UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Deformaciones de foliaciones de tipo pullback

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Pablo Gabriel Perrella

Director: Fernando Cukierman
Consejero de estudios: Marco Farinati

Buenos Aires, 30 de julio de 2024.

Deformaciones de foliaciones de tipo pullback

Resumen:

Esta tesis está dedicada al estudio de la estabilidad de foliaciones de tipo pullback en contextos globales y locales. Siendo estas foliaciones aquellas cuyo haz tangente contiene al tangente relativo de un morfismo, el problema puede ser traducido en términos de ciertas propiedades locales del esquema de filtraciones de haces Drap_E de Grothendieck. Con estas herramientas a disposición veremos que pequeñas deformaciones de una foliación pullback vía un morfismo cuyas fibras no tengan 1-formas globales provienen de deformar el morfismo y la foliación sobre la base. Usando estos métodos podremos atacar el problema de estabilidad de foliaciones con hojas algebraicas. En lo que respecta al escenario local probaremos un análogo foliado de un teorema de Schlessinger sobre deformaciones de singularidades cónicas [Sch73]. Combinando estos dos resultados podremos trasladar lo hecho para morfismos al contexto de foliaciones pullback por mapas racionales genéricos $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Finalizaremos estudiando la estructura del lugar singular de esta última familia de foliaciones. Mediante el uso de la Teoría de Intersecciones de Fulton-MacPherson se exhibirá una fórmula para contar la cantidad de singularidades aisladas de este tipo de foliaciones.

Palabras clave: Foliaciones pullback, Deformaciones, Hojas algebraicas

Deformations of pullback foliations

Abstract:

This thesis is dedicated to the study of the stability of pullback foliations in both global and local settings. These foliations are those whose tangent sheaf contains the relative tangent of a morphism, and the problem can be translated in terms of certain local properties of the Grothendieck's scheme Drap_E of filtrations of sheaves. With these tools at our disposal, we will see that small deformations of a pullback foliation via a morphism whose fibers do not have global 1-forms arise from deforming the morphism and the foliation over the base. Using these methods, we will be able to tackle the problem of stability of foliations with algebraic leaves. Regarding the local scenario, we will prove a foliated analogue of a theorem by Schlessinger on deformations of conical singularities [Sch73]. By combining these two results, we will be able to extend what has been done for morphisms to the context of pullback foliations by generic rational maps $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Finally, we will study the structure of the singular locus of this latter family of foliations. Using the Fulton-MacPherson Intersection Theory, we will exhibit a formula to count the number of isolated singularities of this type of foliations.

Keywords: Pullback Foliations, Deformations, Algebraic leaves

Índice general

Introducción

Esta tesis está abocada al estudio de las foliaciones singulares sobre variedades. Localmente hablando, una foliación está representada por un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = F_{ij}(f_1, \ldots, f_n) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \;\; 1 \leqslant j \leqslant n-q.$$

Estos sistemas cumplen un rol preponderante dentro de diversas ramas de las ciencias exactas y naturales. Uno de los ejemplos característicos proviene de la mecánica clásica. El pasaje del enfoque lagrangiano al formalismo hamiltoniano conlleva al estudio de las renombradas ecuaciones de Hamilton

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Incluso en los problemas más elementales de la física, encontrar de manera paramétrica las soluciones $(p_i(t), q_i(t))$ que determinan la dinámica del movimiento resulta prácticamente poco viable. En su lugar se procura determinar dicha curva por medio de *integrales primeras* del sistema, también conocidas como *leyes de conservación* o *cantidades conservadas*. Estas son aquellas funciones que no varían a lo largo de las líneas de flujo del movimiento.

A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones de Hamilton, un sistema general de ecuaciones de primer orden puede no tener soluciones locales. La existencia de subvariedades integrales alrededor de un punto no singular equivale a las condiciones de Frobenius

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial t_k} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial t_j}$$

que provienen de la igualdad entre las derivadas cruzadas de las funciones f_i. Si consideramos los campos

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} F_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y el submódulo $T_{\mathcal{F}} = \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ de $T_{\mathbb{C}^n}$, entonces las condiciones de Frobenius se pueden traducir en términos del corchete de Lie:

$$[T_{\mathcal{F}}, T_{\mathcal{F}}] \subseteq T_{\mathcal{F}}.$$

De esta manera, globalizando esta clase de sistemas integrables de primer orden, abordamos al concepto de foliación.

Definición 0.0.1. Una *foliación (singular)* $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre una variedad normal X consiste en una sucesión exacta de haces coherentes

$$0 \to T_{\mathcal{F}} \to T_X \to N_{\mathcal{F}} \to 0$$

tal que $N_{\mathcal{F}}$ es libre de torsión de rango q y $[T_{\mathcal{F}}, T_{\mathcal{F}}] \subseteq T_{\mathcal{F}}$.

Cuando el espacio ambiente X es una variedad propia, las integrales primeras escasean por el simple hecho de que las funciones globales son únicamente las constantes. Sin embargo es posible encontrar integrales primeras racionales de una foliación dada. Jouanolou probó en [Jou06] que si una foliación de codimensión 1 tiene suficientes hojas algebraicas entonces tiene que tener una integral primera racional no constante.

Una de las cualidades distintivas de este tipo de foliaciones es su propiedad de estabilidad por deformaciones. Esto es, pequeñas perturbaciones de foliaciones con una integral primera racional siguen teniendo una integral primera. Esto fue observado por Gomez-Mont y Lins Neto en su artículo [GMLN91]. Muchas contribuciones siguieron esta línea de investigación. Foliaciones cuyas hojas son las fibras de un mapa racional dominante genérico $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ son estables también. Lo mismo ocurre con ciertas foliaciones suaves transversalmente holomorfas determinadas por un morfismo $\pi : X \to Y$ cuyas fibras tienen primer grupo de cohomología con coeficientes reales nulos [GHS83]. En cierto sentido estas foliaciones son aquellas que poseen suficientes integrales primeras.

La familia de foliaciones pullback viene a generalizar a las anteriores. Las mismas se construyen a partir de un mapa racional $\pi : X \dashrightarrow Y$ y una foliación $\mathcal{G}$ sobre Y. Las hojas de $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ son las preimágenes por π de las hojas de $\mathcal{G}$. Notar que si $\mathcal{G}$ es la foliación por puntos entonces recuperamos aquellas del párrafo previo. Se conocen muchas familias estables de foliaciones pullback [CNE01], [GAMQV22], [GAMV23]. El objetivo de esta tesis es proveer de más instancias de este tipo de fenómenos.

Pasamos ahora a describir el contenido de los capítulos de la tesis.

En el Capítulo 1 presentamos los conceptos preliminares sobre foliaciones y Teoría de Deformaciones que utilizaremos posteriormente. A partir de las distintas formas de describir a una foliación (ya sea en términos de subhaces del haz tangente T_X o del haz de 1-formas reflexivas $\Omega_X^{[1]}$) conlleva a dos nociones no equivalentes de familias playas. Exploraremos las similitudes y diferencias de ambos enfoques. Incluiremos una sección sobre Teoría de Obstrucciones, la cual será necesaria en el siguiente capítulo cuando hablemos sobre deformaciones de filtraciones de haces.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de la estabilidad de foliaciones pullback vía morfismos, siendo el Teorema 2.3.1 el resultado central del mismo. Las ideas principales de esta sección giran en torno a la caracterización del Lema 1.1.1 de las foliaciones pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ por un morfismo $\pi : X \to Y$. Estas son precisamente aquellas cuyo haz tangente $T_{\mathcal{F}}$ contienen al tangente relativo $T_{X/Y}$. De esta manera obtenemos una filtración

$$T_{X/Y} \subseteq T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X,$$

que a su vez puede ser vista como un punto p del espacio de móduli Drap_{T_X} de filtraciones de haces de T_X de longitud 3. La asignación que a cada filtración $F_1 \subseteq F_2 \subseteq T_X$ le corresponde la inclusión $F_2 \subseteq T_X$ determina un morfismo

$$\mathrm{Drap}_{T_X} \to \mathrm{Quot}_{T_X}.$$

Siguiendo esta línea de pensamiento es natural preguntarse cuándo este morfismo es suave en $p \in \mathrm{Drap}_{T_X}$. En caso de serlo, una pequeña perturbación $\mathcal{F}'$ de la foliación pullback $\mathcal{F}$ admite también una filtración de la forma

$$F_1 \subseteq T_{\mathcal{F}'} \subseteq T_X.$$

En condiciones favorables, pequeñas deformaciones del subhaz $T_{X/Y} \subseteq T_X$ como por ejemplo la inclusión $F_1 \subseteq T_X$ seguirán siendo el tangente relativo a un morfismo y por ende $\mathcal{F}'$ tendrá que ser una foliación pullback también. Esta misma idea es aplicable al problema de estabilidad de foliaciones que tengan una hoja algebraica. Si $Z \subseteq X$ es una hoja algebraica de $\mathcal{F}$ sabemos que

$$T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X(-\log Z) \subseteq T_X,$$

con $T_X(-\log Z)$ el haz de campos logarítmicos de Z. Esto nos permite volver a emplear las técnicas sobre deformaciones de filtraciones en este nuevo contexto.

El objetivo principal del Capítulo 3 consiste en probar un análogo foliado del Teorema de Schlessinger sobre deformaciones de singularidades cónicas, es decir, aquellas que se construyen como el germen en el origen del cono $C(X) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ de una subvariedad proyectiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$ [Sch73]. En este nuevo contexto, el cono de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$ será el germen en el origen del pullback $\pi^*\mathcal{F}$ por la proyección $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Concretamente probaremos que si $\mathcal{F}$ es de grado k, no tiene factores integrantes polinomiales y su espacio de unfoldings de primer orden verifica

$$\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}}(\ell) = 0 \quad \forall \ell \neq k,$$

entonces deformaciones del cono $(\pi^*\mathcal{F}, 0)$ se obtienen como el cono de una deformación de $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^n$ (Teorema 3.3.1). Cabe destacar que las hipótesis sobre los unfoldings de primer orden de $\mathcal{F}$ se corresponden con las condiciones cohomológicas

$$H^1(T_X(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \neq 0$$

del resultado de Schlessinger. Para obtener un enunciado más formal necesitaremos el concepto de deformaciones versales de gérmenes de foliaciones. También haremos uso de la Teoría de unfoldings desarrollada por T. Suwa en los artículos [Suw85] y [Suw92]. Concluiremos exhibiendo ejemplos de familias de foliaciones de tipo split que verifican las condiciones del teorema.

El Capítulo 4 extiende parcialmente los resultados de estabilidad del Capítulo 2 al caso de foliaciones pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ vía mapas racionales genéricos $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. Bajo hipótesis apropiadas sobre la variedad ambiente y la foliación de partida, demostramos que las deformaciones de una foliación pullback genérica pueden obtenerse como pullbacks de deformaciones de la foliación original.

Finalmente, en el Capítulo 5 investigamos la estructura del lugar singular del tipo de foliaciones pullback estudiada en el Capítulo 4. Definiremos el esquema de tangencias $T(\pi, \mathcal{G})$ entre un mapa racional $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ y una foliación $\mathcal{G}$ de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$. Veremos que el lugar singular de $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ se descompone como la unión disjunta entre aquellas singularidades $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}\,\mathcal{G})$ que provienen de la foliación sobre la base y el esquema de tangencias $T(\pi, \mathcal{G})$ mencionado. Probaremos que genéricamente este último es reducido y que consiste en a lo sumo finitas singularidades de tipo Morse (Teorema 5.1.1). Por último utilizaremos técnicas de la Teoría de Intersección desarrollada por Fulton y MacPherson para dar una fórmula para cantidad de singularidades tangenciales de $\mathcal{F}$ (Proposición 5.2.1).

1. Preliminares

1.1. Sobre foliaciones

Comenzaremos este capítulo presentando a los protagonistas de este trabajo...

1.1.1. Foliaciones regulares

Sea X una variedad compleja suave. Una *distribución regular* $\mathcal{D}$ de codimensión q sobre X consiste en una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales

$$0 \to T_{\mathcal{D}} \to T_X \to N_{\mathcal{D}} \to 0$$

de manera que $N_{\mathcal{D}}$ tenga rango igual a q. Uno de los ejemplos prototípicos de distribuciones proviene de considerar una submersión $\pi : X \to Y$ entre variedades complejas suaves y la sucesión exacta corta

$$0 \to T_{X/Y} \to T_X \to \pi^* T_Y \to 0.$$

Diremos que una distribución $\mathcal{D}$ sobre X es una *foliación (regular)* si alrededor de todo punto $p \in X$ existe una submersión $\pi : U \to V \subseteq \mathbb{C}^q$ tal que la restricción de la sucesión exacta que define a $\mathcal{D}$ en el abierto U es aquella determinada por π.

Alternativa y equivalentemente uno puede definir una distribución $\mathcal{D}$ de codimensión q sobre X como una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales

$$0 \to I_{\mathcal{D}} \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{\mathcal{D}} \to 0$$

de manera que el rango de $I_{\mathcal{D}}$ es igual a q. Para pasar de una descripción a la otra basta dualizar la sucesión correspondiente.

Teorema 1.1.1 (Frobenius). *Para cada distribución regular $\mathcal{D}$ de codimensión q sobre X son equivalentes:*

(a) *$\mathcal{D}$ es una foliación,*

(b) *$T_{\mathcal{D}}$ es cerrado por el corchete de Lie, es decir que $[T_{\mathcal{D}}, T_{\mathcal{D}}] \subseteq T_{\mathcal{D}}$,*

(c) *$I_{\mathcal{D}}$ está generado localmente por 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_q$ tales que*

$$d\omega_k \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant q).$$

Nos referimos al apéndice del libro de Camacho y Lins Neto para una demostración de este Teorema [CN13]. Acordemente con las definiciones dadas, de ahora en adelante optaremos por denotar a las foliaciones con la letra $\mathcal{F}$, en lugar de $\mathcal{D}$ como veníamos haciendo. Una manera natural en la que uno puede visualizar una foliación $\mathcal{F}$ es mediante su descomposición en *hojas*, es decir aquellas subvariedades complejas

$L \subseteq X$ que cumplen que $T_{\mathcal{F}}|_L = T_L$ y que son maximales con respecto a esta propiedad. Por ejemplo, las hojas de la foliación determinada por una submersión $\pi : X \to Y$ son las componentes conexas de las fibras de este morfismo. Como las submersiones localmente son equivalentes a una proyección lineal, las hojas de una foliación en abiertos suficientemente pequeños se agrupan como subvariedades lineales paralelas de codimensión q.

Como el título lo indica, la clase de foliaciones protagonistas de este trabajo son aquellas de tipo *pullback*, las cuales pasamos a definir a continuación en el contexto regular. A partir de un morfismo $\pi : X \to Y$ entre variedades complejas suaves y una foliación regular $\mathcal{G}$ sobre Y queremos definir una nueva foliación $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ cuyas hojas sean (las componentes conexas de) las preimágenes $\pi^{-1}L$ de las hojas L de $\mathcal{G}$. Para que estos conjuntos efectivamente sean suaves y de la codimensión esperada será necesario pedir que π y L sean transversales, es decir que $T_Y|_{\pi(p)} = \mathrm{Im}(d_p\pi) + T_L|_{\pi(p)}$ siempre que $p \in \pi^{-1}L$. Pero como $T_{\mathcal{G}}|_{\pi(p)} = T_L|_{\pi(p)}$, esto se traduce a que

$$T_Y|_{\pi(p)} = \mathrm{Im}(d_p\pi) + T_{\mathcal{G}}|_{\pi(p)}$$

para todo punto $p \in X$. Si esto ocurre diremos que π y $\mathcal{G}$ son *transversales*. Bajo estas condiciones definimos el *pullback* $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ como aquella foliación regular cuyo subfibrado tangente $T_{\mathcal{F}}$ es el núcleo de la composición

$$T_X \to \pi^*T_Y \to \pi^*N_{\mathcal{G}}.$$

Notar que la transversalidad entre π y $\mathcal{G}$ equivale a que esta composición sea un epimorfismo, y por ende el fibrado normal del pullback es igual a $N_{\mathcal{F}} = \pi^*N_{\mathcal{G}}$. Deducimos de esta última identidad que la codimensión de $\mathcal{G}$ y su pullback $\mathcal{F}$ son iguales.

1.1.2. Foliaciones singulares

Como uno puedo prever en muchos contextos geométricos, nos interesaremos en trabajar sobre variedades compactas. Esta hipótesis entra en conflicto con la definición de foliación regular dado que en general no es esperable que exista una abundancia de estos objetos sobre variedades compactas.

Para entender un poco mejor este fenómenos pensemos por un momento que $\mathcal{F}$ es una foliación tal que $T_{\mathcal{F}}$ es trivial de rango uno, es decir, la inclusión $\mathcal{O}_X = T_{\mathcal{F}} \to T_X$ equivale a un campo tangente nunca nulo (observar que la condición de integrabilidad $[T_{\mathcal{F}}, T_{\mathcal{F}}] \subseteq T_{\mathcal{F}}$ es vacua). La existencia de tal campo impone restricciones topológicas sobre la variedad X, en este caso que la característica de Euler de la misma sea nula (por el Teorema de Poincaré-Hopf). Queda descartada la existencia de foliaciones de este tipo sobre variedades como el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. Más radicalmente se puede probar que sobre $\mathbb{P}^n$ no existe ninguna foliación regular (salvo la foliación por puntos y aquella cuya única hoja es todo el espacio).

Este es uno de los motivos por los cuales es importante flexibilizar la noción de foliación a una que admita *singularidades*: puntos anómalos que surgen de fenómenos como por ejemplo la aparición de "hojas singulares" o donde hojas distintas se "estrellan" entre sí. Será conveniente permitir que X también admita singularidades, aunque no demasiado salvajes.

Definición 1.1.1. Una *foliación (singular)* $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre una variedad normal X consiste en una sucesión exacta de haces coherentes

$$0 \to T_{\mathcal{F}} \to T_X \to N_{\mathcal{F}} \to 0$$

tal que $N_{\mathcal{F}}$ es libre de torsión de rango q y $[T_{\mathcal{F}}, T_{\mathcal{F}}] \subseteq T_{\mathcal{F}}$. Apodaremos a $T_{\mathcal{F}}$ y $N_{\mathcal{F}}$ respectivamente como los *haces tangente y normal* de la foliación $\mathcal{F}$.

Ejemplo 1. Un campo vectorial $v \in \Gamma(T_X)$ cuyo conjunto de ceros tiene codimensión mayor o igual que dos induce una foliación vía la inclusión $T_{\mathcal{F}} = \mathscr{O}_X \cdot v \subseteq T_X$.

Al igual que en el caso regular, una foliación singular se puede describir también en términos de formas diferenciales. A la hora de trabajar con una variedad singular X necesitaremos reemplazar a los haces de p-formas diferenciales de Kähler $\Omega_X^p = \bigwedge^p \Omega_X^1$ por los, mejores comportados en contextos foliados, haces de p-formas *reflexivas* $\Omega_X^{[p]} := (\Omega_X^p)^{\vee\vee}$. El dato de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q equivale a tener una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \to I_{\mathcal{F}} \to \Omega_X^{[1]} \to \Omega_{\mathcal{F}}^{[1]} \to 0$$

con $\Omega_{\mathcal{F}}^{[1]}$ libre de torsión y $I_{\mathcal{F}}$ un haz de rango q que en la parte suave de X verifique la condición (c) del Teorema 1.1.1. Precisamente, si dualizamos la sucesión exacta que determina a $\mathcal{F}$ obtenemos una sucesión exacta a izquierda

$$0 \to N_{\mathcal{F}}^{\vee} \to \Omega_X^{[1]} \to T_{\mathcal{F}}^{\vee},$$

y por lo tanto los haces prometidos resultan ser $I_{\mathcal{F}} := N_{\mathcal{F}}^{\vee}$ y $\Omega_{\mathcal{F}}^{[1]} := \operatorname{Im}\left(\Omega_X^{[1]} \to T_{\mathcal{F}}^{\vee}\right)$. Estas dos formas de representar a $\mathcal{F}$ son equivalentes dado que si dualizamos la sucesión exacta de formas diferenciales obtenemos la sucesión original de campos de vectores de la definición de foliación.

