UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

El grupo de estructura de una JB-álgebra y la acción sobre el cono de elementos positivos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el area Ciencias Matemáticas

José Alejandro Luna

Director de Tesis: Dr. Gabriel Larotonda
Consejero de Estudios: Dr. Esteban Andruchow
Lugar de Trabajo: Universidad de Buenos Aires.

Buenos Aires, 20 de noviembre de 2022

El grupo de estructura de una JB-álgebra y la acción sobre el cono de elementos positivos

El objetivo de la tesis es caracterizar al grupo de estructura de una JB-álgebra y estudiar las estructuras métricas que aparecen en un subgrupo del mismo y en el cono de elementos positivos, vinculadas por una acción.

En el primer capítulo revisaremos las estructuras métricas y geométricas con las que trabajaremos en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo daremos un vistazo general a dos temas con los que trabajaremos durante la tesis: los conos y las álgebras de Jordan. Daremos especial atención a las JB-álgebras, cuya norma está asociada a la estructura de orden dada por el cono de elementos de espectro positivo Ω. Estudiaremos estos elementos, estableceremos un vínculo entre el espectro de elementos x y sus operadores de multiplicación L_x y caracterizaremos los elementos con operador cuadrático $\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}$ positivo.

En el tercer capítulo vamos a considerar un grupo de automorfismos que actúan sobre el cono de elementos positivos; queremos darle estructura de grupo de Lie-Banach. Para dar una estructura de Lie y de variedad apropiada al grupo de transformaciones que fija el cono, que llamaremos $\mathsf{G}(\Omega)$, estudiaremos primero un grupo más grande, el grupo de estructura, y derivaremos la estructura desde allí. Caracterizaremos también a los elementos del grupo de estructura y aplicaremos esto al estudio de los isótopos de Jordan. Para terminar, estudiaremos el caso particular del álgebra de Jordan especial de operadores de un espacio de Hilbert.

En el cuarto capítulo estudiaremos la estructura simétrica y métrica del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ y del cono Ω. Mostraremos una conexión invariante sobre el grupo de estructura. Presentaremos al cono como un espacio homogéneo de Cartan sobre $\mathsf{G}(\Omega)$ y por lo tanto obteniendo una conexión natural sobre él. Luego dotaremos a estos grupos con una métrica invariante a izquierda usando la norma uniforme en las álgebras de Lie de estos grupos. Dotaremos también a Ω con una métrica de Finsler invariante a izquierda y mostraremos que es igual a la métrica cociente obtenida a partir de $\mathsf{G}(\Omega)$. Finalmente usaremos la noción de levantado horizontal de geodésicas para mostrar que los grupos a un parámetro en $\mathsf{G}(\Omega)$ con velocidad inicial en el espacio de operadores de multiplicación son minimales para la distancia inducida por la métrica invariante en $\mathsf{G}(\Omega)$.

Palabras clave: Álgebras de Jordan, Representación cuadrática, JB-álgebras, Grupo de estructura, Grupo de automorfismos, Isótopos de Jordan, Métrica de Finsler.

The structure group of a JB-algebra and the action on the cone of positive elements

The objective of this thesis is to characterize the structure group of a JB-algebra and to study the metric structures that appear in a subgroup of it and in the cone of positive elements, linked by an action.

In the first chapter we will review the geometric and metric structures that we will work with in the following chapters.

In the second chapter we will give an overview of two topics that we will work with during the thesis: cones and Jordan algebras. We will pay special attention to JB-algebras, whose norm is associated with the order structure given by the cone of positive spectrum elements Ω. We will study these elements, we will establish a link between the spectrum of elements x and their multiplication operators L_x, and we will characterize the elements with positive quadratic operator $\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2}$.

In the third chapter we are going to consider a group of automorphisms that acts on the cone of positive elements; we want to give it a Lie-Banach group structure. To give an appropriate manifold and Lie structure to the group of transformations that fixes the cone, which we will call $\mathsf{G}(\Omega)$, we will first study a larger group, the structure group, and derive the structure from there. We will also characterize the elements of the structure group and apply this to the study of Jordan isotopes. Finally, we will study the particular case of the special Jordan algebra of operators of a Hilbert space.

In the fourth chapter we will study the symmetric and metric structure of $\mathsf{G}(\Omega)$ and Ω. We will show an invariant connection on the structure group. We will present the cone as a homogeneous Cartan space over $\mathsf{G}(\Omega)$ and thus obtain a natural connection over it. We will then endow these groups with a left-invariant metric using the uniform norm on the Lie algebras of these groups. We will also equip Ω with a left-invariant Finsler metric and show that it is equal to the quotient metric obtained from $\mathsf{G}(\Omega)$. Finally we will use the notion of horizontal lifting of geodesics to show that the one-parameter groups in $\mathsf{G}(\Omega)$ with initial velocity in the space of multiplication operators are minimal for the distance induced by the invariant metric in $\mathsf{G}(\Omega)$.

Keywords: Jordan algebras, Quadratic representation, JB-algebras, Structure group, Automorphism group, Jordan isotopes, Finsler metric.

A Juli

Índice general

Agradecimientos

A Juli, por estar a mi lado durante este recorrido, festejando en los buenos momentos y tomándome de la mano en los malos. A mi compañero de vida.

A mi familia, por siempre apoyarme en lo que me propongo.

A Gabriel, por guiarme durante estos años, aconsejando y ayudando. Por ser siempre una gran persona en la que poder confiar.

A los amigos que me acompañaron, en especial a Pancho, Dani e Iván, que me escucharon cuando lo necesitaba.

Introducción

La geometría del grupo lineal general con una métrica riemanniana invariante a izquierda ha sido un tema de interés desde los trabajos fundamentales de Arnol'd sobre el grupo de difeomorfismos que preservan el volumen de una región espacial [4]. En su construcción, la conexión tiene una estructura más relevante que la distancia, y es resolviendo la ecuación de Euler para las geodésicas que se describe el movimiento del fluido. Por otro lado, en el marco del grupo $G_{\mathcal{A}}$ de elementos invertibles de una C^*-álgebra $\mathcal{A}$, es más natural considerar la métrica de Finsler obtenida al trasladar a izquierda la norma espectral del álgebra, y las conexiones lineales que surgen en este escenario no son necesariamente la conexión de Levi-Civita de una métrica riemanniana; este es el punto de vista adoptado por Corach, Porta y Recht (ver [14] y las referencias allí). Mediante la acción $(g, a) \mapsto gag^*$ de $G_{\mathcal{A}}$ sobre el cono positivo Ω del álgebra $\mathcal{A}$, es posible estudiar la relación entre las geometrías del grupo $G_{\mathcal{A}}$, el estabilizador de la acción $U_{\mathcal{A}}$ (el grupo unitario de $\mathcal{A}$), y el espacio cociente $\Omega \simeq G_{\mathcal{A}}/U_{\mathcal{A}}$, como se muestra en [15]. La métrica del cono obtenida por esta construcción coincide con la métrica de Thompson descripta por Nussbaum en [37]. Este punto de vista de espacios homogéneos fue luego transportado a varios grupos de operadores y sus espacios homogéneos, ver [2, 13, 16, 28] por mencionar algunos. Nuestra intención con este trabajo es geometrizar algunos grupos asociados a un álgebra de Jordan Banach V, siguiendo los lineamientos de las observaciones anteriores.

La teoría de las álgebras de Jordan reales V fue introducida como un medio para tratar sistemáticamente con los observables en la mecánica cuántica por Jordan, Wigner y von Neumann [20], pero desde el principio hubo dificultades en el marco de álgebras infinito dimensionales, y varios resultados bien conocidos para álgebras de dimensión finita todavía no existen en el marco infinito dimensional. Más recientemente, el célebre teorema de Koecher y Vinberg fue extendido al marco de álgebras de Jordan Banach (JB-álgebras para abreviar) por Chu (ver [11] y las referencias allí), completando la caracterización del cono positivo Ω de V obtenida por Kaup y Upmeier en [19].

En el marco de las álgebras de Jordan surge naturalmente un subrgrupo de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$: el grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Vamos a geometrizar este grupo y algunos subgrupos del mismo, en particular el subgrupo $\mathsf{G}(\Omega) \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ que deja fijo el cono positivo $\Omega \subset \mathsf{V}$. Este grupo cumple el rol del grupo $G_{\mathcal{A}}$, mediante la acción $(g, a) \mapsto g(a)$ sobre el cono Ω, y el grupo de automorfismos del álgebra $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ ocupa el lugar del grupo unitario en el escenario anterior.

El propósito de esta tesis es extender los resultados conocidos sobre álgebras de Jordan y el grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ de un álgebra de Jordan real V, al marco de JB-álgebras de dimensión infinita. Dado un elemento x en V estudiaremos la relación entre el espectro de x y el espectro de los operadores relacionados a x a través de la estructura del álgebra. Demostramos que el grupo de estructura, el grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ que fija el cono y el grupo de automorfismos $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ del álgebra V son grupos de Lie-Banach embebidos de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$, y cada una de las inclusiones $\mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathsf{G}(\Omega) \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ son de subgrupos de Banach-Lie embebidos. Damos una descripción completa de las componentes de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ a través de conos y proyecciones centrales, un resultado que generaliza naturalmente la presentación de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ para álgebras de Jordan euclidianas (semisimple y de dimensión finita). En particular, esto describe los isótopos isomorfos del álgebra V. Aplicamos estos resultados a $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ el JB-álgebra especial de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, describiendo los grupos $\mathtt{Str}(\mathsf{V}), \mathsf{G}(\Omega), \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, sus álgebras de Lie y sus componentes conexas.

Vamos a dotar al cono Ω de estructura de espacio simétrico y estudiaremos la estructura métrica que se obtiene a través del spray canónico. Definiremos una métrica de Finsler en Ω y veremos que las geodésicas de la conexión son minimizantes para esta métrica. Separadamente definiremos otra distancia en Ω, y probaremos que es igual a la distancia inducida por la métrica de Finsler. En particular mostraremos cuales son los levantamientos isométricos de Ω a $\mathsf{G}(\Omega)$.

La tesis estará organizada de la siguiente manera. En el primer capítulo haremos un repaso de los preliminares geométricos necesarios para el desarrollo de la tesis. Daremos generalidades de variedades de Banach y grupos de Lie-Banach. Seguiremos con espacios homogéneos y espacios simétricos, deteniendonos aquí un poco mas en detalle.

En el segundo capítulo comenzaremos discutiendo sobre conos en espacios de Banach y el orden que surge a partir de ellos, así como la norma asociada al orden. Definiremos la estructura algebraica de las álgebras de Jordan, prestando particularmente atención a su representación cuadrática. Agregaremos estructura analítica, suministrando una norma en el álgebra; esta estructura se llamará JB-álgebra. Podremos estudiar el espectro de los elementos del álgebra y el espectro de los operadores multiplicación y de su representación cuadrática. Obtendremos resultados sobre esos espectros, en particular la siguiente proposición vinculando el espectro de un elemento con el de su operador de multiplicación:

Proposición. Sea V una JB-álgebra y x en V. Entonces $co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Y el siguiente teorema caracterizando los elementos cuya representación cuadrática tiene espectro positivo:

Teorema. Sea V una JB-álgebra y x un elemento de V. Entonces el operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y una simetría central ε tales que $x = \varepsilon v$.

Estos dos son los principales resultados del segundo capítulo.

En el tercer capítulo introduciremos al grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y a tres importantes subrupos del mismo: el grupo interno de estructura $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$, el grupo de automorfismos $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ y el grupo que fija al cono $\mathsf{G}(\Omega)$. Daremos estructura de Lie-Banach a todos estos grupos y veremos que son subgrupos embebidos, por lo que la topología inducida es igual a la topología original. Estudiaremos las componentes conexas de $\mathsf{G}(\Omega)$ y $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ obteniendo el siguiente resultado:

Teorema. Sea V una JB-álgebra. Definamos $F : \mathsf{G}(\Omega) \times [0,1] \to \mathsf{G}(\Omega)$ como $F(g,t) = \mathrm{U}_{e^{-t\ln(g1)/2}} \cdot g$. Entonces $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es un retracto por deformación fuerte de $\mathsf{G}(\Omega)$ por F. En particular $\mathsf{G}(\Omega)$ y $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ tienen el mismo número de componentes conexas.

Caracterizaremos al grupo de estructura, obteniendo el resultado principal del capítulo:

Teorema. Sea V una JB-álgebra y g una transformación en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces existe v en Ω, una proyección central p en V con $S_p = L_{2p-1}$ y un automorfismo k tales que

$$g = \mathrm{U}_v\, S_p k = S_p\, \mathrm{U}_v\, k.$$

En particular, para todo g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ existe una simetría central ε_p perteneciente a $g(\Omega)$.

A partir de este resultado obtenemos algunos corolarios coloridos. Estudiando las coclases de $\mathsf{G}(\Omega)$ en el grupo de estructura obtenemos que en cada coclase hay un y solo un operador $S_p = L_{2p-1}$ en ella. Podemos caracterizar también a los elementos que surgen de evaluar operadores del grupo de estructura en el cono: son exactamente de la forma εv donde ε es una simetría central y v es positivo, y por el resultado del capítulo anterior, son los elementos de representación cuadrática positiva. Y caracterizaremos también a las álgebras isótopas isomorfas de V. Finalmente, estudiaremos el caso particular del álgebra de operadores de un espacio de Hilbert.

En el cuarto capítulo dotaremos a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $\mathsf{G}(\Omega)$ con un spray invariante a izquierda. Daremos también estructura de espacio simétrico de Cartan a Ω con respecto a una acción de $\mathsf{G}(\Omega)$: $g \cdot x = g(x)$. Estudiaremos es spray natural que surge a partir de esta estructura. Daremos a Ω una métrica de Finsler invariante y definiremos la distancia como el ínfimo de longitud de curvas que unen dos puntos. Como resultado principal de la sección tendremos la minimalidad de las geodésicas del spray canónico:

Teorema. La curva geodésica $\alpha(t) = \mathrm{U}_{p^{1/2}} \exp(t\, \mathrm{U}_{p^{1/2}}^{-1}\, v)$ es minimizante para la distancia dist_Ω en Ω, es decir,

$$\mathrm{Length}_\Omega(\alpha) = \|U_{p^{-1/2}} v\| = \mathrm{dist}_\Omega(\alpha(0), \alpha(1)).$$

Extenderemos este resultado a normas absolutas y simétricas en el caso de dimensión finita. Mostraremos una métrica de Finsler en $\mathsf{G}(\Omega)$ que nos permitirá medir distancias allí, y a partir de ella estableceremos una nueva distancia en Ω: la distancia entre dos puntos en Ω es igual a la distancia entre sus fibras en $\mathsf{G}(\Omega)$. Veremos que las dos distancias definidas en Ω son iguales y en particular obtendremos levantados isométricos de curvas en Ω a $\mathsf{G}(\Omega)$ como resultado principal de la sección:

Proposición. Sea γ un camino suave a trozos en Ω uniendo x e y. Entonces existe un único levantamiento horizontal Λ en $\mathsf{G}(\Omega)$ con $\Lambda(0) = \mathrm{U}_{x^{1/2}}$. Este levantamiento está dado por $\Lambda = U_{\gamma^{1/2}} k_t$, donde k_t es un camino de automorfismos con punto inicial Id que satisface la ecuación diferencial

$$k_t' = [L_{(\gamma_t^{1/2})'}, L_{\gamma_t^{-1/2}}] k_t.$$

Mas aún, este levantamiento es isométrico.

Seguiremos con el siguiente resultado:

Proposición. Sea x en V y D una derivación. Entonces $\|L_x + D\| \geq \|D\|$.

Terminaremos mostrando:

Proposición. El camino óptimo en $\mathsf{G}(\Omega)$ entre Id y e^{L_z} es $t \mapsto e^{tL_z}$.

Podemos considerar el mismo caso para los grupos a un parámetro en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Sabemos que los grupos a un parámetro son mas cortos que cualquier curva en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, pero no es conocido si siguen siendo los caminos mas cortos si consideramos todas las curvas en $\mathsf{G}(\Omega)$. Conjeturamos que es así: que los grupos a un parámetro en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ son minimizantes en $\mathsf{G}(\Omega)$.

Capítulo 1

Espacios homogéneos y simétricos

Esta tesis está presentada con un punto de vista geométrico, por lo que en este primer capítulo haremos un repaso de los conceptos básicos de geometría diferencial en espacios de Banach, dando particular atención a los grupos de Lie-Banach. Luego estudiaremos los espacios homogéneos y sus propiedades, y finalmente analizaremos los espacios simétricos y la conexión canónica que aparece en ellos.

1.1. Variedades de Banach

En estas secciones no ahondaremos demasiado en las demostraciones. Para encontrar un estudio mas profundo del tema se puede [25], [21] y [6].

Definición 1.1.1 (Variedad de Banach)**.** Dado E un espacio de Banach y M un espacio topológico, decimos que M es una *variedad de Banach* C^k*,* C^∞ *o analítica* si está modelada por cartas $\varphi : U_\varphi \subset M \to E$, donde U_φ es un abierto de M y las funciones de transición son C^k, C^∞ o analíticas respectivamente.

Podemos considerar el concepto de subvariedad.

Definición 1.1.2 (Subvariedad embebida)**.** Sea E un espacio de Banach, M una variedad de Banach modelada por E y N un subespacio topológico de M. Decimos que N es una *subvariedad embebida* de M si existe F subespacio cerrado de E tal que para todo p en N existe una carta $\varphi_p : U \to E$ que contenga a p y que $\varphi(U \cap N)$ sea un abierto de F.

La condición de subvariedad embebida es mas débil que la condición de subvariedad regular: para ser regular, el subespacio cerrado F debe estar complementado en E, lo cual no siempre es cierto en espacios de Banach incluso si el subespacio es cerrado.

Dada una variedad de Banach M y un punto p en M podemos definir el *espacio tangente* T_pM como la clase de equivalencia de curvas suaves que pasan por p. El espacio tangente se puede identificar con el espacio modelador E. Podemos también definir el *fibrado tangente* $\pi : TM \to M$ donde $TM = \sqcup_p T_pM$ y $\pi(p, v) = v$, el cual es una variedad de Banach modelada por $E \times E$.

Dadas M y N dos variedades de Banach y $f : M \to N$ diferenciable podemos definir *el diferencial* $f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)N}$, donde dado v en T_pM y γ curva en M con $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ tenemos $f_{*p}(v) = (f \circ \gamma)'(0)$. Definimos también $f_* : TM \to TN$, $f_*(p, v) = (f(p), f_{*p}(v))$.

Definición 1.1.3. Sea M una variedad de Banach. Una *métrica de Finsler* en M es una función continua $N : TM \to [0, +\infty)$ tal que $N|_{T_pM}$ es una norma para todo p en M. Vamos a notar $N(p, v) = \|v\|_p$.

Dada $\alpha : [a, b] \to M$ una curva suave a trozos definimos la *longitud de la curva* como

$$\text{Length}(\alpha) = \int_a^b \|\dot{\alpha}(t)\|_{\alpha(t)} dt.$$

La longitud solo depende de la imagen de α y no de la parametrización.

Vamos a enunciar el siguiente teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios de Banach que nos será útil. Se puede encontrar su demostración en [22, Proposition IV.1.1]

Teorema 1.1.4. *Sea J un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a 0 y sea U un abierto de un espacio de Banach E. Sea x_0 en U, y supongamos que $f : J \times U \to E$ es una función continua, acotada en $J \times U$ y que cumple la condición de Lipschitz con constante $K \geq 1$ en U uniformemente respecto a J. Existe entonces un subintervalo $\tilde{J}$ que contiene a 0, un entorno W de x_0 y una función diferenciable $\alpha : \tilde{J} \times W \to U$ tal que si notamos $\alpha(t, x) = \alpha_x(t)$ entonces*

$$\alpha_x'(t) = f(t, \alpha_x(t)), \qquad \alpha_x(0) = x.$$

Decimos que $X : M \to TM$ es un *campo diferenciable* si es una sección diferenciable del fibrado tangente: para cada punto p en M obtenemos un vector tangente v en T_pM. Notamos $X_p = X(p)$. Dados X e Y campos diferenciables definimos en una carta el *corchete* $[X, Y]_p = DY_p(X_p) - DX_p(Y_p)$, el cual también es un campo diferenciable. Notamos como $\mathfrak{X}(M)$ al espacio de campos diferenciables en M, el cual es un *álgebra de Lie*.

Dado X un campo diferenciable decimos que $\rho_t(p) = \rho_p(t) = \rho_t^p$ es el flujo de X si $\rho_p(0) = p$ y $\rho_p'(t) = X_{\rho_p(t)}$. Notemos que el Teorema 1.1.4 nos garantiza la existencia del flujo de campos.

Dado que el fibrado TM vuelve a ser una variedad diferenciable podemos considerar su fibrado tangente y obtener $TTM = T(TM)$. Los elementos de este fibrado son de la forma (p, v, u, w), con p en M y v, u y w en T_pM. Tiene dos proyecciones: la usual, $\pi = \pi_{TM}(p, v, u, w) = (p, v)$ y $\pi_*(p, v, u, w) = (\pi_M)_*(p, v, u, w) = (p, u)$.

Dado un fibrado vectorial y s real notamos μ_s a la función multiplicación por s en la fibra. Para abreviar notaremos de la misma manera a la multiplicación en TM y en TTM.

Definición 1.1.5 (Spray cuadrático)**.** Sea M una variedad de Banach. Decimos que $F : TM \to TTM$ es un *spray cuadrático* si es una sección de π_* tal que

$$F(\mu_s V) = (\mu_s)_* \mu_s F(V)$$

para todo V en TM.

Definimos el *operador bilineal de Christoffel* como la linealización de F, es decir,

$$\Gamma_p(V, W) = \frac{1}{2}(F_p(V + W) - F_p(V) - F_p(W)).$$

A partir de cualquier spray cuadrático podemos definir una *conexión*: dados X e Y campos diferenciables,

$$(\nabla_X Y)_p = DY_p(X_p) - \Gamma_p(X_p, Y_p).$$

Observación 1.1.6. En coordenadas un spray F debe ser de la forma $F(p, v) = (p, v, v, f(p, v))$. Abusando notación, la condición del spray se puede expresar como $F(sV) = s^2F(V)$ para V en TM.

Toda conexión que proviene de un spray no tiene torsión: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

Definición 1.1.7 (Geodésica)**.** Sea M una variedad diferenciable con spray cuadrático F. Decimos que una curva α es una *geodésica* de F si

$$\alpha'' = F(\alpha').$$

Gracias al Teorema 1.1.4 aplicado a TM tenemos que dados p en M y v en T_pM existe única α geodésica tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$.

A partir de geodésicas se puede definir un mapa exponencial $\operatorname{Exp} : U \subset T_pM \to M$ de la siguiente manera: dado v en T_pM sea γ la geodésica tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$; definimos $\operatorname{Exp}(v) = \gamma(1)$. El conjunto U es un entorno de 0 en T_pM y $\operatorname{Exp}_{*0} = Id$, por lo que Exp es un difeomorfismo entre un entorno de 0 en T_pM y un entorno de p en M.

Decimos que (M, F) es *geodésicamente completo* si el dominio máximo de toda geodésica es $\mathbb{R}$. En ese caso Exp está definido en todo T_pM para todo p en M.

Definición 1.1.8 (Transporte Paralelo)**.** Sea M una variedad diferenciable con spray cuadrático F. Dada una curva γ en M decimos que un campo μ_t sobre γ es el *transporte paralelo* de $v \in T_{\gamma_0}M$ a lo largo de γ si cumple que

$$\mu' = \Gamma_\gamma(\gamma', \mu), \qquad \mu(0) = v.$$

Nuevamente gracias al Teorema 1.1.4 tenemos que existe el transporte paralelo para todo v en $T_{\gamma_0}M$. Si fijamos t la aplicación $P_t^{t+s} : T_{\gamma_t}M \to T_{\gamma_{t+s}}M$ dada por $v \mapsto \mu^v(t)$ es un isomorfismo de espacios de Banach.

Definición 1.1.9 (Curvatura)**.** Sea M una variedad diferenciable con spray cuadrático F. Definimos el *tensor de curvatura* R: dados X, Y y Z campos diferenciables,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Definición 1.1.10 (Campo de Jacobi)**.** Sea M una variedad diferenciable con spray cuadrático F y γ una geodésica de F. Decimos que un campo ν sobre γ es un *campo de Jacobi* si cumple que

$$D^2_{\gamma'}\nu = R(\gamma', \nu)\gamma'.$$

Tenemos una definición equivalente de campos de Jacobi. Dada γ_t una curva, decimos que $\gamma_t(s)$ es una variación de γ_t si $\gamma_t(0) = \gamma_t$. Llamamos campo variacional al campo a lo largo de γ_t dado por $X_t = \frac{d}{ds}\gamma_t(s)|_{s=0}$. Si γ es una geodésica y $\gamma_t(s)$ es una variación de γ por geodésicas (es decir, para todo s fijo $\gamma_t(s)$ es una geodésica) entonces el campo variacional de esta variación es de Jacobi. Recíprocamente, para todo campo de Jacobi ν existe una variación de γ por geodésicas tal que ν es su campo variacional.

Dada $f : U \to V$ una función suave y biyectiva con $U \subset M$ y $V \subset N$ y X un campo diferenciable en U podemos considerar el *push-foward* de X, el campo dado localmente de la forma $(f_*X)_{f(p)} = f_{*p}(X_p)$. A partir del push-foward podemos definir los automorfismos del spray y la conexión.

Definición 1.1.11 (Automorfismos de la conexión)**.** Sean M, $\overline{M}$ variedades diferenciables con spray tales que ∇ y $\overline{\nabla}$ son sus respectivas conexiones. Sea $f : M \to \overline{M}$ un difeomorfismo local. Decimos que f es una *transformación afín* si para cada $U \subset M$ donde $f|_U : U \to f(U)$ es biyectiva y para cada par de campos X, Y en U tenemos que

$$f_*(\nabla_X Y) = \nabla_{f_*X} f_*Y.$$

En particular, si $M = \overline{M}$, $\nabla = \overline{\nabla}$ entonces decimos que f es un *automorfismo de la conexión*. Vamos a notar a estos automorfismos como $\texttt{Aut}(M, \nabla)$.

Definición 1.1.12. Sean M una variedad diferenciable con spray F. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo local. Decimos que f es un *automorfismo del spray* si para cada V en TM tenemos que

$$F(f_*V) = (f_*)_*F(V).$$

Vamos a notar a estos automorfismos como $\texttt{Aut}(M, F)$.

Tenemos el siguiente lema que vincula estos conceptos de automorfismos.

Lema 1.1.13. Sean M una variedad diferenciable con spray F. Entonces $\texttt{Aut}(M, F) = \texttt{Aut}(M, \nabla)$.

Observación 1.1.14. Supongamos que f pertenece a $\texttt{Aut}(M, \nabla)$. Entonces f mapea geodésicas en geodésicas, pues dada γ geodésica

$$F((f \circ \gamma)') = F(f_*\gamma') = (f_*)_*F(\gamma') = (f_*)_*\gamma'' = (f \circ \gamma)''.$$

Mas aun, si γ es una curva en M, $p = \gamma(0)$ y μ_t indica el transporte paralelo de un vector tangente v en T_pM entonces $\eta = Df_\gamma\mu$ es el transporte paralelo de $w = Df_pv$ a lo largo de $\beta = f \circ \gamma$.

Tenemos el siguiente teorema que caracteriza los campos cuyo flujo es un automorfismo de la conexión. Su demostración puede encontrarse en [22, Chapter XIII, Section 2].

Teorema 1.1.15. *Sea M una variedad diferenciable con spray F y sea X un campo diferenciable en M con flujo ρ_t. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *ρ_t pertenece a $\mathtt{Aut}(M, \nabla)$ para todo t.*
2. *Para cualquier geodésica γ en M si tomamos la restricción de X a lo largo de γ obtenemos un campo de Jacobi.*
3. *Para todo par de campos diferenciables Y y Z tenemos que*

$$[X, \nabla_Y Z] = \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Y [X, Z].$$

Definición 1.1.16 (Campos de Killing)**.** Sea M una variedad diferenciable con spray F. Decimos que un campo diferenciable X es un *campo de Killing* si cumple alguna de las equivalencias del teorema anterior.

El conjunto de campos de Killing, que notaremos $Kill(M, \nabla)$, es una subálgebra de Lie real de $\mathfrak{X}(M)$.

El siguiente lema nos dice que los campos de Killing están caracterizados por su valor y el de su derivada en un punto.

Lema 1.1.17. Sea M una variedad diferenciable conexa con spray F.

1. Dadas f y g en $\mathtt{Aut}(M, \nabla)$, si existe p en M tal que $f(p) = g(p)$ y $Df_p = Dg_p$ entonces $f = g$.
2. Dados X e Y en $Kill(M, \nabla)$, si existe p en M tal que $X_p = Y_p$ y $DX_p = DY_p$ entonces $X = Y$.

1.2. Grupos de Lie-Banach

Definición 1.2.1. Sea G un grupo topológico. Decimos que es un *grupo de Lie-Banach* si es una variedad diferenciable modelada por un espacio de Banach E tal que las operaciones multiplicación e inversa son diferenciables.

Vamos a llamar e a la identidad del grupo G. Notamos $L_g(h) = gh$, $R_g(h) = hg$ la función de multiplicación a derecha e izquierda. Notemos que L_g y R_g son difeomorfismos de G y por lo tanto $(L_g)_{*h} : T_hG \to T_{gh}G$ es un isomorfismo. Esto permite que podamos trasladar elementos del tangente "multiplicándolos"por algún g. Si v pertenece a T_gG entonces "$g^{-1}v$" $= (L_{g^{-1}})_* v$ pertenece a T_eG.

Observación 1.2.2. Si g_t es una curva suave en G, diferenciando $g_t g_t^{-1} = e$ podemos obtener que $\frac{d}{dt}(g_t^{-1}) = -g_t^{-1} g_t' g_t^{-1}$.

Decimos que un campo X es un *campo invariante a izquierda* si cumple que $l_h X_g = X_{hg}$, es decir, si $(L_g)_* X = X L_g$. Se define análogamente un *campo invariante a derecha*. Notemos que dado un elemento v en $T_e G$ podemos definir un campo invariante a izquierda de la forma $X_g = (L_g)_* v$. Esto nos da una identificación de los campos invariantes a izquierda con $T_e G$. Como el corchete de dos campos invariantes vuelve a ser invariante tenemos que $T_e G$ es un álgebra de Lie a la que notaremos $\mathrm{Lie}(G)$ y llamaremos *el álgebra de Lie-Banach del grupo G*.

Dada N una métrica de Finsler en G decimos que es una *métrica de Finsler invariante a izquierda* si $\|(L_h)_{*g} v\|_{hg} = \|hv\|_{hg} = \|v\|_g$ para todo g, h en G y v en $T_g G$. Notemos que dada una norma $\|\cdot\|_e$ fija en $\mathrm{Lie}(G)$ podemos extenderla a todo TM como $\|v\|_g = \|g^{-1} v\|_e$, la cual es una métrica de Finsler invariante a izquierda.

Dada F un spray decimos que es un *spray invariante a izquierda* si dados g y h en G, v en $Lie(G)$ tenemos que $F_g(gv) = F_{hg}(hgv)$; en particular, $F_g(gv) = F_e(v)$. Tenemos entonces que para g, h en G y v, w en $Lie(G)$, $\Gamma_g(gv, gw) = \Gamma_{hg}(hgv, hgw) = \Gamma_e(v, w)$.

Llamamos C_g a la conjugación por g, $C_g(h) = ghg^{-1}$. Vamos a notar $\mathrm{Ad}_g = (C_g)_*$ a su diferencial, por lo que podemos definir la función $\mathrm{Ad} : G \to \mathsf{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ y llamaremos ad a su diferencial. Se puede comprobar que $\mathrm{ad}(v) = [v, \cdot]$.

Dado un campo invariante a izquierda X^v con $X^v_e = v$ consideramos $\phi_t = \rho(t, e)$ el flujo de X^v por e. Es simple comprobar que ϕ_t está definido para todo $\mathbb{R}$ y que es un homomorfismo, es decir, $\phi_{t+s} = \phi_t \phi_s$. Llamaremos *grupos a un parámetro* a estas curvas y las notaremos $\phi_t = e^{tv}$. Similarmente, cambiando e por g, obtenemos que ge^{tv} es un grupo a un parámetro que pasa por g.

Podemos definir la *exponencial* del grupo G como el mapa $v \mapsto e^v = exp(v)$. La exponencial es diferenciable y $(exp)_{*e} = Id$, por lo que es un difeomorfismo alrededor de e. El mapa $v \mapsto ge^v$ es una carta local alrededor de g.

Lema 1.2.3. El diferencial de la función exponencial está dado por

$$(exp)_{*v} w = e^v \frac{1 - e^{-ad_v}}{ad_v} w.$$

También puede expresarse como

$$(exp)_{*v} w = e^v \int_0^1 e^{-tv} w e^{tv} dt.$$

Supongamos que G y H son dos grupos de Lie-Banach y $f : G \to H$ es un morfismo de grupos diferenciable. Entonces f_{*e} es un morfismo de álgebras de Lie y $exp_H \circ f_{*e_G} = f \circ exp_G$. En particular, como Ad es un morfismo de grupos diferenciable tenemos que

$$Ad_{e^v} = e^{ad_v}.$$

Definición 1.2.4 (Subgrupo Lie-Banach)**.** Sea G un grupo de Lie-Banach y H un subgrupo de G. Decimos que H es un subgrupo de Lie-Banach de G si es una subvariedad embebida de G.

Notemos que un subgrupo de Lie-Banach tiene la topología de subespacio de G. Mas aún, un subgrupo de Lie-Banach es topológicamente cerrado. Sin embargo, a diferencia del caso de dimensión finita, el recíproco no es cierto.

Lema 1.2.5. Sea G un grupo de Lie-Banach y H un subgrupo de Lie-Banach de G. Tenemos que $\mathrm{Lie}(H) \subset \mathrm{Lie}(G)$ es una subálgebra de Lie y

$$\mathrm{Lie}(H) = \{v \in \mathrm{Lie}(G) : e^{tv} \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

Nuevamente la recíproca no es cierta. Si tomamos $\mathfrak{H}$ una subálgebra de Lie de $\mathrm{Lie}(G)$ que cumpla la tesis del lema podemos considerar el subgrupo generado por las exponenciales de $\mathfrak{H}$, es decir, $H_e = \langle e^v : v \in \mathfrak{H}\rangle$. H_e tiene estructura de grupo de Lie-Banach pero en general no es un subgrupo de Lie-Banach de G, ni siquiera en dimensión finita.

Si H es un subgrupo cerrado de G podemos considerar $\mathfrak{H} = \{v \in \mathrm{Lie}(G) : e^{tv} \in H \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$, la cual es una subálgebra de Lie cerrada de $\mathrm{Lie}(G)$, y restringiendo la exponencial obtenemos $exp : \mathfrak{H} \to H$. Consideramos nuevamente $H_e = \langle e^v : v \in \mathfrak{H}\rangle$, el cual obtiene una estructura de subvariedad inmersa, es decir que la inclusión es una inmersión de rango cerrado, pero en general no es una subvariedad de Lie-Banach. Sin embargo tenemos:

Teorema 1.2.6. *Sea G un grupo de Lie-Banach y H un subgrupo cerrado de G y sea $\mathfrak{H} = \{v \in \mathrm{Lie}(G) : e^{tv} \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$. Supongamos que existe un entorno abierto U de 0 tal que $exp(U \cap \mathfrak{H}) = exp(U) \cap H$. Entonces H tiene una única estructura de variedad diferenciable que lo hace un subgrupo de Lie-Banach de G.*

Dado G un grupo de Lie-Banach podemos considerar G_0 la componente conexa de e en G.

Proposición 1.2.7. Sea G un grupo de Lie-Banach con identidad e. Entonces cualquier entorno conexo de e genera G_0. Mas aún, G_0 es un subgrupo de Lie-Banach de G abierto y cerrado y $\mathrm{Lie}(G_0) = \mathrm{Lie}(G)$.

Terminamos la sección con un caso particular de subgrupo de Lie-Banach.

Definición 1.2.8 (Subgrupo algebraico)**.** Sea A un álgebra de Banach asociativa, es decir, un espacio de Banach con estructura de álgebra asociativa tal que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. Notamos $A^\times$ a los elementos inversibles de A, y sea G un subgrupo de $A^\times$. Decimos que G es un *subgrupo algebraico de grado n* de $A^\times$ si existe una familia de polinomios continuos $\mathcal{P}$ de grado menor o igual a n tal que

$$G = \{x \in A^\times : P(x, x^{-1}) = 0 \text{ para todo } P \in \mathcal{P}\}.$$

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [6, Theorem 4.13].

Teorema 1.2.9. *Sea A un álgebra de Banach asociativa compleja. Supongamos que G es un subgrupo algebraico de $A^\times$ de grado menor o igual a n. Entonces G es un subgrupo de Lie-Banach de $A^\times$ y si $U = \{a \in A : \|a\| < \frac{\pi}{n}\}$ entonces*

$$exp(U \cap \mathrm{Lie}(G)) = exp(U) \cap G.$$

Mas aún, $\mathrm{Lie}(G)$ *tiene un complemento cerrado en* $\mathrm{Lie}(A^\times) \equiv A$.

1.3. Espacios homogéneos

Para profundizar en los temas de esta sección recomendamos ver [6], [25, Capítulo 3, Sección 3] y [9, Chapter III, Section 1.6].

Sea G un grupo de Lie-Banach y M una variedad de Banach. Una *acción* de G en M es una función $\pi : G \times M \to M$, notando $\pi(g, x) = g \cdot x$, tal que $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$. Podemos considerar para cada x en M la función $\pi_x : G \to M$, $\pi_x(g) = \pi(g, x) = g \cdot x$; y para cada g la función $l_g : M \to M$, $l_g(x) = g \cdot x$.

Decimos que la acción es *transitiva* si para todo x, y en M existe algún g en G tal que $g \cdot x = y$.

Definición 1.3.1. Sea G un grupo de Lie Banach y M una variedad de Banach con una acción de G en M. Decimos que M es un *espacio homogéneo de G* si la acción es transitiva y l_g es un difeomorfismo para todo g en G.

En un espacio homogéneo también podemos trasladar elementos entre los tangentes. Al ser l_g un difeomorfismo, $(l_g)_{*x} : T_xM \to T_{g\cdot x}M$ es un isomorfismo, por lo que si v pertenece a T_xM entonces "$g \cdot v$" $= (l_g)_{*x}v$ pertenece a $T_{g\cdot x}M$.

Dada N una métrica de Finsler en M decimos que es *invariante a izquierda* si $\|g \cdot v\|_{g\cdot o} = \|v\|_o$ para todo o en M, v en T_oM y g en G. Notemos que como en el caso de un grupo de Lie-Banach podemos crear una métrica de Finsler invariante a izquierda a partir de una norma en un espacio tangente fijo: dado o en M y una norma $\|\cdot\|_o$ en T_oM, definimos $\|v\|_{g\cdot o} = \|g^{-1} \cdot v\|_o$.

Llamamos la *isotropia de x* o el *estabilizador de x* al conjunto

$$K_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}.$$

Es un subgrupo cerrado de G, ya que $K_x = \pi_x^{-1}(x)$.

Dado x en M podemos considerar el cociente G/K_x. No es un grupo necesariamente ya que en general K_x no es normal, pero en ciertos casos podemos darle estructura de variedad de Banach.

Teorema 1.3.2. *Sea G un grupo de Lie-Banach y sea H un subgrupo de Lie-Banach regular (es decir, que su álgebra de Lie parte la de G). Entonces existe una única estructura diferenciable en G/H que hace que el cociente $q : G \to G/H$ sea una sumersión.*

Sin embargo, en general uno parte de una estructura diferenciable en el cociente. Tenemos el siguiente resultado en dicho caso.

Teorema 1.3.3. *Sea G un grupo de Lie-Banach y H un subgrupo cerrado de G. Supongamos que G/H tiene estructura de variedad de Banach tal que el mapa cociente $q : G \to G/H$ es diferenciable y que q_{*g} es suryectiva para algún g. Entonces H es un subgrupo de Lie-Banach de G.*

Supongamos que M es un espacio homogéneo de G y tomemos x en M. Podemos identificar M con G/K_x de la forma $\overline{g} \mapsto g \cdot x$, y podemos dotar a G/K_x de una estructura diferenciable de manera que esta identificación sea un difeomorfismo. Tenemos entonces que $M \equiv G/K_x$ y el cociente esta dado por $q = \pi_x$. Como K_x es cerrado, el teorema anterior nos dice que si π_x tiene diferencial suryectiva para algún x entonces K_x es un subgrupo de Lie-Banach de G.

Definición 1.3.4. Un espacio vectorial V se dice *sistema triple de Lie* si existe es una operación trilinear $[\cdot,\cdot,\cdot]$ en V tal que

$$\begin{aligned}
&[u,v,w] = -[v,a,w],\\
&[u,v,w] + [w,u,v] + [v,w,u] = 0,\\
&[u,v,[w,x,y]] = [[u,v,w],x,y] + [w,[u,v,x],y] + [w,x,[u,v,y]].
\end{aligned}$$

Definición 1.3.5. Sea G un grupo e Lie-Banach y K un subgrupo de Lie-Banach regular. Notemos $\mathfrak{G} = \mathrm{Lie}(G)$ y $\mathfrak{K} = \mathrm{Lie}(K)$. Decimos que $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{M}$ es una *descomposición de Cartan de* $\mathfrak{G}$ si

$$[\mathfrak{K},\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}, \qquad [\mathfrak{M},\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{K}.$$

Notemos que $[\mathfrak{K},\mathfrak{K}] \subset \mathfrak{K}$ pues es subálgebra de Lie.

Observación 1.3.6. Notemos que las condiciones de una descomposición de Cartan implican que $[[\mathfrak{M},\mathfrak{M}],\mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}$, por lo que $\mathfrak{M}$ con el producto $[u,v,w] = [[u,v],w]$ es un sistema triple de Lie.

Sea G grupo de Lie y σ un automorfismo involutivo no trivial, es decir, un difeomorfismo distinto a la identidad tal que $\sigma^2 = Id$. Decimos entonces que G es un *grupo con involución de Cartan* σ. Sea K el subgrupo de G dado por los puntos fijos de σ: $K = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$.

