

Matemática y fascinación

Prohibida su reproducción

ADRIÁN PAENZA

Matemática y fascinación

Prohibida su reproducción

SUDAMERICANA

Paenza, Adrián

Matemática y fascinación / Adrián Paenza. – 1ª ed. –
Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Sudamericana, 2021.
320 p. ; 22 x 15 cm. (Obras Diversas)

ISBN 978-950-07-6559-6

I. Matemática. I. Título.
CDD 510



Penguin
Random House
Grupo Editorial

© Adrián Paenza, 2021

c/o Schavelzon Graham Agencia Literaria

www.schavelzongraham.com

Ilustraciones: Vanina Farías DG

© 2021, Penguin Random House Grupo Editorial, S.A.

Humberto I 555, Buenos Aires

penguinlibros.com

Penguin Random House Grupo Editorial apoya la protección del *copyright*.

El *copyright* estimula la creatividad, defiende la diversidad en el ámbito de las ideas y el conocimiento, promueve la libre expresión y favorece una cultura viva. Gracias por comprar una edición autorizada de este libro y por respetar las leyes del *copyright* al no reproducir, escanear ni distribuir ninguna parte de esta obra por ningún medio sin permiso. Al hacerlo está respaldando a los autores y permitiendo que PRHGE continúe publicando libros para todos los lectores.

Printed in Argentina – Impreso en la Argentina

ISBN: 978-950-07-6559-6

Queda hecho el depósito que previene la ley 11.723.

Esta edición de 2000 ejemplares se terminó de imprimir en Gráfica Pinter S.A.,
Diógenes Taborda 48, Ciudad de Buenos Aires, en el mes de julio de 2021.

Dedicatorias

A mis padres, Fruma y Ernesto. Como escribo siempre, a ellos les debo *todo*.

A mi hermana, Laura, y a su compañero de vida, Daniel.

A todos mis sobrinos, que cada vez son más: Lorena, Alejandro, Máximo, Andrea, Ignacio, Paula, Santiago, Matías, Lucio, Lucas, Brenda, Miguelito, Viviana, Sabina, Diego, Sebastián, Ulises, Luz, Max, Jason, Amanda, Whitney, Mila, Bryce, Valentín, Mía, Landon, Ellie, Anderson, María José, Brian, Scott, Deva, Gabriel, Luca, Dante, Nicola, Riley, Nicolás y Alessandra.

A Carlos Griguol, León Najnudel, Luis María Bonini y Héctor Maguregui.

A mis amigas Teresa Reines, Ana María D'Alessio, Nilda Rozenfeld, Nora Bernárdez, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Alicia Dickenstein, Carmen Sessa, Betty Cooper, Etel Novacovsky, Raquel Guerra, Marianela Oroño, Karina Marchesini, Verónica Fiorito, Erica Kreiter, Laura Bracalenti, Eugenia, Mercedes e Inés Bielsa, Kim Crotts, Julie Crotts, Marisa Giménez, Norma Galletti, Carina Maguregui, Marcela Smetanka, Nora Bar, Marisa Pombo, Cristina Serra Selva, Blanca Avellaneda, Montse Besa, Marta Valdano, Malena Guinzburg y Mariana Salt.

A mis tres primas: Leonor Gerschi, Mirta y Silvia Wainer.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Cristin Czúbara, Alberto Kornblihtt, Lawrence Kreiter, Lenny Gunsteen, Kevin Bryson, Gerry Garbulsky, Gary Crotts, Dennis Fugh, David Boodey, Louay Danial, Alejandro Fabbri, Claudio Pustelnik, Andrés Nocioni, Emanuel Ginóbili, Pablo Prigioni, Pep Guardiola, Jorge Valdano, Luis Scola, Julio Bruetman, Ariel Hassan, Woody González, Keith Morris, Marcos Salt, Tristán Bauer, Santiago Segurola, Ramón Besa, Fabricio Oberto, Matías Martín, Santi Siri, Pablo Quiroga y Don Coleman.

Como escribo siempre también, a dos personitas que no lograron vivir sus vidas, ambas interrumpidas brutalmente, que me dejaron un vacío imposible de llenar: Guido y Soledad.

A la memoria de todas mis tías: Delia, Elena, Miriam, Jane, Alicia (Ñata) y Elenita. A mis entrañables tío Saúl y Alberto. A Manny Kreiter, Nusie Kreiter, Lola Bryson, Vivian Crotts y mis primos Ricardo y Josi. Y a mi querido Jorge Guinzburg.

Quizás esta lista de personas y nombres sea poco significativa para usted, o directamente no tenga ningún 'peso' en su vida; sepa que sí lo tienen y tuvieron en la mía. Pero aun repitiéndome una y otra vez, para el final, la especial dedicatoria para mis cuatro referentes: Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky.

Agradecimientos

Permítame en este espacio agradecer los aportes de un grupo de personas a quienes les debo mi reconocimiento *especial*. Esta vez quiero ser breve (espero poder).

A toda la gente de la editorial Sudamericana. Llevamos una década publicando libros. En total, este es el número *quince* dedicados a la divulgación de la matemática, pero parecen *cien*. Sin ellos esto hubiera sido imposible. Aquí fue donde conocí a una de las personas '*más lindas*' con las que me tropecé en la vida: Glenda Vieites, la editora general. Mi gratitud a Gabriela Vigo, Mariana Creo y Fernando Teijeiro Ruggiero, que se han ocupado de leer, editar y corregir los textos, y a Lucrecia Rampoldi y Agustín Ceretti, por el diseño de la tapa.

Con Juan Boido y Glenda a la cabeza, hemos tratado de mantener la costumbre de publicar *un libro por año*. La pandemia lo impidió, se devoró todo. Encierros, cuarentenas, miedo, muerte, una situación *nunca vivida* en más de cien años. Aun así, salteándonos 2020, aquí estamos otra vez. Hablando de la editorial, no puedo ignorar que una vez más han mantenido la tradición de permitir que todos los libros se puedan 'bajar' *gratuitamente* por internet. De esta forma, se garantiza que ninguna persona interesada en leer estos textos se quede sin hacerlo por cuestiones económicas.

El párrafo que sigue es reducido, pero eso no reduce el volumen enorme de gratitud que siento hacia las personas que figuran a continuación:

Primeros en esa lista, Carlos D'Andrea y Juan Sabia, los dos *betatesters*, aquellos que leyeron *todos* los problemas, los revisaron, los corrigieron, los mejoraron e hicieron innumerables sugerencias. Muchas están incluidas como parte de la historia o como notas al pie. Además de ellos dos, mi gratitud para Alicia Dickenstein, Carmen Sessa, Carlos Sarraute, Gerry Garbulsky, Cristian Czubara, Juan Carlos Naranjo, Manu Ginóbili, Martín Sombra, Luis Dieulefait, Laura Dóbalo, Ariel Arbiser, Pablo Amster, Pablo Milrud, Laura Pezzatti, Pablo Coll, Teresa Krick, Teresa Cortadellas, Quim Ortega, Eulalia Montoro, Pol Naranjo, José Ignacio Burgos, León Braunstein, Emiliano Gómez y Pablo Mislej. Todos ellos, de una u otra forma, cooperaron con los problemas que aparecen en el libro.

No puedo avanzar sin incluir el nombre de mi queridísimo Claudio Martínez, mi amigo y productor televisivo y radial desde hace casi veinticinco años. A mis agentes literarios, Guillermo Schavelzon y Bárbara Graham.

A mis compañeros de El Oso Producciones, Aldo Fernández, Edy Gerber, Mario Buoco, Betina Rodríguez, Gaby Díaz, Laura Cukierman, Ezequiel Rodríguez, Elizabet Alegre, Valeria Trevián, Claudia Eiberman, Paola Campodónico, Dolores Bosch y Alejandro Burlaka.

Quiero agradecer a algunas personas que trabajan en el Museo de Matemática de Catalunya. Visité el museo sobre fines del año 2019, justo antes del comienzo de la pandemia. Estuve en varios museos de matemática en el mundo, pero este es *muy particular* y merece —al menos— un breve párrafo aparte. Mi respeto y admiración a Josep Rey, quien fue el primer presidente de

la Asociación MMACA y autor y constructor de la mayoría de los módulos de la exposición. A Manel Udina, también fundador de la Asociación y, durante muchos años, su tesorero. Y por último a Guido Angelo Ramellini, otro cofundador y vicepresidente. Si usted tiene oportunidad de visitar el museo, no se robe una experiencia única. Es una verdadera maravilla. En otros museos similares se nota la cantidad de dinero invertida. En este, se nota el trabajo artesanal, de orfebrería, que hicieron quienes lo cofundaron y sus continuadores. Una verdadera joya.

A todos, *gracias*.

Prohibida su reproducción

Prólogo

En la primavera de 2005 me cayó por correo electrónico un pesado (en esos días) archivo de texto, y un pedido de Adrián para revisar “unas notas de charlas que había dado en los últimos años y que pensaba editarlas en un libro”. Contesté el mensaje aceptando no con mucho entusiasmo ya que estaba a punto de subir a un avión a pasar unos días de vacaciones, y revisar escritos definitivamente no formaba parte de esos planes.

De ese viaje recuerdo muchas cosas bonitas, y una de ellas fue la compañía de las historias de Adrián que iban apareciendo como perlas a lo largo del día, muy distintas entre sí y cada una de ellas muy interesante en sí misma. Fue una experiencia extraña que me fue acompañando a lo largo de todos estos años de lectura de sus textos, uno acaba una historia y necesita saltar a la siguiente porque quiere más. Al regreso de mis vacaciones le escribí a Adrián detalladamente varios comentarios, muy elogiosos casi todos, algunos errores de tipeo que había encontrado, y le agradecí que hubiera compartido conmigo esas notas. Obviamente tanto yo como supongo él estábamos muy lejos de imaginarnos en ese momento el futuro que le esperaba a ese manuscrito.

A partir de allí, año tras año fui recibiendo religiosamente los textos de Adrián —también en forma de archivos de texto— que

llegaban religiosamente sobre finales de mayo o principios de junio para ser revisados. Esa es la época en la que los académicos del hemisferio norte acabamos con nuestras clases y comenzamos a viajar pero ya no tanto de vacaciones sino a congresos, reuniones científicas, tribunales de tesis y eventos similares. Así que mis últimos quince solsticios de verano del norte vinieron acompañados de las historias de Adrián durante mi paso por los lugares más variopintos del planeta: en horas de *jet lag* en países y horarios extraños, matando el tiempo en aeropuertos y aviones, en un tren no muy lejos de San Petersburgo, escondido del calor en un hotel de Madrid o bajo el incesante sonido de las chicharras al sur de Seúl.

Siendo yo un matemático profesional, uno podría pensar que pasearse por estas historias debería ser para mí algo parecido a hojear un cuaderno para colorear para niños del jardín de infantes. Pues nada más lejos de esa experiencia. No solamente Adrián ha conseguido que yo vibrara, me emocionara y a veces hasta me desesperara por intentar entender algo que allí no se decía como me hubiera gustado, o no iba en la dirección que yo me imaginaba que tendría que ir, sino que gracias a todo el material que he visto y disfrutado en todos estos libros (y los que no llegaron a aparecer también) conseguí entretener amigos en fiestas, proponer desafíos a mis alumnos, dar charlas de divulgación y también de las otras, y obviamente sorprender a mucha gente con “trucos de magia”. Un gran amigo y colega alguna vez me dijo que el día que nos enseñan a dejar de meter clavos por el enchufe eléctrico quizás nos están salvando la vida, pero nos están arruinando la vocación de investigador para la cual es muy importante no solamente una curiosidad constante y no siempre apuntando a la misma dirección, sino animarse a la aventura con los riesgos que ello conlleva. Lo que Adrián nos propone es algo así, volver a ser como niños y dejarnos sorprender (sin pasar por

el enchufe), pasar tiempo “con nosotros mismos”, preguntarnos “¿y ahora qué hacemos con todo esto?”. Cambiar de dirección, hacer magia, escuchar una historia donde las matemáticas seguramente algo tuvieron que ver. Hacer matemática “como los matemáticos” (¿no lo quiere pensar usted?) y sorprendernos otra vez. No es por ello extraño que cada tanto Adrián haga una pausa y nos diga “no sabe cómo me encantaría estar con usted en este momento”. Él sabe bien que ese momento es único, como cuando su jugador o jugadora favorito/a de fútbol está gestando el gol del que se hablará en los años por venir.

Para esta ocasión, siendo el año 2020 muy singular, la revisión de este libro no me cayó entre viajes sino en casa, confinado como casi todo el planeta. Para muchos la pandemia del coronavirus ha sido y es una experiencia terrible, y no quisiera sonar banal al decir que a los matemáticos nos trajo una oportunidad única de “estar con nosotros mismos” sin olvidar todas las situaciones de incertidumbre, angustia y dolor que está produciendo esta enfermedad a nuestro alrededor. Yo me puedo considerar afortunado porque esta última revisión la hice sentado en el sofá de mi casa, donde a lo largo de varios días pude finalmente seguir los ritmos del texto, cada vez que Adrián dice “dedíquele todo el tiempo que quiera hasta entenderlo bien” o “¿no quiere pensarlo usted? Tómese su tiempo”. Pues eso hice, y el resultado fue obviamente impresionante, como de repente ocurre cuando uno en lugar de beber un vaso de vino de un sorbo se toma el tiempo para paladearlo y disfrutarlo. Por eso este libro es especial para mí, vengo de tomarme mi tiempo para disfrutarlo como no pude hacer con ninguno de los anteriores.

No sé lo que le ocurrirá a usted (y, como nos diría Adrián, me gustaría poder verle la cara al recorrer las páginas de este libro), pero a mí la historia de las hermanas Polgar me puso y pone la piel

de gallina, aunque he de confesar que todavía no tengo una opinión al respecto. El episodio de los puntos de la Pepsi me arrancó una sonrisa y me hizo evocar a los varios Robin Hood modernos que tiene este planeta. He jugado con los números narcisistas y también se los he presentado a mis alumnos para que descubran sus propiedades. El problema del reloj de dos colores me dejó un buen rato pensando “¿y eso cómo sale?”, para luego sonreír con una solución tan elemental como preciosa. La historia del error humano da como para una película. El problema añejo pero precioso es realmente eso, precioso. No sé cuán añejo será porque yo nunca lo había visto antes. La probabilidad de que nos encontremos con dos personas que cumplan años el mismo día en un grupo relativamente pequeño nos vuelve a sorprender, así como la criptografía, el solitario búlgaro, el infinito en los hoteles de Hilbert y un truco de magia que funciona casi siempre.

Seguramente usted disfrutará de todas estas historias y de las otras más que no mencioné pero que también le dejarán algo. Como dice Adrián, vale la pena, créanme.

No quisiera terminar sin dejar constancia de mi enorme gratitud y aprecio para con el autor, Adrián Paenza, por la infinita confianza y amistad que me ha prodigado a lo largo de todos estos años y por haberme enseñado a mí y a millones más, no solamente con estos escritos sino también con toda su enorme labor de divulgación, que no importa ni la edad ni el nivel de formación ni de información que usted tenga, ni su posición política o religiosa, siempre es posible sorprenderse con la matemática y disfrutarla. Lo que sigue es una muestra de ello.

CARLOS D'ANDREA
Barcelona, diciembre de 2020

Notas

Las que siguen son algunas notas que fui tomando en charlas, congresos, libros, cafeterías, bibliotecas, librerías... en fin, la vida. Algunas veces las escribí en *papelitos* que siempre tengo preparados en el bolsillo de mi camisa (y sí, antes que me lo pregunte, creo que no tengo ninguna camisa que no tenga un *bolsillito* sobre la izquierda. Allí pongo este tipo de papelitos y mi *infaltable* birome, una Lamy alemana de las que compré dos hace muchos años en el aeropuerto de Frankfurt). Pero además de ellos utilicé algunas aplicaciones de mi teléfono celular para *anotar*, o incluso para *grabar*, *sacar fotos* de algunos artículos que aparecieron en revistas y libros, y también para *capturar algunas escenas* que me permitieron guardar algunos videos.

Por supuesto, no están ordenados cronológicamente ni mucho menos. Son simplemente apuntes de frases o ideas que me llamaron la atención. Los fui acumulando en forma anárquica por lo que sería estéril buscar patrones, porque no los hay, o quizás sí, pero en este momento son irrelevantes.

Acá van, así como me fueron saliendo. Habrá más. En todo caso, mi aspiración es poder compartir con usted lo que yo voy/ fui experimentando cada día de mi vida. Sí, *cada día de mi vida*,

estoy siempre atento y expectante de encontrar algo nuevo, algo que me haga pensar, algo que me haga dar cuenta de que no sé bien lo que pienso, algo que me haga dudar, algo que me ofrezca una idea que no tenía, o algo que me haga cambiar de opinión. Es obviamente una aspiración imposible de conseguir, pero ¿por qué no intentarlo de todas formas? En principio entonces, le propongo que caminemos juntos sin intentar llegar a ningún lugar en particular. Si en el trayecto encontramos algo que nos interese, paramos para ‘espíar’ y/o ‘averiguar’ un poco más y ver si vale la pena detenerse. Si no, seguimos, sin obligaciones, sin estructuras... libres.

Una última observación (por ahora): si sigue leyendo verá que aparecerán muchas citas de varios autores/autoras. He tratado de respetarlas tanto como pude de manera de dejar constancia del crédito que le corresponde a cada uno/una, pero en el caso de que me hubiera equivocado, piense que lo hice de buena fe: no me apropiaría de algo que no me pertenece.

Empiezo con estas diecinueve.

1) *Teoría de Juegos*

El pensamiento estratégico es —esencialmente— el análisis de cómo interactúa usted con los demás, teniendo en cuenta que la otra persona está pensando en el mismo momento que usted sobre la misma situación. Por ejemplo: si usted estuviera corriendo un maratón, puede que sus rivales intenten frustrarlo para que no pueda liderar la competencia, o al revés, dejarlo que vaya primero durante un cierto período porque les conviene de acuerdo con los objetivos que *ellos tienen*. Obviamente, así como usted analiza lo que puede estar pensando su oponente, ese mismo oponente está pensando sobre la estrategia que usted podría utilizar.

La Teoría de Juegos es el análisis (o la ciencia, si usted prefiere) que estudia esa interacción.

Pongámoslo en estos términos: “Cuando uno piensa cuidadosamente *antes* de actuar, cuando toma conciencia de sus objetivos y preferencias, pero al mismo tiempo contempla sus restricciones o limitaciones, y recién allí elige qué hacer en forma calculada de acuerdo con *su* criterio, en ese caso vamos a decir que usted se comporta racionalmente”.

La Teoría de Juegos es la ciencia del comportamiento racional en situaciones interactivas.

No pretendo decir que la Teoría de Juegos enseñe los secretos del *juego perfecto*, ni que garantice que uno *nunca va a perder*. De hecho, usted y su oponente podrían estar leyendo el mismo libro y es obvio que los dos no pueden ganar al mismo tiempo. Pero más importante aún es que hay muchos juegos que son complejos y sutiles. La mayoría de las situaciones de la vida real incluyen múltiples elementos que dependen del azar o de la idiosincrasia de los participantes. Es por eso que la Teoría de Juegos no puede englobarlas a todas y mucho menos ofrecer recetas infalibles. En todo caso, lo que hace es proporcionar algunos principios generales que sirven para pensar sobre determinadas interacciones estratégicas.

De todas formas, lo que es seguro es que uno tiene que complementar estas ideas y métodos de cálculo con muchos detalles que solamente corresponden a *la situación específica que está siendo analizada*, y recién después de esta elaboración usted estará en condiciones de *diseñar una estrategia exitosa para ese caso particular*.

Los buenos estrategas mezclan la ciencia de la Teoría de Jue-

gos con su propia experiencia. Se podría decir que el juego es tanto *un arte* como *una ciencia*. Usted tiene derecho a pensar que ya ha adquirido el arte a partir de su experiencia o, si prefiere, de *su instinto*, pero verá que el estudio de la ciencia le resultará muy útil.

La ciencia sistematiza muchos principios generales que son comunes a varios contextos o aplicaciones. Sin principios generales, usted tendría que descubrir desde cero cada nueva situación que requiera un pensamiento estratégico. Eso sería especialmente difícil de hacer cuando aparecen *nuevas áreas de aplicación*. Los principios generales de la Teoría de Juegos proporcionan un punto de referencia que ya está listo. Con esta base, uno puede proceder mucho más rápido y con la confianza necesaria para adquirir y agregar las características o elementos específicos del arte a su pensamiento y acción¹.

2) *Construcciones colectivas*

Durante el transcurso del año 2020, el doctor Jorge Daniele², una persona que valoro enormemente, me envió un correo electrónico recordando los dichos de un expresidente del Instituto Leloir. No puedo darle el crédito porque él no me dijo quién fue³, pero de todas formas quiero agregar aquí lo que me dijo

1. Este texto es un breve extracto (que además *edité* para poder incluirlo acá) del maravilloso libro *Games of Strategy* (“Juegos de Estrategia”), que escribieron Avinash Dixit, Susan Skeath y David Reiley. Si está interesado en estos temas, le recomiendo muy fuertemente que lo lea.

2. Director de Asuntos Legales e Institucionales de la Fundación/Instituto Leloir.

3. Mi querido amigo Juan Sabia, matemático y escritor, o escritor y matemático (entre otras cosas), me comentó al leer esta frase: “Es un dicho cono-

Jorge: “Perdón, pero por lo que sé, lo único que se construye desde arriba es un pozo...”.

3) *Matemática 1*

Uno no puede aprender a andar en bicicleta o en patineta sin rasparse las rodillas y los codos. De la misma forma, uno no puede aprender matemática (y otras múltiples destrezas) sin “rasparse” el “ego”⁴.

4) *Matemática 2*

La matemática *importa*, mucho más de lo que la gente cree. Uno tiene que tomar decisiones de vida o muerte basándose en lo que dicen *los números*. No podemos negarnos a usar las ideas que provee la matemática simplemente porque *las odiábamos en el colegio secundario*, de la misma forma que no podemos negarnos a usar computadoras. La matemática es un conocimiento *esencial y no periférico*⁵.

Un comentario extra: cuando anoté estas frases, aún no habíamos vivido esta pesadilla de la pandemia. Piense cuál ha sido

cido; algunos se lo atribuyen a Galeano, pero no sé si él lo creó o solo usó un refrán de la sabiduría popular”. Y agregé (en forma personal): “¿La gente sigue usando ‘refranes’? ¡Qué viejo me siento!”.

4. Esta frase le pertenece a Keith Devlin, y la leí en un artículo que escribió en octubre del año 2019 aquí: <https://www.mathvalues.org/masterblog/student-teaching-evaluations-are-effective-but-not-in-the-way-you-think>. Carlos D’Andrea me sugiere que agregue otra analogía: tal como sucede al andar en bicicleta, para aprender matemática hay que tener paciencia suficiente como para ir a los *tumbos* al principio, encontrarse con paredes y aceptar que uno no llega —inmediatamente— al lugar al que quería arribar.

5. Frase de K. C. Cole, en el libro *El universo y la taza de té*.

el aporte de la matemática durante el año 2020 en todo el mundo, para aportar modelos, proyecciones, que sirvieron para diseñar estrategias que salvaran la vida de la mayor cantidad posible de seres humanos.

5) *Matemática* 3

Puede que para muchos, la matemática sea vista como un país *extranjero*, pero es el tipo de lugar que cualquier viajero que sea un aventurero y de mente abierta se “moriría” por visitar⁶.

6) *Historia*

“Puede que la *historia* no se repita, pero si no se repite..., (entonces) rima”. La frase se le atribuye a Mark Twain, pero yo no estoy seguro. Por las dudas, su versión inglesa: “History never repeats itself, but, if it doesn’t repeat... it rhymes”.

7) *Inteligencia*

Sobre este tema ya podría escribir varios libros y, de hecho, quizás en algún momento lo haga. Por ahora, quiero reproducir lo que Jerry Kaplan escribió en su libro *Inteligencia Artificial*:

Esta es mi visión personal del significado de la AI⁷. La esencia de la AI, o si usted prefiere, la esencia de la *inteligencia* es la capa-

6. El autor de la frase es Brian Hayes, uno de los mejores escritores de matemática que yo conozco. La leí en el libro *Foolproof*, como no está en castellano voy a traducir el título por mi cuenta: *A prueba de tontos*.

7. AI = *Artificial Intelligence*. En inglés se usan (mucho) las iniciales AI. Aquí hice la adaptación al español: IA.

cidad de hacer “generalizaciones apropiadas de manera oportuna basada en datos limitados”. Cuanto más amplio sea el dominio de la aplicación, se podrán sacar conclusiones más rápidas con una mínima cantidad de información y, por lo tanto, más inteligente será el comportamiento.

Si el mismo programa que aprende a jugar al ta-te-ti pudiera aprender cómo se juega *cualquier* juego de mesa, mucho mejor. Si pudiera también aprender a *reconocer rostros*, *diagnosticar enfermedades* y *componer música al estilo de Bach*, creo que estaríamos de acuerdo en que ese programa es *artificialmente inteligente*. Lo que sí hay hoy son programas individuales que realizan cada una de esas tareas en forma aceptable. Parece irrelevante si lo hace de la misma forma que lo hace la gente y si parece ser consciente de sí mismo.

8) *Abandonar*

Es crucial entender que tan pronto como uno deja de *aprender cosas nuevas*, tu carrera habrá terminado. La manera más fácil de seguir aprendiendo cosas nuevas es colaborando, especialmente con las personas más jóvenes. Me parece que en algún momento del camino, se hace más fácil dejar que el *agua te lleve* que seguir navegando. Eso sí: si lo aceptás así, es porque estás dispuesto a decir que *ese* es el final: lo que sabés *ahora* es *todo lo que vas a saber*. Eso es muy difícil de hacer.

Este texto (ligeramente adaptado) le pertenece al matemático Howard Wainer⁸, otro coloso de este siglo, no solo por lo

8. Harold Wainer es un matemático norteamericano nacido en Brooklyn, Nueva York, el 26 de octubre de 1943. Sus trabajos científicos y su manera de poner *en contexto* sus aportes, lo transformaron en un matemático que ‘hizo escuela’. Más sobre su biografía en: https://en.wikipedia.org/wiki/Howard_Wainer

que produce como matemático profesional, sino por su ideología.

9) Jardín

Desde Galileo hasta Alan Turing, estudiar lo que sucede con las apuestas ha sido el *jardín en donde florecen las ideas*: los juegos de dados en los bares del siglo XVI dieron lugar a la Teoría de Probabilidades y el póquer, a la Teoría de Juegos.

Esta frase se la escuché a Adam Kucharski, un matemático inglés que es además *epidemiólogo* (nada menos, en estos momentos de pandemia).

10) Trabajo

Uno de mis mentores, John Turkey, me dijo un día que si yo quería tener éxito en mi carrera, tenía que trabajar más duro que mis competidores, pero *no necesariamente “mucho más duro”*. Alcanza con que trabajes un 10% *más que ellos*. *Si lo hacés, en siete años vas a saber el doble* de lo que saben ellos (Howard Wainer).

Puesto en estos términos, si una persona invierte ocho horas de su día a su trabajo específico, ese 10% de más se traduce en 48 minutos más por día. ¿No estaría dispuesto usted a hacerlo si el resultado implica que puede duplicar los conocimientos de quienes están a su alrededor en solamente siete años? Yo lo haría...⁹.

9. Naturalmente, todo esto no es *absoluto*, depende del contexto. Si uno estuviera en Harvard o en el MIT (por poner dos ejemplos) quizás esas diferencias no se notarían, aunque —como sostiene D’Andrea— es muy posible

11) *Humanos vs. computadoras*

Una forma de determinar que una tarea nos resulta muy difícil (a los humanos) es cuán duro tenemos que trabajar para resolverla. Pero esta idea puede estar equivocada si uno la quiere trasladar a las computadoras. Por ejemplo, para un humano parece muchísimo más difícil multiplicar 317.479 por 937.878 que reconocer la foto de un amigo. Para las computadoras es exactamente al revés. De hecho, mientras una computadora puede hacer esa multiplicación “casi” en forma instantánea, poder reconocer una imagen se hizo posible muy recientemente. El hecho de que tareas sensorio-motoras de bajo nivel parecen fáciles a pesar de requerir enormes recursos computacionales se conoce como la paradoja de Moravec y se explica por el hecho de que nuestro cerebro hace que esas tareas sean más fáciles al dedicarles grandes cantidades de “hardware personalizado”, más de “¡una cuarta parte de nuestros cerebros!” (Max Tegmark, *Vida 3.0*).

12) *Campamento*

Si usted observa las actitudes de una persona frente al riesgo, puede descubrir cómo la acechan las tensiones más profundas. Elija *uno* de los dos lados: *arte* contra *ciencia*, *sentimiento* contra *la razón*, *palabras* contra *números*, *percepción* contra *objetividad*, *historias* contra *estadísticas*, *instintos* contra *análisis*, *lo particular* contra *lo*

que uno esté allí porque fue uno de los que puso en práctica esas ideas que le permitieron acceder a esos lugares de excelencia. Y Juan Sabia agregó: “Vos presuponeés que todos tienen el mismo resultado por trabajar el mismo tiempo... Muy falso. ¿A vos te parece que si uno hubiese trabajado una hora más por día que Calderón, por poner un ejemplo, hubiese llegado más lejos que él?” (agrego yo: Alberto Calderón fue uno de los mejores matemáticos de la historia argentina).

abstracto, romanticismo contra *clasicismo*..., y así podría seguir. En resumen, la fila eterna entre versiones fundamentalmente diferentes de la verdad y la experiencia. Es fácil elegir uno de los dos *campamentos* y *nunca más mirar hacia fuera* (Howard Wainer).

13) Argumentos

Los viejos argumentos nunca mueren. En todo caso, mueren las personas que los defendieron (Albert Einstein).

14) Fe

¿En qué momento termina la razón y aparece la necesidad de invocar a la fe? (Anónimo).

15) La última vez

El hombre vive fascinado con recordar: “mi primer auto”, “mi primera casa”, “mi primer día de clase”, “mi primer amor”, “mi primera relación sexual”, etc., ¿y qué tal si pensáramos en “mi última/o”? La “*última vez que hablé con mi madre*”, “el último día que fui al colegio”, “la última vez que jugué con una muñeca”, “la última vez que me cambié para jugar un partido de fútbol”, “la última vez que fui en los hombros de mi padre”, “la última vez que visité la casa en donde nací”..., y así podría continuar. Lo que sucede es que hablar y/o recordar “el último” o “la última”, trae aparejada una sensación de pérdida, remordimiento, angustia. No parece posible que un ser humano quiera “recordar” con entusiasmo la “última vez de **nada**” (otra vez Howard Wainer).

16) Seres racionales

¿Los humanos planificamos lo que hacemos? ¿Somos verdaderamente racionales? ¿O será que les recomendamos a *otros* que hagan lo que nosotros *no hacemos*? ¿Elaboramos estrategias? ¿O solo *hablamos* de ellas? (AP).

17) Inferencias (parte 1)

A los científicos se nos presentan *observaciones* y se nos pide que construyamos *teorías*: ¿*qué fue lo que* “entró en la caja” y como resultado produjo el mundo que vemos? Hacer *inferencias* es algo extremadamente complicado, posiblemente la tarea más compleja que enfrenta un científico. Por ejemplo, de la “forma” que toman las nubes y de la forma en la que se mueven deberíamos poder “ir hacia atrás” y ver de qué “estado” provienen, o cuál es el sistema que las produjo (Jordan Ellenberg).

18) Arte vs. ciencia

De esta forma, el arte, la literatura y aun el entretenimiento no eran diferentes de cualquier otro producto. En el sueño de los *utopistas* de la época, el atractivo masivo significaba que el mundo se alejaría del concepto elitista de “arte” hacia su hermano mayor, la “*ingenierización*”. Los automóviles, aviones e incluso casas enteras se podrían producir “en masa” y saldrían de la “cinta transportadora” de una fábrica, y de esa forma señalarían el fin de una existencia en donde la desigualdad era común. ¿Cómo podría ser, cuando todos conducían el mismo modelo de auto, un Ford T, y vivían en las mismas casas? El arte era *elitista, irracional y superficial*; la “ingeniería” era colectivista, funcional e hiperracional. Es mejor servir a la objetividad democratizada de las masas que a la subjetividad *snob* de unos pocos (Luke Dormehl).

19) Inferencias (parte 2)

Los humanos *queremos creemos* que todo efecto tiene una causa: basta con mirar detenidamente. De acuerdo. Pero eso requiere de hacer algunos esfuerzos y eso requiere tiempo también. Por ejemplo, muy a menudo los padres les dicen a sus hijos que se resfriaron porque salieron a la intemperie sin guantes ni bufandas, cuando hacía frío. Sin embargo, ¿no existe ningún vínculo causal directo entre abrigarse y engriparse! Si uno visita un restaurante y luego se enferma, intuitivamente culpa a la comida que comió allí (y tal vez evite visitar ese restaurante en el futuro), aunque puede que la comida no tenga *nada* que ver con la enfermedad. Muy a menudo también nuestro cerebro es demasiado *vago* para pensar lenta y metódicamente. En cambio, dejamos que la forma rápida de pensar “tome el control”. Como consecuencia, “vemos” las causalidades imaginarias y por lo tanto, en esencia, malinterpretamos el mundo (Viktor Mayer-Schonberger).

Al llegar a este punto, me voy a detener con las *Notas*. Como usted habrá advertido son muy personales, me afectan/afectaron a mí, me ‘tocaron’ a mí. Quizás sería un buen ejercicio que usted lo pusiera en práctica también. Recolecte situaciones/ideas/frases que fue o va viviendo, quédese con las más relevantes y es posible que pueda encontrar *patrones* que uno no advierte o detecta en el momento. Es solo una idea...

La historia de las hermanas Polgar

La que sigue es una historia fascinante y que puede provocarle conflictos internos, sobre todo porque le ofrecerá la alternativa de dudar acerca de lo que piensa sobre este tema. Sí, así como suena. Yo podría hacerle en este momento una pregunta y usted podría o podrá responderla; pero al mismo tiempo debería permitirse dudar sobre lo que contestó y —eventualmente— después de leer el texto que aparecerá a continuación, quizás tenga ganas de revisar su respuesta.

Si pudiera pedirle algo más, me permito hacerlo. Como no hay nadie que la/lo esté mirando, como no hay nadie que vaya a juzgar su respuesta, piense que está permitido cambiar de opinión, y eventualmente no decirle nada a nadie. ¿Cuántas oportunidades tenemos en la vida de empezar a leer algo con una idea y terminar con otra antipodal? ¿Y si se pudiera ‘jugar’ en los dos equipos al mismo tiempo? Es decir, ¿podría una/uno pensar de ambas maneras al mismo tiempo?

Acá voy. Espero que lo disfrute.

Laszlo Polgar es un maestro húngaro, quien luego se especializó en psicología aplicada a la educación. La historia comienza cuando todavía existía la Unión Soviética y Hungría era parte del bloque de países comunistas. Ubiquémonos en la segunda parte

del siglo XX, más precisamente en la década del 60. Polgar tenía un objetivo desde joven. Él no creía en los denominados ‘genios’, o mejor dicho, no es que negara la existencia de personas que se destacaban más que otras, o *mucho más* que otras, pero su idea era/es que los ‘genios’ se construyen y que no vienen así ‘de fábrica’. Entrenamiento, perseverancia, constancia, pasión y, sobre todo, mucha dedicación. Todo bien. Polgar no está solo ni es el primero que piensa así, pero lo que él hizo decididamente cambió la perspectiva de mucha gente. Fíjese si usted está entre ellos.

El experimento que Laszlo Polgar decidió realizar afectó *su propia vida*. Polgar quería casarse, tener hijas/hijos, elegir *alguna* actividad en donde su mujer y él pensarán que cada uno de sus hijos podría destacarse, dedicar sus vidas desarrollar esas preferencias y mostrar que podían destacarse no solo en forma local, sino también ¡en todo el mundo! ¿Qué y cómo hacer?

Polgar empezó a enviar cartas a diferentes mujeres a quienes consideraba potenciales candidatas para llevar a cabo su plan. La idea era convencer a alguna de compartir un proyecto de vida semejante. Obviamente, no había internet, y Polgar no enviaba cartas en forma indiscriminada, sino que averiguaba si cada una de las mujeres a quienes les escribiría cumplía con algunas condiciones mínimas: ser maestras, solteras, habitantes de alguna zona relativamente cercana y sobre todo, manifestar o haber manifestado algún intento de ‘correrse’ de la educación convencional. La tarea no era fácil y, sobre todo, aunque pudiera encontrar alguna persona que cumpliera con las condiciones mínimas que él mismo establecía, debía convencerlas después (y convencerse él también) de que podrían funcionar como ‘pareja’. Al menos desde afuera no parece sencillo.

Finalmente lo logró. Terminó eligiendo una joven ucraniana, maestra (como él quería) y cuestionadora del sistema de educa-

ción establecido en el mundo donde todos repetían lo mismo; pero sobre todo Klara (el nombre de la maestra) estaba dispuesta a mudarse y casarse con Laszlo. Y así hicieron. Polgar no solo *pensaba* de la forma que describí antes, sino que había hecho saber su posición a todos los que lo rodeaban. Sostenía que cualquier niño/a, si nacía en buenas condiciones de salud, podía transformarse en un/una genio/genia: “Cada niño nace con un extraordinario potencial y depende de la sociedad que sea capaz de expresarlo. El problema es que en general, la gente *no cree que esta afirmación sea cierta*. Es como si creyeran que la excelencia es solamente ‘para otros’”.

Tan en contra estaban de su posición que las autoridades locales le sugirieron que visitara a un psiquiatra, para que lo ayudara a “quitarse de encima sus ‘locuras’” y cancelara su pretensión por “absurda”. Pero Polgar tenía otras ideas. No iba a entregarse tan fácil. Como la idea era practicar lo que pensaba con sus propios hijos, ni bien pudo casarse con Klara, ambos establecieron una suerte de hoja de ruta que habrían de seguir ni bien pudieran tener hijos con quienes experimentarla. Corría el año 1969, cuando Klara tuvo su primera hija: Zsusza (o Susan). Se presentaban —claramente— varias dificultades. En principio: ¿qué disciplina elegir? Si Polgar recurría a alguna de las artes (pintura, música, escultura, por poner algunos ejemplos), cualquier producto que Susan exhibiera podría ser cuestionado porque, en temas de arte, *todo* es opinable. La elección tenía que ser sobre algo ‘medible’ o en donde hubiera algún tipo de ‘competencia’, con ‘ganadores y perdedores’, o una suerte de ‘tabla de posiciones’. Lo curioso es que fue la propia Susan quien le dio la respuesta: el ajedrez. Si Susan hiciera progresos de cualquier tipo, ellos se manifestarían en competencias, ya sea porque debería imponerse entre sus pares, y para ser considerada una ‘genia’ debía trascender el mundo

en donde habitualmente se mueven sus ‘colegas’. Por ejemplo, ¿podría convertir a Susan en una ‘gran maestra’ (en ajedrez)? ¿Podría *forzar* a la federación de ajedrez para que le permitieran a Susan competir con hombres? Pero estoy yendo muy rápido.

Para empezar, Laszlo tuvo que convencer a las autoridades locales de que ni su mujer ni él estaban de acuerdo con enviar a Susan al colegio: no querían que perdiera el tiempo. Ellos se ocuparían de la enseñanza y proveerían a su hija de todas las herramientas (y más) que pudiera necesitar. Obviamente, no fue fácil que aceptaran las condiciones del matrimonio Polgar, pero al final cedieron. Laszlo pasaba con Susan múltiples horas del día abocados al ajedrez, aun antes que cumpliera *cuatro* años. Lo hacía de manera divertida, como si fuera un juego. De acuerdo con los registros, no solo Laszlo lo disfrutaba, Susan también. El objetivo se estaba cumpliendo a la perfección: Susan no solo mejoraba en su juego, sino que además se divertía haciéndolo. Al cumplir cinco años, Susan ya había acumulado cientos de horas invertidas en el juego.

Unos meses después, empezarían las competencias. Laszlo la inscribió en un torneo en el que solo participaban mujeres, pero la más joven doblaba en edad a Susan. Eso no fue un impedimento. Susan fue ganando partida tras partida. Al finalizar el torneo, no solo lo había ganado, sino que el score final fue Polgar 10 - Todo el resto 0. Naturalmente, esto transformó a Susan en una verdadera sensación. “Estamos en presencia de una niña prodigio, con un talento natural para el ajedrez”, decía el diario local. Pero la historia recién empezaba.

En 1974 los Polgar tuvieron otra hija, Sofía y dos años más tarde, nacería Judit, la tercera mujer del matrimonio. Tanto Sofía como Judit observaban como el padre se ‘retiraba’ todos los días a una habitación con la hermana mayor (Susan) en donde pasa-

ban encerrados múltiples horas del día. Laszlo no quería que sus hijas más pequeñas comenzaran aún, pero ciertamente la curiosidad las debe haber ‘devorado por dentro’: ¿qué pasaba allí adentro? Cuando superaron los cinco años, Laszlo les ofreció entrar a ellas también, pero quedaba claro que eran *ellas* quienes querían hacerlo: nadie forzaba a nadie. Eso sí: si querían entrar en la habitación y participar, ¡tenían que aprender a jugar! Eso no fue un impedimento: las tres hermanas se unieron en el aprendizaje y se ofrecieron a la tutela del padre.

Al llegar a la adolescencia, las tres hermanas ya habían acumulado más de 10 mil horas de práctica. Otra vez: ¡10 mil horas! Especializándose. Estos fueron los resultados.

Cuando Susan cumplió 12 años se transformó en la campeona mundial de niñas menores de 16. Dos años más tarde, ya era ¡la mejor jugadora de ajedrez del mundo! En 1991, se transformó en la primera mujer *en la historia* en alcanzar el título de ‘gran maestra’. Al finalizar su carrera, Susan conquistó el título mundial femenino en cuatro ocasiones.

Sofía ganó el título sub 14 y, como Susan, habría de ganar medallas de oro olímpicas y otros campeonatos que le valieron el reconocimiento como una de las mejores jugadoras del mundo. Su conquista más importante se conoce con el nombre de “Sack of Rome”, en donde Sofía ganó *ocho partidas consecutivas contra grandes maestros*. En ese momento, recién había cumplido 14 años.

Pero todavía no llegué a Judit. Judit ganó todos los títulos que habían ganado sus hermanas, pero lo hizo a una edad más joven que ellas. Y antes que pudiera siquiera *empezar* con su carrera, logró lo que ningún hombre ni mujer habían logrado antes: el título de gran maestra más joven de la historia para cualquier humano, superando en edad al propio Bobby Fischer. Judit tenía

15 años. Ni sus hermanas podían competir con ella. Judit fue la mejor jugadora del mundo durante más de una década.

Hasta que llegó el año 1988. Allí sucedió algo impactante que terminaría de poner a las hermanas Polgar en un lugar privilegiado en la historia. En palabras de la propia Judit:

En 1988, en Grecia, cuando yo tenía 12 años, algo pasó que fue el mojón más importante de mi carrera. Fue la primera vez que pude participar en las Olimpiadas de ajedrez formando parte del equipo húngaro. Pero no fue un equipo cualquiera. Susan, Sofía y yo fuimos en representación de nuestro país. Y sucedió algo totalmente inesperado. Comenzamos a ganar partida tras partida. Fuimos derrotando a todos los países que enfrentamos... a todos. Pero quedaba uno particular, el país que había dominado las competencias internacionales por más de treinta años: la [ex] Unión Soviética. Y en forma totalmente inesperada para el mundo, ¡les ganamos! ¡Ganamos el “oro olímpico”!

Ya no había mucho más para decir. Laszlo Polgar había ‘validado’ su teoría. ¿Hay alguna manera de imaginar que el matrimonio de Laszlo y Klara habrían de producir no una, no dos, sino tres ‘niñas prodigio’? ¿Era *talento* natural? ¿Era la creación de Laszlo?

La sociedad pareciera negar la posibilidad de que las hermanas Polgar fueran ‘construidas’ por la dedicación de sus padres. Es más fácil suponer que se debió a esa condición ‘natural’. Es mucho más fácil hablar de ‘niñas prodigio’ que advertir el esfuerzo y dedicación, horas y horas de práctica y constancia. Además, es mucho más poético y nos deja más tranquilos. En alguna parte, nos exime de hacerlo nosotros. Es más fácil creer que uno ‘nace’ y no que ‘se hace’.

El nivel de excelencia no fue el mismo. Sofía no alcanzó los mismos niveles de Judit, y ella mismo dijo que era la más haragana de las tres. Susan fue la primera que produjo el impacto, pero Judit alcanzó a respirar un aire al que solo llegan un pequeño grupo de personas.

Gary Kasparov había dicho que ninguna mujer podía competir con un hombre en las mismas condiciones. En principio, se había negado a ‘jugar’ contra Judit. Pero la historia no finalizó allí.

Una vez más quiero reproducir palabras de Judit:

En un momento determinado, durante las olimpiadas, yo estaba muy concentrada en el tablero sin advertir nada de lo que sucedía a mi alrededor. Hice mi movida y levanté la vista. ¿A quién vi? Al campeón del mundo, ¡Gary Kasparov mirando mi partida! El jugador que yo más admiraba y respetaba en el mundo, de quien había aprendido tanto, estaba allí... siguiendo mi juego. Eso me inspiró y en pocas movidas más, “destruí” [sic] a mi rival. Después de las olimpiadas, un periodista le preguntó a Kasparov qué pensaba de “mi” forma de jugar. “¿Cree usted que Judit podría ofrecerle resistencia?”. Él dijo: “Estoy totalmente seguro de que Judit se convertirá en la campeona del mundo en ajedrez, pero si usted me pregunta si nos vamos a enfrentar...”. Y continuó diciendo: “Mmmmmm. Estoy convencido de que es ‘casi’ (dijo ‘casi’) imposible de que eso suceda”.

A propósito, Kasparov no fue el único que pensaba eso de las mujeres. El propio Bobby Fischer dijo: “Yo le puedo dar un caballo o dos de ventaja a cualquier mujer y ganarle igual”. Para poner en perspectiva, ofrecer esa ventaja es como si una persona dijera que va a entrar en una competencia de natación y se va a atar las manos en la espalda y va a ganar igual. Se imagina entonces qué feliz me puso haber cumplido 15 años y batir el récord de Bobby Fischer y

alcanzar mi título de “gran maestra” cuando era más joven que él. A esa altura yo ya era la mejor jugadora de ajedrez del mundo, pero quería ser la mejor no solo entre las mujeres. Quería ser la mejor, hombre o mujer.

Al final llegó el día. Llegó el día en que me enfrenté con Kasparov. Pero era tanta la admiración y respeto que yo le tenía, que perdí la partida antes de jugarla. Kasparov tiene una presencia tan imponente, un carisma tan particular, una preparación tan profunda que resulta intimidante. La parte psicológica es vital en este juego. Kasparov me había ganado solamente presentándose a jugar.

Me llevó años prepararme para jugarle una próxima vez. Cuando llegó, tuve la sensación de que él me quería “comer viva”. De entrada, me preparé específicamente en tener confianza en mi juego, y habría de usar las mismas herramientas que usa él cuando enfrenta a cualquier rival. Yo había decidido que le iba a “atacar el rey agresivamente”, sin importar lo que pasara. Me mantendría firme, sin alterar mi plan. En un momento determinado, me di cuenta de que empezó a sentirse incómodo. Se sacó el saco y lo puso en la silla. Se sacó el reloj y lo puso al lado del tablero y por su lenguaje corporal yo tenía claro que él estaba muy incómodo. Por un segundo tuve la sensación de que él pensaba que ¡podía perder la partida! Se me escapó esa vez, pero para mí ya no tenía importancia: lo que había sucedido me demostraba que la victoria estaba a mi alcance.

Pero habría una tercera vez. Nos enfrentamos un año más tarde. Kasparov mantuvo como siempre su juego agresivo. En el medio del juego, cuando entramos en un punto crucial de la partida, él me comió una pieza y yo no jugué de acuerdo con lo que es habitual. Puse mi torre en el medio del tablero en un lugar muy amenazante para su rey. Esa fue la jugada decisiva, y en pocas movidas más Kasparov estaba en una posición desesperante (para él): no podía detener mi amenaza y el “jaque mate” estaba “allí”. Kasparov

no esperó que llegara ese momento. ¡Se retiró y dio por perdida la partida!

A modo de conclusión, más palabras de Polgar:

Práctica, perseverancia y pasión. Esas son las tres razones. Claramente mi padre tenía razón. Usted podría preguntarme: ¿consiguió su objetivo de ser campeón del mundo entre los hombres y las mujeres? La respuesta es que no, que no lo conseguí, pero lo que sí conseguí es competir de igual a igual (y en el camino les gané alguna vez a todos) los grandes maestros de mi época.

Para finalizar: no tengo claro si toda esta historia sirve para que usted o yo cambiemos de opinión. Es muy exagerado suponer que uno puede lograr lo que hicieron Lászlo y Klara en cualquier circunstancia, pero también tengo claro que el ‘medio ambiente’ en el que un niño se desarrolla es *esencial*.

Este artículo no pretende inclinarla/o para un lado ni para otro. Solo sepa que esta historia existe y debería ser motivadora.

Referencias

- 1) Las palabras de Judit Polgar forman parte de la charla Ted que ofreció hace unos años y que fue moderada por mi amigo Gerry Garbulsky. Si le interesa verla completa, está acá: https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=z-ttu7dyBCU
- 2) <https://www.psychologytoday.com/us/articles/200507/the-grandmaster-experiment>
- 3) <https://www.washingtonpost.com/archive/lifestyle/1992/03/11/home-grown-grandmasters/82928ac3-a934-4d0d-929b-d89ba020fa25/?noredirect=on>

- 4) <https://www.deseret.com/1992/12/25/19023258/father-of-3-prodigies-says-chess-genius-can-be-taught>
- 5) https://en.wikipedia.org/wiki/L%C3%A1szl%C3%B3_Polg%C3%A1r
- 6) <https://www.youtube.com/watch?v=CZiSxfCmOZY>
- 7) <https://allthatsinteresting.com/judit-polgar>

Prohibida su reproducción

Los puntos de la Pepsi

Primera parte

La que sigue es una historia inusual, atípica y espectacular. Está relacionada con la matemática y créame que la/lo pondrá en una situación en la que intuyo usted nunca estuvo. Eso sí: téngame un poquito de paciencia y verá que el tiempo que va a invertir habrá valido la pena. Acá voy.

En principio, quiero proponerle pensar la respuesta a una pregunta muy sencilla. Usted, como yo, sabe la diferencia que hay (por ejemplo) entre *un millón* y *mil millones*. Es decir, entre 1.000.000 y 1.000.000.000. Parece simple, ¿no?

Y sí, *parece* simple porque *es* simple. El número *mil millones* indica claramente que es *mil veces más grande que un millón*. ¿Qué puede tener de raro eso?

Bueno, no tiene *nada de raro*, solo que uno, usted o yo por ejemplo, no tiene establecido internamente *algo* que se dispare cuando hablamos de las diferencias entre las dos cantidades. Si yo le dijera que me compré dos pantalones, es un hecho que podríamos protagonizar. En cambio, si yo cambiara el número y le comentara que me compré *tres mil* pantalones, hay *algo* en su interior que le indica que no puede ser. Salvo que yo me hubie-

ra transformado súbitamente en una persona que quiere vender pantalones como medio de vida; aún así, sería muy raro que una persona SE comprara tres mil pantalones. O sea, su reacción es totalmente natural y esperable.

Siéntase libre de producir ejemplos de este tipo y es obvio que *todas* las reacciones que usted obtenga serían *reacciones esperables*.

Aquí, una breve pausa porque quiero proponerle otro ejemplo distinto.

Supongamos que estamos mirando las noticias por televisión, y una persona fue detenida por un robo menor. El caso surge porque esta persona le quitó el teléfono celular a un transeúnte. En el programa discuten cuánto tiempo debería estar detenido, y se plantea la posibilidad de medir el tiempo que podría o debería estar detenido en una celda. Una de las conductoras del programa sugiere que el tiempo que esté privado de su libertad sea de *un millón de segundos*. En cambio la otra, sugiere que sean *mil millones de segundos*. La discrepancia es *brutal* pero no está tan claro que uno (yo, usted) tenga *tan claro* en cuánto difieren. ¿Quiere pensar un instante por su cuenta?

Antes de ofrecerme su respuesta, es evidente que es una reproducción del problema de los pantalones, solo que ahora he convertido en segundos el tiempo de reclusión: en un caso es *un millón de segundos* y en el otro, *mil millones*.

Ahora sí, avancemos juntos y tratemos de evaluar esta diferencia.

Por un lado, *un millón de segundos* (usted haga las cuentas para comprobar que lo que estoy escribiendo es cierto) son aproximadamente 11 días y medio. Es decir, en el planteo original, una de las conductoras propone que la persona esté detenida entre 11 y 12 días.

Por el otro, si fueran *mil millones de segundos*, el tiempo que debería estar privado de su libertad se transformaría en... ¡32 años! Como escribí anteriormente, *enorme* y *brutal* diferencia.

Pregunta: creo que tanto usted como yo entendemos que un número es *mil* veces mayor que el otro, pero ¿entendemos *realmente* lo que esto significa?

Si pudiera compartir mis ideas con quien está leyendo este texto, me permitiría apostar que no, que no estoy tan seguro de que *los humanos tengamos noción de la brutal distancia que hay entre un número y otro.*

Ahora, volvamos a la ‘normalidad’. A la *normalidad* en donde escuchamos hablar de índice de contagios, R_0 , ‘aplanar curvas’, crecimientos exponenciales, deudas externas, poblaciones mundiales, átomos del universo, granos de trigo... y usted agregue acá los ejemplos que se le ocurran.

Segunda parte

Hace un cuarto de siglo, mediados del año 1995, la compañía Pepsi-Cola inició una campaña publicitaria promocionando sus productos. En principio, nada diferente de lo que podría suceder hoy. Sin embargo, hubo algunas sutilezas que me interesa compartir con usted. La campaña tenía un nombre: “Drink Pepsi, Get Stuff”. Es un poco difícil traducir literalmente el título, pero lo intento: “Tome Pepsi, obtenga cosas”.

El objetivo era el siguiente: uno compraba productos de Pepsi y podía acumular puntos (como hacen hoy las compañías aéreas). Después, esos puntos se podían canjear (dependiendo de la cantidad) por *remeras y gorras o sombreros*. Hasta acá, nada inusual. Si le interesa el aviso propiamente dicho, todavía se puede ver en internet usando este enlace: <https://www.youtube.com/watch?v=ZdackF2H7Qc>

Sin embargo, además de sombreros y remeras, Pepsi ofrecía algo *extra*. Si usted juntaba 7.000.000 (siete millones) de *puntos*,

que como se imagina era una cantidad *enorme* de puntos, Pepsi le ofrecía entonces un ‘avión de guerra’ que usaba la Fuerza Aérea norteamericana.

Este avión se conoce con el nombre de Harrier Jet.

Naturalmente, nadie imaginaría que una persona podía juntar *esa* cantidad de puntos (los siete millones), pero si bien el número suena (y es) increíblemente grande, hubo una persona, John Leonard, que decidió hacer *algunas cuentas* y verificar si valdría la pena la inversión.

Es decir, ¿cuánto dinero tendría que invertir una persona para poder llegar a los siete millones de puntos que Pepsi requería para canjearlos por el avión? Para poner todo en contexto, la remera de Pepsi se podía obtener canjeando 75 puntos, mientras que una campera de cuero requería 1450 puntos. Escribo estos números para que se entienda la *desproporción* entre algunos premios y *el otro*, el avión.

En el aviso, hay una escena en donde se ve a tres jóvenes sentados en la puerta de un colegio secundario. El chico sentado en el medio está recorriendo un catálogo de Pepsi en el que aparecen diversos productos ‘canjeables’ por puntos. Mientras tanto, los otros dos solo aparecen bebiendo —cada uno— de una botella de Pepsi. En un momento determinado, los chicos miran hacia arriba sorprendidos y, si bien no se ve ningún avión (hasta ese momento), se escucha un ruido particular que se corresponde con las turbinas de un avión... Ese ruido va ‘aumentando’ hasta que súbitamente *aparece el avión*, un Harrier Jet que justamente *atterriza* en un costado del colegio, deteniéndose justo al lado de un conjunto de bicicletas (que presumo usarían los estudiantes). Varios estudiantes corren aturridos por el ruido que emana del jet pero también por el viento que violentamente rodea toda la zona. Y aquí, lo interesante: se es-

cucha a un locutor diciendo: “Cuanta más Pepsi tome, más objetos puede conseguir”.

En el mismo aviso aparece un texto que dice: “Harrier Fighter 7,000,000 Pepsi Points”. Es decir, para obtener el jet, hace falta invertir 7.000.000 puntos Pepsi.

Supongo que la Pepsi habrá pensado que todo terminaba allí, que las personas interesadas en sus productos solo tenían que juntar los puntos en algunos ‘cientos’, y posiblemente nadie imaginó que eso no necesariamente era cierto. De hecho, John Leonard, un estudiante de la carrera de Ciencias Económicas, tuvo *otras* ideas y las quiso ejecutar.

Me interesa remarcar que esto sucedió en 1995, porque Leonard descubrió que siete millones de puntos no parecían ser tantos, y de hecho quizás podría conseguirlos y obtener una oportunidad fabulosa. Ese año, un avión de esas características hubiera costado alrededor de 33 millones de dólares. Leonard se dedicó a leer la ‘letra chica’ del catálogo de Pepsi. Allí no decía nada sobre el avión, pero *sí* decía que si una persona tenía ya 15 Puntos Pepsi (por llamarlos de alguna manera) entonces podría comprar una cantidad *ilimitada* de puntos adicionales pagando 10 centavos (de dólar) por punto.