Más sintéticamente podemos representar a una foliación de codimensión q mediante una única *q-forma reflexiva twisteada*. Dado L un haz reflexivo de rango uno sobre X, definimos el haz $\Omega_X^{[q]}(L) := (\Omega_X^q \otimes L)^{\vee\vee}$. Toda foliación $\mathcal{F}$ de codimensión q sobre X se corresponde con una sección

$$\omega \in \Gamma\left(\Omega_X^{[q]}(L)\right)$$

que satisface las siguientes propiedades:

(i) $\operatorname{Sing}(\omega)$ tiene codimensión mayor o igual que dos,

(ii) en un entorno de un punto general ω se descompone como producto wedge de 1-formas locales que verifican las *condiciones de integrabilidad*

$$\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q, \qquad d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant q).$$

Partiendo de una foliación $\mathcal{F}$ como antes, el morfismo de haces $T_X \to N_{\mathcal{F}}$ induce una aplicación $(\wedge^q T_X)^{\vee\vee} \to (\wedge^q N_{\mathcal{F}})^{\vee\vee} = \det N_{\mathcal{F}}$. Fijando $L := \det N_{\mathcal{F}}$, la q-forma twisteada ω asociada a $\mathcal{F}$ se construye dualizando este último mapa. Recíprocamente, el haz tangente $T_{\mathcal{F}}$ se recupera como el núcleo de la contracción $T_X \to \Omega_X^{[q-1]}(L)$ por la forma ω.

Definición 1.1.2. El *lugar singular* de $\mathcal{F}$ es el esquema $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}) = \mathrm{Sing}(\omega)$, es decir, el esquema de ceros de la 1-forma twisteada ω que define a $\mathcal{F}$.

Ejemplo 2. Supongamos que la variedad ambiente es el producto $X = F \times Y$ de una variedad normal F y una variedad suave Y, y $\mathcal{F}$ es foliación sobre X dada por las fibras de la proyección $\pi : F \times Y \to Y$. Dado un sistema de coordenadas analíticas $y_1, \dots, y_q$ en algún abierto de Y, localmente la q-forma asociada a $\mathcal{F}$ es $\omega = \pi^*(dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_q)$ y por ende $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ es vacío.

Esto muestra que en general $\mathrm{Sing}(X) \not\subseteq \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. En un sentido impreciso, los puntos singulares de $\mathcal{F}$ son aquellos alrededor de las cuales la foliación está lejos de ser una fibración (comparar con [BM16, Lemma 1.2.1]). La restricción de $\mathcal{F}$ al abierto $U = X \setminus \big(\mathrm{Sing}(X) \cup \mathrm{Sing}(\mathcal{F})\big)$ es una foliación regular como en la sección previa, y por lo tanto U admite una descomposición en hojas.

Ejemplo 3. Denotemos por $\mathbb{P}_w$ al espacio proyectivo con pesos asociado a la $(n+1)$-tupla de enteros no negativos $w = (w_0, \dots, w_n)$. Tensorizando la sucesión exacta corta de Euler

$$0 \to \Omega^{[1]}_{\mathbb{P}_w} \to \bigoplus_{i=0}^{n} \mathscr{O}_{\mathbb{P}_w}(-w_i) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}_w} \to 0$$

por el haz $\mathscr{O}_{\mathbb{P}_w}(d)$ y luego dualizando dos veces podemos concluir que las secciones globales $\omega \in \Gamma\big(\Omega^{[1]}_{\mathbb{P}_w}(d)\big)$ se corresponden con expresiones de la forma

$$\omega = a_0 dx_0 + \cdots + a_n dx_n$$

con a_i polinomios quasihomogéneos de grado $d - w_i$ que verifican la condición de descenso

$$w_0 a_0 x_0 + \cdots + w_n a_n x_n = 0.$$

Si además pedimos que ω no se anule en codimensión uno y que verifique la condición de integrabilidad $d\omega \wedge \omega = 0$ entonces la misma determina una foliación de codimensión uno sobre $\mathbb{P}_w$. Diremos que d es el *grado* de la foliación inducida por ω.[1]

Ejemplo 4. Consideremos secciones $f_i \in \Gamma(\mathscr{O}_{\mathbb{P}_w}(d_i))$ con $1 \leqslant i \leqslant m$ de manera que

$$\lambda_1 d_1 + \cdots + \lambda_m d_m = 0$$

para ciertos números complejos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Entonces

$$\omega = f_1 \cdots f_m \left(\lambda_1 \frac{df_1}{f_1} + \cdots + \lambda_m \frac{df_m}{f_m} \right)$$

es una 1-forma twisteada sobre $\mathbb{P}_w$. Como $\omega / f_1 \cdots f_m$ es una 1-forma racional cerrada, ω verifica la condición de integrabilidad y por ende induce una foliación de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}_w$. A este tipo de foliaciones se las conoce como *logarítmicas*.

Ejemplo 5. Supongamos que G es un grupo de Lie complejo actuando fielmente sobre X. Si $\mathfrak{g} \subseteq \Gamma(T_X)$ es el álgebra de Lie de G, entonces obtenemos una foliación $\mathcal{F}$ cuyo haz tangente es la saturación de

$$\mathrm{Im}\left(\mathfrak{g} \otimes \mathscr{O}_X \to T_X\right).$$

Las hojas de $\mathcal{F}$ son las órbitas maximales de dicha acción.

[1] La definición de grado puede variar en la literatura. Comparar por ejemplo con [CN96, pág. 578].

1.1.3. Foliaciones pullback

Recordemos que para un morfismo entre variedades suaves $\pi : X \to Y$ transversal a una foliación regular $\mathcal{G}$ construimos el pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ vía la composición $T_X \to \pi^* T_Y \to \pi^* N_{\mathcal{G}}$. Cabe destacar que el primer morfismo proviene de dualizar la sucesión exacta cotangente

$$\pi^*\Omega^1_Y \to \Omega^1_X \to \Omega^1_{X/Y} \to 0$$

e identificar $\pi^* T_Y \simeq (\pi^*\Omega^1_Y)^\vee$ dado que T_Y es localmente libre. Sin embargo esta última igualdad deja de ser cierta si Y es singular. Si las variedades involucradas son normales tenemos en reemplazo la sucesión exacta

$$0 \to T_{X/Y} \to T_X \to \pi^{[*]} T_Y$$

donde $\pi^{[*]}(-) = (\pi^*(-))^{\vee\vee}$ es el *pullback reflexivo* de haces.

Definición 1.1.3. Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo entre variedades normales y $\mathcal{G}$ una foliación sobre Y. Se define el *pullback* $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ como aquella foliación sobre X cuyo subhaz tangente $T_{\mathcal{F}}$ es el núcleo de la composición

$$T_X \to \pi^{[*]} T_Y \to \pi^{[*]} N_{\mathcal{G}}.$$

Más generalmente, si $\pi : X \dashrightarrow Y$ es un mapa racional definido salvo codimensión dos en un abierto $U \subseteq X$, podemos definir el pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ como la única foliación que restringida a U coincide con $(\pi|_U)^*\mathcal{G}$.

Efectivamente el normal $N_{\mathcal{F}}$ es libre de torsión, pues es la imagen de la composición previa y $\pi^{[*]} N_{\mathcal{G}}$ es libre de torsión por ser reflexivo. Notar también que si $\mathcal{G}$ tiene codimensión q y es genéricamente transversal al mapa racional $\pi : X \dashrightarrow Y$ entonces el pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ también tiene codimensión q.

Ejemplo 6. Sea $X = \mathrm{Bl}_0\,\mathbb{A}^{n+1}$ el blow-up del espacio afín en el origen junto con la proyección $\pi : X \to \mathbb{A}^{n+1}$. En uno de los abiertos afines usuales $U_1 \subseteq X$ existen coordenadas $(x, y) = (x, y_1, \dots, y_n)$ de manera que $\pi(x, y) = (x, xy_1, \dots, xy_n)$. Sea $\mathcal{G}$ una foliación de codimensión 1 sobre $\mathbb{A}^n$ definida por una 1-forma $\omega = a_0 dx_0 + \cdots + a_n dx_n$ con coeficientes homogéneos de grado $k - 1$. En términos de las coordenadas de U_1 el pullback $\pi^*\omega$ de escribe como

$$\begin{aligned}
\pi^*\omega &= a_0(x, xy)dx + \sum_{i=1}^{n} a_i(x, xy)d(xy_i) \\
&= x^{k-1}\left[a_0(1, y)dx + \sum_{i=1}^{n} a_i(1, y)y_i dx + x\sum_{i=1}^{n} a_i(1, y)dy_i\right] \\
&= x^{k-1}(i_R\omega)_{(1,y)}dx + x^k \sum_{i=1}^{n} a_i(1, y)dy_i.
\end{aligned}$$

con $R = x_0\partial_0 + \cdots + x_n\partial_n$ es campo radial de Euler. Dicho esto, el orden de anulación de $\pi^*\omega$ en el divisor excepcional E es k, si $i_R\omega = 0$; y $k - 1$, en caso contrario. Dividiendo por la potencia correspondiente de una función que localmente defina a E obtenemos una 1-forma que define al pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$.

Más generalmente, supongamos que $\mathcal{G}$ es una foliación determinada por una 1-forma twisteada ω y $\pi : \mathrm{Bl}_p Y \to Y$ es el blow-up sobre un punto suave de Y. Definimos la *multiplicidad* de $\mathcal{G}$ en p como el orden de anulación $m_p(\mathcal{G})$ de $\pi^*\omega$ sobre el divisor excepcional $E \subseteq \mathrm{Bl}_p Y$. La cuenta previa muestra que si la parte inicial ω_k del germen $\omega \in \Omega^1_{Y,p}$ tiene coeficientes homogéneos de grado $k-1$, entonces

$$m_p(\mathcal{G}) = \begin{cases} k & \text{si } i_R\omega_k = 0, \\ k-1 & \text{si } i_R\omega_k \neq 0. \end{cases}$$

Definición 1.1.4. Sean $\pi : X \dashrightarrow Y$ un mapa racional entre variedades normales, $\mathcal{G}$ una foliación sobre Y, y $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ el pullback entre ambos. Definimos el **esquema de tangencias** entre π y $\mathcal{G}$ como la diferencia esquemática

$$T(\pi, \mathcal{G}) = \operatorname{Sing}\mathcal{F} \setminus \pi^{-1}(\operatorname{Sing}\mathcal{G}).$$

Conjuntísticamente hablando,

$$T(\pi, \mathcal{G}) = \{p \in X \setminus B \,:\, \pi(p) \notin \operatorname{Sing}\mathcal{G},\ \operatorname{Im}(d_p\pi) + T_{\mathcal{G}}|_{\pi(p)} \subsetneq T_Y|_{\pi(p)}\},$$

es decir que las tangencias están dadas por los puntos de no transversalidad entre π y $\mathcal{G}$. En el caso en el que $\mathcal{G}$ tenga codimensión 1, la segunda de las condiciones equivale a que $\operatorname{Im}(d_p\pi) \subseteq T_{\mathcal{G}}|_{\pi(p)}$ por motivos dimensionales. Con esta misma hipótesis sobre $\mathcal{G}$ podemos decir además que $\mathcal{F}$ posee una integral primera local holomorfa alrededor de todo punto $p \in T(\pi, \mathcal{G})$. En efecto, como $\pi(p)$ es un punto suave de $\mathcal{G}$, dicha foliación tiene que tener una integral primera local holomorfa g por el Teorema de Frobenius. Entonces $f = g\pi$ es la prometida integral primera de $\mathcal{F}$ alrededor de p.

Es claro de la definición que una condición necesaria para que $\mathcal{F}$ sea el pullback por un morfismo $\pi : X \to Y$ de una foliación sobre Y es que haya una contención entre espacios tangentes $T_{X/Y} \subseteq T_{\mathcal{F}}$. El siguiente resultado dice que esta condición también es suficiente.

Lema 1.1.1 ([CLNL+06, pág. 162])**.** *Sean $\pi : X \to Y$ un morfismo sobreyectivo entre variedades normales con fibras conexas, y $\mathcal{F}$ una foliación sobre X. Si el haz tangente $T_{\mathcal{F}}$ contiene a $T_{X/Y}$, entonces existe una foliación $\mathcal{G}$ sobre Y tal que $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$.*

1.1.4. Deformaciones de foliaciones

Por el momento definimos foliaciones únicamente sobre espacios normales. Esta hipótesis nos permitió describirlas en términos de campos de vectores y formas diferenciables. Al momento de deformar estos objetos querremos incluir esquemas no reducidos en el asunto como por ejemplo $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ para poder hablar de deformaciones infinitesimales. La hipótesis sobre la torsión pedida sobre el normal $N_{\mathcal{F}}$ no se comporta bien cuando los esquemas en cuestión no son íntegros.

Definición 1.1.5. Diremos que un haz de $\mathscr{O}_X$-módulos N sobre un esquema X es *torsionless* si el mapa natural $N \to N^{\vee\vee}$ es un monomorfismo.

Definición 1.1.6. Sea $\mathscr{X}/S$ una familia localmente trivial de variedades normales. Una *familia de distribuciones integrables (no necesariamente saturadas)* sobre $\mathscr{X}/S$ consiste en una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \to T_{\mathscr{F}/S} \to T_{\mathscr{X}/S} \to N_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

tal que $N_{\mathscr{F}/S}$ es torsionless y $T_{\mathscr{F}/S}$ es cerrado por el corchete de Lie de $\mathscr{X}$ relativo a S.

Cuando la base S es íntegra, la condición sobre el haz normal $N_{\mathscr{F}/S}$ de ser torsionless equivale a que este sea libre de torsión. Sin embargo ambas nociones son distintas en general. La razón por la cual optaremos quedarnos con la primera por sobre la segunda es que este tipo de familias admiten una descripción equivalente en términos de formas diferenciales como veremos a continuación. Vamos a denotar por $\Omega^{[1]}_{\mathscr{X}/S} = (\Omega^1_{\mathscr{X}/S})^{\vee\vee}$ al haz de *1-formas diferenciales reflexivas relativas*.

Definición 1.1.7. Una *familia de sistemas de Pfaff involutivos (no necesariamente saturados)* sobre $\mathscr{X}/S$ consta en una sucesión exacta corta de haces coherentes

$$0 \to I_{\mathscr{F}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{X}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

con $\Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S}$ torsionless, y en un entorno de un punto general cada elección de secciones locales $\omega_1, \dots, \omega_q$ de $I_{\mathscr{F}/S}$ verifica las condiciones de integrabilidad $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_q = 0$ con $1 \leqslant i \leqslant q$, donde denotamos por d al diferencial de de Rham relativo a S.

Siguiendo el mismo procedimiento de las secciones precedentes, a toda familia de distribuciones integrables le corresponde vía dualidad una familia de sistemas de Pfaff involutivos y viceversa. Aquí estamos usando implícitamente que los subhaces de uno torsionless son torsionless y que el dual de cualquier haz de $\mathscr{O}_X$-módulo es torsionless también. Como los haces normales y conormales son torsionless, la demostración del [Qua15, Lem. 4.2] nos garantiza que esta correspondencia es biyectiva y simultáneamente motiva el uso de la (a priori artificial) noción de ser torsionless. Las condiciones de integrabilidad de las respectivas familias duales se verifican localmente sobre secciones mediante [War83, Prop. 2.30].

A pesar de que estas son dos caras del mismo objeto subyacente, se hizo una distinción en la nomenclatura de estos tipos de familias por dos motivos:

– En primer lugar necesitaremos poder decir cuándo estas familias de foliaciones varían, en algún sentido, “continuamente”. Como es de esperarse, diremos que una familia de distribuciones integrables (resp. sistemas de Pfaff involutivos) es *playa* si el haz $N_{\mathcal{F}/S}$ (resp. $\Omega^{[1]}_{\mathcal{F}/S}$) es playo sobre S. En [Qua15] fue observado que estas dos condiciones de playitud no son equivalentes (ver el ejemplo de la segundo sección de dicho artículo).

– Como fue remarcado, ambos tipos de familias forman una colección de foliaciones no necesariamente saturadas. Más precisamente, dado un punto cerrado $s \in S$ y una familia playa de distribuciones integrables obtenemos vía restricción a la fibra $\mathscr{X}_s$ una sucesión exacta corta

$$0 \to (T_{\mathscr{F}/S})\big|_s \to T_{\mathscr{X}_s} \to (N_{\mathscr{F}/S})\big|_s \to 0.$$

donde la inyectividad del primer morfismo viene garantizada por la playitud de $N_{\mathscr{F}/S}$ sobre la base S (notar que $T_{\mathscr{X}_s} = T_{\mathscr{X}}|_s$ pues $\mathscr{X}/S$ es localmente trivial). Sin embargo nada nos asegura que $(N_{\mathscr{F}/S})\big|_s$ sea libre de torsión, y por ende la foliación en cuestión se obtiene saturando. Similarmente se puede hacer la mímica de este proceso para familias playas de sistemas de Pfaff. Desafortunadamente puede suceder que, para un par de familias playas mutuamente duales, entre los haces $(N_{\mathscr{F}/S})\big|_s$ y $(\Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S})\big|_s$ haya solo uno que sea libre de torsión.

La problemática sobre la playitud es inexistente cuando S es una curva suave. Con esta hipótesis sobre la base el espacio $\mathscr{X}$ es íntegro, ambos haces $N_{\mathcal{F}/S}$ y $\Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S}$ son libres de torsión, y por ende también S-playos [Vak17, Exercise 24.4.B]. Notar que el ejemplo del artículo [Qua15] mencionado anteriormente tiene como base S una superficie. Pasemos a ilustrar el segundo de los fenómenos.

Ejemplo 7 ([Vel22, Ejemplo 54])**.** Consideremos el espacio $\mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^4(\mathbb{C}^2))$ de formas binarias de grado cuatro junto con la acción natural de $SL_2(\mathbb{C})$ dada por cambios de coordenadas. La misma determina una foliación $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^4$ cuyas hojas son las clausuras de sus órbitas de codimensión 1, y que tiene al clásico invariante j como integral primera racional. Usando una descripción explícita de j podemos inferir que $\mathcal{F}$ es la foliación racional inducida por una 1-forma $\omega_0 = 3g_0 df_0 - 2f_0 dg_0$, con f_0 y g_0 polinomios homogéneos de grados 2 y 3 respectivamente [CAC06, pág. 7]. Como la acción es libre salvo codimensión dos, el espacio tangente de $\mathcal{F}$ es igual a $T_{\mathcal{F}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^4} \subseteq T_{\mathbb{P}^4}$.

Sean f_s y g_s dos deformaciones genéricas de los polinomios anteriores parametrizadas por la recta afín $S = \mathbb{A}^1$. Obtenemos entonces una familia playa de sistemas de Pfaff involutivos

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^4\times S}(-5) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^4\times S/S} \to \Omega^1_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

donde el morfismo de la izquierda se corresponde con la 1-forma $\omega_s = 3g_s df_s - 2f_s dg_s$. Como ω_0 no se anula en codimensión uno el haz $(\Omega^1_{\mathscr{F}/S})\big|_0$ es libre de torsión. Por el contrario $(N_{\mathscr{F}/S})\big|_0$ tiene torsión. Si no fuese el caso esta restricción debería coincidir con el normal $N_{\mathcal{F}}$, y $(T_{\mathscr{F}/S})\big|_0$ con el tangente $T_{\mathcal{F}} \simeq \mathscr{O}^3_{\mathbb{P}^4}$. Pero este último haz es rígido y en consecuencia ω_s debería tener haz tangente trivial para valores de $s \in \mathbb{A}^1$ cercanos al origen. Esto es contradictorio porque foliaciones split tienen lugar singular equidimensional, mientras que una foliación racional genérica tiene singularidades aisladas.

Este último paso del razonamiento da la pauta de lo que está fallando al dualizar: en el límite de s tendiendo a cero los lugares singulares de los miembros de esta familia de foliaciones experimentan un cambio abrupto. En general definimos el *lugar singular* de una familia de distribuciones integrables/sistemas de Pfaff involutivos de codimensión q como el esquema de ceros $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ de la q-forma twisteada $\omega \in \Gamma\big(\Omega^{[q]}_{\mathscr{X}/S}(\det N_{\mathscr{F}/S})\big)$ obtenida por un proceso análogo al de las secciones previas. En términos concretos, el lugar singular de la familia del Ejemplo 7 no es playo sobre el esquema base S.

Definición 1.1.8. Diremos que una familia playa de distribuciones integrables (resp. familia playa de sistemas de Pfaff involutivos) $\mathscr{F}/S$ es una *deformación* de una foliación $\mathcal{F}$ sobre X si existe un punto cerrado $s \in S$ y un isomorfismo $X \simeq \mathscr{X}_s$ de manera que la restricción de la sucesión exacta que define a $\mathscr{F}/S$ a la fibra sobre s se identifica vía este isomorfismo con la sucesión exacta de campos de vectores (resp. formas diferenciales) que define a $\mathcal{F}$.