El automorfismo σ induce un isomorfismo $\sigma_{*e} : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$. Como dijimos antes, esto implica que para todo v en $\mathfrak{G}$ tenemos que $\sigma(e^v) = e^{\sigma_{*e}v}$.

Diferenciando la igualdad $\sigma^2 = Id$ obtenemos que σ_{*e} también es involutivo. Por lo tanto, tiene autovalores 1 y -1. Notemos que $\mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{K}$ es el autoespacio asociado a 1. Si notamos $\mathfrak{M}$ al autoespacio asociado a -1, tenemos que $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{M}$, por lo que K es un subgrupo de Lie-Banach regular de G.

Afirmo que $\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{M}$ es una descomposición de Cartan de $\mathfrak{G}$: esto es fácil de comprobar gracias al hecho que $\sigma_{*e}[v,w] = [\sigma_{*e}v, \sigma_{*e}w]$.

Por el Teorema 1.3.2 tenemos que existe una única estructura de variedad de Banach en $M = G/K$ tal que el cociente q es una sumersión. Es fácil comprobar que $T_{\overline{e}}M = \mathfrak{M}$ y que $\mathrm{Exp} : \mathfrak{M} \to M$, $\mathrm{Exp}(v) = q(ge^v)$ es una carta alrededor de g.

1.4. Espacios simétricos

Para profundizar en los temas de esta sección se puede consultar [36] y [32].

Definición 1.4.1. Sea M una variedad de Banach. Decimos que M es un *espacio simétrico en el sentido de Loos* si existe un producto diferenciable $\mu(x,y) = x \cdot y$ tal que

1. $x \cdot x = x$.
2. $x \cdot (x \cdot y) = y$.
3. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$.
4. Para todo x en M existe un entorno U de x en M tal que si para y en U se cumple que $x \cdot y = y$ entonces $y = x$.

Podemos pensar a los espacios simétricos de la siguiente manera. Supongamos que para todo par x, y en M existe una única geodésica que los une. Entonces $x \cdot y$ realiza la siguiente operación: tomamos la geodésica α que une x e y tal que pasa por x a tiempo 0 y sea t_0 tal que $y = \alpha(t_0)$, entonces $x \cdot y = \alpha(-t_0)$. Es decir, $x \cdot y$ es el simétrico de y por x a lo largo de la geodésica que los une.

Vamos a notar $S_x : M \to M$, $S_x(y) = x \cdot y$. Tenemos que para todo x, $S_x^2 = Id_M$ y $(S_x)_{*x} = -Id_{T_xM}$. Notemos que la primera y cuarta condición de un espacio simétrico nos dicen que x es un punto fijo aislado de S_x.

Definición 1.4.2. Sea M un espacio simétrico de Loos. Un difeomorfismo $f : M \to M$ se dice un *automorfismo del espacio simétrico* si $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$. Vamos a notar $\mathtt{Aut}(M, \mu)$ al conjunto de automorfismos.

La tercera condición de espacio simétrico implica que S_x es un automorfismo para todo x en M.

Dado M un espacio simétrico de Loos podemos también dotar a TM de la estructura de espacio simétrico. Dados V y W en TM, definimos $\Sigma(V, W) = V \cdot W = \mu_*(V, W)$. Notemos que si v, w pertenecen a T_pM entonces $v \cdot w = 2v - w$. Tenemos además que para V, W en TM, $\pi(V \cdot W) = \pi(V) \cdot \pi(W)$.

Es fácil comprobar que si f es un automorfismo de M entonces f_* es un automorfismo de TM.

Podemos definir un spray canónico.

Teorema 1.4.3. *Sea M un espacio simétrico de Loos. Consideremos Z la sección nula de TM, es decir, $Z(p) = (p, 0)$. Definimos $F : TM \to TTM$,*

$$F(V) = -((\Sigma_{V/2}) \circ Z)_* V.$$

Entonces F es un spray cuadrático en M.

Demostración. Dado $V = (p, v)$ tenemos que

$$\pi_{TM}(F(V)) = \pi_{TM}(-(S_{V/2} \circ Z)_*(V)) = (S_{V/2} \circ Z)(\pi(-V)) = \frac{V}{2} \cdot Z(-\pi(V)) = V,$$

y

$$(\pi_M)_*(F(V)) = -(\pi \circ S_{V/2} \circ Z)_*(V) = -(S_p \circ \pi \circ Z)_*(V) = -(S_p)_* V = V.$$

Por lo tanto, F es una sección de ambos fibrados.

Notemos que dados V y W en TM, $(sV)\cdot W = \mu_*(sV,W) = s\mu_*(V,W) = s(V\cdot W)$. Por lo tanto,

$$F(sV) = -(S_{\frac{sV}{2}}\circ Z)_*(sV) = -s(s_{TM}\circ S_{V/2}\circ Z)_*(V) = (s_{TM})_* s_{TM}F(V),$$

por lo que F es un spray cuadrático. $\square$

El operador de Christophel está dado por

$$\Gamma_p(V,W) = -\frac{1}{2}(S_V\circ Z)_{*p}W = -\frac{1}{2}(S_W\circ Z)_{*p}V.$$

Podemos obtener también el tensor curvatura

$$R(U,V) = \frac{-1}{4}\left((S_U\circ Z)_*(S_V\circ Z)_* - (S_V\circ Z)_*(S_U\circ Z)_*\right). \tag{1.1}$$

Consideremos los automorfismos del spray, $\mathtt{Aut}(M,F)$. El siguiente teorema vincula las dos nociones de automorfismos. Se puede encontrar su demostración en [36, Theorem 3.6].

Teorema 1.4.4. *Sea M un espacio simétrico de Loos conexo y sea F el spray canónico de M. Entonces*

1. $\mathtt{Aut}(M,F) = \mathtt{Aut}(M,\mu) = \mathtt{Aut}(M)$.
2. *Las simetrías S_p pertenecen a $\mathtt{Aut}(M)$ para todo p en M. Mas aún, si $\tilde{F}$ es un spray cuadrático tal que las simetrías S_p pertenecen a $\mathtt{Aut}(M,\tilde{F})$ para todo p en M, entonces $\tilde{F}=F$.*
3. *(M,F) es geodésicamente completo.*
4. *Sea $\alpha:\mathbb{R}\to M$ una geodésica y sean $\tau_{\alpha,s} = S_{\alpha(\frac{s}{2})}S_{\alpha(0)}$, a las cuales llamaremos traslaciones a lo largo de α. Entonces $\tau_{\alpha,s}$ pertenece a $\mathtt{Aut}(M)$ para todo α y s, cumpliendo que $\tau_{\alpha,s}(\alpha(t)) = \alpha(t+s)$. Mas aún, el transporte paralelo esta dado por*
$$P_t^{t+s}(\alpha) = (\tau_{\alpha,s})_{*\alpha(t)}$$

1.4.1. Grupo simétrico de Cartan

Definición 1.4.5. Sea G un grupo de Lie-Banach con involución de Cartan σ con K el sugbrupo de puntos fijos de σ y $M=G/K$ dotada de su estructura de variedad de Banach que hace de la proyección q una sumersión. Dados gK y hK en G/K definimos

$$gK\cdot hK = g\sigma(g)^{-1}\sigma(h)K. \tag{1.2}$$

Este es un producto simétrico bien definido que hace de M un espacio simétrico de Loos. Decimos que M dotada de esta estructura es un *espacio simétrico de Cartan.*

En un espacio simétrico de Cartan el grupo G actúa en M por automorfismos: l_g pertenece a $Aut(M)$ para todo g en G. Como mencionamos en las secciones anteriores vamos a notar el diferencial de los operadores de multiplicación como si "multiplicáramos" en el espacio tangente.

Terminamos el capítulo con el siguiente teorema. Se puede ver [36] y [25, Section 7.5] para una demostración.

Teorema 1.4.6. *Sea G un grupo de Lie-Banach con involución de Cartan σ, K el subgrupo de puntos fijos y $M = G/K$ su espacio simétrico de Cartan con M conexa. Sea $o = q(e)$. Si consideramos F el spray canónico en M como espacio simétrico tenemos que*

1. *Dado g en G y x, y en $\mathfrak{m}$, si $v = q_{*g}(g \cdot x)$, $w = q_{*g}(g \cdot y) \in T_{g \cdot o}M$, entonces*
$$\Gamma_{g \cdot o}(v, w) = -(\ell_g)_{*o}\Gamma_o(q_{*e}x, q_{*e}y) = -\frac{d^2}{ds\,dt}\bigg|_{s=t=0} q(ge^{-sy}e^{tx}).$$
2. *Dados p en M y v en T_oM con $p = g \cdot o$ y $v = q_{*e}x$ para x en $\mathfrak{m}$, entonces la única geodésica γ tal que $\gamma_0 = p$ y $\gamma_0' = (\ell_g)_{*e}v = q_{*g}g \cdot x$ está dada por $\gamma(t) = ge^{tx} \cdot o$.*
3. *Las traslaciones τ_t a lo largo de γ están dadas por $\tau_t(p) = ge^{tx}g^{-1} \cdot p$.*
4. *El transporte paralelo a lo largo de γ está dado por $P_0^t(\gamma)w = (D\tau_t)_{\gamma_0}w = (\ell_{e^{tAd_g x}})_{*g \cdot o}w$.*
5. *Para x, y, z en $\mathfrak{m}$, si $X = q_{*g}(g \cdot x) \in T_{g \cdot o}M$ y análogamente con las otras, entonces la curvatura en $p = g \cdot o \in M$ está dada por*
$$R_p(X, Y)Z = -q_{*g}(g[[x, y], z]) = -(\ell_g)_{*o}q_{*1}([[x, y], z]).$$
6. *Si $x \in \mathfrak{m}$ entonces $\rho_t(p) = e^{tx} \cdot p$ es el flujo del único campo de Killing X tal que $DX_p = \Gamma_p(X_p, -)$ y $X(o) = q_{*1}x$.*

Capítulo 2

Álgebras de Jordan

En este capítulo daremos un vistazo general a dos temas con los que trabajaremos durante la tesis: los conos y las álgebras de Jordan. Comenzaremos con generalidades sobre los conos y el orden que definen. Seguiremos con las álgebras de Jordan, mostrando herramientas que nos serán útiles en su estudio, como la representación cuadrática. Daremos especial atención a las JB-álgebras, cuya norma está asociada a la estructura de orden dada por el cono de elementos de espectro positivo. Finalizaremos el capítulo con un resultado propio sobre la positividad de la representación cuadrática.

Para ampliar sobre estos temas se pueden consultar los libros *Jordan structures in geometry and analysis* de Cho-Ho Chu [12], *Analysis on symmetric cones* de Jacques Faraut y Adam Korányi [17] y *Jordan operator algebras* de Harald Hanche-Olsen y Erling Stormer [43].

2.1. Conos en espacios de Banach

Sea V un espacio de Banach real.

Definición 2.1.1 (Cono)**.** Decimos que un conjunto no vacío Ω en V es un *cono convexo* si cumple que $\Omega + \Omega \subset \Omega$ y que $\lambda\Omega \subset \Omega$ para todo λ positivo.

Si Ω es un cono, entonces $\overline{\Omega}$ también lo es: dado $x_n \to x$, $\lambda x_n \to \lambda x$. Mas aún,

Lema 2.1.2. Si Ω es un cono abierto, $\overline{\Omega}^{\circ} = \Omega$.

Demostración. Una inclusión es trivial. Sea p en $\overline{\Omega}^{\circ}$ y tomemos q en Ω. Consideremos el segmento $p + t(q - p)$. Como p es punto interior de $\overline{\Omega}$ toda curva que pasa por p interseca a $\overline{\Omega}$ en un intervalo alrededor de p. Por lo tanto existe $0 < \delta < 1$ tal que $p \pm \delta(q - p)$ pertenece a $\overline{\Omega}$. Como Ω es abierto y q es un punto interior tenemos que $\lambda(p - \delta(q - p)) + (1 - \lambda)q$ pertenece a Ω para $0 < \lambda < 1$. Si tomamos $\lambda = \frac{1}{1+\delta}$ obtenemos que p pertenece a Ω. □

Decimos que un cono es *propio* si $\Omega \cap -\Omega = \{0\}$. Un cono propio nos permite definir una relación de orden parcial: decimos que $x \leq y$ si $y - x$ pertenece a Ω.

Si Ω es un cono abierto tal que $\overline{\Omega}$ es propio podemos decir que $\Omega = \{v \in \mathsf{V} : v > 0\}$ es el cono de elementos positivos y $\overline{\Omega} = \{v \in \mathsf{V} : v \geq 0\}$. Por lo tanto, el cono puede ser recuperado a partir del orden.

Definición 2.1.3 (Unidad del orden)**.** Sea V un espacio vectorial real y sea Ω un cono en V. Un elemento e se llama *unidad del orden* si para todo x en V existe λ positivo tal que $-\lambda e \leq x \leq \lambda e$.

Una unidad del orden e se dice *arquimideana* si para todo x en V se cumple que si para todo λ positivo $\lambda x \leq e$, entonces $x \leq 0$.

Una unidad del orden arquimideana e induce una norma $||\cdot||_e$ en V definida como

$$||x||_e = \text{ínf}\{\lambda > 0 : -\lambda e \leq x \leq \lambda e\}.$$

Llamaremos a esta norma la *norma del orden*.

Si $(\mathsf{V}, ||\cdot||_e)$ es un espacio de Banach completo decimos que (V, e) es un *espacio con unidad del orden arquimideana completo*.

Ejemplo 2.1.4. Sea $L^\infty(X)$ el espacio de funciones acotadas en X y consideremos Ω el cono de funciones positivas. $\overline{\Omega}$ es el cono de funciones no negativas. El orden es el usual de funciones, dadas f y g en $L^\infty(X)$, $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$ para todo x en X. La función constante 1 es una unidad del orden, al ser funciones acotadas. Es obvio que es arquimideana. Dada f en $L^\infty(X)$,

$$||f||_1 = \text{ínf}\{\lambda > 0 : -\lambda \leq f(x) \leq \lambda \text{ para todo } x\} = ||f||_\infty.$$

Por lo tanto $(L^\infty(X), 1)$ es un espacio con unidad del orden arquimideana completo.

Proposición 2.1.5. Sean V un espacio vectorial real y Ω un cono en V. Dadas u, v unidades del orden arquimideanas en V tenemos que $||\cdot||_u$ y $||\cdot||_v$ son equivalentes.

Demostración. Dado x en V, tenemos que $-||x||_u u \leq x \leq ||x||_u u$. Ademas, si consideramos la norma de u con respecto a v, $-||u||_v v \leq u \leq ||u||_v v$. Por lo tanto,

$$-||u||_v||x||_u v \leq x \leq ||u||_v||x||_u v.$$

Como $||x||_v$ es el ínfimo de los elementos que cumplen esta inecuación tenemos $||x||_v \leq ||u||_v||x||_u$. Análogamente $||x||_u \leq ||v||_u||x||_v$. $\square$

Las unidades del orden son claves en los espacios ordenados pues proveen una norma. Si el cono es abierto es posible caracterizar las unidades del orden y comparar la norma del orden con la norma original, como veremos mas adelante.

Definición 2.1.6 (Transformaciones positivas)**.** Sea $T : (\mathsf{V}, e) \to (\mathsf{W}, u)$ una transformación lineal entre dos espacios con unidad del orden. Decimos que T es una *transformación positiva* si mapea el cono de positivos de V al cono de positivos de W.

Un funcional $\varphi \in \mathsf{V}^*$ se dice *funcional positivo* si se considera a $\mathbb{R}$ con el orden dado por el cono de los números positivos, con unidad del orden 1. Llamamos $\Omega^* = \{\varphi \in \mathsf{V}^* : \varphi(x) > 0 \text{ para todo } x \in \Omega\}$.

Lema 2.1.7. Sea $T : (\mathsf{V}, e) \to (\mathsf{W}, u)$ una transformación lineal positiva entre dos espacios con unidad del orden provistos de la norma inducida. Entonces T es continua y $||T|| = ||T(e)||_u$.

Demostración. Sea x en V, $||x||_e \leq 1$. Tenemos que $-e \leq x \leq e$, y como T preserva el orden $-T(e) \leq T(x) \leq T(e)$. Considerando la norma de $T(e)$,

$$-||T(e)||_u u \leq -T(e) \leq T(x) \leq T(e) \leq ||T(e)||_u u,$$

por lo que $||T(x)||_u \leq ||T(e)||_u$ y T es continua. Como $||e||_e = 1$ obtenemos $||T|| = ||T(e)||_u$. □

Proposición 2.1.8. Sea $T : (\mathsf{V}, e) \to (\mathsf{W}, u)$ un isomorfismo lineal positivo entre dos espacios con unidad del orden normados con la norma del orden. T es una isometría si y solo si $T(e) = u$.

Demostración. Supongamos que T es una isometría, tenemos que $||T|| = ||T^{-1}|| = 1$. Luego, por el lema anterior, $||T(e)||_u = 1$ y $||T^{-1}(u)||_e = 1$. Obtenemos entonces que $-u \leq T(e) \leq u$ y $-e \leq T^{-1}(u) \leq e$. Aplicando T en la segunda ecuación y combinándola con la primera tenemos que $T(e) = u$.

Recíprocamente, si $T(e) = u$ tenemos por el lema anterior que $||T|| = ||T(e)||_u = 1$, $||T^{-1}|| = ||T^{-1}(u)||_e = 1$, por lo que T es isometría. □

Definición 2.1.9 (Cono reproductivo, normal y simétrico)**.** Sea V un espacio de Banach real con cono abierto Ω. Decimos que Ω es *reproductivo* si $\mathsf{V} = \Omega - \Omega$.

Decimos que Ω es *normal* si existe $\delta > 0$ tal que para todo x, y en Ω con $||x|| = ||y|| = 1$ tenemos que $||x + y|| \geq \delta$.

Decimos que Ω es *autodual* si $\Omega = \{x \in \mathsf{V} : \varphi(x) > 0 \text{ para todo } \varphi > 0\}$. Decimos que es *homogéneo* si para todo x, y en Ω existe g isomorfismo en V tal que $g(x) = y$. Decimos que es *simétrico* si es autodual y homogéneo.

Si V tiene una unidad del orden, entonces Ω es reproductivo: dado x en V existe λ positivo tal que $-\lambda e < x < \lambda e$. Por lo tanto $x = x_1 - x_2$, donde $x_1 = \frac{x+\lambda e}{2}$, $x_2 = \frac{\lambda e - x}{2}$ son positivos.

Observación 2.1.10. Notar que un cono autodual también lo es en el siguiente sentido: si Ω es autodual en un espacio de Banach V, entonces

$$\overline{\Omega} = \{x \in V : \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } \varphi > 0\}.$$

Si tomamos x tal que $\varphi(x) \geq 0$ para toda φ positiva, consideremos $x + \frac{1}{n}e$. Tenemos que $\varphi(x + \frac{1}{n}e) = \varphi(x) + \frac{1}{n}\varphi(e) > 0$, por lo que es un elemento positivo. Por lo tanto x pertenece a $\overline{\Omega}$.

La normalidad de un cono nos dice que el cono no es demasiado ”abierto”. Un cono normal debe ser propio: si x pertenece a $\Omega \cap -\Omega$ también pertenece $-x$. Si x es no nulo suponemos que $||x|| = 1$, y $||x - x|| = 0$ lo cual contradice la hipótesis de normal.

Proposición 2.1.11. Sea V un espacio de Banach real con cono Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Ω es un cono normal.
2. $||x|| \leq M||e||||x||_e$ con constante positiva M independiente de x y e.
3. La norma es semimonótona: existe K positivo tal que para todo $0 \leq x \leq y$ tenemos que $0 \leq ||x|| \leq K||y||$.
4. Ω^* es reproductivo.

Demostración. Supongamos que Ω es normal y que no existe constante M tal que $||x|| \leq M||e||||x||_e$ para todo x. Existe entonces una sucesión x_n tal que $||x_n|| > n||e||||x_n||_e$. Despejando $||x_n||_e$ esto nos dice que $-\frac{1}{n||e||}e \leq \frac{x_n}{||x_n||} \leq \frac{1}{n||e||}e$. Definamos $g_n = \frac{x_n}{||x_n||} + \frac{e}{n||e||}$, $h_n = -\frac{x_n}{||x_n||} + \frac{1}{n||e||}e$. Se puede ver fácilmente que

$$\frac{g_n}{||g_n||} + \frac{h_n}{||h_n||} = \frac{2e}{n||e||||g_n||} + \frac{||g_n|| - ||h_n||}{||g_n||||h_n||}h_n$$

y acotando que

$$\left\|\frac{g_n}{||g_n||} + \frac{h_n}{||h_n||}\right\| < \frac{4}{n-1},$$

por lo cual tiende a cero. Esto es absurdo, pues al ser Ω normal debería ser mayor a algún δ positivo. Recíprocamente, supongamos que la inecuación vale para todo x. Notemos que por la Proposición 2.1.5 podemos reemplazar e por cualquier otra unidad de orden, que como veremos en la Proposición 2.1.12 son todos los elementos de Ω. Dados x, y elementos de Ω de norma 1 aplicamos la inecuación a $e = x + y$ y obtenemos que existe una constante M tal que $1 = ||x|| \leq M||x||_{x+y}||x + y||$. Como $0 \leq x \leq x + y$ tenemos que $||x||_{x+y} \leq 1$, por lo que obtenemos despejando que $||x + y|| \geq \frac{1}{M}$.

Supongamos ahora que $||x|| \leq M||e||||x||_e$ con una constante positiva M independiente de x y e, y como dijimos antes podemos reemplazar e por cualquier otro elemento positivo. Sean $0 \leq x \leq y$, tenemos entonces que $||x||_y \leq 1$, por lo que $||x|| \leq M||y||$. Ahora, si la norma es semimonótona, dados x, y positivos de norma 1 aplicamos la monotonía a $0 \leq x \leq x + y$, por lo que obtenemos que $1 = ||x|| \leq K||x + y||$ y despejando obtenemos que Ω es normal.

La equivalencia con el último item se puede encontrar en [40, Chapter 5, Section 3]. No la transcribimos aquí pues supondría introducir teoría que no es relevante para esta tesis. □

Ahora podemos dar una caracterización de las unidades del orden y vincular la norma original con la norma del orden.

Proposición 2.1.12. Sea V un espacio vectorial real con cono abierto Ω. Entonces Ω consiste de todas las unidades del orden arquimideanas de V y existe algún c positivo tal que $||x||_e \leq c||x||$ para todo x en V.

Demostración. Sea u un elemento de Ω. Como el cono es abierto existe r positivo tal que la bola de centro u y radio r está contenida en Ω. Entonces para x en V no nulo tenemos que $u \pm \frac{r}{2||x||}x$ pertenece a la bola y por lo tanto a Ω. Por lo tanto,

$$-\frac{2||x||}{r}u \leq x \leq \frac{2||x||}{r}u.$$

En particular tenemos que $||x||_u \leq \frac{2}{r}||x||$, lo que prueba la segunda parte de la proposición. Para terminar debemos ver que u es arquimideana. Sea x en V tal que $\lambda x \leq u$ para todo λ positivo. Como $u - \lambda x \geq 0$ tenemos que $\varphi(u - \lambda x) \geq 0$ para todo $\varphi \in \Omega^*$. Se sigue que $\lambda\varphi(x) \leq \varphi(u)$ para todo λ positivo, y como $\varphi(u) > 0$ tenemos que $\varphi(x) \leq 0$. Como esto vale para todo funcional positivo tenemos que entonces x es negativo, y u es unidad del orden arquimideana.

Recíprocamente, si u es una unidad del orden arquimideana tomemos x en V tal que $||x - u|| \leq \frac{1}{c}$, luego $||x - u||_u \leq 1$. Por lo tanto $-u \leq x - u \leq u$, y sumando u a ambos lados obtenemos que $x \geq 0$. Esto nos dice que u pertenece a $\overline{\Omega}^{\circ} = \Omega$. □

Podemos ahora dar las condiciones para la equivalencia entre la norma original y la del orden.

Corolario 2.1.13. Sea V un espacio vectorial real con cono abierto Ω. La norma del orden es equivalente a la norma original si y solo si Ω es normal.

Demostración. La Proposición 2.1.12 nos dice que $||x||_e \leq c||x||$ para todo x en V. La Proposición 2.1.11 nos dice que la inecuación inversa se cumple si y solo si el cono es normal. □

Terminamos la sección con algunos ejemplos que mostrarán la interacción de estos conceptos y sus limitaciones.

Ejemplo 2.1.14 (Un cono autodual y reproductivo con interior vacío que no está contenido en ningún subespacio propio)**.** Sea $\mathsf{V} = \ell^2(\mathbb{N})$ y sea $\Omega = \{x \in \mathsf{V} : x_n > 0\}$. Es obvio que Ω es un cono convexo autodual. Afirmamos que $\Omega^\circ = \emptyset$, que Ω es reproductivo y que Ω no está contenido en un subespacio propio. Para la primera afirmación sea x en Ω y r positivo, y tomemos n tal que $x_n < \frac{r}{2}$. Sea y el elemento obtenido de reemplazar en x la $n-$ésima coordenada por $y_n = x_n - \frac{r}{2} < 0$. Este elemento pertenece a $B_r(x)$ pero y no pertenece a C, y como x y r son arbitrarios C tiene interior vacío. Ahora, dado z en V lo descomponemos como $z = z_+ - z_-$, donde z_+ consiste de las entradas positivas de z rellenando con cero los lugares negativos y z_- análogo con el opuesto de las entradas negativas. Estos dos elementos no pertenecen a Ω pues algunas de sus coordenadas pueden ser nulas (si pertenecen a $\overline{\Omega}$), pero si consideramos $\tilde{z}_+ = z_+ + (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ y $\tilde{z}_- = z_- + (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, estos elementos pertenecen a Ω y $z = \tilde{z}_+ - \tilde{z}_-$. Finalmente, supongamos que Ω está contenido en un subespacio afin, $\Omega \subset x_0 + \mathsf{W}$; entonces $\Omega - x_0 \subset \mathsf{W}$. Pero $\mathsf{V} = C - C = (C - x_0) - (C - x_0) \subset \mathsf{W} - \mathsf{W} = \mathsf{W}$.

Ejemplo 2.1.15 (Un cono autodual y reproductivo que no es normal)**.** Sea $\mathsf{V} = C^1[0,1]$ con la norma usual $||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ y sea

$$\Omega = \{f \in V : f(x) > 0 \text{ para todo } x\}.$$

Es obvio que Ω es abierto, pues $||\cdot||_\infty \leq ||\cdot||_{C^1}$. Pero Ω no es normal: es obvio que $0 \leq x^n \leq x$ para todo n pero $||x^n|| = n+1$ y $||x|| = 2$. Por otro lado, Ω es autodual: si $L \in (C^1[0,1])^*$, entonces $L(f) = \int_0^1 f d\mu_1 + \int_0^1 f' d\mu_2$ para μ_1, μ_2 medidas de borel signadas en $[0,1]$. Afirmamos que

$$\Omega^* = \{L : L(f) = \int_0^1 f d\mu \text{ para medida positiva } \mu\}.$$

Una inclusión es obvia. Ahora, sea $L \in \Omega^*$, $L(f) = \int_0^1 f d\mu_1 + \int_0^1 f' d\mu_2$ para μ_1, μ_2 medidas signadas. Sean P_1, N_1, P_2 y N_2 los conjuntos positivos y negativos de μ_1 y μ_2 respectivamente. Supongamos que N_1 es no vacío, tomemos f función positiva diferenciable tal que se anula en P_1, creciente en $N_1 \cap N_2$ y decreciente en $N_1 \cap P_2$, tenemos que $L(f) \leq 0$, lo cual es absurdo. Entonces N_1 es vacío y μ_1 es positiva. Análogamente, P_2 y N_2 son nulos y μ_2 es la medida nula. Ahora, Ω es autodual pues si $\int_0^1 f d\mu > 0$ para toda medida positiva μ entonces f es una función positiva. Finalmente, encontremos la norma del orden de Ω. Análogo al Ejemplo 2.1.4, $e = 1$ es una unidad de orden arquimideana y $||f||_e = ||f||_\infty$. Con esta norma $C^1[0,1]$ no es un espacio de Banach completo. Sin embargo, $C[0,1]$ si lo es.

2.2. Álgebras de Jordan

Vamos a estudiar una familia especial de conos: los conos de elementos positivos de un álgebra. Para ello introduciremos las álgebras de Jordan. En el curso de la tesis estudiaremos en su mayoría álgebras de Jordan reales, por lo que salvo mención las álgebras son reales.

Definición 2.2.1 (Álgebra de Jordan)**.** Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto $\circ$. Decimos que $(\mathsf{V}, \circ)$ es un *álgebra de Jordan* si $\circ$ es conmutativo y además

$$x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$$

para todo x, y en V.

Supondremos que las álgebras con las que trabajamos tienen unidad 1 para la multiplicación.

Vamos a denotar los operadores de multiplicación como $L_x y = x \circ y$. Tenemos entonces que $[L_x, L_{x^2}] = 0$.

Al no ser un álgebra asociativa los operadores de multiplicación no siempre conmutan: dados x, y en V arbitrarios en general $[L_x, L_y] \neq 0$. A los elementos que sí cumplen esta propiedad, es decir a los que son asociativos, los llamaremos centrales.

Definición 2.2.2 (Centro)**.** Sea V un álgebra de Jordan y x un elemento en V. Decimos que x es *central* si para todo y en V se cumple que $[L_x, L_y] = 0$. Al conjunto de elementos centrales lo llamamos el *centro* de V.

A pesar de no ser asociativa las propiedades de un álgebra de Jordan hacen que sea asociativa por potencias. Si definimos inductivamente $x^{n+1} = x \circ x^n$, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.2.3. Un álgebra de Jordan es asociativa por potencias, es decir, dado x en V, $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. En particular, el álgebra generada por x es asociativa.

Demostración. Probemos por inducción que $x^n \circ x^2 = x^{n+2}$. El caso base es la definición de la potencia. Para el paso inductivo, tenemos que

$$x^{n+2} = x \circ x^{n+1} = x \circ (x^2 \circ x^{n-1}) = x^2 \circ (x \circ x^{n-1}) = x^2 \circ x^n.$$

Diferenciando dos veces la igualdad $[L_x, L_{x^2}] = 0$ y evaluando en los elementos apropiados obtenemos que para todo n el operador L_{x^n} pertenece al álgebra de operadores generada por L_x y L_{x^2}, que es asociativa. Por lo tanto, para todo y tenemos que $x^n \circ (x^m \circ y) = x^m \circ (x^n \circ y)$.

Finalmente, probemos inductivamente en m que $x^n \circ x^m = x^{n+m}$. El caso base ya lo probamos. Para el paso inductivo, tenemos que

$$x^n \circ x^{m+1} = x^n \circ (x^m \circ x) = x \circ (x^n \circ x^m) = x \circ x^{n+m} = x^{n+m+1}.$$

$\square$

Un álgebra asociativa $(\mathsf{V}, \cdot)$ puede convertirse en un álgebra de Jordan definiendo el *producto de Jordan*

$$x \circ y = \frac{x \cdot y + y \cdot x}{2}.$$

Se llama a V álgebra de Jordan *especial* si es isomorfa a una subálgebra de Jordan de algún álgebra cuyo producto surge de un producto asociativo. Si un álgebra no es especial se denomina *excepcional*.

Ejemplo 2.2.4 (Álgebra de Jordan excepcional)**.** El ejemplo esencial de un álgebra excepcional es el álgebra de Albert. Consiste de las matrices simétricas de $3x3$ sobre los octoniones, con el producto $x \circ y = \frac{xy+yx}{2}$. Aunque este parezca el producto de Jordan especial, es un álgebra excepcional, pues los octoniones no tienen un producto asociativo.

El producto asociativo es una gran herramienta en las álgebras especiales, pero la existencia de álgebras excepcionales nos limita su uso. Sin embargo, tenemos el siguiente teorema que nos permitirá usar ciertas igualdades de álgebras especiales para todas las álgebras de Jordan.

Teorema 2.2.5 (Principio de McDonald)**.** *Toda identidad polinomial en tres variables y la unidad de a lo sumo de grado* 1 *en una de ellas que se anula en toda álgebra especial también se anula en toda álgebra de Jordan.*

Una demostración del mismo puede ser encontrada en [34, Appendix B]. Mas aún, se probó que en la identidad polimonial pueden aparecer las inversas de las variables no linenales y el resultado sigue siendo válido, como podemos ver en [35].

Cuando el álgebra es lo suficientemente pequeña podemos incluso asegurar que el álgebra es especial:

Teorema 2.2.6 (Teorema de Shirshov y Cohn)**.** *Toda álgebra de Jordan generada por dos elementos es especial.*

Se puede encontrar una demostración de este teorema en [34, Appendix A].

Los operadores de multiplicación no son óptimos para las álgebras de Jordan. Muchas de las identidades son muy escabrosas e incómodas para trabajar. Ya veremos que por ejemplo la invertibilidad de los elementos no se traslada a los operadores de multiplicación. Podemos definir un *operador cuadrático* mucho mas adecuado.

Definición 2.2.7 (Operador cuadrático U y sus operadores auxiliares)**.** Dado x un elemento de un álgebra de Jordan V, definimos el operador lineal U

$$\mathrm{U}_x = 2L_x^2 - L_{x^2},$$

el cual es cuadrático en x.

Dados x, y en V definimos el operador lineal $\mathrm{U}_{x,y} = \frac{1}{2} D_y U_x = \frac{1}{2}\left(U_{x+y} - U_x - U_y\right)$, la linealización del operador cuadrático, donde $D_y f(x)$ denota la diferencial de f en el punto y en la dirección x. El mismo es bilineal en x e y. Es fácil ver que $U_{x,y} = L_x L_y + L_y L_x - L_{x\circ y}$.

Definimos a partir de $\mathrm{U}_{x,y}$ el operador lineal $V_{x,y}(z) = U_{x,z}(y)$, nuevamente bilineal en x e y.

Los operadores U son intrínsecos a las álgebras de Jordan: las álgebras pueden ser axiomatizadas a partir de los mismos.

Observación 2.2.8. En un álgebra especial tenemos que $\mathrm{U}_x\, y = xyx$. De esta manera, un operador U se puede pensar como un producto ”exterior”.

Tenemos también que $\mathrm{U}_{x,y}(z) = xzy + yxz$ y $V_{x,y}(z) = xyz + zyx$.

Podemos estudiar el comportamiento de los operadores U en el álgebra generada por un elemento x.

Definición 2.2.9 (Álgebra fuertemente asociativa)**.** Sea V un álgebra de Jordan y W una subálgebra de Jordan de V. Decimos que W es *fuertemente asociativa* si $[L_x, L_y] = 0$ para todo x, y en W.

Notemos que esta definición implica la asociatividad de W pero es más fuerte: la asociatividad no solo debe cumplirse dentro de W sino en todo V. Es fácil ver que dado x un elemento en V, el álgebra generada por x es fuertemente asociativa.

Proposición 2.2.10. Sea V un álgebra de Jordan y W una subálgebra de Jordan de V fuertemente asociativa. Dados x, y elementos de W, tenemos que $\mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y = \mathrm{U}_{x\circ y}$.

Una demostración simple de esta proposición se puede encontrar en [18, Lema 8, Capítulo 1]. Como corolario tenemos:

Corolario 2.2.11. Sea x un elemento de un álgebra de Jordan V. Entonces, dados f y g dos polinomios, tenemos que $\mathrm{U}_{f(x)}\,\mathrm{U}_{g(x)} = \mathrm{U}_{fg(x)}$. Mas aún, linealizando esta igualdad, tenemos que si r es otro polonomio, $\mathrm{U}_{f(x)}\,\mathrm{U}_{g(x),r(x)} = \mathrm{U}_{(fg)(x),(fr)(x)}$.

La propiedad mas importante de los operadores U es la fórmula fundamental:

Proposición 2.2.12. Dados x, y en V un álgebra de Jordan,

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, y} = \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y\,\mathrm{U}_x\,. \tag{2.1}$$

Demostración. Por el Teorema 2.2.5, solo es necesario probarlo para un álgebra especial. Así,

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, y}\, z = \mathrm{U}_{xyx}\, z = (xyx)z(xyx) = x(y(xzx)y)x = \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y\,\mathrm{U}_x\, z.$$

□

Esta fórmula fundamental forma parte de la axiomatización de las álgebras de Jordan a partir de los operadores cuadráticos.

Definición 2.2.13 (Elementos inversibles)**.** Sea V un álgebra de Jordan y x en V. Decimos que x es *inversible* si existe y en V tal que $\mathrm{U}_x\, y = x$ y $U_x y^2 = 1$. Notamos al inverso $y = x^{-1}$.

Observación 2.2.14. En un álgebra especial los elementos inversibles son los mismos con ambas estructuras y el inverso del producto de Jordan coincide con el inverso del producto asociativo. Llamaremos y al inverso de x. Si x es inversibe por el producto asociativo tenemos que $U_x y = xyx = x$ y $U_x y^2 = xy^2 x = 1$. Recíprocamente, si x es inversible con el producto de Jordan tenemos que $xy^2x = 1$, por lo que x es inversible con el producto asociativo, y despejando x de la ecuación $xyx = x$ obtenemos que su inversa es y.

Veremos que aunque la invertibilidad implica que $x \circ y = 1$ no es equivalente a ello. Existen definiciones equivalentes de invertibilidad que involucran a los operadores L, por ejemplo:

Lema 2.2.15. Sea x un elemento de un álgebra de Jordan V. x es inversible si y solo si existe y en V tal que $x \circ y = 1$ y $x^2 \circ y = x$.

Demostración. Como las identidades de ambos lados de la equivalencia involucran a dos elementos, por el Teorema 2.2.5 es suficiente comprobarlo solamente para álgebras especiales. Y, como dijimos antes, en álgebras especiales el inverso de Jordan también es inverso para el producto asociativo.

Supongamos que x es inversible. Entonces $\frac{xx^{-1}+x^{-1}x}{2} = 1$, $\frac{x^2x^{-1}+x^{-1}x^2}{2} = x$. Recíprocamente, si $\frac{xy+yx}{2} = 1$, $\frac{x^2y+yx^2}{2} = x$ entonces es obvio que $\mathrm{U}_x\, y = x$. Multiplicando la primera ecuación por x alternativamente a derecha e izquierda obtenemos

$x^2y + xyx = 2x = xyx + yx^2$, por lo que $x^2y = yx^2$ y reemplazando esto en la segunda ecuación obtenemos que $x^2y = x = yx^2$, por lo que $xy = yx = 1$, y es inverso en el producto asociativo y por ende en el de Jordan. □

Una gran diferencia con el producto asociativo es que la invertibilidad de x no equivale a la del operador L_x. Pero si existe una implicación.

Proposición 2.2.16. Sea x un elemento de un álgebra de Jordan V. Si el operador L_x es inversible entonces x también es inversible y $x^{-1} = (L_x)^{-1}1$.

Demostración. Llamemos $y = (L_x)^{-1}1$. Tenemos que $x \circ y = L_x y = 1$ por su definición. Mas aún,

$$x^2 = x^2 \circ 1 = x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y).$$

Aplicando $(L_x)^{-1}$ a ambos lados, obtenemos que $x^2 \circ y = x$. Por el Lema 2.2.15, x es inversible y $x^{-1} = y = (L_x)^{-1}1$. □

Ejemplo 2.2.17 (Que x sea inversible no implica que L_x lo sea.)**.** Sea V el algebra de matrices simétricas de $2x2$ con el producto de Jordan. Tomemos los elementos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Como $A^2 = Id$, tenemos que $A^{-1} = A$. Sin embargo, $A \circ B = Id$, lo que muestra que no es suficiente esta identidad para ser inverso. Mas aún, $A \circ C = 0$, por lo que L_A no es un operador inversible.

El operador U es mas adecuado para definir la invertibilidad, como veremos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.18. Dado x un elemento de un álgebra de Jorda V, x es inversible si y solo si U_x es inversible. Mas aún, si y es otro elemento de V, $U_x y$ es inversible si y solo si x e y lo son.

Demostración. Supongamos que x es inversible. Tenemos entonces que $\mathrm{U}_x\, x^{-2} = 1$, por lo que

$$Id = \mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, x^{-2}} = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_{x^{-2}}\, \mathrm{U}_x,$$

por lo que U_x es inversible. Recíprocamente, si U_x es inversible, sea $y = (\mathrm{U}_x)^{-1}x$. Por su definición $\mathrm{U}_x\, y = x$. Como U_x es inversible existe a tal que $\mathrm{U}_x\, a = 1$. Entonces

$$\mathrm{U}_x\, y^2 = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_y\, 1 = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_y\, \mathrm{U}_x\, a = \mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, y}\, a = \mathrm{U}_x\, a = 1.$$

Para la segunda afirmación, por la fórmula fundamental tenemos que $\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, y} = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_y\, \mathrm{U}_x$, por lo que $\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x\, y}$ es inversible si y solo si U_x y U_y lo son, y aplicando el resultado anterior obtenemos la equivalencia. □

Veremos mas adelante que la conexión entre x y U_x va mas allá que la invertibilidad.

A partir de un elemento u en V podemos definir un nuevo producto poniendo a u "al medio" de la multiplicación.

Definición 2.2.19 (Homótopos e isótopos de Jordan)**.** Sea V un álgebra de Jordan y u un elemento en V. Definimos el *u-producto* como $x \circ_u y = \mathrm{U}_{x,y}\, u$. Notamos al espacio con su nuevo producto V^u y lo llamamos el *u-homótopo de Jordan de* V o abreviadamente homótopo. Si V^u tiene unidad lo llamamos el *u-isótopo de Jordan de* V o abreviadamente isótopo.

Decimos que dos álgebras de Jordan V y W son *isotópicas* si V es isomorfa a un isótopo de W. Decimos que $g : \mathsf{V} \to \mathsf{W}$ es una *isotopía* si $g : \mathsf{V} \to \mathsf{W}^u$ es un isomorfismo para algún u en W.

Observación 2.2.20. La isotopía es una relación de equivalencia: $\mathsf{V}^1 = \mathsf{V}$, por lo que es reflexiva; $(\mathsf{V}^u)^{u^{-2}} = \mathsf{V}$, por lo que es simétrica; y $(\mathsf{V}^u)^v = \mathsf{V}^{\mathrm{U}_u v}$, por lo que es transitiva.

