a una $\hat{\Gamma}$-equivariante. Esto induce una estructura $\hat{\Gamma}/\Gamma$-equivariante en $\mathcal{L}_\mathcal{G}$. Por lo tanto, tenemos, para cada carácter $\xi : \hat{\Gamma}/\Gamma \to \mathbb{C}^\times$, las contribuciones isotípicas

$$E^{\mathcal{G}}_{st}(\mathcal{X};u,v)_\xi = \sum_{\gamma\in\Gamma} E(X^\gamma/\Gamma,\mathcal{L}_{\mathcal{G},\gamma};u,v)_\xi (uv)^{F(\gamma)}$$

donde $\mathcal{L}_{\mathcal{G},\gamma} = \mathcal{L}_\mathcal{G}\big|_{X^\gamma/\Gamma}$, siempre que los shifts fermiónicos sean constantes. En particular, para cada torsión discreta $\mathcal{D} \in H^2(\hat{\Gamma},U(1))$ obtenemos $E^{\mathcal{D}}_{st}(\mathcal{X};u,v)_\xi$. Notemos que $E^{\mathcal{G}}_{st}(\mathcal{X};u,v)_\xi = E^{\mathcal{G}_\xi}_{st}([X/\hat{\Gamma}];u,v)$ donde $\mathcal{G}_\xi$ es $\mathcal{G}$ con estructura equivariante torcida por ξ.

Discutamos ahora los teoremas de Katz y Groechenig–Wyss–Ziegler. Por simplicidad, solo daremos el enunciado en el caso que vamos a usar. Sea X una variedad sobre un cuerpo finito $\mathbb{F}_q$ equipado con la acción de un grupo finito Γ. Definamos

$$\#^\xi_\Gamma X = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma\in\Gamma} |X^{\gamma \operatorname{Frob}_q}| \xi(\gamma)$$

para cualquier carácter $\xi : \Gamma \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell \simeq \mathbb{C}^\times$. Remarcamos que

$$\#^\xi_\Gamma X = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{Tr}(\operatorname{Frob}_q, H^i_c(X,(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_\xi)^\Gamma)$$

por la fórmula de traza de Grothedieck–Lefschetz.

Un spread out de una Γ-variedad X sobre $\mathbb{C}$ es un Γ-esquema $\mathcal{X}/R$ sobre una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada $R \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{X} \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} \mathbb{C} = X$. Dado un carácter $\xi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$, decimos que $\mathcal{X}$ tiene conteo polinomial ξ-torcido si existe un polinomio $P \in \mathbb{Q}[q]$ tal que

$$\#_\Gamma^\xi \mathcal{X}_\phi = P(q)$$

para cualquier morfismo $\phi : R \to \mathbb{F}_q$ a un cuerpo finito.

Teorema 1.3.1 (Katz, Groechenig–Wyss–Ziegler)**.** *Sea X una variedad sobre $\mathbb{C}$ y $\mathcal{L}$ un sistema local (en la topología étale) de rango uno en X. Asumamos que la monodromía de $\mathcal{L}$ se factoriza a través de un grupo finito Γ induciendo un carácter $\xi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$. Sea Y el revestimiento étale de X asociado. Fijemos un isomorfismo abstracto $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Si existe un spread out $\mathcal{Y}/R$ de Y con conteo polinomial ξ-torcido y polinomio de conteo P, entonces*

$$E(X, \mathcal{L}; u, v) = P(uv).$$

Demostración. Notemos que $E(X, \mathcal{L}; u, v) = E(Y/\Gamma; u, v)$. Por lo tanto, esto se sigue de [GWZ20, Teorema 2.15] por el argumento de (2) implica (3) en [HR08, Teorema 6.12]. □

En el caso de una torsión discreta $\mathcal{D} \in H^2(\Gamma, U(1))$ en un orbifold $\mathcal{X} = [X/\Gamma]$, los sistemas locales $\mathcal{L}_{\mathcal{D},\gamma}$ asociados con $\mathcal{D}$ en $X^\gamma/C(\gamma)$ se trivializan en X^γ, consultar [Rua03, final de la sección 3]. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema anterior siempre que logremos contar los puntos torcidos de X^γ para cada γ.

1.3.2. Anillo de Grothendieck

Decimos que una asignación $X \in \mathrm{Var} \mapsto I(X)$ es un invariante aditivo si es invariante bajo isomorfismos y, si $U \subset X$ es un abierto, $I(X) = I(U) + I(X \setminus U)$. Por ejemplo, la característica de Euler y el E-polinomio son invariantes aditivos.

Existe un invariante aditivo universal. Definimos el anillo de Grothendieck de las variedades, $K_0(\mathrm{Var})$, como el grupo abeliano con generadores las clases de isomorfismo de variedades y relaciones $[X] = [U] + [X \setminus U]$ si $U \subset X$ es un abierto. El producto esta dado por $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$. Llamamos motivo a la clase de una variedad en $K_0(\mathrm{Var})$ y denotamos q al motivo de la recta afín. Notamos que todo invariante aditivo se factoriza por $K_0(\mathrm{Var})$.

Algunos ejemplos son:

1. $[\mathbb{A}^n] = q^n$;
2. Si T es un toro afín de rango n, $[T] = (q-1)^n$;
3. $[\mathrm{GL}_n] = (q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$; y
4. $[\mathrm{PGL}_n] = (q^{n-1} + \ldots + 1)(q^n - 1) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

Una variación común es $\hat{K}_0(\mathrm{Var})$ definida como la localización de $K_0(\mathrm{Var})$ en q y $q^i - 1$, $i \geq 1$. Equivalentemente [Eke25], $\hat{K}_0(\mathrm{Var})$ se obtiene reemplazando las variedades por los stacks en la definición anterior y agregando la relación que para todo fibrado vectorial $E \to X$ de rango n se tiene $[E] = [X \times \mathbb{A}^n]$ (esta relación es inmediata en variedades). El E-polinomio se factoriza por esta variante.

Otra versión útil es también cambiar variedades por esquemas sobre un anillo R. La utilidad de esto es que podemos recuperar contar puntos sobre cuerpos finitos. Específicamente, si $\varphi : R \to S$ es un morfismo de anillos, tenemos un morfismo $\varphi^* : K_0(\mathrm{Sch}_R) \to K_0(\mathrm{Sch}_S)$ dado por $[X] \mapsto [X \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} S]$. Por otro lado, tenemos un morfismo $\int : K_0(\mathrm{Sch}_{\mathbb{F}_q}) \to \mathbb{Z}$ dado por $[X] \mapsto [X(\mathbb{F}_q)]$. Si R es una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada y $\varphi : R \to \mathbb{F}_q$ es un morfismo a un cuerpo finito, $\int \varphi^*$ es contar puntos.

Tenemos también una versión equivariante. Sea Γ un grupo finito. Una Γ-variedad es una variedad X junto con una acción de Γ tal que todo punto tiene un entorno afín equivariante. El anillo de Grothendieck de las Γ-variedades, $K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$, es el grupo abeliano libre con generadores las clases de isomorfismo de Γ-variedades y relaciones $[X] = [Z] + [X \setminus Z]$ para cualesquiera Γ-variedad X y cerrado invariante $Z \subset X$. La multiplicación es $[X][Y] = [X \times Y]$ donde Γ actúa diagonalmente en $X \times Y$. Si $H \subset \Gamma$ es un subgrupo, denotamos con $\mathrm{Res}_H^\Gamma : \Gamma - \mathrm{Var}_\mathbb{C} \to H - \mathrm{Var}_\mathbb{C}$ y $\mathrm{Ind}_H^\Gamma : H - \mathrm{Var}_\mathbb{C} \to \Gamma - \mathrm{Var}_\mathbb{C}$ a la inducción y restricción de acciones. La inducción se define como

$$\mathrm{Ind}_H^\Gamma(X) = (\Gamma \times X)/H$$

donde H actúa por $h \cdot (\gamma, x) = (\gamma h^{-1}, h \cdot x)$ y Γ actúa por $\gamma \cdot (\gamma', x) = (\gamma\gamma', x)$. Estos funtores inducen $\mathrm{Res}_H^\Gamma : K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \to K_0^H(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ y $\mathrm{Ind}_H^\Gamma : K_0^H(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \to K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$. Probemos los análogos de los Teoremas 1.2.9 y 1.2.10 en este contexto.

Lema 1.3.1. *Sean $H \subset \Gamma' \subset \Gamma$ grupos finitos, X una H-variedad, e Y una Γ-variedad. Entonces*

1. $[\mathrm{Res}_H^\Gamma(\mathrm{Ind}_H^\Gamma([H]))] = \frac{|\Gamma|}{|H|}[X]$ *en* $K_0^H(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ *si* Γ *es abeliano,*

2. $\mathrm{Res}_H^{\Gamma'}(\mathrm{Res}_{\Gamma'}^\Gamma(Y)) = \mathrm{Res}_H^\Gamma(Y)$,

3. $\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma(\mathrm{Ind}_H^{\Gamma'}(X)) \simeq \mathrm{Ind}_H^\Gamma(X)$ *como* Γ*-variedades, y*

4. $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(X) \times Y \simeq \mathrm{Ind}_H^\Gamma(X \times \mathrm{Res}_H^\Gamma(Y))$ *como* Γ*-variedades.*

Demostración. Para el primer ítem notamos que $\mathrm{Ind}_H^\Gamma(X) \simeq X \times \Gamma/H$ como H-variedades. El segundo es claro. Para los últimos dos, los isomorfismos son $(\gamma, (\gamma', x)) \mapsto (\gamma\gamma', x)$ y $((\gamma, x), y) \mapsto (\gamma, (x, \gamma^{-1}y))$. □

Lema 1.3.2. *Sean $H_1, H_2 \subset \Gamma$ grupos abelianos finitos, X una H_1-variedad e Y una H_2-variedad. Entonces*

$$[\mathrm{Ind}_{H_1}^\Gamma(X)][\mathrm{Ind}_{H_2}^\Gamma(Y)] = \frac{|\Gamma|}{|H_1 H_2|}[\mathrm{Ind}_{H_1\cap H_2}^\Gamma(\mathrm{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(X)\,\mathrm{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_2}(Y))]$$

en $K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$. En particular, $[\mathrm{Ind}_{H_1}^\Gamma(X)][\mathrm{Ind}_{H_1}^\Gamma(Y)] = \frac{|\Gamma|}{|H_1|}[\mathrm{Ind}_{H_1}^\Gamma(X \times Y)]$ para cualesquiera dos H_1-variedades X e Y.

Demostración. Notemos $\mathrm{Ind}_{H_1}^\Gamma(X) \times \mathrm{Ind}_{H_2}^\Gamma(Y)$ que tiene una descomposición celular indexada por $\Gamma/H_1 \times \Gamma/H_2$ donde cada celda es $H_1 \cap H_2$-equivariantemente isomorfa a $X \times Y$. De la sucesión exacta

$$\Gamma/(H_1 \cap H_2) \to \Gamma/H_1 \times \Gamma/H_2 \to \Gamma/H_1 H_2$$

vemos que hay $|\Gamma/H_1H_2|$ órbitas en los índices, cada una isomorfa a $\Gamma/(H_1 \cap H_2)$. □

Lema 1.3.3. *Sean $H_1, H_2 \subset \Gamma$ grupos abelianos finitos y X una H_2-variedad. Entonces*

$$[\mathrm{Res}_{H_1}^\Gamma(\mathrm{Ind}_{H_2}^\Gamma(X))] = \frac{|\Gamma||H_1 \cap H_2|}{|H_1||H_2|}[\mathrm{Ind}_{H_1\cap H_2}^{H_1}(\mathrm{Res}_{H_1\cap H_2}^{H_2}(X))]$$

en $K_0^{H_1}(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$.

Demostración. Por su definición, $\mathrm{Ind}_{H_2}^\Gamma(X)$ tiene una descomposición celular indexada por Γ/H_2 tal que cada celda solo es invariante por los elementos de H_2. Por lo tanto, el resultado se sigue de notar que la acción de $H_1/H_1 \cap H_2$ en Γ/H_2 es libre con $\frac{|\Gamma||H_1\cap H_2|}{|H_1||H_2|}$ órbitas. □

1.4. Variedades de caracteres

En los primeros capítulos de esta tesis trabajaremos con variedades de cararacteres asociadas a grupos isógenos a SL_n con monodromía genérica. A continuación definiremos estas variedades. Dados enteros positivos n y g, un anillo R, y una clase de conjugación $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(R)$, definimos

$$X^{\mathcal{C}}(R) = \{(x, y, z) \in \mathrm{SL}_n(R)^g \times \mathrm{SL}_n(R)^g \times \mathcal{C} : [x, y]z = 1\}$$

y

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(R)) = X^{\mathcal{C}}(R)/\,\mathrm{PGL}_n(R).$$

Para un divisor $d|n$, sea $F_d \subset \mathbb{G}_m$ la torsión de orden d del grupo multiplicativo y $T = \mathbb{G}_m^{n-1}$ el toro diagonal de SL_n. Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, $F_d(k)$ es el grupo cíclico de orden d. Sea

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}((\mathrm{SL}_n/F_d)(R)) = [\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(R))/F_d(R)^{2g}]$$

el orbifold cociente de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(R))$ bajo la acción de $F_d(R)^{2g}$ dada por multiplicar a izquierda en (x, y). Abreviaremos $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n) = \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$ y $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d) = \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}((\mathrm{SL}_n/F_d)(\mathbb{C}))$.

Lema 1.4.1. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(k)$ una clase de conjugación semisimple tal que ningún conjunto propio de sus autovalores tiene producto uno. Entonces, la acción de $\mathrm{PGL}_n(k)$ en $X^{\mathcal{C}}(k)$ es libre y $X^{\mathcal{C}}(k)$ es suave. En consecuencia, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(k))$ es suave.*

Demostración. Misma demostración que en [HR08, Teorema 2.2.5]. □

Más generalmente, dado un grupo reductivo complejo G, una clase de conjugación $\mathcal{C} \subset G$ y un entero positivo g se define la G-variedad de caracteres parabólica como el cociente

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G) = \{(x, y, z) \in G^g \times G^g \times \mathcal{C} : [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]z = 1\}//G$$

donde G actúa vía conjugación simultánea de las variables x e y. Sea $Z(G)$ el centro de G. Sobre $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ actúa $Z(G)^{2g}$ vía traslación de las variables x e y. Si $\tilde{G}$ es el revestimiento universal de G, $\pi_1(G) \subset Z(\tilde{G})$ y $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\tilde{G})/\pi_1(G)^{2g}$ es isomorfa a una subvariedad de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$, típicamente a una componente irreducible. Llamamos G-variedad de caracteres torcida a $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\tilde{G})/\pi_1(G)^{2g}$ y la denotamos $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\tilde{G}/\pi_1(G))$. La variedad de caracteres, a secas, asociada a G es $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ para la clase de conjugación del neutro. Finalmente, la variedad de representaciones de G es

$$R(G) = \{(x, y) \in G^g \times G^g : [x, y] = 1\}.$$

Capítulo 2

Una fórmula con caracteres

2.1. La fórmula

En este capítulo, estudiaremos el siguiente problema. Sea $H \to G \to K$ una configuración de Clifford. Denotemos G_k a la imagne inversa de $k \in K$. En particular, $G_0 = H$. Más generalmente, sea $G_k = G_{k_1} \times \cdots \times G_{k_m}$ para cualquier tupla $k \in K^m$. Tomemos $z \in G$, ω un palabra en m variables, y $a \in K^m$. Nos interesa dar una fórmula en termino de los caracteres de G o de H para

$$N(\omega, a) := |\{x \in G_a : \omega(x)z = 1\}|$$

y, especialmente, cuando ω es un producto de commutadores. Este último casoes el contenido del teorema 2.1.1. Antes de enunaciarlo, necestamos introducir algunas definiciones y notaciones.

Dado u grupo arbitrario G, una función $\Omega : G \times G \to \mathrm{U}(1)$ se dice anti-simétrica y bilineal si

- $\Omega(x, yz) = \Omega(x, y)\Omega(x, z)$, y
- $\Omega(x, y) = \Omega(y, x)^{-1}$.

para cualesquiera $x, y, z \in G$. Sea $\mathcal{B}(G, \mathrm{U}(1))$ el conjunto de tales funciones. La multiplicación de $\mathrm{U}(1)$ induce una suma en $\mathcal{B}(G, \mathrm{U}(1))$, convirtiéndolo en un grupo abeliano.

Notemos que si $\Omega \in \mathcal{B}(G, \mathrm{U}(1))$, $\Omega(x, 1) = \Omega(1, x) = 1$ y $\Omega(x, x) = \pm 1$ para cualquier $x \in G$. Llamemos $\mathcal{B}^+(G, \mathrm{U}(1)) \subset \mathcal{B}(G, \mathrm{U}(1))$ al subgrupo de aquellas Ω que cumplen $\Omega(x, x) = 1$ para cualquier $x \in G$. Por ejemplo, si $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, cualquier $\Omega \in \mathcal{B}^+(G, \mathrm{U}(1))$ es de la forma

$$\Omega(x, y) = \omega^{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

donde ω es una raíz de la unidad de orden un divisor de $\mathrm{mcd}(n, m)$. Definamos $\ker \Omega$ como el subgrupo de G de aquellos y tales que $\Omega(x, y) = 1$ para cualquier $x \in G$. En el ejemplo anterior, $\ker \Omega = \mathrm{ord}(\omega)\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathrm{ord}(\omega)\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Notar que tiene cardinal $\frac{nm}{\mathrm{ord}(\omega)^2}$.

Para cualquier subgrupo $G' \subset G$ pensamos $\mathcal{B}^+(G', \mathrm{U}(1))$ y $\mathcal{B}(G', \mathrm{U}(1))$ como funciones $G \times G \to \mathbb{C}$ extendiendolas por cero. Además, definimos

$$\Omega(x, y) = \prod_{i=1}^{m} \Omega(x_i, y_i)$$

para tuplas $x, y \in G^m$ y $\Omega \in \mathcal{B}(G, \mathrm{U}(1))$. En particular, sea

$$[x, y] = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g].$$

para cualesquiera $x, y \in G^g$.

Teorema 2.1.1. *Sea $H \to G \xrightarrow{\pi} K$ una configuración de Clifford. Existe una aplicación natural $\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K \mapsto \Omega_\theta \in \mathcal{B}^+(K, \mathrm{U}(1))$ tal que*

$$\left| \left\{ \begin{matrix} (x,y) \in G^g \times G^g : \\ [x,y]z = 1, \pi(x) = a, \pi(y) = b \end{matrix} \right\} \right| = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K} \left(\frac{|H|}{\theta(1)} \right)^{2g-1} \Omega_\theta(a,b)\theta(z)$$

para cualquier entero positivo g, $z \in H$ y tuplas $a, b \in K^g$ cuyas coordenadas generan K. Adicionalmente,

$$|\ker \Omega_\theta| = \frac{|K|}{e(\theta)^2}$$

donde $e(\theta)$ es el índice de ramificación de cualquier carácter χ de G sobre θ.

Para lidiar con las funciones Ω tenemos la siguiente proposición, ver el lema 2.2.6. Su demostración así como la del teorema anterior esta en las siguientes dos secciones.

Proposición 2.1.1. *Sea $H \to G \to K$ una configuración de Clifford y $\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K$ un carácter sin ramificación. Entonces $\xi \mapsto \Omega_{\xi\theta}(a,b)$ es un carácter de $\{\xi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times) : \xi\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K\}$ para cualesquiera tuplas $a, b \in K^g$.*

Observación 2.1.1. El conjunto $\{\xi \in \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times) : \xi\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K\}$ es en efecto un subgrupo. La condición sobre ξ significa que $(a \cdot \xi)\xi^{-1} \in \mathrm{Stab}_\theta \subset \mathrm{Hom}(H, \mathbb{C}^\times)$ para cualquier $a \in K$, donde la acción anterior es la de Clifford para $H \to H/[H,H]$. Notemos que $(a \cdot \xi_1)\xi_1^{-1}(a \cdot \xi_2)\xi_2^{-1} = (a \cdot (\xi_1\xi_2))(\xi_1\xi_2)^{-1}$.

2.1.1. Demostración del teorema 2.1.1

Denotemos

$$\int_X f(x) = \frac{1}{|G|^m} \sum_{x \in X} f(x)$$

para cualquier subconjunto $X \subset G^m$ y función $f : G^m \to \mathbb{C}$. En particular, si δ es la función que vale uno en la identidad y cero en cualquier otro lugar,

$$\begin{aligned} N(\omega, a) &= |G|^m \int_{G_a} \delta(\omega(x)z)\mathrm{d}x \\ &= |G|^{m-1} \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1) \int_{G_a} \chi(\omega(x)z)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

para cualquier palabra ω y $a \in K^g$. Para la segunda igualdad usamos que $\delta = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \frac{\chi(1)}{|G|}\chi$. Notemos que si $\omega(a)M$ tiene grado cero, la integral solo depende de $\chi\big|_H$ y no de χ.

Lema 2.1.1. *Sea $G \to K$ una configuración de Clifford y χ un carácter irreducible de G. Entonces:*

- *La siguiente igualdad vale*

$$\int_{G_a} \chi(\omega(x)z)\mathrm{d}x = \frac{1}{\chi(1)} \left(\int_{G_a} \chi(\omega(x))\mathrm{d}x \right) \chi(z)$$

  para cualquier palabra ω en m variables, $a \in K^m$ y $z \in G$,

- *Si $\omega^{(1)}$ y $\omega^{(2)}$ son dos palabras de longitudes m_1 y m_2 respectivamente,*

$$\int_{G_{a^{(1)}}} \int_{G_{a^{(2)}}} \chi(\omega^{(1)}(x)\omega^{(2)}(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\chi(1)} \left(\int_{G_{a^{(1)}}} \chi(\omega^{(1)}(x))\mathrm{d}x \right) \left(\int_{G_{a^{(2)}}} \chi(\omega^{(2)}(y))\mathrm{d}y \right)$$

  para cualesquiera $a^{(1)} \in K^{m_1}, a^{(2)} \in K^{m_2}$.

Demostración. Sea ρ la representación asociada con χ y consideremos

$$\rho(\omega, a) := \int_{G_a} \rho(\omega(x))\mathrm{d}x.$$

Este operador es un endomorfismo G-invariante dado que cada G_k es invariante bajo conjugación. Por lo tanto,

$$\rho(\omega, a) = \frac{\operatorname{Tr}\rho(\omega, a)}{\chi(1)} \operatorname{Id} = \frac{1}{\chi(1)} \left(\int_{G_a} \chi(\omega(x))\mathrm{d}x \right) \operatorname{Id}$$

y el lema se sigue. □

Aplicando esto a $\omega = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]$, obtenemos que

$$N(\omega, a, b) = |G|^{2g-1} \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \frac{\chi(M)}{\chi(1)^{g-1}} \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{G_{a_i}} \int_{G_{b_i}} \chi([x, y])\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)$$

para cualesquiera $a, b \in K^g$. Luego, definiendo

$$\Omega_\chi(a, b) = \frac{|K|^2 \chi(1)}{e(\chi)^2} \int_{G_a} \int_{G_b} \chi([x, y])\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

para $a, b \in K$, tenemos que

$$\begin{aligned} N(\omega, a, b) &= \frac{1}{|K|^{2g}} \sum_{\chi \in \operatorname{Irr}(G)} \frac{|G|^{2g-1}}{\chi(1)^{2g-1}} e(\chi)^{2g} \Omega_\chi(a, b) \chi(z) \\ &= \sum_{\theta \in \operatorname{Irr}(H)} \frac{|H|^{2g-1}}{\theta(1)^{2g-1}} \left(\frac{e(\chi)^2}{|K|} \sum_{\chi \text{ over } \theta} \Omega_\chi(a, b) \right) \theta(z) \end{aligned}$$

para cualquier $z \in H$, donde la segunda suma es sobre todos los caracteres χ de G que tienen a θ como nu constituyente irreducible. Por lo tanto, el teorema 2.1.1 se seguirá de probar que Ω_χ se anula salvo que θ este fijado por K y que, en ese caso, Ω_χ no depende de la elección de χ sobre θ, pertenece a $\mathcal{B}^+(K, \mathrm{U}(1))$, y su kernel tiene cardinal $\frac{|K|}{e(\chi)^2}$.

Consideremos la transformada de Fourier normalizada $\mathcal{F}\Omega_\chi : \operatorname{Irr}(K) \times \operatorname{Irr}(K) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2) := \chi(1) \int_G \int_G \xi_1(x)\xi_2(y)\chi([x, y])\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Para obtener Ω_χ, tenemos

$$\Omega_\chi(a, b) = \frac{1}{e(\chi)^2} \sum_{\xi_1, \xi_2 \in \operatorname{Irr}(K)} \mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2) \overline{\xi_1(a)\xi_2(b)}$$

para cualesquiera $a, b \in K$.

Proposición 2.1.2. *Sea $G \to K$ una configuración de Clifford. Para cualquier $\chi \in \operatorname{Irr}(G)$, $\mathcal{F}\Omega_\chi \in \mathcal{B}^+(\operatorname{Stab}_\chi, \mathrm{U}(1))$.*

Demostración. Sea $\rho : G \to \operatorname{GL} V$ la representación irreducible asociada a χ y consideremos

$$\rho_y = \int_G \xi_1(x)\rho(xyx^{-1})\mathrm{d}x$$

para $y \in G$. Notemos que

$$\xi_1(h)\rho(h)\rho_y\rho(h)^{-1} = \rho_y$$

para cualquier $h \in G$. En otras palabras, si V_{ξ_1} es V con acción $g \cdot v = \xi_1(g)gv$, $\rho_y : V \to V_{\xi_1}$ es equivariante. Luego, por el lema de Schur, $\rho_y = 0$ si $\xi_1\chi \neq \chi$. Esto implicaría que $\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2)$ se anula. De ahora en adelante, asumamos que $\xi_1 \in \mathrm{Stab}_\chi$ y elijamos un isomorfismo $\phi_1 : V \to V_{\xi_1}$. En este caso, $\rho_y = \frac{\mathrm{Tr}(\rho_y\phi_1^{-1})}{\chi(1)}\phi_1$. Ahora bien, $\mathrm{Tr}(\rho(xyx^{-1})\phi_1^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(y)\rho(x^{-1})\phi_1^{-1}\rho(x))$ y

$$\int_G \xi_1(x)\rho(x)^{-1}\phi_1^{-1}\rho(x)\mathrm{d}x = \int_G \xi_1(x)\phi_1^{-1}\xi_1(x)^{-1}\rho(x)^{-1}\rho(x)\mathrm{d}x = \phi_1^{-1}$$

dado que ϕ_1 es equivariante ($\phi_1\rho(x) = \xi_1(x)\rho(x)\phi_1$). Por lo tanto,

$$\rho_y = \frac{\mathrm{Tr}(\rho(y)\phi_1^{-1})}{\chi(1)}\phi_1.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2) &= \int_G \xi_2(y)\,\mathrm{Tr}(\rho(y)\phi_1^{-1})\,\mathrm{Tr}(\phi_1\rho(y)^{-1})\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{i,j,k,l}(\phi_1)^{ji}(\phi_1)_{kl}\sum_{y\in G}\xi_2(y)y_{ij}y^{lk}
\end{aligned}$$

que es cero si $\xi_2\chi \neq \chi$ por las relaciones de ortogonalidad fuertes de Schur. Asumamos lo contrario y sea $\phi_2 : V \to V_{\xi_2}$ un isomorfismo. Luego, $\xi_2(y)y_{ij} = \sum_{s,t}(\phi_2)_{is}y_{st}(\phi_2)^{tj}$ y

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{|G|}\sum_{i,j,k,l,s,t}(\phi_1)^{ji}(\phi_1)_{kl}(\phi_2)_{is}(\phi_2)^{tj}\sum_{y\in G}y_{st}y^{lk} \\
&= \frac{1}{\chi(1)}\sum_{i,j,k,l}(\phi_1)^{ji}(\phi_1)_{kl}(\phi_2)_{ik}(\phi_2)^{lj} \\
&= \frac{1}{\chi(1)}\mathrm{Tr}(\phi_2\phi_1\phi_2^{-1}\phi_1^{-1})
\end{aligned}$$

Luego, por el lema de Schur, $\phi_2\phi_1\phi_2^{-1}\phi_1^{-1}$ es la multiplicación por $\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2)$. Notemos que $\mathcal{F}\Omega_\chi$ no depende de la elección de ϕ_1 y ϕ_2.

Chequeemos finalmente las propiedades de $\mathcal{F}\Omega_\chi$. Ya probamos que se anula afuera de Stab_χ. Es claro que $\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_1) = 1$ porque ϕ_1 y ϕ_2 se puenden tomar iguales. Para la bilinealidad, notemos que si $\phi_3 : V \to V_{\xi_3}$ es un isomorfismo, $\phi_3\phi_2 : V \to V_{\xi_2\xi_3}$ es un isomorfismo y

$$\begin{aligned}
\phi_1(\phi_2\phi_3)\phi_1^{-1}(\phi_2\phi_3)^{-1} &= \phi_1\phi_2\phi_1^{-1}(\phi_1\phi_3\phi_1^{-1}\phi_3^{-1})\phi_2^{-1} \\
&= \mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_3)\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2).
\end{aligned}$$

Por último, la anti-simétria se sigue de $(\phi_2\phi_1\phi_2^{-1}\phi_1^{-1})^{-1} = \phi_1\phi_2\phi_1^{-1}\phi_2^{-1}$. □

Lema 2.1.2. *Sea $G \to K$ una configuración de Clifford y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter irreducible. Entonces $\mathcal{F}\Omega_{\xi\chi} = \mathcal{F}\Omega_\chi$ para cualquier $\xi \in \mathrm{Irr}(K)$.*

Demostración. Dado que K es abeliano, el estabilizador de $\xi\chi$ es Stab_χ. Necesitamos probar que $\mathcal{F}\Omega_{\xi\chi}(\xi_1, \xi_2) = \mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1, \xi_2)$ para cualesquiera $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Stab}_\chi$. Pero si V es la representación asociada a χ, V_ξ es la asociada a $\xi\chi$. Y si $\eta : V \to V_{\xi_1}$ y $\zeta : V \to V_{\xi_2}$ son isomorfismo, $\eta : V_\xi \to V_{\xi\xi_1}$ y $\zeta : V_\xi \to V_{\xi\xi_2}$ también lo son. □

Lema 2.1.3. *Sea $G \to K$ una configuración de Clifford y $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Entonces*

$$|\ker\mathcal{F}\Omega_\chi| = \frac{|\mathrm{Stab}_\chi|}{e(\chi)^2}$$

donde $\ker\mathcal{F}\Omega_\chi \subset \mathrm{Stab}_\chi$ *es el subgrupo de aquellos ξ tales que $\mathcal{F}\Omega_\chi(-, \xi) \equiv 1$. En particular, $\mathcal{F}\Omega$ es no degenerada si y solo si $|\mathrm{Stab}_\chi| = e(\chi)^2$.*

Demostración. Para ξ fijo, $\mathcal{F}\Omega_\chi(-,\xi)$ es un carácter de Stab_χ. Por lo tanto,

$$\sum_{\xi_1,\xi_2\in\mathrm{Stab}_\chi} \mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1,\xi_2) = |\,\mathrm{Stab}_\chi\,|\,.\,|\ker\mathcal{F}\Omega_\chi|$$

Por otro lado,

$$\sum_{\xi_1,\xi_2\in\mathrm{Stab}_\chi} \mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1,\xi_2) = \chi(1)|K|^2\int_H\int_H \chi(aba^{-1}b^{-1})\mathrm{d}a\mathrm{d}b = \chi(1)e(\chi)\sum_\theta \frac{1}{\theta(1)} = \left(\frac{|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|}{e(\chi)}\right)^2$$

donde θ recorre los constituyentes irreducibles de $\chi\big|_H$. □

Lema 2.1.4. *Sea $G\to K$ una configuración de Clifford y $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$.*

1. *Sean $a,b\in K^g$ tales que sus coordenadas generan K. Entonces $\Omega_\chi(a,b)=0$ salvo que $|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|=e(\chi)^2$.*
2. *Si $|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|=e(\chi)^2$, existe un morfismo sobreyectivo $()^*:K\to\mathrm{Stab}_\chi$ tal que*

$$\Omega_\chi(a,b)=\mathcal{F}\Omega_\chi(b^*,a^*)$$

para cualesquiera a,b.

Demostración. Recordemos que

$$\Omega_\chi(a_i,b_i)=\frac{1}{e(\chi)^2}\sum_{\xi_1,\xi_2\in\mathrm{Stab}_\chi}\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1,\xi_2)\overline{\xi_1(a_i)\xi_2(b_i)}$$

Dado ξ_2, $\mathcal{F}\Omega_\chi(-,\xi_2)\,\mathrm{ev}_{a_i^{-1}}(-)$ es un carácter de Stab_χ. Por lo tanto,

$$\sum_{\xi_2\in\mathrm{Stab}_\chi}\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi_1,\xi_2)\overline{\xi_1(a_i)}=\begin{cases}|\,\mathrm{Stab}_\chi\,| & \text{si } \mathcal{F}\Omega_\chi(-,\xi_2)=\mathrm{ev}_{a_i}\\ 0 & \text{si no}\end{cases}$$

El primer caso solo puede suceder si ev_{a_i} se anula en $\ker\mathcal{F}\Omega_\chi$. Asumamos que $\mathcal{F}\Omega_\chi(\xi,-)=\mathrm{ev}_{a_i}$ para algún ξ. Notemos que $\mathcal{F}\Omega_\chi(-,\xi^{-1})=\mathrm{ev}_{a_i}$, Entoces,

$$\begin{aligned}\Omega_\chi(a_i,b_i)&=\frac{|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|}{e(\chi)^2}\xi(b_i)\sum_{\xi_2\in\ker\mathcal{F}\Omega_\chi}\mathrm{ev}_{b^{-1}}(\xi_2)\\&=\begin{cases}\frac{|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|^2}{e(\chi)^4}\xi(b_i) & \text{si } \mathrm{ev}_{b_i}\big|_{\ker\mathcal{F}\Omega}\equiv 1\\ 0 & \text{si no}\end{cases}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Omega_\chi(a,b)$ es cero salvo que $\mathrm{ev}_{a_i},\mathrm{ev}_{b_i}$ se anulen en $\ker\mathcal{F}\Omega_\chi$. Pero esto solo ocurre si $\ker\mathcal{F}\Omega_\chi$ es trivial porque las coordenades a_i,b_i generan K al variar i. Por el lema anterior, esto es equivalente a $|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|=e(\chi)^2$.

Asumamos de ahora en adelante que $\mathcal{F}\Omega_\chi$ es no degenerada. Luego, induce un isomorfismo $\mathcal{F}\Omega_\chi^\#:\mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_\chi)\to\mathrm{Stab}_\chi$ tal que $\mathcal{F}\Omega_\chi(\mathcal{F}\Omega_\chi^\#\phi,-)=\phi$ para cualquier $\phi\in\mathrm{Irr}(\mathrm{Stab}_\chi)$. De las cuentas anteriores se sigue que

$$\Omega_\chi(a_i,b_i)=\mathrm{ev}_{b_i}(\mathcal{F}\Omega_\chi^\#(\mathrm{ev}_{a_i}))=\mathcal{F}\Omega_\chi(\mathcal{F}\Omega_\chi^\#(\mathrm{ev}_{b_i}),\mathcal{F}\Omega_\chi^\#(\mathrm{ev}_{a_i}))$$

Por lo tanto, $()^*=\mathcal{F}\Omega_\chi^\#\circ\mathrm{ev}_-$ cumple el segundo ítem. □

Corolario 2.1.1. *Sea $G\to K$ una configuración de Clifford y $\chi\in\mathrm{Irr}(G)$ con $|\,\mathrm{Stab}_\chi\,|=e(\chi)^2$. Entonces $\Omega_\chi\in\mathcal{B}^+(K,\mathrm{U}(1))$, $|\ker\Omega_\chi|=\frac{|K|}{e(\chi)^2}$ y $\Omega_{\xi\chi}=\Omega_\chi$ para cualquier $\xi\in\mathrm{Irr}(K)$.*

Demostración. Se sigue de las propiedades de $\mathcal{F}\Omega_\chi$ y de que $()^*$ es sobreyectivo y es determinado por $\mathcal{F}\Omega_\chi$. □

El último resultado términa la demostración del teorema 2.1.1 definiendo $\Omega_\theta = \Omega_\chi$ para cualquier χ sobre θ y notando que $\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K$ es equivalente a $|\,\mathrm{Stab}_\chi\,| = e(\chi)^2$ por teoría de Clifford. Terminamos la sección con dos observaciones que usaremos más adelante.

Lema 2.1.5. *Sea $H \to G \to K$ una configuración de Clifford y $\theta \in \mathrm{Irr}(H)^K$. Asumamo que K tiene a lo sumo dos generadores y $K \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Entonces $\Omega_\theta((a,b),(a',b')) = \omega^{ab'-ba'}$ para una raíz de la unidad ω de orden $e(\chi)$, donde χ es cualquier carácter irreducible de G sobre θ.*

Demostración. Ya sabemos que

$$\Omega_\theta((a,b),(a',b')) = \omega^{ab'-ba'}$$

para alguna raíz de la unidad ω y que el cardinal del kernel es $\frac{nm}{\mathrm{ord}(\omega)^2}$. El resultado se sigue. □

Lema 2.1.6. *Sea $H \to G \xrightarrow{\pi} K$ una configuración de Clifford y $K' \subset K$ un subgrupo. Sea G' la preimagen de K' por π. Sea $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ un carácter con $\chi\big|_H = e(\chi)\theta$, para algún $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$. Entonces*

$$\Omega_\chi(a,b) = \Omega_{\chi'}(a,b)$$

para cualesquiera $a, b \in K'$ y consituyente irreducible χ' de $\chi\big|_{G'}$.

Demostración. Notemos que

$$\Omega_\chi(a,b) = |K|^2 \int_{G_a}\int_{G_b} \theta(aba^{-1}b^{-1})\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$

coinciden con $\Omega_{\chi'}(a,b)$ dado que $\frac{|K|^2}{|K'|^2} = \frac{|G|^2}{|G'|^2}$. □

2.1.2. Demostración de la proposición 2.1.1

La demostración es esencialmente la misma que la de la proposición 2.1.2, pero aunque no conocemos un marco en común. Sea

$$\nu(\xi) := \theta(1)\int_H\int_H \xi([xx_a, yy_b])\theta(xx_a, yy_b])\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

para $x_a \in G_a$ e $y_b \in G_b$ fijos. De esta forma, $\Omega_{\xi\theta}(a,b) = \nu(\xi)$. Queremos probar que $\nu(\xi_1\xi_2) = \nu(\xi_1)\nu(\xi_2)$

Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}\,V$ la representación irreducible asociada a θ y consideremos

$$\rho_x = \int_H \xi(x_a y y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1} y^{-1})\rho(x_a y y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1} y^{-1})\mathrm{d}y$$

para $y \in H$. Notemos que

$$\xi(x_a h x_a^{-1})\rho(x_a h x_a^{-1})\rho_x \xi(h)^{-1}\rho(h)^{-1} = \rho_x$$

para cualquier $h \in H$. En otras palabras, $\rho_x : V_\xi \to V'_{a\cdot\xi}$ es un morfismo equivariante, donde V' es la representación $\rho(x_a - x_a^{-1})$. Luego, por le lema de Schur, ρ_x es esencialmente la multiplicación por un escalar. Recordemos que $a \cdot \theta = \theta$ y $(a\cdot\xi)\xi^{-1} \in \mathrm{Stab}_\theta$. Fijemos isomorfismos $\zeta : V \to V_{(a\cdot\xi)\xi^{-1}}$ y $\phi : V \to V'$. Notemos que ζ es también un isomorfismo entre V'_ξ y

$V'_{a\cdot\xi}$. En esta situación, $\rho_x = \frac{\operatorname{Tr}\rho_x\phi^{-1}\zeta^{-1}}{\theta(1)}\zeta\phi$. Ahora bien, $\operatorname{Tr}(\rho(x_a y y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1} y^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1}) = \operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\rho(y^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1}\rho(x_a y x_a^{-1}))$ y

$$\begin{aligned}\int_H \xi(x_a y y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1} y^{-1})\rho(y^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1}\rho(x_a y x_a^{-1})\mathrm{d}b &= \int_H \xi(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1}\mathrm{d}b \\ &= \xi(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1}\end{aligned}$$

dado que $\phi\zeta$ es equivariante. Por lo tanto,

$$\rho_x = \frac{\xi(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1})}{\theta(1)}\zeta\phi.$$

Se sigue que $\nu(\xi)$ es

$$\int_H \operatorname{Tr}(\xi(x)\rho(x)\zeta\phi)\operatorname{Tr}(\xi(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\rho(x_a y_b x_a^{-1} x^{-1} y_b^{-1})\phi^{-1}\zeta^{-1})\mathrm{d}x =$$
$$\frac{1}{|H|}\sum_{i,j,k,l,s}(\zeta\phi)^{ji}(\zeta\phi)_{kl}(\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))_{is}\sum_{a\in H}\rho(\xi(y_b x y_b^{-1})\rho(y_b x y_b^{-1}))^{sj}(\xi(x)\rho(x))_{lk}$$

Recordemos que $b\cdot\theta = \theta$. Sea $\psi : V \to V''$ un isomorfismo entre ρ y $\rho(y_b - y_b^{-1})$. Luego, $(\xi(y_b x y_b^{-1})\rho(y_b x y_b^{-1}))^{sj} = \sum_{r,t}(\zeta\psi)_{sr}(\rho(x)x)^{rt}(\zeta\psi)^{tj}$ y

$$\begin{aligned}\nu(\xi) &= \frac{1}{|H|}\sum_{i,j,k,l,s,t,r}(\zeta\phi)^{ji}(\zeta\phi)_{kl}(\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))_{is}(\zeta\psi))_{sr}(\zeta\psi))^{tj}\sum_{a\in H}a^{rt}a_{lk} \\ &= \frac{1}{\theta(1)}\sum_{i,j,k,l,s}(\zeta\phi)^{ji}(\zeta\phi)_{kl}(\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))_{is}(\zeta\psi)_{sk}(\zeta\psi)^{lj} \\ &= \frac{\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})}{\theta(1)}\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})(\zeta\psi)\zeta\phi(\zeta\psi)^{-1}(\zeta\phi)^{-1}) \\ &= \frac{\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})}{\theta(1)}\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})\psi\zeta\phi\psi^{-1}\zeta^{-1}\phi^{-1})\end{aligned}$$

Ahora, por el lema de Schur, $\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})(\zeta\phi)^{-1}\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))(\zeta\psi)\zeta\phi(\zeta\psi)^{-1}$ es la multiplicación por $\nu(\xi)$. Notemos que ν no depende de la elección de ζ. Observemos que $\zeta\psi\zeta\phi(\zeta\psi)^{-1}(\zeta\phi)^{-1}$ es equivariante. Luego,

$$\nu(\xi) = \frac{\xi(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1})\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))}{\theta(1)}\operatorname{Tr}(\psi\zeta\phi\psi^{-1}\zeta^{-1}\phi^{-1})$$

En particular, notemos que

$$\nu(1) = \frac{\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))\operatorname{Tr}(\psi\phi\psi^{-1}\phi^{-1})}{\theta(1)} = 1.$$

porque θ no ramifica en G. Por lo tanto, $\psi\phi\psi^{-1}\phi^{-1}$ es la multiplicación por $\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))^{-1}$. Equivalentemente, $\phi^{-1}\psi^{-1}\phi\psi$ es la multiplicación por $\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))$.

Chequemos finalmente que $\nu(\xi_1\xi_2) = \nu(\xi_1)\nu(\xi_2)$. Notemos que si $\zeta_i : V \to V_{(a\cdot\xi_i)\xi_i^{-1}}$ son isomorifmsos para $i = 1, 2$, $\zeta_1\zeta_2 : V \to V_{(a\cdot\xi_1\xi_2)(\xi_1\xi_2)^{-1}}$ es también un isomorifsmo y

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))\psi\zeta_1\zeta_2\phi\psi^{-1}(\zeta_1\zeta_a)^{-1}\phi^{-1} &= \operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))\psi\zeta_1\psi^{-1}(\psi\zeta_2\phi\psi^{-1}\zeta_2^{-1}\phi^{-1})\phi\zeta_1^{-1}\phi^{-1} \\ &= \nu(\xi_2)\psi\zeta_1\psi^{-1}\phi\zeta_1^{-1}\phi^{-1} \\ &= \nu(\xi_2)\psi\zeta_1\phi(\phi^{-1}\psi^{-1}\phi\psi)\psi^{-1}\zeta_1^{-1}\phi^{-1} \\ &= \nu(\xi_2)\operatorname{Tr}(\rho(x_a y_b x_a^{-1} y_b^{-1}))\psi\zeta_1\phi\psi^{-1}\zeta_2^{-1}\phi^{-1} \\ &= \nu(\xi_1)\nu(\xi_2)\end{aligned}$$

lo que implica la propiedad deseada.

2.2. Ejemplo: grupos tipo bloque

En esta sección, exploraremos una configuraión de Clifford particular.Sea $H_0 \to G_0 \xrightarrow{\pi_0} K_0$ una configuración de Clifford con K_0 cíclico. Dado un entero A, consideramos $G_A := G_0^A$ y el morfismo inducido $\pi_A : G_A \to K_0$ dado por $\pi(g) = \pi(g_1) \cdots \pi(g_A)$, y sea H su kernel. Por definición, $G_A/H \simeq K_0$. Hay una extensión natural $\hat{G}_A$ de G_A por el grupo cíclico $F_A = \langle \sigma \rangle$ de orden A. Esta dada por $(\sigma \cdot g)_i = g_{i+1}$. En otras palabras, es el producto corona regular de G y F_A. Notemos que π_A es F_A-invariante y, por lo tanto, también obtenemos una extensión $\hat{H}$ de H. Por construcción, $\hat{G}_A/G_A \simeq \hat{H}/H \simeq F_A$ y $\hat{G}_A/\hat{H} \simeq K_0$. Luego,

$$\hat{G}_A/H = \hat{G}_A/(G_A \cap \hat{H}) \simeq \hat{G}_A/G_A \times \hat{G}_A/\hat{H} \simeq F_A \times K_0.$$

Sea $\overline{K}_0$ un cociente de K_0 por el cúal se factoriza la acción de $\mathrm{Irr}(\hat{H})$. Tomemos G como una extensión de H por un grupo abeliano K. Asumamos que G contiene $\hat{H}$ y es tal que existe un morfismo $K \subset F_A \times \overline{K}_0$ compatible con las acciones en $\mathrm{Irr}(H)$. Sea F_B la imagen de K en $\overline{K}_0$. Es un grupo cíclico de algún orden B. Finalmente, asumamos que el morfismo inducido $K \simeq F_A \times F_B$ es un isomorfismo. Fijemos un generador δ de F_B y un elemento $\gamma \in K$ que lo levanta. A esta configuración la llamamos una configuración de Clifford tipo bloque. Más generalmente, consideramos subextensiones $H \subset G' \subset G$ tales que los morfismos $K' = G'/H \to F_A, F_B$ son sobreyectivos.

Hay un ejemplo trivial; $G = \hat{G}_A$. Uno más complicado es el siguiente. Es la configuración donde aplicaremos los resultados de esta sección en el cápitulo siguiente. Sean n un entero positivo, A uno de sus divisores, y q una potencia de un primo tal que $n|q-1$. Consideremos $G_0 = \mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$, $H_0 = \mathrm{SL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$, y $K_0 = \mathbb{F}_q^\times$. El morfismo π_0 es el detrminante. En este caso, $\hat{G}_A$ coincide el subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ generado por matrices diagonales en bloques de $A \times A$ e inversibles, en otras palabras, matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & M_{A-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & M_A \end{pmatrix}$$

con $M_i \in \mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$, y la matriz de permutación σ

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q^{\frac{n}{A}}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q^{\frac{n}{A}}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q^{\frac{n}{A}}} \\ \mathrm{Id}_{\mathbb{F}_q^{\frac{n}{A}}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene orden A. Por otro lado, H es el subgrupo de matrices diagonales por bloques de determinante uno.

Una extensión G en las condiciones específicadas al principio puede construirse de la siguiente forma. Notemos que cualquier n-ésimo potencia de K_0 actúa trivialmente en $\mathrm{Irr}(\hat{H})$. Por la tanto, la acción se factoriza por $\overline{K}_0 := \mathbb{F}_q^\times/(\mathbb{F}_q^\times)^n \simeq F_n$. Sea $\gamma_0 \in \mathbb{F}_{q^n}$ y γ la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_0^{1-n} \end{pmatrix}$$

Definimos G como el subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ generado por H, σ y γ. En el siguiente lema chequearemos que $K = G/H$ es isomorfo a $F_A \times \langle \pi(\gamma) \rangle = 1$, donde $\pi : G \to K$ el la proyección al cociete. Finalmente, notemos que $\pi(\gamma)$ actúa en $\mathrm{Irr}(H)$ como $\delta := [\gamma_0^{-n}] \in \overline{K}_0$. Por lo tanto, consruimos una configuración con las propiedades deseadas. Notemos que el orden de $\delta = \pi(\gamma)$ es el menor B para el cúal $\gamma_0 \in \mathbb{F}_{q^B}$.

Lema 2.2.1. *En el ejemplo anterior, H es normal en G y $K \simeq F_A \times F_B$.*

Demostración. H es normal en G dado que tanto γ como σ tienen determinante uno y su conjugación preserva las matricez diagonales en bloques. Notemos que $\gamma^B \in H$ pero no ninguna de sus potencias previas y que σ tiene orden A. Además, γ es el productode una matriz central de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}_q})$ y una de H. Explícitamente, $(\gamma_0, \dots, \gamma_0)$ y $(1, \dots, 1, \gamma_0^{-n})$. Luego, $[\sigma, \gamma] \in H$. Esto prueba que K es abeliano y tiene dos generadores de orden A y B. Asumamos ahora que $\sigma^i\gamma^j \in H$. Aplicando el Frobenius obtenemos que $\mathrm{Frob}_q(\gamma_0^j) = \gamma_0^j$. Luego $B|j$ y $\sigma^i \in H$, lo que implica que $A|i$. Por lo tanto, $K = F_A \times F_B$. □

2.2.1. Clasificación de caracteres fijos

El resultado principal de esta sección es la clasificación de caracteres de H fijos por K' en una configuración de Clifford tipo bloque. Remarcamos que existe una clasificación de caracteres para productos corona en general, ver por ejemplo [CST14, subsection 2.4.1]. Nuestra estrategia es un poco similar pero enfocarnos en los caracteres invariantes la hace más simple.

Notemos que $\mathrm{Irr}(G_A) = \mathrm{Irr}(G_0)^A$. Luego, dados caracteres η_0 y ξ de G_0 y K_0 respectivamente, podemos construir un carácter $\eta_{\eta_0,\xi}$ dado por

$$\eta_{\eta_0,\xi}(g_1, \dots, g_A) = \prod_{i=1}^{A} \xi^{i-1}(\pi(g_i))\eta_1(g_i)$$

para $(g_1, \dots, g_A) \in G_A$. Notemos que $\sigma \cdot \eta_{\eta_0,\xi} = \xi^{-A}(g_A)\xi\eta_{\eta_0,\xi}$ y $\mathrm{Stab}_{\eta_{\eta_0,\xi}} = \mathrm{Stab}_{\eta_0}$. Denotemos con $I_{A,B}$ al onjunto de pares (η_0, ξ) tales que $\xi^A \in \mathrm{Stab}_{\eta_0}$ y $|\mathrm{Stab}_{\eta_0}|$ divide a $\frac{|\overline{K_0}|}{B}$. La construcción anterior da una función $\Theta : I_{A,B} \to \mathrm{Irr}(H)/K_0$ que envía a un par (η_0, ξ) a los constituyentes irreducibles de $\eta_{\eta_0,\xi}\big|_H$.

Teorema 2.2.1. *En una configuracion de Clifford tipo bloque, $\mathrm{Irr}(H)^{K'} = \mathrm{Irr}(H)^K$ y Θ induce una biyección entre $\mathrm{Irr}(H)^K/K_0$ e $I_{A,B}/\sim$ donde $(\eta_0', \xi') \sim (\eta_0, \xi)$ si y solo si η_0 esta en la $\mathrm{Irr}(K_0)$-órbita de η_0' y $\xi^{-1}\xi' \in \mathrm{Stab}_{\eta_0}$.*

La demostración del teorema tiene varios pasos. Escribamos $\theta_{\eta_0,\xi}$ para cualquier constituyente irreducible de $\eta_{\eta_0,\xi}$ y $\chi_{\eta_0,\xi}$ para cualquier carácter irreducible de G sobre $\theta_{\eta_0,\xi}$.

Lema 2.2.2. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea θ un carácter de H fijado por $\sigma\delta^\ell$. Entonces θ es fijado por σ y existen caracteres η_0 de G_0 y ξ de K_0 con $\xi^A \cdot \eta_0 = \eta_0$ tales que θ es un constituyente irreducible de $\eta_{\eta_0,\xi}\big|_H$.*

Demostración. Si $A = 1$, no hay nada que probar. Asumamos que $A > 1$. Consideremos la extensión cíclica $H \subset G_A$. Debe existir un carácter $\eta = (\eta_i) \in \mathrm{Irr}(G_A) = \mathrm{Irr}(G_0)^A$ tal que $\eta\big|_H$ tiene a θ como un consittuyente irreducible. Notar que la acción de σ esta dada por trasladar cíclicamente los η_i.

La acción de K conmuta con la de K_0. Por lo tanto, si $\sigma\delta^l$ fija θ, también fija a $\eta\big|_H$. Más aún, δ^l fija $\eta\big|_H$ porque K_0 lo hace. Luego, σ fija $\eta\big|_H$. Evaluando en todos los $g_i = 1$ salvo uno, obtenemos que $\eta_1\big|_{H_0} = \lambda_j\eta_j\big|_{H_0}$ para $\lambda_j = \frac{\eta_j(1)}{\eta_i(1)}$. Pero ambos son irreducibles. Luego, $\eta_1\big|_{H_0} = \eta_j\big|_{H_0}$. Por lo tanto, existe $\xi_j \in \mathrm{Irr}(K_0)$ tal que $\eta_j = \xi_j\eta_1$. Que σ fije $\eta\big|_H$ significa que

$$\prod_{j=1}^{A} \xi_j(g_j)\eta_1(g_j) = \prod_{j=1}^{A} \xi_j(g_{j+1})\eta_1(g_j)$$

para cualquier $(g_i) \in H$. En consecuencia, existe $\xi \in \mathrm{Irr}(K_0)$ tal que la igualdad anterior vale para g arbitrario si la multiplicamos por ξ. Con todos los $g_i = 1$ excepto por uno, obtenemos que

$$\xi_j\eta_1 = \xi\xi_{j-1}\eta_1$$

y $\eta_j = \xi^{j-1}\eta_1$ for $1 \leq j \leq A$. Además, $\eta_A = \xi^{-1}\eta_1$ y

$$\xi^{-1}\eta_1 = \xi_A\eta_1 = \xi\xi_{A-1}\eta_1 = \xi^{A-1}\eta_1$$

Luego, $\xi^A\eta_1 = \eta_1$ y $\sigma \cdot \eta_1 = \xi \cdot \eta_1$. Definiendo $\eta_0 = \eta_1$, tenemos que $\eta = \eta_{\eta_0,\xi}$.

Finalmente, debemos probar que σ fija θ. Usaremos el subgrupo $H_A := H_0^A$ de H. La restricción de η a este subgrupo es simple de describir. Escribamos $\eta_0\big|_{H_0}$ como la suma de sus constituyentes irreducibles $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ (recordar que K_0 es cíclico). Notemos que $m = |\operatorname{Stab}_{\eta_0}| = |\operatorname{Stab}_\eta|$. Tenemos que

$$\eta(g_1, \ldots, g_A) = \prod \eta_0(g_i)$$

para $(g_i) \in H_A$. Luego, los constituyentes irreducbiles de $\eta\big|_{H_A}$ son los productos

$$\kappa_\phi(g_1, \ldots, g_A) = \prod_{i=1}^{A} \kappa_{\phi(i)}(g_i)$$

donde ϕ recorre los elementos de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^A$. En particular, η no se ramifica sobre H_A. Por lo tanto, dado que $\eta\big|_H$ es σ-invariante, es suficiente con probar que $\theta\big|_{H_A}$ es σ-invariante.

