ISSN 1851-1295

Fascículo 12 | Cursos de grado

Gabriel Minian

Cuaderno de topología

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2021

Cursos de grado

Fascículo 12

ISSN 1851-1317 (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1295 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Gabriel Minian

Cuaderno de Topología

Buenos Aires, Marzo 2021

Prefacio

¿Pueden ser $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ homeomorfos si $n \neq m$? O más generalmente, ¿puede un abierto de $\mathbb{R}^n$ ser homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^m$ cuando $n \neq m$? Estas preguntas tan naturales no son, en principio, fáciles de responder. ¿Cómo encontrar un homeomorfismo, si es que lo hay? A priori, que no se nos ocurra ninguno, no quiere decir que no lo haya. La respuesta a estas preguntas es el teorema de invariancia de dimensión que veremos en la última parte de este curso:

Teorema de invariancia de dimensión. Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ son abiertos no vacíos y U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.

Otros resultados en esta dirección son el teorema de invariancia de dominio y el teorema de la curva de Jordan:

Teorema de invariancia de dominio. Si $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ son homeomorfos y U es abierto en $\mathbb{R}^n$ entonces V también es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Notar que el resultado anterior deja de ser verdadero si reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por un espacio más general. Por ejemplo, en el espacio $[0, 1]$ (con la métrica usual), los subespacios $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1)$ son homeomorfos (vía sumar $1/2$) y el primero es abierto en $[0, 1]$ pero el segundo no lo es.

Teorema de la curva de Jordan. Una curva simple y cerrada C en $\mathbb{R}^2$ lo separa en dos componentes conexas, una exterior y otra interior. Una curva simple no cerrada no lo separa.

Todos estos resultados involucran espacios métricos, más aún todos refieren específicamente a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Pero para demostrar estos resultados necesitamos desarrollar mucha teoría que involucre a espacios no necesariamente métricos. Los topología estudia ciertas propiedades geométricas de los objetos que son invariantes por deformaciones continuas (los problemas nombrados arriba son ejemplos de estas propiedades). Esta rama de la matemática surge esencialmente con el problema de los puentes de Königsberg de Euler, y se comienza a consolidar con los trabajos de Poincaré de finales del siglo XIX y principios de siglo XX. La topología no estudia solamente problemas como los mencionados arriba. Los espacios topológicos aparecen naturalmente en varias ramas de la matemática como la geometría, el análisis y el álgebra, y también en problemas de otras áreas como la física.

La primera parte del curso está dedicada al estudio de topología general: continuidad, conexión y arco-conexión, axiomas de separación, compacidad, compactificaciones, espacios de funciones. En la última parte del curso presentamos una introducción a algunos temas básicos de la topología algebraica. Estudiamos el grupo fundamental de un espacio, la teoría de revestimientos, el teorema de van Kampen y aplicaciones, y terminamos con una introducción a la homología y sus aplicaciones más inmediatas, incluyendo los teoremas nombrados al comienzo de esta introducción. También veremos aplicaciones a teoremas de puntos fijos y resultados conocidos, como el teorema fundamental del álgebra. Incluímos una breve introducción, más bien informal, al estudio de los CW-complejos y complejos simpliciales, que en general no se estudian en un primer curso de topología. Lo hacemos porque estos espacios aparecen en forma natural en matemática, y analizar espacios con estructuras celulares, nos permite calcular fácilmente e intuitivamente sus grupos fundamentales y su homología. La relación entre revestimientos y el grupo fundamental es abordada aquí utilizando la noción de fibración. Esto nos permite clarificar que esa correspondencia se basa principalmente en las propiedades globales que tienen los revestimientos de levantar homotopías y de levantar caminos en forma única, a pesar de que la noción original de revestimiento es de naturaleza local. La relación entre lo local y lo global en este caso se evidencia en el resultado que prueba que todo revestimiento es una fibración con levantamiento único de caminos.

Estas notas están basadas en el curso de Topología que dicté en el segundo cuatrimestre de 2020 en forma virtual. Las referencias utilizadas para la primera parte son los libros [Bourbaki, Brown, Kelley, Munkres, Willard]. Varias demostraciones que aparecen en estas notas son clásicas y pueden encontrarse en la bibliografía citada. Sin embargo, el enfoque que se da acá a algunos temas difiere del enfoque clásico que se encuentra en la bibliografía citada, por ejemplo la exposición sobre compactificaciones y funciones propias, el estudio de la ley exponencial, la caracterización de espacios T_0 y el abordaje a las topologías finales e iniciales. Para la última parte, las referencias utilizadas son los libros [Brown, Hatcher, Munkres, Spanier].