Lema 1.1.2. *Supongamos que S es una curva suave y que la familia de sistemas de Pfaff invo-*

lutivos

$$0 \to I_{\mathscr{F}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{X}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

es una deformación de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión uno de manera que $I_{\mathscr{F}/S}$ sea un $\mathbb{Q}$-fibrado, es decir que, alguna de sus potencias sea un line bundle. Si el lugar singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ *es playo sobre S y disjunto de* $\mathrm{Sing}(\mathscr{X})$*, entonces la familia dual de distribuciones integrables*

$$0 \to T_{\mathscr{F}/S} \to T_{\mathscr{X}/S} \to N_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

también es una deformación de $\mathcal{F}$.

Demostración. Nuestro objetivo será probar que $(N_{\mathscr{F}/S})\big|_s$ es libre de torsión. Bastará entonces verificar que el haz normal de esta familia satisface la identidad

$$N_{\mathscr{F}/S} = I_{\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} \otimes I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}$$

porque la hipótesis de playitud asegura que $\left(I_{\mathrm{Sing}(\mathscr{F})}\right)\big|_s = I_{\mathrm{Sing}(\mathscr{F})|_s}$, mientras que lo asumido para $I_{\mathscr{F}/S}$ implica que $\left(I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}\right)\big|_s$ también es un $\mathbb{Q}$-fibrado. Como $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ y $\mathrm{Sing}(\mathscr{X})$ son disjuntos, por la naturaleza local del enunciado bastará probar este resultado en los casos $\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) = \emptyset$ y $\mathrm{Sing}(\mathscr{X}) = \emptyset$. Recordemos que, por la definición misma del lugar singular de una familia $\mathscr{F}/S$, la imagen de la contracción $(T_{\mathscr{X}/S} \otimes I_{\mathscr{F}/S})^{\vee\vee} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ por ω coincide con $I_{\mathrm{Sing}(\mathscr{F})}$.

Si $\mathscr{X}$ es suave, entonces $T_{\mathscr{X}/S} \otimes I_{\mathscr{F}/S}$ es reflexivo y $I_{\mathscr{F}/S}$ es un line bundle por ser un haz reflexivo de rango uno. Consecuentemente el morfismo $T_{\mathscr{X}/S} \to I_{\mathrm{Sing}(\mathscr{F})} \otimes I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}$ es sobreyectivo y su núcleo es $T_{\mathscr{F}/S}$. Esto implica que el haz de la derecha es $N_{\mathscr{F}/S}$ como queríamos ver.

Pasemos a demostrar el caso $\mathrm{Sing}(\mathscr{F}) = \emptyset$, es decir cuando $(T_{\mathscr{X}/S} \otimes I_{\mathscr{F}/S})^{\vee\vee} \to \mathscr{O}_{\mathscr{X}}$ es sobreyectivo. Tensorizando por $I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}$ obtenemos un morfismo sobreyectivo

$$(T_{\mathscr{X}/S} \otimes I_{\mathscr{F}/S})^{\vee\vee} \otimes I^{\vee}_{\mathscr{F}/S} \to I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}.$$

Tomando doble dual obtenemos una aplicación $T_{\mathscr{X}/S} \to I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}$ también sobreyectiva porque se factoriza por el mapa anterior. Luego $N_{\mathscr{F}/S} = I^{\vee}_{\mathscr{F}/S}$. □

La utilidad de este último resultado está supeditada a la existencia de *singularidades estables* de foliaciones, las cuales garantizan que se cumple la hipótesis de playitud sobre el esquema $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})/S$. La clase más sencilla de este tipo de singularidades de foliaciones es prestada de la Teoría de Singularidades de funciones holomorfas. El número de Milnor de una singularidad aislada $f \in \mathbb{C}\{\{z_1, \dots, z_n\}\}$ es

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{\{z_1, \dots, z_n\}\}}{(\partial_{z_1} f, \dots, \partial_{z_n} f)}.$$

Diremos que f es de *Morse* si $\mu(f) = 1$. Por semicontinuidad del número de Milnor podemos concluir que pequeñas perturbaciones de una singularidad de Morse sigue siendo de Morse. Habiendo terminado con esta digresión pasemos a retomar el contexto foliado.

Definición 1.1.9. Dada $\mathcal{F}$ de codimensión 1 sobre X, un punto $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \setminus \mathrm{Sing}(X)$ es una *singularidad de tipo Morse* si existen coordenadas analíticas $z_1, \dots, z_n$ alrededor de p y una función de Morse $f \in \mathbb{C}\{\{z_1, \dots, z_n\}\}$ tal que $\mathcal{F}$ está representada localmente por la 1-forma $\omega = df$.

Como es de esperarse, este tipo particular de singularidades de foliaciones también es estable. Antes de enunciar esto con propiedad vamos a introducir una segunda clase de singularidades.

Definición 1.1.10. Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 sobre X. Diremos que un punto $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F}) \setminus \mathrm{Sing}(X)$ es una *singularidad de tipo Kupka* si existe un germen de 1-forma $\omega \in \Omega^1_{X,p}$ que represente a $\mathcal{F}$ tal que $d\omega_p \neq 0$.

Esta condición equivale a que el diferencial de cualquier 1-forma que represente a $\mathcal{F}$ alrededor de p no se anule en este punto. Efectivamente, cualquier otro representante es de la forma $g\omega$ con $g \in \mathscr{O}_{X,p}$ un germen que no se anula en p y por ende

$$d(g\omega)_p = dg_p \wedge \omega_p + g(p)d\omega_p = g(p)d\omega_p \neq 0.$$

Proposición 1.1.1 ([Qua15, pág. 24])**.** *Supongamos que*

$$0 \to I_{\mathscr{F}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{X}/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

es una deformación de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión 1. Si p es una singularidad de tipo Morse o Kupka de $\mathcal{F}$, entonces $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ es playo sobre S en el punto p.

Posteriormente en el tercer capítulo vamos a introducir una nueva clase de singularidades de foliaciones a las cuales denominaremos como *singularidades cónicas*, y probaremos que las mismas también son estables. Una de las motivaciones de su estudio es la estructura del lugar singular de ciertas foliaciones de tipo pullback por un mapa racional genérico $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. En buenas circunstancias las singularidades de tales foliaciones son de tipo Morse, Kupka o cónicas. Esto nos permitirá usar el Lema 1.1.2 para analizar la estabilidad de estas foliaciones de tipo pullback. Concluimos con una observación que será utilizada más adelante en el capítulo 4.

Lema 1.1.3. *Consideremos una deformación*

$$0 \to I_{\mathscr{F}/S} \to \Omega^{[1]}_{X\times S/S} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

de una foliación $\mathcal{F}$ con S una curva suave. Sea $\pi : \mathrm{Bl}_p X \to X$ el blow-up sobre un punto suave $p \in X$ de manera que la multiplicidad $m_p(\mathscr{F}_s)$ es independiente de $s \in S$. Entonces $\pi^*(\mathscr{F}/S)$ es una deformación del blow-up $\pi^*\mathcal{F}$.

1.2. Sobre teoría de deformaciones

1.2.1. Teoría de obstrucciones para anillos locales

Definición 1.2.1. Sea $S \to A$ un morfismo de anillos conmutativos e I un A-módulo. Una *extensión* de la S-álgebra A por I consiste en una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \to I \to A' \to A \to 0$$

de manera que la flecha de la derecha es un morfismo de S-álgebras tal que $I^2 = 0$.

Dos extensiones A' y A'' son *isomorfas* si existe un isomorfismo $A' \to A''$ de S-álgebras que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I \arrow[r] \arrow[d, equal] & A' \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r] & A'' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Al conjunto de clases de equivalencia de tales extensiones lo vamos a denotar por

$$\mathrm{Ex}(A/S, I)$$

el cual tiene una estructura natural de A-módulo [Ser07, Section 1.1.2]. Definimos el *pullback* de una extensión $0 \to I \to A' \to A \to 0$ por un morfismo de S-álgebras $B \to A$ como la extensión de B por I

$$0 \to I \to A' \times_A B \to B \to 0.$$

Esta construcción preserva equivalencias e induce una función

$$\mathrm{Ex}(A/S, I) \to \mathrm{Ex}(B/S, I).$$

Más aún, se puede probar que el conjunto de la derecha es un A-módulo y que esta aplicación es un morfismo de A-módulos. [Ser07, Prop. 1.1.5]

Proposición 1.2.1. *Dado un morfismo de S-álgebras $B \to A$ y un A-módulo I existe una sucesión exacta larga de A-módulos*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(A/B, I) \longrightarrow \mathrm{Der}(A/S, I) \longrightarrow \mathrm{Der}(B/S, I) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Ex}(A/B, I) \longrightarrow \mathrm{Ex}(A/S, I) \longrightarrow \mathrm{Ex}(B/S, I).$$

Definición 1.2.2. Sea $S \to A$ un morfismo entre k-álgebras noetherianas locales con cuerpo residual k. El *espacio de obstrucciones* de la S-álgebra A es

$$o(A/S) = \mathrm{Ex}(A/S, k).$$

Cuando $S = k$ vamos a denotar a dicho espacio simplemente como $o(A)$. En este contexto local, si especializamos la Proposición 1.2.1 al caso $I = k$ obtenemos una sucesión exacta larga de la forma

$$0 \longrightarrow T_{A/B} \longrightarrow T_{A/S} \longrightarrow T_{B/S} \longrightarrow o(A/B) \longrightarrow o(A/S) \longrightarrow o(B/S).$$

Teorema 1.2.1. *Consideremos un cuerpo algebraicamente cerrado k y un morfismo $S \to A$ entre k-álgebras noetherianas locales con cuerpo residual k. Si S es una k-álgebra completa, son equivalentes:*

(a) *A es una S-álgebra formalmente suave.*

(b) *$T_A \to T_S$ es sobreyectivo y $o(A) \to o(S)$ es inyectivo.*

(c) $o(A/S) = 0$.

Por último lugar enunciaremos un resultado técnico que será utilizado más adelante.

Lema 1.2.1. *Sean* $S \to B \to A$ *dos morfismos entre* k*-álgebras noetherianas locales con cuerpo residual* k*. Si* $o(A/S) \to o(B/S)$ *es inyectivo, entonces* $o(A) \to o(B)$ *también es inyectivo.*

Demostración. Se tiene un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T_{A/S} \arrow[r] \arrow[d] & T_A \arrow[r] \arrow[d] & T_S \arrow[r] \arrow[d, equal] & o(A/S) \arrow[r] \arrow[d] & o(A) \arrow[r] \arrow[d] & o(S) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & T_{B/S} \arrow[r] & T_B \arrow[r] & T_S \arrow[r] & o(B/S) \arrow[r] & o(B) \arrow[r] & o(S).
\end{tikzcd}$$

La prueba se reduce a perseguir elementos en este diagrama. □

1.2.2. Estabilidad de intersecciones completas

Definición 1.2.3. Diremos que una subvariedad $Z \subseteq X$ de codimensión q es una *intersección completa* si existe un line bundle L de manera que Z es el conjunto de ceros de q secciones $s_i \in \Gamma(L^{d_i})$ con $1 \leqslant i \leqslant q$.

Las intersecciones completas en $\mathbb{P}^n$ son estables y no obstruidas, como se puede ver en [Ser07, pág. 235]. Siguiendo las mismas ideas de la demostración es posible ampliar este resultado de la siguiente manera:

Teorema 1.2.2. *Sea* L *un line bundle amplio sobre una variedad proyectiva* X *tal que*

$$H^p(X, L^k) = 0 \quad si \quad 0 < p < n, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces las intersecciones completas de dimensión positiva de secciones de potencias de L *están parametrizadas por un subesquema abierto y suave de* Hilb_X*.*

Demostración. Supongamos que el subesquema cerrado $Z \subseteq X$ es la intersección completa de secciones $s_i \in \Gamma(L^{d_i})$ con $1 \leqslant i \leqslant m$. Tomemos una base $t^{(1)}, \ldots, t^{(d)}$ de $\bigoplus_{i=1}^m \Gamma(L^{d_i})$ de la forma

$$t^{(k)} = \left(t_1^{(k)}, \ldots, t_m^{(k)}\right) \quad 1 \leqslant k \leqslant d.$$

Vamos a denotar por $\Gamma_*(L)$ al anillo graduado $\bigoplus_{j\geqslant 1} \Gamma(L^j)$. Dadas variables independientes $u_1, \ldots, u_d$, definimos la m-tupla

$$s + u_k t^{(k)} = \left(s_1 + u_1 t_1^{(1)} + \cdots + u_d t_1^{(d)}, \ldots, s_m + u_1 t_m^{(1)} + \cdots + u_d t_m^{(d)}\right)$$

de elementos pertenecientes al anillo $\Gamma_*(L)[u_1, \ldots, u_d]$. Sea $K_\bullet\left(s + u_k t^{(k)}\right)$ el complejo de Koszul asociado a esta m-tupla y

$$\Delta = \mathrm{Supp}\, H_1\left(K_\bullet\left(s + u_k t^{(k)}\right)\right) \subseteq X \times \mathbb{A}^d.$$

A partir de la identidad $X = \mathrm{Proj}\, \Gamma_*(L)$ podemos afirmar que

$$\mathscr{Z} = \mathrm{Proj}\left(\Gamma_*(L)[u_1, \ldots, u_d]/(s + u_k t^{(k)})\right)$$

es un subesquema cerrado del producto $X \times \mathbb{A}^d$. Como la proyección $p : \mathscr{X} \to \mathbb{A}^d$ es un morfismo propio, entonces $U = \mathbb{A}^d \setminus p(\Delta)$ es un abierto que contiene al origen y las fibras de p sobre puntos de U son intersecciones completas con el mismo polinomio de Hilbert. Esta familia playa determina un morfismo de esquemas $U \to \mathrm{Hilb}_X$. Como U es suave, por el Teorema 1.2.1 bastará ver que el diferencial en el origen de esta aplicación es sobreyectivo. El espacio tangente a Hilb_X en Z se identifica con

$$\Gamma(N_{Z/X}) = \bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma(L^{d_i}|_Z)$$

y el diferencial de $U \to \mathrm{Hilb}_X$ en el origen con la restricción

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma(L^{d_i}) \to \bigoplus_{i=1}^{m} \Gamma(L^{d_i}|_Z).$$

Este último mapa será sobreyectivo si $H^1(I_{Z/X} \otimes L^{d_i}) = 0$ para todo $1 \leqslant i \leqslant m$. Para alivianar la notación vamos a introducir al fibrado $E = \bigoplus_{j=1}^{m} L^{-d_j}$. Como Z es una intersección completa, el complejo de Koszul

$$K_\bullet(s_1, \ldots, s_m) : \quad 0 \to \bigwedge^{m} E^\vee \to \cdots \to \bigwedge^{2} E^\vee \to E^\vee \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Z \to 0$$

es exacto. Fijado un índice $1 \leqslant i \leqslant m$, denotemos por G_ℓ a la imagen del morfismo

$$\left(\bigwedge^{\ell} E^\vee\right) \otimes L^{d_i} \to \left(\bigwedge^{\ell-1} E^\vee\right) \otimes L^{d_i}.$$

El complejo previo se puede desacoplar en las sucesiones exactas cortas

$$0 \to G_{\ell+1} \to \left(\bigwedge^{\ell} E^\vee\right) \otimes L^{d_i} \to G_\ell \to 0.$$

Pasando a la sucesión exacta larga de cohomología y usando las hipótesis de anulamiento se deduce que $H^q(G_\ell) \simeq H^{q+1}(G_\ell)$ para todo $0 < q < n-1$. En particular

$$H^1(I_{Z/X} \otimes L^{d_i}) = H^1(G_1) \simeq H^2(G_2) \simeq \cdots \simeq H^{n-1}(G_{n-1}).$$

Este grupo es igual a cero siempre que $n - 1 \geqslant m$, es decir, cuando $\dim(Z) > 0$. □

Veamos algunas instancias en las cuales se puede aplicar este resultado...

Ejemplo 8. Las hipótesis del Teorema 1.2.2 se verifican si L es un line bundle amplio sobre una variedad tórica completa y suave X. Para probar esto separemos en tres casos:

- En primer lugar, si $k > 0$, entonces los grupos de cohomología del line bundle amplio L^k se anulan gracias a [Ful93, Section 3.5].
- Si $k = 0$, los grupos $H^p(X, \mathscr{O}_X)$ son nulos porque los números de Hodge $h^{p,0}(X)$ son invariantes birrationales y las variedades tóricas son racionales.
- Finalmente, el caso $k < 0$ es consecuencia del Teorema de anulación de Kodaira.

Ejemplo 9. Supongamos que X es una variedad Fano suave. El *índice* de X es el máximo número natural $r = r(X)$ de manera que existe un divisor de Cartier amplio H tal que $-K_X = rH$. Diremos que H es un *divisor fundamental de* X. Por el Teorema de anulación de Kodaira sabemos que

$$H^p\big(X, \mathscr{O}_X(kH)\big) = H^p\big(X, \mathscr{O}_X(K_X + (k+r)H)\big) = 0$$

siempre que $0 < p < n$ y $k > -r$, porque $(k+r)H$ es amplio. Nuevamente por el Teorema de Kodaira, estos grupos se siguen anulando en los casos complementarios $k \leqslant -r < 0$. Por ende $L = \mathscr{O}_X(H)$ verifica las hipótesis del Teorema 1.2.2 también.

2. Foliaciones pullback vía morfismos

Uno de los principales objetos de estudio de la teoría de deformaciones es la propiedad de *estabilidad* de una familia de objetos geométricos. Estas familias son aquellas que contienen a todas las pequeñas deformaciones de sus miembros. Girbau, Haefliger y Sundararaman prueban que ciertas foliaciones dadas por una fibración son estables, en el marco de las deformaciones transversalmente holomorfas de foliaciones suaves [GHS83, Thrm 4.3.1]. En el contexto singular, Gomez-Mont y Lins Neto prueban la estabilidad en un sentido C^∞ de una clase foliaciones dadas por las fibras de un morfismo $\pi : X \to C$ con a lo sumo singularidades de tipo Morse con C una curva compleja [GMLN91, Thrm. 1.5]. En ambos casos aparece la hipótesis topológica $H^1(F, \mathbb{C}) = 0$ sobre las fibras del morfismo involucrado.

En este capítulo probaremos que, con hipótesis similares sobre la fibra genérica de un morfismo, que las foliaciones singulares de tipo pullback conforman una familia estable, apuntando así hacia una generalización parcial de los teoremas previos (ver el Teorema 2.3.1).

La estrategia que implementaremos está basada en la caracterización de la foliaciones pullback que provee el Lema 1.1.1. A cada foliación pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ le podemos asociar la filtración

$$T_{X/Y} \subseteq T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X.$$

Luego de desarrollar las herramientas necesarias de la teoría de deformaciones de filtraciones de haces veremos que bajo ciertas hipótesis una pequeña perturbación $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ sigue admitiendo una bandera de la forma

$$F_1 \subseteq T_{\mathcal{F}'} \subseteq T_X.$$

En condiciones favorables, pequeñas deformaciones del subhaz $T_{X/Y} \subseteq T_X$ como por ejemplo la inclusión $F_1 \subseteq T_X$ seguirán siendo el tangente relativo a un morfismo y por ende $\mathcal{F}'$ tendrá que ser una foliación pullback también.

Esta misma idea es aplicable al problema de estabilidad de foliaciones que tengan una hoja algebraica. Notar que a partir de una hoja algebraica $Z \subseteq X$ de una foliación $\mathcal{F}$ podemos construir la filtración

$$T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X(-\log Z) \subseteq T_X,$$

con $T_X(-\log Z)$ el haz de campos logarítmicos de Z (es decir, aquellos campos que preservan a Z). Como se verá en el Teorema 2.4.1, en determinados casos y volviendo a apelar a las técnicas de deformaciones de filtraciones, una pequeña perturbación $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ seguirá admitiendo una filtración de la forma

$$T_{\mathcal{F}'} \subseteq F_2 \subseteq T_X,$$

con $F_2 = T_X(-\log Z')$ para cierta perturbación $Z' \subseteq X$ de la hoja mencionada.