Asumamos que $\kappa_i = \beta^{i-1}\kappa_1$ para un generador β de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = K_0/\mathrm{Stab}_{\kappa_1}$. El cociente H/H_A es el subgroup de K_0^A de tuplas con producto uno. La acción en κ_ϕ se factoriza por el subgrupo $K'' \subset (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^A$ de tuplas con suma cero y esta dad por trasladar ϕ. Por lo tanto, las órbitas están contenidas en los m cosets de K'' dados por la suma. Ahora bien cada θ nos da una órbita distinta y hay m de ellos. Luego,

$$\theta\big|_{H_A} = \sum_{\phi \in m_0 K''} \kappa_\phi$$

que es invariante por σ. $\square$

Lema 2.2.3. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea θ un carácter fijado por K'. Entonces θes fijado por K y existe un par $(\eta_0, \xi) \in I_{A,B}$ tal que θ es un constituyente irreducible de $\eta_{\eta_0,\xi}\big|_H$.*

Demostración. Notemos que K/K' es cíclico y su orden divide a $\mathrm{mcd}(A, B)$, dado que esta generador por $(1, 0)$ y $(0, 1)$ porque las proyecciones $K' \to F_A$ y $K' \to F_B$ son sobreyectivas. Sea R el cardinal de K/K'. Definamos ℓ como el único entero entre 0 y $R - 1$ tl que $(1, 0) = (0, 1)^\ell$ en K/K'. Notemos que ℓ y R son coprimos.

Por construcción, $(1, \ell) \in K'$. Por lo tanto, podemos aplicar el lema anterior con $\sigma\delta^\ell$ para encontrar η_0 y ξ. Además, el lema nos asegura que θ es fijado por σ. Luego, $(0, \ell)$ es fijado por θ. Pero $(0, R)$ también fija θ. Entonces δ fija θ dado que $\mathrm{mcd}(\ell, R) = 1$. Esto prueba que K fija θ.

Finalmente, como $\overline{K}_0$ es cíclico, θ es fijado por δ si y solo si $\mathrm{ord}(\delta)$ divide a $\frac{|\operatorname{Stab}_\theta||\overline{K}_0|}{|K_0|}$ o, equivalentemente, $|\operatorname{Stab}_\eta|$ divide a $\frac{|\overline{K}_0|}{\mathrm{ord}(\delta)}$. Recordemos que $\mathrm{ord}(\delta) = B$. □

Lema 2.2.4. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea $(\eta_0, \xi) \in I_{A,B}$. Entonces cualquier constituyente irreducible θ de $\eta_{\eta_0,\xi}\big|_H$ es fijado por K.*

Demostración. Tenemos que $\sigma \cdot \eta_{\eta_0,\xi} = \xi\eta_{\eta_0,\xi}$. Por lo tanto, el argumento del lema anterior implica la propiedad deseada. □

Demostración del Teorema 2.2.1. Los lemas previos implican que Θ se corestringe a una sobreyección de $I_{A,B}$ a $\mathrm{Irr}(H)^K/K_0$. Notemos que si (η_0, ξ) y (η_0', ξ') son pare induciendo la misma órbita $[\theta]$, debe ser $\eta_{\eta_0',\xi'} = \epsilon\eta_{\eta_0,\xi}$ para algún $\epsilon \in \mathrm{Irr}(K_0)$. Evaluando en $g_i = 1$ para $i > 1$, obtenemos que $\eta_0' = \epsilon\eta_0$. Ahora con g_2 libre, obtenemos que

$$\xi'\epsilon\eta_0 = \xi'\eta_0' = \epsilon\xi\eta_0$$

y, por lo tanto, $\xi^{-1}\xi'$ fija η_0. □

2.2.2. Índice de ramificación

Lema 2.2.5. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea χ un carácter de G' con $e(\chi)^2 = |\operatorname{Stab}_\chi|$. Para cualquier raiz de la unidad ω de orden $e(\chi)$, Stab_χ está generado por $\xi_1 = \phi\pi_1$ y $\xi_2 = \phi\pi_2$ donde $\pi_1 : K' \to F_A \to \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z}$ y $\pi_2 : K' \to F_B \to \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z}$ are son las proyecciones y $\phi : \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^\times$ es el carácter inducido por ω.*

Demostración. Sabemos por el Lema 1.2.2 que Stab_χ debe ser $\mathbb{Z}/e(\chi) \times \mathbb{Z}/e(\chi)\mathbb{Z}$. Ahora bien, un elemento de $F_A \times F_B$ tiene orden un divisor de $e(\chi)$ si y solo si cada una de sus coordenadas lo cumplen. Por lo tanto, hay a lo sumo $e(\chi)^2$ elementos de tal orden en $F_A \times F_B$ porque, en un grupo cíclico, hay a lo sumo $e(\chi)$ elementos cuyo orden es un divisor de $e(\chi)$. Luego, la imagen de la inyección $\operatorname{Stab}_\chi \to F_A \times F_B$ esta únivocamente determinada por $e(\chi)$ y el resultado se sigue. □

Teorema 2.2.2. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea $(\eta_0, \xi) \in I_{A,B}$. Entonces,*

$$e_{G'/H}(\chi_{\eta,\xi}) = \frac{m}{\mathrm{mcd}\left(\frac{|\overline{K}_0|R}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, m\right)}$$

donde m es el orden de ξ en $\mathrm{Irr}(K_0)/\operatorname{Stab}_{\eta_0}$.

Demostración. Recordemos que $\theta := \theta_{\eta_0,\xi}$ debe estar fijado por $K = F_A \times F_B$. Probemos primero el caso en que $K' = K$. Nombremos $\chi = \chi_{\eta_0,\xi}$ de forma tal que $\chi\big|_H = \theta^{e(\chi)}$. Usaremos el subgrupo $\hat{H}$ de G que es la preimagen de F_A. Tenemos que $G/\hat{H} \simeq F_B$ y $\hat{H}/H \simeq F_A$ son cíclicos. Dado que en una extensión cíclica los ídices de ramificación son siempre uno, $e(\chi)$ cocincide con el cardinal de la F_B-órbita de cualquier $\chi' \in \mathrm{Irr}(\hat{H})$ que es un constituyente irreducible de $\chi\big|_{\hat{H}}$. Equivalentemente, es el menor entero positivo i tal que γ^i estabiliza χ'.

Recordar que $\hat{G}_A$ es el grupo generado por G_A y σ y que $\hat{G}_A/\hat{H} = K_0$. Existe un carácter $\hat{\eta}$ de $\hat{G}_A$ tal que $\hat{\eta}\big|_{G_A}$ es la σ-órbita de $\eta := \eta_{\eta_0,\xi}$. La restricción $\hat{\eta}\big|_{\hat{H}}$ tiene un constituyente irreducible que se restringe a θ. Notemos que la acción de $G/\hat{H}$ conmuta con la de $\mathrm{Irr}(\hat{H}/H)$ porque K es abeliano. Luego, podemos asumir que χ' es un constitutyente irreducible de $\hat{\eta}\big|_{H'}$.

Recordemos que la acción de γ coincide con la de $\delta \in K_0$. Por lo tanto, γ^i estabiliza χ' si y solo si $\frac{\mathrm{ord}(\delta)}{\mathrm{mcd}(i,\mathrm{ord}(\delta))}$ divide a $\frac{|\operatorname{Stab}_{\chi'}||\overline{K}_0|}{|K_0|}$. Equivalentemente, $|\operatorname{Stab}_{\hat{\eta}}||\,\mathrm{mcd}\left(\frac{i|\overline{K}_0|}{B}, |\overline{K}_0|\right)$. Por lo tanto,

$$e(\chi) = \frac{|\operatorname{Stab}_{\hat{\eta}}|}{\mathrm{mcd}\left(\frac{|\overline{K}_0|}{B}, |\operatorname{Stab}_{\hat{\eta}}|\right)}$$

Notemos que ahora que cada constituyente irreducible de $\hat{\eta}\big|_{\hat{H}}$ sigue siendo irreducible al restringirse a H. Luego, $|\operatorname{Stab}_{\hat{\eta}}|$ es el número de constituyentes irreducibles de $\hat{\eta}\big|_H$. Notemos que la acción de σ y la de $\mathrm{Irr}(G_A/H)$ conmutan por construcción. Por lo tanto,

$$|\operatorname{Stab}_{\hat{\eta}}| = |\operatorname{Stab}_{\eta}| \cdot |\sigma\text{-orbit of } \eta|$$

Finalmente, como $\sigma\eta = \xi\eta$ y $\operatorname{Stab}_\eta = \operatorname{Stab}_{\eta_0}$, $|\sigma\text{-orbit of } \eta|$ es m, el orden de ξ en $\mathrm{Irr}(K_0)/\operatorname{Stab}_{\eta_0}$. En conclusión,

$$e(\chi) = \frac{m}{\mathrm{mcd}\left(\frac{|\overline{K}_0|}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, m\right)}$$

dado que $|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|$ divide a $\frac{|\overline{K}_0|}{B}$.

Probemos el caso general ahora. Fijemos un carácter irreducible $\hat{\chi}$ de G tal que χ es un constituyente irreducible de $\hat{\chi}\big|_{G'}$. Notemos que $G/G' \simeq K/K' \simeq \mathbb{Z}/T\mathbb{Z}$ es cíclico y las acciones de $\mathrm{Irr}(K')$ y G/G' conmutan. Por lo tanto,

$$e_{G/H}(\hat{\chi}) = e_{G'/H}(\chi)|\mathbb{Z}/R\mathbb{Z} - \text{órbita de } \chi| = e_{G'/H}(\chi)|\mathbb{Z}/R\mathbb{Z} - \operatorname{Stab}_{\hat{\chi}}|$$

Ahora bien, $\mathrm{Irr}(\mathbb{Z}/R\mathbb{Z})$ se incluye en $\mathrm{Irr}(K)$ como los carácteres cuya restricción a K' es trivial. Tomemos generadores ξ_1, ξ_2 of Stab_χ como en el lema anterior. Recordemos que K' esta generado por $(1,\ell)$ and $(0,R)$. Luego, $\xi_1^i\xi_2^j$ se anula en K' si y solo si $e_{G/H}(\chi)|jR$ y $e_{G/H}(\chi)|i + j\ell$. Sea $R' = \mathrm{mcd}(R, e_{G/H}(\chi))$. Buscamos que $\frac{e_{G/H}(\chi)}{R'}|i,j$. Luego, queremos soluciones en $(\mathbb{Z}/R'\mathbb{Z})^2$ a $R'|i + \ell j$. Esto es el kernel del morfismo sobreyectivo $(\mathbb{Z}/R'\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/R'\mathbb{Z}$ dado por $(1,0) \mapsto 1$ y $(0,1) \mapsto \ell$. Por lo tanto,

$$|\mathbb{Z}/R\mathbb{Z} - \operatorname{Stab}_\chi| = R'$$

Finalmente notemos que

$$\mathrm{mcd}\left(\frac{|\overline{K}_0|}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, m\right)\mathrm{mcd}\left(R, \frac{m}{\mathrm{mcd}\left(\frac{|\overline{K}_0|}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, m\right)}\right) = \mathrm{mcd}\left(\frac{R|\overline{K}_0|}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, m\right)$$

□

Notemos que $e(\chi(\eta,\xi))$ no depende de la elección de χ. Luego, denotaremos $e(\eta,\xi)$ o $e(\theta)$ a este número. Por el Lema 2.2.5 el grupo $\operatorname{Stab}_{\chi_{\eta_0,\xi}} \subset \mathrm{Irr}(K')$ también solo depende de η_0 y ξ.

2.2.3. Fórmula reducida

Necesitamos calcular las sumas de $\Omega^{G'/H}_{\theta_{\eta_0,\xi}}(-,-)$ sobre θ. Identifiquemos $F_A \times F_B$ con $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$ y, para $a, b \in K^g$, definamos

$$\Delta(a,b) = \frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{|\langle \sum a_i^{(1)} b_i^{(2)} - a_i^{(2)} b_i^{(1)} \rangle|}$$

donde el supra-índice indica la coordenada en $\mathbb{Z}/A\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$ y el cálculo lo hacemos en $\mathbb{Z}/\,\mathrm{mcd}(A,B)\mathbb{Z}$. Este número no depende de la elección de la identificación. Definamos también

$$e_A(\eta_0) := \frac{\mathrm{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, |K_0|)}{\mathrm{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, \frac{|\overline{K}_0|}{B})}$$

para $\eta_0 \in \mathrm{Irr}(G_0)$. Observamos que $e_A(\eta_0)|\,\mathrm{mcd}(A,B)$.

Lema 2.2.6. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea η_0 un carácter de G_0 tal que $|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|$ divide a $\frac{|K_0|}{B}$ y $z \in H$ un elemento tal que cada una de sus coordenadas tiene una raíz $\operatorname{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, |K_0|)$-ésima en G_0. Entonces, para cualesquiera $a, b \in K^g$,*

$$\sum_{[\xi]} \sum_{\theta} \Omega_\theta^{G'/H}(a,b)\theta(z) = \begin{cases} \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}\right) \prod_{i=1}^{A} \eta_0(z_i) & \text{si } e_A(\eta_0)|\Delta(a,b) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde la primer suma recorre todos los $[\xi] \in \operatorname{Irr}(K_0)/\operatorname{Stab}_{\eta_0}$ de orden A y la segunda es sobre todos los constituyentes irreducibles de $\eta_{\eta_0,\xi}$.

Demostración. Recordemos que Ω es compatible con torres, así que podemos asumir que $G' = G$. La primer suma recorre un grupo cíclico de orden $m := \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}\right)$. Sea $[\xi]$ un generador. Notemos que $\xi^i(z) = 1$ dado que $\operatorname{ord}(\xi)|m|\operatorname{Stab}_{\eta_0}| = \operatorname{mcd}(A|\operatorname{Stab}_\eta|, |K_0|)$ y z tiene una raíz de ese orden. Luego, $\sum_\theta \theta(z) = \prod_{i=1}^{A} \eta_0(z_i)$.

Notemos que $\eta_{\eta_0,\xi^m} = \epsilon^m \eta_{\eta_0,\xi}$ donde $\epsilon(g) = \prod_{m=1}^{A} \xi^{(i-1)m}(g_i)$. Analicemos las ϵ-órbitas en los constituyentes irreducibles de η_{η_0,ξ^m}. Podemos aplicar la Proposición 2.1.1 dado que $\theta_{\eta_0,1}$ no ramifica. Sumemos sobre $\theta, \epsilon\theta, \ldots, \epsilon^{m-1}\theta$ para un $\theta = \theta_{\eta_0,1}$ fijo. Tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} \Omega_{\epsilon\theta}^{G/H}(a,b)^i \epsilon^i(z)\theta(z) = \theta(z) \sum_{i=1}^{m} \Omega_{\epsilon\theta}^{G/H}(a,b)^i$$

Sea $\omega = \Omega_{\eta_0,\xi}^{G/H}((1,0),(0,1))$. Recordemos que tiene orden $e_{G/H}(\eta,\xi)$ y notemos que el mismo divide tanto a $\operatorname{ord}([\xi])$ como a $\operatorname{mcd}(A,B)$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^{m} \Omega_{\epsilon\theta}^{G/H}(a,b)^i = \sum_{i=1}^{m} \omega^{i\Delta(a,b)}$$

que se anula salvo que $\omega^{\Delta(a,b)} = 1$, en cuyo caso da m. Esta condición no depende de la elección de θ. Luego, la suma en el enunciado da

$$m \sum_{\theta} \theta(z) = \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}\right) \prod_{i=1}^{A} \eta_0(z_i)$$

siempre que $e(\eta_0,\xi)|\Delta(a,b)$.

Finalmente, recordemos que $e_{G/H}(\eta_0,\xi)$ es

$$\frac{\operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}\right)}{\operatorname{mcd}\left(\frac{|K_0|}{B|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}, \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|}\right)\right)} = \frac{\operatorname{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, |K_0|)}{\operatorname{mcd}\left(\frac{|K_0|}{B}, \operatorname{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, |K_0|)\right)} = \frac{\operatorname{mcd}(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, |K_0|)}{\operatorname{mcd}\left(A|\operatorname{Stab}_{\eta_0}|, \frac{|K_0|}{B}\right)}$$

Luego, coincide con $e_A(\eta_0)$. □

En consistencia con el lema anterior,denotaremos con $\operatorname{Irr}(G_0)_{a,b} \subset \operatorname{Irr}(G_0)$ al subconjunto de aquellos caracteres η tales que $|\operatorname{Stab}_\eta|$ divide a $\frac{|K_0|}{B}$ y $e_A(\eta)|\Delta(a,b)$. Adicionalmente, para $z \in G_A$ y $\eta \in \operatorname{Irr}(G_0)$, escribamos

$$\eta(z) = \prod_{i=1}^{A} \eta(z_i)$$

donde z_i es la i-ésima coordenada de z.

Teorema 2.2.3. *En una configuración de Clifford tipo bloque, sea N un entero tal que* $\operatorname{Stab}_\eta |N$ *para cualquier* $\eta \in \operatorname{Irr}(G_0)$. *Sea* $z \in H$ *un elemento con una* $\operatorname{mcd}(AN, |K_0|)$*-ésima raíz. Para cualquier entero positivo* g *y tuplas* $a, b \in K^g$ *cuyas coordenadas generan* K'*, la siguiente identidad vale*

$$\left| \left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in G^g \times G^g : \\ [x,y]z = 1, \pi(x) = a, \pi(y) = b \end{array} \right\} \right| = \sum_\eta \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_\eta|}\right) \left(\frac{|\operatorname{Stab}_\eta|}{|K_0|}\right)^{2g} \left(\frac{|G_0|}{\eta(1)}\right)^{A(2g-1)} \eta(z)$$

donde η *recorre todos los caracteres de* $\operatorname{Irr}(G_0)_{a,b}$.

Demostración. Aplicamos el lema anterior y el Teorema 2.2.1 a la fórmula del Teorema 2.1.1;

$$\begin{aligned} \sum_{\theta \in \operatorname{Irr}(H)^{K'}} \left(\frac{|H|}{\theta(1)}\right)^{2g-1} \Omega_\theta^{G/H}(a,b)\theta(z) &= \sum_{(\eta,\xi) \in I_{A,B}/\sim} \left(\frac{|G_0|^A |\operatorname{Stab}_\eta|}{|K_0| \eta(1)^A}\right)^{2g-1} \sum_{\theta \in \Theta(\eta,\xi)} \Omega_\theta^{G/H}(a,b)\theta(z) \\ &= \sum_\eta \operatorname{mcd}\left(A, \frac{|K_0|}{|\operatorname{Stab}_\eta|}\right) \left(\frac{|\operatorname{Stab}_\eta|}{|K_0|}\right)^{2g} \left(\frac{|G_0|}{\eta(1)}\right)^{A(2g-1)} \eta(z) \end{aligned}$$

donde en la última suma η varía en $\operatorname{Irr}(G_0)_{a,b}$. □

Observación 2.2.1. En el siguiente capítulo utilizaremos esta fórmula para calcular el E-polinomio stringy de variedades de caracteres de tipo A con monodromía géneríca. Creemos que este resultado también debería ser útil para otras familias de variedades de caracteres. Por ejemplo para D_n, podría ser útil considerar $A = 2$ or 4, $H_0 = \operatorname{Spin}_{\frac{2n}{A}}(\mathbb{F}_q)$ y G_0 un cubrimiento doble de

$$\{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}_q) : MM^T = \omega^2 \operatorname{Id}, \omega \in \mathbb{F}_q^\times\}.$$

Capítulo 3

E-polinomios de variedades de caracteres de tipo A

3.1. Puntos fijos

De ahora en adelante, fijemos enteros positivos n, d, y g con $d|n$. Seguiremos la notación de 1.4. En esta sección, obtendremos una descomposición de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F)^a$. Probaremos mas adelante que tipicamente la misma es decho la descomposicion en componentes irreducible. A partir de este punto, asumiremos que $\mathcal{C}$ es semisimple, regular, y que ningun conjunto propio de sus autovalores tiene producto uno. Más aún, sobre $\mathbb{C}$, asumiremos que los autovalores son enteros algebraicos. Resumiremos estas hipotesis diciendo que $\mathcal{C}$ es buena.

Definición 3.1.1. Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado qu contiene a F_d. Dado $a \in F_d^{2g}$, definimos

$$X_a = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) \in \mathrm{SL}_n(k)^g \times \mathrm{SL}_n(k)^g \times \mathcal{C} : [x, y]z = 1, \\ a \cdot (x, y) \in \mathrm{PGL}_n(k) \cdot (x, y) \end{array} \right\}$$

y llamamos $X_{a,z}$ a la fibra de $X_{a,z}$ sobre $z \in C$.

Por su definición, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(k))^a$ es tanto $\tilde{X}_a/\mathrm{PGL}_n(k)$ como $X_{a,z}/T(k)$ para cualquier $z \in \mathcal{C}$. Sean $a \in F^{2g}$ y $z \in \mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Fijemos una base donde z es diagonal. Denotemos con A al orden de a. El mismo coincido con el cardinal del subgropo de F_d generado por sus coordenadas. Lo identificamos con F_A.

Sean $G_A = \mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(k)^A$,

$$H_A = \{(x_1, \ldots, x_A) \in G_A : \det(x_1) \cdots \det(x_A) = 1\},$$

y $\hat{G}_A$ el subgrupo de $\mathrm{SL}_n(k)$ generado por H_A y la matrix de permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} \\ \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Llamemos $\pi : \hat{G}_A \to K$ al cociente por H_A.

Sea $\hat{\Upsilon}_A$ el conjunto cuyos elementos son funciones $V : F_A \to \mathrm{Grass}_k(n, \frac{n}{A})$ tales que $k^n = \bigoplus_{i \in F_A} V_i$ y z presetva esta descomposición. F_A actúa en $\hat{\Upsilon}_A$ por traslaciones. Definamos $\Upsilon_A = \hat{\Upsilon}_A/F_A$. Elegir un orden de los autovalores de z induce un isomorfismo

$$\Upsilon_A \simeq S_n/\langle (S_{\frac{n}{A}})^A, \mathrm{shif} \rangle$$

donde shif es el shift.

Lema 3.1.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(k)$ una clase de conjugación buena, $z \in \mathcal{C}$ y $a \in F_d^{2g}$. Entonces*

$$X_{a,z} = \bigsqcup_{[v]\in\Upsilon_A} \left\{\ (x,y) \in \hat{G}_A^g \times \hat{G}_A^g : [x,y]z^v = 1, \pi(x,y) = a\ \right\}$$

donde z^v es la tupla de H_A cuya i-ésima coordenada es $z\big|_{v(i)}$. Esta descomposición es equivariante con respectoa a las acciones de F_d y $T(k)$.

Demostración. Fijemos $(x,y) \in X_{a,z}$ y $w \in \mathrm{PGL}_n(k)$ tales que $w(x,y)w^{-1} = a \cdot (x,y)$. Reescribamos la segunda condición de X_a como $w(x,y) = a \cdot (x,y)w$. Sea E_λ un autoespacio de w con autovalor λ. Entonces $a_i \cdot E_\lambda$ es un autoespacio de autovalor $a_i \cdot \lambda$ para cualquier i. Se sigue que, si identificamos F_A con el grupo generado por las coordenadas de a, $V = \bigoplus_{i\in F_A} E_{i\cdot\lambda}$ es un subespacio invariante por (x,y). Recordemos que z no es un producto de commutadores en ningún subespacio propio de k^n. Por lo tanto, debe ser $V = k^n$. Probamos que hay una F_A-graduación $k^n = \bigoplus_{i\in F_A} V_i$ tal que (x,y) tiene grado a. Notemos que z tiene grado cero. Además, todos los V_i's deben tener la misma dimensión porque $\langle a_i \rangle = F_A$. Recíprocamente, si tal graduación es daday hay una tupla de grado a de operadores lineales (x,y) con $[x,y] = z$, podemos definir w como la acción por i en V_i. Las graduaciones posibles están en biyección con Υ_A. Ahora bien, w determina la graduación modulo traslaciones. En efecto, si W_i es otra graduación, como z es diagonalizable y tiene grado cero en ambas graduaciones, debe existir una intersección no vacía $W_i \cap V_j$. Pero entonces $\bigoplus_{k\in F_A}(W_{i+k} \cap V_{j+k})$ es invariante y, por lo tanto, debe ser k^n.

Para la última afirmación, notar que la acción de F_d en $X_{a,z}$ coincide con la inducida por F_d via multiplicar en $\hat{G}_A$. Lo mismo sucede con la acción de T. □

Obtuvimos una descomposición F_d-equivariante

$$\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(k))^a = \bigsqcup_{[v]\in\Upsilon_A} \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(k))_v^a$$

Probaremos más adelante que, si $\mathrm{mcd}(A, \frac{n}{d}) = 1$, esta decomposición es de hecho la descomposición en componentes irreducibles de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$. Ahora solo probaremos el siguiente lema que será útil más adelante.

Lema 3.1.2. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(k)$ una clase de conjugación buena. Entonces $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(k))_v^a$ es suave y equidimensional de dimensión $(2g-1)(\frac{n^2}{A}-1)-n+1$, para cualesquiera $a \in F$ y $v \in \Upsilon_A$.*

Demostración. Sabemos que la acción de $\mathrm{PGL}_n(k)$ es libre. Por lo tanto, basta con probar que $X_{a,1,z}$ es suave y equidimensional. Es suficiente con probar que $[-,-]z^{-1} : aH_A^{2g} \to H_A$ es regular. La demostración de este hecho es exactamente la misma que para $a = 1$ dado que H_A es reductivo. Ver [HR08, theorem 2.2.5]. □

3.2. Principales enunciados y algunas aplicaciones

Las demostraciones de los siguientes tres teoremas están en las secciones 3.5, 3.6, y 3.7 respectivamente. Son consecuencias largas del teorema 3.4.1 gracias a los resultadoes de Katz y Groechening–Wyss–Ziegler.

Teorema 3.2.1. *Sea n un número natural. Para cualesquiera divisor d de n, F_d-torsión discreta $\mathcal{D}$ de orden $\frac{d}{K}$, $a \in F_d^{2g}$, y clase de conjugación buena $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$,*

$$\begin{aligned} &E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a/F_d^{2g}, \mathcal{L}_{\mathcal{D},a}; u,v)(uv)^{F(a)} \\ &= \sum_\tau \frac{\left((-1)^n (uv)^{\frac{n^2}{2}} \mathcal{H}_{\tau'}(uv)\right)^{2g-1}}{(uv-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{\substack{A|s|n \\ \mathrm{mcd}(s,\frac{n}{d})|K\frac{s}{A}}} C_{s,1,\tau}\, \mathrm{mcd}\left(\frac{s}{A}, \frac{n}{d}\right)^{2g-1} \mathrm{mcd}\left(s, \frac{n}{d}\right) \end{aligned}$$

donde A es el orden de a, $\mathcal{L}_{\mathcal{D},a}$ e el sistema local associado a $\mathcal{D}$, $F(a)$ es la mitad de la codimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$, y τ recorre todas los tipos de multi-partición de tamaño n.

Teorema 3.2.2. *Sea n un número natural. Para cualesquiera divisor d de n, F_d-torsión discreta $\mathcal{D}$ de orden $\frac{d}{K}$, y clase de conjugación buena $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$,*

$$E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); u, v) = \sum_{\tau} \frac{\left((-1)^n(uv)^{\frac{n^2}{2}}\mathcal{H}_{\tau'}(uv)\right)^{2g-1}}{(uv-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{s|n} s^{2g} C_{s,\tau}\Phi_g(n, d, s, K)$$

En particular,

$$E_{st}^{\hat{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); u, v) = E_{st}^{\check{\mathcal{D}}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_{\frac{n}{d}}); u, v)$$

para cualesquiera $d, \mathcal{C}$ y torsiones discretas $\hat{\mathcal{D}}$ y $\check{\mathcal{D}}$ con la misma clase en $F_{\mathrm{mcd}(d,\frac{n}{d})}$.

Recordemos que

$$\Phi_g(n, d, s, K) = \prod_{p|n \text{ primo}} \frac{(p - p^{1-2g})p^{\phi_g(p,n,d,s,K)} + p^{1-2g} - 1}{p - 1}$$

donde

$$\phi_g(p, n, d, s, K) = \mathrm{mín}(v_p(s), v_p(n) - v_p(d), v_p(d), v_p(n) - v_p(s), v_p(K))$$

Observación 3.2.1. Apesar que Φ_g es simétrica en s y $\frac{n}{s}$, $C_{s,\tau}$ no lo es. Por ejemplo, si $n = 4$, $s = 1$, $\tau = \{\{1\}, \{1\}, \{1\}, \{1\}\}$, $C_{s,\tau} = 0$ y $C_{\frac{n}{s},\tau} = 6$.

Teorema 3.2.3. *Sea n un número natural. Para cualquier divisor d de n, F_n-torsión discreta $\mathcal{D}$, carácter ξ de $F_{\frac{n}{d}}$, $a \in F_{\frac{n}{d}}^{2g}$, y clase de conjugación $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$,*

$$E_{st}^{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); u, v)_\xi = E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a, \mathcal{L}_{\mathcal{D},a}; u, v)(uv)^{F(a)}$$

siempre que $\mathrm{ord}(\xi) = \mathrm{ord}(a)$, *donde $\mathcal{L}_{\mathcal{D},a}$ es el sistema local asociado a $\mathcal{D}\big|_{F^2_{\frac{n}{d}}}$ y $F(a)$ es la mitad de la codimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$.*

En el resto de la sección probaremos algunas consecuencias sencillas de los resultados anteriores. Las mismas son compatibles con resultados anteriores de T. Hausel, E. Letellier, y F. Rodriguez-Villegas; [HLR11, Theorem 1.2.5] y [HLR13, Theorem 1.1.1].

Corolario 3.2.1. *Sea n un número natural. Para cualquier divisor d de n y cualquier clase de conjugación genérica $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$, la característica de Euler stringy de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)$ se anula si $n, g > 1$ y es 1 si $n = 1$.*

Demostración. Recordemos que la carácteristica de Euler stringy coinccide con $E_{st}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); 1, 1)$. Los polinomios $\mathcal{H}_\tau(uv)$ siempre son exactamente divisibles por $(uv-1)^n$ para las multiparticiones en la fórmula del teorema 3.2.2. Por lo tanto,

$$v_{uv-1}\left(\frac{\left((-1)^n(uv)^{\frac{n^2}{2}}\mathcal{H}_{\tau'}(uv)\right)^{2g-1}}{(uv-1)^{2g-1+n-1}}\right) = (2g-1)n - (2g-1+n-1) = 2(g-1)(n-1)$$

y la carácteristica de Euler stringy se anula si $n, g > 1$. Para $n = 1$, tenemos que $d = s = K = 1$, $\tau = \{1\}$, $\mathcal{H}_\tau(q) = 1 - q$, $C_{s,\tau} = 1$, y $E_{st}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d); 1, 1) = 1$. □

Corolario 3.2.2. *Sea n un número natural. Para cualquier divisor d de n y cualquier clase de conjugación génerica $\mathcal{C}$ de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d))$ es irreducible.*

Demostración. Sabemos que es equidimensional. Por lo tanto, es suficiente con chequear que el coeficiente principal de E-polynomial es uno. Ahora bien, el grado de $\mathcal{H}_\tau$ es

$$\sum_{\lambda\in\tau} m_\lambda(-\frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle + \sum_{\Box\in\lambda} h(\Box))$$

donde la segunda suma es sobre los casillas del diagrama de Ferrer asociado a λ. Recordemos que

$$-\frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle = -\frac{1}{2}|\lambda| - \sum_i \lambda_i(i-1)$$

Por otro lado, obtenemos que

$$\sum_{\Box\in\lambda} h(\Box) = \sum_i \frac{\lambda_i(\lambda_i+1)}{2} + \lambda_i(i-1)$$

contando cuantas veces cada casilla es contada en la longitud gancho. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\deg\mathcal{H}_\tau &= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\tau} m_\lambda(-|\lambda| + \sum_i \lambda_i(\lambda_i+1)) \\ &= -\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\tau} m_\lambda \sum_i \lambda_i(\lambda_i+1)\end{aligned}$$

Esta suma se maxima en $\{\{n\}\}$. Su partición dual es $\tau = \{\{1,\dots,1\}\}$. Para esta partición tenemos que

$$C_{s,1,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{if } s=1 \\ 0 & \text{if } s>1 \end{cases}$$

Esto significa que el coeficiente principal de $E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n/F_d);u,v)$ es

$$\mathrm{mcd}\left(\frac{1}{1},\frac{n}{d}\right)^{2g-1}\mathrm{mcd}\left(1,\frac{n}{d}\right) = 1.$$

$\Box$

Corolario 3.2.3. *Sea n un número natural, d un divisor de n, y $\mathcal{C}$ una clase de conjugación buena de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Para cualquier $a\in F_d$ de orden A coprimo con $\frac{n}{d}$, las componentes irreducibles de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$ son $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)_v^a$ donde $[v]$ recorre Υ_A.*

Demostración. Por el mismo argumento que en el resultado anterior, basta con ver que pasa con $A\tau$ donde $\tau = \{\{1,\dots,1\}\}$. Para este tipo tenemos que

$$\frac{n^2}{2A} + A\deg\mathcal{H}_{\tau'} = \frac{n^2}{A}$$

y

$$C_{As,1,A\tau} = C_{s,A,\tau} = \begin{cases} \frac{\vartheta(\tau,n)}{A} & \text{if } s=1 \\ 0 & \text{if } s>1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el número de componentes irreducibles es

$$\frac{\vartheta(\tau,n)}{A}\,\mathrm{mcd}\left(\frac{A}{A},\frac{n}{d}\right)^{2g-1}\mathrm{mcd}\left(A,\frac{n}{d}\right) = \frac{\vartheta(\tau,n)}{A}.$$

Notemos que $\frac{\vartheta(\tau,n)}{A}$ es el número de formas de separar $\{1,\dots,n\}$ en A subconjuntos de tamaño $\frac{n}{A}$ módulo shift cíclico. $\Box$

3.3. Preparaciones

En esta sección describiremos el shift fermiónico y exhibiremos un spread out de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)$.

Lema 3.3.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ una clase de conjugación buena. Entonces*

$$F(a) = \frac{1}{2}(\dim \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n) - \dim \mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))^a) = \frac{n^2}{2}(2g-1)\left(1 - \frac{1}{A}\right)$$

para cualquier $a \in F$.

Demostración. Esto se sigue del argumento al final de la proposición 8.2 de [HT03] dado que existe una forma simpléctica invariante [Gur+97]. □

Lema 3.3.2. *Sea $R \subset \mathbb{C}$ una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada que contiene a los autovalores de una calse de conjugación buena $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Entonces $\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R)$ es una clase de conjugación de $\mathrm{SL}_n(R)$ y, para cualquier morfismo $\phi : R \to \mathbb{F}_q$ sobreyectivo a un cuerpo finito, $\phi(\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R))$ es una $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$-órbita.*

Demostración. Si una matriz sobre R es regular y semisimple en $\mathbb{C}$ y todos sus autovalores viven en R, la matriz es diagonalizable en R. En efecto, es conjugada a su matriz compañera. Por lo tanto, cualesquiera dos elementos de $\phi(\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R))$ son $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$-conjugados. Por otro lado, cualquier matriz inversible de determinante uno en $\mathbb{F}_q$ es un producto de matrices elementales y, por lo tanto, se puede levantar a $\mathrm{SL}_n(R)$. Además, el morfismo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) \to \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)/\operatorname{Stab}_z$ es sobreyectivo para cualquier $z \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ diagonalizable. Deducimos que $\phi(\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R))$ es una $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$-órbita. □

Proposición 3.3.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ una clase de conjugación buena y $R \subset \mathbb{C}$ una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada que contiene a los autovalores de $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R)}(\mathrm{SL}_n(R))$ es un spread out de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)$ y $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(R))_\phi(\mathbb{F}_q) = \mathcal{M}_B^{\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)\cdot\phi(\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(R))}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q))$ para cualquier morfismo $\phi : R \to \mathbb{F}_q$ a un cuerpo finito.*

Demostración. El lema anterior implica un enunciado análogo para $X^{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$. Luego, la primer afirmación se sigue del Lema 2 de [Ses77]. El segundo se sigue de [Ses77, item (ii) of Theorem 3] y [Kac80, Lemma 3.2], dado que la acción es libre. □

En consecuencia, definiendo $R \subset \mathbb{C}$ como la $\mathbb{Z}$-álgebra generada por todas las raices n^2-ésimas de los autovalores μ_i de $\mathcal{C}$ y todos los productos de la forma $(\prod_{i \in I} \mu_i - 1)^{-1}$, donde I es un subconjuto de $\{1, \ldots, n\}$, obtendremos un spread out con polinomio de conteo torcido gracias el teorema 3.4.1.

3.4. Contando puntos stringy

Queremos calcular el número de puntos (torcidos) sobre un sector torcido de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G(\overline{\mathbb{F}}_q))$. Concretamente, queremos evaluar $|(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G(\overline{\mathbb{F}}_q))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}}|$para cualesquiera $a, b \in F$. Con este objetivo en mente, primero haremos un mejor descripción de estas variedades para poder aplicar lo resultados del capítulo anterior. Primero, introduciremos una versión torcida de X_a.

Definición 3.4.1. Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elemnetos con $d|q-1$. Dados $a, b \in F^{2g}$, definimos

$$X_a^b = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z) \in \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)^g \times \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)^g \times \mathcal{C} : [x, y] = z, \\ \mathrm{Frob}_q(x, y) = b \cdot (x, y), a \cdot (x, y) \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \cdot (x, y) \end{array} \right\}$$

como subesquema de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q))$. Llamemos $X_{a,z}^b$ a la fibra de X_a^b sobre $z \in C$.

Lema 3.4.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ una clase de conjugación buena con $\mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$. Entonces, para $d|q-1$ y $a, b \in F$,*

$$(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q} = X_a^b / \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$$

y, en particular,

$$|(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q}| = \frac{|X_a^b|}{|\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)|} = \frac{|X_{a,z}^b|}{|T(\mathbb{F}_q)|}$$

para cualquier $z \in \mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

Demostración. Notemos que cualquier elemento de X_a^b es fijado por $b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q$. Además, la acción de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$ preserva X_a^b. Se sigue que hay un morfismo $\varphi : X_a^b / \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q) \to (\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q}$. Afirmamos que φ es injectiva. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X_a^b$ con $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$. Esto significa que existe $w \in \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ tal que $w(x_1, y_1)w^{-1} = (x_2, y_2)$. Pero entonces

$$\mathrm{Frob}_q(w)(x_1, y_1)\,\mathrm{Frob}_q(w)^{-1} = (x_2, y_2)$$

dado que Frob_q actúa en $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ como b. Por lo tanto, $w\,\mathrm{Frob}_q(w)^{-1}$ fix (x_1, y_1). Pero la acción es libre. Debe ser $w \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$. El mismo argumento permite requerir solamente $C \in \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ en la definición de X_a^b.

Sobreyectividad es una consequencia del teorema de Lang. En efecto, consideremos X_a sobre $k = \overline{\mathbb{F}}_q$. Recordemos que $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q))^a$ es $X_a / \mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Denotemos $F = b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q$ y fijemos $(x, y) \in (\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\overline{F}_q))^a)^F$. En este caso, la fibra $X_{a,(x,y)}$ sobre (x, y) es F-invariante. Nos encontramos en la siguiente situación: F es un endomorfismo de orden finito de un cociente de un grupo conexo $\mathrm{PGL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Más aún, F tiene un número finito de puntos fijos dado que $F^d = \mathrm{Frob}_q^d$. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Lang para concluir que $X_a^F \to (\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q))^a)^F$ es sobreyectivo.

Para la última afirmación, recordemos que la acción es libre y apliquemos nuevamente le teorema de Lang. □

El siguiente paso es reescribir $X_{a,z}^b$ de forma tal que podemos aplicar 2.2.3. Sean $a, b \in F^{2g}$ y $z \in \mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Fijemos un base donde z es diagonal. Denotemos con A y B los ordenes de a y b respectivamente. Estos números coinciden con el tamaño de los subgrupos de F generados por las coordenadas de a y b. Identifiquemos F_A y F_B con estos grupos. Fijemos un isomorfismo $\beta : F_B \simeq \mathbb{Z}/B\mathbb{Z}$ y sea ω una raiz de la unidad tal que $b_i = \omega^{\beta(b_i)}$. Notemos que ω tiene orden B.

Recordemos algunas definicions del ejempo al principio del capítulo anterior. Sea $G_A = \mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)^A$,

$$H_A = \{(x_1, \ldots, x_A) \in G_A : \det(x_1) \cdots \det(x_A) = 1\},$$

y $G_{A,B}$ el subgrupo de $\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q})$ generado por H_A, la matrix de permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} \\ \mathrm{Id}_{\frac{n}{A}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz diagonal $\Gamma = (\gamma, \cdots, \gamma, \gamma^{1-n})$ donde $\gamma \in \overline{\mathbb{F}_q}$ tine orden $B(q-1)$ y cumple que $\mathrm{Frob}_q(\gamma) = \omega^{-1} \cdot \gamma$. Recordemos que H_A es normal en $G_{A,B}$ y que su cociente es $F_A \times F_B$. Llamemos $\pi : G_{A,B} \to F_A \times F_B$ a la proyección natural y $\pi_A : G_{A,B} \to F_A$ y $\pi_B : G_{A,B} \to F_B$ a los morfimos inducidos.

Lema 3.4.2. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ una clase de conjugación buena y $z \in \mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Entonces*

$$X^b_{a,z} = \bigsqcup_{[\upsilon] \in \Upsilon_A} \left\{ \begin{array}{c} (x,y) \in G^g_{A,B} \times G^g_{A,B} : [x,y]z^\upsilon = 1, \\ \pi_A(x,y) = a, \pi_B(x,y) = b \end{array} \right\}$$

donde z^υ es la tupla de H_A cuya i-ésima coordenada es $z\big|_{\upsilon(i)}$.

Demostración. De exactamente la misma forma que en el lema 3.1.1 podemos lidiar con la condición de conjugación en $X^b_{a,z}$. Fijemos una graduación tal que z tiene grado cero y (x,y) actúa con grado a. Necesitamos entender la condición que involucra al Frobenius. Pero notemos que $(x,y)\gamma^{\beta(b)}$ es fijado por el Frobenius. Por lo tanto, $y \in G_{A,B}$ dado que γ preserva todos las posibles graduaciones y tiene determinante uno. □

Proposición 3.4.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ una clase de conjugación buena y $z \in \mathcal{C} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$. Sean $a, b \in F^g_d$ para algún entero g y algún divisor d de n. Asumamos que cada autovalor de $\mathcal{C}$ tiene una raíz dn-ésima en $\mathbb{F}_q$ y que $dn|q-1$. Entonces*

$$|(\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_B(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q}| = \sum_{[\upsilon]\in\Upsilon_A} \sum_\eta \frac{A}{(q-1)^{n-1}} \left(\frac{|\,\mathrm{Stab}_\eta\,|}{(q-1)} \right)^{2g} \left(\frac{|\,\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)|}{\eta(1)} \right)^{A(2g-1)} \eta(z^\upsilon)$$

donde η recorre $\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q))_{a,b}$, y A y B son los órdenes de a y b respectivamente.

Demostración. Se sigue del teorema 2.2.3 y de los lemas anteriores. Estamos usando que todo caracter de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$ tiene estabilizador, bajo la acción de $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$, de orden un divisor de $\frac{n}{A}$. □

Decimos que una clase de conjugación $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ es super buena si es buena y todos los autovalores de $\mathcal{C}$ tienen una raíz n^2-ésima en $\mathbb{F}_q$. En el resto de esta sección, probaremos el siguiente teorema. En particular, daremos fórmulas explícitas para las constantes $C_{s,A,\tau}$ que aparecen en el mismo.

Teorema 3.4.1. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}}_q)$ una clase de conjugación super buena.Sean $a, b \in F^g_d$ para algún entero g y algún divisor d de n. Entonces*

$$|(\mathcal{M}^{\mathcal{C}}_B(\mathrm{SL}_n(\overline{\mathbb{F}_q}))^a)^{b^{-1}\,\mathrm{Frob}_q}| = \frac{A}{(q-1)^{n-1}} \sum_\tau \left(\frac{(-1)^n q^{\frac{n^2}{A}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)^A}{(q-1)} \right)^{(2g-1)} \sum_s s^{2g} C_{s,A,\tau}$$

donde τ recorre todas los tipos de multiparticiones de tamaño $\frac{n}{A}$, s todos los divisores de $\frac{n}{B}$ que satisfacen $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{n}{Bs})$, y $C_{s,A,\tau}$ son constantes combinatoricas que no dependen de q.

Fijemos $d|n|q-1$ y $a, b \in F^{2g}_d$. Aplicaremos la descripción de Green de $\mathrm{Irr}(\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q))$ para evaluar la fórmula de la proposición 3.4.1 y probar el teorema 3.4.1. Definamos $S_{a,b}$ como el lado derecho de la fórmula en la proposición anterior. Y, para $s|n$ y τ un tipo de multi-partición, sea

$$C_{s,A,\tau} := \frac{1}{q-1} \sum_{[\upsilon]\in\Upsilon_A} \sum_\eta \eta(z^\upsilon)$$

donde η recorre todos los caracteres irreducibles de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$ de tipo τ y con $|\,\mathrm{Stab}_\eta\,| = s$. Podemos recuperar la suma original como

$$\begin{aligned} S_{a,b} &= \frac{A}{(q-1)^{n-1}} \sum_\tau \left(\frac{|\,\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)|^A}{(q-1)\tau(1)^A} \right)^{(2g-1)} \sum_s s^{2g} C_{s,A,\tau} \\ &= \frac{A}{(q-1)^{n-1}} \sum_\tau \left(\frac{(-1)^n q^{\frac{n^2}{A}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)^A}{(q-1)} \right)^{(2g-1)} \sum_s s^{2g} C_{s,A,\tau} \end{aligned}$$

donde la primera suma recorre tode los tipos posibles τ y la segunda todos los divisores s de $\frac{n}{B}$ tales que $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(A,\frac{n}{Bs})$.

Más aún, sea

$$\check{C}_{s,A,\tau} = \frac{1}{q-1}\sum_{[v]\in\Upsilon_A}\sum_{\eta}\eta(z^v)$$

donde η recorre todos los caracteres irreducibles de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{A}}(\mathbb{F}_q)$ con tipo τ y $|\operatorname{Stab}_\eta|$ multiplo de s. Probaremos que $\check{C}_{s,e,\tau}$ se anula salvo que $s|\frac{n}{A}$. Asumiendo esto y aplicando la fórmula de inversión de Möbius, obtenemos que

$$C_{s,A,\tau} = \sum_{s|j|\frac{n}{A}}\mu\left(\frac{j}{s}\right)\check{C}_{j,e,\tau}$$

para cualesquiera s, A, τ.

Fijemos una base donde z es diagonal, igual a $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Recordemos que tal elección induce una biyección entre Υ_A y descomposiciones $\{1,\ldots,n\} = \sqcup_{i=1}^A I_i$ con $|I_i| = \frac{n}{A}$, salvo shift cíclico. Fijemos $\alpha\in\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$ de orden s. Por el teorem de Green 1.2.8 tenemos que

$$\check{C}_{s,A,\tau} = \frac{d_\tau^A}{A(q-1)}\sum_{\Lambda}\sum_{\{I_{\xi,i}\}}\prod_{\xi\in\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)}\prod_{i=1}^{A}\prod_{j\in I_{\xi,i}}\xi(\mu_j)$$

donde Λ rucorre todas las multi-particiones $\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)\to\mathcal{P}$ de tipo τ fijadas por α, e $\{I_{\xi,i}\}$ las particiones de $\{1,\ldots,n\}$ en subconjuntos indexados por $\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)\times\{1,\ldots,A\}$ tales que $|I_{\xi,i}| = |\Lambda(\xi)|$. El factor $\frac{1}{A}$ proviene de cocientar por el shift cíclico.

Consideremos un conjunto $\mathcal{I}$ de elementos de la forma $\iota = (\lambda^{(\iota)}, I_1^{(\iota)},\ldots,I_A^{(\iota)})$ donde $\lambda^{(\iota)}$ es una partición no-trivial y los $I_i^{(\iota)}$ son subconjuntos disjuntos de $\{1,\ldots,n\}$ de cardinal $|\lambda^{(\iota)}|$. Más aún, requerimos que, al variar i e ι, los conjuntos $I_i^{(\iota)}$ formen una partición de $\{1,\ldots,n\}$ y que $\sum_{\iota\in\mathcal{I}}|\lambda^{(\iota)}| = \frac{n}{A}$. Hay una función de olvido $\pi:\mathcal{I}\to\mathcal{P}$. Luego, cada $\mathcal{I}$ determina un tipo de multi-partition $\tau(\mathcal{I})$. Dar una multi-particion Λ de este tipo es equivalente a dar una inyección $\psi:\mathcal{I}\to\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q)$. En efecto, podemos definir

$$\Lambda(\xi) = \begin{cases}\pi(\psi^{-1}(\xi)) & \text{if } \xi\in\operatorname{Img}\psi\\ \emptyset & \text{if not}\end{cases}$$

para tal ψ. Por lo tanto

$$\check{C}_{s,A,\tau} = \frac{d_\tau^A}{A(q-1)}\sum_{\tau(\mathcal{I})=\tau}\sum_{\psi}\prod_{\iota}\psi(\iota)(\mu_\iota)$$

donde la primera suma recorre todos los $\mathcal{I}$ como antes que inducen el tipo τ, la segunda es sobre todas las inyecciones $\psi:\mathcal{I}\to\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)$ tales que la multipartición inducida $\Lambda:\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)\to\mathcal{P}$ es estabilizada por α, y $\mu_\iota = \prod_{i=1}^A\prod_{j\in I_i^{(\iota)}}\mu_i$.

Fijemos un $\mathcal{I}$ y sea

$$\Sigma(\mathcal{I}) := \sum_{\psi}\prod_{\iota}\psi(\iota)(\mu_\iota)$$

donde ψ varia como antes. La condición $\alpha\Lambda = \Lambda$ significa que existe $\omega\in W_\pi\subset S(\mathcal{I})$, el estabilizador de $\pi:\mathcal{I}\to\mathcal{P}$, tal que $\alpha\psi = \omega\psi$. De existir, tal ω es ínico dado que la acción de $S(\mathcal{I})$ en $\operatorname{Hom}(\mathcal{I},\operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times))$ es libre en las inyecciones. Por lo tanto, $\Sigma(\mathcal{I})$ se puede separar en sumas de la forma

$$\Sigma(\mathcal{I},\omega) := \sum_{\alpha\psi=\omega\psi}\prod_{\iota}\psi(\iota)(\mu_\iota)$$

Notemos que la suma es vacía si $s = \operatorname{ord}(\alpha)$ no coincide con el cardinal de cada órbita de ω. Asumamos que esto es cierto. En particular, como$\sum |\lambda^{(\iota)}| = \frac{n}{A}$ y cada órbita tiene el mismo tamaño, el mismo debe dividir a $\frac{n}{A}$. En consecuencia, $s|\frac{n}{A}$. Recordemos que μ_i tiene una raíz n-ésima para cada i. Por lo tanto, $\alpha(\mu_\iota) = 1$ para todo ι y el valor $[\xi](\mu_\iota)$ esta bien definido para cada clase $[\xi] \in \operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)/\alpha$. La suma se convierte en

$$s^{|\mathcal{I}/\omega|} \sum_{\overline{\psi}} \prod_{[\iota]} \psi([\iota])(\mu_{[\iota]})$$

donde $\overline{\psi}$ varia sobre todas las funciones inyectivas $\mathcal{I}/\omega \to \operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)/\alpha$, y $\mu_{[\iota]} = \prod_{\iota' \in [\iota]} \mu_{\iota'}$. Sea $\overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}/\omega$. Notemos que, para cualquier cociente $\pi : \overline{\mathcal{I}} \to Q$,

$$\sum_{\overline{\psi}:Q \to \operatorname{Irr}(\mathbb{F}_q^\times)/\alpha} \prod_q \psi(q) \left(\prod_{\iota \in \pi^{-1}(q)} \mu_\iota \right) = \begin{cases} 0 & \text{if } |Q| > 1 \\ \frac{q-1}{s} & \text{if } |Q| = 1 \end{cases}$$

dado que cada sub-producto de $\mu_1 \dots \mu_n$ is no trivial. Por ende,aplicando la fórmula de inversión de Möbius en el poset de subgrupos de $S(\overline{\mathcal{I}})$, obtenemos que

$$\Sigma(\mathcal{I}, \omega) = \frac{q-1}{s} \sum_W \mu(1, W)$$

donde W recorre todos los subgrupos de $S(\overline{\mathcal{I}})$ que actúan transitivamente en $\overline{\mathcal{I}}$. Notemos que la última expresión es lineal en q. Además, por 1.1.3,

$$\sum_W \mu(1, W) = (-1)^{|\overline{\mathcal{I}}|-1}(|\overline{\mathcal{I}}| - 1)!$$

Más aún, notemos que como cada órbita de ω tiene cardinal s, $|\mathcal{I}/\omega| = \frac{|\mathcal{I}|}{s}$. Por lo tanto,

$$\Sigma(\mathcal{I}, \omega) = \begin{cases} -\frac{(q-1)}{s}(-s)^{\frac{|\mathcal{I}|}{s}} \left(\frac{|\mathcal{I}|}{s} - 1\right)! & \text{si cada órbita de } \omega \text{ tiene cardinal } s \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Luego,

$$\Sigma(\mathcal{I}) = -\frac{(q-1)}{s}(-s)^{\frac{|\mathcal{I}|}{s}} \left(\frac{|\mathcal{I}|}{s} - 1\right)! \nu(\pi, s)$$

donde

$$\nu(\pi, s) = |\{\omega \in W_\pi : \text{cada órbita de } \omega \text{ tiene cardinal } s\}|$$

Notemos que $\nu(\pi, s)$ solo depende del tipo $\tau(\mathcal{I})$ y s. En consecuencia, lo denotamos $\nu(\tau, s)$. Obsrevemos que s debe dividir a la multiplicidad de cada partición. El cardinal de $\mathcal{I}$ también es determinado por τ. En efecto, es la suma de todas las multiplicidades en τ de todas las particiones. Llamemos a dicho número $\#\tau$. Concluimos que

$$\check{C}_{s,A,\tau} = -\frac{d_\tau^A}{As}(-s)^{\frac{\#\tau}{s}} \left(\frac{\#\tau}{s} - 1\right)! \nu(\tau, s) \vartheta(\tau, n)$$

donde

$$\vartheta(\tau, n) = |\{\mathcal{I} : \tau(\mathcal{I}) = \tau\}|.$$

Finalmente, obtenemos que

$$C_{s,A,\tau} = -d_\tau^A \vartheta(\tau, n) \sum_{s|j|\frac{n}{A}} \frac{1}{Aj}(-j)^{\frac{\#\tau}{j}} \left(\frac{\#\tau}{j} - 1\right)! \nu(\tau, j) \mu\left(\frac{j}{s}\right)$$

que es una constante que no depende de q. Esto concluye la demostración del teorema 3.4.1.

Para terminar es sección, probaremos una identidad combinatorica que necesitaremos más adelante. Definamos $A \cdot \tau$ como el tipo de partición de n obtenido via repetir A veces cada término de τ. Obervamos que $A \cdot \tau' = (A \cdot \tau)'$ y $\mathcal{H}_{\tau'}(q)^A = \mathcal{H}_{A \cdot \tau'}(q)$.