Quiero agradecer a Kevin Piterman, que le dio una lectura a una versión preliminar de estas notas y me indicó varias correcciones.

Índice general

Capítulo 1

Conjuntos ordenados y axioma de elección

1.1. Conjuntos ordenados

Antes de comenzar con el estudio de los espacios topológicos veamos algunas nociones básicas de conjuntos (totalmente) ordenados y algunas construcciones que nos servirán después para entender ejemplos y contra-ejemplos que irán apareciendo a lo largo del curso.

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto. Un orden en X (llamado también orden total) es una relación $<$ que cumple:

1. Si $x, y \in X, x \neq y \Rightarrow x < y$ o $y < x$ (el orden es total).
2. $x \not< x$.
3. Si $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$.

A $(X, <)$ se lo llama conjunto ordenado.

Observación 1.1.2. Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Dados $x, y \in X$, si $x < y$ entonces $y \not< x$.

Dado $(X, <)$ conjunto ordenado, notaremos $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$. Si $x < y$, denotamos (x, y) al intervalo abierto

$$(x, y) = \{z \in X \mid x < z < y\},$$

y con $[x, y]$ al intervalo cerrado

$$[x, y] = \{z \in X \mid x \leq z \leq y\}.$$

Similarmente tenemos $[x, y)$ y $(x, y]$.

Dado $a \in X$ se define la sección de a como el subconjunto $S_a = \{x \in X \mid x < a\}$. Más en general, un subconjunto $S \subseteq X$ se dice sección si cada vez que se tiene $s \in S$ y $x \in X$ con $x < s$, entonces $x \in S$. Un elemento $a \in X$ se dice mínimo (o primer elemento) si $a \leq x\ \forall x \in X$. Notar que, como el orden es total, a es mínimo si y sólo si $S_a = \emptyset$.

Dados $a < b$, si $(a, b) = \emptyset$ decimos que a es predecesor inmediato de b (y que b es sucesor inmediato de a).

Ejemplos 1.1.3.

1. $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ con los órdenes usuales son conjuntos ordenados.
2. $\mathbb{N}$ tiene mínimo, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ no. En $\mathbb{N}$ se tiene que n es predecesor inmediato de $n+1$. En $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ no hay predecesores inmediatos ni sucesores inmediatos.

Observación 1.1.4. ¿Puede existir un $(X, <)$ tal que todo $x \in X$ tenga sucesor inmediato pero exista un $a \in X$ que no sea mínimo y no tenga predecesor inmediato?

La respuesta es sí, por ejemplo $X = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$ (unión de dos copias de los naturales) donde cada copia $\mathbb{N}_i$ de $\mathbb{N}$ tiene el orden usual, y tal que $n < m'$ para todo $n \in \mathbb{N}_1,\ m' \in \mathbb{N}_2$. Notar que todo elemento $n \in \mathbb{N}_1$ tiene sucesor inmediato $n+1 \in \mathbb{N}_1$. Análogamente, todo $m' \in \mathbb{N}_2$ tiene sucesor inmediato. Pero $1' \in \mathbb{N}_2$ no tiene predecesor inmediato ni es mínimo.

Ejercicio 1.1.5. Consideremos a $\mathbb{R}$ con el siguiente orden $\prec$: $a \prec b$ si $a^2 < b^2$ (donde $<$ es el orden usual) o si $a^2 = b^2$ y $a < 0,\ b > 0$. Probar que $(\mathbb{R}, \prec)$ es conjunto ordenado.

Definición 1.1.6. Sea $(X, <)$ conjunto ordenado y sea $A \subset X$ un subconjunto. Se define el orden $<_A$ en A como el heredado o inducido por el orden de X. Concretamente: dados $a, b \in A$, $a <_A b$ si $a < b$ en X.

De ahora en más, para simplificar notación, notaremos simplemente con X a un conjunto ordenado (el orden $<$ quedará implícito).

Definición 1.1.7. Dados X e Y conjuntos ordenados, se define el orden lexicográfico en el producto cartesiano $X \times Y$ como $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ o $x = x',\ y < y'$.

Un morfismo de orden $f : X \to Y$ entre conjuntos ordenados es una función entre los conjuntos subyacentes que cumple que para todo $x, x' \in X$, si $x < x'$ entonces $f(x) < f(x')$. Un isomorfismo de orden es un morfismo de orden $f : X \to Y$ que es además una biyección.