2.1. Deformaciones de filtraciones de haces

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, X un k-esquema de tipo finito y K un complejo de $\mathscr{O}_X$-módulos acotado por derecha munido de una filtración de subcomplejos
$$0 = F_0K \subseteq F_1K \subseteq \cdots \subseteq F_{\ell-1}K \subseteq F_\ell K = K.$$
A continuación vamos a denotar por $\mathrm{gr}_i K = F_iK/F_{i-1}K$ a la i-ésima componente graduada de K. Dado otro complejo L como el anterior, podemos construirnos un nuevo complejo $\mathrm{Hom}^\bullet(K, L)$ cuya q-ésima componente homogénea es
$$\mathrm{Hom}^q(K, L) := \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(K^i, L^{i+q})$$
y su diferencial está definido como $d^q(f)^i = d_Y^{q+i} \circ f^i + (-1)^q f^{i+1} \circ d_X^i$. El complejo $\mathrm{Hom}^\bullet(K, L)$ viene equipado con la filtración
$$F_p \mathrm{Hom}(K, L) := \big\{ f \in \mathrm{Hom}(K, L) \ :\ f(F_iK) \subseteq F_{i+p}L \ \ \forall i \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Por otro lado definimos el complejo de $\mathscr{O}_X$-módulos
$$\mathrm{Hom}_+^\bullet(K, L) := \mathrm{Hom}^\bullet(K, L)/F_0 \mathrm{Hom}^\bullet(K, L).$$

Se puede probar que existe un complejo filtrado I cuyas componentes homogéneas son $\mathscr{O}_X$-módulos inyectivos y que existe un morfismo $L \to I$ de complejos filtrados tal que $\mathrm{gr}_i L \to \mathrm{gr}_i I$ es una resolución inyectiva para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.1.1. Dada una resolución $L \to I$ como la del párrafo anterior, definimos los grupos
$$\mathrm{Ext}_+^i(K, L) := H^i\big(\mathrm{Hom}_+^\bullet(K, I)\big)$$
los cuales son independientes de la resolución elegida.

Proposición 2.1.1 ([DLP85, pág. 200]). *Existe una sucesión espectral cuyos elementos de la primera página son*
$$E_1^{p,q} = \begin{cases} \prod_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ext}^{p+q}\left(\mathrm{gr}_i(K), \mathrm{gr}_{i-p}(L)\right) & \text{si } \ p < 0, \\ 0 & \text{si } \ p \geq 0 \end{cases}$$
y que converge a $\mathrm{Ext}_+^\bullet(K, L)$.

Definición 2.1.2. Sea $\mathscr{X}$ una variedad S-proyectiva con un line bundle S-amplio $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(1)$. Tomemos un haz coherente $\mathscr{E}$ sobre $\mathscr{X}$ que sea S-playo y cuyo polinomio de Hilbert asociado a $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(1)$ es h. Dada una ℓ-upla de polinomios racionales $H = (h_1, \dots, h_\ell)$ tales que $h = h_1 + \cdots + h_\ell$ definimos el funtor contravariante
$$\mathcal{D}rap_E^H : \mathsf{Sch}_{/S} \to \mathsf{Set}$$
cuyo valor en $T \to S$ es el conjunto de filtraciones de $\mathscr{O}_{X\times_S T}$-módulos
$$0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{\ell-1} \subseteq F_\ell = \mathscr{E}_T = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathscr{O}_T$$
que verifican las siguientes condiciones:

- los haces $\mathrm{gr}_i \mathscr{E}_T = F_i/F_{i-1}$ son T-playos,
- para todo $t \in T$, el polinomio de Hilbert de $(\mathrm{gr}_i \mathscr{E}_T)|_{X_t}$ es igual a h_i.

Observación 2.1.1. En el caso particular en el que las filtraciones tengan longitud $l = 2$, el funtor $\mathcal{D}rap^H_{\mathscr{E}}$ no es más ni menos que el funtor $\mathcal{Q}uot^{h_2}_{\mathscr{E}}$ de Grothendieck.

El funtor $\mathcal{D}rap^H_{\mathscr{E}}$ está representado por un esquema S-proyectivo al que vamos a denotar por $\mathrm{Drap}^H_{\mathscr{E}}$. Como es habitual nos resultará conveniente considerar el esquema

$$\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} := \bigsqcup_H \mathrm{Drap}^H_{\mathscr{E}}$$

donde $H = (h_1, \dots, h_\ell)$ varía entre aquellas ℓ-uplas de polinomios que suman $h = h_1 + \cdots + h_\ell$. Como el lector puede observar este S-esquema depende de la elección de la longitud de las filtraciones ℓ, pero para no sobrecargar la notación la omitiremos esperando que queda clara por el contexto.

En general, si $X \to S$ es un morfismo de esquemas y $p \in X$ es un punto sobre $s \in S$, definimos el *espacio de obstrucciones* de X en p relativo a S como

$$o_p(X/S) = o\big(\widehat{\mathscr{O}}_{X,p}/\widehat{\mathscr{O}}_{S,s}\big).$$

Siguiendo los resultados [DLP85, Prop. 1.5], [Ser07, Prop. 4.4.4] y [Ser07, Prop. 2.1.7] podemos describir las propiedades locales del esquema Drap_E de la siguiente manera:

Proposición 2.1.2. *Supongamos que $\mathscr{X}$ es una variedad S-proyectiva y $\mathscr{E}$ es un haz coherente sobre $\mathscr{X}$ que sea S-playo. Dada una filtración $p \in \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ del haz $E = \mathscr{E}|_s$ tenemos una sucesión exacta*

$$0 \to \mathrm{Ext}^0_+(E, E) \to T_p \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} \to T_s S \to \mathrm{Ext}^1_+(E, E).$$

Además, existe una inclusión del espacio de obstrucciones $o_p(\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}/S) \subseteq \mathrm{Ext}^1_+(E, E)$. En el caso particular $S = \operatorname{Spec} k$ la sucesión se reduce a un isomorfismo $T_p \mathrm{Drap}_E = \mathrm{Ext}^0_+(E, E)$.

2.2. Deformaciones de filtraciones de longitud 3

Dado un S-esquema T y un entero $1 \leqslant i \leqslant \ell - 1$ existe una aplicación $\varphi_i : \mathcal{D}rap_{\mathscr{E}}(T) \to \mathcal{Q}uot_{\mathscr{E}}(T)$ que le asigna a una filtración $F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_{\ell-1} \subseteq \mathscr{E}_T$ la inclusión del i-ésimo término $F_i \subseteq \mathscr{E}_T$. Esto define una transformación natural $\varphi_i : \mathcal{D}rap_{\mathscr{E}} \to \mathcal{Q}uot_{\mathscr{E}}$ entre funtores de anillos de Artin y por ende un morfismo de S-esquemas

$$\varphi_i : \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} \to \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}.$$

Proposición 2.2.1. *Sea $\mathscr{X}$ un S-esquema proyectivo y $\mathscr{E}$ un haz coherente sobre $\mathscr{X}$ que sea S-playo. Tomemos un punto $p \in \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ sobre un punto suave $s \in S$ correspondiente a una filtración $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \mathscr{E}|_s = E$ tal que*

(a) $\mathrm{Hom}\big(F_1, E/F_2\big) = 0$, *y*

(b) $o(\varphi_1) : o_p\big(\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}/S\big) \to o_{\varphi_1(p)}\big(\mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}/S\big)$ *es nulo.*

Entonces el morfismo $\varphi_2 : \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} \to \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}$ es suave en p.

Demostración. Gracias al Teorema 1.2.1 bastará ver que $d\varphi_2 : T_p \operatorname{Drap}_{\mathscr{E}} \to T_{\varphi_2(p)} \operatorname{Quot}_{\mathscr{E}}$ es sobreyectivo y que el mapa de obstrucciones $o(\varphi_2) : o_p(\operatorname{Drap}_{\mathscr{E}}) \to o_{\varphi_2(p)}(\operatorname{Quot}_{\mathscr{E}})$ es inyectivo. La hipótesis de suavidad de S nos garantiza que $o_s(S) = 0$ (nuevamente por Teorema 1.2.1). Por ende, usando el Lema 1.2.1, probar la inyectividad del mapa $o(\varphi_2)$ se reduce a probar la inyectividad de $o(\varphi_2) : o_p(\operatorname{Drap}_E /S) \to o_{\varphi_2(p)}(\operatorname{Quot}_E /S)$. La Proposición 2.1.2 nos provee del diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ext}^0_+(E,E) \arrow[r] \arrow[d, "d\varphi_2"] & T_p \operatorname{Drap}_{\mathscr{E}} \arrow[r] \arrow[d, "d\varphi_2"] & T_s S \arrow[r] \arrow[d, equal] & \operatorname{Ext}^1_+(E,E) \arrow[d, "o(\varphi_2)"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}(F_2, E/F_2) \arrow[r] & T_{\varphi_2(p)} \operatorname{Quot}_{\mathscr{E}} \arrow[r] & T_s S \arrow[r] & \operatorname{Ext}^1(F_2, E/F_2)
\end{tikzcd}$$

junto con dos inclusiones

$$o_p(\operatorname{Drap}_{\mathscr{E}} /S) \subseteq \operatorname{Ext}^1_+(E,E), \quad o_{\varphi_2(p)}(\operatorname{Quot}_{\mathscr{E}} /S) \subseteq \operatorname{Ext}^1_+(F_2, E/F_2).$$

Persiguiendo elementos en este diagrama se puede probar fácilmente que para concluir lo que queríamos basta con ver que la primera flecha vertical es sobreyectiva y que $o(\varphi_2) : o_p(\operatorname{Drap}_E /S) \to o_{\varphi_2(p)}(\operatorname{Quot}_E /S)$ es inyectivo.

La Proposición 2.1.1 aplicada a la filtración $F_1 \subseteq F_2 \subseteq E$ dice que existe una sucesión espectral que converge a $\operatorname{Ext}^\bullet_+(E,E)$ de manera que

$$\begin{aligned}
E_1^{-1,i+1} &= \operatorname{Ext}^i(F_1, F_2/F_1) \oplus \operatorname{Ext}^i(F_2/F_1, E/F_2), \\
E_1^{-2,i+2} &= \operatorname{Ext}^i(F_1, E/F_2),
\end{aligned}$$

y los restantes términos de la primera página son nulos. Como esta página está soportada en dos columnas consecutivas tenemos una sucesión exacta larga de la forma

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i(F_1, F_2/F_1) \oplus \operatorname{Ext}^i(F_2/F_1, E/F_2) \to \operatorname{Ext}^i_+(E,E) \to \operatorname{Ext}^i(F_1, E/F_2) \to \cdots \tag{2.1}$$

Por otra parte los morfismos $\varphi_1, \varphi_2 : \operatorname{Drap}_E \to \operatorname{Quot}_E$ inducen cada uno una aplicación lineal entre espacios tangentes

$$\begin{aligned}
d\varphi_1 &: \operatorname{Ext}^0_+(E,E) \to \operatorname{Hom}(F_1, E/F_1) \\
d\varphi_2 &: \operatorname{Ext}^0_+(E,E) \to \operatorname{Hom}(F_2, E/F_2),
\end{aligned}$$

y otra entre espacios de obstrucciones

$$\begin{aligned}
o(\varphi_1) &: \operatorname{Ext}^1_+(E,E) \to \operatorname{Ext}^1(F_1, E/F_1) \\
o(\varphi_2) &: \operatorname{Ext}^1_+(E,E) \to \operatorname{Ext}^1(F_2, E/F_2).
\end{aligned}$$

Estas transformaciones lineales se pueden acoplar a la sucesión exacta larga (2.1) para obtener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Hom}(F_1, E/F_1) \oplus \operatorname{Hom}(F_2, E/F_2) \arrow[dr] & \\
\operatorname{Hom}(F_1, F_2/F_1) \oplus \operatorname{Hom}(F_2/F_1, E/F_2) \arrow[r, hook] \arrow[ur] & \operatorname{Ext}^0_+(E,E) \arrow[r] \arrow[u] & \operatorname{Hom}(F_1, E/F_2) \arrow[dll, bend left] \\
\operatorname{Ext}^1(F_1, F_2/F_1) \oplus \operatorname{Ext}^1(F_2/F_1, E/F_2) \arrow[r] \arrow[dr] & \operatorname{Ext}^1_+(E,E) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ext}^1(F_1, E/F_2) \\
& \operatorname{Ext}^1(F_1, E/F_1) \oplus \operatorname{Ext}^1(F_2, E/F_2) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Las flechas diagonales involucradas provienen de las sucesiones exactas largas inducidas por el bifuntor $\mathrm{Hom}(-,-)$. Usando las hipótesis del enunciado y persiguiendo elementos en el diagrama previo podemos concluir que $\mathrm{Ext}^0_+(E,E) \to \mathrm{Hom}(F_2, E/F_2)$ es sobreyectivo y $o_p\big(\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}/S\big) \subseteq \mathrm{Ext}^1_+(E,E) \to o_{\varphi_2(p)}\big(\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}/S\big) \subseteq \mathrm{Ext}^1(F_2, E/F_2)$ es inyectivo como queríamos. □

Observación 2.2.1. Siguiendo el mismo razonamiento de la demostración previa, si reemplazamos la condición (b) en la Proposición 2.2.1 por la variante

(b′) $o(\varphi_2 : o_p\big(\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}/S\big) \to o_{\varphi_2(p)}\big(\mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}/S\big)$ es nulo.

podemos concluir que $\varphi_1 : \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} \to \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}$ es suave en p.

2.3. Estabilidad de foliaciones pullback

Definición 2.3.1. Consideremos $\mathscr{X}/S$ e $\mathscr{Y}/S$ dos familias localmente triviales de variedades normales, $\Pi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ un S-morfismo y $\mathscr{G}/S$ es una familia de distribuciones integrables sobre $\mathscr{Y}/S$. Se define el *pullback* $\mathscr{F}/S = \Pi^*(\mathscr{G}/S)$ como aquella familia de distribuciones integrables sobre $\mathscr{X}/S$ cuyo subhaz tangente $T_{\mathscr{F}/S}$ es el núcleo de la composición

$$T_{\mathscr{X}/S} \to \Pi^{[*]}T_{\mathscr{Y}/S} \to \Pi^{[*]}N_{\mathscr{G}/S}.$$

Cabe destacar que al ser $\Pi^{[*]}N_{\mathscr{G}/S}$ el dual de un haz tiene que ser torsionless, y por ende el normal $N_{\mathscr{F}/S}$ también es torsionless por ser un subhaz del primero. Estamos en condiciones de enunciar el resultado principal de este capítulo:

Teorema 2.3.1. *Consideremos un morfismo $\pi : X \to Y$ entre variedades normales que sea propio, sobreyectivo, con fibras conexas y cuya fibra genérica sea suave y no tenga 1-formas globales. Supongamos que*

$$0 \to T_{\mathscr{F}/S} \to T_{\mathscr{X}/S} \to N_{\mathscr{F}/S} \to 0$$

es una deformación de una foliación pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G} = \mathscr{F}_s$ con base suave S. Si la familia $\mathscr{X}$ es proyectiva sobre S y $\Pi : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es una deformación de π sobre S, entonces existe un entorno étale $U \to S$ de s y una deformación $\mathscr{G}/U$ de $\mathcal{G} = \mathscr{G}_s$ de manera que $\mathscr{F}/U = \Pi^*(\mathscr{G}/U)$.

Para poder probarlo necesitaremos primero el siguiente lema de anulación:

Lema 2.3.1. *Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo propio entre variedades normales tal que su fibra genérica sea suave y no tenga 1-formas globales. Si $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ es una foliación pullback, entonces* $\mathrm{Hom}(T_{X/Y}, N_{\mathcal{F}}) = 0$.

Demostración. Observemos que, como $N_{\mathcal{F}}$ es libre de torsión, entonces $\mathcal{H}om(T_{X/Y}, N_{\mathcal{F}})$ también lo es. Con lo cual si queremos probar que las secciones globales de este último haz son nulas, bastará verificar que tales secciones son genéricamente nulas. Esto nos permite suponer, luego de restringirnos a un abierto apropiado de X, que las variedades involucradas, el morfismo π y la foliación $\mathcal{G}$ son suaves. De esta manera el haz normal de $\mathcal{F}$ resulta ser igual a $N_{\mathcal{F}} = \pi^*N_{\mathcal{G}}$. Volviendo a pasar por un abierto más pequeño de ser necesario podemos suponer que $N_{\mathcal{G}} = \mathscr{O}_Y^q$. Por otra parte gracias a la hipótesis sobre las fibras y [Vak17, Cohomology and Base Change Theorem] podemos concluir que $\pi_*\Omega^1_{X/Y} = 0$, con lo cual

$$\mathrm{Hom}(T_{X/Y}, N_{\mathcal{F}}) = \Gamma\left(\Omega^1_{X/Y}\right)^q = \Gamma\left(\pi_*\Omega^1_{X/Y}\right)^q = 0$$

como queríamos probar. □

En particular si especializamos este lema en el caso donde $\mathcal{G}$ es la foliación por puntos obtenemos el siguiente resultado de rigidez de foliaciones dadas por fibraciones...

Corolario 2.3.1. *Si $\mathcal{F}$ es la foliación cuyas hojas son las fibras de un morfismo propio $\pi : X \to Y$ con fibra genérica suave y sin 1-formas globales, entonces el tangente $T_{\mathcal{F}} = T_{X/Y}$ es rígido como subhaz de T_X.*

Demostración del Teorema 2.3.1. Observemos que el haz coherente $\mathscr{E} = T_{\mathscr{X}/S}$ es playo sobre S, con lo cual la elección de un haz S-amplio $\mathscr{O}_{\mathscr{X}}(1)$ nos permite construir los esquemas $\mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ y $\mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}$. Sea $p \in \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ el punto sobre $s \in S$ correspondiente a la filtración

$$T_{X/Y} \subseteq T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X = \mathscr{E}|_s.$$

Gracias al Lema 2.3.1 sabemos que se verifica la condición (a) de la Proposición 2.2.1. A su vez, el subhaz $T_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}} \subseteq \mathscr{E}$ se corresponde con una sección $S \to \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}$ de morfismo estructural $\mathrm{Quot}_{\mathscr{E}} \to S$ cuya imagen contiene al punto $\varphi_1(p)$, y por ende la condición (b) es consecuencia del Corolario 2.3.1 y la suavidad de S. De la misma manera, la inclusión $T_{\mathscr{F}/S} \subseteq \mathscr{E}$ se corresponde con una sección $\sigma : S \to \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}}$ del morfismo estructural tal que $\sigma(s) = \varphi_2(p)$. Usando [Gro67, Corollaire 17.16.3] podemos encontrar un entorno étale $U \to S$ de s y un levantamiento $\tilde{\sigma} : U \to \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ S & \xrightarrow[\sigma]{} & \mathrm{Quot}_{\mathscr{E}} \end{array}$$

de manera que exista $u \in U$ con $\tilde{\sigma}(u) = p$. El morfismo $\tilde{\sigma} : U \to \mathrm{Drap}_{\mathscr{E}}$ se corresponde con una filtración $F_1 \subseteq T_{\mathscr{F}/U} \subseteq T_{\mathscr{X}/U}$. Por la rigidez de $T_{X/Y}$ podemos afirmar luego de reemplazar U por un entorno más pequeño que $F_1 = T_{\mathscr{X}/\mathscr{Y}}|_U$. El resultado se sigue del Lema 1.1.1. □

2.4. Deformaciones de hojas algebraicas

Definición 2.4.1. Supongamos que $Z \subseteq X$ es un subesquema cerrado de una variedad suave X. El haz de *campos de vectores logarítmicos* a lo largo de Z es el subhaz

$$T_X(-\log Z) \subseteq T_X$$

formado por aquellos campos de X que, al actuar como derivaciones de funciones, preservan al haz de ideales $I_{Z/X}$.

Cuando $Z \subseteq X$ es una subvariedad suave, al haz $T_X(-\log Z)$ de campos logarítmicos se lo puede enmarcar en el siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas [Ser07, pág. 177]:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & I_{Z/X} T_X \arrow[r, equal] \arrow[d] & I_{Z/X} T_X \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & T_X(-\log Z) \arrow[r] \arrow[d] & T_X \arrow[r] \arrow[d] & N_{Z/X} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_Z \arrow[r] \arrow[d] & T_X|_Z \arrow[r] \arrow[d] & N_{Z/X} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Definición 2.4.2. Un subesquema cerrado $Z \subseteq X$ es *invariante* por una foliación $\mathcal{F}$ sobre X si todos los campos tangentes a $\mathcal{F}$ preservan al haz $I_{Z/X}$, o en otros términos que

$$T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X(-\log Z).$$

Si además Z es irreducible y $\dim Z = \operatorname{rank} T_{\mathcal{F}}$ diremos que Z es una *hoja algebraica* de $\mathcal{F}$. Notar que en este caso $T_{\mathcal{F}}|_Z$ y T_Z coinciden fuera de los puntos singulares de Z y $\mathcal{F}$.