Lema 3.4.3. *$C_{s,A,\tau} = C_{As,1,A\cdot\tau}$ para cualesquiera s, A, τ.*

Demostración. Primero, notemos que $(d_\tau)^A = d_{A\cdot\tau}$. Comparemos el j-ésimo término del lado izquierdo con el Aj-ésimo del derecho. Tenemos que

$$\frac{\#\tau}{j} = \frac{\#(A\cdot\tau)}{Aj} \qquad \text{y} \qquad \mu\left(\frac{j}{s}\right) = \mu\left(\frac{Aj}{As}\right)$$

Por lo tanto, es suficiente con que

$$\vartheta(\tau, n)\nu(\tau, j) = A^{\frac{\#\tau}{j}}\vartheta(A\tau, n)\nu(A\tau, Aj)$$

para cualquier $j|\frac{n}{A}$.

Construiremos una biyección entre conjuntos con dichos cardinales. Sea $\omega \in W_{A\tau}$. Para cada una de sus orbitas $\mathcal{O}$ definamos

$$\mathcal{J}(\mathcal{O}, \omega) := \{\{\iota_1, \ldots, \iota_{\frac{|\mathcal{O}|}{A}}\} \subset \mathcal{O} : \omega^k\iota_i \neq \omega^l\iota_j \forall i \neq j, 0 \leq k, l < A\}\}$$

y sea

$$\mathcal{J}_\omega := \prod_{\mathcal{O}} \mathcal{J}(\mathcal{O}, \omega)$$

donde le producto recorre todas las órbitas de ω. Finalmente, sea

$$W_{A\tau,Aj} = \{\omega \in W_{A\tau} : \text{cada órbita de } \omega \text{ tiene cardinal } Aj\}$$

y

$$\mathcal{J} = \{\mathcal{I} : \tau(\mathcal{I}) = A\tau\} \times \prod_{\omega \in W_{A\tau,Aj}} \mathcal{J}_\omega$$

.

El cardinal de $\mathcal{J}$ es

$$A^{\frac{\#\tau}{j}}\vartheta(A\tau, n)\nu(A\tau, Aj)$$

En efecto, cada $\omega \in W_{A\tau,Aj}$ tiene $\frac{\#\tau}{j}$ orbitas y, para cado una, $|\mathcal{J}(\mathcal{O}, \omega)| = A$. Para la última afirmación, notemos que todos los elementos de $\mathcal{J}(\mathcal{O}, \omega)$ están únivocamente determinado por ι_1. Hay jA posibilidades pero ι_1 y $\omega^A\iota_1$ dan lugar al mismo elemento.

Por otro lado, definamos

$$\varphi : \mathcal{J} \to \{\mathcal{I} : \tau(\mathcal{I}) = \tau\} \times \{\omega \in W_\tau : \text{cada órbita de } \omega \text{ tiene cardinal } j\}$$

de la siguiente forma. Fijemos un elemento de $\mathcal{J}$. Para cada ι_i elegido, colapsemos $\{\omega^k\iota_i : 0 \leq k < A\}$ en $A\tau$. Esto produce un elemento de W_τ para cada $\omega \in W_{A\tau}$. Para producir un $\mathcal{I}$ con $\tau(\mathcal{I}) = \tau$, tomamos $I_k^{\iota_i} = I^{\omega^k\iota_i}$ para cada $0 \leq k < A$. Es claro que φ es una biyección. □

3.5. Contribuciones stringy

En esta sección, probaremos el teorema 3.2.1. Fijemos una raiz primitava de la unidad ω de orden d y consideremos la torsión discreta $\mathcal{D} \in H^2(F_d^2, U(1)) \simeq F_d$ asociada a ella. Como en el ejemplo de Ruan [Rua03], $\sum \pi_i^*\mathcal{D}$, $\pi_i : F_d^{2g} \to F_d^2$ induce el sistema locale en X^a dado por $\xi_a : F_d^{2g} \to \mathbb{C}^*$

$$\xi_a(b) = \omega^{\sum a_{2i-1}b_{2i} - a_{2i}b_{2i-1}}$$

Para cualquier otra torsión discreta $K\mathcal{D}$, el sistema local asociado esta dado por $\xi_a(b)^K$. Notemos que el orden de $K\mathcal{D}$ es $\frac{d}{\mathrm{mcd}(K,d)}$.

Como vimos anteriormente, el teorema 3.4.1 implica que $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a$ tiene conteo polinomial torcido para cualquier carácter. Por lo tanto, por el teorema 1.3.1, $E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a, \mathcal{L}_{K\mathcal{D},a}; q)$ es

$$\#_{F_d}^{\xi_a} X^a = \frac{1}{d^{2g}} \sum_{b\in F_d^{2g}} S_{a,b}\xi_a(b)^K = \frac{1}{d^{2g}} \sum_{b\in F_d^{2g}} \sum_{\tau} \frac{\left((-1)^n q^{\frac{n^2}{2A}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)^A\right)^{2g-1}}{(q-1)^{2g-1+n-1}} \sum_s s^{2g} A C_{s,A,\tau} \xi_a(b)^K$$

donde s recore todos los divisores comunes de $\frac{n}{A}$ y $\frac{n}{B}$ tales que $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{n}{Bs})$. Recordemos que A y B denotan los ordenes de a y b respectivamente.

Cambiando s por As, τ por $A\cdot\tau$, y reordenando la suma obtenemos

$$E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)^a, \mathcal{L}_{K\mathcal{D},a}; q) = \sum_{A|\tau} \frac{\left((-1)^n q^{\frac{n^2}{2A}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)\right)^{2g-1}}{(q-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{A|s|n} s^{2g} C_{s,1,\tau} \sum_{b\in F_{a,s}} \frac{\xi_a(b)^K}{d^{2g}A^{2g-1}}$$

donde $F_{a,s} \subset F_d^{2g}$ es el subgrupo de aquellos b cuyo orden B divide a $\frac{n}{As}$ y cumple $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{nA}{Bs})$. La notación $A|\tau$ significa que A divide a la multiplicidad de cada partición de τ. Recordemos que $C_{s,A,\tau} = 0$ si $s \not| \tau$. Por lo tanto, la condición $A|\tau$ es autómatica.

Queremos calcular

$$\Phi_{st}(a,n,d,s,K) := \sum_{b\in F_{a,s}} \frac{\xi_a(b)^K}{d^{2g}A^{2g-1}}$$

Recordemos que

$$\Delta(a,b) = \frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{|\langle \frac{AB}{d^2} \sum a_{2i-1}b_{2i} - a_{2i}b_{2i-1} \rangle|}$$

bajo el isomorfismo $F_d \simeq \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ dado por ω. Por lo tanto, si $\hat{\Delta}(a,b) = \frac{AB}{d^2}\sum a_{2i-1}b_{2i} - a_{2i}b_{2i-1}$, entonces

$$\Delta(a,b) = \mathrm{mcd}(A,B,\hat{\Delta}(a,b)),$$

$$\Phi_{st}(a,n,d,s,K) := \sum_{b\in F_{a,s}} \frac{\omega^{\frac{Kd^2}{AB}\hat{\Delta}(a,b)}}{d^{2g}A^{2g-1}}$$

y la condición $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{nA}{Bs})$ definiendo $F_{a,s}$ se puede cambiar por $A|\hat{\Delta}(a,b)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{nA}{Bs})$ dado que $A|\,\mathrm{mcd}(A,B)\,\mathrm{mcd}(A, \frac{nA}{Bs})$ simpre que $s|n$. Además, notemos que el orden de $\omega^{\frac{d^2}{AB}}$ divide a $\mathrm{mcd}(A,B)$. Luego, podemos pensar a $\hat{\Delta}(a,b)$ como un elemento de $F_{\mathrm{mcd}(A,B)}$.

Sea

$$N_a(A,B,\hat{\Delta}) = |\{b \in F_d^{2g} : \mathrm{ord}(b) = B, \hat{\Delta}(a,b) = \hat{\Delta}\}|$$

y

$$\hat{N}_a(A,B,d_2,\hat{\Delta}) = |\{b \in F_d^{2g} : d_2|b_i, \hat{\Delta}(a,b) = \hat{\Delta}\}|$$

para $d_2|B$, $\mathrm{ord}(a) = A$ y $\hat{\Delta} \in F_{\mathrm{mcd}(A,B)}$, donde $d_2|b_i$ significa que $b_i \in F_{d_2} \subset F_B \subset F_d$.

Notemos que, dado a, $\hat{\Delta}(a,-) : F_B^{2g} \subset F_d^{2g} \to F_{\mathrm{mcd}(A,B)}$ es lineal. Además, $\mathrm{mcd}(A,d_2)|\hat{\Delta}(a,b)$ si $d_2|b_i$ para todo i. Por otro lado, cualquier valor que cumpla la condición anterior esta en la imagen de $\hat{\Delta}(a,-)$ porque $|\langle a_i\rangle| = F_A$. Por lo tanto,

$$\hat{N}_a(A,B,d_2,\hat{\Delta}) = \begin{cases} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(A,d_2)}{d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}(A,B)} & \text{si } \mathrm{mcd}(A,d_2)|\hat{\Delta} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y, por la fórmula de inversión de Möbius,

$$N_a(A,B,\hat{\Delta}) = \sum_{d_2} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(A,d_2)}{d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}(A,B)}\mu(d_2)$$

donde d_2 recore todos los divisores de B tales que $\mathrm{mcd}(A, d_2)|\hat{\Delta}$. Notemos que la condición $\mathrm{mcd}(A, d_2)|\hat{\Delta}$ es equivalente a $\mathrm{mcd}(A, d_2)|\,\mathrm{mcd}(A, B, \hat{\Delta})$. Adicionalmente, observemos que $N_a(A, B, \hat{\Delta})$ no depende de a. Por lo tanto, dejaremos de referir a a en esa notación.

Reescribamos $\Phi_{st}(a, n, d, s, K)$ como

$$\sum_{B|\frac{nA}{s},d} \sum_{\Delta} \frac{N(A, B, \hat{\Delta})}{d^{2g} A^{2g-1}} S(\Delta)$$

donde la segunda suma es sobre todos los divisores Δ de $\mathrm{mcd}(A, B)$ tales que $A|\Delta\,\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)$ y $S(\Delta)$ es la suma de $\omega^{\frac{Kd^2}{AB}\Delta i}$ para $1 \leq i \leq \frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{\Delta}$ coprimo con $\frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{\Delta}$. Prestando atención a las condiciones sobre Δ reconocemos sumas de la forma (para ciertos Δ_1, Δ_2)

$$\sum_{\Delta_1|\Delta|\Delta_2} S(\Delta) = \sum_{1\leq\Delta\leq\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \omega^{\frac{Kd^2\Delta_1}{EF}\Delta} = \begin{cases} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \text{si } \operatorname{ord}\omega|\frac{Kd^2\Delta_1}{AB} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

si $\Delta_1|\Delta_2$ y $\omega^{\frac{Kd^2\Delta_2}{AB}} = 1$. Por lo tanto, $\Phi_{st}(a, n, d, s, K)$ es

$$\sum_{B|\frac{nA}{s},d} \sum_{d_2} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(A, d_2)}{d^{2g} A^{2g-1} d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}\left(\frac{A}{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)}, \mathrm{mcd}(A, d_2)\right)} \mu(d_2)$$

donde d_2 recore todos los divisores de B tales que $d|\frac{Kd^2}{AB}\,\mathrm{mcm}\left(\frac{A}{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)}, \mathrm{mcd}(A, d_2)\right)$.

Ahora bien,

$$\frac{\mathrm{mcd}(A, d_2)}{\mathrm{mcm}\left(\frac{A}{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)}, \mathrm{mcd}(A, d_2)\right)} = \frac{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)}{A}\,\mathrm{mcd}\left(\frac{A}{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)}, d_2\right) = \frac{\mathrm{mcd}(A, \frac{nAd_2}{Bs})}{A}$$

La segunda condición sobre d_2 se puede reinterpretar como $\mathrm{mcd}(A, \frac{nEd_2}{Bs})|\frac{Kd}{B}\,\mathrm{mcd}(A, d_2)$ y

$$\Phi_{st}(a, n, d, s, K) = \sum_{B|\frac{nA}{s},d} \sum_{d_2} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(A, \frac{nAd_2}{Bs})}{d^{2g} A^{2g} d_2^{2g}} \mu(d_2)$$

Notemos que Φ_{st} resulta ser una función en $A = \operatorname{ord}(a)$ y, más áun, es aritmética, es decir

$$\Phi_{st}(A, n, d, s, K) = \prod_{p|n \text{ primo}} \Phi_{st}\left(p^{v_p(A)}, p^{v_p(n)}, p^{v_p(d)}, p^{v_p(s)}, p^{v_p(K)}\right)$$

Por lo tanto, asumamos que $n = p^m$ para algún primo p. Escribamos $A = p^l$, $s = p^b$, $d = p^c$ y $K = p^k$. Sabemos que $b, c \leq m$, $l \leq b, c$ y $k \leq c$. Denotaremos con $\exp_p(i)$ a p^i para evitar supra-índices pequeños. En este caso, escribiendo $d_2 = p^i$ y $B = p^j$,

$$\Phi_{st}(A, n, d, s, K) = \sum_{i,j} \exp_p(2g(j - i - l - c) + \min(l, m + l - b + i - j))(-1)^i$$

donde i y j satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &0 \leq i \leq \min(1, c, m + l - b), \\ &i \leq j \leq \min(c, m + l - b), \text{ y} \\ &\min(l, m + l - b + i - j) \leq k + c - j + \min(l, i) \end{aligned}$$

Si c o $m+l-b$ son cero, i y j deben anularse y

$$\Phi_{st}(A,n,d,s,K) = \exp_p(-2gc-(2g-1)l)$$

Asumamos de ahora en adelante que $c, m+b-l \geq 1$ para que i pueda ser 1.

Si $l=0$, la tercer desigualdad siempre vale y

$$\Phi_{st}(A,n,d,s,K) = \sum_{0\leq i\leq 1} \sum_{i\leq j\leq c,m-b} \exp_p(2g(j-i-c))(-1)^i$$

El (i,j)-ésimo término y el $(i+1,j+1)$-ésimo se cancelan el uno al otro. Solo sobrevive el $(0, \text{mín}(c, m-b))$-ésimo. Por lo tanto

$$\Phi_{st}(A,n,d,s,K) = \exp_p(2g \,\text{mín}(0, m-b-c))$$

Asumamos ahora que $l \geq 1$. Luego, $\text{mín}(i,l) = i$. La misma cancelación vale. Pero ahora hay el $(0, \text{mín}(c, m-b))$-ésimo término aparece si y solo si

$$\begin{aligned} \text{mín}(l, m-b+l-\text{mín}(c, m-b+l)) &\leq k+c-\text{mín}(c, m-b+l) \\ \text{mín}(l+\text{mín}(c, m-b+l), m-b+l) &\leq k+c \\ \text{mín}(l+c, m-b+l) &\leq k+c \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi_{st}(A,n,d,s,K)$ es cero si las desigualdades anteriores no se cumplen y

$$\Phi_{st}(A,n,d,s,K) = \exp_p(2g \,\text{mín}(-l, m-b-c) + \text{mín}(l, m-b+l-\text{mín}(c, m-b+l)))$$

si no. Esta fórmula tambipen funciona en los casos especiales que analizamos primero. En conclusión,

$$\Phi_{st}(A,n,d,s,K) = \begin{cases} \left(\frac{\text{mcd}(d, \frac{nA}{s})}{dA}\right)^{2g-1} \frac{\text{mcd}(d, \frac{n}{s})}{d} & \text{si } \text{mcd}(d, \frac{n}{s}) | K\frac{d}{A} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

para todos los posibles A, n, d, s, K. Luego, $E(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\text{SL}_n)^a, \mathcal{L}_{K\mathcal{D},a}; u, v)q^{F(a)}$ es

$$\sum_\tau \frac{\left((-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)\right)^{2g-1}}{(q-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{\substack{A|s|n \\ \text{mcd}(s, \frac{n}{d})|K\frac{s}{A}}} C_{s,1,\tau} \left(\text{mcd}\left(\frac{s}{A}, \frac{n}{d}\right)\right)^{2g-1} \text{mcd}\left(s, \frac{n}{d}\right)$$

como enuncia el teorema 3.2.1. Recordemos que el shift fermiónico es $\frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{A})(2g-1)$.

3.6. E-polinomio stringy

Probemos ahora el teorema 3.2.2. Por el teorema 3.2.1,

$$E_{st}^{K\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\text{SL}_n / F_d); u, v) = \sum_\tau \frac{\left((-1)^n (uv)^{\frac{n^2}{2}} \mathcal{H}_{\tau'}(uv)\right)^{2g-1}}{(uv-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{s|n} s^{2g} C_{s,\tau} \Phi_g(n,d,s,K)$$

para

$$\Phi_g(n,d,s,K) = \sum_a \left(\frac{\text{mcd}(d, \frac{nA}{s})}{dA}\right)^{2g-1} \frac{\text{mcd}(d, \frac{n}{s})}{d}$$

donde a recorre todos los elementos de F_d^{2g} para los cuales $A|s, d$ y $\mathrm{mcd}(d, \frac{n}{s})|K\frac{d}{A}$. Por inversión de Möbius,

$$\Phi_g(n,d,s,K) = \sum_A \sum_{d_1|A} \frac{A \,\mathrm{mcd}(d, \frac{nA}{s})^{2g-1}\,\mathrm{mcd}(d, \frac{n}{s})}{d^{2g}d_1^{2g}}\mu(d_1)$$

donde A varia sobre todos los divisorescomunes de s y d tales que $\mathrm{mcd}(d, \frac{n}{s})|K\frac{d}{A}$.

Al igual que antes, podemos concentrarnos en el caso en que $n = p^m$ para algún primo p. Escribamos $s = p^b$, $d = p^c$ y $K = p^k$. Entonces, para $E = p^i$ y $d_1 = p^j$,

$$\Phi_g(n,d,s,K) = \sum_{i,j} \exp_p(i + (2g-1)(\mathrm{mín}(c, m-b+i)) + \mathrm{mín}(c, a-b) - 2g(c+j))(-1)^j$$

donde i y j cumplen que $0 \leq i \leq \mathrm{mín}(b, c, k+c-\mathrm{mín}(c, m-b))$ y $0 \leq j \leq \mathrm{mín}(1, i)$.

Separemos en dos casos; si $i \leq c-m+b$ o si no. En el primer caso, el (i,j)-término y el $(i+1, j+1)$-ésimo se cancelan entre si. Solo sobrevive el $(\mathrm{mín}(c-m+b, b, c, k+c-\mathrm{mín}(c, m-b)), 0)$-ésimo término. El mismo solo es válido si $m-b \leq c$. En este caso, obtenemos que

$$\exp_p(2g(\mathrm{mín}(c-m+b, b, c, k+c-\mathrm{mín}(c, m-b)) + m-b-c)) = \exp_p(2g\,\mathrm{mín}(0, m-c, m-b, k)) = 1$$

Analizemos el segundo caso, es decir si $i > c-m+b$. Tenemos que

$$\left(\sum_i \exp_p(i)\right)\left(\sum_{0\leq j\leq 1} \exp_p(\mathrm{mín}(0, m-b-c) - 2gj)(-1)^j\right) + \delta_{c+b<m}\exp_p(2g\,\mathrm{mín}(0, m-b-c\})$$

donde i varia entre $\mathrm{máx}(1, c-m+b+1)$ y $\mathrm{mín}(b, c, k+c-\mathrm{mín}(c, m-b))$.

Podemos evaluar la suma en i como una serie geométrica. Si $m \leq b+c$, obtenemos la siguiente fórmula para $\Phi_g(n,d,s,K)$

$$\begin{aligned}&\frac{\exp(\mathrm{mín}(b, c, k+c-m+b)+1) - \exp_p(1+c-m+b)}{p-1}\exp_p(m-b-c)\left(1-\exp_p(-2g)\right)\right) + 1\\ &= \frac{\exp_p(\mathrm{mín}(m-c, m-b, k))(p-\exp_p(1-2g)) + \exp_p(1-2g) - 1}{p-1}\end{aligned}$$

Si $m > b+c$,

$$\begin{aligned}\Phi_g(n,d,s,K) &= \frac{\exp_p(\mathrm{mín}(b, c, k)+1) - p}{p-1}\left(1-\exp_p(-2g)\right) + 1\\ &= \frac{\exp_p(\mathrm{mín}(b, c, k))(p-\exp_p(1-2g)) + \exp_p(1-2g) - 1}{p-1}\end{aligned}$$

En conclusión,

$$\Phi_g(n,d,s,K) = \frac{(p-\exp_p(1-2g))\exp_p(\mathrm{mín}(b, m-c, c, m-b, k)) + \exp_p(1-2g) - 1}{p-1}$$

que es la fórmula del teorema 3.2.2. La última afirmación del teorema se sigue notando que K puede ser reemplzado por $\mathrm{mcd}(d, \frac{n}{d}, K)$ y $\Phi_g(n,d,s,K) = \Phi_g(n, \frac{n}{d}, s, K)$.

3.7. Contribuciones isotípicas

Para finalizar este cápitulo, probaremos el teorema 3.2.3. Consideremos una torsión discreta sobre F_n. Sea ω una raíz primitiva de la unidad de orden n y fijemos un generador de las torsiones discretas $\mathcal{D}$ como en las secciones anteriores. Fijemos $K \in F_n$. Cualquier carácter ξ de $F_{\frac{n}{d}}^{2g}$ es de la forma $\omega^{d\sum b_i^{(0)} b_i}$ para un único $b^{(0)} \in F_{\frac{n}{d}}^{2g}$. En esta situación, tenemos que

$$E_{st}^{K\mathcal{D}}(\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n / F_d); u, v)_\xi = \; = \sum_\tau \frac{\left((-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} \mathcal{H}_{\tau'}(q)\right)^{2g-1}}{(q-1)^{2g-1+n-1}} \sum_{s|n} s^{2g} C_{s,1,\tau} \Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K)$$

para

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \sum_{a,b} \frac{1}{n^{2g} A^{2g-1}} \omega^{\frac{Kn^2}{AB}\Delta(a,b) + db^{(0)}\cdot b}$$

donde la suma recore todos los $a \in F_d^{2g}$ y $b \in F_n^{2g}$ tales que $A|s$, $B|\frac{nA}{s}$ y $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)$. Por lo tanto, el teorema 3.2.3 es equivalente a

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \begin{cases} \Phi_{st}(a, \frac{n}{d}, s, d, \frac{n^2}{d^2}K) & \text{si } B^{(0)}|s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

si $B^{(0)} := \mathrm{ord}(b^{(0)}) = \mathrm{ord}(a)$.

Notemos que la condición $\mathrm{mcd}(\frac{n}{d}, \frac{n}{s})|K\frac{n^2}{d^2}\frac{n}{dB^{(0)}}$ en Φ_{st} es automática. Luego, queremos probar que

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \begin{cases} \left(\frac{\mathrm{mcd}(\frac{n}{d}, \frac{nA}{s})}{\frac{n}{d}A}\right)^{2g-1} \frac{\mathrm{mcd}(\frac{n}{d}, \frac{n}{s})}{\frac{n}{d}} & \text{si } B^{(0)}|s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Escribamos

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \frac{d^{2g}}{n^{2g}} \sum_{b \in F_n^{2g}} \omega^{db^{(0)}\cdot b} \check{\Phi}(b, n, d, s, K)$$

donde

$$\check{\Phi}(b, n, d, s, K) = \sum_{a \in F_{b,s}} \frac{1}{d^{2g} A^{2g-1}} \omega^{\frac{Kn^2}{AB}\Delta(a,b)}$$

y $F_{b,s} \subset F_d^{2g}$ es el subgrupo de aquellos a tales que $A|s$, $B|\frac{nA}{s}$ and $A|\Delta(a,b)\,\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)$.

De forma similar a lo que hicimos en la sección 3.5, para $B|d$ y $\mathrm{ord}(b) = B$, sea

$$M(A, B, \Delta) := |\{a \in F_d^{2g} : \mathrm{ord}(a) = A, \Delta(a,b) = \Delta\}| = \sum_{d_1} \frac{A^{2g}\,\mathrm{mcd}(B, d_1)}{d_1^{2g}\,\mathrm{mcd}(A, B)} \mu(d_1)$$

donde d_1 varia sobre todos los divisores de A tales que $\mathrm{mcd}(B, d_1)|\Delta$. Y reescribamos

$$\check{\Phi}(b, n, d, s, K) = \sum_A \sum_\Delta \frac{M(A, B, \Delta)}{d^{2g} A^{2g-1}} S(\Delta)$$

donde A recorre todos los divisores comunes de s y d tales que $B|\frac{nA}{s}$, Δ sobre todos los divisores de $\mathrm{mcd}(A, B)$ que cumplen $A|\Delta\,\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)$, y $S(\Delta)$ es la suma de $\omega^{\frac{Kn^2}{AB}\Delta i}$ para $1 \le i \le \frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{\Delta}$ coprimo con $\frac{\mathrm{mcd}(A,B)}{\Delta}$. Como en la sección 3.5

$$\check{\Phi}(b, n, d, s, K) = \sum_A \sum_{d_1} \frac{A\,\mathrm{mcd}(B, d_1)}{d^{2g} d_1^{2g}\,\mathrm{mcm}\left(\frac{A}{\mathrm{mcd}(\frac{nA}{Bs}, A)}, \mathrm{mcd}(A, d_2)\right)} \mu(d_1)$$

donde d_1 recorre todos los divisores de A tales que $n|\frac{Kn^2}{AB}\operatorname{mcm}\left(\frac{A}{\operatorname{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)},\operatorname{mcd}(B,d_1)\right)$.

Ahora bien,

$$\frac{A\operatorname{mcd}(B,d_1)}{\operatorname{mcm}\left(\frac{A}{\operatorname{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)},\operatorname{mcd}(B,d_1)\right)}=\operatorname{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)\operatorname{mcd}\left(\frac{A}{\operatorname{mcd}(\frac{nA}{Bs},A)},d_1\right)=\operatorname{mcd}\left(A,\frac{nAd_1}{Bs}\right)$$

La segunda condición de divisibilidad sobre d_1 se transforma en $\operatorname{mcd}(A,\frac{nAd_1}{Bs})|\frac{Kn}{B}\operatorname{mcd}(B,d_1)$ y

$$\check{\Phi}(b,n,d,s,K)=\sum_A\sum_{d_1}\frac{\operatorname{mcd}(A,\frac{nAd_1}{Bs})}{d^{2g}d_1^{2g}}\mu(d_1)$$

Notemos quela suma es vacía salvo que $B|\frac{nd}{s}$. Asumamos esto último de ahora en adelante. Analizemos las condiciones sobre A. Como $d_1|A$, escribamos $A=d_1A'$. Entonces $sB|nd_1A'$. Sea $B'=\frac{sB}{\operatorname{mcd}(sB,nd_1)}$. Así $B'|A'$. Escribamos $A'=B'A''$. Notemos que

$$\operatorname{mcd}\left(B'd_1A'',\frac{nd_1B'}{Bs}d_1A''\right)=d_1A'',\qquad B'd_1=\frac{s}{\operatorname{mcd}(\frac{s}{d_1},\frac{n}{B})},$$

y

$$\frac{d}{B'd_1}=\frac{d\operatorname{mcd}(\frac{s}{d_1},\frac{n}{B})}{s}=\frac{\operatorname{mcd}(\frac{d}{d_1}s,\frac{nd}{sB}s)}{s}=\operatorname{mcd}\left(\frac{d}{d_1},\frac{nd}{Bs}\right)$$

Las condiciones son entonces $A''|\frac{s}{d_1}$, $A''|\frac{n}{B}$, $A''|\frac{d}{d_1}$, $A''|\frac{dn}{Bs}$ y $A''|K\frac{n}{\operatorname{mcm}(B,d_1)}$. La última es automática. En efecto, es implicada por las primeras dos ya que $s|n$. Por lo tanto,

$$\check{\Phi}(b,n,d,s,K)=\delta_{B|\frac{dn}{s}}\sum_{d_1|d,s}\frac{1}{d^{2g}d_1^{2g-1}}\mu(d_1)\Gamma\left(\operatorname{mcd}\left(\frac{s}{d_1},\frac{n}{B},\frac{d}{d_1},\frac{dn}{Bs}\right)\right)$$

donde

$$\Gamma(A)=\sum_{d_3|A}d_3$$

para cualquier A. Notemos que $\check{\Phi}(b,n,d,s,K)$ esta deterinado por $B=\operatorname{ord}(b)$.

Observemos que Γ es aritmética al ser la inversa (bajo el producto de convolución) de la identidad. Luego, $\check{\Phi}$ también lo es. Podemos asumir que $n=p^m$ para algún primo m. Escribamos $s=p^b$, $d=p^c$, $K=p^k$ y $F=p^j$. Asumamos que $j\le m+c-b$. Si esto no valiera, sabemos que la suma da cero. En esta situación, $\check{\Phi}(B,n,d,s,K)$ es

$$\sum_{0\le i\le 1,b,c}\exp_p(2g(-i-c)+i)(-1)^i\Gamma(\exp_p(\min(b-i,m-j,c-i,m+c-b-j)))$$

Si $c=0$, entonces $i=0$ y $\check{\Phi}(b,n,d,s,K)=1$. Por otro lado, si $b=0$,

$$\check{\Phi}(B,n,d,s,K)=\exp_p(-2gc)$$

Finalmente, si $b,c>0$, i puede ser 1. Usando que $\Gamma(p^x)=\frac{p^{x+1}-1}{p-1}$ obtenemos

$$\begin{aligned}\check{\Phi}(B,n,d,s,K)=\exp_p(-2gc)\Bigg(&\frac{\exp_p(\min(b,m-j,c,m+c-b-j)+1)-1}{p-1}\\&-\exp_p(1-2g)\frac{\exp_p(\min(b-1,m-j,c-1,m+c-b-j)+1)-1}{p-1}\Bigg)\end{aligned}$$

siempre que $j \leq m + c - b$. Esta fórmula también funciona si b o c son cero.

Analicemos ahora

$$N_{stp}(b^{(0)}, B, \nabla) = |\{b \in F_B^{2g} : \mathrm{ord}(b) = B, b^{(0)} \cdot b = \nabla\}|$$

y

$$\hat{N}_{stp}(b^{(0)}, B, d_2, \nabla) = |\{b \in F_B^{2g} : d_2|b_i, b^{(0)} \cdot b = \nabla\}|$$

para $d_2|F$ y $\nabla \in F_B$. El operador $b^{(0)} \cdot -$ es lineal y su imagen cae en $F_{\mathrm{mcd}(B^{(0)},B)}$. Además, $\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)|b^{(0)} \cdot b$ si $d_2|b_i$ y cualquier valor que cumpla esto esta en la imagen dado que $|\langle f_i^{(0)}\rangle| = B^{(0)}$. Luego,

$$\hat{N}_{stp}(b^{(0)}, B, d_2, \nabla) = \begin{cases} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)},d_2)}{d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)},B)} & \text{si } \mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)|\nabla \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

y

$$N_{stp}(b^{(0)}, B, \nabla) = \sum_{d_2} \frac{B^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)}{d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)}, B)} \mu(d_2)$$

donde d_2 varía sobre los divisores de B tales que $\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)|\nabla$.

Por lo tanto, $\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K)$ es

$$\sum_{d_2|B|n} \sum_{\nabla} \frac{d^{2g} B^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)}{n^{2g} d_2^{2g}\,\mathrm{mcd}(B^{(0)}, B)} \mu(d_2) \check{\Phi}(B, n, d, s, K) \sum_i \omega^{\frac{n^2}{BB^{(0)}} i\nabla}$$

donde ∇ recorre todos los divisores de $\mathrm{mcd}(B^{(0)}, B)$ que son divisibles por $\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)$, e i sobre todos los enteros entre 1 y $\frac{\mathrm{mcd}(B^{(0)},B)}{\nabla}$ coprimos con $\frac{\mathrm{mcd}(B^{(0)},B)}{\nabla}$. Al igual que antes, se sigue que

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \sum_B \frac{d^{2g} B^{2g}}{n^{2g} d_2^{2g}} \mu(d_2) \check{\Phi}(B, n, d, s, K)$$

donde la suma es sobre todos aquellos $d_2|B|n$ tales que $BB^{(0)}|n\,\mathrm{mcd}(B^{(0)}, d_2)$.

Esta función es aritmética. Consequentemente, asumimos nuevamente que $n = p^m$ para algún primo p y escribimos $s = p^b$, $d = p^c$, $K = p^k$ y $F^{(0)} = p^{j_0}$. En este caso, luego de multiplicar por $p - 1$ obtenemos tres términos

$$\sum_{i,j} \exp_p(2g(j - m - i))(-1)^i \exp_p(\mathrm{mín}(b, m - j, c, n + c - b - j) + 1),$$

$$-\sum_{i,j} \exp_p(2g(j - m - i - 1))(-1)^i \exp_p(\mathrm{mín}(b - 1, m - j, c - 1, m + c - b - j) + 2)$$

y

$$\sum_{i,j} \exp_p(2g(j - m - i))(-1)^i(-1 + \exp_p(1 - 2g))$$

donde i y j satisfacen, en todas las sumas, que $0 \leq i \leq 1$ e

$$i \leq j \leq \mathrm{mín}(m, m + \mathrm{mín}(j_0, i\} - j_0, m + c - b)$$

En la última, el (i, j)-ésimo término y el $(i + 1, j + 1)$-ésimo se cancelan el uno al otro. Solo sobrevive el $(0, \mathrm{mín}(m, m - j_0, m + c - b\})$-ésimo término salvo que $j_0 \geq 1$ y $b - c \leq j_0 - 1$. Por lo tanto, el valor es

$$\mathrm{máx}(\delta_{j_0=0}, \delta_{b-c \geq j_0})(-1 + \exp_p(1 - 2g)) \exp_p(2g(\mathrm{mín}(m, m - j_0, m + c - b\} - m))$$

Para calcular la diferencia entre las primeras dos sumas, comparemos el (i,j)-ésimo término de la primera con el $(i,j+1)$-ésimo de la segunda. Solo difieren en un signo. Por lo tanto, solo sobreviven el $(i, \text{mín}(m, m+\text{mín}(j_0,i\} - j_0, m+c-b\})$-ésimo término de la primera y el $(0,0)$-ésimo y $(1,1)$-ésimo de la segunda. Los últimos dos se cancelan entre sí salvo que $\text{mín}(m, m+\text{mín}(j_0,1\} - j_0, m+c-b\} = 0$. En este caso, el $(0,0)$-ésimo términoreemplza el $(1, \text{mín}(m, m+\text{mín}(j_0,1) - j_0, m+c-b))$-ésimo que perdemos de la primera suma.

Asumamos que $j_0 \geq 1$ y $b-c \leq j_0 - 1$. Entonces, $\text{mín}(m, m+\text{mín}(j_0,i) - j_0, m+c-b) = m+i-j_0$. En este caso, obtenemos que

$$\begin{aligned}(p-1)\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) =& \exp_p(-2gj_0)(\exp_p(\text{mín}(b, j_0, c, c-b+j_0, k+j_0)+1) \\ & - \exp_p(\text{mín}(b, j_0-1, c, c-b+j_0-1, k+j_0-1)+1)) \\ =& (p-1)\exp_p(-2gj_0 + \text{mín}(j_0, c-b+j_0))\end{aligned}$$

si $\text{mín}(b, j_0, c, c-b+j_0) = \text{mín}(j_0, c-b+j_0)$, y es cero si no. Notemos que si $c-b+j_0 \leq c$, $j_0 \leq b$. Y esta última condición es equivalente a la de los mínimos. Por lo tanto,

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \begin{cases} \exp_p(-2gj_0 + \text{mín}(j_0, c-b+j_0\}) & \text{si } j_0 \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notemos que la desigualdad es equivalente a $E|s$.

Asumamos finalmente que $j_0 = 0$ o $b-c \geq j_0$. En particular, $j_0 \leq b$. En este caso, $\text{mín}(m, m+\text{mín}(j_0,i) - j_0, m+c-b) = \text{mín}(m, m+c-b)$. Obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) &= \exp_p(2g\,\text{mín}(0, c-b))\frac{-1+\exp_p(1-2g)+p-\exp_p(1-2g)}{p-1} \\ &= \exp_p(2g\,\text{mín}(0, c-b))\end{aligned}$$

Comparando cada caso con nuestra fórmula previa para Φ_{st}, concluimos que

$$\Phi_{stp}(b^{(0)}, n, s, d, K) = \delta_{\text{ord}(b^{(0)})|s}\Phi_{st}\left(a, n, \frac{n}{d}, s, \frac{n^2}{d^2}K\right)$$

si $\text{ord}(b^{(0)}) = \text{ord}(a)$. Esto finaliza la demostración del teorema 3.2.3.

Capítulo 4

Descomposición celular de variedades de caracteres

4.1. Generalidades

En las primeras secciones de este capítulo generalizaremos la descomposición de A. Mellit [Mel17] para variedades de caracteres asociadas a GL_n a grupos reductivos en general. Cabe aclarar que las demostraciones de las secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.6 son ligeras variaciones de las de loc. cit.. En cambio, las de las secciones 4.4 y 4.5 tienen ideas distintas. Las secciones siguientes son completamente nuevas. En la sección 4.8, aplicaremos la descomposición celular obtenida para estudiar una generalización motívica de la conjetura de T. Hausel y M. Thaddeus.

Fijemos un grupo redutivo G, un subgrupo de Borel $B \subset G$ y un toro maximal $T \subset B$. Llamemos W al grupo de Weyl de G. Una variedad sobre G es un par (X, f) donde X es una variedad y $f : X \to G$ es un morfismo algebraico. Un morfismo entre dos variedades sobre G, (X, f) y (X', f'), es un morfismo algebraico $\varphi : X \to X'$ tal que $f = \varphi \circ f$. La categoría de variedades sobre G es monoidal para

$$(X, f) \cdot (X', f') = (X \times X', ff').$$

Hay una familia natural de variedades sobre G, que denotaremos como T^i, dada por $t \in T \mapsto t^i \in G$. Hay morfismos diagonales $T^{i+j} \to T^i \cdot T^j, t \mapsto (t, t)$.

Denotemos ${}^w t := wtw^{-1}$ para $w \in W$ y $y \in T$. Dados $w \in W$ y $f : X \to G$ denotemos con $T \times_w X$ a la variedad sobre G dada por $T \times X \to G, (t, x) \mapsto^w tf(x)t^{-1}$.

Definición 4.1.1. Sea $w \in W$. Una variedad X sobre G equipada con una acción de T se dice w-torcida equivariante, o w-equivariante, si la acción $T \times_w X \to X$ es un morfismo sobre G, es decir, si

$$f(t \cdot x) =^w tf(x)t^{-1}$$

para cualesquiera $t \in T$ y $x \in X$.

Proposición 4.1.1. *Sean (X, f) y (X', f') dos G variedades. Si X es w-equivariante y X' es w'-equivariante, entonces $X \cdot X'$ es ww'-equivariante.*

Demostración. Definiendo $t \cdot (x, x') = ({}^{w'}t \cdot x, t \cdot x')$ tenemos que

$${}^{ww'}tf(x)f'(x')t^{-1} = f({}^{w'}tx){}^{w'}tf'(x')t^{-1} = f({}^{w'}tx)f'(tx') = (ff')(t(x, x'))$$

para cualesquiera $t \in T$ y $(x, x') \in X \times X'$. □

Sea $f : X \to G$ una variedad sobre G. Denotemos $X_0 = f^{-1}(B)$ y $g : X_0 \to T$ a la composición de f con el morfismo cociente $B \to T \simeq B/[B, B]$. Más generalmente, denotemos $X_{w,w'} = \{z \in X : f(z)wB \subset Bw'B\}$ para $w, w' \in W$. Notemos que $X_{e,e} = X_0$.

Proposición 4.1.2. *Sea X una variedad sobre G w-equivariante. Entonces $X_{w',w''}$ es T-invariante para todos $w', w'' \in W$ y g es T-equivariante si a T lo equipamos con la acción $t \cdot t' =^w tt^{-1}t'$.*

Demostración. Que $X_{w',w''}$ es equivariante se sigue de que $w'B$ y $Bw''B$ lo son. Más aún, si $f(x_0) = t'u$ para $t' \in T$ y $u \in U = [B, B]$, $f(tx_0) =^w tf(x_0)t^{-1} =^w tt'ut^{-1} =^w tt^{-1}t'\tilde{u}$ para $\tilde{u} = tut^{-1} \in U$. Esto muestra que g es equivariante. □

Definición 4.1.2. Sea X una variedad sobre G w-equivariante. Para $t \in \mathrm{Img}(g)$ denotemos $Y(t)$ al stack cociente $g^{-1}(t)/(T^w/Z(G))$ donde $T^w = \{t \in T :^w t = t\}$.

En el resto de este capítulo construiremos descomposiciones celulares de $X_{w,w'}$ y de $Y(t)$ para ciertas familias de variedades sobre G, para luego descomponer variedades de caracteres.

4.2. Variedades unipotentes

Llamemos $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, y $\mathfrak{t}$ a las álgebras de Lie de G, B, y T respectivamente. Sean Δ^+ y Φ^+ los conjuntos de raices simples y positivas respectivamente. Dada una raíz α de G, podemos considerar su asociada $\mathfrak{sl}_2$-subalgebra de $\mathfrak{g}$. Exponenciando, conseguimos un morfismo $\iota_\alpha : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to G$. Definamos $f_\alpha : \mathbb{C} \to G$ vía precomponer el morfismo anterior con $z \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -z \end{pmatrix}$. Notemos que $\iota_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ es un levantado de $s_\alpha \in W$, la simetría asociada a α. Además, este morfismo es inyectivo dado que $\ker \iota_\alpha \subset Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})) = \{\pm \mathrm{Id}_2\}$. Usando esta construcción y la estructura monoidal, definimos un morfismo $\rho : F(\Delta^+) \to \mathrm{Var}/G$ del monoide libre en las raíces simples a variedades sobre G.

Para $w \in W$ definamos $\Phi_\omega = \Phi^+ \cap \omega^{-1}(-\Phi^+)$ y sean U_ω^- y U_ω^+ los subgrupos unipotentes de G asociados a las subálgebras $\bigoplus_{\alpha \in \Phi_\omega} \mathbb{C}\alpha$ y $\bigoplus_{\alpha \notin \Phi_\omega} \mathbb{C}\alpha$ de $\mathfrak{g}$.

Lema 4.2.1. *Sea α una raíz positiva y $w \in W$ tal que $w \cdot \alpha$ es positiva. Sea $U^- \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ el subgrupo de matrices triangulares estrictamente superiores. Entonces $w\iota_\alpha(U^-)w^{-1} = \iota_{w \cdot \alpha}(U^-)$.*

Demostración. Es suficiente con probarlo para $w = s_\beta$ para una raíz β. este caso se sigue del Teorema 5 de la sección 4.1.6 de [OV90]. □

Proposición 4.2.1. *Sea $w \in W$ un elemento de longitud l y escribamoslo como $s_1 \cdots s_l$ donde cada s_i es la simetría asociada a $\alpha_i \in \Delta^+$. Entonces $\rho(\alpha_1 \cdots \alpha_l) = (\mathbb{C}^l, f)$ donde f es un isomorfismo con $wU_w^- \subset G$ y pensamos a $w \in G$ como el producto de $\iota_{\alpha_i} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Demostración. Lo demostramos por inducción en l. Es claro para $l = 1$. Asumamos que el resultado es cierto para $\pi \in W$ y sea α una raíz simple tal que $l(s_\alpha \pi) = l(\pi) + 1$. En particular $\Phi_{s_\alpha \pi} = \{\pi^{-1}(\alpha)\} \cup \Phi_\pi$. Escribamos π como en el enunciado y sea $f : \mathbb{C}^{l(\pi)} \to \pi U_\pi^-$ el isomorfismo asociado. Escribamos $f = \pi u$. Entonces

$$f_\alpha f = s_\alpha \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pi u = s_\alpha \pi \iota_{\pi^{-1}\alpha} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

y el resultado se sigue. □

Denotemos $\pi : F(\Delta^+) \to W$ al morfismo dado por $\alpha \to s_\alpha$.

Proposición 4.2.2. *Para cualquier $\beta \in F(\Delta^+)$, $\rho(\beta)$ es $\pi(\beta)$-equivariante.*

Demostración. Basta probar que para una raíz simple α, $\rho(\alpha)$ es s_α-equivariante. Recordemos que α es el diferencial de un morfismo $\alpha : T \to \mathbb{C}^\times$. Por su definición,

$$t\iota_\alpha(\mathrm{Id}_2 + zE_{12})t^{-1} = \iota_\alpha(\mathrm{Id}_2 + \alpha(t)zE_{12})$$

Luego,

$$^{s_\alpha}tf_\alpha(z)t^{-1} = f_\alpha(\alpha(t)z)$$

y $\rho(\alpha)$ es s_α-equivariante para la acción $t \cdot z = \alpha(t)z$. $\square$

4.3. Estratificación

Sea $\beta \in F(\Delta^+)$ y fijemos una representación irreducible

$$\beta = \alpha_l \cdots \alpha_1$$

para ciertas raíces simples α_i. En esta sección estratificaremos $\rho(\beta)_{w,w'}$. Para este fin, utilizaremos la descomposición de Bruhat. Referimos al lector a [Hum75, Capítulo X.28] para detalles sobre la misma. Cada celda de Bruhat BwB, dado $\hat{w} \in wT$, tiene parametrizaciones

$$BwB \simeq U^-_{w^{-1}} \times T \times U \simeq U \times T \times U^-_w$$

dadas ambas por $(u, t, u') \mapsto u\hat{w}tu'$. El cambio de coordenadas entre las dos parametrizaciones esta dado por $(u, t, u^+u^-) \mapsto (u^-\hat{w}(t\cdot u^+)\hat{w}^{-1}), t, u^-)$ para $u, u^- \in U^-_w$, $u^+ \in U^+_w$ y $t \in T$, donde $t \in T$ actúa multiplicando la coordenada correspondiente a $\alpha \in \Phi \setminus \Phi_w$ por $\alpha(t)$. Notemos que $U = U^-_w U^+_w = U^+_w U^-_w$. Además, si w es simple, U^+_w es normal en U.

Escribamos

$$\pi_k = s_{\alpha_k} \cdots s_{\alpha_1} \in W$$

para $1 \leq k \leq l$. Notemos que $\pi(\beta) = \pi_l$. Sea $p : \rho(\beta)_{w,w'} \to W^{l+1}$ la función dada por $(z_1, \dots, z_l) \mapsto (p_0, \dots, p_l)$ donde p_i son los únicos elementos de W tales que

$$f_k(z) := f_{\alpha_k}(z_k) \cdots f_{\alpha_1}(z_1)wB \in Bp_kB$$

para cada $k = 0, \dots, l$. Notemos que $p_0 = w$ y $p_l = w'$. Probaremos las siguientes dos proposiciones de forma simultánea. Dotemos a W con el orden de Bruhat.

Proposición 4.3.1. *Para cada punto de $\rho(\beta)_{w,w'}$ y $0 \leq k \leq l-1$,*

$$p_{k+1} = \begin{cases} s_{\alpha_{k+1}}p_k & \text{si } s_{\alpha_{k+1}}p_k > p_k \\ s_{\alpha_{k+1}}p_k \text{ o } p_k & \text{si no} \end{cases}$$

En cada caso decimos que subimos ($p_{k+1} > p_k$), bajamos ($p_{k+1} < p_k$) o nos quedamos ($p_{k+1} = p_k$) respectivamente. Denotemos con U_p, D_p y S_p las posiciones donde subimos, bajamos o nos quedamos respectivamente. Llamamos paseos asociados a β a los elementos de W^{l+1} que cumplen las condiciones de la proposición anterior y denotamos con $\mathcal{W}_{w,w'}(\beta)$ al conjunto que forman. Para cada paseo p, sea $C_p = \{x \in \rho(\beta)_{w,w'} : p(x) = p\}$. Tenemos una descomposición

$$\rho(\beta)_{w,w'} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{W}_{w,w'}(\beta)} C_p.$$

Notemos que esta descomposición es T-equivariante.

Dado un levantado $\hat{w} \in wT$ de w, podemos pensar a p_k en G como la multiplicación a izquierda por $\iota_{\alpha_j}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\hat{w}$ sobre los $j \leq k$ donde subimos o bajamos. Esto induce morfismos $g_k : C_p \to T$ dados por componer f_k con la inversa de la parametrización de $U^-_{w^{-1}} \times T \times U \simeq Bp_kB$ inducida y cocientar por U a ambos lados. Notemos que si $w = w' = e$, g_l es g multiplicado por el producto de $\iota_{\alpha_k}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sobre las posiciones donde subimos o bajamos.

Proposición 4.3.2. *Para cualquier paseo p, la celda C_p es T-equivariantemente isomorfa a $\mathbb{C}^{U_p} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p}$. Más aún, escribiendo $a = (a_k) \in \mathbb{C}^{U_p} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p}$,*

1. *el morfismo g_l se corresponde a*
$$a \mapsto \prod_{k \in S_p} {}^{p_k^{-1}} i_{\alpha_k} \begin{pmatrix} -a_k^{-1} & 0 \\ 0 & -a_k \end{pmatrix}$$
bajo el isomorfismo anterior, y

2. *la acción de $t \in T$ esta dada por multiplicar cada coordenada a_k por $\alpha_k({}^{\pi_{k-1}}t)$.*

Demostración de las Proposiciones 4.3.1 y 4.3.2. Sea $X_k \subset \mathbb{C}^k$ el subconjunto localmente cerrado dado por
$$f_j(z) := f_{\alpha_j}(z_j) \cdots f_{\alpha_1}(z_1) wB \in Bp_jB$$
para cada $0 \leq j \leq k$. Por definición $X_l = C_p$. Además, notemos que X_k es la celda correspondiente al paseo $p_1, \ldots, p_k$ asociado a $\alpha_k \ldots \alpha_1$. Probaremos inductivamente el resultado en la longitud de β. Para longitud cero no hay nada que hacer. Asumamos que el resultado vale para X_{l-1}. Notemos que hay una proyección $X_l \to X_{l-1}$ dad por olvidarse z_l.

Escribamos $f_{l-1} : X_{l-1} \to Bp_{l-1}B$ como un producto $up_{l-1}tv$ para ciertos $u : X_{l-1} \to U^-_{p_{l-1}^{-1}}$, $t : X_{l-1} \to T$, $v : X_{l-1} \to U$. Para simplificar la notación, escribamos $z = z_l$ y $\alpha = \alpha_l$. Tenemos que
$$f_\alpha(z)up_{l-1}tv = s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} up_{l-1}tv$$

El primer caso es cuando podemos ir para arriba: $s_\alpha p_{l-1} > p_{l-1}$. Esto significa que $p_{l-1}^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$. Luego, $U^-_{p_{l-1}^{-1}} \subset U^+_{s_\alpha}$ y, por lo tanto,
$$s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u = \left(s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} s_\alpha^{-1} \right) s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = u' s_\alpha i_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
con $u' : X_{l-1} \to U^+_{s_\alpha}$. Ahora bien, como $p_{l-1}^{-1}(\alpha) \in \Phi^+$, ${}^{p_{l-1}^{-1}}\iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$. Luego,
$$f_\alpha(z)up_{l-1}tv = u' s_\alpha p_{l-1} v'$$
para cierto $v' : X_l \to U$. Se sigue que $f(z,x)$ cae en la celda de Bruhat $Bs_\alpha p_{l-1}B$. Entonces, $p_l = s_\alpha p_{l-1}$ y $X_l = X_{l-1} \times \mathbb{C}$. Notemos que el morfismo a T no cambió. La acción en X_{l-1} tampoco cambió y en $\mathbb{C}$ esta dada por la convolución de $\rho(\alpha)$ con el resto de los factores, siendo la multiplicación por $\alpha_l({}^{\pi_{l-1}}t)$.

El segundo caso es el complemento: $s_\alpha p_{l-1} < p_{l-1}$. Empecemos escribiendo
$$u(x)s_\alpha = \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z_0(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_\alpha u'(x)$$
para cierto $u' : X_{l-1} \to U^+_{s_\alpha}$. Definamos
$$Z = \{(z,x) \in \mathbb{C} \times X_k : z = -z_0(x)\}$$
Sea $p' = s_\alpha p_{l-1}$. Notemos $p_{l-1} = s_\alpha \iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p'$. En Z, tenemos que
$$\begin{aligned} f_\alpha(z)up_{l-1}tv &= s_\alpha \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & -z_0(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z_0(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_\alpha u' \iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p'tv \\ &= \left(\iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot u' \right) p'tv \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este caso, debe ser $p_l = p'$ y el morfismo a T no cambia.

Probemos que en el complemento de Z tenemos que $p_l = p_{l-1}$. Notemos que

$$s_\alpha \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iota_\alpha \begin{pmatrix} 1 & z_0(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s_\alpha = \iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ z + z_0(x) & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $a(z,x) = z + z_0(x)$. Es un morfismo $(X_{l-1} \times \mathbb{C}) \setminus Z \to \mathbb{C}^\times$. Escribamos

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

Notemos que

$$f_\alpha(-a^{-1})u' = u'' f_\alpha(-a^{-1})$$

para cierto $u'' : X_l \to U^+_{s_\alpha}$ dado que u' tiene imagen en $U^+_{s_\alpha}$. Por lo tanto,

$$f_\alpha(z) u p_{l-1} t v = \iota_\alpha \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} u''' f_\alpha(-a^{-1}) \iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p' t v$$

para $u''' : X_l \to U$. Ahora bien $s_\alpha p' > p'$. Por ende, $u''' f_\alpha(-a^{-1}) \iota_\alpha \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} p' \in U p_{l-1} U$ y se sigue que nos quedamos. El morfismo al toro se multiplicó por

$$p_l^{-1} \iota_\alpha \begin{pmatrix} -a^{-1} & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

Resta describir la acción en a. Siendo la estratificación T-equivariante, $z_0(x)$ se debe mover bajo la acción como z. Por lo tanto, la misma conclusión debe valer para a. $\square$

4.4. Estabilizadores

Notemos que para cualquier $\beta \in F(\Delta)$, $\mathrm{Img}(g) \subset T^{ss}$ donde $T^{ss} = T \cap G^{ss}$ es la intersección de T con la parte semisimple G^{ss} de G. Para cada raíz α, denotemos con $h_\alpha \in \mathfrak{t}$ a su elemento semisimple correspondiente.