Proposición 1.1.8. Si $f : X \to Y$ es isomorfismo de orden, entonces f^{-1} es morfismo de orden.

Demostración. Sean $a, b \in Y$ tales que $a < b$. Supongamos que $f^{-1}(a) \not< f^{-1}(b)$, entonces como el orden es total se tiene $f^{-1}(a) \geq f^{-1}(b)$ y, como f preserva el orden, $a = f(f^{-1}(a)) \geq b = f(f^{-1}(b))$. Absurdo. $\square$

Definición 1.1.9. Decimos que X e Y tienen el mismo tipo de orden si existe un isomorfismo de orden $f : X \to Y$. Esto define una relación de equivalencia en la clase de conjuntos ordenados y llamamos tipo de orden de $(X, <)$ a su clase de equivalencia.

Definición 1.1.10. El tipo de orden de $\mathbb{N}$ se denota ω.

La suma de dos tipos de orden se define de la siguiente manera. Si α, β son tipos de orden, se define $\alpha + \beta$ como el tipo de orden (es decir, la clase) del siguiente conjunto ordenado: tomamos A un conjunto ordenado con tipo de orden α, B un conjunto ordenado con tipo de orden β y consideramos la unión disjunta $A \coprod B$ con el orden inducido por los de A y B (es decir, si $a, a' \in A$ y $a < a'$ en A, $a < a'$ en $A \coprod B$, igualmente para elementos en B) y además $a < b$ para todo $a \in A,\ b \in B$. Se define $\alpha + \beta$ como el tipo de orden de $A \coprod B$ con este orden. Dejamos como ejercicio probar que la suma está bien definida (no depende de los representantes A y B elegidos).

Por ejemplo, el tipo de orden del conjunto de la Observación 1.1.4 es $\omega + \omega$.

Definición 1.1.11. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos también con n al tipo de orden del conjunto ordenado $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ con el orden usual.

Observación 1.1.12. $1 + \omega = \omega$, de hecho $n + \omega = \omega$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notar que $\omega + 1 \neq \omega$. Esto muestra que la suma de tipos de orden no es conmutativa.

Recordemos que $S \subseteq X$ se dice sección si cada vez que se tiene $s \in S$ y $x \in X$ con $x < s$, entonces $x \in S$. S se dice sección propia si $S \neq X$.

Ejercicio 1.1.13. Sea X conjunto ordenado. El tipo de orden de X es ω si y sólo si X es infinito y toda sección propia de X es finita.

1.2. Conjuntos bien ordenados y ordinales

Definición 1.2.1. Un conjunto ordenado X se dice bien ordenado si todo subconjunto $A \subseteq X$ no vacío tiene mínimo.

Ejemplos 1.2.2. $\mathbb{N}$ es bien ordenado, $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ no.

Proposición 1.2.3. Si X es un conjunto bien ordenado y $f : X \to X$ es morfismo de orden, entonces no existe $a \in X$ tal que $f(a) < a$.

Demostración. Supongamos que existe un tal a. Sea $S = \{x \in X \mid f(x) < x\}$. Notar que S es no vacío porque $a \in S$. Como X es bien ordenado el conjunto S tiene un mínimo a_0 y como $a_0 \in S$ entonces $f(a_0) < a_0$. Pero f es morfismo de orden, entonces $f(f(a_0)) < f(a_0)$ y por lo tanto $f(a_0) \in S$ y esto contradice la minimalidad de a_0. $\square$

Corolario 1.2.4. (Ejercicio para el lector)

1. Si X es bien ordenado y $f : X \to X$ es isomorfismo de orden, entonces $f = 1_X$ (1_X denota la función identidad).

2. Si X e Y son bien ordenados y tienen el mismo tipo de orden entonces existe un único isomorfismo de orden de X a Y.

Ejercicio 1.2.5. Si A y B son conjuntos bien ordenados, entonces se satisface una y solo una de las siguientes 3 afirmaciones:

(i) A y B tienen el mismo tipo de orden o

(ii) A tiene el tipo de orden de una sección propia de B o

(iii) B tiene el tipo de orden de una sección propia de A.

Definición 1.2.6. Los tipos de orden de los conjuntos bien ordenados se llaman ordinales.

Ejemplos de ordinales son n (para todo $n \in \mathbb{N}$), ω, $\omega + n$, $\omega + \omega$.