A partir de una subvariedad suave $Z \subseteq X$ obtenemos una aplicación

$$\varphi : \mathrm{Hilb}_X \dashrightarrow \mathrm{Quot}_{T_X}$$

que proviene de la asignación que manda una deformación $\mathscr{Z} \subseteq X \times S$ en inclusión

$$T_{X\times S/S}(-\log \mathscr{Z}) \subseteq T_{X\times S/S}.$$

La playitud de esta última familia es consecuencia de la suavidad tanto de Z como de X pues las deformaciones de la inclusión del primero en el segundo son localmente triviales. Mediante la identificación del normal $N_{Z/X}$ con el cociente $T_X/T_X(-\log Z)$ que proporciona el diagrama (2.2) podemos definir la aplicación

$$\mathscr{L} : \; N_{Z/X} \to \mathscr{H}om\left(T_X(-\log Z), N_{Z/X}\right) \tag{2.3}$$

que a cada sección local $[v]$ le asigna el morfismo $[v'] \mapsto [\mathscr{L}_v(v')]$ dado por la derivada de Lie entre campos de vectores sobre X. Esta construcción está bien definida porque $T_X(-\log Z) \subseteq T_X$ es cerrado por el corchete de Lie. Haciendo uso de [GM88, Thrm. 1.6], el diferencial de φ en el punto $Z \in \mathrm{Hilb}_X$ se identifica con

$$d\varphi = \mathscr{L} : \; \Gamma\left(N_{Z/X}\right) \to \mathrm{Hom}\left(T_X(-\log Z), N_{Z/X}\right). \tag{2.4}$$

Lema 2.4.1. *Supongamos que v es un germen de campo vectorial sobre X de manera que*

$$\left[v, T_X(-\log Z)\right] \subseteq T_X(-\log Z).$$

Entonces v es un germen en $T_X(-\log Z)$. En particular, (2.3) es un monomorfismo.

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas locales $x_1, \ldots, x_m$ de X tales que Z está definido por las ecuaciones $x_1 = \cdots = x_r = 0$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant r$ estamos asumiendo que $[v, x_i \partial_i]$ es un campo logarítmico, y por lo tanto el germen de función

$$[v, x_i \partial_i](x_i) = v(x_i) - x_i \partial_i(v(x_i))$$

se tiene que anular a lo largo de Z. Entonces $v(x_i)$ también es nulo en Z, y por ende v es un campo logarítmico. □

Teorema 2.4.1. *Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 sobre una variedad proyectiva suave X. Supongamos que Z es una hoja algebraica suave de $\mathcal{F}$ de manera que:*

(i) *Z es no obstruida como subvariedad de X, y*

(ii) $\Gamma(\Omega^1_Z \otimes N_{Z/X}) = \Gamma(\Omega^1_Z \otimes N^2_{Z/X}) = 0$.

Entonces, dada una deformación $\mathscr{F}/S$ de $\mathcal{F} = \mathscr{F}|_s$ de la forma

$$0 \to T_{\mathscr{F}/S} \to T_{X \times S/S} \to N_{\mathscr{F}/S} \to 0,$$

existe un entorno étale $U \to S$ de s y un deformación $\mathscr{Z} \subseteq X \times U$ de la subvariedad $Z \subseteq X$ de manera que $\mathscr{Z}|_u$ es una hoja algebraica de $\mathscr{F}|_u$ para todo $u \in U$.

Observación 2.4.1. Las hipótesis del Teorema 2.4.1 se verifican en cualquiera de los siguientes casos:

- Z es una fibra suave de una submersión $\pi : X \to C$ con $\Gamma(\Omega^1_Z) = 0$.
- X tiene dimensión $\geqslant 3$ y el line bundle $N^\vee_{Z/X}$ es amplio.
- X es una superficie y Z es una curva de género g de autointersección

$$Z^2 < \min\{0, 2 - 2g\}.$$

En el segundo y tercer escenario la subvariedad Z es rígida, dado que $\Gamma(N_{Z/X}) = 0$. Por el contrario en el primer caso Z solamente puede deformarse en otras fibras vecinas de $\pi : X \to C$. En el segundo ítem estamos usando tácitamente el Teorema de Anulación de Kodaira.

Demostración del Teorema 2.4.1. Nuestro objetivo será probar que las aplicaciones

$$\varphi : \mathrm{Hilb}_X \dashrightarrow \mathrm{Quot}_{T_X} \qquad \varphi_1 : \mathrm{Drap}_{T_X} \to \mathrm{Quot}_{T_X}$$

son suaves, respectivamente, en los puntos correspondientes a la subvariedad $Z \subseteq X$ y a la filtración de haces coherentes

$$T_{\mathcal{F}} \subseteq T_X(-\log Z) \subseteq T_X.$$

En primer lugar y siguiendo la Observación 2.2.1, el morfismo φ_1 será suave en la filtración previa cuando el grupo $\mathrm{Hom}(T_{\mathcal{F}}, N_{Z/X})$ sea nulo y el esquema Quot_{T_X} sea suave en $T_X(-\log Z) \subseteq T_X$. Al ser Z una hoja de $\mathcal{F}$ podemos afirmar que

$$\mathrm{Hom}(T_{\mathcal{F}}, N_{Z/X}) \simeq \mathrm{Hom}(T_{\mathcal{F}}|_Z, N_{Z/X}) \simeq \mathrm{Hom}(T_Z, N_{Z/X}) \simeq \Gamma(\Omega^1_Z \otimes N_{Z/X}) = 0.$$

Como Z es una subvariedad no obstruida, la demostración se reduce a probar únicamente la sobreyectividad de (2.4). A su vez, gracias al Lema 2.4.1, esto se reduce a verificar la validez de la desigualdad

$$\dim \operatorname{Hom}\left(T_X(-\log Z), N_{Z/X}\right) \leqslant \dim \Gamma\left(N_{Z/X}\right).$$

A partir de la primera columna del diagrama (2.2) obtenemos la sucesión exacta larga

$$0 \to \operatorname{Hom}\left(T_Z, N_{Z/X}\right) \to \operatorname{Hom}\left(T_X(-\log Z), N_{Z/X}\right) \to \operatorname{Hom}\left(I_{Z/X} T_X, N_{Z/X}\right) \to \cdots$$

El primero de estos términos es nulo por hipótesis, y por ende

$$\dim \operatorname{Hom}\left(T_X(-\log Z), N_{Z/X}\right) \leqslant \dim \operatorname{Hom}\left(I_{Z/X} T_X, N_{Z/X}\right) = \dim \Gamma\left(\Omega^1_X\big|_Z \otimes N^2_{Z/X}\right).$$

A partir de lo asumido en el ítem (ii) y la sucesión exacta conormal

$$0 \to N_{Z/X} \to \Omega^1_X\big|_Z \otimes N^2_{Z/X} \to \Omega^1_Z \otimes N^2_{Z/X} \to 0$$

abordamos a la igualdad $\dim \Gamma\left(\Omega^1_X\big|_Z \otimes N^2_{Z/X}\right) = \dim \Gamma\left(N_{Z/X}\right)$. En consecuencia podemos dar por finalizada la demostración. $\square$

3. Singularidades cónicas de foliaciones

Una de las familias de singularidades de variedades más sencillas de construir es aquella compuesta por los conos afines $C(X) \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ de subvariedades proyectivas $X \subseteq \mathbb{P}^n$, o más precisamente por sus gérmenes en el origen $(C(X), 0)$. Es natural preguntarse si pequeñas perturbaciones de una singularidad de este tipo siguen siendo cónicas. Esta problemática fue formalizada por M. Schlessinger en el artículo [Sch73] en términos de deformaciones versales. Si pedimos que X sea suave, un resultado clásico de Grauert [Gra71] dice que la singularidad aislada $(C(X), 0)$ posee una familia versal sobre cierta base (S, s). De esta manera la construcción del cono afín define un morfismo

$$C(-) : (\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^n}, X) \to (S, s).$$

entre el esquema de Hilbert de subvariedades de $\mathbb{P}^n$ y la familia versal de Grauert. Cuando X es proyectivamente normal, Schlessinger prueba que bajo las hipótesis

$$H^1(T_X(\ell)) = 0 \quad \forall \ell \neq 0$$

esta aplicación es suave, y por ende toda deformación de $(C(X), 0)$ proviene de tomar el cono de una deformación de la subvariedad $X \subseteq \mathbb{P}^n$, dando una respuesta afirmativa a la pregunta sobre la estabilidad de dichas singularidades.

El objetivo de este capítulo consiste en extrapolar estas ideas a un escenario foliado. En este nuevo contexto, el cono de una foliación $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^n$ será el pullback $(\pi^*\mathcal{F}, 0)$ por la proyección $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$. En el Teorema 3.3.1 probaremos una versión análoga del Teorema de Schlessinger para este tipo de singularidades cónicas de foliaciones: si $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión 1 y grado k sin factores integrantes polinomiales cuyo espacio de unfoldings de primer orden verifica

$$\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}}(\ell) = 0 \quad \forall \ell \neq k,$$

entonces deformaciones del cono $(\pi^*\mathcal{F}, 0)$ se obtienen como el cono de una deformación de $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{P}^n$. Notar la similitud entre las hipótesis de ambas versiones. Para poner a estas últimas en contexto, comenzaremos con una breve introducción de la teoría de unfoldings de gérmenes de foliaciones desarrollada por Suwa en los artículos [Suw85] y [Suw92]. A falta de la existencia de una familia versal para singularidades de foliaciones con la generalidad que propuso Grauert, nuestra principal herramienta analítica será el Teorema 3.1.1 de Suwa.

3.1. Unfoldings de gérmenes de foliaciones

A lo largo de este capítulo vamos a trabajar, salvo mención explícita, sobre la categoría de gérmenes de foliaciones analíticas sobre espacios complejos normales.

Definición 3.1.1. Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación de codimensión q sobre (X, x). Un *unfolding* de $\mathcal{F}$ sobre una deformación $i : (X, x) \hookrightarrow (\mathscr{X}, x)$ consiste en un germen de foliación $\mathscr{F}$ de codimensión q sobre esta familia de manera que $i^*\mathscr{F} = \mathcal{F}$.

Dos unfoldings $\mathscr{F}$ y $\mathscr{F}'$ sobre una misma familia $(\mathscr{X}, x)$ son *equivalentes* si existe un automorfismo de deformaciones $\varphi : (\mathscr{X}, x) \to (\mathscr{X}, x)$ tal que $\varphi^*\mathscr{F} = \mathscr{F}'$. Cuando la base de la deformación en cuestión es el esquema $S = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ diremos que $\mathscr{F}$ es un *unfolding de primer orden*. Todo unfolding $\mathscr{F}$ determina naturalmente una deformación $\mathscr{F}/S$ de la foliación $\mathcal{F}$. El haz $I_{\mathscr{F}/S}$ que caracteriza a esta familia viene dado por la imagen de la composición

$$I_{\mathscr{F}} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{X}} \to \Omega^{[1]}_{\mathscr{X}/S}.$$

Si $\mathscr{F}$ está definida por una q-forma ϖ, vamos a denotar por $\omega_s = i_s^*\varpi$ a la q-forma que define a la foliación sobre la fibra $i_s : \mathscr{X}_s \hookrightarrow \mathscr{X}$.

A los efectos prácticos de la exposición este capítulo vamos a suponer de ahora en adelante que $\mathcal{F}$ tiene codimensión 1 y está definida sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ por un germen de 1-forma ω. Para simplificar denotemos por $\mathscr{O}_n$ al anillo de gérmenes de funciones holomorfas de $\mathbb{C}^n$ en el origen, y sean Ω^p_n y T_n los correspondientes $\mathscr{O}_n$-módulos de p-formas y campos vectoriales. Por último lugar $\mathfrak{m}$ será el ideal maximal de $\mathscr{O}_n$. Como las deformaciones de $(\mathbb{C}^n, 0)$ son triviales, los unfoldings de primer orden $\mathscr{F}$ de $\mathcal{F}$ están determinados por una 1-forma diferencial

$$\varpi = \omega + \eta\varepsilon + h d\varepsilon$$

con $\eta \in \Omega^1_n$ y $h \in \mathscr{O}_n$ que verifique la condición de Frobenius $\varpi \wedge d\varpi = 0$. Usando que $\varepsilon d\varepsilon = 0$, por medio de cómputos elementales se puede concluir que la condición de integrabilidad es equivalente a la expresión

$$h d\omega = \omega \wedge (\eta - dh).$$

Los otros posibles representantes de $\mathscr{F}$ cuya restricción es igual a ω son de la forma

$$(1 + g\varepsilon)\varpi = \omega + (\eta + g\omega)\varepsilon + h d\varepsilon$$

con $g \in \mathscr{O}_n$ inversible. Por este motivo los unfoldings de primer orden de ω están en correspondencia biyectiva con los elementos del conjunto

$$I(\omega) = \left\{ h \in \mathscr{O}_n : \ h d\omega = \omega \wedge \sigma \text{ para algún } \sigma \in \Omega^1_n \right\}.$$

Por otra parte se puede comprobar que los unfoldings equivalentes al unfolding trivial $\varpi = \omega$ son aquellos me vía esta identificación pertenecen al conjunto

$$J(\omega) = \left\{ h \in \mathscr{O}_n : \ h = i_v\omega \text{ para algún } v \in T_n \right\}.$$

Al contraer ambos miembros de la condición de integrabilidad $\omega \wedge d\omega = 0$ por un campo $v \in T_n$ cualquiera podemos inferir que $J(\omega) \subseteq I(\omega)$. Todo este discurso se sintetiza en la forma de la siguiente afirmación:

Proposición 3.1.1. *El conjunto de clase de equivalencia de unfoldings de primer orden de la foliación $\mathcal{F}$ definida por $\omega \in \Omega^1_n$ está en biyección con*

$$\operatorname{Unf}_\omega = I(\omega)/J(\omega).$$

Las clases de isomorfismo de los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $I(\omega)$, $J(\omega)$ y $\operatorname{Unf}_\omega$ son independientes del representante ω de la foliación $\mathcal{F}$. Por este motivo cometeremos el abuso notacional $\operatorname{Unf}_{\mathcal{F}} = \operatorname{Unf}_\omega$ cuando querramos omitir la elección de la 1-forma ω. En caso de que $\mathcal{F}$ sea una foliación sobre $\mathbb{P}^n$ denotaremos por $\operatorname{Unf}_{\mathcal{F}}$ al espacio de unfoldings de primer orden de la foliación sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ dada por el cono $\pi^*\mathcal{F}$ con $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ la proyección al cociente.

Ejemplo 10. Supongamos que $\omega \in \Omega^1_n$ tiene una integral primera holomorfa, es decir que $\omega = g df$ para cierto par de gérmenes de funciones $f, g \in \mathcal{O}_n$ con $g(0) \neq 0$. Entonces

$$\mathrm{Unf}_\omega \simeq \frac{\mathcal{O}_n}{(\partial f/\partial z_1, \dots, \partial f/\partial z_n)}.$$

Esta cuenta dice en particular que $\mathrm{Unf}_\omega = 0$ si ω no se anula en el origen gracias al Teorema de Frobenius.

Ejemplo 11. Veamos que si ω tiene una singularidad de tipo Kupka en el origen, entonces $\mathrm{Unf}_\omega = 0$. Por el Teorema de Kupka [NS20, pág.197] existe un sistema de coordenadas $z_1, \dots, z_n$ de manera que ω solo depende de las primeras dos variables. Digamos que $\omega = a_1 dz_1 + a_2 dz_2$ con a_1 y a_2 dependiendo exclusivamente de z_1 y z_2. Si $h d\omega = \omega \wedge \sigma$, entonces los sumandos de σ que sean múltiplos de dz_i con $3 \leqslant i \leqslant n$ tienen que ser nulos. Por ende tiene que ser de la forma $\sigma = b_1 dz_1 + b_2 dz_2$. Usando que el coeficiente de $d\omega = (\partial a_2/\partial z_1 - \partial a_1/\partial z_2) dz_1 \wedge dz_2$ tiene que ser inversible inferimos que

$$\begin{aligned} h d\omega = \omega \wedge \sigma \quad &\Rightarrow \quad h(\partial a_2/\partial z_1 - \partial a_1/\partial z_2) dz_1 \wedge dz_2 = (a_2 b_1 - a_1 b_2) dz_1 \wedge dz_2 \\ &\Rightarrow \quad h(\partial a_2/\partial z_1 - \partial a_1/\partial z_2) = (a_2 b_1 - a_1 b_2) \\ &\Rightarrow \quad h = (\partial a_2/\partial z_1 - \partial a_1/\partial z_2)^{-1}(a_2 b_1 - a_1 b_2). \end{aligned}$$

Luego $h \in (a_1, a_2) = J(\omega)$, como queríamos ver.

Destaquemos también que los miembros de los módulos $\mathcal{O}_n$, Ω^p_n y T_n se descomponen formalmente como suma de elementos graduados. Esta graduación está determinada por las identidades $\deg x_i = \deg dx_i = -\deg \partial/\partial x_i = 1$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Vamos a denotar por $\mathcal{O}_n(\ell)$, $\Omega^p_n(\ell)$ y $T_n(\ell)$ a las respectivas componentes homogéneas de grado $\ell \in \mathbb{Z}$. Cuando ω es homogénea de grado k todo miembro de los espacios $I(\omega)$, $J(\omega)$ y Unf_ω de descomponen formalmente como suma de sus componentes graduadas $I(\omega)(\ell)$, $J(\omega)(\ell)$ y $\mathrm{Unf}_\omega(\ell)$ respectivamente. Por otra parte recordemos que un *factor integrante* de ω es un germen $h \in \mathcal{O}_n$ tal que $d(\omega/h) = 0$. Equivalentemente, el espacio de factores integrantes de ω es

$$K(\omega) = \{h \in \mathcal{O}_n : \ h d\omega = dh \wedge \omega\}.$$

Evidentemente hay una contención $K(\omega) \subseteq I(\omega)$. Para lo que sigue vamos a necesitar los siguientes conjuntos intermedios

$$I^{(k)}(\omega) = \{h \in \mathcal{O}_n : \ h d\omega = \omega \wedge (\eta - dh) \text{ para algún } \eta \in \mathfrak{m}^{k-1}\Omega^1_n\}.$$

Definición 3.1.2. Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación de codimensión 1 sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ inducido por una 1-forma ω.

- Un unfolding $\mathscr{F}$ de $\mathcal{F}$ sobre $(\mathbb{C}^{n+m}, 0)$ es k-*trivial* si hay una igualdad entre los k-jets (centrados en el origen) $j^k\omega_s = j^k\omega$ para todo $|s| \ll 1$.
- $\mathcal{F}$ está *localmente* k-*determinada* si para todo unfolding k-trivial $\mathscr{F}$ de $\mathcal{F}$ sobre $(\mathbb{C}^{n+m}, 0)$ las 1-formas ω_s y ω determinan foliaciones isomorfas para todo $|s| \ll 1$.
- $\mathcal{F}$ está *infinitesimalmente* k-*determinada* si $I^{(k+1)}(\omega) \subseteq \mathfrak{m}J(\omega) + K(\omega)$.

Teorema 3.1.1 ([Suw85, pág. 991]). *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación de codimensión 1 sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ inducido por una 1-forma ω tal que*

$$\dim K(\omega)/\mathfrak{m}J(\omega) \cap K(\omega) < \infty.$$

Si $\mathcal{F}$ está infinitesimalmente k-determinada, entonces está localmente k-determinada.

En el marco de la Teoría de Singularidades clásica un resultado de Tougeron afirma que todo germen de singularidad aislada $f \in \mathcal{O}_n$ con número de Milnor $\mu = \mu(f)$ está $(\mu+1)$-determinada, es decir que f es equivalente a su $(\mu+1)$-jet [AVGZ12]. Usando el Teorema de Suwa se puede establecer el siguiente criterio de determinación finita para gérmenes de foliaciones de la misma naturaleza:

Proposición 3.1.2. *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación de codimensión 1 sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$ inducido por ω. Supongamos que $j^{k-1}\omega = 0$ y $\omega_k = j^k\omega$ es una 1-forma homogénea no nula sin factores integrantes polinomiales que satisface*

$$\mathrm{Unf}_{\omega_k}(\ell) = 0 \quad \forall\, \ell > k.$$

Entonces ω y ω_k inducen foliaciones isomorfas.