¿Qué significaba esto? Convertido en dinero, Leonard podría *comprar* los siete millones de puntos que le hacían falta pagando 10 centavos por punto. Como en total eran siete millones, *todo lo que le hacía falta era invertir 700.000* (setecientos mil) dólares para conseguir los siete millones y, encima, ¡esto le evitaba tener que comprar los productos Pepsi!

Creo que usted imagina lo que pasó. Al año siguiente, más precisamente el 27 de marzo del año 1996, Leonard le envió a la Pepsi los 15 puntos que requerían las reglas. A partir de allí, estaba habilitado para comprar los puntos que le hacían falta,

pagando 10 centavos por punto. Lo hizo, invirtiendo ¡700.000 dólares! En realidad, para ser más precisos, Leonard escribió un cheque por 700.008,50 dólares desglosados de esta forma:

- a) 699.998.50 por los 6.999.985 puntos que necesitaba para completar los siete millones.
- b) 10 (o sea 10 dólares) por los gastos de ‘encomienda’.

Y agregó que extendía el cheque con la ‘orden’ correspondiente para que le enviaran el avión a la dirección que había escrito.

Pepsi hizo lo que usted está pensando: recibió el cheque y se lo devolvió diciendo que el avión no formaba parte de la oferta, no estaba incluido en el catálogo y que había sido incluido por razones promocionales para hacer el aviso ‘más entretenido’. Y agregaron una cantidad de *cupones* para que Leonard se pudiera comprar más productos Pepsi. Ah, y una carta pidiéndole disculpas por los ‘trastornos’ que la ‘confusión’ podría haberle acarreado.

No, Leonard no se quedó satisfecho con esta respuesta. Contrató un grupo de abogados, presentó a los otros *cinco inversores* que habían aportado dinero y reclamó el avión. Pepsi reenvió toda la documentación a la compañía de publicidad que había producido el aviso e inmediatamente (le pido que preste atención a este hecho) ¡cambió el número de puntos necesarios para reclamar el avión! ¡Pasó de 7 millones a 700 (setecientos) millones!

Ahora sí, si una persona quería conseguir los puntos a un 10% del valor, tenía que invertir 70 (setenta) millones de dólares y no 700 mil. Pero aun así, tuvieron que lidiar con Leonard que les hizo juicio por *fraude*, *publicidad falsa* y algunos tópicos más.

El caso superó a los jueces de primera instancia y por poco no llega a la Corte Suprema de Justicia de Estados Unidos. La pregunta que cabía era la siguiente: si la corte hubiera fallado a

favor de Leonard, ¿qué habrían hecho las Fuerzas Armadas norteamericanas? ¿Le habrían entregado el avión de guerra?

La consulta no la hago ni la hice yo, sino que el propio Pentágono designó a una persona para que se refiriera públicamente al caso (un señor llamado Ken Bacon). Su respuesta fue lacónica: “No. No le habríamos entregado el avión de ninguna manera”.

Acá voy a parar. Usted advierte que un error de estas proporciones se hubiera podido evitar de múltiples maneras, pero decididamente no conocer cuán grandes (o chicos) son los números es algo claramente inaceptable. Eso sí: me encantaría haber estado en ese momento y verlo a Leonard paseándose por su barrio con un avión en lugar de un perro, y un correa un poco más gruesa que las que usamos habitualmente. ¿Y el bozal?

Referencias

- 1) <http://www.todayifoundout.com/index.php/2016/06/time-man-sued-pepsi-harrier-jet/>
- 2) <http://www.classcaster.org/449/10564-Leonard%20v.%20Pep-sico.pdf>
- 3) <http://www.cnn.com/US/9608/09/fringe/pepsi.pentagon/index.html?eref=sitesearch>
- 4) <https://law.justia.com/cases/federal/appellate-courts/F3/210/88/483989/>

Sobre por qué no hay que jugar a la lotería

Hace un tiempo, escribí sobre diferentes variantes de lotería que se juegan en Alemania. Me enteré de ellas a través de diversos matemáticos conocidos ya que varios estuvieron haciendo cálculos para estimar cuál es la probabilidad de ganar.

El caso que quiero ofrecer acá merece un *análisis* diferente y que me resultó particularmente atractivo. Le propongo que lo hagamos juntos.

Suponga que estamos en alguna ciudad alemana y que usted *quiere* jugar a la lotería. Yo trato de disuadirla/o pero es *su* dinero y usted es una persona adulta, así que no me queda más remedio de cooperar de la mejor forma que pueda. Revisamos juntos las distintas posibilidades, pero hay *una* que le llamó la atención y quiere *invertir* en ella, en *esta* variante. Estas son las reglas: se trata de que usted elija *cinco* números diferentes entre los primeros cincuenta. Es decir, sin importar el orden, elige *cinco números que van entre el 1 y el 50*.

Sin embargo, eso no es todo. Por otro lado, usted tiene que seleccionar *un número más*: esta vez entre los que van del 1 al 36, y si quiere *puede repetir* alguno de los números que eligió antes (siempre y cuando esté entre el 1 y el 36).

Por ejemplo, usted podría haber elegido: 1, 7, 24, 38, 50 y además el 7.

¿Por qué? Usted *puede repetir* el *sexto* número (en este caso, el número 7), ya que este sexto número se extrae ‘aparte’. En el momento del sorteo, primero se extraen cinco entre los primeros cincuenta. Después, en otro bolillero, están los primeros 36 números. De allí, el oficial de la lotería extrae un número más.

La pregunta es entonces: ¿cuál es la probabilidad de que alguien gane?

Usted podría estar preguntándose: ¿qué quiere decir ‘ganar’ en este caso?

Bueno, ‘ganar’ quiere decir que el oficial de la lotería eligió del primer bolillero los números 1, 7, 24, 38 y 50, y después eligió el número 7 del segundo bolillero.

Ahora, de nuevo: ¿cuál es la probabilidad de que alguien gane el premio con estas reglas?

Si pudiera, le pediría que no (me) abandone ahora. Dese tiempo para pensar, aunque sea para descubrir el *grado* de dificultad involucrado.

Nos reencontramos a continuación.

Sigo.

Hay muchas maneras de *calcular* el número de formas en las cuales uno puede extraer los primeros cinco números, pero supongo que la más *clásica* es razonar es esta:

Para el primer número hay 50 posibilidades. Para el segundo quedan 49 números (no puede repetirse el que salió primero). Observe entonces que hay $50 \times 49 = 2450$ formas de elegir los primeros dos números, ya que para *cada* elección del primero hay 49 formas de elegir el segundo, y como hay 50 formas de elegir el primero, en total hay $50 \times 49 = 2450$.

En los párrafos siguientes vamos a reducir esta cantidad, ya que estoy contando dos veces cada par, pero téngame un poco de paciencia y después resolvemos esta ‘desprolijidad’.

Para elegir el tercer número, ahora quedan 48 posibilidades (ya que elegí dos con anterioridad). Luego, hay $(50 \times 49 \times 48) = 117.600$.

Y continúo con los que faltan: 47 para el cuarto número y 46 para el quinto. En total entonces hay: $(50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46) = 254.251.200$ formas.

Esto estaría bien siempre y cuando *importara* el orden en el que fueron elegidos, pero el orden *no* interesa. ¿Cuántas veces estamos contando cada quinteto?

Tomemos los primeros cinco números: 1, 2, 3, 4, 5. ¿De cuántas formas los puedo ordenar? (le pido que usted haga la cuenta para convencerse de que en realidad hay 120 formas de escribirlos):

12345	12354	12435	12453	12534	12543	13245	13254	13425	13452	13524	13542	14235
14253	14325	14352	14523	14532	15234	15243	15324	15342	15423	15432	21345	21354
21435	21453	21534	21543	23145	23154	23415	23451	23514	23541	24135	24153	24315
24351	24513	24531	25134	25143	25314	25341	25413	25431	31245	31254	31425	31452
31524	31542	32145	32154	32415	32451	32514	32541	34125	34152	34215	34251	34512
34521	35124	35142	35214	35241	35412	35421	41235	41253	41325	41352	41523	41532
42135	42153	42315	42351	42513	42531	43125	43152	43215	43251	43512	43521	45123
45132	45213	45231	45312	45321	51234	51243	51324	51342	51423	51432	52134	52143
52314	52341	52413	52431	53124	53142	53214	53241	53412	53421	54123	54132	54213
54231	54312	54321										

Fíjese entonces que cada vez que uno elige *cinco números cualesquiera* hay 120 formas de ordenarlos. Como el *orden* no importa, en el total que calculamos (254.251.200) cada combinación aparece repetida 120 veces. ¿Qué hay que hacer entonces?

Sí, lo que usted se imagina: hay que dividir

$$254.251.200 / 120 = 2.118.760$$

Pero acá no termina. ¿Por qué? Todavía queda por elegir un número más, que habrá que seleccionar entre los primeros 36. ¿Moraleja? Por cada una de las 2.118.760 combinaciones, le puedo agregar un número cualquiera entre 1 y 36, por lo que el total ahora se obtiene multiplicando

$$2.118.760 \times 36 = 76.275.360$$

Ahora sí, 76.275.360 es el número total de posibles elecciones de cinco números entre los primeros 50 y un número más entre los primeros 36.

Si usted quiere calcular la probabilidad de *acertar*, tendrá que dividir

$$1 / 76.275.360 = 0,000000013110393710367$$

Esto significa que uno tiene *una* posibilidad en más de 76 millones. Ahora bien, quiero comparar esta probabilidad con otra que nos sea un poco más ‘accesible’.

Suponga que vamos a tirar una moneda al aire y vamos a anotar lo que ‘sale’. La probabilidad de que salga veintiséis veces seguida ‘cara’ (o ‘ceca’) es 0,000000014901161193848; o sea, es *comparable* con el número que resultó al calcular la probabilidad de ganar esta variante de lotería. Eso sucede *una* cada 67.108.864 veces que tire la moneda.

Pregunta 1: ¿usted jugaría a este último juego, de tirar una moneda al aire y *únicamente* ganar si sale 26 veces seguidas del

mismo lado? ¿Pondría dinero para apostar a que eso va a suceder? Si su respuesta es sí, perfecto, siga ‘jugando’.

Pregunta 2: suponga que usted entra en una cancha de fútbol, alguna que le resulte familiar¹⁰. Pero no me refiero al estadio propiamente dicho, sino al césped donde se juega. Ahora imagine que yo fui y, sin que usted estuviera mirando, ubiqué una aguja como las que se usan para coser. Le tapo los ojos y le permito que vaya recorriendo el campo. En un momento determinado, usted decide cuando detenerse. Se agacha, estira un brazo y, siempre sin mirar, estira su pulgar y su índice como para agarrar ‘algo’ que está en el piso. Si justo encuentra la aguja, usted acaba de ganar a la lotería: felicitaciones.

Yo me entregué hace mucho tiempo y he decidido utilizar mi dinero para conseguir/me otros objetos. Eso sí, y antes que me lo diga usted: yo sé que ‘alguien *tiene* que ganar’, pero ese ‘alguien’ no voy a ser yo. Yo... *paso*.

10. Las dimensiones (en promedio) son 100 metros de largo por 70 metros de ancho.

Los números narcisistas

Voy a empezar con un ejemplo que —creo— le va a dar una idea de lo que quiero proponer, y me va a permitir hablar de lo que se llaman *números narcisistas*.

Elijo el número 14.459.929. Como se ve, es un número que tiene ocho dígitos:

1, 4, 4, 5, 9, 9, 2, 9

Voy a *eleva*r cada uno de ellos a la *séptima potencia*. Obtengo estos ocho resultados:

$$1^7 = 1$$

$$4^7 = 16.384$$

$$4^7 = 16.384$$

$$5^7 = 78.125$$

$$9^7 = 4.782.969$$

$$9^7 = 4.782.969$$

$$2^7 = 128$$

$$9^7 = 4.782.969$$

Ahora, los voy a sumar:

$$1 + 16.384 + 16.384 + 78.125 + 4.782.969 + \\ 4.782.969 + 128 + 4.782.969 = 14.459.929$$

Fíjese lo que sucedió: al sumar estos ocho números, *recuperé* el número original: 14.459.929.

Este número, 14.459.929, se llama un *número narcisista de orden 7*.

$17 + 47 + 47 + 57 + 97 + 97 + 27 + 97 = 14.459.929$
--

Ahora, en general. Tomemos un número positivo cualquiera. Llamémoslo A. En el caso de que *exista* algún número natural *k* de manera tal que la suma de *todos los dígitos de A elevados a la k me permite recuperar el número original (A)*, entonces este número se llama *narcisista (de orden k)*.

Naturalmente surgen muchísimas preguntas, ¿no es así? Por ejemplo: ¿habrá más?, ¿cuántos más?

Escribo alguna de las respuestas, pero claramente esto es solo la introducción al problema. Está en usted verificarlo y cuestionarse en el camino *todo* lo que se le ocurra. Quizás, en lugar de leer lo que *ya se sabe*, podría dedicarse usted a *descubrir* y actuar como un/a verdadero/a detective.

Igualmente, avanzo *un poquito*. En principio, hay *cuatro* números narcisistas de orden *tres*: 153, 370, 371 y 407.

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$$

$$3^3 + 7^3 = 370$$

$$3^3 + 7^3 + 1^3 = 371$$

$$4^3 + 7^3 = 407$$

En realidad, este tipo de números no parece tener ningún atractivo particular o, en todo caso, no *parecen* presentar ninguna característica que los distinga, más allá de la curiosidad que despiertan.

Sin embargo, hay una propiedad que me gustaría destacar. Fíjese que el *primero* de los números que escribí al comienzo de este artículo tiene *ocho dígitos* y la *potencia* a la cual hay que elevar cada uno de los dígitos (y después sumar para recuperar el número) es *siete*. Es decir:

$$1^7 + 4^7 + 4^7 + 5^7 + 9^7 + 9^7 + 2^7 + 9^7 = 14.459.929$$

En cambio, los otros cuatro números (153, 370, 371 y 407) tienen *tres* dígitos y la *potencia* a la cual hay que elevarlos para recuperar el número es *tres*. O sea, el número de dígitos y la potencia es la misma. Estos son los que se llaman ***verdaderamente narcisistas*** o también “Números de Armstrong”.

Las preguntas que formulé siguen siendo válidas: ¿habrá más?

Los cuatro que escribí anteriormente (153, 370, 371 y 407) son verdaderamente narcisistas.

Si usted está interesado en encontrarlos todos, hay una excelente página aquí: <http://oeis.org/A014576>. El nombre OEIS corresponde con las iniciales de On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Allí se pueden encontrar *todas las sucesiones de números enteros que se destacan por alguna razón especial*. La fundación fue creada en el año 1964 por N. J. A. Sloane, y en ese momento era una enciclopedia ‘en papel’, mientras que a la OEIS, como su nombre lo indica, se puede acceder vía internet. La página ‘madre’ está acá: <http://oeisf.org/>

Solo para completar este artículo con algunos datos más, agrego los primeros que aparecen en la lista:

1) Con cuatro dígitos, están 1634, 8208 y 9474. Esto significa que:

a. $1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634$

b. $8^4 + 2^4 + 0^4 + 8^4 = 8208$

c. $9^4 + 4^4 + 7^4 + 4^4 = 9474$

2) Un ejemplo con cinco dígitos es: 54.748. Es decir: $5^5 + 4^5 + 7^5 + 4^5 + 8^5 = 54.748$.

3) Hay otros dos con cinco dígitos: 92.727 y 93.084.

4) Hay uno solo con seis dígitos: 548.834.

5) Hay cuatro con siete dígitos: 1.741.725, 4.210.818, 9.800.817 y 9.926.315.

Y acá voy a parar con los ejemplos. Lo que *sí* me interesa es agregar que números de este tipo (verdaderamente narcisistas) solamente pueden existir de *hasta 62 dígitos*. Usted se preguntará con toda razón ¿por qué?

Fíjese en el siguiente argumento. En algún momento me hará falta usar un hecho cuya demostración no es muy complicada pero o bien me lo tendrá que creer (verá que no es antiintuitivo, por lo que lo más probable es que sea sencillo creerle a alguien, en este caso a mí, de que es cierto), o yo le puedo ofrecer algún recurso que le sirva para encontrarlo por internet.

Dicho esto, fíjese en esta demostración, que es muy bonita y que en su momento (en el año 2007), me envió Juan Sabia, matemático y uno de mis más queridos amigos, uno de los regalos de los *múltiples* que me hizo la vida. Acá va.

Tome un número a que tenga n cifras. Luego,

$$a \geq 10(n - 1) \quad (o)$$

¿Cómo convencerse de esto? Es bastante sencillo. Por ejemplo, si usted tuviera un número de *dos* cifras, tiene que ser *mayor (o igual) que 10*. Si ahora usted tuviera un número *a* que tiene *tres* cifras, tiene que ser *mayor (o igual) que 100*. ¿Por qué? Es que el número tendrá que ser de la forma *xyz*, con el número *x* diferente de cero. Y *x* tiene que ser diferente de cero porque si no, el número tendría *a lo sumo dos cifras y no tres* como estamos suponiendo. Es decir, cualquier número de tres cifras es *mayor o igual* que 100.

De la misma forma, un número de cuatro cifras tiene que ser *mayor (o igual) que 1000*. Un número de cinco cifras tiene que ser *mayor o igual* que 10.000. Y así siguiendo.

En general, un número *a* que tenga *n* dígitos o *n* cifras tiene que ser *mayor o igual* que $10(n - 1)$.

Establecido esto, ahora voy a sumar las potencias *n*-ésimas de las cifras de *a*.

Entonces, tomo *cada uno de los dígitos que componen el número a*, lo elevo a la *n*-ésima potencia y después sumo los *n* sumandos que fabriqué.

A esta suma, la voy a llamar *S*.

¿Qué cumple *S*? Fíjese que se verifica que

$$S \leq n \cdot 9^n \quad (oo)$$

¿Por qué? Es que *cada una de las cifras de a es MENOR o IGUAL que 9* y, por lo tanto, la potencia *n*-ésima de cada cifra de *a* es *MENOR o IGUAL que 9ⁿ*.

Ahora bien: como *a* tiene *n* cifras, la suma *S* es *MENOR o IGUAL que n · 9ⁿ*.

(Esto sucede porque cada cifra de *a* elevada a la *n*-ésima potencia es menor o igual que 9 elevado a la *n*-ésima potencia. Por

lo tanto, como hay n cifras, la suma S es MENOR o IGUAL que $n \cdot 9^n$).

Aquí necesito utilizar un argumento que mencioné antes. Si uno va cambiando el número n , puede fabricar una *sucesión* de números del siguiente tipo:

$$10^{n-1} / n9^n \quad (*)$$

Si tiene ganas (y tiempo) fíjese lo que sucede si usted comienza a reemplazar el número n por diferentes valores. Naturalmente, trate de usar una calculadora o una computadora y vaya cambiando el número n haciéndolo cada vez más grande.

Tome nota de lo que sucede con los números que aparecen en (*) y verá que son cada vez mayores. Más aún: esos números crecen indefinidamente y *superan* cualquier ‘barrera’.

Es decir, si usted me desafiara y me dijera: “A ver... ¿Podés encontrar algún número n para el cual el número $10^{n-1}/n9^n$ sea mayor que 578?”.

Seguro que yo lo voy a poder encontrar (¿no quiere intentarlo usted?). En este caso, el *primer* número n que cumple esto es: $n = 129$.

Y si usted subiera la apuesta y me dijera: “¿Podés encontrar un número n de manera tal que $10^{n-1}/n9^n$ sea mayor que diez mil?”.

En este caso, el *primer* número n que cumple la desigualdad es: $n = 158$.

Y acá voy a parar, porque, no importa cuál sea el número que usted me ofrezca como ‘supuesta’ barrera, yo siempre voy a poder encontrar un número natural n , de manera tal que $10^{n-1}/n9^n$ sea mayor que el número que usted me propuso. Siempre.

La matemática tiene un nombre para esta situación. Cuando esto sucede, se dice que la sucesión de números $10^{n-1}/n9^n$ que

aparecen cuando uno va *cambiando* el número n ‘**tiende a infinito**’. Es una sucesión que se hace arbitrariamente grande y termina superando *cualquier barrera que usted me quiera poner*.

¿Cómo usar este hecho en el problema que estoy/estamos analizando? (¿quiere pensar usted?).

Fíjese que, en particular, *tiene* que haber *algún número* n para el cual el número $10^{n-1}/n9^n$ sea mayor estricto que 1.

O sea, tengo que encontrar *algún número* n tal que

$$10^{n-1}/n9^n > 1 \quad (**)$$

Por lo tanto, si multiplico por $(n9^n)$ de los dos ‘lados’, se obtiene *otra* desigualdad:

$$10^{n-1} > n9^n \quad (***)$$

Usando (o), (oo) y (***) se deduce que

$$a > S$$

Con lo cual, solo hay *finitos* números n para los cuales se puede cumplir la igualdad. Como hay finitos dígitos... listo.

Si quiere, use una calculadora sencilla y eso le permitirá descubrir que el *primer* número n_0 que cumple (**) es 63. Así, cualquier número que cumpla lo de las potencias n -ésimas tiene que tener ***a lo sumo 62 dígitos***.

Es decir, la cantidad de números *verdaderamente narcisistas* es *finita*. Como se señala en la enciclopedia de Wolfram¹¹,

11. <http://mathworld.wolfram.com/NarcissisticNumber.html>

D. Winter probó en el año 1985 (luego verificado por D. Hoey y T. A. Mendes Olivera e Silva) que hay exactamente 88 números verdaderamente narcisistas.

Si le interesa seguir avanzando, creo que la forma de empezar es utilizar la enciclopedia creada por Sloane en donde aparecen las sucesiones de números enteros más relevantes y después el extraordinario programa generado por Wolfram. Con eso ya tendrá para entretenerse. Ah, y por supuesto *googlee* ‘números narcisistas’ o ‘números de Armstrong’ y encontrará una *tonelada* de información.

Nota

Como usted habrá advertido al llegar a esta altura, el primer ejemplo que puse

$$1^7 + 4^7 + 4^7 + 5^7 + 9^7 + 9^7 + 2^7 + 9^7 = 14.459.929$$

es un ejemplo que no tiene los mismos condimentos que todos los demás. ¿Por qué? Es que 14.459.929 es un número de *ocho* cifras mientras que las potencias que uno usa para afectar a cada uno de sus dígitos no es *ocho* sino *siete*. O sea, es un número narcisista pero no es *verdaderamente narcisista*.

Reloj de dos colores

El que sigue es un problema precioso para pensar porque, ‘a priori’, parece que no se podrá resolver o, mejor dicho, es ‘antiintuitivo’. Me explico. Suponga que usted tiene un reloj de pared, cualquiera. De momento, imaginemos que es un círculo con 12 lugares (en donde normalmente ubicaríamos los 12 números en donde el reloj marca las horas).

Yo le entrego dos lápices de dos colores diferentes, digamos rojo y azul. Le doy la libertad de que pinte la mitad de cada color, como usted quiera. La *única* condición es que haya seis pintados de rojo y seis pintados de azul.

Lo que quiero, es convencerla/o de que haga lo que haga, los pinte como los pinte, seguro que yo puedo trazar un segmento que corte al reloj por la mitad, de manera tal que en una mitad hay tres rojos y tres azules (y naturalmente, lo mismo sucederá en la otra mitad). ¿Usted qué cree que va a pasar? ¿Se podrá o no?

¿Quiere intentarlo?

Idea para la solución

No sé lo que le pasó a usted, pero cuando vi el problema me pareció que no era posible o, mejor dicho, me pareció que yo no estaría en condiciones de pintarlo de tal manera que ningún corte dejaría las dos mitades con la misma cantidad de rojos que de azules. ¿Se podría?

Hagamos lo siguiente y le voy a mostrar por qué *siempre* se puede. Usted empiece pintándolos como quiera. Cuando haya terminado, yo tomo una regla y trazo un segmento que corta el reloj por la mitad de cualquier forma. No tengo la expectativa de tener éxito, es decir, sería una casualidad total que lo cortara al azar y produjera lo que espero que pase. De hecho, si *justo* llegué a encontrar que hay tres de cada color, se terminó el problema.

Entonces, supongamos que no, que hay 4 rojos y 2 azules (por elegir un ejemplo cualquiera). Esto quiere decir que *en su mitad* hay, al revés, 2 rojos y 4 azules.

Ahora, voy a ‘mover’ (rotar) la línea que recién tracé en el sentido de las agujas del reloj. Es decir, al detenerme voy a producir *un nuevo corte* por lo que, como usted advierte, aparecerá un círculo nuevo que no estaba antes, pero al mismo tiempo desaparecerá otro.

Hay tres posibilidades al rotar la línea (¿quiere pensarlas usted? Después, podemos *confrontar si estamos de acuerdo*) ¿Cuáles son los tres posibles casos? Piense también que cualquier modificación que yo produzca en ‘mi’ mitad impacta en los *seis círculos suyos*. Si yo pierdo un rojo, lo gana usted. Si yo gano un azul, lo pierde usted. Es decir, estamos interconectados. Ahora veamos qué sucede en cada uno de los tres casos posibles:

- a) Si el que agregué es del mismo color del que perdí, no cambia nada. Yo seguiré teniendo en mi mitad 4 rojos y 2 azules (y usted, al revés).
- b) Si yo *agrego* un azul y *pierdo* un rojo, se termina el problema, porque tengo ahora 3 rojos y 3 azules, y lo mismo le pasa a usted. Esta situación sería ideal porque conseguiría lo que me había propuesto. Y, de paso, usted también.
- c) La última posibilidad es que yo *agregue* otro rojo y *pierda* un azul. En ese caso, ahora tengo 5 rojos y 1 azul, y usted, al revés.

Tengo dos observaciones que me parecen importantes y le pido que me acompañe en estos razonamientos.

- 1) Podría seguir analizando los casos que se producen cada vez que vaya moviendo la línea, pero si sigo haciendo esto (independientemente de lo que vaya sucediendo con los colores que gane o pierda), llegará un momento en el que yo pasaré a estar en la situación que estaba usted al principio, y viceversa (usted estará en la mía). ¿Me sigue? Al mover la línea *seis* veces, será equivalente a *intercambiar* nuestras posiciones iniciales.
- 2) Por último —y esto es *muy* importante— en cada paso yo no puedo más que *agregar* o *perder* un color. No puedo agregar dos rojos, por ejemplo, ni dos azules. Toda modificación se hace por pasos *de a uno*. O bien agrego un rojo o bien agrego un azul, o eventualmente no cambio nada, pero no puedo *ganar* dos rojos en una sola movida de la línea (ni *perderlos*).

Con toda esta información, fíjese que si yo empecé con 4 rojos y 2 azules, y lo *peor* que me pudo pasar es que al ir moviendo la

línea nunca llegué a tener 3 rojos y 3 azules, quiere decir que en algún momento *llego a estar en SU posición inicial*. Pero usted empezó con 4 azules y 2 rojos. Para que yo haya llegado a estar en su lugar, como no pude saltar de 4 rojos (los que tenía yo al principio) a tener 2 rojos (como los que tenía usted al principio), esto significa que en algún momento *tuve que haber pasado por tener 3 rojos* (y por ende *tres azules*). Y en ese momento justo, usted tenía lo mismo que yo: 3 rojos y 3 azules.

Moraleja

¿Qué nos enseña esto? Que inexorablemente hubo algún momento en el movimiento de la recta que pasé por la situación que quería. ¡Y allí se resolvió el problema!

Apéndice

Voy a poner un ejemplo más *visual* para entender lo que fui describiendo antes paso a paso. Elegiré una forma cualquiera de pintarlos, como se ve en la Figura 1. Ahora quedaron pintados de gris y de blanco.

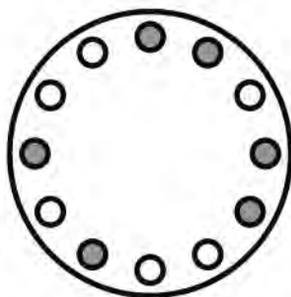


Figura 1

Elegí una forma cualquiera de cortar. A la izquierda, en *mi* mitad, quedaron 4 blancos y 2 grises.

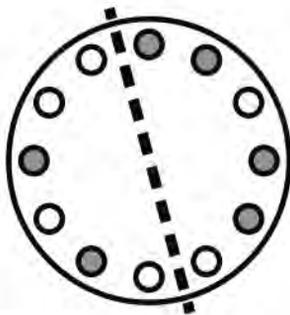


Figura 2

Ahora, empiezo a *rotar* la línea que corta. Resulta entonces *esta* nueva Figura 3:

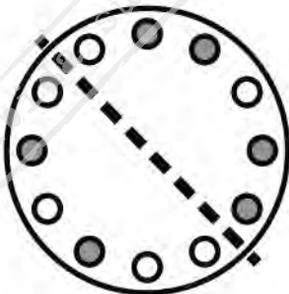


Figura 3

No cambió nada porque, al rotar, perdí uno blanco arriba, pero también uno abajo. Sigo teniendo 4 blancos y 2 grises (y naturalmente, la otra mitad, sigue teniendo 4 grises y 2 blancos). Vuelvo a rotar la línea, y ahora se obtiene la Figura 4.

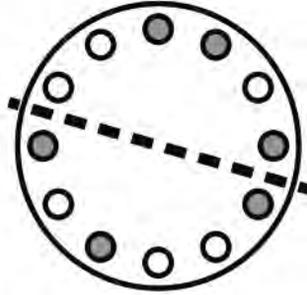


Figura 4

Ahora sí se produjo una modificación: *perdí* uno blanco y *gané* uno gris. En este momento, en *mi* mitad, tengo 3 blancos y 3 grises (que es lo que quería). Por otro lado, en *su* mitad, pasó lo mismo: ahora usted *perdió* uno de los grises que tenía de más, pero *ganó* uno blanco. Y listo.

Para terminar, quiero proponerle pensar algo más: ¿le parece que tuvo importancia que fueran 12 círculos? Es decir, si en lugar de haber tenido 12 hubiera tenido 400, y los hubiera pintado de *alguna* forma 200 blancos y 200 grises, creo que con esta idea usted debe (o debería) estar en condiciones de sacar una conclusión más general. ¿Qué debería decir esta conclusión general? ¿Quiere pensar usted? Es que la conclusión debería decir que uno puede *garantizar* que, independientemente de la forma en la que una persona distribuya los colores (por mitades) entre los 400 puntos, *seguro* que existe una forma de dividir el ‘reloj’ en dos partes iguales, de manera tal que los colores queden distribuidos por mitades también. Y por supuesto, el número 400 también es arbitrario. Cualquiera sea el número *par* de círculos, el resultado se sigue manteniendo.

El crédito de este artículo hay que adjudicárselo a la gente

del diario *El País* de España, quien publicó una serie de problemas de matemática no solo en su versión impresa, sino también digital, aprovechando la extraordinaria plataforma que ofrece tener un diario de tremenda penetración en el mundo hispanoparlante, para promover y proponer problemas de este tipo. Sirva este caso como reconocimiento a lo que hicieron (y hacen) las autoridades y los editores del diario que produjeron una serie inolvidable.

Prohibida su reproducción

Criptografía

En esta época en la que uno necesita comunicar información a *otra* persona que no está con uno en el mismo lugar geográfico, poder hacerlo en forma privada, segura y eficiente es verdaderamente un problema. Los ejemplos clásicos (y más conocidos) son los de las *contraseñas* para proteger la identidad de una cuenta de correo electrónico, el envío del número de una tarjeta de crédito (o de débito), certificación de la identidad en un cajero automático..., la lista es increíblemente larga. Estoy seguro de que usted me entiende. Suponga entonces que yo quiero mandarle un mensaje *oculto*, algo así como si yo quisiera mandárselo a mis amigos sin que lo entiendan nuestros *enemigos* aunque lo pudieran interceptar.

Para poder hacerlo, sería necesario establecer algunos códigos o claves y, naturalmente, sería bueno que usted, yo, nuestros amigos, seamos capaces de *decodificar* los mensajes que los miembros del *otro equipo* (el que llamé nuestros *enemigos*) se están mandando entre ellos y que no quieren que nosotros entendamos.

Algunos ejemplos

EJEMPLO 1

Supongamos que usted está en un colegio o una escuela. Un compañero le envía este mensaje. Dice así:

M2 Q532R4 3R 1L R2CR24

¿Qué le dice? O mejor dicho, ¿qué quiere decirle sin correr el riesgo de que si el maestro lo intercepta pueda leer inmediatamente lo que está escrito?

Imagine que usted es un detective o una detective. Esta es su tarea, descubrir qué mensaje está encriptado allí.

En principio, la primera observación que uno puede hacer es descubrir que *no aparece ninguna vocal*. Si efectivamente *hay* escrito algún mensaje, estará claro que no puede haber nada escrito sin que haya vocales. ¿Cuáles son? ¿Dónde están? Obviamente, es una clara ventaja que le está dando ‘el rival’, si usted *sabe* que encerrado en el jeroglífico *tiene* que haber un mensaje que tenga sentido (en español, por ejemplo).

Dicho esto, supongo que usted puede avanzar ahora con más tranquilidad. Como usted y yo sabemos hablar en castellano/español, es muy probable que tengamos posibilidades de *intuir* o *inferir* cuáles de los símbolos *son las vocales que han desaparecido*.

Por ejemplo, podríamos intentar descubrir que cada número se corresponde con una vocal diferente. Mire de nuevo el texto del mensaje. Si ahora se siente un poco más confiada/o, verá que uno puede hacer estas asignaciones:

1 = A ; 2 = E ; 3 = I ; 4 = O ; 5 = U

Al llegar a este punto, creo, el mensaje ya está claro: “Me quiero ir al recreo”.

EJEMPLO 2

¿Qué dice acá?

DPSSBNPT VÑB DBSSFSB

Ahora ya no es *tan* inmediato, porque no está claro cuáles son las vocales. En el caso anterior, el hecho de haber reemplazado las vocales por números sirvió para avanzar en forma muy expeditiva. Aquí no se puede.

Lo primero que me llamó la atención, es la repetición de dos letras consecutivas, como se ve en el caso de la doble S, que se observa tanto en la primera como en la tercera palabra. Esta sería para mí la primera ‘pista’.

La segunda es que la segunda palabra tiene nada más que *tres* letras: VÑB.

Preguntas: ¿se corresponderán la doble S con alguna letra que en castellano se repita también dos veces? Por ejemplo, en la palabra *calle* o *carreta* hay dos letras L o dos letras R. ¿Hay otros casos? ¿Quiere explorarlos usted por su cuenta?

Le confieso que estoy escribiendo este texto sin *saber* cuál es la solución. Lo hago porque me resulta inmensamente atractivo que participemos juntos en las líneas de razonamiento. ¿Cómo seguir?

Si la segunda palabra se corresponde con QUE (una ‘aventura’ de mi parte porque no tengo ninguna razón para imaginarme que así es), o sea, VÑB equivale a QUE, entonces la Ñ reemplazaría a la U y la B a la letra E. Al revisar las tres palabras, no

aparece ninguna Ñ más, pero sí aparecen varias B. Al mirar la primera palabra, tanto ‘antes’ de la doble S como después aparecen una P y una B. Es esperable entonces que tanto la P como la B se correspondan con vocales. Con la misma idea, pero esta vez con la tercera palabra, la letra F también debería ser una vocal.

Resumen hasta acá:

- a) La doble S debería ser o bien una doble L o una doble R.
- b) La letra B debería ser una E, al mirar la segunda palabra.
- c) La letra V debería ser una Q, mientras que la Ñ, una U.
- d) Las letras P, B y F tienen que ser vocales también. Como la Ñ ya estamos suponiendo que es una U, necesitamos que las vocales A, E, I, O estén repartidas entre P, B y F. Por lo tanto, todavía nos falta *una* vocal.

Siguiendo esta idea, no se podría avanzar mucho más. No parece ser una idea *conducente*. Haber supuesto que la V debería ser una Q, mientras que la Ñ debía provenir de una U, no parece haberme permitido avanzar, aunque sonaba interesante en principio. ¿Entonces? Acá es donde —creo— puedo aportar *otra* idea que es muy añeja. De hecho, apostarí a que la idea que le voy a proponer le va a servir no sé si ahora (eso lo tendremos que ver dentro de un instante), pero sí en casos futuros. Veamos.

Una de las formas de *encriptar* más antiguas es la que ‘cambia’ las letras siguiendo un determinado orden o, mejor dicho, *corriéndolas* de lugar. Por ejemplo, toda vez que debería haber una letra ‘a’, pongo una letra ‘b’. Cambio la ‘b’ por una ‘c’, la ‘c’ la reemplazo por una ‘d’... y así siguiendo.

Busquemos una palabra cualquiera y veamos lo que sucede: AMOR cambiaría por BNPS. Un par de observaciones.

- 1) Al llegar a la letra ‘z’, uno se pregunta: ¿qué pongo? Hago la pregunta porque voy *corriendo* cada letra por la siguiente, pero cuando tenga que decidir qué letra ocupa el lugar de la ‘z’, da la sensación de que me quedé sin letras. Dicho de otra manera: ¿qué letra *le sigue* a la ‘z’? ¿Se le ocurre qué podríamos hacer?

Bueno, si piensa un instante, verá que la letra que ‘quedaría sin usar’ —siguiendo el patrón que escribí antes— es justamente la primera letra del abecedario, la ‘a’. Bárbaro entonces: podemos usar la ‘a’ como letra que reemplaza a la ‘z’. Ahora sí, ya estamos en condiciones de probar con el ejemplo en cuestión:

DPSSBNPT VÑB DBSSFSB

¿Cuáles serían las *palabras*, las *tres* palabras que dieron origen a estas? La letra D proviene de una ‘c’, la P proviene de una ‘o’, la S de una ‘r’... y así puedo seguir con el resto de las letras. ¿Quiere probar usted para ver qué deduce?

CORRAMOS UNA CARRERA

- 2) Dije que quería hacer dos observaciones y solamente hice una. ¿Sabe cuál me falta? Me gustaría que la hiciera usted por su cuenta, pero le ofrezco una ‘ayuda’. Recién encontramos cuál era el mensaje encriptado en DPSSBNPT VÑB DBSSFSB... Todo lo que tuvimos que hacer fue *arreglar* lo que pasaba con la letra ‘z’, pero ¿será la *única* forma de encriptar corriendo de lugar *una sola letra*?

Como usted se imagina, yo podría hacer otras modificaciones, siempre usando la misma idea. De hecho, podría

correr las letras *dos* lugares y no solamente *uno*. La letra ‘a’ podría ir a parar a la letra ‘c’, la ‘b’ a la letra ‘d’, la ‘c’ a la letra ‘e’, etc. O sea, bastará con que me diga cuántas veces tengo que ‘mover’ cada letra y listo.

- 3) Dije que haría dos observaciones pero quiero agregar una más. Suponga que voy a usar la siguiente forma de *codificar*. Voy a intercambiar las letras del alfabeto empezando simultáneamente de cada punta.

Me explico: intercambio la ‘a’ con la ‘z’, la ‘b’ con la ‘y’, la ‘c’ con la ‘x’, la ‘d’ con la ‘w’... es decir, empezando desde la punta inicial y final, voy a intercambiando las letras. Por eso, intercambio la letra ‘a’, que es la primera, con la última, que es la ‘z’. La segunda, que es la ‘b’, con la penúltima, que es la ‘y’. Y así voy siguiendo: la tercera de la izquierda, que es la ‘c’, con la tercera desde la derecha, que es la ‘x’. Con esta codificación, ¿quiere descifrar qué dice este mensaje?

¡EREZ OZ ÑZGVÑZGRXZ!

¿No lo quiere deducir usted?

Para que no se quede con la intriga, dice: ¡Viva la matemática!

Antes de terminar, en esta suerte de idea bien *primitiva* sobre lo que significa la encriptación: ¿no está tentada/o de crear *usted* su propio código? ¿Seguro que no se le ocurre ninguno?

Como se puede imaginar, hay una cantidad increíble de ejemplos y de historias relacionadas con la criptografía y con la forma de ‘disfrazar’ mensajes. Si le interesa el tema, supongo que el *más importante de la historia de la humanidad* tiene (o tuvo) que ver con lo que hizo Alan Turing al descifrar el código secreto

que utilizaban los nazis durante la Segunda Guerra Mundial. Si quiere empezar entonces por un lugar apasionante, le sugiero que vaya por ahí. Seguro que no se va a arrepentir. Más allá de la *guerra visible*, la que se pelea en la superficie y a la vista de todos, hay *otra guerra*, mucho más sutil, y tiene que ver con la matemática que se utiliza e implementa.

Continuará...

Nota

Quiero agregar que esto que presenté en este artículo es una versión *hipersencilla* de lo que se puede hacer con la criptografía. Encriptar en forma segura es un ‘arte’ (¿ciencia?) que se ha ido perfeccionando con el tiempo, y mucho más a medida que hemos mejorado nuestra capacidad computacional. Pero además, los ejemplos que yo incluí tienen —en apariencia— una solución *única*. De hecho, anteriormente figura VÑB como un equivalente de la palabra UNA, pero podría haberle hecho corresponder *otras* palabras como FUE o SEA. Incluso, podría suceder que en esa suerte de código inventado, podría haber *impuesto* que $V = B$ (¿por qué no?).

Finalmente, una pregunta *muy interesante* que me propuso Carlos D’Andrea: “¿No habrá alguna permutación del alfabeto que haga que DPSSBNPT VÑB DBSSFSB resulte otra frase coherente en nuestro idioma”. Seguro que es algo que valdría la pena explorar. Pero eso ya daría pie a otro artículo...

El error humano

Todos los días, en todos los aeropuertos de las grandes ciudades, en todas las torres de control siempre se vive un clima de tensión. Es palpable aun para ellos, ni hablar para ninguno de nosotros que —creo— no tenemos ni idea de lo que sucede en lugares de ese tipo. Por supuesto, en épocas de pandemia, la mayoría de los aeropuertos del mundo presentaron (o presentan) imágenes totalmente distintas. Donde habitualmente se ven miles de personas con equipajes de mano, o con rueditas, o arrastrando bultos o paquetes, mirando carteles indicadores para saber qué ‘puerta’ se corresponde con su vuelo, como si estuvieran perdidas... todo esto, cambió durante la era del COVID-19.

Sin embargo, mientras haya aviones en el aire, por más que sean menos, las torres de control funcionan (y *tienen* que funcionar) de la misma forma. Y es por eso que estas personas —invisibles para nosotros—, las personas que trabajan allí, tienen períodos de descanso programados con mucha mayor frecuencia que en otros oficios, tratando de evitar o eliminar los errores típicos de una persona que está fatigada, aunque no lo note. Hay constantes reaseguros y redundancias en los controles por esa misma razón. La idea, obviamente, es tratar de prevenir el *error humano*. Está muy claro que *la seguridad total, no existe*. Justamente, como

somos humanos los involucrados, el error y la imperfección son inherentes a nuestra condición. Pero el objetivo es minimizarlos.

Aun cuando la mayoría de esas mismas funciones sean desarrolladas por computadoras, hay múltiples sistemas controlándose unos a otros. Y humanos vigilando. O al menos, eso es lo que se *supone* que *tendría* que pasar.

De todas formas, nosotros, los pasajeros, *vemos* las torres: están allí. Creo que no hay manera de que una persona se imagine un aeropuerto sin *torre*. Hasta en los pueblos más pequeños, o en los aeropuertos desde donde despegan los aviones más chicos, *siempre hay una torre*.

En esta oportunidad, me quiero referir a *otro tipo de centros de control aéreo*. Son ‘centros especiales’, que se ocupan de controlar los vuelos de *larga distancia* durante todo el tiempo que están volando a grandes alturas. Tanto antes (en el momento del despegue hasta superar determinada altura) o después (cuando están a punto de aterrizar), el ‘comando o monitoreo’ de estos aviones corre por cuenta de *otro* grupo de controladores, y las personas y el instrumental se encuentran *en otro lugar*, habitualmente desconectados de los que vemos. Por ejemplo, Estados Unidos es el país que tiene la mayor cantidad de estos centros: son nada más que 21. Se usan en todo el territorio norteamericano y también incluye Alaska. Y ahora, después de tanto prolegómeno, llegó el momento en el que quiero contar un episodio que virtualmente pasó inadvertido pero que pudo haber terminado en un accidente de proporciones difíciles de imaginar. Acompañeme por acá.

El 14 de septiembre del año 2004, en uno de estos 21 centros, se produjo una de ‘esas situaciones típicas y por ende *tan temidas*’, que ponen a todos los participantes en un estado de ‘locura’, como si súbitamente *todos* entraran en una película de terror.

Alrededor de las 5 de la tarde hora del Pacífico (en general en

la Argentina hay entre cuatro o cinco horas más), la torre instalada en Palmdale, California, perdió contacto *súbito* con *todos los aviones* que dependían de ella: ¡todos!

Los seguían ‘viendo’ en el radar, pero no podían hablar con ellos, no podían comunicarse y, por lo tanto, al haber perdido el ‘contacto de voz’... ¡no podían darles instrucciones! En ese momento había más de 400 (cuatrocientos) aviones en la ‘zona’, y decenas de miles de pasajeros en el aire. Si uso la palabra *pánico* me quedo corto. Pero igual, la uso. Pánico, eso. Por otro lado, había más de 800 aviones que estaban en las puertas de otros aeropuertos, además de los más importantes de Los Ángeles, esperando el turno para salir. Imposible. Todo demorado. Y otros 600 vuelos cancelados. ¿Qué hacer? Por supuesto, *todos estos estaban en tierra* y el inconveniente era de tipo logístico. Los otros, no. Y quizás lo peor de todo es que virtualmente *todos* ignoraban lo que estaba ‘pasando’.

La desesperación no impidió que varios de los controladores se comunicaran con otros centros de este tipo usando sus teléfonos celulares. El personal especialmente adiestrado para solucionar problemas de este tipo está acostumbrado a monitorear un determinado grupo de aviones. En este caso, debía agregar ‘otro grupo’, que llegaba inesperadamente desde otro lugar y que no estaba previsto en el plan original. No es difícil imaginar lo que sucedía: los que estaban en las *otras torres* deberían hacerse cargo. Pero mientras ponían en práctica todos los planes alternativos, había que convencer a todos los participantes de que no había tiempo para perder, ni nada para discutir. Las pocas personas que tienen el poder de *tomar la decisión final*, que tienen *este tipo de responsabilidad*, lo usan (el poder). ¡Las toman! (las decisiones finales). Y no son opinables: son órdenes, como si estuvieran en un régimen militar.

El problema más severo y quizás el *único* que importaba en ese momento es que los aviones no se chocaran entre ellos. El centro en donde se produjo el ‘corte’ está a cargo de todos los aviones que vuelan por encima de los 13.000 pies (4000 metros) en un área de 460.000 kilómetros cuadrados que cubre la parte sur de California y porciones de los estados de Arizona, Nevada, Utah, pero sobre todo incluye —además de varios de los aeropuertos de Los Ángeles— uno de los aeropuertos más ocupados del mundo: el Aeropuerto Internacional McCarran. Así dicho, es posible que a usted no le diga nada, como no me lo decía a mí. Pero si yo agrego que McCarran es el aeropuerto de Las Vegas, el *único* aeropuerto internacional del que se valen *todos* los turistas que arriban por vía aérea, la historia cambia. Por lo tanto, la situación afectaba múltiples aeropuertos de Los Ángeles, Phoenix, Salt Lake City, Reno y también... Las Vegas. La lista es más larga pero creo que a esta altura es totalmente irrelevante. De hecho, aunque estuviera cargo de *un solo avión con una sola vida*, todo lo demás se transforma en irrelevante.

Por supuesto, así como usted debe haber pensado o estará pensando ahora, en el mismo momento en que se interrumpió el control, se activó un sistema alternativo, como era esperable que sucediera. Pero se produjo *otro* accidente: el sistema que se hizo cargo estalló y dejó de funcionar dentro del minuto de que empezó a funcionar.

Los aviones claramente pueden decolar y aterrizar usando los equipos que todos tienen para decolar y aterrizar en forma automática, sin la intervención humana. Ese *no era el problema*. El problema residía en la *interacción entre ellos*. Las torres son las que ordenan el tráfico aéreo y toman las decisiones sobre el orden en el que se producen los aterrizajes (olvidémonos por ahora de los despegues, porque esa parte quedó interrumpida instantánea-

mente). Pero para aterrizar, hace falta seguir trayectorias, asignación de pistas para eventuales aterrizajes simultáneos, cuidar el combustible de cada máquina, ¡mantener las distancias mínimas entre ellos!, y creo que puedo parar acá: usted se imagina el resto. Ahora bien, algo que *no es menor*: justamente, cada avión de este porte necesita tener *horizontalmente* un poco más de 9 kilómetros por lado (cinco millas náuticas) y 2000 pies en forma vertical, alrededor de 610 metros (tanto hacia arriba como hacia abajo). Por un instante, piense lo que significan estos números: casi 10 kilómetros *por lado*, en donde no haya ningún otro avión lateralmente y más de seis cuadras para arriba y para abajo.

Es por eso que se hace imprescindible que haya un ‘director de orquesta’ que vea el panorama de todo lo que sucede alrededor. Si un piloto llegara a ver otro avión dentro del volumen permitido es muy posible que ya sea demasiado tarde y si no hay colisión se deba más a un milagro que a la pericia indudable que tienen quienes los manejan. Se me ocurre un diálogo ficticio entre dos pilotos: “Yo voy para arriba y a la derecha; vos andá para abajo y a la izquierda”.

Si los dos van en la misma dirección, la derecha y la izquierda *significan lo mismo*, pero si van en sentido contrario, lo que es *derecha* para usted es *izquierda* para mí... Y al revés también. Entonces, ¿si eligen los dos ir para el mismo lado tanto en forma lateral como vertical?

De acuerdo con un reporte que reprodujo el *New York Times*¹² en su artículo del día siguiente, 15 de septiembre de 2004, se produjeron *cinco* ‘casi’ colisiones, o ‘casi’ choques. Lo irónico es que justo esa mañana, solo unas horas *antes* del incidente, George Bush

12. El artículo que escribió Matthew L. Wald se puede leer acá: <https://www.nytimes.com/2004/09/15/politics/air-control-failure-disrupts-traffic.html>

(hijo) en ese momento presidente de los Estados Unidos, estaba en Las Vegas y salió con el avión presidencial (el Air Force One) sin que se registrara ningún incidente. Pero el accidente tomó estado público en forma inmediata, no solo por lo que le sucedió a todos quienes vieron demorados o cancelados sus vuelos, sino porque *todos* los periodistas que habían acompañado al Presidente, viajaban en un solo avión, y *ese* avión en particular... no pudo salir.

Otros informes¹³ detallan lo que sucedió dentro de la torre. Hamid Ghaffari el presidente de la Asociación Nacional (norteamericana) de Controladores Aéreos explicaba: “Es una situación que no le desearía a ninguno de los trabajadores de la torre: ver cómo dos aviones están a la misma altura, se dirigen al mismo lugar y en el último instante uno ve que uno de ellos trepa [*sic*] y el otro desciende”.

Al llegar a este punto, y quizás mucho antes, usted se habrá preguntado: ¿y por qué habría de contar yo un incidente que se produjo hace más de quince años? ¿Y por qué *acá*, en *este* contexto?

Antes de contestar específicamente, hay *algo* que se me ocurre que usted ya pensó también: ¿qué habrá pasado para que *esa* torre tuviera ese tipo de problema? ¿Fue acaso un ataque terrorista? ¿Fue quizás un acto de *sabotaje interno*? ¿Fue premeditado? ¿O fue verdaderamente un accidente?

Antes de avanzar con el análisis de esas preguntas, sígame y verá que lo que sucedió es verdaderamente increíble. Eso sí: le pido también que me acompañe con la matemática necesaria para poder entender.

13. Esta nota tiene las opiniones de varios de los controladores aéreos que estaban en ese centro: <https://spectrum.ieee.org/aerospace/aviation/lost-radio-contact-leaves-pilots-on-their-own>

Usted ya sabe, o debe haber escuchado a lo largo de los años, que las computadoras ‘hablan’ un lenguaje diferente del que utilizamos los humanos en nuestra vida cotidiana. De hecho, ni siquiera los números que usan las computadoras son los mismos que los que utilizamos todos los días. En principio, una computadora no usa los dígitos del 0 al 9, sino que *solamente usa ceros y unos*. Es lo que se llama *escritura binaria*. Estos *ceros y unos* no solamente *reemplazan a los dígitos comunes* sino que son los que sirven para *escribir cualquier instrucción, cualquier palabra, cualquier color, cualquier sonido... ¡todo!*

Una pausa y un pedido: “¡Por favor: no se vaya a perder ahora, porque lo que voy a escribir es muy sencillo! Solo le pido que me tenga un poquito de paciencia”.

En principio, según el informe del propio Ghaffari después de haber visto la ‘grabación’ de todo lo que había sucedido en el radar, como quien vuelve a ver una película, “los verdaderos héroes del episodio fueron los sistemas de prevención de colisiones que tienen instalados *todos* los aviones comerciales. Si el incidente se hubiera producido hace diez o quince *años*, cuando estos sistemas no existían, no habría habido manera de evitar que múltiples aviones se hubieran chocados unos a otros”.

Todo bien (o todo mal, si usted prefiere), pero ¿qué pasó? El problema se redujo a un error humano, que se hubiera podido evitar completamente. El sistema que se utiliza en todas estas torres requiere que sea ‘reiniciado’, como cuando uno reinicia una computadora después de haber hecho una actualización del sistema operativo, y eso tiene que hacerse *inexorablemente* cada 30 días. Dentro del sistema de control interno, hay un *contador* o un *cronómetro*, pero usado como un ‘timer’. ¿Vio el aparatito que quizás usted utiliza para avisarle que la comida está lista, o cuando un horno de microondas llega al punto final? Esos

‘aparatos’ tienen un nombre en inglés (solo porque no se me ocurre cómo llamarlos en castellano¹⁴): se llaman ‘timers’ (pronunciados en fonética como *taimers*). Cada 30 días hay que reiniciarlos: si usted no lo hace, el timer sigue corriendo unos 20 días más (ahora voy a ser un poco más preciso con las cuentas), pero si pasados esos casi 50 días *nadie hizo nada*, ¡el aparato se apaga! Así, directamente. Se apaga. ¡Y eso fue lo que pasó! El operario que debería haber reiniciado el timer a los 30 días no lo hizo. El timer siguió corriendo, y cuando se agotaron los 50 días, ¡cortó todo!

Esa es la explicación *menos técnica*. Y seguramente con eso es más que suficiente para entender, al menos por qué pasó. Igualmente me queda una sensación de impotencia al pensar que uno (usted, yo, ellos, cualquiera) depende de que UNA PERSONA ‘reinicie’ una computadora. Ahora bien: cuando usted cocina un pollo, lo pone en un horno convencional o en un horno a microonda y sitúa el timer en —digamos— 15 minutos, o en 4 minutos, es irrelevante. En el caso de la torre, el timer estaba puesto en este número:

4.294.967.295

Es decir, cuatro mil doscientos noventa y cuatro millones, novecientos sesenta y siete mil doscientos noventa y cinco. Ahora la pregunta que yo aspiro a que usted se esté haciendo (o *me* esté haciendo): “4.294.967.295... ¿qué? ¿Qué unidades?”.

Bueno, en este caso, son 4.294.967.295 milisegundos. Esto significa 49 días, 17 horas, 2 minutos y 47.295 segundos hasta

14. Me consta que en España, por ejemplo, se usa el nombre *temporizador*. No sé en qué lugar del mundo está leyendo usted esta nota, pero es muy posible que se utilice alguna otra variante que a mí no se me ocurre. Perdón.

llegar a *ceros*. Si alguien reinicia el timer, entonces lo *vuelve* a poner en ese número y la cuenta regresiva comienza nuevamente. Ahora bien: ¿por qué ese número *tan loco*? ¿De dónde sale?

Siéntase libre de ‘saltar’ lo que sigue en estos párrafos finales, porque no le va a agregar nada respecto del motivo por el cual el sistema dejó de funcionar. Pero lo que *sí* le va a agregar, es que va a entender de dónde sale ese número y por qué se usa (o se usó). Nosotros lo hemos usado reiteradamente sin siquiera saber que lo hacíamos. Las computadoras lo hacen. Mientras tanto, yo sigo.

¿Se acuerda de que yo le decía al principio de este texto que las computadoras *no usan todos los dígitos como nosotros* sino que usan nada más que 0 y 1? ¿Cómo hace entonces una computadora para escribir los números que nosotros conocemos si nada más puede usar *ceros* y *unos*? Hace así (acá voy a simplificar un poco, pero si le interesa, hay muchísima literatura escrita al respecto).

Por ejemplo: el número 0 y el número 1 no necesitan nada más, porque se representan a sí mismos: el 0 es el cero y el 1 es el 1.

¿Cómo hacer con el 2? Bien: el 2 se escribe como 10. ¿Ingenioso, no?

¿Y el 3? El 3 se escribe como 11.

Pero cuando llego al 4, ya no tengo más posibilidades usando *ceros* y *unos* y *nada más* que dos lugares. Para el 4, *necesito agregar un lugar más*. Es por eso que se usa el número 100.

Otra vez: ¿no es ingenioso? Claro, ahora necesito de *tres lugares*: el primero lo uso con el 1 y los dos últimos con *ceros*.

El 5 se escribe como 101. El 6 se escribe como 110 y el 7 (¿no se anima usted por su cuenta?) se escribe como 111.

Y acá se agotan las posibilidades usando *nada más* que *ceros* y *unos*, y tres lugares.

Resumiendo, tengo una forma de escribir los primeros ocho

números (incluyendo al cero). Voy a usar dos columnas. La de la izquierda indica el número que usamos habitualmente, mientras que la columna de la derecha expresa la escritura *binaria*, la que solamente utiliza *ceros* y *unos*.