Definición 1.2.7. Dados α y β ordinales, decimos que $\alpha < \beta$ si α es el tipo de orden de una sección propia de un conjunto B que representa el tipo de orden β.

Notar que por el Ejercicio 1.2.5 esto define un orden total en todo conjunto de ordinales.

Observación 1.2.8. Notar que ω es el primer ordinal no finito.

Veamos ahora el principio de inducción transfinita.

Proposición 1.2.9. Sea X conjunto bien ordenado y sea a_0 el mínimo de X. Si $A \subseteq X$ cumple:

(i) $a_0 \in A$.

(ii) $\forall a \in X$ tal que $S_a \subseteq A$ se tiene que $a \in A$.

Entonces $A = X$.

Demostración. Supongamos que $A \neq X$. Consideramos entonces el complemento $X \setminus A$ que es no vacío y por lo tanto tiene mínimo $b \in X \setminus A$. Ahora bien, para todo $x \in S_b$ se tiene que $x \notin X \setminus A$ ya que b es el mínimo y por lo tanto $x \in A$. Esto implica que $S_b \subseteq A$ y entonces, por hipótesis, $b \in A$. Absurdo. $\square$

Como corolario obtenemos que en conjuntos bien ordenados podemos hacer inducción transfinita.

Ejercicio 1.2.10. Si X es bien ordenado y $A \subset X$ entonces A con el orden heredado es bien ordenado.

1.3. Axioma de elección, teorema del buen orden y el conjunto S_Ω

Si A es un conjunto infinito, podemos ver que existe una función $f : \mathbb{N} \to A$ inyectiva. ¿Cómo vemos esto? Construimos la función f inductivamente: como A es no vacío elegimos un $a_1 \in A$ y definimos $f(1) = a_1$. Inductivamente, si ya tenemos definidos $f(1), \ldots, f(n)$, consideramos el conjunto $A \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\}$ que es no vacío ya que A es infinito y elegimos un a_{n+1} en ese conjunto y definimos $f(n+1) = a_{n+1}$. Por construcción f resulta inyectiva.

Pero analicemos bien la demostración del párrafo anterior. ¿Cómo definimos $f(n+1)$? Lo hicimos eligiendo algún elemento de $A \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\}$. No es una fórmula matemática muy formal. En realidad estamos usando el axioma de elección.

Axioma de elección. Sea A un conjunto no vacío y sea $P(A)$ el conjunto de partes de A. Entonces existe una función

$$c : P(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$$

tal que $c(B) \in B$ para todo $B \in P(A) \setminus \{\emptyset\}$. A la función c se la llama función selectora.

Usando el axioma de elección, podemos re-escribir la demostración del primer párrafo de esta sección de la siguiente manera: Como A es no vacío existe una función selectora $c : P(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$. Definimos inductivamente $f : \mathbb{N} \to A$ como $f(1) = c(A)$ y $f(n+1) = c(A \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\})$.

A lo largo de estas notas utilizaremos el axioma de elección repetidas veces implícitamente (sin la formalidad de la función selectora).

El axioma de elección es equivalente al siguiente resultado:

Teorema del buen orden (o Teorema de Zermelo). Todo conjunto A no vacío puede bien ordenarse (es decir, existe un orden $<$ tal que $(A, <)$ es bien ordenado).

Puede probarse que el axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden y ambos son equivalentes al lema de Zorn.

Para finalizar este capítulo veremos un resultado que nos servirá más adelante para construir varios ejemplos y contraejemplos.

Teorema 1.3.1. *Existe un conjunto no numerable y bien ordenado S_Ω tal que para todo $x \in S_\Omega$, la sección S_x es numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto no numerable y bien ordenado (existe por el teorema del buen orden). Si X cumple la condición del teorema (para todo $x \in X$, la sección S_x es numerable), entonces tomamos $S_\Omega = X$. Si X no cumple la condición, entonces el conjunto

$$A = \{x \in X \mid S_x \text{ es no numerable}\}$$

es no vacío, y como X es bien ordenado, A tiene un mínimo que llamamos Ω. Consideramos entonces $S_\Omega = \{x \in X \mid x < \Omega\}$ con el orden heredado y por construcción S_Ω es no numerable, bien ordenado y toda sección es numerable. $\square$

Proposición 1.3.2. Si $A \subset S_\Omega$ es numerable, entonces A tiene cota superior (es decir, existe $b \in S_\Omega$ tal que $a \leq b$ para todo $a \in A$).