Esta proposición es una mera adaptación de un teorema de Molinuevo y Quallbrunn [MQ17]. Al igual que en la demostración del Teorema de Tougeron, la estrategia de los autores (y también la nuestra) consiste en aplicar el *método homotópico* de Thom. Específicamente, la expresión

$$\overline{\omega}(x, s) = \sum_{\ell \geqslant k} s^{\ell-k}\, \omega_\ell(x)$$

determina una familia que interpola a las formas $\overline{\omega}(x, 0) = \omega(x)$ y $\overline{\omega}(x, 1) = \omega_k(x)$. Este es un unfolding dado que $s^k\overline{\omega}(x, s) = \omega(sx)$ es claramente integrable, que además es k-trivial (como unfolding del germen ω_s para todo $0 \leqslant s \leqslant 1$). Si logramos justificar que ω_s está localmente k-determinada, para cualquier par de valores de $0 \leqslant s \leqslant 1$, las foliaciones que inducen estas formas tienen que ser isomorfas.

Demostración. Por el Teorema 3.1.1 bastará probar que la foliación $\mathcal{F}$ está infinitesimalmente k-determinada. Dado un germen $h \in I^{(k+1)}(\omega_k)$, por definición tiene que existir una 1-forma $\eta \in \mathfrak{m}^k\Omega^1_n$ de manera que

$$h d\omega_k = \omega_k \wedge (\eta - dh).$$

Sean $h = \sum_{\ell \geqslant 0} h_\ell$ y $\eta = \sum_{\ell \geqslant 0} \eta_\ell$ las descomposiciones en componentes homogéneas de estos elementos. Como ω_k es homogénea la ecuación previa se desacopla en las identidades

$$h_\ell d\omega_k = \omega_k \wedge (\eta_\ell - dh_\ell)$$

con $\ell \geqslant 0$. La condición sobre η implica que $\eta_\ell = 0$ para todo $\ell \leqslant k$ (las 1-formas tienen grado positivo) y por ende $h_\ell = 0$ para la misma colección de índices (pues ω_k no tiene factores integrantes polinomiales). Para cualquier valor restante $\ell > k$ la condición $\mathrm{Unf}_{\omega_k}(\ell) = 0$ implica la existencia de un campo $\nu_{\ell-k} \in T_n$ homogéneo de grado $\ell - k$ tal que $h_\ell = i_{\nu_{\ell-k}}\omega_k$. Consecuentemente el campo $\nu = \sum_{\ell > k} \nu_{\ell-k}$ se anula en el origen y es una solución formal de la ecuación $h = i_\nu \omega_k$. Por el Teorema de Aproximación de Artin [Art68] tiene que existir una solución analítica que pertenezca a $\mathfrak{m}T_n$. Luego, $h \in \mathfrak{m}J(\omega_k) = \mathfrak{m}J(\omega_k) + K(\omega_k)$ como queríamos probar. □

Observación 3.1.1. Una 1-forma $\omega_k \in \Omega^1_n$ homogénea de grado k sin factores integrantes polinomiales como la que aparece en el enunciado de la Proposición 3.1.2 necesariamente tiene que descender al espacio proyectivo. Más generalmente: si el campo $\nu \in T_n$ es una *simetría* de un germen de foliación $\omega \in \Omega^1_n$, es decir que

$$L_\nu\omega \wedge \omega = 0,$$

entonces $h = i_\nu\omega$ es un factor integrante polinomial de ω. En efecto,

$$dh \wedge \omega = (L_\nu\omega - i_\nu d\omega) \wedge \omega = -i_\nu d\omega \wedge \omega = h d\omega.$$

El campo radial de Euler

$$R = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}$$

es una simetría para cualquier 1-forma homogénea pues luego de un cómputo sencillo se obtiene la clásica identidad $L_R\omega_k = k\omega_k$. Yendo aún más lejos, tales 1-formas homogéneas sin factores integrantes polinomiales son exactamente aquellas que no pertenecen a ninguna de las componentes logarítmicas del espacio de móduli de foliaciones sobre $\mathbb{P}^n$ (ver [dCLP22]).

3.2. Regularidad de Camacho-Lins Neto

Como hemos visto en el primer capítulo existen dos familias de singularidades estables de foliaciones de codimensión 1: las singularidades de tipo Morse y de tipo Kupka. A continuación agregaremos una familia más a la lista, aquellas denominadas singularidades *regulares*. Las mismas fueron introducidas por Camacho y Lins Neto en [CLN82]. Posteriormente Molinuevo descubrió que la condición de regularidad está íntimamente los unfoldings de primer orden de la propia foliación [Mol16].

Supongamos que $\omega \in \Omega^1_n$ es una 1-forma integrable y homogénea de grado k. Consideremos el complejo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales

$$C^\bullet_\omega : \quad T_n \to \Omega^1_n \to \Omega^3_n$$

que comienza en grado cero, y cuyos diferenciales son

$$d^0(\nu) = L_\nu\omega,$$
$$d^1(\eta) = \eta \wedge d\omega + \omega \wedge d\eta.$$

Notar que la composición de ambos morfismos es cero pues $d^1 \circ d^0 = L_\nu(\omega \wedge d\omega)$. Por la homogeneidad de ω, para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ obtenemos un subcomplejo

$$C^\bullet_\omega(\ell) : \quad T_n(\ell - k) \to \Omega^1_n(\ell) \to \Omega^3_n(\ell + k).$$

Definición 3.2.1. Diremos que ω es *regular*, en el sentido de Camacho-Lins Neto, si

$$H^1\big(C^\bullet_\omega(\ell)\big) = 0 \quad \forall\, \ell < k.$$

El *rango* de ω es la dimensión del espacio de 1-cobordes del complejo $C^\bullet_\omega(k-1)$, es decir, la dimensión de la imagen del diferencial $d^0 : T_n(-1) \to \Omega^1_n(k-1)$.

Teorema 3.2.1 ([Mol16, pág. 1600 y 1608]). *Dada una* 1*-forma integrable* $\omega \in \Gamma\big(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k)\big)$*, existen isomorfismos de* $\mathbb{C}$*-espacios vectoriales*

$$\mathrm{Unf}_\omega(\ell) \simeq H^1\big(C^\bullet_\omega(\ell)\big)$$

para todo $\ell \neq k$*. En particular,* ω *es regular si y sólo si* $\mathrm{Unf}_\omega(\ell) = 0$ *para todo* $\ell < k$*.*

Este Teorema se obtiene combinando la Proposición 3.1.5, el Corolario 6.1.8 y el Teorema 3.2.2 del citado artículo. Este par de espacios dejan de ser isomorfos en general si $\ell = k$. Los elementos de las primeras cuatro familias de foliaciones de la Tabla 2 de [dCLP22] cumplen que $\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}}(k) = 0 \neq H^1\big(C^\bullet_\omega(k)\big)$ (como veremos más adelante, por la Proposición 3.4.1 se verifica $\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}} = 0$ pero estas foliaciones no son rígida).

Definición 3.2.2. Sea $\mathcal{F}$ una foliación de codimensión 1 sobre X. Diremos que una singularidad p de $\mathcal{F}$ es *regular de grado* k *y rango* r si X es suave en p y existe un germen de 1-forma $\omega \in \Omega^1_{X,p}$ que defina a $\mathcal{F}$ cuyo k-jet $j^k_p\omega$ sea homogéneo y regular de rango r.

Teorema 3.2.2 ([CLN82, pág. 8]). *Sea* $\mathcal{F}$ *una foliación de codimensión* 1 *sobre* X*.*

(a) El conjunto $M^r_k(\mathcal{F})$ *de singularidades regulares de grado* k *y rango* r *de* $\mathcal{F}$ *es, asumiéndolo no vacío, un subesquema suave de* X *de codimensión* r*.*

(b) Dada una deformación $\mathscr{F}/S$ *de* $\mathcal{F}$ *como sistema de Pfaff involutivo sobre* $\mathscr{X}/S$ *y base suave* S*, el conjunto* $M^r_k(\mathscr{F}) = \bigcup_{s\in S} M^r_k(\mathscr{F}_s)$ *es suave sobre* S*.*

3.3. Estabilidad de singularidades cónicas

A la hora de clasificar ciertos objetos algebro-geométricos es deseable encontrar un espacio cuyos puntos están en correspondencia biyectiva con las clases de isomorfismo del problema en cuestión. En caso de existir, este se denomina el *espacio de móduli* de los objetos en consideración. En la práctica este sueño es demasiado idealista. Por ejemplo, las singularidades aisladas de funciones no admiten un espacio con estas características tan restrictivas. Sin embargo en algunos contextos se puede encontrar reemplazos con propiedades más laxas, las renombradas *familias versales*[1].

Definición 3.3.1. Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación sobre $(\mathbb{C}^n, 0)$. Una deformación analítica $\mathscr{F}/\mathbb{C}^m$ de $\mathcal{F}$ sobre $(\mathbb{C}^{n+m}, 0)$ se dice **versal** si para cualquier otra deformación $\mathscr{F}'/\mathbb{C}^{m'}$ de $\mathcal{F}$ sobre $(\mathbb{C}^{n+m'}, 0)$ existe un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{C}^n,0) \arrow[dl, hook] \arrow[dr, hook] & \\ (\mathbb{C}^{n+m'},0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d] & & (\mathbb{C}^{n+m},0) \arrow[d] \\ (\mathbb{C}^{m'},0) \arrow[rr] & & (\mathbb{C}^m,0) \end{tikzcd}$$

de manera que $\varphi^*(\mathscr{F}/\mathbb{C}^m) \simeq \mathscr{F}'/\mathbb{C}^{m'}$.

[1]En la literatura no hay un consenso con respecto a la definición. Comparar por ejemplo con [Ser07].

Notar que la definición no requiere que el morfismo φ sea único. Por este motivo las familias versales no están unívocamente determinadas. De hecho existen familias versales con bases arbitrariamente grandes, como se puede observar simplemente agregando variables. Si en la definición previa pedimos además que φ sea único, entonces diremos que la familia en cuestión es *universal*. De esta manera se justifica la nomenclatura pues "versal + unicidad = universal".

En presencia de hipótesis de compacidad las deformaciones están mejores comportadas en general. Este es el caso de las deformaciones de subvariedades $X \subseteq \mathbb{P}^n$ debido a la existencia de la familia universal $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathrm{Hilb}_X$. Lo mismo ocurre para foliaciones sobre $\mathbb{P}^n$. El *espacio de móduli* de foliaciones de codimensión 1 y grado k sobre $\mathbb{P}^n$ es el esquema

$$\mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^n,k} = \Big\{[\omega] \in \mathbb{P}\big(\Gamma(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}(k))\big) : \ \omega \wedge d\omega = 0, \ \operatorname{codim} S(\omega) \geqslant 2\Big\}.$$

Este tiene anexada una familia universal de foliaciones de este tipo con base $S = \mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^n,k}$ que, en lugar de opción más decorada, denotaremos simplemente como $\mathscr{F}/S$.

Como fue mencionado en la introducción de este capítulo, Grauert probó la existencia de una familia versal para cualquier singularidad de función aislada. En el caso de singularidades de foliaciones no se conocen, hasta donde llega nuestro conocimiento, familias versales con ese nivel de generalidad. No obstante podemos exhibir una explícitamente en el caso cónico:

Teorema 3.3.1. *Supongamos que $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión 1 y grado k sobre $\mathbb{P}^n$ sin factores integrantes polinomiales tal que*

$$\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}}(\ell) = 0 \qquad \forall\, \ell \neq k.$$

Sea $\mathscr{F}/S$ la familia universal de foliaciones de codimensión 1 y grado k sobre $\mathbb{P}^n$. Denotemos por $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ a la proyección al cociente, y sea $0 \in S$ tal que $\mathscr{F}_0 = \mathcal{F}$. Entonces $\big(\pi^*\mathscr{F}/S, 0\big)$ es una deformación versal del cono $(\pi^*\mathcal{F}, 0)$.

Vale la pena resaltar la conexión entre el Teorema 3.3.1 y el trabajo de Cerveau y Mattei sobre espacios de móduli de foliaciones sobre $\mathbb{C}^{n+1}$ determinadas por 1-formas homogéneas de grado k prefijado [CM82, Quatrième partie]. Allí prueban que las componentes irreducibles de dicho espacio son las componentes logarítmicas y aquellas componentes no logarítmicas de $\mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^n,k}$. Notar que las deformaciones de gérmenes analíticos consideradas en este capítulo se escapan de estos espacios de 1-formas polinomiales, razón por la cual ninguno de estos dos resultados implica al otro.

Demostración. Tomemos una deformación $\mathscr{F}'/\mathbb{C}^{m'}$ de la foliación $\mathcal{F}$. Por el Teorema 3.2.2 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathscr{F}'_s$ tiene una singularidad regular en el origen para todo $|s| \ll 1$. Por la semicontinuidad de la dimensión del espacio $K(\omega)$ en familias, las foliaciones $\mathscr{F}'_s$ tampoco tendrán factores integrantes polinomiales. La Proposición 3.1.2 junto con la observación situada inmediatamente después de su demostración nos permiten suponer además que $\mathscr{F}'/\mathbb{C}^{m'}$ desciende al espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$. El resto de deduce de la versalidad de la deformación $\mathscr{F}/S$. □

3.4. Conos de foliaciones split

La principal fuente de ejemplos de foliaciones $\mathcal{F}$ que verifiquen las hipótesis del Teorema 3.3.1 son aquellas de tipo *split*, es decir, aquellas cuyo haz tangente $T_{\mathcal{F}}$ es suma directa de line bundles.

Proposición 3.4.1 ([MMQ15, pág. 21])**.** *Sea $\mathcal{F}$ una foliación split de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$ tal que* $\mathrm{Sing}(d\omega)$ *tenga codimensión mayor o igual que* 3*. Entonces* $\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}} = 0$*.*

A partir de la identidad $i_R d\omega = k\omega$, válida para 1-formas dicríticas de grado k, queda claro que $\mathrm{Sing}(d\omega) \subseteq \mathrm{Sing}(\omega)$ y por ende el conjunto de ceros de $d\omega$ coincide con el conjunto de singularidades no Kupka de la foliación. A continuación presentaremos una demostración alternativa y directa de este resultado basada en los argumentos [CS91, Thrm 3.1]. La Proposición 3.4.1 es consecuencia inmediata de lo siguiente:

Lema 3.4.1. *Supongamos que $\mathcal{F}$ es una foliación de codimensión 1 sobre* $(\mathbb{C}^n, 0)$ *tal que $T_{\mathcal{F}}$ es libre y las singularidades de $\mathcal{F}$ que no son Kupka forman un cerrado de codimensión mayor o igual que 3. Entonces* $\mathrm{Unf}_{\mathcal{F}} = 0$*.*

Demostración. Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ un abierto Stein que contenga al origen y $\omega \in \Gamma(\Omega^1_U)$ un representante de $\mathcal{F}$. Sea $\{U_i\}_i$ un buen cubrimiento del abierto $U \setminus \mathrm{Sing}(\omega) \cap \mathrm{Sing}(d\omega)$. Como vimos en los Ejemplos 10 y 11, dado un $h \in I(\omega)$ podemos encontrar campos $X_i \in \Gamma(T_{U_i})$ tales que $h = i_{X_i}\omega$. En particular $i_{X_i - X_j}\omega = 0$, y por ende las diferencias $\{X_i - X_j\}_{ij}$ forman un 1-cociclo de Čech con coeficientes en $T_{\mathcal{F}}$. Como $H^1(U, T_{\mathcal{F}}) = 0$ (ver [GR79, pág. 133]), tienen que existir secciones $Y_i \in \Gamma(T_{\mathcal{F}}|_{U_i})$ tales que $X_i - X_j = Y_i - Y_j$. De esta manera podemos construir un campo X sobre $U \setminus \mathrm{Sing}(\omega) \cap \mathrm{Sing}(d\omega)$ tal que $X|_{U_i} = X_i - Y_i$. Por el Teorema de Hartogs este campo se extiende a un campo $X \in \Gamma(T_U)$ el cual verifica la igualdad $h = i_X\omega$. □

Pasemos a enumerar familias de ejemplos que verifican las hipótesis del Teorema 3.3.1:

Ejemplo 12. Una foliación por curvas genérica[2] de grado $k \geqslant 4$ sobre $\mathbb{P}^2$ tiene solamente singularidades de tipo Kupka [LN88] y no tiene factores integrantes polinomiales (de hecho, estas foliaciones no tienen hojas algebraicas [Jou06, pág. 158]).

Ejemplo 13 ([dCLP22, pág. 10])**.** La siguiente familia de ejemplos proviene de foliaciones sobre $\mathbb{P}^3$ tangentes a una acción multiplicativa. Estos son los elementos genéricos de ciertos subconjuntos cerrados $TM_d(a, b, c; n) \subseteq \mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^3, d+2}$ que describiremos a continuación. Sean $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$ enteros no negativos sin divisores en común. Consideremos el campo

$$v_{(a,b,c)} = ax_0\frac{\partial}{\partial x_0} + bx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + cx_2\frac{\partial}{\partial x_2},$$

descripto en coordenadas homogéneas. Los elementos de $TM_d(a, b, c; n)$ son aquellas foliaciones sobre $\mathbb{P}^3$ de grado $d + 2$ que salvo un cambio de coordenadas lineal están determinadas por una 1-forma ω que verifica las condiciones

$$i_{v_{(a,b,c)}}\omega = 0, \quad L_{v_{(a,b,c)}}\omega = n\omega.$$

[2] En este caso significa que $[\omega] \in \mathbb{P}\big(\Gamma(\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(k)\big)$ pertenece a cierta intersección contable de abiertos Zariski no vacíos.

Para elecciones $d \geqslant 3$ y $1 \leqslant a < b < c$, el [dCLP22, Thrm 4.12] presenta una caracterización en términos de los parámetros enteros involucrados de aquellas componentes irreducibles de la forma $\mathrm{TM}_d(a, b, c; n)$ cuyo elemento genérico es split y tiene a lo sumo finitas singularidades no Kupka. Por otra parte la Proposition 4.5 del mismo artículo establece un criterio para determinar cuándo estas foliaciones tienen un factor integrante polinomial. En la Tabla 2 hay una tabla exhaustiva con todas las posibles componentes que verifican estas dos condiciones incluyendo los casos degenerados $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \neq 0$.

Ejemplo 14 ([CN96, pág. 580])**.** Una de las 6 componentes irreducibles del espacio de móduli $\mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^n,4}$ con $n \geqslant 3$ es la renombrada *componente excepcional* $E(n)$. Para poder describirlas vamos a considerar la acción del grupo de afín

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{C}^*, \;\; b \in \mathbb{C} \right\}$$

sobre el espacio $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^3 \mathbb{C}^2)$ de formas binarias de grado 3 vía cambios de coordenadas. El álgebra de Lie afín $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ está generada por las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales actúan sobre la base $z_i = x^{3-i}y^i$ de $\mathrm{Sym}^3 \mathbb{C}^2$ como

$$X \cdot z_i = (3 - 2i)z_i, \quad Y \cdot z_i = z_{i+1}.$$

Por lo tanto se escriben en estas coordenadas como

$$X = \sum_{i=0}^{3} (3 - 2i) z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad Y = \sum_{i=0}^{2} z_{i+1} \frac{\partial}{\partial z_i}.$$

Estos campos inducen una foliación split $\mathcal{F}$ de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^3$ que tiene na única singularidad no Kupka [CAC06, pág. 10]. La componente $E(n) \subseteq \mathrm{Fol}_{\mathbb{P}^n,4}$ es la clausura del conjunto de foliaciones de la forma $\pi^*\mathcal{F}$, con $\pi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ una proyección lineal.

Ejemplo 15 ([CP08, pág. 5])**.** Más generalmente, consideremos álgebra de Lie generada por los siguientes campos vectoriales sobre $\mathbb{P}^n$:

$$X = \sum_{i=0}^{n} (n - 2i) z_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad Y_j = \sum_{i=0}^{n-k} z_{i+j} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad j = 1, \ldots, n-2.$$

Tomando pullbacks lineales de la foliación inducida se obtienen nuevas componentes irreducibles generalizando a las componentes excepcionales.

En este artículo se pueden encontrar además dos álgebras de Lie $\mathfrak{g}_6$ y $\mathfrak{g}_7$ que determinan foliaciones rígidas de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^6$ y $\mathbb{P}^7$ respectivamente cuyos conos también son estables (ver [CP08, Prop. 6.9]).

4. Foliaciones pullback vía mapas racionales

Continuando la línea de trabajo, generalizaremos parcialmente algunos de los resultados sobre estabilidad de pullback de foliaciones por morfismos, centrándonos en los pullbacks a través de mapas racionales.

Entre los primeros antecedentes del fenómeno de estabilidad se destaca [GMLN91] donde Gómez-Mont y Lins Neto estudiaron las deformaciones de foliaciones con integral primera racional $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Posteriormente, el segundo de los autores junto a Cerveau y Edixhoven prueban que para elecciones genéricas de una foliación $\mathcal{G}$ sobre el plano proyectivo y un mapa racional $\pi : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ las foliaciones de la forma $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ también son estables [CNE01]. En pocas palabras, la técnica de la demostración se basa en la estabilidad de las singularidades de este tipo de foliaciones junto con una serie de argumentos topológicos.