Podemos encontrar los operadores usuales (notados con una u) de la nueva álgebra de Jordan en función del álgebra original, por ejemplo:

$$x^{2^u} = \mathrm{U}_x\, u, \qquad \mathrm{U}^u_x = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_u, \qquad \mathrm{U}^u_{x,y} = \mathrm{U}_{x,y}\, \mathrm{U}_u, \qquad L^u_x = V_{x,u}.$$

Estas igualdades son simples de chequear usando el Teorema 2.2.5.

Proposición 2.2.21. Sea V un álgebra de Jordan y u un elemento de V. V^u es un isótopo de V, es decir tiene unidad 1^u, si y solo si u es inversible. En ese caso $1^u = u^{-1}$.

Tenemos en ese caso que x es inversible en V si y solo si lo es en V^u y que $x^{-1^u} = \mathrm{U}_u^{-1}\, x^{-1}$.

Demostración. Si u es inversible tenemos que en un álgebra especial $x \circ_u u^{-1} = \frac{xuu^{-1}+u^{-1}ux}{2} = x$ y usando el Teorema 2.2.5, que como dijimos también vale con inversas, tenemos el resultado para toda álgebra de Jordan, y V^u es unital con $1^u = u^{-1}$. Ahora, si V^u tiene unidad v, tenemos que $Id = \mathrm{U}^u_v = \mathrm{U}_v\, \mathrm{U}_u$, por lo que U_u es inversible y por lo tanto u también, por la Proposición 2.2.18.

Ahora, como $\mathrm{U}^u_x = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_u$, si u es inversible tenemos que U_x es inversible si y solo si U^u_x es inversible; es decir, x es inversible en V si y solo si es inversible en V^u. En este caso, $x^{-1^u} = (\mathrm{U}^u_x)^{-1} x = \mathrm{U}_u^{-1}\, \mathrm{U}_x^{-1}\, x = \mathrm{U}_u^{-1}\, x^{-1}$. □

Notemos que los isótopos de un álgebra de Jordan V no son necesariamente isomorfos a V. Mas adelante daremos una caracterización de los isótopos que sí lo son, y de los elementos que los generan.

Para terminar la sección daremos una manera de descomponer un álgebra de Jordan en tres sumandos, la cual usaremos más adelante.

Definición 2.2.22 (Idempotentes)**.** Un elemento e de un álgebra de Jordan V se dice *idempotente* si $e^2 = e$.

Un álgebra de Jordan siempre contiene dos idempotentes, 0 y 1. Decimos que e es *propio* si no es ninguno de estos dos elementos.

Dos idempotentes e y e' se dicen *ortogonales* si $e \circ e' = 0$.

Dado e un idempotente, es obvio que $e' = 1 - e$ también es un idempotente y que es ortogonal a e. Son suplementarios en el sentido que $e + e' = 1$.

Teorema 2.2.23 (Descomposición de Pierce)**.** *Sea e un idempotente de un álgebra de Jordan V y sea $e' = 1 - e$. Definimos los operadores de Pierce $E_2 = \mathrm{U}_e$, $E_1 = 2\,\mathrm{U}_{e,e'}$, $E_0 = \mathrm{U}_{e'}$. Estos operadores forman una familia suplementaria de proyecciones, es decir, $E_0 + E_1 + E_2 = Id$, $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$. Por lo tanto, V se divide en la suma directa de los rangos de estas proyecciones. Llamando $\mathsf{V}_i = E_i(\mathsf{V})$,*

$$\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2\,.$$

Esta es la descomposición de Pierce de V en sus subespacios de Pierce.

Demostración. Es fácil ver que los operadores suman la identidad: $\mathrm{U}_e + \mathrm{U}_{e'} + 2\,\mathrm{U}_{e,e'} = \mathrm{U}_{e+e'} = \mathrm{U}_1 = Id$.

Por el Corolario 2.2.11, como e' está en el álgebra generada por e podemos sacar las siguientes conclusiones. Tenemos que $\mathrm{U}_e^2 = \mathrm{U}_{e^2} = \mathrm{U}_e$ y análogo para $\mathrm{U}_{e'}$, por lo que estos operadores son proyecciones, y como suman la identidad $2\,\mathrm{U}_{e,e'}$ también lo es. Ahora, $\mathrm{U}_e\,\mathrm{U}_{e'} = \mathrm{U}_{e \circ e'} = 0$ y $\mathrm{U}_e\,\mathrm{U}_{e,e'} = \mathrm{U}_{e^2, e \circ e'} = 0$, análogo para $\mathrm{U}_{e'}$, por lo que son ortogonales.

Como descompusimos la identidad como suma de proyecciones ortogonales esto divide a V en los subespacios de Pierce. □

Los subespacios de Pierce también pueden pensarse como autoespacios de otro operador.

Proposición 2.2.24. Sea V un álgebra de Jordan y e un idempotente en V, con $\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2$ su descomposición de Pierce. Entonces V_i es el autoespacio del operador L_e asociado al autovalor $\frac{i}{2}$.

Demostración. Tenemos que $\mathrm{U}_{e,e'} + \mathrm{U}_e = \mathrm{U}_{e,1-e} + \mathrm{U}_{e,e} = \mathrm{U}_{e,1} = L_e$, por lo que $L_e = 0E_0 + \frac{1}{2}E_1 + E_2$. Es fácil comprobar a partir de esta igualdad que L_e tiene autovalores $\frac{i}{2}$ con autoespacios asociados V_i. □

La idea detrás de la descomposición de Pierce es tratar al álgebra similarmente a un álgebra de matrices de dos dimensiones. Los espacios V_0 y V_2 representarían a los elementos de la diagonal; y aunque en algunos casos como el especial pueden separarse los elementos de la contradiagonal, en general están representados juntos en el espacio V_1. Esta similitud se puede comprobar en las reglas de multiplicación.

Proposición 2.2.25. Sea V un álgebra de Jordan y e un idempotente en V, con $\mathsf{V} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_1 \oplus \mathsf{V}_2$ su descomposición de Pierce. Tenemos entonces las siguientes reglas de multiplicación: $\mathsf{V}_0^2 \subset \mathsf{V}_0$ y $\mathsf{V}_2^2 \subset \mathsf{V}_2$; $\mathsf{V}_1^2 \subset \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{V}_2$. Mas aún, $\mathsf{V}_0 \circ \mathsf{V}_2 = 0$ y $\mathsf{V}_i \circ \mathsf{V}_1 \subset \mathsf{V}_1$ para $i = 0, 2$.

Una prueba de las mismas, y reglas de multiplicación adicionales, se pueden encontrar en [34, Theorem 8.2.1].

Observación 2.2.26. Las reglas de multiplicación nos dicen que V_0 y V_2 son ideales del álgebra, en particular subálgebras de Jordan. V_1 solo es un subespacio y no contiene cuadrados no nulos, es decir, si y pertenece a V_1 no existe x tal que $y = x^2$.

2.3. JB-álgebras

Hasta ahora solo hemos estudiado la estructura de Jordan desde un punto de vista algebraico. En esta sección estudiaremos álgebras de Jordan desde el análisis funcional, pidiendo que las álgebras también sean espacios de Banach.

Definición 2.3.1 (JB-álgebras)**.** Sea V un álgebra de Jordan y sea $||\cdot||$ una norma en V tal que $(\mathsf{V}, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach. Decimos que es un *álgebra de Banach* si $||x \circ y|| \leq ||x||||y||$ para todo x, y en V.

Decimos que un álgebra de Banach es una *JB-álgebra* si además se cumple que $||x^2|| = ||x||^2$ y $||x^2|| \leq ||x^2 + y^2||$ para todo x, y en V.

Ejemplo 2.3.2 (Operadores simétricos de un espacio de Hilbert)**.** Sea H un espacio de Hilbert y sea $\mathsf{B(H)}$ el espacio de operadores acotados de H con el producto de Jordan. Consideremos $\mathsf{B(H)}_s$ el subespacio de operadores simétricos (como espacio vectorial real), un subespacio cerrado y por lo tanto de Banach. Es una JB-álgebra: sabemos que los operadores cumplen la propiedad de las álgebras de Banach; por simetría y propiedad de C^*-álgebras, $||x^2|| = ||xx^*|| = ||x||^2$; y como $\langle x^2h, h\rangle = \langle xh, xh\rangle \geq 0$, tenemos que $||x^2|| = \sup\langle x^2h, h\rangle \leq \sup\langle x^2h, h\rangle + \langle y^2h, h\rangle = ||x^2 + y^2||$.

Definición 2.3.3 (JC-álgebra)**.** Llamamos *JC-álgebra* a un álgebra de Jordan isomorfa a una subálgebra de Jordan cerrada de $\mathsf{B(H)}_s$.

Toda JC-álgebra es en particular una JB-álgebra especial. El recíproco no es cierto: el álgebra de Albert introducida en el Ejemplo 2.2.4 es una JB-álgebra pero no es una JC-álgebra pues no es especial.

Observación 2.3.4. Decimos que un álgebra de Jordan V es *formalmente real* si para todo x, y vale que si $x^2 + y^2 = 0$ entonces $x = y = 0$. Una JB-álgebra es formalmente real, pues si $x^2 + y^2 = 0$ entonces $||x|| \leq ||x^2 + y^2|| = 0$.

En JB-álgebras es muy importante la estructura de orden. Su norma es una norma del orden y las JB-álgebras pueden ser caracterizadas de esta manera. Para definir este orden debemos definir el cono de positivos en un álgebra. Lo haremos a partir del espectro.

Definición 2.3.5 (Espectro)**.** Dado x un elemento de un álgebra de Jordan V, definimos el *espectro* de x como

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{R} \text{ tales que } x - \lambda 1 \text{ no es inversible}\}.$$

A partir del espectro podemos preguntarnos si es posible hacer cálculo funcional en una JB-álgebra. El cálculo funcional y la teoría espectral son herramientas muy útiles en C^*-álgebras, por lo que lo serían también en este nuevo entorno.

Notemos que en las álgebras especiales, como los elementos inversibles son los mismos con ambos productos tenemos que el espectro como álgebra de Jordan es el mismo que como álgebra asociativa.

Teorema 2.3.6. *Sea V una JB-álgebra asociativa. Existe entonces un espacio localmente Hausdorff y compacto X tal que V es isométricamente isomorfa a $C_0(X)$.*

Demostración. La idea de la demostración es reducir al caso complejo, que ya es conocido. Tomemos $\mathcal{V} = \{x+iy : x, y \in \mathsf{V}\}$ una complexificación de V con norma $||x+iy|| = ||x^2+y^2||$ e involución $(x+iy)^* = x - iy$. $\mathcal{V}$ es un álgebra compleja abeliana e involutiva. Es fácil ver que $(\mathcal{V}, ||\cdot||)$ es un álgebra de Banach y por definición $||z^*z|| = ||z^2||$, por lo que $(\mathcal{V}, ||\cdot||)$ es una C^*-álgebra conmutativa. Aplicando el teorema conocido, que se puede encontrar por ejemplo en [43, Theorem 1.3.3], tenemos que $\mathcal{V}$ es isomorfo a $C_0^{\mathbb{C}}(X)$, y quedándonos con la parte simétrica obtenemos el resultado para V. $\square$

Las JB-álgebras no son en general asociativas, pero podemos aplicar este teorema a una subálgebra que siempre lo será.

Dado x un elemento de V notamos $C(x)$ a la subálgebra de Jordan cerrada mas pequeña que contiene a x, la llamamos abreviando la *subálgebra generada por x*.

Corolario 2.3.7. Sea V una JB-álgebra y x un elemento de V. Entonces $C(x)$ es isométricamente isomorfa a $C(\sigma(x))$.

Demostración. Por el teorema anterior $C(x)$ es isométricamente isomorfo a $C(Y)$ para Y algún espacio compacto y localmente Hausdorff. Si llamamos $\tilde{x}$ al elemento correspondiente a x en Y, tenemos que $\sigma(x) = \sigma(\tilde{x})$. Notemos que $Y = C(\tilde{x})$. Aplicamos nuevamente el teorema canónico a C^*-álgebras, encontrado en [43, Theorem 1.3.4], tenemos que $C(\tilde{x})$ es isométricamente isomorfo a $C(\sigma(\tilde{x})) = C(\sigma(x))$, por lo que obtenemos el resultado. $\square$

Este corolario nos dice que podemos hacer cálculo funcional sobre los elementos de una JB-álgebra. Dado x un elemento de V y f una función continua en el espectro de x, el elemento $f(x)$ es la preimagen de f por la isometría del corolario anterior. Mas aún, $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$.

Con cálculo funcional también podemos obtener la inversa de un elemento x, si es que existe. Es mas, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.3.8. Sea V una JB-álgebra y sea x un elemento en V. Entonces x es inversible si y solo si existe y en $C(x)$ tal que $x \circ y = 1$.

Demostración. Supongamos que x es inversible. Entonces U_x es inversible y $x^{-1} = (U_x)^{-1}x$. Sabemos que $C(x)$ es invariante por L_x y L_{x^2}, por lo que también lo es por $U_x = 2L_x^2 - L_{x^2}$. Como la inversa de U_x se puede aproximar por polinomios en U_x tenemos que $x^{-1} = (U_x)^{-1}x$ pertenece a $C(x)$. Recíprocamente, si existe y en $C(x)$ tal que $x \circ y = 1$, como $C(x)$ es asociativa tenemos que $x^2 \circ y = x \circ (x \circ y) = x$, por lo que x es inversible. □

La inversibilidad, por lo tanto, se da siempre dentro de $C(x)$. Al ser una subálgebra asociativa tenemos que vale el resultado clásico: x es inversible si y solo si $L_x|_{C(x)}$ es inversible.

Tenemos de todas maneras una relación entre los espectros de x y L_x como operador de V, gracias a la Proposición 2.2.16: si L_x es inversible x también lo es, asi que $\sigma(x) \subset \sigma(L_x)$.

Definición 2.3.9 (Cono de positivos de un álgebra de Jordan)**.** Dada V un álgebra de Jordan, decimos que un elemento x es *positivo* si $\sigma(x)$ está contenido en los números positivos. Llamamos Ω al conjunto de elementos positivos de V.

Notemos que $\overline{\Omega}$ es el conjunto de elementos x de espectro no negativo.

Observación 2.3.10. El cálculo funcional nos permite caracterizar a Ω de otras maneras.

Afirmamos que $\Omega = \{a^2 : a \in \mathsf{V} \text{ inversible}\}$. Como dijimos antes, $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$, por lo que $\sigma(a^2) = \sigma(a)^2 \subset (0, +\infty)$, donde no se incluye al cero pues es inversible. Recíprocamente, la función $f(t) = \sqrt{t}$ es continua en los positivos, por lo que $f(x)$ es un elemento de V para todo x positivo, es inversible y $f(x)^2 = x$. Notemos además que $\overline{\Omega} = \{a^2 : a \in \mathsf{V}\}$.

De la misma manera afirmamos que $\Omega = \{e^a : a \in \mathsf{V}\}$. Como la exponencial es continua en todo $\mathbb{R}$ el elemento e^a existe para todo a en V y es positivo pues $\sigma(e^a) = \{e^\lambda : \lambda \in \sigma(a)\}$. Recíprocamente, todo elemento positivo tiene un logaritmo real.

Observación 2.3.11. Como en una C^*-álgebra, tenemos que un elemento x positivo tiene una única raiz cuadrada positiva $x^{1/2}$. Si no, sea y otra raiz cuadrada positiva, tenemos que $x = y^2$, por lo que x pertenece a $C(y)$ y por lo tanto también $x^{1/2}$. Como vimos en el Teorema 2.3.6 $C(y)$ puede ser inmerso en una C^*-álgebra, por lo que x tiene una sola raiz cuadrada allí, entonces $y = x^{1/2}$.

Un resultado rápido a partir de esto es que la representación cuadrática es inyectiva en Ω: supongamos que $U_x = U_y$ para dos elementos positivos x, y. Aplicando estos operadores a 1 obtenemos que $x^2 = y^2$, y por lo tanto $x = y$.

Podemos ampliar el resultado sobre $C(x)$ a subálgebras mas grandes. La demostración del siguiente resultado se puede encontrar en [46, Proposition 2.1].

Proposición 2.3.12. Sea V una JB-álgebra. Dados x e y en V sea $C(x, y)$ la clausura de la subálgebra generada por x, y e 1. Entonces $C(x, y)$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra de Jordan de los operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

Los operadores cuadráticos preservan el cono:

Proposición 2.3.13. Sean x y v elementos inversibles de V con x positivo. Entonces $U_v x$ es positivo.

Demostración. Consideremos $y_t = U_v((1-t)x + t1)$. Como x es positivo tenemos que $(1-t)x + t1$ es inversible y por lo tanto, por la Proposición 2.2.18, y_t es inversible. Tenemos que y_1 es positivo; sea t_0 el ínfimo de los t tales que y_t es positivo. Por continuidad, y_{t_0} debe ser positivo. Sea t lo suficientemente pequeño para que $||y_t - y_{t_0}|| < \frac{1}{27||y_{t_0}^{-1}||}$. Tenemos entonces que para cualquier λ positivo $\frac{1}{27||y_{t_0}^{-1}||} < \frac{1}{27||(y_{t_0}+\lambda)^{-1}||}$. Por lo tanto,

$$||(y_{t_0} + \lambda) - (y_t + \lambda)|| = ||y_t - y_{t_0}|| < \frac{1}{27||(y_{t_0} + \lambda)^{-1}||}.$$

Esto implica que $y_t + \lambda$ es inversible. Una demostración de esto se puede encontrar en [43, Lemma 3.3.4] Como esto vale para cualquier λ positivo nos dice que y_t es positivo. Por lo tanto, $t_0 = 0$ y $y_0 = U_v x$ es positivo. □

Observación 2.3.14. No es dificil ver que resultados análogos valen para x y v no inversibles. Si v es inversible y x pertenece a $\overline{\Omega}$ entonces por continuidad $U_v x$ pertenece a $\overline{\Omega}$.

Supongamos x positivo pero v no inversible. Como el álgebra generada por x y v es especial, por el Teorema 2.2.6 tenemos que $(U_{x^{1/2}} v)^2 = U_{x^{1/2}} U_v x$, por lo que $U_{x^{1/2}} U_v x$ pertenece a $\overline{\Omega}$ y por el párrafo anterior $U_v x$ también.

Finalmente, si x pertenece a $\overline{\Omega}$ y v es arbitrario, por continuidad $U_v x$ pertenece a $\overline{\Omega}$.

Como dijimos antes, las JB-álgebras están caracterizadas por el hecho de que su norma es la del orden, como se puede ver en las siguientes proposiciones, cuya demostración puede ser encontrada en [43, Proposition 3.1.6 & Proposition 3.3.10].

Proposición 2.3.15. Sea V una álgebra de Jordan y un espacio con unidad de orden arquimidiana completo, cuyas unidad multiplicativa y de orden coinciden, tal que todo x en V cumple que $-1 < x < 1$ esto implica que $0 < x^2 < 1$. Entonces V es una JB-álgebra con la norma del orden.

Proposición 2.3.16. Sea V una JB-álgebra. Entonces V es un espacio con unidad de orden arquimidiana completo considerando el orden dado por Ω y unidad de orden 1. La norma del orden coincide con la norma original, y se cumple que si $-1 < x < 1$ entonces $0 < x^2 < 1$.

Podemos probar entonces la siguiente proposición.

Proposición 2.3.17. El cono de positivos Ω de una JB-álgebra V es un cono convexo abierto, propio, simétrico y normal

Demostración. Es obvio que es un cono abierto. Tomemos x, y positivos y λ positivo. Tenemos que $x+\lambda 1$ es positivo y sea z su raiz cuadrada. Tenemos que $x+y+\lambda 1 = U_z(1+U_{z^{-1}}y)$. Por la Proposición 2.3.13 $U_{z^{-1}}y$ es positivo y por lo tanto $1+U_{z^{-1}}y$ es inversible, por lo que $x+y+\lambda 1$ también. Entonces $x+y$ es positivo. El cono es, por lo tanto, convexo.

El cono es homogéneo, pues dados x, y en Ω, $x = U_{x^{1/2}}U_{y^{-1/2}}y$. Como la positividad está dada por el espectro, es facil ver que si $\varphi(x) > 0$ para todo φ en Ω^* entonces x tiene espectro positivo, como se puede ver en [43, Lemma 1.2.5]. Finalmente, como la norma es la del orden, por el Corolario 2.1.13 tenemos que el cono es normal. □

Veamos un ejemplo de un álgebra de Banach que no es una JB-álgebra, aunque cambiemos la norma por una equivalente.

Ejemplo 2.3.18 (Un álgebra de Jordan Banach cuya norma no es equivalente a la de una JB-álgebra)**.** Como vimos en el Ejemplo 2.1.15 el cono

$$\Omega = \{f : f(x) > 0 \text{ para todo } x\}$$

en $C^1[0,1]$ con la norma $||f||_{C^1} = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ no es normal. Notemos que $(C^1[0,1], ||\cdot||_{C^1})$ es un espacio de Banach y que Ω es el cono de elementos positivos, pues $\sigma(f) = Im(f)$. Como el cono no es normal, $||\cdot||_{C^1}$ no puede ser equivalente a una norma JB.

Como ya dijimos, las JB-álgebras están caracterizadas por su orden. Nos podemos preguntar si uno puede recuperar la estructura de álgebra a partir del orden, mas específicamente, del cono.

En dimensión finita el resultado es conocido hace ya un tiempo. Este resultado se debe a Koecher [20] y a Vinberg [45]. Demostraciones del mismo pueden encontrarse en [39, Chapter I, Theorem 8.5] o en [17, Theorem III.3.1]. Si V es un álgebra de Jordan de dimensión finita, decimos que es *euclidiana* si existe un producto interno $\langle , \rangle$ en V tal que $\langle L_x y, z\rangle = \langle y, L_x z\rangle$ para todo x, y, z en V; en ese caso decimos que el producto interno es *asociativo*. Se puede ver en [17, Proposition VIII.4.2] que las álgebras euclídeas son exactamente las álgebras formalmente reales. Tenemos entonces:

Teorema 2.3.19. *Sea Ω un cono abierto en un espacio euclídeo de dimensión finita V. Entonces Ω es un cono simétrico si y solo si existe una estructura de álgebra de Jordan euclídea (equivalente formalmente real) tal que Ω es el cono de positivos de V.*

En dimensión infinita la correspondencia no es tan simple. En el caso de un espacio de Hilbert tenemos el siguiente resultado gracias a Chu [10, Theorem 3.1]. Decimos que un álgebra de Jordan H es una JH-álgebra si es un espacio de Hilbert y el producto interno es asociativo. En dimensión finita las JH-álgebras son las álgebras formalmente reales.

Teorema 2.3.20. *Sea Ω un cono abierto en un espacio de Hilbert H. Entonces Ω es un cono simétrico si y solo si es el cono de elementos positivos de una estructura de JH-álgebra en H. Esta estructura es única.*

En el caso de un espacio de Banach la situación se complica por la ausencia de un producto interno. Sin embargo, tenemos también un resultado en este caso gracias a Chu [11, Theorem 3.2]; y la correspondencia es con las JB-álgebras. El resultado da una buena imagen geométrica de la correspondencia entre JB-álgebras y conos simétricos. En este caso tendremos que pedir mas propiedades que solamente la simetría del cono. Una *variedad de Banach simétrica* es una variedad de Banach conexa equipada con una norma tangente compatible ν tal que para cada p en M existe una única ν-simetría $s_p : M \to M$. Un cono es *Finsler simétrico* si es una variedad de Banach simétrica tal que la norma es invariante por las transformaciones que fijan el cono.

Teorema 2.3.21. *Sea Ω un cono propio y abierto en un espacio de Banach V. Entonces Ω es un cono normal, homogéneo y Finsler simétrico si y solo si es el cono de positivos para una estructura de JB-álgebra en V en alguna norma equivalente a la original.*

Notemos que este teorema presupone una estructura geométrica en el cono para obtener la estructura algebraica.

2.3.1. JB*-álgebras

Para terminar esta sección comentaremos un poco el caso complejo de una JB-álgebra.

Definición 2.3.22. Sea V un álgebra de Jordan compleja equipada con una involución $*$. Decimos que V es una *JB*-álgebra* si es un álgebra de Banach y además para todo x, y en V se cumple que $||x^*|| = ||x||$ y $||U_x x^*|| = ||x||^3$.

Las siguientes dos proposiciones justifican por qué decimos que es el caso complejo de una JB-álgebra. Se puede encontrar la demostración de las mismas en [43, Proposition 3.8.2] y [46, Theorem 2.8].

Proposición 2.3.23. Sea V una JB*-álgebra. Entonces el conjunto de sus elementos autoadjuntos es una JB-álgebra.

Teorema 2.3.24. *Sea V una JB-álgebra y $\mathcal{V}$ su complexificación. Existe entonces una única norma en $\mathcal{V}$ que le da estructura de JB*-álgebra.*

Tenemos el siguiente teorema para JB*-álgebras que caracteriza a los elementos del centro de su subálgebra de autoadjuntos y que será útil mas adelante. La demostración se puede encontrar en [49, Theorem 5].

Teorema 2.3.25. *Sea V una JB*-álgebra y sea x un elemento autoadjunto de V. Son equivalentes:*

1. *x conmuta como operador con todo otro elemento autoadjunto, es decir, $[L_x, L_y] = 0$ para todo y autoadjunto.*
2. *Para todo y autoadjunto vale que $\mathrm{U}_x\, y = L_{x^2} y$.*

Si aplicamos esto a JB-álgebras como la subálgebra autoadjunta de una JB*-álgebra obtenemos:

Corolario 2.3.26. Sea V una JB-álgebra y sea x un elemento de V. Son equivalentes:

1. x pertenece al centro de V.
2. $\mathrm{U}_x = L_{x^2}$.

2.4. El espectro de la representación cuadrática

El cálculo funcional nos ayudará a conectar la positividad del operador cuadrático y del operador multiplicación con la del elemento. Para ello usaremos algunas herramientas de JB*-álgebras

Sea V una JB-álgebra y $\mathsf{V}^{\mathbb{C}} = \mathsf{V} \oplus i\,\mathsf{V}$ su complexificación. Por la Proposición 2.3.23 y el Teorema 2.3.24 se puede normar a $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ de manera que sea una JB*-álgebra con involución natural $(a + ib)^* = a - ib$, y $\mathsf{V} = \{v \in V^{\mathbb{C}} : v^* = v\}$.

Definición 2.4.1 (Rangos numéricos)**.** Sea x en $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Definimos como el *rango numérico* de x al conjunto

$$V(x) = \{\phi(x) : \phi \in (\mathsf{V}^{\mathbb{C}})^*, \phi(1) = ||\phi|| = 1\} \subset \mathbb{C}\,.$$

Decimos que x es *hermitiano* si $V(x) \subset \mathbb{R}$. Notamos $\mathsf{Her}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$ al conjunto de elementos hermitianos de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$.

Dado X un espacio de Banach complejo y T en $\mathsf{B}(X)$ llamamos *rango numérico intrínseco* de T al conjunto

$$V(T) = \{\psi(T) : \psi \in (\mathsf{B}(X))^*, \psi(1) = ||\psi|| = 1\}.$$

Llamamos *rango numérico espacial* de T al conjunto

$$W(T) = \{\psi(Tz) : \psi \in X^*, z \in X, \psi(z) = 1, ||\psi|| = ||z|| = 1\}.$$

Observación 2.4.2. Un panorama mas amplio sobre el rango numérico puede ser encontrado en [7, Chapter 1, § 10]. El rango numérico es compacto, convexo y no vacío. Si notamos $co(\Sigma)$ a la capsula convexa de un conjunto $\Sigma \subset \mathbb{C}$, tenemos para x en V que $V(x) = co(\sigma(x))$.

Un elemento x es hermitiano si y solo si $||e^{itx}|| = 1$ para todo t real. Tenemos entonces que $\mathsf{Her}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}}) = \mathsf{V}$, como se puede ver en [48, Theorem 7].

Observación 2.4.3. Para un panorama mas amplio sobre el rango numérico de operadores se puede leer [8, Chapter 3] y [33]. Dado T un operador tenemos que $V(T)$ es compacto, convexo y no vacío, y que $V(T) = \overline{co(W(T))}$. T es hermitiano si y solo si $W(T) \subset \mathbb{R}$, o equivalentemente si $V(T) \subset \mathbb{R}$.

Conectemos en primer lugar el espectro de un elemento x en V con el del operador de multiplicación L_x, usando los rangos numéricos.

Lema 2.4.4. Sea V una JB-álgebra y $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ su complexificación. Dado x en V consideremos $\mathbb{L}_x$ la complexificación del operador L_x, dada por $\mathbb{L}_x(v+iw) = L_x v + iL_x w$ para v, w en V. Tenemos entonces que $V(x) = W(\mathbb{L}_x)$.

Demostración. Supongamos que existe un valor $\phi(x)$ en $V(x)$ con $||\phi|| = \phi(1) = 1$. Si tomamos $z = 1$ y $\psi = \phi$ tenemos que $\psi(z) = \phi(1) = 1$, $||z|| = ||1|| = 1$ y $||\psi|| = ||\phi|| = 1$, por lo que $\psi(\mathbb{L}_x z) = \phi(x)$ pertenece a $W(\mathbb{L}_x)$. Recíprocamente, si $\psi(\mathbb{L}_x z)$ es un valor en $W(\mathbb{L}_x)$, con $\psi(z) = ||\psi|| = ||z|| = 1$. Definimos $\phi(y) = \psi(\mathbb{L}_y z)$, que es obviamente lineal y acotada. Tenemos que $\phi(1) = \psi(z) = 1$ y que

$$||\phi|| = ||\psi \circ \mathbb{L}_z|| \leq ||\psi|| ||\mathbb{L}_z|| = ||\psi|| ||z|| = 1,$$

y como $\phi(1) = 1$ obtenemos $||\phi|| = 1$. Por lo tanto, $\phi(x) = \psi(\mathbb{L}_x z)$ pertenece a $V(x)$. $\square$

Observación 2.4.5. No es difícil ver que si x pertenece a V tenemos que $\sigma(\mathbb{L}_x) \cap \mathbb{R} = \sigma(L_x)$. Como $\sigma(L_x)$ es un subconjunto de los reales basta ver que se cumple la igualdad de los conjuntos resolventes en los reales. Si $T = L_x - \lambda Id_{\mathsf{V}}$ es inversible, llamemos $T^{\mathbb{C}} = \mathbb{L}_x - \lambda Id_{\mathsf{V}^{\mathbb{C}}}$ a la complexificación de T, definimos $(T^{\mathbb{C}})^{-1}$ su inversa a partir de T^{-1} la inversa de T: $(T^{\mathbb{C}})^{-1}(v + iw) = T^{-1}v + iT^{-1}w$, por lo que $\mathbb{L}_x - \lambda Id_{\mathsf{V}^{\mathbb{C}}}$ es inversible. Recíprocamente, si $T^{\mathbb{C}} = \mathbb{L}_x - \lambda Id_{\mathsf{V}^{\mathbb{C}}}$ es inversible, como V es un subespacio invariante de $T^{\mathbb{C}}$, $T = T^{\mathbb{C}}|_{\mathsf{V}} = L_x - \lambda Id_{\mathsf{V}}$ es inversible.

Proposición 2.4.6. Sea V una JB-álgebra y x en V. Entonces $co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. En particular L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ (respectivamente L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$).

Demostración. Consideremos $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$ la complexificación de V y $\mathbb{L}_x$ la complexificación de L_x. Tenemos por el Lema 2.4.4:

$$V(\mathbb{L}_x) = \overline{co(W(\mathbb{L}_x))} = \overline{co(V(x))} = V(x) \subset \mathbb{R}\,.$$

Por lo tanto $\mathbb{L}_x$ es hermitiano y $V(\mathbb{L}_x) = co(\sigma(\mathbb{L}_x))$, entonces

$$co(\sigma(\mathbb{L}_x)) = V(\mathbb{L}_x) = V(x) = co(\sigma(x)) \subset \mathbb{R}\,.$$

Finalmente, por la Observación 2.4.5 como son todos conjuntos dentro de $\mathbb{R}$ podemos cambiar $\mathbb{L}_x$ por L_x y tenemos que $co(\sigma(L_x)) = co(\sigma(x))$. Obtenemos entonces que L_x tiene espectro no negativo si y solo si $x \in \overline{\Omega}$ y respectivamente que L_x tiene espectro no positivo si y solo si $x \in -\overline{\Omega}$ $\square$

Tenemos entonces que la positividad y negatividad se mantiene entre los elementos y sus operadores de multiplicación. Uno podría preguntarse si lo mismo sucederá con los operadores cuadráticos. Una rápido argumento nos dice que no, pues $\mathrm{U}_x = \mathrm{U}_{-x}$, pero podremos decir algo al respecto.

Lema 2.4.7. Sea V un álgebra de Banach-Jordan y v un elemento de V. Entonces $e^{2L_v} = \mathrm{U}_{e^v}$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathsf{B}(\mathsf{V})$ dada por $F_t = \mathrm{U}_{e^{tv}}$. Como tanto $e^{\frac{t}{2}v}$ y e^{sv} pertenecen a $C(v)$, $\mathrm{U}_{e^{\frac{t}{2}v}}\, e^{sv} = e^{(s+t)v}$ y

$$F_{s+t} = \mathrm{U}_{(s+t)v} = \mathrm{U}_{\mathrm{U}_{\exp(\frac{t}{2}v)}\, e^{sv}} = \mathrm{U}_{e^{\frac{t}{2}v}}\, \mathrm{U}_{e^{sv}}\, \mathrm{U}_{e^{\frac{t}{2}v}} = F_{\frac{t}{2}}^2 F_s.$$

Reemplazando $s = 0$ obtenemos que $F_{\frac{t}{2}}^2 = F_t$, y reemplazando esto en la ecuación anterior tenemos que $F_{s+t} = F_s F_t = F_t F_s$, por lo que F es un grupo a un parámetro. Como $F'(0) = D_1(\mathrm{U}_-)e^{0v}v = 2\,\mathrm{U}_{v,1} = 2L_v$ debe ser que $F_t = e^{2tL_v}$. Reemplazando $t = 1$ obtenemos que $e^{2L_v} = \mathrm{U}_{e^v}$. □

Corolario 2.4.8. Sea V una JB-álgebra y Ω el cono de positivos de V. Dado x en Ω tenemos que U_x es un operador positivo.

Demostración. Como vimos en la Observación 2.3.10 existe v en V tal que $x = e^v$. Sea $\mathbb{U}_x$ la complexificación de U_x, de la misma manera que hicimos en la Observación 2.4.5 podemos ver que $\sigma(\mathbb{U}_x) \cap \mathbb{R} = \sigma(\mathrm{U}_x)$. Por el Lema 2.4.7 tenemos que $\sigma(\mathbb{U}_x) = \sigma(e^{2\mathbb{L}_v}) \subset (0, +\infty)$, pues el espectro de $\mathbb{L}_v$ es real. Por lo tanto, $\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathbb{U}_x) \cap \mathbb{R} \subset (0, +\infty)$. □

Observación 2.4.9. Los operadores U no son en general hermitianos aunque tengan espectro real. Podemos ver en [49, Theorem 14] que el operador U_x es hermitiano si y solo si x pertenece al centro de V. Mas aún, como por el Lema 2.4.7 tenemos que $e^{2\mathbb{L}_v} = \mathbb{U}_{e^v}$ la inclusión $e^{\mathsf{Her}(\mathsf{V})} \subset \mathsf{Her}(\mathsf{V})$ no se cumple.

Tenemos entonces una implicación: si x es positivo entonces U_x es positivo. Sabemos que la recíproca no es cierta, y que existen elementos (por ejemplo los elementos negativos) que también tienen operador cuadrático positivo.

Antes de enunciar el siguiente resultado necesitamos una definición.

Definición 2.4.10 (Proyecciones y simetrías centrales)**.** Sea V una JB-álgebra. Dado p en V decimos que es una *proyección central* si p es un idempotente central de V; dado ε en V decimos que es una *simetría central* si $\varepsilon^2 = 1$ y pertenece al centro de V.

Notar que 0, 1 son proyecciones centrales y 1, -1 son simetrías centrales.

El siguiente resultado, principal de este capítulo, caracteriza a los elementos cuyo operador cuadrático es positivo. En el caso de álgebras de Jordan euclidianas de dimensión finita se puede usar un frame de idempotentes de Jordan para obtener una prueba simple del resultado, como se puede ver en [17, Lemma VIII.2.7].

Teorema 2.4.11. *Sea V una JB-álgebra y x un elemento de V. Entonces el operador U_x es un operador positivo si y solo si existe v positivo y una simetría central ε tales que $x = \varepsilon v$.*

Demostración. Supongamos que $x = \varepsilon v$ con v positivo y ε simetría central. Como ε es central $C(v, \varepsilon)$ es fuertemente asociativa y la Proposición 2.2.10 vale, por lo que $\mathrm{U}_x = \mathrm{U}_{v\varepsilon} = \mathrm{U}_v \mathrm{U}_\varepsilon$. Además, $\mathrm{U}_\varepsilon z = 2\varepsilon \circ (\varepsilon \circ z) - \varepsilon^2 \circ z = 2z \circ \varepsilon^2 - z = z$, por lo que $\mathrm{U}_\varepsilon = Id$. Esto nos dice que $\mathrm{U}_x = \mathrm{U}_v$ que por el Corolario 2.4.8 es positivo.

Supongamos ahora que x es un elemento tal que U_x es positivo. En particular, U_x es inversible por lo que x también lo es. Sean χ_+ la función característica de los números positivos y χ_- la función característica de los números negativos. Ambas funciones son continuas en $\sigma(x)$ pues al ser x inversible su espectro no contiene al 0. Sean $p_+ = \chi_+(x)$, $p_- = \chi_-(x)$. Como $\chi_+ + \chi_- = 1$, $\chi_+\chi_- = 0$ y $\chi_\pm^2 = \chi_\pm$ tenemos que p_+ y p_- son idempontentes suplementarios ortogonales, es decir, $p_\pm^2 = p_\pm$, $p_+ + p_- = 1$ y $p_+ \circ p_- = 0$. Podemos entonces realizar la descomposición de Pierce del Teorema 2.2.23. Los operadores U_{p_+}, U_{p_-} y $2U_{p_+,p_-}$ son proyecciones que descomponen al espacio V en sus imágenes. Llamaremos V_0 al rango de $2U_{p_+,p_-}$, V_+ al rango de U_{p_+} y V_- al rango de U_{p_-}. Notemos que esta descomposición es trivial si x es positivo: en este caso $\mathsf{V}_+ = \mathsf{V}$ y los otros dos espacios son nulos. Similarmente, si x es negativo también es trivial: $\mathsf{V}_- = \mathsf{V}$ y los otros dos espacios son nulos. Fuera de estos dos casos, V_+ y V_- no se anulan. Sin embargo, el espacio que nos interesa es V_0: veremos que el espectro negativo de U_x aparece en este espacio.

Afirmamos que V_0 es trivial si y solo si p_+ es central. Si p_+ es central también lo es p_- y $L_{p_+}L_{p_-}y = p_+ \circ (p_- \circ y) = y \circ (p_+ \circ p_-) = 0$, por lo que $\mathrm{U}_{p_+,p_-} = 0$ y V_0 es trivial. Recíprocamente, si V_0 es trivial entonces $\mathrm{U}_{p_+,p_-} = 0$ y en particular $L_{p_+}L_{p_-} = 0$. Esto implica que $L_{p_+}^2 = L_{p_+}$ y por lo tanto $\mathrm{U}_{p_+} = L_{p_+} = L_{p_+^2}$ y por el Corolario 2.3.26 p_+ es central.

Veamos que V_0 debe ser trivial. Supongamos que no lo es. Notemos que en particular p_+ y p_- no son 0 o 1 pues estos son elementos centrales. Afirmamos que V_i es un subespacio invariante de U_x para $i = 0, \pm$. Sea y un elemento de V_+, es decir, $y = \mathrm{U}_{p_+} y$. Como x y p_+ pertenecen a la subálgebra de Jordan fuertemente asociativa $C(x)$, nuevamente por la Proposición 2.2.10 tenemos

$$\mathrm{U}_x y = \mathrm{U}_x \mathrm{U}_{p_+} y = \mathrm{U}_{xp_+} y = \mathrm{U}_{p_+x} y = \mathrm{U}_{p_+} \mathrm{U}_x y,$$

por lo que $\mathrm{U}_x y$ pertenece a V_+ y V_+ es invariante por U_x. Análogamente podemos ver que V_- también es invariante por U_x. Sea y un elemento de V_0, $y = 2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-} y$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_x y &= \mathrm{U}_x 2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-} y = \mathrm{U}_x(\mathrm{U}_{p_++p_-} - \mathrm{U}_{p_+} - \mathrm{U}_{p_-})y = (\mathrm{U}_{p_++p_-} - \mathrm{U}_{p_+} - \mathrm{U}_{p_-})\,\mathrm{U}_x y \\ &= 2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-} \mathrm{U}_x y,\end{aligned}$$

por lo que $\mathrm{U}_x y$ pertenece a V_0 y V_0 es invariante por U_x. Como $\mathrm{U}_{p_+} + \mathrm{U}_{p_-} + 2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-} = Id$, $\oplus \mathsf{V}_i = \mathsf{V}$ y cada V_i es invariante por U_x tenemos que

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_+}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_-}) \cup \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_0}).$$

Tenemos que estudiar entonces la restricción de U_x a cada subespacio.

Estudiemos primero la restricción de U_x a V_+ y V_-: si y pertenece a V_+, entonces $\mathrm{U}_x y = \mathrm{U}_x \mathrm{U}_{p_+} y = \mathrm{U}_{xp_+} y$. Definamos $x_+ = xp_+$, entonces $\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_+} = \mathrm{U}_{x_+}$.

Análogamente, definamos $x_- = xp_-$ y tenemos que $\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_-} = \mathrm{U}_{x_-}$. Notemos que el espectro de x_+ es la componente positiva del espectro de x y el espectro de x_- es la componente negativa del espectro de x, por lo que x_+ es positivo y x_- es negativo y como probamos en el Corolario 2.4.8 U_{x_+} y U_{x_-} son operadores positivos. Por lo tanto, $\sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_+}), \sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_-}) \subset \mathbb{R}_{>0}$. Estos dos espacios solo ven la parte positiva del espectro de U_x.