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111

Para escribir el número 8, voy a necesitar *cuatro lugares* porque ya *agoté* todas las posibilidades usando ceros y unos, y tres lugares. Entonces, efectivamente, el 8 se escribe como 1000. Y escribo algunos más:

9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111

Y acá se vuelve a presentar el mismo problema que antes. Ya *agoté todas* las posibilidades usando ceros y unos, pero hasta cuatro lugares. Para escribir el 16, voy a necesitar *un lugar más*. Y efectivamente, eso hago:

16 10000

Ahora son *cinco* lugares. Sigo:

17 10001

18 10010

19 10011

20 10100

21 10101

22 10110

23 10111

24 11000

25 11001

26 11010

27 11011

28 11100

29 11101

30 11110

31 11111

Otra vez, igual que me sucedió antes, ahora *no puedo seguir*.

Para el próximo número, el 32, voy a necesitar *¡un lugar más!* Pero usted, si me siguió hasta acá, creo que *intuye* cuál será la escritura del número 32. Por las dudas, es 111111.

Ya nos acercamos al final. ¿Se imagina cuál será la escritura binaria del número que no entendíamos por qué *alguien habría de haberlo elegido*? El número que no entendía(mos) era 4.924.967.295.

Justamente, la escritura binaria de 4.924.967.295 es (la escribo yo):

11 111 111 111 111 111 111 111 111 111

Es decir, son 32 números *uno*. Cuando uno llega acá entonces, ¡la computadora no tiene más lugar! La memoria que necesita usar o, mejor dicho, la que *necesitaba usar hasta ese momento*, le permitía escribir números de hasta 32 lugares. ¡No había lugar para más!

Cuando llega allí, el sistema se agota y se corta todo. Es *esa* la razón por la cual se requería que cada 30 días, el timer fuera reinicializado. Al no haberlo hecho, ¡por un error humano!, el sistema se interrumpió y generó el incidente que pudo haber terminado en una verdadera catástrofe.

Si le interesa el tema (del que claramente yo no soy un experto ni mucho menos), en la actualidad las computadoras tienen 64 lugares para almacenar memoria. Por lo tanto, en lugar de tardar (como en el año 2004) un poco más de 50 días en agotarse, ahora llevaría alrededor de 585 millones de años, por lo cual hay que reinicializarlo dos veces cada mil millones de años. Podemos dormir tranquilos.

Esquiadores

Una pareja de esquiadores se está preparando para competir en los Juegos Olímpicos que se iban a hacer en Tokio en el año 2020, pero fueron pospuesto para 2021 (por ahora, mientras escribo estas líneas) debido a la pandemia. Están en Bariloche y tienen una pista que les permite aprovechar las fabulosas vistas, además de simular las dificultades con las que se tendrán que enfrentar en algún momento.

La inclinación de la montaña les permite estimar que, a medida que van descendiendo, duplican su velocidad cada minuto, y saben que tardan —en total— 10 minutos en llegar abajo.

¿Cuánto tiempo tardaron en llegar hasta la *mitad* de la pista?

Respuesta

Este problema tiene múltiples variantes, y es ‘casi’ seguro que usted o bien ya lo conocía o había escuchado hablar de él. De todas formas, pensemos (juntos) que si tardan diez minutos en hacer *todo* el recorrido, pero cada minuto *duplican* la velocidad a la que bajan, eso quiere decir que cada minuto que pasa recorren *el doble* de lo que habían recorrido antes.

¿Qué significa esto? Que llegaron a la *mitad* de la pista justo

un minuto antes de llegar al final, o sea, ¡a los *nueve* minutos de haber salido!

Si quiere pensarlo de otra forma (aunque esencialmente es la misma), hágalo así: cada minuto que pasa, recorren el *doble* de lo que habían recorrido hasta allí. Luego, si en diez minutos llegaron al final, un minuto antes habían llegado a la mitad. ¡Y listo!¹⁵

Prohibida su reproducción

15. Permítame la licencia de imaginar que las condiciones de la *pista son ideales*, y así suponer que los esquiadores recorren en cada minuto el doble de lo que habían recorrido hasta allí. En la práctica, es literalmente imposible replicar lo que yo estoy suponiendo.

¿Cómo aprendemos? Un doble desafío combinado

Hace muchos años propuse un problema que salió publicado en el diario *Página/12*¹⁶ y también en uno de los libros de la saga, *Matemática... ¿estás ahí?* Pero ahora, después de doce años, quiero hacer un agregado y una variación. Espero poder generarle la misma sorpresa que me produjo a mí. El título que elegí es “¿Cómo aprendemos? Un doble desafío combinado”. Si sigue leyendo, entenderá por qué. Voy a empezar por hacer un breve resumen de lo que escribí en el año 2007.

¿Cuántas veces escuchó usted que los jóvenes ‘de hoy’ leen un texto que no pueden comprender? O más aún: ¿cuántas veces fue *usted* quien pensó precisamente eso? Creo que queda claro que siempre es mucho más fácil descubrirlo o detectarlo en ‘los otros’ que verlo en uno mismo. Fíjese entonces qué es lo que le sugiere este problema de lógica. Me apuro en señalar que ¡no hace falta saber nada particular, solo hay que querer pensar! Además, como no hay nadie alrededor suyo, ¿quién va a juzgar su respuesta?

Aquí me detengo un instante, porque quiero hacer una re-

16. <https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-92754-2007-10-10.html>

flexión: ¿no le parece *mentira* que yo tenga que escribir estas líneas para sugerirle que *piense* un problema? En fin... créame que vale la pena, y sobre todo para incrementar su propia autoestima. Verá que no me equivoco.

Sigo.

Suponga que yo le muestro las siguientes cuatro cartas que aparecen apoyadas arriba de una mesa.

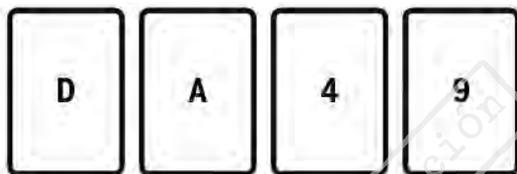


Figura 1

En principio, usted se sorprende porque habitualmente no conocemos ningún juego de cartas que presente esta peculiaridad, este tipo de naipes. Sin embargo, no se preocupe: son cartas que tienen, de un lado, una letra cualquiera del alfabeto español, y del otro lado, un número de *un solo dígito*, o sea, uno de estos diez números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Además, y esto es *muy importante*, yo le informo que las cartas cumplen con una *regla*: “Si de un lado de una carta hay una *vocal* (a, e, i, o, u), del otro lado *tiene* que haber un número *par* (0, 2, 4, 6, 8)¹⁷.”

Ahora, mire las cuatro cartas que están arriba de la mesa: D, A, 4 y 9.

Yo le aseguro que alcanza con dar vuelta a lo sumo *dos* de las

17. Sí, el número *ceros* es un número par. Es motivo de otra nota, pero me apuro en decirle que ‘0’ es un múltiplo de ‘2’ (y por eso es par), ya que el número ‘0’ se puede escribir así: $0 = 2 \times 0$.

cuatro cartas para convencerse de que la regla se cumple. En ese caso, ¿qué cartas daría vuelta usted, y por qué?

Llegado a este punto, voy a parar, porque quisiera dejarla/dejarlo para que usted pueda pensar cuáles cartas dar vuelta para estar convencido de que la regla se cumple. Tómese el tiempo que quiera pero, como respuesta, yo aspiro a que usted me diga: “Mirá: a lo sumo hay que dar vuelta estas dos cartas y con eso te va a alcanzar para decidir si se cumple la regla”.

¿Usted qué cartas daría vuelta?

Antes de avanzar, antes de seguir leyendo qué hice yo para contestar la pregunta, ¿no quiere pensar por su cuenta? ¿Qué gracia tendría que fuera yo quien *sugiera* una (o ‘la’) solución?

(Aquí no se ve, pero se ha producido una pausa que usted está usando para pensar).

Sigo. Estoy *casi* seguro de que la primera carta (o una de las dos cartas) que usted decidió dar vuelta es la letra A. ¿Por qué? Es que si al dar vuelta la letra A (que es una vocal) no hubiera un número *par*, ¡listo! Es una situación directa: “Doy vuelta la A; si no hay un número *par*, se terminó la búsqueda. La regla estaría *violada*”. No haría falta dar vuelta ninguna otra carta.

Supongamos que sí, que había un número *par* detrás de la A. Todo bien, pero aún no sabemos si alguna de las otras tres cartas ‘infringe’ la regla. De las tres cartas que quedan, podemos dar vuelta *solamente una*. ¿Cuál? ¿Usted qué piensa?

Analícemos — juntos — los tres casos que quedan:

- 1) Empecemos con la letra D. ¿Aportará alguna información relevante lo que suceda *del otro lado* de la letra D? ¿Qué cree usted? En verdad, si del otro lado de la D hay un nú-

mero *par* o un número *impar*, a los efectos de establecer lo que nos interesa, no ofrecerá nada nuevo, porque la regla no dice nada acerca de las letras *que no sean vocales*. Conclusión, podemos ignorar la letra D. No nos sirve.

- 2) ¿Valdrá la pena dar vuelta la carta que tiene el número 4? **AQUÍ SÍ** me quiero detener, y le propongo que piense por su cuenta sobre las dos posibilidades con las que nos podríamos encontrar:

Puede haber una vocal o no... (*estos puntos suspensivos los escribí para darle tiempo a que piense*).

Suponga que damos vuelta el 4 y aparece una consonante. ¿Dice *algo* eso? ¿Nos aporta *algo nuevo*? Uno tiene la tentación de decir o esperar que del otro lado del 4 haya una vocal. Sin embargo, me gustaría que nos convenzamos juntos de que, aunque eso suceda, no va a tener importancia. ¿Por qué? La regla que queremos verificar dice que “*detrás de cada vocal tiene que haber un número par*”, pero **NO DICE** que “*detrás de un número par tiene que haber una vocal*”.

¿Me entiende? Es muy importante que no avance sin haberme seguido en lo que estoy escribiendo. Es decir: *vocal* de un lado *obliga a número par del otro*. Pero *par* de un lado **NO OBLIGA A NADA**.

En consecuencia, dar vuelta el número 4 no nos va a aportar nada tampoco. Yo sé que la mayor tentación que tuvo usted (y créame que yo también) es en dar vuelta el 4 para ver qué hay del otro lado, pero si me siguió en el razonamiento, verá que no hay ninguna necesidad de darla vuelta porque no va a decir nada nuevo, nada relevante para el problema.

Conclusión: **descartada** la carta que tiene al 4.

- 3) **Queda** una última carta, la que exhibe el número 9 (*¿quiere pensar usted?*).

Si la diéramos vuelta, ¿podríamos aprender algo que no sabíamos antes? Es decir, si al dar vuelta el 9 hubiera una vocal o una consonante, ¿alteraría lo que estamos tratando de comprobar? Es una buena oportunidad para que yo me tome otra pausa...

Sigo: la respuesta es que *sí*. Si detrás del 9 hubiera una consonante, no hay problema. En cambio, si detrás del número 9 hubiera una *vocal*, entonces esto violentaría la regla porque 9 *no es un número par*. Resulta relevante entonces que al dar vuelta el número 9 encontremos una consonante y *no* una vocal.

Y esto termina por resolver el problema original.

Lo que hay que hacer entonces, es —a lo sumo— dar vuelta la carta que tiene una A de un lado y la carta que tiene un 9. Lo que suceda *del otro lado*, determinará si la regla se cumple o no. Con la información que proveen estas dos cartas, podemos sacar la conclusión que buscamos. ¡Y listo!

Esta primera parte fue la que escribí hace más de doce años. Sin embargo ahora, querría avanzar en otro sentido y, en el camino, hacernos (sí, hacernos, en primera persona del plural) algunas preguntas.

El matemático británico Keith Devlin¹⁸ publicó en diciem-

18. Keith Devlin es un matemático británico que vive en Estados Unidos hace mucho tiempo. Es una de las personalidades más relevantes del mundo en la difusión de la matemática y de temas de educación. Devlin es hoy profesor en Stanford, en Palo Alto, California. Podría escribir mucho sobre él, pero le sugiero, si le interesa, que *googlee* su nombre y se tropezará con una amplísima variedad de tópicos que ha cubierto con sus libros, artículos, ensayos.

bre del año 2019 un artículo que sirvió (involuntariamente) de *complemento* de lo que yo había escrito hacía tanto tiempo. Leí su artículo, y sirvió para educarme y al mismo tiempo compartir con usted algunas preguntas. Creo que sería muy interesante entonces que usted me acompañe en la lectura de lo que sigue y después vemos — juntos — si podemos extraer algunas conclusiones. Aquí voy.

En principio, Devlin reproduce un experimento realizado por dos psicólogos norteamericanos en el año 1992, Leda Cosmides y John Tooby. Léalo con atención: es difícil de escribir (aproveche la Figura 2), pero muy sencillo de entender.

Suponga que se realiza una cena en un salón que sirve para festejar el Año Nuevo. La concurrencia en su inmensa mayoría está formada por gente joven, estudiantes de un colegio secundario y ligados también con una universidad local. Tal como sucede en nuestro país, para poder consumir alcohol es necesario haber cumplido 21 años. Parte de su tarea esa noche es verificar que no se viole esa regla: cualquier estudiante que no haya llegado a cumplir los 21 años no podrá ingerir alcohol durante la cena. Para hacer todo más sencillo, digamos que en el bar solamente se podrá ordenar “cerveza” o “gaseosa”. Y nada más.

Para facilitarle la tarea, todos los comensales, tienen que exhibir su DNI y dejarlo directamente apoyado arriba de la mesa en la que están cenando. Algunos lo exponen “hacia arriba”, de manera tal que con una simple “mirada” usted podrá detectar la edad de su dueño/ dueña, y otros, lo apoyaron “boca abajo”, de manera tal de que, si usted tuviera que verificar la edad de ese estudiante, no le quedará

Sin ninguna duda, Devlin es hoy un referente mundial. El artículo aparece acá: <https://www.mathvalues.org/masterblog/what-firefighting-military-tactics-cancer-treatment-and-teenage-parties-can-tell-us-about-leaning-math>

más remedio que ‘darlo vuelta’ para ver el año de nacimiento. Ah, y algo más: algunos vasos son de plástico, de modo que como son opacos, es imposible decidir desde “afuera” si contienen cerveza o gaseosa.

Dicho todo esto, usted se acerca a una de las mesas en donde están comiendo cuatro personas y observa lo siguiente¹⁹: una está tomando una bebida gaseosa (persona 3) ya que tiene una copa de cristal en la mano y está a punto de beber, y hay otra que también tiene una copa de vidrio transparente y usted puede determinar que el líquido es cerveza (persona 4). Señalo en principio estas dos porque ambas, como se ve en la Figura 2, tienen el documento de identidad “hacia abajo” por lo que usted no puede decidir sin levantarlos y darlos vuelta si son mayores de edad (o no). Puede decidir lo que están tomando, pero no sabe las edades.

Los otros dos estudiantes tienen el documento “hacia arriba” y usted ve que uno (persona 2) es mayor de 21 años (por lo que puede tomar alcohol), mientras que la otra (persona 1) tiene 17 años (y no está en condiciones legales de consumir cerveza). Lamentablemente, ambos tienen sus vasos (de plástico) apoyados arriba de la mesa, y como son opacos usted no puede distinguir (desde afuera) si contienen cerveza o no. No le quedará más alternativa que levantarlos de la mesa y eventualmente acercar su nariz para poder determinarlo con el olfato o verificar el contenido acercándoselo a sus ojos.

19. Ver Figura 2.

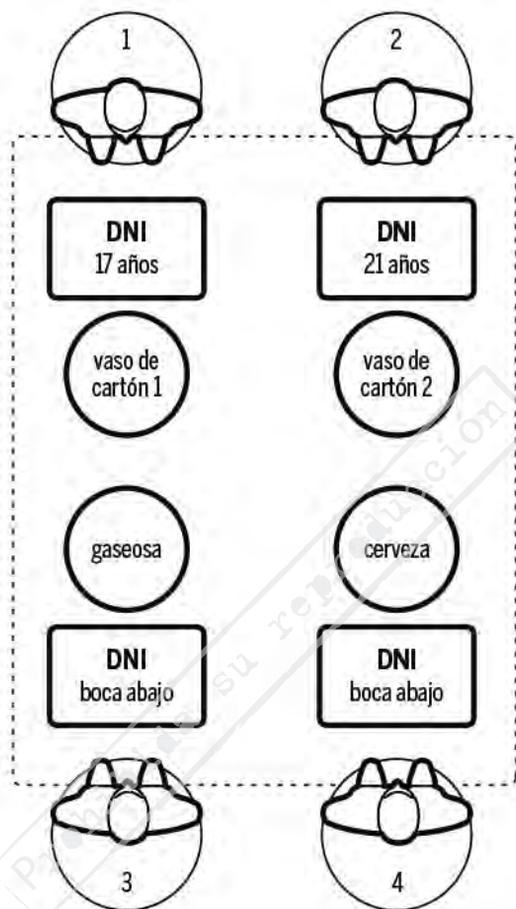


Figura 2

Tal como hice en el caso de las cartas, yo le aseguro que usted puede descubrir si los cuatro cumplen con la ley simplemente ‘oliendo’ o ‘mirando’ el contenido *uno de los vasos* y dando vuelta *uno solo de los documentos*. ¿Cuál documento y cuál bebida? Ahora, otra vez, le toca a usted.

Antes de avanzar, usted advierte que los dos problemas *parecen* estar relacionados. Es decir, tanto el de las cartas como este *parecen* tener algunas similitudes. La idea es poder determinar si lo que *aprendimos* (usted y yo) en el caso anterior *sirve* (o *nos sirve*) para deducir la solución de este segundo caso.

Sigo. Analicemos este caso particular, el de los mayores o menores de edad, consumiendo o no alcohol y después comparamos ambos casos.

Tomemos los dos estudiantes cuyas edades son visibles sin tocar el documento, o sea, las personas 1 y 2.

De los dos estudiantes que tienen el documento boca arriba, no le aportaría nada nuevo levantar el vaso de la persona 2 (ya que tiene 21 años): haya lo que haya en el vaso, está habilitado para consumir lo que quiera.

En cambio, en el caso de la persona 1 es distinto, porque como es *menor de edad* (usted 've' que tiene 17 años) y, por lo tanto, necesitará determinar el contenido del vaso. *Ese* es el vaso que usted tiene que 'oler' o 'decidir visualmente' si contiene cerveza (o no). Si contiene cerveza, estará violando la ley.

Ahora le propongo que sea usted quien decida qué hacer con las personas 3 y 4. Está claro que la persona 3 está tomando gaseosa y la persona 4 está tomando cerveza. Parece inmediato lo que hay que hacer: *¡dar vuelta el documento de la persona 4!* Es lo único que falta determinar. Si es mayor de 21 años, está todo bien. Si no, está infringiendo la ley. Lo que suceda con la persona 3, es totalmente irrelevante.

¿Por qué hacer esta analogía? Estoy *casi* seguro de que usted no tuvo ningún inconveniente para resolver el problema de la mayoría de edad y la bebida alcohólica (cerveza). Sin embargo, cuando pensamos el caso de las vocales y los números pares, eso ya fue *otra* historia. Si se detuvo a pensar, seguro que le llevó

algún tiempo. Créame que lo mismo me pasa/pasó a mí (y Devlin afirma lo mismo en su artículo): a pesar de haber escrito sobre él y haber conocido de su existencia durante décadas, *cada vez que me lo planteo, ¡necesito pensarlo otra vez!* Y está muy bien que así sea, nadie dice que uno tenga que ‘recordar’ nada; lo que sí se me pide, es que *piense*, y si lo pude hacer alguna vez, ¿por qué no habría de poder tantas veces como me sea planteado?

Pero no quiero terminar *sin hacer la comparación directa*. Es decir, ¿cómo relacionar ambos problemas? ¿Cómo plantearlo de manera tal que la *lógica* que requiere resolver uno de ellos sea *exactamente equivalente o igual* al otro?

La forma de conectarlos es la siguiente:

- a) Tomar “alcohol” (o cerveza en este caso) es equivalente a que ‘haya una vocal’.
- b) Ser ‘mayor de edad’ o ‘haber cumplido 21 años’ es equivalente a ‘número par’. Es decir, ‘ser menor de edad’ es tener un ‘número impar’.

Mi propuesta final es la siguiente: plantéese ambos problemas nuevamente. Uno tendería a pensar que si pudo resolver el problema de las bebidas y la mayoría de edad primero, entonces estaría en mejores condiciones de resolver el de las cartas y los números pares. O al revés. Sin embargo (y en esto estoy simplemente reproduciendo lo que he leído), no parece que fuera el caso. La pregunta queda abierta (al menos para mí): ¿aprende uno o no? ¿Encuentra las analogías o no? ¿Haber resuelto uno de los dos, *hace más fácil* la solución del segundo?

No tengo respuesta, no lo sé. Como siempre, uno tiene la tentación de sacar conclusiones generales o verdades absolutas, pero lamentablemente la vida no ofrece muchas oportunidades

de este tipo. Es por eso la fascinación que representa el estudio de la mente humana. Un verdadero desafío.

Nota

Carlos D'Andrea me apunta —con mucha razón— que plantear el problema en la situación del bar y los menores de edad es algo más *real*, que podría plantearse en la vida cotidiana, mientras que el tema de las cartas con números y letras parece *forzada* y/o *ficticia*. Y estoy convencido de que tiene razón. Carlos agrega: “En el caso de las cartas y los números, hay que pensar un rato qué quiere decir ‘detrás de cada vocal hay un número par’, que no es lo mismo —por ejemplo— que ‘detrás de cada número par hay una vocal’, y eso ya es menos sutil. En el caso de la edad de consumo, para todo el mundo está claro que si uno tiene 21 años o más, puede beber lo que quiera, y eso ya deja bastante más caro todo”. Y estoy de acuerdo, por eso no quería dejar de agregarlo acá.

Un problema añejo, pero precioso

La situación que voy a plantear a continuación es añeja y, por lo tanto, muy conocida... En realidad, debería decir que es muy conocida *para un cierto grupo de personas*. Lo notable es que se ha mantenido vigente a lo largo de los años, justamente, porque tiene una belleza que supera el paso del tiempo. Naturalmente, la primera comparación es con los buenos vinos, pero a mí me gusta más hablar de lo que perdura porque es *bueno* y no *circunstancial*, algo así como la música de Beethoven o Piazzolla o los Beatles.

El problema en sí mismo tiene múltiples formas de ser presentado; o sea que tengo que elegir *una* versión. Pero como usted verá si llega conmigo hasta el final, la opción que yo elija será irrelevante: será buena sin importar cuál de ellas fue.

Bueno, suficiente prolegómeno. Acá voy.

Suponga que usted es el hermano mayor en una familia. En total son tres. Sus dos hermanitas son mellizas y tienen 12 años. Su padre se caracteriza porque cocina muy buena pastelería, tortas, tartas, panqueques, mouse de diversos tipos, facturas, panes dulces... En fin: creo que me entiende.

Las mellizas estaban a punto de cumplir años y el padre quería hacer algo especial para ellas. Tenía que combinar chocolate,

dulce de leche y crema pastelera. Se ingenió para preparar una tarta que contuviera estos tres elementos, además de nueces, avellanas y almendras. No había manera de errarle. Para que fuera sencilla de cortar y poder dividir en mitades iguales, eligió un molde rectangular. Grande, sí, pero un gran rectángulo.

La preparó de esa forma y antes que volvieran del colegio, la sacó del horno y la puso sobre la mesa de la cocina, a un costado, esperando que se enfríe.

Aquí es donde entra en escena usted... Sí, usted. Como llegó antes que sus hermanas, entró en la cocina y ve la tarta. Está claro que usted *adora* a las mellizas, pero ¿cómo hacer para *no* intervenir? *Algo* de la tarta tenía que comer. Estaba claro que iba a separar un trozo, pero ¿cómo hacer para que todo resultara más difícil, en especial a su padre que era muy cuidadoso, muy puntilloso?

Su idea fue la siguiente: tomó uno de los moldes que tenía su padre en la cocina, con los que preparaba diferentes formas de pasteles, y eligió uno rectangular también. Mucho menor que el rectángulo de la tarta propiamente dicha, pero usted estaba seguro de que era un rectángulo.

El trozo que marcó con el molde y que terminó ‘extrayendo’ de la tarta, dejó un hueco rectangular. Pero lo que usted hizo para ‘mortificar’ a su padre y ‘desafiarlo’ para ver cómo se arreglaba para separar en mitades iguales lo que quedaba de la tarta, fue separar un rectángulo de manera tal que *el trozo que usted se comió fuera un rectángulo que no tenía los lados paralelos al rectángulo grande de la tarta*, tal como se ve en la Figura 1. Lo retiró, lo puso en un plato y aún caliente se lo llevó a su habitación.

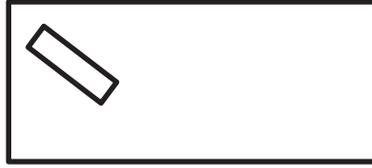


Figura 1

Cuando el padre advirtió lo que había hecho, ya no tenía tiempo para hacer una nueva tarta y ni siquiera le quedaban energías para enojarse con usted. Lo *único* que quería era encontrar una solución al problema, de manera tal que cada una de las mellizas pudiera quedarse con una mitad de la tarta. Al menos la mitad de lo que quedaba, y para *no arruinar la estética*, se quedó pensando si podía lograr su objetivo ¡haciendo *un solo corte* con el cuchillo! ¿Se podrá?

Por supuesto, si el rectángulo que usted separó y se llevó a su habitación hubiera sido un rectángulo que fuera paralelo al rectángulo de la tarta y en una punta, por ejemplo, la solución habría sido mucho más sencilla (¿quiere pensar cómo hacerlo?). Pero de la forma en la que había quedado el hueco, no se le ocurría qué hacer. Llamó a su esposa y le planteó la dificultad.

Ella se quedó pensando un rato, y finalmente le dijo: “Mirá, hace mucho tiempo me encontré con un problema de este mismo tipo, y yo sé que se puede resolver. No te preocupes. Estoy segura de que con *un solo corte del cuchillo*, vas a poder separar lo que queda de la tarta en dos partes iguales. Pensá el problema un rato y si no llegás a la solución, avísame que lo pensamos juntos”. ¡Y se fue!

Usted, que está leyendo estas líneas, ¿no quiere pensar cómo hacer para que haciendo *un solo corte* en lo que queda de la tarta *se pueda dividir en dos partes iguales*?

Algunos aportes

La madre tiene razón. Hay *por lo menos una forma* de resolver el problema. Es decir, hay por lo menos *una forma* de cortar lo que quedó de la tarta y, haciendo *un solo corte con un cuchillo*, es posible dividir el remanente en dos partes iguales. ¿Pensó algo usted por su cuenta?

Mientras tanto, quiero aportarle un dato que quizás le sea útil. Al menos, a mí me ayudó... mucho. Eso sí: no crea que se me ocurrió de inmediato, ¡ni mucho menos! Al contrario: estuve un par de días hasta que de tanto intentar con papel y lápiz, de tanto probar de diferentes maneras, pensé en una que —creo— resuelve el problema.

El dato al que me refiero es el siguiente. Acompáñeme con esta idea, tratando de contestar esta pregunta.

Si yo dibujara un rectángulo cualquiera y le pidiera que usted *encontrara el punto medio*, ¿cómo haría? Está claro que *hay un punto medio*, pero ¿cómo hacer para determinarlo? (aquí, una nueva pausa para que se tome el tiempo que necesite). Sigo.

Una forma de encontrar ese punto medio es *trazar las dos diagonales del rectángulo*. El punto en el que se cruzan es el punto que estoy buscando. Fíjese en la Figura 2.

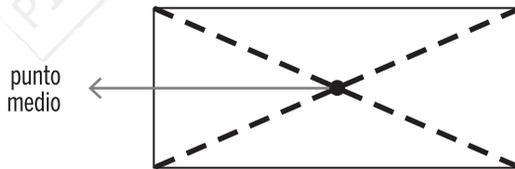


Figura 2

Usted estará pensando: ¿y para qué quiero el punto medio de un rectángulo? Bueno, una cosa interesante que sucede es que

cualquier recta que pase por ese punto medio divide al rectángulo en dos partes iguales. Es decir, cualquiera de las dos diagonales efectivamente *pasa* por el punto medio y divide el rectángulo en dos partes iguales. Eso es muy fácil de ver, o al menos creo que es ‘imaginable’.

Pero lo notable es que lo que sucede con las diagonales, sucede *¡con cualquier otra recta que corte el rectángulo, siempre y cuando pase por el punto del medio!* (Trate de comprobarlo usted). Fíjese en la Figura 3. Verá que no importa cuál recta elija, si usted la hace pasar por el punto del medio, el rectángulo queda dividido en dos partes. Compruebe que las dos partes son iguales.

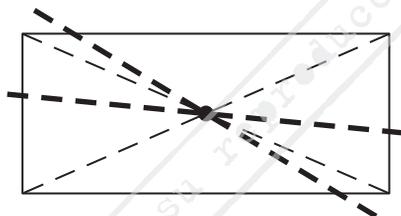


Figura 3

Ahora bien, ¿cómo usar este dato, no solo con el rectángulo grande, el de la tarta original, sino también con el rectángulo más chico, el que separó usted?

Es que ahora tenemos *dos* puntos medios. Uno corresponde al rectángulo grande y el otro corresponde al rectángulo chico. ¿Qué pasaría si uno trazara una recta que pasa por *estos dos puntos*?

Esa recta divide el rectángulo grande en dos partes iguales, pero también divide el rectángulo chico en dos partes iguales. Uy, ¿y entonces? (Nuevamente, pausa para pensar).

Conclusión

Usando toda la información que escribí hasta acá, si usted tomara el cuchillo ahora y cortara la tarta de manera tal que la trayectoria del cuchillo se corresponda con la recta que pasa por los dos puntos medios (el del rectángulo grande y el del rectángulo chico), ese corte dividirá, por un lado, el rectángulo grande en dos partes iguales y, por el otro, hará lo mismo con el rectángulo más pequeño. De esa forma, queda garantizada la distribución equitativa del remanente de la tarta: bastará con que el padre le dé a cada una de sus hijas mellizas cada uno de los trozos ¡y listo! (ver Figura 4).

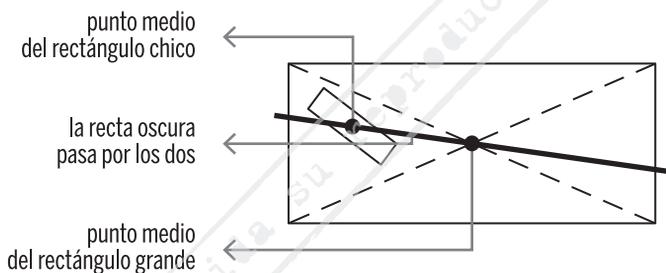


Figura 4

Moraleja

El problema tenía solución, su padre ya no está *tan enojado* (de hecho, él sabía que usted habría de comer un trozo de la tarta indefectiblemente) y la madre quedó contenta también porque psicológicamente, haberle dicho a su marido que ella sabía que el problema tenía solución, fue importante también por el impulso que le dio. De otra forma, quizás no habría seguido intentando.

Nota final

Existe *otra* manera de resolver el problema, si es que uno tiene la garantía de que la tarta tiene una composición pareja en todas partes. Es decir: si tiene las frutas secas arriba y el dulce de leche abajo, entonces la solución que voy a escribir ahora no sirve. Pero si uno se imagina que la tarta (o torta) tiene una mezcla pareja en todas partes, lo que puede hacer entonces es tomar el cuchillo y hacer un corte ‘transversal’, dividiendo (lo que queda de) la tarta en dos partes iguales: una está por abajo y la otra por encima (ver Figura 5).

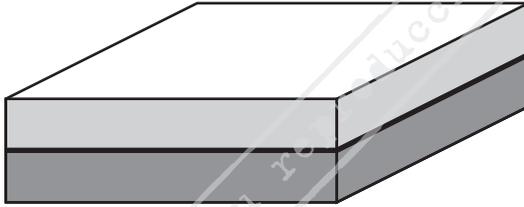


Figura 5

Problema del cumpleaños, versión 2

¿Quiere poner a prueba su capacidad para intuir? Si estuviéramos conversando, me permitiría garantizarle que la/lo voy a sorprender. Es decir, salvo que usted hubiera oído hablar de este problema con anterioridad, creo que no hay forma de que una persona pueda siquiera aproximarse a la solución correcta. Por eso el desafío. Y no crea que a mí me pasó algo distinto. Cuando supe de él, hace más de cuarenta y cinco años, me impactó de tal forma que estuvimos un rato muy largo con varios colegas tratando de entender por qué era cierto. Y sí, al final nos convencimos todos: ¡es cierto!

A modo de preparación, quiero hacerle una pregunta: suponga que usted y yo entramos juntos en un restaurante, en un cine, en una cancha... no importa, en un lugar en donde haya mucha gente: ¿hay alguna garantía de que haya dos de esas personas que cumplan años el mismo día?

Fíjese que no estoy diciendo que tengan la misma edad. No. Me alcanza con que cumplan años el mismo día. ¿No le dan ganas de pensar a usted?

Por ejemplo, ¿alcanzarán diez personas para estar seguros de que dos festejan sus cumpleaños el mismo día? No, por supuesto. ¿Por qué? Bueno, porque las diez personas podrían haber nacido diez días distintos del año, toda una obviedad.

Con la misma idea, tampoco alcanzarían 30 ni 50, ni siquiera 100. Es que, por la misma razón, todos podrían tener distintos cumpleaños.

Ahora bien: usted advierte que si yo sigo aumentando el número de personas, llegará un momento en que este argumento dejará de ser válido. Por ejemplo, si hubiera 1000 personas, entonces sí, seguro que tiene que haber muchas más que dos que cumplan años el mismo día.

¿Puede deducir usted por qué esto último que escribí es cierto? Le pido que no avance si no, porque la idea es llegar juntos hasta el final del artículo tratando de entender qué pasa.

De todas formas, intuyo que usted ya descubrió por qué, pero igualmente sigo. ¿En qué número se produce el quiebre? Es decir, ¿al llegar a qué número pasamos de “no estar seguros” a “sí estar seguros” de que hay dos que festejan su cumpleaños el mismo día?

Sí, ya sé. Usted está tentado en decir “365”. Y está ‘cerca’, pero no es la respuesta ‘técnicamente’ correcta. Podríamos conseguir 365 personas, de manera tal que todas hubieran nacido en días distintos del año. Es difícil que uno conozca un grupo así, pero ciertamente no es imposible. Ahora bien, 365 no es la solución. Y 366 tampoco lo es. Es que si uno incluye a una persona que nació el 29 de febrero, podrían festejar hasta 366 cumpleaños distintos. Justamente ese es el límite. En cuanto haya 367 personas, inexorablemente tiene que haber —*por lo menos*— dos que tienen el mismo cumpleaños. Es que un año, aunque sea bisiesto, no tiene más de 366 días. Si yo junto a 367 personas, no importa cuáles sean, seguro que puedo encontrar —en ese grupo— al menos dos con el mismo día cumpleaños.

¿Y entonces? Bueno, llegó el momento de que yo le haga la pregunta que vengo anticipando desde que empecé el artículo. Y

si en lugar de preguntar cuántas personas tengo que juntar para estar *seguros* que dos cumplen años el mismo día, le preguntara: “¿Cuántas tiene que haber para que la *probabilidad* de que dos tengan el mismo cumpleaños sea mayor que $\frac{1}{2}$, es decir que sea mayor que un 50%?”.

En este caso, ¿qué me contestaría? Fíjese que ahora no le pido que podamos asegurar *con certeza* que haya dos que tengan el mismo día como cumpleaños; lo que yo me quiero asegurar es que, en términos de porcentaje, yo tenga más de un 50% de posibilidades de encontrar a esas dos personas. ¿Cómo se calculará esa probabilidad? Y por otro lado, ¿qué resultado dará?

Acá es donde llegó el momento de la intuición. ¿Cuántas personas cree *usted* que hacen falta? Antes de pasar al siguiente párrafo, le sugiero que le dedique usted un instante.

Inexorablemente todas las personas a quienes les planteé el problema contestaron un número innecesariamente grande. Y por supuesto, lo mismo me pasó a mí: no me creo nadie diferente. Pero lo que es *extraordinario*, es que ese número es nada más que 23. Sí, veintitrés.

Parece raro, ¿no? O mejor dicho, parece mentira que, con tan pocas personas, uno pueda saber que ese porcentaje será mayor que 50%.

Tengo varias anécdotas para incorporar acá, pero solamente voy a referirme a dos. Hace casi veinticinco años, Lalo Mir estaba haciendo un programa en radio Mitre al que me invitó a participar para hacer algunos juegos matemáticos. Una vez por semana, Lalo invitaba a sus oyentes para que presenciaran el programa en el estudio. Justamente uno de esos días me pidió si podía hacer algunas pruebas con ellos.

Allí comenté que estaba ‘casi’ seguro de que había dos que cumplían años el mismo día. Ni bien lo dije, Lalo me miró:

“¿Estás seguro de lo que dijiste? Fíjate que en este estudio hay lugar nada más que para 45 personas”.

Le dije: “Lalo, con 45 personas, la probabilidad de que dos cumplan años el mismo día llega a casi un 95%. Quedate tranquilo”. Y así fue. Solo en las primeras tres filas ya había 30 personas. Les pedí que fueran diciendo en voz alta el día que habían nacido. Por supuesto, el resultado no dice que haya garantías de que existan esas dos personas. Dice que la *probabilidad* de que haya dos con el mismo cumpleaños empieza a ser más grande que $\frac{1}{2}$ (o mayor que un 50%) si hay 23 personas o más. En realidad, con 30 personas como él me proponía en principio, ese porcentaje ya supera el 70%. Y así fue. Ante la sorpresa del público, pero también de Lalo, aparecieron esas dos personas. Y eso se repite una y otra vez ante los distintos auditorios.

¿Falló alguna vez? Por supuesto que sí. Cuando uno habla de que hay un porcentaje muy alto de que algo suceda, no es una garantía que vaya a pasar. Un 95% de posibilidades sigue siendo un número que difiere de 100%. Por lo tanto, suele pasar (en un 5% de los casos) que uno no encuentra lo que busca.

Antes de contar otra anécdota sobre el tema, quiero poner algunos números complementarios²⁰.

Fíjese en la siguiente tabla:

20. Escribo los porcentajes, pero para ser rigurosos, las probabilidades de que un evento suceda (o no), se mide en números *reales* que están entre 0 y 1. Por eso, cuando usted escucha que la *probabilidad de que salga ‘cara’ al tirar una moneda* es de un 50%, es ‘técnicamente’ incorrecto. Esa probabilidad es de un 0,5, o si usted prefiere, $\frac{1}{2}$. Igualmente, en el texto que acompaña esta nota, me tomé la licencia de que escribir los porcentajes para que los números sean más claros.

Número de personas	Probabilidad de que dos cumplan años el mismo día
2	0,27%
5	2,71%
10	11,69%
15	25,29%
20	41,14%
22	47,57%
23	50,73%
27	62,69%
30	70,63%
35	81,44%
41	90,32%
50	97,04%
57	99,01%

Dos datos salientes (para mí, pero usted puede elegir otros, por supuesto):

- Con 23 personas, ya hay más de un 50% de posibilidades de que haya dos que hayan nacido el mismo día
- Con 57 personas (¡nada más!), ese porcentaje ya supera el ¡99%! Increíble.

Una última historia. Corría el año 2005. Yo le había pedido a Manu Ginóbili (cuando todavía estaba activo *como jugador*) que me ayudara a testear los problemas que había escrito en el primer libro de divulgación en matemática de la saga, *Matemática... ¿estás ahí?*

Manu se quedó sorprendido como todos cuando llegó al re-

sultado sobre los cumpleaños. Leyó el artículo, los argumentos y se convenció. Cada vez que tenía que jugar un partido de la NBA, entre titulares y suplentes cada equipo presenta una planilla con los nombres, lugares de nacimiento, edades y experiencia de 15 jugadores. Con esos datos ya tenía 30 personas por partido, y eso contando nada más que los jugadores. Además, estaban los cuerpos técnicos, asistentes, etc. Incluyéndolos a todos, la probabilidad de que hubiera dos personas que tuvieran el mismo cumpleaños superaba el 90%. ¡Muy fácil para él! ¿Por qué digo muy fácil? Porque Manu les apostaba ‘algo’ a quienes no le creían.

A lo largo de los años, los compañeros a quienes Manu pudo sorprender en San Antonio fueron cambiando. Alguna vez les tocó a Tim Duncan y a Tony Parker. Pero después se fueron sumando Fabricio Oberto, Matt Bonner y Tiago Splitter, y más acá en el tiempo, Boris Diaw, Patty Mills y Marco Belinelli. Con todos pasó lo mismo. De acuerdo con lo que me dijo Manu, quien terminó apostando algún café o alguna cena a los más descreídos, los datos de este artículo le sirvieron no solo para ganarse un respeto particular para predecir cumpleaños sino que, además, le permitió comer gratis en más de una oportunidad. Y creo no fueron pocas.

Moraleja: nuestra capacidad para intuir, la suya, la mía, está bastante poco entrenada. Las cuestiones probabilísticas son fascinantes por eso.

Si de mí dependiera, yo invitaría a todos los que discuten y deciden sobre los temas a tratarse en las escuelas primarias (y ni hablar las secundarias) para que *no dejen* afuera todo lo que tenga que ver con combinatoria, probabilidades, estadística y programación. Ya no se trata de preparar a nuestros jóvenes para el futuro. En cualquier momento, estos temas empiezan a formar parte del pasado.

Las cuentas

Para aquellos interesados en avanzar un paso más: si uno toma dos personas cualesquiera, la probabilidad de que **no hayan nacido** el mismo día es —obviamente— muy alta. Una forma de calcular esa probabilidad es haciendo estas cuentas:

$$(365/365) \times (364/365) = (364/365) = 0,99726\dots$$

¿Por qué? La primera persona pudo haber nacido cualquier día de los 365 que tiene un año (voy a obviar los años bisiestos) y a la segunda le bastará con no haber nacido ese mismo día. Para que esto ocurra, alcanzará con que haya nacido en cualquiera de los 364 días restantes.

Si ahora agregamos una persona más, ya tenemos tres. Entonces la probabilidad de que no haya ningún par de ellas que hubieran nacido el mismo día se puede calcular de esta forma:

$$(365/365) \times (364/365) \times (363/365) = 0,99179\dots$$

Un paso más. Con cuatro personas, la probabilidad de que ningún par de ellas haya nacido el mismo día podemos calcularla haciendo estas cuentas:

$$(365/365) \times (364/365) \times (363/365) \times (362/365) = 0,983644\dots$$

Como usted advierte, a medida que vamos agregando personas, el producto que se obtiene se hace cada vez más pequeño. La pregunta entonces es la siguiente: ¿cuántas personas tengo que agregar para que este número sea menor que $\frac{1}{2}$? Y la res-

puesta es que a ese número se llega por primera vez cuando uno tiene 23 personas:

$$(365/365) \times (364/365) \times (363/365) \times (362/365) \times (361/365) \times \dots \times (345/365) \times (344/365) \times (343/365) = 0,4927027\dots$$

O sea, al juntar 23 personas al azar, la probabilidad de que ningún par de ellas haya nacido el mismo día es menor que $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, esto es lo mismo que decir que la probabilidad de que SÍ haya entre ellas un par que haya nacido el mismo día ahora es mayor que $\frac{1}{2}$, o sea, mayor que un 50%.

Y justamente eso es lo que queríamos encontrar.

Algo más

A lo largo de los años, he presentado este problema en múltiples oportunidades. Es un clásico. No importa el auditorio, la circunstancia, el tipo de preparación del público... la reacción es siempre la misma: ¡asombro! ¿Cómo puede ser posible que *sean suficientes 23 personas* para que la probabilidad de que dos cumplan años el mismo día sea mayor que $\frac{1}{2}$? ¿Cómo? Anteriormente escribí la ‘demostración’ de que esto es cierto. Por otro lado, la respuesta que le surge a la mayoría de las personas es que, para que eso suceda, tendría que haber por lo menos 183 personas. Es que la intuición pareciera indicarnos (y fíjese que me incluyo porque es lo que me pasó a mí) que tienen que ser 183 porque 183 es la *mitad* de 366.

Ahora tengo una pregunta diferente: “Suponga que usted entra en un restaurante y se cuestiona: ¿cuántas personas debería haber en este lugar de manera tal que la probabilidad de que *alguna* de ellas cumpla años el mismo día que yo sea mayor que $\frac{1}{2}$?

¿Es decir que, al entrar en el restaurante, las posibilidades de que eso suceda sean más que un 50%?”.

Como usted advierte, esta es una pregunta *distinta* de la que había hecho antes. Una cosa es preguntarse cuántas personas tiene que haber para que la probabilidad que dos *cualesquiera* cumplan años el mismo día, y otra cosa *muy distinta* es preguntarse cuántas personas tiene que haber para que la probabilidad de que haya *alguien* que cumpla años *el mismo día que usted* sea mayor que $\frac{1}{2}$.

En el primer caso, tal como escribí antes, alcanza con que haya 23 personas. Para el segundo caso, hacen falta muchas más; el número se incrementa muchísimo (¿quiere pensar usted por qué antes de seguir leyendo?).

La respuesta es que hace falta que en el restaurante haya 253 personas. ¿Por qué? ¿De dónde sale este número 253? Acompáñeme por acá.

Elija una persona cualquiera que está en el restaurante. ¿Cuál es la probabilidad de que esa persona *no* cumpla años el mismo día que usted? Como ya vimos, esa probabilidad es $364/365$ (ya que pudo haber nacido en cualquiera de los 364 días del año que *usted no nació*).

Ahora, elija una segunda persona. ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona *tampoco* haya cumplido años el mismo día que usted? Una vez más, la respuesta es la misma: $364/365$. Juntando los dos hechos, si usted elige dos personas cualesquiera, al azar, entre el grupo de personas que está en el restaurante, la probabilidad de que ninguna de las dos haya cumplido años el mismo día que usted se obtiene multiplicando las dos probabilidades, o sea

$$(364/365) \times (364/365) = (364/365)^2 = 0,9945$$

O sea, casi un 99,5 por ciento. Ahora, sigamos agregando personas.

Con una tercera, la probabilidad de que ninguna de las tres haya cumplido años el mismo día que usted es

$$(364/365) \times (364/365) \times (364/365) = (364/365)^3 = 0,9918$$

Voy a escribir una columna con lo que va sucediendo a medida que agrego más personas. Mi objetivo es encontrar cuántas hacen falta para que la probabilidad de encontrar alguna que cumpla años el mismo día que usted sea *mayor* que $\frac{1}{2}$, o sea, que las chances sean mayores que un 50%. Acá va:

Personas	Probabilidad de que esas personas NO cumplan años el mismo día que usted
2	$(364/365)^2 = 0,9945$
3	$(364/365)^3 = 0,9918$
4	$(364/365)^4 = 0,9863$
5	$(364/365)^5 = 0,9836$
(Me salteo algunas, y voy a dar 'pasos' de a 10)	
10	$(364/365)^{10} = 0,9729$
20	$(364/365)^{20} = 0,9466$
30	$(364/365)^{30} = 0,9209$
40	$(364/365)^{40} = 0,8960$
50	$(364/365)^{50} = 0,8718$
(Me salteo hasta llegar a 245 y voy agregando de a una otra vez)	
245	$(364/365)^{245} = 0,5106$
246	$(364/365)^{246} = 0,5092$
247	$(364/365)^{247} = 0,5078$
248	$(364/365)^{248} = 0,5064$

249	$(364/365)^{249} = 0,5050$
250	$(364/365)^{250} = 0,5036$
251	$(364/365)^{251} = 0,5022$
252	$(364/365)^{252} = 0,5008$
253	$(364/365)^{253} = 0,4995$

Y acá paro. ¿Por qué? Es que encontré lo que quería. Una vez más, ¿por qué? Fíjese lo que sucedió. Si yo elijo 253 personas (el último número de la lista), en la columna de la derecha, dice que la *probabilidad de que ninguna de las 253 haya cumplido años el mismo día que usted es 0,4995...* o sea, hay 49,95% de chances de que eso sea cierto. O lo que es lo mismo, hay más de un 50% de posibilidades que entre las 253 haya al menos una que haya nacido el mismo día que usted.

Resumiendo entonces: la probabilidad de que, entre n personas, alguna cumpla el mismo día que usted es:

$$P(n) = 1 - (364/365)^n$$

El primer valor para el cual $P(n)$ es mayor que $\frac{1}{2}$ es cuando $n = 253$. Es decir,

$$P(253) = 1 - (364/365)^{253} = 1 - 0,4995 = 0,5004$$

El problema del cumpleaños (actualizado al año 2021)

En el artículo anterior contestamos (espero que juntos) esta pregunta: “¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo de manera tal de poder afirmar que la probabilidad²¹ de que haya dos que cumplan años el mismo día sea mayor que $\frac{1}{2}$? La respuesta, que aún hoy no deja de sorprenderme, es que alcanza con 23. Sí, *¡nada más que veintitrés!*

La primera vez que escuché hablar sobre este hecho fue en una charla que dio Mario Blaum, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales²², hace cuarenta y cinco años. Desde ese mismo momento hasta hoy, enero del año 2021, he conversado

21. En este artículo, *todos* los números que midan probabilidades serán *aproximados*. Por otro lado, cada vez que escriba sobre probabilidades, debería ser un número ‘entre 0 y 1’, pero estos números se traducen siempre en porcentajes: basta multiplicarlos por 100. Por ejemplo, si la probabilidad de que suceda algún evento es $\frac{1}{2}$, entonces hay 50% de posibilidades de que suceda. Si la probabilidad fuera un 0,4738, es porque hay 47,38% o 47,38 por ciento de que suceda. Voy a usar indistintamente una u otra notación. Concédame esa licencia a lo largo de este artículo por favor. Y una vez más, siempre son *aproximaciones*.

22. Todavía hoy me acuerdo de la sala en la que dio la conferencia. El aula E-24 en el entresuelo del Pabellón 1 de la Ciudad Universitaria, ubicada en Núñez, Capital Federal de la República Argentina.

sobre el tema con muchísimas personas. Lo expuse ante diferentes auditorios. Escribí sobre él en distintos contextos y cada vez lo fui internalizando más, *aceptando* más. No quiere decir que no me sorprenda, como escribí en el párrafo anterior, pero ahora entiendo mejor por qué sucede o, si usted prefiere, entiendo las razones subyacentes que hacen que *el número 23 sea posible o esperable*.

Y cada vez que encontré/escuché algún dato que no conocía, lo fui agregando o incorporando a una suerte de 'diario', pensando que algún día llegaría un momento como este, en donde voy a poner, en un solo archivo o en un solo texto, todo lo nuevo que fui adquiriendo. Y hoy, aquí y ahora, lo quiero compartir.

Por supuesto, no aspiro a escribir nada *exhaustivo* sobre el tema, ni creo que eso sea posible, pero ciertamente incluye muchos años de *apuntes breves* (y no tanto). En resumen: sigo sorprendido por la respuesta, pero ahora estoy más tranquilo con mi intuición. Acá voy.

Nota I

Uno de los problemas con los que uno se tropieza cuando escucha hablar del “*problema de los dos que cumplen años el mismo día*” es que de entrada uno *confunde* la pregunta. Voy a escribir primero la pregunta que *uno cree* que le hicieron y después *la verdadera pregunta*. Tómese el tiempo que necesite para poder comparar con lo que le pasó a usted.

De entrada, uno cree que le preguntaron esto:

¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo para que la probabilidad de que haya alguien que cumpla años el mismo día que USTED sea mayor que $\frac{1}{2}$?

En realidad, la pregunta que queremos contestar es esta:

*¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo para que la probabilidad de que **haya al menos DOS personas que cumplan años el mismo día** sea mayor que $\frac{1}{2}$?*

Me importa (mucho) que usted entienda la diferencia. En el primer caso, el número de personas necesarias es mucho mayor que 23, como veremos juntos más adelante.

Ahora quiero compartir con usted una forma de ‘modelar’ el problema. Es decir, una manera *diferente* de plantearlo y ver si esto contribuye a que la respuesta (el número 23) se haga más *potable*, más *creíble*.

Suponga que usted pone 23 personas en una fila. Las eligió al azar y les pide que se dispongan en hilera. Ahora, le pide al primero de la fila que diga en voz alta el día y mes de su cumpleaños (sin incluir el año, que no tiene importancia).

Si *ninguna* de las 22 personas que están en la fila cumple años *ese día* (el que acaba de decir en voz alta la primera persona), entonces, usted le pide al segundo de la fila que diga ahora —también en voz alta y excluyendo el año— la fecha de su cumpleaños. Los 21 que quedan la comparan con la que dijo el segundo.

Si ninguno contesta, ahora le toca al tercero de la fila: esta (o este) dirá en voz alta *su* fecha de nacimiento. Una vez más, si de los 20 que quedan en la fila alguno encontrara alguna coincidencia, esa persona deberá reaccionar levantando la mano (por ejemplo).

De esa forma, el procedimiento continúa hasta encontrar dos personas que hayan nacido el mismo día... si es que existen. Bien podría suceder que eso no pase nunca.

Como usted advierte, la pregunta original del problema podríamos hacerla de esta forma ahora: “¿Cuál es la probabilidad

de que ninguna de las 23 personas cumpla años el mismo día que *ninguna* de las otras 22?”.

Acá será *importante* aprender a ‘contar’ cuántas comparaciones se produjeron en el trayecto. Es decir, cuando uno de los integrantes de la fila dice en voz alta su cumpleaños, usted advierte que los que quedan en la fila *comparan* esa fecha con la de su propio cumpleaños.

Cada paso que uno da, el número de comparaciones va decreciendo. Al empezar, en el primer paso, hay 22 comparaciones. En el segundo, 21. En el tercero, 20. Y así siguiendo hasta que queda una última comparación, si es que no ha habido ninguna persona que hubiera reaccionado antes.

¿Cuántas son? Si llegaron hasta el final, es porque hubo:

$$22 + 21 + 20 + 19 + 18 + 17 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = 253$$

Con 23 personas se producen 253 comparaciones. Mirado de esta forma, es más sencillo imaginar que las chances de que dos cumplan años el mismo día puedan superar el 50 por ciento. Lo señalo de esta manera porque así planteado, creo, la respuesta es más aceptable. ¿Usted qué piensa?

Si hubiera 30 personas en la fila, sabemos que las chances de que haya dos que cumplan años el mismo día superan el 70 por ciento. Contemos juntos entonces cuántas comparaciones se produjeron:

$$29 + 28 + 27 + 26 + 25 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = 435$$

O sea, son *muchas más* comparaciones que con 23. Agregando nada *más que siete personas nuevas en la fila*, si hablamos de comparaciones, fíjese que saltamos de 253 a 435 (lo que repre-

senta que hemos incrementado en más de un 70 por ciento el número de comparaciones).

¿Qué sucedería si hubiera 41 personas en la hilera? En ese caso, de acuerdo con las cuentas que hicimos originalmente, la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día supera 0,9032, o sea, hay más de un 90 por ciento de posibilidades de que uno los encuentre.

Haciendo lo mismo que en los casos anteriores, ¿cuántas comparaciones se producen con 41 personas?

$$40 + 39 + 38 + 37 + 36 + 35 + 34 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = 820$$

Con 10 personas más, casi duplicamos el número de comparaciones y, por lo tanto, las chances de encontrar dos que cumplan años el mismo día se incrementan muchísimo.

Finalmente, ¿qué sucede con 50 personas? En este caso, sabemos que las posibilidades superan el 97 por ciento, pero en el caso del número de comparaciones ahora hay:

$$49 + 48 + 47 + 46 + 45 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 = 1225$$

No sé cuánto la (o lo) ayuda a usted esta forma de presentar el problema, pero yo puedo afirmarle que a mí sí me resulta mucho más útil para *intuir mejor*, o mejor dicho para entender mejor por qué pasa lo que pasa. Antes, lo sabía porque las cuentas así lo indican. Con esta forma de plantear el problema, la respuesta empieza a tener más sentido. ¿Usted qué piensa?

Nota 2

Ahora voy a escribir una manera diferente de abordar el problema, pero siempre siguiendo con el ejemplo de las parejas de

personas. Suponga que tenemos 23 personas en una habitación. En épocas de *pandemia*, suponemos que todos usan *tapabocas*, *protegidos* y *manteniendo una distancia de por lo menos dos metros entre ellas*. O quizás hacen la reunión vía Zoom. En ese caso, las 23 personas *no están en una habitación*, sino que cada una/o está sentada/o frente a su computadora. De todas formas sabemos que, con esas 23 personas que están en la habitación o frente a la pantalla de su computadora, se pueden formar 253 parejas diferentes. Elija una cualquiera. ¿Cómo se calcula la probabilidad de que cumplan años el mismo día?

Creo que a esta altura usted está en condiciones de dar respuesta a esta pregunta en forma ‘casi’ inmediata. La respuesta es: “La probabilidad de que coincidan en la fecha de nacimiento es $1/365$ ”.

¿Me entiende por qué? Tome uno cualquiera de los integrantes de la pareja que nació un día determinado. ¿Cuál es la probabilidad de que la otra persona también cumpla ese día? Hay *una sola posibilidad entre los 365 días del año* de que coincidan y, por lo tanto, la probabilidad es

$$1/365 = 0,00274$$

O sea, un 0,274%. Realmente muy baja. Si uno lo piensa ‘al revés’, preguntándose *cuál es la probabilidad de que los dos integrantes de la pareja cumplan años en días distintos*, como usted se imagina, ¡esta probabilidad es muy alta! Se calcula *restando*

$$1 - 0,00274 = 0,99726$$

Podemos afirmar entonces que las chances de que los dos integrantes de la pareja *NO hubieran nacido el mismo día* superan el 99,726%.