Con el tiempo apareció una nueva estrategia propuesta por Cukierman, Pereira y Vainsencher que no solo les permitió volver a probar que las foliaciones racionales son estables, si no que además pudieron inferir que dentro del espacio de móduli de foliaciones de codimensión uno sobre $\mathbb{P}^m$ las componentes de foliaciones pullback son genéricamente reducidas [CPV07]. El método consiste en parametrizar a las foliaciones racionales y ver que genéricamente la derivada de esta aplicación es sobreyectiva. Siguiendo estas ideas Gargiulo Acea, Molinuevo, Quallbrunn y Velazquez lograron probar la estabilidad de pullbacks de foliaciones sobre el espacio proyectivo con pesos por mapas racionales $\pi : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}_w$ [GAMQV22].

El objetivo de este capítulo es presentar una variación de este último teorema para el caso $\mathbb{P}_w = \mathbb{P}^n$, pero permitiendo dominios más generales. La demostración seguirá las ideas originales de [GMLN91] y [CNE01]. Los argumentos topológicos serán sustituidos por otros de carácter algebro-geométrico. En resumidas cuentas vamos a resolver el mapa racional $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ por un morfismo $\widetilde{X} \to \mathbb{P}^n$ para luego aplicar el Teorema 2.3.1.

4.1. Mapas racionales genéricos

Definición 4.1.1. Sean X una variedad proyectiva normal y $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa racional dominante determinado por un line bundle amplio L sobre X y secciones $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(L)$. Diremos que π **genérico** si

(a) Las secciones s_i se intersecan transversalmente en B,

(b) X es suave a lo largo de todos los puntos del base locus B.

Lema 4.1.1. *Dado un punto $p \in B$ en el base locus de un mapa racional genérico $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, existe un sistema de coordenadas holomorfo $\varphi : U \to \mathbb{C}^m$ alrededor de p con $\varphi(p) = 0$ de* *manera que*

$$\pi \circ \varphi^{-1}(z_0, \dots, z_{m-1}) = [z_0 : \dots : z_n].$$

Demostración. Simplemente basta tomar un entorno analítico U de p suficientemente pequeño de manera que $L|_U \simeq \mathscr{O}_U$ y extender las restricciones $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(\mathscr{O}_U)$ a un sistema de coordenadas (notar que esto es posible gracias a ambas condiciones de genericidad). $\square$

Para esta clase mapas, la topología del dominio X impone restricciones topológicas sobre las fibras de π como prueba el siguiente resultado de "tipo Lefschetz":

Proposición 4.1.1. *Supongamos que X es una intersección completa local de dimensión m y $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ es un mapa racional genérico de manera que $m-n \geqslant 2$ y $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$. Entonces toda fibra F de π es conexa y también satisface que $H^1(F, \mathbb{C}) = 0$.*

Demostración. La base de la prueba consiste en aplicar la versión de Fulton-Lazarsfeld del Teorema de las Secciones Hiperplanas de Lefschetz [FL06, pág. 28]. Para ello necesitaremos probar que podemos embeber a X en un espacio proyectivo suficientemente grande $\mathbb{P}^N$ de manera que F sea la intersección conjuntística de X con n hiperplanos. Si este fuese el caso, el teorema mencionado en conjunción con la hipótesis $m-n \geqslant 2$ nos garantizaría que el par (X, F) es 2-conexo. Por el Teorema de Hurewicz Relativo esto implica que $H_k(X, F) = 0$ para $0 \leqslant k \leqslant 2$, y finalmente $H^1(F, \mathbb{C}) = 0$ por el Teorema de Coeficientes Universales. Procedamos entonces a buscar dicho embedding.

Sea F la fibra de π sobre el punto $p \in \mathbb{P}^n$. Sean $h_i \in \Gamma\big(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\big)$ con $0 \leqslant i \leqslant n$ de manera que p sea la única solución del sistema $f_0 = \cdots = f_n = 0$. Reemplazando las secciones f_i por potencias de ser necesario podemos suponer que los grados d_i son todos iguales, digamos, a un entero d. Por el mismo motivo, podemos suponer que d es lo suficientemente grande como para que $\pi^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}_w}(d)$ sea muy amplio. Este line bundle define el embedding que queríamos porque F está conjuntísticamente determinado por las soluciones del sistema $\pi^* f_0 = \cdots = \pi^* f_n = 0$. $\square$

4.2. Estabilidad de foliaciones pullback

Definición 4.2.1. Sean X una variedad proyectiva normal, $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa racional dominante y $\mathcal{G}$ una foliación de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$. Diremos que el par $(\pi, \mathcal{G})$ es **genérico** si

(a) El mapa racional π es genérico,

(b) Los valores regulares de π son densos en $\mathrm{Sing}(\mathcal{G})$,

(c) $T(\pi, \mathcal{G})$ está formado a lo sumo por singularidades de tipo Morse de $\mathcal{F} = \pi^* \mathcal{G}$.

En el próximo y último capítulo veremos que si X es suave, π es un morfismo genérico y $\mathcal{G}$ es una foliación sobre $\mathbb{P}^n$ entonces existe un abierto no vacío $U \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ de manera que el par $(\pi, \sigma^* \mathcal{G})$ es un par genérico para todo $\sigma \in U$ (Teorema 5.1.1). Mediante un argumento del "tipo Bertini" se puede probar que las primeras dos condiciones son abiertas en el sentido Zariski. Comparar con [Jou83].

Teorema 4.2.1. *Sean X una variedad proyectiva suave de dimensión m, $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa racional, y $\mathcal{G}$ una foliación split de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$ de manera que*

(a) $m - n \geqslant 2$,

(b) $\Gamma(\Omega^1_X) = 0$,

(c) $H^p(X, L^q) = 0$ *para todo* $0 < p < n$ *y* $q \in \mathbb{Z}$,

(d) el par $(\pi, \mathcal{G})$ *es genérico,*

(e) $\mathcal{G}$ *tiene a lo sumo singularidades de tipo Kupka en codimensión 2.*

Consideremos una deformación de la foliación pullback $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ *dada por la sucesión exacta*

$$0 \to I_{\mathscr{F}/S} \to \Omega^1_{X\times S/S} \to \Omega^1_{\mathscr{F}/S} \to 0.$$

Si S *es una curva suave, entonces existe un entorno analítico* $U \subseteq S$ *de* 0*, un mapa racional* $\Pi : X \times U \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ *que extiende a* π*, y una deformación* $\mathscr{G}/U$ *de* $\mathcal{G}$ *tal que* $\mathscr{F}/U = \Pi^*(\mathscr{G}/U)$.

Demostración. Por simplicidad vamos a denotar por $\mathscr{X}/S$ a la familia trivial $X \times S/S$. Debido al Lema 4.1.1, la Proposición 3.4.1 y el Teorema 3.3.1 las singularidades de la foliación $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ a lo largo del base locus B son estables. Luego de reemplazar a S por un abierto más pequeño de ser necesario, obtenemos una deformación $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{X}$ del embedding $B \subseteq X$ de manera que $\mathscr{B} \subseteq \mathrm{Sing}(\mathscr{F}/S)$. Achicando la base S nuevamente, tienen que existir deformaciones $\sigma_0, \ldots, \sigma_n \in \Gamma(L \otimes \mathscr{O}_S)$ de las secciones $s_0, \ldots, s_n$ respectivamente de manera que $\mathscr{B} = V(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ (Teorema 1.2.2). De esta manera obtenemos un mapa racional $\Pi : \mathscr{X} \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ definido como $\Pi(x, s) = [\sigma_0(x, s), \ldots, \sigma_n(x, s)]$.

Por otra parte, consideremos el blow-up $\mathrm{Bl}\,\mathscr{X}$ de la familia $\mathscr{X}$ a lo largo de $\mathscr{B}$. Pullbackeando la deformación $\mathscr{F}/S$ por el S-morfismo $\mathrm{Bl}\,\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ obtenemos una deformación $\mathrm{Bl}(\mathscr{F})/S$ del pullback de $\mathcal{G}$ mediante el morfismo $\mathrm{Bl}\,X \to \mathbb{P}^n$. Esto se obtiene de la combinación entre el Lema 1.1.3 y el Ejemplo 6. Reemplazando a S por un abierto podemos suponer que $\mathrm{Sing}(\mathscr{G}/S)$ es una familia playa de subesquemas de $\mathbb{P}^n$, y por la estructura local del Lema 4.1.1 concluimos que $\mathrm{Sing}(\mathrm{Bl}(\mathscr{F})/S)$ es playo en un entorno del divisor excepcional de $\mathrm{Bl}\,\mathscr{X}$. Recordemos que el lugar singular de $\mathcal{F}$ se descompone como

$$\mathrm{Sing}\,\mathcal{F} = T(\pi, \mathcal{G}) \cup \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\,\mathcal{G}).$$

Siguiendo la demostración de [Qua15, Thrm 9.2] podemos afirmar que la clausura de las singularidades de tipo Kupka de $\mathcal{G}$ coincide con todo $\mathrm{Sing}\,\mathcal{G}$. La segunda de las condiciones de genericidad del par $(\pi, \mathcal{G})$ y la hipótesis (e) sobre las singularidades de $\mathcal{G}$ implican que $\pi^{-1}(\mathrm{Sing}\,\mathcal{G})$ es a su vez la clausura de las singularidades de tipo Kupka de $\mathcal{F}$. Como las singularidades de tipo Morse y de tipo Kupka son estables, entonces $\mathrm{Sing}(\mathrm{Bl}(\mathscr{F})/S)$ es playo sobre S ([Qua15, Lemma 8.12]). De esta manera el Lema 1.1.2 nos garantiza que la familia dual a $\mathrm{Bl}(\mathscr{F})/S$ es una deformación de la foliación pullback de $\mathcal{G}$ por $\mathrm{Bl}\,X \to \mathbb{P}^n$.

Notar que el Teorema de descomposición de Hodge y la Proposición 4.1.1 implican que la fibra genérica de $\mathrm{Bl}\,X \to \mathbb{P}^n$ es conexa y no tiene 1-formas globales. Finalmente, el Teorema 2.3.1 implica la existencia de un entorno analítico U de 0 tal que $\mathrm{Bl}(\mathscr{F})/U$ es el pullback de $\mathscr{G}/U$ por $\mathrm{Bl}\,\mathscr{X}_U \to \mathbb{P}^n$ y por ende $\mathscr{F}/U = \Pi^*(\mathscr{G}/U)$ como queríamos probar. $\square$

Es importante mencionar que las hipótesis sobre X se verifican en el caso de variedades tóricas y variedades de tipo Fano como vimos en la última sección del primer capítulo. Con respecto a las hipótesis sobre la foliación $\mathcal{G}$, los ejemplos disponibles figuran en la última sección del tercer capítulo.

Comentario. Queda abierta la pregunta de si este esquema de demostración puede probar estabilidad de foliaciones de tipo pullback vía mapas racionales $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_w$ que lleguen a espacios proyectivos con pesos. Todas las ideas siguen funcionando de manera similar salvo la parte de estabilidad de singularidades "quasicónicas", es decir, aquellas que son pullback de una foliación sobre $\mathbb{P}_w$ vía la proyección al cociente $\mathbb{C}^{n+1} \dashrightarrow \mathbb{P}_w$. Existen casos testigo sobre la estabilidad de este tipo de singularidades como las que se encuentran en [CACGN04] o ciertos conos de foliaciones en $TM_d(a, b, c; n)$ como en el Ejemplo 13, las cuales son pullbacks de mapas racionales $\mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}(a, b, c)$ [dCLP22]. Esto conlleva a sospechar de una posible generalización del Teorema 3.3.1.

5. Lugar singular de foliaciones pullback

5.1. Esquema de tangencias

Sean X e Y dos variedades suaves de dimensiones m y n respectivamente. Dado un morfismo $\pi : X \to Y$ y un entero $0 \leqslant k \leqslant \text{mín}\{m, n\}$ se define el k**-ésimo conjunto crítico**

$$C_k(\pi) = \{p \in X : \text{rank}(d_p\pi) \leqslant k\}.$$

Localmente en abiertos trivializantes, el morfismo $d\pi : T_X \to \pi^* T_Y$ está dado por una matriz de tamaño $m \times n$. La anulación de los menores de tamaño $(k+1) \times (k+1)$ de dichas matrices determinan conjuntísticamente a $C_k(\pi)$ y lo proveen de una estructura de esquema. En general, si $\pi : X \dashrightarrow Y$ es un mapa racional con dominio maximal $U \subseteq X$, definimos su k**-ésimo conjunto crítico** como el subesquema $C_k(\pi) := C_k(\pi|_U)$.

En caso de no ser vacío, $C_k(\pi)$ tiene codimensión menor o igual que $(m-k)(n-k)$ como ocurre con toda variedad determinantal [ACGH85]. Existen familias de casos relevantes en los que la igualdad se alcanza, motivo por el cual al número de la derecha de lo acuña como **codimensión esperada**. A continuación proporcionamos una acotación para la dimensión de $C_k(\pi)$, cuya demostración está inspirada en [CSV06, Thm. 3] y [MQ22, Prop. 4.4].

Proposición 5.1.1. *Sea $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa racional genérico. Si el conjunto crítico $C_k(\pi)$ es no vacío,*

$$m - (m-k)(n-k) \leqslant \dim C_k(\pi) \leqslant k.$$

Demostración. Por lo que comentamos anteriormente la primera desigualdad vale en general, así que pasemos a probar la segunda de ellas. Vamos a argumentar por inducción en $n \geqslant 0$. Dado que el caso base $n = 0$ es evidente, pasemos a suponer que $n \geqslant 1$. Consideremos un hiperplano genérico $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$. Por el Teorema de Bertini, la preimagen $X' = \overline{(\pi|_U)^{-1}(\mathbb{P}^{n-1})}$ es suave fuera del base locus B. Afirmo además que el divisor X' es suave a lo largo de B también. Supongamos por lo contrario que X' es singular en un punto $p \in B$, y tomemos una ecuación $a_0x_0 + \cdots + a_nx_n = 0$ que determine al hiperplano $\mathbb{P}^{n-1}$. Mediante una trivialización local $L|_U \simeq \mathscr{O}_U$ alrededor de p las secciones $s_i = \pi^* x_i \in \Gamma(L|_U)$ se identifican con funciones regulares en U, a las cuales denotaremos mediante s_i también. Como $p \in X'$ es singular tenemos que $a_0 d_p s_0 + \cdots + a_n d_p s_n = 0$, y por lo tanto $d_p s_0 \wedge \cdots \wedge d_p s_n = 0$. Pero esto a su vez contradice la hipótesis de transversalidad de la definición de mapas racionales genéricos.

Pasemos a observar que la restricción $\pi|_{X'} : X' \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ es un mapa racional genérico determinado por el line bundle amplio $L|_X$, y por hipótesis inductiva cada uno de sus conjuntos críticos es vacío o tiene codimensión igual a la esperada. Por otra parte es claro que $C_k(\pi) \cap X' \subseteq C_{k-1}(\pi|_{X'})$ (conviniendo que $C_0(\pi) \cap X' \subseteq C_0(\pi|_{X'})$). Reemplazando al divisor X' de ser necesario, podemos suponer que $\dim \left(C_k(\pi) \cap X'\right) = \dim C_k(\pi) - 1$ (conviniendo que $\dim \emptyset = -1$). Luego,

$$\dim C_k(\pi) \leqslant \dim \left(C_k(\pi) \cap X'\right) + 1 \leqslant \dim C_{k-1}(\pi|_{X'}) + 1 \leqslant k.$$

$\square$

Como anticipamos previamente, la estructura del esquema de tangencias $T(\pi, \mathcal{G})$ entre un mapa y una foliación es sencilla de describir:

Teorema 5.1.1. *Sea* $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ *un mapa racional genérico y* $\mathcal{G}$ *una foliación de codimensión 1 en* $\mathbb{P}^n$*. Entonces existe un abierto* $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ *no vacío de manera que, para todo* $\sigma \in \mathcal{U}$*, el esquema de tangencias* $T(\pi, \sigma^*\mathcal{G})$ *consta de a lo sumo finitas singularidades de tipo Morse de la foliación* $\mathcal{F}_\sigma = \pi^*\sigma^*\mathcal{G}$*.*

Demostración. Para simplificar notación sea $C_k^0(\pi)$ la diferencia $C_k(\pi) \setminus C_{k-1}(\pi)$, Z el lugar singular de $\mathcal{G}$, y $G = G(k+1, n+1)$ la grassmanniana de subespacios de dimensión $k+1$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Formemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (\mathbb{P}^n \setminus Z) \times G \arrow[d] \\ C_k^0(\pi) \times (\mathbb{P}^n)^\vee \arrow[r] & \mathbb{P}^n \times G \times (\mathbb{P}^n)^\vee \end{tikzcd}$$

que tiene como morfismo horizontal a $(p, H) \mapsto (\pi(p), \mathrm{Im}\, d_p\pi, H)$ y como morfismo vertical a $(q, L) \mapsto (q, L, T_\mathcal{G}|_q)$. Estas aplicaciones se restringen y correstringen para formar un segundo diagrama

$$\begin{tikzcd} & I_2 \arrow[d] \\ I_1 \arrow[r] & I_3 \end{tikzcd}$$

donde los nuevos esquemas involucrados son

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big\{(p, H) \in C_k^0(\pi) \times (\mathbb{P}^n)^\vee \,:\, \mathrm{Im}\, d_p\pi \subseteq H\Big\}, \\ I_2 &= \Big\{(q, L) \in (\mathbb{P}^n \setminus Z) \times G \,:\, q \in L \subseteq T_\mathcal{G}|_q\Big\}, \\ I_3 &= \Big\{(q, L, H) \in \mathbb{P}^n \times G \times (\mathbb{P}^n)^\vee \,:\, q \in L \subseteq H\Big\}. \end{aligned}$$

Observemos que el pullback de este último diagrama es igual a la intersección $T(\pi, \mathcal{G}) \cap C_k^0(\pi)$ en el sentido esquemático de la palabra. Por el Teorema de Transversalidad de Kleiman, existe un abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ de manera que $T(\pi, \sigma^*\mathcal{G}) \cap C_k^0(\pi)$ es genéricamente reducido y de dimensión igual a

$$\dim T(\pi, \sigma^*\mathcal{G}) \cap C_k^0(\pi) = \dim I_1 + \dim I_2 - \dim I_3$$

para todo $\sigma \in \mathcal{U}$. Pensando a I_1, I_2 y I_3 como fibraciones uno puede comprobar que

$$\begin{aligned} &\dim I_1 = \dim C_k^0(\pi) + \dim G(1, n-k) = \dim C_k^0(\pi) + (n-k-1), \\ &\dim I_2 = n + \dim G(k, n-1) = n + k(n-k-1), \\ &\dim I_3 = n + \dim G(k+1, n) + k = n + (k+1)(n-k-1) + k. \end{aligned}$$

Luego,

$$\dim T(\pi, \mathcal{G}) \cap C_k^0(\pi) = \dim I_1 + \dim I_2 - \dim I_3 = \dim C_k^0(\pi) - k \leqslant \dim C_k(\pi) - k \leqslant 0,$$

donde la última desigualdad se sigue de la Proposición 5.1.1. Esto prueba que $T(\pi, \mathcal{G})$ consta de a lo sumo finitos puntos. Por otra parte, alrededor de uno de tales puntos p la foliación pullback $\mathcal{F}_\sigma$ admite una integral primera local holomorfa $f \in \mathbb{C}\{\{z_1, \dots, z_m\}\}$. Como $\mathcal{F}$ está defina por la 1-forma df allí, $T(\pi, \mathcal{G})$ pasa a estar determinado por las ecuaciones $\partial_{z_1} f = \cdots = \partial_{z_m} f = 0$. Como el esquema de tangencias es reducido en p podemos decir que $\mu(f) = \dim \mathbb{C}\{\{z_1, \dots, z_n\}\}/(\partial_{z_1} f, \dots, \partial_{z_n} f) = 1$, y por ende p es una singularidad de Morse. □

5.2. Cantidad de tangencias de una foliación pullback

Habiendo observado en el Teorema 5.1.1 que $T(\pi, \mathcal{G})$ es finito y reducido en condiciones favorables, uno podría preguntarse naturalmente cuántos puntos tiene este conjunto. A continuación utilizaremos técnicas de la Teoría de Intersección desarrollada por Fulton y MacPherson para responder a esta pregunta.