Lema 4.4.1. *Sea α una raíz y $w \in W$. Entonces $\langle {}^w h_\alpha \rangle = \langle h_{w\cdot\alpha} \rangle$ y $w s_\alpha w^{-1} = s_{w\cdot\alpha}$.*

Demostración. Aplicamos el teorema 5 de la sección 4.1.6 de [OV90]; w manda los autoespacios $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ a $\mathfrak{g}_{w\cdot\alpha}$ y $\mathfrak{g}_{-w\cdot\alpha}$ respectivamente. Luego, h_α va a un múltiplo de $h_{w\cdot\alpha}$. Se sigue que ${}^w h_\alpha$ y $h_{w\cdot\alpha}$ generan el mismo subespacio. Esto implica que $w s_\alpha w^{-1}$ y $s_{w\cdot\alpha}$ coinciden dado que ambas son simetrías. $\square$

Lema 4.4.2. *Sea $\beta \in F(\Delta)$ y p un paseo. Entonces*

1. $W(p) := \langle s_{\pi_k^{-1}\alpha_k} : k \in S_p \rangle = \langle s_{p_k^{-1}\alpha_k} : k \in S_p \rangle$,

2. $p_k^{-1}\pi_k \in W(p)$ *para todo* $k \in S_p$, *y*

3. $T(p) := \langle {}^{\pi_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle {}^{p_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Demostración. Probamos 1. y 2. de forma simultánea por inducción en k. Para la primera vez que nos quedamos tenemos que $\pi_k = s_{\alpha_k} p_k$. Por lo tanto,

$$p_k^{-1}\pi_k = \underbrace{p_k^{-1} s_{\alpha_k} p_k}_{s_{p_k^{-1}\alpha_k}} = p_k^{-1} s^3_{\alpha_k} p_k = \underbrace{\pi_k^{-1} s_{\alpha_k} \pi_k}_{s_{\pi_k^{-1}\alpha_k}}.$$

Sea $k \in S_p$ y asumamos que el resultado vale para el mayor $k' \in S_p$ menor que k. Notemos que $\pi_k \pi_{k'}^{-1} = s_{\alpha_k} p_k p_{k'}^{-1}$. Por lo tanto

$$s_{\pi_k^{-1}\alpha_k} = \pi_k^{-1} s_{\alpha_k} \pi_k = \pi_{k'}^{-1} p_{k'} p_k^{-1} s_{\alpha_k} p_k p_{k'}^{-1} \pi_{k'} = \pi_{k'}^{-1} p_{k'} s_{p_k^{-1}\alpha_k} p_{k'}^{-1} \pi_{k'}$$

y la primera afirmación se sigue porque $p_{k'}^{-1}\pi_{k'}$ está en el grupo generado por los elementos anteriores. Finalmente,

$$p_k^{-1}\pi_k = p_k^{-1} s_{\alpha_k} p_k p_{k'}^{-1} \pi_{k'} = s_{p_k^{-1}\alpha_k} p_{k'}^{-1} \pi_{k'}.$$

Para probar 3. notemos que $\langle {}^{\pi_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle$ y $\langle {}^{p_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle$ son invariantes bajo la acción de $W(p)$. Ahora bien, por 2., ${}^{p_k^{-1}} h_k = p_k^{-1}\pi_k \cdot {}^{\pi_k^{-1}} h_k \in \langle {}^{\pi_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle$ y viceversa. □

Definición 4.4.1. Para $\beta \in F(\Delta^+)$ y un paseo asociado p, sea $I(p)$ la imagen de $g_l : C_p \to T$ y $S(p) \subset T$ el subgrupo generado por los estabilizadores de los puntos de C_p. Definamos $Q(p) \subset \mathfrak{t}$ como el $\mathbb{Z}$-módulo generado por ${\pi_k}^{-1}\alpha_k$, $k \in S_p$. Denotemos $Q = \langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ al retículo de raíces. Definamos al centro de p como $Z(p) := (Q/Q(p))^* = \operatorname{Hom}(Q/Q(p), \mathbb{C}^\times)$ y a su grupo fundamental como $\pi_1(p) := \mathfrak{t}^{ss}(\mathbb{Z})/T(p)$.

Teorema 4.4.1. *Sea $\beta \in F(\Delta^+)$ y p un paseo. Entonces:*

1. *el álgebra tangente al estabilizador de cualquier punto de C_p esta contenida en $(T(p)\otimes\mathbb{R})^\perp$,*
2. *el espacio tangente a $I(p)$ es $T(p) \otimes \mathbb{R}$,*
3. *Si G es conexo, $S(p)/Z(G) \simeq Z(p)$, y*
4. *Si $C_p \to T^{ss}$ es sobreyectivo, $Z(p)$ y $\pi_1(p)$ son finitos y, para cualquier t, $g_l^{-1}(t) \simeq \mathbb{C}^{|U_p|} \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - \dim T^{ss}} \times \pi_1(p)$.*

Demostración. Notemos que $\alpha_k({}^{\pi_{k-1}}t) = 1$ si y solamente si $\alpha_k({}^{\pi_k}t) = 1$ El primer ítem es equivalente a

$$\bigcap_{k \in S_p} {}^{\pi_k^{-1}} \ker \alpha_k \big|_{\mathfrak{t}^{ss}} \subset T(p)^\perp$$

que a su vez es equivalente a

$$\langle {}^{\pi_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle \supset T(p)$$

que es cierto por el lema anterior. Por otro lado, la segunda condición se cumple si y solo si

$$\langle {}^{p_k^{-1}} h_k : k \in S_p \rangle = T(p)$$

que también es cierta por el lema anterior.

Para 3., sea $\mathcal{E} : \mathfrak{g} \to G$ la exponencial dada por $x \mapsto \exp(2\pi i x)$. Recordemos que $\mathcal{E}^{-1}(Z(G)) = Q^*$ [OV90, Teorema 7 de 4.3.5]. Siendo G conexo, cualquier x de T es de la forma $\mathcal{E}(y)$ para algún $y \in \mathfrak{g}$. Ahora bien, $x \in S(p)$ si y solo si $\mathcal{E}((\pi_k^{-1}\alpha_k)(y)) = (\pi_k^{-1}\alpha_k)(x) = 1$ para todo $k \in S_p$, es decir $(\pi_k^{-1}\alpha_k)(y) \in \mathbb{Z}$ para todo $k \in S_p$. Equivalentemente $y \in Q(p)^*$. Por lo tanto,

$$S(p)/Z(G) \simeq \mathcal{E}(Q(p)^*)/\mathcal{E}(Q^*) \simeq Q(p)^*/Q^* \simeq (Q/Q(p))^*$$

que es finito si $Q(p) \otimes \mathbb{R} = (T(p) \otimes \mathbb{R})^* = (\mathfrak{t}^{ss})^*$, es decir, si $C_p \to T^{ss}$ es sobreyectivo.

Para 4., notemos que por su definición, $\operatorname{coker}(g_* : \pi_1(C_p) \to \pi_1(T^{ss})) = \mathfrak{t}^{ss}(\mathbb{Z})/T(p) = \pi_1(p)$ y es finito dado que $T(p) \otimes \mathbb{R} = \mathfrak{t}^{ss}$. Ahora bien, $g_l : \mathbb{C}^{U_p} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p} \to T$ es la composición de la proyección en la componente tórica, la multiplicación por -1 y un morfismo de grupos g'. Se sigue que $g_l^{-1}(t) \simeq \mathbb{C}^{U_p} \times \ker g'$ y que $\ker g'$ es un toro de dimensión $|S_p| - \dim I(p) = |S_p| - \operatorname{rk} T(p)$. Finalmente, por [OV90, Teorema 4 de 1.3.4], $\pi_0(\ker g') \simeq \operatorname{coker}(g_*) = \pi_1(p)$. □

Lema 4.4.3. *Sea $\alpha : T \to T'$ un morfismo entre toros afines con kernel F y T conexo. Sea X una T-variedad. Entonces $(X \times T')/T \simeq (X/F) \times (T'/T)$ donde T actúa en T' vía α.*

Demostración. Afirmamos que $T' \simeq (T/F) \times (T'/T)$ como toros. Para probar esto podemos asumir que T' es conexo y F es trivial. En este caso, α induce un morfismo inyectivo $d\alpha : \mathfrak{t}(\mathbb{Z}) \to \mathfrak{t}'(\mathbb{Z})$. Gracias a la forma normal de Smith, existen $\mathbb{Z}$-bases donde $d\alpha$ es diagonal. Si alguno de sus autovalores no es ± 1 o 0, α no sería inyectiva. Luego, en algunas coordenadas, α se corresponde a una inclusión $(\mathbb{C}^\times)^n \to (\mathbb{C}^\times)^m$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 1, \ldots, 1)$. Se sigue la afirmación.

Respecto al enunciado, tenemos que

$$X \times T' \simeq X \times (T/F) \times (T'/T)$$

Definamos $(X \times (T/F) \times (T'/T))/T \to X/F \times (T'/T)$ como

$$\overline{(x, t, t')} \mapsto (t^{-1} \cdot \overline{x}, t')$$

y $X/F \times (T'/T) \to (X \times (T/F) \times (T'/T))/T$ como

$$(\overline{x}, t') \mapsto \overline{(x, 1, t')}.$$

Estos morfismos son inversos entre sí. □

Corolario 4.4.1. *Asumamos que G es conexo. Sea $\beta \in F(\Delta^+)$ con $\pi(\beta) = 1$. Entonces, para $t \in T$ genérico, $Y_\beta(t)$ es una variedad y admite una descomposición celular indexada por algunos paseos $p \in \mathcal{W}_{e,e}(\beta)$ cuyas celdas asociadas son $\pi_1(p) \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - 2\dim T^{ss}} \times (\mathbb{C}^{|U_p|}/Z(p))$, donde $Z(p)$ actúa de forma lineal en $\mathbb{C}^{|U_p|}$.*

Demostración. Dado que t es genérico, $C_p \to T^{ss}$ debe ser sobreyectivo para que $C_p \cap g^{-1}(t)$ sea no vacío. Se sigue que $Z(p)$ y $\pi_1(p)$ son finitos y que $g^{-1}(t) \simeq \mathbb{C}^{U_p} \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - \dim T^{ss}} \times \pi_1(p)$.

La acción de T se factoriza por $T' = T/Z(G)$ que es conexo al serlo G. Remarcamos que T' actúa en $(\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - \dim T^{ss}}$ vía un morfismo de grupos cuyo kernel es exactamente $Z(p)$. Por lo tanto, el resultado se sigue del lema anterior. □

Ejemplo 4.4.1. Puede suceder que $Z(p)$ sea finito pero no trivial. Por ejemplo, sea $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$ para la forma bilineal

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ver [OV90, Ejemplo 4.1.5.8]. Tenemos que $Z(G) = \{\pm \mathrm{Id}_4\}$ y $T = \{\mathrm{diag}(x, y, x^{-1}, y^{-1}) : x, y \in \mathbb{C}^*\}$. Sean $\alpha_1 = 2E_{22}^*$ y $\alpha_2 = E_{11}^* - E_{22}^*$. Consideremos el siguiente paseo:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
raíz	α_1	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_1	α_2
paso	arriba	quedarnos	abajo	arriba	arriba	quedarnos	abajo	abajo
p_k	s_{α_1}	s_{α_1}	Id	s_{α_2}	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	s_{α_2}	Id
π_k	s_{α_1}	Id	s_{α_1}	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$

Tabla 4.1: Un paseo con $I(p) = T$ y centro $Z(p)$ no trivial en $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$.

Entonces

$$T(p) := \langle {}^{s_{\alpha_1}}h_{\alpha_1}, {}^{s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}}h_{\alpha_1} \rangle = \langle \mathrm{diag}(0, 1, 0, -1), \mathrm{diag}(1, 0, -1, 0) \rangle$$

y $I(p) = T$. Ahora bien,

$$S(p) = \ker(E_{22}^{*2}) \cap \ker(E_{11}^{*2}) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

En este caso $\pi_1(p)$ es trivial.

Contraejemplos similares se puenden construir para los tipos B_n, C_n, F_4 y G_2 para obtener $Z(p)$ o $\pi_1(p)$ interesantes.

Teorema 4.4.2. *Sea G un grupo de Lie de tipo A. Sean $\beta \in F(\Delta^+)$ y p un paseo. Si $C_p \to T^{ss}$ es sobreyectivo, $\pi_1(p) = \pi_1(G^{ss})$ y $Z(p)$ es trivial.*

Demostración. El enunciado es equivalente a decir que para el sistema de raíces Φ de tipo A_{n+1}, un subconjunto $S \subset \Phi$ genera $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ si y solo si genera $\mathfrak{t}$ sobre $\mathbb{R}$. En este caso,

$$\mathfrak{t} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\},$$

$$\Phi = \{e_i - e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

y

$$\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}} = \{x \in \mathbb{Z}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\}$$

Dado un subconjunto $S \subset \Phi$, consideremos el grafo con vértices numerados del 1 al n y una arista entre i y j si y solo si $\pm(e_i - e_j) \in S$. Notemos que S genera $\mathfrak{t}$ sobre $\mathbb{R}$ o $\langle \Phi \rangle_{\mathbb{Z}}$ sobre $\mathbb{Z}$ si y solo si el grafo es conexo. □

4.5. Variedades de conmutadores

Definición 4.5.1. Sean $\pi_1, \pi_2, w \in W$. Definamos la variedad de conmutadores w-torcida ${}^w\rho(\pi_1, \pi_2)$ sobre G asociada a (π_1, π_2) como $T \times T \to T^{ss} \subset G$, $(t_1, t_2) \mapsto {}^w({}^{\pi_2^{-1}}t_1 t_2 t_1^{-1}{}^{\pi_1^{-1}}t_2^{-1})$. Definamos

$$T(\pi_1, \pi_2, w) := w((\pi_1^{-1} - \mathrm{Id})(\mathfrak{t}(\mathbb{Z})) + (\pi_2^{-1} - \mathrm{Id})(\mathfrak{t}(\mathbb{Z})))$$

Lema 4.5.1. *Sean $\pi_1, \pi_2, w \in W$. Entonces*

1. *el álgebra tangente a la imagen de ${}^w\rho(\pi_1, \pi_2) \to T$ es $T(\pi_1, \pi_2, w) \otimes \mathbb{R}$,*
2. *${}^w\rho(\pi_1, \pi_2)$ es $w\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1 w^{-1}$-equivariante, y*
3. *el estabilizador de cualquier punto de ${}^w\rho(\pi_1, \pi_2)$ es ${}^wT^{\langle \pi_1, \pi_2 \rangle}$ y su espacio tangente es $(T(\pi_1, \pi_2, w) \otimes \mathbb{R})^\perp$.*

Demostración. 1. y 2. son cómputos directos. Notemos que la acción de T esta dada por

$$t \cdot (t_1, t_2) = ({}^{\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1 w^{-1}}t^{-1} t_1{}^{\pi_2\pi_1 w^{-1}}t, {}^{\pi_1 w^{-1}}t^{-1} t_2{}^{\pi_2\pi_1 w^{-1}}t)$$

Por lo tanto, para 3., tenemos que todos los estabilizadores coinciden con la imagen por w de los puntos fijos de

$$\langle \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1\pi_2\pi_1, \pi_1^{-1}\pi_2\pi_1 \rangle.$$

Ahora bien,

$$(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1)(\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\pi_1\pi_2\pi_1)(\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1)^{-1} = \pi_1$$

y se sigue que el grupo anterior esta generado por π_1 y π_2. Luego, su espacio tangente es $\mathfrak{t}^{\pi_1} \cap \mathfrak{t}^{\pi_2}$. Finalmente, observamos que $v \in \mathfrak{t}^{\pi_i}$ si y solo si

$$\langle v - \pi_i v, v' \rangle = \langle v, v' \rangle - \langle \pi_i v, v' \rangle = \langle v, v' \rangle - \langle v, \pi_i^{-1} v' \rangle = \langle v, v' - \pi_i^{-1} v' \rangle = 0$$

para cualquier $v' \in \mathfrak{t}$, es decir, $v \in (\mathrm{Img}(\pi_1^{-1} - \mathrm{Id}))^\perp$. □

Por convolución obtenemos una extensión $\rho : F(\Delta^+, W \times W \times W) \to \mathrm{Var}/G$ de la construcción de las secciones anteriores. Además, ignorando las contribuciones de los conmutadores tenemos una estratificación por paseos $\rho(\beta)_{w,w'} = \bigsqcup_p C_p$ para cualquier β.

Para $\overline{\pi} = \left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right) \cdots \left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right) \in F(W^3)$ y un paseo p, definamos

$$S_{\overline{\pi}}(p) := S(p) \bigcap_{i=1}^{m} {}^{w_i}T^{\langle \pi_1^{(i)}, \pi_2^{(i)} \rangle},$$

$$Q_{\overline{\pi}}(p) := Q(p) + \langle w_k((\pi_j^{(k)})^{-1} - \mathrm{Id})(Q) : k = 1, \ldots, m; j = 1, 2\rangle_{\mathbb{R}},$$
$$Z_{\overline{\pi}}(p) := (Q/Q \cap Q_{\overline{\pi}}(p))^*,$$
$$T_{\overline{\pi}}(p) := T\left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right) + \cdots + T\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right) + T(p),$$

y

$$\pi_{1,\overline{\pi}}(p) := \mathfrak{t}^{ss}(\mathbb{Z})/T_{\overline{\pi}}(p).$$

Para $\beta \in F(\Delta^+, W \times W \times W)$ y un paseo p, definamos $S_\beta(p)$, $Z_\beta(p)$, $T_\beta(p)$, y $\pi_{1,\beta}(p)$ de la siguiente forma. Asumamos que β tiene al menos una contribución de conmutadores. Sean $\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right), \ldots, \left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right)$ sus partes de conmutadores. Podemos mover a todas ellas hacia la izquierda por la equivariancia, entonces

$$\rho(\beta) = {}^{w'_m}\rho\left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}\right) \cdots {}^{w'_1}\rho\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}\right)\rho(\overline{\beta})$$

para ciertos $w'_1, \ldots, w'_m \in W$ y $\overline{\beta} \in F(\Delta)$. Sea $\overline{\pi} = (\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w'_m) \cdots (\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w'_1)$ y definamos $S_\beta(p) = S_{\overline{\pi}}(p)$, etc. Finalmente, definamos $I_\beta(p)$ como la imagen de $C_p \to T$.

Teorema 4.5.1. *Sean $\beta \in F(\Delta^+, W^3)$ y p un paseo. Entonces:*

1. *el álgebra tangente al estabilizador de cada punto de C_p esta contenido en $(T_\beta(p) \otimes \mathbb{R})^\perp$,*
2. *el espacio tangente a $I_\beta(p)$ es $T_\beta(p) \otimes \mathbb{R}$,*
3. *Si G es conexo, $S_\beta(p)/Z(G) \simeq Z_\beta(p)$, y*
4. *si $C_p \to T^{ss}$ es sobreyectivo, $Z_\beta(p)$ y $\pi_{1,\beta}(p)$ son finitos y, para cualquier t, $g^{-1}(t) \simeq \mathbb{C}^{|U_p|} \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - \dim T^{ss}} \times \pi_{1,\beta}(p)$.*

Demostración. Si $\beta \in F(\Delta)$ ya lo probamos. Asumamos que β tiene al menos una contribución de conmutadores. Sean $\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right), \ldots, \left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right)$ sus contribuciones de conmutadores. Los movemos a la izquierda como antes de forma tal que

$$\rho(\beta) = {}^{w'_m}\rho\left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}\right) \cdots {}^{w'_1}\rho\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)})\rho(\overline{\beta}\right)$$

para ciertos $w'_1, \ldots, w'_m \in W$ y $\overline{\beta} \in F(\Delta)$.

Sea p un paseo. EL álgebra tangente a $I_\beta(p)$ es

$$T_\beta(p) = T\left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right) + \cdots + T\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right) + T(p)$$

por el lema anterior. Más aún, el álgebra tangente a cualquier estabilizador esta contenido en

$$T\left(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m\right)^\perp \bigcap \cdots \bigcap T\left(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1\right)^\perp \cap T(p)^\perp = T_\beta(p)^\perp$$

esto prueba 1. y 2..

Para 3. necesitamos chequear que $\mathcal{E}(x) \in {}^wT^\pi$ si y solo si $x \in \langle w(\pi^{-1} - \mathrm{Id})(\Phi)\rangle_{\mathbb{R}}^*$. La segunda condición significa que $\alpha(\mathcal{E}(w\pi^{-1}x - wx)) = 0$ para cualquier $\alpha \in Q \otimes \mathbb{R}$. Equivalentemente, que ${}^w({}^{\pi_1^{-1}}\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(x)^{-1})$ es la identidad.

La demostración de 4. es la misma que para $\beta \in F(\Delta)$. □

Corolario 4.5.1. *Asumamos que G es conexo. Sea $\beta \in F(\Delta, W^3)$ con $\pi(\beta) = 1$. Entonces, para $t \in T$ genérico, $Y_\beta(t)$ tiene una desomposición celular indexada por algunos paseos p cuyas celdas asociadas son $\pi_{1,\beta}(p) \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p| - 2\dim T^{ss}} \times (\mathbb{C}^{|U_p|}/Z_\beta(p))$, donde $Z_\beta(p)$ actúa linealmente en $\mathbb{C}^{|U_p|}$.*

Demostración. Misma demostración que para $\beta \in F(\Delta)$. □

Definición 4.5.2. Más precisamente, la condición de genericidad es la siguiente. Definamos para cualquier $S \subset (\Phi \cup \{0\})^2$

$$\mathfrak{t}_S := \langle h_\alpha - h_\beta : (\alpha, \beta) \in S \rangle$$

donde $h_0 := 0$. Sea $\mathcal{T}_S \subset T$ la unión de todos los subtoros cuyas álgebras tangentes son $\mathfrak{t}_S$. Finalmente, decimos que $t \in T$ es genérico si $t \notin \mathcal{T}_S$ para todo S salvo que $\mathcal{T}_S = T$. Notar que hay elementos genéricos.

Teorema 4.5.2. *Sea G un grupo de Lie de tipo A. Sean $\beta \in F(\Delta^+, W^3)$ y p un paseo. Si $C_p \to T^{ss}$ es sobreyectivo, $\pi_1(p) = \pi_1(G^{ss})$ y $Z(p)$ es trivial.*

Demostración. En vista del teorema 4.4.2, basta ver que para todo $w \in W$, $(w - \mathrm{Id})\mathfrak{t}$ esta generado por un subconjunto de Φ. Basta hacerlo cunado G es simple. En este caso. En este caso,

$$\mathfrak{t} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\},$$

$$\Phi = \{e_i - e_j : 1 \leq i \neq j \leq n\},$$

y $W = S_n$ actúa permutando los índices.

Sea $1 \leq i \leq n$ y k el orden de su órbita bajo w. Elijamos otro índice j. Tenemos que

$$\begin{aligned} e_{w(i)} - e_i &= \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k}(e_{w(i)} - e_{w^l(j)} - e_i + e_{w^{l-1}(j)}) \\ &= (w - \mathrm{Id})\left(\frac{1}{k}\sum_{l=1}^{k} e_i - e_{w^{l-1}(j)}\right) \end{aligned}$$

pertenece a $(w - \mathrm{Id})(\mathfrak{t})$. Por otro lado,

$$(w - \mathrm{Id})(e_i - e_j) = e_{w(i)} - e_i - (e_{w(j)} - j)$$

y se sigue que lo buscado. □

4.6. La descomposición celular

Definición 4.6.1. Decimos que una tupla $(C_1, \ldots, C_k) \in T^k$ es genérica si para cualesquiera $w_1, \ldots, w_k \in W$, ${}^{w_1}C_1 \cdots {}^{w_k}C_k$ es genérico en el sentido de la definición 4.5.2.

Teorema 4.6.1. *Sea G un grupo de Lie conexo y reductivo, $T \subset G$ un toro maximal, y $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_k) \in T^k$ una tupla genérica. Asumamos que C_k es regular. Entonces, para cualquier género g, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ admite un fibrado vectorial $Z(G)^{2g}$-equivariante de rango $r = \frac{1}{2}(\dim G - \mathrm{rk}\, G)$ que a su vez admite una descomposición celular equivariante cuyas celdas son cocientes finitos de variedades de la forma $(\mathbb{C}^\times)^{d-2i} \times \mathbb{C}^{i+r}$ para algún i, donde d es la dimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$. Si G es de tipo A, no es necesario hacer cocientes finitos.*

Llegados a este punto la demostración del teorema es verbatim la sección 7 de [Mel17]. Solo chequearemos las multiplicidades de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^\times$ en cada celda, que no es el focus de loc. cit., y discutimos la acción de $Z(G)$, que es nueva. La única excepción es el caso $k=1$ que haremos en detalle en la sección siguiente para probar adicionalmente que las celdas vienen de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_n)$.

Para $w \in W$, sea $\sigma_w \in F(\Delta^+)$ definido como $\sigma_w = \alpha_l \cdots \alpha_1$ donde $s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1}$ es una representación minimal de w en término de reflexiones asociadas a raíces simples. Para $w_1, w_2 \in W$, sea $\sigma_{w_1,w_2} := \sigma_{w_1}\sigma_{w_2}\sigma_{w_1^{-1}}\sigma_{w_2^{-1}}$. Las celdas del Teorema 4.6.1 provienen (ver página 65 de loc.cit.), módulo fibrados vectoriales, de $\beta \in F(\Delta, W^3)$ de la forma

$$(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1) \dots (\pi_1^{(g)}, \pi_2^{(g)}, w_g)\sigma_{\pi_1^{(1)},\pi_2^{(1)}} \cdots \sigma_{\pi_1^{(g)},\pi_2^{(g)}} \cdots \sigma_{\pi_1}\sigma_{\pi_1^{-1}} \cdots \sigma_{\pi_{k-1}}\sigma_{\pi_{k-1}^{-1}}$$

para ciertos $((\pi_1^j, \pi_2^j, w_j), \pi_j) \in (W^3)^g \times W^{k-1}$. El fibrado vectorial asociado a β tiene rango

$$\sum_{j=1}^{g}(\dim G - \operatorname{rk} G - l(\pi_1^{(j)}) - l(\pi_2^{(j)})) + \sum_{j=1}^{k-1}(\frac{1}{2}(\dim G - \dim Z(C_j)) - l(\pi_i))$$

Explícitamente, sus fibras, antes del cociente por T, son T-equivariantemente isomorfas a

$$\left(\prod_{j=1}^{g} U^+_{\pi_1^{(j)}} \times U^+_{\pi_2^{(j)}}\right) \times \left(\prod_{j=1}^{k-1} N_j \cap U^+_{\pi_j}\right)$$

donde N_j es el radical nilpotente de $Z(C_i)B$ y T actúa por conjugación en cada factor.

Por otro lado, todas las componentes conexas de la celda asociada a un paseo p son

$$\mathbb{C}^{|U_p|} \times (\mathbb{C}^\times)^{2g \operatorname{rk} G + |S_p| - 2\dim T^{ss}}$$

Ahora bien $|S_p| = l(\overline{\beta}) - 2|U_p|$. Luego,

$$|S_p| = 2\left(\sum_{j=1}^{k-1} l(\pi_i) + \sum_{j=1}^{g}\left(l\left(\pi_1^{(j)}\right) + l\left(\pi_2^{(j)}\right)\right) - |U_p|\right)$$

y, en particular, $|S_p|$ es par. Sea

$$i = \frac{1}{2}\left((2g-1)(\dim G - \operatorname{rk} g) + \sum_{j=1}^{k-1}(\dim G - \dim Z(C_j))\right) - \frac{1}{2}|S_p|$$

que es número entero. Notemos que $\dim Z(C_k) = \operatorname{rk} G$. Por lo tanto la celda final tiene $\frac{1}{2}(\dim G - \operatorname{rk} G) + i$ copias de $\mathbb{C}$ y

$$(2g-2)\dim G + \sum_{j=1}^{k}(\dim G - \dim Z(C_j)) + 2\dim Z(G) - 2i$$

de $\mathbb{C}^\times$ como afirmamos.

La acción de $Z(G)^{2g}$ es simple. Esta dada por actuar solamente en los $\rho(\pi_1^{(j)}, \pi_2^j, w_j)$'s por

$$(z_1, z_2) \cdot (t_1^{(j)}, t_2^{(j)}) = (z_1^{(j)} t_1^{(j)}, z_2^{(j)} t_2^{(j)})$$

para $(z_1, z_2) \in (Z(G)^g)^2$. Lo único que hay que notar es que los argumentos de Mellit solo involucran descomposiciones de Bruhat, reparametrización de variables no-tóricas y algunas conjugaciones, ninguno de los cuales afecta a los elementos centrales o a las variables tóricas donde actúan.

Ejemplo 4.6.1. El ejemplo 4.4.1 no aparece en ninguna variedad de caracteres. Uno un poco más complicado si. Continuamos la notación del ejemplos 4.4.1. Los elementos del grupo de Weyl escritos en forma minimal son:

$$\mathrm{Id}, s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}, s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}, s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}, s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1} \text{ y } s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}.$$

Tomemos $g = 0$, $k = 5$, $\pi_1 = \pi_4 = s_{\alpha_1}$ y $\pi_2 = \pi_3 = s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$. El siguiente es un paseo valido para el β correspondiente:

k	1	2	3	4	5	6	7	8
raíz	α_1	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1
paso	arriba	quedarnos	abajo	arriba	arriba	quedarnos	arriba	arriba
p_k	s_{α_1}	s_{α_1}	Id	s_{α_2}	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$
π_k	s_{α_1}	Id	s_{α_1}	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	s_{α_1}	Id

k	9	10	11	12	13	14	15	16
raíz	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_1
paso	abajo	abajo	quedarnos	abajo	abajo	arriba	quedarnos	abajo
p_k	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}$	s_{α_2}	Id	s_{α_1}	s_{α_1}	Id
π_k	s_{α_1}	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_1}s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	$s_{\alpha_2}s_{\alpha_1}$	s_{α_1}	Id	s_{α_1}	Id

Tabla 4.2: Un paseo con $I(p) = T$ y centro $Z(p)$ no trivial en $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$.

Para este paseo, $\pi_1(p)$ es trivial y $Z(p) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ como en el ejemplo 4.4.1.

4.7. La acción de U

El objetivo de esta sección es rastrear que puntos en una celda del teorema 4.6.1 están en la misma fibra de la fibración en el caso $k = 1$. Para este fin, primero estudiaremos una familia de funciones en U.

Sea $\pi \in W$ y $B\pi B$ su celda de Bruhat correspondiente. Consideremos la acción de $U \times U$ en $B\pi B$ dada por $(u_1, u_2) \cdot x = u_1 x u_2^{-1}$. Ahora bien, la celda la podemos parametrizar como $U \times T \times U_\pi^-$ y, si levantamos a π a $\sigma_\pi \in F(\Delta^+)$ con longitud minimal, tenemos una parametrización $f_\pi : \mathbb{C}^l \to \pi U_\pi^-$. Por lo tanto, debe existir una acción de $U \times U$ en $U \times T \times \mathbb{C}^l$ de forma tal que

$$u_1 v^\pi t f_\pi(z) u_2^{-1} = v'^\pi t' f_\pi(z')$$

si $(u_1, u_2) \cdot (v, t, z) = (v', t', z')$. Nuestro primer objetivo es describir esta acción más explícitamente.

Para una raíz simple $\alpha \in \Delta^+$, $U_{s_\alpha}^- = U_{s_\alpha^{-1}}^-$ es de dimensión uno, mientras que $U_{s_\alpha}^+$ es de codimensión uno en U. Por lo tanto, $U_{s_\alpha}^+$ es normal en U [Hum75, pág. 17.4]. Más aún, U es un producto semidirecto de $U_{s_\alpha}^+$ por $U_{s_\alpha}^-$. Luego, podemos pensar al cociente por $U_{s_\alpha}^+$ como $q_\alpha : U \to U_{s_\alpha}^-$. Componiendo con la inversa de $s_\alpha^{-1} f_\alpha$ obtenemos un morfismo de grupos $g_\alpha^- : U \to \mathbb{C}$ tal que

$$s_\alpha^{-1} f_\alpha(-g_\alpha^-(u))u \in U_{s_\alpha}^+$$

para cualquier u. Definimos, dado $z \in \mathbb{C}$, $g_{\alpha,z}^+ : U \to U_{s_\alpha}^+$ como

$$\begin{aligned} g_{\alpha,z}^+(u) &= f_\alpha(z) s_\alpha^{-1} f_\alpha(-g_\alpha^-(u)) u f_\alpha(z)^{-1} \\ &= f_\alpha(z - g_\alpha^-(u)) u f_\alpha(z)^{-1} \end{aligned}$$

para $u \in U$. Para simplificar la notación, dado un elemento reducido $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_l \in F(\Delta^+)$, $z \in \mathbb{C}^l$ y $k = 1, \dots, l$, sea

$$g_{\alpha,k}^+(u, z) = g_{\alpha_{l-k+1}, z_{l-k+1}}^+(g_{\alpha_{l-k+2}, z_{l-k+2}}^+(\dots(g_{\alpha_l, z_l}^+(u))))$$

para $u \in U$. Dado $\pi \in W$, escribiremos $g^+_{\pi,k}$ para $g^+_{\sigma,k}$, donde $\sigma \in F(\Delta^+)$ es un levantado de π de longitud minimal, y g^+_π para $g^+_{\pi,l(\pi)}$. Además, denotemos

$$g^-_\pi(u,z) = (z_1 - g^-_{\alpha_1}(g^+_{\pi,l-1}(u,z)), \ldots, z_{l-1} - g^-_{\alpha_{l-1}}(g^+_{\pi,1}(u,z)), z_l - g^-_{\alpha_l}(u))$$

para $u \in U$ y $z \in \mathbb{C}^l$. Finalmente, llamemos $g^-_\pi(u) = g^-_\pi(u,0)$ y $g^+_\pi(u) = g^+_\pi(u,0)$.

Lema 4.7.1. *Sea $\pi \in W$. Entonces*

$$t \cdot g^-_\pi(u,z) = g^-_\pi(t \cdot u, t \cdot z)$$

y

$${}^\pi t \cdot g^+_\pi(u,z) = g^+_\pi(t \cdot u, t \cdot z)$$

para cualesquiera $t \in T$, $u \in U$ y $z \in \mathbb{C}^{l(\pi)}$.

Demostración. Notemos primero que g^-_α es T-equivariante para $\alpha \in \Delta^+$. Luego,

$$\begin{aligned} g^+_\alpha(t \cdot u, t \cdot z) &= f_\alpha(t \cdot z - t \cdot g^-_\alpha(u)) tut^{-1} f_\alpha(t \cdot z)^{-1} \\ &= {}^{s_\alpha} t f(z -) g^-_\alpha(u)) u f_\alpha(z)^{-1 s_\alpha} t^{-1} \\ &= {}^{s_\alpha} t \cdot g^\pi_\alpha(u,z) \end{aligned}$$

gracias a la s_α-equivariancia de f_α. Se sigue la π-equivariancia de g^+_π. Para cualquier $k = 2, \ldots, l(\pi)$, tenemos que

$$\begin{aligned} (t \cdot g^-_\pi(u,z))_k &= \alpha_k({}^{\pi_{k-1}} t)(z_k - g^-_{\alpha_k}(g^+_{\pi_{k-1}}(u,z))) \\ &= (t \cdot z)_k - g^-_{\alpha_k}({}^{\pi_{k-1}} t \cdot g^+_{\pi_{k-1}}(u,z))) \\ &= (t \cdot z)_k - g^-_{\alpha_k}(g^+_{\pi_{k-1}}(t \cdot u, t \cdot z))) \\ &= g^-_\pi(t \cdot u, t \cdot z)_k \end{aligned}$$

donde π_{k-1} es el producto de las últimas $k-1$ raíz simples de π. □

Lema 4.7.2. *Sea $\pi \in W$ un elemento de longitud l y escribamoslo como $s_1 \cdots s_l$ donde cada s_i es la simetría asociada a $\alpha_i \in \Delta^+$. Entonces $U \times T \times \mathbb{C}^l \to B\pi B$, $(v,t,z) \mapsto v^\pi t f_\pi(z)$, es un isomorfismo $U \times U$-equivariante si dotamos al dominio con la acción*

$$(u_1,u_2) \cdot (v,t,z) = (u_1 v g^+_\pi(t \cdot u_2, t \cdot z)^{-1}, t, g^-_\pi(u_2,z))$$

para $u_1, u_2 \in U$ y $(v,t,z) \in U \times V \times \mathbb{C}^l$.

Demostración. Basta ver que

$$f_{s_\alpha}(z) u^{-1} = g^+_{\alpha,z}(u)^{-1} f_{s_\alpha}(z - g^-_\alpha(u))$$

para cualesquiera $\alpha \in \Delta^+$, $z \in \mathbb{C}$ y $u \in U$. Ahora bien, tenemos que

$$\begin{aligned} f_{s_\alpha}(z) u^{-1} &= f_{s_\alpha}(z)(s^{-1}_\alpha f_\alpha(-g^-_\alpha(u))u)^{-1} s^{-1}_\alpha f_\alpha(-g^-_\alpha(u)) \\ &= g^+_{\alpha,z}(u)^{-1} f_{s_\alpha}(z) s^{-1}_\alpha f_\alpha(-g^-_\alpha(u)) \\ &= g^+_{\alpha,z}(u)^{-1} f_{s_\alpha}(z - g^-_\alpha(u)) \end{aligned}$$

como queríamos. □

De forma similar, tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.7.3. *Sea $\pi \in W$ un elemento de longitud l y escribamoslo como $s_1 \cdots s_l$ donde cada s_i es la simetría asociada a $\alpha_i \in \Delta^+$. Entonces $\mathbb{C}^l \times T \times U \to B\pi B$, $(z, t, v) \mapsto f_{\pi^{-1}}(z)^{-1}tv$, es un isomorfismo $U \times U$-equivariante si dotamos al dominio con la acción*

$$(u_1, u_2) \cdot (z, t, v) = (g^-_{\pi^{-1}}(u_1, z), t, (t^{-1} \cdot g^+_{\pi^{-1}}(u_1, z))vu_2^{-1})$$

para $u_1, u_2 \in U$ y $(z, t, v) \in \mathbb{C}^l \times V \times U$.

Demostración. Invirtiendo, obtenemos la parametrización $v^{-1}t^{-1}f_{\pi^{-1}}(z)$ de $B\pi^{-1}B$ en la cuál podemos aplicar el resultado anterior. □

Lema 4.7.4. *Sea $\pi \in W$ un elemento de longitud l. Entonces*

$$g^-_\pi(u_1u_2, z) = g^-_\pi(u_1, g^-_\pi(u_2, z))$$

y

$$g^+_\pi(u_1u_2, z) = g^+_\pi(u_1, g^-_\pi(u_2, z))g^+_\pi(u_2, z)$$

para cualesquiera $u_1, u_2 \in U$ y $z \in \mathbb{C}^{l(\pi)}$.

Demostración. Consideramos la acción de $U \times U$ en $B\pi B$ dada por $(u_1, u_2) \cdot x = u_1xu_2^{-1}$. Podemos aplicar lo lemas anteriores. Tenemos que $g^-_\pi(u_1u_2, z)$ es la tercer coordenada de

$$\begin{aligned} u_1 \cdot (u_2 \cdot (1, 1, z)) &= u_1 \cdot (u_2g^+_\pi(u_2, z)^{-1}, 1, g^-_\pi(u_2, z)) \\ &= (u_1u_2g^+_\pi(u_2, z)^{-1}g^+_\pi(u_1, g^-_\pi(u_2, z))^{-1}, 1, g^-_\pi(u_1, g^-_\pi(u_2, z))) \end{aligned}$$

y también podemos despejar $g^+_\pi(u_1u_2)$ de la primer coordenada. □

Lema 4.7.5. *Sea $\pi \in W$. Entonces $g^-_\pi(u) = 0$ para todo $u \in U^+_\pi$ y $g^+_\pi(u) = e$ si $u \in U^-_\pi$.*

Demostración. Ambas afirmaciones se prueban de la misma forma. Probaremos solamente la primera. Por inducción en la longitud de π. Para longitud uno, el enunciado es claro por definición. Supongamos que el enunciado es cierto para π y sea $\alpha \in \Delta^+$ tal que $\pi s_\alpha > \pi$. Tomemos $u \in U^+_{\pi s_\alpha}$. Ahora bien, $\Phi_{\pi s_\alpha} = s_\alpha(\Phi_\pi) \cup \{\alpha\}$. Luego, $u \in U^+_{s_\alpha}$ y sabemos que $g^-_\alpha(u) = 0$. Por lo tanto, $g^+_\alpha(u) = s_\alpha us_\alpha^{-1}$. Ahora bien, $u \in \exp(\bigoplus_{\beta \notin s_\alpha(\Phi_\pi)} \beta\mathbb{C})$ y en consecuencia $s_\alpha us_\alpha \in \exp(\bigoplus_{\beta \notin \Phi_\pi} \beta\mathbb{C})$. Aplicando la hipótesis inductiva, concluimos que $g^-_{\pi s_\alpha}(u) = 0$. □

Lema 4.7.6. *Sea $\pi \in W$ y $u \in U$. Entonces*

$$u = (f_\pi(g^-_\pi(u))^{-1}\pi) \cdot (\pi^{-1}g^+_\pi(u)\pi)$$

es la descomposición de u bajo $U = U^-_\pi U^+_\pi$.

Demostración. Ya probamos que

$$\pi u^{-1} = g^+_\pi(u)^{-1}f_\pi(g^-_\pi(u))$$

y, por lo tanto, vale la igualdad del enunciado. Escribamos $u = u^-u^+$ con $u^- \in U^-_\pi$ y $u^+ \in U^+_\pi$. Entonces, $g^-_\pi(u) = g^-_\pi(u^-)$. Basta ver entonces que $\pi^{-1}f_\pi(g^-_\pi(u)) = u^{-1}$ si $u \in U^-_\pi$. Equivalentemente, $g^+_\pi(u) = e$ si $u \in U^-_\pi$. □

Corolario 4.7.1. *Sea $\pi \in W$. Entonces $g^-_\pi(u_1u_2) = g^-_\pi(u_1)$ y $g^+_\pi(u_1u_2) = g^+_\pi(u_1)\pi u_2\pi^{-1}$ si $u_2 \in U^+_\pi$.*

Lema 4.7.7. *Sea $\pi \in W$ y consideremos las parametrizaciones $U \times T \times \mathbb{C}^l \to B\pi B$, $(v, t, z) \mapsto v^\pi tf_\pi(z)$, y $\mathbb{C}^l \times T \times U \to B\pi B$, $(z, t, v) \mapsto f_{\pi^{-1}}(z)^{-1}tv$, de la celda de Bruhat $B\pi B$. Entonces*

$$(z, t, v) \mapsto (f_{\pi^{-1}}(z)^{-1}\pi^{-1}g^+_\pi(t \cdot v^{-1})^{-1}, t, g^-_\pi(v^{-1}))$$

es la reparametrización $\mathbb{C}^l \times T \times U \to U \times T \times \mathbb{C}^l$.

Demostración. Pondemos pensar a $f_{\pi^{-1}}(z)^{-1}tv$ como $(e, v^{-1}) \cdot (f_{\pi^{-1}}(z)^{-1}\pi^{-1}, t, 1)$. $\square$

Ya estamos listos para calcular la acción. Extendemos g^+ y g^- a $F(\Delta^+)$ vía las mismas fórmulas que para g^+_π y g^-_π. Una operación de U en una variedad X es simplemente una función $U \times X \to X$. Decimos que dos variedades X e Y con operaciones de U son U-equivariantemente isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas que conmute con las operaciones.

Lema 4.7.8. *Sean $\pi_1, \pi_2 \in W$ y consideremos la variedad sobre G dada por $B\pi_1 B \times B\pi_2 B \times U \to G$, $(\alpha, \beta, u) \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}u$, y dotemosla con la operación de U dada por $u' \cdot (\alpha, \beta, u) = (u'\alpha u'^{-1}, u'\beta u'^{-1}, u'u(t \cdot \phi(u'))^{-1})$ para $\phi : U \to U$ y $t \in T$ fijos. La misma es isomorfa sobre G de forma T y U-equivariante a $U \times T^2 \times \mathbb{C}^{l(\pi_1)} \times \mathbb{C}^{l(\pi_2)} \times \mathbb{C}^{l(\pi_1)} \times \mathbb{C}^{l(\pi_2)} \times U^+_{\pi_1} \times U^+_{\pi_2}$ con operación de $u' \in U$ dada por*

$$\begin{aligned}(u'uh_4(u')^{-1}, t_1, t_2, g^-_{\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1, z_2', z_1', z_2)),\\ h_2(u')u_1^+(t_1^{-1} \cdot (\pi_1^{-1}h_4(u')\pi_1))^{-1}, (\pi_2^{-1}h_3(u')\pi_2)u_2^+(t_2 \cdot h_1(u'))^{-1})\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_1(u') &= t_2^{-1\pi_2^{-1}} t \cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'), z_2),\\
h_2(u') &= t_1^{-1\pi_1^{-1}} t_2^{-1\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}} t \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2)),\\
h_3(u') &= {}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}} t_2^{-1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}} t \cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_2', z_1', z_2)), \text{ y}\\
h_4(u') &= {}^{\pi_1}t_1{}^{\pi_1\pi_2}t_2{}^{\pi_1\pi_2}t_1^{-1\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}} t_2^{-1\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}} t \cdot g^+_{\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1, z_2', z_1', z_2)).
\end{aligned}$$

Demostración. En esta demostración seguiremos los isomorfismos de [Mel17, subsección 7.4] rastreando las acción de U.

Podemos asumir que $t = 1$ reemplazando ϕ por $t \cdot \phi(-)$. Para recuperar el enunciado con t arbitrario hay que realizar el cambio de variables $(z_1, z_2', z_1', z_2) \mapsto t^{-1} \cdot (z_1, z_2', z_1', z_2)$ y utilizar las T-equivarianzas de g^- y g^+.

Usamos las parametrizaciones de Bruhat

$$\alpha = f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u_1$$

y

$$\beta = u_2{}^{\pi_2}t_2 f_{\pi_2}(z_2)$$

para las cuales ya conocemos las acciones. La función a G es

$$f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u_1u_2{}^{\pi_2}t_2f_{\pi_2}(z_2)u_1^{-1}t_1^{-1}f_{\pi_1^{-1}}(z_1)f_{\pi_2}(z_2)^{-1\pi_2}t_2^{-1}u_2^{-1}u$$

Consideremos el automorfismo de $\mathbb{C}^{l(\pi_1)} \times \mathbb{C}^{l(\pi_2)} \times U^3$ dado por

$$(z_1, z_2, u_1, u_2, u) \mapsto (z_1, z_2, u_1f_{\pi_2}(z_2)^{-1}\pi_2, u_1u_2, u_2^{-1}u)$$

que trasforma la función a G a

$$f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u_2\pi_2t_2u_1^{-1}t_1^{-1}f_{\pi_1^{-1}}(z_1)f_{\pi_2}(z_2)^{-1\pi_2}t_2^{-1}u$$

y la acción en las últimas tres variables a

$$\begin{aligned}u' \cdot (u_1, u_2, u) =&((t_1^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u', z_1))u_1\pi_2^{-1}f_{\pi_2}(z_2)u'^{-1}f_{\pi_2}(u' \cdot z_2)^{-1}\pi_2,\\ &(t_1^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u', z_1))u_2({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(u', z_2))^{-1}, ({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(u', z_2))u(\phi(u'))^{-1})\end{aligned}$$

Ahora bien, notemos que

$$f_{\pi_2}(z_2)u'^{-1}f_{\pi_2}(u'\cdot z_2)^{-1} = g^+_{\pi_2}(u',z_2)^{-1}$$

por lo que la acción en u_1 se simplifica a

$$(t_1^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u',z_1))u_1\pi_2^{-1}g^+_{\pi_2}(u',z_2)^{-1}\pi_2.$$

Notemos que la expresión de la función a G termina en una parametrización de la celda de $B\pi_2^{-1}B$. Cambiamos de variable a la otra parametrización. Es decir, consideramos

$$(z_2,u)\in\mathbb{C}^{l(\pi_2)}\times U\mapsto (f_{\pi_2}(z_2)^{-1}\pi_2(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1})), g^-_{\pi_2^{-1}}(u^{-1}))\in U\times\mathbb{C}^{l(\pi_2)}$$

Seguimos llamando u a la variable de U y z_2 a la $\mathbb{C}^{l(\pi_2)}$. Aplicamos además el automorfismo $u\mapsto \pi_1 f_{\pi_1^{-1}}(z_1)u$ de U. La función a G se simplifica a

$$f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u_2\pi_2t_2u_1^{-1}t_1^{-1}\pi_1^{-1}ut_2^{-1}f_{\pi_2^{-1}}(z_2)$$

mientras que la acción de U, si bien complicada en u, en z_2 es más simple. En efecto, gracias al lema 4.7.1 y a la T-equivariancia de g^+, tenemos que

$$g^-_{\pi_2^{-1}}(\phi(u')u^{-1}({}^{\pi_2}t_2\cdot g^+_{\pi_2}(u',z_2))^{-1}) = g_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),g^-_{\pi_2^{-1}}(u^{-1}))$$

y, por lo tanto, la acción en z_2 esta dada por

$$z_2\mapsto g^-_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),z_2).$$

Para la acción en u, aplicamos T-equivariancia y el lema 4.7.1 nuevamente:

$$\begin{aligned}
&f_{\pi_2}(u'\cdot z_2)^{-1}\pi_2({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}((u'\cdot u)^{-1})) = \\
&\qquad = f_{\pi_2}(g^-_{\pi_2}(u',z_2))^{-1}\pi_2(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u')u^{-1}({}^{\pi_2}t_2\cdot g^+_{\pi_2}(u',z_2))^{-1}))\\
&\qquad = f_{\pi_2}(g^-_{\pi_2}(u',z_2))^{-1}\pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot\phi(u'))({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot u)^{-1}g^+_{\pi_2}(u',z_2)^{-1})\\
&\qquad = u'f_{\pi_2}(z_2)^{-1}\pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot u^{-1})g^+_{\pi_2^{-1}}({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot\phi(u'),g^-_{\pi_2^{-1}}({}^{\pi_2}t_2^{-1}\cdot u)^{-1})^{-1}\\
&\qquad = u'f_{\pi_2}(z_2)^{-1}\pi_2(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1}))(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),g^-_{\pi_2^{-1}}(u^{-1})))^{-1}
\end{aligned}$$

Por lo que la acción en u, en las nuevas variables z_2,u, esta dada por

$$\begin{aligned}
u\mapsto{}& \pi_1 f_{\pi_1^{-1}}(u'\cdot z_1)u'f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}\pi_1^{-1}u(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),z_2))^{-1}\\
&= \pi_1 g^+_{\pi_1^{-1}}(u',z_1)\pi_1^{-1}u(t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),z_2))^{-1}
\end{aligned}$$

Notemos que las acciones en u_1 y u_2 dependen de $g^+_{\pi_2}(u',z_2)$ para la vieja variable z_2. En términos de las nuevas variables esto se corresponde a $g^+_{\pi_2}(u',g^-_{\pi_2}(u))$. Además, la vieja variable u la podemos recuperar como

$$u_0 := ({}^{\pi_2}t_2\cdot g^+_{\pi_2}(f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}\pi_1^{-1}u))\pi_2 f_{\pi_2^{-1}}(z_2).$$

Continuamos descomponiendo a u_1^{-1} en $u_1^-u_1^+$ con $u_1^\pm\in U^\pm_{\pi_1}$. Escribimos además $u_1^- = f_{\pi_1}(z_1')^{-1}\pi_1$, equivalentemente $z_1' = g^-_{\pi_1}(u_1^{-1})$. La acción en u_1^+ la podemos calcular de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(\pi_2^{-1}g^+_{\pi_2}(u',g^-_{\pi_2}(u))\pi_2u_1^{-1}(t_1^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u',z_1))^{-1})\pi_1\\
&= \pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(\pi_2^{-1}g^+_{\pi_2}(u',g^-_{\pi_2}(u))\pi_2,g^-_{\pi_1}(u_1^{-1}))\pi_1\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u_1^{-1})\pi_1(t_1^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u',z_1))^{-1}.
\end{aligned}$$

Esto implica que la acción es

$$u_1^+ \mapsto \pi_1^{-1} g_{\pi_1}^+(\omega, z_1')\pi_1 u_1^+ \eta^{-1}$$

donde $\omega = \pi_2^{-1} g_{\pi_2}^+(u', g_{\pi_2}^-(u))\pi_2 \in U_{\pi_2}^+$ y $\eta = t_1^{-1} \cdot g_{\pi_1^{-1}}^+(u', z_1) \in U_{\pi_1}^+$. Mientras tanto, la acción en z_1' esta dada por

$$\begin{aligned} g_{\pi_1}^-(u' \cdot u_1^{-1}) &= g_{\pi_1}^-(\pi_2^{-1} g_{\pi_2}^+(u', g_{\pi_2}^-(u))\pi_2 u_1^{-1}(t_1^{-1} \cdot g_{\pi_1^{-1}}^+(u', z_1))^{-1}) \\ &= g_{\pi_1}^-(\pi_2^{-1} g_{\pi_2}^+(u', g_{\pi_2}^-(u))\pi_2, g_{\pi_1}^-(u_1^{-1})) \\ &= g_{\pi_1}^-(\omega, z_1') \end{aligned}$$

Reemplazamos u por $\pi_1(t_1 \cdot u_1^+)\pi_1^{-1} u$. De esta forma, en la función a G tenemos el término $f_{\pi_1}(z_1')^{-1}\pi_1 t_1^{-1}\pi_1^{-1} u$ que es una parametrización de $B\pi_1^{-1}B$. Reparametrizamos vía

$$(z_1', u) \mapsto (f_{\pi_1}(z_1')^{-1}\pi_1(t_1^{-1} \cdot g_{\pi_1^{-1}}^+(u^{-1}))^{-1}, g_{\pi_1^{-1}}^-(u^{-1}))$$

Notemos que tanto $\pi_1(t_1 \cdot u_1^+)\pi_1^{-1}$ como $\pi_1(t_1 \cdot (u' \cdot u_1^+))\pi_1^{-1}$ viven en $\pi_1 U_{\pi_1}^+ \pi_1^{-1} = U_{\pi_1^{-1}}^+$ y por lo tanto el primer reemplazo no modifica el valor de $g_{\pi_1^{-1}}^-(u^{-1})$ ni la acción en el nuevo z_1'. Para esta última, notamos además que $\pi_1 g_{\pi_1^{-1}}^+(u', z_1)^{-1}\pi_1^{-1} \in U_{\pi_1^{-1}}^+$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} g_{\pi_1^{-1}}^-((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2))u^{-1}\pi_1 g_{\pi_1^{-1}}^+(u', z_1)^{-1}\pi_1^{-1}) &= g_{\pi_1^{-1}}^-((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2))u^{-1}) \\ &= g_{\pi_1^{-1}}^-((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2)), g_{\pi_1^{-1}}^-(u^{-1})) \end{aligned}$$

y la acción en z_1' queda dada por

$$z_1' \mapsto g_{\pi_1^{-1}}^-((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2)), z_1').$$

Si cambiamos a z_1' por $t_2 \cdot z_1'$, la acción en (z_1', z_2) resulta ser

$$\begin{aligned} u' \cdot (z_1', z_2) &= (t_2 \cdot g_{\pi_1^{-1}}^-((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2)), t_2^{-1} \cdot z_1'), g_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'), z_2)) \\ &= g_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}^-(\phi(u'), (z_1', z_2)). \end{aligned}$$

Por otro lado, para la acción en u aplicamos el corolario 4.7.1. Llamando ω' a $g_{\pi_1}^+(\omega, z_1')^{-1}$ para la vieja variable z_1', tenemos

$$\begin{aligned} & g_{\pi_1^{-1}}^+((\pi_1(t_1 \cdot (u' \cdot u_1^+))\pi_1^{-1}(u' \cdot u))^{-1}) = \\ &\quad = g_{\pi_1^{-1}}^+((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2))u^{-1}\pi_1(t_1 \cdot u_1^+)^{-1}\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot \omega')) \\ &\quad = g_{\pi_1^{-1}}^+((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2))u^{-1})(t_1 \cdot u_1^+)^{-1}\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot \omega')\pi_1 \\ &\quad = g_{\pi_1^{-1}}^+((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2)), g_{\pi_1^{-1}}^-(u^{-1}))g_{\pi_1^{-1}}^+(u^{-1})(t_1 \cdot u_1^+)^{-1}\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot \omega')\pi_1 \\ &\quad = g_{\pi_1^{-1}}^+((t_2^{-1} \cdot g_{\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), z_2)), g_{\pi_1^{-1}}^-(u^{-1}))g_{\pi_1^{-1}}^+(u^{-1}\pi_1(t_1 \cdot u_1^+)^{-1}\pi_1^{-1})\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot \omega')\pi_1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{\pi_1}(u' \cdot z_1')^{-1}\pi_1(t_1^{-1} \cdot (\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot \omega')\pi_1))^{-1} &= f_{\pi_1}(g_{\pi_1}^-(\omega, z_1'))^{-1} g_{\pi_1}^+(\omega, z_1')\pi_1 \\ &= \omega f_{\pi_1}(z_1')^{-1}\pi_1 \end{aligned}$$

Luego, la acción en u esta dada por

$$u \mapsto \omega u(t_1^{-1\pi_1^{-1}} t_2^{-1} \cdot g_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}^+(\phi(u'), (z_1', z_2)))^{-1}.$$

Notemos que u_0 esta dada ahora por

$$\begin{aligned} u_0 &= ({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}(t_1 \cdot u_1^+)^{-1}\pi_1^{-1}({}^{\pi_1}t_1 \cdot g^+_{\pi_1}(u))\pi_1 f_{\pi_1^{-1}}(z_1')))\pi_2 f_{\pi_2^{-1}}(z_2) \\ &= ({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}(t_1 \cdot (\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u)^{-1}\pi_1)u_1^+)^{-1} f_{\pi_1^{-1}}(z_1')))\pi_2 f_{\pi_2^{-1}}(z_2) \\ &= ({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}(t_1 \cdot (\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u^{-1}, g^-_{\pi_1}(u))\pi_1)u_1^+)^{-1} f_{\pi_1^{-1}}(z_1')))\pi_2 f_{\pi_2^{-1}}(z_2) \end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $g^+_{\pi_1}(u^{-1}, g^-_{\pi_1}(u))g^+_{\pi_1}(u) = g^+_{\pi_1}(u^{-1}u) = e$.