Estudiemos entonces la restricción de U_x a V_0. Como las operaciones se realizan en $C(x)$ es fácil ver que $x_+ \circ x_- = 0$. Entonces, si y pertenece a V_0 entonces

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_x\, y &= \mathrm{U}_x\, 2\,\mathrm{U}_{p_+,p_-}\, y = \mathrm{U}_x(Id - \mathrm{U}_{p_+} - \mathrm{U}_{p_-})y = (\mathrm{U}_x - \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_{p_+} - \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_{p_-})y \\ &= (\mathrm{U}_{x_+ + x_-} - \mathrm{U}_{x_+} - \mathrm{U}_{x_-})y = 2\,\mathrm{U}_{x_+,x_-}\, y. \end{aligned}$$

Mas aún, como $C(x)$ es una subálgebra fuertemente asociativa tenemos que L_{x_+} y L_{x_-} conmutan, por lo que

$$2\,\mathrm{U}_{x_+,x_-} = 2(L_{x_+}L_{x_-} + L_{x_-}L_{x_+} - L_{x_+\circ x_-}) = 4L_{x_+}L_{x_-}.$$

Como dijimos antes al ser V_0 trivial p_+ y p_- no pueden ser el 0 y el 1 pues son centrales, por lo que x no es positivo ni negativo. Como L_{x_+} conmuta con L_{p_+} y L_{p_-} es obvio que L_{x_+} conmuta con U_{p_+,p_-} y entonces V_0 es invariante para L_{x_+}. Análogamente V_0 es invariante para L_{x_-}. Entonces

$$\sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_0}) = \sigma(2\,\mathrm{U}_{x^+,x^-}|_{\mathsf{V}_0}) = 4\sigma(L_{x_+}L_{x_-}|_{\mathsf{V}_0}) \subset 4\sigma(L_{x_+}L_{x_-}).$$

Como L_{x_+} y L_{x_-} conmutan tenemos que $\sigma(L_{x_+}L_{x_-}) \subset \sigma(L_{x_+})\sigma(L_{x_-})$. Por la Proposición 2.4.6 dado que x_+ es positivo L_{x_+} tiene espectro no negativo y dado que x_- es negativo L_{x_-} tiene espectro no positivo, por lo que

$$\sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_0}) \subset 4\sigma(L_{x_+}L_{x_-}) \subset 4\sigma(L_{x_+})\sigma(L_{x_-}) \subset (-\infty, 0].$$

Como U_x es inversible y V_0 no es trivial $\sigma(\mathrm{U}_x|_{\mathsf{V}_0}) \subset (-\infty, 0)$ y esto muestra que U_x tiene un número negativo en su espectro, lo cual es una contradicción.

Tenemos entonces que V_0 es trivial y por lo tanto p_+ es central. Definimos $\varepsilon = 2p_+ - 1$, una simetría central al ser p_+ una proyección central; y $v = x_+ - x_-$, elemento positivo pues x_+ es positivo y x_- negativo. Entonces $v\varepsilon = x_+ + x_- = x$. □

Notemos que en la demostración hemos probado también lo siguiente:

Corolario 2.4.12. Sea V un álgebra de Jordan y sea p un idempotente con V_0 el rango de $2\,\mathrm{U}_{p,p'}$ en su descomposición de Pierce. Entonces p es central si y solo si V_0 es trivial.

Observación 2.4.13. Dado x en V inversible podemos realizar la misma descomposición que hicimos en la demostración. Si $\chi_\pm$ notan las funciones características de las partes positiva y negativa de $\sigma(x)$ podemos escribir $x = x_+ + x_- = p_+x + p_-x$ con $p_\pm = \chi_\pm(x)$. Entonces, como vimos en la demostración,

$$\mathrm{U}_x = \mathrm{U}_{x_+} + \mathrm{U}_{x_-} + 4L_{x_+}L_{x_-},$$

la suma de tres operadores mutuamente disjuntos actuando en los subespacios $\mathsf{V}_+ = \mathrm{Ran}(\mathrm{U}_{p_+})$, $\mathsf{V}_- = \mathrm{Ran}(\mathrm{U}_{p_-})$ and $\mathsf{V}_0 = \mathrm{Ran}(\mathrm{U}_{p_+,p_-})$ respectivamente, con $\mathsf{V} = \mathsf{V}_+ \oplus \mathsf{V}_- \oplus \mathsf{V}_0$. Por lo tanto,

$$\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_{x_+}) \sqcup \sigma(\mathrm{U}_{x_-}) \sqcup 4\sigma(L_{x_+}L_{x_-})$$

y mas aún $\sigma(L_{x_+}L_{x_-}) \subset \sigma(L_{x_+})\sigma(L_{x_-})$ pues estos dos operadores conmutan.

Corolario 2.4.14. Sea V una JB-álgebra asociativa. Entonces U_x es un operador positivo para todo x inversible en V.

Demostración. Como V es asociativa para todo x vale que $L_{x_+}L_{x_-}y = y\circ(x_+\circ x_-) = 0$, por lo que $\sigma(\mathrm{U}_x) = \sigma(\mathrm{U}_{x_+}) \sqcup \sigma(\mathrm{U}_{x_-}) \subset (0, +\infty)$. □

Ejemplo 2.4.15. Tomemos $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})$ con el producto de Jordan. Tenemos entonces que $\mathrm{U}_A\, B = ABA$. El operador $\mathrm{U}_A \in \mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{H}))$ es positivo si y solo si $A = X\varepsilon$, donde X es un operador positivo y ε es una simetría central. Sabemos que el centro de $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ está compuesto por los múltiplos de la identidad, y entre ellos las únicas simetrías son Id y $-Id$. Por lo tanto, U_A es un operador positivo si y solo si A es positivo o negativo.

Capítulo 3

El grupo de estructura y su álgebra de Lie

En este capitulo vamos a considerar un grupo de automorfismos que actúan en Ω; queremos darle estructura de grupo de Lie-Banach. Para dar una estructura de Lie y de variedad apropiada al grupo de transformaciones que fija el cono, estudiaremos primero un grupo más grande, el grupo de estructura, y derivaremos la estructura desde allí. Caracterizaremos también a los elementos del grupo de estructura y aplicaremos esto al estudio de los isótopos de Jordan definidos en el capítulo anterior. Para terminar, estudiaremos el caso particular del álgebra de Jordan especial de operadores de un espacio de Hilbert.

Vamos a notar $g(x)$ como gx, notación que tomará sentido mas adelante.

3.1. El grupo de estructura

Si vemos la fórmula fundamental (2.1) podemos decir que todas las transformaciones $g \in \mathsf{B}(\mathsf{V})$ en la imagen de la representación cuadrática de V tienen la propiedad: $\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g$ para todo x en V. En otras palabras, para cada g existe otra transformación, en este caso la misma g, tal que la igualdad se cumple. Existen otras transformaciones distintivas que comparten la misma propiedad.

Definición 3.1.1 (Grupo de Estructura)**.** Sea V un álgebra de Jordan. Decimos que un operador inversible $g \in \mathsf{GL}(\mathsf{V})$ pertenece al *grupo de estructura* si existe g^* otro operador en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ tal que para todo x en V

$$\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*. \tag{3.1}$$

Notamos al grupo de estructura como $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Notemos que para g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tenemos que $\mathrm{U}_{gx,gy} = g\,\mathrm{U}_{x,y}\,g^*$, al ser $\mathrm{U}_{x,y}$ la linealización del operador cuadrático U y g lineal:

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_{gx,gy} &= \mathrm{U}_{gx+gy} - \mathrm{U}_{gx} - \mathrm{U}_{gy} = \mathrm{U}_{g(x+y)} - \mathrm{U}_{gx} - \mathrm{U}_{gy} \\ &= g\,\mathrm{U}_{x+y}\,g^* - g\,\mathrm{U}_{gx}\,g^* - g\,\mathrm{U}_{gy}\,g^* = g(\mathrm{U}_{x+y} - \mathrm{U}_x - \mathrm{U}_y)g^* \\ &= g\,\mathrm{U}_{x,y}\,g^*.\end{aligned}$$

Observación 3.1.2. La fórmula fundamental nos dice que para todo x inversible en V, U_x pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$: $\mathrm{U}_{\mathrm{U}_x y} = \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y\,\mathrm{U}_x$ con $\mathrm{U}_x^* = \mathrm{U}_x$ inversible.

Lema 3.1.3. Sea V un álgebra de Jordan. Entonces el grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un grupo. Mas aún, dado g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, g^* también pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $(g^*)^* = g$, por lo que $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un grupo con involución $*$.

Demostración. Claramente Id pertenece $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, pues $\mathrm{U}_{Idx} = Id\,\mathrm{U}_x\,Id$, y $Id^* = Id$. Si f y g pertenecen a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, entonces $\mathrm{U}_{ghx} = g\,\mathrm{U}_{hx}\,g^* = gh\,\mathrm{U}_x\,h^*g^*$, por lo que gh pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $(gh)^* = h^*g^*$. Finalmente,

$$\mathrm{U}_{g^{-1}x} = g^{-1}g\,\mathrm{U}_{g^{-1}x}\,g^*(g^*)^{-1} = g^{-1}\,\mathrm{U}_{gg^{-1}x}(g^*)^{-1} = g^{-1}\,\mathrm{U}_x(g^*)^{-1},$$

por lo que g^{-1} pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $(g^{-1})^* = (g^*)^{-1}$. Tenemos entonces que $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un grupo.

Si aplicamos la ecuación (3.1) a $x = 1$, obtenemos que $\mathrm{U}_{g1} = g\,\mathrm{U}_1\,g^* = gg^*$, por lo que

$$g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$$

para todo g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Como los operadores cuadráticos pertenecen a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tenemos a g^* presentado como producto de elementos de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, por lo que también es parte del grupo de estructura. Mas aún,

$$(g^*)^* = (g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1})^* = \mathrm{U}_{g1}^*(g^{-1})^* = \mathrm{U}_{g1}((g^*)^{-1}) = \mathrm{U}_{g1}((g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1})^{-1}) = \mathrm{U}_{g1}\,\mathrm{U}_{g1}^{-1}\,g = g.$$

□

Observación 3.1.4. Dado g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, aplicando la ecuación (3.1) a $x = 1$ obtenemos que $\mathrm{U}_{g1} = g\,\mathrm{U}_1\,g^* = gg^*$. Por el Teorema 2.4.11 tenemos que $\sigma(gg^*) \subset (0, +\infty)$ si y solo si $g1 = v\varepsilon$ para $v \in \Omega$ y ε simetría central.

Veremos a lo largo del capítulo que los operadores del grupo de estructura tiene un comportamiento particular con los elementos del cono. Podemos por ejemplo probar cómo se comportan con los elementos inversibles.

Lema 3.1.5. Sea V un álgebra de Jordan, g un operador en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y x en V inversible. Entonces gx es inversible y $(gx)^{-1} = (g^*)^{-1}x^{-1}$.

Demostración. Sabemos por la Proposición 2.2.18 que U_x es inversible, al serlo x. Entonces $\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*$ es inversible, al ser producto de inversibles, y nuevamente por la Proposición 2.2.18 gx es inversible. Mas aún,

$$(gx)^{-1} = \mathrm{U}_{gx}^{-1}\,gx = (g\,\mathrm{U}_x\,g^*)^{-1}gx = (g^*)^{-1}\,\mathrm{U}_x^{-1}\,x = (g^*)^{-1}x^{-1}.$$

□

Notemos que la ecuación (3.1) no es suficiente para que un elemento g esté en el grupo de estructura: g^* debe ser inversible. Pero tenemos el siguiente corolario del lema anterior:

Corolario 3.1.6. Sea V un álgebra de Jordan y g en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Entonces g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ si y solo si $g1$ es inversible y $\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$.

Demostración. Por el lema anterior si g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ entonces $g1$ es inversible. Recíprocamente, proponemos $g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$, el cual cumple la ecuación del grupo de estructura y es inversible pues $g1$ es inversible. $\square$

Obtengamos entonces una definición equivalente del grupo de estructura sin pedir que g^* sea inversible, que nos servirá luego.

Proposición 3.1.7. Sea V un álgebra de Jordan y g en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Entonces g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ si y solo si

$$\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1} \quad \text{y} \quad \mathrm{U}_{g^{-1}x} = g^{-1}\,\mathrm{U}_x\,g\,\mathrm{U}_{g^{-1}1}$$

para todo x en V.

Demostración. Como discutimos antes, si g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ entonces $g1$ es inversible y tenemos que $g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$; mas aún g^{-1} pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ por lo que g cumple ambas ecuaciones del lema. Recíprocamente, supongamos que g cumple ambas ecuaciones. Si reemplazamos $x = g^{-1}1$ en la primera ecuación y $x = g1$ en la segunda obtenemos que

$$1 = \mathrm{U}_1 = g\,\mathrm{U}_{g^{-1}1}\,g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1} \quad \text{y} \quad 1 = \mathrm{U}_1 = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}\,g\,\mathrm{U}_{g^{-1}1}\,.$$

Esto nos dice que $g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$ es inversible con inversa $g\,\mathrm{U}_{g^{-1}1}$. Por lo tanto, si definimos $g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$, es claro que g^* es inversible y que por la primera ecuación $U_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^*$, por lo que g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ $\square$

Ya vimos que es útil estudiar la complexificación de álgebras de Jordan reales. Veamos cómo se comporta el grupo de estructura en la complexificación.

Proposición 3.1.8. Sea V un álgebra de Jordan y $\mathsf{V}^{\mathbb{C}} = \mathsf{V} \oplus i\,\mathsf{V}$ su complexificación. Dado g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, definimos $g^{\mathbb{C}}$ su complexificación dada por $g^{\mathbb{C}}(x+iy) = gx + igy$. Entonces $g^{\mathbb{C}}$ pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$.

Demostración. Notemos que es facil ver por la definición que para a en V vale $\mathrm{U}_{g^{\mathbb{C}}a} = g^{\mathbb{C}}\,\mathrm{U}_a (g^*)^{\mathbb{C}}$, donde $(g^*)^{\mathbb{C}}$ es la complexificación de g^* definida de la misma manera que para g. Para el caso general, notamos $g^{\mathbb{C}} = g$ para no cargar la notación; tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_{g(a+ib)} &= \mathrm{U}_{ga+igb} = \mathrm{U}_{ga} + \mathrm{U}_{igb} + 2\,\mathrm{U}_{ga,igb} = \mathrm{U}_{ga} - \mathrm{U}_{gb} + 2i\,\mathrm{U}_{ga,gb} \\
&= g\,\mathrm{U}_a\,g^* - g\,\mathrm{U}_b\,g^* + 2ig\,\mathrm{U}_{a,b}\,g^* = g(\mathrm{U}_a - \mathrm{U}_b + 2i\,\mathrm{U}_{a,b})g^* \\
&= g\,\mathrm{U}_{a+ib}\,g^*.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $g^{\mathbb{C}}$ pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V}^{\mathbb{C}})$ y $(g^{\mathbb{C}})^* = (g^*)^{\mathbb{C}}$. $\square$

Veamos que otros conjuntos son parte del grupo de estructura. Como ya dijimos, los operadores de la representación cuadrática son parte del mismo.

Definición 3.1.9 (Grupo interno de estructura)**.** Dada V un álgebra de Jordan, definimos el *grupo interno de estructura* como al grupo generado por la representación cuadrática, es decir,

$$\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}) = \langle \mathrm{U}_x \rangle_{x \in \mathsf{V} \text{ inversible}}.$$

Lema 3.1.10. $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ es un subgrupo normal de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Demostración. Si g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y x es inversible, entonces $\mathrm{U}_{gx} = g\,\mathrm{U}_x\,g^* = g\,\mathrm{U}_x\,g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$. Por lo tanto, $g\,\mathrm{U}_x\,g^{-1} = \mathrm{U}_{gx}\,\mathrm{U}_{g1}^{-1}$, que pertenece a $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$, y por lo tanto $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ es un subgrupo normal. □

Existe otro gran subgrupo del grupo de estructura: los automorfismos multiplicativos.

Definición 3.1.11 (Automorfismos)**.** Dada V un álgebra de Jordan diremos que k en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ es un *automorfismo multiplicativo* (o automorfismo abreviadamente) si para todo x e y en V se cumple que $k(x \circ y) = k(x) \circ k(y)$. Vamos a notar a este conjunto $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.

Es fácil ver que los automorfismos forman un grupo.

Observación 3.1.12. Notemos que $k(L_x y) = k(x \circ y) = (kx) \circ (ky) = L_{kx} ky$, y análogamente $k(\mathrm{U}_x\, y) = \mathrm{U}_{kx}\, ky$, por lo que

$$kL_v k^{-1} = L_{kv} \quad \text{y} \quad \mathrm{U}_{kv} = k\,\mathrm{U}_v\,k^{-1} \quad \forall\, v \in \mathsf{V}\,.$$

En particular, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ preserva los inversibles y $k(v)^{-1} = k(v^{-1})$. Mas aún, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ preserva el cono Ω, pues $k(v^2) = (kv)^2$ y el cono puede ser caracterizado como el conjunto de cuadrados inversibles de V, como vimos en la Observación 2.3.10.

Lema 3.1.13. Sea V un álgebra de Jordan. Entonces $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es un subgrupo de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y para todo k automorfismo $k^* = k^{-1}$.

Demostración. Como vimos en la obsevación anterior dado k automorfismo tenemos que $\mathrm{U}_{kv} = k\,\mathrm{U}_v\,k^{-1}$, por lo que k pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $k^* = k^{-1}$. □

Podemos preguntarnos si esta propiedad caracteriza a los automorfismos: dado g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tal que $g^* = g^{-1}$, ¿vale que g es un automorfismo? Veremos que la respuesta es negativa, pero obtendremos una caracterización de estos elementos dentro del grupo de estructura en el Teorema 3.4.11.

Tenemos sin embargo una manera de caracterizar a los automorfismos dentro del grupo de estructura, tanto en un álgebra de Jordan real como en su complexificación.

Proposición 3.1.14. Sea V un álgebra de Jordan. Dado k en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tenemos que k es un automorfismo si y solo si $k1 = 1$. De la misma manera, si k es un elemento de $\mathtt{Str}(V^{\mathbb{C}})$ entonces $k \in \mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$ si y solo si $k1 = 1$.

Demostración. Supongamos que k es un automorfismo. Como $\mathrm{U}_{k1} = k\,\mathrm{U}_1\,k^{-1} = Id$ podemos ver que U_{k1} es inversible, por lo que $k1$ es inversible. Ahora, $k1 = k(1^2) = (k1)^2$, por lo que $k1 = 1$. Recíprocamente, supongamos que $k1 = 1$, en particular $k^{-1}1 = 1$. Tenemos que $k^* = k^{-1}\,\mathrm{U}_{k1} = k^{-1}$, por lo que $\mathrm{U}_{kx} = k\,\mathrm{U}_x\,k^{-1}$. Entonces $k(x)^2 = \mathrm{U}_{kx}(1) = k\,\mathrm{U}_x\,k^{-1}(1) = k(x^2)$. Linealizando esta igualdad, tenemos que $k(x \circ y) = kx \circ ky$, y k es un automorfismo.

La prueba en el caso complejo es idéntica. □

3.2. La estructura de grupo de Lie-Banach de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$

Supongamos de ahora en mas que V es una JB-álgebra. Vamos a establecer una estructura diferenciable para $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Como V es un espacio de Banach podemos dar la norma supremo al espacio de operadores de V, que lo convierte en un espacio de Banach. De esta manera, los operadores inversibles $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ forman un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(\mathsf{V}) = \mathsf{B}(\mathsf{V})$. Mas aún, como $||\,\mathrm{U}_x\,|| \leq 3||x||^2$ la representación cuadrática es continua, por lo que la condición del grupo de estructura es cerrada. Por lo tanto, el grupo de estructura es un grupo cerrado de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Sin embargo, no podemos afirmar todavía que es un subgrupo de Lie (es decir, una subvariedad cerrada embebida de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ con su estructura de grupo de Lie), pues el teorema del subgrupo cerrado de Lie no es verdadero para grupos de Lie-Banach infinito dimensionales.

Necesitamos entonces otra estrategia para probar que $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un subgrupo de Lie. Recordemos, entonces, el Teorema 1.2.9 de subgrupos algebraicos.

Teorema 3.2.1. *Sea V una JB-álgebra. Entonces $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un subgrupo algebraico de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Por lo tanto $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un subgrupo embebido de Lie-Banach, y si $\mathrm{U} = \{X \in \mathsf{B}(\mathsf{V}) : \|X\| < \frac{\pi}{3}\}$, entonces*

$$\exp(\mathrm{U} \cap \mathrm{Lie}(\mathtt{Str}(\mathsf{V}))) = \exp(\mathrm{U}) \cap \mathtt{Str}(\mathsf{V})\,.$$

Mas aún, $\mathrm{Lie}(\mathtt{Str}(\mathsf{V})) = \mathtt{str}(\mathsf{V})$, *con*

$$\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \{H \in \mathsf{B}(\mathsf{V}) \;\; \textit{such that} \; \exists\,\overline{H} \in \mathsf{B}(\mathsf{V}) : 2\,\mathrm{U}_{x,Hx} = H\,\mathrm{U}_x - \mathrm{U}_x\,\overline{H} \quad \forall\, x \in \mathsf{V}\}.$$

Demostración. Definamos para cada x en V los polinomios $P_x, Q_x : \mathsf{B}(\mathsf{V}) \times \mathsf{B}(\mathsf{V}) \to \mathsf{B}(\mathsf{V})$ dados por

$$P_x(A,B) = \mathrm{U}_{Ax} - A\,\mathrm{U}_x\,B\,\mathrm{U}_{A1} \qquad Q_x(A,B) = \mathrm{U}_{Bx} - B\,\mathrm{U}_x\,A\,\mathrm{U}_{B1}\,.$$

Por la Proposición 3.1.7 sabemos que g en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ pertenece al grupo de estructura si y solo si $P_x(g,g^{-1}) = Q_x(g,g^{-1}) = 0$ para todo x en V, por lo que $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un subgrupo algebraico de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Por lo tanto es un grupo de Lie embebido por el Teorema 1.2.9. La afirmación sobre el entorno se sigue del mismo teorema, notando que el grado de los polinomios es 3.

Calculemos el álgebra de Lie de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Sea g_t un camino suave en el grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, con $g_0 = Id$ y $g_0' = H$ un elemento de $\mathrm{Lie}(\mathtt{Str}(\mathsf{V}))$. Calculemos el diferencial de g^*. Como $g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$

$$\begin{aligned}(g^*)_0' &= (g^{-1})_0'\,\mathrm{U}_{g_0 1} + g_0^{-1}(\mathrm{U}_{g1})_0' = -H + D_{g_0 1}(\mathrm{U}_{-})g_0' 1\\ &= -H + 2\,\mathrm{U}_{-,g_0 1} H1 = -H + 2\,\mathrm{U}_{H1,1}\,.\end{aligned}$$

Como g_t es un elemento del grupo de estructura para todo t tenemos que $\mathrm{U}_{g_t x} = g_t\,\mathrm{U}_x\,g_t^*$. Derivemos ambos lados de esta igualdad. Del lado izquierdo obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{U}_{g_t x})|_{t=0} = D_{g_0 x}(\mathrm{U}_{-})g_0' x = 2\,\mathrm{U}_{x,Hx}\,.$$

Del lado derecho obtenemos

$$g_0'\,\mathrm{U}_x\,g_0^* + g_0\,\mathrm{U}_x(g^*)_0' = H\,\mathrm{U}_x + \mathrm{U}_x(-H + 2\,\mathrm{U}_{H1,1}).$$

Por lo tanto, si tomamos $\overline{H} = H - 2\,\mathrm{U}_{H1,1}$ se sigue que $2\,\mathrm{U}_{x,Hx} = H\,\mathrm{U}_x - \mathrm{U}_x\,\overline{H}$.

Recíprocamente, supongamos H en $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ cumple que existe $\overline{H}$ en $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ tal que $2\,\mathrm{U}_{x,Hx} = H\,\mathrm{U}_x - \mathrm{U}_x\,\overline{H}$ para todo x en V. Basta ver por el Lema 1.2.5 que e^{tH} pertenece al grupo de estructura para todo t real. Consideremos $f_t = \mathrm{U}_{e^{tH}x}$ y $g_t = e^{tH}\,\mathrm{U}_x(e^{tH})^* = e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1}$. Queremos ver que ambas funciones son iguales. Notemos que $f_0 = \mathrm{U}_x = g_0$. Mas aún, tenemos que

$$\begin{aligned}f_t' &= D_{e^{tH}x}(\mathrm{U}_{-})e^{tH}Hx = 2\,\mathrm{U}_{e^{tH},e^{tH}Hx} = 2\,\mathrm{U}_{e^{tH},He^{tH}x} = H\,\mathrm{U}_{e^{tH}x} - \mathrm{U}_{e^{tH}x}\,\overline{H}\\ &= Hf_t - f_t\overline{H},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}g_t' &= e^{tH}H\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} - e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}H\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} + e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}D_{e^{tH}1}(\mathrm{U}_{-})e^{tH}H1\\ &= e^{tH}H\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} - e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}H\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} + 2e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1,He^{tH}1}\\ &= e^{tH}H\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} - e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}H\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} + e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}(H\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} - \mathrm{U}_{e^{tH}1}\,\overline{H})\\ &= He^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1} - e^{tH}\,\mathrm{U}_x\,e^{-tH}\,\mathrm{U}_{e^{tH}1}\,\overline{H}\\ &= Hg_t - g_t\overline{H}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por la unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias en el espacio de Banach $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ del Teorema 1.1.4, $f_t = g_t$ para todo t real. □

Gracias a la igualdad anterior de ahora en mas vamos a notar $\mathrm{Lie}(\mathtt{Str}(\mathsf{V})) = \mathtt{str}(\mathsf{V})$. Notemos que de la demostración se desprende que para H en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ tenemos que $\overline{H} = H - 2\,\mathrm{U}_{H1,1}$.

Podemos identificar algunos elementos dentro de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. Veremos después que incluso podemos descomponerla como suma directa de dos subespacios.

Lema 3.2.2. Sea V una JB-álgebra. Entonces el espacio $\mathbb{L} = \{L_v : v \in \mathsf{V}\}$ es un subespacio cerrado de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$.

Demostración. Por el Lema 2.4.7 tenemos que para todo v en V, $e^{2L_v} = \mathrm{U}_{e^v}$; es decir, que la exponencial de operadores de multiplicación es un operador U. En particular tenemos que para todo v en V y para todo t real e^{tL_v} pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, por lo que los operadores de multiplicación L_v pertenecen a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. Notemos que la aplicación $v \mapsto L_v$ es una isometría: $||L_v w|| = ||v \circ w|| \leq ||v||||w||$ y $||L_v 1|| = ||v||$, por lo que $||L_v|| = ||v||$. En particular $\mathbb{L}$ es un subespacio cerrado de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. □

Definición 3.2.3 (Derivaciones)**.** Sea V un álgebra de Jordan, decimos que D un operador en $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ es una *derivación* si $D(x \circ y) = Dx \circ y + x \circ Dy$ para todo x e y en V. Notamos $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ al espacio de las derivaciones.

Observación 3.2.4. Es fácil ver con un simple cálculo que $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ es una subálgebra de Lie-Banach de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$: $[D_1, D_2](x \circ y) = ([D_1, D_2])x \circ y + x \circ ([D_1, D_2])y$.

Teorema 3.2.5. *Sea V una JB-álgebra. Entonces $\mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un subgrupo algebraico de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. En particular es un subgrupo embebido de Lie-Banach, y si $\mathrm{U} = \{X \in \mathsf{B}(\mathsf{V}) : \|X\| < \frac{\pi}{2}\}$ entonces*

$$\exp(\mathrm{U} \cap \mathrm{Lie}(\mathtt{Aut}(\mathsf{V}))) = \exp(\mathrm{U}) \cap \mathtt{Aut}(\mathsf{V})\,.$$

Mas aún, su álgebra de Lie-Banach $\mathtt{aut}(\mathsf{V}) = \mathrm{Lie}(\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) \subset \mathtt{str}(\mathsf{V})$ es igual a $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$.

Demostración. Definamos para cada x, y en V el polinomio $P_{x,y} : \mathsf{B}(\mathsf{V}) \to \mathsf{B}(\mathsf{V})$, $P_{x,y}(A) = A(x \circ y) - A(x) \circ A(y)$. El grupo de automorfismos es la intersección de los ceros de todo polinomio $P_{x,y}$. Por lo tanto es un grupo algebraico y en particular un subgrupo de Lie embebido por el Teorema 1.2.9. La afirmación sobre el entorno se sigue del mismo teorema, notando que los polinomios son de grado 2. Probemos que $\mathtt{aut}(\mathsf{V}) = \mathrm{Lie}(\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$. Como $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es un subgrupo de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es obvio que $\mathtt{aut}(\mathsf{V})$ es una subálgebra de Lie-Banach de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. Sea γ un camino suave de automorfismos, $\gamma_0 = Id$, $\gamma_0' = D$. Como γ_t es un automorfismo para todo t tenemos que $\gamma_t(x \circ y) = \gamma_t x \circ \gamma_t y$. Derivando esta igualdad obtenemos que

$$\gamma_t'(x \circ y) = \gamma_t' x \circ \gamma_t y + \gamma_t x \circ \gamma_t' y,$$

y para $t = 0$ llegamos a que $D(x \circ y) = Dx \circ y + x \circ Dy$. Por lo tanto, D es una derivación. Recíprocamente, sea D una derivación y definamos $f_t = (e^{tD}x) \circ (e^{tD}y)$. Tenemos que $f_0 = x \circ y$. Mas aún,

$$f_t' = e^{tD}Dx \circ e^{tD}y + e^{tD}x \circ e^{tD}Dy = (De^{tD}x) \circ e^{tD}y + e^{tD}x \circ (De^{tD}y) = Df_t.$$

Entonces $f_t = e^{tD}(x \circ y)$ por la unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, y e^{tD} es un automorfismo para todo t. Por lo tanto, por el Lema 1.2.5 D pertenece al álgebra de Lie $\mathtt{aut}(\mathsf{V})$. Esto prueba que $\mathtt{aut}(\mathsf{V}) = \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$. □

Observación 3.2.6. Sea $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0$ la componente conexa de la identidad de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Tenemos entonces que $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0 \subset \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es abierta y esta generada por las exponenciales de las derivaciones; es decir, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0 = \langle e^D \rangle_{D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})}$.

Gracias al teorema anterior podemos dar una caracterización diferente de las derivaciones.

Proposición 3.2.7. Sea V una JB-álgebra. Entonces D es una derivación si y solo si D pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y $D1 = 0$.

Demostración. Sea D una derivación. Ya vimos que D pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. Además, $D1 = D(1 \circ 1) = 2D1$ por lo que $D1 = 0$. Recíprocamente, supongamos que D pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y que $D1 = 0$. Entonces

$$e^{tD}1 = 1 + tD1 + \frac{t^2}{2}D^2 1 + \cdots = 1.$$

Por lo tanto se cumple que para todo t la transformación e^{tD} pertenece al grupo de estructura y mapea 1 a 1, por lo que es un automorfismo. Esto implica, nuevamente por el Lema 1.2.5, que D pertenece a $\mathtt{aut}(\mathsf{V}) = \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$. $\square$

Hemos visto entonces que tanto $\mathbb{L}$ como $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ están contenidas en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$. Veamos que, mas aún, es igual a su suma.

Corolario 3.2.8. Sea V una JB-álgebra. Entonces $\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathtt{Der}\,(\mathsf{V}) \oplus \mathbb{L}$.

Demostración. Como ambos espacios estan contenidos en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ su suma también. La misma es directa pues si $L_v 1 = 0$ entonces $v = 0$. Recíprocamente, sea X en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y tomemos $u = X1$. Consideremos $D = X - L_u$; D pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y $D1 = X1 - u = 0$, por lo que D es una derivación. Por lo tanto, $X = L_u + D$, con D derivación. $\square$

Observación 3.2.9. Es fácil comprobar que esta es una descomposición de Cartan de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y por lo tanto un sistema triple de Lie: tenemos que $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ es una subálgebra de Lie y

$$[\mathbb{L}, \mathbb{L}] \subset \mathtt{Der}\,(\mathsf{V}) \quad [\mathbb{L}, \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})] \subset \mathbb{L}.$$

3.3. El grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ que fija el cono

Dada V una JB-álgebra, nuestro objetivo es definir una acción sobre el cono Ω para tener un mejor panorama sobre el cono y el grupo de estructura. Sin embargo, no podemos definir una acción desde el grupo de estructura pues dado x positivo y g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ aunque sabemos que gx es inversible no podemos afirmar que es positivo. Es mas, considerando $g = -Id$ tenemos que para todo x positivo gx es negativo, por lo que existen transformaciones en el grupo de estructura que mapean elementos positivos a elementos no positivos. Mas adelante caracterizaremos a todos los elementos del grupo de estructura y veremos quienes son estas transformaciones. Estudiemos entonces el grupo de transformaciones que fija el cono.

Definición 3.3.1 ($\mathsf{G}(\Omega)$)**.** Dada V una JB-álgebra definimos al *grupo que fija el cono* como $\mathsf{G}(\Omega)$, es decir

$$\mathsf{G}(\Omega) = \{g \in \mathsf{GL}(\mathsf{V}) : g(\Omega) = \Omega\}.$$

Veremos que aunque el grupo de estructura no fija al cono, está vinculado con $\mathsf{G}(\Omega)$.

Lema 3.3.2. Sea V una JB-álgebra. Entonces $\texttt{InnStr}(\mathsf{V})$ y $\texttt{Aut}(\mathsf{V})$ son subgrupos de $\mathsf{G}(\Omega)$.

Demostración. Vimos en la Proposición 2.3.13 que si v es inversible y x es positivo entonces $\mathrm{U}_v\, x$ es positivo. Como los operadores U generan el grupo interno de estructura, tenemos que $\texttt{InnStr}(\mathsf{V})$ es subgrupo de $\mathsf{G}(\Omega)$. Por otro lado, como vimos en la Observación 3.1.12, los automorfismos preservan el cono por lo que $\texttt{Aut}(\mathsf{V})$ también es un subgrupo de $\mathsf{G}(\Omega)$. $\square$

Mostramos en el capítulo anterior que una JB-álgebra está caracterizada por su orden. Cabe esperar, entonces, que haya un vínculo entre las transformaciones que preservan el producto y las que preservan la norma, recordando que es la norma del orden; es decir, entre automorfismos e isometrías. Para probar esto usaremos el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [47].

Teorema 3.3.3. *Sean* V *y* W *dos JB-álgebras y sea* g *una isometría lineal sobreyectiva de* V *a* W *que mapea la unidad multiplicativa de* V *a la unidad multiplicativa de* W. *Entonces* g *es un automorfismo.*

Proposición 3.3.4. Sea V una JB-álgebra y g un operador inversible de V. Entonces g es un automorfismo si y solo si g es una isometría que pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$.

Demostración. Por la Proposición 2.1.8 una transformación es positiva y fija la unidad de orden si y solo si es una isometría. Por el Lema 3.3.2 todo automorfismo g conserva el cono; y como en una JB-álgebra la unidad de orden es la unidad multiplicativa, tenemos que g fija la unidad de orden. Por lo tanto, g es una isometría. Recíprocamente, si g es una isometría en $\mathsf{G}(\Omega)$ en particular es inversible; y nuevamente por la Proposición 2.1.8 g fija la unidad de orden, por lo que podemos aplicar el Teorema 3.3.3 y g es un automorfismo. $\square$

Gracias a estos resultados podemos dar una caracterización de $\mathsf{G}(\Omega)$.

Proposición 3.3.5. Sea V una JB-álgebra. Entonces toda g en $\mathsf{G}(\Omega)$ se puede escribir de la forma $g = U_x k$, donde x es positivo y k es un automorfismo. En particular, $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo de $\texttt{Str}(\mathsf{V})$.

Demostración. Como g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ y 1 es positivo, $g1$ es positivo por lo que $g1 = x^2$ para algún x positivo. Sea $k = \mathrm{U}_x^{-1}\, g$. Tenemos que

$$k1 = \mathrm{U}_x^{-1}\, g1 = \mathrm{U}_x^{-1}\, x^2 = 1.$$

Como U_x y g pertenecen a $\mathsf{G}(\Omega)$ también k, y como $k1 = 1$ entonces k es una isometría. En particular es una isometría en $\mathsf{G}(\Omega)$, por lo que es un automorfismo.

Como $\texttt{InnStr}(\mathsf{V})$ y $\texttt{Aut}(\mathsf{V})$ son subgrupos de $\texttt{Str}(\mathsf{V})$ esto nos dice que $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo de $\texttt{Str}(\mathsf{V})$. $\square$

Tenemos entonces que $\mathsf{G}(\Omega)$ esta conformado por $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ y $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Queremos ver cómo se vinculan las estructuras de estos grupos. Notemos que $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ es conexo: dado x en Ω y γ un camino suave entre 1 y x, tenemos que U_γ es un camino suave entre Id y U_x. A partir de esto podemos construir caminos suaves entre Id y cualquier elemento en $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$. Sin embargo, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ no es necesariamente conexo.

Recordemos la Observación 2.3.10, donde notamos que existe un único logaritmo diferenciable $\ln : \Omega \to \mathsf{V}$ definido en Ω, el cual es un difeomorfismo ya que su inversa es la exponencial.

Teorema 3.3.6. *Sea* V *una JB-álgebra. Definamos* $F : \mathsf{G}(\Omega) \times [0,1] \to \mathsf{G}(\Omega)$ *como* $F(g,t) = \mathrm{U}_{e^{-t\ln(g1)/2}} \cdot g$. *Entonces* $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ *es un retracto por deformación fuerte de* $\mathsf{G}(\Omega)$ *por* F. *En particular* $\mathsf{G}(\Omega)$ *y* $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ *tienen el mismo número de componentes conexas.*

Demostración. Es claro que F es continua ya que la evaluación, el logaritmo y la representación cuadrática son continuas. Claramente también $F(g,0) = g$, y

$$F(g,1)1 = (\mathrm{U}_{\sqrt{g1}})^{-1} g1 = 1$$

por lo que $F(g,1)$ pertenece a $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ para cada g en $\mathsf{G}(\Omega)$. Finalmente si $k \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ entonces $F(k,t) = k$ pues $k1 = 1$. ☐

Observación 3.3.7. Sabemos que $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Mas aún, es un subgrupo cerrado. Dado x en $\overline{\Omega}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Ω tal que x_n converge a x. Entonces gx_n converge a gx, que por lo tanto pertenece a $\overline{\Omega}$. Recíprocamente, como para toda g en el grupo de estructura y x inversible tenemos que gx es inversible, entonces si $g(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$ en particular g fija Ω, por lo que g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$. En conclusión, si g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, entonces g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ si y solo si $g(\overline{\Omega}) = \overline{\Omega}$. Por lo tanto $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo cerrado de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Queremos dar una estructura diferenciable a $\mathsf{G}(\Omega)$. Notemos que como sucedía con el grupo de estructura que sea un subgrupo cerrado no es suficiente para que $\mathsf{G}(\Omega)$ herede una estructura diferenciable como subgrupo de Lie-Banach en el caso infinito dimensional. Para probar que es una subvariedad embebida estudiaremos primero $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$, la componente conexa de la identidad en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Sabemos por la Proposición 1.2.7 que como $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un grupo de Lie entonces $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ es un subgrupo abierto y por lo tanto un subgrupo de Lie-Banach.

Notaremos de la misma manera $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0$ a la componente conexa de la identidad de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.

Proposición 3.3.8. Sea V una JB-álgebra. Entonces todo elemento g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ puede ser escrito como $g = \mathrm{U}\,k$, donde U pertenece a $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ y k pertenece a $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0$.

Demostración. Definamos $\varphi : \mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V}) \to \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ como $\varphi(L_x + D) = e^{L_x} e^D$. Es obviamente una función suave. Ahora, sea $L(t) + D(t)$ tal que $L(0) = D(0) = 0$, $L'(0) = L_x$, $D'(0) = D$. Entonces,

$$D_0\varphi(L + D) = (\varphi(L(t) + D(t)))'(0) = e^{L(0)} L e^{D(0)} + e^{L(0)} e^{D(0)} D = L + D.$$

Por lo tanto $D_0\varphi = Id$ y φ es un difeomorfismo local alrededor de $(0,0)$. Esto nos dice que en un entorno de la identidad en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ todo elemento puede ser escrito de la forma $e^{L_x}e^{D}$. Vimos ya que la exponencial de un operador de multiplicación nos devuelve un operador cuadrático y la exponencial de una derivación nos devuelve un automorfismo. Por lo tanto, en un entorno de la identidad todo elemento g se puede escribir de la forma $g = \mathrm{U}_x\, k$ con k automorfismo. Como por la Proposición 1.2.7 todo entorno de la identidad genera la componente conexa de la identidad, esto implica que todo elemento en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ se puede escribir como producto de elementos de la forma $\mathrm{U}_x\, k$. Como k es automorfismo tenemos que $\mathrm{U}_x\, k_1\, \mathrm{U}_y\, k_2 = \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_{k_1 y}\, k_1 k_2$, lo que termina de probar la afirmación. □

Corolario 3.3.9. Sea V una JB-álgebra. Entonces la componente de la identidad $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ está contenida en $\mathsf{G}(\Omega)$. Mas aún, todo elemento g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ se puede escribir de la forma $g = \mathrm{U}_x\, k$, donde x es positivo y $k = e^{D_1}e^{D_1}\dots e^{D_n}$ pertenece a $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0$ con D_i en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$.

