Concurso Ayudante de Segunda, área Matemática

A los 17 días del mes de octubre de 2025, el jurado que entiende en el concurso para proveer 37 (treinta y siete) cargos de Ayudante de Segunda con dedicación Parcial, área Matemática en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), formado por Emiliano Acri, María Cecilia De Vita, Paula Kuna, Martín Mansilla y Mauricio Mendiluce, decide asignar los siguientes puntajes máximos en los distintos ítems:

Antecedentes docentes	7
Antecedentes científicos	3
Antecedentes de extensión	6
Antecedentes profesionales	3
Prueba de oposición	57
Calificaciones, títulos, estudios y otros	24

Tema y modalidad de la prueba de oposición:

La prueba de oposición consistirá de una prueba escrita y se realizará en forma presencial el día viernes 24 de octubre de 2025 a las 10 horas en aula magna del Pabellón 2 y tendrá una duración de 90 minutos. Se deberá desarrollar un ejercicio de cada una de las listas detalladas a continuación (dos ejercicios en total). La Lista 1 contiene 10 ejercicios correspondientes a las materias Análisis I y Análisis II y la Lista 2 contiene 10 ejercicios de las materias Álgebra I y Álgebra Lineal / Álgebra Lineal Computacional. Los ejercicios a desarrollar serán anunciados por el jurado al inicio de la prueba de oposición. Se espera que sean presentados de la manera en que serían explicados a estudiantes que estén cursando la materia correspondiente, detallando de forma escrita incluso aquello que se indicaría en forma verbal e indicando los resultados teóricos usados según el momento de la materia en que se estuvieran desarrollado los ejercicios. Se tendrá en cuenta la claridad y legibilidad de la presentación escrita.

Emiliano Acri   Paula Kuna   María Cecilia De Vita

Martín Mansilla   Mauricio Mendiluce

Lista 1

Análisis I

1. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f no es continua en el origen.

2. Sea f de clase C^2 tal que su polinomio de Taylor de orden 2 en el $P = (1, \frac{\pi}{2})$ es $p(x,y) = -\pi + 4(y - \frac{\pi}{2}) + 2(x-1)^2 + (x-1)(y - \frac{\pi}{2})$. Sea $g(x,y) = f(x,y)y^2 + x\sin(y)$. Hallar $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$ con $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y luego hallar $Hg(P)$.

3. Hallar los puntos sobre la superficie $y^2 = 9 + xz$ que están más cerca del origen.

4. Calcular el volumen del sólido dado en cada uno de los siguientes casos.

   a) Bajo del paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ y arriba del rectángulo $R = [-1,1] \times [1,2]$.

   b) Acotado por $z = 16 - x^2$ y el plano $y = 5$ en el primer octante.

5. Calcular las siguiente integrales utilizando un cambio de variables apropiado.

   a) $\displaystyle\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2} dA$, donde R es el rectángulo encerrado por las rectas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$, $x + y = 3$.

   b) $\displaystyle\iint_R e^{x+y} dA$, donde R está dada por la desigualdad $|x| + |y| \leq 1$.

Análisis II

6. Hallar el área entre las curvas dadas en polares por

$$r = 1 + \cos(\theta) \qquad \text{con } -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$r = \sqrt{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)} \qquad \text{con } \frac{-\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

7. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xz - x\cos(z), -yz + y\cos(z), 4 - x^2 - y^2).$$

   Determinar R de modo que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.

8. Hallar la ecuación de las curvas tales que la normal en un punto cualquiera pasa por el origen.

9. Dos tanques, conectados mediante tubos, contienen cada uno 24 litros de una solución salina. Al tanque I entra agua pura a razón de 6 litros por minuto y del tanque II sale, al exterior, el agua que contiene a razón de 6 litros por minuto. Además el líquido se bombea del tanque I al tanque II a una velocidad de 8 litros por minuto y del tanque II al tanque I a una velocidad de 2 litros por minuto. Se supone que los tanques se agitan de igual forma constantemente de manera tal que la mezcla sea homogénea. Si en un principio hay x_0 kg de sal en el tanque I e y_0 Kg de sal en el tanque II, determinar la cantidad de sal en cada tanque a tiempo $t > 0$. Cuál es el límite, cuando $t \to +\infty$, de las respectivas concentraciones de sal en cada tanque?

10. Considerar el sistema a un parámetro,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \lambda y, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Determinar las soluciones y hacer un bosquejo del diagrama de fases para $\lambda = -1, 0, 1, 2$.

Lista 2

Álgebra I

1. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

   a) $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\, a_i, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

   b) $a_1 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \ldots, 11\} \to \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ satisfacen simultáeamente las condiciones:

   - f es inyectiva,
   - Si n es par, $f(n)$ es par,
   - $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$.

3. En un depósito se almacenan latas de gaseosa. El viernes por la noche, un empleado realizó un control de inventario y observó que:

   - Al poner las latas en cajas de 12 unidades sobraban 4.
   - Al poner las latas en cajas de 63 unidades sobraban 43.
   - Había por lo menos 12.600 latas y no más de 13.000, pero no tomó nota de la cantidad exacta.

   ¿Cuántas latas de gaseosa había en el depósito el viernes por la noche?

4. a) Sea $w \in G_{36}$, $w^4 \neq 1$. Calcular $\sum_{k=7}^{60} w^{4k}$.

   b) Sea $w \in G_{11}$, $w \neq 1$. Calcular $\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{60} w^k\right)$.

5. Hallar todos los $a \in \mathbb{Q}$ tales que $f = X^4 - (a+4)X^3 + (4a+5)X^2 - (5a+2)X + 2a$ tenga a a como raíz doble. Para cada valor de a hallado, factorizar f en $\mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$.

Álgebra Lineal

6. Sea $S = \langle (1,-1,2,1), (3,1,0,-1), (1,1,-1,-1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

   a) Determinar si $(2,1,3,5) \in S$.

   b) Determinar si $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subseteq S$.

   c) Determinar si $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

7. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \mathrm{rg}(B)$.

8. a) Sea $B = \{(1,-1,0), (0,1,-1), (0,0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,-1,0), \quad f(0,1,-1) = (0,1,-1) \quad \text{y} \quad f(0,0,1) = (0,0,0).$$

   Calcular $[f]_B$ y comprobar que f es un proyector.

   b) Construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = \langle (1,1,1) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$. ¿Es f una proyección ortogonal?

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & \alpha+2 & 2 \\ \alpha^2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que A sea simétrica y $\lambda = 0$ sea autovalor de A.

   b) Para el valor de α hallado en (a), diagonalizar ortonormalmente la matriz A.

10. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales:

   a) $\langle (-2,1,6), (3,0,-8) \rangle = \langle (1,k,2k), (-1,-1,k^2-2), (1,1,k) \rangle$.

   b) $S \cap T = \langle (0,1,1) \rangle$, siendo $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ y $T = \langle (1,k,2), (-1,2,k) \rangle$.

C.Dextra