Tome otra pareja y haga el mismo procedimiento. La probabilidad de que los dos integrantes *no* hayan cumplido años el mismo día vuelve a ser 0,99726. ¿Y si preguntamos cuál es la probabilidad de que, tomando dos parejas cualesquiera, la probabilidad de que ninguna pareja tenga integrantes que cumplan años en el mismo día? Esta cuenta se hace *multiplicando* las dos probabilidades, haciendo $(0,99726) \times (0,99726) = (0,99726)^2 = 0,9945271$, que sigue siendo un número muy grande.

Si uno continúa con este proceso, agregando parejas, ¿cuál es el **primer momento**²³ en el que la probabilidad de que *ninguna de las parejas tenga integrantes que cumplan años el mismo día sea MENOR que ½*?

Ese *primer momento* se produce cuando uno llega a tener 253 parejas.

Para que la probabilidad de que ninguna pareja tenga integrantes que cumplan años sea *menor* que ½, uno ha multiplicado el número (0,99726) por sí mismo 253 veces. O sea:

$$(0,99726)^{253} = 0,499$$

¿Y por qué importa este número? Porque dice que si considero 253 parejas, entonces es **más probable** que haya alguna pareja en la cual los dos cumplan años el mismo día que la probabilidad de que este hecho no suceda. O sea, si la probabilidad de que, entre 253 parejas, **NINGUNA** de ellas haya cumplido años el mismo día es 0,499, eso implica que la probabilidad de que **SÍ exista** alguna pareja en la cual sus integrantes han cumplido años el mismo día, se obtiene restándole ese número al número *uno*, o sea:

23. Cuando escribo ‘el primer momento’ me refiero al número de parejas que voy a necesitar considerar.

$$1 - 0,499 = 0,501$$

Es decir, más de un 50 por ciento de las veces, como queríamos encontrar. De allí la importancia del número 23 y de las 253 parejas.

Nota 3

Este será un agregado menor. Tome el conjunto de *todos* los presidentes que tuvo la Argentina a lo largo de su historia. Son 56, muchos más de 23. Justamente, como son 56, las chances de que haya dos que cumplan años el mismo día es de un 98,83%, ¡casi un 99%! Puesto de esta forma, pensé: “¡Tiene que haber dos!”.

Empecé con el listado y con el nombre tradicional de Bernardino Rivadavia, pero me detuve casi inmediatamente porque al mirar la lista encontré *varias* coincidencias rápidamente: José Figueroa Alcorta y Ramón Castillo nacieron el 20 de noviembre, Eduardo Lonardi (que fue presidente de facto, no por elección popular) y Fernando de la Rúa nacieron el 15 de septiembre, y para completar, Luis Sáenz Peña y Alberto Fernández, el actual presidente, nacieron ambos el 2 de abril. Tarea cumplida.

Pero entonces pensé que el mismo ejercicio que estuve haciendo para los cumpleaños podría aplicarlo en el caso de las defunciones e investigar si hay dos expresidentes argentinos que hubieran muerto el mismo día. Por supuesto, el número ahora no es más 56, porque hay nueve (ocho expresidentes y el actual, Alberto Fernández) que están vivos, pero aun así 47 del total 56 han fallecido, por lo cual la probabilidad de que haya dos que hubieran *muerto* el mismo día es aún muy alta. Me fijé en los números y las chances son de más de un 95,48%. Y sí: la probabilidad es tan alta que vuelve a verificarse. Bernardino Rivadavia,

el primer presidente argentino, y Alfredo Oscar Saint-Jean (otro presidente de facto, otro de los que usurparon el poder sin apoyarse en la voluntad popular) fallecieron el 2 de septiembre.

En definitiva, sea por haber nacido o muerto el mismo día, los expresidentes argentinos cumplen con las expectativas generadas por las probabilidades.

Nota 4

Ahora, permítame tomarme una 'licencia'; menor, pero licencia al fin. En lugar de estimar cuántas personas hacen falta para que la probabilidad de que dos hayan nacido el mismo día sea mayor que $\frac{1}{2}$, voy a admitir que hayan nacido con un día de diferencia. Después voy a ver qué sucede si permitimos que festejen el cumpleaños a lo sumo con dos días de diferencia; luego con tres, con cuatro, hasta llegar a una semana. Fíjese los resultados que obtuve.

- 1) Si uno admite que cumplan *a lo sumo* con un día de diferencia (es decir, o bien el mismo día o en días consecutivos), alcanza con ¡14 personas! para que esa probabilidad sea mayor que $\frac{1}{2}$.
- 2) Si uno permite que la distancia sea *a lo sumo dos días*, entonces alcanzan 11 personas.
- 3) Separados por tres o menos días, alcanzan 9 personas.
- 4) Con cuatro días (o menos) alcanzan 8 personas; y lo mismo sucede (ocho personas) si uno acepta que haya a lo sumo cinco días de distancia entre un cumpleaños y otro.
- 5) Si uno acepta que hayan nacido con seis días de distancia, son suficientes *siete personas*.
- 6) Y finalmente si uno quiere saber cuántas personas tiene que haber en un grupo (elegido al azar, claro está) para que la pro-

babilidad de que haya dos que hubieran nacido *¡en la misma semana!* sea mayor que $\frac{1}{2}$, alcanza con tener *siete personas*.

Dicho de otra forma: elija un conjunto de siete personas cualesquiera (por ejemplo, en su trabajo, colegio, oficina, fábrica, escuela, universidad, jugadoras del mismo equipo, etc.), entonces, hay más de un 50 por ciento de posibilidades que haya dos (en ese grupo de siete) que hayan nacido dentro de la misma semana. Notable, ¿no es así?

Nota 5

El problema del cumpleaños y la *probabilidad* de que dos compartan la misma fecha de nacimiento entre 23 personas sea mayor que $\frac{1}{2}$ tienen otras implicaciones además de la curiosidad matemática.

Steven Strogatz, profesor en la Universidad de Cornell, Estados Unidos, y uno de los mejores matemáticos especializados en divulgación de la ciencia, escribió hace muchos años un artículo en el que señalaba cómo aprovechar los razonamientos que uno necesita para estimar el número de personas necesarias para resolver el ‘problema del cumpleaños’. En la nota que apareció en el *New York Times* en octubre del año 2012, Strogatz sostenía²⁴:

- a) Hay matemáticos cuya especialidad es la estadística aplicada a la medicina, que utilizan las mismas técnicas implementadas para analizar el problema del cumpleaños en la probabilidad de encontrar donantes y receptores de sangre compatibles, y para eso estudian la existencia de ciertas

24. http://opinionator.blogs.nytimes.com/2012/10/01/its-my-birthday-too-yeah/?_r=0

características que deben ‘empatar’ en el tipo de sangre, como los factores Rh y otros marcadores inmunológicos.

- b) Investigadores en criminología usan estas técnicas para calcular cuántas coincidencias parciales en los perfiles del DNA deberían encontrar por pura casualidad, cuando recorren las bases de datos que contienen muestras de personas que ya han sido condenadas por ciertos episodios de su pasado.
- c) Por otro lado, matemáticos dedicados a la criptografía usan las mismas técnicas que implementamos para el caso de los cumpleaños para descubrir a quienes las usan en forma ‘maliciosa’ con el objeto de fraguar firmas digitales.

Nota 6

Debía una respuesta a una pregunta que planteé antes. Fíjese lo que sucede si uno quisiera estimar el número de personas necesarias para que haya un 90% de posibilidades de encontrar alguna persona que cumpla años *¡el mismo día que usted!*

Es decir: usted empieza a convocar gente al azar y las hace entrar en un teatro (para fijar las ideas) o en una habitación o una sala. ¿Cuántas tendría que convocar para que las chances de que encontrar alguna que coincida con *su* cumpleaños sea un 90 por ciento (o mayor)?

Antes de leer lo que sigue, deténgase un instante y ‘estime’ lo que le parece que será el resultado. Servirá en todo caso para saber cuán bien funciona *su* intuición, al menos en este ejemplo. Recuerde que esta es *una pregunta diferente* de la que había hecho al comienzo de este artículo, cuando buscábamos dos personas que hubieran nacido el mismo día, y cuántas personas tienen que congregarse (en forma aleatoria) para que la probabilidad sea mayor que $\frac{1}{2}$. Ahora hablamos de encontrar a alguien que *cumpla años el mismo día que usted.*

Primero voy a calcular la probabilidad de que los que vayan entrando (personas que, supongo, fueron elegidas al azar) cumplan *lo contrario*; es decir, que quienes van entrando, sean personas que *NO* compartan con usted el día del cumpleaños. O sea, cada vez que pasa alguien, hay 364 posibilidades sobre 365 de que esa persona haya nacido *un día diferente del suyo*. Creo que a esta altura usted está en condiciones de coincidir conmigo en que la probabilidad de que una persona elegida al azar y usted *no* compartan el día que festejan el cumpleaños es $(364/365)$.

Cuando entra la segunda, una vez más, la probabilidad de que *NO* haya nacido el mismo día que usted es también $(364/365)$. Como ahora son dos, la probabilidad de que ninguno de los dos comparta su cumpleaños se calcula multiplicando los dos números:

$$(364/365) \times (364/365) = (364/365)^2$$

Como usted se imagina, a medida que van entrando más personas, la probabilidad se calcula de la misma forma: con tres personas, la probabilidad de que *ninguno de los tres comparta su cumpleaños* es $(364/365)^3$. Con cuatro, es $(364/365)^4$... Y así siguiendo.

Cuando entre la *enésima* persona, la probabilidad de que *ninguna de ellas* comparta su cumpleaños se calcula entonces como $(364/365)^n$.

Aquí me detengo un instante. Revisemos juntos la pregunta original:

¿Cuántas personas tiene que haber en un grupo para que las chances de que una de ellas cumpla años el mismo día que usted sean un 90%?

Con lo que escribí en el párrafo anterior, la idea es tratar de encontrar el *menor número* 'n' de manera tal que

$$(364/365)^n = (1/10)$$

¿Por qué pongo $(1/10)$ y esta desigualdad? Si yo encuentro un número n tal que con ese número de personas la probabilidad de que ninguno de ellos cumpla años el mismo día que usted es $1/10$, eso significa que la probabilidad de que en ese grupo haya al menos *una* persona que **SÍ** cumpla años el mismo día que usted será $9/10$, lo que es equivalente a un 90 por ciento de chances. Eso era exactamente lo que estábamos buscando.

Aquí, siéntase libre de saltar todos los cálculos que me van a permitir encontrar *cuál ese número 'n', el menor número de personas necesarias para que se verifique lo que queremos.*

Escribo el texto que sigue como para que usted tenga una idea de que no es necesario hacer nada *muy sofisticado* para encontrar el número n . En todo caso, todo lo que hace falta es usar los logaritmos naturales. Cuando lo haya encontrado *usando logaritmos*, voy a escribir una forma que no *necesita de ellos*. Es más laboriosa y ciertamente innecesaria e impráctica, pero lo que importa es que los cálculos *se pueden hacer sabiendo o no sabiendo logaritmos.*

Los cálculos que se necesitan están escritos a continuación:

- a) Por un lado $(364/365)^n$ mide la probabilidad de entre esas n personas *no haya ninguna que comparta cumpleaños con usted*. Por lo tanto, si quiero calcular la probabilidad (que voy a llamar P) de que entre esas n personas haya *una* que **SÍ** cumpla años el mismo día que usted, lo que tengo que hacer es restarlo del número *uno*. Es decir:

$$P = 1 - (364/365)^n$$

b) Por otro lado, a medida que el número n se hace cada vez más grande (cuando va entrando más gente en la sala), el número $(364/365)^n$ se hace cada vez más chico, y una vez más, el número²⁵ P se va haciendo cada vez más grande. El problema que me propuse solucionar es encontrar el *menor* número n tal que el número P sea igual a $9/10$. Es decir, encontrar el menor número n tal que

$$P = 1 - (364/365)^n = 9/10 = 0,9$$

Y llegado este momento es cuando voy a usar alguna de las propiedades de los logaritmos naturales. Verá que los argumentos necesarios son ciertamente *no sofisticados*.

Buscamos el *menor* número n tal que

$$0,9 = 1 - (364/365)^n$$

$$(1 - 0,9) = (364/365)^n$$

$$\ln(1 - 0,9) = n \times \ln(364/365)$$

$$[\ln(1 - 0,9)] / [\ln(364/365)] = n$$

$$[\ln(1/10)] / [\ln(364/365)] = n$$

25. No lo escribo explícitamente, pero el número P *depende* de n . Es decir, el número que mide la probabilidad de que haya al menos *una* persona entre las n que cumpla años el mismo día que usted depende de cuánta gente haya, o sea, depende de n .

Y acá usamos que el $\ln(1/10) = -2,3025851$ (aprox.) y $\ln(364/365) = -0,0027435$. Luego, al dividir $(-2,3025/-0,0027) = 839,29174\dots$

Para terminar, el *primer* número natural n que satisface esta igualdad es (ruidos de tambor):

840

Es decir, si usted estuviera en la puerta de un teatro y hay una fila enorme de personas elegidas al azar que están pugnando por entrar, usted sabe que una vez que entraron las primeras 840 personas, las chances de que en ese grupo haya por lo menos una persona que cumpla años el mismo día que usted son mayores que un 90 por ciento.

Más allá del uso de los logaritmos, que fue lo que me/nos permitió llegar al número 840, créame que los cálculos que hacen falta son sencillos y que usted misma/mismo los podría haber encontrado por su cuenta. Tener 'a mano' la posibilidad de usar logaritmos naturales es ciertamente una herramienta poderosa para facilitar las cuentas, pero, aun si usted hubiera intentado con una calculadora, usando el método INFALIBLE de PRUEBA y ERROR, *todo lo que habría necesitado es encontrar el menor número n tal que*

$$1 - (364/365)^n = 0,9$$

Si usted estuviera haciendo los cálculos con una computadora o calculadora, descubriría que

$$1 - (364/365)^{837} = 0,89936928$$

$$1 - (364/365)^{838} = 0,89964498$$

$$1 - (364/365)^{839} = 0,89991993$$

$$1 - (364/365)^{840} = 0,90019412$$

$$1 - (364/365)^{841} = 0,90046756$$

Es decir, 840 es el *primer número natural* tal que

$$1 - (364/365)^{840} > 0,90$$

Lo que es lo mismo que decir que las chances serán mayores que un 90 por ciento²⁶. Final.

Nota 7

En esta nota seré breve. Lea las siguientes dos frases. A mí me resultan impactantes. ¿Usted qué piensa?

*Si en una habitación hay 50 personas, las chances de que TODOS cumplan años en días **diferentes** es apenas un 3%.*

26. Antes de terminar, quiero agregar *otro aporte* de Carlos (D'Andrea). Después de leer este texto, y aun a riesgo de que haya que *saber un poco más* de matemática, preferí no dejarlo *fuera* del libro. Es por eso que transcribo 'casi' literalmente lo que él me escribió en un mail: "Los tiempos cambian, Adrián. Ahora, con una línea de código, en menos de **un segundo** tenés todos estos cálculos disponibles. De hecho, yo lo hice usando el programa Mathematica, pero estoy seguro de que cualquier código usual puede hacerlo. Esto es importante de cara a enseñar logaritmos (habría que buscar problemas un poco más complicados) pero sirve también para entender que hay algo que —con o sin logaritmos— lo estamos dando por sobreentendido y es que la **función exponencial** decrece cuando 'la base' es menor que 1, y por eso nos detenemos ni bien encontramos un valor que haga cambiar el parámetro".

(Me parece muy baja, ¿y a usted? Yo creería que la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día entre 50 personas debería ser más baja que un 97% como indica esta frase... ¡que es correcta!).

*Si en una habitación hay 97 personas, las chances de que TODOS cumplan años en días diferentes es **una en un millón**.*

Sin embargo, por alguna razón que me resulta inexplicable, esta me parece más creíble. No sé bien por qué, pero me parece más intuitiva. Una vez más: ¿qué sensación le despierta a usted?

Nota 8

Lo que quiero hacer ahora también tiene que ver con los cumpleaños, pero es un problema diferente. Yo no tengo, personalmente, ninguna cuenta en ninguna de las redes sociales, pero claramente la mayoría de las personas que conozco sí tienen. Escribo esto para exhibir que ‘el diferente’ y ‘desactualizado’ soy yo.

Lo que tengo claro también es que las personas con cuentas en Facebook tienen *amigos* (dentro de Facebook, quiero decir). Una pregunta que uno podría hacerse es la siguiente: ¿cuántos *amigos* debería tener una persona de manera tal de poder escribir *todos* los días ‘feliz cumpleaños’ y tener la tranquilidad de que la probabilidad de que alguno de sus ‘amigos’ cumpla años ese día es *muy alta*, digamos mayor que un 90 por ciento?

Allá voy. Imagine que usted se consigue un calendario, con cuadraditos para cada uno de los 365 días del año (sí, ya sé, estoy obviando el caso si fuera un año bisiesto, pero creo que en este tipo de cálculos es una licencia que me puedo permitir). Empie-

ce entonces a llenar el calendario escribiendo en cada ‘cuadrado’ el día de nacimiento de cada uno de sus amigos.

Al principio será sencillo ir llenando los huecos, pero a medida que avance en el proceso, usted ya sabe (basta con leer todo lo que está escrito antes) que es muy factible que los cumpleaños empiecen a repetirse. Y esto sucederá *no solamente una vez*, sino que las repeticiones serán inexorables y ocurrirán reiteradamente. A medida que va incorporando más amigos, el calendario se irá llenando cada vez más, pero los *días* que faltan llenar llevarán mucho más trabajo; o sea, usted va a necesitar agregar muchos más amigos para cumplir con que *todo* el calendario quede completo.

Lo notable es que, después de hacer *todas* las cuentas, se deduce que:

Si todas las personas que tienen una cuenta de Facebook agregaran amigos hasta completar el calendario²⁷, la cantidad promedio que haría falta es de ¡2153 amigos!

Por supuesto, si lo fuera a hacer una persona individualmente, usted, yo o quien usted quiera, es muy posible que necesite muchos más que 2153. Por ejemplo, si quisiera que sus chances de tener el calendario completo superaran un 90 por ciento, le harían falta agregar ¡21.000 amigos! Por las dudas, lo escribo de nuevo: “veintiún mil amigos”.

27. Aspirando a que sus chances de llenar el calendario con sus amigos supere el 90 por ciento.

Solitario búlgaro

Tome un mazo de cartas cualquiera. Separe 20 de ellas. Forme con las 20 cartas tantas *pilas* como quiera, no necesariamente iguales²⁸. Ahora, sígame con esta idea.

Voy a empezar con un ejemplo. Yo las voy a separar así en cuatro columnas:

(8, 6, 5, 1)

Es decir, la primera pila tiene *ocho* cartas, la segunda tiene *seis*, la tercera consiste de *cinco* cartas y la última, solamente *una* carta.

Yo podría haberlas separado de esta otra forma:

(7, 5, 3, 2, 2, 1)

Es decir, usted tiene total libertad de separar las cartas como quiera. Solo por conveniencia, para que sea más fácil de visualizar todo, las separé de manera tal que las pilas quedaran ordenadas en forma decreciente de izquierda a derecha, pero el orden es *irrelevante*.

²⁸. Claramente, no podrá formar más de 20, y eso siempre y cuando las pilas sean todas de *una* carta.

Ahora, voy a proceder del siguiente modo. Voy a elegir *una* carta de cada pila y con ellas voy a formar una nueva pila. Naturalmente, voy a tener en la mano entonces una nueva cantidad de cartas. Con ellas voy a formar una nueva pila y la voy a poner junto a las pilas que había antes, claro que cada una de las originales tendrá una carta menos.

Por ejemplo, mire la distribución anterior. Si empiezo con (8, 6, 5, 1), en el siguiente paso voy a tener (7, 5, 4, 4). ¿Me sigue?

¿Por qué quedaron estas cuatro pilas? Como originalmente había cuatro pilas, yo saqué una carta de cada una y tengo entonces una *nueva* pila de cuatro. Pero, por otro lado, como la última pila de la posición original tenía una sola carta, ahora esa pila desaparece. Entonces, la pila de 8 pasa a tener 7, la de 6 pasa a tener 5, la de 5 pasa a tener 4, y tengo una nueva que es la que me quedó con las cuatro cartas que recogí de cada una. De ahí que ahora la nueva disposición es:

(7, 5, 4, 4)

Una vez más, las ordené en forma decreciente.

Le propongo que sigamos juntos con este proceso y veamos qué sucede. Eso sí: como todo lo que hago es ‘reordenar’ las cartas que había originalmente, si sumo las cartas de *todas las pilas*, siempre va a haber 20 cartas, ¿de acuerdo?

EJEMPLO 1

Ahora, voy a reiterar el proceso una y otra vez. Los “montoncitos” de cartas quedarán así:

(8, 6, 5, 1)

(7, 5, 4, 4)

(6, 4, 4, 3, 3)
(5, 5, 3, 3, 2, 2)
(6, 4, 4, 2, 2, 1, 1)
(7, 5, 3, 3, 1, 1)
(6, 6, 4, 2, 2)
(5, 5, 5, 3, 1, 1)
(6, 4, 4, 4, 2)
(5, 5, 3, 3, 3, 1)
(6, 4, 4, 2, 2, 2)
(6, 5, 3, 3, 1, 1, 1)
(7, 5, 4, 2, 2)
(6, 5, 4, 3, 1, 1)
(6, 5, 4, 3, 2)

Aquí, una breve pausa. Sigamos con el proceso, pero preste atención a lo que *está por pasar* desde el momento en el que llegamos a (6, 5, 4, 3, 2):

(6, 5, 4, 3, 2)
(5, 5, 4, 3, 2, 1)
(6, 4, 4, 3, 2, 1)
(6, 5, 3, 3, 2, 1)
(6, 5, 4, 2, 2, 1)
(6, 5, 4, 3, 1, 1)

Y de aquí, vuelve a aparecer:

(6, 5, 4, 3, 2)

Es decir, en el momento en el que las 20 cartas están divididas en cinco pilas (6, 5, 4, 3, 2), empieza un *ciclo*, en el sentido de

que ya no habrá mucho más por encontrar. En seis pasos, reencontramos la misma cantidad de pilas y la misma cantidad de cartas en cada una.

Aquí, me gustaría poder estar con usted en el mismo lugar geográfico y temporal. ¿Sabe por qué? Porque me imagino que usted debe estar proponiéndose algunas preguntas. Pero, por ahora, voy a resistir la tentación y voy a escribir otros ejemplos para saber si la/lo motivan a pensar en la dirección que yo suponía.

EJEMPLO 2

Una vez más, empecemos con 20 cartas, pero con una distribución inicial distinta de la que usé anteriormente. Empecemos con: (10, 5, 3, 2).

Si usted se fija en el Ejemplo 1, en ninguna etapa del proceso anterior nos tropezamos con esa distribución, ya que en ningún momento tuvimos una *pila* con 10 cartas. ¿Qué pasará ahora? Avancemos.

(10, 5, 3, 2)
(9, 4, 4, 2, 1)
(8, 5, 3, 3, 1)
(7, 5, 4, 2, 2)
(6, 5, 4, 3, 1, 1)
(6, 5, 4, 3, 2)
(5, 5, 4, 3, 2, 1)
(6, 4, 4, 3, 2, 1)
(6, 5, 3, 3, 2, 1)
(6, 5, 4, 2, 2, 1)
(6, 5, 4, 3, 1, 1)

Y aquí voy a parar, porque la distribución (6, 5, 4, 3, 1, 1) ya la encontramos antes. Lo interesante es que (6, 5, 4, 3, 1, 1) la obtuvimos desde *dos lugares diferentes*: (7, 5, 4, 2, 2) o también (6, 5, 4, 2, 2, 1).

Es decir, aparece un *ciclo* (igual que en el Ejemplo 1) de seis etapas:

(6, 5, 4, 3, 1, 1)
(6, 5, 4, 3, 2)
(5, 5, 4, 3, 2, 1)
(6, 4, 4, 3, 2, 1)
(6, 5, 3, 3, 2, 1)
(6, 5, 4, 2, 2, 1)
(6, 5, 4, 3, 1, 1)

Espero que al llegar a esta altura, usted misma/o tenga algunas preguntas:

- ¿Siempre se llegará a un ciclo?
- Si fuera verdad que siempre llegamos a un ciclo, ¿de qué longitud será el ciclo? (por *longitud* entiendo que es la medida de cuántos pasos hay que dar hasta volver al punto inicial).
- ¿Habrá algún ciclo de longitud *uno*? Esto querría decir si hay alguna manera de distribuir las cartas inicialmente de manera tal que, ni bien hago un paso, obtengo la *misma distribución* de la que acabo de partir.

EJEMPLO 3

Empiezo ahora con 21 cartas.

(14, 7)
(13, 6, 2)
(12, 5, 3, 1) (el tres aparece porque al retirar una carta de cada pila, voy a formar una pila de 3 cartas)

(11, 4, 4, 2)
(10, 4, 3, 3, 1)
(9, 5, 3, 2, 2)
(8, 5, 4, 2, 1, 1)
(7, 6, 4, 3, 1)
(6, 5, 5, 3, 2)
(5, 5, 4, 4, 2, 1)
(6, 4, 4, 3, 3, 1)
(6, 5, 3, 3, 2, 2)
(6, 5, 4, 2, 2, 1, 1)
(7, 5, 4, 3, 1, 1)
(6, 6, 4, 3, 2)
(5, 5, 5, 3, 2, 1)
(6, 4, 4, 4, 2, 1)
(6, 5, 3, 3, 3, 1)
(6, 5, 4, 2, 2, 2)
(6, 5, 4, 3, 1, 1, 1)
(7, 5, 4, 3, 2)
(6, 5, 4, 3, 2, 1)

Y fíjese lo que sucede a partir de acá. La *próxima* distribución es:

(6, 5, 4, 3, 2, 1)

Sí, la distribución que sigue es la misma que la de partida. Es decir, la *longitud* del ciclo es *¡uno!*

Creo que esto abre muchas otras preguntas. No voy a poder

ni formular y menos contestar todas las preguntas que se me/nos puedan ocurrir, pero si le interesa el tema, hay mucha (otra vez, *mucha*) literatura escrita al respecto.

En principio, una cuestión que había dejado planteada antes ya la contestamos: existen distribuciones de cartas en las cuales se obtiene un ciclo de longitud uno, tal como vimos recién: si uno empieza con (6, 5, 4, 3, 2, 1) obtiene la misma distribución. ¿Cuáles otras habrá?

La existencia de esta última, la que tiene 21 cartas distribuidas de esa forma, empezando desde 6 y decreciendo hasta llegar a 1, ¿no le genera ganas de probar con otra similar?

Por ejemplo, qué pasa si empezamos con *tres* cartas, distribuidas así:

(2, 1)

El siguiente paso vuelve a recuperar (2, 1). O sea, ¡funciona! Tomemos ahora *seis* cartas, distribuidas así:

(3, 2, 1)

Es fácil verificar que, una vez más, se recupera (en un solo paso): (3, 2, 1).

¿Le hace falta que siga? ¿O ya está usted en condiciones de afirmar que si uno tiene una distribución de cartas en donde uno empieza con un número *cualquiera*, digamos 27, y hace lo siguiente

(27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14,
13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)

en el siguiente paso, recuperará *exactamente* la misma distribución? En el caso general, si uno empieza con n cartas en la ‘primera pila’ y escribe

$$(n, (n - 1), (n - 2), (n - 3), (n - 4), \dots, 5, 4, 3, 2, 1)$$

la distribución que sigue recuperará la original. O sea, uno obtiene un *ciclo* de longitud *uno*.

Siguiente pregunta: ¿y si yo empiezo en forma decreciente como hice recién, pero *no llego hasta uno* sino que paro antes?, ¿qué pasa?

Me explico. Tome el siguiente ejemplo: (6, 5, 4, 3, 2).

Es muy similar al caso anterior, pero *no llega* hasta 1, ¿terminará en un ciclo de longitud *uno* también?

Como siempre, le propongo que piense usted por su cuenta, pero si no, fíjese que en el Ejemplo 1. En un momento determinado llegábamos a (6, 5, 4, 3, 2), pero a partir de allí sigue:

$$(6, 5, 4, 3, 2)$$

$$(5, 5, 4, 3, 2, 1)$$

$$(6, 4, 4, 3, 2, 1)$$

$$(6, 5, 3, 3, 2, 1)$$

$$(6, 5, 4, 2, 2, 1)$$

$$(6, 5, 4, 3, 1, 1)$$

Y aquí, sí, reaparece el (6, 5, 4, 3, 2).

Es decir, si abrigábamos la esperanza de que se repitiera el mismo caso y apareciera un ciclo de longitud *uno*, esa idea se desvanece con este ejemplo.

Lo que sabemos entonces es que si uno empieza con cualquier número n y va retrocediendo de a *uno*

$$(n, (n - 1), (n - 2), (n - 3), \dots, 4, 3, 2, 1) \quad (*)$$

entonces sí, eso genera un ciclo de longitud *uno*.

Pregunta: ¿será cierto al revés? ¿Qué quiere decir esto? ¿Será verdad que si uno empieza con una distribución cualquiera y termina en un ciclo de longitud *uno*, entonces es porque empezó con una distribución del *tipo* (*)?

Le propongo que se fije en el Ejemplo 3. Lo reproduzco:

- (14, 7)
- (13, 6, 2)
- (12, 5, 3, 1)
- (11, 4, 4, 2)
- (10, 4, 3, 3, 1)
- (9, 5, 3, 2, 2)
- (8, 5, 4, 2, 1, 1)
- (7, 6, 4, 3, 1)
- (6, 5, 5, 3, 2)
- (5, 5, 4, 4, 2, 1)
- (6, 4, 4, 3, 3, 1)
- (6, 5, 3, 3, 2, 2)
- (6, 5, 4, 2, 2, 1, 1)
- (7, 5, 4, 3, 1, 1)
- (6, 6, 4, 3, 2)
- (5, 5, 5, 3, 2, 1)
- (6, 4, 4, 4, 2, 1)
- (6, 5, 3, 3, 3, 1)
- (6, 5, 4, 2, 2, 2)
- (6, 5, 4, 3, 1, 1, 1)
- (7, 5, 4, 3, 2)
- (6, 5, 4, 3, 2, 1)

Fíjese que si yo empezara con (6, 5, 4, 3, 2, 1) entonces *sí*, esa es una distribución que genera un ciclo de longitud *uno*. Yo podría haber empezado en un lugar cualquiera, por ejemplo (6, 4, 4, 4, 2, 1), y hubiéramos encontrado un ciclo, pero tuvimos que avanzar un poco para encontrarlo:

(6, 4, 4, 4, 2, 1)

(6, 5, 3, 3, 3, 1)

(6, 5, 4, 2, 2, 2)

(6, 5, 4, 3, 1, 1, 1)

(7, 5, 4, 3, 2)

(6, 5, 4, 3, 2, 1)

Es decir, uno *encuentra* el lugar desde donde llegó a un ciclo de longitud *uno*, pero así como yo elegí (6, 4, 4, 4, 2, 1) para empezar, cualquier lugar del Ejemplo 3 hubiera servido. Sin embargo, ¿qué es lo que tienen en común todas las tiras del Ejemplo 3? ¿Quiere pensar usted?

Fíjese que *todas* las etapas tienen el mismo número de cartas. Si uno suma las cartas de *todas* las pilas, *de todos* los pasos, siempre encuentra el número 21. Es decir, da la sensación de que lo que *sí* pasa es que si uno empieza con el número 21, uno podría conjeturar que, sin importar con qué distribución empiece, ni cómo sean las pilas, al final llegará al ciclo (6, 5, 4, 3, 2, 1) y, desde allí, en el próximo paso no sale del lugar. Eso sucede porque el ciclo tiene longitud *uno*.

Por supuesto, no he probado nada; solo —espero— haberla/o motivado para hacerse preguntas. De hecho, uno podría preguntarse: ¿qué tiene de particular el número 21? Si se fija en lo que hicimos antes, cuando empecé con el número 3 y una distribución (2, 1), inmediatamente llegamos al ciclo de longitud uno. Si empiezo con un total de 6 cartas y las distribuyo así: (3, 2, 1),

ese es un ciclo de longitud uno. Pero si empiezo de esta otra forma:

(3, 3)
(3, 2, 1)

Desde acá encontré el ciclo de longitud uno.

Si ahora empiezo con las seis cartas ubicadas *todas* en una sola pila. Es decir, empiezo con (6), si sigo, obtengo:

(5, 1) (ya que le quité una carta a la pila de *seis* y había *una sola pila*)
(4, 2)
(3, 2, 1)

Y listo.

Un ejemplo más. Si empiezo con seis pilas de una carta cada una: (1, 1, 1, 1, 1, 1), de aquí sigo a (6). Y ahora, como hice antes, llego a:

(5, 1)
(4, 2)
(3, 2, 1)

Y se terminó también.

Es decir, estos ejemplos nos hacen conjeturar que no importa cómo haga la distribución inicial de las *seis* cartas, siempre voy a llegar a (3, 2, 1), que es el ciclo de longitud *uno*.

Consecuentemente, el número 3, el número 6 y el número 21 son ejemplos que sirven para encontrar ciclos de longitud *uno*. De acuerdo, pero ¿qué tienen en común 3, 6 y 21? Y por otro

lado, ¿no hay *otros números* entre 6 y 21 que cumplan lo mismo? ¿Y entre 3 y 6?

Voy a poner un ejemplo más y después le voy a proponer que siga usted por su cuenta *explorando, investigando* y, si me permite, *divirtiéndose* con esta forma de hacer matemática.

Fíjese lo que sucede con el número 10. Empiezo así:

(5, 5)

(4, 4, 2)

(3, 3, 3, 1)

(4, 2, 2, 2)

(4, 3, 1, 1, 1)

(5, 3, 2)

(4, 3, 2, 1)

Acá encontré el ciclo de longitud *uno*, porque ahora se repite: (4, 3, 2, 1).

Es decir, encontramos *otro* número, además de 3, 6, y 21: el número 10. No lo incluí hasta acá, pero permítame agregar que si uno empieza con *una sola carta*, entonces aplicando el mismo proceso, volvemos a tener *una* carta, o sea, es un ciclo de longitud *uno*.

Algo más: le propongo que se fije qué sucede si empieza con 15 cartas. Me permito sugerirle que haga los cálculos usted. Seguro que le resultará no solo entretenido, sino que le surgirán algunas preguntas.

Algunas observaciones:

- a) Empezando con este número de cartas (1, 3, 6, 10, 15, 21), encontramos *siempre* ciclos de longitud *uno*.
- b) Esos ciclos de longitud uno que encontramos tenían esta forma (respectivamente):

(1), (2, 1), (3, 2, 1), (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2, 1), (6, 5, 4, 3, 2, 1).

Si uno mira estos datos, ¿encuentra algún patrón, ‘algo’ que le llame la atención?

Los números 1, 3, 6, 10, 15 y 21 resultan ser *todos* suma de los primeros números naturales:

$$1 = 1$$

$$3 = 1 + 2$$

$$6 = 1 + 2 + 3$$

$$10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

Estos números son tan particulares que tienen un nombre: *números triangulares*. Es decir, un número n se llama *triangular* si existe una forma de escribirlo así:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (k - 1) + k = n$$

Si se fija, cada vez que uno va a jugar al bowling (yo *dejé* de jugar hace *mucho mucho mucho* tiempo), la distribución de los ‘palos’ se obtiene poniendo *uno* delante de todos, después *dos* más atrás, *tres* en la siguiente fila y finalmente *cuatro* en la última. La suma de todos estos palos resulta ser el número *diez*. Es decir, usted (y yo) hemos estado expuestos a números triangulares muchas veces, solo que nunca hemos prestado particular atención.

Hay una fórmula muy bonita que permite sumar los primeros n números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + (n - 1) + n = \frac{1}{2} [n(n + 1)]$$

- c) Inexorablemente, si usted empieza con 47 mil cartas, no importa cómo las distribuya, *seguro* que va a encontrar un ciclo. ¿Por qué? Como el número de cartas no cambia en el proceso, y hay un número *finito* de maneras de distribuir esas 47 mil cartas, en algún momento, al llegar a *alguna* etapa, todo se tendrá que repetir y usted habrá encontrado el ciclo. Eso sí, el ciclo *tendrá longitud uno sí y solo sí usted empezó con un número triangular*.
- d) En la vasta literatura que existe sobre el Solitario búlgaro, hay un teorema que demuestra que si uno comienza con un número triangular de cartas n , en donde

$$n = 1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1) + k,$$

sin importar la distribución que hizo, en *a lo sumo* $(k^2 - k)$ pasos llegará al ciclo esperado²⁹: $(k, k - 1, k - 2, \dots, 4, 3, 2, 1)$.

- e) En algún momento, apareció una conjetura que sostenía que si usted elige un número cualquiera (que no sea triangular), no importa cuál sea la configuración inicial, uno *siempre* encontrará el mismo ciclo. Es decir: así como los números triangulares tienen asociados un *ciclo* de longitud *uno* y es siempre el mismo, entonces se esperaba que los números *no triangulares* cumplieran lo mismo; o sea, si us-

29. Una observación de Donald Knuth: Tome el caso $n = 10$. Eso significa que usted empezó con 55 cartas (ya que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55 = \frac{1}{2} (10 \times 11)$). Entonces, no importa la configuración inicial, uno debería llegar al *ciclo*: $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ en *a lo sumo* $(10^2 - 10) = 90$ pasos. La pregunta entonces es: ¿de cuántas maneras posibles se pueden distribuir las 10 cartas para empezar a jugar? (¿quiere hacer la cuenta usted?). La respuesta es: 451.276 formas posibles. ¿No es notable que en 90 pasos (o menos), uno pueda asegurar que llega a este ciclo?

ted elige un número *no triangular*, sabemos que en algún momento llegará a un ciclo que *seguro* tendrá longitud *mayor* que uno. Pero, por lo que quedaba, se conjeturaba que quizás si uno empezaba con dos configuraciones iniciales diferentes, el ciclo final *también* podría ser diferente. La conjetura resultó falsa. ¿Cómo hacer para convencerse? Alcanza con encontrar un ejemplo. Fíjese en este caso: tome el número $n = 8$. Intente usted, antes de leer lo que escribo yo a continuación, si puede encontrar un *único* ciclo asociado independientemente de cuál sea la configuración inicial.

Sigo yo. Tome estas dos formas de empezar. Por un lado, comience con $(3, 3, 1, 1)$ y, por el otro, con $(3, 2, 2, 1)$. En los dos casos hay ocho cartas.

Tomemos el primer caso:

$(3, 3, 1, 1)$

$(4, 2, 2)$

Y acá, en el siguiente paso, se vuelve a la configuración inicial: $(3, 3, 1, 1)$.

Empecemos con la otra: $(3, 2, 2, 1)$. Los pasos siguientes son:

$(4, 2, 1, 1)$

$(4, 3, 1)$

$(3, 3, 2)$

Y después, en la etapa siguiente, ‘reaparece’ la configuración inicial y por ende el ciclo: $(3, 2, 2, 1)$.

Estos dos ejemplos con el mismo número de cartas (8) comprueba que la conjetura es falsa ya que hay dos con-

figuraciones distintas que arriban a ciclos de distinta longitud.

No hice virtualmente ninguna demostración en todo este texto, pero sí me permito sugerirle que la literatura escrita sobre el problema del Solitario búlgaro es muy vasta³⁰. Si bucea en internet se sorprenderá por la cantidad y variedad de artículos dedicados al tema. La historia es muy interesante y se origina con la llegada a Bulgaria del matemático ruso Anatoli Karatsuba, quien le presentó el problema a un matemático búlgaro, Borislav Boyanov. Pero todo habría quedado reducido al mundo académico si no hubiera sido publicado por el inefable Martin Gardner en una de sus columnas en la revista *Scientific American*³¹. Allí despegó y hoy, en el año 2021, lleva más de veintiocho años inspirando a profesionales y amateurs en Teoría de Juegos, combinatoria, ciencias de la computación, probabilidades...

30. Como fuente principal, puede referirse al artículo “The Bulgarian Solitaire and the Mathematics Around It”, por Vesselin Drensky, <https://arxiv.org/abs/1503.00885>, publicado en el año 2015. Desde allí podrá ‘bajar’ el PDF que contiene una buena parte de la literatura necesaria para avanzar en el tema (si es que le interesa). Y también en: <http://i.stanford.edu/pub/cstr/reports/cs/tr/83/990/CS-TR-83-990.pdf>, “A Programming and Problem-Solving Seminar”, por John Hobby y Donald E. Knuth.

31. Martin Gardner, “Bulgarian Solitaire”, *Scientific American*, vol. 249, 1983, pp. 12-21.

“Linda”, un caso analizado por Kahneman y Tversky

El ejemplo que sigue lo propusieron Daniel Kahneman y Amos Tversky³², dos notables científicos israelíes. Ambos hicieron una buena parte de sus carreras en los Estados Unidos. Le pido por favor que lea la pregunta que sigue y se detenga un instante antes de pensar una respuesta. No hay nadie, nadie la/lo mira, nadie está alrededor suyo a punto de ponerle ‘una nota’. Está usted en soledad (un momento de paz y tranquilidad... En realidad, yo debería pensar bien si le propongo que lea este texto si usted logró fabricarse un instante de este tipo. Estoy tentado de decirle: “Mire, abandone, no lea ningún texto ahora. Si logró encontrar un momento de paz y tranquilidad, aprovéchelo. Vuelva a este texto en otro momento, cuando no esté *tan* tranquila/o ni

32. Daniel Kahneman es psicólogo y además matemático/economista. En marzo de 2021 cumplió 87 años. Kahneman recibió el premio Nobel en Economía en el año 2002. Amos Tversky también fue psicólogo pero dedicado a la economía. No pudo recibir el premio porque la Academia no ofrece premios post mortem. Tversky falleció cuando recién había cumplido 59 años. Le recomiendo dos libros en particular (sobre el estudio del comportamiento humano). *Pensar rápido, pensar despacio*, de Kahneman. El otro se llama *Deshaciendo errores*, de Michael Lewis. Si le interesa este tipo de temas, estos dos libros son esenciales para entender, o mejor dicho, para tratar de entendernos, y detectar nuestras irracionalidades.

tenga *tanta paz*. Pero bueno, por las dudas, cuando vuelva de allí, aquí estoy yo esperándola/o). Lea el siguiente texto:

Linda tiene 31 años, es soltera, muy articulada para hablar, una gran oradora, y es considerada una persona brillante. Se graduó en filosofía. Como estudiante, fue una persona muy activa en el Centro de Estudiantes de la Facultad de Filosofía y Letras, gran defensora de los Derechos Humanos y concentrada en políticas antidiscriminatorias.

Con estos datos, le pregunto: ¿qué es más probable que le suceda a Linda?

- a) Linda trabaja en un banco como cajera.
- b) Linda trabaja en un banco como cajera y además es activista en un movimiento *feminista*.

Tómese usted un tiempo antes de contestar, salvo que tenga una respuesta inmediata. Si pudiera, le diría que no lea lo que sigue... al menos, *no todavía*.

Si le interesa, le ofrezco un dato que me parece muy relevante. Kahneman y Tversky hicieron una encuesta con esta pregunta, y el resultado que obtuvieron es asombroso³³: el 85% de los encuestados eligió una de las dos respuestas. De nuevo, ¡un 85%! Antes de escribir cuál de las dos fue, ¿usted cuál eligió?

(No tiene idea cómo me fastidia no estar en este momento allí con usted para *discutir* este tema).

Sigo. ¡El 85 por ciento de la gente que participó eligió la *segunda* alternativa! Es verdaderamente muy difícil de creer. ¿Quiere

33. Me resulta asombroso a mí, quizás no a usted.

pensar usted por qué razón habrán *seleccionado* la segunda y no la primera?

Fíjese en este detalle: no hay manera de que Linda cumpla con la segunda parte *¡sin cumplir la primera!* Es decir, ¡no puede ser cajera en un banco y además activista en un movimiento feminista, sin ser una cajera en un banco primero (que es lo que dice la primera opción)!

Por lo tanto, la respuesta es contundente: tiene que ser (a). Sea lo que sea Linda, puede que sea cajera (o no), pero si lo es, solamente *un subgrupo de las cajeras es además activista en un movimiento femenino*. Luego, las que cumplen la parte (b), ¡tienen que cumplir forzosamente la parte (a)! El conjunto de personas que cumplen (b) es un *subconjunto* de las personas que cumplen (a). ¡Y listo!

Lo fascinante que sucedió después es que la pregunta sobre Linda se formuló en términos diferentes. Plantearon el problema de esta forma:

En esta habitación hay 100 mujeres, que cumplen con la descripción hecha sobre Linda. Decida usted cuántas de estas 100 mujeres:

- a) Trabajan en un banco.
- b) Trabajan en un banco y además son activistas en un movimiento *feminista*.

Cuando el problema es presentado así, ¡ninguna persona contestó equivocadamente! Pasaron del 85% a ¡cero!

Quiero proponerle una observación más. En el momento de contestar una pregunta, adquiere particular relevancia la *forma* en la que *esa* pregunta nos es formulada. Por ejemplo, voy a escribir tres frases. Fíjese lo que piensa usted de ellas.

- a) Si usted elige una persona al azar, hay un 10% de posibilidades de que esa persona sea zurda.
- b) Es esperable que si usted elige 100 personas al azar, 10 de ellas sean zurdas.
- c) La probabilidad de que una persona elegida al azar sea zurda es de 0,1.

Creo que es fácil detectar que las tres frases ¡dicen exactamente lo mismo! En todo caso, son tres formas diferentes de hacer la misma afirmación. Si usted se siente más cómoda/o con una que con otra, es porque eso nos sucede en la vida cotidiana también.

Es por eso que quiero terminar con dos preguntas para usted que yo no puedo contestar:

- a) Si usted tuviera que ser la persona que pregunta, ¿cuál de las tres formas elegiría?
- b) Si usted fuera la persona a quien *le preguntan*, ¿de qué forma preferiría que se lo planteen?

A priori, no debería haber ningún tipo de preferencia ya que solo difieren en la *forma de verbalizar* la pregunta. Sin embargo, estoy —casi— seguro de que usted se siente más cómoda/o con alguna de las tres. ¿Es así?

Taxis azules y amarillos (de Amos Tversky)

Habitualmente, cada vez que uno habla de Kahneman y Tversky, la referencia inexorablemente termina en Kahneman. Esto sucede por varias razones. La primera es que Tversky falleció y no sigue produciendo. Kahneman todavía vive y, a mayo de 2021, tiene 87 años. Ambos son de los estudiantes más relevantes surgidos de las universidades israelíes de esa época. Sin embargo, es bueno señalar que los dos hicieron una buena parte de sus carreras en Estados Unidos, más precisamente en Stanford, cerca de San Francisco.

Tversky falleció en el año 1996, más de veintidós años atrás. En algún lugar, como no habla por televisión, no lo invitan a programas de radio, no da más conferencias, no escribe más artículos, no publica, su lugar en la historia está destinado a ser “el que aparece *siempre* junto con Daniel Kahneman”. Encima, a Kahneman le dieron el premio Nobel (de Economía), y eso termina por *derrotar* al pobre Tversky. Y Tversky no comparte el premio con Kahneman porque la Academia no otorga premios post mortem. Listo. Final para Tversky.

Un momento. No quisiera que se interprete que estoy diciendo que Kahneman no merece el lugar que tiene, ni el reconocimiento que se le hace *constantemente*. ¡Para nada! Es hiperme-

recido y todos los laureles los tiene bien ganados. Pero lo que no quisiera hacer es ignorar la tarea ‘del otro’ o ‘minimizarla’ sencillamente porque no *aparece en los ‘medios’*, por ponerlo de alguna manera.

Hace un tiempo, Keith Devlin, una de las personas más prolíficas en la divulgación de la matemática, sin ninguna duda un referente esencial de esta época, compartía el claustro de profesores e investigadores en la Universidad de California, en Stanford. Es decir, era uno de sus pares. Casi inmediatamente después de su fallecimiento, Devlin escribió un artículo contando alguno de los aportes de Tversky, y quiero aprovechar para reproducir la idea. Acá va.

Suponga que usted es miembro de un jurado que está analizando un caso de un accidente que se produjo una noche en alguna ciudad. El conductor de un taxi atropelló a una persona y se escapó. *Toda* la evidencia que había sobre el caso, y muy en particular sobre la compañía de taxis, se basaba en la palabra de un señor de edad avanzada —superaba los 80 años— y había visto el accidente desde la ventana de su departamento que estaba ubicado a unos 30 metros del impacto. Este señor había declarado que él había visto cómo un taxi de color azul atropelló al peatón.

Algunas observaciones. La ciudad en donde sucedieron los hechos tiene solamente dos compañías de taxis: una con coches azules y otra de color amarillo. La investigación que hicieron los abogados del peatón atropellado resultó en que en la noche del episodio el 85% de los taxis que estaban en servicio eran de color amarillo y el 15% restante eran azules.

La compañía de taxis, que era la otra parte en el juicio, había pedido que se hiciera un estudio sobre las condiciones en las que estaba la visión del señor que era testigo. El resultado, después de un test exhaustivo hecho por oftalmólogos, había determinado

que el señor estaba en condiciones de distinguir un taxi de color azul sobre uno amarillo en un 80% de los casos en el que se le había planteado el mismo escenario. Dicho todo esto, usted, *sí, usted*, si fuera miembro del jurado, ¿qué decidiría?

Naturalmente, la primera reacción que yo tendría es decir: basado en la evidencia del testigo que demostró que en *cuatro* de *cinco* veces que se le plantea un caso de ese tipo (el 80% en cuestión), estuvo en condiciones de discernir el color del taxi, yo votaría en contra de la compañía de taxis azules. Si me *apurraran*, explicaría que las chances de que la compañía *azul* fuera la responsable son de cuatro sobre cinco, ya que son las posibilidades de que el testigo eligiera correctamente en una ocasión cualquiera.

Sin embargo, la *realidad* es *otra... ¡y bien diferente!* Acompáñeme por acá y verá que, sorprendentemente, la probabilidad de que el transeúnte hubiera sido atropellado por un taxi de color azul ronda 0,41 o sea, el 41%... es decir, ¡menos de la mitad! O sea, es más probable que el peatón haya sido atropellado por un taxi de color amarillo más veces que por un taxi de color azul. ¿Por qué?

El error que uno cometería si elige rápidamente la compañía azul es que, para hacerlo, debe ignorar completamente un dato *muy relevante*: basado en los datos que se tienen, *cualquiera* haya sido el taxi que hubiera estado en la zona, la enorme probabilidad es que haya sido de color *amarillo*.

Por otro lado, supongamos que el testigo no hubiera podido distinguir el color del auto que atropelló al peatón, pero hubiera estado 100% seguro de que fue un taxi, entonces la probabilidad de que hubiera sido un taxi de color amarillo habría sido de un 85% ya que esa es la proporción de taxis que estaban en *ese* momento en *esa* zona.

Luego, y esto es *determinante*, *antes* que el testigo diga nada sobre el *color*, las chances de que el taxi hubiera sido azul eran realmente muy bajas, solo un 15%. En particular, esta probabilidad es la que se llama ‘previa’, basada solamente en cómo son las cosas si no hubiera habido ningún testigo que atestiguara sobre lo que pasó. Cuando el testigo ‘habla’, entonces la probabilidad de que sea un auto de color azul (que era de un 15%) se *incrementan fuertemente*, ¡pero no hasta el punto de convertirse en un 80% como uno tiene la tentación de concluir!

Lo que uno *puede hacer* es combinar ambos factores: lo que pasaba *antes* que hubiera un testigo con cuánto afecta lo que el testigo dice cuando habla.

Le propongo que ahora, más allá de que usted *me crea o no*, se fije en estas cuatro figuras y la explicación de lo que significa cada una de ellas. Si sigue la cadena de razonamientos, verá que la probabilidad de que el auto que haya visto el testigo sea azul (acá, gris oscuro), es un ‘poquito’ mayor que 0,41. Es decir, hay un ‘poco’ más de un 41% de que el taxi haya sido de color azul. ¿No le parece *interesante* que esto suceda? ¿Qué hubiera dicho usted de haber sido jurado en el juicio?

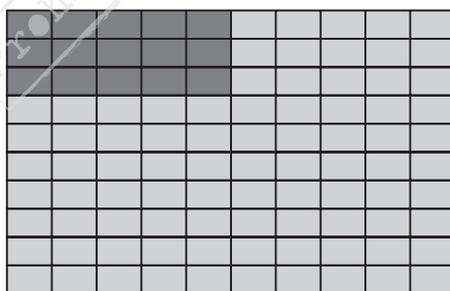


Figura 1

15 de los 100 taxis son azules.
 85 de los 100 taxis son amarillos.

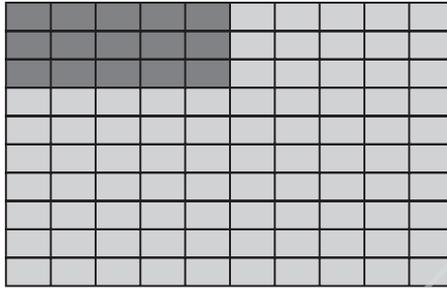


Figura 2

El testigo acierta en un 80% de los casos. Esto significa que reconocerá como azules al 80% de los taxis azules y también reconocerá como amarillos al 80% de los taxis amarillos.

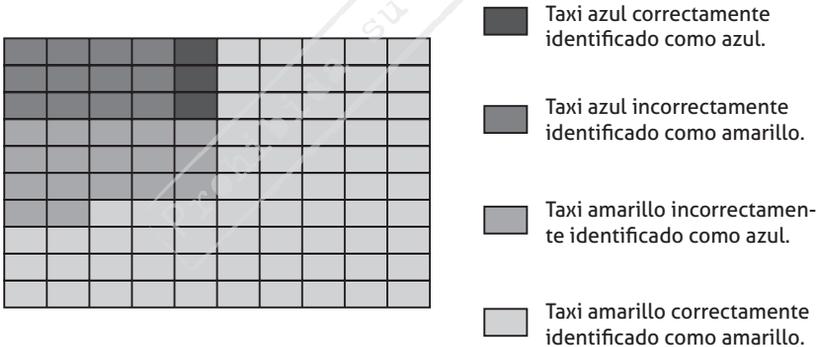


Figura 3

Ahora concentrémonos en los taxis identificados como azul. Estos provendrán de los que *correctamente* fueron azules a los que agrego como *incorrectamente* identificados como azules. La

Figura 4 es el resultado, con 12 azules bien identificados más 17 azules incorrectamente identificados.

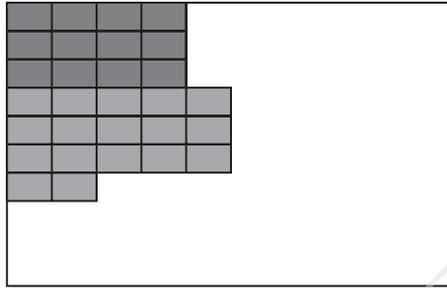


Figura 4

La probabilidad entonces de que el auto que viera el testigo fuera correctamente identificado como azul es:

$$12/(12 + 17) = 12/29 = 0,413793$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el auto que vio el testigo fuera azul es 0,413793. O sea, hay un poco más del 41% de posibilidades que haya sido azul.

El matemago

Quiero plantear un problema que me tuvo dudando durante un tiempo. Es un problema con cartas, y sería aplicable el término (inventado, ciertamente) de *matemagia*. Verá que a simple vista es incomprensible que una persona pueda detectar la solución sin *creer* que, quien está haciendo el *truco*, está haciendo *magia* verdaderamente. ¿Por qué mis dudas? No sé si plantear el problema *de frente, directamente*, y pensar juntos la solución, o bien ver si soy capaz de presentar un par de ejemplos y permitir que sea usted quien trate de descubrir dos cosas:

- a) ¿Qué es lo que dice el problema? ¿O qué es lo que debería decir el problema?
- b) ¿Cómo solucionarlo?

Como ve, no tengo claro qué hacer. Por otro lado, si hago las dos presentaciones, la segunda no tendría sentido porque usted *ya sabría* lo que hay que demostrar. Es por eso que voy a empezar planteando algunos ejemplos y vea usted si es capaz de descubrir qué sucede. Eso sí: como no tengo acá cartas, voy a usar *números*, pero el truco ¡es con cartas! Cuando termine de leerlo verá que lo puede adaptar en forma muy sencilla. Acá voy.

EJEMPLO 1

Mire estos 21 números que ubico en una *grilla* de siete filas por tres columnas:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Posición inicial del Ejemplo 1.

Elegí un número, el 13, y por eso lo resalté.

Ahora los voy a *reubicar*. Fíjese si puede *descubrir* qué hice con los números. Los reordené y ahora quedan así:

15	18	21	10	13	2	5
16	19	8	11	14	3	6
17	20	9	12	1	4	7

Posición intermedia del Ejemplo 1.

Una vez más, marqué el número 13 al que le voy a seguir la *trayectoria*. Sigo con un reordenamiento más:

16	11	6	21	2	20	1
19	14	15	10	5	9	4
8	3	18	13	17	12	7

Posición final del Ejemplo 1.

Y acá paro. Esta sería la posición *final*. Por supuesto, el número 13 quedó ubicado en un lugar particular.

Está muy claro para mí que si yo dejara estas tres grillas de 21 números de esta forma, usted no tendría mucho por hacer.

¿A qué interpretaciones podría aspirar yo? De acuerdo. Voy ahora a un segundo ejemplo.

EJEMPLO 2

Empiezo como antes, con los mismos 21 números que en el Ejemplo 1, pero con la diferencia de que ahora *señalé* otro: el 21.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Posición inicial del Ejemplo 2.