Consideremos el cambio de variables $u_1^+ \in U^+_{\pi_1} \mapsto \pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u^{-1}, \tilde{z}_1')\pi_1 u_1^+ \in U^+_{\pi_1}$, donde $\tilde{z}_1'$ es la vieja variable z_1'. Tenemos que la acción de u' esta dada por:

$$\begin{aligned} &\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u' \cdot u^{-1}, u' \cdot \tilde{z}_1')\pi_1 u' \cdot u_1^+ = \\ &= \pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2)))u^{-1}\omega^{-1}, g^-_{\pi_1}(\omega, \tilde{z}_1'))g^+_{\pi_1}(\omega, \tilde{z}_1')\pi_1 u_1^+\eta^{-1} \\ &= \pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2)))u^{-1}, \tilde{z}_1')\pi_1 u_1^+\eta^{-1} \\ &= \pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2))), g^-_{\pi_1}(u^{-1}, \tilde{z}_1'))\pi_1\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u^{-1}, \tilde{z}_1')\pi_1 u_1^+\eta^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien $\tilde{z}_1' = g^-_{\pi_1}(u)$ y, por lo tanto, $g^-_{\pi_1}(u^{-1}, \tilde{z}_1') = 0$. Luego,

$$\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2))), g^-_{\pi_1}(u^{-1}, \tilde{z}_1'))\pi_1 = t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2))$$

y la acción en u_1^+ esta dada por

$$u' \cdot u_1^+ = (t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'), (z_1', z_2)))u_1^+\eta^{-1}.$$

Notemos además que

$$u_0 = ({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}(t_1 \cdot u_1^+)^{-1} f_{\pi_1^{-1}}(z_1')))\pi_2 f_{\pi_2^{-1}}(z_2).$$

La función a G en las variables actuales es

$$f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u_2\pi_2t_2ut_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}f_{\pi_1^{-1}}(z_1')f_{\pi_2^{-1}}(z_2)$$

Repetimos ahora el argumento anterior con u_2. Escribimos $u_2 = u_2^-u_2^+$ con $u_2^\pm \in U^\pm_{\pi_2^{-1}}$ y $u_2^- = f_{\pi_2^{-1}}(z_2')^{-1}\pi_2$. Las acciones de u' en u_2^+ y en z_2' están dadas por

$$\begin{aligned} u' \cdot z_2' &= g^-_{\pi_2^{-1}}(u' \cdot u_2) \\ &= g^-_{\pi_2^{-1}}((t_1^{-1} \cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u', z_1))u_2({}^{\pi_2}t_2 \cdot (\pi_2\omega^{-1}\pi_2^{-1}))) \\ &= g^-_{\pi_2^{-1}}(\eta, z_2') \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} u' \cdot u_2^+ &= \pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(u' \cdot u_2)\pi_2^{-1} \\ &= \pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta u_2({}^{\pi_2}t_2 \cdot (\pi_2\omega^{-1}\pi_2^{-1})))\pi_2^{-1} \\ &= \pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta, z_2')\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2(t_2 \cdot \omega^{-1})\pi_2^{-1} \end{aligned}$$

Consideramos ahora $u \mapsto (t_2^{-1} \cdot (\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2))u$ y reparametrizamos $f_{\pi_2^{-1}}(z_2')^{-1}\pi_2t_2\pi_2u$, $B\pi_2B$, vía

$$(z_2', u) \mapsto (f_{\pi_2^{-1}}(z_2')^{-1}\pi_2({}^{\pi_2}t_2 \cdot g^+_{\pi_2}(u^{-1}))^{-1}, g^-_{\pi_2}(u^{-1})).$$

Como $(t_2^{-1}\cdot(g^+_{\pi_2^{-1}}((t_1^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}}(u',z_1)),z_2')))^{-1}\in U^+_{\pi_2}$,

$$\begin{aligned}u'\cdot z_2' &= g^-_{\pi_2}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2)))((t_2^{-1}\cdot(\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2))u)^{-1})\\ &= g^-_{\pi_2}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2))),z_2').\end{aligned}$$

Por otro lado, si $\tilde{u}$ y $\tilde{z}_2'$ son las variables viejas,

$$g^+_{\pi_2}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2)))((t_2^{-1}\cdot(\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2))\tilde{u})^{-1}(t_2^{-1}\cdot(g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta,\tilde{z}_2')))^{-1})=$$
$$g^+_{\pi_2}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2))),z_2')g^+_{\pi_2}(((t_2^{-1}\cdot(\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2))\tilde{u})^{-1})\pi_2(t_2^{-1}\cdot(g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta,\tilde{z}_2')))^{-1})\pi_2^{-1}$$

y

$$f_{\pi_2^{-1}}(u'\cdot\tilde{z}_2')^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta,\tilde{z}_2')=f_{\pi_2^{-1}}(g^-_{\pi_2^{-1}}(\eta,\tilde{z}_2'))^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta,\tilde{z}_2')=\eta f_{\pi_2^{-1}}(\tilde{z}_2')^{-1}$$

Luego

$$u'\cdot u=\eta u({}^{\pi_2}t_2\cdot g^+_{\pi_2}((t_1^{-1\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2))),z_2'))^{-1}$$

Reemplazando z_2' por ${}^{\pi_1^{-1}}t_2t_1$, las acciones se simplifican a

$$u'\cdot(z_2',u)=(g^-_{\pi_2}(g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2)),z_2'),\eta u({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2))^{-1}))$$

Notemos que u_0 no cambio y es independiente de u_2^+.

Consideremos el automorfismo $u_1^+\mapsto u_1^+\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(u^{-1})^{-1}\pi_1$ de $U^+_{\pi_1}$ y el isomorfismo $u_2^+\mapsto g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u))\pi_2^{-1}u_2^+\pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(u_0^{-1})^{-1}$ entre $U^+_{\pi_2^{-1}}$ y $U_{\pi_2^+}$. La operación en u_1^+ queda dada por

$$h_2(u')u_1^+\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2)),g^-_{\pi_1}(u^{-1}))^{-1}\pi_1$$

dado que $\eta\in U^+_{\pi_1}$. Para la operación en u_2^+ calculamos

$$\begin{aligned}&g^+_{\pi_2^{-1}}(({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2)))u^{-1}\eta^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(\eta,g^-_{\pi_2^{-1}}(u)))g^+_{\pi_2^{-1}}(\eta,g^-_{\pi_2^{-1}}(u))\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2)))u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u)))\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2))),g^-_{\pi_2^{-1}}(u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u)))g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u)))\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2))))g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u)))\\
&=\pi_2^{-1}({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2)))\pi_2 g^+_{\pi_2^{-1}}(u^{-1},g^-_{\pi_2^{-1}}(u))),\end{aligned}$$

donde usamos que $g^-_{\pi_2^{-1}}(u)$ es la vieja variable z_2', y

$$\begin{aligned}(t_2\cdot\omega)^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}((u'\cdot u_0)^{-1})^{-1}&=(t_2\cdot\omega)^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u')u_0^{-1}(({}^{\pi_2}t_2\cdot\pi_2\omega\pi_2^{-1})))^{-1}\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u')u_0^{-1})^{-1}\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(u_0^{-1})^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),g^-_{\pi_2^{-1}}(u_0^{-1}))^{-1}\\
&=g^+_{\pi_2^{-1}}(u_0^{-1})^{-1}g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),z_2)^{-1}\end{aligned}$$

donde usamos que $\pi_2\omega\pi_2^{-1}\in U^+_{\pi_2^{-1}}$ y que $g_{\pi_2^{-1}}(u_0^{-1})=z_2$. La operación resulta ser

$$u_2^+\mapsto\pi_2^{-1}({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_2',z_1',z_2)))\pi_2u_2^+g^+_{\pi_2^{-1}}(\phi(u'),z_2)^{-1}.$$

Finalmente, reparametrizamos $f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}t_1u$. Es decir, consideramos

$$(z_1,u)\mapsto (f_{\pi_1^{-1}}(z_1)^{-1}\pi_1^{-1}g^+_{\pi_1}(t_1\cdot u^{-1})^{-1}, g^-_{\pi_1}(u^{-1}))$$

La acción en z_1 esta dada por

$$g^-_{\pi_1}((u'\cdot u)^{-1}) = g^-_{\pi_1}({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2}(g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2))),z_2'),z_1)$$

dado que $\eta\in U^+_{\pi_1}$. Reemplazando a z_1 por $({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1})^{-1}\cdot z_1$, la acción se simplifica a

$$u'\cdot z_1 = g^-_{\pi_1}(g^+_{\pi_2}(g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2))),z_2'),z_1)$$

Notar que la acción en u_1^+ también se simplifica.

Juntando las variables tenemos que

$$u'\cdot(z_1,z_2',z_1'z_2) = g_{\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1,z_2',z_1',z_2))$$

La función a G queda

$${}^{\pi_1}t_1{}^{\pi_1\pi_2}t_2{}^{\pi_1\pi_2}t_1^{-1\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}f_{\pi_1}(z_1)f_{\pi_2}(z_2')f_{\pi_1^{-1}}(z_1')f_{\pi_2^{-1}}(z_2')$$

y la acción en u queda dada por

$$\begin{aligned}
u'\cdot u &= f_{\pi_1^{-1}}(u'\cdot\tilde{z}_1)^{-1}\pi_1 g^+_{\pi_1}(t_1\cdot(u'\cdot\tilde{u})^{-1})^{-1}\\
&= f_{\pi_1^{-1}}(u'\cdot\tilde{z}_1)^{-1}(t_1\cdot\eta)\pi_1 g^+_{\pi_1}(t_1\cdot({}^{\pi_2}t_2{}^{\pi_2}t_1^{-1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}\cdot g^+_{\pi_2}(g^+_{\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1',z_2)),z_2')\tilde{u}^{-1}))^{-1}\\
&= u'u({}^{\pi_1}t_1{}^{\pi_1\pi_2}t_2{}^{\pi_1\pi_2}t_1^{-1\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}}t_2^{-1}g^+_{\pi_1\pi_2\pi_1^{-1}\pi_2^{-1}}(\phi(u'),(z_1,z_2',z_1',z_2))^{-1})
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $t_1\cdot\eta = g^+_{\pi_1^{-1}}(u',\tilde{z}_1) = f_{\pi_1^{-1}}(u'\cdot\tilde{z}_1)u'f_{\pi_1^{-1}}(\tilde{z}_1)^{-1}$. ☐

Lema 4.7.9. *Sea $\beta\in F(\Delta^+)$ y dotemos a $\rho(\beta)$ con la acción de U*

$$u\cdot z = g^-_\beta(u,z)$$

para $u\in U$ y $z\in\mathbb{C}^{l(\beta)}$. Entonces para cualquier paseo p que empieza en e, la celda C_p es U-invariante. Más aún, para cada $t\in T$, $C_p(t)$ es U-invariante.

Demostración. Recordar que

$$f_{\pi_k}(z)u^{-1} = g^+_{\pi_k}(u,z)f_{\pi_k}(u\cdot z)$$

y que $g^+_{\pi_k}$ tiene imagen en U, por lo tanto, si $f_{\pi_k}(z)\in Bp_kB$, $f_{\pi_k}(u\cdot z)\in Bp_kB$. Esto muestra la U-invarianza. Además, notar que el morfismo a T no cambia bajo la acción. ☐

Lema 4.7.10. *Sea $\beta\in F(\Delta^+)$ y $p\in\mathcal{W}_{e,e}$ un paseo. Sea $\mathbb{C}^{U_p}\times(\mathbb{C}^\times)^{S_p}$ la celda asociada, donde U_p son los lugares en los que subimos y S_p en los que nos quedamos. Entonces la acción de U es trivial en $(\mathbb{C}^\times)^{S_p}$.*

Demostración. Sabemos que para cada $k\in S_p$, $z_k - g^-_{\alpha_k}(g^+_{\pi_{k-1}}(z_{k-1},\dots,z_1))$ es no nulo si z_k no lo era. Esto solo es posible si $g^-_{\alpha_k}(g^+_{\pi_{k-1}}(z_{k-1},\dots,z_1))=0$, es decir, que la acción sea trivial en la k-ésima coordenada. ☐

Teorema 4.7.1. *Sea G un grupo de Lie conexo y reductivo, $T\subset G$ un toro maximal, y $\mathcal{C}\in T$ genérica regular. Entonces, para cualquier género g, $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ admite un fibrado vectorial $Z(G)^{2g}$-equivariante $\pi:\tilde{\mathcal{M}}_B^{\mathcal{C}}(G)\to\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$ de rango $r=\frac{1}{2}(\dim G-\operatorname{rk}G)$ y una descomposición celular equivariante tal que para todas sus celdas C se tiene que $\pi^{-1}(C)$ es un cociente finito de una variedad de la forma $(\mathbb{C}^\times)^{d-2i}\times\mathbb{C}^{i+r}$ para algún i, donde d es la dimensión de $\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G)$. Si G es de tipo A, no es necesario hacer cocientes finitos.*

Demostración. Esto se sigue de [Mel17, secciones 7.1 y 7.2] y de los lemas anteriores. ☐

4.8. Simetría espejo motívica

Sea $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ el anillo de Grothendieck de variedades. Denotamos con q al motivo de la recta afín. Dados un grupo finito Γ y una Γ-variedad X, tenemos una versión stringy del motivo:

$$[X]_{st} := \sum_{\gamma} \sum_{Y} [Y] q^{F(\gamma)}$$

donde γ recorre un conjunto de representantes de las clases de conjugación de Γ, Y recorre las componentes conexas de $[X^\gamma/\Gamma]$, y $F(\gamma)$ es el corrimiento fermionico asociado a γ. En nuestro caso, recordemos que $F(\gamma) = \frac{1}{2}\operatorname{codim} Y$. Proponemos la siguiente conjetura.

Conjectura 4.8.1. *Sea G un grupo complejo, reductivo, conexo y simplemente conexo. Sean F un subgrupo finito del centro $Z(G)$ de G y ${}^L\tilde{G}$ el revestimiento universal del grupo dual a G en el sentido Langlands. Entonces*

$$[\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(G/F)]_{st} = [\mathcal{M}_B^{\check{\mathcal{C}}}({}^L\tilde{G}/(Z(G)/F))]_{st}.$$

para cualesquiera clases de conjugación $\mathcal{C}$ y $\check{\mathcal{C}}$ genéricas.

Cabe destacar que hay un morfismo $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})[q^{\frac{1}{2}}] \to \mathbb{Z}[u^{\frac{1}{2}}, v^{\frac{1}{2}}]$ que envía al motivo stringy al E-polinomio stringy. Bajo este morfismo, la conjetura anterior para $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ recupera el Corolario 3.2.2 para la torsión discreta trivial. Más aún, si el motivo stringy fuera un polinomio en q, la conjetura sería equivalente a dicho corolario en este caso.

Ambos lados de la conjetura se pueden describir completamente en término de teoría de raíces gracias a la descomposición de Mellit. Como primer paso hacia esta conjetura, proponemos una dualidad entre las los paseos tales que el centro y el grupo fundamental asociados se intercambian.

Sea G un grupo de Lie conexo y reductivo y $\pi : \tilde{G} \to G$ su revestimiento universal. Identificamos sus álgebras de Lie mediante $d\pi$. Esto identifica $F(\Delta_G^+, W_G^3)$ con $F(\Delta_{\tilde{G}}^+, W_{\tilde{G}}^3)$ y paseos en G con paseos en $\tilde{G}$. Dado un paseo p en G, denotamos con $\tilde{p}$ a su paseo asociado en $\tilde{G}$.

Sea $\check{G}$ el grupo con información de raices dual a la de G. El producto interno de Weyl induce un isomorfismo entre W y $\check{W}$, el grupo de Weyl de $\check{G}$. Esto induce una involución $\check{\ }: F(\Delta_G^+, W^3) \to F(\Delta_{\check{G}}^+, \check{W}^3)$ y para cada paseo p tenemos un paseo asociado $\check{p}$. Componiendo con $\tilde{\ }$ obtenemos una dualidad $p \mapsto \tilde{\check{p}}$.

Lema 4.8.1. *Sea p un paseo. Entonces*

1. $S(\check{p}) = \pi_1(p)^*$,
2. $\pi_1(\check{p}) = S(p)^*$,
3. $Z(p) = Z(\tilde{p})$,
4. *hay una sucesión exacta* $1 \to \pi_1(\tilde{p}) \to \pi_1(p) \to \pi_1(G) \to 1$,
5. $\pi_1(\tilde{\check{p}}) = Z(p)^*$, *y*
6. *si G es simplemente conexo,* $Z(\tilde{\check{p}}) = \pi_1(p)^*$.

Demostración. Los primeros cinco ítems son inmediatos de las definiciones y de la sección 4.3.5 de [OV90]. Para el último, notemos que si G es simplemente conexo, $\check{G}$ tiene centro trivial. Por lo tanto, $Z(\tilde{\check{p}}) = Z(\check{p}) = S(\check{p}) = \pi_1(p)^*$. □

Para las celdas en género positivo, necesitamos introducir algunos objetos más. Dado $\pi \in W$, sea $\hat{T}^\pi$ la preimagen de $Z(G)$ por $t \mapsto {}^\pi t t^{-1}$.

Definición 4.8.1. Para

$$\beta = (\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m) \dots (\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1)\overline{\beta}$$

con $\overline{\beta} \in F(\Delta)$ y un paseo p, definimos

$$\tilde{S}_\beta(p) := S(p) \bigcap_{i=1}^{m} \hat{T}^{\pi_1^{(i)}} \cap \hat{T}^{\pi_2^{(i)}}$$

y $\mathrm{St}(\beta, p)$ como la imagen de $\tilde{S}_\beta(p) \to (T^2)^m$

$$t \mapsto \left({}^{(\pi_1^{(j)})^{-1}\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t^{-1\,\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t, {}^{(\pi_1^{(j)})^{-1}w_j^{-1}} t^{-1\,\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t \right)_{j=1,\dots,m}.$$

Además, sea $\hat{C}_p$ el producto de C_p con $U^+_{\pi_1^{(j)}} \times U^+_{\pi_2^{(j)}}$, $j = 1, \dots, m$, y $\hat{C}_p(t)$ a la preimagen de t por el morfismo $\hat{C}_p \to C_p \to T$.

Lema 4.8.2. *Sean $(\pi_1, \pi_2, w) \in W^3$ y $t \in T$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. ${}^{\pi_1^{-1}\pi_2\pi_1 w^{-1}} t^{-1\,\pi_2\pi_1 w^{-1}} t$ *y* ${}^{\pi_1^{-1}w^{-1}} t^{-1\,\pi_2\pi_1 w^{-1}} t$ *son centrales.*
2. $t \in \hat{T}^{\pi_1} \cap \hat{T}^{\pi_2}$*, i.e.* ${}^{\pi_1}tt^{-1}$ *y* ${}^{\pi_2}tt^{-1}$ *son centrales.*

Demostración. Podemos asumir que w es trivial dado que una conjugación no afecta el hecho de ser central. Sean z_1 y z_2 los elementos que aparecen en el primer ítem. Son centrales si y solo si z_2 y

$$z_1' = {}^{\pi_1}({}^{\pi_1}(z_1 z_2^{-1}) z_2)^{-1} = {}^{\pi_1}({}^{\pi_2\pi_1}t^{-1} t^{\pi_1^{-1}} t^{-1\,\pi_2\pi_1} t)^{-1} = {}^{\pi_1}(t^{\pi_1^{-1}} t^{-1})^{-1} = {}^{\pi_1}tt^{-1}$$

lo son. Esto es equivalente a que z_1' y

$${}^{\pi_2}({}^{\pi_2^{-1}}(z_2{}^{\pi_1^{-1}}(z_1')^{-1}) z_1'^{-1}) = {}^{\pi_2}({}^{\pi_2^{-1}}({}^{\pi_2\pi_1}tt^{-1}) z_1'^{-1}) = {}^{\pi_2}(t^{\pi_2^{-1}} t^{-1}) = {}^{\pi_2}t^{-1}t$$

lo sean. □

Lema 4.8.3. *Sean $\beta \in F(\Delta, W^3)$ y p un paseo. Entonces*

1. $\mathrm{St}(\beta, p) \simeq \tilde{S}_\beta(p)/S_\beta(p)$,
2. $\mathrm{St}(\beta, p) \subset Z(G)^{2m}$,
3. *si* $(z_1, z_2) \in (Z(G)^2)^m$, $(\hat{C}_p/T/U)^{(z_1,z_2)}$ *es no vacío si y solo si* $(z_1, z_2) \in \mathrm{St}(\beta, p)$, *y*
4. *Si $w(\beta)$ es trivial y t esta en la imagen de $C_p \to T^{ss}$, $(\hat{C}_p(t)/T/U)^{(z_1,z_2)}$ es no vacío para cualquier $(z_1, z_2) \in \mathrm{St}(\beta, p)$.*

Demostración. El primer inciso es claro. Para los demás, escribamos

$$\rho(\beta) = \rho(\pi_1^{(m)}, \pi_2^{(m)}, w_m) \dots \rho(\pi_1^{(1)}, \pi_2^{(1)}, w_1)\rho(\overline{\beta})$$

con $\overline{\beta} \in F(\Delta)$. Sea $(t_1, t_2, x, y, u^+) \in C_p = (T \times T)^g \times \mathbb{C}^{|U_p|} \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p|} \times \left(\prod_{j=1}^m \left(U^+_{\pi_1^{(j)}} \times U^+_{\pi_2^{(j)}}\right)\right)$. Su clase en $C_p/T/U$ es fijada por (z_1, z_2) si y solo si existen $t \in T$ y $u \in U$ tales que ut estabiliza (x, y, u^+) y $t \cdot (t_1, t_2) = (z_1 t_1, z_2 t_2)$. Que y se estabilice quiere decir que $t \in S(p)$ porque u actúa trivialmente en y. Por otro lado, la última condición es equivalente a

$$z_1^{(j)} = {}^{(\pi_1^{(j)})^{-1}\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t^{-1\,\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t$$

y

$$z_2^{(j)} = {}^{(\pi_1^{(j)})^{-1}w_j^{-1}} t^{-1\pi_2^{(j)}\pi_1^{(j)}w_j^{-1}} t.$$

Por lo tanto, (2) y (3) se siguen del lema anterior. Notemos que $\mathrm{St}(\beta, p)$ fija la clase de cualquier punto de $T^{2g} \times \{0\}^{|U_p|} \times (\mathbb{C}^\times)^{|S_p|} \times \left(\prod_{j=1}^m \left(U^+_{\pi_1^{(j)}} \times U^+_{\pi_2^{(j)}}\right)\right)$ dado que $g^+_\pi(e, 0) = e$ para cualquier palabra π. Esto implica (4).

□

Lema 4.8.4. *Sean $\beta \in F(\Delta, W^3)$ y p un paseo. Entonces*

1. $\tilde{S}_\beta(\check{p}) = \pi_{\beta,1}(p)^*$,
2. $\pi_{1,\beta}(\check{p}) = \tilde{S}_\beta(p)^*$
3. $Z_\beta(\tilde{p}) = Z_\beta(p)$,
4. *hay una sucesión exacta* $1 \to \pi_1(G) \to \tilde{S}_\beta(\tilde{p}) \to \tilde{S}_\beta(p) \to 1$,
5. $\mathrm{St}(\beta, \tilde{p}) = \mathrm{St}(\beta, p)$, *y*
6. *hay una sucesión exacta* $1 \to \pi_{1,\beta}(\tilde{p}) \to \pi_{1,\beta}(p) \to \pi_1(G) \to 1$.

Demostración. Se prueba de forma análoga al Lema 4.8.1. □

Definición 4.8.2. Sea $\beta \in F(\Delta, W^3)$. Luego de escribirlo como siempre, definimos

$$\tilde{T}_\beta(p) = T(p) + w_1(\pi_1^{(1)} - \mathrm{Id})(Q^*) + \ldots + w_m(\pi_1^{(m)} - \mathrm{Id})(Q^*),$$

$$\tilde{\pi}_{\beta,1}(p) := \mathfrak{t}^{ss}(\mathbb{Z})/\tilde{T}_\beta(p)$$

y

$$\mathrm{coSt}(\beta, p) := \tilde{T}_\beta(p)/T_\beta(p).$$

Lema 4.8.5. *Sea $\beta \in F(\Delta, W^3)$, p un paseo, y $t \in T$ genérico. Entonces $\pi_0(\hat{C}_p(t))$, como un $Z(G)^{2g}$-conjunto, es una unión disjunta de $|\tilde{\pi}_{\beta,1}(p)|$ copias de* $\mathrm{coSt}(\beta, p)$.

Demostración. Recordemos que $Z(G)^{2g}$ actúa por traslación a izquierda en T^{2g} y que $\hat{C}_p \to T$ es una composición de traslaciones, la proyección $T^{2g} \times \mathbb{C}^{U_p} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p} \times \left(\prod_{j=1}^m \left(U^+_{\pi_1^{(j)}} \times U^+_{\pi_2^{(j)}}\right)\right) \to T^{2g} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p}$ y un morfismo de grupos $g : T^{2g} \times (\mathbb{C}^\times)^{S_p} \to T$. Por lo tanto, $\pi_0(C_p(t)) \simeq \ker g/(\ker g)^\circ$ y un elemento de $Z(G)^{2g}$ actúa trivialmente si y solo si pertenece a $(\ker g)^\circ$. Como $(\ker g)^\circ$ es conexo, todos sus elementos son exponenciales. Recordemos además que $\mathcal{E}^{-1}(Z(G)) = Q^*$. Por lo tanto,

$$Z(G)^{2g} \cap (\ker g)^\circ = \mathcal{E}((Q^*)^{2g} \times \mathfrak{t}(\mathbb{Z})^{S_p} \cap \ker(dg)) = ((Q^*)^{2g} \cap (\sum_{i=1}^m w_i\pi_1^{(i)} + w_i\pi_2^i - 2w_i)^{-1} T(p))/t(\mathbb{Z})^{2g}.$$

Se sigue que $\pi_0(C_p(t))$ es la unión disjunta de copias de la imagen de $\sum_{i=1}^m w_i\pi_1^{(i)} + w_i\pi_2^i - 2w_i : (Q^*)^{2g} \to Q^*/T(p)$. Notemos además que esta función se factoriza por $\pi_1(p) = t^{ss}(\mathbb{Z})/T(p)$ dado que ${}^w t t^{-1} = 1$ para cualesquiera $w \in W$ y $t \in Z(G)$. □

Corolario 4.8.1. *Sea $\beta \in F(\Delta, W^3)$, p un paseo, y $t \in T$ genérico. Sea $F \subset Z(G)$ un subgrupo finito. Entonces*

$$[\hat{C}_p(t)/F] = \frac{1}{|\pi(F^{2g})|}[\hat{C}_p(t)]$$

donde $\pi : Z(G)^{2g} \to \mathrm{coSt}(\beta, p)$ es la proyección.

Demostración. Esto se sigue del lema anterior y de que la acción de $Z(G)^{2g}$ es lineal gracias a [Vog24, teorema 3.6.19]. □

Lema 4.8.6. *Sean $\beta \in F(\Delta, W^3)$ y p un paseo. Entonces*

1. $S_\beta(\check{p}) = \tilde{\pi}_{\beta,1}(p)^*$,
2. $\tilde{\pi}_{1,\beta}(\check{p}) = S_\beta(p)^*$,
3. $\mathrm{St}(\beta, \check{p}) = \mathrm{coSt}(\beta, p)^*$,
4. $\mathrm{coSt}(\beta, \check{p}) = \mathrm{St}(\beta, p)^*$,
5. *hay una sucesión exacta* $1 \to \tilde{\pi}_{1,\beta}(\tilde{p}) \to \tilde{\pi}_{1,\beta}(p) \to \pi_1(G) \to 1$,
6. $\mathrm{coSt}(\beta, \tilde{p}) = \mathrm{coSt}(\beta, p)$,
7. $\tilde{\pi}_{1,\beta}(\tilde{\check{p}}) = Z_\beta(p)^*$,
8. *Si G es simplemente conexo,* $Z_\beta(\tilde{\check{p}}) = \tilde{\pi}_{1,\beta}(p)^*$,
9. $\mathrm{St}(\beta, \tilde{\check{p}}) = \mathrm{coSt}(\beta, p)^*$, *y*
10. $\mathrm{coSt}(\beta, \tilde{\check{p}}) = \mathrm{St}(\beta, p)^*$.

Demostración. Se prueba de forma análoga al Lema 4.8.1. □

Finalizamos este capítulo probando la conjetura 4.8.1 para tipo A1 módulo localizar en q. Por simplicidad, asumamos que G es simple. En este caso, G es SL_2, hay una única raíz positiva α y W tiene dos elementos: la identidad y $s := s_\alpha$. Fijemos un género g y un paseo p. Si alguna vez nos quedamos, $Q(p) = \langle \alpha \rangle$, $Z(p)$ es trivial y $S(p) = Z(G)$. Luego, sin importar el β, $\mathrm{St}(\beta, p)$ es trivial. Similarmente, $\mathrm{coSt}(\beta, p)$ también es trivial. Se sigue que

$$[U] \cdot [\hat{C}_p(t)/T/U/F]_{st} = [U] \cdot [\hat{C}_p(t)/\hat{T}/U]$$

para $t \in T$ genérico y $F \subset Z(G)$.

Sea ahora un paseo p en el que nunca nos quedamos. En este caso, $S(p)$ no aporta restricciones. Si en el β asociado, todos los $\pi_i^{(j)}$ son triviales, la celda no sería genérica y la podemos descartar. Supongamos que algún $\pi_i^{(j)}$ es no trivial, es decir s. Entonces $T_\beta(p) = \langle 2\alpha \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $\hat{T}_\beta(p) = \langle \alpha \rangle_{\mathbb{Z}}$. Luego, $\mathrm{coSt}(\beta, p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Similarmente, $\mathrm{St}(\beta, p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Analicemos que ocurre para el elemento no trivial t_0 de $\mathrm{St}(\beta, p) \subset T$. Como no es central, no se anula al aplicar α. Por otro lado, notemos que la parte no tórica de $\hat{C}_p$ es $\mathbb{C}^{2g}$ dado que cada $\pi_i^{(j)} = s$ aporta una subida y una bajada en p, mientras que $U^+_{\pi_i^{(j)}}$ es no trivial solo si $\pi_i^{(j)}$ es el neutro. Además, la acción de t_0 es multiplicar por $t_0^2 \neq 1$ en cada coordenada. Veamos como es la acción de U. En la primera subida, la acción de U esta dada por trasladar. Además, $g_\alpha^+(U, z) = \{e\}$ para cualquier z y, por lo tanto, la acción es trivial en las siguientes coordenadas. En las anteriores, la acción también esta dada por una traslación al ser $U = \mathbb{C}$. Luego, un punto $u \in U^{2g}$ es fijado si y solo si hay solución al sistema

$$(1 - t_0^2)u_i = f_i(u')$$

para ciertas funciones fijas f_i que no depende de u_i. La primer subida determina el valor de u' y por lo tanto del resto de los u_i. Se sigue que

$$[U] \cdot [(\hat{C}_p(t)/T/U)^{t_0}] \cdot q^{2g-1} = [U] \cdot [\hat{C}_p(t)/T/U]$$

para t genérico y por lo tanto

$$[U] \cdot [\hat{C}_p(t)/T/U/Z(G)]_{st} = [U] \cdot [\hat{C}_p(t)/T/U]$$

dado que $\operatorname{coSt}(\beta, p) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y el corrimiento fermionico es $2g-1$.

Concluimos que

$$q \cdot [\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))]_{st} = q \cdot [\mathcal{M}_B^{\mathcal{C}}(\mathrm{SL}_2)]_{st}$$

para cualquier clase de conjugación genérica $\mathcal{C}$ como queríamos.

Capítulo 5

Descomposición isotópica de motivos

5.1. Definición y propiedades básicas

Para una exposición detalla y varios ejemplos del siguiente teorema referimos al lector a [Vog24, section 3.6].

Lema 5.1.1. *Sea Γ un grupo cíclico finito. Entonces la aplicación*

$$\Psi : R_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q} \to \bigoplus_{H \subset \Gamma} \mathbb{Q}, \qquad V \mapsto (\langle T_H, \mathrm{Res}_H^\Gamma(V) \rangle)_{H \subset G}$$

es una biyección, donde T_H denota la representación trivial de H.

Demostración. Para inyectividad consultar [Vog24, Lema 3.6.11]. Para la sobreyectivida, ver el Ejemplo 3.6.16 de loc. cit.. □

Teorema 5.1.1 (J. Vogel)**.** *Sea Γ un grupo cíclico finito. Entonces para toda Γ-variedad X existe una única clase $[X]^\Gamma \in K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ tal que, para todo subgrupo $H \subset \Gamma$,*

$$\langle T_H, \mathrm{Res}_H^\Gamma([X]^\Gamma) \rangle = [X/H]$$

en $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$. Hay una extensión aditiva $[-]^\Gamma : K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$.

Demostración. Ver [Vog24, Definición 3.6.12]. □

Lema 5.1.2. *Sean $\Gamma' \subset \Gamma$ grupos ciclicos finitos. Entonces*

$$[\mathrm{Res}_{\Gamma'}^\Gamma(\xi)]^{\Gamma'} = \mathrm{Res}_{\Gamma'}^\Gamma([\xi]^\Gamma)$$

para todo $\xi \in K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$.

Demostración. Sea $H \subset \Gamma'$ un subgrupo. Entonces,

$$\langle T_H, \mathrm{Res}_H^{\Gamma'}(\mathrm{Res}_{\Gamma'}^\Gamma([\xi]^\Gamma)) \rangle = \langle T_H, \mathrm{Res}_H^\Gamma([\xi]^\Gamma) \rangle = [\xi/H]$$

por la definición de $[\xi]^\Gamma$. □

Lema 5.1.3. *Sean $\Gamma' \subset \Gamma$ grupos ciclicos finitos. Entonces*

$$[\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma(\xi)]^\Gamma = \mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma([\xi]^{\Gamma'})$$

para cualquier $\xi \in K_0^{\Gamma'}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$.

Demostración. Sea $H \subset \Gamma$ un subgrupo. Por las compatibilidades entre inducción y restricción, tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle T_H, \mathrm{Res}_H^\Gamma(\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma([\xi]^{\Gamma'}))\rangle &= \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|\Gamma'||H|}\langle T_H, \mathrm{Ind}_{H\cap\Gamma'}^H(\mathrm{Res}_{H\cap\Gamma'}^{\Gamma'}([\xi]^{\Gamma'}))\rangle \\
&= \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|\Gamma'||H|}\langle \mathrm{Res}_{H\cap\Gamma'}^H(T_H), \mathrm{Res}_{H\cap\Gamma'}^{\Gamma'}([\xi]^{\Gamma'})\rangle \\
&= \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|\Gamma'||H|}[\xi/(H\cap\Gamma')]
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\mathrm{Res}_H^\Gamma(\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma(\xi)) = \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|H||\Gamma'|}\,\mathrm{Ind}_{H\cap\Gamma'}^H(\mathrm{Res}_{H\cap\Gamma'}^{\Gamma'}(\xi))$$

por el lema 1.3.3. Luego,

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ind}_{\Gamma'}^\Gamma(\xi)/H] &= \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|H||\Gamma'|}[\mathrm{Ind}_{H\cap\Gamma'}^H(\mathrm{Res}_{H\cap\Gamma'}^{\Gamma'}(\xi))/H] \\
&= \frac{|\Gamma||H\cap\Gamma'|}{|H||\Gamma'|}[\xi/(H\cap\Gamma')].
\end{aligned}$$

□

Sea A_Γ el subanillo de of $K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ generado por las clases de acciones lineales de Γ en uniones disjuntas finitas de espacios afines. Por linea nos referimos a que si $\gamma \in \Gamma$ fija una componente conexa $\mathbb{A}^n$, entonces actúa linealmente en esta componente. Notemos que esta familia de genradores es cerrada por productos.

Teorema 5.1.2 (J.Vogel)**.** *Sea Γ un grupo cíclico finito. Para cualquier $\xi \in A_\Gamma$ y $\xi' \in K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$, vale que*

$$[\xi\xi']^\Gamma = [\xi]^\Gamma[\xi']^\Gamma$$

en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$.

Demostración. El ítem (i) de [Vog24, teorema 3.6.19] es el enunciado para acciones lineales en espacios afines. Para el caso general, notamos lo siguiente. Consideremos una acción lineal de Γ en $X = \sqcup_{i=1}^N \mathbb{A}^{n_i}$. Podemos asumir que $\Gamma \cdot \mathbb{A}^{n_1} = X$. En este caso, todos los n_i son iguales a cierto n. Más aún, si $H \subset \Gamma$ es el subgrupo de aquellos elementos que mandan $\mathbb{A}^{n_1}$ a $\mathbb{A}^{n_1}$, entonces $X = \mathbb{A}^n \times_H \Gamma = \mathrm{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n)$. Además, si Y es una Γ-variedad, $X \times Y = \mathrm{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n) \times Y = \mathrm{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n \times \mathrm{Res}_H^\Gamma(Y))$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[X\times Y]^\Gamma &= \mathrm{Ind}_H^\Gamma([\mathbb{A}^n \times \mathrm{Res}_H^\Gamma(Y)]^H) \\
&= \mathrm{Ind}_H^\Gamma([\mathbb{A}^n]^H[\mathrm{Res}_H^\Gamma(Y)]^H) \\
&= \mathrm{Ind}_H^\Gamma([\mathbb{A}^n]^H\,\mathrm{Res}_H^\Gamma([Y]^\Gamma)) \\
&= \mathrm{Ind}_H^\Gamma([\mathbb{A}^n]^H)[Y]^\Gamma \\
&= [X]^\Gamma[Y]^\Gamma
\end{aligned}$$

por los lemas anteriores. □

Corolario 5.1.1. *Sea Γ un grupo cíclico finito y denotemos con q a la clase de la recta afín en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$. Para cualquier $\xi \in A_\Gamma$, $[\xi]^\Gamma \in \mathbb{Z}[q] \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma)$ y $[\xi/\Gamma] \in \mathbb{Z}[q]$. Además, para tal ξ, su E-polinomio equivariante $E^\Gamma(\xi; u, v)$ pertenece a $R_\mathbb{Q}(\Gamma)[uv]$ y, bajo la sustitución $q = uv$, $[\xi]^\Gamma = E^\Gamma(\xi; q)$ en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$.*

Demostración. Primero, sea ξ la clase de la recta afín $\mathbb{A}^1$ con una acción lineal de Γ. Sabemos que $H_c^\cdot(\mathbb{A}^1)$ esta soportado en grado 2 y es de dimensión uno. Más aún, vale $H_c^2(\mathbb{A}^1) = H^{1,1}(\mathbb{A}^1)$ y que esta genrado por la clase de cualquier punto. Además, como cualesquiera dos puntos definen la misma clase, se tiene que $E^\Gamma(\xi; u, v) = uv \otimes T_\Gamma$. Ahora bien, $[\xi/H] = [\xi]$ para cualquier $H \subset \Gamma$ (veo [Vog24, teorema 3.6.19]). Luego $[\xi]^\Gamma = q \otimes T_\Gamma$ y el resultado vale en este caso.

Asumamos ahora que el resultado vale para ξ y ξ'. Entonces, vale para $-\xi$ y $\xi + \xi'$ dado que todo es lineal. Además, también vale para $\xi\xi'$. En efecto, tanto $[-]^\Gamma$ como E^Γ son multiplicativos en A_Γ.

Finalmente, necesitamos verificar que si el resultado vale para ξ y $\Gamma \subset \Gamma'$ es otro grupo cíclico, entonces el resultado también vale para $\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi)$. Para esto, basta ver que $E^{\Gamma'}(\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi)) = \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(E^\Gamma(\xi))$. Ahora bien, recordemos que, para una Γ-variedad X, la variedad subyacente de $\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$ es $\bigsqcup_{\Gamma'/\Gamma} X$. Por lo tanto, $H_c^\cdot(\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(X)) = \bigoplus_{\Gamma'/\Gamma} H_c^\cdot(X) = \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(H_c^\cdot(X))$. $\square$

5.2. Ejemplos: matrices de rango fijo

Veamos una familia de clases que pertenecen a A_Γ. Denotamos con $\mathcal{P}_n$ al conjunto de subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$.

Lema 5.2.1. *Sean m, n enteros positivos, $r : \mathcal{P}_n \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{N}_0$ una función y $\Gamma \subset (S^1)^n$ un subgrupo cíclico finito. Fijemos $v_1, \dots, v_t \in \mathbb{C}^m$, $0 \le t \le n$, tales que para cada $S \in \mathcal{P}_t \setminus \emptyset$ la familia $\{v_s : s \in S\}$ tiene rango $r(S)$. Consideremos*

$$V_{n,m,r,v} := \left\{ \begin{array}{c} g \in M_{n,m}(\mathbb{C}) : \textit{la i-ésima fila de } g \textit{ es } v_i \textit{ para } 1 \le i \le t \textit{ y para cualquier } S \in \mathcal{P}_n \setminus \emptyset \\ \textit{la } |S| \times m \textit{ submatriz de } g \textit{ cuyo conjunto de columnas es } S \textit{ tiene rango } r(S) \end{array} \right\}$$

dotado de la acción de Γ dada por multiplicar cada fila por la correspondiente raíz de la unidad. Entonces $[V_{n,m,r,v}] \in A_\Gamma$. Además,

$$[V_{n,m,r,v}]^\Gamma = \prod_{j=t+1}^{n} \left(q^{d(\mathcal{P}_{j-1} \setminus \mathcal{LI}_j)} - \sum_{\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{LI}_j} (-1)^{|\mathcal{F}|+1} q^{d(\mathcal{F} \cup (\mathcal{P}_{j-1} \setminus \mathcal{LI}_j))} \right) \otimes T_\Gamma$$

donde q es la clase de la recta afín,

$$\mathcal{LI}_j = \{S \in \mathcal{P}_{j-1} : r(S \cup \{j\}) \neq r(S)\}$$

para cualquier $1 \le j \le n$, $r(\emptyset) = 0$, y

$$d(\mathcal{F}) = (-1)^{|\mathcal{F}|-1} \left(r\left(\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S \right) + \sum_{\emptyset \neq \mathcal{F}' \subsetneq \mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}'|} d(\mathcal{F}') \right)$$

para cualquier $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}_n$, y $d(\emptyset) = m$.

Demostración. La demostración es análoga a la usual de que $[\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})] = \prod_{i=0}^{r-1}(q^r - q^i)$. Procedemos por inducción en n. Para $n = t$ el resultado es claro. Asumamos que $n \ge t + 1$ y que el resultado vale para $n - 1$.

Consideremos la aplicación $\pi : V_{n,m,r,v} \to V_{n-1,m,r',v}$ dada por olvidarse la última columna, donde r' es la composición de r con la inclusión natural $\mathcal{P}_{n-1} \to \mathcal{P}_n$. Por otro lado, para cada $S \in \mathcal{P}_{n-1}$ tenemos un morfismo $\phi : V_{n-1,m,r',v} \to \mathrm{Gr}(r(S), m)$ dado por mirar el espacio generado por las columnas indexadas por S. El pullback del fibrado tautológico de la Grassmaniana nos da un fibrado vectorial localmente trivial $\pi_S : W_S \to V_{n-1,m,r',v}$. Más aún, es equivariantemente localmente trivial si dotamos el fibrado tautológico con la acción de Γ dado por multiplicar por las coordenadas correspondientes..

Notemos que $[W_S] = [V_{n-1,m,r',v}]q^{r(S)} \in A_\Gamma$ por la hipótesis inductiva. Además, hay una inclusión natural $W_S \subset V_{n-1,m,r',v} \times \mathbb{A}^m$. La observación final es que

$$V_{n,m,r,v} = \left(\bigcap_{r(S\cup\{n\})=r(S)} W_S \right) \setminus \left(\bigcup_{r(S\cup\{n\})\neq r(S)} W_S \right)$$

donde $S \subset \mathcal{P}_{n-1}$. Por lo tanto, es suficiente con probar que

$$\bigcap_{S\in\mathcal{F}} W_S \to V_{n-1,m,r',v}$$

es localmente trivial para cualquier $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_{n-1}$. Pero es devuelta un pullback de un fibrado tautológico. El punto es que, para cada $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}_{n-1}$, hay un morfismo algebraico

$$V_{n-1,m,r',v} \to \mathrm{Gr}(d(\mathcal{F}), m)$$

dado por tomar las intersecciones de todos los espacios vectoriales generados por columnas indexadas por $S \in \mathcal{F}$, donde

$$(-1)^{|\mathcal{F}|-1} d(\mathcal{F}) = r\left(\bigcup_{S\in\mathcal{F}} S \right) + \sum_{\emptyset\neq\mathcal{F}'\subsetneq\mathcal{F}} (-1)^{|\mathcal{F}'|} d(\mathcal{F}').$$

La fórmula para $[V_{n,m,r,v}]$ se sigue del principio de inclusión-exclusión. □

En el resultado anterior, es posible poner $t = 0$, es decir, no tener filas fijas. En este caso escribiremos $V_{n,m,r}$ en vez de $V_{n,m,r,v}$.

Corolario 5.2.1. *Sea $\sigma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ una matriz de orden finito. Consideremos la acción de $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ por traslaciones a izquierda o derecha. Entonces $[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \in A_\Gamma$ y*

$$[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})]^\Gamma = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}) \otimes T_\Gamma.$$

Demostración. Probemoslo para traslaciones a derecha; el otro caso es totalmente analógo. Dado σ tiene orden finito, es diagonalizable. Luego, después de una conjugación, podemos asumir que σ es diagonal. Este caso se sigue del lema anterior. □

5.3. Acción por permutación de factores

Definición 5.3.1. Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos, $K = \Gamma'/\Gamma$, y $N = |K|$. Fijemos un generador σ de Γ'. Para una Γ-variedad X, dotamos a X^K con la acción dad por

$$\sigma \cdot (x_1, \ldots, x_N) = (\sigma^N \cdot x_N, x_1, \ldots, x_{N-1}).$$

Llamamos a la misma la acción por permutación de factores y la denotamos $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$.

Observación 5.3.1. Hay otra descripción de esta acción que no utiliza generadores. Veamos a $X^K \subset (\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(X))^K$ como las tuplas (x_i, γ_i) con $\gamma_i\Gamma = i$. Entonces Γ' actúa como

$$(\gamma' \cdot (x_i, \gamma_i))_j = (x_{\gamma'^{-1}j}, \gamma'\gamma_{\gamma'^{-1}j}).$$

Lema 5.3.1. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos y X, Y dos Γ-variedades. Entonces $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X) \times \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(Y) \simeq \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X \times Y)$ como Γ'-variedades. En particular, $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X^n)$ y $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)^n$ coinciden para cualquier natural n.*

Demostración. Un isomorfismo es $((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N)) \mapsto ((x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N))$. □

Lema 5.3.2. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos, X una Γ-variedad y $Y \subset X$ un subespacio cerrado invariante. Llamemos $N = |\Gamma'/\Gamma|$. Entonces*

$$[\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X)] = \sum_{d|N} \frac{d}{N} \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma'} \left(\sum_{d|d'|N} \left(\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(X \setminus Y)^{\frac{d'}{d}} + \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(Y)^{\frac{d'}{d}} \right)^{\frac{N}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)$$

en $K_0^{\Gamma'}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$, donde Γ_d es el único subgrupo de índice d de Γ'.

Demostración. Sea $K = \Gamma'/\Gamma$. Hay una descomposición celular de $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X) = X^K$ indexada por $\{T, F\}^K$ donde cada índice indica si la coordenada asociada pertenece a Y o no. Notemos que esto descompone X^K como unión disjunta de $\binom{N}{j}$ copias de $(X \setminus Y)^j \times Y^{N-j}$ para cada $0 \le j \le N$. Para que una celda fija, indexada por $\alpha \in \{T, F\}^K$ con j T's, este fija por σ^d, $d|N$, necesitamos que $\alpha_i = \alpha_{i+d}$ para cualquier i. Esto significa que $N|dj$ y que hay $\binom{d}{\frac{jd}{N}}$ tales índices. Si nos contamos aquellas celdas cuyo estabilizador esta generado por σ^d obtenemos

$$\Phi(N, j, d) := \sum_{d'|d, N|d'j} \binom{d'}{\frac{jd'}{N}} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) = \sum_{d|d'|\,\mathrm{mcd}(N,j)} \binom{\frac{N}{d'}}{\frac{j}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right)$$

donde en la segunda igualdad realizamos el cambio de variables $(d, d') \mapsto (\frac{N}{d}, \frac{N}{d'})$. Fijemos uno de estos α's y miremos su órbita $\mathcal{O}$, cuyo cardinal es d. Tenemos que

$$\bigsqcup_{\alpha' \in \mathcal{O}} \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X)_{\alpha'} = \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma'}(\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X)_{\alpha})$$

y, como Γ_d-variedad,

$$\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X)_{\alpha} \simeq (\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(X \setminus Y)^{K_d})^{\frac{N}{d} - \frac{j}{d}} \times \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(Y)^{\frac{j}{d}}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[X^K] &= \sum_{0 \le j \le N} \sum_{d|\,\mathrm{mcd}(N,j)} \frac{d}{N} \Phi(N, j, d) \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma'}(\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}((X \setminus Y)^{\frac{N}{d} - \frac{j}{d}} \times Y^{\frac{j}{d}})) \\
&= \sum_{d|N} \frac{d}{N} \sum_{0 \le j \le \frac{N}{d}} \Phi(N, dj, d) \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma'}(\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}((X \setminus Y)^{\frac{N}{d} - j} \times Y^j))
\end{aligned}$$

Ahora bien, si expandimos los binomios del lado izquierdo del enunciado y contamos cuantas veces aparece $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}((X \setminus Y)^{\frac{N}{d} - j} \times Y^j)$, obtenemos

$$\sum_{d|d'|\,\mathrm{mcd}(N,dj)} \binom{\frac{N}{d'}}{\frac{j}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) = \Phi(N, dj, d).$$

□

Teorema 5.3.1. *Para cualesquiera dos grupos cíclicos $\Gamma \subset \Gamma'$, existe una única función $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'} : K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to K_0^{\Gamma'}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ tal que:*

1. *$\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}([X])$ es la clase de la acción por permutación de factores $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X)$ para cualquier Γ-variedad X.*

2. *$\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_1 \xi_2) = \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_1) \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_2)$ para cualesquiera ξ_1, ξ_2.*

3. Para cualesquiera $\xi_1, \xi_2 \in K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$, la siguiente fórmula binomial vale

$$\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_1+\xi_2) = \sum_{d|N} \frac{d}{N} \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma'} \left(\sum_{d|d'|N} \left(\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(\xi_1)^{\frac{d'}{d}} + \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_d}(\xi_2)^{\frac{d'}{d}} \right)^{\frac{N}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)$$

donde $N = |\Gamma/\Gamma'|$ y Γ_d es el único subgrupo de índice d de Γ'.

Demostración. Probamos el resultado por inducción en el número de divisores de N. Para el caso base $N = 1$ ($\Gamma = \Gamma'$) no hay nada que probar. Fijemos $N > 1$ y asumamos que el resultado vale para todos los divisores propios de N. Consideremos el subconjunto $R \subset \prod_{m|N} K_0^{\Gamma_m}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ de tuplas (ξ_m) con $\mathrm{Res}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m}(\xi_m) = \xi_d^{\frac{m}{d}}$ para cualquier $d|m|N$. Definamos una suma $*$ en R como

$$(X*Y)_m := \sum_{d|m} \frac{d}{m} \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)$$

Tenemos que chequear que $X*Y \in R$. Esto es cierto porque

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\Gamma_k}^{\Gamma_m}(X*Y)_m &= \sum_{d|m} \frac{d}{m} \mathrm{Res}_{\Gamma_k}^{\Gamma_m} \mathrm{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) \\
&= \sum_{d|m} \frac{d}{m} \frac{md}{k\,\mathrm{mcd}(k,d)} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\mathrm{mcd}(k,d)}}^{\Gamma_k} \mathrm{Res}_{\Gamma_{\mathrm{mcd}(k,d)}}^{\Gamma_d} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) \\
&= \sum_{d|m} \frac{\mathrm{mcd}(k,d)}{k} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\mathrm{mcd}(k,d)}}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_{\mathrm{mcd}(k,d)}^{\frac{d'}{\mathrm{mcd}(k,d)}} + Y_{\mathrm{mcd}(k,d)}^{\frac{d'}{\mathrm{mcd}(k,d)}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)
\end{aligned}$$

dado que $X, Y \in R$. Reordenando,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{\Gamma_k}^{\Gamma_m}(X*Y)_m &= \sum_{e|k} \frac{e}{k} \mathrm{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|m, \mathrm{mcd}(d,k)=e} \sum_{d|d'|m} (X_e^{\frac{d'}{e}} + Y_e^{\frac{d'}{e}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) \\
&= \sum_{e|k} \frac{e}{m} \mathrm{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{e|d'|m} \sum_{d|d', \mathrm{mcd}(d,k)=e} (X_e^{\frac{d'}{e}} + Y_e^{\frac{d'}{e}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) \\
&= \sum_{e|k} \frac{e}{m} \mathrm{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{e|d'|k} (X_e^{\frac{d'}{e}} + Y_e^{\frac{d'}{e}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{e}\right) \right)
\end{aligned}$$

para cualquier $k|m|N$ por el Lema 1.1.2. Por otro lado, $(X*Y)_d^j$ es igual a

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{e|d} \frac{e}{d} \mathrm{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_d} \left(\sum_{e|f|d} (X_e^{\frac{f}{e}} + Y_e^{\frac{f}{e}})^{\frac{d}{f}} \mu\left(\frac{f}{e}\right) \right) \right)^j \\
&= \sum_{e_l|d} \prod_{i=1}^{j} \frac{e_l}{d} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{e_l}}^{\Gamma_d} \left(\sum_{e_l|f|d} (X_{e_l}^{\frac{f}{e_l}} + Y_{e_l}^{\frac{f}{e_l}})^{\frac{d}{f}} \mu\left(\frac{f}{e_l}\right) \right) \\
&= \sum_{e_l|d} \left(\prod_{l=2}^{j} \frac{d}{\mathrm{lcm}(\mathrm{mcd}(e_1,\ldots,e_{l-1}),e_l)} \right) \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\mathrm{mcd}(e_l)}}^{\Gamma_d} \left(\prod_{i=1}^{j} \frac{e_l}{d} \sum_{e_l|f|d} (X_{\mathrm{mcd}(e_l)}^{\frac{f}{\mathrm{mcd}(e_l)}} + Y_{\mathrm{mcd}(e_l)}^{\frac{f}{\mathrm{mcd}(e_l)}})^{\frac{d}{f}} \mu\left(\frac{f}{e_l}\right) \right) \\
&= \sum_{e_l|d} \frac{\mathrm{mcd}(e_l)}{d} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\mathrm{mcd}(e_l)}}^{\Gamma_d} \left(\prod_{i=1}^{j} \sum_{e_l|f|d} (X_{\mathrm{mcd}(e_l)}^{\frac{f}{\mathrm{mcd}(e_l)}} + Y_{\mathrm{mcd}(e_l)}^{\frac{f}{\mathrm{mcd}(e_l)}})^{\frac{d}{f}} \mu\left(\frac{f}{e_l}\right) \right)
\end{aligned}$$

por el Lema 1.3.2. Luego,

$$
\begin{aligned}
(X*Y)_d^j &= \sum_{e|d} \frac{e}{d} \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_d} \left(\sum_{e|f_l|d} \left(\sum_{\operatorname{mcd}(e_l)=e, e_l|f_l} \prod_{l=1}^{j} \mu\left(\frac{f_l}{e_l}\right)\right) \prod_{l=1}^{j} (X_e^{\frac{f_l}{e}} + Y_e^{\frac{f_l}{e}})^{\frac{d}{f_l}} \right) \\
&= \sum_{e|d} \frac{e}{d} \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_d} \left(\sum_{e|f|d} \mu\left(\frac{f}{e}\right) (X_e^{\frac{f}{e}} + Y_e^{\frac{f}{e}})^{\frac{dj}{f}} \right)
\end{aligned}
$$

por el Lema 1.1.1, y, por lo tanto, $\operatorname{Res}_{\Gamma_k}^{\Gamma_m}(X*Y)_m = (X*Y)_k^{\frac{m}{k}}$ como queríamos.