Supongamos que $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ es un mapa racional genérico y $\mathcal{G}$ una foliación de codimensión 1 sobre $\mathbb{P}^n$ que tienen finitas tangencias entre sí. Denotemos nuevamente por Z al lugar singular de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ tiene grado $e \geqslant 0$, entonces la foliación $\mathcal{F} = \pi^*\mathcal{G}$ está determinada por una sección de $\Omega^1_X(L^{\otimes e})$. Como este fibrado tiene rango m la codimensión esperada del lugar singular de tal sección es m, es decir que tenga a lo sumo finitos puntos y además que sean exactamente

$$\int_X c\big(\Omega^1_X(L^{\otimes e})\big).$$

Sin embargo, el lugar singular de $\mathcal{F}$ se descompone como

$$\operatorname{Sing} \mathcal{F} = \pi^{-1} Z \cup T(\pi, \mathcal{G})$$

siendo $\pi^{-1}Z$ de dimensión positiva. A pesar de esto la Fórmula de Intersección Excedentaria de Fulton [Ful13, Chapter 9] nos permite calcular la cantidad de puntos que aporta $T(\pi, \mathcal{G})$ al lugar singular de $\mathcal{F}$ de la siguiente manera:

$$\deg T(\pi, \mathcal{G}) = \int_X c\big(\Omega^1_X(L^{\otimes e})\big)\big(1 - s(\pi^{-1}Z, X)\big)$$

donde $s(\pi^{-1}Z, X)$ es la clase (total) de Segre del subesquema $\pi^{-1}Z \subseteq X$. Es sabido que si π estuviese globalmente definido y fuese playo, entonces podríamos calcular esta clase de Segre mediante la identidad $s(\pi^{-1}Z, X) = \pi^* s(Z, \mathbb{P}^n)$. Si denotamos por h a la clase de un hiperplano en el grupo de Chow de $\mathbb{P}^n$ entonces $s(Z, \mathbb{P}^n) = \sum_{r=0}^n \alpha_r h^r$ con $\alpha_r = s_r(Z, \mathbb{P}^n) \in \mathbb{Z}$. De esta manera la igualdad previa se escribiría más explícitamente como $s(\pi^{-1}Z, X) = \sum_{r=0}^n \alpha_r D^r$. En general definimos para un mapa racional cualquiera π la clase

$$\pi^* s(Z, \mathbb{P}^n) := \sum_{r=0}^n \alpha_r D^r.$$

Motivados por el caso en el que π es un morfismo, uno podría sospechar que $S(\pi^{-1}Z, X)$ y $\pi^* S(Z, \mathbb{P}^n)$ son iguales salvo eventualmente alguna corrección

$$R := s(\pi^{-1}Z, X) - \pi^* s(Z, \mathbb{P}^n)$$

proveniente del base locus B. Justamente, este es el contenido del siguiente resultado:

Proposición 5.2.1. *Si $\mathcal{G}$ es una foliación de grado $e = \ell + 1$ sobre $\mathbb{P}^n$, entonces*

$$R = \frac{(\ell D)^{n+1}}{(1+\ell D)^{n+1}} - \sum_{\substack{0 \leqslant s \leqslant r \leqslant n \\ 0 \leqslant k \leqslant m-n-1}} \binom{r}{s} \binom{s+k+n+1}{r} \binom{k+n}{n} (-1)^k \alpha_r D^r (\ell D)^{s+k+n+1-r}.$$

Antes de aventurarnos con la demostración vamos a necesitar una fórmula de Aluffi que permitirá simplificarla significativamente. La misma vincula las clases de Segre de un divisor de Cartier y un subesquema cerrado con la clase de Segre de la unión entre ambos.

Definición 5.2.1. Supongamos que A es una clase en el grupo de Chow de X que se descompone como una suma $A = \sum_{i \geqslant 0} a^i$ con a^i una clase de codimensión i.

- Para cada $\ell \in \mathbb{Z}$ se define la ℓ-ésima *potencia de Adams* de A como la clase

$$A^{(\ell)} = \sum_{i \geqslant 0} \ell^i a^i.$$

- Dado un line bundle L sobre X, el *producto de Aluffi* entre A y L es

$$A \otimes L = \sum_{i \geqslant 0} \frac{a^i}{c(L)^i}.$$

Proposición 5.2.2 ([Alu94, pág. 4]). *Sea $Z \subseteq X$ una subvariedad cerrada y $D \subseteq X$ un divisor de Cartier que contenido en Z. Si Y es el esquema residual de D en Z, entonces*

$$s(Z, X) = s(D, X) + c(\mathscr{O}(D))^{-1} \cap \big(s(Y, X) \otimes \mathscr{O}(D) \big).$$

Demostración de la Proposición 5.2.1. Sea $\widetilde{X}$ el blow-up de X a lo largo del base locus $B \subseteq X$, y E el divisor excepcional. Estos esquemas se ensamblan en un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"] & \\ B \arrow[r, "i"'] & X \arrow[r, dashed, "\pi"'] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

Por la invariancia birracional de las clases de Segre sabemos que

$$s(\pi^{-1}Z, X) = f_* s(f^{-1}\pi^{-1}Z, \widetilde{X}).$$

Pero por otra parte, la transformada total $f^{-1}\pi^{-1}Z$ es esquemáticamente igual a unión $\widetilde{\pi}^{-1}Z \cup \ell E$. Aplicando la fórmula de la Proposición 5.2.2 en este contexto tenemos que

$$s(f^{-1}\pi^{-1}Z, \widetilde{X}) = s(\ell E, \widetilde{X}) + c(\mathscr{O}(\ell E))^{-1} \cap \big(s(\widetilde{\pi}^{-1}Z, \widetilde{X}) \otimes \mathscr{O}(\ell E) \big).$$

Por un lado tenemos que $f_* s(\ell E, \widetilde{X}) = s(\ell B, X)$, nuevamente por la invariancia birracional de las clases de Segre. Pero esta última clase es igual a

$$s(\ell B, X) = s(B, X)^{(\ell)} = \left(\frac{1}{c(N_{B/X})} \cap [B] \right)^{(\ell)} = \left(\frac{D^{n+1}}{(1+D)^{n+1}} \right)^{(\ell)} = \frac{(\ell D)^{n+1}}{(1+\ell D)^{n+1}},$$

que es justamente el segundo sumando en el término derecho de la fórmula del enunciado. Por otra parte, como $\widetilde{\pi}$ es playo,

$$s(\widetilde{\pi}^{-1}Z, \widetilde{X}) = \widetilde{\pi}^* s(Z, \mathbb{P}^n) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \widetilde{D}^r,$$

donde $\widetilde{D}$ es divisor que verifica que $\widetilde{\pi}^*\mathscr{O}(1) = \mathscr{O}(\widetilde{D})$. Entonces

$$c(\mathscr{O}(\ell E))^{-1} \cap \big(s(\widetilde{\pi}^{-1}Z, \widetilde{X}) \otimes \mathscr{O}(\ell E)\big) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r\, c(\mathscr{O}(\ell E))^{-1} \cap \big(\widetilde{D}^r \otimes \mathscr{O}(\ell E)\big) = \sum_{r=0}^{n} \alpha_r \frac{\widetilde{D}^r}{(1+\ell E)^{r+1}}.$$

De esta manera podremos dar por concluida la demostración si logramos probar para cada entero $0 \leqslant r \leqslant n$ las siguientes identidades:

$$f_*\left(\frac{\widetilde{D}^r}{(1+\ell E)^{r+1}}\right) = D^r - \sum_{\substack{0\leqslant s\leqslant r \\ 0\leqslant k\leqslant m-n-1}} \binom{r}{s}\binom{s+k+n+1}{r}\binom{k+n}{n}(-1)^k D^r(\ell D)^{s+k+n+1-r}.$$

Para cada r como antes consideremos el cerrado V_r formado por la intersección de exactamente r de las secciones $s_0, \ldots, s_n \in \Gamma(L)$. Observemos que la clase $[\widetilde{V}_r] \in A_r(\widetilde{X})$ de la transformada estricta de V_r es igual a $\widetilde{D}^r$. Por la Blow-up Formula [Ful13, Thm 6.7]

$$\begin{aligned}
[\widetilde{V}_r] &= f^*[V_r] - j_*\left\{c\left(\frac{g^*N_{B/X}}{\mathscr{O}_E(-1)}\right) \cap g^*s(B, V_r)\right\}_{m-r} \\
&= f^*D^r - j_*\left\{\left(\frac{g^*c(\mathscr{O}(D)|_B)^{n+1}}{c(\mathscr{O}_E(-1))}\right) \cap g^*\left(\frac{1}{c(\mathscr{O}(D)|_B)^{n+1-r}}\right)\right\}_{m-r} \\
&= f^*D^r - j_*\left\{\frac{g^*c(\mathscr{O}(D)|_B)^r}{c(\mathscr{O}_E(-1))}\right\}_{m-r} \\
&= f^*D^r - j_*\left\{\frac{(1+\eta)^r}{1-\zeta}\right\}_{m-r}
\end{aligned}$$

donde $\{-\}_{m-r} : A_*(E) \to A_{m-r}(E)$ es la proyección a la componente de dimensión $m-r$, y las clases que aparecen luego de la última igualdad son $\eta = g^*i^*D$ y $\zeta = c_1\big(\mathscr{O}_E(1)\big)$. Luego

$$f_*\left(\frac{\widetilde{D}^r}{(1+\ell E)^{r+1}}\right) = f_*\left(\frac{f^*D^r}{(1+\ell E)^{r+1}}\right) - f_*\left(\frac{1}{(1+\ell E)^{r+1}}\, j_*\left\{\frac{(1+\eta)^r}{1-\zeta}\right\}_{m-r}\right).$$

Calculemos los dos sumandos por separado. Para ello observemos que

$$\frac{1}{(1+\ell E)^{r+1}} = \sum_{k\geqslant 0}\binom{k+r}{r}(-\ell E)^k, \quad \frac{1}{1-\zeta} = \sum_{t\geqslant 0}\zeta^t, \quad (1+\eta)^r = \sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\eta^s.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
f_*\left(\frac{f^*D^r}{(1+\ell E)^{r+1}}\right) &= D^r\, f_*\left(\frac{1}{(1+\ell E)^{r+1}}\right)\\
&= \sum_{k\geqslant 0}\binom{k+r}{r}(-\ell)^k D^r\, f_*(E^k)\\
&= D^r - \sum_{k\geqslant 1}\binom{k+r}{r}\ell^k\, D^r\, f_*\big((-1)^{k-1}E^k\big)\\
&= D^r - \sum_{0\leqslant k\leqslant m-n-1}\binom{r+k+n+1}{r}\ell^{k+n+1}\, D^r\, s_k(B,X)\\
&= D^r - \sum_{0\leqslant k\leqslant m-n-1}\binom{r+k+n+1}{r}\ell^{k+n+1}\, D^r\left[\binom{k+n}{n}(-1)^k D^{k+n+1}\right]\\
&= D^r - \sum_{0\leqslant k\leqslant m-n-1}\binom{r+k+n+1}{r}\binom{k+n}{n}(-1)^k D^r\,(\ell D)^{k+n+1}.
\end{aligned}
$$

En el camino usamos las identidades

$$
f_*\big((-1)^{k-1}E^k\big) = s_{k-n-1}(B,X), \quad s_k(B,X) = \binom{k+n}{n}(-1)^k D^{k+n+1},
$$

la primera de las cuales proviene de [Ful13, Cor. 4.2.2] y un conteo dimensional. El segundo de los sumandos es igual a

$$
\begin{aligned}
f_*\left(\frac{1}{(1+\ell E)^{r+1}}\, j_*\left\{\frac{(1+\eta)^r}{1-\zeta}\right\}_{m-r}\right) &= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k\geqslant 0}\sum_{t\geqslant 0}\binom{k+r}{r}\binom{r}{s} f_*\left((-\ell E)^k j_*\{\zeta^t\eta^s\}_{m-r}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{s}\binom{k+r}{r} f_*\left((-\ell E)^k j_*(\zeta^{r-s-1}\eta^h)\right)\\
&= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{s}\binom{k+r}{r}\ell^k\, f_* j_*(\zeta^{r+k-s-1}\eta^s)\\
&= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{s}\binom{k+r}{r}\ell^k\, i_* g_*(\zeta^{r+k-s-1}\eta^s)\\
&= \sum_{s=0}^{r}\sum_{k\geqslant 0}\binom{r}{s}\binom{k+r}{r}\ell^k\, (i_* g_*(\zeta^{r+k-s-1}))D^s\\
&= \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k=n+s+1-r}^{m+s-r}\binom{r}{s}\binom{k+r}{r}\ell^k\, s_{r+k-s-n-1}(B,X)D^s\\
&= \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}\binom{r}{s}\binom{s+k+n+1}{r}\ell^{s+k+n+1-r}\, s_k(B,X)D^s\\
&= \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}\binom{r}{s}\binom{s+k+n+1}{r}\ell^{s+k+n+1-r}\left[(-1)^k\binom{k+n}{n}D^{k+n+1}\right]D^s\\
&= \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}\binom{r}{s}\binom{s+k+n+1}{r}\binom{k+n}{n}\ell^{s+k+n+1-r}\,(-1)^k D^{s+k+n+1}\\
&= \sum_{s=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{m-n-1}\binom{r}{s}\binom{s+k+n+1}{r}\binom{k+n}{n}\,(-1)^k D^r(\ell D)^{s+k+n+1-r}.
\end{aligned}
$$

En esta segunda secuencia de igualdades usamos que

$$
(-E)^u j_*(\zeta^v\eta^w) = j_*(\zeta^{u+v}\eta^w), \qquad g_*(\zeta^u) = s_{u-n}(B,X),
$$

las cuales provienen de [Ful13, Example 8.3.9] y [Ful13, Cor. 4.2.2] respectivamente. Podemos dar por finalizada la demostración.

□

Bibliografía

[ACGH85] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, and Joe Harris. *Geometry of Algebraic Curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren Math. Wiss.* Springer-Verlag, New York, 1985.

[Alu94] Paolo Aluffi. MacPherson's and Fulton's Chern classes of hypersurfaces. *International Mathematics Research Notices*, 1994(11):455–465, 1994.

[Art68] Michael Artin. On the solutions of analytic equations. *Inventiones mathematicae*, 5(4):277–291, 1968.

[AVGZ12] Vladimir Igorevich Arnold, Aleksandr Nikolaevich Varchenko, and Sabir Medzhidovich Gusein-Zade. *Singularities of differentiable maps, Volume I: Classification of Critical Points, Caustics and Wave Fronts*. Birkhäuser, 2012.

[BM16] Fedor Bogomolov and Michael McQuillan. *Rational curves on foliated varieties*. Springer, 2016.

[CAC06] Omegar Calvo-Andrade and Fernando Cukierman. A note on the j invariant and foliations. *arXiv preprint math/0611595*, 2006.

[CACGN04] Omegar Calvo-Andrade, D Cerveau, L Giraldo, and A Lins Neto. Irreducible components of the space of foliations associated to the affine lie algebra. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 24(4):987–1014, 2004.

[CLN82] César Camacho and Alcides Lins Neto. The topology of integrable differential forms near a singularity. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 55:5–35, 1982.

[CLNL^{+}06] Dominique Cerveau, Alcides Lins-Neto, Frank Loray, Jorge Vitorio Pereira, and Frédéric Touzet. Algebraic reduction theorem for complex codimension one singular foliations. *Commentarii Mathematici Helvetici*, pages 157–170, 2006.

[CM82] Dominique Cerveau and Jean-François Mattei. Formes intégrales holomorphes singulières. *Astérisque*, 97, 1982.

[CN96] Dominique Cerveau and A Lins Neto. Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbb{CP}(n), n3$. *Annals of mathematics*, pages 577–612, 1996.

[CN13] César Camacho and Alcides Lins Neto. *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media, 2013.

[CNE01] Dominique Cerveau, A Lins Neto, and SJ Edixhoven. Pull-back components of the space of holomorphic foliations on cp (n), n>= 3. *Journal of Algebraic Geometry*, 10(4):695–711, 2001.

[CP08] Fernando Cukierman and Jorge V. Pereira. Stability of holomorphic foliations with split tangent sheaf. *American Journal of Mathematics*, 2008.

[CPV07] F. Cukierman, J.V. Pereira, and I. Vainsencher. Stability of foliations induced by rational maps. *arXiv preprint arXiv:0709.4072*, 2007.

[CS91] Dominique Cerveau and Tatsuo Suwa. Determinacy of complex analytic foliation germs without integrating factors. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(4):989–997, 1991.

[CSV06] Fernando Cukierman, Marcio G Soares, and Israel Vainsencher. Singularities of logarithmic foliations. *Compositio mathematica*, 142(1):131–142, 2006.

[dCLP22] Raphael Constant da Costa, Ruben Lizarbe, and Jorge Vitório Pereira. Codimension one foliations of degree three on projective spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 174:103092, 2022.

[DLP85] J-M Drézet and Joseph Le Potier. Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur $\mathbb{P}^2$. 18(2):193–243, 1985.

[FL06] William Fulton and Robert Lazarsfeld. Connectivity and its applications in algebraic geometry. pages 26–92, 2006.

[Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*. Number 131. Princeton university press, 1993.

[Ful13] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2013.

[GAMQV22] Javier Gargiulo Acea, Ariel Molinuevo, Federico Quallbrunn, and Sebastián Lucas Velazquez. Stability of pullbacks of foliations on weighted projective spaces. *arXiv preprint arXiv:2212.12974*, 2022.

[GAMV23] Javier Gargiulo Acea, Ariel Molinuevo, and Sebastián Velazquez. Rational pullbacks of toric foliations. In *Forum Mathematicum*, volume 35, pages 843–861. De Gruyter, 2023.

[GHS83] Joan Girbau, André Haefliger, and D. Sundararaman. *On deformations of transversely holomorphic foliations.* Walter de Gruyter, 1983.

[GM88] Xavier Gómez-Mont. The transverse dynamics of a holomorphic flow. *Annals of mathematics*, 127(1):49–92, 1988.

[GMLN91] Xavier Gómez-Mont and Alcides Lins-Neto. Structural stability of singular holomorphic foliations having a meromorphic first integral. *Topology*, 30(3):315–334, 1991.

[GR79] Hans Grauert and Reinhold Remmert. *Theory of Stein spaces*. Springer-Verlag, 1979.

[Gra71] Hans Grauert. Über die deformation isolierter singularitäten analytischer mengen. *Inventiones mathematicae volume 15*, page 171–198, 1971.

[Gro67] Alexander Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique IV: Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, pages 5–361, 1967.

[Jou83] Jean-Pierre Jouanolou. Théoremes de Bertini et applications. *Birkhäuser*, 1983.

[Jou06] Jean-Pierre Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*, volume 708. Springer, 2006.

[LN88] Alcides Lins Neto. Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two. In *Lecture Notes in Math. 1345*, pages 192–231. Springer-Verlag, 1988.

[MMQ15] César Massri, Ariel Molinuevo, and Federico Quallbrunn. The Kupka scheme and unfoldings. *arXiv preprint arXiv:1509.07231*, 2015.

[Mol16] Ariel Molinuevo. Unfoldings and deformations of rational and logarithmic foliations. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 66, pages 1583–1613, 2016.

[MQ17] Ariel Molinuevo and Federico Quallbrunn. On the Camacho-Lins Neto regularity. *arXiv preprint arXiv:1706.07508*, 2017.

[MQ22] Ariel Molinuevo and Federico Quallbrunn. Singular locus of q-logarithmic foliations. *arXiv preprint arXiv:2208.09089*, 2022.

[NS20] Alcides Lins Neto and Bruno Scárdua. *Complex Algebraic Foliations*, volume 67. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.

[Qua15] Federico Quallbrunn. Families of distributions and pfaff systems under duality. *Journal of Singularities*, 2015.

[Sch73] Michael Schlessinger. On rigid singularities. *Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies*, 59(1), 1973.

[Ser07] Edoardo Sernesi. *Deformations of algebraic schemes*, volume 334. Springer Science & Business Media, 2007.

[Suw85] Tatsuo Suwa. Determinacy of analytic foliation germs. In *Foliations*, volume 5, pages 427–461. Mathematical Society of Japan, 1985.

[Suw92] Tatsuo Suwa. Unfoldings of codimension one complex analytic foliation singularities. *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics*, 173:1–49, 1992.

[Vak17] Ravi Vakil. The rising sea: Foundations of algebraic geometry. *preprint*, 2017.

[Vel22] Sebastián Velazquez. *Espacios de móduli de foliaciones, álgebras de Lie y variedades tóricas*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, 2022.

[War83] Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94. Springer Science & Business Media, 1983.