Los reordeno otra vez. Quedan así:

8	11	14	17	20	2	5
9	12	15	18	21	3	6
10	13	16	19	1	4	7

Posición intermedia del Ejemplo 2.

Y una vez más, hago un *último* reordenamiento. Resulta *esta nueva grilla*:

10	19	7	15	3	11	20
13	1	9	18	6	14	2
16	4	12	21	8	17	5

Posición final del Ejemplo 2.

Antes de exhibir un par de ejemplos más, quiero hacer algunas observaciones. Si usted se fija en los primeros dos ejemplos, ahora *sí* repetí un patrón. Ahora sí hay *algo* para descubrir. No

digo que sea fácil, ni mucho menos, pero tampoco es *imposible*. Al llegar a este punto, y antes de hacer un tercer ejemplo, le pido que mire la estructura de lo que había en el momento inicial de cada ejemplo y lo que va sucediendo en el trayecto.

Mientras tanto, yo sigo con un tercer ejemplo.

EJEMPLO 3

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Posición inicial del Ejemplo 3.

Como en los casos anteriores, la posición inicial de los números es la misma. La única diferencia es que elegí *otro* número. Al principio fue el 13, después el 21 y ahora el 18. Voy a seguir, pero me permito decirle que, aunque no se vea, aunque no sea *ostensible*, ¡me estoy repitiendo! En los tres ejemplos estoy haciendo lo mismo. Sigo.

8	11	14	17	20	2	5
9	12	15	18	21	3	6
10	13	16	19	1	4	7

Posición intermedia del Ejemplo 3.

Por último, voy a escribir la posición final, tal como hice antes. Resulta así:

10	19	7	15	3	11	20
13	1	9	18	6	14	2
16	4	12	21	8	17	5

Posición final del Ejemplo 3.

A esta altura, como usted se imagina, tengo *muchísimas ganas de estar donde está usted*. Me gustaría poder compartir lo que me pasó a mí. En realidad, yo estoy ‘inventando’ esta manera de presentar el problema. Cuando yo lo vi, lo vi con cartas y había una suerte de *mago/matemático* que nos iba contando lo que sucedía.

Pero yo quiero/quise hacer algo diferente. Tal como escribí al principio, prefiero que entre los dos, usted y yo, ‘descubramos’ algún patrón que nos haga sospechar que podríamos tener un *truco* o ‘algo’ que se parezca a un truco de magia y con cartas. Pero también con matemática incluida.

Acá me quiero detener, por varias razones. La primera es para darle tiempo a usted. No sé si presentar un cuarto ejemplo, aunque sospecho que no hace falta. Solo para quedarme tranquilo con que le ofrecí varias alternativas para que le sea más *fácil* imaginar lo que va pasando, voy a incluir un cuarto (y último) ejemplo. Si usted prefiere, no lo lea, porque voy a ir aclarando lo que hago, y eso le quitará la *gracia* si es que usted lo quiere descubrir por su cuenta. Ya está avisada/o entonces.

EJEMPLO 4

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Posición inicial del Ejemplo 4.

Hasta acá, lo *único* que podemos deducir (que parezca relevante) es que la posición inicial en los cuatro casos es la misma. Lo confirmo: así es, y así será.

El número elegido ahora es el 1. Lo siguiente es reordenar los números como hice antes. Obtengo esta posición intermedia:

8	11	14	3	6	16	19
9	12	1	4	7	17	20
10	13	2	5	15	18	21

Posición intermedia del Ejemplo 4.

Y por último:

8	3	19	1	17	13	15
11	6	9	4	20	2	18
14	16	12	7	10	5	21

Posición final del Ejemplo 4.

¿Qué dedujo usted? O mejor dicho, ¿qué es lo que le pareció a usted?

De las posiciones iniciales no hay nada para decir, o mejor dicho sí: son todas iguales. En cada caso, elegí un número particular, pero eso no afecta la posición inicial de los números. Si prefiere, hagamos de cuenta que una persona *eligió* uno de los 21 números, ¡pero no me lo dice! Lo *sabe ella/él*, aunque no se lo dice al ‘mago’.

Para llegar a la posición intermedia, fíjese en el Ejemplo 1. La *fila tres* contiene siete números (como las otras dos). Lo que *parece* haber sucedido, es que el mago (yo) juntó los números de esa fila y los fue poniendo como columnas. Es decir: la fila 15,

16, 17, 18, 19, 20 y 21 quedó distribuida así: 15, 16 y 17 en la primera columna, 18, 19 y 20 en la segunda, y después, solamente me quedaba el número 21 que lo puse en la tercera columna.

Antes de avanzar, ¿no quiere consultar con los otros ejemplos para ver si es *eso* lo que hice? Le doy tiempo para que lo haga con los otros tres ejemplos. La/lo espero acá.

Sigo. Si usted va hasta el Ejemplo 2, verá que no es eso lo que sucede... al menos, no sucede exactamente. Lo que *sí* hice es poner como columnas los números de la *fila dos* ahora. ¿Y en el Ejemplo 3? No, ahora puse como columna los de la fila tres.

Último recurso: ¿y en el Ejemplo 4? Allí, logré la posición intermedia ubicando los de la *fila dos*. Lo que *SÍ* podemos concluir es que estoy tomando los números de cada fila y los voy poniendo ahora como columnas, pero... ¿por qué algunas veces tomo la fila dos y otras la tres...? (Acá una pausa para pensar).

Lo que sucede, es que *estoy tratando de evitar la fila que tenga el número elegido*. Pero si es así, ¿cómo hago yo para saber cuál es la fila que tengo que 'evitar'?

Ya sé, ya sé... Yo *no sé el número que usted pensó*, pero lo que sí puedo hacer es pedirle que me diga en qué fila está el número que eligió. Cuando usted me lo diga, yo ya sé que tengo que 'evitar' empezar con esa fila. Es por eso que, en el Ejemplo 1, elijo una fila que no sea la que contiene el número 13, porque aunque usted no me lo haya dicho, si me indicó en *qué fila está el número que pensó*, esa será información suficiente para que yo 'evite' esa fila.

Si usted se fija en los cuatro ejemplos, la fila que uso para empezar a formar la primera, segunda y parte de la tercera columna, es una fila cualquiera ¡que no sea la que contiene el número! Bien. Un buen avance.

Bien, ¿cómo seguir? Volvamos al Ejemplo 1. Ahora sí, en la

posición intermedia del Ejemplo 1, la *fila* que estoy usando para seguir creando columnas es ¡*la fila que usted me indicó!* Fíjese que eso sucede en cada uno de los cuatro ejemplos. En el primer caso, la que contiene el 13; en el segundo, la que contiene el 21; en el tercero, la que contiene el 18, y en el último, la fila que contiene el número 1.

Pregunta: ¿y cómo pasar de la posición intermedia a la final?

Veamos si lo que hice para pasar de la posición inicial a la intermedia sirve (fíjese usted qué le parece).

Basta volver atrás con cada uno de los ejemplos y descubrirá que sí, efectivamente, el mismo procedimiento que usé para pasar de la posición inicial a la intermedia es el que usé para pasar de la intermedia a la final. ¿Y cómo hago para saber qué fila *no* usar de entrada? Bueno: igual que antes, yo le volvería a preguntar en qué fila está el número que usted eligió.

Ni bien me lo diga, yo sé que *esa fila particular ¡no la puedo usar!*

Todo bien, pero ¿cómo hago para concluir cuál es el número que usted eligió? (estamos a *un paso* de descubrir lo que pasa).

Fíjese en las posiciones finales de los cuatro ejemplos. En *todos* el número elegido aparece en la CUARTA posición, en la del MEDIO, ya sea contando desde la izquierda como desde la derecha. Lo que yo tengo que hacer es preguntarle *¡por última vez!*, cuando llegué a la posición final, ¿en qué fila está el número que eligió? Cuando me contesta esa pregunta, ¡listo! Yo ya sé que es el número del medio de esa fila.

Perfecto. Pero... ¡un momento! ¿Y por qué pasa esto? ¿Por qué aparece *ahí* el número elegido?

(Una vez más, creo que le toca a usted, ¿no le parece?).

No me queda otra alternativa que terminar yo, pero dígame la verdad: ¿no le dan ganas de tomarse un tiempo y fijarse si lo puede resolver usted? ¡Falta tan poco...!

Mire lo que sucede. Empecemos por acá:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21

Supongamos que usted me dice que el número que seleccionó está en la fila del medio. Entonces, yo tomo los números de cada una de las filas y pongo los de la *segunda* fila en una pila intermedia (imaginaria). Es decir, formo tres *pilas* de números con cada fila. Los primeros siete (los que van arriba) son: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 (aunque podrían haber sido las de la tercera. Lo único que importa es que *no sean* los números que aparecen en la segunda fila). Ahora sí, debajo de siete números, como segundo *tercio*, aparecen los siete de la *segunda* fila, que fue la que usted me indicó que contiene el número que eligió. Y por último, los números que aparecen en la tercera fila. Los voy ubicando en forma de columnas como hice antes. Esta será la configuración intermedia:

1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21

Sea cual fuere el número que usted eligió, la *fila* en donde está ese número ocupará las posiciones del 8 al 14. ¿Lo ve? Allí quedaron los números 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. Cuando le vuelva a preguntar en cuál de las tres filas está, de acuerdo con su respuesta, yo ya sé lo siguiente. Si me dice que está en la primera fila, *tiene que ser o bien el 10 o bien el 13*. Si me dice que está en la segunda fila, entonces *tiene que ser o bien el 8 o bien el 11 o*

bien el 14. Por último, si me dice que está en la *última* fila, entonces puede ser o bien el 9 o bien el 12. Rastreemos los tres casos.

Si me dijo primera fila, queda así:

1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21

Cuando distribuya los números una vez más, *evitando* la primera fila, quedará *esta* posición final:

2	11	20	7	16	6	15
5	14	1	10	19	9	18
8	17	4	13	3	12	21

Acá yo le pregunto por tercera vez: ¿en qué fila está? Si me contesta la *segunda* fila, entonces yo sé que es el número *del medio*, o sea, en este caso sería el 10. Si usted me respondiera que está en la *tercera* fila, el número del medio es el 13. ¡Y listo!

Si después de la posición inicial usted me hubiera dicho que está en la *segunda* fila, entonces, como yo ya los había distribuido, quedan así:

1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21

Tienen que ser o bien el 8, o bien el 11 o bien el 14.

En este caso, los distribuyo de nuevo, *evitando* usar la segunda fila para empezar a formar las columnas. Queda así:

1	10	19	8	17	6	15
4	13	2	11	20	9	18
7	16	5	14	3	12	21

Y acá se ve claro. Si cuando yo le pregunte en qué fila está, usted me dijo primera, es el 8; si me dijo segunda, es el 11; si me dijo tercera, es el 14.

Para terminar, voy un poco más rápido. Si usted, desde la posición inicial, me dijo que estaba en la tercera fila, queda así:

1	4	7	10	13	16	19
2	5	8	11	14	17	20
3	6	9	12	15	18	21

Pueden ser o bien el 9 o bien el 12. Las reordeno, evitando empezar con la tercera fila y cuidando de poner los siete números de la tercera como segundo tercio a ordenar:

2	11	20	9	18	4	13
5	14	3	12	21	7	16
8	17	6	15	1	10	19

Ahora le preguntaría en qué fila está. Si usted me dice la primera, es el 9, y si me dice la segunda, es el 12. ¡Y acá *sí* se terminó el análisis!

Fue largo, quizás tedioso, pero creo que no. Espero que lo haya disfrutado. Por supuesto, ahora es su turno. Adáptelo a cualquier situación en donde tenga cartas, por ejemplo.

Pregunta final: ¿se podrá hacer lo mismo con una cantidad diferente de números? ¿No lo quiere pensar usted?

Tengo ‘algo’ para decodificar... ¿se anima?

Las letras A, B, C, D, E, F y G reemplazan a los números 1, 3, 4, 5, 6, 8 y 9. Una letra por número, un número por letra³⁴.

Están escritas las siguientes igualdades:

1) $A + A = B$

2) $C + C = DB$

3) $A * A = DF$

4) $C * C = BD$

5) $A + C = DE$

6) $A * C = EF$

Se trata entonces de ‘deducir’ qué número está asociado a qué letra.

Nota importante: cuando escribo DF, estoy suponiendo que DF es un número de *dos* dígitos: el primero es D y el segundo es F. Lo mismo vale para todas las igualdades.

Por otro lado, el símbolo * significa, *multiplicar*.

Listo. La/lo espero acá abajo.

34. Por supuesto, y aunque parezca obvio, lo escribo igual: el reemplazo no es ordenado, en el sentido de que la A puede que se convierta en el número 8, y el número 9 puede ocupar el lugar de la letra B. Lo que quise escribir es que a cada número le corresponde una única letra, y viceversa.

Deducción

- De la igualdad (1) se deduce que B es un número par. Por lo tanto, $B = 4, 6$ u 8 .
- De la igualdad (2) deducimos que, *sea cual fuere el número C*, como es un número que a lo sumo es 9, esto indica que su doble *no puede alcanzar a 20*. Por lo tanto, la letra D *tiene* que ser 1 ($D = 1$).
- Por la igualdad (4), sabemos que $C * C = C^2 = BD$. O sea, el dígito C es tal que al elevarlo al cuadrado se obtiene un número que *termina* en 1. Luego, el número $BD = 81$, y por lo tanto $B = 8$, pero también deducimos que $C = 9$.
- Por (1), sabemos que $2A = 8$, por lo que ahora sabemos que $A = 4$.
- Por (3), $A^2 = 4^2 = 16$ y, en consecuencia, $F = 6$.
- Por (6), $A * C = 4 * 9 = 36 = EF$. Luego, $E = 3$.
- Y al llegar acá, ya sabemos los valores de A, B, C, D, E, F... y nos queda G. Pero como ya usamos seis de los siete números (1, 3, 4, 6, 8 y 9), el único que no usamos fue el 5, concluimos que $G = 5$.

Listo. Fácil, ¿no es así?³⁵

35. Un agregado de Carlos que creo es *muy valioso*, sobre todo porque deja algo ‘pendiente’ para pensar. Transcribo ‘casi’ literalmente su observación después de haber leído esta parte del texto: “Siempre me queda la pregunta de si no habrá otra solución a la que se podría arribar también ‘probando y descartando’. Aquí, en este caso, parece haber un razonamiento claro que mostraría también la ‘unicidad’ de la solución, pero alguna vez habría que incluir alguno que tuviera dos o más soluciones, y cómo razonando de manera distinta se llegaría a respuestas distintas...”. Créame que la propuesta me entusiasma. No voy a avanzar por cuestiones de espacio, pero ¿no le dan ganas a usted de pensar por su cuenta?

Una nueva versión del hotel de Hilbert

En el año 2005 apareció el primer libro de la saga, *Matemática... ¿estás ahí?* En la página 25 escribí un texto que cuenta la historia sobre uno de los problemas clásicos al hablar de *infinitos*: “El hotel de Hilbert”.

Lo reproduzco acá, y después quiero añadirle una pregunta más (y su respectiva respuesta), que no se me ocurrió en ese momento.

EL HOTEL DE HILBERT

Los conjuntos infinitos tienen siempre un costado atractivo: atentan contra la intuición.

Supongamos que hubiera un número infinito de personas en el mundo. Y supongamos también que hay un hotel, en una ciudad, que contiene infinitas habitaciones. Estas habitaciones están numeradas, correspondiéndole a cada una un número natural.

Así entonces, la primera lleva el número 1, la segunda el 2, la tercera el 3, etc. Es decir: en la puerta de cada habitación, hay una placa con un número, que sirve de identificación.

Ahora, supongamos que *todas* las habitaciones están ocupadas y solo por una persona.

En un momento determinado, llega al hotel un señor con cara de muy cansado. Es tarde en la noche y todo lo que este hombre espera es terminar rápido con el papelerío para poder irse a descansar. Cuando el empleado de la recepción le dice que “lamentablemente no tenemos ninguna habitación disponible ya que *todas* las habitaciones están ocupadas”, el recién llegado no lo puede creer. Y le pregunta:

— Pero ¿cómo? ¿No tienen ustedes *infinitas* habitaciones?

— Sí — responde el empleado del hotel

— Entonces, ¿cómo me dice que no le quedan habitaciones disponibles?

— Y sí, señor. Están todas ocupadas.

— Vea. Lo que me está contestando no tiene sentido. Si usted no tiene la solución al problema, lo ayudo yo.

Y acá, conviene que usted piense la respuesta. ¿Es verdad que, si en un hotel hubiera infinitas habitaciones, identificadas con los números naturales, entonces el conserje podría decir “no hay más lugar”? ¿Se le ocurre a usted alguna solución?

Acá va:

— Vea — continuó el pasajero —. Llame al señor de la habitación que tiene el número 1 y dígame que pase a la habitación que tiene el 2. A la persona que está en la habitación 2, que vaya a la del 3. A la del 3, que pase a la del 4. Y así, siguiendo. De esta forma, toda persona seguirá teniendo una habitación, que ‘no compartirá’ con nadie (tal como era antes), pero con la diferencia de que ahora quedará una habitación libre: la número 1.

El conserje lo miró incrédulo, pero comprendió lo que le decía el pasajero. Y el problema se solucionó.

Cuando todos los pasajeros estaban durmiendo, el conserje se quedó pensando en lo que le había dicho el último pasajero. Y quiso avanzar algunos pasos más. Se le ocurrieron diversas preguntas más.

- 1) Si en lugar de llegar un pasajero, llegan dos, ¿qué sucede? ¿Tiene solución el problema ahora?
- 2) ¿Y si en lugar de dos, llegaran 100 nuevos pasajeros?
- 3) Para ponerlo en términos más generales, ¿qué pasaría si durante la noche llegaran n pasajeros, en donde n es un número cualquiera? Puesto de otra forma: ¿el problema *siempre* tiene solución independientemente del número de personas que lleguen?
- 4) ¿Y si llegaran *infinitas* personas? ¿Se puede solucionar también?

(Acá es donde yo le propongo que deje de leer el texto y se ponga usted a pensar. Créame que vale el esfuerzo, más que nada porque no son problemas que uno tenga habitualmente. Claro, usted es quien manda...).

Solución al problema del hotel de Hilbert

- 1) Si en lugar de una persona llegan dos, lo que el conserje tiene que hacer es pedirle al de la habitación 1 que vaya a la 3, al de la 2 a la 4, al de la 3 a la 5, al de la 4 a la 6, etc. Es decir, pedirle a cada uno que se corra *dos habitaciones*. Eso dejará las *dos* primeras habitaciones libres que servirán para alojar a los dos pasajeros recién llegados
- 2) Si en lugar de dos pasajeros llegan *cientos*, entonces, lo que hay que hacer es decirle al señor de la habitación 1 que

pase a la 101, al de la 2 a la 102, al de la 3 a la 103, y así siguiendo. La idea es que cada uno se corra *exactamente* 100 habitaciones. Eso dejará 100 habitaciones libres, que ocuparán los cien nuevos pasajeros que recién arribaron.

- 3) Con la misma idea que usamos para solucionar las partes a) y b), se responde esta. Si los que llegan son n nuevos pasajeros, la solución es indicarle a la persona que está en la habitación *uno* que se corra a la $(n + 1)$, quien está en la habitación *dos*, a la habitación $(n + 2)$, y así siguiendo. En forma genérica: si un pasajero está ocupando la habitación x , pasarlo a la habitación $(x + n)$. Eso dejará n habitaciones libres para los recién llegados.

Y para terminar de contestar la pregunta que plantea el ítem (3), la respuesta es: *sí, sea cual fuere el número de personas que llega, siempre se puede resolver el problema.*

- 4) Por último, si los que llegan son *infinitos* nuevos pasajeros, entonces ¿qué hacer? Una posibilidad es decirle al de la habitación 1 que pase a la 2, al de la 2 que pase a la 4, al de la 3 que pase a la 6, al de la 4 que pase a la 8, al de la 5 que vaya a la 10, etc. Es decir, cada uno pasa a la habitación que está indicada con *el doble* del número que tiene en ese momento. De esta forma, *todos* los recién llegados tienen una habitación libre (las que están marcadas con un número *impar*) mientras que los pasajeros que ya estaban antes de la invasión de nuevos turistas ocuparán ahora *todas* las habitaciones con números *pares* en la puerta.

Moraleja: los conjuntos infinitos tienen propiedades muy peculiares que ‘atentan contra la intuición’. De hecho, una caracte-

terización interesante de los conjuntos infinitos es que son coordinables con una parte de sí mismos³⁶.

Hasta allí había llegado yo con el texto en el año 2005. Hace poco, Jeff Dekofsky ofreció en una charla TED³⁷ una nueva variante al problema. Jeff se planteó la siguiente pregunta: “¿Y qué pasaría si llegaran *infinitos* colectivos, cada uno con *infinitas personas* en cada uno? ¿Habría lugar para todos ahora?”³⁸.

La respuesta es que sí, se puede. De todas formas, la solución que yo conozco requiere conocer *un poco* más sobre números *primos*.

Estos son los conocimientos que se requieren. Si usted no está familiarizado con ellos, por ahora, créamelos. En todo caso, más adelante, puede verificarlos en cualquier libro de aritmética, aun los que se usan para los primeros cursos.

- Le recuerdo que los números primos (los positivos) son los números que únicamente son divisibles por la unidad (*el número uno*) o *por ellos mismos*. Por ejemplo, el 2, 3, 5, 7, 11, 13 son todos números primos. En cambio 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14 o todo número par (salvo el 2) no son números primos. Por una cuestión de convención, suponemos que el número *uno no es un número primo*.
- Hace unos 2300 años, Euclides (sí, el que usted conoce)

36. Este hecho es *no trivial* y *muy importante*. En este contexto pasa ‘casi’ inadvertido, pero poder coordinar el conjunto todo con una parte de él mismo, es una cualidad muy significativa que distingue a los conjuntos infinitos.

37. <https://ed.ted.com/lessons/the-infinite-hotel-paradox-jeff-dekofsky>

38. Lo que Dekofsky no dice en su charla TED es que no solo llegan *infinitos colectivos* e *infinitas personas*, sino que estos *infinitos son numerables*.

demostró que *hay infinitos números primos*. Ese hecho es *muy* importante, no es muy difícil de probar, pero para convencerse hay que sentarse y leer alguna de las demostraciones que existen (o pensarla usted. Insisto, no es difícil).

- Todo número natural es o bien un número primo, o bien se escribe de una *única* forma como producto de primos. Esta escritura es *única* salvo el orden de los factores. Este hecho se conoce con el nombre del Teorema Fundamental de la Aritmética. Es una de las bellezas de la matemática, o de la aritmética, si prefiere. Una vez más, no es difícil de probar, pero hace falta hacerlo al menos una vez en la vida. O creer que es cierto. Usted decide, pero si estuviera en su lugar, me interesaría pensarlo para saber en dónde reside la dificultad.
- Por último, voy a usar una propiedad muy útil que tienen los números primos: si un número primo p divide a un *producto de números naturales*, entonces tiene que dividir a por lo menos *uno* de los factores. Por ejemplo, como el número 3 divide al número 180, entonces no importa cómo descomponga usted el número 180 como producto de otros números naturales, *seguro* que 3 tiene que dividir a uno de ellos. En particular, usando el Teorema Fundamental de la Aritmética, esta propiedad dice que si el número 3 divide a 180 (como 3 es primo), entonces el número 3 *tiene que estar en la descomposición del número 180!*

Ahora, con todos estos datos, ¿no tiene ganas de pensar usted qué estrategia diseñar?

Por supuesto, yo voy a escribir *una* acá, pero ¿qué gracia tiene? ¿No sería mucho mejor si se le ocurre *alguna* a usted?

Me doy cuenta de que le he pedido que haga un esfuerzo

muy particular, que es aceptar muchas cosas, pero si me las cree, o puede posponer por un rato la necesidad de convencerse pensando o leyendo las demostraciones de todo lo que escribí antes, entonces le propongo que avancemos. Voy a describir cómo hacer para asignarle una habitación distinta a los infinitos pasajeros que ya están en el hotel, además de los infinitos pasajeros que tiene cada uno de los infinitos micros. Sígame por acá.

Ya sabemos que *las infinitas* habitaciones del hotel están numeradas: 1, 2, 3, 4... usando todos los números naturales. Además, voy a *numerar* todos los colectivos: 1, 2, 3, 4... usando todos los números naturales. Por último, voy a *numerar* a los infinitos pasajeros de cada uno de los colectivos, usando también *todos* los números naturales.

Por ejemplo, en alguna parte estará estacionado el colectivo número 35 y adentro de él habrá un pasajero que llevará el número 72. De esa forma, voy a poder identificar a cada pasajero de cada colectivo.

Me falta *un* paso más. Ya sabemos que los números primos son infinitos. Lo bueno es que los puedo *ordenar*, de menor a mayor.

El primer primo es el número 2.

El segundo es el número 3.

El tercero es el número 5.

El cuarto es el número 7.

El quinto es el número 11.

El sexto es el número 13... y así siguiendo.

Con esta idea, ya estoy listo para hacer la distribución de los infinitos pasajeros de los infinitos colectivos, contemplando también a los infinitos pasajeros que están ya ubicados en el hotel.

Empiezo así:

- 1) Primero voy a ubicar a los pasajeros que *ya* están en el hotel. Con ellos voy a usar el *primer número primo*, el 2. Al pasajero que está en la habitación 1, le digo que pase a la habitación $2^1 = 2$. Al pasajero que está en la habitación 2, le digo que pase a la habitación $2^2 = 4$. Al pasajero que está en la habitación 3, le digo que pase a la habitación $2^3 = 8$. A quien ocupa la habitación 4, le digo que vaya a la habitación $2^4 = 16$...
- En general, al pasajero que está ocupando en este momento la habitación n le digo que pase a la habitación 2^n .
- De esta forma, he reubicado a los infinitos pasajeros del hotel. Esto hago *antes que llegue el contingente de infinitos colectivos trayendo infinitas personas cada uno*.
- 2) Ahora, voy a ubicar a los pasajeros del colectivo número 1. Para eso voy a usar el *segundo primo*, el número 3. Recuerde que el 2 ya lo usé con los pasajeros que estaban durmiendo en el hotel.
- ¿Qué hacer? ¿Cómo replicar lo que hice antes?
- Así: al pasajero del colectivo número 1 que está en el asiento 1, le asigno la habitación $3^1 = 3$.
- Al pasajero del colectivo número 1 que está en el asiento 2, le asigno la habitación $3^2 = 9$.
- Al pasajero que está en el asiento 3, le asigno la habitación $3^3 = 27$.
- De esta forma, le asigno una habitación a *todos* los pasajeros del colectivo 1: al pasajero que está sentado en el asiento n le corresponde la habitación $3n$.
- 3) ¿Cómo hacer ahora con los pasajeros del colectivo 2? Nuevamente, hay que elegir un primo y , como ya usamos el 2 y el 3, tomaremos el próximo, el *tercer* primo, que es el número 5.
- Igual que antes, al pasajero n del colectivo 3, le asignamos la habitación $5n$.

4) Creo que a esta altura usted ya me entendió cuál es la estrategia general. El colectivo número n tiene asociado el $(n + 1)$ número primo p . Al pasajero a de ese colectivo n le corresponde alojarse en la habitación pa . ¡Y listo! Por ejemplo, usted podría preguntarme: ¿el pasajero 11 del colectivo 8, a qué habitación tiene que ir? (¿quiere pensar?). Yo sé que para los pasajeros del colectivo 8 tengo que usar el *noveno* primo. Los primeros ocho números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Luego, el noveno es ¡23! ¿Y entonces? Bien, la habitación que le corresponde al pasajero 11 del octavo colectivo es:

$$23^{11} = 952.809.757.913.927$$

Usted advierte que con este método puedo garantizar que cada pasajero de cada colectivo tiene una habitación en donde pasar la noche. Ahora bien, ¿se le ocurren preguntas? Decididamente yo tengo algunas que me gustaría recorrer con usted. Le propongo que *no empiece por las más*, fíjese qué dudas tiene usted.

Por ejemplo, a mí se me ocurren dos:

- a) ¿Cómo sabemos que no habrá dos pasajeros que tengan asignada la misma habitación?
- b) ¿Quedarán habitaciones vacías?

Como siempre, me gustaría dejarla/o a usted para que reflexione tranquila/o, sin apuro. En todo caso, lo que nos sobra es *tiempo*³⁹.

39. Estoy escribiendo este texto mientras el mundo entero está virtualmente observando una cuarentena debido a la pandemia que azota a la humani-

a) Dicho esto, exploremos juntos (sí, usted y yo), ¿qué debería pasar para que dos personas lleguen a la misma habitación? En principio, ¿podrían haber estado en el hotel esa noche *antes* que llegara la invasión de colectivos?

Si se fija, verá que el *algoritmo* dice que si una persona estaba en la habitación n cuando llega la invasión de colectivos, ahora le va a corresponder alojarse en la habitación $2n$.

Luego, si dos personas convergen en la misma habitación es porque provienen de dos habitaciones, digamos n y m . Esto querría decir que si coincidieron, es porque $2n = 2m$, y usted entiende que eso *no es posible*, salvo que $n = m$, o lo que es lo mismo, venían de la misma habitación. Pero como estamos suponiendo que hay un solo pasajero por habitación, esa situación no pudo darse.

Entonces, si coincidieron en una habitación, no pudieron provenir del propio hotel. Más aún: si vienen de dos colectivos diferentes, querría decir que existen *dos primos diferentes* p y q , y dos números naturales (que pueden ser iguales o distintos, digamos n y m), de manera tal que $pn = qm$. Y esto *tampoco* puede suceder, salvo que los primos sean iguales ($p = q$) y que los números naturales sean el mismo ($n = m$).

Justamente, como escribí antes, si $pn = qm$, esto significa que —por ejemplo— el primo p divide a qm . Si eso es cierto, tiene que dividir a *alguno* de los factores. Pero esto significaría que p divide a q . Y no puede suceder porque ambos son números primos y si uno llegara a dividir al otro

dad. Escribo sin saber qué sucederá con estas ideas que quiero compartir con usted, pero no tiene importancia, porque es lo que me mantiene vivo y me produce alegría pensar junto con otro ser humano.

es porque ¡son iguales! Si son iguales, provienen del mismo colectivo. Y no solamente eso, *tienen que haber estado sentados en el mismo asiento*.

Moraleja: eso no puede pasar. Todo pasajero tiene garantizada *su propia habitación*.

Esto contesta la pregunta (a).

- b) ¿Podrán quedar habitaciones vacías en el hotel? La respuesta es *¡enfáticamente sí!* En realidad, van a quedar muchísimas habitaciones vacías, *infinitas* habitaciones vacías. ¿Por qué? Fíjese que las *únicas* habitaciones que van a quedar *ocupadas* son aquellas cuyo número sea igual a la potencia de *algún número primo*.

Por ejemplo, la habitación número 8 seguro que está ocupada porque $8 = 2^3$. También la habitación 81 estará ocupada, porque $81 = 3^4$. Pero la habitación número 6 ¡estará vacía! ¿Por qué? Porque $6 = 2 \times 3$ y, por lo tanto, no es la potencia de ningún número primo.

Moraleja: la estrategia que escribí anteriormente *seguro* que sirve y resuelve el problema: *toda persona tendrá una habitación a su disposición. Y en el camino quedaron muchas, muchísimas habitaciones libres...* Pero, ese es *otro problema*. Lo contemplará otro matemático en otro libro... u otro lector⁴⁰.

40. No lo escribí explícitamente pero en *todas* las situaciones que planteé, los *infinitos* que consideré fueron siempre *numerables*. En el caso de los ‘otros’, los ‘no-numerables’, la solución también es posible pero escapa el objetivo en este libro. De hecho, yo apelé al uso de los números primos que me permitió simplificar el problema de forma muy visible. Sin ellos, la dificultad sería muchísimo mayor..., digamos, *otro grado* de dificultad.

Una observación más que me hizo Juan Sabia y que aporta otra forma de resolver el mismo problema. No necesita usar los números primos como hice yo. A los pasajeros del primer colectivo los ubico en las habitaciones *impares*. Ahora quedan todas las habitaciones con números pares *libres*. Las renumero utilizando *todos los números naturales*. Es decir, la que tenía el número 2, ahora pasa a ser la habitación 1; a la que tenía el número 4, le pongo el número 2; a la que tenía el 6, le pongo el número 3... En general, a la que tenía el número $2n$ le pongo el número n . Una vez cumplido este procedimiento, tomo los pasajeros del segundo colectivo y los ubico en las habitaciones *impares* después de la ‘renumeración’. Y ahora *vuelven a quedar libres* las habitaciones con números pares. Renumero otra vez y uso el mismo procedimiento con los pasajeros del tercer colectivo. Si sigo indefinidamente con este proceso, los infinitos pasajeros de los infinitos colectivos van a tener su lugar garantizado.

Agregué lo que me dijo Juan porque esto exhibe (por si hiciera falta una vez más), la variedad de formas en las que se pueda abordar un problema. Y estoy ‘seguro’ de que usted, si es que está leyendo estas líneas, habrá pensado: “¡Yo tengo una solución mejor!”. No sé si será *mejor*, pero si es suya, ya habrá valido la pena todo este ejercicio.

Matilde y los autitos de colección

Matilde⁴¹ estaba jubilada hacía ya más de cinco años, pero seguía muy activa. En particular, seguía aumentando su colección de autitos en miniatura. Tenía una vitrina con múltiples versiones, incluso de las mismas marcas: Ferrari, Lamborghini, McLaren, Mercedes, Porsche... Las más famosas marcas que producen autos de carrera ofrecen para coleccionistas como ella réplicas ‘en pequeño’ de las versiones originales, de los que habían sido (o son) los verdaderos autos de carrera, por ejemplo, los que se ven en los diferentes circuitos de Fórmula 1, Fórmula 2, NASCAR, etc.

Su pasión por los autos había comenzado desde pequeña, había estudiado ingeniería, se había graduado y terminó dirigiendo su propia fábrica. Pero al margen de la ‘vida real’, seguía incrementando su colección.

Como es habitual en el mundo de los coleccionistas (no solo

41. Carlos me preguntó si *Matilde* existía, o si *Matilde* existe y yo la conozco. La respuesta que le di es que no, que conozco una sola Matilde ahora, y no creo que esté coleccionando autitos. No entiendo bien de dónde se me ocurrió utilizar su nombre, pero sí puedo afirmar que uno de los nombres más bonitos de mujer que encontré en mi vida fue *Matilde*, y es por eso que quise incluirla en este texto. No hay otra cosa (al menos consciente).

de autos, sino en general), se producen reuniones periódicas que antes eran inexorablemente presenciales pero ahora, con la ventaja de la tecnología, se organizan también en forma virtual. Sin embargo, en estos últimos años, nos hemos acostumbrado a hacer reuniones vía Zoom o algún equivalente. En esta ocasión, esta reunión duraría todo un fin de semana: viernes, sábado y domingo.

El viernes, Matilde había comprado dos autitos (los voy a llamar A y B porque sus marcas son irrelevantes). Lo curioso es que Matilde no necesitaba *esos dos autitos en particular*, sino que los quería conseguir para después revenderlos y aprovechar para canjearlos por los que sí le interesaban específicamente. Pero otra compradora se adelantó y no pudo concretar lo que tenía pensado. Y hasta aquí llegué para poder compartir con usted lo que pasó en términos de las transacciones.

Matilde decidió entonces vender el sábado los autitos que había comprado el viernes. Los vendió a 600 pesos cada uno, sabiendo que con uno de los autos había perdido un 20% de lo que había pagado el viernes, pero con el otro había hecho una ganancia del 20% respecto de lo que había pagado el día anterior.

Pregunta: cuando terminó todas las operaciones, ¿Matilde terminó ganando o perdiendo dinero? Y en cualquier caso, ¿cuánto dinero perdió o ganó?

Ahora le toca a usted.

Solución

De acuerdo con los datos que provee el problema, Matilde vendió los dos autitos por 600 pesos cada uno.

- a) Si con uno perdió el 20% y consiguió 600 pesos ese sábado, eso significa que tuvo que haberlo pagado 750 pesos el

viernes. ¿Por qué? Para llegar a los 600 pesos que recibió el sábado con una pérdida del 20%, la única manera de llegar a 600 es si ella partió de pagarlo 750, ya que el 20% de 750 es 150. Luego, al restar 150 de los 750, se llega a los 600 pesos que recibió Matilde por ese autito particular.

- b) ¿Qué tuvo que haber pasado con el *otro* autito? ¿Cuánto tuvo que haberlo pagado el viernes de manera tal de haber ganado un 20% en la operación cuando recibió los 600 pesos el sábado? Si se detiene un instante a hacer el cálculo conmigo, verá que si lo pagó 500 pesos el sábado, y el 20% de 500 es 100, esto significa que Matilde recibió 600 pesos el sábado.

Moraleja

Matilde pagó 750 por uno de los autitos y 500 por el otro. Esto significa que el viernes, en total, invirtió 1250 pesos para comprarlos. Al día siguiente, recibió 1200 pesos porque le pagaron 600 pesos por cada uno.

En definitiva, en la suma total, entre sábado y domingo, Matilde terminó perdiendo 50 pesos.

¿Cómo contar hasta más de mil usando los diez dedos?

Parece raro, ¿no es así?

Cuando uno es un niño, aprende los primeros diez números usando los dedos de las dos manos. En todo caso, uno podría incluir el cero, algo un poco más sofisticado para una ‘personita’, pero aceptemos que la noción de *la nada misma* podría representarse con los dos puños cerrados.

Sin embargo, hay *otra* forma de contar que permite llegar hasta mucho más de mil, más precisamente hasta 1023. ¿Cómo? Sí, hasta 1023.

Para poder hacerlo, es necesario utilizar lo que se llama la *escritura binaria* de un número. ¡Un momento! Por favor: no se asuste con las palabras. Me explico.

Como decía, aprendemos a contar usando los diez dedos. Un poco más adelante, aprendemos los diez dígitos (que esta vez *sí* incluyen el número cero). Son, entonces, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

A partir de estos diez dígitos, somos capaces de construir *cualquier número*, no importa cuán grande sea. Justamente, cuando uno va al colegio, le enseñan lo que significan las unidades, las decenas, las centenas, las unidades de mil, las decenas de mil, etc. Ahora bien, ¿quiere refrescar eso conmigo acá?

Veamos algunos ejemplos. Suponga que ponemos los diez dígitos en una bolsa.

Si yo quisiera contar *ocho* objetos, no necesito más que meter la mano en la bolsa y sacar el número 8. Lo mismo si quiero contar *cuatro*: en ese caso, meto la mano en la misma bolsa y extraigo el número 4.

Pero si necesito contar 35, entonces ya no me alcanzan los diez dígitos. ¿Cómo hacemos? Lo que uno hace —aunque no se dé cuenta— es decir: el número 35 es una forma *abreviada* de escribir

$$(3 \text{ veces } 10) + 5$$

$$\text{O sea, } (3 \times 10) + 5$$

Naturalmente ¡nadie piensa en esto cuando piensa en el número 35!

De la misma forma, si usted escribe el número 974, no piensa en que esta es una forma *abreviada* de escribir:

$$974 = 9 \text{ veces } 100 + 7 \text{ veces } 10 + 4 = 9 \times 100 + 7 \times 10 + 4$$

Aunque no lo detectemos, es lo que estamos haciendo *todo el tiempo* cada vez que hablamos de números. Pero lo que me interesa entonces es convencerla/o de que, en realidad, uno *solamente necesita los 10 dígitos* y con ellos, ubicándolos en forma adecuada, es capaz de escribir cualquier número, independientemente de cuán grande sea.

Último ejemplo. Si yo escribiera el número 37.499.582, una vez más, este número es una *abreviatura* de

$$37.499.582 = 3 \times 10.000.000 + 7 \times 1.000.000 + 4 \times 100.000 + 9 \times 10.000 + 9 \times 1000 + 5 \times 100 + 8 \times 10 + 2$$

Los números que resalté son los que uno utiliza en la escritura del número 37.499.582, pero quiero también prestar atención a los *otros* números que aparecen en esa descomposición. ¿Cuáles son esos *otros* números y qué representan?

Fíjese que son, en el caso que nos ocupa, diez millones, un millón, cien mil, diez mil, mil, cien y diez. Si pone un instante de atención, verá que estos números son *potencias del número 10*.

Es decir: el último número (en este caso el 2), es uno de los diez dígitos, tal como sucedía en los ejemplos anteriores. Pero después aparecen, de derecha a izquierda:

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

$$10^4 = 10.000$$

$$10^5 = 100.000$$

$$10^6 = 1.000.000$$

$$10^7 = 10.000.000$$

O sea, para poder escribir el número 37.499.582, yo utilicé no solo los diez dígitos, sino que van apareciendo (de acuerdo con cuán grande sea el número) las diferentes potencias de diez.

El número 37.499.582, entonces, lo puedo reescribir así:

$$37.499.582 = 3 \times 10.000.000 + 7 \times 1.000.000 + 4 \times 100.000 + 9 \times 10.000 + 9 \times 1000 + 5 \times 100 + 8 \times 10 + 2 = 3 \times 10^7 + 7 \times 10^6 + 4 \times 10^5 + 9 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2$$

La pregunta que uno podría hacerse es: ¿qué pasaría si, en lugar de tener diez dígitos, tuviéramos *menos*? Claro, me imagino su respuesta con esta pregunta: “¿Y para qué querría yo preguntarme qué haríamos con *menos* dígitos si ya tenemos los diez?”. Y es muy posible que tenga una parte de razón. Pero al mismo tiempo, imagine que usted está con una computadora y le quiere enseñar a hacer cálculos. La computadora —aunque no lo parezca— no sabe *nada* de dígitos. En todo caso, uno podría decir que una máquina puede saber si entre dos puntos *pasa* la corriente... o no. Para graficarlo de otra manera, imagine que está manejando y está por pasar un tren. La barrera puede que esté cerrada o abierta. De acuerdo con esa ‘señal’, usted sabrá si puede (o no) cruzar.

¿Por qué todo esto? Porque usted debe haber escuchado múltiples veces que las computadoras *solamente usan ceros y unos*. De acuerdo, pero ¿de qué forma?⁴²

Justamente, como yo no puedo ‘dibujar’ números dentro de una computadora, lo que podría hacer es, en un determinado circuito, avisarle de alguna manera que, si yo le mando un impulso eléctrico, ¡lo deje pasar... o no! Podríamos hacer una convención: cada vez que el impulso *no* puede pasar, corresponde a un *cero*; pero cuando *sí* puede pasar, se corresponde con un *uno*.

Esto sería equivalente a tener *nada más que dos dígitos: ¡el cero y el uno!*

Muy bien. Pero esto sería muy pobre: ¿cómo podría funcionar el mundo si solamente estuvieran el número 0 y el número 1? ¿Qué haría yo si necesito indicarle a usted que me alcance *dos*

42. En el artículo “El error humano”, ya hice referencia a los *números binarios*. Permítase usar el texto que utilicé allí con este que figura acá. Aspiro a que entre los dos, tenga una idea un poco más clara de lo que son y cómo se usan.

objetos? O mejor dicho: ¿cómo hago para *escribir* el número 2? ¿Y el 3? ¿Y el 47?

Acá es donde le propongo que *peguemos un salto de calidad*. Vayamos juntos.

Fíjese qué le parece esta idea⁴³. Voy a escribir dos columnas. A la izquierda, aparecen los números como los usamos cotidianamente. A la derecha, va a aparecer *cómo escribir* ese mismo número pero solamente usando los dígitos que tenemos a disposición: el 0 y el 1.

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

43. ¡Por favor, no vaya a pensar que es una idea mía! Estoy simplemente reproduciendo lo que significa la escritura *binaria* de un número entero mayor o igual que cero.

Y acá paro. ¿Quiere *revisar* conmigo lo que hice? Miremos las dos columnas. A la izquierda no hay nada novedoso: son los números habituales. Lo interesante de la columna de la derecha es que le estoy ofreciendo una manera de denominar esos mismos números, pero solamente usando *ceros* y *unos*. Para los dos iniciales, el cero y el uno, no necesito ninguna representación porque se representan a sí mismos: el cero al cero y el uno al uno. Pero para el dos, ahora utilizo el número 10. O sea, *necesito utilizar dos lugares*. El tres lo escribo como 11, pero para el cuatro, ahora ya no me alcanza con utilizar esos mismos dos lugares: ¡necesito agregar un lugar más! Es por eso que para el cuatro utilizo el número 100. Esto me permite avanzar, como se ve en las dos columnas. Me alcanzan los tres lugares para llegar hasta el *siete*. Al número siete lo represento como 111, pero para el *ocho* me encuentro otra vez con el mismo problema: ¡no me alcanzan los tres lugares!

Como usted habrá advertido, tengo una forma de solucionar esta dificultad: agrego un lugar más. Al número *ocho* lo escribo como 1000. Como ve, estoy usando ahora *cuatro* lugares. Y así puedo avanzar hasta el 15, que escribo como 1111. Y para el 16, tengo que agregar un lugar más.

Y aquí paro, porque creo que usted ya se dio cuenta de lo que estoy haciendo.

Con los dos dígitos que tengo disponibles puedo escribir cualquier número, solo que será una escritura un *poco más larga*, pero inexorablemente, usando la misma idea, puedo escribir *cualquier número que usted me proponga*.

¿Cómo comparar esta situación con la anterior, cuando podíamos usar los diez dígitos? En ese caso, utilizábamos las *potencias de diez*. Ahora, voy a replicar lo que hacíamos antes, pero en lugar de hacerlo con las potencias de diez, voy a usar las *potencias de dos*. Mire lo que pasa.

Ahora, los números *solamente* pueden contener ceros y unos. Por ejemplo, ¿qué número de los que usamos habitualmente representa el número 101? Veamos:

$$a) 100 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 4 + 1 = \boxed{5}$$

$$b) 1111 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 8 + 4 + 2 + 1 = \boxed{15}$$

$$c) 10101010 = 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 = \\ = 128 + 32 + 8 + 2 = \boxed{170}$$

Es decir, utilizando *nada más* que *ceros y unos*, logramos escribir cualquier número.

Me imagino su pregunta y por eso me apuro a contestarla. Usted me/se debe estar preguntando: “¡Un momento! Todo bien, pero ¿cómo hago ‘al revés’?”.

¿Qué quiere decir ‘al revés’? Lo que hice hasta acá fue *ir para un solo lado*, o sea, dado un número cualquiera escrito en forma binaria, encontrar qué número representa entre los números que usamos habitualmente. Lo que me faltaría, es encontrar el camino inverso.

Por ejemplo, si usted me diera el número 19, ¿cómo encuentro la escritura *binaria*? ¿Quiere pensar usted? Verá que, si lo intenta, es *muy posible* que se le ocurra. Le propongo que empiece con números más chicos, no con el 19, pero lo decide usted.

Ahora, sígame con lo que voy a hacer. Es muy sencillo, pero es más difícil escribirlo que hacerlo. Tomemos el número 19. Trate-mos de encontrar (juntos) cuál es la *potencia de dos más grande* que ‘cabe’ dentro de 19.

En este momento me imagino su cara: ¿qué quiere decir la potencia de dos *más grande* que ‘cabe’ dentro de 19? Por ejemplo, dentro del número 19 *no cabe* el número 64, ni mucho menos

128... o sea, las potencias de dos más grandes que 32 no caben. En realidad, como usted advierte, *tampoco* cabe 32. En cambio, *sí* cabe 16. De hecho, 19 lo puedo escribir así:

$$19 = 16 + 3 \quad (*)$$

Esto es lo que me interesaba hacer en este paso: encontrar cuál es la *mayor potencia de dos que 'cabe' dentro del número 19*. Y la encontramos: es 16.

En el segundo paso, me voy a ocupar del número que 'sobró': *el 3*. Y hago otra vez lo mismo: ¿cuál es la máxima potencia de dos que 'cabe' dentro del número 3? Y usted conoce la respuesta: 2.

Entonces, puedo escribir al número 3 así:

$$3 = 2 + 1 \quad (**)$$

Al llegar a 1, ya no puedo seguir porque *no hay ninguna potencia de dos que quepa*. ¿Y ahora?

Lo que voy a hacer es *juntar* los resultados que aparecen en (*) y (**).

Aparece la siguiente igualdad:

$$19 = 16 + 3 = 16 + 2 + 1$$

Y aquí me quiero detener. Fíjese que entonces, hemos escrito el número 19 como potencias del número 2:

$$19 = 2^4 + 2 + 1$$

Es decir:

$$19 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

¿Qué indica esto? Esta última escritura es la que provee la forma *binaria* de escribir el número 19:

10011

Verifiquemos que hicimos bien las cuentas:

$$10011 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 16 + 2 + 1 = 19$$

¡Que es lo que queríamos encontrar!

Por supuesto, esto ha sido solamente un ejemplo. Hagamos uno más.

Tomemos el número 575. ¿Cuál es la *máxima* potencia de dos que ‘cabe’ dentro de 575? (le pido que me acompañe con las cuentas y que verifique que lo que estoy escribiendo es correcto). La respuesta es: 512, ya que $512 = 2^9$. Escribimos:

$$575 = 512 + 63$$

¿Y ahora? Una vez más, la potencia de dos más grande que ‘cabe’ en 63 es 32, ya que 64 es un ‘poquito’ más grande. Entonces:

$$575 = 512 + 32 + 31$$

Voy más rápido.

$$575 = 512 + 32 + 16 + 15$$

$$575 = 512 + 32 + 16 + 8 + 7$$

$$575 = 512 + 32 + 16 + 8 + 4 + 3$$

$$575 = 512 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

En este punto paramos. ¿Por qué? Ya no hay ninguna potencia de dos que *quepa* en 1 y, por otro lado, si usted se fija, hemos logrado escribir el número 575 como *suma de algunas potencias de dos*, que era exactamente lo que buscábamos.

$$575 = 2^9 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1$$

Desde acá es *fácil* deducir la escritura binaria:

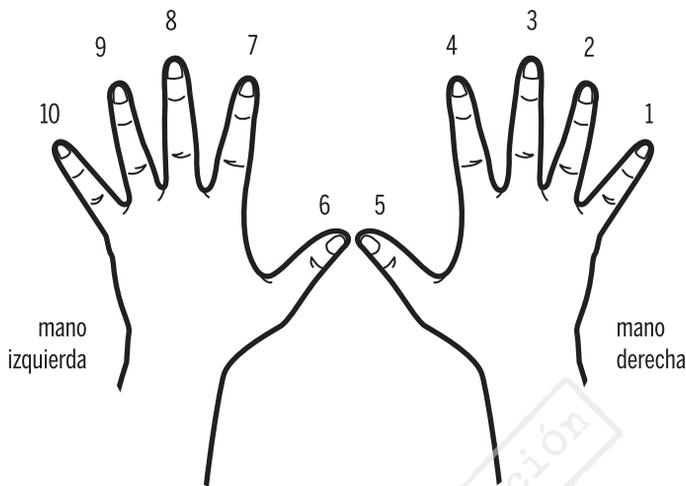
1000111111

Ahora le propongo que sea usted quien se provea de problemas. No hace falta que los busque en ningún lado: ofrézcaselos usted mismo. Por ejemplo: ¿cuál será la escritura binaria del número 128? ¿Y 129? ¿Y 517?⁴⁴

Entonces, ¿cómo contestar la pregunta original? ¿Cómo se podrá contar usando los diez dedos y llegar hasta *más* de mil? ¿Quiere pensar usted?

Voy a ‘numerar’ los dedos de las dos manos. Ponga sus dos manos de manera tal que sus palmas queden mirando hacia fuera, o sea, como si se las estuviera mostrando a otra persona.

44. Para que pueda confrontar las respuestas que obtuvo: 128 se escribe 10000000, 129 se escribe como 10000001 y $517 = 100000101$.



Voy numerar los dedos de esta forma:

- El meñique de la mano derecha será el número 1.
- El anular de la mano derecha será el número 2.
- El del medio de la mano derecha será el número 3.
- El dedo índice de la mano derecha será el número 4.
- El pulgar de la mano derecha será el número 5.
- El pulgar de la mano izquierda será el número 6.
- El índice de la mano izquierda será el número 7.
- El del medio de la mano izquierda será el número 8.
- El anular de la mano izquierda será el número 9.
- El meñique de la mano izquierda será el número 10.

Una breve nota. Es posible que la palabra ‘número’ en este contexto lleve a una confusión. Me explico. Una persona podría creer, por ejemplo, que cuando digo “el *dedo índice de la mano izquierda* será el número 7”, es porque pienso en *representar* al número 7 con ese dedo particular. En realidad, eso *no es lo que*

tengo en mente, sino que imagino ese dedo como una *posición* en la distribución de los dedos de una mano.

Supongamos que usted y yo estamos juntos en una misma habitación, pero no nos podemos hablar; solo podemos hacernos señas con las dos manos. Queremos establecer una convención para que usted pueda contar desde *cero* en adelante. Veremos hasta dónde podemos llegar.

Empezamos con los dos puños cerrados (que sería el número cero). ¿Cómo haría para indicarme el número *uno*?

Fíjese que podría abrir la mano derecha mostrándome *nada más* que el dedo meñique. Eso indicará al número 1.

¿Cómo haría para indicarme el dos? Cierre los dos puños y muéstreme nada más que el dedo anular. Esto indicará el equivalente en binario del número 10 (que es el 2). El 1 me lo marca con el anular y el cero lo marca porque el meñique lo tiene apretado contra la palma.

¿Y el 3? Para eso, tiene que mostrarme dos dedos: el anular y el meñique de la mano derecha. Esto corresponderá con el 11 (que en binario es el número 3).

Para el 4, debería solamente mostrarme el dedo del medio de la mano derecha (sí, ya sé, perdón). Esto correspondería con el número 100 (que es el 4). Los ceros están representados por los dedos anular y meñique de la mano derecha que permanecen cerrados.

¿Qué número me estaría indicando usted si me mostrara los cinco dedos de la mano derecha y el pulgar de la mano izquierda?

En ese caso, sería el número 111111. ¿Qué número *representa* 111111? Representa:

$$111111 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = \boxed{63}$$

De esta forma, usted me estaría indicando el número **63**.

Última observación: ¿qué número indica tener las dos manos abiertas, es decir, exhibiendo los diez dígitos? Se corresponde con el número 1111111111. Haga la cuenta y verá que es como si usted me estuviera señalando el número **1023**.

Moraleja

De esta forma, con esta convención, uno puede *contar* desde *cero* hasta *1023*, lo que en principio parecía imposible. Notable, ¿no es así?

Prohibida su reproducción

Teselados y embaldosados

Corría el año 2007. Estábamos en plena producción de un programa televisivo exclusivamente dedicado a la matemática (*Alterados por Pi*), que estuvo en el aire en el canal Encuentro durante diez años. A lo largo de esa década hubo muchísima gente que cooperó con sus ideas. Los equipos fueron cambiando y eso fue muy refrescante porque cada uno que llegaba aportaba ideas desde un lugar muy diferente que los anteriores, y tenía la libertad de proponer 'lo que quisiera'. La idea de hacer el programa fue de Tristán Bauer, quien en ese momento era el director del canal. Nos había llamado un día a una reunión, a la que concurrimos con Claudio Martínez (en la calle Saavedra, muy cerca de Plaza Once o Plaza Miserere). Yo no lo conocía a Tristán pero aún hoy recuerdo que estábamos con Claudio sentados en una sala muy austera, que tenía nada más que una mesa, algunas sillas y creo que nada más, mucho sol que entraba por un par de ventanas, y súbitamente se abrió la puerta, irrumpió Tristán con su enorme porte y sin siquiera saludarnos nos dijo: "¡Quiero hacer 'este' libro por televisión!".

Me explico. Mientras hacía ese comentario tenía en la mano derecha el primer libro de la saga, *Matemática... ¿estás ahí?* Movía el libro hacia arriba y hacia abajo, como si estuviera por bajar el martillo en un remate. Lo decía muy convencido y en forma muy contundente.

Así nació la idea que después se concretó y que llevó la matemática a diferentes lugares de la Argentina, y que es uno de los mayores orgullos de mi vida profesional... por lejos.

Esta introducción la hago porque quiero presentar aquí uno de los *informes* que produjeron para un segmento del programa los dos 'Pablos': Milrud y Coll. He hablado de ellos reiteradamente en algunos otros libros/artículos, pero en esta oportunidad quiero referirme a un tema que siempre fue uno de los predilectos de ellos: ¡los *teselados*!

¿Qué son los teselados? Suponga que usted tiene que *embaldosar* un piso, y lo quiere hacer cubriéndolo con repeticiones de la misma baldosa, o con un conjunto de baldosas. Las que uno ve con más frecuencia son cuadradas o rectangulares y son claramente visibles en los baños y/o cocinas de todo el mundo. De hecho, es la forma más simple (y famosa) de 'hacer un teselado', tal como se ve en la Figura 1.

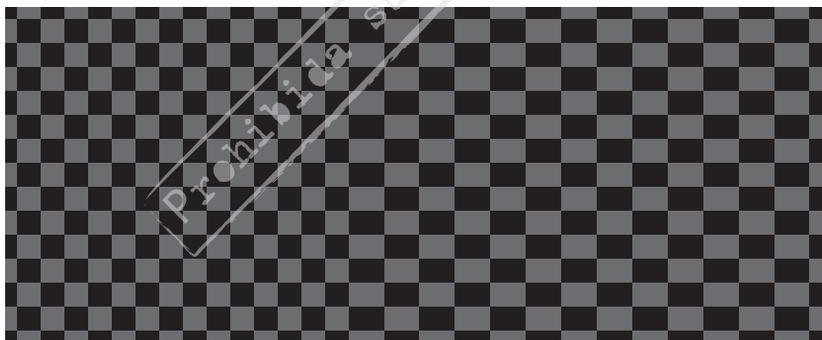


Figura 1

Cuando uno tiene baldosas *cuadradas*, que cumplen tres condiciones cuando uno las usa para *embaldosar*:

- 1) Se pueden acomodar en cualquier lugar *plano* sin dejar huecos entre sí.
- 2) No se superponen superponerse unas con otras.
- 3) Permiten extender el acomodamiento para cubrir espacios planos tan grandes como uno necesite.