La operación tiene un neutro (0) e inversos. Es claramente conmutativa. Para la asociatividad, notemos que la m-ésima coordenada de $(X*Z)*P$ es

$$
\sum_{d|m} \frac{d}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} ((X*Z)_d^{\frac{d'}{d}} + P_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)
$$

Por lo cómputos anteriores

$$
\begin{aligned}
((X*Z)_d^{\frac{d'}{d}} + P_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} &= \sum_{0\le j\le \frac{m}{d'}} \binom{\frac{m}{d'}}{j} (X*Z)_d^{\frac{d'}{d}j} P_d^{\frac{d'}{d}(\frac{m}{d'}-j)} \\
&= \sum_{e|d} \frac{e}{d} \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_d} \left(\sum_{e|f|d} \mu\left(\frac{f}{e}\right) \sum_{0\le j\le \frac{m}{d'}} \binom{\frac{m}{d'}}{j} (X_e^{\frac{f}{e}} + Z_e^{\frac{f}{e}})^{\frac{d'}{f}j} P_e^{\frac{d'}{e}(\frac{m}{d'}-j)} \right)
\end{aligned}
$$

y la m-ésima coordenada de $(X*Z)*P$ es

$$
\sum_{d|m} \sum_{d|d'|m} \sum_{e|d} \frac{e}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{e|f|d} \mu\left(\frac{f}{e}\right) \sum_{0\le j\le \frac{m}{d'}} \binom{\frac{m}{d'}}{j} (X_e^{\frac{f}{e}} + Z_e^{\frac{f}{e}})^{\frac{d'}{f}j} P_e^{\frac{d'}{e}(\frac{m}{d'}-j)} \right) \mu\left(\frac{d'}{d}\right)
$$

Reordenando las sumas obtenemos

$$
\sum_{e|m} \frac{e}{m} \sum_{e|d'|m} \sum_{0\le j\le \frac{m}{d'}} \binom{\frac{m}{d'}}{j} \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{e|f|d'} \left(\sum_{f|d|d'} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) \mu\left(\frac{f}{e}\right) (X_e^{\frac{f}{e}} + Z_e^{\frac{f}{e}})^{\frac{d'}{f}j} P_e^{\frac{d'}{e}(\frac{m}{d'}-j)} \right)
$$

Por inversión de Möbius esto es

$$
\begin{aligned}
&\sum_{e|m} \frac{e}{m} \sum_{e|d'|m} \mu\left(\frac{d'}{e}\right) \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\sum_{0\le j\le \frac{m}{d'}} \binom{\frac{m}{d'}}{j} (X_e^{\frac{d'}{e}} + Z_e^{\frac{d'}{e}})^{j} P_e^{\frac{d'}{e}(\frac{m}{d'}-j)} \right) \\
&= \sum_{e|m} \frac{e}{m} \sum_{e|d'|m} \mu\left(\frac{d'}{e}\right) \operatorname{Ind}_{\Gamma_e}^{\Gamma_m} \left(\left((X_e^{\frac{d'}{e}} + Z_e^{\frac{d'}{e}} + P_e^{\frac{d'}{e}} \right)^{\frac{m}{d'}} \right)
\end{aligned}
$$

que coincide con $(X*(Z*P))_m$ por argumentos similares.

Por lo tanto, por el lema anterior, la función $X \mapsto (\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma_m}(X))_{m|N}$ define un morfismo aditivo $(K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}), +) \to (R, *)$. Componiendo con la proyección $\prod_{m|N} K_0^{\Gamma_m}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \to K_0^{\Gamma'}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ obtenemos la existencia de la función deseada que cumple (1) y (3).

Para (2), recordemos que $\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X \times Y) = \operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(X) \times \operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(Y)$ para cualesquiera dos Γ-variedades X, Y. Luego, es suficiente con probar que $(R, *)$ es un anillo con el producto $\cdot$ coordenada a coordenada. Que R es cerrado bajo $\cdot$ es claro. Calculamos la m-ésima coordenada de $(X*Y)\cdot Z$

$$
\sum_{d|m} \frac{d}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) Z_m = \sum_{d|m} \frac{d}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} Z_d^{\frac{m}{d}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)
$$

y la correspondiente de $(X \cdot Z) * (Y \cdot Z)$

$$\sum_{d|m} \frac{d}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} ((X_d Z_d)^{\frac{d'}{d}} + (Y_d Z_d)^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right) =$$

$$\sum_{d|m} \frac{d}{m} \operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m} \left(\sum_{d|d'|m} (X_d^{\frac{d'}{d}} + Y_d^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}} Z_d^{\frac{m}{d}} \mu\left(\frac{d'}{d}\right) \right)$$

Por lo tanto coinciden y $(R, *, \dot{})$ es un anillo conmutativo. $\square$

Corolario 5.3.1. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos. Llamemos $N = |\Gamma'/\Gamma|$ y tomemos $\xi \in A_\Gamma$. Entonces $\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi) \in A_{\Gamma'}$.*

Demostración. Es suficiente con chequear que:

1. El resultado vale para $\operatorname{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n)$ para cualquier subgrupo $H \subset \Gamma$ y acción lineal de H en $\mathbb{A}^n$.

2. Si el resultado vale para ξ y ξ', el resultado vale para:

   a) $\xi\xi'$, y

   b) $\xi + \xi'$

3. Si el resultado vale para ξ, vale para $-\xi$

Para (1), sea $X = \operatorname{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n)$ para un espacio afín con uno acción lineal de H. Sea $K = \Gamma'/\Gamma$. Entonces $(\operatorname{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(X))^K = (\operatorname{Ind}_H^{\Gamma'}(\mathbb{A}^n))^K$. Recordemos que $\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$ consiste de puntos (x_i, γ_i) con $\gamma_i\Gamma = i$ y la acción de Γ' esta dada por

$$(\gamma' \cdot (x_i, \gamma_i))_j = (x_{\gamma'^{-1}j}, \gamma'\gamma_{\gamma'^{-1}j})$$

Notemos que $\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X) = (\bigsqcup_{\Gamma/H} \mathbb{A}^n)^K$ tiene una descomposición celular indexada por $\prod_{i\in K} i\Gamma/H$. Esta dada por $(x_i, \gamma_i) \mapsto (\gamma_i H)$. La acción de Γ' mueve las celdas de forma compatible con la acción por permutación de factores en $\prod_{i\in K} i\Gamma/H$. Notemos que esta acción es nada más y nada menos que $\operatorname{Per}_H^\Gamma(\Gamma/H)$ via $\operatorname{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\Gamma/H) \simeq \Gamma'/H$, $(\gamma H, \gamma') \mapsto \gamma'\gamma H$.

Tomemos un elemento $(\gamma_i) \in \prod_{i\in K} i\Gamma/H$ y asumamos que $\gamma' \cdot (\gamma_i) = (\gamma_i)$. Esto significa que $\gamma_j H = \gamma'\gamma_{\gamma'^{-1}j} H$ para todo j. Notemos que la acción inducida en $\mathbb{A}^{nN}$ es

$$(\gamma' \cdot (x_i))_j = ((\gamma'\gamma_{\gamma'^{-1}j}\gamma_j^{-1}) x_{\gamma'^{-1}j})$$

que es lineal dado que H actuaba de forma lineal. Entonces $\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X) \in A_{\Gamma'}$. Más aún, $[\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)]^{\Gamma'} = q^{nN} \otimes \mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(\Gamma/H)}$. El resultado vale en este caso.

Para (2) y (3) usamos que $\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(-)$ es multiplicativo y cumple la fórmula binomial. $\square$

Lema 5.3.3. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos y $N = |\Gamma'/\Gamma|$. Para cada divisor d de N, sea Γ_d el único subgrupo de índice d de Γ'. Existen únicas funciones $\Omega_d : R_\mathbb{Q}(\Gamma)[q] \to R_\mathbb{Q}(\Gamma_d)[q]$, $d|N$, tales que*

1. $\Omega_d(q^n \otimes \mathbb{Q}^{\Gamma/H}) = q^{nd} \otimes \mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_\Gamma^{\Gamma_d}(\Gamma/H)}$ *para cualquier $H \subset \Gamma$,*

2. $\Omega_d(V_1V_2) = \Omega_d(V_1)\Omega_d(V_2)$ *para cualesquiera V_1, V_2,*

3. *La fórmula binomial vale:*

$$\Omega_m(V_1+V_2)=\sum_{d|m}\frac{d}{m}\operatorname{Ind}_{\Gamma_d}^{\Gamma_m}\left(\sum_{d|d'|m}(\Omega_d(V_1)^{\frac{d'}{d}}+\Omega_d(V_2)^{\frac{d'}{d}})^{\frac{m}{d'}}\mu\left(\frac{d'}{d}\right)\right)$$

para cualesquiera $V_1, V_2 \in R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)[q]$, y

4. *Para cualquier $\xi \in A_\Gamma$,*

$$[\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi)]^{\Gamma'}=\Omega_N(E^\Gamma(\xi;q))$$

Demostración. Usamos los morfismos $R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)[q]\to A_\Gamma$, $q^n\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H}\mapsto \operatorname{Ind}_H^\Gamma(\mathbb{A}^n)$, y $E^\Gamma(-;q)$: $A_\Gamma\to R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)[q]$ que son isomorfismos inversos. □

Lema 5.3.4. *Sean $\Gamma\subset\Gamma'$ grupos cíclicos finitos. Asumamos que $N=|\Gamma'/\Gamma|$ es primo. Entonces*

$$\Omega_N(p\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H})=p(q^N)\otimes\mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)}+\left(\frac{|\Gamma|}{|H|}\right)^{N-1}\frac{1}{N}(p^N-p(q^N))\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma'/H}$$

para cualesquiera $p\in\mathbb{Q}[q]$ y subgrupo $H\subset\Gamma$.

Demostración. Ambos lados coinciden para $p=q^n$. Por lo tanto, basta ver que el lado derecho cumple la fórmula binomial, es decir, que

$$\begin{aligned}
&(p_1+p_2)(q^N)\otimes\mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)}+\left(\frac{|\Gamma|}{|H|}\right)^{N-1}\frac{1}{N}((p_1+p_2)^N-(p_1+p_2)(q^N))\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma'/H}\\
&=p_1(q^N)\otimes\mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)}+\left(\frac{|\Gamma|}{|H|}\right)^{N-1}\frac{1}{N}(p_1^N-p_1(q^N))\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma'/H}+p_2(q^N)\otimes\mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)}\\
&+\left(\frac{|\Gamma|}{|H|}\right)^{N-1}\frac{1}{N}(p_2^N-p_2(q^N))\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma'/H}\\
&+\frac{1}{N}\operatorname{Ind}_{\Gamma}^{\Gamma'}(((p_1\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H}+p_2\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H})^N-(p_1\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H})^N-(p_2\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma/H})^N))
\end{aligned}$$

lo que es cierto dado que

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\mathbb{Q}^{\Gamma/H})^N=\left(\frac{|\Gamma|}{|H|}\right)^{N-1}\mathbb{Q}^{\Gamma'/H}$$

por el Lema 1.3.2. □

Corolario 5.3.2. *Sea Γ uno grupo cíclico de orden N primo. Tomemos $\xi\in\mathbb{Z}[q]$. Entonces $\operatorname{Per}_{\{e\}}^{\Gamma}(\xi)\in A_\Gamma$ y*

$$[\operatorname{Per}_{\{e\}}^{\Gamma}(\xi)]^\Gamma=E(\xi;q^N)+\frac{1}{N}\operatorname{Ind}_{\{e\}}^{\Gamma}(E(\xi;q)^N-E(\xi;q^N)))$$

Lema 5.3.5. *Sean $H\subset\Gamma\subset\Gamma'$ grupos cíclicos finitos. Llamemos $N=|\Gamma'/\Gamma|$ y $h=|\Gamma/H|$. Entonces*

$$\mathbb{Q}^{\operatorname{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)}=\sum_{M|d|N}\frac{1}{hd}\left(\sum_{M|d'|d}h^{d'}\mu\left(\frac{d}{d'}\right)\right)\mathbb{Q}^{hd}$$

donde M es el producto de todos los divisores primos p de h elevados a la valuación p-ádica de N.

Demostración. Describamos las órbitas en $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)$. Equivalentemente, sus estabilizadores. Fijemos un generador σ de Γ'/H. Notemos que un punto $(x_1, \dots, x_N)$ es fijado por σ^{kN} si y solo si $h = |\Gamma/H|$ divide a k. Por otro lado, es fijado por σ^{l+kN}, $0 < l < N$, $0 \leq k < h$, si

$$(x_1, \dots, x_N) = (\sigma^{N(k+1)}x_{N-l+1}, \dots, \sigma^{N(k+1)}x_N, \sigma^{Nk}x_1, \dots, \sigma^{Nk}x_{N-l})$$

Es decir $x_i = \sigma^{Nk}x_{i-l}$ para todo $i > l$ y $x_i = \sigma^{N(k+1)}x_{N-l+i}$ para $1 \leq i \leq l$. Escribamos $N = r + ls$ para $0 \leq r < l$, $0 \leq s$. Luego,

$$x_i = \sigma^{N(k+1)}x_{N-l+i} = \sigma^{N(k+1)}x_{r+l(s-1)+i} = \sigma^{N(ks+1)}x_{r+i} = \begin{cases} \sigma^{N(ks+1)}x_{r+i} & \text{si } i \leq l-r \\ \sigma^{N(k(s+1)+1)}x_{r+i-l} & \text{si } i > l-r \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq l$. Sean $r = r' \operatorname{mcd}(r,l)$ y $l = l' \operatorname{mcd}(r,l)$. Notemos que el conjunto $A(i) = \{i + rj : j \in \mathbb{Z}\}$ tiene l' residuos diferentes módulo l. Por lo tanto, tenemos que

$$x_i = \sigma^{N(l'(ks+1)+t(i)k)}x_i$$

donde $t(i)$ es el número de residuos de $A(i)$ mayores que $l - r$. Luego, necesitamos que

$$h | l'(ks+1) + t(i)k$$

para todo i. Si esto sucede, hay exactamente $|\Gamma/H|^{\operatorname{mcd}(r,l)}$ puntos estabilizados por σ^{l+kN}.

Ahora bien, el número de residuos de $A(i)$ coincide con los de $B(i) = \{i + \operatorname{mcd}(r,l)j : j \in \mathbb{Z}\}$. Luego $t(i) = r'$ y la condición requerida es

$$\begin{aligned} h \operatorname{mcd}(l,r) &| l(ks+1) + rk \\ h \operatorname{mcd}(l,N) &| kN + l \end{aligned}$$

Queremos encontrar todos los divisores de hN que se pueden escribir como $kN + l$ cumpliendo la condición anterior. Sabemos que estos divisores son de la forma hd para algún $d|N$ con $N \nmid d \operatorname{mcd}(h,N)$. Notemos que l es el residuo de hd módulo N y que la condición es $\operatorname{mcd}(hd,N)|d$. Equivalentemente $\operatorname{mcd}(h, \frac{N}{d}) = 1$. Entonces, si M es la parte de N que no es coprima con h, d cumple $M|d|N$ y $d < N$. Cada uno de estos d tiene h^d puntos fijos. Luego,

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\Gamma/H)} = \sum_{M|d|N} \frac{1}{hd} \left(\sum_{M|d'|d} h^{d'} \mu\left(\frac{d}{d'}\right) \right) \mathbb{Q}^{hd}$$

□

Ejemplo 5.3.1. Exploremos $\Gamma' = \mu_4$ y $\Gamma = \mu_2$, los grupos cíclicos de orden 4 y 2 respectivamente. En este caso, $R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ tiene base $\mathbb{Q}^1, \mathbb{Q}^2$, $\Omega_2(\mathbb{Q}^1) = \mathbb{Q}^1$ y $\Omega_2(\mathbb{Q}^2) = \mathbb{Q}^4$. La fórmula binomial nos dice que:

$$\begin{aligned} \Omega_2(V_1 + V_2) &= \Omega_2(V_1) + \Omega_2(V_2) + \frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mu_2}^{\mu_4}((V_1+V_2)^2 - V_1^2 - V_2^2) \\ &= \Omega_2(V_1) + \Omega_2(V_2) + \operatorname{Ind}_{\mu_2}^{\mu_4}(V_1V_2) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \Omega_2(p_1 \otimes \mathbb{Q}^1 + p_2 \otimes \mathbb{Q}^2) &= \Omega_2(p_1 \otimes \mathbb{Q}^1) + \Omega_2(p_2 \otimes \mathbb{Q}^2) + p_1p_2 \otimes \mathbb{Q}^4 \\ &= p_1(q^2) \otimes \mathbb{Q}^1 + \frac{1}{2}(p_1^2 - p_1(q^2)) \otimes \mathbb{Q}^2 + p_2(q^2) \otimes \mathbb{Q}^4 \\ &+ 2\frac{1}{2}(p_2^2 - p_2(q^2)) \otimes \mathbb{Q}^4 + p_1p_2 \otimes \mathbb{Q}^4 \\ &= p_1(q^2) \otimes \mathbb{Q}^1 + \frac{1}{2}(p_1^2 - p_1(q^2)) \otimes \mathbb{Q}^2 + (p_2^2 + p_1p_2) \otimes \mathbb{Q}^4 \end{aligned}$$

para cualesquiera $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}[q]$.

Lema 5.3.6. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos y $\pi : Y \to X$ una fibración Γ-equivariantemente localmente trivial con fibra F. Sea $Z \to \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$ un morfismo Γ'-equivariante. Entonces*

$$[\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(Y) \times_{\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)} Z] = [Z] \cdot [\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(F)]$$

en $K_0^{\Gamma'}(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$.

Demostración. Siendo π equivariantemente localmente trivial, existe una descomposición celular $X = \bigsqcup X_\alpha$ por subvariedades tales que π es trivial sobre cada celda. Luego, $Y = \bigsqcup X_\alpha \times F$. Notemos que $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X_\alpha \times F) \simeq \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X_\alpha) \times \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(F)$ y

$$\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}((Z_1 \times F)^j \times (Z_2 \times F)^{N-j}) \simeq \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(Z_1^j \times Z_2^{N-j}) \times \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(F)$$

donde el último isomorfismo es

$$((z, f_1, \ldots, f_j), (z_2, f_{j+1}, \ldots, f_N), \gamma') \mapsto ((z_1, z_2, \gamma'), \gamma' \cdot (f_1, f_2, \ldots, f_n)).$$

Por lo tanto, por la demostración del Lema 5.3.2, hay una descomposición celular de $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$ tal que $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(Y) \to \mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(X)$ es la multiplicación por $\mathrm{Per}_\Gamma^{\Gamma'}(F)$ sobre cada celda. Luego, lo mismo vale para el cambio de base a Z. □

5.4. Ejemplo: clases de conjugación en el grupo general lineal

Lema 5.4.1. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los tamaños de una partición de $\{1, \ldots, n\}$ en subconjuntos y consideremos el subgrupo $H = \prod \mathrm{GL}_{\lambda_i}(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Sea σ una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ que fija la partición anterior. Entonces la acción por translación a derecha de σ en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ desciende a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H$ y define una clase en $A_{\langle\sigma\rangle}$.*

Demostración. Primero que nada, notemos que la acción de $\Gamma = \langle\sigma\rangle$ por translación a dereche en $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ desciende a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H$ porque $gh\sigma = g\sigma(\sigma^{-1}h\sigma)$ y $\sigma^{-1}H\sigma = H$.

Luego de una conjugación, podemos asumir que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$. Definamos $\Psi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_1}} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_k}}$ de la siguiente forma. Las primeras $\binom{n}{\lambda_1}$ coordenadas de $\Psi(g)$ son los determinantes de las submatrices cuadradas de tamaño $\lambda_1 \times \lambda_1$ de g cuyas columnas son las primeras λ_1 de g. Las siguientes $\binom{n}{\lambda_2}$ coordenadas son los determinantes de las submatrices de tamaño $\lambda_2 \times \lambda_2$ de g cuyas columnas son las siguientes λ_2. Y así siguiendo. Por ejemplo, para $n = 3$, $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$, tenemos

$$\Psi \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = (ae - bd, dh - eg, ah - bg, c, f, k).$$

Notemos que Ψ es H-invariante y, por lo tanto, define $\overline{\Psi} : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H \to \mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_1}} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_k}}$. Por otro lado, hay una descomposión celular $\{X_\omega\}$ de $\mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_1}} \times \cdots \times \mathbb{C}^{\binom{n}{\lambda_k}}$ dada por que coordenadas se anulan. Indexemos esta descomposición por $\omega \in \mathcal{I} := \{0,1\}^{\binom{n}{\lambda_1}} \times \cdots \{0,1\}^{\binom{n}{\lambda_k}}$ donde un 1 indica que la coordenada asociada se anula y el orden esta dado por $0 < 1$. Tomando preimagenes obtenemos una descomposición

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H = \bigsqcup_\omega \overline{\Psi}^{-1}(X_\omega).$$

Esta descomposición puede no ser σ-invariante. En efecto, $\sigma \cdot X_\omega = X_{\sigma\cdot\omega}$ donde σ actúa en $\mathcal{I}$ preservando cada factor y moviendo la i-ésima coordenada en el j-ésimo factor a la $\min\{\sigma(i+l) : 0 \leq l < j\}$-ésima posición. Definamos entonces

$$Y_\omega = (\Gamma \cdot X_\omega) \setminus \left(\bigcup_{\omega' < \omega} \Gamma \cdot X_{\omega'} \right)$$

para cada ω. De esta forma obtenemos una descomposición σ-invariante $\{Y_{[\omega]}\}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H$ indexada por $\mathcal{I}/\Gamma$.

Notemos ahora que cada $Y_{[\omega]}$ tiene tantas componentes conexas como elementos enla órbita de ω. Denotemos con Γ_ω al estabilizador de ω. Necesitamos probar que la clase de

$$Z_\omega := X_\omega \setminus \left(\bigcup_{\omega' < \omega} X_{\omega'} \right)$$

cae en A_{Γ_ω}.

Por hipótesis, σ induce una permutación τ de $\{1, \ldots, k\}$ tal que $\lambda_{\sigma(i)} = \lambda_i$ para cada i. Asumamos que $\Gamma_\omega = \langle \sigma^m \rangle$. Sean $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_l$ las órbitas de $\kappa := \tau^m$. Sea $\pi_i : \{0,1\}^{\binom{n}{\lambda_1}} \times \cdot \{0,1\}^{\binom{n}{\lambda_k}} \to \{0,1\}^{\binom{n}{\lambda_i}}$ la proyección en el i-ésimo factor. Entonces, por definición, tenemos que $\pi_{\kappa(i)}(\omega) = \pi_i(\omega)$. Más aún,

$$Z_\omega = \prod_{i=1}^{l} \prod_{\lambda_j \in \mathcal{O}_i} T_{\omega, \lambda_i}$$

donde T_{ω,λ_j} consiste de aquellas $n \times \lambda_j$ matrices cuyas $\lambda_j \times \lambda_j$ submatrices cuadradas son inversibles exactamente cuando su coordenada asociada de $\pi_j(\omega)$ se anula, completadas con ceros para hacerlas cuadradas. La acción de σ^m en Z_w es compatible con la estructura producto, es decir, mueve al (i, λ_j)-ésimo factor al $(i, \sigma^m \lambda_j)$-ésimo. Por lo tanto, es suficiente con probar que $T_{\omega,\mathcal{O}_i} := \prod_{\lambda_j \in \mathcal{O}_i} T_{\omega,\lambda_j}$ tiene clase en A_{Γ_ω}.

Todos los T_{ω,λ_j} se identifican naturalmente los unos con los otros. Hemos descripto un modelo en el párrafo anterior. Llamemoslo $S_{\omega,\mathcal{O}_i}$. Entonces $T_{\omega,\mathcal{O}_i} \simeq S_{\omega,\mathcal{O}_i}^{|\mathcal{O}_i|}$ y la acción de σ^m en el lado derecho es descripta por ciertos automorfismo ϕ_j del modelo. Notemos que, si $N = |\mathcal{O}_i|$, $\phi_N \cdots \phi_2 \phi_1$ es la identidad. Luego, el autmorfismo

$$(x_1, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \phi_1(x_2), \phi_2\phi_1(x_3), \ldots, \phi_{N-1} \cdots \phi_1(x_N))$$

identica la acción con la acción por permutación de factores.

Módulo isomorifsmo, $S_{\omega,\mathcal{O}_i}$ es

$$W_{n,a,\mathcal{J}} := \left\{ \begin{array}{c} g \in M_{n,a}\mathbb{C} : \text{las } a \times a \text{ submatrices inversibles de } g \\ \text{son exactamente aquellas cuyo conjunto de filas pertenece a } \mathcal{J} \end{array} \right\}$$

para alguna familia $\mathcal{J}$ de subconjutos de cardinal j de $\{1, \ldots, n\}$. Notemos que esta variedad es una unión disjunta de $V_{n,a,r}$ para ciertos r's. Por lo tanto, términamos la demostración aplicando el Corolario 5.3.1. □

Lema 5.4.2. *Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ los cardinales de una partición de $\{1, \ldots, n\}$ en subconjuntos y consideremos el subgrupo $H = \prod \mathrm{GL}_{\lambda_i}(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Sea σ una permutación de $\{1, \ldots, n\}$ que fija la partición anterior y $\Gamma = \langle \sigma \rangle$. Entonces*

$$[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H]^\Gamma = \left(\prod_{i=0}^{n-1} (q^n - q^i) \otimes T_\Gamma \right) / \prod_{\mathcal{O}} [\mathrm{GL}_{\lambda(\mathcal{O})}(\mathbb{C})^{\mathcal{O}}]^\Gamma$$

donde $\mathcal{O}$ recorre todas las órbitas de σ en $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\lambda(\mathcal{O})$ es el tamaño de cualquier elemento de $\mathcal{O}$ y $\mathrm{GL}_{\lambda(\mathcal{O})}(\mathbb{C})^{\mathcal{O}}$ es dotado con la acción por permutación de factores inducida por la acción de Γ en $\mathcal{O}$.

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/H$. Dado que $[\mathcal{C}]^\Gamma \in \mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$, es sufiente con calcular su E-polinomio equivariante. Para esto, podemos aplicar los argumentos de [LMN13, proposición 2.6] a la fibración localmente trivial

$$H \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \to \mathcal{C}$$

para deducir que $E^\Gamma(\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})) = E^\Gamma(H)E^\Gamma(\mathcal{C})$, donde $E^\Gamma(H)$ es calculado en términos de la acción por monodromía. Esta acción se puede describir de la siguiente forma. Recordemos primero como se puede trivializar la fibración anterior. Sea λ el subgrupo uniparamétrico generado por una matriz diagonal $D \in \mathcal{C}$ (pensando a $\mathcal{C}$ como una clase de conjugación). Sea $P = U(\lambda) \rtimes H$ el subgrupo parabolico asociado con λ y $U(\lambda)$ su radical unipotente. Recordemos que P y $U(\lambda)$ son

$$P = \{g \in G : \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} \text{ exists}\}$$

y

$$U(\lambda) = \{g \in G : \lim_{t\to 0} \lambda(t)g\lambda(t)^{-1} = 1\}.$$

Analizando los espacios tangentes, descubrimos que la multiplicación $U(\lambda^{-1}) \times P \to G$ es étale e inyectiva y por lo tanto una inmersión abierta. Por lo tanto $U(\lambda^{-1}) \times U(\lambda)$ es una subvariedad loclamente cerrada de G que el cociente identifica con un abierto $\Omega \subset G/H$.

Tenemos una trivialización sobre Ω dada por $s : \Omega \times H \simeq U(\lambda^{-1}) \times U(\lambda) \times H \to G$ donde el segundo morfismo es la multiplicación. Sobre el punto $\sigma D\sigma^{-1}$ una trivialización es $s(\sigma^{-1} - \sigma)\sigma : \sigma\Omega\sigma^{-1} \times H \to G$. Elijamos $\omega \in \Omega \cap \sigma^{-1}\Omega\sigma$. Tenemos las siguientes identificaciones

$$h \in H \to s(\omega)h \in \pi^{-1}(\omega)$$

y

$$h \in H \to s(\sigma^{-1}\omega\sigma)h\sigma \in \pi^{-1}(\omega)$$

Por lo tanto, la acción por monodromía, antes de pasar a cohomología, se corresponde a

$$h \in H \mapsto s(\sigma^{-1}\omega\sigma)^{-1}s(\omega)h\sigma^{-1} \in H$$

Consideremos

$$u = \mathrm{Id} + \sum_i \lambda_{i\neq\sigma(i)} E_{i,\sigma^{-1}(i)} \in U(\lambda)$$

para alguna raíz de la unidad λ_i de orden alto. Notemos que

$$u\sigma = \sum \lambda_i E_{i,i} + E_{i,\sigma(i)} \in U(\lambda^{-1}) \times H$$

Tenemos que

$$u\sigma = \tilde{u}h_0$$

con $\tilde{u} \in U^-$ y $h_0 \in H$ de orden finito. Luego, $\omega = \pi(u) \in \Omega \cap \sigma^{-1}\Omega\sigma$ y la acción por monodromía es inducida por

$$h \mapsto \tilde{u}^{-1}uh\sigma = h_0\sigma^{-1}h\sigma$$

Ahora bien, la multiplicación por h_0 induce una acción lineal de un grupo cíclico finito en H que no permuta las componentes. Por lo tanto, es trivial en cohomología y la acción por monodromía es de permutación de factores inducida por σ. Entonces

$$E^\Gamma(H) = \prod_{\mathcal{O}} E(\mathrm{GL}_{\lambda(\mathcal{O})}(\mathbb{C})^{\mathcal{O}})$$

donde $\mathcal{O}$ recorre todas las órbitas de Γ en $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. □

Corolario 5.4.1. *Sea D una matriz diagonal de $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ y asumamos que su clase de conjugación $\mathcal{C}$ es invariante para la acción por translación a izquierda de una matriz de orden finito $\xi \in Z(\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}))$. Sea $\Gamma = \langle\xi\rangle$. Entonces $[\mathcal{C}] \in A_\Gamma$ y*

$$[\mathcal{C}]^\Gamma = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) \otimes T_\Gamma\right) / \prod_{\mathcal{O}} [\mathrm{GL}_{\lambda(\mathcal{O})}(\mathbb{C})^{\mathcal{O}}]^\Gamma$$

donde $\mathcal{O}$ recorre todas las órbitas de Γ en el conjunto (sin repeticiones) de autovalores de D, $\lambda(\mathcal{O})$ es la multiplicidad en D de cualquier elemento de $\mathcal{O}$ y $\mathrm{GL}_{\lambda(\mathcal{O})}(\mathbb{C})^{\mathcal{O}}$ es dotado con la acción por permutación de factores inducida por la acción de Γ en $\mathcal{O}$.

Ejemplo 5.4.1. El caso más sencillo es cuando todos los λ son uno (es decir, D es regular) y σ actúa transitivamente con orden primo n. En este caso,

$$\begin{aligned}[\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathbb{C}^{\times})]^{\Gamma} &= (q^n-1)\otimes T_{\Gamma} - \sum_{1\le j<n} \frac{1}{n}\binom{n}{j}(q-1)^j \otimes \mathbb{Q}^{\Gamma} \\ &= (q^n-1)\otimes T_{\Gamma} - \frac{q^n+(-1)^n-(q-1)^n}{n}\otimes \mathbb{Q}^{\Gamma}\end{aligned}$$

por el Lema 5.3.2. Notemos que

$$\mathbb{Q}^{\Gamma}\cdot\mathbb{Q}^{\Gamma} = n\mathbb{Q}^{\Gamma}$$

Luego,

$$\begin{aligned}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^{\times})^n]^{\Gamma} &= \left(\prod_{i=0}^{n-1}(q^n-q^i)\otimes T_{\Gamma}\right) \Big/ \left((q^n-1)\otimes T_{\Gamma} - \frac{q^n-1-(q-1)^n}{n}\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^i)\otimes T_{\Gamma} + p\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} p((q^n-1)-q^n+1+(q-1)^n) &= \frac{q^n-1-(q-1)^n}{n}\prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^i) \\ p &= \frac{q^n-1-(q-1)^n}{n(q-1)}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{q^n-q^i}{q-1}\end{aligned}$$

Esto es

$$[\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^{\times})^n]^{\Gamma} = \prod_{i=1}^{n-1}(q^n-q^i)\otimes T_{\Gamma} + \frac{q^n-1-(q-1)^n}{n(q-1)}\prod_{i=1}^{n-1}\frac{q^n-q^i}{q-1}\otimes\mathbb{Q}^{\Gamma}$$

Para $n=2$

$$[\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^{\times})^2]^{\Gamma} = (q^2-q)\otimes T_{\Gamma} + q\otimes\mathbb{Q}^2$$

y para $n=3$

$$[\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^{\times})^3]^{\Gamma} = (q^3-q^2)(q^3-q)\otimes T_{\Gamma} + q^4(q+1)\otimes\mathbb{Q}^3$$

Ejemplo 5.4.2. Analizemos la misma situación que antes pero con $n=4$. En este caso,

$$\begin{aligned}[\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathbb{C})]^{\Gamma} &= [\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathbb{C}^{\times})]^{\Gamma} + 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\mu_2}(([\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\mu_2}(\mathbb{C}^{\times})]^{\mu_2}+1)^2 - ([\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\mu_2}(\mathbb{C}^{\times})]^{\mu_2})^2 - 1) \\ &\quad + \frac{1}{4}\mathrm{Ind}^{\Gamma}_{\{e\}}(q^4-((q-1)^2+1)^2) \\ q^4\otimes\mathbb{Q}^1 &= [\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathbb{C}^{\times})]^{\Gamma} + 1\otimes\mathbb{Q}^1 + (q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2 - (q-1)\otimes\mathbb{Q}^4 + (q-1)(q^2-q+1)\otimes\mathbb{Q}^4 \\ [\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathbb{C}^{\times})]^{\Gamma} &= (q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1 - (q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2 - q(q-1)^2\otimes\mathbb{Q}^4\end{aligned}$$

por la fórmula binomial. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}[\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^{\times})^4]^{\Gamma} &= (q^4-q)(q^4-q^2)(q^4-q^3)\otimes\mathbb{Q}^1 + (q^4-q)q^2(q^4-q^3)\otimes\mathbb{Q}^2 \\ &\quad + (q^2+q+1)q^7(q^2+q^1)\otimes\mathbb{Q}^4\end{aligned}$$

Ejemplo 5.4.3. Tomemos la partición $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$ y $\sigma = (13)(24)$. Entonces hay una única órbita de cardinal 2 con $\lambda = 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}[\mathrm{Per}^{\Gamma}_{\{e\}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))]^{\Gamma} &= (q^4-q^2)(q^4-1)\otimes T_\Gamma + \frac{1}{2}((q^2-q)^2(q^2-1)^2-(q^4-q^2)(q^4-1))\otimes \mathbb{Q}^2 \\ &= (q^4-q^2)(q^4-1)\otimes T_\Gamma - q^3(q-1)^2(q+1)^2\otimes \mathbb{Q}^2\end{aligned}$$

por el Corolario 5.3.2. Luego,

$$[\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})/\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2]^{\Gamma} = (q^4-q^3)(q^4-q)\otimes T_\Gamma + p\otimes \mathbb{Q}^2$$

donde

$$\begin{aligned}p((q^4-q^2)(q^4-1)-2q^3(q-1)^2(q+1)^2) &= (q^4-q^3)(q^4-q)q^3(q-1)^2(q+1)^2\\ p(q^2+1-2q) &= q^5(q-1)^2(q^2+q+1)\\ p &= q^5(q^2+q+1)\end{aligned}$$

Entonces

$$[\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})/\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2]^{\Gamma} = (q^4-q^3)(q^4-q)\otimes T_\Gamma + q^5(q^2+q+1)\otimes \mathbb{Q}^2$$

Conjectura 5.4.1. *Sea G un grupo algebraico reductivo, $H\subset G$ el centralizador de un subgrupo uniparamétrico λ de G, y $\Gamma\subset G$ un subgrupo cíclico finito tal que H es invariane por la conjugación por elementos de Γ. Consideremos la acción de Γ por translación a derecha en G/H. Entonces $[G/H]\in A_\Gamma$.*

Creemos que la demostración para GL_n puede ser adaptada de la siguiente manere. Sea P el subgrupo parabólico de G asociado con λ. Entonces $H\subset P$ y tenemos un morfismo $\pi : G/H\to G/P$ que es localmente trivial con fibra U_+, el subgrupo unipotente asociado a λ. Fijemos un subgrupo de Borel B de P que contiene a U_+ y a λ. Nos gustaría que para cada celda de Bruhat Bw/P su preimagen X_w por π sea Γ-invariante, pero no es cierto. Por lo tanto, deberíamos refinar la descomposición de Bruhat para que cada celda sea invarinate. Nuestra propuesta es

$$Y_w = (\Gamma\cdot X_w)\setminus(\Gamma(\sqcup_{w'<w}X_{w'})).$$

5.5. Localización

Definición 5.5.1. Sea Γ un grupo cíclico finito y $S\subset K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})\otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)\otimes\mathbb{Q}$ un conjunto multiplicativo. Decimos que una clase $\xi\in K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ es casi buena si existen un numerador $\xi_n\in A_\Gamma$ y un denominador $\xi_d\in A_\Gamma$ tales que $\xi\xi_d=\xi_n$ y $[\xi_d]^{\Gamma}\in S$. Sea $[-]^{\Gamma}_S$ la composición de $[-]^{\Gamma}$ con la localización $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})\otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)\otimes\mathbb{Q}\to(K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})\otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)\otimes\mathbb{Q})_S$

Lema 5.5.1. *Sea Γ un grupo cíclico finito y $\xi\in K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ una clase casi buena. Entonces, para todo $\xi'\in K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$,*

$$[\xi\xi']^{\Gamma}_S = [\xi]^{\Gamma}_S[\xi']^{\Gamma}_S.$$

Demostración. En efecto,

$$[\xi_d]^{\Gamma}[\xi\xi']^{\Gamma} = [\xi_d\xi\xi']^{\Gamma} = [\xi_n\xi']^{\Gamma} = [\xi_n]^{\Gamma}[\xi]^{\Gamma} = [\xi_d]^{\Gamma}[\xi]^{\Gamma}[\xi']^{\Gamma}$$

y $[\xi_d]^{\Gamma}\in S$. □

Lema 5.5.2. *Sean Γ un grupo cíclico finito y ξ, ξ' y ξ'' clases en $K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ con $\xi\xi'=\xi''$. Entonces*

1. *si ξ y ξ' son casi buenas, ξ'' es casi buena.*

2. *si ξ' y ξ'' son casi buenas y ξ' admite un numerador ξ'_n con $[\xi'_n]^\Gamma \in S$, ξ es casi buena.*

Demostración. Es claro que el producto de clases casi buenas es casi bueno. Asumamos que ξ' y ξ'' son casi buenas. Tomemos parejas (ξ'_d, ξ'_n) y (ξ''_d, ξ''_n) como en la definición de casi buenas. Tenemos que

$$\xi\xi'_n\xi''_d = \xi\xi'\xi'_d\xi''_d = \xi''\xi'_d\xi''_d = \xi'_d\xi''_n$$

y el resultado se sigue. □

Lema 5.5.3. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos $S \subset K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ y $S' \subset K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma') \otimes \mathbb{Q}$ conjuntos multiplicativos. Si $\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(S) \subset S'$, la inducción de una clase casi buena es casi buena.*

Demostración. Sea ξ una clase casi buena asociada con un par (ξ_d, ξ_n) para Γ. Tenemos que

$$\frac{|\Gamma'|}{|\Gamma|}\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi_n) = \frac{|\Gamma'|}{|\Gamma|}\mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi\xi_d) = \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi) \cdot \mathrm{Ind}_\Gamma^{\Gamma'}(\xi_d)$$

y el resultado se sigue. □

Lema 5.5.4. *Sea Γ un grupo cíclico finito y $S \subset K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ un conjunto multiplicativo. Sean $\xi, \xi' \in K_0^\Gamma(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$. Si $[\xi]_S^\Gamma = [\xi']_S^\Gamma$, para cualquier subgrupo $H \subset \Gamma$,*

$$[\xi/H] = [\xi'/H]$$

en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})_{\overline{S}}$ donde $\overline{S}$ esta generado por elementos de la forma $\sum_{d_1|d} d_1 s_{d_1}$ donde d es un divisor de $|\Gamma|$ y $s = \sum_d s_d \otimes \mathbb{Q}^d \in S$.

Demostración. Es suficiente con probar que si $s\xi = 0$ para algún $\xi \in K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$ y $s \in S$,

$$\overline{s}\langle T_H, \mathrm{Res}_H^\Gamma(\xi)\rangle = 0$$

para algún $\overline{s} \in \overline{S}$. Ahora bien, si $\xi = \sum \xi_d \otimes \mathbb{Q}_d$, $s = \sum s_d \otimes \mathbb{Q}_d$,

$$s\xi = \sum_d \left(\sum_{\mathrm{lcm}(d_1,d_2)=d} \mathrm{mcd}(d_1, d_2) s_{d_1}\xi_{d_2} \right) \otimes \mathbb{Q}^d$$

Por lo tanto, nuestra hipótesis es que

$$\sum_{\mathrm{lcm}(d_1,d_2)=d} \mathrm{mcd}(d_1, d_2) s_{d_1}\xi_{d_2} = 0$$

para cualquier d. Afirmamos que

$$\left(\prod_{d_2|d} \left(\sum_{d_1|d_2} d_1 s_{d_1} \right) \right) \xi_d = 0$$

para cualquier d. En efecto, para $d = 1$, vale; $s_1\xi_1 = 0$. Y, por nuestra hipótesis,

$$\left(\sum_{d_1|d} d_1 s_{d_1} \right) \xi_d$$

puede ser escrito en términos de $\xi_{d'}$ para divisores propios d' de d.

Luego,

$$\langle T_H, \mathrm{Res}^{\Gamma}_{H}(\xi)\rangle = \sum \xi_d \langle T_H, \mathrm{Res}^{\Gamma}_{H}(\mathbb{Q}^d)\rangle$$

y

$$\overline{s} = \prod_d \left(\sum_{d_1|d} d_1 s_{d_1} \right)$$

cumple lo buscado. □

Lema 5.5.5. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos y $S \subset \mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ un conjunto multiplicativo. Sea $N = |\Gamma'/\Gamma|$. Entonces si $\xi \in K_0^{\Gamma}(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ es casi buena, $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi)$ es casi buena con respecto a $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(S) := \{\Omega_N(s) : s \in S\}$.*

Demostración. En efecto, escribamos $\xi\xi_d = \xi_n$. Entonces $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi) \cdot \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_d) = \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_n)$ y $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_d), \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_n) \in A_{\Gamma'}$, por el Teorema 5.3.1 y el Corolario 5.3.1, y $[\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_d)]^{\Gamma} \in \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(S)$ por el Lema 5.3.3. □

Lema 5.5.6. *Sean $\Gamma \subset \Gamma'$ grupos cíclicos finitos y $S \subset \mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ un conjunto multiplicativo. Entonces si $[\xi]^{\Gamma}_S = [\xi']^{\Gamma}_S$, para clases buenas ξ, ξ', entonces $[\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi)]^{\Gamma'}_{S'} = [\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi')]^{\Gamma'}_{S'}$ donde $S' \subset K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}}) \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma')$ es el conjunto multiplicativo generado por $\Omega_N(s)$, $s \in S$.*

Demostración. Asumamos que $\xi\xi_d = \xi_n$ y $\xi'\xi'_d = \xi'_n$ con $\xi_d, \xi_n, \xi'_d, \xi'_n$ como en la definición de casi buena. Entonces $\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi) \cdot \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_d) = \mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_n)$. Sabemos que $[\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi'')]^{\Gamma'} = \Omega_N([\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi'')]^{\Gamma})$ para $\xi'' \in A_{\Gamma}$. Luego $[\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi)]^{\Gamma'}\Omega_N([\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_d)]^{\Gamma}) = \Omega_N([\mathrm{Per}_{\Gamma}^{\Gamma'}(\xi_n)]^{\Gamma})$ y similar con ξ'.

Recordemos ahora que Ω_N es la composición de un morfismo de anillos $f : \mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \to R$ con una proyección lineal $\pi : R \to \mathbb{Q}[q] \otimes R_{\mathbb{Q}}(\Gamma')$. Si $[\xi]^{\Gamma}_S = [\xi']^{\Gamma}_S$, $f([\xi_n]^{\Gamma}/[\xi_d]^{\Gamma}) = f([\xi'_n]^{\Gamma}/[\xi'_d]^{\Gamma})$ in $R_{S'}$ para $S' = \{f(s) : s \in S\}$. Ahora bien, π es multiplicativo y el resultado se sigue. □

Capítulo 6

Variedades de caracteres asociadas a nudos tóricos

6.1. Variedades de caracteres asociadas a nudos tóricos

Seguimos una notación similar a la de [GM22] para conveniencia del lector. Sean n, m enteros positivos comprimos y

$$\Gamma_{n,m} = \langle x, y | x^n = y^m \rangle$$

el grupo fundamental del nudo tórico (n, m). Para un entero r, denotemos con

$$\mathcal{R}_r := \mathrm{Hom}(\Gamma_{n,m}, \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})) = \{(A, B) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})^2 : A^n = B^m\}$$

a la variedad de GL_r-representaciones asociadas con $\Gamma_{n,m}$. Sean $\mathcal{R}_r^{irr}$ y $\mathcal{R}_r^{red}$ las subvariedades de aquellas representaciones que son irreducibles y reducibles respectivamente. En estos espacios actúa $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ por conjugación. Nuestro objetivo es calcular el motivo de

$$\mathcal{M}_r^{irr} := \mathcal{R}_r^{irr} / \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$$

el espaico de moduli de representaciones irreducibles de dimensión r. Cambiando GL_r por SL_r en las definiciones obtenemos espacios similares que denotaremos $\mathcal{R}_r(\mathrm{SL})$, $\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})$, $\mathcal{R}_r^{red}(\mathrm{SL})$ y $\mathcal{M}_r^{irr}(\mathrm{SL})$. Estos son los estudiados en [GM22]. Para evitar confusiones, cuando tanto las versiones de SL y GL aparezcan, agregaremos “(GL)” a la notación de las GL-versiones.

Trabajaremos principalmente con $\mathcal{R}_r^{irr}$ en vez de $\mathcal{M}_r^{irr}$. La razón es simplemente la siguiente conjetura que probaremos para $r \leq 3$ en la sección 6.3, dado que es útil introducir algunas notaciones primero.

Conjectura 6.1.1. *Sean n y m enteros positivos coprimos. Para cualquier entero r,*

$$[\mathcal{M}_r^{irr}] = \frac{[\mathcal{R}_r^{irr}]}{[\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]} = \frac{[\mathcal{R}_r^{irr}]}{q^{r-1}(q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-2})}$$

en la localización de $K_0(\mathrm{Var}_{\mathbb{C}})$ por q y $q^i - 1$ para $i = 0, \ldots, r$.

Lema 6.1.1. *Para $(A, B) \in \mathcal{R}_r^{irr}$, $A^n = B^m$ es una matriz central.*

Demostración. Se sigue del lema de Schur dado que $P = A^n = B^m$ conmuta con A y con B. □

Sea $\pi : \mathcal{R}_r^{irr} \to \mathbb{C}^\times$ la composición de $(A, B) \mapsto A^n$ con la inversa de $\mathbb{C}^\times \to Z(\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))$, $\omega \mapsto \omega \, \mathrm{Id}_r$. Además, consideremos el pullback

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathcal{R}}_r^{irr} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}_r^{irr} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{C}^\times \arrow[r, "(-)^{nm}"] & \mathbb{C}^\times \end{tikzcd}$$

donde $(-)^{nm} : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ es la exponenciación por nm. Sea μ_{nm} el grupo de las raíces nm-ésimas de la unidad. Hay una acción inducida en $\hat{\mathcal{R}}_r^{irr}$ tal que $\mathcal{R}_r^{irr} = \hat{\mathcal{R}}_r^{irr}/\mu_{nm}$. El morfismo π es PGL_r-invariante y, por lo tanto, define $\overline{\pi} : \mathcal{M}_r^{irr} \to \mathbb{C}^\times$, y hay una acción inducida de PGL_r en $\hat{\mathcal{R}}_r^{irr}$. Sea $\hat{\mathcal{M}}_r^{irr}$ el pullback por $(-)^{nm}$ de $\mathcal{M}_r^{irr}$. Alternativamente, $\hat{\mathcal{M}}_r^{irr}$ es el PGL_r-cociente de $\hat{\mathcal{R}}_r^{irr}$.

Por otro lado, sea

$$R_r := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_n \star \mathbb{Z}_m, \mathrm{GL}_r) = \{(A, B) \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})^2 : A^n = B^m = \mathrm{Id}_r\}$$

con la acción de μ_{nm} dada por $z \cdot (A, B) = (z^m A, z^n B)$. Como antes, denotemos con R_r^{irr} y R_r^{red} a las subvariedades de representaciones irreducibles y reducibles respectivamente. Sea M_r^{irr} el cociente de R_r^{irr} por la acción por conjugación de PGL_r. Notemos que las acciones de PGL_r y μ_{nm} conmutan. En particular, hay una acción inducida de μ_{nm} en M_r^{irr}.

Lema 6.1.2. *El pullback $\hat{\mathcal{R}}_r^{irr}$ es $\mu_{nm} \times \mathrm{PGL}_r$-equivariantemente isomorfo al producto $\mathbb{C}^\times \times R_r^{irr}$ donde la acción es $(z, g) \cdot (\omega, A, B) = (z\omega, z^m gAg^{-1}, z^n gBg^{-1})$. En particular, $\hat{\mathcal{M}}_r^{irr}$ es μ_{nm}-equivariantemente isomorfo a $\mathbb{C}^\times \times M_r^{irr}$.*

Demostración. Por su definición,

$$\hat{\mathcal{R}}_r^{irr} = \{(\omega, A, B) \in \mathbb{C}^\times \times \mathcal{R}_r^{irr} : A^n = B^m = \omega^{nm}\, \mathrm{Id}_r\}$$

donde la acción es $(z, g) \cdot (\omega, A, B) = (z\omega, gAg^{-1}, gBg^{-1})$.

Consideremos la involución $f : \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C}^\times \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2$ dada por

$$f(\omega, A, B) = (\omega, \omega^m A^{-1}, \omega^n B^{-1}).$$

Dotemos al dominio de la $\mu_{nm} \times \mathrm{PGL}_r$-acción dada por $(z, g) \cdot (\omega, A, B) = (z\omega, gAg^{-1}, gBg^{-1})$ y, al codominio, la dada por $(z, g) \cdot (\omega, A, B) = (z\omega, z^m gAg^{-1}, z^n gBg^{-1})$. Entonces f es un isomorfismo equivariante. Por lo tanto, el lema es equivalente a $f(\mathcal{R}_r^{irr}) = \mathbb{C}^\times \times R_r^{irr}$.

Primero, sea $(\omega, A, B) \in \mathcal{R}_r^{irr}$. Entonces

$$(\omega^m A^{-1})^n = \omega^{nm}\, \mathrm{Id}_r\, A^{-n} = \mathrm{Id_r}$$

y, similarmente, $(\omega^n B^{-1})^m$. Por lo tanto, $f(\omega, A, B) \in \mathbb{C}^\times \times R_r$. Más aún, la representación asociada a (A, B) es irreducible si y solo si la asociada a $(\omega^m A^{-1}, \omega^n B^{-1})$ lo es. Esto muestra que $f(\mathcal{R}_r^{irr}) \subset \mathbb{C}^\times \times R_r^{irr}$.

Recíprocamente, si $(\omega, A, B) \in \mathbb{C}^\times \times R_r^{irr}$, $f(\omega, A, B) = (\omega, \omega^m A^{-1}, \omega^n B^{-1})$ satisface

$$(\omega^m A^{-1})^n = \omega^{nm} A^{-n} = \omega^{nm}\, \mathrm{Id}_r$$

y, similarmente, $(\omega^n B^{-1})^m = \omega^{nm}\, \mathrm{Id}_r$. Se sigue que, $\mathbb{C}^\times \times R_r^{irr} \subset f(\mathcal{R}_r^{irr})$. □

Hay una estratificación de R_r que describimos a continuación. Los autovalores de A y B son raices de la unidad de orden un divisor de n o m respectivamente. Sean $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_1^{a_1}, \ldots, \epsilon_p^{a_p}\}$ y $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_1^{b_1}, \ldots, \varepsilon_q^{b_q}\}$ los multi-conjuntos de los autovalores de A y B respectivamente. Al par

$$\kappa = (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

lo llamamos una configuración de autovalores. Hay finitas posibilidades para κ y hay una descomposición

$$R = \bigsqcup_{\kappa} R_\kappa$$

dada por los posibles autovalores. La misma es equivariante respecto a la acción por conjugación de $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$. La acción de μ_{nm} es compatible con esta estratificación en el sentido que $\omega \cdot R_\kappa = R_{\omega \cdot \kappa}$ donde $\omega \cdot (\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\omega^m \boldsymbol{\epsilon}, \omega^n \boldsymbol{\varepsilon})$.

Esta estratificación puede ser refinada. Para una representación de dimensión finita V de $\mathbb{Z}_n \star \mathbb{Z}_m$, hay una filtración, la filtración semisimple,

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_s = V$$

tal que V_i/V_{i-1} es la representación semisimple maximal de V/V_{i-1} para cada i. Cada pieza graduada graduada se descompone como

$$\mathrm{Gr}_i(V_\bullet) := V_i/V_{i-1} = \bigoplus_{j=1}^{r_i} W_{i,j}^{m_{i,j}}$$

donde $W_{i,j}$ son representaciones irreducibles de Γ, no isomorfas para i fijo, y $m_{i,j}$ son enteros positivos. Las representaciones $W_{i,j}$ son las componentes isotópicas de V. A la colección

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} \{(\dim W_{1,1}, m_{1,1}), (\dim W_{1,2}, m_{1,2}), \ldots, (\dim W_{1,r_1}, m_{1,r_1})\}, \\ \vdots \\ \{(\dim W_{s,1}, m_{s,1}), (\dim W_{s,2}, m_{s,2}), \ldots, (\dim W_{s,r_s}, m_{s,r_s})\} \end{array} \right\}$$

la llamamos el estilo de V. Dados i, j, tenemos los multi-conjutos $\sigma_{i,j}(\gamma) = \{\epsilon_{i,j,1}^{n_{i,j,1}}, \ldots, \epsilon_{i,j,l}^{n_{i,j,l}}\}$ de autovalores de $\gamma \in \Gamma$ en $W_{i,j}$. La colección de autovalores de V es

$$\sigma := \{\sigma_{i,j}(\gamma)\}$$

y

$$\tau := (\xi, \sigma)$$

es llamado el tipo de V. Hay una estratificación por los posibles tipos

$$R_r = \bigsqcup_{\tau} R(\tau)$$

que es GL_r-equivariante y compatible con la acción de μ_{nm} como antes. Notemos que las representaciones irreducibles son aquellas de estilo $\{\{(r,1)\}\}$.