Demostración. Como el grupo interno de estructura y el grupo de automorfismos son sugbrupos de $\mathsf{G}(\Omega)$ tenemos por la proposición anterior que $g = \mathrm{U}\, k$ pertenece a $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V}) \cdot \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathsf{G}(\Omega)$. La demostración de la proposición anterior junto con la Proposición 3.3.5 nos dan la segunda afirmación. □

Teorema 3.3.10. *Sea V una JB-álgebra. Entonces $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo de Lie embebido de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ con $\mathrm{Lie}(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathtt{str}(\mathsf{V})$. Tenemos que $\mathsf{G}(\Omega) = \bigsqcup_i \mathtt{Str}(\mathsf{V})_0 \cdot k_i$, donde cada k_i pertenece a una componente conexa distinta de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.*

Demostración. Como la componente conexa de la identidad $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ está contenida en $\mathsf{G}(\Omega)$ y es abierta tenemos que $\mathsf{G}(\Omega)$ es la unión de las traslaciones de esta componente, por lo que también es abierta en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Por lo tanto $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo de Lie embebido de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y en consecuencia de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$, y como $\mathsf{G}(\Omega)$ es abierta en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tenemos que $\mathrm{Lie}(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathtt{str}(\mathsf{V})$. Finalmente, tenemos que $\mathsf{G}(\Omega) = \bigsqcup_i \mathtt{Str}(\mathsf{V})_0 \cdot g_i$ la unión de distintas copias trasladadas de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$; cada g_i pertenece a diferentes componentes conexas de $\mathsf{G}(\Omega)$. Por la Proposición 3.3.8, $g_i = \mathrm{U}_{x_i}\, k_i$ por lo que podemos asimilar U_{x_i} al conjunto $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$, pues ya vimos que el grupo interno es conexo. Por el Teorema 3.3.6 y como las copias trasladadas de la componente deben ser distintas, cada k_i debe pertenecer a una componente conexa distinta de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. □

Observación 3.3.11. Parece haber sido incierto que $\mathsf{G}(\Omega)$ como grupo de Lie tenía la topología de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ como espacio normado (Ver [10, Pág. 363]).

3.4. Las componentes de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$

Como $\mathsf{G}(\Omega)$ es un subgrupo abierto de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ podemos descomponer $\mathtt{Str}(\mathsf{V}) = \bigsqcup_j g_j\, \mathsf{G}(\Omega)$ como una unión disjunta de traslaciones de $\mathsf{G}(\Omega)$, donde cada g_j pertenece a una coclase distinta de $\mathsf{G}(\Omega)$. Queremos saber cuantas copias de $\mathsf{G}(\Omega)$ hay en

$\mathtt{Str}(\mathsf{V})$; sabemos que son por lo menos dos, pues $-Id$ es un elemento en el grupo de estructura que no fija el cono.

Primeramente podemos ver qué conjunto es $g(\Omega)$ para transformaciones g en el grupo de estructura. Como Ω es un cono convexo y g es inversible, $g(\Omega)$ es un cono convexo.

Proposición 3.4.1. Sea V una JB-álgebra y sean g y h en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces los conos convexos $g(\Omega)$ y $h(\Omega)$ o son iguales o no se intersecan. Mas aún, $g(\Omega) = h(\Omega)$ si y solo si las coclases $g\,\mathsf{G}(\Omega)$ y $h\,\mathsf{G}(\Omega)$ son iguales.

Demostración. Basta ver que si g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ entonces $g(\Omega) = \Omega$ o $g(\Omega)$ no interseca Ω, pues si g y h pertenecen al grupo de estructura también pertenece $h^{-1} \circ g$, y comparar $h^{-1} \circ g$ con la identidad nos da el resultado general. Definamos el conjunto $A_g = \{x \in \Omega : g(x) \in \Omega\}$. Como $A_g = g^{-1}(\Omega) \cap \Omega$ tenemos que A_g es un conjunto abierto en Ω. Mas aún, es cerrado en Ω: sea $\{x_n\} \subset A_g$ tal que x_n converge a x en Ω. Entonces $g(x_n)$ converge a $g(x)$; como $g(x_n)$ pertenece a Ω para todo n, $g(x)$ pertenece a $\overline{\Omega}$. Pero como g pertenece al grupo de estructura $g(x)$ es inversible, por lo que $g(x)$ pertenece a Ω y por lo tanto x pertenece a A_g. Esto nos dice que A_g es abierto y cerrado en el conjunto convexo Ω, por lo que A_g es vacío o igual a Ω, lo que prueba la primera afirmación.

Supongamos que las coclases $g\,\mathsf{G}(\Omega)$ y $h\,\mathsf{G}(\Omega)$ son iguales; tenemos entonces que $h^{-1}g$ pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ y que $h^{-1}g(\Omega) = \Omega$, por lo que $g(\Omega) = h(\Omega)$. Recíprocamente, si los conos $g(\Omega)$ y $h(\Omega)$ son iguales, entonces $h^{-1}g(\Omega) = \Omega$ y $h^{-1}g$ pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$, por lo que las coclases son iguales. □

Tenemos entonces una familia de conos $\{g(\Omega) : g \in \mathtt{Str}(\mathsf{V})\}$ que o son iguales o no se intersecan, y por lo probado tenemos tantas copias de $\mathsf{G}(\Omega)$ en el grupo de estructura como diferentes conos en este conjunto. Hay dos conos que siempre pertenecen a esta familia: Ω y $-\Omega$. Para caracterizar los otros conos (y en consecuencia las copias de $\mathsf{G}(\Omega)$), vamos a identificar un elemento particular en cada uno de ellos. Notemos que en el caso de Ω y $-\Omega$ existe un elemento significativo en cada uno: 1 y -1. En los diferentes conos existirán otros elementos que cumplirán la misma función: las simetrías centrales.

Observación 3.4.2. Sea p en V una proyección central. Entonces el elemento ε_p es una simetría central. Si tomamos $p = 1$ obtenemos $\varepsilon_p = 1$ y con $p = 0$ obtenemos $\varepsilon_p = -1$.

Probemos algunas igualdades para proyecciones y simetrías que usaremos después.

Lema 3.4.3. Sea V un álgebra de Jordan, p en V un idempotente, $p' = 1 - p$ y $\varepsilon_p = 2p - 1$ su simetría asociada. Entonces $\mathrm{U}_{\varepsilon_p}$ es un automorfismo involutivo y valen las siguientes identidades:

a) $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} = 8L_p^2 - 8L_p + Id = Id - 4\,\mathrm{U}_{p,p'}$

b) $\mathrm{U}_p - \mathrm{U}_{p'} = 2L_p - Id = L_{\varepsilon_p}$

c) $2\,\mathrm{U}_{p,p'} = 4L_p(Id - L_p) = 4L_pL_{p'}$

d) $L_{\varepsilon_p}L_p(Id - L_p) = 0$

e) $L_{\varepsilon_p}U_{p,p'} = 0$

f) $L_{\varepsilon_p}^2 = Id - 2\,\mathrm{U}_{p,p'}$.

Mas aún, si V es una JB-álgebra y p es central entonces $L_p = (L_p)^2 = \mathrm{U}_p$, $L_{px} = L_p L_x = L_x L_p$ y $px^2 = (px)^2 = (px)x$ para todo x en V; y L_p es un morfismo de Jordan. Mas aún, tenemos que $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} = Id$.

Demostración. Tenemos que $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} 1 = \varepsilon_p^2 = 1$ por lo que es un automorfismo, y $\mathrm{U}_{\varepsilon_p}^2 = \mathrm{U}_{\varepsilon_p^2} = Id$ por lo que es involutivo. Tenemos ademas que

a) $$\begin{aligned}\mathrm{U}_{\varepsilon_p} &= 2(2L_p - Id)^2 - Id = 8L_p^2 - 8L_p + Id = Id - 4(L_p - (2L_p^2 - L_{p^2}))\\ &= Id - 4(\mathrm{U}_{p,1} - \mathrm{U}_{p,p}) = Id - 4\,\mathrm{U}_{p,p'}\,.\end{aligned}$$

b) $\mathrm{U}_p - \mathrm{U}_{p'} = 2L_p^2 - L_p - (2(Id - L_p)^2 - (Id - L_p)) = 2L_p - Id = L_{\varepsilon_p}$.

c) $2\,\mathrm{U}_{p,p'} = 2(L_p(Id - L_p) + (Id - L_p)L_p) = 4L_p(Id - L_p) = 4L_p L_{p'}$.

d) $L_{\varepsilon_p} L_p(Id - L_p) = 2(L_p - \frac{1}{2}Id)L_p(Id - L_p) = 0$ por ser 0, 1 y $\frac{1}{2}$ los autovalores de L_p, por la Proposición 2.2.24.

e) $L_{\varepsilon_p}\mathrm{U}_{p,p'} = 2L_{\varepsilon_p} L_p(Id - L_p) = 0$.

f) $L_{\varepsilon_p}^2 = (2L_p - Id)^2 = Id - 4L_p(Id - L_p) = Id - 2U_{p,p'}$.

Ahora, si V es JB-álgebra y p es central tenemos por el Corolario 2.3.26 que $L_p = L_{p^2} = \mathrm{U}_p$, por lo que $L_p^2 = \mathrm{U}_p^2 = \mathrm{U}_{p^2} = \mathrm{U}_p$. Ahora, como p es central puede asociar por lo que $px^2 = (px)x$. Mas aún,

$$(px)x = (p^2x)x = L_x L_x L_x p = L_p((px)x) = L_p L_{px} x = L_{px}(px) = (px)^2.$$

Polarizando la identidad $(px)^2 = px^2$ obtenemos que $(px)(py) = p(xy)$, por lo que L_p es un morfismo de Jordan. En particular $L_{px} L_p y = L_p L_x y$. Finalmente, $L_{px} y = L_y L_p x = L_p L_y x = L_p L_x y$. Para terminar, $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} x = \varepsilon_p^2 x = x$, por lo que $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} = Id$. $\square$

Observación 3.4.4. Como $x(py) = p(xy)$ para cada x, y en V tenemos que $\mathtt{I}_p = p\mathsf{V} = \mathrm{U}_p(\mathsf{V})$ es un ideal de Jordan de V para cada p proyección central. No es difícil ver que dado un idempotente p en V, el espacio $p\mathsf{V}$ es un ideal si y solo si p es central. Esto se puede encontrar en [43, Section 2.5.7]. Para JBW-álgebras (JB-álgebras con espacio predual) las proyecciones centrales estan en correspondencia uno-a-uno con los ideales de Jordan de V, que son de la forma $p\mathsf{V}$ para alguna proyección central p en V (ver [43, Proposition 4.3.6]).

Dadas p una proyección central y $\varepsilon_p = 2p - 1$ su correspondiente simetría central vamos a notar como S_p al operador L_{ε_p}. Por el lema anterior tenemos que L_p es una proyección de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$, por lo que $S_p = 2L_p - Id$ es una simetría de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$.

Queremos ver que hay una correspondencia uno-a-uno entre los distintos conos de $\{g(\Omega) : g \in \mathtt{Str}(\mathsf{V})\}$ y las simetrías centrales en V. Comencemos probando que toda simetría central nos define uno de estos conos y que distintas simetrías centrales nos definen distintos conos.

Proposición 3.4.5. Sea V una JB-álgebra y sea p en V una proyección central. Entonces S_p pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. En particular, dada ε_p una simetría central existe un g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tal que ε_p pertenece a $g(\Omega)$.

Demostración. Notemos que dado x en V tenemos que ε_p y x generan un álgebra fuertemente asociativa, al ser ε_p central. Entonces, por la Proposición 2.2.10 tenemos que

$$\mathrm{U}_{S_p x} = \mathrm{U}_{\varepsilon_p x} = \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_{\varepsilon_p} = S_p^2 \, \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_{\varepsilon_p} = S_p \, \mathrm{U}_x \, S_p \, \mathrm{U}_{\varepsilon_p} = S_p \, \mathrm{U}_x \, S_p^{-1} \, \mathrm{U}_{S_p 1},$$

teniendo en cuenta que S_p conmuta con U_x al ser ε_p central.

Finalmente, dada ε_p simetría central tenemos que $S_p 1 = \varepsilon_p$, por lo que ε_p pertenece a $S_p(\Omega)$. □

En la cuenta de la demostración también vimos que si ε_p es una simetría central $\mathrm{U}_{\varepsilon_p x} = \mathrm{U}_x$.

Observación 3.4.6. Como dijimos antes, en toda álgebra existen dos proyecciones centrales: 0 y 1. Es fácil ver que $S_1 = Id$, $S_0 = -Id$; por lo que los conos asociados son Ω y $-\Omega$, los conos que existen en toda álgebra.

Tenemos entonces que simetrías centrales nos definen conos. Veamos que simetrías diferentes nos definen conos diferentes.

Proposición 3.4.7. Sea V una JB-álgebra. Sean p_1, p_2 proyecciones centrales en V tales que $S_{p_1}(\Omega) = S_{p_2}(\Omega)$. Entonces $p_1 = p_2$. En particular, si p_1 es distinto a p_2 tenemos que S_{p_1} y S_{p_2} están en diferentes coclases de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Demostración. Si $S_{p_1}(\Omega) = S_{p_2}(\Omega)$ sabemos por la Proposición 3.4.1 que $S_{p_1}\,\mathsf{G}(\Omega) = S_{p_2}\,\mathsf{G}(\Omega)$, por lo que $S_{p_1}^{-1} S_{p_2} = S_{p_1} S_{p_2}$ pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$. Sea $p = (\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2} + 1)/2$; notemos que pertenece al centro de V. Como

$$(\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2})^2 = \varepsilon_{p_1}^2 \varepsilon_{p_2}^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

al ser elementos centrales, tenemos que $p^2 = p$. Luego, $S_p = L_{\varepsilon_p} = L_{\varepsilon_{p_1}\varepsilon_{p_2}} = L_{\varepsilon_{p_1}} L_{\varepsilon_{p_2}} = S_{p_1} S_{p_2}$ pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ y en particular $S_p 1 = 2p - 1$ es positivo. Por lo tanto $p > \frac{1}{2}$ y en consecuencia es inversible. Como $p^2 = p$ y p asocia, podemos deducir que $p = 1$; esto nos dice que $S_p = S_{p_1} S_{p_2} = Id$. En conclusión, $S_{p_1} = S_{p_2}$ y $p_1 = p_2$. □

Solo nos queda ver entonces que dado un elemento g en el grupo de estructura existe una simetría central en $g(\Omega)$.

Observación 3.4.8. En la siguiente demostración vamos a usar la descomposición de Pierce para una proyección p. Recordemos que el espacio V se puede descomponer en tres sumandos V_2, V_1 y V_0 donde cada uno de estos espacios es el rango de las proyecciones U_p, $2U_{p,p'}$ y $U_{p'}$ respectivamente. Pero estos espacios tambien son los autoespacios del operador L_p, asociados a los autovaloes 1, $\frac{1}{2}$ y 0 respectivamente.

Renombraremos a estos espacios como V_1^p, $\mathsf{V}_{1/2}^p$ y V_0^p y llamaremos $\mathsf{V}^p = \mathsf{V}_1^p \oplus \mathsf{V}_0^p$; tenemos que $\mathsf{V} = \mathsf{V}^p \oplus \mathsf{V}_{1/2}^p$. En lo que sigue estaremos usando las igualdades del Lema 3.4.3.

Afirmamos que $\mathsf{V}^p = \{v \in \mathsf{V} : \mathrm{U}_{\varepsilon_p} v = v\}$: notando que $\mathsf{V}^p = \ker(\mathrm{U}_{p,p'})$, dado v en V^p tenemos que $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} v = (Id - 4\,\mathrm{U}_{p,p'})v = v$. También afirmamos que $\mathsf{V}_{1/2}^p = \{v \in \mathsf{V} : \mathrm{U}_{\varepsilon_p} v = -v\}$: dado v en $\mathsf{V}_{1/2}^p$, $\mathrm{U}_{\varepsilon_p} v = (Id - 4\,\mathrm{U}_{p,p'})v = v - 2v = -v$. Mas aún, tenemos que $L_{\varepsilon_p} = 2L_p - Id$ tiene autovalor 0 con autoespacio asociado $\mathsf{V}_{1/2}^p$; es decir, $\mathsf{V}_{1/2}^p = \ker(L_{\varepsilon_p})$. Notemos que si x pertenece a V^p tenemos que $\mathrm{U}_p x = L_p x$ pues vale para cada uno de los sumandos de V^p.

Sabemos por la Observación 2.2.26 que V^p es una subálgebra de V. Mas aún, como $\mathsf{V}^p = \ker(\mathrm{U}_{p,p'}) = \ker(L_p^2 - L_p)$ tenemos que $L_p^2 = L_p$ en V^p, por lo que p es una proyección central en V^p por el Corolario 2.3.26 y por lo tanto $L_{\varepsilon_p}^2 = 4(L_p^2 - L_p) + Id$ es la proyección sobre V^p y es la identidad en ese espacio.

Por otro lado, por la misma observación anterior, $\mathsf{V}_{1/2}^p$ es un subespacio y $2\,\mathrm{U}_{p,p'}$ es una proyección sobre él, pero no es una subálgebra: no contiene cuadrados. Sin embargo, para z en V^p o en $\mathsf{V}_{1/2}^p$ tenemos que $U_z(\mathsf{V}_{1/2}^p) \subset \mathsf{V}_{1/2}^p$.

Teorema 3.4.9. *Sea V una JB-álgebra y g una transformación en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces existe v en Ω, una proyección central p en V y un automorfismo k tales que*

$$g = \mathrm{U}_v\, S_p k = S_p\, \mathrm{U}_v\, k.$$

En particular, para todo g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ existe una simetría central ε_p perteneciente a $g(\Omega)$.

Demostración. Sea $z = g1$; sabemos que z es inversible y por la Observación 2.4.13 podemos escribir $z = z_+ - z_-$ con $z_\pm$ positivos. Consideremos $|z| = z_+ + z_- = \varepsilon_p z$, elemento positivo al ser suma de positivos por lo que tiene raiz cuadrada positiva. Definamos dicha raiz como $v = \sqrt{|z|}$. Consideremos $h = \mathrm{U}_v^{-1} g$, que pertenece al grupo de estructura; para probar el teorema basta ver que $h = S_p k$ para algún automorfismo k y proyección central p.

Sean p y p' las proyecciones asociadas a z_+ y z_- respectivamente, y sea $\varepsilon_p = 2p-1$. Notemos que

$$h1 = \mathrm{U}_v^{-1}\, z = \mathrm{U}_v^{-1}\, \varepsilon_p v^2 = \varepsilon_p,$$

pues v y ε_p pertenecen a $C(z)$. Mas aún, $Id = \mathrm{U}_{h^{-1}h1} = h^{-1}\,\mathrm{U}_{\varepsilon_p}\, h\, \mathrm{U}_{h^{-1}1}$, por lo que $\mathrm{U}_{h^{-1}1} = h^{-1}\,\mathrm{U}_{\varepsilon_p}\, h$. Por lo tanto $\mathrm{U}_{h^{-1}1}^2 = \mathrm{U}_{(h^{-1}1)^2} = Id$, en particular es un operador positivo. Como $(h^{-1}1)^2$ es positivo debe ser que $(h^{-1}1)^2 = 1$ por el Teorema 2.4.11 y $h^{-1}1 = \varepsilon_q$ para alguna proyección q en V.

Sea $\mathsf{V}^{\mathbb{C}} = \mathsf{V} \oplus i\,\mathsf{V}$ la complexificación de V convirtiendola en una JB*-álgebra. Como h pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ sabemos por la Proposición 3.1.8 que $h^{\mathbb{C}}$ la complexificación de h pertenece a $\mathtt{Str}(V^{\mathbb{C}})$. Abreviaremos esta complexificación como h para no cargar la notación. Consideremos $p + ip'$, elemento de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$; pertenece a la complexificación de $C(p)$ y es una raiz cuadrada de ε_p, pues $(p + ip')^2 = p - p' + 0 = \varepsilon_p$. Sea $k = \mathrm{U}_{p+ip'}\, h$, que pertenece a $\mathtt{Str}(V^{\mathbb{C}})$. Mas aún,

$$k1 = \mathrm{U}_{p+ip'}\, \varepsilon_p = (p + ip')^2 \varepsilon_p = \varepsilon_p^2 = 1,$$

donde esto es válido pues las operaciones suceden dentro de $C(p)$. Por lo tanto, por la Proposición 3.1.14 tenemos que k pertenece a $\mathtt{Aut}(V^{\mathbb{C}})$. Como $(p+ip')^{-1} = p-ip'$ podemos pasar el operador U del otro lado y obtenemos que $h = \mathrm{U}_{p-ip'}\, k$. Notemos que

$$k\varepsilon_q = U_{p+ip'} h\varepsilon_q = U_{p+ip'} 1 = (p+ip')^2 = \varepsilon_p,$$

por lo que $k(q) = p$ y $k(q') = p'$; en consecuencia $h = k\,\mathrm{U}_{q-iq'} = \mathrm{U}_{p-ip'}\, k$ pues k es un automorfismo.

Afirmamos que $hL_q = L_p h$ en $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$: observando que $h\,\mathrm{U}_{q+iq'} = k = \mathrm{U}_{p+ip'}\, h$ y que $\mathrm{U}_{p+ip'} = U_p - U_{p'} + 2i\,\mathrm{U}_{p,p'} = L_{\varepsilon_p} + 2i\,\mathrm{U}_{p,p'}$ (y que la misma fórmula vale para q), obtenemos

$$hL_{\varepsilon_q} + 2ih\,\mathrm{U}_{q,q'} = k = L_{\varepsilon_p} h + 2i\,\mathrm{U}_{p,p'}\, h.$$

Evaluando en un x perteneciente a V debe ser que $hL_{\varepsilon_q} x = L_{\varepsilon_p} hx$, pues h mapea V sobre si mismo. Por lo tanto $hL_q = L_p h$ en V y pasando a la complexificación es obvio que la igualdad se mantiene en $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Es fácil ver que la misma igualdad vale para k: $kL_q = L_p k$ pues k es un automorfismo.

Descompongamos k en su parte real e imaginaria: escribimos $k(v) = \alpha(v) + i\beta(v)$, con $\alpha, \beta : \mathsf{V}^{\mathbb{C}} \to \mathsf{V}$ transformaciones $\mathbb{R}-$lineales; α y β estan dadas por

$$\alpha(v) = {}^1\!/_2(k(v) + k(v)^*), \qquad \beta(v) = {}^1\!/_{2i}(k(v) - k(v)^*).$$

Tenemos que

$$h = \mathrm{U}_{p-ip'}\, k = (L_{\varepsilon_p} - 2i\,\mathrm{U}_{p,p'})(\alpha + i\beta) = L_{\varepsilon_p}\alpha + 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\beta + i[L_{\varepsilon_p}\beta - 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\alpha].$$

Como h mapea V en si mismo, para x en V debe cumplirse que

$$L_{\varepsilon_p}\beta(x) - 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\alpha(x) = 0.$$

Aplicando L_{ε_p} a izquierda, por el Lema 3.4.3 tenemos que $L^2_{\varepsilon_p}\beta(x) = 0$, es decir $(Id - 2\,\mathrm{U}_{p,p'})\beta = 0$; por lo que $\beta(x) = 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\beta(x) = 4L_p(1-L_p)\beta(x)$. Aplicando nuevamente L_{ε_p} vemos que $L_{\varepsilon_p}\beta(x) = 0$ o equivalentemente que $\beta(x)$ pertenece a $\mathsf{V}^p_{1/2}$. Luego $2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\alpha(x) = 0$ y esto implica que $\alpha(x)$ pertenece a V^p. Por lo tanto, si x pertenece a V tenemos que

$$h(x) = \mathrm{U}_{p+ip'}\, k(x) = L_{\varepsilon_p}\alpha(x) + 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\beta(x) = L_{\varepsilon_p}\alpha(x) + \beta(x).$$

Afirmamos que $L_p\alpha = \alpha L_q$ en V. Para probarlo primero multiplicamos a derecha la identidad anterior por L_{ε_q}; tenemos que

$$L_{\varepsilon_p}\alpha(L_{\varepsilon_q}x) + \beta(L_{\varepsilon_q}x) = h(L_{\varepsilon_q}x) = L_{\varepsilon_p}h(x) = L^2_{\varepsilon_p}\alpha(x) + 0 = \alpha(x). \tag{3.2}$$

Aplicando L_{ε_p} nuevamente vemos que $\alpha L_{\varepsilon_q} = L_{\varepsilon_p}\alpha$. Por otro lado, ya que $L^2_{\varepsilon_p}\alpha(x) = \alpha(x)$ para x en V y la ecuación (3.2) tenemos que

$$\alpha(x) = L_{\varepsilon_p}\alpha(L_{\varepsilon_q}x) + \beta(L_{\varepsilon_q}x) = \alpha(x) + \beta(L_{\varepsilon_q}x),$$

por lo que $\beta L_{\varepsilon_q} = 0$. De $L_{\varepsilon_p}\beta = 0$ se sigue que $2L_p\beta = \beta$ y análogamente que $2\beta L_q = \beta$, por lo que tenemos que también $\beta L_q = \beta/2 = L_p\beta$.

Mostremos que $\ker(\alpha|_{\mathsf{V}}) = \mathsf{V}^q_{1/2}$ y que $\ker(\beta|_{\mathsf{V}}) = \mathsf{V}^q$. Vamos a llamar a las restricciones α y β para no cargar la notación. Primero, tenemos que

$$kL_{\varepsilon_q}(y) = L_{\varepsilon_p}k(y) = L_{\varepsilon_p}\alpha(y) + iL_{\varepsilon_p}\beta(y) = L_{\varepsilon_p}\alpha(y).$$

Por lo tanto, si $\alpha(y) = 0$ debe ser que $L_{\varepsilon_q}y = 0$ y por lo tanto y pertenece a $V^q_{1/2}$. Recíprocamente, si y pertenece a $V^q_{1/2}$ entonces $L_{\varepsilon_q}y = 0$, lo que implica que $L_{\varepsilon_p}\alpha(y) = 0$; aplicando L_{ε_p} vemos que y pertenece a $\ker(\alpha)$. Ahora, para el kernel de β:

$$k(2\,\mathrm{U}_{q,q'}\,x) = 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,k(x) = 2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\alpha(x) + 2i\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\beta(x) = i2\,\mathrm{U}_{p,p'}\,\beta(x) = i\beta(x).$$

Si x pertenece a $\ker(\beta)$ entonces $U_{q,q'}x = 0$ por lo que x pertenece a V^q. Recíprocamente, si x pertenece a V^q entonces $\mathrm{U}_{q,q'}\,x = 0$ y $k(2\,\mathrm{U}_{q,q'}\,x) = i\beta(x) = 0$, por lo que x pertenece a $\ker(\beta)$.

Queremos ver que q es central. Recordemos que probamos en el Corolario 2.4.12 que q es central si y solo si $\mathsf{V}^q_{1/2}$ es trivial. Supongamos que existe y no nulo en $\mathsf{V}^q_{1/2}$. Entonces y^2 es positivo y mas aún y^2 pertenece a V^q por la Observación 3.4.8. Por lo tanto existe x positivo en V^q tal que $x^2 = y^2$. Como en V^q: $k(x) = \alpha(x) + i\beta(x) = \alpha(x)$ y α es no nula en $\mathsf{V}^q \setminus \{0\}$ obtenemos que

$$k(x^2) = k(x)^2 = \alpha(x)^2 > 0.$$

Por otro lado, como $\alpha(y) = 0$ y β es no nula en $\mathsf{V}^q_{1/2} \setminus \{0\}$, tenemos que

$$k(x^2) = k(y^2) = k(y)^2 = (i\beta(y))^2 = -\beta(y)^2 < 0,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto $\mathsf{V}^q_{1/2} = \{0\}$ y q es una proyección central. Tenemos que para todo z

$$L_pL_zk = kL_qL_{k^{-1}(z)} = kL_{k^{-1}(z)}L_q = L_zL_pk,$$

por lo que p también es central. Como $\mathsf{V} = \mathsf{V}^q$ tenemos además que β se anula en todo V. Por lo tanto $k|_{\mathsf{V}} = \alpha|_{\mathsf{V}}$ y en consecuencia k mapea V en si mismo; es decir, k es un automorfismo de V. Entonces

$$h = U_{p-ip'}k = (U_p - U_{p'} + 2iU_{p,p'})k = L_{\varepsilon_p}k$$

y por lo tanto $g = S_p\,\mathrm{U}_v\,k$. $\square$

Corolario 3.4.10. Sea V una JB-álgebra. Entonces existe una copia de $\mathsf{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ por cada proyección central p, dada por $S_p\,\mathsf{G}(\Omega)$, y todas las copias son obtenidas de esta manera.

Podemos usar la caracterización encontrada del grupo de estructura para probar el siguiente teorema.

Teorema 3.4.11. *Sea V una JB-álgebra y g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces $g^* = g^{-1}$ si y solo si $g = S_p k$ donde k es un automorfismo y p una proyección central.*

Demostración. Tenemos por el Lema 3.1.13 que $k^* = k^{-1}$ y además $S_p^* = S_p^{-1}\,\mathrm{U}_{S_p 1} = S_p^{-1} U_{\varepsilon_p} = S_p^{-1}$, por lo que $g^* = g^{-1}$. Recíprocamente, supongamos que $g^* = g^{-1}$; sabemos por el Teorema 3.4.9 que $g = \mathrm{U}_x\, S_p k$ con x positivo. Reemplazando en la igualdad obtenemos que $k^{-1} S_p^{-1}\,\mathrm{U}_x = k^{-1} S_p^{-1}\,\mathrm{U}_x^{-1}$, y despejando $\mathrm{U}_x^2 = \mathrm{U}_{x^2} = Id$. Entonces $x^4 = 1$, pero como tanto x^2 como x son positivos y existe una única raiz cuadrada positiva tenemos que $x = 1$. Esto nos da que $g = S_p k$. $\square$

3.5. El grupo de estructura y los isótopos de Jordan

Vamos a estudiar la conexión entre el grupo de estructura y los isótopos de Jordan de V, usando la descripción que obtuvimos sobre el grupo de estructura y los elementos en la imagen del cono por el mismo.

Proposición 3.5.1. Sea V un álgebra de Jordan y g en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. Entonces g pertenece al grupo de estructura si y solo si g es un isomorfismo de Jordan (es decir, multiplicativo) entre V y V^u con $u = (g1)^{-1}$.

Demostración. Supongamos que g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces

$$gx \circ_u gy = \mathrm{U}_{gx,gy}(g1)^{-1} = g\,\mathrm{U}_{x,y}\, g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}(g1)^{-1} = g\,\mathrm{U}_{x,y}\, g^{-1} g1 = g\,\mathrm{U}_{x,y}\, 1 = g(x \circ y).$$

Recíprocamente, supongamos que g es un isomorfismo de Jordan entre V y V^u con $u = (g1)^{-1}$. Entonces $g\,\mathrm{U}_x = \mathrm{U}^u_{gx}\, g$. Luego, recordando que $\mathrm{U}^u_x = \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_u$, tenemos

$$g\,\mathrm{U}_x\, g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1} = \mathrm{U}^u_{gx}\,\mathrm{U}_{g1} = \mathrm{U}_{gx}\,\mathrm{U}_{(g1)^{-1}}\,\mathrm{U}_{g1} = \mathrm{U}_{gx}\,.$$

$\square$

Observación 3.5.2. Sea g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Es fácil probar con una demostración similar a la anterior que dado x en V, g es un isomorfismo de Jordan entre V^x y V^y con $y = \mathrm{U}_{g1}^{-1}\, gx$. Y recíprocamente, si g es un isomorfismo de Jordan entre V^x y V^y para algun par x e y entonces g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Podemos entonces gracias a este nuevo producto caracterizar los conos $g(\Omega)$ con g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

Proposición 3.5.3. Sea V una JB-álgebra y g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces $g(\Omega)$ se puede interpretar como $\Omega^{(g1)^{-1}}$, el cono de elementos positivos de $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$.

Demostración. Sea z un elemento de V. Queremos ver que z pertenece a Ω si y solo si gz es positivo en $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$. Sea λ un número real, entonces $gz - \lambda g1 = g(z - \lambda 1)$. Como g pertenece a $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, $g(z - \lambda 1)$ es inversible si y solo si $z - \lambda 1$ lo es. Esto nos dice que el espectro de z en V es el mismo que el espectro de gz en $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$, pues $1^{(g1)^{-1}} = g(1)$. $\square$

Como vimos antes, dos elementos g y h en la misma coclase comparten el mismo cono $g(\Omega) = h(\Omega)$. Junto con el resultado anterior esto nos dice que la noción de positividad para distintos $(g1)^{-1}$-productos con g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ no varía dentro de cada coclase. Tenemos entonces:

Corolario 3.5.4. Sea V una JB-álgebras. Existen entonces tantas copias de $\mathsf{G}(\Omega)$ en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ como distintas nociones de positividad para distintos $(g1)^{-1}$-productos.

Como la estructura de JB-álgebra está intrinsecamente relacionada con el orden, tenemos también:

Corolario 3.5.5. Sea V una JB-álgebra y g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces $g : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$ es una isometría, si normamos a $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$ con la norma del orden dado por el cono $g(\Omega)$. En consecuencia $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$ es una JB-álgebra para todo g en el grupo de estructura.

Demostración. Como g mantiene la noción de positividad es fácil ver que $g(\Omega)$ es un cono con unidad de orden $g1$ arquimideana, por lo que se puede definir la norma del orden. Por la Proposición 2.1.8, como g mapea la unidad de orden 1 a la unidad de orden $g1$ tenemos que g es una isometría. En particular g es un isomorfismo isométrico de Jordan, por lo que $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$ es una JB-álgebra. $\square$

Tenemos entonces que para todo g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ el isótopo $\mathsf{V}^{(g1)^{-1}}$ es isomorfo a V. Veamos que vale la recíproca.

Corolario 3.5.6. Sea V una JB-álgebra y u un elemento inversible de V. Entonces el isótopo V^u es isomorfo a V si y solo si existen v en Ω y una simetría central ε_p tal que $u = \varepsilon_p v$; en particular, si y solo si existe g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tal que $u = g(1)$.

Demostración. Si $u = \varepsilon_p v$ tomamos $g = \mathrm{U}_{\sqrt{v}} S_p$ y por la Proposición 3.5.1 tenemos el resultado. Recíprocamente, sea $g : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^u$ el isomorfismo. Por la misma proposición si consideramos $g : \mathsf{V} \to \mathsf{V}$ entonces g pertenece al grupo de estructura, y por el Teorema 3.4.9 existe v en Ω, una simetría central ε_p y un automorfismo k tal que $g = U_v S_p k$, y en particular $g1 = v^2 \varepsilon_p$. Como g es un isomorfismo multiplicativo debe mapear la unidad en la unidad, por lo que $u = (g1)^{-1} = (v^{-1})^2 \varepsilon_p$. $\square$

Gracias a este último corolario podemos dar otra caracterización de los isótopos isomorfos.

Corolario 3.5.7. Sea V una JB-álgebra y x un elemento inversible. Entonces U_x es un operador positivo si y solo si existe g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tal que x pertenece a $g(\Omega)$; si y solo si el isótopo V^x es Jordan isomorfo a V.

Demostración. Vimos en el Teorema 2.4.11 que U_x es un operador positivo si y solo si $x = v\varepsilon_p$ con v positivo y ε_p simetría central. Esto junto con el corolario anterior nos da el resultado. $\square$

Tenemos el siguiente resultado para álgebras de Jordan que provienen de álgebras asociativas. La demostración del mismo se puede encontrar en [34, Theorem II.7.5.1].

Proposición 3.5.8. Sea V un álgebra asociativa a la cual dotamos del producto de Jordan para darle la estructura de álgebra de Jordan; y sea u un elemento inversible de V. Entonces V es Jordan isomorfa a V^u.

Notar que esta proposición no vale para todas las álgebras especiales: si W es subálgebra de Jordan de un álgebra asociativa que no es subálgebra con el producto original el resultado no aplica.

Obtenemos entonces

Corolario 3.5.9. Sea V un álgebra asociativa a la cual dotamos del producto de Jordan para darle la estructura de álgebra de Jordan. Entonces

$$\mathsf{GL}(\mathsf{V}) = \bigcup_{g \in \mathtt{Str}(\mathsf{V})} g(\Omega) = \{g(1) : g \in \mathtt{Str}(\mathsf{V})\} = \{\varepsilon v : \varepsilon \text{ simetría central}, v \text{ positivo}\}.$$

Demostración. Como para todo u inversible V^u es isomorfo a V entonces todo u inversible está contenido en uno de los conos $g(\Omega)$ para algún g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. □

Ejemplo 3.5.10. Sea $\mathsf{V} = C[0,1]$ con la norma supremo y el orden usual, los cuales la convierten en una JB-álgebra. Sabemos que dada f función continua su espectro es igual a su imagen, por lo que las funciones inversibles son las que no contienen a cero en su imagen; y como la imagen debe ser conexa los elementos inversibles son o positivos o negativos. Como V es un álgebra asociativa y conmutativa el producto de Jordan coincide con el original. Entonces toda función inversible f se puede escribir como $f = \varepsilon g$, con g positiva y $\varepsilon = \pm 1$, las únicas simetrías de V; y $\mathtt{Str}(\mathsf{V}) = \mathsf{G}(\Omega) \cup -\mathsf{G}(\Omega)$.

Ejemplo 3.5.11. Sea $\mathsf{V} = L^\infty[0,1]$ con la norma supremo y el orden usual, los cuales la convierten en una JB-álgebra. Es un álgebra asociativa y conmutativa, por lo que el producto de Jordan coincide con el original. Tenemos entonces por el corolario anterior que toda función f inversible se puede escribir como $f = \varepsilon h$ con h positiva y ε simetría. Notemos que si $\varepsilon^2 = 1$ entonces debe ser que

$$\varepsilon = \varepsilon_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ -1 & x \notin A \end{cases}$$

para algún conjunto medible A. Es decir que cada uno de los conos que conforman $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ es el cono de las funciones de la forma $\varepsilon_A h$ para algun A constante dentro del cono y h positiva. Mas aún, todo elemento g en el grupo de estructura es de la forma $g = L_{\varepsilon_A h^2} k$ donde k es un automorfismo de V.

3.6. El álgebra de operadores en un espacio de Hilbert

Consideremos $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$, los operadores autoadjuntos de un espacio de Hilbert complejo y separable H con el producto de Jordan $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ y la norma espectral como norma de JB-álgebra. Entonces Ω es el conjunto de operadores positivos e inversibles, y podemos usar $A > 0$ para denotar $A \in \Omega$ sin riesgo a confusión.

Vamos a caracterizar $\mathsf{G}(\Omega)$, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ y $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Para lograrlo necesitamos introducir algunas nociones relacionadas a operadores antilineales. Vamos a reservar la estrella $*$ para el adjunto en el grupo de estructura y vamos a usar la daga $\dagger$ para indicar el adjunto usual del espacio de Hilbert.

3.6.1. Operadores antilineales

Definición 3.6.1. Sea H un espacio de Hilbert. Una función $f : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ se llama *antilineal* si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ y $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$ para todo x, y en H y λ complejo.

Es trivial probar que la composición de dos funciones antilineales es lineal.

Sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno de H, que asumiremos lineal conjugado en la segunda coordenada. Todo operador lineal A tiene un operador adjunto $A^\dagger$ tal que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\dagger y\rangle$ para todo par x, y en H. Una operación similar se puede definir para operadores antilineales.

Definición 3.6.2. Sea H un espacio de Hilbert y f un operador antilineal en H. Definimos el operador *adjunto conjugado* de f, notado $f^\dagger$, al único operador antilineal que cumple $\langle fx, y\rangle = \overline{\langle x, f^\dagger y\rangle}$ para todo x, y en H.

Este adjunto está bien definido gracias al teorema de representación de Riesz. Mas aún, dada f la existencia de una transformación $f^\dagger$ que cumple la condición nos dice que f es antilineal:

$$\langle f\lambda x, y\rangle = \overline{\langle \lambda x, f^\dagger y\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle x, f^\dagger y\rangle} = \overline{\lambda}\langle fx, y\rangle = \langle \overline{\lambda} fx, y\rangle.$$

Vamos a notar al adjunto usual y al adjunto conjugado de la misma manera, pues será aparente su uso por el contexto.

Recordemos que un operador U es unitario si $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo par x, y en H. Podemos definir el análogo para operadores antilineales.

Definición 3.6.3. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador $U : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ se dice *antiunitario* si

$$\langle Ux, Uy\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$$

para todo x, y en H.

Asi como la composición de dos operadores antilineales es lineal, el producto de dos operadores antiunitarios es unitario. También es simple probar que un operador antiunitario es antilineal.

Lema 3.6.4. Sea H un espacio de Hilbert. Son equivalentes

a) U es un operador antiunitario.
b) $U\ U^{-1} = U^\dagger$ donde $\dagger$ es al conjugado adjunto.

c) U es antilineal y $\| \mathrm{U}\, \xi\| = \|\xi\|$ para todo ξ en H.

Demostración. Si U es un operador antiunitario entonces $\langle Ux, y\rangle = \overline{\langle x, U^{-1}y\rangle}$ por lo que $U^{-1} = U^\dagger$. Recíprocamente, si $U^{-1} = U^\dagger$ entonces $\langle Ux, Uy\rangle = \overline{\langle x, U^{-1}Uy\rangle} = \overline{\langle x, y\rangle}$. Ahora, si $U^{-1} = U^\dagger$ entonces teniendo en cuenta que $\overline{\langle \xi, \xi\rangle} = \langle \xi, \xi\rangle$ al ser real, tenemos que

$$\|U\xi\| = \sqrt{\langle U\xi, U\xi\rangle} = \sqrt{\overline{\langle \xi, U^{-1}U\xi\rangle}} = \sqrt{\langle \xi, \xi\rangle} = \|\xi\|.$$

Recíprocamente, si $\|U\xi\| = \|\xi\|$ elevando al cuadrado y recordando que $\langle x, x\rangle$ es real obtenemos que $\langle U^\dagger Ux, x\rangle = \langle x, x\rangle$, por lo que $U^\dagger U = Id$. $\square$

De la misma manera que los operadores lineales, los operadores antilineales tienen una *descomposición polar* (a derecha).

Proposición 3.6.5. Sea H un espacio de Hilbert y f un operador antilineal. Entonces $f = |f^\dagger|U$, donde $|f^\dagger| = \sqrt{ff^\dagger}$ y U es una isometría parcial antilineal. $|f^\dagger|$ es un operador positivo y en el caso de que f sea inversible U es antiunitario.

Definición 3.6.6. Sea H un espacio de Hilbert. Un operador antiunitario J se dice *conjugación* si $J^2 = Id$.

El típico ejemplo de una conjugación se da de la siguiente manera: fijemos una base ortonormal $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de H, y definamos $J(\sum \alpha_i e_i) = \sum \overline{\alpha_i} e_i$; llamamos a esta transformación la *conjugación en una base*.

La siguiente caracaterización será útil mas tarde. Se puede encontrar su demostración en [38, pag. 194].

Proposición 3.6.7. Sea H un espacio de Hilbert. Sea $J : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ antilineal y consideremos las condiciones $J = J^\dagger$, $J^\dagger = J^{-1}$, $J^2 = 1$. Entonces cualquier par de condiciones implica la tercera, y J es una conjugación. Para cualquier conjugación J existe una base para la cual J es una conjugación en esa base.