Además de este tipo de baldosas cuadradas, están las baldosas rectangulares que aparecen frecuentemente cuando uno —por ejemplo— construye una pared de ladrillos o en *ventanales*, como se ve en la Figura 2.

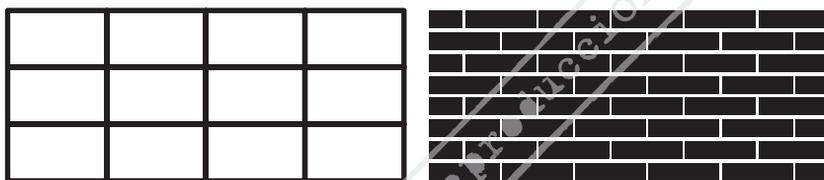


Figura 2

Naturalmente, hay muchísimas otras formas de embaldosar. Uno puede cubrir un piso usando círculos, triángulos equiláteros, trapecios, pentágonos o hexágonos regulares.

Quiero pensar junto a usted algunos casos particulares. Por ejemplo, ¿qué pasaría si uno toma múltiples copias de...?:

1) *Círculos*. En este caso, la respuesta es que no se va a poder. Al menos, no si uno pretende que no queden lugares vacíos entre ellos.

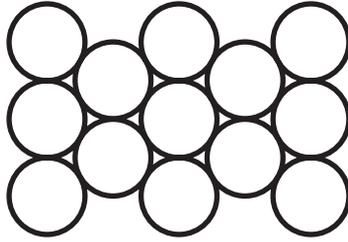


Figura 3

2) *Triángulos equiláteros*. En este caso, *sí* se pueden obtener buenos embaldosados. El diseño es bastante claro, ¿no es así?

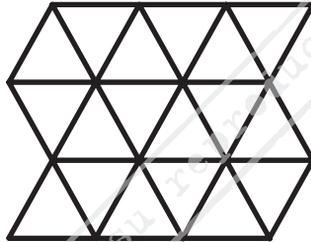


Figura 4

3) *Trapecios*. Aquí es menos evidente. Fíjese en esta secuencia:



Figura 5

Así puesto parece que no vamos a poder avanzar, pero si ubico un segundo trapecio en forma diferente, como se ve acá:



Figura 6

En este caso, dos trapezios idénticos ubicados como hice en la Figura 6 forman un paralelogramo, y los paralelogramos son fáciles de acomodar para cubrir una superficie (como se ve en la Figura 7).

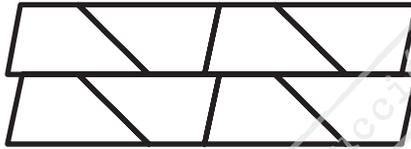


Figura 7

4) En general, *cualquier cuadrilátero* sirve para embaldosar, aun estos que aparecen en la Figura 8 que son verdaderamente extraños. Pero estoy seguro de que usted puede encontrar alguna *forma* de presentarlos de manera tal de cubrir una superficie cualquiera. Fíjese en este caso:



Figura 8

5) Otra *forma* geométrica que uno está muy acostumbrado a ver son las que producen los *hexágonos regulares*. Aparecen en muchísimos lugares de la vida cotidiana, pero muy en particular en los panales de abeja:

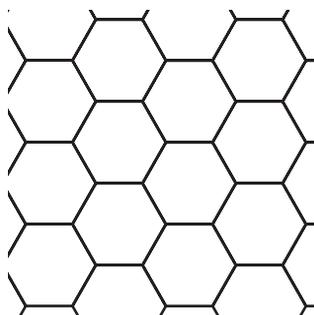


Figura 9

6) Por otro lado, si usted tuvo oportunidad de visitar el Planetario Galileo Galilei que está ubicado en los bosques de Palermo, en la Capital Federal de la República Argentina, habrá visto un ejemplo del teselado *triangular*.

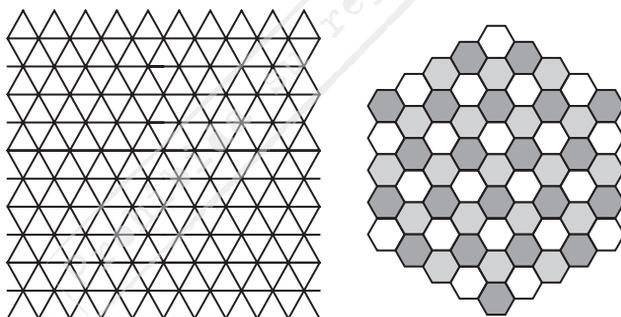


Figura 10

7) Los embaldosados que aparecen en algunas figuras que usé en los puntos anteriores están contruidos con polígonos regulares, ya sea triángulos, cuadrados o hexágonos, pero uno puede usar una combinación de dos o más polígonos regulares como se ve en la Figura 11. Se llaman *teselados semirregulares*.

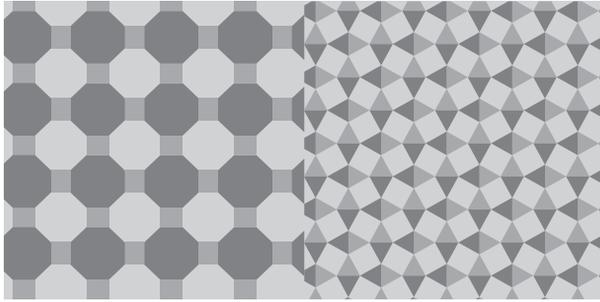


Figura 11

Quiero proponerle que haga lo siguiente: tome un papel y haga un dibujo de un teselado cualquiera. Marque en cada ‘baldosa’⁴⁵ el punto medio.

Ahora, trace un segmento que una cada punto con los puntos marcados en cada una de las baldosas ‘vecinas’. Tómese su tiempo, pero no deje de hacerlo.

¿Qué pasó? Si usted *quitara* el teselado original, el que usted había dibujado originalmente, verá que ahora quedó *un nuevo embaldosado*.

Este nuevo teselado se llama *teselado dual* del original. Es decir, todo teselado da origen a un ‘dual’. Muchas veces, el dual de un embaldosado genera el mismo tipo de teselado, con lo cual uno no construye nada nuevo. Pero hay veces que eso no es así, y el dual y el original son diferentes.

45. Uso la palabra *baldosa* para indicar alguno de los dibujos que hice antes.

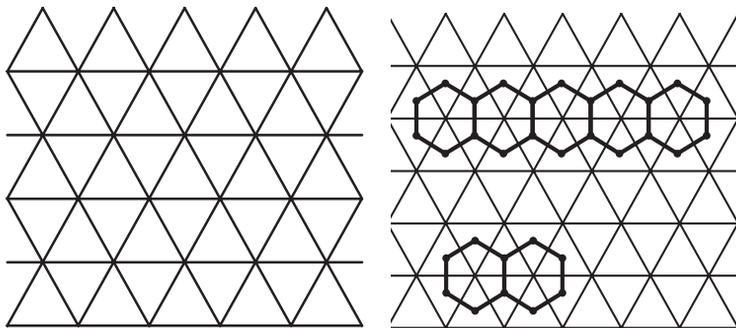


Figura 12

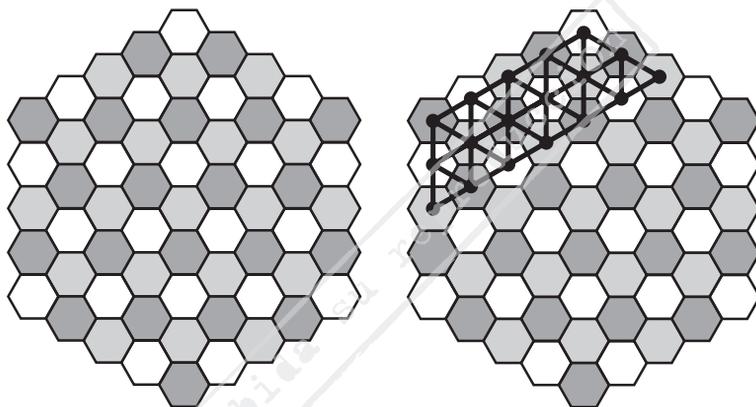


Figura 13

Las Figuras 12 y 13 proveen dos ejemplos que parecen distintos pero son esencialmente el mismo. Cada uno es 'dual' del otro. Si usted hubiera empezado con un embaledado con cuadrados y dibujara el dual, verá que no hay diferencias (esenciales) entre uno y otro.

Una pregunta natural es: ¿y qué pasa con el 'dual del dual'? ¿Se vuelve al original? Las Figuras 4 y 5 parecen apuntar en una dirección: el dual del dual reproduce el original. Pero ¿será *siempre* así? ¿O habrá casos en los que el *dual* del *dual* da lugar a un *tercer* teselado, diferente de los dos anteriores?

Antes de avanzar un poquito más, quiero hacer una observación respecto de los pentágonos (regulares) que hasta aquí omití cuidadosamente. De hecho, los pentágonos se parecen mucho a los hexágonos. ¿Qué pasa con ellos?

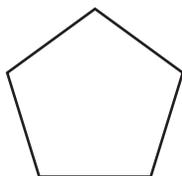


Figura 14

Ni bien uno quiere empezar a acomodarlos, se tropieza con un problema insoluble: aparecen *huecos* que son imposibles de evitar. Mire:

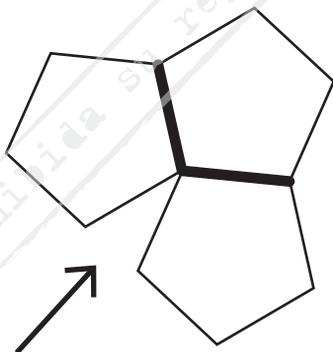


Figura 15

Lo interesante es que uno debería *esperar* que los pentágonos no funcionen (Aquí es donde usted debería estar dando un *salto* como preguntándome: “¿Cómo dijo?”).

Es que sí, si uno mira todo lo que fuimos construyendo hasta acá, es posible que haya desarrollado una suerte de ‘intuición’

que serviría para mostrar que con los pentágonos *¡no se va a poder!*

Volvamos por un instante a los triángulos equiláteros. Cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero mide 60° , es decir, 60 grados⁴⁶. Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180° , si el triángulo es equilátero, no solo tiene los tres lados iguales sino que los tres ángulos internos *también* son iguales. Luego, cada uno de ellos *tiene* que medir 60 grados. Pero lo más interesante de este hecho, es que el número 360 es un múltiplo de 60. Por lo tanto, 60° entra exactamente seis veces en 360° , que es una *vuelta completa*, y entonces, las esquinas de seis triángulos equiláteros pueden cubrir bien los 360° , sin que sobre ni falte nada.

Con los cuadrados sucede algo parecido, ya que cada uno de los ángulos de un cuadrado mide 90° , y entonces los 90° de sus esquinas entran cuatro veces en una vuelta de 360° . Por último, fíjese que los hexágonos *también* cumplen con lo mismo, ya que cada uno de sus ángulos mide 120° y, por lo tanto, tres de esos ángulos (de 120°) cubren una vuelta de 360° .

Y aquí es donde aparece el problema con los pentágonos, aunque sean pentágonos regulares y sus ángulos sean todos iguales — todos miden 108° —, y 108 entre tres veces y *un ‘poquito’* en 360. De hecho, $108 \cdot 3 = 324$.

Justamente por esta razón los triángulos equiláteros, cuadrados, hexágonos regulares y octógonos son los *únicos polígonos regulares con los que se puede embaldosar una superficie plana!*

46. En este caso voy a usar este hecho y le sugiero que lo busque y lo revise en cualquier libro de geometría. O que lo piense usted, ¿por qué no? El resultado que quiero usar dice: “La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados”. Es un resultado más general, que se aplica a figuras que no sean necesariamente triángulos, pero a los efectos de lo que quiero hacer, alcanza con esta versión.

Para concluir...

Aparecen entonces múltiples preguntas que me sería imposible incluir acá, pero intuyo que es usted quien decidirá cuáles se le fueron ocurriendo. Todo esto fue nada más que una *introducción* al tema, pero usted es quien lidera cómo avanzar o terminar aquí.

¿Sabe quién fue un *maestro* en el arte de embaldosar? Escher. Sí, Escher. Uno de los más grandes artistas del siglo XX, uno de los verdaderos genios que produjo Holanda, no tuvo reconocimiento a su tarea hasta que ya había cumplido 70 años.

El tema de los teselados ha aportado muchísima literatura a la matemática. Como escribí antes, si le interesa el tema, basta con que ponga en el *buscador* que utiliza habitualmente: “teselados” o “embaldosados” y se verá inundado de información. ¡Ojalá que lo pueda disfrutar!⁴⁷

47. Quedan muchas preguntas pendientes de respuesta, pero entre otras, Carlos D’Andrea me sugiere que deje una para quienes están leyendo el libro: ¿será verdad que el *dual del dual* de un teselado recupera el teselado original? ¿Es fácil o difícil de demostrar esto? (si es que fuera cierto). Y si no es cierto, ¿es fácil construir algún ejemplo? Lo que sería interesante también es tener algún lugar en donde se pueda concentrar la información de todos los aportes que se siguen haciendo sobre el tema.

¿Cuántas bolitas hacen falta?

Le quiero hacer una propuesta. Se trata de *idear* un problema (juntos). Funciona así.

Supongamos que tengo conmigo una caja. La apoyo arriba de una mesa. Si bien usted no puede ver el interior de la caja, yo le digo que adentro hay *bolitas*.

Le pido que *sin mirar* meta la mano en la caja, extraiga *cinco* y las ponga arriba de la mesa. Usted lo hace, y resulta que las cinco son negras.

Como yo no digo nada durante unos instantes, su cara parece preguntarme: “¿Y? Lo hice. Saqué cinco bolitas como usted me pidió y las cinco fueron negras. ¿Qué tiene de raro?”.

Yo lo miro y le digo: “Había 50% de posibilidades de que sucediera eso, de que fueran las cinco negras”.

Ahora, pregunta: ¿cuál es el número mínimo de bolitas que tiene que haber en la caja y cuántas de ellas tienen que ser negras para que yo pueda afirmar que la probabilidad de que usted hubiera extraído cinco negras era $\frac{1}{2}$, o lo que es lo mismo, que había un 50% de posibilidades de que las cinco fueran negras?

La/lo voy a dejar en soledad con sus pensamientos y reflexiones. Nos encontramos luego.

Lo que sigue ahora es una forma de abordar el problema.

Cuando uno tiene que entender un problema, o está tratando de resolverlo, suele ser útil empezar con un caso más sencillo, con *menos* posibilidades para analizar. La idea es ver si esas ideas son extrapolables al caso que nos interesa (en este caso, cuando uno tiene que extraer cinco bolitas).

Por ejemplo, supongamos que yo le dijera que extraiga *dos* bolitas. Usted lo hace y saca dos negras. Una vez más, yo le digo que la probabilidad de sacar dos negras es $\frac{1}{2}$, o sea, hay un 50% de posibilidades de que eso suceda. ¿Cuál es el número *mínimo* de bolitas que tiene que haber dentro de la caja, y cuántas *negras* debería haber? ¿Quiere pensar usted por un instante? (Yo no me voy a ningún lado, espero por aquí).

Hay dos problemas distintos:

- a) La cantidad de bolitas que —como mínimo— tiene que haber dentro de la caja.
- b) El color de las bolitas que están adentro.

a) ¿Puede haber *nada más que dos bolitas negras adentro*? La respuesta es que *no*. ¿Por qué? Si hubiera exactamente dos bolitas, si usted saca dos bolitas cualesquiera, inexorablemente tendrán que ser las dos negras. En ese caso, las chances de que sean las dos negras es de un 100% y esto contradice lo que yo afirmé (que había un 50% de chances). Moraleja 1: en la caja *tiene* que haber *más* de dos bolitas.

b) Por otro lado, ¿podrá haber *únicamente bolitas negras*? Fíjese que si hubiera solamente bolitas negras, no importa cuántas, si yo le digo que saque dos, *seguro* que las dos van a ser negras. Luego, hay un 100% de chances de que las dos sean negras. Moraleja 2: en la caja *seguro* que hay bolitas que no son negras.

Con esta información, ¿qué hacer?

Sabemos que tiene que haber *más* de dos, y que *tiene* que haber una bolita de *algún otro color* (digamos gris).

En la caja tiene que haber dos bolitas negras, por lo que si agrego una tercera bolita seguro que esta *no debe ser negra*, por lo que voy a probar así: N1, N2 y G (en donde escribo N1 y N2 para distinguir las dos negras).

¿Qué puede pasar ahora? ¿Cuáles son *todos* los casos posibles?

- a) Sacar N1-N2
- b) Sacar N1-G
- c) Sacar N2-G

¿Qué pasó entonces? Si se fija, hay tres casos posibles, y en *solamente uno* de ellos las dos bolitas son negras (N1 y N2). Pero entonces yo no podría afirmar que las chances eran 50 y 50, porque hay *un solo caso favorable* y *tres casos posibles*. La probabilidad es $1/3$ en este caso.

Como consecuencia, en la caja *tiene* que haber *más* de tres bolitas. Tendremos que mirar lo que sucede con *cuatro*. ¿Cómo distribuir los colores?

Seguro que de las cuatro bolitas, al menos dos deben ser negras (si no, sería imposible que al meter la mano usted haya podido extraer dos de ese color). Hay que decidir, de las dos que quedan, ¿cuántas deberán ser negras?

No pueden ser *todas* negras. Eso ya lo sabemos porque, si lo fueran, las chances de sacar dos negras serían de un 100%.

En consecuencia, solamente nos queda probar con una y una. En total tendríamos tres negras (N1, N2, N3) y una gris (G).

¿De cuántas formas se pueden extraer dos negras? Si descubrimos que la mitad de los casos corresponden a dos negras, listo. Veamos:

- 1) N1-N2
- 2) N1-N3
- 3) N2-N3
- 4) N1-G
- 5) N2-G
- 6) N3-G

¡Perfecto! Hemos descubierto entonces que si uno va a poner bolitas en una caja de zapatos y quiere asegurarse de que la probabilidad de extraer dos negras sea de $\frac{1}{2}$ (o 50% de las veces), dentro de la caja tiene que haber *como mínimo* cuatro bolitas, y deben ser *tres* negras y *una* gris.

Después de este análisis, ¿no le dan ganas de analizar cuántas bolitas tendría que haber adentro para que haya la mitad de posibilidades de sacar *cinco* negras?

¿Qué sugiere el caso de las dos bolitas negras? Indica(ría) que lo que uno podría hacer es poner *diez* bolitas dentro de la caja, y *solamente una* de color gris. ¿Servirá?

La respuesta es *sí*. Puede verificarlo usted escribiendo *todos los posibles casos*.

Pero antes de hacerlo le propongo que pensemos juntos lo siguiente. Hagamos así: pongamos nueve negras y una gris. Divídalas en dos grupos de cinco bolitas cada uno. Uno solo de los dos grupos contiene la bolita gris. ¿Qué quiere decir esto? *Que cada vez que usted separa cinco negras en un grupo, del otro lado, hay cuatro negras y una gris*. Cada vez que usted ‘fabrica’ un grupo de cinco negras, deja de lado ‘otro’ grupo que contiene la bolita gris. Por lo tanto, hay tantos grupos que contienen todas bolitas negras como grupos que contengan la bolita gris.

Moraleja: en la caja *tiene* que haber diez bolitas (si uno busca el mínimo, tal como pide el problema). De ellas, nueve tienen

que ser negras y una sola, gris. De esa forma usted se garantiza que si mete la mano en la caja y saca cinco bolitas al azar, hay tantas chances de que sean las cinco negras como que no. ¡Y listo!

Nota

Para terminar, quiero escribir todos los casos posibles. En lugar de llamar N1, N2, N3, N4, N5, N6, N7, N8 y N9 a las nueve bolitas negras, voy a usar nada más que el número que las identifica. En cambio, a la bolita gris la voy a llamar con la letra G.

Estos son todos los grupos posibles de 5 bolitas negras que se pueden formar:

12345	12346	12347	12348	12349	12356	12357	12358	12359	12367	12368	12369	12378
12379	12389	12456	12457	12458	12459	12467	12468	12469	12478	12479	12489	12567
12568	12569	12578	12579	12589	12678	12679	12689	12789	13456	13457	13458	13459
13467	13468	13469	13478	13479	13489	13567	13568	13569	13578	13579	13589	13678
13679	13689	13789	14567	14568	14569	14578	14579	14589	14678	14679	14689	14789
15678	15679	15689	15789	16789	23456	23457	23458	23459	23467	23468	23469	23478
23479	23489	23567	23568	23569	23578	23579	23589	23678	23679	23689	23789	24567
24568	24569	24578	24579	24589	24678	24679	24689	24789	25678	25679	25689	25789
26789	34567	34568	34569	34578	34579	34589	34678	34679	34689	34789	35678	35679
35689	35789	36789	45678	45679	45689	45789	46789	56789				

Figura 1

Si los cuenta⁴⁸, verá que son 126, que se corresponde con el número combinatorio $\binom{9}{5}$.

$$\binom{9}{5}$$

Figura 2

Tome un grupo cualquiera de las bolitas que aparece en la Figura 1, por ejemplo, el 12345. Esto quiere decir que *las bolitas que no fueron elegidas son: 6789G*, en donde, como antes, llamo G a la única bolita gris. Como usted advierte cada grupo de cinco bolitas elegido deja *sin elegir* cuatro bolitas negras y la única gris. Por lo tanto, hay *tantos grupos de cinco bolitas negras, como grupos de cuatro bolitas negras y una gris*. Es por eso que pude afirmar que si uno mete la mano en la caja y extrae cinco bolitas, hay la misma cantidad de posibilidades de sacar cinco negras como de sacar cuatro negras y una gris. ¡Y esto termina la demostración!⁴⁹

48. El número total de combinaciones es 126, que se obtiene como ‘el número combinatorio’ $\binom{9}{5}$ (*puesto en forma vertical*) = $9! / (5! \times 4!) = (9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) / [(5 \times 4 \times 3 \times 2) \times (4 \times 3 \times 2)]$.

49. Ni bien leyó el texto, Carlos D’Andrea, resolvió el caso general (y le propongo que usted, si le resultó atractivo el tema, lo intente también): “¿Cuántas bolitas negras N y cuántas bolitas grises G puedo tener para que la probabilidad de extraer *m* bolitas negras de una bolsa con las N + G bolitas sea exactamente de $\frac{1}{2}$?”. Y si todavía sigue interesada/o en el problema, Juan Sabia agregó: “Usando WolframAlpha, y creyéndole, la solución es única (no hace falta pedir que sea el número mínimo de bolitas), pero claro, es una curiosidad. No sé cómo demostrarlo fácil, porque en el fondo, tenés un polinomio de grado 5 en dos variables y las únicas soluciones naturales son 9 y 10...”.

Una bella curiosidad aritmética

Por favor, le pido que haga los siguientes cálculos:

$$10^2$$

$$11^2$$

$$12^2$$

$$13^2$$

$$14^2$$

Compruebe conmigo que los números que encontró son:

$$10^2 = 100$$

$$11^2 = 121$$

$$12^2 = 144$$

$$13^2 = 169$$

$$14^2 = 196$$

Así, a simple vista, no pareciera que sugirieran nada, ¿no?
Sin embargo, sume los *tres* primeros:

$$100 + 121 + 144$$

Ahora, sume los *dos* últimos:

$$169 + 196$$

Lo *notable* es que ¡dan lo mismo! Es decir, el resultado es 365. Por lo tanto, *hemos descubierto* que

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

No solo eso, sino que son iguales a 365, que es el número de días que tiene un año. Claro, es *pura casualidad*, pero no deja de ser muy bonito, ¿no le parece?⁵⁰

Prohibida su reproducción

50. Juan Sabia agregó: “También son únicos: si $a^2 + (a + 1)^2 + (a + 2)^2 = (a + 3)^2 + (a + 4)^2$, entonces $a = 10$ ó $a = -2$ ”.

Problema brevísimo

Supongamos que usted y yo tenemos *muchas* monedas. Las estamos sosteniendo con las dos manos. No sabemos cuántas son, pero cada uno tiene por lo menos diez monedas. Más aún: hay una tercera persona que fue quien distribuyó las monedas, que nos dice que los dos *tenemos el mismo número de monedas*. Es decir: se ocupó de darnos la misma cantidad a cada uno.

Pregunta: ¿cuántas monedas tendría que darle yo de manera tal que cuando termine de transferírselas, usted ahora tenga *diez* monedas más que yo?

Tómese un minuto para contestar. No se apure. En principio, la experiencia que yo tuve con *casi* todas las persona a las que les planteé este problema (que como se ve es muy sencillo), decía, mi experiencia es que *casi* todos obtienen una respuesta equivocada... ¡*la primera vez!*

Dicho esto, sigo a continuación. Este *espacio* es todo suyo.

Respuesta

La primera reacción de ‘casi’ todos es decir que yo tengo que darle *diez* de mis monedas, pero esa respuesta es inadecuada. ¿Por qué? Es cierto que usted pasará a tener diez monedas más

de las que tenía, pero yo pasaría a tener *diez menos*. Por lo tanto, la diferencia entre el número de monedas que tendría usted y las que me quedé yo sería *veinte*.

¿Qué indica esto? Que tenemos que tener en cuenta que cada vez que yo le entrego una moneda, usted se agrega una, yo disminuyo una, pero la diferencia entre nosotros ahora es de dos monedas. Dicho esto: ¿cuál es la respuesta correcta?

Sí, la que usted acaba de advertir: yo le tengo que dar *cinco*. Eso es lo que tengo que hacer: usted tendrá cinco más y yo tendré cinco menos. La diferencia entre los dos será de diez monedas, como queríamos.

Prohibida su reproducción

El juego de Gale

Hay un juego que —creo— hemos jugado todos cuando éramos niños, o no tanto. Escribo las reglas para refrescar su memoria.

Suponga que hay 16 puntos distribuidos de manera *uniforme* (dejando la misma distancia entre ellos), pero con el cuidado de que estos puntos formen un cuadrado de 4×4 , como se ve en la Figura 1.

En realidad, no hace falta que sean 16 los puntos: podrían ser 4, 25, 36, o el *cuadrado* de cualquier número natural. El de la Figura 1 es de 16 puntos, porque $16 = 4^2$, pero se podría jugar con $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $100 = 10^2$.

Juegan dos personas, digamos A y B. Uno de los dos empieza trazando un segmento (vertical u horizontal) que una dos puntos *adyacentes*. Es decir, los segmentos que se usarán en el juego son todos de la misma longitud: la distancia que une dos puntos contiguos (no se permiten *diagonales*).

Los jugadores se van alternando, y el objetivo es terminar de completar *cuadraditos*. Cuando uno lo logra, le pone *su inicial* (digamos A o B, para reconocer quién fue el autor cuando terminaron de jugar) pero la diferencia es que, en lugar de cederle el turno al otro participante, continúa jugando. Es decir, traza *otro*

segmento. Solo se detiene cuando o bien se terminó el juego (porque ya no hay más segmentos por trazar) o bien porque al dibujar el segmento no completó un cuadradito.

Al finalizar el juego, se cuentan el número de iniciales de cada uno, y quien puso su nombre más veces... gana. No puede haber empate (en el caso de 16 puntos) porque si usted observa la Figura 1, verá que en total hay 9 (nueve) cuadraditos en disputa⁵¹.

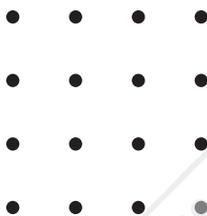


Figura 1

¿Por qué conté este juego acá? Porque quiero contar otro, que es una suerte de ‘primo hermano’ de este, tan fácil de jugar como el otro, muy atractivo y, sobre todo, muy *adictivo*. Esta es la historia subyacente y por qué se llama “El juego de Gale”.

Según cuenta Martin Gardner, David Gale era profesor asociado en el Departamento de Matemática, en la Universidad de Brown, ubicada en Providence, Rhode Island (Estados Unidos). Corría el año 1957. Un día, Gale le contó a Gardner sobre un *juego* que había diseñado. Todo lo que les hacía falta era un papel y dos lápices de diferentes colores, uno para cada participan-

51. En general, si uno tiene $(n + 1)^2$ puntos, quedan n^2 *cuadraditos*. Para que el número de cuadraditos sea *impar* y evitar empates, lo único que hay que hacer es verificar que $(n + 1)$ sea un número par, como en el caso descrito anteriormente: $16 = (n + 1)^2 = (3 + 1)^2$ y por eso hay $3^2 = 9$ cuadraditos.

te. Gardner le dijo que se tomaría el atrevimiento de llamarlo “El juego de Gale”⁵². Y así quedó⁵³.

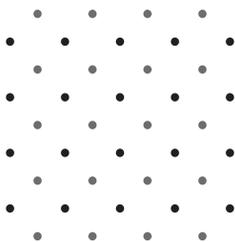


Figura 2

Como se ve, los puntos de la Figura 2 *no forman un cuadrado* como en el juego que describí al comienzo, sino que tienen una distribución distinta: cada fila contiene cinco puntos negros y cada columna contiene cinco puntos grises. Es decir, son dos rectángulos intercalados. Cada participante juega en *su* propio tablero.

Ahora bien, ¿cómo se juega?

Voy a llamar G y N a los dos participantes. Se sortea cuál de los dos empieza y, a partir de allí, se turnarán en las movidas.

Los llamé N y G porque, como es esperable, N usará el lápiz negro y solamente podrá unir dos puntos *adyacentes* de color negro. Lo mismo con G, pero uniendo dos puntos *adyacentes* de color gris.

52. El juego de Gale apareció por primera vez en la revista *Scientific American*, en un artículo firmado por Martin Gardner.

53. En realidad, en algún momento se intentó comercializar con el nombre Bridg-It, y aún hoy existe una *app* tanto para los teléfonos que produce Apple con su sistema operativo como para los celulares que utilizan Android, y que también se llama Bridg-It. Se puede bajar gratuitamente desde cualquiera de las dos plataformas.

¿Qué quiere decir que dos puntos sean *adyacentes*? Tome un punto de color negro. Este punto tiene cuatro puntos negros que lo rodean: uno arriba, uno abajo, uno a la derecha y uno a la izquierda. Esos son los cuatro adyacentes. Le contesto una pregunta *antes* que me la haga: sí, hay ciertos puntos que tienen *menos* de cuatro adyacentes, y son los que están en cada una de las ‘tapas’ (superior, inferior, izquierda, derecha). Algunos tienen tres, y los cuatro vértices tienen nada más que dos puntos adyacentes.

Cuando le toque el turno a N, esta/este unirá cualquier par de puntos negros adyacentes del tablero, pero con la *precaución* de no cruzar un segmento gris que su rival podría haber trazado antes. Y recíprocamente. Es decir: en ningún momento se cruzan segmentos.

¿Cuál es el objetivo del juego? El/la primer/a jugador/a que logre trazar una ruta que cruce de lado a lado (sea de izquierda a derecha para los negros que está uniendo N, o superior e inferior para los grises que está uniendo G) será el ganador.

Naturalmente, tal como sucede en el juego que describí primero, cada participante elabora su propia estrategia, tratando no solo de conseguir el trazado de la ruta que se le pide, sino que, mientras lo logra, intenta bloquear al otro jugador. La Figura 3 muestra el *final* de un partido en donde el ganador es el participante G (fíjese que queda formada una ruta *gris* que va desde arriba hacia abajo que no cruza ningún segmento que una dos puntos negros).

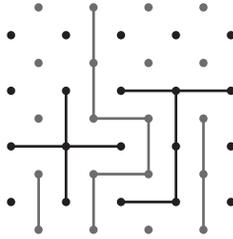


Figura 3

Lo interesante es que el juego *no puede terminar en un empate*. ¿Por qué? ¿Quiere pensar usted?

¿Qué debería suceder para que el juego termine en un empate? Tendría que ocurrir que uno de los dos participantes *no pueda jugar más* y la *única forma* que esto pase es si tiene bloqueados *todos* sus caminos. Para que eso suceda su contrincante debe haber logrado unir las dos *orillas* (o la superior con la inferior, o la izquierda con la derecha). Pero si eso sucedió, el otro jugador ganó la partida. Y listo. Eso muestra que no puede haber *empate*.

Nota 1

Es difícil explicar un juego *cualquiera* en donde el objetivo es tratar de elaborar una estrategia para poder ganar. Hay una *única* manera de aprender y —como siempre— consiste en... ¡jugar! Si me permite, le propongo que juegue e intente construir su propia ruta, que irá cambiando y dependerá de lo que haga su rival. Verá cuáles son las dificultades con las que se encuentra, y después de haber intentado (y perdido, como me fue pasando a mí), empezará a comprender cuáles son los caminos que *debió* (o *no debió*) utilizar.

Ahora, le toca a usted.

Nota 2

Quiero agregar la posición inicial y algunos estadios intermedios de otra partida.

La Figura 4 muestra las tres primeras movidas de un juego de Gale con 60 puntos.

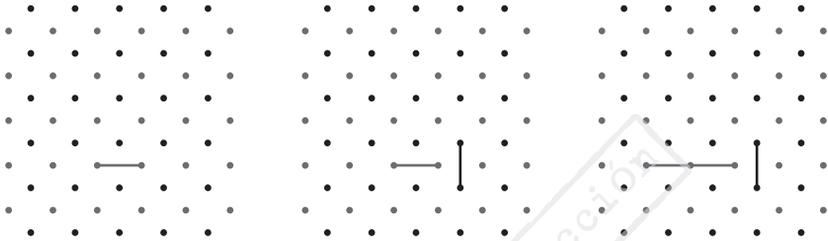


Figura 4

El juego comenzó cuando el jugador G unió los primeros dos puntos grises. El jugador N obstruye el camino que llevaría al gris hacia el costado derecho. G sigue, sorprendentemente, hacia la izquierda. No sé cuál habrá sido su estrategia, pero con estas pocas movidas es imposible saberlo. La Figura 5 es una 'foto' de lo que sucedió algunas movidas después, cuando G había trazado siete segmentos y N solamente seis.

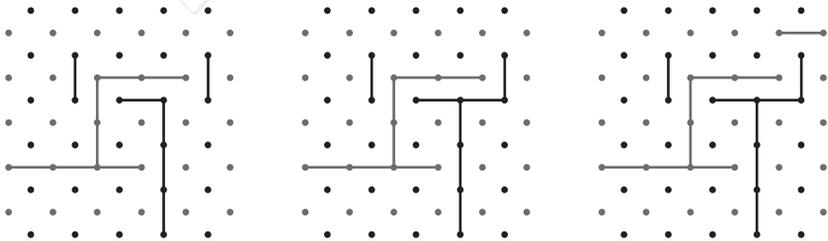


Figura 5

Perplejo

Raymond Merrill Smullyan fue un matemático norteamericano que vivió ‘casi’ 98 años (1919-2017). Su producción dentro de la matemática recreativa solo tiene un solo competidor: Martin Gardner. Smullyan, igual que Gardner, fue también mago.

Dedicó una buena parte de su vida a entender el Taoísmo, se graduó en filosofía, fue especialista en lógica y, en sus tiempos libres, *pianista*. Escribió además muchísimos libros de diverso tenor, e hizo enormes contribuciones a la matemática recreativa. Produjo una enorme cantidad de problemas para pensar, ‘puzzles’⁵⁴, paradojas, laberintos lógicos, múltiples ejercicios de combinatoria... En fin, creo que ya tiene una idea de cuán prolífico fue Smullyan.

Obviamente, no hay manera de rendirle tributo con un artículo o con un solo problema. Seguramente encontraré muchos más a lo largo de mi vida, pero hay uno particular que cuando lo vi, me dejó perplejo. Tan es así, que por eso quise ponerle como título a este texto: *perplejo*. Así me quedé cuando leí el problema. Ve a qué le produce a usted.

Acá voy.

54. Escribo la palabra ‘puzzle’ porque no sabía cómo traducirla al español apropiadamente.

Suponga que usted tiene una pequeña frutería. Todos los lunes por la mañana temprano, llegaban sus proveedores desde distintos lugares del país (no importa cuál, *algún* país). Cada uno había recolectado fruta durante el fin de semana, y llegaba el momento de venderla en los lugares más poblados.

Dos de ellos lo proveían de naranjas, de diferentes calidades. Ese lunes, el primero de ellos le había ofrecido 30 naranjas a un valor de \$10 por todas, o 3 naranjas por \$1.

El segundo le ofrecía naranjas de mejor calidad. También tenía 30 y este proveedor se las ofrecía todas por \$15, o bien 2 naranjas por \$1.

Al mismo tiempo, mientras usted conversaba con cada uno de ellos en diferentes lugares de la frutería, una persona necesitaba naranjas para un cumpleaños, y ofrecía comprarle *todas* las que usted pudiera conseguirle.

Entonces, usted arregla con ambos proveedores y les compra las 30 naranjas a cada uno, pagándoles lo que le pedían.

Una vez acordada la compra, se da vuelta y le vende las 60 naranjas al 'cumpleañero'. Para no hacer diferencias, le dice al comprador que le va a vender 5 naranjas por \$2.

Todo el mundo acepta el trato: los dos proveedores y el comprador. Cada proveedor entregó sus 30 naranjas y usted las puso todas en una bolsa y se las entregó (las 60) al comprador. Su idea era recibir el dinero de la venta y dividirlo entre los proveedores de acuerdo con lo estipulado.

Súbitamente, usted se da cuenta de que hay un problema. ¿Por qué?

- a) Al primer proveedor, usted le pagó \$10 por las 30 naranjas.
- b) Al segundo proveedor, usted le pagó \$15 por las otras 30 naranjas.

Es decir, en total les pago \$25 por las 60 unidades.

Sin embargo, cuando el comprador le paga... ¡le entrega \$24!

“Un momento, un momento”, dice el dueño de la frutería. “Tiene que haber un problema en alguna parte, porque yo estoy *perdiendo un peso en la transacción*”.

Su ayudante se acerca, y usted le pide que haga las cuentas para ver dónde está el error.

El comprador le da \$24. ¿Está mal? Veamos: usted le ofreció 5 naranjas por cada \$2 que le pagara. Como en total son 60 naranjas, hay que multiplicar $12 \times 2 = 24$. Es decir, el dinero que le dio el comprador está bien.

Evidentemente, en alguna parte *tiene que haber un problema*. ¿Qué pasó con el \$1 que falta? ¿Es que usted las vendió más baratas de lo que las compró? ¿Dónde está el *error*? O si usted prefiere, ¿dónde está la explicación?

Le confieso que de entrada yo me quedé perplejo. ¿Usted? ¿Ya advirtió qué es lo que sucede?

Esta es *una* manera de pensar este problema.

Los proveedores le cobraron bien y el comprador le pagó bien. Basta con revisar las cuentas y ahí no parece haber ninguna dificultad.

Sin embargo, hay una observación que —me parece— sirve para explicar la incongruencia.

Como las naranjas son de dos calidades diferentes, cuando él las junta en una bolsa y las mezcla y después no puede distinguir unas de otras, fíjese lo que sucede:

Les voy a poner un ‘color’ distinto a las naranjas de acuerdo con su calidad.

Las negras (N) son las de mejor calidad. Hay 30 N.

Las blancas (B) son las de peor calidad. Hay 30 B.

Cuando él vende las 60 todas juntas, por un instante *separe* 50,

imaginando que estas 50 incluyen las 30 blancas (las de peor calidad) y solamente 20 de las negras.

Él las vende todas al mismo precio: 5 por \$2. Es decir, cobra \$20 por estas 50.

Pero todavía le falta vender 10 naranjas más. Como ya vendió las 30 más baratas, las 10 que le quedan son *negras*. A este proveedor, usted le pagó \$1 por cada 2. Las 10 le costaron a usted \$5. Sin embargo, el comprador le paga \$2 por cada 5. O sea, por estas diez naranjas ¡él le entregó \$4!

Justamente allí está la diferencia. Y el peso que le falta. Fíjese en este dato: suponga que en lugar de haber vendido las 60, el cumpleaños le hubiera comprado nada más que 30.

Entonces, como su precio era de $5 \times \$2$, por las 30 naranjas el comprador hubiera debido pagarle \$12.

Pero si usted le entregaba las 30 de *peor* calidad, por esas 30 usted pagó \$10, ya que *ese* proveedor le cobraba \$1 por cada 3 naranjas.

Si este hubiera sido el caso, usted habría ganado \$2. Al venderlas todas, licuó su ganancia a tal punto que no solo la desperdició, sino que terminó perdiendo dinero⁵⁵.

¿No es *muy* interesante este problema de Smullyan? Espero que usted lo haya disfrutado tanto como yo.

55. Otra manera de pensarlo, quizás más rápida. El costo total de las 60 naranjas es $10 + 15 = 25$, de manera tal que el costo promedio por naranja debería ser $25/60$. Al multiplicarlo por 5, resulta un *poco más* de 2... (en realidad, es 2,083...).

Apuntes de una charla (de Adam Kucharski)

Adam Kucharski es un matemático y epidemiólogo inglés. En este momento es profesor asociado en la London School of Hygiene & Tropical Medicine, y trabaja en el análisis matemático de cómo se esparce una enfermedad infecciosa, por ejemplo, el COVID-19 (nada menos).

Por razones obvias sus dos profesiones tienen una importancia vital en estos tiempos (enero de 2021). Escuché varias de sus charlas en diferentes lugares, y he tomado notas/apuntes que me interesa compartir. Como fueron charlas *anteriores* a que se desatara la pandemia que azota al mundo desde diciembre del año 2019, no espere encontrar acá nada específico sobre el tema, sino muchas observaciones sobre computadoras, robots, inteligencia artificial, análisis de datos, probabilidades, juegos como ajedrez, Go, póquer, ‘damas’... En fin, le sugiero que lea estas notas con la mente abierta. Guarde lo que le interesa. Descarte el resto. El problema que tuve yo es que no pude descartar nada..., fíjese qué le parece a usted. Por supuesto, el *crédito* de todo lo que está escrito en este resumen le corresponde todo a él. Yo soy — sencillamente — un intermediario.

- “Podemos diseñar robots (o *bots*), pero no alcanza con enseñarles que repliquen lo que hacemos nosotros: aprendé

‘esto y esto otro’. No sirve así porque, entonces, no vamos a aprender nada nuevo nosotros. Solo habremos creado una copia (y pobre) de nosotros mismos. En realidad, no hay que enseñarles como a adultos, sino enseñarles como a chicos: dejarlos que ellos aprendan por su cuenta”.

- “Para quien diseña un robot, es muy frustrante ver que hace cosas que nosotros no haríamos. Nos confunden tomando decisiones que nosotros no tomaríamos... pero, por otro lado, nosotros tenemos que luchar contra el ‘qué dirán’, o sobre lo que ‘se supone que es lo correcto’. Un *bot* no tiene esas restricciones: hace lo que tiene que hacer. El resto le resulta irrelevante”.
- “Cuando la computadora creada por IBM Deep Blue le ganó a Garry Kasparov⁵⁶ (en ajedrez), nosotros no aprendimos nada de ese hecho. Mejor dicho: aprendimos que una

56. Inmediatamente después de haber escuchado a Kucharski por primera vez, empecé un artículo escribiendo estas líneas: “En el año 1997, Deep Blue, la computadora diseñada por IBM, le ganó a Garry Kasparov quien en ese momento era el campeón mundial de ajedrez. Pero lo notable de ese triunfo es que los humanos no aprendimos virtualmente nada que no supiéramos antes que se jugaran esas partidas. De hecho, la computadora le ganó al humano por la fuerza bruta. Le ganó porque un humano no puede retener tantas jugadas en su cabeza, y no puede —por lo tanto— pensar tantas jugadas hacia delante. Ahora bien: en términos específicos, en términos de aprendizaje, no hubo virtualmente nada nuevo. En algún sentido, aprendimos sobre computadoras, pero no aprendimos nada de ajedrez. No aprendimos —virtualmente— nada sobre la *inteligencia humana y decisiones humanas*. Por supuesto: si el objetivo es aprovechar la capacidad de memoria de una computadora, entonces no hay discusión: los humanos perdemos por escándalo. Es otra liga. Eso sí: una computadora era ya muy superior en el año 1997, ni hablar ahora. Pero *esa* no es la razón por la cual uno quiere enfrentar al mejor de nuestra especie en este juego contra una computadora. No, lo que uno querría es *aprender* de ellas ‘algo’ que no sabíamos hasta acá”.

computadora le podía ganar a un ser humano, en ajedrez, pero fue un subproducto de la ‘fuerza bruta’ que utilizó la computadora. No fue que Deep Blue nos enseñó ‘algo’ en ajedrez que no sabíamos. ¡Desde ese lugar, no aprendimos nada! En cambio, cuando los *bots* diseñados en Canadá pudieron ganar al póquer, entonces SÍ, allí aprendimos muchísimo más, aunque más no sea porque para poder jugar al póquer hay que poder hacer *bluff*. Y ojo, porque no digo que conviene hacer *bluff* por lo que significa psicológicamente, por el ‘daño’ que podríamos causarle a un rival, sino porque *matemáticamente* tiene sentido hacer *bluff*... y eso, es algo que definitivamente no esperábamos de parte de una computadora. En ese lugar estamos hoy”.

- “Es interesante notar que el *póquer* tiene muchísimas menos posiciones y posibilidades que las ‘damas’ y ni hablar del ajedrez o el Go. Sin embargo, en el póquer, las computadoras sufrieron muchísimo más y por muchísimo más tiempo. ¿Por qué? Es que en juegos como las *damas*, *el ajedrez* o *incluso en el Go*, uno tiene *toda* la información, uno *ve* dónde tiene distribuidas las piezas el rival, no hay nada oculto. Estos juegos se conocen con el nombre de Juegos con Información Perfecta. En algún sentido, uno tiene *toda la información que le hace falta para tomar una decisión, está todo delante de uno*. En cambio en el póquer, esto decididamente no es cierto”.
- “El póquer se parece más a la vida real: hay información que falta, que está escondida. Cuando uno tiene que tomar una decisión, en una negociación, en una subasta, en discusiones que involucran elegir qué conviene ofrecer o qué no, todas estas situaciones tienen información *oculta*. En algún sentido, si las computadoras intentaran *replicar* lo que sucede con

un humano o con *los humanos*, con lo que llamamos ‘inteligencia humana’, tendrá que enfrentarse con este tipo de situaciones en forma mucho más frecuente. En ese sentido, el póquer es una fuente mucho mayor de aprendizaje que cualquiera de los otros juegos con información completa”.

- “Cuando los robots que jugaban al póquer empezaron a hacerse populares, hace diez o quince *años*, *una estrategia común era decirles ‘qué hacer’ ante cada situación. Entonces, si uno está escribiendo un algoritmo, uno le enseña al robot: ‘Si pasa esto, hacé tal cosa; si pasa esto otro, hacé tal otra cosa’*. Todo bien, pero el inconveniente de esta forma de abordar el problema es que el robot que uno construye será *a lo sumo* tan bueno como sos vos. Si uno le dice ‘qué hacer’, el robot estará limitado por las propias habilidades de quien está escribiendo el programa”.
- “Hay una *mejor* manera de hacerlo. Lo que uno quiere es construir *una* mente como si fuera la de un niño y dejar que funcione tratando de aprender sola/o, y esto es lo que están haciendo los investigadores. Están construyendo robots específicos para jugar al póquer, pero de manera tal que lo hagan jugando entre ellos y aún más: que cada robot pueda jugar contra sí mismo. Lo más sorprendente es la forma en la que *aprenden*. En lugar de detenerse en el juego y pensar *cuál sería la estrategia que me garantizaría la mayor probabilidad para ganar esta partida*, el robot mira hacia atrás y se pregunta: ¿qué tendría que haber hecho yo antes para no haber llegado a esta situación? ¿Qué habría pasado si yo (el robot) hubiera hecho algo distinto?”.
- “En estudios que hemos hecho, hay un grupo de personas que han sufrido daños cerebrales que les impiden sentir remordimiento, y esas personas tienen muchos problemas para

tomar decisiones que involucran incertezas y aleatoriedad. Mientras se trate de ‘ordenar cartas’ por ejemplo, no tienen ningún tipo de problemas, aprenden muy rápido y resuelven lo que uno les ponga delante. Sin embargo, si descubren que hay información escondida o algún tipo de ‘riesgo’, entonces les cuesta muchísimo trabajo identificar la estrategia óptima. Esto sugiere que la imposibilidad de sentir remordimiento parece ser muy importante en cuanto a cómo *aprendemos* a tomar decisiones en un mundo incierto y este tipo de técnicas fue muy importante para el diseño de estos robots”.

- “Más aún: estos robots específicamente diseñados para jugar al póquer han jugado entre ellos miles de millones de partidas. Aprendieron tanto, son *tan* buenos, que un grupo de investigadores en Canadá anunció que el póquer, como juego, ¡está resuelto! En realidad, lo que hicieron fue mostrar que encontraron una estrategia que les permite ¡no perder! Y no pierden o perderían, aun contra un rival perfecto. En algún sentido estos robots son *¡invencibles!*”.
- “Hay veces en que los robots reciben muy malas cartas y, sin embargo, hacen una apuesta que es incomprensible para nosotros, los humanos. O al revés, tienen muy buenas cartas y deciden apostar el mínimo. Estos robots desafían *nuestra* forma de tomar decisiones. De hecho, múltiples veces y a pesar de eso, resultan ganadores de las partidas. ¿Qué relación tiene esto con la vida real, con la vida cotidiana? Reiteradamente nosotros, frente a situaciones muy complejas, tendemos a simplificarlas. Los robots nos enseñan que muchas veces las reducimos demasiado, tanto que obrar como hacen ellos, sin estar restringidos por lo que ‘el afuera’ considera una buena estrategia, resulta claramente beneficioso. En la medida en que los robots mejoren, es muy probable

que comencemos a advertir modificaciones en *nuestro comportamiento* y en la forma en que la emoción o las emociones terminan torciendo nuestras determinaciones”.

- “En el año 2018 cuatro de los mejores jugadores de póquer del mundo jugaron contra estos robots. La idea era que este particular juego de cartas (el póquer) parecía más un arte que algo científico, ligado a la psicología humana y a la creatividad. Lamentablemente se olvidaron de avisarles a los robots [*sic*] porque terminaron ganando todas las partidas que jugaron frente a los humanos... ¡todas!”.
- “Para terminar: puede que todo esto suene muy apocalíptico y terminal, pero yo [*él, Kucharski*] pienso que usando lo que vemos en este tipo de robots nos ayudará a tomar decisiones y riesgos cotidianos de una forma muy distinta de la que lo hacemos hoy. En todo caso, al perder contra estas máquinas, ganamos la oportunidad de entendernos mejor a nosotros mismos [*otra vez sic*]”.

Final

Estos apuntes están tomados en forma anárquica. Fueron observaciones que me impactaron a mí. Quizás si en lugar de haber estado yo en esas charlas hubiera estado *usted* (quien está leyendo estas líneas), muy probablemente le habrían impactado *otras* cosas que dijo Kucharski. No lo sé, y no hay manera de comprobarlo ahora. Lo que me parece valioso es que el humano no se detiene y, más allá del uso que luego le dé a la tecnología que inventa (un *tema enorme y ciertamente no menor*, que escapa a estas líneas), la evolución que se está produciendo es asombrosa. Continuará, o mejor dicho, *continuaré*...

La constante de Kaprekar

En general, los que vivimos en Occidente tenemos *poco* contacto con lo que sucede en países como China, India, Pakistán, las dos Coreas, Singapur, Bangladesh, un poco menos Japón... y la lista podría continuar. Por supuesto, esto no es parejo para todos, pero salvo ubicar a cada uno de estos países geográficamente y conocer *algunos miembros* salientes de sus culturas, todo lo que allí sucede (y sucedió) aparece envuelto en una nebulosa. Ni hablar de los aportes que hacen e hicieron los matemáticos de todos estos lugares. Está claro que no pretendo hacer justicia con un simple artículo, pero quiero destacar en esta oportunidad lo que hizo S. D. R. Kaprekar, un matemático indio que vivió en el siglo XX entre 1905 y 1986.

Escribí las iniciales de sus tres primeros nombres pero para honrar su memoria lo que tendría que hacer (y hago) es escribirlos. La 'S' corresponde a Shri, la 'D' a Dattathreya y la 'R' a Ramchandra.

Kaprekar nació en Dahanu, una ciudad pequeña cerca de Mumbai, en la India. La matemática recreativa fue su *hobby* desde pequeño y se dedicaba horas y horas a buscar patrones entre los números naturales, y a resolver problemas que él mismo generaba. A lo largo de su vida describió y descubrió varias *categorías* de números naturales y sus propiedades.

En particular, en el año 1946, el doctor Kaprekar escribió un algoritmo que le permitió *descubrir* una propiedad que tienen los números de cuatro dígitos. Si uno *sigue* las *reglas* (que figuran a continuación), invariablemente llega al número 6174. Esta propiedad quedó perpetuada en la historia con su nombre. Desde el año 1949, el número 6174 tiene nombre: se conoce como “la constante de Kaprekar”.

Lo que sigue es la explicación de cómo aparece esta constante. Lo voy a presentar como si fuera un ‘juego’. Los participantes van a ser los números *naturales* que tengan *cuatro dígitos*.

Tome entonces un número de cuatro cifras cualquiera de manera tal que contenga al menos dos dígitos diferentes. Esta condición evita que el número que usted elija tenga *todos* los dígitos iguales. Ahora, siga estas instrucciones:

- 1) Ordene los dígitos del número que eligió de manera tal de obtener el **mayor** y el **menor** número posible.
- 2) Ahora, reste el *menor* del *mayor*.
- 3) Va a obtener *otro* número de cuatro dígitos. Vuelva al paso (1) y repita el proceso.

Por ejemplo: supongamos que usted elige el número 7349. Reordene los dígitos como indica el primer paso. Obtiene 9743 como el *mayor* y 3479 como el *menor*.

Ahora, réstelos: $9743 - 3479 = 6264$.

Repita el proceso: el *mayor* es ahora 6642 y el *menor*, 2466.

Réstelos: $6642 - 2466 = 4176$

Repita el proceso: el *mayor* es 7641. El *menor*, 1467.

Una vez más, réstelos: $7641 - 1467 = 6174$

Antes de seguir, quiero hacer una observación. Fíjese que los dos últimos números que obtuvo son: 4176 y 6174. ¿Qué tienen en común estos dos números?

Lo que los ‘liga’ es que tienen los mismos dígitos: 1, 4, 6 y 7.
¿Qué le sugiere esto?

Si uno repite el proceso de acuerdo con las instrucciones iniciales, el *mayor* y el *menor* número de cuatro dígitos que va a obtener será el mismo... en cada uno de los dos casos. Es decir, uno llega a lo que se llama *un ciclo*. A partir de acá, no tiene sentido seguir ya que los números subsiguientes serán siempre el mismo.

Fíjese en el siguiente hecho: este proceso es *finito* porque la cantidad de números de cuatro dígitos es *finita*. En total, hay 10.000 números (y estoy incluyendo los diez que tienen los cuatro dígitos iguales), pero no importa. Como hay una cantidad finita de estos números, en forma independiente de cuál sea el número con el que uno empieza, inexorablemente tendrá que *repetir* alguno de los anteriores y caer en un ciclo.

La pregunta es: ¿cuántos ciclos hay?

Respuesta: ¡Hay un solo ciclo! Es el que *termina* en el número 6174. Pruébelo. Verá que no importa con qué número usted elija empezar, *siempre llega al 6174*.

Este número es el que se llama “la constante de Kaprekar”.

Este hecho es verdaderamente notable. ¿Cómo hace uno para ‘comprobar’ que es verdad? Como a lo sumo uno puede empezar con 10.000 números, es *fácil* hacer una verificación exhaustiva usando una calculadora o escribiendo un pequeño programa y hacerlo correr en una computadora. Inténtelo y verá. Pero lo más interesante, creo, es que independientemente del número inicial, uno ‘cae’ en la constante de Kaprekar en *a lo sumo siete pasos*⁵⁷. O sea, no le llevará mucho tiempo encontrarla empiece en el número que empiece.

57. Si uno *empieza* con el número 6432, necesita *siete* pasos para llegar al 6174. La secuencia es la siguiente: 6432, 4086, 8136, 7263, 5265, 3996, 6264, 4176. Este último, 4176 da origen al 6174.

Una observación más. Para incluir los números de una, dos y tres cifras, alcanza con aceptar que estos números empiezan con tres, dos y un *cero* respectivamente. Es decir, el número 28 lo vamos a pensar como 0028, y el número 9, como 0009. Esto termina incluyendo a *todos* los números de cuatro dígitos (excluyendo los que tienen los cuatro dígitos iguales)⁵⁸.

La pregunta que quedaría por contestar (al menos, la que me parece la más inmediata) es la siguiente): “¿Por qué pasa esto?”.

Estoy ‘casi’ seguro que de Kaprekar descubrió la constante que lleva su nombre *probando y probando*. Una vez que él *intuyó* que había un *patrón* escondido, fue y lo demostró. Encontrar que empezando en cualquier número uno llega al 6174 fue lo que lo motivó a verificar que eso pasaba siempre. Y eso me motiva a mí en plantearle *dos* temas que no me parecen triviales... ¡para nada!

El primero es que a uno *se le tiene que ocurrir la idea* de qué es lo que habría/hay que hacer. O sea, descubrir *la rutina* que termina *siempre* en el número 6174 contiene una *idea... no menor*.