Dado κ, sea $\mathcal{T}_\kappa$ la colección de tipos cuyos autovalores son los de κ. Sea $\mathcal{T}_\kappa^* \subset \mathcal{T}_\kappa$ el subconjunto de aquellos tipos que no corresponden a representaciones irreducibles. Entonces

$$R_\kappa = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{T}_\kappa} R(\tau),$$

$$R_\kappa^{red} = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*} R(\tau),$$

y

$$R_r^{irr} = \bigsqcup_{\kappa} R_\kappa^{irr} = \bigsqcup_{\kappa} \left(R_\kappa - \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*} R(\tau) \right).$$

La descomposición es compatible con la acción de μ_{nm} si dotamos a los tipos con la acción dada por multiplicar los autovalores como antes.

Lema 6.1.3. *Sea κ una configuración de autovalores, $[\kappa]$ su μ_{nm}-órbita y Γ_κ su estabilizador. Entonces*

1. *Hay un isomorfismo equivariante para $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ y μ_{nm}*

$$\bigsqcup_{\kappa' \in [\kappa]} R_\kappa \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_\kappa}^{\mu_{nm}}(R_\kappa).$$

2. $\bigsqcup_{\kappa' \in [\kappa]} \mathcal{T}^*_{\kappa'}$ *es* μ_{nm}*-invariante.*

Demostración.

1. Tomemos $((A,B),z) \mapsto (z^m A, z^n B)$. Es $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$-equivariante porque z es central.

2. Esto equivale a decir que la acción de μ_{nm} preserva irreducibilidad.

□

Lema 6.1.4. *Sea κ una configuración de autovalores, $\tau \in \mathcal{T}^*_\kappa$ un tipo, y Γ_κ y Γ_τ sus estabilizadores. Hay un isomorfismo Γ_κ-equivariante*

$$\bigsqcup_{\tau' \in [\tau]} R(\tau') \simeq \mathrm{Ind}_{\Gamma_\tau}^{\Gamma_\kappa}(R(\tau))$$

donde $[\tau]$ es la Γ_κ-órbita de τ.

Demostración. Misma demostración que antes. □

En conclusión, la clase equivariante de R_r^{irr} esta determinada por las de R_κ y $R(\tau)$, $\tau \in \mathcal{T}^*_\kappa$. La primera probamos que cae en A_{Γ_κ} y la calculamos en el Corolario 5.4.1. En efecto,

$$R_\kappa = \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \cdot \Sigma_{\boldsymbol{\epsilon}} \times \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \cdot \Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

donde $\Sigma_{\boldsymbol{\epsilon}}$ y $\Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ son matrices diagonales con autovalores $\boldsymbol{\epsilon}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$ respectivamente.

Los siguientes lemas serán muy útiles en cómputos futuros. Para $\xi \in K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma) \otimes \mathbb{Q}$, escribamos $c_d(\xi) \in K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ para el d-ésimo coeficiente de ξ en la base $\{\mathbb{Q}^d : d||\Gamma|\}$.

Lema 6.1.5. *Para cualquier configuración de autovalores κ con estabilizador Γ_κ,*

$$[R_\kappa^{red}]^{\Gamma_\kappa} = \frac{1}{|\Gamma_\kappa|}[R_\kappa^{red}] \otimes \mathbb{Q}^{\Gamma_\kappa} + \sum_\tau \sum_d c_d(R(\tau)) \otimes \left(\frac{|\Gamma_\tau|}{|\Gamma_\kappa|} \mathrm{Ind}_{\Gamma_\tau}^{\Gamma_\kappa}(\mathbb{Q}^d) - \frac{d}{|\Gamma_\kappa|}\mathbb{Q}^{\Gamma_\kappa} \right)$$

donde τ recorre todos los elementos de $\mathcal{T}^*_\tau$ con estabilizador no trivial Γ_τ y d sobre todos los divisores positivos de $|\Gamma_\tau|$ estrictamente menores que $|\Gamma_\tau|$.

Demostración. Esto se sigue del lema anterior y de que

$$[R(\tau)] = \sum_{d||\Gamma_\tau|} d c_d(R(\tau))$$

en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$. □

Lema 6.1.6. *Para cualquier r,*

$$[R_r^{irr}]^{\mu_{nm}} = \frac{1}{nm}[R_r^{irr}] \otimes \mathbb{Q}^{nm} + \sum_\kappa \sum_d c_d(R_\kappa^{irr}) \otimes \left(\frac{|\Gamma_\kappa|}{nm} \mathrm{Ind}_{\Gamma_\kappa}^{\mu_{nm}}(\mathbb{Q}^d) - \frac{d}{nm}\mathbb{Q}^{nm} \right)$$

donde κ recorre todas las configuraciones de autovalores con estabilizador no trivial Γ_κ y d todos los divisores positivos de $|\Gamma_\kappa|$ estrictamente menores que $|\Gamma_\kappa|$.

Demostración. Misma demostración que antes. □

Lema 6.1.7. *Para cualquier configuración de autovalores κ, el cardinal de su estabilizador Γ_κ divide a* $\mathrm{mcd}(r, nm)$*.*

Demostración. En efecto, la acción de Γ_κ en $\mathbb{C}^\times$ es libre y las órbitas en κ tienen tamaño sumando r. Por lo tanto para cada factor de Γ_κ en $\mu_n \times \mu_m \simeq \mu_{nm}$ (recordar que $\operatorname{mcd}(n,m) = 1$) divide a $\operatorname{mcd}(r,n)$ y $\operatorname{mcd}(r,m)$ respectivamente. Por lo tanto, $|\Gamma_\kappa| | \operatorname{mcd}(r,n) \operatorname{mcd}(r,m) = \operatorname{mcd}(r,nm)$. □

Lema 6.1.8. *Para cualquier tipo τ, el cardinal de su estabilizador Γ_τ divide a r_i para $i = 1,\ldots,s$.*

Demostración. Misma demostración que antes. □

Estamos listos para probar el Teorema 0.2.5 que es una consecuencia inmediata de lo siguiente.

Teorema 6.1.1. *Sean n, m, r enteros positivos con n y m coprimos. Si r es coprimo con n y m,*

$$[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{r}[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]$$

en $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ donde q es la clase de la recta afín.

Demostración. Notemos que la acción de μ_{nm} en $\mathbb{C}^\times$ define una clase en $A_{\mu_{nm}}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{GL})] &= (q-1)\langle T_{\mu_{nm}}, [R_r^{irr}]^{\mu_{nm}}\rangle \\
&= \frac{q-1}{nm}\sum_\kappa [R_\kappa^{irr}] + \sum_\kappa \sum_d (q-1) c_d(R_\kappa^{irr}) \frac{|\Gamma_\kappa| - d}{nm} \\
&= \frac{q-1}{nm}\sum_\kappa [R_\kappa^{irr}]
\end{aligned}$$

por los lemas anteriores.

Por otro lado, por [GM22, Lema 3.1 y Proposición 3.2],

$$[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})] = \sum_{\omega\in\mu_r} \frac{1}{nm} \sum_{\eta_1}\sum_{\eta_2}\sum_\kappa [R_\kappa^{irr}]$$

donde μ_r es el grupo de raíces r-ésimas de la unidad, η_1 y η_2 son n respectivamente m-ésimas raíces de ω^{-1}, y κ es de la forma $((\eta_1\epsilon_i), (\eta_2\varepsilon_j))$ donde $\epsilon_i^n = \omega = \varepsilon_j^m$ y $\prod \epsilon_i = 1 = \prod \varepsilon_j$.

Para κ arbitrario, $\prod \epsilon_i \in \mu_n$ y $\prod \varepsilon_j \in \mu_m$. Por lo tanto, como $\operatorname{mcd}(r,nm) = 1$, hay una única solución a $\eta_1^r = \prod \epsilon_i^{-1}$ y $\eta_2^r = \prod \varepsilon_j^{-1}$ en μ_n y μ_m respectivamente. Se sigue que para $\omega = 1$ cada κ es realizado exactamente una vez. Para ω arbitrario, fijemos n y m-ésimas raíces ν_1 y ν_2 en μ_r. Entonces $\epsilon_i' = \nu_1\epsilon_i$, $\varepsilon_j' = \nu_2\varepsilon_j$, $\eta_1' = \nu_1^{-1}\eta_1$ y $\eta_2' = \nu_2^{-1}\eta_2$ muestran que κ también puede ser realizado con ω.

En conclusión,

$$[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{nm}\sum_\kappa [R_\kappa^{irr}] = \frac{q-1}{nm}\frac{nm}{r}[\mathcal{R}_r^{rr}(\mathrm{SL})] = \frac{q-1}{r}[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})].$$

□

Una modificación pequeña del argumento anterior prueba una versión para $\operatorname{mcd}(r,nm) \neq 1$. Las cuentas de [GM22] muestran que, para $r \leq 4$,

$$[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]^* := \frac{r}{nm}\sum_\kappa [R_\kappa^{irr}]$$

depende polinomialmente en n y m y coincide con $[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]$ para $\operatorname{mcd}(r,nm) = 1$. Más aún, para $r = 3$ o $r = 4$ vale de hecho que $[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]^* = [\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]$ ([MP16], [GM22]). Pero para $r = n = 2$ tenemos que $[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})] = 0$ y $[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]^* = \frac{1}{2}(m-1)(q^2-q)(q^2-1)$. Analizando el primer párrafo y la última ecuación de la demostración anterior tenemos que:

Lema 6.1.9. *Para cualquier $r \leq 4$,*

$$[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{r}[\mathcal{R}_r^{irr}(\mathrm{SL})]^* + \sum_{\kappa}\sum_{d}(q-1)c_d(R_\kappa^{irr})\frac{|\Gamma_\kappa| - d}{nm}$$

donde κ recorre todas las configuraciones de autovalores con estabilizador Γ_κ no trivial y d todos los divisores positivos de $|\Gamma_\kappa|$ estrictamente menores que $|\Gamma_\kappa|$.

Demostración del Lema 6.1.1. The formula for $[\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ is well known. The rest of the lemma will follow in a similar fashion to [Gon24, Proposition 7.3]. We first pullback to R_r^{irr}. By Lemma 6.1.2, it is enough to prove that $[R_r^{irr}] = [M_r^{irr}] \cdot [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ in $K_0^{\mu_{nm}}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$, where μ_{nm} acts trivially on $\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$, because the classes of $\mathbb{C}^\times$ and $\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ belong to $A_{\mu_{nm}}$, $[\mathbb{C}^\times]^{\mu_{nm}} = [\mathbb{C}^\times]\otimes\mathbb{Q}^1$, and $[\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]^{\mu_{nm}} = [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]\otimes\mathbb{Q}^1$. For this we use the stratification by eigenvalues. It sufficies to show that $[R_\kappa^{irr}] = [R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r][\mathrm{PGL}_r]$ in $K_0^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ for any κ. The quotient $R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r$ can be identified by r-dimensional irreducible representations $\rho : \mathbb{Z}_n \star \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}\, V$ whose eigenvalues are κ up to isomorphism.

Fix a κ. Call $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ the different eigenvalues of A and $a_1, \dots, a_p$ its multiplicities. Let $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_l$ the orbits of Γ_κ in $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p\}$. Note that any ϵ_i has stabilizer $\mu_m \subset \mu_{nm}$. Denote m_i for a_j for some $\epsilon_j \in \mathcal{O}_i$. Note that any $A \in R_\kappa^{irr}$ is diagonalizable as it has finite order. Then, there is an Γ_κ-equivariant algebraic map

$$R_\kappa^{irr} \to \prod_{i=1}^{l}\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Gr}(a_i, r)) = \mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathrm{Gr}(a_i, r)\right)$$

given by looking at the eigenspaces of A, where μ_m acts trivially on $\mathrm{Gr}(a_i, r)$. Let $\mathcal{L}_i \to \mathrm{Gr}(a_i, r)$ be the bundle of basis of each subspace. They are equivariantly locally trivial fiber bundles with fiber GL_{a_i}. Therefore, if $\mathcal{L}$ is the pullback by the previous map of $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathcal{L}_i\right)$, $\mathcal{L} \to R_\kappa^{irr}$ is equivariantly locally trivial with fiber $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathrm{GL}_{a_i}\right)$. An element of $\mathcal{L}$ is a couple $(A, B, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ where each $\mathcal{B}_i$ is a basis of the eigenspace of A with eigenvalue ϵ_i. Being A diagonalizable, this is the same that a matrix $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ such that MAM^{-1} is the diagonal matrix with the first a_1 entries ϵ_1, the next a_2 being ϵ_2, and so on. The action of μ_{nm} in M is given by translating by powers of a fixed permutation matrix. Quotient by $\mathbb{C}^\times \simeq Z(\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))$ with get a equivariantly locally trivial fibration $\overline{\mathcal{L}} \to R_\kappa^{irr}$.

We can repeat this with B to get $\overline{\mathcal{L}}' \to R_\kappa^{irr}$ such that

$$[\overline{\mathcal{L}}'] = [R_\kappa^{irr}] \cdot \mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathrm{GL}_{a_i}\right) \cdot \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathrm{GL}_{b_j}\right)$$

The points of $\overline{\mathcal{L}}'$ are tuples $(A, B, M, N) \in R_\kappa^{irr} \times \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})^2$ such that MAM^{-1} and NBN^{-1} have specific diagonal forms Σ_1 and Σ_2. This is μ_{nm}-equivariantly isomorphic to the variety X of tuples $(M, N) \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})^2$ such that $(M^{-1}\Sigma_1 M, N^{-1}\Sigma_2 N)$ gives an irreducible representation. The μ_{nm}-action is given by left translation by certain permutation matrices σ_1 and σ_2.

Now the PGL_r-action can be lifted to $\overline{\mathcal{L}}'$ by $g\cdot(A, B, M, N) = (gAg^{-1}, gBg^{-1}, Mg^{-1}, Ng^{-1})$. Now, let

$$Y := \{M \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C}) : (M^{-1}\Sigma_1 M, \Sigma_2) \text{ is irreducible}\}$$

with action given by $M \mapsto \sigma_1 M \sigma_2^{-1}$. Then $\overline{\mathcal{L}}'$ is $\mu_{nm} \times \mathrm{PGL}_r$-isomorphic to $Y \times \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ via $(M, N) \mapsto (MN^{-1}, N)$. Hence $[\overline{\mathcal{L}}'] = [\overline{\mathcal{L}}'/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] \cdot [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ in $K_0^{\mu_{nm}}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$. Therefore, it suffices to show that

$$[\overline{\mathcal{L}}'/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] = [R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] \cdot \mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathrm{GL}_{a_i}\right) \cdot \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{j=1}^{k}\mathrm{GL}_{b_j}\right)$$

in $K_0^{\mu_{nm}}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$.

Let Z_1 and Z_2 the subvarieties of $\prod_{i=1}^l \mathrm{Gr}(a_i, r)$ and $\prod_{j=1}^k \mathrm{Gr}(a_j, r)$ of subspaces that are in direct sum. Note that the PGL_r-action is free on the image of $R_r^{irr} \to (\prod_{i=1}^l \mathrm{Gr}(a_i, r)) \times (\prod_{j=1}^k \mathrm{Gr}(a_j, r))$. Indeed, if $g \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ preserves every eigenspaces of A and B, then it commutes with both of them. Being the associated representation irreducible, g must be trivial. Therefore, $\overline{\mathcal{L}}' / \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ is the pullback of

$$\left(\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathcal{L}_i\right) \times \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=j}^{l} \mathcal{L}_j\right)\right) / \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C}) \to (\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1) \times \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2)) / \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$$

Now PGL_r acts transitively on both $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1)$ and $\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2)$. Moreover, we have $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1) = \prod \mathrm{GL}_{a_i} \setminus \mathrm{GL}_r$ and $\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2) = \prod \mathrm{GL}_{b_j} \setminus \mathrm{GL}_r$. On the other hand, $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^l \mathcal{L}_i\right) = \mathrm{PGL}_r = \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=j}^l \mathcal{L}_j\right)$. Hence, it is enough to show that $\mathrm{GL}_r \to \prod \mathrm{GL}_{b_j} \setminus \mathrm{GL}_r / \prod \mathrm{GL}_{a_i}$ is equivariantly locally trivial around any point coming from R_r^{irr}. The action of μ_{nm} is given by $g \mapsto \sigma_1 g \sigma_2$ for certain permutation matrices σ_1 and σ_2 of coprime order. ....

If we forget about the μ_{nm}-action, the result follows by the Luna's slice theorem and the fact that GL is an special group, meaning that any étale locally trivial GL-bundle is in fact Zariski locally trivial. □

6.2. La fibración principal

En esta sección trabajaremos con $R(\tau)$ para una configuración de autovalores κ y un tipo $\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*$. La herramienta principal en [GM22] es una fibración localmente trivial, ver la sección 4 de loc. cit.. Chequearemos que la misma es equivariantemente localmente trivial. Pero con una definición ligeramente distinta. Fijemos tales κ y τ. Denotemos con x e y a generadores de $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Z}_m$ respectivamente. Siguiendo la notación de la sección anterior, sea $\kappa_{i,j}$, $(\sigma_{i,j}(x), \sigma_{i,j}(y))$, los autovalores de x e y en la pieza isotópica $W_{i,j}$.

El hecho que Γ_τ fije $R(\tau)$ implica que cada $\gamma \in \Gamma$ manda $\kappa_{i,j}$ a $\kappa_{i,j'}$ para algún j' con $m_{i,j} = m_{i,j'}$. Hay más de un j' posible. Por lo tanto, cambiaremos la descripción de tipo para agrupar todas las tuplas $(i, \dim W_{i,j}, m_{i,j}, \kappa_{i,j})$ en $(i, d_{i,j}, m_{i,j}, \kappa_{i,j}, M_{i,j})$ donde $M_{i,j}$ es el número de tuplas $(i, d_{i,j}, m_{i,j}, \kappa_{i,j})$. De esta forma tenemos una acción inducida de Γ_τ en los índices (i, j). Todos los resultados de la sección anterior siguen funcionando con esta definición.

Hay un morfismo algebraico

$$\mathrm{Gr}_\bullet : R(\tau) \to \mathcal{M}(\tau) \subset \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} \mathrm{Sym}^{M_{i,j}}((\mathcal{M}_{\kappa_{i,j}}^{irr})^{m_{i,j}})$$

que manda a un par de matrices $(A, B) \in R(\tau)$ a las componentes isotópicas de la representación asociada. Acá $\mathcal{M}_{\kappa_{i,j}}^{irr}$ es el espacios de moduli (grueso) de las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ con autovalores $\kappa_{i,j}$. Explícitamente, es el cociente de $R_{\kappa_{i,j}}^{irr}$ por $\mathrm{PGL}_{\dim W_{i,j}}(\mathbb{C})$. La variedad $M(\tau)$ consiste de aquellas tuplas que respetan las condiciones de que sus coordenadas sean isomorfas o no impuestas por τ. Notemos que $\mathrm{Gr}_\bullet$ es equivariante si Γ_τ actúa en los índices como antes. Nos gustaría mejorar este morfismo a uno a

$$\mathcal{I}(\tau) \subset \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} \mathrm{Sym}^{M_{i,j}}((R_{\kappa_{i,j}}^{irr})^{m_{i,j}}).$$

Lo haremos salvo fibrados vectoriales para las versiones no simétricas:

$$\hat{\mathcal{M}}(\tau) \subset \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{r_i} (\mathcal{M}_{\kappa_{i,j}}^{irr})^{M_{i,j} m_{i,j}},$$

$$\hat{\mathcal{I}}(\tau) \subset \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{r_i}(R^{irr}_{\kappa_{i,j}})^{M_{i,j}m_{i,j}}$$

y

$$\hat{R}(\tau) = R(\tau) \times_{\mathcal{M}(\tau)} \hat{\mathcal{M}}(\tau).$$

Observamos que bajo la siguiente hipótesis

$$\text{(H)}\ \textit{Para cada } M_{i,j} > 1,\ \dim W_{i,j} = 1.$$

las versiones no simétricas coinciden con las simétricas porque $\hat{\mathcal{I}}(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$, ver el Corolario 4.7 de [GM22]. Esta hipótesis vale para $r \leq 4$ salvo que $r = 4$, $s = 1$, $m_{1,1} = 1$, $M_{1,1} = 2$ y $d_{1,1} = 2$. Pero, en este último caso no hay representaciones irreducibles, ver [GM22, Proposición 8.1]. Por otro lado, la hipótesis también quita las condiciones de no ser isomorfos impuestas por τ. En efecto, para cada $d_{i,j} = 1$ hay exactamente un punto en $R_{\kappa_{i,j}}$ y, por lo tanto, $I(\tau) = \emptyset$ si algún $M_{i,j} > 1$. Ahora bien, la condición de ser isomorfas es inmediata para $d_{i,j} = 1$. Por lo tanto, e único caso con $r \leq 4$ donde es relevante es $r = 4$, $s = 1$, $m_{1,1} = 2$, $d_{1,1} = 2$. Pero, al igual que antes, no hay representaciones irreducibles en este caso. En conclusión, para $r \leq 4$, $M(\tau)$ y $I(\tau)$ son o bien vacíos o coinciden con sus versiones no simétricas.

Recomendamos al lector revisar la notación que apareció hasta ahora. En particular, recordamos que la i-ésima pieza de la filtración semisimple la denotamos V_i. A su dimensión la llamamos d_i.

Lema 6.2.1. *Para cualquier configuración de autovalores κ y tipo $\tau \in \mathcal{T}^*_\kappa$, hay un fibrado vectorial equivariante $\tilde{R}(\tau) \to \hat{R}(\tau)$ con fibra*

$$F_0(\tau) := \prod_{i=1}^{s}\left(\mathbb{C}^{(d_i-d_{i-1})(r-d_i)} \times \mathrm{GL}_{r-d_i}(\mathbb{C}) \times \prod_{j=1}^{r_i} \mathrm{GL}_{d_{i,j}}(\mathbb{C})^{m_{i,j}M_{i,j}} \times (\mathrm{GL}_{m_{i,j}}(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^{m_{i,j}})^{M_{i,j}}\right)$$

y un levantado equivariante $\tilde{\mathrm{Gr}}_\bullet : \tilde{R}(\tau) \to \hat{\mathcal{I}}(\tau)$ de $\hat{\mathrm{Gr}}_\bullet : \hat{R}(\tau) \to \hat{\mathcal{M}}(\tau)$. Además,

$$[\tilde{R}(\tau)] = [\hat{R}(\tau)][F_0(\tau)]$$

en $K_0^{\Gamma_\tau}(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$ donde la acción de Γ_τ en la fibra es la de permutación de factores; γ mueve el (i,j)-ésimo factor al $\gamma \cdot (i,j)$-ésimo.

Demostración. Para cualesquiera dos enteros $r' < r$ hay una variedad $\mathcal{N}_{r',r}$ cuyos puntos parametrizan pares (ρ, W) donde $\rho \in R_r$ y $W \subset \mathbb{C}^r$ es un subespacio invariante de dimensión r'. Por ejemplo, tomemos el carcaj Q con un punto y dos lazos. Su variedad de representaciones paramentriza las representaciones de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Adentro de ella R_r vive como un cerrado. Por lo tanto, podemos construir $\mathcal{N}_{r',r}$ como una subvariedad cerrada de la familia universal de la grasmanianna asociada a Q (ver [Sch92]). Notemos que hay un morfismo $\mathcal{N}_{r',r} \to \mathrm{Gr}(r', r)$ dado que todos los elementos de R_r son representaciones en $\mathbb{C}^r$. Similarmente, para cualesquiera dos tipos τ_1 y τ_2 hay un espacio de parámetros $\mathcal{N}_{\tau_1,\tau_2}$ de las tuplas (W, V) con $V \in R_{\tau_2}$ y $W \subset V$ un subespacio invariante de tipo τ_1. Hay un morfismo desde $\mathcal{N}_{\tau_1,\tau_2}$ a una grasmanianna.

Sea τ_1 un tipo irreducible y $\tau_2 = m\tau_1$. En este caso, la fibra de $\mathcal{N}_{\tau_1,\tau_2} \to R_{\tau_2}$ sobre $V \simeq W^m \in R_{\tau_2}$ es $\{f : W \to V \text{ no cero}\}/\mathbb{C}^\times = \P^{m-1}$. Pasando al cono afín, obtenemos $\overline{\mathcal{N}}_{\tau_1,\tau_2} \to R_{\tau_2}$ cuya fibra es $\mathbb{C}^m$. Tiene asociado un fibrado GL_m-principal sobre R_{τ_2} que parametriza las bases de $\mathrm{Hom}(W, V)$. Cocientando por $(\mathbb{C}^\times)^m$ obtenemos un fibrado localmente trivial parametrizando formas de descomponer V como suma directa de subrepresentaciones simples. El mismo esta equipado con un morfismo a $\mathcal{N}^m_{\tau_1,\tau_2}$.

Probamos el lema por inducción en s, la longitud de la filtración semisimple. Tratamos el caso base y el paso inductivo al mismo tiempo. Sea τ' el tipo de V/V_1.

Hay un morfismo equivariante $R(\tau) \to \prod_{j=1}^{r_1} \mathrm{Sym}^{M_{1,j}}(\mathcal{N}_{(m_{1,j}\kappa_{1,j}),\tau}) \times \mathcal{N}_{d,\tau}$ dado por mirar V_1 y todas sus subrepresentaciones isotópicas $(W_{1,j}^{m_{1,j}})$. Gracias a los $\mathrm{GL}_m/(\mathbb{C}^\times)^m$-fibrados principales que describimos antes, conseguimos un $\prod_{j=1}^{r_1}(\mathrm{GL}_{m_{1,j}}(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^{m_{1,j}})^{M_{1,j}}$-fibrado $R_0(\tau) \to \hat{R}(\tau)$ con un morfismo

$$\hat{R}(\tau) \to \prod_{j=1}^{r_1}(\mathrm{Gr}(d_{1,j}, r))^{M_{1,j}m_{1,j}} \times \mathrm{Gr}(d_1, r)$$

Es equivariante si Γ_τ actúa via permutar los factores.

Sobre cada grasmanianna $\mathrm{Gr}(d_{1,j}, r)$ tenemos el $\mathrm{GL}_{d_{1,j}}(\mathbb{C})$-fibrado de $d_{1,j}$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{C}^r$ que generan el subespacio asociado. Sobre $\mathrm{Gr}(d_1, r)$ tenemos el $\mathbb{C}^{d_1(r-d_1)} \times \mathrm{GL}_{r-d_1}(\mathbb{C})$-fibrado cuya fibra sobre cualquier punto consiste de los subconjuntos B de $\mathbb{C}^r$ de $r - d_1$ vectores cuyas clases forman una base de $\mathbb{C}^r$ módulo el subespacio asociado al punto en cuestión.

Luego, pullbackeando estos fibrados a $R_0(\tau)$ obtenemos un $\prod \mathrm{GL}_{d_{1,j}}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{d_1(r-d_1)} \times \mathrm{GL}_{r-d_1}(\mathbb{C})$-fibrado $R_1(\tau) \to \hat{R}(\tau)$ cuyos puntos son elementos de $\hat{R}(\tau)$ junto con bases $(B_1, \dots, B_{r_1})$ de $W_{1,j}$ y un subconjunto $B \subset \mathbb{C}^r$ cuyos elementos forman una base de $\mathbb{C}^r/V_1$. Notemos que podemos obtener una base de $\mathbb{C}^r$ uniendo todos los B_j y B. En esta base, el par de matrices (A, B) es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & A_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_{r_1 r_1} & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

donde $A_{ii} \in R^{irr}_{d_{i,j}}$ y $A \in R(\tau')$. Por lo tanto, tenemos un morfismo

$$\hat{R}_1(\tau) \to \prod_{j=1}^{r_i} R^{irr}_{\kappa_{i,j}} \times \hat{R}(\tau')$$

que levanta parcialmente $\hat{R}(\tau) \to \hat{\mathcal{M}}(\tau)$ y la existencia de la fibración y del levantado se sigue. La última afirmación del enunciado es cierta gracias al Lema 5.3.6. □

Lema 6.2.2. *Hay una descomposición equivariante $\tilde{R}(\tau) \to \overline{R}(\tau) \times F_1(\tau)$ donde*

$$F_1(\tau) = \prod_{i=1}^{s} \mathrm{GL}_{r-d_i}(\mathbb{C})$$

para la cuál $\tilde{\mathrm{Gr}}_\bullet$ se factoriza como $\overline{\mathrm{Gr}}_\bullet : \overline{R} \to \hat{\mathcal{I}}(\tau)$.

Demostración. Lo probamos por inducción en s. Para $s = 1$ no hay nada que probar. Asumamos que $s \geq 2$. Sobre un punto $(A, B) \in \hat{R}(\tau)$, la fibra consiste de conjuntos $B_{i,j}, B_i \subset \mathbb{C}^r/V_{i-1}$ tales que $B_{i,j}$ es una base de $W_{i,j}$ y la imagen de B_i en $\mathbb{C}^r/V_i$ es una base. Usando los B_i podemos levantas $B_{i+1,j}$ a vectores de $\mathbb{C}^r/V_{i-1}$. Por lo tanto, podemos obtener una base B donde el par de matrices (A, B) es de la forma, para $s = 2$,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & \ddots & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & A_{r_1 r_1} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & A_{r_1+1, r_1+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{r_2 r_2} \end{pmatrix}$$

donde $A_{ij} \in R^{irr}_{\kappa_{i,j}}$. Notemos que $\tilde{\mathrm{Gr}}_\bullet$ se factoriza por $(B_{i,j}, B_i) \mapsto B$.

Por otro lado, B y los B_i's determinan todos los $B_{i,j}$. Además, B_1 esta determinado por B módulo $\mathrm{GL}_{r-d_1}(\mathbb{C})$. Inductivamente, B_i esta determinado por B módulo $\prod_{j=1}^{i} \mathrm{GL}_{r-d_j}(\mathbb{C})$. $\square$

Renombremos las componentes isotópicas $W_{i,j}$ como U_α de tal forma que

$$\mathrm{Gr}_\bullet(V) = U_{\nu_{i-1}+1} \bigoplus U_{\nu_{i+1}} \bigoplus \cdots \bigoplus U_{\nu_i}$$

para una sucesión creciente $0 = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_i < \nu_{i+1} < \ldots$. Si nos olvidamos de la acción, U_α es un espacio vectorial de cierta dimensión d_α. Notemos que $\sum d_\alpha = r$.

Lema 6.2.3. *Hay un fibrado equivarinate $\overline{R}(\tau) \to \overline{R}'(\tau)$ y una factorización $\overline{\mathrm{Gr}}'_\bullet : \overline{R}'(\tau) \to \hat{\mathcal{I}}(\tau)$ de $\overline{\mathrm{Gr}}_\bullet$ a través de $\overline{R}'(\tau)$. El fibrado tiene rango $\sum(d_i - d_{i-1})(r - d_i) - \mathcal{D}$ donde*

$$\mathcal{D} := \sum a_\alpha(\xi) a_\beta(\xi)$$

donde a su vez α y β son índices con β de grado mayor con respecto a la filtración semisimple, ξ es una raíz de la unidad, y $a_\alpha(\xi)$ es la multiplicidad de ξ como autovalor de κ_α.

Demostración. Definamos $\overline{R}'(\tau)$ como el conjunto de aquellas tuplas $(\rho, \mathcal{B})$ tales que la matriz A en la base $\mathcal{B}$ tiene ceros en las piezas triangulares superiores $\mathrm{Hom}(U_\beta, U_\alpha)$.

Para un A dado, sea Q_A una matriz tal que $Q_A A Q_A^{-1}$ es diagonal y sea $U_A \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ el subgrupo unipotente asociado con $Q_A A Q_A^{-1}$ con base E_{ij} donde $i < j$ y $\epsilon_i \neq \epsilon_j$. Notemos que $U_A \simeq \mathbb{A}^{\sum(d_i - d_{i-1})(-d_i) - \mathcal{D}}$. Localmente, tenemos un morfismo $\overline{R}'(\tau) \times \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \to \overline{R}(\tau)$, $(\rho, \mathcal{B}, p) \mapsto (Q_A^{-1} p Q_A \rho Q_A^{-1} p^{-1} Q_A, \mathcal{B})$. El mismo es compatible con $\overline{\mathrm{Gr}}_\bullet$ y con la acción dada dado que U_A es invariante. Más aún, la acción es lineal en U_A. Para finalizar necesitamos probar que es un isomorfismo. Sobreyectividad es [GM22, Lema 4.3]. Inyectividad es clara dado que U_A no interseca al centralizador de $Q_A A Q_A^{-1}$. $\square$

Teorema 6.2.1 ([GM22])**.** *Para cualquier configuración de autovalores κ y $\tau \in \mathcal{T}^*_\kappa$, el morfismo $\overline{\mathrm{Gr}}'_\bullet$ es una fibración localmente trivial en la topología Zariski.*

También describen la fibra. Escribamos $\rho = (\rho_\alpha) \in \hat{\mathcal{I}}(\tau)$ con ρ_α una representación irreducible representación en U_α. Tenemos un morfismo inyectivo bien definido $\hat{\mathcal{I}}(\tau) \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})^2$, $\rho \mapsto (A, B)$ vía construir las matrices diagonales en bloque con entradas $\rho_\alpha(x)$ y $\rho_\alpha(y)$. Sea $\hat{\mathcal{I}}_0(\tau)$ la variedad de pares (A, B) tales que B es diagonal e igual a una matriz fija con autovalores $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Consideremos

$$\mathcal{M}_0 := \bigoplus_{\alpha \leq \nu_i < \beta} \mathrm{Hom}(U_\beta, U_\alpha)$$

y para $M \in \mathcal{M}_0$ y $\rho \in \hat{\mathcal{I}}_0(\tau)$ el par de matrices ρ_M dado por

$$\rho_M(x)\big|_{U_\beta} = \rho_\beta(x) \qquad \text{y} \qquad \rho_M(y)\big|_{U_\beta} = \rho_\beta(y) + \sum_{\alpha < \beta} M_{\alpha\beta}$$

Definamos

$$\mathcal{M}_\rho := \{M \in \mathcal{M}_0 : \rho_M \in \hat{R}(\tau)\}$$

Hay una descripción más explícita, ver [GM22, teorema 4.4]. Fijemos $\rho = (A_\alpha, B_\alpha) \in \hat{\mathcal{I}}_0(\tau)$ y una matriz Q tal que QAQ^{-1} es diagonal. Para cada $\alpha \leq \nu_i < \beta$, sea

$$\ell_{\alpha\beta} = \langle Q_\alpha \Theta Q_\beta^{-1} B_\beta - B_\alpha Q_\alpha \Theta Q_\beta^{-1} \rangle$$

donde $\Theta \in \mathrm{Hom}(U_\beta, U_\alpha)$ recorre todas las matrices con $\Theta_{ij} = 0$ siempre que $\epsilon_{\alpha,i} \neq \epsilon_{\beta,i}$. Para $\nu_i < \beta \leq \nu_{i+1}$, sea

$$L_\beta = \bigoplus \ell_{\alpha\beta}$$

donde $\nu_{i-1} < \alpha \leq \nu_i$. Definamos también

$$p_\beta(M) = (M_{\alpha\beta})_{\nu_{i-1}<\alpha\leq\nu_i} \in \bigoplus \mathrm{Hom}(U_\beta, U_\alpha)$$

para $M \in \mathcal{M}_0$. Las condiciones que definen $\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{M}_0$ son que para cualesquiera $\nu_i < \beta_1, \ldots, \beta_k \leq \nu_{i+1}$ componentes isomorfas, ninguna combinación lineal no trivial de $p_{\beta_1}(M), \ldots, p_{\beta_k}(M)$ cae en L_{β_j} (esto es independiente de j).

La Proposición 4.5 de [GM22] afirma que $\mathcal{M}_\rho$ es una variedad algebraica independiente de ρ y que $\overline{\mathrm{Gr}}'_\bullet$ es una fibración localmente trivial con fibra $\mathcal{M}_\rho \times \mathrm{GL}_r$. Notemos que $\tilde{R}(\tau) \to \hat{R}(\tau)$ absorbió tanto el cociente por PGL como por el grupo gauge que aparece en [GM22]. Esto es gracias a que GL_r actúa libremente y transtivamente en las bases de $\mathbb{C}^r$. Escribamos $\mathcal{M}_\tau$ para $\mathcal{M}_\rho$ para algún $\rho \in \hat{\mathcal{I}}_0(\tau)$.

Lema 6.2.4. *Para cualquier configuración de autovalores κ y $\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*$, el morfismo $\overline{\mathrm{Gr}}'_\bullet$ es una fibración equivariantemente trivial en la topología Zariski si equipamos a $\mathcal{M}_\tau$ con la acción por permutación de factores.*

Demostración. Por la descripición explícita que dimos recién es claro que la acción por permutación de factores en $\mathcal{M}_0$ preserva M_τ y, en consecuencia, define una acción ahí. Las trivializaciones de [GM22] están basada en el hecho de que cualquier matriz semisimple $A \in \mathrm{GL}_k$ tiene un entorno Zariski U de las matrices semisimples y un morfismo $Q : U \to \mathrm{GL}_k$ tal que $Q(B)BQ(B)^{-1}$ es diagonal para toda $B \in U$. Al fijas los autovalores, lo anterior se puede construir eligiendo un orden de todos los autovalores ϵ_i y triangulando los sistemas lineales $B - \lambda_i \,\mathrm{Id} = 0$. Ahora bien, la acción de Γ_τ solo permuta los autovalores. Por lo tanto, Γ_τ preserva la construcción anterior solamente permutando las entradas de Q. $\square$

Corolario 6.2.1. *Para cualquier configuración de autovalores κ y $\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*$ que cumplen la hipótesis (H),*

$$[R(\tau)][F_0(\tau)] = [\mathbb{A}^{\sum(d_i-d_{i-1})(r-d_i)-\mathcal{D}}][F_1(\tau)][\mathcal{M}_\tau][\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})][\mathcal{I}(\tau)]$$

en $K_0^{\Gamma_\tau}(\mathrm{Var}_\mathbb{C})$.

Demostración. Esto se sigue de los resultados anteriores dado que $\hat{\mathcal{I}}(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$ bajo (H). $\square$

Probamos que $[R_\kappa]$, $[F_0(\tau)]$ $[F_1(\tau)]$, $[\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})]$ y $[\mathcal{M}_\tau]$ caen en A_{Γ_τ} en el Lema 5.2.1, el Corolario 5.3.2 y el Lema 5.4.1. Por lo tanto, siempre que la condición (H) valga, obtenemos inductivamente que $[R_\kappa^{irr}]$ es casi-buena. Observamos que por los ejemplos 5.4.1 y 5.4.3 sabemos que solo necesitamos localizar en $q, q-1, q^2-1, q^3-1, q^4-1$ para calcular $[R_\kappa^{irr}/\Gamma_\kappa]$. Notemos que el caso de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^2)^2$ en el siguiente resultado se corresponde a $r = 4$,$s = 1$, $r_1 = 2$, $m_{1,j} = 2$ y $d_{1,j} = 1$, que se puede descartar gracias a [GM22, Proposición 8.1].

Corolario 6.2.2. *Para $r \leq 4$ y cualquier κ, $[R_\kappa^{irr}]$ es casi-buena para el conjunto multiplicativo de $K_0(\mathrm{Var}_\mathbb{C}) \otimes R_\mathbb{Q}(\Gamma_\kappa) \otimes \mathbb{Q}$ generado por $\mathbb{Q}$ y las inducciones de acciones por permutación de factores en $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})^m$ y $(\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^d)^m$ para $0 \leq dm \leq r$.*

Luego de la localización, podemos cancelar $F_1(\tau)$ con parte de $F_0(\tau)$ para obtener

$$[R(\tau)][F_0'(\tau)]q^{\mathcal{D}} = [\mathcal{M}_\tau][\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})][\mathcal{I}(\tau)]$$

donde

$$F_0'(\tau) = \prod_{i=1}^{s}\left(\prod_{j=1}^{r_i} \mathrm{GL}_{d_{i,j}}(\mathbb{C})^{m_{i,j}M_{i,j}} \times (\mathrm{GL}_{m_{i,j}}(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^{m_{i,j}})^{M_{i,j}}\right).$$

6.3. Variedades de caracteres versus de representaciones

En esta sección, probaremos la conjetura 6.1.1 para $r \leq 3$. Primero, haremos una reducción que vale para r arbitrario. La misma sigue una estrategia similar a [Gon24, Proposición 7.3]. Notemos que la fórmula para $[\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ es conocida y que no hay nada para probar para $r = 1$.

Primer hacemos un pullback a R_r^{irr}. Por el lema 6.1.2, es suficiente con probar que $[R_r^{irr}] = [M_r^{irr}] \cdot [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ en $K_0^{\mu_{nm}}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$, donde μ_{nm} actúa trivialmente en $\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$, dado que las clases de $\mathbb{C}^\times$ y $\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ caen en $A_{\mu_{nm}}$, $[\mathbb{C}^\times]^{\mu_{nm}} = [\mathbb{C}^\times] \otimes \mathbb{Q}^1$, y $[\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]^{\mu_{nm}} = [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] \otimes \mathbb{Q}^1$. Para este fin, utilizaremos la estratificación por autovalores. Alcanza con mostrar que $[R_\kappa^{irr}] = [R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r][\mathrm{PGL}_r]$ en $K_0^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ para cualquier κ. O aún menos, que $[R_\kappa^{irr}]^{\Gamma_\kappa} = [R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r]^{\Gamma_\kappa}[\mathrm{PGL}_r]^{\Gamma_\kappa}$. Los puntos de $R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r$ se indentifican con representaciones r-dimensionales e irreducibles v$\rho : \mathbb{Z}_n \star \mathbb{Z}_m \to \mathrm{GL}\, V$ cuyos autovalores son κ, salvo isomorfismo.

Fijemos un κ. Llamemos $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ a los diferentes autovalores de A y $a_1, \dots, a_p$ a sus respectivas multiplicidades. Sean $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_l$ las órbitas de Γ_κ en $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p\}$. Notemos que cualquier ϵ_i tiene estabilizador $\mu_m \subset \mu_{nm}$. Denotemos m_i para a_j para algún $\epsilon_j \in \mathcal{O}_i$. Notar también que $A \in R_\kappa^{irr}$ es diagonalizable dado que tiene orden finito. Por lo tanto, hay un morfismo algebraico Γ_κ-equivariante

$$R_\kappa^{irr} \to \prod_{i=1}^{l} \mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Gr}(a_i, r)) = \mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{Gr}(a_i, r)\right)$$

dado por mirar los autoespacios de A, donde μ_m actúa trivialmente en $\mathrm{Gr}(a_i, r)$. Sean $\mathcal{L}_i \to \mathrm{Gr}(a_i, r)$ los fibrados de bases de cada subespacio. Son equivariantemente localmente triviales con fibra GL_{a_i}. Por lo tanto, si $\mathcal{L}$ es el pullback por el morfismo anterior de $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathcal{L}_i\right)$, $\mathcal{L} \to R_\kappa^{irr}$ es equivariantemente localmente trivial con fibra $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{GL}_{a_i}\right)$. Un elemento de $\mathcal{L}$ es una tupla $(A, B, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$ donde cada $\mathcal{B}_i$ es una base del autoespacio de A con autovalor ϵ_i. Siendo A diagonalizable, esto es lo mismo que una matriz $M \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ tal que MAM^{-1} es diagonal con las primeras a_1 entradas ϵ_1, las a_2 siguientes ϵ_2, y así siguiendo. La acción de μ_{nm} en M esta dada por trasladar por potencias de una matriz de permutación fija. Cocientando por $\mathbb{C}^\times \simeq Z(\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}))$, obtenemos una fibración equivariantemente localmente trivial $\overline{\mathcal{L}} \to R_\kappa^{irr}$.

Podemos repetir este argumento con B para obtener $\overline{\mathcal{L}}' \to R_\kappa^{irr}$ tal que

$$[\overline{\mathcal{L}}'] = [R_\kappa^{irr}] \cdot \left(\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{GL}_{a_i}\right)/\mathbb{C}^\times\right) \cdot \left(\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{GL}_{b_j}\right)/\mathbb{C}^\times\right)$$

Los puntos de $\overline{\mathcal{L}}'$ son tuplas $(A, B, M, N) \in R_\kappa^{irr} \times \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})^2$ tales que MAM^{-1} y NBN^{-1} son iguales a ciertas matrices diagonales fijas Σ_1 y Σ_2. Esto es Γ_κ-equivariantemente isomorfo a la variedad X de tuplas $(M, N) \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})^2$ tales que $(M^{-1}\Sigma_1 M, N^{-1}\Sigma_2 N)$ da una representación irreducible. La acción de Γ_κ esta dada por trasladar por ciertas matrices de permutación σ_1 y σ_2.

La acción de PGL_rse puede levantar a $\overline{\mathcal{L}}'$ como $g\cdot(A, B, M, N) = (gAg^{-1}, gBg^{-1}, Mg^{-1}, Ng^{-1})$. Ahora bien, si

$$Y := \{M \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C}) : (M^{-1}\Sigma_1 M, \Sigma_2) \text{ es irreducible}\}$$

con acción $M \mapsto \sigma_1 M \sigma_2^{-1}$, entonces $\overline{\mathcal{L}}'$ es $\Gamma_\kappa \times \mathrm{PGL}_r$-isomorfo a $Y \times \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ vía $(M, N) \mapsto (MN^{-1}, N)$. Por lo tanto, $[\overline{\mathcal{L}}'] = [\overline{\mathcal{L}}'/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})] \cdot [\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]$ in $K_0^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$. Luego, basta con probar que

$$[\overline{\mathcal{L}}'/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]^{\Gamma_\kappa} = [R_\kappa^{irr}/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})]^{\Gamma_\kappa} \left[\left(\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l} \mathrm{GL}_{a_i}\right)/\mathbb{C}^\times\right)\right]^{\Gamma_\kappa} \left[\left(\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{j=1}^{k} \mathrm{GL}_{b_j}\right)/\mathbb{C}^\times\right)\right]^{\Gamma_\kappa}$$

en $K_0^{\Gamma_\kappa}(\mathrm{Var}/\mathbb{C})$ siempre que las clases de $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^l \mathrm{GL}_{a_i}\right)/\mathbb{C}^\times$ y $\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{j=1}^k \mathrm{GL}_{b_j}\right)/\mathbb{C}^\times$ sean casi buenas.

Sean Z_1 y Z_2 las subvariedades de $\prod_{i=1}^l \mathrm{Gr}(a_i, r)$ y $\prod_{j=1}^k \mathrm{Gr}(a_j, r)$ de subespacios en suma directa. Notemos que la acción de PGL_r es libre en la imagen de $R_r^{irr} \to (\prod_{i=1}^l \mathrm{Gr}(a_i, r)) \times (\prod_{j=1}^k \mathrm{Gr}(a_j, r))$. En efecto, si $g \in \mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ preserva todos los autoespacios de A y B, conmuta con ambas. Pero com ola representación asociada es irreducible, g debe ser trivial. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{L}}'/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$ es el pullback de

$$\left(\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^{l}\mathcal{L}_i\right) \times \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=j}^{l}\mathcal{L}_j\right)\right)/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C}) \to (\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1) \times \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2))/\mathrm{PGL}_r(\mathbb{C})$$

Ahora bien, PGL_r actúa transitivamente tanto en $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1)$ como en $\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2)$. Más aún, $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}(Z_1) = ((\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times)\backslash \mathrm{PGL}_r$ y $\mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}(Z_2) = ((\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times)\backslash \mathrm{PGL}_r$. Luego, la base es isomorfa a $((\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times)\backslash \mathrm{PGL}_r/((\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times)$. Por otro lado, los espacio totales son $\mathrm{Per}_{\mu_m}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=1}^l \mathcal{L}_i\right) = \mathrm{PGL}_r = \mathrm{Per}_{\mu_n}^{\Gamma_\kappa}\left(\prod_{i=j}^l \mathcal{L}_j\right)$. Luego, para finalizar la demostración, probaremos a mano que existe una estratificación equivariante de un entorno de la imagen de R_κ^{irr} tal que $\mathrm{PGL}_r \to ((\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times)\backslash \mathrm{PGL}_r/((\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times)$ es equivariantemente localmente trivial sobre cada estrato con fibra en A_{Γ_κ} y con descomposición isotópica $[(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times]^{\Gamma_\kappa}[(\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times]^{\Gamma_\kappa}$. Notemos que la acción de Γ_κ esta dada por $g \mapsto \sigma_1 g \sigma_2$ para ciertas matrices de permutación σ_1 y σ_2 de orden coprimo.

6.3.1. Rango dos

La única posibilidad es que $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 1$ y Γ_κ es o bien trivial o cíclico de orden dos, y, en el segundo caso, actuando vía permutación de o bien las dos columnas o bien las dos filas. Es suficiente con lidiar con Γ_κ no trivial actuando permutando las filas.

Notemos que $(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times = (\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{C}^\times$ como variedades. La acción de $\Gamma_\kappa$en la primera es $x \mapsto x^{-1}$ y trivial en la segunda. Para chequear que la primera es casi-buenas, tiremos el punto fijo 1 y consideremos el producto con $\mathbb{C}^\times$ y acción $y \mapsto -y$. Entonces, $(x, y) \mapsto \left(\frac{xy}{x-1}, \frac{y}{x-1}\right)$ y $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_1\lambda_2^{-1}, \lambda_1 - \lambda_2)$ son isomorfismos equivariantes inversos entre el producto anterior y $\{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^\times : \lambda_1 \neq \lambda_2\}$ con acción $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_2, \lambda_1)$. Esta última tiene clase en A_{Γ_κ}.

Sea $U \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ el subconjunto de aquellas matrices con todas sus entradas no nulas. La imagen de R_r^{irr} cae en U. El cociente $\mathrm{PGL}_2 \mapsto \mathbb{C}^\times\backslash \mathrm{PGL}_2/\mathbb{C}^\times$ resulta ser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{ad}{bc} \in \mathbb{C}^\times \setminus \{1\}.$$

La acción de $\Gamma_\kappa$en el cociente es $x \mapsto x^{-1}$.

Sobre $\mathbb{C}^\times \setminus \{\pm 1\}$ tenemos la sección equivariante

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1+x & 1 \\ 1+x^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, sobre este abierto tenemos la propiedad multiplicativa deseada.

Por otro lado, la fibra sobre -1 es

$$F_{-1} = \left\{\begin{pmatrix} -xy & x \\ y & 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{C}^\times\right\}$$

que es isomorfo a $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$ con acción $(x, y) \mapsto (x^{-1}, -y)$. Ahora bien, siendo la acción en el segundo factor lineal con descomposición isotópica trivial, tenemos que

$$[F_{-1}]^{\Gamma_\kappa} = [(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times]^{\Gamma_\kappa}[(\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times]^{\Gamma_\kappa}$$

como queríamos.

6.3.2. Rango tres

En este rango, hay tres posibilidades que cubren todas la necesarias. Todos los a_i y b_j iguales a uno y Γ_κ de orden seis, actuando permutando cíclicamente las filas y permutando las primeras dos columnas. O todos los b_j iguales a uno, $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, y o bien Γ_κ de orden tres, actuando permutando cíclicamente las filas, o bien de orden dos, actuando permutando las primeras dos filas.

Empecemos con $a_i = b_j = 1$ y Γ_κ de orden seis. En este caso, $(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times = (\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times \simeq (\mathbb{C}^\times)^2$ con acciones $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1})$ y $(\mu_1, \mu_2) \mapsto (\mu_2, \mu_1)$ respectivamente. Necesitamos chequear que la primera es casi-buena. Notemos que $1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ es un subespacio invarainte. En su complemento, luego de multiplicar por $\mathbb{C}^\times$ con la acción trivial, tenemos los isomorfismos inversos

$$(\lambda_1, \lambda_2, s) \mapsto \left(\frac{\lambda_1 s}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2 s}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}, \frac{s}{1 + \lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

y $(x, y, z) \mapsto (xz^{-1}, yz^{-1}, x + y + z)$ con $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^\times : x + y + z \neq 0\}$ dotado de la acción $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ cuya clase vive en A_{Γ_κ}. El subespacio invariante es isomorfo a $\mathbb{C}^\times \setminus \{-1\}$ con acción $\lambda \mapsto -\dfrac{1}{1+\lambda}$. Fijemos una raíz de la unidad ξ de orden tres y tiremos el punto fijo ξ. Consideremos las acciones lineales de Γ_κ dadas por $(x, y) \mapsto (y, -x - y)$ en $\mathbb{C}^2$ y $z \mapsto \xi z$ en $\mathbb{C}^\times$. Tenemos los isomorfismos equivariantes inversos

$$(\lambda, z) \in (\mathbb{C}^\times \setminus \{-1, \xi\}) \times \mathbb{C}^\times \mapsto \left(\frac{\lambda z}{\lambda - \xi}, \frac{z}{\lambda - \xi}\right) \in \{(x, y) \in (\mathbb{C}^\times)^2 : x \neq \xi y, -y\}$$

y $(x, y) \mapsto (xy^{-1}, x - \xi y)$. Ahora bien, el lado derecho es $\mathbb{C}^2$ con una acción lineal menos $\mathbb{C} \simeq \{x = \xi y\}$ con una acción lineal e $\mathrm{Ind}_{\{e\}}^{\Gamma_\kappa}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \simeq \{x = 0, y \neq 0\} \cup \{x + y = 0, x, y \neq 0\} \cup \{y = 0, x \neq 0\}$. Por lo tanto, su clase cae en A_{Γ_κ}. Esto muestra que $(\mathbb{C}^\times)^2$ con acción $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto (\lambda_2^{-1}, \lambda_1\lambda_2^{-1})$ es casi-buena.

Trabajaremos sobre el abierto $U \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ dado por aquellas matrices que no tienen dos ceros en la misma columna o fila. Si una matrices no satisface esto y es inducida por una representación (A, B), o bien A y B tienen un autovector en común o un subespacio invariante de dimensión dos, cualquiera de estas condiciones implica que la representación no es irreducible. Esto significa que la imagen de R_κ^{irr} cae en U. Estratificamos U por la anulación de las entradas. Sea V el estrato abierto de aquellas matrices con todas sus entradas no nulas.

Sobre V tenemos una descripción similar del cociente a la anterior. Es

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{ai}{gc} & \frac{bi}{hc} \\ \frac{di}{gf} & \frac{ei}{hf} \end{pmatrix}.$$

La Γ_κ-acción inducida es

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w^{-1} & z^{-1} \\ yw^{-1} & xz^{-1} \end{pmatrix}.$$

Tenemos una sección equivariante

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(1 + x^{-1} + z^{-1}) & y(1 + y^{-1} + w^{-1}) & 1 \\ z(1 + x^{-1} + z^{-1}) & w(1 + y^{-1} + w^{-1}) & 1 \\ 1 + x^{-1} + z^{-1} & 1 + y^{-1} + w^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

definida cuando $1+x^{-1}+z^{-1}$ y $1+y^{-1}+w^{-1}$ no se anulan.

Tenemos otra sección. Sea ξ una raíz primitiva de la unidad de orden tres. Consideremos

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & y(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & 1 \\ z(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & w(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & 1 \\ 1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1} & 1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es una sección no equivariante definida cuando $1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}$ y $1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}$ no se anulan. En efecto,

$$\begin{pmatrix} w^{-1} & z^{-1} \\ yw^{-1} & xz^{-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \xi(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & 1 \\ \xi y(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \xi x(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & 1 \\ \xi w(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \xi z(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & 1 \end{pmatrix}$$

Pero, si cambiamos la acción en (μ_1,μ_2) a $(\mu_1,\mu_2)\mapsto(\xi\mu_2,\xi\mu_1)$, entonces

$$\left((\lambda_1,\lambda_2), \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, (\mu_1,\mu_2)\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 x(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & \lambda_1\mu_2 y(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \lambda_1 \\ \lambda_2\mu_1 z(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & \lambda_2\mu_2 w(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \lambda_2 \\ \mu_1(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}) & \mu_2(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & 1 \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo equivariante. La fibra no tiene la acción correcta, pero tiene clase buena A_{Γ_κ} y el cambio que hicimos no modificó la descomposición isotópica. Por lo tanto, esta sección sirve para nuestro propósito. Notemos que podemos realizar la misma estrategia con ξ^2.