Una buena referencia en el tema de operadores antilineales y antiunitarios es el paper de Routsalainen [38].

3.6.2. El grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ y sus componentes

Vamos a caracterizar al grupo que preserva el cono. Vamos a necesitar el siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [1, Theorem 2.1].

Teorema 3.6.8. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión mayor a 1 y sea $k : \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa} \to \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ una función biyectiva. Entonces*

$$k(ABA) = k(A)k(B)k(A)$$

para todo A, B en $\mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ si y solo si existe un operador unitario o antiunitario U tal que $k(A) = \pm UAU^\dagger$ para todo A en $\mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$.

Caractericemos $\mathsf{G}(\Omega)$:

Teorema 3.6.9. *Sea* $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ *como JB-álgebra y* g *en* $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$. *Entonces*

1. *g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ si y solo si existe $f : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ inversible lineal o antilineal tal que $g(A) = fAf^\dagger$, donde la daga $\dagger$ representa el adjunto usual o conjugado según corresponda.*
2. *Si $g(A) = fAf^\dagger$, entonces $g^*(A) = f^\dagger Af$.*
3. *Supongamos que $g = f \cdot f^\dagger = h \cdot h^\dagger$. Entonces f y h son ambas lineales o ambas antilineales, y existe λ en S^1 tal que $f = \lambda h$.*
4. *$g = f \cdot f^\dagger$ es un automorfismo si y solo si f es unitario o antiunitario.*
5. *El conjunto de operadores lineales y el conjunto de operadores antilineales inducen las dos componentes conexas de $\mathsf{G}(\Omega)$, y los conjuntos de mapas unitarios y antiunitarios inducen las dos componentes conexas de $\mathbf{Aut}(\mathsf{V})$.*

Demostración. Claramente todo mapa de la forma $A \mapsto fAf^\dagger$ es acotado y lineal real; también preserva Ω: si A es positivo entonces $fAf^\dagger$ es positivo, lo cual es trivial en el caso lineal pero también en el antilineal, pues

$$\langle fAf^\dagger\xi, \xi\rangle = \overline{\langle A^{1/2}f^\dagger\xi, A^{1/2}f^\dagger\xi\rangle} = \|A^{1/2}f^\dagger\xi\|^2 > 0.$$

Supongamos ahora que g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$, entonces $g = \mathrm{U}_X\, k$ para algún X positivo y k automorfismo de V. Como k es automorfismo tenemos que $k(ABA) = k(A)k(B)k(A)$ para todo A y B en V. Por el Teorema 3.6.8 y como $k(1) = 1$ tenemos que existe un operador unitario o antiunitario U tal que $k(A) = UAU^\dagger$ para todo A en V. Por lo tanto, si $f = XU$, tenemos que $g(A) = XUAU^\dagger X = fAf^\dagger$. Probamos entonces la primer afirmación.

Recordemos que $g^* = g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}$. En este caso tenemos que $g(1) = ff^\dagger = |f^\dagger|^2$ y es trivial ver que $g^{-1}(A) = f^{-1}A(f^{-1})^\dagger$; por lo que

$$g^*(A) = g^{-1}(ff^\dagger Aff^\dagger) = f^{-1}ff^\dagger Aff^\dagger(f^{-1})^\dagger = f^\dagger Af.$$

Probamos entonces la segunda afirmación.

Supongamos que $fAf^\dagger = hAh^\dagger$ para todo A en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$. Tomando $A = 1$ obtenemos que $|f^\dagger| = |h^\dagger|$; si tomamos la decomposición polar a derecha $f = |f^\dagger|U$ y $h = |h^\dagger|W$ con U, W unitarios o antiunitarios obtenemos que $UAU^\dagger = WAW^\dagger$ para todo A en $\mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$, o equivalentemente $W^{-1}UA = AW^{-1}U$. Si f es lineal y h antilineal (o viceversa) entonces $T = W^{-1}U$ es antiunitario y $TA = AT$ para todo A en $\mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$. En particular, para todo ξ en H tenemos que

$$\|\xi\|^2 T\xi = T\langle\xi, \xi\rangle\xi = T(\xi \otimes \xi)\xi = (\xi \otimes \xi)T\xi = \langle T\xi, \xi\rangle\xi. \tag{3.3}$$

Como T es una isometría aplicando norma a la igualdad anterior obtenemos que $|\langle T\xi, \xi\rangle|\|\xi\| = \|\xi\|^2\|T\xi\| = \|\xi\|^2\|\xi\|$, es decir $|\langle T\xi, \xi\rangle| = \|\xi\|^2$ para todo ξ en H. Si aplicamos T a ambos lados de la ecuación (3.3) y la multiplicamos por $\|\xi\|^2$ obtenemos

$$\|\xi\|^2\|\xi\|^2 T^2\xi = \|\xi\|^2 T(\langle T\xi, \xi\rangle\xi) = \overline{\langle T\xi, \xi\rangle}\|\xi\|^2 T\xi = |\langle T\xi, \xi\rangle|^2\xi = \|\xi\|^4\xi.$$

Por lo tanto $T^2 = Id$ y por la Proposición 3.6.7 T es una conjugación; en particular es una conjugación en una base $\{e_i\}_i$. Sea $A = ie_1 \otimes e_2 - ie_2 \otimes e_1 \in \mathsf{V}$. Entonces $ATe_1 = Ae_1 = ie_2$ y $TAe_1 = T(ie_2) = -e_1 \neq ATe_1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f y h son ambas lineales o ambas antilineales, en particular U y W son ambos unitarios o ambos antiunitarios por lo que $W^{-1}U$ es unitario y como dijimos antes está en el centro de $\mathsf{B(H)}_{sa}$, que sabemos que es igual a $\mathbb{C}\,Id$, por lo que $W = e^{i\theta}U$ y $f = e^{i\theta}h$, probando la tercera afirmación.

Supongamos $g(A) = fAf^\dagger$ es automorfismo, entonces evaluando en Id obtenemos que $Id = g(Id) = ff^\dagger$ por lo que f es unitario o antiunitario. Recíprocamente, sabemos que g pertenece al grupo de estructura y $g(Id) = ff^\dagger = Id$, por lo que es un automorfismo, probando la cuarta afirmación.

Notemos que la convergencia de automorfismos nos da información sobre los operadores que los inducen. Supongamos que $k_n = U_n \cdot U_n^* \to_n k = U \cdot U^*$. En particular $U_n(\xi\otimes\xi)U_n^\dagger \to U(\xi\otimes\xi)U^\dagger$ para cada ξ en H, por lo que $(U_n\xi)\otimes(U_n\xi) \to (U\xi)\otimes(U\xi)$; y esto solo es posible (al ser U_n, U isometrías) si y solo si existe $\theta(n,\xi) \in [0, 2\pi]$ tal que $e^{i\theta(n,\xi)}U_n\xi \to U\xi$. Esto nos dice que si todos los operadores U_n son lineales U debe ser lineal, y si todos los operadores U_n son antilineales U debe ser antilineal.

Notemos también que todo automorfismo dado a partir de un unitario pertenece a la componente conexa de la identidad: dado $k = U \cdot U^\dagger$ con U unitario en $\mathsf{B(H)}$, existe operador antisimétrico Z en $\mathsf{B(H)}$ tal que $U = e^Z$; entonces considerando $k_t = e^{tZ} \cdot e^{-tZ}$ tenemos que $\{k_t\} \subset \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, $k_0 = Id$ y $k_1 = k$, por lo que k pertenece a $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0$. Tomemos $k_t : [0,1] \to \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ un camino continuo uniendo Id con $g = U \cdot U^\dagger$ para un operador antilineal U. Sea $t_0 = \text{ínf}\{t : U_t \text{ es antilineal}\} > 0$. Considerando $U_n = U_{t_0 - 1/n}$, por la continuidad de k_t y la discusión anterior sabemos que U_{t_0} es unitario; y considerando $U_n = U_{t_0+1/n}$ sabemos que U_{t_0} es antiunitario, lo cual es imposible. Por lo tanto no existe ningún camino uniendo Id con antiunitarios, por lo que los operadores antiunitarios pertenecen a una componente distinta a los unitarios. Por otro lado, si U es antiunitario y J una conjugación compleja en una base ortonormal fija, entonces JU es unitario. Por lo tanto, podemos unir $k = U\cdot U^\dagger$ con $j = J \cdot J$ gracias al camino continuo obtenido al multiplicar por J la curva que une Id con JU en los unitarios. En particular todos los antiunitarios pertenecen a la misma componente, mostrando que los conjuntos de unitarios y antiunitarios inducen las dos componentes de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Obtenemos la primera afirmación al aplicar el Teorema 3.3.6, probando el último ítem del teorema. □

Observación 3.6.10. La descomposición en $\mathsf{G}(\Omega)$ dada por $g = \mathrm{U}_x\, k$ con x positivo y k automorfismo está dada por $x = |f^\dagger|$ y $k(A) = UAU^\dagger$ para algún operador unitario o antiunitario U; es decir, la descomposición en $\mathsf{G}(\Omega)$ se refleja en la descomposición polar de positivo por (anti)unitario.

La herramienta principal que usamos en la caracterización previa es el Teorema 3.6.8. Sin embargo, no queda claro cómo varía U mientras varía $k = U \cdot U^\dagger$; por ejemplo, si $t \mapsto k_t$ es un mapa continuo (o suave) sobre $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ y representamos $k_t = U_t \cdot U_t^\dagger$, ¿es el mapa $t \mapsto U_t$ continuo (o suave)? Como hay cierta ambiguedad (el factor λ en S^1), ¿podemos elegir U apropiadamente tal que se comporte bien? Mostraremos que es posible, usando un truco bien conocido que explicita el unitario.

Hagamos algunos comentarios rápidos: notemos que si $p^2 = p = p^\dagger$ es una proyección en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ entonces $\varepsilon_p = 2p - 1$ es una simetría, es decir, $\varepsilon_p = \varepsilon_p^{-1} = \varepsilon_p^\dagger$; en particular ε_p es unitario y si q es otra proyección con $\|q - p\|_\infty < 1$ entonces

$$\|\varepsilon_p\varepsilon_q - 1\|_\infty = \|\varepsilon_p - \varepsilon_q\|_\infty = 2\|p - q\| < 2$$

por lo que $\varepsilon_p\varepsilon_q$ tiene un logaritmo analítico Z en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$, el cual es antisimétrico y depende suavemente de q; mas aún, es fácil ver que $\varepsilon_p e^Z = e^{-Z}\varepsilon_p$ pues Z es p-codiagonal. Recordemos que el grupo unitario $\mathcal{U}(\mathsf{H})$ es un subgrupo embebido de Lie-Banach de $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ con la norma uniforme.

Teorema 3.6.11. *Sea $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ como JB-álgebra y k en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Fijemos ξ en H de norma 1 y sea $p = \xi \otimes \xi$ la proyección uno-dimensional. Entonces:*

1. *Supongamos que $\|k - 1\| < 1$. Sea Z el operador lineal antisimétrico dado por*
$$Z(k) = 1/2 \ln(\varepsilon_{k(p)}\varepsilon_p) = 1/2 \ln((2k(p) - 1)(2p - 1)).$$
Entonces $k = e^{Z(k)}W(k) \cdot W(k)^\dagger e^{-Z(k)}$ con $W(k)$ unitario, donde para cada η en H
$$W(k)\eta = e^{-\operatorname{ad} Z(k)}k^{\mathbb{C}}(\eta \otimes \xi)\xi = e^{-Z(k)}k^{\mathbb{C}}(\eta \otimes \xi)e^{Z(k)}\xi,$$
con $k^{\mathbb{C}}$ la complexificación $k(A + iB) = kA + ikB$ para A, B en V.
2. *Sea J una conjugación y $j = J \cdot J$ tal que $\|k - j\| < 1$. Entonces $k = Je^{Z(k)}W(k) \cdot W(k)^\dagger e^{-Z(k)}J$ para los mismos mapas Z, W que en el inciso anterior.*
3. *El mapa $s : \{k \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) : \|k - 1\| < 1\} \to \mathcal{U}(\mathsf{H})$ dado por $s : k \mapsto e^{Z(k)}W(k)$ es suave; mas aún, es real analítico.*

Demostración. Recordemos que por el teorema anterior $k(A) = UAU^\dagger$. Como $k(p) = k(p^2) = k(p)^2$ y $k(p)^\dagger = k(p)$ tenemos que $k(p)$ es una proyección ortogonal. Ahora, $\|k(p) - p\|_\infty \leq \|k - 1\| \, \|p\|_\infty < 1$, por lo que tomando Z como describe el enunciado se obtiene un operador lineal antisimétrico que depende suavemente de k tal que $k(p) = e^{Z(k)}pe^{-Z(k)}$; una demostración de esto se puede encontrar en [3, Proposition 3.1] aplicado a este caso particular. Sea

$$\lambda_k = e^{-\operatorname{ad} Z(k)}k^{\mathbb{C}}.$$

Es fácil ver que $\lambda_k(p) = p$; y como $k^{\mathbb{C}} = U_k \cdot U_k^\dagger$ para algún operador unitario, tenemos que $\lambda_k(AB) = \lambda_k(A)\lambda_k(B)$ para cualquier A, B en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$. Sea $W(k)$ como en la fórmula; es claro que es lineal y acotado, veamos que es unitario. Primero notemos que si definimos

$$V(k)\eta = \lambda_k^{-1}(\eta \otimes \xi)\xi$$

es fácil chequear que $V(k)$ es la inversa a izquierda y derecha de $W(k)$, por lo que $W(k)$ es inversible. Notemos ahora que $(\xi \otimes \eta)(\eta \otimes \xi) = \|\eta\|^2 \xi \otimes \xi = \|\eta\|^2 p$, por lo que

$$\begin{aligned}\|W(k)\eta\|^2 &= \langle (\lambda_k(\eta \otimes \xi))^\dagger \lambda_k(\eta \otimes \xi)\xi, \xi\rangle = \langle \lambda_k((\eta \otimes \xi)(\xi \otimes \eta))\xi, \xi\rangle \\ &= \|\eta\|^2 \langle \lambda(k)(p)\xi, \xi\rangle = \|\eta\|^2 \langle p\xi, \xi\rangle = \|\eta\|^2 \langle \xi, \xi\rangle = \|\eta\|^2,\end{aligned}$$

mostrando que $W(k)$ es una isometría, por lo que debe ser unitario. Podemos ver ademas que

$$W(k)X\eta = \lambda_k((X\eta) \otimes \xi)\xi = \lambda_k(X \cdot \eta \otimes \xi)\xi = \lambda_k(X)\lambda_k(\eta \otimes \xi)\xi = \lambda_k(X)W(k)\eta,$$

por lo que $W(k)X = \lambda_k(X)W(k)$ y $\lambda_k = W(k) \cdot W(k)^\dagger$ como dijimos. Entonces $k^{\mathbb{C}} = e^{\operatorname{ad} Z(k)}\lambda_k = e^{\operatorname{ad} Z(k)} W(k) \cdot W(k)^\dagger$, probando la primera afirmación.

Notemos que si $\|k - j\| < 1$ entonces $\|jk - 1\| < 1$ y jk puede ser representada como en el párrafo anterior, probando la segunda afirmación.

Para la tercera afirmación consideremos el mapa $k \mapsto k(\bullet \otimes \xi)$. Afirmamos que es real analítico como mapa del grupo de Lie $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ en el espacio de Banach $\mathsf{B}(\mathsf{H}, \mathsf{B}(\mathsf{H}))$. Sea k en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ con $\|k - 1\| < 1$; como $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es un subgrupo de Lie-Banach de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ con álgebra de Lie-Banach $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ por el Teorema 3.2.5 podemos usar $H \mapsto ke^H$ como carta de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ alrededor de k para H en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ lo suficientemente chico. Tenemos que

$$\begin{aligned}&\|ke^H(\bullet \otimes \xi) - \sum_{n=0}^{N} k\frac{H^n}{n!}(\bullet \otimes \xi)\| = \sup_{\|\eta\|=1} \|e^H(\eta \otimes \xi) - \sum_{n=0}^{N} \frac{H^n}{n!}(\eta \otimes \xi)\| \\ &\leq \|e^H - \sum_{n=0}^{N} \frac{H^n}{n!}\| \sup_{\|\eta\|=1} \|\eta \otimes \xi\| \leq \|e^H - \sum_{n=0}^{N} \frac{H^n}{n!}\|.\end{aligned}$$

Ahora, el último término converge a 0 si N tiende a infinito, y entonces este cálculo muestra que $\sum_{n=0}^{N} k\frac{H^n}{n!}(\bullet \otimes \xi)$ es el polinomio de Taylor de nuestro mapa y converge uniformemente a el, por lo que nuestro mapa es real analítico. El mapa $k \mapsto Z(k)$ también lo es, asi como $k \mapsto e^{Z(k)}$ y el producto en el grupo de Lie Banach $\mathcal{U}(\mathsf{H})$, por lo que tenemos que $k \mapsto F(k) = e^{Z(k)}k(\bullet \otimes \xi)e^{-Z(k)}$ es real analítico. Es aparente entonces que $W(k) = ev_\xi(F(k)) = F(k)\xi$ es real analítico. $\square$

Observación 3.6.12. Notar que si modificamos W de manera $U(k) = \lambda(k)W(k)$ con una función no continua $\lambda : \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \to S^1$, tenemos que es posible que $t \mapsto k_t = U_t \cdot U_t^\dagger$ sea un mapa suave mientras que $t \mapsto U_t$ ni siquiera sea continuo.

Notemos que el Teorema 3.6.9 nos dice que $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es una variedad homogénea del grupo unitario $\mathcal{U}(\mathsf{H})$. Consideremos la acción $A : \mathcal{U}(\mathsf{H}) \times \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \to \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ dada por $\mathrm{U} \cdot k = A(U, k) = UkU^\dagger = \operatorname{Ad}_U k$. Esta acción es suave y transitiva; mas aún, por el mismo teorema, si fijamos una base ortonormal de H y J es la conjugación ortonormal en dicha base tenemos que $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es la unión disjunta de dos órbitas cerradas y abiertas,

$$\mathcal{O}(Id) = \mathcal{U}(\mathsf{H}) \cdot Id = \mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0 \quad \text{y} \quad \mathcal{O}(j) = \mathcal{U}(\mathsf{H}) \cdot j = \operatorname{Ad}_J \mathtt{Aut}(\mathsf{V})_0,$$

donde $j = \mathrm{Ad}_J = J \cdot J \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Es decir, $\mathtt{Aut}(\mathsf{V}) = \mathcal{O}(Id) \sqcup \mathcal{O}(\mathrm{Ad}_J)$. Notar que el grupo de isotropía de ambas órbitas es $K = S^1 Id$. Es también aparente del Teorema 3.6.11 que si $s(k) = e^{Z(k)}W(k)$ para automorfismos cercanos a Id, entonces obtenemos:

Teorema 3.6.13. *Sea $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ como JB-álgebra. La acción $\mathcal{U}(\mathsf{H}) \curvearrowright \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ tiene secciones locales suaves: para todo k en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ existe un entorno abierto V de k y un mapa suave $s : V \to \mathcal{U}(\mathsf{H})$ tal que $s(k) = 1$ y $\mathrm{Ad}_{s(k)} = id_V$.*

En particular los mapas $\pi_{Id} : U \mapsto \mathrm{Ad}_U$ y $\pi_j : U \mapsto j\,\mathrm{Ad}_U$ son proyecciones abiertas y suaves, y

$$1 \to S^1 \to \mathcal{U}(\mathsf{H}) \to \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \to 1$$

es un fibrado principal suave con grupo de estructura $S^1 = \mathcal{U}(1)$. Se puede ver [41, Chapter 3] para aplicaciones a cuantización.

3.6.3. El grupo de estructura y su álgebra de Lie

Recordemos que para álgebras especiales tenemos que $\mathrm{U}_X(A) = XAX$ y que $\mathrm{U}_{X,Y}(A) = 1/2(XAY + YAX)$; por lo tanto, la condición para pertenecer al álgebra de Lie del grupo de estructura es la siguiente: H en $\mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{H}))$ pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ si y solo si existe $\overline{H}$ en $\mathsf{B}(\mathsf{B}(\mathsf{H}))$ tal que

$$XAH(X) + H(X)AX = H(XAX) - X\overline{H}(A)X \tag{3.4}$$

para todo A, X en $\mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$. Por otro lado, la condición para pertenecer al grupo de estructura se puede escribir como

$$g(X)Ag(X) = g(Xg^{-1}(g(1)Ag(1))X),$$

y diferenciando $g_t \subset \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ en $t = 0$, si $g_0 = Id$ y $g_0' = H$, obtenemos

$$H(X)AX + XAH(X) = H(XAX) - XH(A)X + XH(1)AX + XAH(1)X,$$

y por lo tanto $\overline{H}(A) = H(A) - H(1)A - AH(1) = H - 2\,\mathrm{U}_{H1,1}$ como mencionamos anteriormente.

Tenemos el siguiente resultado que caracteriza las derivaciones complejas, que se puede encontrar en [42].

Proposición 3.6.14. Sea X un espacio de Banach. Entonces toda derivación δ en $\mathsf{B}(\mathsf{X})$ es de la forma $\delta(A) = AT - TA$ para algún operador acotado T.

Podemos obtener entonces la siguiente proposición.

Proposición 3.6.15. Sea $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ como JB-álgebra. Entonces $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V}) = \{\mathrm{ad}\, Z : Z \in \mathsf{B}(\mathsf{H}), Z^\dagger = -Z\}$.

Demostración. Si Z en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ es antisimétrico, sea $H = \operatorname{ad} Z$; es simple ver que $\overline{H} = H$ pues $H1 = 0$. H mapea V en si mismo y es acotado alli. De

$$XA[Z,X]+[Z,X]AX = XAZX-XAXZ+ZXAZ-XZAX = [Z,XAX]-X[Z,A]X$$

obtenemos que H, $\overline{H}$ obedecen la ecuación (3.4), por lo que $H = \operatorname{ad} Z$ pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ y como $\overline{H} = H$ tenemos que H pertenece a $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$. Recíprocamente, por la Proposición 3.6.14 una derivación compleja δ en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ es de la forma $\delta(A) = AT - TA$ para algún operador acotado T. Por lo tanto, si D pertenece a $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ complexificándola obtenemos el resultado. □

Observación 3.6.16. Podemos dar una prueba distinta a esta igualdad. Tomemos $k_t \subset \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ tal que $k_0 = Id$ y $k_0' = D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$. Abusando la notación k_t también denota su complexificación, por lo que k_0' es la complexificación de D. Tenemos por el Teorema 3.6.11 que para cada η en H

$$W_t X\eta = \lambda_t((X\eta)\otimes\xi)\xi = \lambda_t(X\cdot\eta\otimes\xi)\xi = \lambda_t(X)\lambda_t(\eta\otimes\xi)\xi = \lambda_t(X)W_t\eta, \tag{3.5}$$

donde $\lambda_t = e^{-\operatorname{ad} Z_t}k_t^{\mathbb{C}}$. Como $W_t\eta$ es suave, define un operador antisimétrico W_0': $W_0'\eta = (W_t\eta)'|_{t=0}$ para cada η en H. Si derivamos (3.5) en $t = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} W_0'X\eta &= \lambda_0'(X)W_0\eta + \lambda_0(X)W_0'\eta = -\operatorname{ad} Z_0'(X)(\eta\otimes\xi)\xi + k_0'(X)(\eta\otimes\xi)\xi + XW_0'\eta \\ &= -\operatorname{ad} Z_0'(X)\eta + D^{\mathbb{C}}(X)\eta + XW_0'\eta. \end{aligned}$$

Por lo tanto $D^{\mathbb{C}}(X) = [Z_0', X] + [W_0', X]$ y si definimos $Z = Z_0' + W_0'$ tenemos que $Z^\dagger = -Z$, $D^{\mathbb{C}} = \operatorname{ad} Z$ y entonces $D = \operatorname{ad} Z$.

Observación 3.6.17 (Grupos a un parámetro)**.** El último resultado nos permite vincular los grupos a un parámetro de $\mathcal{U}(\mathsf{H})$ y $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Si $U_t = e^{tZ} \subset \mathcal{U}(\mathsf{H})$ es un grupo a un parámetro es fácil ver que $k_t = \mathrm{U}_t \cdot \mathrm{U}_t^\dagger \subset \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ también lo es. El recíproco se mantiene para secciones locales: si $k_t = e^{tD}$ es un grupo a un parámetro de automorfismos de V entonces sabemos que $D = \operatorname{ad} Z$ para algún antisimétrico Z, y usando las fórmulas de Z que obtuvimos tenemos que $Z_t = Z(k_t) = tZ$. Por lo tanto la levantada a $\mathrm{U}(\mathsf{H})$ de k_t es simplemente $s_t = S(k_t) = e^{tZ}$. Es decir, si $D = \operatorname{ad} Z \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ entonces la sección nos da $s(e^D) = e^Z$.

Podemos dar también una caracterización del álgebra de Lie del grupo de estructura. Vamos a notar ℓ_T and r_T el operador multiplicación a izquierda y a derecha en el álgebra asociativa $\mathsf{B}(\mathsf{H})$.

Corolario 3.6.18. Sea $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ como JB-álgebra. Entonces

$$\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \{\ell_T + r_{T^\dagger} : T \in \mathsf{B}(\mathsf{H})\}.$$

Demostración. Cada uno de los morfismos $H = \ell_T + r_{T^\dagger}$ es lineal continuo y preserva V, pues $TA + AT^\dagger$ es simétrico si lo es A. Es fácil chequear también que si tomamos $\overline{H} = -(\ell_{T^\dagger} + r_T)$ entonces (3.4) se verifica, por lo que H pertenece a $\mathtt{str}(\mathsf{V})$.

Probemos el recíproco. Recordemos que $\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$, por lo que toda g en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ debe ser de la forma $g = L_X + \operatorname{ad} Z$ para algún X en V y Z en $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ con $Z^\dagger = -Z$ por la Proposición 3.6.15. Pero si $Y = \frac{1}{2}X$ tenemos que

$$g(A) = 1/2(XA + AX) + ZA - AZ = (\ell_Y + r_Y + \ell_Z - r_Z)(A) = (\ell_{Y+Z} + r_{Y^\dagger + Z^\dagger})(A)$$

Como $T = Y + Z$ es un elemento genérico de $\mathsf{B}(\mathsf{H})$, hemos terminado la prueba. □

Observación 3.6.19. Notar que como ℓ y r conmutan tenemos que

$$\exp(\ell_T + r_{T^\dagger}) = e^{\ell_T} e^{r_{T^\dagger}} = \ell_{e^T} r_{e^{T^\dagger}},$$

es decir $e^{\ell_T + r_{T^\dagger}} A = e^T A e^{T^\dagger} = fAf^\dagger$ con f lineal, confirmando lo que ya sabíamos pues al exponenciar $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ caemos dentro de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0 \subset \mathsf{G}(\Omega)$.

Por el Teorema 3.4.9 de la sección anterior y dado que $p = 0, 1$ son las únicas proyecciones centrales de $\mathsf{B}(\mathsf{H})$ concluímos este capítulo con el siguiente resultado.

Teorema 3.6.20. *Sea $\mathsf{V} = \mathsf{B}(\mathsf{H})_{sa}$ como JB-álgebra. Entonces $\mathtt{Str}(\mathsf{V}) = \mathsf{G}(\Omega) \sqcup -\mathsf{G}(\Omega)$. Mas aún, si V es la parte real de una C^*-álgebra vista como JB-álgebra entonces $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tiene dos componentes.*

Observación 3.6.21. Notar que en el lado opuesto una C^*-álgebra con infinitas proyecciones centrales nos muestra que $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ puede tener infinitas componentes.

Capítulo 4

La métrica en el grupo de estructura

En este capítulo vamos a estudiar distintas estructuras métricas en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$, $\mathsf{G}(\Omega)$ y Ω. Vamos a definir un spray invariante en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $\mathsf{G}(\Omega)$. Daremos a Ω una estructura de espacio simétrico a partir de una acción de $\mathsf{G}(\Omega)$ dotando al cono del spray canónico. Definiremos una métrica de Finsler en Ω y veremos que las geodésicas de este spray son minimizantes para la métrica. También definiremos una métrica de Finsler en $\mathsf{G}(\Omega)$ y la usaremos para obtener una distancia en Ω, la cual mostraremos que es igual a la distancia dada por la longitud de curvas inducida por la métrica en Ω; en particular mostraremos un levantado isométrico de curvas de Ω a $\mathsf{G}(\Omega)$.

4.1. El spray invariante en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $\mathsf{G}(\Omega)$

Vamos a definir un spray invariante en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y $\mathsf{G}(\Omega)$. Recordemos que un spray F es invariante si $F_{gh}(ghV) = F_h(hV)$ para todo g, h en G y V en $\mathrm{Lie}(G)$.

Notemos que como $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ es abierto en el espacio de Banach $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ podemos identificar el espacio tangente de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ en la identidad con $\mathsf{B}(\mathsf{V})$. Así, si G es un subgrupo de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ podemos identificar su tangente $\mathrm{Lie}(G)$ con una subálgebra de Lie de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$. Mas aún, su tangente en otros puntos se identificarán con traslaciones a izquierda de $\mathrm{Lie}(G)$, es decir, dado g en G tenemos que $T_gG = gT_eG = g\,\mathrm{Lie}(G)$. Por lo tanto, un camino típico en TG debe ser de la forma $\gamma_t = g_tv_t$, donde g_t es un camino en G y v_t es un camino en $\mathrm{Lie}(G)$.

Podemos identificar a los elementos de TTG como la derivada de curvas en TG, por lo que si $\gamma = gv$ entonces un elemento típico de TTG será de la forma $\gamma' = g'v + gv'$. Como g_t es una curva en G entonces g' pertenece a T_gG y debe ser de la forma $g' = gw$ para algún w en $\mathrm{Lie}(G)$. Y como v es una curva en $\mathrm{Lie}(G)$, $v' = z$ también debe pertenecer a $\mathrm{Lie}(G)$. Por lo tanto, un elemento típico de T_VTG para $V = gv \in T_gG$ debe ser de la forma

$$Z = gwv + gz = g(wv + z), \qquad g \in G, \quad v, w, z \in \mathrm{Lie}(G).$$

Por lo tanto, un spray invariante a izquierda en G debe ser de la siguiente forma: dados g en G y V en $\mathrm{Lie}(G)$,

$$F_g(gV) = g(V^2 + B(V,V)), \qquad g \in G,\, V \in \mathrm{Lie}(G). \tag{4.1}$$

para algún operador bilineal simétrico $B : \mathrm{Lie}(G)\times\mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G)$. Recíprocamente, cualquier operador cuadrático definido de esta manera define un spray invariante a izquierda en G.

Definición 4.1.1 (La operación †)**.** Sea V una JB-álgebra. Consideremos la descomposición $\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$: todo elemento en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ se puede escribir de la forma $L_x + D$, donde x es un elemento de V y D una derivación. Definimos

$$(L_x + D)^\dagger = L_x - D.$$

Es fácil comprobar que $v \mapsto -v^\dagger$ es un morfismo de álgebras de Lie.

Definición 4.1.2 (El spray invariante a izquierda)**.** Dada V una JB-álgebra, vamos a definir un spray F invariante a izquierda en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ de la siguiente manera: dados g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y V en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$,

$$F_g(gV) = g(V^2 + [V^\dagger, V]) = g(V^2 + V^\dagger V - VV^\dagger). \tag{4.2}$$

Si consideramos la descomposición $\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ tenemos que

$$g^{-1}F_g(g(L_x + D)) = D^2 + (L_x)^2 + 3L_xD - DL_x = (L_x + D)^2 - 2L_{Dx}.$$

Dados x, y en V y d, D en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ entoces el operador bilineal de Christoffel es

$$\begin{aligned} &g^{-1}\Gamma_g(g(L_x + D), g(L_y + d)) \\ &\qquad = 1/2(L_yL_x + L_xL_y + 3L_xd + 3L_yD - DL_y - dL_x + dD + Dd). \end{aligned} \tag{4.3}$$

La descomposición de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ induce una descomposición de $T\,\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ como la suma directa de dos fibrados vectoriales, el *fibrado horizontal* y el *fibrado vertical*, donde para cada g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$

$$\mathcal{H}_g = \{gL_x : x \in \mathsf{V}\} = g\mathbb{L} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{V}_g = \{gD : D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})\} = g\,\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})\,.$$

Para vectores horizontales tenemos que $F_g(gL_x) = g(L_x)^2$ mientras que para vectores verticales tenemos que $F_g(gD) = gD^2$. Notar que esto vale para un spray invariante a izquierda F en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ de la forma (4.1) si y solo si $B(L_x, L_x) = B(D, D) = 0$ para todo x en V y D en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$.

Lema 4.1.3. Sea F el spray invariante a izquierda que definimos en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces la geodésica γ con $\gamma(0) = g$ y $\gamma'(0) = L_x + D$ es

$$\gamma(t) = ge^{t(L_x - D)}e^{2tD}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\gamma' = g\left(e^{t(L_x - D)}(L_x - D)e^{2tD} + 2e^{t(L_x-D)}e^{2tD}D\right)$$

y

$$\gamma'' = g(e^{t(L_x-D)}(L_x - D)^2 e^{2tD} + 4e^{t(L_x-D)}(L_x - D)e^{2tD}D + 4e^{t(L_x-D)}e^{2tD}D^2).$$

Llevando todo a la identidad tenemos que

$$\alpha^{-1}\alpha' = L_{e^{-2tD}x} + D,$$

y por lo tanto

$$\alpha^{-1}\alpha'' = (L_{e^{-2tD}x})^2 + D^2 + 3L_{e^{-2tD}x}D - DL_{e^{-2tD}x} = \alpha^{-1}F_\alpha(\alpha(L_{e^{-2tD}x} + D)),$$

por lo que α es una geodésica de F. □

Observación 4.1.4. El subgrupo $\mathsf{G}(\Omega)$ es totalmente geodésico en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$: el spray F puede restringirse al subgrupo abierto $\mathsf{G}(\Omega)$. Como $e^{t(L_x-D)}$ pertenece a la componente de la identidad $\mathtt{Str}(\mathsf{V})_0$ que está contenida de $\mathsf{G}(\Omega)$, y como los automorfismos e^{2tD} también preservan el cono de positivos Ω, es claro que una geodésica con velocidad inicial g en $\mathsf{G}(\Omega)$ queda dentro de $\mathsf{G}(\Omega)$ para todo t. Por lo tanto es geodésicamente completo en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$.

El subgrupo de Lie-Banach $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ también es geodésicamente completo: la geodésica γ que pasa a tiempo 0 por un automorfismo k con velocidad inicial D es $\gamma(t) = ke^{tD}$, que es obviamente una curva de automorfismos. En particular las geodésicas de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ son las traslaciones a izquierda de los grupos a un parámetro.

Proposición 4.1.5 (Transporte paralelo)**.** Sea F el spray invariante a izquierda que definimos en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y sea γ un camino suave en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Sea $v_t = \gamma^{-1}\gamma' = L_{y_t} + d_t$ la traslación de la derivada de γ a la identidad, con d_t un camino en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ e y_t un camino en V. Entonces $\mu = \gamma(L_{x_t} + D_t)$ es el transporte paralelo a lo largo de γ si y solo si

$$L_x' = -3/2[d, L_x] + 1/2[L_y, D] \quad \text{dentro de } \mathbb{L} \tag{4.4}$$
$$D' = -1/2[L_y, L_x] - 1/2[d, D] \quad \text{dentro de } \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})\,. \tag{4.5}$$

En particular, si $\gamma = ge^{t(L_{y_0}-d_0)}e^{2td_0}$ es una geodésica entonces $v_t = e^{-2t\,\mathrm{ad}\,d_0}(L_{y_0} + d_0)$ y podemos resolver explícitamente

$$\mu_t = \gamma_t e^{-2t\,\mathrm{ad}\,d_0}e^{tM}\gamma_0^{-1}\mu_0 = ge^{t(L_{y_0}-d_0)}e^{tM}g^{-1}\mu_0,$$

donde

$$M = 1/2\begin{pmatrix} \mathrm{ad}\,d_0 & \mathrm{ad}\,L_{y_0} \\ -\,\mathrm{ad}\,L_{y_0} & 3\,\mathrm{ad}\,d_0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Primero,

$$\begin{aligned}\gamma^{-1}\mu' &= \gamma^{-1}\gamma'(L_x + D) + L_x' + D' = (L_y + d)(L_x + D) + L_x' + D' \\ &= L_y L_x + L_y D + dL_x + dD + L_x' + D'.\end{aligned}$$

Comparando esto con (4.3) obtenemos que

$$L_x' + D' = 1/2[L_x, L_y] + 3/2[L_x, d] + 1/2[L_y, D] + 1/2[D, d].$$

Recordemos que como dijimos en la Observación 3.2.9, $\mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ es una descomposición de Cartan y, recordando las relaciones entre las subálgebras de esta descomposición, debe ser que $L_x' = 3/2[L_x, d] + 1/2[L_y, D]$ y $D' = 1/2[L_x, L_y] + 1/2[D, d]$ como se afirma en las dos primeras fórmulas.

Ahora asumamos que γ es una geodésica. Sea

$$\epsilon = L_z + \widetilde{D} = e^{2t\,\mathrm{ad}\,d_0}\gamma^{-1}\mu = e^{2t\,\mathrm{ad}\,d_0} L_x + e^{2t\,\mathrm{ad}\,d_0} D.$$

Como $L_z' + \widetilde{D}' = \epsilon' = e^{2t\,\mathrm{ad}\,d_0}(2[d_0, L_x] + 2[d_0, D] + L_x' + D')$, combinando esto con las ecuaciones (4.4) y (4.5) obtenemos que $L_z' = 1/2[d_0, L_z] + 1/2[L_{y_0}, \widetilde{D}]$ y que $\widetilde{D}' = -1/2[L_{y_0}, L_z] - 1/2[d_0, \widetilde{D}]$. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} L_z' \\ \widetilde{D}' \end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix} \mathrm{ad}\, d_0 & \mathrm{ad}\, L_{y_0} \\ -\,\mathrm{ad}\, L_{y_0} & 3\,\mathrm{ad}\, d_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_z \\ \widetilde{D} \end{pmatrix},$$

por lo que debe ser $\epsilon = L_z + \widetilde{D} = e^{tM}\epsilon_0$, y despejando obtenemos lo deseado. □

Motivación: la métrica Riemanniana de un álgebra Euclídea

En esta sección daremos un poco de trasfondo y motivación para la elección de esta conexión afín en particular para $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Sea V un álgebra de Jordan Euclídea finito dimensional, definida en el Teorema 2.3.19. Si notamos Tr la traza de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ podemos definir una traza en V de la forma $\mathsf{tr}(x) = \mathsf{Tr}(L_x)$. Esta traza induce un producto interno definido positivo en V como $(v|w) = \mathsf{tr}(vw)$. Esta traza es invariante por automorfismos pues

$$\mathsf{tr}(kx) = \mathsf{Tr}(L_{kx}) = \mathsf{Tr}(kL_x k^{-1}) = \mathsf{Tr}(L_x) = \mathsf{tr}(x).$$

En particular, derivando en cero la igualdad $\mathsf{tr}(e^{tD}x) = \mathsf{tr}(x)$ podemos ver que $\mathsf{Tr}(L_{Dx}) = \mathsf{tr}(Dx) = 0$ para cualquier x en V y D en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$.

Antes de enunciar el teorema principal mostraremos el siguiente teorema para álgebras de Jordan Euclídeas, cuya demostración se puede encontrar en [17, Theorem III.1.2]. El mismo será útil en el próximo resultado.

Teorema 4.1.6. *Sea V un álgebra de Jordan Euclídea de rango r. Dado un idempotente e decimos que es primitivo si no existen idempontentes f y g tales que $e = f + g$. Llamamos marco de Jordan a un conjunto de idempotentes ortogonales y primitivos* *tales que suman la unidad. Entonces dado x en V existe un marco de Jordan $\{e_i\}$ y números reales λ_i tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i.$$

Teorema 4.1.7. *Sea V un álgebra de Jordan Euclídea finito dimensional con producto interno $(v|w) = \mathsf{tr}(vw)$. Entoces $\mathit{Str}(\mathsf{V})$ admite una métrica Riemanniana invariante a izquierda de la forma: dados g en $\mathit{Str}(\mathsf{V})$ y V, W en $T_g\,\mathit{Str}(\mathsf{V}) = g\,\mathit{str}(\mathsf{V})$,*

$$\langle V, W\rangle_g = 1/2\,\mathsf{Tr}(g^{-1}V(g^{-1}W)^\dagger + g^{-1}W(g^{-1}V)^\dagger),$$

o equivalentemente

$$\langle g(L_x + D), g(L_y + \widetilde{D})\rangle_g = \mathsf{Tr}(L_x L_y) - \mathsf{Tr}(D\widetilde{D}).$$

La conexión ∇ inducida por el spray (4.2) es la conexión de Levi-Civita para esta métrica.

Demostración. Es claro que la fórmula define una forma bilineal invariante a izquierda, sólo necesitamos chequear que $\langle V, V\rangle_g > 0$ para V no nulo. Si $V = L_x + D$ en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$, entonces $\langle V, V\rangle_1 = \mathsf{Tr}((L_x)^2) - \mathsf{Tr}(D^2)$. Veamos que ambos términos son positivos.

Tenemos que $Dx^2 = 2xDx$, por lo que $D^2x^2 = 2xD^2x + 2(Dx)^2$ y por lo tanto $-xD^2x = (Dx)^2 - D^2x^2$, y entonces $\mathsf{tr}(-xD^2x) = \mathsf{tr}((Dx)^2) \geq 0$, pues $D^2x^2 = Dv$ para $v = Dx^2$, y se anula si y solo si $Dx = 0$. Dada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V, calculamos la traza de D^2 en esta base y gracias a lo anterior obtenemos

$$-\mathsf{Tr}(D^2) = \sum_i (-D^2 v_i|v_i) = \sum_i \mathsf{tr}(-v_i D^2 v_i) = \sum_i \mathsf{tr}((Dv_i)^2) \geq 0.$$

Para el otro término, tomemos un marco de Jordan $\{e_i\}$ tal que $x = \sum_i \lambda_i c_i$ para ciertos λ_i reales. Notemos que el marco forma una base ortonormal de V. Entonces,

$$\mathsf{Tr}((L_x)^2) = \sum_i ((L_x)^2 c_i|c_i) = \sum_i \lambda_i^2\,\mathsf{tr}(c_i^2) \geq 0.$$

Por lo tanto la forma bilineal es no negativa. Pero si $\langle V, V\rangle_1 = 0$ entonces debe ser que $-\mathsf{Tr}(D^2) = 0$, lo cual implica que $Dv_i = 0$ para todo i y por lo tanto D es nulo, y que $\mathsf{Tr}(L_x^2) = \sum_i \lambda_i^2\,\mathsf{tr}(c_i^2) = 0$, lo cual implica que λ_i debe ser nulo para todo i y por lo tanto x también. Entonces $\langle V, V\rangle_g = 0$ si y solo si $V = 0$.