Por otro lado, si bien uno puede *verificar* que esto sucede siempre después de haber empezado con varios números, otra cosa es *demonstrar* por qué esto *tiene* que pasar. Eso es otra historia. Y es lo que voy a intentar en el Apéndice 2. ¿No quiere pensar usted por su cuenta?

Apéndice 1

Si a usted le interesa ‘jugar’ con propiedades aritméticas, agrego algunas otras que cumple la constante de Kaprekar y una re-

58. Es que si fueran todos iguales, el mayor y menor número que puedo generar ‘reacomodando sus dígitos’ es el mismo. Por lo tanto, al restarlos obtengo *cero* y no tiene sentido seguir.

ferencia *muy útil* que figura acá: <http://mathworld.wolfram.com/KaprekarRoutine.html>

- 1) 6174 es un número *divisible* por la suma de sus dígitos (que es 18). En particular, $6174 = 18 \times 343$.
- 2) Otra *aparición* del número 18 en relación a 6174, es que

$$18^3 + 18^2 + 18 = 5832 + 324 + 18 = 6174$$

- 3) La descomposición en *primos* del número 6174 es:

$$6174 = 2 \times 3^2 \times 7^3 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 7 = 2 \times 9 \times 343$$

Si ahora, uno *eleva* al cuadrado cada uno de estos factores y después los suma, obtiene ¡un cuadrado!:

$$\begin{aligned} 2^2 + 3^2 + 3^2 + 7^2 + 7^2 + 7^2 = \\ 4 + 9 + 9 + 49 + 49 + 49 = 169 = 13^2 \end{aligned}$$

¿No es notable esto?

- 4) Si en lugar de utilizar números de *cuatro* dígitos usáramos de *tres* dígitos, la propiedad sigue existiendo, solo que esta vez en lugar de llegar a la constante de Kaprekar, uno llega a *otro número* (le propongo que deje de leer acá por un instante para tratar de *descubrir* usted a qué número se llega). El número es 495. Compruébelo. Y lo mismo sucede con números de 2 dígitos. En ese caso, se termina en 9 (y es fácil de verificar).
- 5) Dicho esto, no solo se puede *reducir* el número de dígitos, sino también aumentar y aparecen nuevas constantes. Bastará que utilice el nombre del doctor Kaprekar e intente

googlear su nombre, y verá que la literatura que hay en internet es muy vasta y exhaustiva. Yo, por ahora, voy a parar acá.

Apéndice 2

Tome un número cualquiera de cuatro dígitos. Voy a llamar a , b , c y d a esos dígitos y los voy a ordenar de *mayor a menor* (cosa que puedo hacer con cualquier grupo de cuatro dígitos). Supongamos que resulta este orden:

$$9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$$

Uno sabe, además, que tiene que haber *dos dígitos* distintos, por lo menos. Entonces, el *mayor número* que uno puede crear con estos cuatro dígitos es: $abcd$ y el *menor* es $dcba$.

Hagamos juntos la primera operación; es decir, restamos

$$abcd - dcba$$

Llamemos ABCD a este nuevo número:

$$abcd - dcba = ABCD$$

Si todos los dígitos son distintos, o sea $a > b > c > d$, entonces se obtienen estas cuatro igualdades:

$$\begin{aligned} D &= 10 + d - a && \text{(ya que } a > d) \\ C &= 10 + c - 1 - b = 9 + c - b && (*) \text{ (ya que } b > c - 1) \\ B &= b - 1 - c && \text{(ya que } b > c) \\ A &= a - d \end{aligned}$$

Voy a llamar (*) al sistema de cuatro igualdades.

Como hay *finitos* números de cuatro dígitos, habrá un momento (al repetir este tipo de operaciones) en el que inexorablemente tendremos que *repetir* los cuatro dígitos con los que empezamos. Es decir, llegará algún punto en el que los *cuatro* dígitos A, B, C y D tendrán que *replicar* los cuatro dígitos iniciales (*a, b, c* y *d*). Los dígitos serán los mismos, pero esto no quiere decir que aparezcan en el mismo orden. Es decir, los dígitos A, B, C y D tendrán que ser los mismos que *a, b, c* y *d*⁵⁹.

Al ubicarlos en el sistema (*) voy a obtener 24 posibles sistemas de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Son 24 porque hay $4 \times 3 \times 2 \times 1$ maneras de permutar los dígitos A, B, C y D usando los dígitos *a, b, c* y *d*.

De los 24 sistemas, *hay uno solo que tiene soluciones enteras* y corresponde al caso en que

$$a = 7 ; b = 6 ; c = 4 \text{ y } d = 1$$

Esto permite concluir que el *único* número de cuatro cifras que *resuelve* el problema es ¡la constante de Kaprekar = 6174!

59. En este punto quiero hacer una observación, un poco más ‘delicada’, que me hizo notar Carlos D’Andrea. Él sostiene, y con razón, que yo estoy asumiendo que *existe* un ‘punto fijo’ que es lo que luego voy a usar para resolver el sistema. Pero *podría* ocurrir que iterando este sistema tal como está presentado, se *estabilice* en un ciclo de orden 2, 3 o más, y entonces lo que habría que resolver es algo más complicado que lo que yo hice para encontrar el punto fijo. Si le interesa el tema, es una *punta suelta* o un *hilo suelto* desde donde —le propongo— empiece a tirar.

Apéndice 3

Lo que sigue es otro *aporte* de Kaprekar. Más allá de hablar de la constante o el número que lleva su nombre, y siempre a la búsqueda de nuevos patrones, encontré este del que también quiero escribir.

Tome un número natural cualquiera, digamos 703. Elévalo al cuadrado. El resultado es:

$$703^2 = 494.209$$

Si ahora uno *suma* los tres primeros dígitos (494) con los tres restantes (209), obtiene:

$$494 + 209 = 703$$

O sea, el número con el que empezó.

Le propongo que explore por su cuenta, tratando de encontrar *más* números que satisfagan esta propiedad. De paso, *todo* número que *la cumpla* (esta propiedad) se llama “*número de Kaprekar*”.

Antes de dejarla/dejarlo en soledad, agrego otro número de Kaprekar: 297. Verifiquémoslo juntos.

$$297^2 = 88.209$$

Si ahora uno suma

$$88 + 209 = 297$$

Esto concluye la comprobación.

(**No lea** lo que sigue, porque quiero agregar algunos más. Si los lee, se priva de *descubrirlos usted mismo*).

Acá van (algunos, no todos): 9, 45, 55, 297, 703, 17.344, 538.461...

¡Le toca a usted comprobar que lo son!

Prohibida su reproducción

Lectura tendenciosa

¿Cómo hacer para llamar la atención? Vivimos en un mundo muy particular en donde hay una sobreoferta de atracciones. Libros para leer, programas de televisión para mirar, revistas, programas de radio, podcasts, charlas online, ni hablar del mundo que abrió internet, Netflix, Twitter, Facebook, Hulu, Amazon, Apple TV, Instagram, Snapchat... el *tironeo es incesante* y virtualmente imposible de resistir.

Siempre aparece *algo* que seduce, invita, distrae. Por supuesto, está claro que en esa multiplicidad de ofertas se encuentran escondidas *algunas* a las que *sí* nos gustaría prestarles nuestra atención, y estas *también* son muchas. Me encantaría tener el tiempo suficiente no solo para encontrarlas, sino para embeberme y sumergirme en tantos mundos fascinantes que nos rodean y, sobre todo, en tantas ideas para pensar. Me fascina encontrar ‘disparadores’ que me presentan situaciones en las que no sé lo que pienso, no sé qué opinión tengo, no tengo experiencia, ni la cultura suficiente para comprender. Pero, más allá de eso, no tengo claro que posición ética correspondería adoptar frente a esas situaciones. Y créame, estamos rodeados de ellas. Son dinámicas, fluyen a nuestro alrededor, aunque no necesariamente las tenemos en un primer plano ni estamos acostumbrados a coexistir con ellas.

Por otro lado, ¿cómo hacer para poder encontrarlas? Uno sabe que en una montaña de piedritas, enorme, inacabable, están escondidas algunas *pepitas de oro*, piedritas que en todo caso son oro para mí, pero quizás no lo sean para usted. ¿Cómo *barrer* o *escanearlas* para poder separar la *señal* del *ruido*, para descartar lo prescindible, para ignorar lo superfluo, para descubrir lo falso y no detenerse allí? Es una tarea virtualmente imposible.

No quiero escribir que esto *antes* no pasaba, porque no suscribo a la teoría que dice que “todo tiempo pasado fue mejor”. No. No solo no estoy de acuerdo sino que estoy *fuertemente* en desacuerdo. Lo que sucedía antes era que *no nos enterábamos*. Es decir: hoy, por ejemplo, una persona puede entrar y filmar en forma oculta, con una cámara escondida, lo que le está diciendo alguien que pretende corromperlo, coimearlo o comprar su voluntad. Pero estoy convencido de que *antes*, no es que no existieran las mismas intenciones, sino que en ese mismo *antes* no existían medios tan accesibles, baratos y fáciles de conseguir para dejar registrado el intento. De todas formas, no era (ni es) ese el objetivo de este texto. Hay muchísimos ejemplos que no son tan obvios, tienen *algún grado de sutileza*, en los cuales la *mentira* viene empaquetada de forma diferente, envuelta en un envoltorio que parece darle *validez*, mérito, credibilidad, confianza.

Por último, antes de entrar en el ejemplo propiamente dicho, está claro también que ¿quién tiene tiempo para poder verificar *todos* los hechos de lo que escucha y/o lee? Inexorablemente, terminamos *comprando falsedades*, aun cuando uno cree que está con las antenas muy alerta, con la guardia alta y protegido. Bueno: uno *cree que está protegido*... pero no es así. Es imposible no terminar creyendo algo que está mal.

Ahora sí, el ejemplo que quiero contar. Esta es una historia que sucedió en el año 2009 en Inglaterra. El *Sun* es un diario

sensacionalista como los que existen en diferentes partes del mundo. Me atrevería a decir que todo país tiene uno por lo menos. Ciertamente en Inglaterra el *Sun* no es el único. En un título que apareció en el año 2009, el diario anunciaba algo así como que, dependiendo de la cantidad de cerdo que uno consumiera diariamente, el riesgo de desarrollar un tipo de cáncer podía costarle la vida. En inglés decía: “*Careless Pork Costs Lives*”.

Una organización sin fines de lucro que invierte sus fondos en métodos para prevenir el cáncer (World Cancer Research Fund) había publicado un informe de más de *quinientas páginas*. El *Sun* extrajo *uno* de los cientos de resultados que aparecían en el estudio y remarcaba el efecto que podía tener una persona si consumía 50 gramos de carne de cerdo por día, más precisamente panceta o tocino. Para ser más exactos, *bacon* (en su versión inglesa).

La conclusión era que si uno consume un sándwich diario que contuviera 50 gramos de panceta incrementaba sus chances de tener cáncer de colon ¡en un 20%!

No hace falta que abunde en detalles, pero imagine que si el objetivo era *llamar la atención*, lo consiguieron. Si la idea es *vender basura, asustar, intimidar* y sobre todo hacerlo con la salud, este es un ejemplo ‘de libro’. Veamos.

Empiezo con una pregunta: ¿cuál es el 20% de *cinco*? La/lo ayudo: el resultado es *uno*. Es decir, si uno incrementa *cinco* en un 20%, el resultado que obtiene es *seis*. Ahora verá por qué me interesa hacer este cálculo en este punto.

Vuelvo al ejemplo. Si usted toma la población completa de un país, y la organización que cuida la salud pública explicara en un reporte que la consumición diaria de un sándwich que contiene 50 gramos de panceta aumenta en 20% la probabilidad de tener cáncer (de colon o de lo que fuere), el resultado sería tan

abrumador que las autoridades deberían *prohibir* la panceta, al menos en esas cantidades diarias. Taxativamente, el país debería sugerirles a sus habitantes *interrumpir inmediatamente la ingesta de ese producto*.

Sin embargo, preste atención a estas dos figuras:



Figura 1



Figura 2

Ahora, acompáñeme con este razonamiento. Tome al azar 200 personas entre la población inglesa y sepárela en dos grupos de cien. Los estudios existentes hasta allí indicaban que el 5% de la población estaba expuesto a tener cáncer de colon en sus vidas. Y punto. Independientemente de cuál fuera su ingesta. Es decir, si uno toma un grupo de cien personas cualquiera, la probabilidad de contraer cáncer de colon estaba medida en 0,05, o sea, un 5%. En términos de *personas*, uno puede representarlo como en la Figura 1. De cada grupo de 100 personas, cinco tendrán cáncer de colon.

Ahora, si usted toma *otro* grupo de 100 personas, también elegidas al azar, pero este grupo consumiera diariamente un sándwich con 50 gramos de panceta, entonces, en lugar de cinco habría seis de ellas que terminarían reportando cáncer de colon también⁶⁰.

60. Por supuesto, estos números no solo son aproximados sino que estoy omitiendo los intervalos de confianza y varios otros datos estadísticos pertinentes. Pero a los efectos de lo que quiero escribir acá, concédame la licencia de obviarlos.

Esto es lo que representé en cada una de las dos Figuras. En la Figura 1, marqué las cinco personas que tendrían ese tipo de cáncer en el transcurso de sus vidas, mientras que en la Figura 2 marqué seis por la misma razón. Estos cien serían los que consumieron ese sándwich con los 50 gramos de panceta por el resto de sus vidas. Como se ve, hay una diferencia de un 1%, una persona más cada cien.

Entonces, acá es donde cabe la pregunta: ¿hubo en algún caso un aumento de un 20% como para ser reportado de la manera que lo fue?

Si usted se fija en la Figura 3, *hay* efectivamente ese tipo de crecimiento.

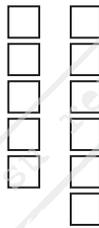


Figura 3

A la izquierda, separé las cinco personas de la Figura 1 y a la derecha, las seis personas de la Figura 2. Claro que hay un 20% de aumento, ya que *una* persona más sobre cinco que había *representa* un 20% de aumento. Pero ¿reportaría usted esa diferencia? ¿O sería más razonable decir que el aumento fue de un 1%?

A los efectos del impacto que produce, está claro que 20% es más que uno. Si lo hubiere, o si lo hubiera habido, sería razonable que el gobierno británico (y posiblemente los gobiernos de todo el mundo) hubieran tenido que determinar la prohibición de comer panceta en sándwiches en forma diaria, si el objetivo

es proteger la salud pública. Pero bien leídos los datos, si bien comer panceta incrementa el colesterol, agrava la situación de los triglicéridos, contribuye al bloqueo arterial, y todos los otros datos que a mí se me escapan..., decía, a nadie se le ocurriría *prohibir la panceta*.

Aunque es verdad que el riesgo relativo para aquellos que consumen los 50 gramos de panceta diaria representa un incremento del 20 %, el riesgo absoluto solamente aumenta un 1%. Pero, como decía antes, un 1% no le llama la atención a nadie, un 20%, le hace suspender todo y prestar atención. ¿Usted qué piensa?

Prohibida su reproducción

Los puzzles de Carlos D'Andrea

Durante las épocas de cuarentena, cada uno encontró alguna forma de pasar su tiempo. No voy a hacer una lista de las actividades de las que formé parte, pero sí quiero aprovechar algunas que me parecieron verdaderamente atractivas. Creo que si una persona ha leído cualquiera de los libros que fui escribiendo a lo largo de los años, sabrá que siempre tuve un grupo muy particular de *betatesters*. Es decir, varios amigos/os míos se prestaron gentilmente a leer los textos antes de que fueran publicados, y lo hicieron solo por el placer de pensar. Desde ya, sería muy difícil expresar mi gratitud en unas pocas palabras, pero a lo largo de estos mismos años también intenté plasmarlo en cada uno de los prólogos.

Esta vez quiero hacer algo distinto. Carlos D'Andrea es antes que nada un querido amigo mío, de mucho mucho tiempo. Juntos crecimos en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires y juntos estuvimos en diferentes partes del mundo cuando —en general— la matemática nos ha convocado. También tuvimos algunas —infrecuentes— reuniones sociales, pero nos vimos en varios continentes: en diferentes partes de las Américas, en Europa y también en Asia, muy en particular, en los tres días de agosto del año 2014 cuando la matemática argentina toda recibió varios reconocimientos internaciona-

les. Pero Carlos, además de haber sido el *único* de los *betatesters* que leyó *todos* los libros, desde el primero hasta el último, *todos* los problemas, uno por uno, en una tarea ciclópea que merecería algún tipo de reconocimiento, y lo hizo en forma *absolutamente ad honorem*, sin haber cobrado *nunca* un solo peso/euro/dólar/rupia o lo que sea, decía, fue por él que cada uno de los libros no ha tenido la cantidad de errores/horroses que pudo haber tenido. Fue algo así como una suerte de red protectora que yacía debajo de donde yo hacía piruetas matemáticas caminando solo sobre un palo grueso que me llevaba de una costa a la otra. Muchos intentos fueron fallidos y Carlos estuvo allí para ayudarme.

Toda esta introducción es para decir que, mientras seguimos trabajando con él en búsqueda de publicar un libro en coautoría (ya sucederá), Carlos aprovechó los días de encierro forzoso para proponerle al mundo, *todos los días*, un puzzle. Le sugiero pensar en lo siguiente: no son puzzles originados por otras personas sino que son puzzles que generó él. Por supuesto, es muy probable que haya algunas excepciones. Me los fue mandando y puedo asegurar que muy pocas veces me salió alguno. Y créame que intenté resolverlos todos. En algún momento tenía que dejar porque —en particular— quería seguir escribiendo historias, libros, artículos, o grabar programas de radio, audiolibros o aun apariciones en televisión, pero igualmente, *todos los días*, le dediqué alguna porción de mi tiempo a pensar “el puzzle de Carlos”.

Está clarísimo que no puedo hacer justicia eligiendo *uno* solo de ellos, pero voy a elegir uno por una razón muy fuerte: ¡es el único que me salió! Y aunque sea por eso, creo que merece la pena que lo publique aquí.

Dicho esto, acá voy.

Se trata de *encontrar* un número que falta, pero hay que ha-

cerlo entendiendo que los seis que lo preceden tienen un hilo conductor. Me explico. Usted verá los siete días de la semana pero escritos en inglés. Al lado de cada uno, hay un número, con una excepción: el último, el que corresponde a Sunday (o domingo). Fíjese que al lado de Sunday debería haber un número también, que uno puede *inferir* mirando los seis anteriores. Ahora le toca a usted:

MONDAY	617
TUESDAY	729
WEDNESDAY	9312
THURSDAY	8412
FRIDAY	6511
SATURDAY	8614

SUNDAY	¿?

Como usted advierte, no hay mucho que yo pueda hacer para ayudarla/o. Solo proponerle que piense y, en el camino, me crea que hay *al menos una manera de pensar* el problema que sirve para encontrar un número que acompañe a SUNDAY y que ‘pegue’ con los seis números anteriores.

Solución

El primer número, el primer dígito que acompaña a cada uno de los seis primeros días, es la cantidad de letras de cada palabra.

El segundo dígito es el que corresponde al número que le corresponde en la lista. Es decir, después del número *seis*, en MONDAY aparece un número *uno* porque es el primer nombre de la lista. Después de TUESDAY, el primero es *siete* porque ese

es el número de letras y *dos* porque es el segundo nombre de la lista. Y así siguiendo.

Finalmente, el último número que figura en cada uno de ellos es la suma de los dos primeros. Es por eso que una vez determinados *seis* y *uno* en la palabra MONDAY, el que sigue es la suma de ambos, o sea, *siete*. Después del *siete* y *dos* de la segunda palabra (TUESDAY), aparece la suma, *nueve*.

Con todos estos datos, el número que viene después de SUNDAY tiene que ser *seis*, porque seis es el número de letras; después un *siete*, porque es la séptima palabra; y luego *trece*, porque esa es la suma de seis más siete. Moraleja, el número que viene después de SUNDAY tiene que ser 6713.

Prohibida su reproducción

Tres caras o tres cecas seguidas

Hay un episodio de la vida cotidiana que suele generar reacciones muy diversas en un ser humano, y es cuando uno tiene que *emular el azar*. Es decir, cuando uno tiene que ‘intuir’ lo que pasaría con el azar. Me explico.

Suponga que yo voy a tirar una moneda al aire. Está muy claro que hay dos posibilidades: *cara* o *ceca*. La probabilidad que salga *una* de las dos es —obviamente— $\frac{1}{2}$, ya que hay *un* caso favorable mientras que son *dos* los casos posibles. Como siempre, cuando uno está en una situación en donde *puede contar casos*, calcular la probabilidad de que un evento cualquiera suceda se obtiene dividiendo los casos *favorables* sobre los casos *posibles*.

Ahora bien. Supongamos que yo tiro la misma moneda dos veces seguidas. ¿Cuál es la probabilidad de que salga dos veces seguidas del mismo lado? Es decir, o bien *dos caras seguidas* o bien *dos cecas seguidas*. Como antes, voy a escribir *todos* los casos posibles:

CC, CX, XC y XX

(Uso la letra X para indicar que la moneda salió *ceca*). Casos posibles entonces: *cuatro*.

¿Cuántos casos favorables hay? Hay dos: CC y XX. Luego, la probabilidad, de acuerdo con la fórmula que escribí antes, es $2/4 = 1/2$.

Voy a avanzar un paso más. Si yo quisiera saber cuál es la probabilidad de que la moneda salga *tres* veces del mismo lado (tres *caras* o tres *cecas*) cuando la tiro tres veces, necesito contar los casos posibles:

CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX

Ahora los casos posibles son *ocho*. ¿Cuántos de ellos son *favorables*? Solamente dos: CCC y XXX. La probabilidad ahora es de $2/8 = 1/4$.

Me interesa aquí hacer una observación junto a usted. Al tirar la moneda *una* sola vez, hay *dos* casos posibles: C y X. Al tirarla dos veces, hay *dos* posibilidades para la primera tirada (cara o ceca) y *dos* posibilidades para la segunda tirada (cara o ceca otra vez). Luego, la cantidad de casos posibles se calcula multiplicando $2 \times 2 = 4 = 2^2$.

Si la tirara *tres* veces seguidas, la cantidad de casos posibles (tal como escribí antes) es ocho, y justamente $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$.

¿Por qué me interesaba señalar esto? Porque puedo usar esta misma idea para deducir lo que sucedería si tirara la moneda *diez* veces seguidas. En ese caso, los casos *posibles* se calculan como $2^{10} = 1024$. Si me/nos interesara calcular cuál es la probabilidad de que la moneda saliera diez veces seguidas del mismo lado, los casos favorables son solamente dos: CCCCCCCCCC y XXXXXXXXXXXX. Luego, la probabilidad se calcula como $2/1024 = 1/512 = 0,001953125\dots$ (aproximadamente). Es verdaderamente muy baja, algo así como *dos* veces cada mil veces que repetimos el procedimiento.

Y así podría seguir. Pero al llegar acá creo que está claro que si uno no quiere escribir una lista exhaustiva de todos los casos, y solamente quiere contar los que obtiene si tira una moneda al aire n veces, entonces el resultado es: $2n$.

De todos estos, hay únicamente *dos* que son *favorables*: cuando salen todas *caras* o todas *cecas*, y por lo tanto, la probabilidad es:

$$2/2^n = 1/2^{(n-1)}$$

Pero este resultado no es lo que yo estaba buscando. Lo que quiero es calcular *cuál es la probabilidad de que al tirar una moneda al aire diez veces aparezcan tres caras o tres cecas en forma consecutiva*. Para eso, le propongo que nos embarquemos en un viaje que —creo— es muy atractivo. Acompañeme por acá.

Suponga que tiramos la moneda al aire n veces. Ya vimos que hay $2n$ posibles resultados. Entre *todos* estos casos, habrá algunos que tengan tres caras o tres cecas seguidas, y muchos otros que no. Voy a *sumar* todos estos casos. Todavía no sé cuántos son, pero lo que sí puedo hacer es ponerles un nombre. Evidentemente este número va a depender de cuántas veces tire la moneda, o sea, del número n . Por lo tanto, el *nombre* que le ponga va a variar cuando *cambie el número de veces que tire la moneda, o sea, con el número n* . El nombre que le pongo es $A(n)$.

Hagamos juntos algunos ejemplos. Los dos primeros casos son muy fáciles, porque si $n = 1$ o si $n = 2$, entonces *seguro* que ninguno de los casos posibles tiene ni tres caras ni tres cecas seguidas, ¡porque ni siquiera tiré la moneda tres veces! Por lo tanto,

$$A(1) = 2$$

$$A(2) = 4$$

¿Y por qué los resultados fueron 2 y 4? Porque esos son *todos* los casos posibles al tirar *una o dos veces* la moneda. Ahora, pasemos al caso siguiente.

Si tiro la moneda *tres* veces, es decir: $n = 3$. Entonces ahora hay $2^3 = 8$ resultados posibles:

CCC	CCX	CXC	CXX
XCC	XCX	XXC	XXX

¿Cuánto es $A(3)$? O sea, de estos ocho casos, ¿cuántos hay que no tengan tres caras o tres cecas seguidas? Cuéntelos usted si prefiere.

Verá que *seis* de los *ocho* posibles no tienen ni tres caras ni tres cecas consecutivas. Luego,

$$A(3) = 6$$

Quiero hacer ahora un ejemplo más. Supongamos que tiro la moneda *cuatro* veces. Ahora, $n = 4$. Bien. Sabemos entonces que hay $2^4 = 16$ resultados posibles:

CCCC	CCCX	CCXC	CCXX	CXCC	CXCX	CXXC	CXXX
XCCC	XCCX	XCXC	XCXX	XXCC	XXCX	XXXC	XXXX

¿Quiere contar? Yo escribo acá el número, pero le sugiero que se fije usted. Verá que el número de casos en donde **no hay** ni tres caras ni tres cecas seguidas es *diez*. Luego $A(4) = 10$. Distinguí los casos poniéndolos en *itálicas*.

Usted estará de acuerdo conmigo en que, si bien este método nos va a llevar a la solución, no solo es muy largo, sino que yo corro el peligro de *olvidarme* de alguno, incluir dos veces el mis-

mo o algún otro tipo de complicación. *¿Tiene que haber alguna otra manera de contar los casos que **no tienen** ni tres caras ni tres cecas seguidas!*

Voy a tratar de construir una estrategia que no requiera de escribir todos los posibles casos. Por ejemplo, ¿habrá alguna manera de aprovechar lo que deduje recién cuando tiraba la moneda tres y cuatro veces? Le propongo que usted también piense qué podríamos hacer.

Mientras tanto, sigo yo. Le recuerdo que queremos calcular $A(5)$, o sea, contar *todos* los casos en los que **no aparecen** ni tres caras ni tres cecas seguidas ¡al tirar una moneda cinco veces!

Suponga que la tiré cuatro veces y *no aparecieron ni tres caras ni tres cecas consecutivas*. ¿Cómo puedo hacer para que, al tomar uno de esos casos, al tirar la moneda al aire por quinta vez, ¡sigan sin aparecer!?

Hay dos posibilidades:

- 1) La primera se corresponde con ‘cambiar’ el resultado de la quinta tirada de manera tal que sea *el opuesto* de lo que figuró en la cuarta. Por ejemplo, si al tirarla cuatro veces resultó CXCC, al arrojarla la quinta vez, yo quiero contar *únicamente* el caso en el que sale ceca (X). Es decir, para cada uno de estos casos (en los que al haberla tirado cuatro veces no aparecieron ni tres caras ni tres cecas consecutivas), tengo que considerar *un* caso que es poner **lo opuesto** de lo que salió en la cuarta. En el ejemplo, sería CXCCX. Bien: esto dice que al tratar de contar $A(5)$, tengo que incluir *todas* las que había en $A(4)$. Basta que le cambie el resultado a la quinta de manera tal de elegir lo contrario de lo que salió en la cuarta.

¿Es suficiente esto? Verá que no. ¿Qué falta?

2) Tomemos los casos que contribuyeron a $A(3)$, o sea, cuando no había habido ni tres caras ni tres cecas seguidas. Lo que voy a hacer es contar aquellas en las que la cuarta y quinta tirada sean (las dos) opuestas a la tercera. Por ejemplo, si al haberla tirado tres veces salió CCX, esta situación va a dar lugar a CCXCC. De esa forma, *todos los casos* que contribuyeron en $A(3)$ darán lugar a un caso de $A(5)$. Espere: ya sé lo que me estará por preguntar: ¿y cómo sabe usted que no las contó antes, cuando hizo la cuenta de las de $A(4)$? (¿quiere pensar un instante la respuesta de por qué *seguro* que no la contamos antes?) Es que con este procedimiento, *las dos últimas tiradas son iguales: ambas caras o ambas cecas*. En cambio, en el caso anterior, el caso (1), allí la cuarta y la quinta eran *opuestas*.

Ahora sí, estoy seguro: cada vez que haya tirado la moneda cinco veces y no hay ni tres caras ni tres cecas consecutivas, es porque la obtuve o bien de una de *cuatro* a la que le cambié la última (para que la quinta y la cuarta sean diferentes), o bien una de *tres*, en donde las dos últimas son *ambas iguales entre ellas pero opuestas a la tercera*.

La moraleja de este análisis es que

$$A(5) = A(4) + A(3)$$

Como $A(3) = 2$ y $A(4) = 6$ (como vimos antes), entonces podemos concluir que $A(5) = 10$.

Y así siguiendo, está claro que estamos en condiciones de *construir una fórmula general*:

$A(n) = A(n - 1) + A(n - 2)$

La lista entonces de los primeros casos es:

$$A(1) = 2$$

$$A(2) = 4$$

$$A(3) = 6$$

$$A(4) = 10$$

$$A(5) = 16$$

$$A(6) = 26$$

$$A(7) = 42$$

$$A(8) = 68$$

$$A(9) = 110$$

$$A(10) = 178$$

Acá quiero parar. ¿Por qué? Es que ahora quiero completar el problema y contestar la pregunta original. Ya sé, se olvidó. No importa; la pregunta era: ¿cuál es la probabilidad de que al tirar una moneda diez veces seguidas aparezcan o bien tres caras o tres cecas en forma consecutiva?

¿Qué haría usted ahora para contestar la pregunta?

Como siempre, hace falta calcular los casos *favorables* y dividirlos por los casos *posibles*.

Contar los casos *posibles* es fácil. Al tirar la moneda 10 veces seguidas, hay $2^{10} = 1024$ resultados posibles.

¿Y los casos favorables? Fíjese que $A(10)$ lo que cuenta es el número de veces que al tirar una moneda 10 veces ***no aparecen ni tres caras ni tres cecas consecutivas***.

Entonces, la probabilidad de que al tirar una moneda *no* salgan ni tres caras ni tres cecas consecutivas es

$$A(10) / 1024 = 178 / 1024 = 0,1738281\dots$$

Por lo tanto, la probabilidad de que Sí salgan tres caras o tres cecas seguidas es:

$$1 - 178 / 1024 = 1 - 0,1738281... = 0,8261719...$$

¿Qué quiere decir este resultado? Que es *altamente probable* que si usted arroja una moneda al aire *diez* veces, la moneda caiga tres veces del mismo lado consecutivamente, más de un 82% de las veces. ¿Se imaginaba esto?

Luego de este análisis, ¿no tiene ganas de intentar con cuatro consecutivas? ¿O cinco?

Prohibida su reproducción

La distribución en el patio del colegio

Suponga que usted está en un colegio. En un patio se han congregado *todos* los alumnos (y alumnas). Lo curioso es que hay *exactamente* la misma cantidad de mujeres que de varones. Uno de los profesores de Educación Física toma el micrófono y les dice:

Distribúyanse en el patio [que es muy grande] de manera tal de seguir la siguiente regla: entre dos varones tiene que haber ubicada una nena pero también al revés: entre dos nenas tiene que haber un nene.

Para ser más explícito: si yo elijo dos nenas cualesquiera, en el segmento que las une *tiene* que haber un nene, pero si yo elijo dos nenes cualesquiera, en el segmento que los une *tiene* que haber una mujer.

“Yo me voy a dar vuelta y cuando ustedes me avisen que ya lo lograron, yo, sin mirar, les voy a decir cuál fue la distribución que encontraron.

Preguntas

¿Cuántas distribuciones posibles hay? ¿Cuál o cuáles pudieron haber encontrado los alumnos? ¿Cómo podía saber el profe-

sor sin mirar? Fíjese qué le parece: tome un papel y una lapicera e intente usted. Verá lo que sucede. Yo sigo a continuación.

Solución

Espero que usted lo haya intentado porque así entenderá lo que voy a escribir acá. Cuando uno quiere encontrar una distribución de todos los alumnos, descubre que hay una *única* forma: ¡ponerlos a todos en hilera, alternando hombres y mujeres!

Seguro que esta es *una* potencial distribución que cumple con la regla que pidió el profesor, pero la pregunta subsiste: *¿es la única?* Y si fuera la única, *¿por qué?*

En principio, me quiero quedar tranquilo de que usted puede visualizar que poner a todos en una fila alternando los sexos *es* efectivamente una solución. Lo que me parece interesante es mostrar que *no puede* haber ninguna otra forma. Veamos.

Supongamos que sí, que hubiera *alguna* otra forma de distribuirlos cumpliendo la regla pedida de manera tal que *no todos* estén ubicados en una fila. Por lo tanto, en esta *nueva* forma, quedarán formados *algunos triángulos*, en los cuales los vértices son tres estudiantes cualesquiera. Es muy posible incluso que haya *muchos* de estos triángulos. Si así fuere, de todos los triángulos que hay, elijo el que tenga el área más chica. Es decir, como habrá un número *finito* de triángulos, debe haber alguno que tenga el menor área entre todos. Si hubiera dos (o más) de área mínima, elijo uno cualquiera de ellos y lo llamo ABC (fíjese en la Figura 1).

Seguro que *dos* de los tres vértices tienen que ser estudiantes del mismo sexo, quizás los tres, pero lo que importa es que hay por lo menos dos que son varones o dos mujeres.

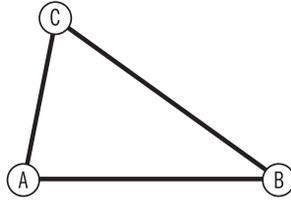


Figura 1

Como dos de ellos tienen que ser del mismo sexo, supongamos que A y B son dos varones. Siguiendo la regla, *tiene* que haber una niña entre A y B. La voy a llamar D (como se ve en la Figura 2).

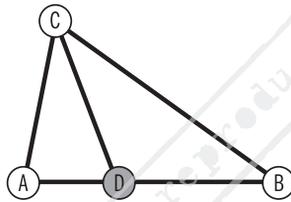


Figura 2

¿Qué le sugiere esta figura? Piense que si *tiene* que haber una niña (D), entonces hay otros dos triángulos que quedaron formados: ACD y DCB. Si recuerda, el triángulo ABC lo elegimos porque era, de *todos* los posibles triángulos, el que tenía *menor área*. Sin embargo, cualquiera de los dos ‘nuevos’ tiene área menor. ¿Moraleja? Haber creído que existía *un* triángulo siquiera fue lo que nos llevó a una contradicción. Por lo tanto, ¡no hay triángulos! Y si no hay triángulos, es porque están todos en una misma fila (o hilera). ¡Y listo!

El profesor sabía lo que habría de encontrar mucho antes de darse vuelta y, por supuesto, no necesitaba mirar nada. ¿No le resulta bonita esta demostración?

Coincidencias

Quiero presentar acá tres historias. Las tres son ciertas. Me ocupé específicamente de comprobar que cada una de ellas estuviera validada con suficientes ‘fuentes’ que garantizaran su veracidad. Eso sí: cuando las lea, usted tendrá derecho en vacilar, dudar y preguntarse: ¿seguro? Y sí... *seguro*. Acá van.

Corría el año 1995. Una pareja, Alex Voutsinas y su novia Donna, estaba a punto de casarse. La ceremonia sería en Boynton Beach, una ciudad de menos de 70 mil habitantes ubicada cerca de West Palm Beach, en el estado de Florida. La semana previa al casamiento, estaban en la casa de la madre de Donna buscando fotos de cuando ella aún era una pequeña beba. La idea era completar las que había aportado Alex de manera tal de armar un álbum con fotos de ambos a medida que habían ido creciendo y después, generar un video que presentarían antes de la cena, tal como es habitual en una buena parte del mundo. Hasta acá, todo ‘normal’.

Mientras estaban revolviendo uno de los cajones y las fotos pasaban de mano en mano, Alex pegó un grito, como sorprendido:

—¡¡¡Pará, pará!!! Dejame mirar esa foto que tenés en la mano —le dijo a su futura señora—. ¿Podés creer? —siguió diciendo él.

—¿Qué tengo que creer? —aportó Donna.

La foto estaba sacada en Disneyworld, Orlando. Donna estaba posando con uno de los personajes de Disney junto a sus dos hermanos. Lo que motivó el grito de Alex no fue ‘esa parte de la foto’, sino lo que se veía más atrás, en un segundo plano, sobre la izquierda.

Varias personas paseaban ignorando lo que sucedía con quien sacaba la foto. En particular, se ve a un señor empujando un ‘cochecito’ que lleva un niño.

—No lo vas a poder creer, ¡¡pero ese señor se parece a mi papá!! —siguió Alex.

—¿Cuál? —dijo Donna.

—El que está empujando el cochecito. ¿Sabés qué sucede? ¡El que está en el cochecito... soy yo!

Y efectivamente, así había sucedido. Mientras el padre de Donna sacaba la foto de sus tres hijos con uno de los personajes de Disney, más atrás, el señor que empujaba el cochecito, quien paseaba con su hijo, era el padre de Alex. Todo sucedía... ¡al mismo tiempo!

Hay varias cosas notables: primero, la coincidencia, el azar o el nombre que usted quiera ponerle. Después, *inexorablemente* aparece (y apareció en la charla tal como está relatada por ambos) la conclusión de que ¡esta boda *tenía* que suceder! Habían nacido ¡el uno para el otro! Estaban *destinados* a vivir juntos.

La foto fue sacada en 1980, y Alex logró que su madre encontrara fotos de ese mismo viaje (sin Donna, claro está), con el padre y él vestidos de la misma forma (como era esperable) pero *sin* el personaje de Disney. Alex todavía vivía en Montreal, Canadá, de donde es oriundo tanto él como sus dos padres. Donna es dos años mayor que Alex. Se conocieron en Estados Unidos, cuando

ambos empezaron a trabajar en el mismo hotel. Eso sucedió en 1994. Se casaron como queda dicho, un año después.

Primera pausa.

Sí, ya sé: *parece increíble* pero me apuraría a decir que era *esperable* que sucediera. Leyó bien: *esperable*. No me refiero a que les pasara a ellos dos en particular, pero sí, que sucediera en alguna parte del mundo. La probabilidad de que esta escena suceda es ciertamente muy pequeña, muy baja... ¡pero no es cero!

Y esta es la parte que me interesa destacar de la historia. Si uno piensa en la cantidad de fotos que se sacan en todas partes del mundo en todo momento, y ni hablar ahora que ni siquiera es necesario *llevar una cámara de fotos* con uno sino que ya viene incluida en el teléfono celular, la cantidad de imágenes que se sacan en todo momento es increíblemente grande. Es tan grande, que la probabilidad de que haya pasado lo que pasó es más grande que *ganar la lotería*. Y fíjese que nadie se sorprende porque *alguien gane*, y que gane alguien, casi todas las veces que se juega. Ahora bien: una cosa es que esto le pase a usted (o a mí), y otra cosa es que *pase en general*.

Esa es la conclusión que le invito a sacar: lo que parece una coincidencia y algo muy peculiar, es porque está la foto, las personas tuvieron acceso a ella y podrán hablar sobre ella el resto de sus vidas. Pero, en sí mismo, la existencia de la foto y el encuentro que se produjo en Disneyworld era *esperable* que sucediera.

Y como escribí antes: no nos pasamos llamándonos por teléfono entre todos para informar que *alguien* ganó la lotería. ¡Es esperable que suceda!

Ahora, segunda historia.

Es muy poco probable que usted haya escuchado hablar de Samuel Langhorne Clemens. Al menos yo no sabía quién era.

Después supe que fue un escritor muy famoso. Aun así, habrá sido muy famoso, pero yo nunca había escuchado su nombre.

Cuando —finalmente— me dijeron el seudónimo con el que firmaba, allí sí *supe de quién se trataba*. El nombre con el que se hizo popular fue Mark Twain. Twain fue no solo escritor sino que además fue un gran ‘charlista’ y, encima, humorista. Hay muchas historias alrededor del origen del pseudónimo, pero no es esa la razón por la que estoy escribiendo estas líneas.

El más famoso de los cometas, el que conocemos virtualmente todos (de los muchos que hay), es el cometa Halley. Lo notable es que solo es visible desde la Tierra una vez cada 75 o 76 años. Una de esas veces fue el 16 de noviembre de 1835. Dos semanas más tarde, el 30 del mismo mes, nació Mark Twain. En el año 1909, escribió que él había “llegado a la Tierra junto con una visita del cometa Halley. Es muy probable entonces que me vaya con él también”. Lo curioso fue que el cometa reapareció el 20 de abril de 1910. Para justificar su predicción, Mark Twain murió de un ataque al corazón al día siguiente... como él mismo había predicho.

No sé si es exactamente comparable con la historia anterior, pero es notable que hubiera sucedido.

Y por último, un tercer evento, también sorprendente.

Uno de los actores más reconocidos y prestigiosos de esta época es Anthony Hopkins. Hopkins nació en 1937, en Gales. En el año 1972, cuando tenía 35 años y todavía no había alcanzado el reconocimiento mundial que tiene hoy, sostuvo una ‘pelea’ con el director del Teatro Nacional de Londres. Esa discusión le costó su puesto en la obra que estaba representando, la muy celebrada *Macbeth*. No solamente renunció, sino que en ella Hopkins ocupaba el papel principal. Mientras esto sucedía, el actor luchaba en otros frentes de su vida privada, en particular con episodios se-

veros de depresión que lo llevaron a consumir una gran cantidad de alcohol que terminaron poniendo en riesgo su vida.

Afortunadamente para él (y lo digo sin conocer absolutamente nada más de lo que estoy escribiendo), recibió una oferta para trabajar en una película: *The Girl from Petrovka* (*La niña de Petrovka*). La película habría de basarse en una novela muy reconocida en ese momento, escrita por el autor George Feifer, de origen norteamericano. Como la acción se sitúa en Moscú, y se trata de un reportero norteamericano que se enamora de una bailarina rusa, Hopkins quiso leer el texto antes de empezar a rodar la película. El problema con el que tropezó es que nadie parecía tener el texto original, cosa que desesperó al propio Hopkins.

Decidido a encontrar el libro, comenzó a recorrer librerías londinenses y cada vez estaba más frustrado porque no podía dar la novela y se había *empecinado* en encontrarla. Después de bucear en las más importantes, terminó en librerías que vendían libros usados, antiguos, de segunda o tercera mano, etc. En un momento, ya fastidiado con su ‘mala suerte’, se dirigió a una de las estaciones de subte, más precisamente la que está ubicada en Leicester Square, en el centro de Londres. Mientras esperaba que llegar el tren, en uno de los bancos de la estación, *alguien había olvidado un libro*.

(Supongo que en este punto usted se imagina lo que pasó, pero la historia no termina acá. Téngame un poco de paciencia y verá cómo sigue todo).

Efectivamente, como usted habrá intuido, el libro que apareció en el banco ¡era la novela que buscaba Anthony Hopkins! Una copia usada, leída, subrayada, marcada... pero copia al fin, copia de *La niña de Petrovka*. En los márgenes había anotaciones que terminaron ayudando a Hopkins en su trabajo actoral, algo que él siempre reconoció. Pero hay más.

Cuando comenzó el rodaje de la película, ya había pasado casi un año. Hopkins estaba verdaderamente muy preparado. El día que empezaron la filmación, Feifer (el autor del libro) se acercó para presenciar cómo habrían de darle vida a lo que él había imaginado. Más aún: además de Hopkins, en otro de los papeles centrales, haciendo el papel de la bailarina trabajaba Goldie Hawn, razón por la que Feifer estaba ciertamente muy interesado.

Cuando se hicieron las presentaciones de rigor, Hopkins lo llevó a Feifer hasta su camarín y le contó la historia que había vivido con el libro. El que se quedó sin palabras esta vez fue el propio Feifer. Tomó el libro y lo recorrió de principio a fin, sin levantar la vista. Permaneció en silencio durante un buen rato, tanto que terminó incomodando a Hopkins: “¿Pasa algo?”.

Feifer le contestó que sí, que ‘pasaba algo’. Esa era una copia de él, de Feifer. Como era fácilmente observable, Feifer había escrito en los márgenes todo lo que él creía que debía ser agregado si es que alguien terminaría haciendo una película sobre el libro. Le había prestado el texto a un amigo, con un encargo especial de que no perdiera esa copia, porque contenía *todo* lo que él creía que era importante y le había llevado mucho tiempo hacer todas las observaciones que figuraban allí.

El amigo había perdido la copia, y esa copia fue el texto que terminó encontrando Hopkins en la estación de subte. Al final de este artículo escribí algunas referencias mediante las cuales usted podrá confirmar lo que yo escribí, pero ante cualquier duda, si *googlea* la historia, la va a encontrar sin ninguna dificultad.

Moraleja

Sí, parece raro. No solo la historia de Hopkins sino la de Mark Twain y, por supuesto, la de la foto, pero en la medida en que la probabilidad de que un evento suceda no sea nula, por más pequeña o infinitesimal que sea ese ‘numerito’, el que mide la probabilidad, entonces es *posible que el evento suceda, que pase...* Lo que es notable es que se pueda reportar y que haya *pruebas* de cada uno de los acontecimientos.

Y para terminar le propongo que piense lo siguiente: ¿se imagina la cantidad de hechos que *no fueron* porque alguien sacó una foto un segundo más tarde o un segundo más temprano, o porque alguien cruzó la calle un instante después o un instante antes? ¿Los aviones que no chocaron porque le ‘erraron’ por unos segundos? ¿Se imaginó alguna vez que usted podría no haber encontrado a su compañera/o en la vida, si no hubiera ido o no se hubiera quedado; o quizás justo ‘se quedó’ cuando se estaba por ir o justo atendió el teléfono cuando no debía estar en su casa...? Mientras la probabilidad no sea CERO, ¡todo puede pasar! Si quiere, llámelas coincidencias o como la/lo deje más tranquilo. Pero no se sorprenda tanto... o sí.

Referencias

- 1) <https://www.guideposts.org/inspiration/miracles/gods-grace/by-the-book>
- 2) https://www.rbth.com/articles/2012/08/08/the_girl_from_petrovka_conveys_the_soviet_spirit_in_an_american_way_17117.html
- 3) https://www.huffpost.com/entry/alex-and-donna-voutsinas_n_2910919

El contador de Kruskal

Un matrimonio no muy publicitado es el de la magia con la matemática. De la unión surgió lo que se conoce con el nombre de “matemagia”. Conviven desde hace muchísimos siglos y se han llevado siempre muy bien. El problema es que históricamente el papel dominante de la relación lo ha llevado la magia. La matemática ha quedado con un rol casi invisible, muy pasivo, transparente.

A los magos (y con toda la razón del mundo) no les gusta develar sus secretos. De esa forma, defienden (y definen) su profesión. Pero, al mismo tiempo, mostrar cómo la matemática es el motor escondido o subyacente en varios de sus trucos serviría para hacer un poco más de justicia y exhibir el costado lúdico de una ciencia que no ha tenido buena prensa. O para decirlo de otra forma: no siempre recibe el crédito que le corresponde.

Me apuro a decir que no estoy afirmando que sin matemática no habría magia ni magos, sino que me gustaría exponer algunos trucos que forman parte del arsenal de un buen mago y explicar por qué o cómo funcionan.

El caso que quiero presentar acá es uno en el que un mago intenta hacer creer a sus interlocutores que tiene el poder de leer la mente. Contiene además un atractivo extra: no funciona siem-

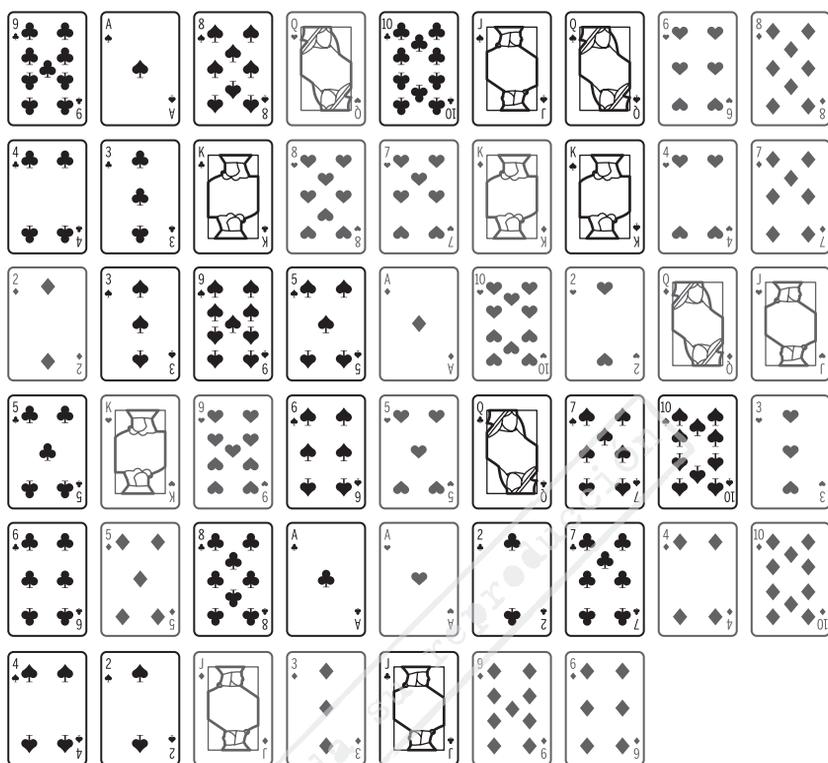
pre. Es decir, es un truco que tiene una muy alta probabilidad de que salga bien, pero no es infalible.

De por sí, esto solo ya es un hecho notable, porque un mago tiene que aceptar presentarse ante el público, invitándolo a que le crean que él puede leer la mente de quien será su interlocutor, pero exponiéndose a que quizás no pueda conseguirlo o, lo que es lo mismo, exhibirse vulnerable. Si no anda, sería el caso de un mago que no hace magia.

Pero la matemática le da algunas garantías: no garantiza infalibilidad, pero el porcentaje de veces en el que sí funciona supera el 84%. Es un porcentaje alto, por supuesto, pero el mago acepta correr algunos riesgos. Empecemos juntos y verá que las reglas son muy sencillas. Mire la figura que acompaña este texto: allí se ven los 52 naipes de un mazo completo de cartas francesas. Están ordenados en seis filas porque no caben todas en una sola hilera: la primera es el nueve de trébol, la segunda el as de pique, la tercera es el ocho de pique y así siguiendo hasta llegar a la última que es el seis de diamante.

Ahora, piense un número cualquiera entre uno y diez.

Como usted no está aquí mientras yo estoy escribiendo estas líneas, voy a suponer que usted eligió (y no me dijo) el número ocho.



Empiece a contar cartas de izquierda a derecha hasta llegar a la octava carta. Resulta ser un seis (de corazón). Lo que importa es el número, no el “palo”. Como llegó hasta un seis, cuente ahora seis cartas hacia la derecha a partir de allí, y si no le alcanzan las cartas, siga con la fila de abajo. ¿A qué carta llega? A un siete (también de corazón). ¿Qué hace ahora? Cuenta siete cartas a partir del siete de corazón, hasta llegar a un nueve (de pique). Y así siguiendo. Ahora tendría que contar nueve cartas a partir de allí y continuar con el proceso.

Como usted advierte, llegará un momento en que no podrá

avanzar más porque se le van a acabar las cartas. Cuando llegue hasta allí, retire esa carta del mazo.

Una observación más (muy importante): si al ir avanzando usted se tropieza con una carta que no tiene número sino una letra (o sea, una J, una Q o una K), haga de cuenta de que llegó a un cinco y cuente cinco cartas hacia la derecha⁶¹.

Esas son todas las reglas: ahora le toca usted.

Elija un número entre uno y diez, detenga acá la lectura, vaya hasta la figura anexa, inicie el recorrido y, cuando tenga la carta en la mano, vuelva que yo la/lo espero.

¿Ya está? Bien. Puedo anticiparle que sé cuál es la carta que tiene en la mano. ¿No me cree?

Vea, usted tiene en la mano el seis de diamante. ¿Es así?

Como usted advierte, yo no tengo manera de saber cuál fue la última carta a la que usted llegó y no pudo avanzar más, porque no sé cuál fue el número que había pensado originalmente y, por lo tanto, no puedo saber desde qué carta empezó a contar.

Y entonces, ¿cómo puede ser? ¿Cómo puedo saber yo desde acá su carta final? No sabe cuántas ganas me darían de poder estar junto a usted para ver su cara de incredulidad y asombro. Al menos, eso es lo que me pasó a mí y a la abrumadora mayoría de las personas con las que puse esto en práctica.

Antes de avanzar, le sugiero que me siga en este razonamiento: la carta que tiene en la mano (seis de diamante) es una carta que dependió del número que usted pensó de entrada (un ocho).

61. Esto es solo una convención. Podríamos adjudicarle un valor cualquiera, pero en realidad hay una consideración un poco más profunda para hacer: si uno tomara los valores once para la J, doce para la Q y trece para la K, si bien el truco sigue siendo atractivo, la probabilidad de que funcione disminuye, no mucho, pero disminuye.

¿Cómo podría haber sabido yo con qué número habría de empezar usted? Es obvio que no tengo manera.

La pregunta inmediata que uno podría hacerse es: ¿y si en lugar de haber empezado con un ocho, hubiera empezado con un cuatro? ¿O con un uno? ¿Qué habría pasado? ¿A qué cartas hubiera llegado? La/lo invito que haga la prueba y verá lo que sucede (vaya y pruebe, vale la pena que lo haga con un par de números hasta llegar a alguna conclusión). Con todo, recuerde que escribí al principio que el truco no funciona siempre.

¿Qué descubrió? ¿No es notable? La carta a la que uno llega al final ¡no depende del número original que uno piensa (salvo una excepción)! Cualquiera sea el número con el que usted empieza, la carta del final es el seis de diamante, y la excepción es si usted pensó un cinco. En ese caso, el truco no funciona (la carta final en ese caso es la J de diamante), pero igualmente el resultado es impactante, porque funciona con nueve sobre diez posibles elecciones de números al comienzo.

Para haber llegado a descubrir su carta final, yo hice el mismo proceso que usted. Elegí como número “secreto” el número uno, lo que me obligó a empezar con el 9 de trébol y seguí desde allí.

Naturalmente, me imagino que debe estar pensando: ¿qué pasaría si yo distribuyera las cartas de otra manera? Es decir, yo elegí una forma de distribuir las 52 cartas y usted tiene derecho a dudar sobre lo que sucedería si cambiáramos el orden. Vaya y hágalo. Mezcle el mazo tantas veces como quiera, distribuya las cartas en el orden que quiera y empiece el proceso de nuevo. La probabilidad de que vuelva a suceder algo parecido es muy alta.

Para terminar, los créditos a quienes corresponden. Este truco es tan famoso que tiene nombre. Fue inventado por el matemático y físico norteamericano Martin Kruskal (1925-2006) y popularizado por Martin Gardner. Sus aplicaciones no se detienen en la

magia, sino que también es muy utilizado en criptografía y sirve para romper códigos y/o claves secretas.

El resultado está basado en un fino cálculo de probabilidades que es lo que garantiza el éxito final en alrededor del 84% de los casos. Obviamente escapa al objetivo de este texto exhibir la demostración de por qué la probabilidad de éxito es tan alta, pero para quienes se hayan quedado intrigados, les sugiero que vean los links que figuran aquí⁶².

En todo caso, es bueno saber que la magia y la matemática se han llevado muy bien durante mucho tiempo, y de allí el nombre de matemagia. De paso, y más allá del entretenimiento y la sorpresa, es capaz de proveer herramientas que podríamos estar usando en la vida cotidiana y que nos son totalmente transparentes⁶³.

62. Para aquellos lectores interesados, las referencias a trabajos en esa dirección son los siguientes:

1) <http://www.singingbanana.com/Kruskal.pdf> De acuerdo con la demostración que hace el autor de este texto (James Grime), si llamamos n al número de cartas involucradas y x al valor *promedio* de las cartas, entonces, la probabilidad de que el mago tenga *éxito* con el truco), se mide con esta

fórmula: $P(\text{éxito}) = 1 - \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)^n$

2) <http://arxiv.org/abs/math/0110143v1>

3) <http://divisbyzero.com/2010/03/15/a-card-trick-solution>

4) http://faculty.uml.edu/rmontenegro/research/kruskal_count/kruskal.html

63. Quiero agradecer al doctor Juan Pablo Pinasco, profesor en Exactas (UBA), quien fue el que me sugirió que escribiera sobre “el contador de Kruskal” mientras preparábamos la temporada 2013 de *Alterados por Pi*.

Los números no cierran

Hace unos días, después de escuchar (y leer) algunas estadísticas, me propuse sentarme y escribir sobre ellas, pero compartiéndolas con usted, ponerlas a consideración suya también para descubrir —juntos— qué reacciones le provocan. Estamos tan acostumbrados a relacionarnos con números a través de los medios de comunicación, que *los aceptamos* casi sin siquiera evaluar si son *posibles* o *no*. Me explico.

Un periodista (voy a omitir todos los nombres y las organizaciones para las que trabajan) hizo una afirmación que inmediatamente me hizo ‘ruido’:

En la Argentina, las leyes que controlan el consumo de estupefacientes han sido cada vez más laxas. Tanto es así que si uno tomara en cuenta los datos de las últimas *tres* décadas, el número de personas que consumen drogas ilegales se fue duplicando una vez por año, aproximadamente.