Notemos para cualquier par (x,z) al menos uno de $1+x^{-1}+z^{-1}$, $1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}$ y $1+\xi^2 x^{-1}+\xi z^{-1}$ no se anula, dado que suman 3. Estratificamos V de acuerdo a la anulación o no de cada una de las funciones $1+x^{-1}+z^{-1}$, $1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1}$, $1+\xi^2 x^{-1}+\xi z^{-1}$, $1+y^{-1}+w^{-1}$, $1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}$ y $1+\xi^2 y^{-1}+\xi w^{-1}$. Si alguno de los productos $(1+x^{-1}+z^{-1})(1+y^{-1}+w^{-1})$, $(1+\xi x^{-1}+\xi^2 z^{-1})(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1})$ y $(1+\xi^2 x^{-1}+\xi z^{-1})(1+\xi^2 y^{-1}+\xi w^{-1})$ no se anula, podemos usar alguna de las secciones anteriores. Esto vale para todos los estratos Γ_κ-invariantes. Sobre los no invariantes, solo debemos preocuparnos por la acción por permutación de filas y luego inducir. Por lo tanto, basta con combinar simplemente las secciones anteriores. Por ejemplo, si $1+x^{-1}+z^{-1}$ y $1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}$ no son cero, entonces

$$\left((\lambda_1,\lambda_2), \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, (\mu_1,\mu_2)\right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 x(1+x^{-1}+z^{-1}) & \lambda_1\mu_2 y(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \lambda_1 \\ \lambda_2\mu_1 z(1+x^{-1}+z^{-1}) & \lambda_2\mu_2 w(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & \lambda_2 \\ \mu_1(1+x^{-1}+z^{-1}) & \mu_2(1+\xi y^{-1}+\xi^2 w^{-1}) & 1 \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$-equivariante si (μ_1,μ_2) es dotado de la acción $(\mu_1,\mu_2)\mapsto(\xi\mu_1,\mu_2)$.

Debemos analizar el complemento de V. Cualquiera de sus estratos tiene estabilizador trivial. Por lo tanto, es suficiente con mostrar una sección sobre cada uno. Esto es directo y nos saltearemos el cálculo.

Analicemos $a_1=2$ y $a_2=1=b_1=b_2=b_3$ con Γ_κ de orden tres. En este caso, $(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times \simeq (\mathbb{C}^\times)^2$ con acción $(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto(\lambda_2^{-1},\lambda_1\lambda_2^{-1})$ y $(\prod \mathrm{GL}_{a_i})/\mathbb{C}^\times \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con acción trivial. Trabajaremos con el abierto $U\subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ definido como

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} : ae-bd, dh-ge, ah-bg, c, f, i \neq 0 \right\}$$

Notemos que si una matriz con $ae-bd=0$ esta asociada a una representación (A,B), el autoespacio de dimensión dos de Acontiene al tercer autovector de B, y por lo tanto la representación no es irreducible.

Sobre U el cociente es

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{a}{c} & \frac{b}{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{f} & \frac{e}{f} \\ \frac{g}{i} & \frac{h}{i} \end{pmatrix}^{-1} \in (\mathbb{C}^\times)^2.$$

La Γ_κ-acción es

$$(x,y)\mapsto (y^{-1},-y^{-1}x)$$

Tenemos la sección equivariante

$$(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+x^{-1} & y-y^{-1} & 0\\ 1-xy^{-1} & x^{-1}-x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

definida sobre $(1+x^{-1})(x^{-1}-x)\neq (y-y^{-1})(1-xy^{-1})$.

Si elegimos una raíz de la unidad ξ de orden tres y cambiamos la acción en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a $A\mapsto \xi A$, podemos usar

$$(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\xi^2x^{-1} & y-\xi^2y^{-1} & 0\\ \xi-xy^{-1} & \xi x^{-1}-x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

sobre $(1+\xi^2x^{-1})(\xi x^{-1}-x)\neq (y-\xi^2y^{-1})(\xi-xy^{-1})$. Tenemos un morfismo similar sobre $(1+\xi x^{-1})(\xi^2x^{-1}-x)\neq (y-\xi y^{-1})(\xi^2-xy^{-1})$. Podemos también intercambiar las primeras dos columnas de la matriz de la derecha en cada uno de los morfismos anteriores para obtener otros tres.

El complemento de los dominios anteriores es $x=y=-1$ unión $(x,y)=(\omega,\omega^{-1})$ para una raíz de la unidad ω de orden seis. Sobre $(-1,-1)$ la fibra es $(\mathbb{C}^\times)^2\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con acción $(\lambda_1,\lambda_2,A)\mapsto (\lambda_2^{-1},\lambda_1\lambda_2^{-1},\left(\begin{smallmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)A)$ que tiene la descomposición isotópica correcta. Sobre (ω,ω^{-1}), la fibra es $(\mathbb{C}^\times)^2\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con acción $(\lambda_1,\lambda_2,A)\mapsto (\lambda_2^{-1},\lambda_1\lambda_2^{-1},\left(\begin{smallmatrix}\omega & \omega^{-1}\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)A)$ que también tiene la descomposición correcta.

Para finalizar con rango tres, tenemos que analizar $a_1=2$ y $a_2=1=b_1=b_2=b_3$ con Γ_κ de orden dos. La acción en $(\prod \mathrm{GL}_{b_j})/\mathbb{C}^\times\simeq(\mathbb{C}^\times)^2$ es ahora $(\lambda_1,\lambda_2)\mapsto(\lambda_2,\lambda_1)$. El abierto U y el cociente son los mismos, pero la Γ_κ-acción es $(x,y)\mapsto(x^{-1},-x^{-1}y)$.

Tenemos la sección equivariante

$$(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y & -y+1+x^{-1} & 0\\ x+x^{-1} & x+x^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

sobre $(x+1)(x^2+1)\neq 0$. Si cambiamos la acción en $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ a $A\mapsto -A$, podemos usar

$$(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y & -y+1-x^{-1} & 0\\ x-x^{-1} & x-x^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

sobre $(x-1)(x^2-1)\neq 0$.

El conjunto restante es $x=-1$ con acción trivial, i.e. $\{-1\}\times\mathbb{C}^\times$. La preimagen de este conjunto es $(\mathbb{C}^\times)\times\mathbb{C}^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con acción $(\lambda_1,\lambda_2,y,A)\mapsto(\lambda_2,\lambda_1,y,\left(\begin{smallmatrix}-1 & y\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)A)$. Por lo tanto, basta con probar que si $\mathbb{C}^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ es dotado de la acción $(y,A)\mapsto(y,\left(\begin{smallmatrix}-1 & y\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)A)$ entonces su clase vive en A_{Γ_κ} y su descomposición isotópica es trivial. Consideremos el automorfismo

$$\left(y,\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right)\mapsto\left(y,\begin{pmatrix} a & b\\ yc & yd\end{pmatrix}\right)$$

de $\mathbb{C}^\times\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Cambia la acción a $(y,A)\mapsto(y,\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)A)$. Tenemos el producto de $\mathbb{C}^\times$ con acción trivial y $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ con la multiplicación por una matriz de orden finito. Ambas clases viven en A_{Γ_κ} y tienen descomposición isotópica trivial.

6.4. Cálculos para rangos pequeños

Si r es coprimo con n y m, podemos simplemente usar las fórmulas de [GM22] gracias al Teorema 0.2.5. Por lo tanto, nos concentraremos en el caso no-coprimo. Más aún, solo necesitamos analizar las configuraciones de autovalores y tipos que tienen estabilizador no trivial por los Lemas 6.1.5 y 6.1.9.

6.4.1. Rango uno

En este caso $R_\kappa^{irr} = R_\kappa$ es un punto para cualquier κ. Además, no hay estabilizadores dado que $\mathrm{mcd}(1, nm) = 1$. Luego,

$$[R_1^{irr}] = \sum_\kappa \frac{1}{|\mu_{nm}|} \operatorname{Ind}_{\{e\}}^{\mu_{nm}}(*)$$

Ahora bien, κ varía en $\mu_n \times \mu_m$. Por lo tanto,

$$R_1^{irr} = \mu_{nm}$$

con acción por traslación. Esto implica que

$$[\mathcal{R}_1^{irr}] = \langle T_{\mu_{nm}}, ((q-1) \otimes T_{\mu_{nm}})\mathbb{Q}^{\mu_{nm}} \rangle = q - 1.$$

6.4.2. Rango dos

Por la observación 3.5 de [GM22], los únicos κ's relevantes son $((\epsilon_1, \epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ con $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ y $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Si $\mathrm{mcd}(2, nm) = 1$, no hay estabilizadores y simplemente podemos aplicar la fórmulas de González-Prieto y Muñoz (ver subsección 7.1 de loc.cit.):

$$R_\kappa^{irr} = q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q$$

Ahora bien, hay

$$\frac{1}{4} nm(n-1)(m-1)$$

posibles κ's. Luego,

$$[R_2^{irr}]^{\mu_{nm}} = \frac{1}{4}(n-1)(m-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q) \otimes \mathbb{Q}^{nm}$$

en este caso. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}_2^{irr}] &= \langle T_{\mu_{nm}}, ((q-1) \otimes T_{\mu_{nm}})(\frac{1}{4}(n-1)(m-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q) \otimes \mathbb{Q}^{nm}) \rangle \\ &= \frac{1}{4}(n-1)(m-1)(q-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q). \end{aligned}$$

Asumamos ahora que n es par y m es impar. Hay un único caso donde el estabilizador es no trivial: $\kappa = ((\epsilon_1, -\epsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Hay dos clases de tipos $\tau \in \mathcal{T}_\kappa^*$:

- los semisimples: tenemos $s = 1$, $r_1 = 2$, $d_{i,j} = m_{i,j} = M_{i,j} = 1$. Como $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, Γ_τ es trivial. Por lo tanto, podemos usar [GM22] nuevamente:

  $$[R(\tau)] = q^2 + q$$

  Hay solo dos tipos posibles en este caso: $((\epsilon_1, \varepsilon_1), (-\epsilon_1, \varepsilon_2))$ y $((\epsilon_1, \varepsilon_2), (-\epsilon_1, \varepsilon_1))$.

- los no semisimples: Γ_τ es también trivial en este caso. Por loc. cit.

$$R(\tau) = q^3 - q.$$

Notemos que en este caso hay cuatro tipos posibles.

Luego,

$$[R_\kappa^{red}]^{\Gamma_\kappa} = (2q^3 + q^2 - q) \otimes \mathbb{Q}^2$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[R_\kappa]^{\Gamma_\kappa} &= ((q^2 - q) \otimes \mathbb{Q}^1 + q \otimes \mathbb{Q}^2)(q(q+1) \otimes \mathbb{Q}^1) \\ &= (q^2 - q)(q^2 + q) \otimes \mathbb{Q}^1 + q^2(q+1) \otimes \mathbb{Q}^2\end{aligned}$$

por el ejemplo 5.4.1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}[R_\kappa^{irr}]^{\Gamma_\kappa} &= (q^2 - q)(q^2 + q) \otimes \mathbb{Q}^1 + q^2(q+1) \otimes \mathbb{Q}^2 - (2q^3 + q^2 - q) \otimes \mathbb{Q}^2 \\ &= (q^2 - q)(q^2 + q) \otimes \mathbb{Q}^1 + (-q^3 + q) \otimes \mathbb{Q}^2\end{aligned}$$

para $\kappa = ((\epsilon_1, -\epsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$. Hay $\frac{1}{4}nm(m-1)$ tales κ. Para los demás κ podemos usar la misma fórmula que antes. Poniendo todo junto concluimos que

$$\begin{aligned}[R_2^{irr}]^{\mu_{nm}} &= \frac{1}{2}(m-1)((q^2 - q)(q^2 + q) \otimes \mathbb{Q}^{\frac{nm}{2}} + (q - q^3) \otimes \mathbb{Q}^{nm}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(n-2)(m-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q) \otimes \mathbb{Q}^{nm}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}_2^{irr}] &= (q-1)(\frac{1}{2}(m-1)((q^2 - q)(q^2 + q) + (-q^3 + q)))) + \frac{1}{4}(n-2)(m-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q)) \\ &= \frac{1}{4}(n-1)(m-1)(q-1)(q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q) + \frac{1}{2}(m-1)(q-1)(q^4 - q^3 - q^2 + q)\end{aligned}$$

si n es par. En conclusión, para $r = 2$, tenemos que

$$[\mathcal{R}_2^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{2}[\mathcal{R}_2^{irr}(\mathrm{SL})]^* + \delta_{2|n}\frac{1}{4}(m-1)(q-1)(q^2-q)(q^2-1) + \delta_{2|m}\frac{1}{4}(n-1)(q-1)(q^2-q)(q^2-1)$$

Cocientando por la acción de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ obtenemos

$$[\mathcal{M}_2^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{2}[\mathcal{M}_2^{irr}(\mathrm{SL})]^* + \delta_{2|n}\frac{1}{2}(m-1)(q-1)^2 + \delta_{2|m}\frac{1}{2}(n-1)(q-1)^2$$

que coincide con [MP16, Proposición 7.3].

6.4.3. Rango tres

Como en los casos anteriores, cuando $\mathrm{mcd}(3, nm) = 1$ podemos usar las fórmulas de González-Prieto y Muñoz:

$$[R_\kappa^{irr}] = \begin{cases} \begin{array}{c} q^{12} + 4q^{11} - 10q^{10} - 8q^9 + 17q^8 + 13q^7 \\ -5q^6 - 21q^5 - 3q^4 + 12q^3 \end{array} & \text{si no hay autovalores repetidos} \\ q^{10} - 3q^9 + 2q^8 + 2q^7 - 2q^5 - 3q^4 + 3q^3 & \text{si hay exactamente un autovalor repetido} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Luego,

$$[R_3^{irr}]^{\mu_{nm}} = \frac{1}{nm}\left(\binom{n}{3}\binom{m}{3}(q^{12}+4q^{11}-10q^{10}-8q^9+17q^8+13q^7-5q^6-21q^5-3q^4+12q^3)\right.$$
$$\left.+\left(2\binom{n}{2}\binom{m}{3}+2\binom{n}{3}\binom{m}{2}\right)(q^{10}-3q^9+2q^8+2q^7-2q^5-3q^4+3q^3)\right)\otimes\mathbb{Q}^{nm}$$

y

$$[\mathcal{R}_3^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{3}[\mathcal{R}_3^{irr}(\mathrm{SL})]$$

si $\mathrm{mcd}(3,nm)=1$.

Asumamos ahora que $3|n$ y fijemos una raíz de la unidad ω de orden 3. Para que Γ_κ sea no trivial, debe ser $\kappa = ((\epsilon_1,\omega\epsilon_1,\omega^2\epsilon_1),(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3))$ o $((\epsilon_1,\omega\epsilon_1,\omega^2\epsilon_1),(\kappa_1,\kappa_1,\kappa_2))$ con $\kappa_i\neq\kappa_j$ si $i\neq j$. En cualquier caso, ningún $\tau\in\mathcal{T}_\kappa^*$ tiene estabilizador no trivial. Por lo tanto,

$$[R_\kappa^{red}]^{\Gamma_\kappa} = \frac{1}{3}[R_\kappa^{red}]\otimes\mathbb{Q}^3$$

y podemos usar [GM22].

Para $\kappa = ((\epsilon_1,\omega\epsilon_1,\omega^2\epsilon_1),(\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3))$ encontramos que

$$\begin{aligned}[R_\kappa]^{\Gamma_\kappa} &= ((q^3-q^2)(q^3-q)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)\otimes\mathbb{Q}^3)(q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1)\\ &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)(q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

por el ejemplo 5.4.1. Luego,

$$\begin{aligned}[R_\kappa^{irr}]^{\Gamma_\kappa} &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^3\\ &\quad-(6q^{10}+3q^9-3q^8-3q^7+2q^6+7q^5+q^4-4q^3)\otimes\mathbb{Q}^3\\ &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1\\ &\quad+q^3(q^8-3q^7+q^6+6q^5+4q^4-2q^3-7q^2-q+4)\otimes\mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

Para $\kappa = ((\epsilon_1,\omega\epsilon_1,\omega^2\epsilon_1,(\kappa_1,\kappa_1,\kappa_2))$ tenemos que

$$\begin{aligned}[R_\kappa]^{\Gamma_\kappa} &= ((q^3-q^2)(q^3-q)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)\otimes\mathbb{Q}^3)(q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1)\\ &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

por el ejemplos 5.4.1. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}[R_\kappa^{irr}]^{\Gamma_\kappa} &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1+q^4(q+1)q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^3\\ &\quad-(2q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4-q^3)\otimes\mathbb{Q}^3\\ &= (q^3-q^2)(q^3-q)q^2(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1-(q+1)(q-1)^3q^3(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^3\end{aligned}$$

Luego, para $3|n$,

$$[\mathcal{R}_3^{irr}(\mathrm{GL})]-\frac{q-1}{3}[\mathcal{R}_3^{irr}(\mathrm{SL})] = \frac{2}{3}(m-1)(\frac{1}{2}(m-2)q(q+1)+1)(q-1)^3q^5(q+1)(q^2+q+1)$$

y

$$[\mathcal{M}_3^{irr}(\mathrm{GL})] = \frac{q-1}{3}[\mathcal{M}_3^{irr}(\mathrm{SL})]+\frac{2}{3}(\frac{1}{6}(m-1)(m-2)(q^2+q)+(m-1)))(q-1)q^2$$

que también coinciden con las fórmulas de [MP16, Proposición 10.1].

6.4.4. Rango cuatro

La cuneta es más sutil dado que hay Γ_τ no triviales. Hay varios tipos de κ con estabilizadores no triviales. Algunos de ellos pueden ser descartados porque $R_\kappa^{irr} = \emptyset$. Los mismos son descriptos en la Proposición 8.1 y la Observación 3.5 de [GM22]. Los sobrevivientes son los siguientes:

n	κ	$\#\kappa$	Γ_κ
$4\|n$	$\kappa_1 = ((\epsilon, i\epsilon, -\epsilon, -i\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4))$	$\frac{n}{4}\binom{m}{4}$	μ_4
$4\|n$	$\kappa_2 = ((\epsilon, i\epsilon, -\epsilon, -i\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$	$\frac{n}{4}m\binom{m-1}{2}$	μ_4
$4\|n$	$\kappa_3 = ((\epsilon, i\epsilon, -\epsilon, -i\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2))$	$\frac{n}{4}\binom{m}{2}$	μ_4
$4\|n$	$\kappa_4 = ((\epsilon, i\epsilon, -\epsilon, -i\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2))$	$\frac{n}{4}m(m-1)$	μ_4
$2\|n$	$\kappa_5 = ((\epsilon_1, -\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4))$	$\frac{n(n-4+2\delta_{4\nmid n})}{8}\binom{m}{4}$	μ_2
$2\|n$	$\kappa_6 = ((\epsilon_1, -\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$	$\frac{n(n-4+2\delta_{4\nmid n})}{8}m\binom{m-1}{2}$	μ_2
$2\|n$	$\kappa_7 = ((\epsilon_1, -\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2))$	$\frac{n(n-4+2\delta_{4\nmid n})}{8}\binom{m}{2}$	μ_2
$2\|n$	$\kappa_8 = ((\epsilon_1, -\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2))$	$\frac{n(n-4+2\delta_{4\nmid n})}{8}m(m-1)$	μ_2
$2\|n$	$\kappa_9 = ((\epsilon, -\epsilon, \epsilon, -\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4))$	$\frac{n}{2}\binom{m}{4}$	μ_2
$2\|n$	$\kappa_{10} = ((\epsilon, -\epsilon, \epsilon, -\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3))$	$\frac{n}{2}m\binom{m-1}{2}$	μ_2

Tabla 6.1: Configuraciones de autovalores con estabilizador no trivial en rango cuatro.

donde $\epsilon_i \neq \pm\epsilon_j, \pm i\epsilon_j$ y $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ para cualesquiera $i \neq j$.

Empecemos nuestro análisis con κ_7. Notemos que todos los tipos deber tener $m_{i,j} = M_{i,j} = 1$. Los relevantes son:

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$
τ_1	2	1	4	1	$((\epsilon_1), (\varepsilon_i)), ((-\epsilon_1), (\varepsilon_i)), ((\epsilon_2), (\varepsilon_j)), ((-\epsilon_2), (\varepsilon_j))$	-
τ_2	1	1	2	2	$((\epsilon_1, -\epsilon_1), (\varepsilon_1, \varepsilon_2)), ((\epsilon_2, -\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$	-
τ_3	2	1	2	2	$((\epsilon_1, \pm\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_2)), ((-\epsilon_1, \mp\epsilon_2), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$	-
τ_4	4	2	2	1	$((\epsilon_k), (\varepsilon_i)), ((-\epsilon_k), (\varepsilon_i))$	$((\epsilon_l), (\varepsilon_j)), ((-\epsilon_l), (\varepsilon_j))$
τ_5	2	2	1	2	$((\epsilon_k, -\epsilon_k), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$	$((\epsilon_l, -\epsilon_l), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$

Tabla 6.2: Tipos con $R(\tau)$ no trivial para κ_7.

Aplicamos la fibración principal 6.2.1. En todos los caso $[F_0']^{\mu_2}$ lo calculamos en los ejemplos 5.4.1, 5.4.3 y en el corolario 5.2.1. Tenemos que:

τ	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_1	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times) \times \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)$	$(q^2-1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1 - 2(q^2-q)(q-1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_2	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1$
τ_3	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$	$(q^4-q^2)(q^4-1) \otimes \mathbb{Q}^1 - q^3(q-1)^2(q+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_4	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times) \times \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)$	$(q^2-1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1 - 2(q^2-q)(q-1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_5	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1$

Tabla 6.3: Descomposiciones isotópicas de $[F_0'(\tau)]$.

Para la base $\mathcal{I}(\tau)$ tenemos que, para las cuentas hechas en los rangos más chicos y el Corolario 5.3.2,

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$
τ_1, τ_4	$(*)^4$	$1 \otimes \mathbb{Q}^1$
τ_2, τ_5	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4 \otimes \mathbb{Q}^1 - 2q^2(q+1)^2(q-1)^3 \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_3	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(R^{irr}_{(\epsilon_1,\epsilon_2)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})$	$(q^8-2q^6-q^4+2q^2) \otimes \mathbb{Q}^1 + (-2q^7+2q^6+4q^5-3q^4-2q^3+q^2) \otimes \mathbb{Q}^2$

Tabla 6.4: Descomposiciones isotópicas de $[\mathcal{I}(\tau)]$.

Tipos τ_1, τ_2, y τ_3 tiene $\mathcal{M}_\tau$ trivial. Por otro lado, para τ_4,

$$\mathcal{M}_0 = \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2), \qquad \ell_{\alpha\beta} = 0, \qquad L_\beta = 0, \qquad \mathcal{M}_\rho = \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$$

y, por lo tanto,

$$[\mathcal{M}_\rho]^{\mu_2} = (q^4-1) \otimes \mathbb{Q}^1 - (q^2-1) \otimes \mathbb{Q}^2$$

Y para τ_5,

$$\mathcal{M}_0 = M_2(\mathbb{C}), \qquad \ell_{\alpha\beta} = 0, \qquad L_\beta = 0, \qquad \mathcal{M}_\rho = M_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$$

y, por lo tanto,

$$[\mathcal{M}_\rho]^{\mu_2} = (q^4-1) \otimes \mathbb{Q}^1$$

Para todos $\mathcal{D}$ es trivial dado que no hay autovalores repetidos en A. Luego de algunas cuentas,

τ	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_1	$(q^2+1)(q^4-q)q^2(q^4-q^3) \otimes \mathbb{Q}^1$ $+2q^7(q^2+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_2	$(q-1)^2(q+1)^2q^8(q^2+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2(q-1)^3q^6(q^2+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_3	$(q+1)(q-1)^3q^6(q^2-2)(q^2+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^1$ $-(q+1)(q-1)^2q^6(q^2-q-1)(q^2+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_4	$(q+1)q^6(q-1)^3(q^2+q+1)(q^2+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1$ $+(q+1)(q-1)^2q^6(q^2+1)(2q^2+q+1)(q^2+q+1) \otimes \mathbb{Q}^2$
τ_5	$(q-1)^3(q+1)^3q^8(q^2+q+1)(q^2+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1$ $-2q^6(q+1)^3(q-1)^4(q^2+q+1)(q^2+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^2$

Tabla 6.5: Descomposiciones isotópicas de $[R(\tau)]$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
[R_{\kappa_7}]^{\mu_2} &= [\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})/(\mathbb{C}^\times)^4]^{\mu_2}([\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})^2] \otimes \mathbb{Q}^1) \\
&= ([\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})]^2/[\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})]^2 \otimes \mathbb{Q}^1)/([\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)]^{\mu_2})^2 \\
&= (q-1)^2q^{10}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1 + 2q^{11}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^2
\end{aligned}$$

por el ejemplo 5.4.1. En conclusión,

$$\begin{aligned}
[R^{irr}_{\kappa_7}]^{\mu_2} &= \frac{1}{2}\mathrm{Ind}^{\mu_2}_{\{e\}}([R^{irr}_{\kappa_7}]) \\
&\quad - (q+1)^2(q-1)^3q^6(q^2+1)(q^2+q+1)(q^5+2q^4-q^3+3q^2+2q-2) \otimes (\mathbb{Q}^1 - \frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)
\end{aligned}$$

Argumentos similares se pueden hacer para el rest de las configuraciones con $\Gamma_\kappa = \mu_2$. Resumimos los resultados en las Tablas 6.7, 6.9, 6.10, 6.8, 6.11, y 6.12. Analicemos las cuatro configuraciones con estabilizador μ_4. En todos los casos $\mathcal{D}$ es trivial. Tipos con estabilizador μ_4 solo aparecen para κ_3. Por lo tanto, para κ_1, κ_2 y κ_4, R_κ^{red} se puede calcular usando las tablas anteriores para $(\epsilon_1, -\epsilon_1, \epsilon_2, -\epsilon_2)$ módulo una corrección por $\frac{1}{2}\operatorname{Ind}_{\mu_2}^{\mu_4}$, ver el Lema 6.1.5. Los resultados están en la Tabla 6.6.

κ	$[R_\kappa^{red}]^{\mu_4} - \frac{1}{4}[R_\kappa^{red}] \otimes \mathbb{Q}^{\mu_4}$
κ_1	$3(q-1)^2(q+1)^2q^8(q^2+1)(q^2+q+1)(2q^4-1) \otimes (\mathbb{Q}^2 - \frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_2	$(q+1)(q-1)^2q^7(q^2+1)(q^2+q+1)^2(2q^4-1) \otimes (\mathbb{Q}^2 - \frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_4	$(q+1)(q-1)^2q^7(q^2+1)(q^2+q+1)(2q^4-1) \otimes (\mathbb{Q}^2 - \frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$

Tabla 6.6: Descomposiciones isotópicas de $[R_\kappa^{red}]$ para κ_1, κ_2 y κ_4.

Para finalizar analicemos κ_3. Hay un solo tipo con estabilizador μ_4: τ_2' con $s = 1$, $r_i = 2$, $d_{i,j} = 2$ y

$$\kappa_{i,j} = ((\epsilon, -\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_2)), ((i\epsilon, -i\epsilon), (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$$

Tiene $M_\rho = M_2(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, $F_0'(\tau) = \operatorname{Per}_{\mu_2}^{\mu_4}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}))$ y $\mathcal{I}(\tau) = \operatorname{Per}_{\mu_2}^{\mu_4}(R^{irr}_{((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))})$. Usamos la fórmula del Ejemplo 5.3.1:

$$\begin{aligned}
[F_0'(\tau)]^{\mu_2} &= (q^4-q^2)(q^4-1) \otimes \mathbb{Q}^1 + \frac{1}{2}((q^2-q)^2(q^2-1)^2 - (q^4-q^2)(q^4-1)) \otimes \mathbb{Q}^2 \\
&= (q^4-q^2)(q^4-1) \otimes \mathbb{Q}^1 - q^3(q^2-1)^2 \otimes \mathbb{Q}^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_4} &= \Omega_2((q^2-q)(q^2+q) \otimes \mathbb{Q}^1 + (-q^3+q) \otimes \mathbb{Q}^2) \\
&= (q^4-q^2)(q^4+q^2) \otimes \mathbb{Q}^1 - q^4(q-1)(q+1) \otimes \mathbb{Q}^2 + (-q^3+q)(q^2-q)(q^2-1) \otimes \mathbb{Q}^4
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
[R(\tau_2')]^{\mu_4} &= (q+1)^2(q-1)^4q^8(q^2+q+1)(q^2+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^1 \\
&+ (q+1)^2(q-1)^3q^8(q^2+q+1)(q^2+1)^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \\
&- (q+1)^3(q-1)^4q^6(q^2+q+1)(q^2+1)^2) \otimes \mathbb{Q}^4
\end{aligned}$$

Los otros tipos para κ_3 son τ_1, τ_3, τ_4 y τ_5. Los cálculos asociados figuran en la Tabla 6.5. A partir de este punto, las configuraciones de autovalores pueden ser tratadas como antes. El resultado final esta en la Tabla 6.12.

Reuniendo todas las contribuciones de la Tabla 6.12 obtenemos para m impar:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathcal{R}_4^{irr}(\mathrm{GL})]}{[\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})]} - \frac{q-1}{4}[\mathcal{M}_4^{irr}(\mathrm{SL})] = \delta_{2|n}\Bigg(-\frac{(n-2)(m-1)}{16}(q-1)(q^5+2q^4-q^3+3q^2+2q-2) \\
&+\frac{n-2}{8}\binom{m-1}{2}(q-1)q(q^4-2q^2-2) - \frac{(n-2)(m-1)}{8}(q-1)q(3q^2+2) \\
&+\frac{n-2}{32}\binom{m-1}{3}(q-1)q^2(q^7+2q^6+4q^5+5q^4-6q^3-6q^2-6q-6) \\
&-\frac{1}{2}\binom{m-1}{2}(q-1)q(q^2+q+3) + \frac{1}{8}\binom{m-1}{3}q^4(q^2+q-5)\Bigg) \\
&+\delta_{4|n}\left(\frac{1}{128}\binom{m-1}{3}(q-1)q^2(q^7+2q^6-3q^4+6q^3+6q^2+6q+6)\right. \\
&+\frac{1}{16}\binom{m-1}{2}q(3q^7+3q^6+q^4+3q^3-4q^2+4q-4) \\
&\left.+\frac{m-1}{32}(q^5-3q^4+4q^3+q^2-4q+2) + \frac{m-1}{16}(q-1)q(3q^2+2q^2+2)\right).
\end{aligned}
$$

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{11}	6	1	2	2	$((\epsilon_1,-\epsilon_1),(\varepsilon_i,\varepsilon_j)),((\epsilon_2,-\epsilon_2),(\varepsilon_k,\varepsilon_l))$	-	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$
τ_{12}	12	2	1	2	$((\epsilon_k,-\epsilon_k),(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$	$((\epsilon_l,-\epsilon_l),(\varepsilon_p,\varepsilon_q))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$	M_τ	$[M_\tau]^{\mu_2}$	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{11}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^2(q+1)^2q^8(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2(q-1)^3q^6(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{12}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$M_2(\mathbb{C})\setminus\{0\}$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^3(q+1)^3q^8(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^6(q+1)^3(q-1)^4(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$

Tabla 6.7: Cálculos para κ_5.

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{21}	6	1	2	2	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_i,\varepsilon_j)),((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_k,\varepsilon_l))$	-	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$
τ_{22}	6	2	1	2	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_i,\varepsilon_j))$	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_k,\varepsilon_l))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$	M_τ	$[M_\tau]^{\mu_2}$	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{21}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^2(q+1)^2q^8(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2(q-1)^3q^6(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{22}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$M_2(\mathbb{C})\setminus\mathbb{C}^2$	$(q^4-q^2)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^3(q+1)^3q^8(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^3(q-1)^4q^6(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$

Tabla 6.8: Cálculos para κ_9.

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_6	2	1	3	1,1,2	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1)),$ $((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	-	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_7	2	1	2	2	$((\epsilon_1,-\epsilon_1),(\varepsilon_1,\varepsilon_i)),$ $((\epsilon_2,-\epsilon_2),(\varepsilon_1,\varepsilon_j))$	-	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$
τ_8	2	2	2,1	1,2	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1))$	$((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_9	2	2	1,2	2,1	$((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{10}	4	2	1	2	$((\epsilon_k,-\epsilon_k),(\varepsilon_1,\varepsilon_i))$	$((\epsilon_l,-\epsilon_l),(\varepsilon_1,\varepsilon_j))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$	M_τ	$[M_\tau]^{\mu_2}$	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_6	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)(q-1)q^7(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q+1)q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_7	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)(q+1)^2q^8(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2(q-1)^2q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_8	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathbb{C}^4\setminus\{0\}$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)^2(q-1)^2q^7(q^3-1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)q^6(q+1)^2(q^3-1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_9	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^2q^7(q^3-1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(2q+1)q^6(q^2-1)^2(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{10}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$M_2(\mathbb{C})\setminus\{0\}$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^2(q+1)^3q^8(q^3-1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^6(q+1)^3(q-1)^3(q^3-1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$

Tabla 6.9: Cálculos para κ_6.

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{13}	2	1	3	1,1,2	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1)),$ $((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$	-	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{14}	2	2	2,1	1,2	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1))$	$((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{15}	2	2	1,2	2,1	$((\epsilon_j,-\epsilon_j),(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$	$((\epsilon_i),(\varepsilon_1)),((-\epsilon_i),(\varepsilon_1))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}((\mathbb{C}^\times)$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$	M_τ	$[M_\tau]^{\mu_2}$	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{13}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)(q-1)^2q^7(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q+1)q^6(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{14}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathbb{C}^4\setminus\{0\}$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)^2(q-1)^3q^7(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)^2q^6(q+1)^2(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{15}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2\setminus\{0\})$	$(q^4-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^3q^7(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(2q+1)q^6(q+1)^2(q-1)^3(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$

Tabla 6.10: Cálculos para κ_8.

τ	$\#\tau$	s	r_i	$d_{i,j}$	$\kappa_{1,j}$	$\kappa_{2,j}$	$F_0'(\tau)$	$[F_0'(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{16}	1	1	3	1,1,2	$((\epsilon),(\varepsilon_1)),((-\epsilon),(\varepsilon_1)),$ $((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	-	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{17}	1	1	2	2	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_1,\varepsilon_2)),$ $((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_1,\varepsilon_3))$	-	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$
τ_{18}	1	2	2,1	1,2	$((\epsilon),(\varepsilon_1)),((-\epsilon),(\varepsilon_1))$	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{19}	1	2	1,2	2,1	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_2,\varepsilon_3))$	$((\epsilon),(\varepsilon_1)),((-\epsilon),(\varepsilon_1))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^\times)$	$(q^2-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q-1)(q^2-q)(q^2-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{20}	2	2	1	2	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_1,\varepsilon_i))$	$((\epsilon,-\epsilon),(\varepsilon_1,\varepsilon_j))$	$\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$	$(q^2-q)^2(q^2-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$

τ	$\mathcal{I}(\tau)$	$[\mathcal{I}(\tau)]^{\mu_2}$	M_τ	$[M_\tau]^{\mu_2}$	$[R(\tau)]^{\mu_2}$
τ_{16}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)(q-1)q^7(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q+1)q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{17}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$*$	$1\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q-1)^2(q+1)q^8(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2(q-1)^2q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{18}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{C})$	$(q^4-q^2)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q^2-q^3)\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^2q^7(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q+1)^2(q-1)^2q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{19}	$R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}$	$(q^2-q)(q^2+q)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(-q^3+q)\otimes\mathbb{Q}^2$	$\mathrm{Per}^{\mu_2}_{\{e\}}(\mathbb{C}^2\setminus\mathbb{C})$	$(q^4-q^2)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q^2-q^3)\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^2q^7(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $-(q+1)^2(q-1)^2q^6(q^2+1)(q^3-1)\otimes\mathbb{Q}^2$
τ_{20}	$(R^{irr}_{(\epsilon,-\epsilon)(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^4\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2q^2(q+1)^2(q-1)^3\otimes\mathbb{Q}^2$	$M_2(\mathbb{C})\setminus\mathbb{C}$	$(q^4-q)\otimes\mathbb{Q}^1$	$(q+1)^2(q-1)q^7(q^2+1)(q^3-1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $-2(q+1)^2q^5(q-1)^2(q^2+1)(q^3-1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$

Tabla 6.11: Cálculos para κ_{10}.

κ	$[R_\kappa]^{\Gamma_\kappa}$	$[R_\kappa^{irr}]^{\Gamma_\kappa} - \frac{1}{\|\Gamma_\kappa\|}\,\mathrm{Ind}_{\{e\}}^{\Gamma_\kappa}([R_\kappa^{irr}])$
κ_1	$(q-1)^3(q+1)^3q^{12}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q-1)^2(q+1)^2q^{12}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$ $+(q+1)^2q^{13}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^4$	$(q-1)^3(q+1)^3q^{12}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$ $+(q^2-1)^2q^8(q^2+1)(q^3-1)(q^5+2q^4-3q^3-3q^2-3q-3)\otimes(\mathbb{Q}^2-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_2	$(q+1)^2(q-1)^3q^{11}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q+1)(q-1)^2q^{11}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$ $+(q+1)q^{12}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^4$	$(q+1)^2(q-1)^3q^{11}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$ $-(q+1)^2(q-1)^3q^7(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes(\mathbb{Q}^2-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_3	$(q+1)(q-1)^3q^{10}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q-1)^2q^{10}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$ $+q^{11}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^4$	$-(q^2-1)q^6(q^2+1)(q^3-1)(q^7+2q^6-q^5+q^3-4q^2-q+1)\otimes(\mathbb{Q}^2-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^4)$ $+(q^{10}(q^4-1)(q^3-1)^2-(q+1)^2(q-1)^3q^8(q^3-1)(q^2+1)^2)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_4	$(q+1)^2(q-1)^3q^9(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q+1)(q-1)^2q^9(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes\mathbb{Q}^2$ $+(q+1)q^{10}(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^4$	$(q+1)^2(q-1)^3q^9(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$ $-(q+1)^2(q-1)^3q^7(2q^2+1)(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes(\mathbb{Q}^2-\frac{1}{4}\mathbb{Q}^4)$
κ_5	$(q-1)^2(q+1)^2q^{12}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+2(q+1)^2q^{13}(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^3q^8(q^2+1)(q^2+q+1)$ $(q^7+2q^6+4q^5+5q^4-6q^3-6q^2-6q-6)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)$
κ_6	$(q+1)(q-1)^2q^1 1(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+2(q+1)q^1 2(q^2+1)^2(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q+1)^2(q-1)^3q^7(q^2+1)(q^2+q+1)^2(q^4-2q^2-2)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)$
κ_8	$(q+1)(q-1)^2q^9(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+2(q+1)q^{10}(q^2+q+1)(q^2+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$	$-(q+1)^2(q-1)^3q^7(3q^2+2)(q^2+1)(q^2+q+1)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)$
κ_9	$(q-1)^2(q+1)^2q^{10}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q+1)^2q^{11}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$	$(q-1)^2(q+1)^2q^{10}(q^2+1)(q^2+q-5)(q^2+q+1)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)$
κ_{10}	$(q+1)(q-1)^2q^9(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^1$ $+(q+1)q^{10}(q^2+1)(q^2+q+1)^2\otimes\mathbb{Q}^2$	$-(q+1)^2(q-1)^3q^7(q^2+1)(q^2+q+1)(q^2+q+3)\otimes(\mathbb{Q}^1-\frac{1}{2}\mathbb{Q}^2)$

Tabla 6.12: Descomposiciones isotópicas de $[R_\kappa]$ y $[R_\kappa^{irr}]$.

Bibliografía

[AM24] Lucas Gabriel de Amorin y Martin Mereb. «Counting stringy points on a family of character varieties». Preprint. Dic. de 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2411.05563.

[Amo25] Lucas de Amorin. «On the motive of quotients of induced actions». En: *J. Algebra* 683 (2025), págs. 166-231. ISSN: 0021-8693,1090-266X. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2025.06.029. URL: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2025.06.029.

[BD96] Victor V. Batyrev y Dimitrios I. Dais. «Strong McKay correspondence, string-theoretic Hodge numbers and mirror symmetry». En: *Topology* 35.4 (1996), págs. 901-929. ISSN: 0040-9383. DOI: 10.1016/0040-9383(95)00051-8. URL: https://doi.org/10.1016/0040-9383(95)00051-8.

[BH17] David Baraglia y Pedram Hekmati. «Arithmetic of singular character varieties and their E-polynomials». En: *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 114.2 (2017), págs. 293-332. ISSN: 0024-6115,1460-244X. DOI: 10.1112/plms.12008. URL: https://doi.org/10.1112/plms.12008.

[CHM12] Mark Andrea A. de Cataldo, Tamás Hausel y Luca Migliorini. «Topology of Hitchin systems and Hodge theory of character varieties: the case A_1». En: *Ann. of Math. (2)* 175.3 (2012), págs. 1329-1407. ISSN: 0003-486X,1939-8980. DOI: 10.4007/annals.2012.175.3.7. URL: https://doi.org/10.4007/annals.2012.175.3.7.

[CMS22a] Mark Andrea de Cataldo, Davesh Maulik y Junliang Shen. «Hitchin fibrations, abelian surfaces, and the $P = W$ conjecture». En: *J. Amer. Math. Soc.* 35.3 (2022), págs. 911-953. ISSN: 0894-0347,1088-6834. DOI: 10.1090/jams/989. URL: https://doi.org/10.1090/jams/989.

[CMS22b] Mark Andrea de Cataldo, Davesh Maulik y Junliang Shen. «On the $P = W$ conjecture for SL_n». En: *Selecta Math. (N.S.)* 28.5 (2022), Paper No. 90, 21. ISSN: 1022-1824,1420-9020. DOI: 10.1007/s00029-022-00803-0. URL: https://doi.org/10.1007/s00029-022-00803-0.

[CR00] Weimin Chen y Yongbin Ruan. «A New Cohomology Theory of Orbifold». En: *Communications in Mathematical Physics* 248 (abr. de 2000). DOI: 10.1007/s00220-004-1089-4.

[CST14] Tullio Ceccherini-Silberstein, Fabio Scarabotti y Filippo Tolli. *Representation theory and harmonic analysis of wreath products of finite groups*. Vol. 410. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge, 2014, págs. xii+163. ISBN: 978-1-107-62785-7.

[Del71] Pierre Deligne. «Théorie de Hodge. I». En: *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*. Gauthier-Villars Éditeur, Paris, 1971, págs. 425-430.

[Del74] Pierre Deligne. «Théorie de Hodge. III». En: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 44 (1974), págs. 5-77. ISSN: 0073-8301,1618-1913. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1974__44__5_0.

[DP12] R. Donagi y T. Pantev. «Langlands duality for Hitchin systems». En: *Invent. Math.* 189.3 (2012), págs. 653-735. ISSN: 0020-9910. DOI: 10.1007/s00222-012-0373-8. URL: https://doi.org/10.1007/s00222-012-0373-8.

[Eke25] Torsten Ekedahl. «The Grothendieck Group of Algebraic Stacks». En: *Perspectives on Four Decades of Algebraic Geometry, Volume 1.* Vol. 351. Progr. Math. Birkhäuser/Springer, Cham, 2025, págs. 233-261. ISBN: 978-3-031-66229-4; 978-3-031-66230-0. DOI: 10.1007/978-3-031-66230-0_9. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-66230-0_9.

[FL12] Carlos Florentino y Sean Lawton. «Singularities of free group character varieties». En: *Pacific J. Math.* 260.1 (2012), págs. 149-179. ISSN: 0030-8730,1945-5844. DOI: 10.2140/pjm.2012.260.149. URL: https://doi.org/10.2140/pjm.2012.260.149.

[FNZ21] Carlos Florentino, Azizeh Nozad y Alfonso Zamora. «Serre polynomials of SL_n- and PGL_n-character varieties of free groups». En: *J. Geom. Phys.* 161 (2021), Paper No. 104008, 21. ISSN: 0393-0440,1879-1662. DOI: 10.1016/j.geomphys.2020.104008. URL: https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.104008.

[Fro68] Ferdinand Georg Frobenius. *Gesammelte Abhandlungen. Bände I, II, III.* Ed. por J.-P. Serre. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[FS21] Carlos Florentino y Jaime Silva. «Hodge-Deligne polynomials of character varieties of free abelian groups». En: *Open Math.* 19.1 (2021), págs. 338-362. ISSN: 2391-5455. DOI: 10.1515/math-2021-0038. URL: https://doi.org/10.1515/math-2021-0038.

[GM22] Ángel González-Prieto y Vicente Muñoz. «Motive of the SL_4-character variety of torus knots». En: *J. Algebra* 610 (2022), págs. 852-895. ISSN: 0021-8693,1090-266X. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2022.06.008. URL: https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.06.008.

[Gon24] Ángel González-Prieto. «Pseudo-quotients of algebraic actions and their application to character varieties». En: *Commun. Contemp. Math.* 26.4 (2024), Paper No. 2350009, 48. ISSN: 0219-1997,1793-6683. DOI: 10.1142/S0219199723500098. URL: https://doi.org/10.1142/S0219199723500098.

[Gre55] J. A. Green. «The characters of the finite general linear groups». En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 80 (1955), págs. 402-447. ISSN: 0002-9947,1088-6850. DOI: 10.2307/1992997. URL: https://doi.org/10.2307/1992997.

[Gur+97] K. Guruprasad, J. Huebschmann, L. Jeffrey y A. Weinstein. «Group systems, groupoids, and moduli spaces of parabolic bundles». En: *Duke Math. J.* 89.2 (1997), págs. 377-412. ISSN: 0012-7094,1547-7398. DOI: 10.1215/S0012-7094-97-08917-1. URL: https://doi.org/10.1215/S0012-7094-97-08917-1.

[GWZ20] Michael Groechenig, Dimitri Wyss y Paul Ziegler. «Mirror symmetry for moduli spaces of Higgs bundles via p-adic integration». En: *Invent. Math.* 221.2 (2020), págs. 505-596. ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: 10.1007/s00222-020-00957-8. URL: https://doi.org/10.1007/s00222-020-00957-8.

[Hal67] Marshall Hall Jr. *Combinatorial theory.* Blaisdell Publishing Co. Ginn y Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967, págs. x+310.

[Hau+22] Tamas Hausel, Anton Mellit, Alexandre Minets y Oliver Schiffmann. «$P = W$ via $\mathcal{H}_2$». Preprint. Sep. de 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2209.05429.

[Hit87a] N. J. Hitchin. «The self-duality equations on a Riemann surface». En: *Proc. London Math. Soc. (3)* 55.1 (1987), págs. 59-126. ISSN: 0024-6115,1460-244X. DOI: 10.1112/plms/s3-55.1.59. URL: https://doi.org/10.1112/plms/s3-55.1.59.

[Hit87b] Nigel Hitchin. «Stable bundles and integrable systems». En: *Duke Math. J.* 54.1 (1987), págs. 91-114. ISSN: 0012-7094. DOI: `10.1215/S0012-7094-87-05408-1`. URL: `https://doi.org/10.1215/S0012-7094-87-05408-1`.

[HLR11] Tamás Hausel, Emmanuel Letellier y Fernando Rodriguez-Villegas. «Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties». En: *Duke Math. J.* 160.2 (2011), págs. 323-400. ISSN: 0012-7094,1547-7398. DOI: `10.1215/00127094-1444258`. URL: `https://doi.org/10.1215/00127094-1444258`.

[HLR13] Tamás Hausel, Emmanuel Letellier y Fernando Rodriguez-Villegas. «Arithmetic harmonic analysis on character and quiver varieties II». En: *Adv. Math.* 234 (2013), págs. 85-128. ISSN: 0001-8708,1090-2082. DOI: `10.1016/j.aim.2012.10.009`. URL: `https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.10.009`.

[HR08] Tamás Hausel y Fernando Rodriguez-Villegas. «Mixed Hodge polynomials of character varieties». En: *Invent. Math.* 174.3 (2008). With an appendix by Nicholas M. Katz, págs. 555-624. ISSN: 0020-9910. DOI: `10.1007/s00222-008-0142-x`. URL: `https://doi.org/10.1007/s00222-008-0142-x`.

[HT01] Tamás Hausel y Michael Thaddeus. «Examples of mirror partners arising from integrable systems». En: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 333.4 (2001), págs. 313-318. ISSN: 0764-4442. DOI: `10.1016/S0764-4442(01)02057-2`. URL: `https://doi.org/10.1016/S0764-4442(01)02057-2`.

[HT03] Tamás Hausel y Michael Thaddeus. «Mirror symmetry, Langlands duality, and the Hitchin system». En: *Invent. Math.* 153.1 (2003), págs. 197-229. ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: `10.1007/s00222-003-0286-7`. URL: `https://doi.org/10.1007/s00222-003-0286-7`.

[Hum75] James E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Vol. No. 21. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975, págs. xiv+247.

[Kac80] V. G. Kac. «Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory». En: *Invent. Math.* 56.1 (1980), págs. 57-92. ISSN: 0020-9910,1432-1297. DOI: `10.1007/BF01403155`. URL: `https://doi.org/10.1007/BF01403155`.

[KG75] M. T. Karkar y J. A. Green. «A theorem on the restriction of group characters, and its application to the character theory of $\mathrm{SL}(n, q)$». En: *Math. Ann.* 215 (1975), págs. 131-134. ISSN: 0025-5831,1432-1807. DOI: `10.1007/BF01432691`. URL: `https://doi.org/10.1007/BF01432691`.

[KM12] Teruaki Kitano y Takayuki Morifuji. «Twisted Alexander polynomials for irreducible $SL(2,\mathbb{C})$-representations of torus knots». En: *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* 11.2 (2012), págs. 395-406. ISSN: 0391-173X,2036-2145.

[Law08] Sean Lawton. «Minimal affine coordinates for $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$ character varieties of free groups». En: *J. Algebra* 320.10 (2008), págs. 3773-3810. ISSN: 0021-8693,1090-266X. DOI: `10.1016/j.jalgebra.2008.06.031`. URL: `https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.06.031`.

[LM16] Sean Lawton y Vicente Muñoz. «E-polynomial of the $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$-character variety of free groups». En: *Pacific J. Math.* 282.1 (2016), págs. 173-202. ISSN: 0030-8730,1945-5844. DOI: `10.2140/pjm.2016.282.173`. URL: `https://doi.org/10.2140/pjm.2016.282.173`.

[LMN13] Marina Logares, Vicente Muñoz y P. E. Newstead. «Hodge polynomials of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-character varieties for curves of small genus». En: *Rev. Mat. Complut.* 26.2 (2013), págs. 635-703. ISSN: 1139-1138,1988-2807. DOI: `10.1007/s13163-013-0115-5`. URL: `https://doi.org/10.1007/s13163-013-0115-5`.

[LU02] Ernesto Lupercio y Bernardo Uribe. «Inertia Orbifolds, Configuration Spaces and the Ghost Loop Space». En: *The Quarterly Journal of Mathematics* 55 (nov. de 2002). DOI: 10.1093/qmath/hag053.

[LW21] François Loeser y Dimitri Wyss. «Motivic integration on the Hitchin fibration». En: *Algebr. Geom.* 8.2 (2021), págs. 196-230. ISSN: 2313-1691,2214-2584. DOI: 10.14231/ag-2021-004. URL: https://doi.org/10.14231/ag-2021-004.

[Mac79] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979, págs. viii + 180. ISBN: 0-19-853530-9.

[Mel17] Anton Mellit. «Cell decompositions of character varieties». Preprint. Oct. de 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1905.10685.

[Mer15] Martin Mereb. «On the E-polynomials of a family of Sl_n-character varieties». En: *Math. Ann.* 363.3-4 (2015), págs. 857-892. ISSN: 0025-5831. DOI: 10.1007/s00208-015-1183-2. URL: https://doi.org/10.1007/s00208-015-1183-2.

[MP16] Vicente Muñoz y Joan Porti. «Geometry of the $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$-character variety of torus knots». En: *Algebr. Geom. Topol.* 16.1 (2016), págs. 397-426. ISSN: 1472-2747,1472-2739. DOI: 10.2140/agt.2016.16.397. URL: https://doi.org/10.2140/agt.2016.16.397.

[MS21] Davesh Maulik y Junliang Shen. «Endoscopic decompositions and the Hausel-Thaddeus conjecture». En: *Forum Math. Pi* 9 (2021), Paper No. e8, 49. ISSN: 2050-5086. DOI: 10.1017/fmp.2021.7. URL: https://doi.org/10.1017/fmp.2021.7.

[MS24] Davesh Maulik y Junliang Shen. «The $P = W$ conjecture for GL_n». En: *Ann. of Math. (2)* 200.2 (2024), págs. 529-556. ISSN: 0003-486X,1939-8980. DOI: 10.4007/annals.2024.200.2.3. URL: https://doi.org/10.4007/annals.2024.200.2.3.

[MSY24] Davesh Maulik, Junliang Shen y Qizheng Yin. «Algebraic cycles and Hitchin systems». Preprint. Dic. de 2024. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.05177.

[MSY25] Davesh Maulik, Junliang Shen y Qizheng Yin. «Perverse filtrations and Fourier transforms». To appear at Acta Mathematica. Feb. de 2025. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.13160.

[NS65] M. S. Narasimhan y C. S. Seshadri. «Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface». En: *Ann. of Math. (2)* 82 (1965), págs. 540-567. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1970710. URL: https://doi.org/10.2307/1970710.

[OV90] A. L. Onishchik y È. B. Vinberg. *Lie groups and algebraic groups*. Springer Series in Soviet Mathematics. Translated from the Russian and with a preface by D. A. Leites. Springer-Verlag, Berlin, 1990, págs. xx+328. ISBN: 3-540-50614-4. DOI: 10.1007/978-3-642-74334-4. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-74334-4.

[Rot64] Gian-Carlo Rota. «On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions». En: *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete* 2 (1964), págs. 340-368. DOI: 10.1007/BF00531932. URL: https://doi.org/10.1007/BF00531932.

[Rua03] Yongbin Ruan. «Discrete torsion and twisted orbifold cohomology». En: *J. Symplectic Geom.* 2.1 (2003), págs. 1-24. ISSN: 1527-5256,1540-2347. DOI: 10.4310/JSG.2004.v2.n1.a1. URL: https://doi.org/10.4310/JSG.2004.v2.n1.a1.

[Sch92] Aidan Schofield. «General representations of quivers». En: *Proc. London Math. Soc. (3)* 65.1 (1992), págs. 46-64. ISSN: 0024-6115,1460-244X. DOI: 10.1112/plms/s3-65.1.46. URL: https://doi.org/10.1112/plms/s3-65.1.46.

[Ser78] Jean-Pierre Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* revised. Hermann, Paris, 1978, pág. 182. ISBN: 2-7056-5630-8.

[Ses77] C. S. Seshadri. «Geometric reductivity over arbitrary base». En: *Advances in Math.* 26.3 (1977), págs. 225-274. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/0001-8708(77)90041-X. URL: https://doi.org/10.1016/0001-8708(77)90041-X.

[Sim92] Carlos T. Simpson. «Higgs bundles and local systems». En: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 75 (1992), págs. 5-95. ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1992__75__5_0.

[Sim94a] Carlos T. Simpson. «Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I». En: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 80 (1994), 5-79 (1995). ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1994__80__5_0.

[Sim94b] Carlos T. Simpson. «Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. II». En: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 80 (1994), 5-79 (1995). ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1994__80__5_0.

[SYZ96] Andrew Strominger, Shing-Tung Yau y Eric Zaslow. «Mirror symmetry is T-duality». En: *Nuclear Phys. B* 479.1-2 (1996), págs. 243-259. ISSN: 0550-3213,1873-1562. DOI: 10.1016/0550-3213(96)00434-8. URL: https://doi.org/10.1016/0550-3213(96)00434-8.

[Vog24] Jesse Vogel. «Motivic invariants of character stacks». Tesis doct. Universiteit Leiden, 2024. URL: https://hdl.handle.net/1887/3762962.

[VW95] Cumrun Vafa y Edward Witten. «On orbifolds with discrete torsion». En: *J. Geom. Phys.* 15.3 (1995), págs. 189-214. ISSN: 0393-0440,1879-1662. DOI: 10.1016/0393-0440(94)00048-9. URL: https://doi.org/10.1016/0393-0440(94)00048-9.