Probemos ahora que la conexión (o equivalentemente el spray F) es la conexión métrica para esta métrica riemanniana. Como ∇ es una conexión sin torsión es suficiente chequear que es compatible con la métrica. Sea γ una curva en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y sean μ, η dos campos a lo largo de γ. Si notamos a las traslaciones $v = \gamma^{-1}\gamma'$, $\tilde{\mu} = \gamma^{-1}\mu$, tenemos que

$$\gamma^{-1}D_t\mu = \gamma^{-1}\mu' - \gamma^{-1}\Gamma_\gamma(\gamma', \mu) = \gamma^{-1}\mu' - 1/2(\tilde{\mu}v + v\tilde{\mu} + [\tilde{\mu}^*, v] + [v^*, \tilde{\mu}]),$$

y tenemos una expresión simipar para $\gamma^{-1}D_t\eta$. Entonces, usando la ciclicidad de la traza, luego de un cálculo tedioso pero directo obtenemos

$$\langle D_t\mu, \eta\rangle_\gamma + \langle D_t\eta, \mu\rangle_\gamma = \mathsf{Tr}(\tilde{\eta}^\dagger\gamma^{-1}\mu') + \mathsf{Tr}(\tilde{\mu}^\dagger\gamma^{-1}\eta') - \mathsf{Tr}(v\tilde{\mu}\tilde{\eta}^\dagger) - \mathsf{Tr}(v\tilde{\eta}\tilde{\mu}^\dagger). \quad (4.6)$$

Notar que $\tilde{\mu}' = (\gamma^{-1}\mu)' = -\gamma^{-1}\gamma'\gamma^{-1}\mu + \gamma^{-1}\mu' = -v\tilde{\mu} + \gamma^{-1}\mu'$, y similarlmente para $\tilde{\eta}'$. Por lo tanto el último término de (4.6) es igual a

$$\frac{d}{dt}\mathsf{Tr}(\tilde{\mu}\tilde{\eta}^\dagger) = \frac{d}{dt}\langle\mu, \eta\rangle_\gamma,$$

y terminamos la demostración. □

Este ejemplo también se puede presentar en el caso infinito dimensinal, en un álgebra de Jordan-Hilbert con traza finita, como el álgebra especial de operadores autoadjuntos de Hilbert-Schmidt actiando en un espacio de Hilbert complejo. Ver [2] para una discusión mas profunda.

4.2. El cono Ω como un espacio simétrico de Cartan de $\mathsf{G}(\Omega)$

Ahora estamos en posición de presentar el cono de elementos positivos de una JB-álgebra V como un espacio simétrico de Cartan, por la acción del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$.

Definición 4.2.1. Definimos la acción $\mathsf{G}(\Omega) \curvearrowright \Omega$ con el mapa suave $A : \mathsf{G}(\Omega) \times \Omega \to \Omega$ a partir de la evaluación,

$$A(g, p) = g \cdot p = gp = g(p).$$

Notamos el mapa cociente $q : \mathsf{G}(\Omega) \to \Omega$ para $o = 1$, es decir, $q(g) = g(1)$. En particular, $q_{*g}\dot{g} = \dot{g}(1)$.

Observación 4.2.2. La acción definida es transitiva, pues para cada p en Ω tenemos que $p = U_{p^{1/2}}(1)$. Por lo tanto Ω es la órbita de 1 en V por la acción del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$, es decir, $\Omega = q(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathcal{O}(1)$. Notar que K_1, el grupo de isotropía de 1, es exactamente $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Tenemos que $q_{*1}(L_x + D) = x$, por lo que q es una sumersión y podemos identificar $\Omega \simeq \mathsf{G}(\Omega) / \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ como variedades de Banach gracias al Teorema 1.3.2. Mas aún,

$$T_1\Omega = \mathrm{Lie}(\mathsf{G}(\Omega))/\,\mathrm{Lie}(\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = (\mathbb{L} \oplus D)/D \simeq \mathbb{L},$$

lo cual es obvio ya que $\mathbb{L}$ es isomorfo a V via el isomorfismo $v \mapsto L_v$.

Conocemos dos antiautomorfismos en el grupo de estructura: la inversión y la estrella. Combinándolos obtenemos un automorfismo involutivo σ en el grupo de estructura $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ que preserva el subgrupo abierto $\mathsf{G}(\Omega)$: $\sigma(g) = (g^*)^{-1}$.

Lema 4.2.3. Sea g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ y sea $\sigma(g) = (g^*)^{-1} = \mathrm{U}_{g1}^{-1}\, g$. Entonces

1. $\sigma : \mathtt{Str}(\mathsf{V}) \to \mathtt{Str}(\mathsf{V})$ es un automorfismo con $\sigma^2 = Id$ y $\sigma(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathsf{G}(\Omega)$.
2. $\sigma(\mathrm{U}_x) = \mathrm{U}_x^{-1}$ para cualquier $x \in \mathsf{V}$ y el subgrupo de puntos fijos de σ en $\mathsf{G}(\Omega)$ es $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.
3. Notemos $\overline{H} = \sigma_{*1} H$ para $H \in \mathtt{str}(\mathsf{V}) = \mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$, entonces $\overline{L_x + D} = -L_x + D = -(L_x + D)^\dagger$ y por lo tanto
$$\mathbb{L} = \{H \in \mathtt{str}(\mathsf{V}) : \sigma_{*1} H = -H\} = \mathfrak{M}$$
$$\mathtt{Der}\,(\mathsf{V}) = \{H \in \mathtt{str}(\mathsf{V}) : \sigma_{*1} H = H\} = \mathfrak{K}$$
es la descomposición de Cartan de $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ por el automorfismo involutivo σ.

Demostración. Claramente $\sigma^2 = 1$. Por otro lado, como es composición de dos anti-automorfismos se sigue que $\sigma(gh) = \sigma(g)\sigma(h)$. Ahora, si g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ también g^{-1} pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$, y como todo operador U preserva Ω tenemos que g^* también preserva el cono, mostrando que $\sigma(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathsf{G}(\Omega)$.

Ya vimos en el capítulo pasado que $\mathrm{U}_x^* = \mathrm{U}_x$ y $k^* = k^{-1}$. Mas aún, por el Teorema 3.4.11 los puntos fijos de σ en $\mathsf{G}(\Omega)$ son los automorfismos.

Finalmente, notemos que
$$\sigma(e^{tL_x}) = \sigma(U_{e^{tx/2}}) = U_{e^{-tx/2}} = e^{-tL_x},$$
y derivando en $t = 0$ obtenemos que $\sigma_{*1} L_x = -L_x$. Análogamente para las derivaciones, de $\sigma(e^{tD}) = e^{tD}$ para D derivación obtenemos que $\sigma_{*1} D = D$. $\square$

Vamos a calcular la conexión afín ∇ y el spray F derivado de la estructura de espacio simétrico de Cartan de $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Para ello, necesitamos computar el producto simétrico en Ω y en $T\Omega$.

Dado V en $T\Omega$, identificando $T_x\Omega \simeq \mathsf{V}$ podemos escribir $V = (x, v)$ con x en Ω y v en V.

Proposición 4.2.4 (Spray y conexión de Ω como espacio simétrico de $\mathsf{G}(\Omega)$)**.** Sean x, y en Ω y sea $V = (x, v)$, $W = (y, w)$ dos elementos de $T\Omega$. Entonces

1. $\mu(x, y) = x \cdot y = \mathrm{U}_x(y^{-1})$ en Ω.
2. $\mu_*(V, W) = 2\,\mathrm{U}_{x,v}(y^{-1}) - \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y^{-1}\,w$ en $T\Omega$.
3. $F(V) = F_x(v) = \mathrm{U}_v(x^{-1})$ es el spray de la estructura simétrica (Ω, μ).

Demostración. Sean $x = \mathrm{U}_{x^{1/2}}(1)$, $y = \mathrm{U}_{y^{1/2}}(1)$. El producto simétrico está dado por la fórmula (1.2):
$$\mu(x, y) = x \cdot y = \mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\sigma\left(\mathrm{U}_{x^{1/2}}\right)^{-1} \sigma\left(\mathrm{U}_{y^{1/2}}\right)(1) = \mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}}^*\,\mathrm{U}_{y^{-1/2}}^*(1) = \mathrm{U}_x(y^{-1}).$$

El producto simétrico en $T\Omega$ está definido a partir de μ_*. Consideremos α, β dos caminos en Ω tales que $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$ y $\beta(0) = y$, $\beta'(0) = w$. Entonces
$$\begin{aligned}\mu_*(v, w) &= \mu_{*(x,y)}(v, w) = (\mu(\alpha, \beta))'\,(0) = \left(\mathrm{U}_\alpha(\beta^{-1})\right)'(0) \\ &= 2\,\mathrm{U}_{\alpha(0),\alpha'(0)}(\beta(0)^{-1}) - \mathrm{U}_{\alpha(0)}\,\mathrm{U}_{\beta(0)^{-1}}(\beta'(0)) = 2\,\mathrm{U}_{x,v}(y^{-1}) - \mathrm{U}_x\,\mathrm{U}_y^{-1}(w).\end{aligned}$$

Sabemos por el Teorema 1.4.3 que $F_x(v) = -(\Sigma_{v/2}\circ Z)_*(v)$, donde Z es la sección nula de Ω en $T\Omega$. Entonces,

$$\Sigma_{v/2} \circ Z(y) = \Sigma_{v/2}(0_{T_y\Omega}) = \mathrm{U}_{x,v}(y^{-1}) - \mathrm{U}_x \, \mathrm{U}_y^{-1}(0) = \mathrm{U}_{x,v}(y^{-1}).$$

Ahora, si w pertenece a $T_y\Omega$, calculemos el diferencial de esta función en w. Sea α un camino en Ω con $\alpha(0) = y$, $\alpha'(0) = w$. Entonces

$$\Big(\Sigma_{v/2} \circ Z\Big)_{*y}(w) = \Big(\Sigma_{v/2} \circ Z(\alpha)\Big)'(0) = \Big(\mathrm{U}_{x,v}(\alpha^{-1})\Big)'(0) = -\,\mathrm{U}_{x,v}\,\mathrm{U}_y^{-1}\,w.$$

Tomando $y = x$ y $w = v$ tenemos que

$$F_x(v) = -(\Sigma_{v/2} \circ Z)_*(v) = \mathrm{U}_{x,v}\,\mathrm{U}_x^{-1}\,v.$$

Notemos que en un álgebra especial

$$\mathrm{U}_{x,v}\,\mathrm{U}_x^{-1}\,v = \mathrm{U}_{x,v}(x^{-1}vx^{-1}) = vx^{-1}v = \mathrm{U}_v(x^{-1}),$$

y entonces usando el Principio de McDonald del Teorema 2.2.5 tenemos que

$$F_x(v) = \mathrm{U}_v(x^{-1}).$$

□

Observación 4.2.5. Podemos calcular la conexión afín y el operador de Christoffel a partir del spray. Dado x en Ω y v, w en V el operador de Christoffel esta dado por

$$\Gamma_x(v,w) = \frac{1}{2}(F_x(v+w) - F_x(v) - F_x(w)) = \frac{1}{2}(\mathrm{U}_{v+w} - \mathrm{U}_v - \mathrm{U}_w)(x^{-1}) = \mathrm{U}_{v,w}(x^{-1}).$$

La conexión afín para V, W en $\mathfrak{X}(\Omega)$ está dada por

$$\nabla_V W(x) = DW_x(V_x) - \Gamma_x(V_x, W_x) = DW_x(V_x) - \mathrm{U}_{V_x,W_x}(x^{-1}).$$

Esto nos da la derivada covariante de un campo X a lo largo de una curva γ en Ω:

$$\frac{DX}{dt} = \nabla_{\gamma'}X = \frac{dX}{dt} - \mathrm{U}_{\gamma',X}(\gamma^{-1}).$$

Podemos encontrar algunos automorfismos del producto simétrico.

Proposición 4.2.6. Sea μ el producto simétrico definido. Entonces $\mathtt{Str}(\mathsf{V}) \subset \mathtt{Aut}(\Omega,\mu)$.

Demostración. Para cada g en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(gx,gy) &= \mathrm{U}_{gx}(gy)^{-1} = \mathrm{U}_{gx}(g^*)^{-1}y^{-1} = g\,\mathrm{U}_x\,g^{-1}\,\mathrm{U}_{g1}\,\mathrm{U}_{g1}^{-1}\,g(y^{-1}) = g\,\mathrm{U}_x(y^{-1})\\ &= g\mu(x,y)\end{aligned}$$

gracias al Lema 3.1.5, por lo que $\mathtt{Str}(\mathsf{V}) \subset \mathtt{Aut}(\Omega,\mu)$. □

Por el Teorema 1.4.4 tenemos que $\mathtt{Aut}(\Omega,\mu)=\mathtt{Aut}(\Omega,F)$, por lo que los elementos del grupo de estructura también son automorfismos del spray. Veremos mas adelante que el grupo interno de estructura $\mathtt{InnStr}(\mathsf{V})$ actúa transitivamente en Ω implementando el transporte paralelo a lo largo de geodésicas. Para una descripción completa del grupo de automorfismos $\mathtt{Aut}(\Omega,F)$ ver el apéndice en [11].

Podemos describir las geodésicas en este espacio.

Proposición 4.2.7. Sea ∇ la conexión en Ω que surge a partir de la estructura de espacio simétrico. Sea x en Ω y v en $\mathsf{V}=T_x\Omega$. Elegimos $g=\mathrm{U}_{x^{\frac{1}{2}}}$, el cual cumple que $g(1)=1$. La única geodésica α de (Ω,∇) que cumple $\alpha(0)=x$, $\alpha'(0)=v$ es

$$\alpha(t)=ge^{tL_{g^{-1}v}}(1)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{tL_{\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}}(1)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{e^{\frac{t}{2}\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}}(1)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{t\,\mathrm{U}^{-1}_{x^{1/2}}v}.$$

Por lo tanto la exponencial de la conexión ∇ es $\mathrm{Exp}_x(v)=\alpha(1)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{\mathrm{U}^{-1}_{x^{1/2}}v}$ con inversa global suave dada por $\mathrm{Exp}_x^{-1}(y)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\log\left(\mathrm{U}^{-1}_{x^{1/2}}\,y\right)$ para x, y en Ω.

Demostración. Solo debemos chequear que $\alpha''=F_\alpha(\alpha')$. Tenemos que

$$\begin{aligned}F_\alpha(\alpha')&=\mathrm{U}_{\alpha'}(\alpha^{-1})=\mathrm{U}_{\mathrm{U}_{x^{1/2}}(e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}\circ\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v)}((\mathrm{U}_{x^{1/2}}(e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}))^{-1})\\&=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}\circ\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}(e^{-t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v})\\&=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}\,\mathrm{U}_{e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}}(e^{-t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v})=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\mathrm{U}_{\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}(e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v})\\&=\mathrm{U}_{x^{1/2}}(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,v\circ(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,v\circ e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}v}))=\alpha'',\end{aligned}$$

donde en este cálculo se usó repetidamente que las operaciones se realizan en la subálgebra fuertemente asociativa generada por $U_{x^{-1/2}}v$. □

Observación 4.2.8. Sean x, y en Ω. Consideremos el camino que une x e y dado por

$$\alpha_{x,y}(t)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{t\,\log(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,y)}. \tag{4.7}$$

Notemos que esta curva tiene punto inicial x y velocidad inicial $v=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\log\left(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,y\right)$. La geodésica con estos valores iniciales es

$$\alpha(t)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{t\,\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}}\log\left(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,y\right)}=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{t\log\left(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\,y\right)}=\alpha_{x,y}(t).$$

Por lo tanto $\alpha_{x,y}$ es una geodésica que une x e y. Mas aún, es única. Notemos ahora que para cada z en V tenemos que $e^{tL_z}(1)=\mathrm{U}_{e^{tz/2}}(1)=e^{tz}$, por lo que para $z=\log(U_{x^{-1/2}}y)$ podemos reescribir

$$\alpha_{x,y}(t)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{tL_z}(1)=\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{tz}.$$

Es decir, $\alpha_{x,y}$ es la imagen por el mapa cociente $q:\mathsf{G}(\Omega)\to\Omega$ del camino $t\mapsto\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,e^{tL_z}$ en $\mathsf{G}(\Omega)$.

De la Observación 4.2.5 un campo vectorial η en $T\Omega$ paralelo a lo largo de una curva γ en Ω debe ser solución de la ecuación diferencial

$$\eta' = \Gamma_\gamma(\gamma', \eta) = \mathrm{U}_{\gamma',\eta}(\gamma^{-1}).$$

Esta ecuación con valor inicial $\eta(0) = w$ tiene solución única.

Vamos a mostrar como encontrar el transporte paralelo en el caso que γ sea una geodésica.

Proposición 4.2.9. Sea F el spray que surge en Ω a partir de la estructura de espacio simétrico. Entonces el transporte paralelo a lo largo de la geodésica $\alpha_{x,y}$ está dada por

$$P_s^{s+t}(\alpha_{x,y}) = \mathrm{U}_{x^{1/2}} \mathrm{U}_{e^{t/2 \log(\mathrm{U}_{x^{-1/2}} y)}} \mathrm{U}_{x^{-1/2}}.$$

En particular, el transporte paralelo a lo largo de cualquier geodésica está implementado por el grupo interno de estructura.

Demostración. Por la observación anterior, si llamamos $z = \log(\mathrm{U}_{x^{-1/2}} y)$ podemos escribir $\alpha_{x,y}(t) = ge^{tT} \cdot o$ donde $g = \mathrm{U}_{x^{1/2}}$ y $T = L_z \in \mathsf{G}(\Omega)$. Por el Teorema 1.4.6, los grupos a un parámetro de automorfismos

$$\tau_t(p) = ge^{tT}g^{-1}(p) = \mathrm{U}_{x^{1/2}} e^{tL_z} \mathrm{U}_{x^{-1/2}}(p) = \mathrm{U}_{x^{1/2}} \mathrm{U}_{e^{tz/2}} \mathrm{U}_{x^{-1/2}}(p)$$

dan las traslaciones a lo largo de α. Mas aún, por el mismo teorema, el transporte paralelo a lo largo de $\alpha_{x,y}$ está dado por $P_s^{s+t}(\alpha_{x,y}) = (\tau_t)_{*\alpha_{x,y}(s)}$. Como $p \mapsto \tau_t(p)$ es lineal, su diferencial es el propio mapa y la prueba está terminada. $\square$

Por la ecuación (1.1), la fórmula del tensor de curvatura en nuestro espacio simétrico es

$$\begin{aligned} R_p(V,W)Z &= \Gamma_p(V, \Gamma_p(W,Z)) - \Gamma_p(W, \Gamma_p(V,Z)) \\ &= \mathrm{U}_{V,\mathrm{U}_{W,Z}(p^{-1})}(p^{-1}) - \mathrm{U}_{W,\mathrm{U}_{V,Z}(p^{-1})}(p^{-1}). \end{aligned}$$

Esto puede reescribirse de la siguiente manera.

Proposición 4.2.10. Sea F el spray que surge en Ω a partir de la estructura de espacio simétrico. Sea $p = \mathrm{U}_{p^{1/2}}(1) = g1$ en Ω y sean $v = \mathrm{U}_{p^{-1/2}} V$, $w = \mathrm{U}_{p^{-1/2}} W$, $z = \mathrm{U}_{p^{-1/2}} Z$. Entonces

$$R_p(V,W)Z = -\mathrm{U}_{p^{1/2}}[L_v, L_w](z) = \mathrm{U}_{p^{1/2}}(w \circ (v \circ z) - v \circ (w \circ z)),$$

y en particular $R_p(V,W)V = \mathrm{U}_{p^{1/2}}(\mathrm{U}_v - (L_v)^2)w$.

Demostración. Notemos que $V = \mathrm{U}_{p^{1/2}} v = \mathrm{U}_{p^{1/2}} L_v(1) = q_{*g}(gL_v)$ y de la misma manera para W y Z. Recordemos que $\mathfrak{M}$, el autoespacio de σ_{*1} asociado a -1, es exactamente $\mathbb{L}$. Por lo tanto, por el Teorema 1.4.6, notando que $[L_v, L_w](1) = vw - wv = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} R_p(V,W)Z &= -\mathrm{U}_{p^{1/2}}[[L_v, L_w], L_z](1) = -\mathrm{U}_{p^{1/2}}[L_v, L_w](z) \\ &= -\mathrm{U}_{p^{1/2}}(v \circ (w \circ z) - w \circ (v \circ z)), \end{aligned}$$

donde usamos que $(\mathrm{U}_v - (L_v)^2)(w) = ((L_v)^2 - L_{v^2})(w) = v^2 \circ w - v \circ (v \circ w)$. $\square$

Encontremos los campos de Killing en (Ω, ∇). Dado z en $\mathrm{Lie}(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathtt{str}(\mathsf{V})$, consideremos $\rho_t(p) = e^{tz}(p)$ y definamos $X(p) = \rho_0'(p) = z(p)$. Como ρ_t es un grupo a un parámetro, X es un campo diferenciable con flujo ρ_t. Para ver que X es un campo de Killing necesitamos mostrar que ρ_t pertenece a $\mathtt{Aut}(\Omega, \nabla)$, que como vimos en el Teorema 1.4.4 es igual a $\mathtt{Aut}(\Omega, \mu)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu(e^{tz}(x), e^{tz}(y)) &= \mu(e^{tz}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}}(1), e^{tz}\,\mathrm{U}_{y^{1/2}}(1)) = e^{tz}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}}\,\sigma(e^{tz}\,\mathrm{U}_{x^{1/2}})^{-1}\sigma(e^{tz}\,\mathrm{U}_{y^{1/2}})(1)\\ &= e^{tz}\,\mathrm{U}_x\, e^{-t\sigma_* z} e^{t\sigma_* z}\,\mathrm{U}_{y^{-1/2}}(1) = e^{tz}\,\mathrm{U}_x(y^{-1}) = e^{tz}\mu(x,y),\end{aligned}$$

por lo que X es un campo de Killing. Mas aún, si $z = L_x + D$ entonces $X(1) = z(1) = xp$ y $DX_1 = \Gamma_1(z(1), -) = L_{z(1)} = L_x$. Sabemos que dado p en Ω el valor de un campo de Killing y su derivada en p determinan el campo, por lo que hemos encontrado todos los campos de Killing. Por todo esto y el Teorema 1.4.6 tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.2.11. Sea ∇ la conexión que surge en Ω a partir de la estructura de espacio simétrico. El único campo de Killing X en (Ω, ∇) con $X(1) = x \in \mathsf{V} = T_1\Omega$ y $\nabla X(1) = 0$, es decir $DX_1 = L_x = \Gamma_1(x, -)$, está dado por $X(p) = p \circ x$. Su flujo es $\rho_t(p) = e^{tL_x}(p) = \mathrm{U}_{e^{tx/2}}(p)$.

Observación 4.2.12 (El caso de un álgebra de Jordan especial)**.** En el caso de un álgebra de Jordan especial estos resultados son conocidos: como $\mathrm{U}_x\, y = xyx$ con el producto asociativo entonces un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned}&\mu(x,y) = x \cdot y = xy^{-1}x && \mu_*(v,w) = v \cdot w = xy^{-1}v + vy^{-1}x - xy^{-1}wy^{-1}x\\ &F_x(v) = vx^{-1}v && \Gamma_x(v,w) = 1/2(vx^{-1}w + wx^{-1}v)\\ &\frac{DX}{dt} = \frac{dX}{dt} - \frac{1}{2}(\dot\gamma\gamma^{-1}X + X\gamma^{-1}\dot\gamma) && \exp_x(v) = x^{1/2}e^{x^{-1/2}vx^{-1/2}}x^{1/2}.\end{aligned}$$

La geodésica uniendo x e y es $\alpha_{x,y}(t) = x^{1/2}e^{t\log(x^{-1/2}yx^{-1/2})}x^{1/2}$. El transporte paralelo a lo largo de esta geodésica es

$$P_s^{s+t}(\alpha_{x,y})(v) = x^{1/2}(x^{-1/2}yx^{-1/2})^{t/2}x^{-1/2}vx^{-1/2}(x^{-1/2}yx^{-1/2})^{t/2}x^{1/2}.$$

Si escribimos $V = p^{1/2}vp^{1/2}$ y similarmente para W y Z entonces el tensor curvatura en p está dado por

$$R_p(V,W)Z = \frac{1}{4}p^{1/2}[[v,w],z]p^{1/2}.$$

El único campo de Killing X en Ω con $X(1) = x$ en V y $DX_1 = L_x = \Gamma_1(x,-)$ está dado por $X(p) = 1/2(xp + px)$ y su flujo es $\rho_t(p) = e^{tx/2}pe^{tx/2}$.

Observación 4.2.13 (La relación entre los sprays y conexiones de $\mathsf{G}(\Omega)$ y Ω)**.** Notemos F^G el spray del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ y F^Ω el spray de Ω. Recordemos que para vectores horizontales tenemos que $F_g^G(gL_x) = g(L_x)^2$, y si escribimos $p = \mathrm{U}_{p^{1/2}}(1) =$

$q(\mathrm{U}_{p^{1/2}})$ como elemento de Ω, llamando $g = \mathrm{U}_{p^{1/2}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} F^{\Omega}_{q(g)}(q_{*g}(gL_x)) &= F^{\Omega}_p(gL_x(1)) = F^{\Omega}_p(\mathrm{U}_{p^{1/2}}\, x) = \mathrm{U}_{\mathrm{U}_{p^{1/2}} x}(p^{-1}) = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, \mathrm{U}_x\, \mathrm{U}_{p^{1/2}}(p^{-1}) \\ &= \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, \mathrm{U}_x(1) = \mathrm{U}_{p^{1/2}}(x^2) = g(x^2) = g(L_x)^2(1) = F^G_g(gL_x)(1) \\ &= q_{*g}(F^G_g(gL_x)). \end{aligned}$$

Como q_* es lineal entonces $D^2 q_{*g} \equiv 0$ para cualquier g en $\mathsf{G}(\Omega)$ y por lo tanto los sprays están q-relacionados, es decir,

$$F^{\Omega}_{q(g)}(q_{*g}(V)) = D^2 q_{*g}(V, V) + q_{*g} F^G_g(V) \tag{4.8}$$

para cualquier vector horizontal V en $\mathcal{H}_g = g\,\mathbb{L}$.

De todas maneras debemos tener en cuenta que esto también es verdadero para cualquier spray cuadrático en $\mathtt{Str}(\mathsf{V})$ de la forma (4.1) que se anula en $\mathbb{L}$, es decir, que $B(L_x, L_x) = 0$.

Observación 4.2.14 (Campos horizontales)**.** De la identidad de la ecuación (4.8) (o por un cálculo directo) podemos ver que si X, Y en $\mathfrak{X}(\mathsf{G}(\Omega))$ son horizontales entonces considerando el push-foward q_*X, q_*Y en $\mathfrak{X}(\Omega)$ y sus respectivas conexiones afines tenemos

$$q_*(\nabla^G_X Y(g)) = \nabla^{\Omega}_{q_*X}(q_*Y)(q(g))$$

para todo g en $\mathsf{G}(\Omega)$. En particular las geodésicas horizontales de $\mathsf{G}(\Omega)$, que son de la forma $\gamma(t) = ge^{tL_v}$ con g en $\mathsf{G}(\Omega)$, son mapeadas por q a geodésicas en Ω, que son de la forma

$$\alpha(t) = q(\gamma(t)) = \gamma(t)(1) = ge^{tL_v}(1) = g\,\mathrm{U}_{e^{tv/2}}(1) = g(e^{tv}).$$

Esto será discutido en mas detalle en la próxima sección.

4.3. Métrica de Finsler y distacia geodésica en Ω

Vamos a proveer a Ω de una métrica de Finsler y estudiar la distancia que se desprende de la misma.

El cono de elementos positivos está dotada de una métrica de Finsler natural que preserva la estructura de espacio simétrico, donde la norma de Finsler en cada espacio tangente $T_p\Omega \simeq \mathsf{V}$ está definida como

$$\|v\|_p = \|\,\mathrm{U}_{p^{-1/2}}\, v\| = \|\,\mathrm{U}^{-1}_{p^{1/2}}\, v\|,$$

donde la norma del último término es la norma en V. Esta estructura es discutida en detalle en [19], [36] mas recientemente en [10].

Vamos a considerar la longitud rectificable

$$\mathrm{Length}_{\Omega}(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)} dt,$$

y la distancia rectificable

$$\operatorname{dist}_\Omega(p,q) = \inf_\gamma \operatorname{Length}_\Omega(\gamma), \tag{4.9}$$

donde el ínfimo se toma entre todos los caminos C^1 a trozos que unen p y q.

Tenemos el siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [11, Section 1] y en [44, Proposition 12.22].

Teorema 4.3.1. *Sea* $\operatorname{dist}_\Omega$ *la distancia definida en* (4.9)*. Esta es en efecto una distancia y la topología original de* Ω *coincide con la topología inducida por esta métrica.*

Proposición 4.3.2. La métrica de Finsler definida es invariante a izquierda por la acción del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$.

Demostración. Sea g en $\mathsf{G}(\Omega)$ y p en Ω. Si llamamos $k = U_{(gp)^{-1/2}} g U_{p^{1/2}}$ tenemos que k pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ y

$$k(1) = U_{(gp)^{-1/2}} g U_{p^{1/2}}(1) = U_{(gp)^{-1/2}}(gp) = 1,$$

por lo que k es un automorfismo por la Proposición 3.1.14. Por lo tanto $U_{(gp)^{-1/2}} g = kU_{p^{-1/2}}$ y entonces

$$\|gv\|_{gp} = \|U_{gp}^{-1/2} gv\| = \|kU_{p^{-1/2}} v\| = \|U_{p^{-1/2}} v\| = \|v\|_p,$$

pues por la Proposición 3.3.4 los automorfismos son isometrías. $\square$

Esto también implica que tanto la longitud de caminos como la distancia son invariantes por la acción del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$.

Hemos visto en la sección anterior que el transporte paralelo a lo largo de geodésicas está implementada por el grupo interno de estructura. Esta implementación es la misma que mueve el punto base en la norma, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3.3. El transporte paralelo a lo largo de geodésicas es isométrico para la métrica de Finsler en Ω. En particular las geodésicas de la conexión tienen rapidez constante.

Demostración. Sean x e y en Ω y sea $\alpha_{x,y}$ la única geodésica que une x e y. Sea P el transporte paralelo a lo largo de $\alpha_{x,y}$ entre $T_x\Omega$ y $T_y\Omega$. Por la Proposición 4.2.9, $P = \mathrm{U}_{x^{1/2}}\, \mathrm{U}_{(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, y)^{1/2}}\, \mathrm{U}_{x^{-1/2}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|v\|_x &= \|\, \mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, v\|_1 = \|\, \mathrm{U}_{(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, y)^{1/2}}\, \mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, v\|_{\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, y} \\ &= \|\, \mathrm{U}_{x^{1/2}}\, \mathrm{U}_{(\mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, y)^{1/2}}\, \mathrm{U}_{x^{-1/2}}\, v\|_y = \|Pv\|_y. \end{aligned}$$

En particular, para una geodésica $\alpha(t) = U_{p^{1/2}} e^{tU^{-1}_{p^{1/2}} v}$,

$$\|U_{\alpha_t^{-1/2}} \alpha'_t\| = \|\alpha'_t\|_{\alpha_t} = \|P_0^t(\alpha)\alpha'_0\| = \|\alpha'_0\|_{\alpha_0} = \|U_{p^{-1/2}} v\|.$$

$\square$

Vamos a probar que las geodésicas de la conexión en Ω son minimales para la distancia definida, es decir, para toda curva geodésica $\alpha : [a,b] \to \Omega$, $\mathrm{Length}(\alpha) = \mathrm{dist}(\alpha(a), \alpha(b))$. Para ello necesitamos probar algunos resultados antes.

Podemos expresar la traslación de la velocidad de un camino a la identidad en término de los operadores de multiplicación.

Lema 4.3.4. Sea γ un camino suave a trozos en Ω tal que $\gamma = e^{\Gamma}$ con Γ un camino en V. Consideremos la función real analítica $G(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}$. Entonces

$$\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\,\gamma' = \{G(\mathrm{ad}\,L_\Gamma)L_{\Gamma'}\}(1)$$

Demostración. Notar que $\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}} = \mathrm{U}_{e^{-\Gamma}/2} = e^{-L_\Gamma}$ y que $\gamma = e^{\Gamma} = \mathrm{U}_{e^{\Gamma/2}}(1)$. Entonces, considerando el mapa $F(\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$, $F(0) = 1$, tenemos que

$$\gamma' = (\mathrm{U}_{e^{\Gamma/2}}(1))' = (\mathrm{U}_{e^{\Gamma/2}})'(1) = (e^{L_\Gamma})'(1) = \{e^{L_\Gamma}F(\mathrm{ad}\,L_\Gamma)(L_{\Gamma'})\}(1)$$

gracias al Lema 1.2.3. Entonces

$$\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\,\gamma' = e^{-L_\Gamma}e^{L_\Gamma}F(\mathrm{ad}\,L_\Gamma)L_{\Gamma'}(1) = F(\mathrm{ad}\,L_\Gamma)L_{\Gamma'}(1).$$

Como para todo x e y en V tenemos que $[L_x, L_y]$ es una derivación, los términos impares de $F(\mathrm{ad}\,L_x)L_y$ desaparecen si evaluamos en 1. Mas aún,

$$F(\lambda) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} = \frac{1-\cosh(\lambda)+\sinh(\lambda)}{\lambda},$$

por lo que los términos pares de $F(\lambda)$ son los términos de $G(\lambda)$. Entonces

$$\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\,\gamma' = G(\mathrm{ad}\,L_\Gamma)L_{\Gamma'}(1).$$

□

Recordemos que por la Proposición 2.3.12 la subálgebra cerrada $C(x,y)$ generada por dos elementos puede representarse isométricamente en una C^* álgebra con su producto de Jordan.

Lema 4.3.5. Sean x, y en V y sea $\pi : C(x,y) \to \mathsf{B}(\mathsf{H})$ alguna representación isométrica de la JB-álgebra cerrada $C(x,y)$. Si consideramos la función $G(\lambda) = \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}$ entonces tenemos

$$\pi\left(G(\mathrm{ad}\,L_x)(L_y)(1)\right) = G\left(\mathrm{ad}\,\frac{\pi(x)}{2}\right)\pi(y).$$

Demostración. Se puede ver en [26, Remark 23] que en un álgebra de Banach asociativa, para todo par de elementos T y S

$$\frac{\sinh(\mathrm{ad}\,T)}{\mathrm{ad}\,T}(S) = \int_0^1 e^{(2s-1)T}Se^{(1-2s)T}ds.$$

Podemos aplicar esta fórmula en $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ con $T = L_x$ y $S = L_y$ para x e y en V. Si llamamos I al elemento de V que se obtiene de evaluar este operador en 1, llegamos a que

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sinh(\operatorname{ad} L_x)}{\operatorname{ad} L_x}(L_y)(1) = \int_0^1 e^{(2s-1)L_x} L_y e^{(1-2s)L_x} ds(1) \\ &= \int_0^1 e^{(2s-1)L_x} L_y e^{(1-2s)L_x}(1) ds = \int_0^1 e^{(2s-1)L_x} L_y \, \mathrm{U}_{e^{(1/2-s)x}}(1) ds \\ &= \int_0^1 e^{(2s-1)L_x} L_y e^{(1-2s)x} ds = \int_0^1 \mathrm{U}_{e^{(s-1/2)x}} \left(y \circ e^{(1-2s)x} \right) ds. \end{aligned}$$

Notemos que el integrando de I pertenece a $C(x,y)$ para cada $s \in [0,1]$, por lo cual I también pertenece a $C(x,y)$. Y por esta misma razón la representación π conmuta con la integral, por lo que aplicando π a I obtenemos

$$\begin{aligned} \pi(I) &= \pi\left(\int_0^1 \mathrm{U}_{e^{(s-1/2)x}} \left(y \circ e^{(1-2s)x} \right) ds \right) = \int_0^1 \mathrm{U}_{e^{(s-1/2)\pi(x)}} \left(\pi(y) \circ e^{(1-2s)\pi(x)} \right) ds \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} e^{(s-1/2)\pi(x)} \left(\pi(y) e^{(1-2s)x} + e^{(1-2s)x} \pi(y) \right) e^{(s-1/2)\pi(x)} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^{(2s-1)\frac{\pi(x)}{2}} \pi(y) e^{(1-2s)\frac{\pi(x)}{2}} + e^{(2s-1)\frac{-\pi(x)}{2}} \pi(y) e^{(1-2s)\frac{-\pi(x)}{2}} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh(\operatorname{ad}(\frac{\pi(x)}{2}))}{\operatorname{ad}(\frac{\pi(x)}{2})} + \frac{\sinh(\operatorname{ad}(\frac{-\pi(x)}{2}))}{\operatorname{ad}(\frac{-\pi(x)}{2})} \right) \pi(y) = \frac{\sinh(\operatorname{ad}(\frac{\pi(x)}{2}))}{\operatorname{ad}(\frac{\pi(x)}{2})} \pi(y), \end{aligned}$$

donde la última igualdad es verdadera porque el mapa $t \mapsto \frac{\sinh(\lambda)}{\lambda}$ es una función par. $\square$

Corolario 4.3.6. Sea $\gamma_t = e^{\Gamma_t}$ un camino suave en Ω. Para cada $t \in [a,b] = Dom(\gamma)$ sea π_t cualquier representación isométrica de la JB-álgebra generada por 1, Γ_t y Γ_t' en una álgebra de Jordan especial. Entonces

$$\pi_t(\mathrm{U}_{\gamma_t^{-1/2}} \gamma_t') = G(\operatorname{ad} \pi_t \Gamma_t / 2) \pi_t(\Gamma_t').$$

En particular ambos operadores tienen el mismo espectro, y si los autovalores de $\mathrm{U}_{\gamma_t^{-1/2}} \gamma_t'$ son aislados su multiplicidad es la misma para ambos operadores

Demostración. Aplicamos el lema anterior a $x = \Gamma_t$ e $y = \Gamma_t'$ y lo combinamos con el Lema 4.3.4 para obtener la igualdad. Las afirmaciones sobre el espectro se siguen de que el espectro y su multiplicidad son invariantes por π. $\square$

Con esto podemos probar la optimalidad de las geodésicas de la conexión para la métrica de Finsler invariante en Ω. Se puede encontrar una prueba completamente distinta en [37]. En la próxima sección probaremos que nuestra prueba permite generalizar este resultado a cualquier métrica en Ω inducida por una norma simétrica. Se puede ver [14] para el caso de C^*-álgebras.

Teorema 4.3.7. *La curva geodésica* $\alpha(t) = \mathrm{U}_{p^{1/2}} \exp(t\, \mathrm{U}_{p^{1/2}}^{-1} v)$ *es minimizante para la distancia* dist_Ω *en* Ω*, es decir,*

$$\mathrm{Length}_\Omega(\alpha) = \|U_{p^{-1/2}} v\| = \mathrm{dist}_\Omega(\alpha(0), \alpha(1)).$$

Demostración. Probaremos el teorema para geodésicas α tales que $\alpha(0) = 1$, ya que como la métrica es invariante para la acción transitiva del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$ esto probará el resultado para todas las geodésicas. Asumamos entonces que $\alpha(t) = e^{tv}$ para algún v en V. Tomemos $\gamma = e^\Gamma$ un camino suave en Ω. Por el resultado anterior y usando que π_t es isométrica para todo t, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\gamma'\|_\gamma &= \|\, \mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\, \gamma'\| = \|G(\mathrm{ad}\, L_\Gamma) L_{\Gamma'}(1)\| = \|\pi(G(\mathrm{ad}\, L_\Gamma) L_{\Gamma'}(1))\| \\ &= \|\frac{\sinh(\mathrm{ad}\, \pi(\Gamma)/2))}{\mathrm{ad}\, \pi(\Gamma)/2} \pi(\Gamma')\|.\end{aligned}$$

Ahora, como $X = \pi(\Gamma)/2$ es un operador autoadjunto de una C^*-álgebra podemos aplicar la observación en [26, Remark 23] obteniendo que $\|\gamma'\|_\gamma \geq \|\Gamma'\|$. Finalmente, si $\gamma = e^\Gamma$ une 1 con e^v debe ser que $\Gamma(0) = 0$ y $\Gamma(1) = v$, y entonces

$$\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) = \int \|\gamma'\|_\gamma \geq \int \|\Gamma'\| = \mathrm{Length}_{\mathsf{V}}(\Gamma) \geq \|v\| = \mathrm{Length}_\Omega(\alpha),$$

ya que en cualquier espacio de Banach la longitud de cualquier camino suave uniendo 0 con v es al menos $\|v\|$. Esto prueba que α es mas corta que cualquier otra curva suave a trozos uniendo los mismos extremos. □

Observación 4.3.8 (Métrica de Thompson)**.** Dados p y q en Ω, por el teorema anterior y la Observación 4.2.8 tenemos que

$$\mathrm{dist}_\Omega(p, q) = \|\log(U_{p^{-1/2}} q)\| = \|\log(U_{q^{-1/2}} p)\|.$$

Esta es la métrica de Thompson en un cono descripta por Nussbaum en [37]. Fue probado por Lawson y Lim que esta distancia entre dos geodésicas en Ω es una función convexa del parámetro temporal en [29]; la suya es una generalización del teorema demostrado por Corach, Porta y Recht para C^*-álgebras obtenido en [15]. Para una discusión sobre la unicidad de geodésicas entre p y q en Ω y las isometrías de esta métrica se pueden ver los papers de Lemmens, Roelands y Wortel [30, 31] y las referencias en ellos.