Por un momento, y antes de avanzar, ¿le parece que es posible? No hace falta ser *extremadamente preciso* con los números y ni siquiera discernir a qué drogas se refería el periodista, pero ¿en serio? ¿Usted puede creer que se *duplica* el número todos los años? ¿Por *treinta años*?

Ahora sí, hagamos juntos algunos cálculos.

Supongamos que en el año 1990, por poner un ejemplo, en el país había *mil* personas que consumían algún tipo de drogas. Elegí *mil* para empezar con un número *bajo*. Podría afirmar sin temor a equivocarme que con una población que superaba los 32 millones de personas, es *muy* poco probable que *solamente* hubiera mil personas que utilizaran algún psicotrópico o estimulante prohibido (en ese momento).

Ahora, hagamos las cuentas. Pongo los números en una tabla que tiene dos columnas. La de la izquierda indica el año; la de la derecha, el número de consumidores que debería haber habido si la cantidad se fuera duplicando anualmente. Fíjese lo que sucede:

1990	1000
1991	2000
1992	4000
1993	8000
1994	16.000
1995	32.000
1996	64.000
1997	128.000
1998	256.000
1999	512.000
2000	1.024.000
2001	2.048.000
2002	4.096.000
2003	8.192.000
2004	16.384.000

2005	32.768.000
2006	65.536.000
2007	131.072.000
2008	262.144.000
2009	524.288.000
2010	1.048.576.000
2011	2.097.152.000
2012	4.194.304.000
2013	8.388.608.000
2014	16.777.216.000
2015	33.554.432.000
2016	67.108.864.000
2017	134.217.728.000
2018	268.435.456.000
2019	536.870.912.000
2020	1.073.741.824.000

Es decir, si la afirmación fuera cierta, se producirían varios hechos curiosos:

- a) Al llegar al año 2005 el número superaría la cantidad de habitantes del país.
- b) Si se fija en el número final, el que correspondería al año 2020, el número de personas que consumirían drogas (ilegales, digamos así) llegaría a superar el *billón* de personas, algo así como la población de 150 “Tierras”.

Es decir, lo que dijo el periodista no solo es falso, sino que hay algo mucho peor y es que esa afirmación debería haberle hecho

mucho ruido... *mucho*. Es que una progresión geométrica crece en forma *muy muy* (¿dije 'muy?') *rápida*.

Para el ejemplo, imaginé que empezábamos con *mil* personas en el año 1990. Hagamos otro cálculo, aún más extremo. Supongamos que en el año 1990 hubiera habido *una sola persona* que consumía drogas... ¡una sola! Construyamos juntos la misma tabla con las mismas columnas como hicimos antes: a la izquierda, el año, y a la derecha, duplicando el número cada año pero ahora empezando con *una* en lugar de *mil*. ¿Qué le parece que va a pasar? ¿Quiere pensar por su cuenta un instante?

Antes de hacer ningún cálculo, fíjese que si antes llegábamos a superar el *billón*, ahora, después de *dividir* por *mil*, ahora vamos a llegar a superar los *mil* millones de personas, número que claramente supera la población de la Argentina⁶⁴.

Lo que me importa compartir con usted *no es que el dato estuviera equivocado*: ¡*todos estamos expuestos a cometer errores, y de hecho los cometemos virtualmente todos los días!* Pero hay *cierto* tipo de errores que no deberían suceder, porque tendrían sonar *todas las alarmas antes* de ofrecer esa información al público. Si yo le dijera que una persona tiene 735 mil pares de zapatos, usted dudaría. Si yo le dijera que hoy compré 495 mil litros de leche, usted sospecharía. Si usted le confiara a una amiga que en su oficina trabajan 523 mil personas, es posible que ella le contestara con una sonrisa... sarcástica. Bueno, cuando yo escucho números de ese tipo, me produce la misma reacción. Mi aspiración es que a usted le genere lo mismo.

Antes de avanzar, una breve moraleja: si en su vida cotidiana

64. Si hubiera habido solamente *una* persona en el año 1990, en treinta años habiéramos llegado a 1.073.741.824 personas, o sea, casi un *séptimo* de la población actual de la Tierra. Ciertamente, no somos tantos los argentinos.

na se produce un acontecimiento cualquiera en donde los datos crecen en forma *exponencial* (como fue el caso de la *duplicación de personas consumidoras de drogas*), usted póngase *inmediatamente en estado de alerta: prepare sus antenas y preste atención*. Tenga en cuenta que los números crecerán muy rápidamente y cuestiónese si lo que está viendo es *posible*. No trate de hacer las cuentas con precisión, pero sí tenga cuidado con los *órdenes de magnitud*, como en el caso de los zapatos, la leche o las personas que trabajan en una oficina. Más aún: si puede, *ponga en duda lo que le dicen*. No digo que no sea cierto, pero póngalo en duda, y ponga su cerebro en ‘modo estimar’. Créame que la/lo va a ayudar.

Otro ejemplo

Miriam es la hija menor de mi amiga Érica. En total son cuatro hermanos: dos mujeres, dos varones. Miriam está a punto de cumplir 17 años pero ya empezó a trabajar porque quiere cooperar con sus padres ya que aún vive con ellos. El otro día estuve hablando con ella mientras caminábamos por una plaza y me comentó que es una mezcla de convicciones personales, principios que quiere construir en su vida y, sobre todo, porque *no les quiere pedir más dinero, si es que pudiera llegar a esa situación*.

Pero ¿por qué habría de contar yo, aquí y ahora, la historia de Miriam? Es que después de haber *aplicado* en múltiples lugares, finalmente consiguió que la llamaran de un *call center*, es decir, un lugar en donde tiene que estar sentada ocho horas por día, tratando de vender un producto (que, como antes, prefiero no detallar, porque en definitiva no le agregará ni quitará nada a la historia principal).

Quizás valga la pena observar que son todas mujeres, pero el

‘jefe’ las reunió a todas hace unos días (en total son 20) y, junto al mensaje de bienvenida, les explicó cuáles eran las responsabilidades y las reglas que debían observar durante el tiempo en el que estuvieran representando a la empresa, los protocolos que deben cumplir, preguntas que pueden *o no pueden o no deben* formular o *contestar*... en fin: lo que sucedería en cualquier lugar en donde un grupo de personas se incorporan a un trabajo nuevo. Pero lo notable (y lo que me llamó fuertemente la atención) es que el jefe les dijo a todas que quienes ya llevan un año en la compañía haciendo lo mismo que se espera de ellas, consiguen hacer alrededor de ¡mil ventas por día! Sí: mil ventas diarias.

Allí la interrumpí porque el número me parecía *descomunal*. Le pregunté si ella le creyó, y me contestó: “Sí; o mejor dicho, no me pareció nada ‘raro’. ¿Por qué? ¿Te suena mal a vos?”.

Y mientras caminábamos le dije que hiciéramos juntos un cálculo tratando de descubrir si lo que les había dicho era posible. Una vez más, lo que *más* me sorprendía de la situación era que ninguna de las 20 jóvenes que estaban allí reunidas hubiera disputado lo que decía el ‘jefe’. No importa tanto que lo hubieran hecho en el momento, comprendo que es fácil para mí objetar desde *afuera*, pero ¿y después? Cuando terminó la reunión, “¿no se quedaron hablando entre ustedes”.

“No”, me contestó Miriam, mientras pateábamos unas piedritas. “Vení, hagamos algunas cuentas juntos”. Nos sentamos en un banco y como ella parecía entusiasmada, me entusiasmé yo también.

Le dije que me proponía estimar cuánto tiempo debe tardar una persona en hacer una llamada sin importar que termine (o no) en una venta. Supongamos que entre el llamado propiamente dicho, el tiempo que suena el teléfono, que alguien *atienda*, que una de ellas (Miriam u otra empleada cualquiera) le explica

a su interlocutor qué es lo que está tratando de venderle, asumiendo que *al menos le harán UNA* pregunta, que tendrá que pasarle el número de la tarjeta de crédito, la dirección, el número de documento, etc. Entonces: “¿Te parece que *cinco* minutos es una buena aproximación?”.

Por supuesto, tanto usted (como ella y yo) sabemos que ese es un número *irreal*. No hay forma de hacer *ninguna venta* en cinco minutos, pero aceptemos ese número para exhibir que lo que les dijo el jefe no es posible. Sigo.

Tengo que agregar (y nos tenemos que poner de acuerdo en esto también) que en esos cinco minutos la vendedora *tuvo que haber convencido* a su interlocutor/a que *tiene que comprar el producto*. Es decir, no se trata solamente de llamar y ‘explicar’ que *quiere* venderlo, sino que además *lo tiene que vender*, porque no llama solamente para explicar lo que hace.

Pero supongamos condiciones *ideales*. Es decir: todas las veces que llama, vende. Solo hay tiempo para una pregunta, anotar los datos de la forma de pago, la dirección, el documento... *nunca* hay una falla, demora, *ningún cliente* abandona, *todos compran*, todas y todos están satisfechos. Y todo este proceso se logra en *cinco minutos por cliente*.

Como además no hay tiempo para detenerse, si hace una venta cada cinco minutos, en total produce 12 ventas por hora. Como estamos suponiendo que cada empleada trabaja *ocho* horas por día, produce 96 ventas por día... ¡en total! Los teléfonos andan siempre, nadie mira para los costados, no hay ninguna interrupción, nadie va al baño, ni usa un pañuelo, ni mira su celular, nadie tiene nunca ninguna duda... ¡nada! ¡NOVENTA Y SEIS VENTAS POR DÍA!

Es decir, aun en esas condiciones *superideales*, no pueden llegar a las 100 ventas por día... ni hablar de *mil* entonces. En-

tiendo que alguien pueda estimular a un grupo joven y nuevo de empleados/as en una empresa. Entiendo que se pongan un objetivo. Puedo entender *muchas cosas*, pero me surgen dos problemas:

- a) El objetivo es *inalcanzable* por razones obvias.
- b) El problema más serio lo tengo en que ni Miriam ni ninguna de sus colegas *sospechó nada raro*. Aceptaron lo que les fue dicho porque lo imponía la autoridad, la autoridad que *supuestamente tenía el empleador*. Pero aun después, cuando ya no estaba el ‘jefe’, tampoco hubo cuestionamientos entre ellas. ¡*Ese es mi problema mayor!*

Decir que hay empleadas que llegaron a *mil* ventas por día es un despropósito, pero desde el punto de vista del empleador, creo que *también opera en contra de la empresa*, porque aunque las nuevas empleadas no pongan en duda lo que les dijeron, *la experiencia les indicará que lo que les dijeron es falso*. Y no es que el objetivo esté *cerca*. ¡*Es un objetivo imposible!*

Para terminar, y no sé si tiene que ver con este tema propiamente dicho, no hace mucho tiempo una persona, para sostener con —supuestos— *datos el robo* que había producido un gobierno, sostuvo que en cuatro u ocho o doce años... lo que sea, ¡se habían robado un PBI! O sea, el *producto bruto interno de un país*. Bueno, vea... no, eso *tampoco* es posible, ¿lo habrá dicho en serio?

¿Cómo mejorar la forma de embarcar en un avión? (versión 2021)

En marzo del año 2008, escribí una nota⁶⁵ en la que pretendía ilustrar qué es lo que hacía en ese momento el mundo de la ciencia para tratar de resolver un problema que tenían/tienen las compañías aéreas por un lado, y nosotros, los pasajeros, por el otro. Si usted ha tenido alguna vez el privilegio⁶⁶ de viajar en avión, habrá ‘sufrido’ el problema del embarque: lo ubicaron en algún grupo predeterminado de acuerdo con el tipo de billete que compró y, mientras tanto, debe esperar pacientemente que ‘le toque el turno’. Uno tiene que lidiar con la ‘desesperación’ (ajena, pero propia también) por llegar al lugar asignado lo más rápido posible, no solo por el asiento mismo (que está reservado), sino por la necesidad de poder poner el equipaje de mano, abri-

65. La historia apareció en el libro *Matemática... ¿estás ahí?* (Episodio 100, p. 162), y en el diario *Página/12*, aquí: <http://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-101146-2008-03-23.html>

66. En la Argentina, ciertamente *es* un privilegio. Si pudiera, me gustaría hacer un estudio o una estimación de cuánta gente del total de personas que habitan nuestro suelo se subieron alguna vez a un avión. Entiendo que no es el objetivo de esta nota, pero muchas personas toman como *natural* viajar en avión. Les sugeriría que recorrieran nuestro país con un poco más de frecuencia y corriéndose de lo que (nos) es habitual: la Capital Federal y zonas aledañas. Creo que eso contribuiría a extraer mejores conclusiones.

gos, carritos, mochilas, colchones de dos plazas... (una broma, pero usted me entiende y quizás lo ha vivido alguna vez), la lista podría continuar en forma ‘casi’ ilimitada.

Históricamente, esas mismas compañías aéreas quieren tener los aviones ‘en el aire’: ese es el momento en el que les reportan beneficio. Cuando un avión está ‘parado’, la compañía pierde dinero, o si usted prefiere, *pierde de ganarlo*. Dicho todo esto, esa nota tiene ya doce años y, sin embargo, los problemas siguen siendo los mismos.

Sobre fines del año 2019, más precisamente el 27 de diciembre, apareció un artículo⁶⁷ en la American Physical Society, o sea, la Sociedad de Física Estadounidense, que proponía una nueva hipótesis. Los intentos de permitir que subieran primero las personas con asientos en las últimas filas, o bien aquellos que viajaran *sin* equipaje de mano, se abortaron rápidamente porque son muy difíciles de implementar.

Por un lado, permitir que *primero* entren los que van sentados ‘atrás’, requiere que *todos* los pasajeros que viajan en primera o en clase ‘ejecutiva’ tengan que *esperar*. Y como usted bien sabe (y yo también), el que paga más ¡no quiere esperar! Por otro lado, para permitir que ingresen primero los que no tienen ningún equipaje de ‘mano’, demandaría hacer una suerte de ‘pesquisa’ previa. Es decir: cualquier intento de este tipo implicaría tener un tipo de disciplina para ingresar a un avión, que es —obviamente— *no esperable* de quienes hacen *un solo vuelo*. Si fuera un episodio rutinario siempre con *los mismos pasajeros*, uno podría ‘entrenarlos’. Pero no es el caso. Esas ideas no funcionaron.

Si usted se fija en la nota de doce años atrás, verá que Jason

67. https://www.eurekalert.org/pub_releases/2020-01/aps-ats_1010820.php

Steffen⁶⁸ con su método propone separar a los pasajeros en diferentes grupos de acuerdo con la ubicación que tendrán dentro del avión y hacerlos entrar en forma de ‘olas’. Fíjese en la Figura 1 y verá el gráfico que presentó el propio Steffen⁶⁹. Si usted sigue la numeración, advertirá que el orden que él propone implica sentar primero a un pasajero que está en la última fila al lado de la ventanilla (el que lleva el número 1), y después empezar a saltarse una fila por vez (mire donde van ubicados el 2, 3, 4... y así sucesivamente) hasta cubrir *todas las ‘ventanillas’* que, de acuerdo con este cuadro, son en total 24 lugares.

El/la primer/a pasajero/a que va en un asiento del ‘medio’ es el que lleva el número 25, y está ubicado en la última fila, igual que el 1. Siga el mismo patrón de antes y podrá inferir dónde encontrar los números 26, 27, 28, etc. De esa forma, terminará llenando todos los casilleros.

Si me siguió hasta acá seguro que me/se debe estar preguntando a qué ‘olas’ me refería. Y tiene razón. Cada ‘ola’ es un grupo de pasajeros. En este caso, en total son *seis olas* de 12 pasajeros cada una. La primera es la que tiene a los pasajeros del 1 al 12 (ubicados tal como se ve en la Figura 1). La segunda es la que contiene a los pasajeros 13 al 24. La tercera está integrada

68. Jason Steffen es un astrofísico norteamericano que en el año 2008 trabajaba en el FermiLab ubicado en la ciudad de Batavia, muy cerca de Chicago. Allí está instalado el Acelerador de Partículas que fue durante muchos años el más rápido del mundo, hasta que apareció el CERN, en la frontera suizo-francesa, cuyo acelerador fue conocido con el nombre de “La máquina de Dios”. Hoy Steffen es profesor de física y astronomía en la Universidad de Nevada, Las Vegas. Su método es conocido mundialmente como “El método de Steffen” (para embarcar pasajeros en un avión).

69. Mantuve la palabra *Front* que utilizó él para indicar dónde está la parte ‘delantera’ del avión.

por los pasajeros que llevan el número 25 al 36, la cuarta del 37 al 48, la quinta del 49 al 60, y la última es la que involucra a los 12 pasajeros que quedan: los que van del 61 al 72.

Las pruebas demostraron que la velocidad promedio de embarque usando este método era *la mitad del tiempo* que necesitan las compañías aéreas con los abordajes tradicionales. Steffen logró demostrar que su método minimiza el tiempo de todos los otros métodos convencionales conocidos y convenció a los gerentes de esas compañías de que si lo usaran, minimizarían también los ‘choques entre personas que están tratando de sentarse’ e incluso las obstrucciones que se generan cuando cada uno quiere ubicar su equipaje.

Front					
24					18
12					6
23					17
11					5
22					16
10				28	4
21					15
9				27	3
20					14
8				26	2
19					13
7				25	1

Figura 1

Pero eso sucedió hace doce años y, como queda claro, el problema persiste. ¿Por qué? Como escribí antes, entrar en un avión en la forma descripta requiere de una *disciplina y rigor* que resulta virtualmente *imposible de implementar*.

Eso motivó a varios científicos de diferentes áreas a seguir intentando, y usar cada vez más métodos *no tradicionales*.

Un grupo de investigadores de universidades ubicadas en Noruega, Israel y Latvia⁷⁰, elaboraron un modelo con premisas distintas de las que se habían usado hasta acá. Dividieron a los pasajeros en dos grupos: ‘lentos’ y ‘rápidos’. Por un lado, está el grupo de pasajeros que tienden a tardar más tiempo hasta que se sientan. Y por otro, está el *resto de los pasajeros*. Claramente, a este último grupo se le puede pedir que embarque *antes* o *después* que el otro. ¿Cuál es la mejor estrategia entonces? Por supuesto, no se me escapa que conseguir categorías *absolutas* es virtualmente imposible, pero, por un instante, concédame que pudimos distinguirlos y los tenemos separados.

Ahora, piense conmigo lo siguiente: ¿qué es lo que hace que un pasajero *retrase* a otros? Depende de múltiples factores. En principio hay dos que sobresalen:

70. Sveinung Erland es profesor en el Department of Maritime Studies (Western Norway University of Applied Sciences, Haugesund, Noruega); Jevgenijs Kaupuus es profesor en la Faculty of Materials Science and Applied Chemistry (Riga Technical University, Latvia) y en el Institute of Mathematical Sciences and Information Technologies de la University of Liepaja (Liepaja, Latvia); Vidar Frette es investigador en el Department of Fire Safety and HSE Engineering, Western Norway University of Applied Sciences (Haugesund, Noruega); Rami Pugatch, en el Department of Industrial Engineering and Management, en Ben-Gurion University (Beer-Sheva, Israel); y Eitan Bachmat, en el Department of Computer Science de la misma universidad.

- a) Su posición en la hilera que se forma para ingresar.
- b) La fila en la que está ubicado su asiento

Está claro que en un avión *todos* tienen asignado un asiento⁷¹; la dificultad aparece cuando uno quiere elaborar una estrategia que permita minimizar el tiempo que media desde que empezó el embarque hasta que todos están sentados. Pero esto involucra no solo avanzar en la cola, sino que cuando el pasajero llega hasta la fila en donde está su sitio, tuvo que superar todos los obstáculos de las personas que lo precedieron en el pasillo, esperar que cada una/o haya ubicado su equipaje de mano y recién entonces sentarse en el que le corresponde. Son muchas variables que además se ven afectadas porque hay gente que no puede ubicar su equipaje arriba de los asientos porque es muy pesado, o porque no entra en el compartimento superior, o porque hay que cambiarlo de posición, o porque hay fricciones con *otros* pasajeros que ingresaron antes y ocuparon más espacio del que les correspondía... Y sin contar la *presión* que una persona siente por la responsabilidad de estar deteniendo *todo* el proceso. Todo cuenta.

A medida que leía el trabajo de Erland, pensé lo siguiente: si uno hace entrar y sentar a aquellos que están ubicados en las últimas filas, el método *no evita la cola* sino que *la traslada en el espacio*. Ahora la cola se forma dentro del avión y no afuera como estaba antes de empezar el embarque.

Pero volvamos a los dos grupos: los rápidos y los lentos. La

71. La compañía Southwest, de Estados Unidos, garantiza que usted tenga un asiento, pero no le dice cual. Es como ingresar a ver una película en donde las entradas *no son numeradas*. Eso es lo que hace Southwest, ¡y no les va mal para nada!

intuición pareciera indicar lo siguiente (y en el camino, deténgase y piense qué es lo que haría usted). ¿Qué grupo tendría que ingresar primero: el rápido o el lento?

Uno está tentado a decir que deberían ingresar los más rápidos primero y después el resto. De hecho, las compañías aéreas ya hacen una distinción a la que estamos acostumbrados y que nos resuelve una parte del problema (en apariencia): los pasajeros que viajan con niños o con bebés, entran primero. Lo mismo sucede con las personas que tienen algún tipo de discapacidad física visible como aquellos que necesitan muletas o sillas de ruedas o ‘andadores’, por poner tres ejemplos clásicos. Da la sensación de que una vez que uno resolvió la situación de este grupo de personas que son las visiblemente más necesitadas, el resto no debería presentar inconvenientes.

Sin embargo, la intuición falla: Erland y su grupo lograron *demostrar*⁷² que el tiempo de ingreso disminuye sensiblemente si uno hace ingresar primero a las personas más ‘lentas’. Parece antiintuitivo, ¿no es así? ¿Cómo puede ser *mejor* que entren primero las personas más lentas?

Pero después de haber elaborado su estrategia, y haberla comprobado usando una metodología que está basada en lo que en física se llama “Geometrías de Lorentz”, el objeto es tratar de *evitar* lo que ellos llaman la *serialización* (ya me explico) y promover la *paralelización* (y otra vez, ya me explico). ¿Qué quiere decir esto?

Hacer algo en forma *seriada* significa que los eventos se van produciendo unos tras otros: uno necesita esperar que suceda uno para poder pasar al siguiente. Hacerlos en forma *paralela* significa lograr que se produzcan varios eventos en forma si-

72. <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.100.062313>

multánea, en *paralelo*. Si en el caso del embarque de un avión usted pudiera conseguir que múltiples pasajeros se sentaran en forma simultánea, lograría disminuir fuertemente el tiempo a invertir.

Por supuesto, aunque no lo escribí hasta acá, la idea de *modelar* surge de la imposibilidad de *practicar con personas físicas*. La matemática entonces provee de modelos que tratan de replicar o simular la realidad. De hecho, las conclusiones que leerá más adelante se produjeron luego de haber repetido la experiencia más de *¡diez mil veces!* (con un simulador, por supuesto)

Como escribí antes, entonces hay dos alternativas entonces:

- a) Hacer entrar primero a los más rápidos.
- b) Hacer entrar primero a los más lentos.

En el caso (a), cuando el último de los pasajeros ‘rápidos’ ya se sentó, el primero de los más ‘lentos’ hace su ingreso. Entre el tiempo que tarda en ubicarse y la obstrucción que produce, *impide* que varios se sienten simultáneamente.

En cambio, en el caso (b), a medida que se va llegando al final de los más lentos, uno está en condiciones de hacer entrar a la primera tanda de los más rápidos. Por ejemplo, como dicen los autores, uno podría imaginar que en el tiempo que le lleva ubicarse al último de los lentos, tres o cuatro de los rápidos podrían encontrar sus asientos.

Mientras tanto, Erland⁷³ hizo algunas reflexiones que quiero compartir.

73. En este sitio: <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.100.062313> es posible obtener el PDF con el artículo original.

“Cuanto más *en paralelo* se produce la ubicación de los pasajeros, más rápido será el embarque. No se trata de definir diferentes ‘estructuras’ o estrategias para abordar, sino de encontrar la mejor forma de lograr que múltiples personas se sienten al mismo tiempo”. El modelo presentado está basado en un proceso *iterativo* de *dos etapas*. Primero, *todos* los pasajeros se mueven hasta que llegan a la fila en donde está el asiento o si no, hasta que son bloqueados en su trayectoria por otros pasajeros *antes* de llegar a la fila en donde está el asiento que van a ocupar. La segunda etapa consiste en considerar cuánto tiempo permanece un pasajero parado cerca de su asiento, intentando acomodar su equipaje de mano.

Después Erland hace una analogía extraordinaria, que no por conocida deja de tener indudable validez. Suponga que usted tiene que trasladar arena y piedras del punto A al punto B, y para hacerlo va a utilizar un contenedor, de esos ‘amarillos’ o ‘naranjas’ que se ven en las calles o distribuidos en algún puerto. Si usted pone primero la arena, después le quedará muy poco espacio para ubicar piedras o decididamente no tendrá lugar. En cambio, si acomoda primero las piedras, la arena puede filtrarse perfectamente y de esa forma usted maximiza las cantidades. En este caso, evidentemente, el *orden sí altera* el producido final. En términos de embarcar, uno necesita ‘sacarse de encima’ primero a la gente lenta y después quedarse tranquilo porque los ‘rápidos’ siempre encuentran la forma de infiltrarse.

Mientras “el método Steffen” replica —casi— las mismas ideas que la matemática usa para intentar resolver “El problema del viajante de comercio”, en donde los pasajeros entran en ‘olas’ en un sistema rígido y bien determinado, Erland y

sus colaboradores recurrieron⁷⁴ a la física, para crear su modelo⁷⁵.

¿De qué *factores* depende ese ingreso? ¿Qué lo mejora? ¿Qué lo ‘enlentece’? ¿Qué se podría mejorar?

El trabajo presentado por Erland en diciembre del año 2019 permite *predecir la velocidad de cada pasajero para ocupar su asiento*, por supuesto, en forma aproximada, en base a tres parámetros:

- a) Su posición en la ‘cola’.
- b) El número de fila en la que está ubicada la persona.
- c) El tiempo que le llevaría dejar el pasillo libre.

El modelo calcula si —eventualmente— dos pasajeros van a ‘chocarse’ u ‘obstruirse’ mientras van a la búsqueda de su lugar, basando su predicción en cuán lejos están los asientos de ambos y cuán separados están en la cola de embarque. Présteme atención a esta conclusión: si dos personas tienen sus asientos cercanos pero están separados en la hilera que se formó para ingresar (alejados en ‘el espacio’), es muy posible que no haya interferencias entre ellos. En cambio, si tienen asientos distantes pero están muy próximos en *esta misma fila* que los lleva a sus lugares, eso dice que posiblemente *sí* haya interferencia.

74. En un resumen de su trabajo escribieron: “Estudiamos el embarque en un avión en el límite de un gran número de pasajeros usando óptica geométrica en una métrica Lorentziana. (...) La duración del proceso se puede calcular basado en una representación de una ‘fila’ unidimensional que intenta alcanzar asientos ubicados en un diagrama bidimensional espacio-tiempo. Un pasajero retrasa a otros dependiendo de su posición en la hilera que pugna por entrar y sentarse y por la fila en la que está ubicada/o”.

75. https://www.researchgate.net/publication/40670094_Geometria_de_Lorentz_el_universo_en_una_hoja_de_papel

Después compararon el modelo que diseñaron —que hace ingresar primero a los *pasajeros más lentos*— con todos los otros métodos que se usan actualmente. Los resultados que obtuvieron son espectaculares, ya que en promedio el embarque es (casi) un 30% más rápido (un 28% para replicar lo que indica el texto).

Más aún: el tiempo es menor *independientemente* del porcentaje de pasajeros que se consideran ‘lentos’ y el porcentaje de aquellos que tardan más en liberar el pasillo que los conduce a sus asientos.

Hasta acá llegó (al menos por hoy). Estamos ya en el año 2021. El primer vuelo con pasajeros de una línea aérea (en el que debieron *pagar* por un asiento) se produjo en el año 1914. Ha pasado más de un siglo, largamente. El tamaño de los aviones ha crecido brutalmente, cada vez son más rápidos, más cómodos, más seguros, menos ruidosos, tienen mayor autonomía de vuelo y son increíblemente resistentes. Cada vez pueden llevar más pasajeros y transportarlos de un punto a otro del planeta de la forma más eficiente imaginable. También es cierto que en todo este tiempo se ha *optimizado* el espacio para mejorar las ganancias de las compañías aéreas, lo que lleva a que haya menos lugar dentro de los aviones tanto para sentarse con mayor comodidad como para circular. Y esto también conlleva más presión para no tener a los pasajeros esperando mucho tiempo porque *ralentiza* las horas de vuelo real... y así siguiendo.

Sin embargo, y a pesar de todo, todavía no hemos sido capaces de encontrar un método eficaz para embarcarlos. ¿No parece mentira que suceda esto?

Apéndice 1

Quiero agregar algunas notas que fui tomando mientras leía el artículo *madre* de Erland y colaboradores. No pude incluir

todo en la nota principal y por eso quiero compartir con usted algunos de mis apuntes.

- Erland y su grupo utilizaron herramientas de Geometrías Lorentzianas⁷⁶ para probar que si uno hace embarcar primero a los pasajeros ‘más lentos’ y después al resto —los considerados ‘más rápidos’—, entonces el embarque requiere de menos tiempo y, por lo tanto, es más *eficiente*. Esta geometría es el fundamento matemático que utilizó Einstein para su Teoría de la Relatividad General. En este caso, Erland usó la conexión que hay entre la dinámica microscópica de partículas que interactúan (pasajeros que intentan sentarse) con las propiedades macroscópicas que se generan (el tiempo que tardan hasta lograr su objetivo).
- La razón esencial para que esto sea cierto es que la estrategia utiliza al máximo la *paralelización*, o sea, permite que varios pasajeros ocupen sus asientos *simultáneamente* en diferentes sectores del avión.
- Si bien ya lo escribí, quiero enfatizar un argumento del artículo porque me pareció muy interesante. El objetivo es lograr la *paralelización*, o sea, que haya múltiples pasajeros ocupando sus asientos *simultáneamente* en diferentes

76. El artículo de Erland y colaboradores fue publicado en la revista más prestigiosa de física, *Physical Review E*. El prestigio de una revista científica se basa fundamentalmente en el grupo de editores y la calidad de los referees, quienes son los que reciben y juzgan la validez, autenticidad, originalidad y reproducibilidad del artículo ‘a publicar’. Es por eso que cuando Erland y su grupo hacen afirmaciones respecto de cómo corroboraron lo que sostienen en su tesis, yo les creo. En algún sentido es como decir que quienes fueron los referees del artículo hicieron el trabajo que les correspondía y comprobaron que los datos presentados son correctos.

partes del avión. Piense qué haría usted, cuál de estas dos situaciones que le voy a plantear elegiría para minimizar el tiempo de embarque. Si uno hace entrar primero a los más lentos, puede aprovechar cuando se están sentando los últimos de este grupo para hacer entrar a los más rápidos. Eso ofrece una *ventana de tiempo*. Por otro lado, si uno hiciera entrar primero a los más rápidos, podría intentar lo mismo: hacer ingresar a los primeros entre los más lentos mientras se están sentando los últimos de los más rápidos. Esta es *otra ventana de tiempo*. ¿Cuál ventana le parece que es más grande? ¿En cuál de las dos se podrán sentar *más* pasajeros?

- Si lo piensa un ratito, verá que uno puede aprovechar mejor el tiempo en el primer caso: cuando se están sentando los últimos entre los lentos, los más rápidos pueden encontrar sus asientos y ocuparlos simultáneamente. En cambio si uno utiliza la otra estrategia, los más rápidos se ubican rápido también, y no hay mucha oportunidad para que muchos de los lentos que entran primero se puedan acomodar.
- La pregunta esencial es: ¿qué y quién decide que un pasajero/a pertenece al grupo de los más ‘lentos’ o más ‘rápidos’? Claramente, ese es el tema *clave* en todo el artículo. Es difícil ponerse de acuerdo porque hay múltiples restricciones. Uno podría decir que quienes no llevan equipaje de mano deberían pertenecer al grupo de los ‘rápidos’. Podríamos también dividirlos según el número de bultos con el que ingresan al avión. Como no pueden hacerlo con más de dos, habría tres grupos posibles: ninguno, uno o dos. Pero esto también tiene el inconveniente de que el *único* bulto con el que un pasajero ingresa es justamente un ‘carrito con rueditas’, que ocupa lugar mientras lo transporta en el pasillo y mucho lugar en la parte superior del

asiento. Por otro lado, este tipo de equipaje *no cabe debajo de los asientos* y, por lo tanto, inexorablemente requiere de la utilización del compartimento superior. ¿Y el peso? Está claro que habrá que considerarlo como un factor. ¿Y los abrigos? ¿Y el tamaño? Las dimensiones del carrito hacen que muchas veces el compartimento superior no ‘cierre’.

La moraleja de esta parte es: ¡no hay manera de sacar una conclusión general que sirva para distinguir a los dos grupos!

- Hay un hecho muy importante que quiero señalar lo antes posible: puede que exista un método *óptimo* pero, aun si existiera, requeriría de establecer un grupo de restricciones o reglas que los pasajeros deberían cumplir. Estas reglas generan insatisfacción, molestia y tendencia a violarlas o incumplirlas. ¿Quién garantiza que se cumplan? Es por eso que las compañías aéreas aprendieron a coexistir con el problema. Sin necesidad de consultar con los clientes, todos aceptamos con naturalidad que pasajeros que viajan con niños o personas con dificultades físicas entren primero, pero no está claro que uno pueda ‘distinguir’ o ‘definir’ ningún otro grupo que no genere ningún tipo de reacción adversa entre los pasajeros que están esperando en una fila.
- La *otra* distinción que es aceptada por *toda la sociedad*, como si fuera tan natural como las anteriores, es la que se desprende del *dinero*. Es decir, la calidad del asiento que un pasajero va a ocupar tiene un privilegio extra. No solo ofrece mayores comodidades en espacio y mejor comida, sino que ingresa antes, hace menos cola, espera menos tiempo y tiene más opciones para elegir qué hacer con su equipaje de mano.
- Los estudios que hicieron Erland y sus colaboradores muestran algo totalmente antiintuitivo. Si uno permitiera que los pasajeros entraran en el avión *en forma aleatoria* (al azar),

los resultados son muy buenos, ya que resultan más eficientes —en promedio— que los que se usan actualmente.

- Otra estrategia que ha sido investigada *largamente* es la de embarcar de atrás hacia adelante, pero vuelve a suceder algo curioso y nuevamente contradice la intuición. Resulta mucho más eficiente permitir que los pasajeros ingresen al azar que siguiendo la metodología de forzar que entren primero los que se sientan en las últimas filas. Notable, pero cierto.
- Más allá del análisis teórico, aparecen otro tipo de factores a tener en cuenta:
 - a) ¿Aceptarán los pasajeros *rápidos* que los *lentos* ingresen primero? Por otro lado, ¿habrá alguna forma de *definir* lo que significa ser un *pasajero rápido* o un *pasajero lento*?
 - b) Hay personas que no quieren estar sentadas mucho tiempo en un lugar pequeño y preferirían *esperar afuera*. Sus preferencias también tendrían que ser contempladas.
 - c) Aquellos que prefieren esperar afuera y abordar últimos puede que encuentren el lugar destinado para su equipaje de mano ocupado. ¿Qué hacer entonces?
 - d) Las compañías aéreas han implementado una política de cobrar por peso desde hace mucho tiempo. Esto promueve —naturalmente— la idea de llevar una mayor cantidad de equipaje dentro de la cabina. O sea, por un lado, sería preferible que todo el mundo viajara *sin* equipaje de mano para abordar más rápido. Si ese fuera el caso, habría que despachar en la parte de carga del avión un mayor peso, que representaría un incremento en lo que el pasajero paga por viajar.

¿Cuántos triángulos ve usted?

Quiero comenzar en forma bien sencilla. Mire la Figura 1. ¿Cuántos *triángulos* puede distinguir y contar usted?

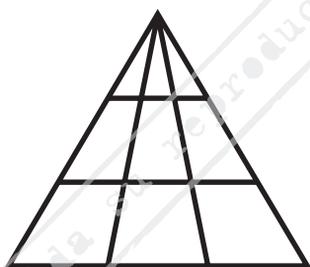


Figura 1

Cuando planteo el problema ante diferentes públicos, las respuestas son también sorprendentes. Ciertamente el problema no es complicado: se trata de *individualizar* cuántos triángulos quedan determinados y después contarlos.

No parece complicado, y en realidad no lo es, pero en algún sentido hay que utilizar una manera *disciplinada* de contar. Es decir: elaborar una suerte de *estrategia* para no perderse ninguno... ni contar dos veces el mismo. Me apuro a dar la respuesta: son 18.

Antes de elaborar un poco sobre la respuesta, quiero hacer una observación: se imagina que el problema no puede empezar y terminar en contar la cantidad de triángulos. *Ese* problema sería no solo sencillo sino muy elemental. No tiene nada de malo, solo que me gustaría proponer *algo más*. Es decir: el problema termina cuando uno encuentra la respuesta y afirma que son 18. Pero me imagino que usted estará pensando en *otros* problemas que pueden surgir luego de haber contestado este.

Ahora que ha buscado la solución por su cuenta, ¿alcanza a descubrir ‘una estructura’ o algún ‘patrón’ en los triángulos que encontró? Me explico.

Tome la figura original, la Figura 1. Comience a *pintar* los 18 triángulos que usted encontró como respuesta y separe triángulo por triángulo como yo hice en la Figura 2.

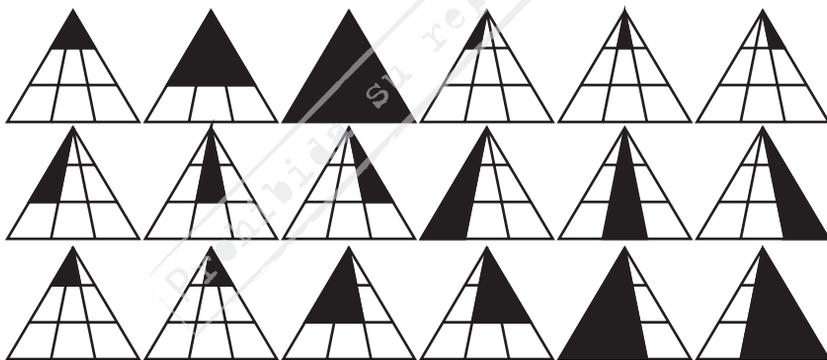


Figura 2

Mírelos con cuidado. ¿Advierte algo respecto de los vértices de cada triángulo? Si lo hace, descubrirá que *todos* los triángulos tienen un vértice común. Y que el vértice superior está en todos. ¿Por qué? Fíjese lo que sucede con *todas* las otras zonas que quedan marcadas/pintadas que *no* contienen al vértice superior.

Haga la prueba y verá que *ninguna es un triángulo!* Esto es muy bueno, porque facilita la tarea de búsqueda. La conclusión es *muy útil* y, por eso, la Figura 2 es muy esclarecedora.

¿Y ahora? Ahora es cuestión de descubrir *otras* estructuras que ayudaron a encontrar los triángulos. Si mira con cuidado otra vez, verá que una vez que uno elige el vértice superior, los otros dos vértices de *todos* los triángulos están apoyados en alguno de los tres segmentos horizontales. Este dato *también* es muy importante, porque si no supiéramos que en total dieron 18, lo que hemos descubierto se puede resumir así:

- a) El vértice superior *tiene* que estar en *todos* los triángulos.
- b) Los otros dos vértices *tienen* que estar en alguna de las tres líneas horizontales.
- c) Como hay *cuatro* segmentos que salen del vértice superior, cada uno de ellos corta los segmentos horizontales en cuatro puntos.

Con estos datos, ¿de cuántas formas puedo construir un triángulo?

Antes que conteste yo o siga con esta línea de razonamiento, ¿quiere pensar usted por su cuenta?

Me olvido del vértice superior porque ese está en *todos* los triángulos. Ahora, parémonos en una de las tres líneas horizontales. Todo lo que tengo que hacer es concentrarme en contar de cuántas formas puedo elegir dos puntos de los cuatro que están en cada segmento horizontal. Mire la Figura 3.

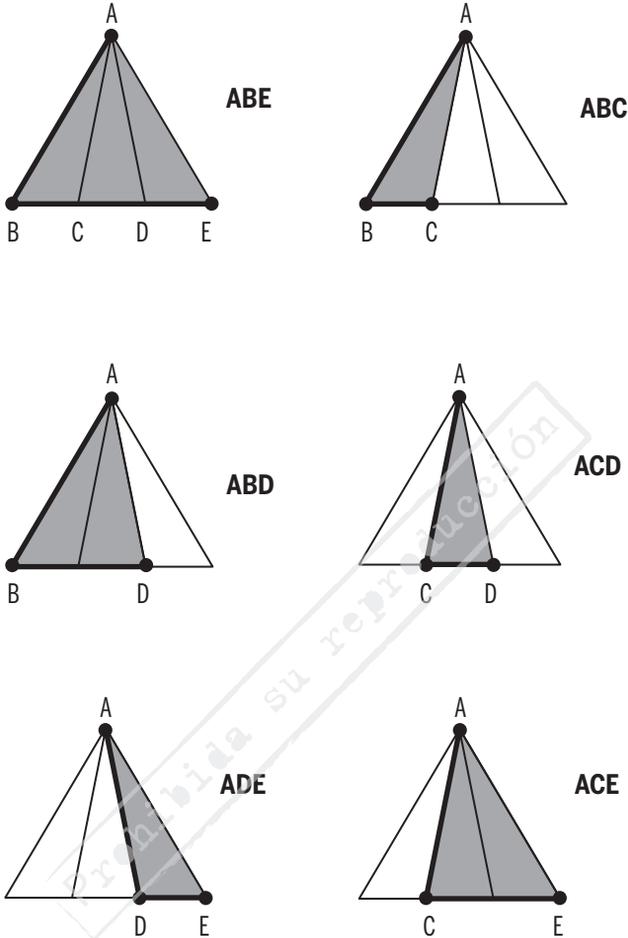


Figura 3

El vértice A está en todos los triángulos. Después, de los cuatro puntos que están en el segmento horizontal (B, C, D y E) hay que elegir dos. ¿De cuántas formas se puede hacer? Si lo piensa un instante, descubrirá que hay *seis* formas posibles:

(B,C); (B,D); (B,E); (C,D); (C,E) y (D,E)

Ahora que hemos *contado* de esta forma, podemos usar la misma idea para contar el número de triángulos en total. Como hay *seis* triángulos por línea horizontal, y hay *tres* líneas horizontales, en total hay 18 triángulos. ¡Y listo! No, un *momentito*. ¿No le dan ganas de *conjeturar* algo más?

Si lo pensamos juntos, creo que usted estará de acuerdo conmigo si escribo la siguiente afirmación: ¡en *este caso particular*, en donde hay *tres* líneas horizontales, el *número total de triángulos que quedan formados* es 18!

Pero, si bien es cierto en este caso, uno podría aprovechar esto que hemos pensado para contestar *otro* tipo de preguntas, un poco más generales. ¿Qué quiero decir con esto?

Me explico (otra vez): si en lugar de haber tenido *tres* segmentos horizontales, hubiera habido *nada más que una (línea horizontal)*, ¿cuántos triángulos quedarían formados?

Esta respuesta es fácil, porque lo hicimos (juntos) antes: contamos *de cuántas formas se pueden elegir dos puntos entre los cuatro que había en ese segmento*. Concluimos que había *seis*.

Para el caso de *dos* líneas horizontales, tendríamos *doce*. Para el caso de *tres* líneas horizontales, tenemos 18... Ahora bien, estoy seguro de que si yo le preguntara: “Si hay 34 líneas horizontales, ¿cuántos triángulos quedarían formados?”. Creo que usted no dudaría: $34 \times 6 = 204$. Si hubiera 100 líneas horizontales, habría 600 triángulos. En el caso general, si hubiera n líneas horizontales, la respuesta es (suenan los tambores y un timbal está preparado):

$$ijn \times 6!!!$$

Al llegar a este punto, me interesaría estar junto a usted para preguntarle: ¿terminó acá esta historia? ¿No tiene ganas usted de sugerirme algo? O sea, ya que hemos llegado hasta este lugar, no solo hemos contestado la pregunta de cuántos triángulos había en el problema original (el de la Figura 1), sino que *generalizamos* el problema al caso en que tuviéramos un número *cualquiera* (n) de segmentos horizontales.

Lo natural entonces es hacer(se) la pregunta que —creo— sigue: “¿Si en lugar de haber cuatro segmentos o rectas que *salen* desde el punto A, hubiera cinco? ¿O siete? ¿O un número cualquiera m ? ¿No podremos sacar alguna conclusión general también en esos casos?”.

Como siempre, ¿no tiene ganas de intentar por su cuenta?

Yo voy a seguir acá, pero le sugiero que le dedique aunque sea *un ratito* para ver si puede intentar encontrar la respuesta.

En el caso que analizamos, había cuatro rectas que salían desde A. Es por eso que al intersectar cada una de las rectas horizontales, quedaban determinados cuatro puntos. Lo que teníamos que hacer era contar de cuántas formas se podían elegir dos puntos entre los cuatro que había en el segmento horizontal, y descubrimos que había seis formas diferentes. Cada una de esas seis formas de elegir pares de puntos, junto con A, determinaba un triángulo. De allí los seis triángulos.

Elijamos una recta horizontal cualquiera. Si en lugar de cuatro rectas que salen de A, ahora hubiera cinco (por ejemplo), entonces deberíamos aprender a contar de cuántas formas se pueden elegir *dos* puntos entre cinco. Si llamo a los puntos B, C, D, E y F, entonces los pares posibles son:

(B,C); (B,D); (B,E); **(B,F)**
(C,D); (C,E); **(C,F)**

(D,E); (D,F)
(E,F)

Hay 10 pares posibles. Marqué los cuatro nuevos pares para distinguirlos de los anteriores. O sea, los cuatro nuevos se agregan a los seis que había antes.

Ahora bien: hemos generado 10 triángulos por segmento horizontal. Entonces, sabemos contestar la pregunta cuando desde A salen cuatro o cinco rectas. Los números fueron 6 y 10.

¿Y si en lugar de cinco salieran seis? Voy a escribir todos los casos, pero lo hago con la idea de que usted *conjetura* cuál debería ser la fórmula general. Veamos. Si ahora las seis rectas cortan el primer segmento horizontal en seis puntos que llamo B, C, D, E, F y G, entonces, los pares que puedo formar son:

(B,C); (B,D); (B,E); (B,F); (B,G)
(C,D); (C,E); (C,F); (C,G)
(D,E); (D,F); (D,G)
(E,F); (E,G)
(F,G)

Ahora son 15 formas diferentes. O sea, hay 15 triángulos por segmento horizontal. Acá quiero parar y que tratemos de encontrar una fórmula general en el caso que uno tuviera m rectas. La pregunta que quiero contestar *en general* es la siguiente: ¿de cuántas formas se pueden elegir *dos puntos* entre m posibles? Fíjese en la siguiente tabla (Figura 4). Suponga que uno tiene 5 puntos (que aquí llamé 1, 2, 3, 4 y 5). Con ellos, armé una *tablita* para ver cuántos pares puedo formar. Cada *cuadradito* de la tablita indica cuál es el par de puntos. Naturalmente, están tachados todos los de la diagonal, porque si no, sería elegir un punto con él

mismo. Si uno tiene 5 puntos, en total hay 25 cuadraditos. Por un lado, tengo que restar los cinco *cuadraditos* que están tachados, pero además tengo que dividir por 2 porque si no, estoy contando el mismo par dos veces: el par (1, 2) es lo mismo que el par (2, 1).

Luego, la fórmula para 5 puntos es:

$$(5^2 - 5)/2 = (25 - 5)/2 = 20/2 = 10 \text{ (cosa que ya sabíamos)}$$

Si tuviéramos 6 puntos, entonces la fórmula es:

$$(6^2 - 5)/2 = (36 - 6)/2 = 30/2 = 15 \text{ (algo que también sabíamos)}$$

En general, si uno tiene m puntos, genera la misma *tablita*. Tiene, otra vez, m^2 *cuadraditos*. Tengo que restar m y dividir por 2. El resultado es:

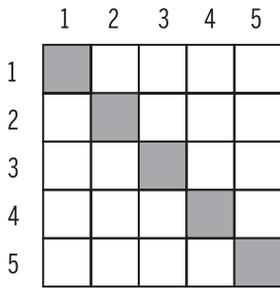
$$(m^2 - m)/2 = \{m \times (m - 1)\}/2$$

Y acá sí, terminamos. ¿Cómo? Hemos *demostrado* el siguiente caso general: si uno tiene n rectas horizontales y m que salen desde el vértice A, entonces, quedan formados:

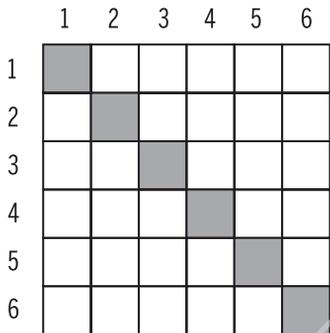
$$[\{m \times (m - 1)\}/2] \times n \text{ triángulos}$$

En el caso original que presenté al principio, $m = 4$, $n = 3$ y el resultado que obteníamos era ¡18!

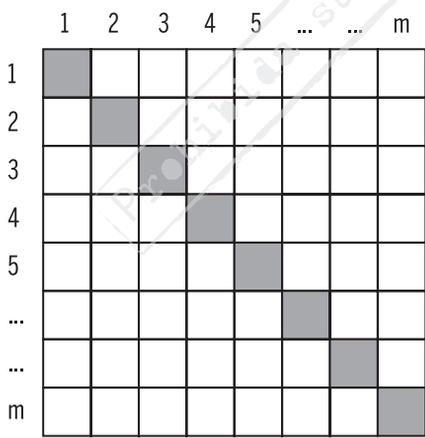
Listo.



$$\frac{5^2 - 5}{2} = \frac{25 - 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$



$$\frac{6^2 - 6}{2} = \frac{36 - 6}{2} = \frac{30}{2} = 15$$



$$\frac{m^2 - m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$$

Figura 4

Ahora resolvamos el problema *más general*. Suponga que usted tiene *seis* rectas dibujadas en un plano, de manera tal que no haya dos que sean paralelas. Eso significa que *todas* las rectas se cortan en único punto.

La pregunta que veníamos haciéndonos es: ¿cuántos triángulos podemos contar? Fíjese en la Figura 5. ¿Cuántos triángulos ve?

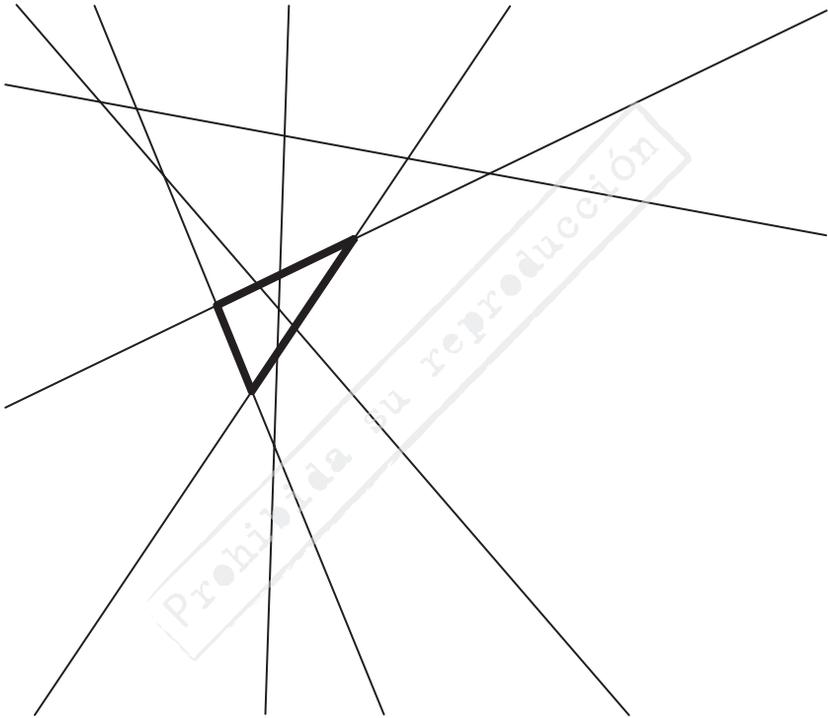


Figura 5

Al llegar acá, uno podría empezar a contar. No es difícil, pero al intentarlo, es muy posible que omita alguno que ‘se le pasó por alto’. ¿Habrá alguna otra forma de contar *todos* los triángulos que se forman? (¿quiere pensar usted?).

Sigo. Como se ve en la Figura 5 (pero esto vale en general, obviamente), para encontrar *cada* triángulo hace falta seleccionar tres puntos cualesquiera que cumplan una *única* condición (¿cuál?): que no estén sobre la misma recta. Para hacerlo, basta con elegir una terna de rectas. Fíjese en el dibujo y verá que si usted elige *tres* rectas y construye un triángulo en donde los vértices son los tres puntos en donde se cortan, ¡listo! Ahí tiene un triángulo.

De esta forma, el problema se reduce a ver de cuántas formas podemos elegir tres rectas. Son seis y hay que elegir tres, obviamente sin importar el orden. ¿Cómo hacer?

Hay 6 posibilidades para elegir la primera; para cada una de ellas, 5 pueden ser la segunda. Hasta ahí entonces tenemos $6 \times 5 = 30$. Para la tercera, tenemos 4 que todavía no usamos. O sea, en total hay 120 (ya que $30 \times 4 = 120$). Pero en este razonamiento hay un pequeño ‘error’. ¿Por qué? ¿Puede detectarlo usted? Hay ‘algo’ que no está bien.

Fíjese en lo siguiente. Supongamos que llamo a las rectas A, B, C, D, E y F.

Si la primera que elijo es la recta A, entonces puedo elegir B como la segunda y C como la tercera. O sea, queda la terna (A, B, C).

Pero usted se da cuenta de que si yo hubiera elegido B como la primera recta, C como la segunda y A como la tercera, tendríamos el terceto (B, C, A) que, en esencia, es exactamente la misma terna que (A, B, C).

Es decir, estoy contando dos veces la misma terna y, por lo tanto, dos veces el mismo triángulo. Y hay más, porque (A, C, B) también genera el mismo triángulo. ¿Cómo hacer para contar *nada más* que una vez cada triángulo?

Es decir, de las 120 posibilidades que había contado antes, hay varias ternas que se repiten. ¿Cuántas veces por terna?

Mire: (A, B, C); (A, C, B); (B, A, C); (B, C, A); (C, A, B) y (C, B, A) son esencialmente la misma terna.

Como lo mismo puedo hacer con cada terna, estamos contando *seis* veces cada triángulo.

En total, de las 120 tengo que dividir por 6, entonces $120 / 6 = 20$. ¡Esa es la respuesta! Hay 20 triángulos que se pueden formar con esas tres rectas.

Para terminar: lo que hice, al contar cuántas veces aparece cada terna, fue escribir exhaustivamente todos los casos y descubrimos que había 6 por terna. ¿Qué pasaría si en lugar de seis rectas hubiera un millón? ¿Cómo contar el número de triángulos que se forman?

Para la primera recta hay 1.000.000 posibilidades. Para la segunda, 999.999. Y para la tercera, 999.998. En total son $(1.000.000 \times 999.999 \times 999.998) = 999.997.000.002.000.000$ posibilidades. A este número, que es *casi* un trillón, hay que dividirlo por 6. El resultado final entonces es 166.666.166.667.000.000 triángulos. Son muchos, más de 166.000 billones. Hay tiempo para entretenerse contando triángulos. ¿Empieza usted?⁷⁷

77. Como algunos de ustedes habrán advertido, en algún lugar lo que estoy calculando son números combinatorios, y la persona que los conoce posiblemente habrá obviado esa parte del texto o quizás lo leyó para aprender a *interpretarlos* de una nueva manera.

Índice

Dedicatorias	7
Agradecimientos	9
Prólogo, <i>por Carlos D'Andrea</i>	13
Notas	17
La historia de las hermanas Polgar	29
Los puntos de la Pepsi.....	39
Sobre por qué no hay que jugar a la lotería	46
Los números narcisistas	51
Reloj de dos colores	59
Criptografía.....	66
El error humano	73
Esquiadores	85
¿Cómo aprendemos? Un doble desafío combinado	87
Un problema añejo, pero precioso	98
Problema del cumpleaños, versión 2	105
El problema del cumpleaños (actualizado al año 2021)	116
Solitario búlgaro	134
“Linda”, un caso analizado por Kahneman y Tversky	150
Taxis azules y amarillos (de Amos Tversky).....	154
El matemago.....	160

Tengo ‘algo’ para decodificar... ¿se anima?	171
Una nueva versión del hotel de Hilbert	173
Matilde y los autitos de colección	185
¿Cómo contar hasta más de mil usando los diez dedos?	188
Teselados y embaldosados.....	201
¿Cuántas bolitas hacen falta?	212
Una bella curiosidad aritmética	218
Problema brevísimo.....	220
El juego de Gale.....	222
Perplejo	229
Apuntes de una charla (de Adam Kucharski)	233
La constante de Kaprekar	239
Lectura tendenciosa.....	248
Los puzzles de Carlos D’Andrea	254
Tres caras o tres cecas seguidas.....	258
La distribución en el patio del colegio	266
Coincidencias	269
El contador de Kruskal	276
Los números no cierran	282
¿Cómo mejorar la forma de embarcar en un avión? (versión 2021)	290
¿Cuántos triángulos ve usted?	305