4.3.1. La métrica de Ω como una métrica de Finsler cociente

Consideremos la siguiente norma invariante en $T\Omega$:

Definición 4.3.9. Sea Z en $T_g\, \mathsf{G}(\Omega) = g\, \mathtt{str}(\mathsf{V})$ y sea $Z(1) = z$ un elemento de $\mathsf{V} = T_{g(1)}\Omega$. Definimos la *norma de Finsler cociente* como

$$\|z\|_{g1} = \inf_{D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})} \|Z - gD\|_g = \mathrm{dist}_{\|\cdot\|_\infty}(g^{-1} Z, \mathtt{Der}\,(\mathsf{V}))$$

en cada $g(1)$ en Ω.

Lema 4.3.10. La norma cociente en $T\Omega$ es igual a la norma de Finsler $\|v\|_p = \| \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v\|$. En particular está bien definida y no depende del elemento Z de la fibra que cumple $Z(1) = z$.

Demostración. Sea g en $\mathsf{G}(\Omega)$ y sea $Z = g(L_x + D_0)$ un elemento en $T_g \mathtt{Str}(\mathsf{V})$. Entonces $Z(1) = gx$ y

$$\|Z - gD\|_g = \|L_x + D_0 - D\| \geq \|(L_x + D_0 - D)(1)\| = \|x\| = \|g^{-1}Z(1)\|$$

y tomando ínfimo sobre $D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ vemos que $\|Z(1)\|_{g1} \geq \|g^{-1}Z(1)\|$. Por otro lado considerando el caso especial de $D = D_0$ en el ínfimo obtenemos que

$$\|Z(1)\|_{g1} \leq \|g(L_x + D_0) - gD_0\|_g = \|L_x\| = \|x\| = \|g^{-1}Z(1)\|.$$

Por lo tanto si escribimos $p = g(1)$ en Ω, debe ser que $g = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, k$ para algún automorfismo k y entonces

$$\|Z(1)\|_{g1} = \|g^{-1}Z(1)\| = \|k^{-1}\,\mathrm{U}_{p^{-1/2}}\, Z(1)\| = \|\,\mathrm{U}_{p^{-1/2}}\, Z(1)\|.$$

$\square$

4.3.2. Normas simétricas y absolutas en Ω

Dado $x = (x_1, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ notamos $|x| = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, decimos que ϕ es *absoluta* si $\phi(x) = \phi(|x|)$ para todo x en $\mathbb{R}^n$; decimos que es simétricamente invariante si $\phi(Sx) = \phi(x)$ para toda S permutación de n elementos. Decimos que ϕ es una *norma simétrica y absoluta* si ϕ es una norma, es simétrica y $\phi(x_1, \cdots, x_n) = \phi(\varepsilon_1 x_1, \cdots, \varepsilon_n x_n)$, donde $\varepsilon_i = \pm 1$. Para profundizar sobre normas simétricas se puede ver [5, Chapter IV].

Sea V una JB-álgebra de dimensión finita. Dado x en V vamos a notar $s_k(x)$ al módulo de los autovalores de x contados con multiplicidad y en orden decreciente. Si consideramos una norma simétrica y absoluta $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ podemos definir una norma equivalente en V de la forma

$$\|x\|_\phi = \phi(s_1(x), s_2(x), \ldots, s_n(x)). \tag{4.10}$$

Claramente $\|\cdot\|_\phi$ es positiva, no degenerada y homogénea. Para probar que es subaditiva, dados x e y en V tomemos una representación π de $C(x, y)$ en $\mathbb{C}^n$. La representación preserva los valores singulares y su multiplicidad, por lo que

$$\begin{aligned} \|x + y\|_\phi &= \phi(s_i(x + y)) = \phi(s_i(\pi(x + y)) = \phi(s_i(\pi(x) + \pi(y)) \\ &\leq \phi(s_i(\pi(x))) + \phi(s_i(\pi(y))) = \phi(s_i(x)) + \phi(s_i(y)) \\ &= \|x\|_\phi + \|y\|_\phi, \end{aligned}$$

donde la desigualdad se debe a las desigualdades de mayorización, que se pueden ver en [5, Theorem IV.2.1].

Ahora le damos al cono Ω la estructura de Finsler inducida por la acción de $\mathsf{G}(\Omega)$ y esta norma absoluta: dados p en Ω y v en $T_p\Omega \simeq \mathsf{V}$ definimos

$$|v|_p = \| \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v\|_\phi.$$

Si g pertenece a $\mathsf{G}(\Omega)$ y p a Ω recordemos de la Proposición 4.3.2 que $k = U_{(gp)^{-1/2}} g U_{p^{1/2}}$ es un automorfismo. Entonces

$$|gv|_{gp} = \| \mathrm{U}_{gp}^{-1/2} gv\|_\phi = \|k\, \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v\|_\phi = \| \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v\|_\phi = |v|_p,$$

pues todo automorfismo preserva el espectro y su multiplicidad. Por lo tanto la longitud de los caminos Length_ϕ y la distancia rectificable dist_ϕ son otra vez invariantes por la acción del grupo $\mathsf{G}(\Omega)$.

Sea $\alpha(t) = \mathrm{U}_{p^{1/2}} e^{t\, \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v}$ la geodésica de la estructura de espacio simétrico de Ω. Con la misma prueba que la Proposición 4.3.3 tenemos que el transporte paralelo a lo largo de α es una isometría de $(\Omega, \mathrm{dist}_\phi)$. Vamos a probar ahora que las geodésicas también son minimizantes para la norma absoluta.

Teorema 4.3.11. *Sea* V *una JB-álgebra de dimensión finita y consideremos una norma absoluta y simétrica* ϕ *en* V. *Entonces las geodésicas de la conexión de* Ω *son minimizantes, es decir,*

$$\mathrm{Length}_\phi(\alpha) = \| \mathrm{U}_{p^{-1/2}} v\|_\phi = \mathrm{dist}_\phi(\alpha(0), \alpha(1)).$$

Demostración. Nuevamente por la invarianza por la acción de $\mathsf{G}(\Omega)$ es suficiente probar que $\alpha(t) = e^{tv}$ es minimizante. Sea $\gamma = e^\Gamma$ una curva C^1 a trozos en Ω con $\Gamma(0) = 0$,$\Gamma(1) = v$. Por el Corolario 4.3.6 sabemos que para cada t el elemento $\mathrm{U}_{\gamma_t^{-1/2}} \gamma_t'$ y el operador $G(\mathrm{ad}\, \pi_t\Gamma_t/2)\pi_t(\Gamma_t')$ tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad. Por lo tanto

$$|\gamma_t'|_{\gamma_t} = \| \mathrm{U}_{\gamma_t^{-1/2}} \gamma_t'\|_\phi = \phi(s_i(G(\mathrm{ad}\, \pi_t\Gamma_t/2)\pi_t(\Gamma_t'))) = \|G(\mathrm{ad}\, \pi_t\Gamma_t/2)\pi_t(\Gamma_t')\|_\phi$$

donde la norma en la derecha es la norma absoluta inducida por ϕ en $M_n(\mathbb{C}) = \mathsf{B}(\mathbb{C}^n)$ del operador autoadjunto $G(\mathrm{ad}\, \pi_t\Gamma_t/2)\pi_t(\Gamma_t')$. Nuevamente por la observación en [26, Remark 23], dado que $\pi_t\Gamma_t$ es autoadjunto, tenemos que

$$\|G(\mathrm{ad}\, \pi_t\Gamma_t/2)\pi_t(\Gamma_t')\|_\phi = \|\frac{\sinh(\mathrm{ad}\, \pi(\Gamma_t)/2))}{\mathrm{ad}\, \pi(\Gamma_t)/2}\pi(\Gamma_t')\|_\phi \geq \|\Gamma_t'\|_\phi.$$

Y de la misma manera que en la demostración del Teorema 4.3.7

$$\mathrm{Length}_\phi(\gamma) = \int |\gamma'|_\gamma \geq \int \|\Gamma'\|_\phi = \mathrm{Length}_\phi(\Gamma) \geq \|v\|_\phi = \mathrm{Length}_\phi(\alpha),$$

mostrando que la geodésica es minimizante. Ahora, si $\mathrm{Length}_\phi(\gamma) = \mathrm{Length}_\phi(\alpha)$, entonces en particular debe ser que $\mathrm{Length}_\phi(\Gamma) = \|v\|_\phi$, y si la norma es estrictamente convexa esto solo es posible si $\Gamma(t) = tv$. Por lo tanto $\gamma(t) = e^{tv}$, es decir, γ es una geodésica. $\square$

4.4. Métrica de Finsler en $\mathsf{G}(\Omega)$

Ahora vamos a definir una métrica de Finsler en $\mathsf{G}(\Omega)$.

Definición 4.4.1. Sea H un elemento de $\mathrm{Lie}(\mathsf{G}(\Omega)) = \mathtt{str}(\mathsf{V}) \subset \mathsf{B}(\mathsf{V})$. Consideremos $\|H\| = \|H\|_\infty$ la norma supremo de H como operador lineal actuando en V. Si H pertenece a $T_g\,\mathsf{G}(\Omega) = g\,\mathtt{str}(\mathsf{V})$, definimos

$$\|H\|_g = \|g^{-1}H\|.$$

Vamos a definir la longitud de un camino C^1 a trozos $\alpha : [a,b] \to \mathsf{G}(\Omega)$ como

$$\mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\alpha) = \int_a^b \|\dot\alpha(t)\|_{\alpha(t)}dt.$$

y la distancia entre g y h en $\mathsf{G}(\Omega)$ como

$$\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g,h) = \inf_\alpha \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\alpha),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los caminos α en $\mathsf{G}(\Omega)$ que unen g y h.

Esta es una métrica de Finsler invariante a izquierda en $\mathsf{G}(\Omega)$. Mas aún, como cada automorfismo k es una isometría y podemos identificar $T_g\,\mathsf{G}(\Omega)\cdot k = T_{gk}\,\mathsf{G}(\Omega)$, tenemos que

$$\|Hk\|_{gk} = \|k^{-1}g^{-1}Hk\| = \|g^{-1}H\| = \|H\|_g,$$

por lo que la norma es invariante a derecha (y en consecuencia bi-invariante) para la acción del grupo $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.

Notemos que la distancia también es invariante a izquierda ya que para todo camino suave α el mapa $g\alpha$ también es suave. Mas aún, tanto la longitud como la distancia son bi-invariantes por la acción del subgrupo $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Usando la continuidad de la inversa en $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ y de la multiplicación en $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ y el hecho de que $\mathsf{G}(\Omega)$ es una subvariedad embebida de $\mathsf{GL}(\mathsf{V})$ no es dificil chequear que la estructura de Finsler es compatible con la estructura de variedad, gracias al Teorema 4.3.1. Por lo tanto la topología de la distancia rectificable $\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}$ es igual a la topología del grupo de Lie-Banach $\mathsf{G}(\Omega)$, que es la topología inducida por la norma de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$.

Como mencionamos en la Observación 4.1.4, las geodésicas de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ para el spray cuadrático de la Definición 4.1.2 son los grupos a un parámetro $t \mapsto ke^{tD}$, con k automorfismo y D derivación. Vamos a mostrar que estos caminos son minimizantes para la estructura de Finsler restringida de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Para ello introduciremos dos teoremas cuya demostración se puede encontrar en [27, Theorem 4.11 and Theorem 4.22].

Teorema 4.4.2. *Sea K un grupo de Lie-Banach con una métrica de Finsler bi-invariante tal que B_R es la bola en $\mathrm{Lie}(K)$ de radio R y $V_R = \exp(B_R)$, con $\exp : B_r \to V_R$ un difeomorfismo. Sean k_0 y $k_1 = k_0e^z$ dos elementos de K con $\|z\| < R$. Entonces*

1. *Sea* γ *una curva uniendo* k_0 *y* k_1. *Si* γ *sale de* V_R *entonces* $\mathrm{Length}(\gamma) \geq R$.
2. *Si* $\delta = k_0 e^{tz}$, $t \in [0,1]$ *entonces* δ *es mas corta que cualquier otra curva* C^1 *a trozos uniendo* k_0 *y* k_1 *en* K *y* $\mathrm{dist}(k_0, k_1) = \|z\|$.

Teorema 4.4.3. *Sea* K *un grupo de Lie-Banach con una métrica de Finsler bi-invariante tal que* B_R *es la bola en* $\mathrm{Lie}(K)$ *de radio* R *y* $V_R = \exp(B_R)$, *con* $\exp : B_r \to V_R$ *un difeomorfismo. Sea* z *en* $\mathrm{Lie}(K)$ *con* $\|z\| < R$ *y sea* γ *cualquier curva uniendo* 1 *con* e^z *en* K. *Entonces son equivalentes*

1. γ *es el camino mas corto en* K *uniendo* 1 *con* e^z, *es decir,* $\mathrm{Length}(\gamma) = \mathrm{dist}(1, e^z) = \|z\|$.
2. $\gamma = e^{\Gamma} \subset V_R$ *y para cualquier funcional* φ *con* $\varphi(z) = \|z\|$ *se cumple que* $\varphi(\dot{\Gamma}) = \|\gamma^{-1}\dot{\gamma}\|$ *para todo* t.
3. $\gamma = e^{\Gamma} \subset V_R$ *y existe un funcional de norma* 1 φ *tal que* $\varphi(\dot{\Gamma}) = \|\dot{\Gamma}\|$ *y* $\varphi(\gamma^{-1}\dot{\gamma}) = \|\gamma^{-1}\dot{\gamma}\|$ *para todo* t. *Por lo tanto, si normalizamos* z *y* $\gamma^{-1}\dot{\gamma}$ *tenemos que estan dentro de la misma cara de la esfera unitaria.*

Ahora probamos la minimalidad en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$.

Teorema 4.4.4. *Sea* k *un automorfismo y* D *una derivación tal que* $\|D\| < \pi/2$. *Consideremos la geodésica* $\delta(t) = ke^{tD}$, *entonces* δ *es minimizante en* $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, *es decir,*

$$\mathrm{dist}_{\mathtt{Aut}(\mathsf{V})}(k, ke^D) = \|D\| = \mathrm{Length}(\delta).$$

Mas aún, si γ *es una curva* C^1 *a trozos en* $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ *uniendo* k *con* ke^D *tal que* $\mathrm{Length}(\Gamma) = \|D\|$, *entonces para cualquier funcional de norma* 1 φ *en* $\mathtt{Der}(\mathsf{V})^*$ *tal que* $\varphi(D) = \|D\|$, *tenemos que* $\gamma_t^{-1}\gamma_t'$ *se encuentra dentro de la misma cara de la esfera* $F_\varphi = \varphi^{-1}(\|D\|)$ *para todo* t. *En particular, si la norma es suave en* D, *entonces la única geodésica es* δ

Demostración. Por el Teorema 3.2.5, la exponencial de $\mathsf{B}(\mathsf{V})$ es un difeomorfismo entre la bola de radio $\pi/2$ en $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ y su imagen en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, la cual es un entorno abierto de $Id \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. La minimalidad de los grupos a un parámetro y el resto de la afirmación se sigue de 4.4.2 y 4.4. □

4.4.1. La distancia cociente en Ω

Con la distancia que definimos en $\mathsf{G}(\Omega)$ vamos a definir una distancia cociente en Ω. Dados dos elementos en el cono, la distancia entre ellos será la distancia entre sus respectivas fibras.

Definición 4.4.5. Sean x, y en Ω y sean g, h en $\mathsf{G}(\Omega)$ tales que $g(1) = x$, $h(1) = y$. Definimos la *distancia cociente* como

$$d'(x, y) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g\,\mathtt{Aut}(\mathsf{V}), h\,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = \inf_{k_1, k_2 \in \mathtt{Aut}(\mathsf{V})} \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(gk_1, hk_2).$$

Proposición 4.4.6. d' es una distancia bien definida en Ω y $\mathsf{G}(\Omega)$-invariante.

Demostración. Si $g_1(1) = g_2(1)$ entonces $g_1 \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V}) = g_2 \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, por lo que d' está bien definida. Como $\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}$ es invariante a derecha por la acción de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ tenemos que

$$d'(x, y) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V}), h \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g, h \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) \leq \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g, h).$$

La distancia de un punto a un conjunto cerrado es positiva, por lo que d' es una distancia. Mas aún, como $\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}$ también es invariante a izquierda, tenemos para cualquier f en $\mathsf{G}(\Omega)$ que

$$\begin{aligned} d'(fx, fy) &= \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(fg, fh \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}((fh)^{-1} fg, \mathtt{Aut}(\mathsf{V})) \\ &= \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(h^{-1} g, \mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g, h \,\mathtt{Aut}(\mathsf{V})) = d'(x, y), \end{aligned}$$

por lo que d' es invariante por la acción de $\mathsf{G}(\Omega)$. □

Mas adelante mostraremos que esta distancia es igual a la distancia dist_Ω definida en la sección anterior a través de la métrica de Finsler en Ω.

4.5. Comparando las distancias

Nuestra meta en esta sección es probar que $d' = \mathrm{dist}_\Omega$ en Ω.

Lema 4.5.1. Sea γ una curva uniendo x e y en Ω y sea Λ un levantamiento de γ a $\mathsf{G}(\Omega)$. Entonces $\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda)$. Mas aún para todo x, y en Ω tenemos que $\mathrm{dist}_\Omega(x, y) \leq d'(x, y)$.

Demostración. Calculemos la rapidez de γ usando el Lema 4.3.10:

$$\|\dot{\gamma}\|_\gamma = \inf_{D \in \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})} \|\Lambda' - \Lambda D\|_\Lambda \leq \|\Lambda'\|_\Lambda.$$

Esto implica que $\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda)$.

Tomemos ahora $\gamma = e^\Lambda$ un camino uniendo x e y en Ω. Como el camino γ y su levantamiento son arbitrarios tomando ínfimo tenemos que

$$\mathrm{dist}_\Omega(x, y) \leq \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda_0, \Lambda_1).$$

Tenemos que probar que para cada par k_1, k_2 automorfismos tenemos que $d_\Omega(x, y) \leq d_{G(\Omega)}(\mathrm{U}_{x^{1/2}}\, k_1, \mathrm{U}_{y^{1/2}}\, k_2)$. Entonces, tomando ínfimo llegaremos a la conclusión deseada. Si k_1 y k_2 están en componentes conexas distintas entonces $d_{G(\Omega)}(U_{x^{1/2}} k_1, U_{y^{1/2}} k_2) = \infty$, por lo que podemos asumir que están en la misma componente conexa. Tomemos un levantamiento específico de γ: tomemos k_t un camino suave uniendo k_1 y k_2 en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Consideremos el camino $\Lambda_t = \mathrm{U}_{\gamma_t^{1/2}}\, k_t$, el cual es un levantamiento suave de γ a $\mathsf{G}(\Omega)$, ya que $k_t(1) = 1$ para todo t. Como mostramos arriba,

$$\mathrm{dist}_\Omega(x, y) \leq \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\mathrm{U}_{x^{1/2}}\, k_1, \mathrm{U}_{y^{1/2}}\, k_2),$$

lo cual termina la prueba. □

Vamos a probar la otra desigualdad. Se puede encontrar una prueba de la misma en [27, Theorem 3.24]. Aquí daremos una demostración alternativa mostrando para cada curva en Ω un levantamiento isométrico de la misma a $\mathsf{G}(\Omega)$.

Definición 4.5.2 (Levantamiento isométrico y ε-isométrico)**.** Sea γ una curva suave a trozos en Ω. Decimos que una curva Λ suave a trozos en $\mathsf{G}(\Omega)$ es un *levantamiento isométrico* de γ si es un levantamiento de γ tal que $\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) = \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda)$. Decimos que es un *levantamiento ε-isométrico* si

$$\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) + \varepsilon.$$

Tenemos el siguiente teorema que muestra la existencia de levantamientos ε-isométricos. Su demostración se puede encontrar en [27, Theorem 3.25].

Teorema 4.5.3. *Sea G un grupo de Lie-Banach y M un espacio homogéneo de G, dotado de la distancia dist_G definida de forma análoga a dist_Ω. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva suave a trozos que comienza en $x = g \cdot p$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un levantamiento ε-isométrico $\Gamma_\varepsilon : [a,b] \to G$ con $\Gamma_\varepsilon(a) = g$.*

Tenemos entonces que toda curva γ en Ω tiene un levantamiento ε-isométrico para cada ε positivo, y esto es suficiente para probar la desigualdad inversa $d'(x,y) \leq \mathrm{dist}_\Omega(x,y)$ para nuestras distancias en Ω. Como dijimos antes, queremos encontrar un levantamiento isométrico, ya que tenemos una buena descomposición de los elementos de $\mathsf{G}(\Omega)$.

Recordemos los operadores V definidos como

$$V_{x,y}(z) = \mathrm{U}_{x,z}(y) = L_x L_z y + L_z L_x y - L_{xz} y = x(zy) + z(xy) - y(xz),$$

para x, y, z en V. Entonces

$$V_{x,y} = L_x L_y - L_y L_x + L_{xy} = [L_x, L_y] + L_{xy}.$$

Por lo tanto, por el Lema 4.2.3 tenemos que $\overline{V}_{x,y} = [L_x, L_y] - L_{xy} = -V_{y,x}$.

Las siguiente igualdades se pueden chequear fácilmente para álgebras especiales, y por el Teorema 2.2.5 valen para cualquier álgebra de Jordan:

$$\mathrm{U}_{x^{-1}} \mathrm{U}_{x,y}(z) = V_{x^{-1},y}(z). \tag{4.11}$$

$$V_{a,b} + V_{b,a} = L_{2ab} \qquad \text{y} \qquad V_{a,b} - V_{b,a} = [L_a, L_b]. \tag{4.12}$$

Observación 4.5.4. Dada γ una curva en Ω, para que un levantamiento Λ sea isométrico debe ser un levantamiento horizontal, es decir, un levantamiento tal que $\Lambda^{-1}\Lambda'$ pertenezca a $\mathbb{L}$ para todo t. Esto es porque como vimos antes, $\|L+D\| \geq \|L\|$ para toda derivación D y L en $\mathbb{L}$, por lo que un levantamiento horizontal siempre tendrá menor longitud.

Observación 4.5.5. Sea Λ un levantamiento de una curva $\gamma \subset \Omega$ a $\mathsf{G}(\Omega)$. Todo elemento g en $\mathsf{G}(\Omega)$ puede ser descompuesto como $g = \mathrm{U}_x\, k$ donde x es positivo y k es un automorfismo. Entonces, usando esta descomposición para Λ y notando que la raiz cuadrada positiva de un elemento es única, tenemos que $\Lambda = U_{\gamma^{1/2}} k_t$ donde k_t es un camino de automorfismos.

Lema 4.5.6. Sea γ una curva suave en Ω y sea $\Lambda = \mathrm{U}_{\gamma^{1/2}}\, k_t$ un levantamiento suave de γ donde k_t es un camino de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$. Entonces la descomposición horizontal-vertical de $\Lambda^{-1}\Lambda' = L_{H_\gamma} + D_\gamma$ en $\mathbb{L} \oplus \mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$ está dada por

$$H_\gamma(t) = 2k_t^{-1}(L_{\gamma_t^{-1/2}(\gamma_t^{1/2})'})k_t, \qquad D_\gamma(t) = k_t^{-1}[L_{\gamma_t^{-1/2}}, L_{(\gamma_t^{1/2})'}]k_t + k_t^{-1}k_t'.$$

Demostración. Tenemos por (4.11)

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\Lambda' &= k^{-1}\,\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\,(\mathrm{U}_{\gamma^{1/2}})'k + k^{-1}k' = 2k^{-1}\,\mathrm{U}_{\gamma^{-1/2}}\,\mathrm{U}_{\gamma^{1/2},(\gamma^{1/2})'}\;k + k^{-1}k' \\ &= k^{-1}2V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'}k + k^{-1}k'.\end{aligned}$$

Mas aún, si escribimos la descomposición $T = \frac{T+\overline{T}}{2} + \frac{T-\overline{T}}{2}$ para T en $\mathtt{str}(\mathsf{V})$ gracias al Lema 4.2.3, el primer sumando es una derivación y el segundo sumando es un operador L de multiplicación. Entonces, como para todo operador V tenemos que $\overline{V_{x,y}} = -V_{y,x}$ entonces se sigue que

$$\begin{aligned}2V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} &= \left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} + \overline{V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'}}\right) + \left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} - \overline{V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'}}\right) \\ &= \left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} - V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right) + \left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} + V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right).\end{aligned}$$

Notemos ahora que para todo automorfismo k tenemos que $\overline{kHk^{-1}} = k\overline{H}k^{-1}$. Entonces

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\Lambda' &= k^{-1}\,2\,V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'}k + k^{-1}k' \\ &= k^{-1}\left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} + V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right)k\, + \\ &\quad + k^{-1}\left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} - V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right)k + k^{-1}k',\end{aligned}$$

por lo que

$$k^{-1}\left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} + V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right)k$$

es la componente L de $\Lambda^{-1}\Lambda'$ y

$$k^{-1}\left(V_{\gamma^{-1/2},(\gamma^{1/2})'} - V_{(\gamma^{1/2})',\gamma^{-1/2}}\right)k + k^{-1}k'$$

es la componente de derivación de $\Lambda^{-1}\Lambda'$. La prueba termina aplicando las identidades de (4.12). $\square$

Proposición 4.5.7. Sea γ un camino suave a trozos en Ω uniendo x e y. Entonces existe un único levantamiento horizontal Λ en $\mathsf{G}(\Omega)$ con $\Lambda(0) = \mathrm{U}_{x^{1/2}}$. Este levantamiento está dado por $\Lambda = U_{\gamma^{1/2}} k_t$, donde k_t es un camino de automorfismos con punto inicial Id que satisface la ecuación diferencial

$$k_t' = [L_{(\gamma_t^{1/2})'}, L_{\gamma_t^{-1/2}}]k_t.$$

Mas aún, este levantamiento es isométrico.

Demostración. Notemos primero que la ecuación diferencial tiene solución dentro de $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$, pues el corchete de dos operadores L es una derivación. Entonces usando el Lema 4.5.6 es fácil chequear que $\Lambda = \mathrm{U}_{\gamma^{1/2}}\, k_t$ es horizontal. Por lo tanto los levantados horizontales existen y son únicos pues la solución a la ecuación diferencial con valor inicial $k_0 = Id$ es única, por el Teorema 1.1.4. Probemos entonces que este levantamiento es isométrico. Sea $\tilde{\Lambda}$ otro levantamiento de γ. Como dijimos antes, $\tilde{\Lambda} = \mathrm{U}_{\gamma^{1/2}}\, \tilde{k}_t$ para $\tilde{k}_t$ un camino suave de automorfismos. Como para todo x en V y derivación D tenemos que $\|L_x + D\| \geq \|L_x\|$, la norma de $\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}'$ es mayor que la norma de su componente L. Mas aún, como los automorfismos son isometrías,

$$\|\tilde{\Lambda}^{-1}\tilde{\Lambda}'\| \geq \|\tilde{k}^{-1} L_{H_\gamma} \tilde{k}\| = \|k^{-1} L_{H_\gamma} k\| = \|\Lambda^{-1}\Lambda'\|.$$

Ahora sea $\varepsilon > 0$ y sea $\tilde{\Lambda}$ un levantamiento ε-isométrico de γ, que existe por el Teorema 4.5.3. Entonces por el Lema 4.5.1 y la desigualdad anterior tenemos que

$$\mathrm{Length}_\Omega(\gamma) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\tilde{\Lambda}) \leq \mathrm{Length}_\Omega(\gamma) + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, se sigue que Λ es un levantamiento isométrico de γ. □

Teorema 4.5.8. *Para cada x, y en Ω tenemos que $d'(x,y) = \mathrm{dist}_\Omega(x,y)$.*

Demostración. La desigualdad $\mathrm{dist}_\Omega \leq d'$ fue obtenida previamente en el Lema 4.5.1, por lo que solo debemos probar que se cumple la otra desigualdad. Sea γ la geodésica de Ω uniendo x e y, y sea Λ el levantamiento isométrico de γ que comienza en $\mathrm{U}_{x^{1/2}}$. Tenemos que Λ termina en $\mathrm{U}_{y^{1/2}}\, k$ para algún automorfismo k. Entonces

$$\begin{aligned} d'(x,y) &= \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\mathrm{U}_{x^{1/2}}\, \mathtt{Aut}(\mathsf{V}), \mathrm{U}_{y^{1/2}}) \leq \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\mathrm{U}_{x^{1/2}}\, k^{-1}, \mathrm{U}_{y^{1/2}}) \\ &\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\mathrm{U}_{x^{1/2}}, \mathrm{U}_{y^{1/2}}\, k) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) = \mathrm{Length}_\Omega(\gamma) = \mathrm{dist}_\Omega(x,y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $d'(x,y) \leq \mathrm{dist}_\Omega(x,y)$. □

4.6. La geometría métrica de $\mathsf{G}(\Omega)$

Volvemos ahora al problema de encontrar caminos cortos para la métrica de Finsler introducida en $\mathsf{G}(\Omega)$, con la ayuda de las herramientas desarrolladas en la sección previa.

Teorema 4.6.1. *Sea $\alpha_t = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, e^{tv}$ una geodésica de Ω. Entonces el levantamiento isométrico Λ en $\mathsf{G}(\Omega)$ de γ es*

$$\Lambda_t = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, e^{tL_v} = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, \mathrm{U}_{e^{tv/2}}\,.$$

Demostración. Notemos que $\mathrm{U}_{p^{1/2}}\, e^{tL_v}(1) = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, \mathrm{U}_{e^{tv/2}}(1) = \mathrm{U}_{p^{1/2}}\, e^{tv} = \alpha(t)$, por lo que Λ_t es un levantamiento de α. Como $\Lambda_t^{-1}\Lambda_t' = L_v$ tenemos que Λ es horizontal y mas aún

$$\mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) = \int \|\Lambda^{-1}\Lambda'\| = \|L_v\| = \|v\| = \mathrm{Length}_{\Omega}(\alpha)$$

por lo que es un levantamiento isométrico. □

Podemos entonces caracterizar ciertos caminos minimizantes en $\mathsf{G}(\Omega)$ y calcular la distancia.

Corolario 4.6.2. La geodésica $\Lambda_t = \mathrm{U}_p\, e^{tL_v}$ es minimizante en $\mathsf{G}(\Omega)$, es decir,

$$\mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) = \|L_v\| = \|v\| = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda_0, \Lambda_1) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\mathrm{U}_p, \mathrm{U}_p\, e^{L_v}).$$

Demostración. Por el lema anterior, Λ es un levantamiento isométrico de la geodésica minimizante $\alpha(t) = \mathrm{U}_p\, e^{tv}$ en Ω. Entonces si Φ es un camino en $\mathsf{G}(\Omega)$ uniendo los mismos puntos que Λ, el camino $\phi = \Phi(1)$ es un camino en Ω uniendo los mismos extremos que α. Por lo tanto, por el Lema 4.5.1 y el hecho que α es minimizante en Ω tenemos que

$$\mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Lambda) = \mathrm{Length}_{\Omega}(\alpha) \leq \mathrm{Length}_{\Omega}(\phi) \leq \mathrm{Length}_{\mathsf{G}(\Omega)}(\Phi),$$

y por lo tanto Λ es minimizante en $\mathsf{G}(\Omega)$. □

Observación 4.6.3. Todo g en $\mathsf{G}(\Omega)$ se puede escribir de la forma $g = \mathrm{U}_x\, k$ con x positivo y k automorfismo. La métrica es invariante a izquierda, y es $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$-invariante a derecha. La métrica en Ω es la métrica cociente. Por lo tanto podemos concluir por el corolario previo que para todo g en $\mathsf{G}(\Omega)$ y z en V tenemos que

$$\mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(g, ge^{L_z}) = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(1, e^{L_z}) = \|z\| = \mathrm{dist}_{\mathsf{G}(\Omega)}(1, e^{L_z}\, \mathtt{Aut}(\mathsf{V})),$$

es decir, $t \mapsto e^{tL_z}$ es el camino óptimo entre Id en $\mathsf{G}(\Omega)$ y la fibra $e^{L_z}\, \mathtt{Aut}(\mathsf{V}) \subset \mathsf{G}(\Omega)$.

Observación 4.6.4. Sea D una derivación. Consideramos $\delta = -iD^{\mathbb{C}}$, donde $D^{\mathbb{C}}$ es la complexificación de D. Es fácil chequear que δ es una derivación de $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Mas aún, es una $*$-derivación, es decir, $\delta(w^*) = -(\delta(w))^*$ donde $*$ es la operación usual de conjugación en $\mathsf{V}^{\mathbb{C}}$. Por [49, Corollary 10] tenemos entonces que $\delta \in Her\, \mathsf{B}(V^{\mathbb{C}})$, es decir, $\varphi(\delta) \in \mathbb{R}$ para todo φ en $(\mathsf{B}(V^{\mathbb{C}}))^*$ tal que $\varphi(Id) = 1 = \|\varphi\|$.

Hemos notado y usado repetidamente que $\|L_x + D\| \geq \|L_x\|$, por lo que las derivaciones son en algún modo ortogonales a $\mathbb{L}$ (esta es la noción de ortogonalidad de Birkhoff). Ahora mostraremos que los operadores L son ortogonales a $\mathtt{Der}\,(\mathsf{V})$.

Proposición 4.6.5. Sea x en V y D una derivación. Entonces $\|L_x + D\| \geq \|D\|$.

Demostración. Sea φ en $\mathsf{B}(V^{\mathbb{C}})$ tal que $\varphi(Id) = 1 = \|\varphi\|$. Como $|z| \geq \pm\mathrm{Im}\, z$ para cualquier $z \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\|L_x + D\| \geq |\varphi(L_x + D)| \geq \pm\mathrm{Im}\,\varphi(L_x) \pm \mathrm{Im}\, i\varphi(\delta),$$

donde $\delta = -iD$ es como en la observación anterior. Ahora el operador L_x es hermitiano, por lo que $\varphi(L_x) \in \mathbb{R}$, y también lo es δ. Entonces $\|L_x + D\| \geq 0 \pm \varphi(\delta)$. Esto nos dice que el rango numérico de δ es el intervalo acotado por $\|L_x + D\|$, es decir

$$V(\delta) = \{\varphi(\delta) : \|\varphi\| = 1 = \varphi(Id)\} \subset [-\|L_x + D\|, \|L_x + D\|].$$

Sea $\mathrm{co}(\mathcal{C})$ la cápsula convexa del conjunto $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$. Como δ es hermitiano, tenemos que $\mathrm{co}(\sigma(\delta)) = V(\delta)$ y $\|\delta\| = r(\delta) = \mathrm{máx}\{\lambda : \lambda \in V(\delta)\} \leq \|L_x + D\|$, como vimos en la Observación 2.4.2 y la sección subsiguiente. Entonces $\|D\| = \|\delta\| \leq \|L_x + D\|$. $\square$

Observación 4.6.6. Sabemos por el Teorema 4.4.4 que los grupos a un parámetro $t \mapsto e^{tD}$ son óptimos con respecto a cualquier otro camino $\Lambda \subset \mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ uniendo los mismos puntos. Como las derivaciones también estan en buena posición con respecto a los operadores L cabe preguntarse si el grupo a un parámetro en $\mathtt{Aut}(\mathsf{V})$ es óptimo con respecto a otros caminos $\Lambda \subset \mathsf{G}(\Omega)$ uniendo los mismos puntos. Esta es una pregunta abierta hasta el momento, pero es nuestro objetivo seguir esta linea de investigación.

Bibliografía

[1] R. An, J. Hou. *Additivity of Jordan multiplicative maps on Jordan operator algebras.* Taiwanese J. Math. 10 (2006), no. 1, 45–64.

[2] E. Andruchow, G. Larotonda, L. Recht, A. Varela, *The left invariant metric in the general linear group.* J. Geom. Phys. 86 (2014), 241–257.

[3] E. Andruchow, G. Corach, M. Mbekhta. *On the geometry of generalized inverses.* Math. Nachr. 278 (2005), no. 7-8, 756–770.

[4] V. Arnol'd, *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications á l'hydrodynamique des fluides parfaits.* (French) Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 (1966), fasc. 1, 319–361.

[5] R. Bhatia, *Matrix analysis.* Graduate Texts in Mathematics, 169. Springer-Verlag, New York, 1997.

[6] D. Beltita, *Smooth homogeneous structures in operator theory.* Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 137. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[7] F. F. Bonsall, J. Duncan. *Complete normed algebras* (Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973.

[8] Bonsall, F. F.; Duncan, J. *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* London Mathematical Society Lecture Note Series, 2 Cambridge University Press, London-New York 1971.

[9] Bourbaki, Nicolas. *Lie groups and Lie algebras.* Chapters 1–3. Translated from the French. Reprint of the 1989 English translation. Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[10] Chu, Cho-Ho. *Infinite dimensional Jordan algebras and symmetric cones.* J. Algebra 491 (2017), 357–371.

[11] Chu, Cho-Ho. *Siegel domains over Finsler symmetric cones.* J. Reine Angew. Math. 778 (2021), 145–169.

[12] Chu, Cho-Ho. *Jordan structures in geometry and analysis.* Cambridge Tracts in Mathematics, 190. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[13] C. Conde, *Differential geometry for nuclear positive operators.* Integral Equations Operator Theory 57 (2007), no. 4, 451–471.

[14] G. Corach, H. Porta, L. Recht, *The geometry of the space of selfadjoint invertible elements in a C^*-algebra.* Integral Equations Operator Theory 16 (1993).

[15] G. Corach, H. Porta, L. Recht, *Geodesics and operator means in the space of positive operators.* Internat. J. Math. 4 (1993), no. 2, 193–202.

[16] G. Corach, A. Maestripieri, D. Stojanoff, *Orbits of positive operators from a differentiable viewpoint.* Positivity 8 (2004), no. 1, 31–48.

[17] Faraut, Jacques; Korányi, Adam. *Analysis on symmetric cones.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

[18] Jacobson, Nathan. *Structure and representations of Jordan algebras.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIX American Mathematical Society, Providence, R.I. 1968.

[19] W. Kaup, H. Upmeier *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z. 157 (1977), 179–200.

[20] Koecher, Max. *The Minnesota notes on Jordan algebras and their applications.* Edited, annotated and with a preface by Aloys Krieg and Sebastian Walcher. Lecture Notes in Mathematics, 1710. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[21] Lang, Serge. *Differential and Riemannian manifolds.* Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 160. Springer-Verlag, New York, 1995.

[22] Lang, Serge. *Fundamentals of differential geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 191. Springer-Verlag, New York, 1999.

[23] G. Larotonda, J. Luna, *On the structure group of an infinite dimensional JB-algebra*, arXiv preprint (2022).

[24] G. Larotonda, J. Luna. *Connections and Finsler geometry of the structure group of a JB-algebra*, arXiv preprint (2022).

[25] G. Larotonda, Estructuras Geométricas para las Variedades de Banach. Universidad Nacional de General Sarmiento, colección “Ciencia, Innovación y Tecnología”, 2012.

[26] Larotonda, Gabriel. *Norm inequalities in operator ideals.* J. Funct. Anal. 255 (2008), no. 11, 3208–3228.

[27] G. Larotonda, *Metric geometry of infinite-dimensional Lie groups and their homogeneous spaces.* Forum Math. 31 (2019), no. 6, 1567–1605.

[28] G. Larotonda, *Nonpositive curvature: a geometrical approach to Hilbert-Schmidt operators.* Differential Geom. Appl. 25 (2007), no. 6, 679–700.

[29] J. Lawson, Y. Lim, *Metric convexity of symmetric cones.* Osaka J. Math. 44 (2007), no. 4, 795-816.

[30] B. Lemmens, M. Roelands, *Unique geodesics for Thompson's metric.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 65 (2015), no. 1, 315–348.

[31] B. Lemmens, M Roelands, M. Wortel, *Hilbert and Thompson isometries on cones in JB-algebras.* Math. Z. 292 (2019), no. 3-4, 1511–1547.

[32] Loos, Ottmar. *Symmetric spaces. I: General theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969.

[33] Martín, Miguel. *On different definitions of numerical range.* J. Math. Anal. Appl. 433 (2016), no. 2, 877–886.

[34] McCrimmon, Kevin. *A taste of Jordan algebras.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.

[35] McCrimmon, Kevin. *Macdonald's theorem with inverses.* Pacific J. Math. 21 (1967), 315–325.

[36] Neeb, Karl-Hermann. *A Cartan-Hadamard theorem for Banach-Finsler manifolds.* Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part II (Haifa, 2000). Geom. Dedicata 95 (2002), 115–156.

[37] R. Nussbaum, *Finsler structures for the part metric and Hilbert's projective metric and applications to ordinary diffeential equations*, Diff. Integ. Eq. 7 (1994), 1649–1707.

[38] S. Ruotsalainen. *On a Weyl-von Neumann type theorem for antilinear self-adjoint operators.* Studia Math. 213 (2012), no. 3, 191–205.

[39] Satake, Ichirô. *Algebraic structures of symmetric domains.* Kanô Memorial Lectures, 4. Iwanami Shoten, Tokyo; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[40] Schaefer, H. H.; Wolff, M. P. *Topological vector spaces.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 3. Springer-Verlag, New York, 1999.

[41] M. Schottenloher. *A mathematical introduction to conformal field theory.* Second edition. Lecture Notes in Physics, 759. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[42] P. Semrl. *Additive derivations of some operator algebras.* Illinois J. Math. 35 (1991), no. 2, 234–240.

[43] Hanche-Olsen, Harald; Stormer, Erling. *Jordan operator algebras.* Monographs and Studies in Mathematics, 21. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[44] H. Upmeier, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras*, North Holland, Amsterdam, 1985.

[45] Vinberg, È. B. *The theory of homogeneous convex cones.* (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obšč. 12 1963 303–358.

[46] Wright, J. D. Maitland. *Jordan C^*-algebras.* Michigan Math. J. 24 (1977), no. 3, 291–302.

[47] Wright, J. D. Maitland; Youngson, M. A. *On isometries of Jordan algebras.* J. London Math. Soc. (2) 17 (1978), no. 2, 339–344.

[48] Youngson, M. A. *A Vidav theorem for Banach Jordan algebras.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 84 (1978), no. 2, 263–272.

[49] M. A. Youngson. *Hermitian operators on Banach Jordan algebras.* Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 22 (1979), no. 2, 169–180.