Demostración. Sea $B = \bigcup_{a \in A} S_a$. Por las propiedades de S_Ω, S_a es numerable para todo $a \in A$ y como A es numerable, entonces B es numerable. Por lo tanto $B \neq S_\Omega$ y entonces existe $b \in S_\Omega \setminus B$. Veamos que b es cota superior de A. Supongamos que existe $a \in A$ tal que $a \nleq b$. Entonces $b < a$ y por lo tanto $b \in S_a$. Entonces $b \in B$. Absurdo. $\square$

Capítulo 2

Espacios topológicos

2.1. Topologías

Dado un conjunto X notaremos $P(X)$ al conjunto de partes de X. Si $A \subset X$ notaremos A^c al complemento de A en X.

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto. Una topología $\mathcal{T}$ en X es una es una familia de subconjuntos de X (es decir, $\mathcal{T} \subseteq P(X)$) que cumple:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

2. Si J es un conjunto arbitrario de índices y $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in J$, entonces $\bigcup\limits_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$.

3. Si J es un conjunto finito y $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in J$, entonces $\bigcap\limits_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$.

A los elementos de $\mathcal{T}$ se los llama abiertos. Un espacio topológico es un par $(X, \mathcal{T})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{T}$ una topología en X.

En general vamos a denotar a los espacios topológicos con X (el conjunto subyacente) y la topología $\mathcal{T}$ quedará implícita (al menos que sea necesario explicitarla).

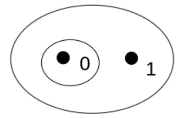
Ejemplos 2.1.2.
1. Sea X un conjunto arbitrario, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ es una topología en X llamada la topología indiscreta. Con esta topología, los elementos de X están todos “pegados entre sí”.

2. Dado un conjunto X, $\mathcal{T} = P(X)$ es una topología, llamada la topología discreta. Notar que $\mathcal{T}$ es discreta si y solo si los puntos de X son abiertos en X.

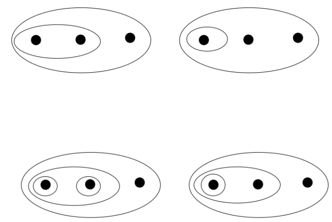
3. El “singleton” es el espacio topológico de un solo punto (con la única topología posible), lo notamos $X = *$.

4. $X = \emptyset$ es espacio topológico (con la única topología posible).

5. El espacio de Sierpinski, que aparecerá varias veces en este curso, es el espacio topológico $\mathcal{S}$ cuyo conjunto subyacente es $X = \{0, 1\}$ y la topología es $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$. Esto quiere decir que al elemento 0 lo podemos “separar”del 1 pero al 1 no lo podemos separar del 0.



6. Ejemplos de espacios de 3 puntos:



7. Sea (X, d) un espacio métrico. Le asignamos la topología métrica

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \; \exists \; B_\varepsilon(x) \subseteq U\}$$

donde $B_\varepsilon(x)$ es la bola abierta de radio ε centrada en el punto x.

8. Dado un conjunto X definimos la topología cofinita como

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid U = \emptyset \text{ o } U^c \text{ es finito}\}.$$

Veamos que $\mathcal{T}$ es efectivamente una topología en X: notar que $\emptyset \in \mathcal{T}$ por definición y que $X \in \mathcal{T}$ ya que $X^c = \emptyset$ es finito. Si J es un conjunto arbitrario y $U_i \in \mathcal{T}$ para todo $i \in J$ entonces U_i^c es finito o U_i es vacío para cada i y por lo tanto $(\bigcup_{i \in J} U_i)$ es vacío o $(\bigcup_{i \in J} U_i)^c = \bigcap_{i \in J} U_i^c$ resulta finito. Finalmente si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ entonces $U_1 \cap U_2$ es vacío o $(U_1 \cap U_2)^c = U_1^c \cup U_2^c$ es finito.

Dado un conjunto X, denotamos con $\mathcal{T}(X)$ al conjunto de todas las topologías en X.

Definición 2.1.3. Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathcal{T}(X)$. Decimos que $\mathcal{T}'$ es más fina que $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, es decir todo abierto de $\mathcal{T}$ es abierto de $\mathcal{T}'$. Denotamos $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$.

Notar que $(\mathcal{T}(X), \leq)$ es un poset (es decir, $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Definición 2.1.4. Dado un espacio topológico X, $A \subseteq X$ se dice cerrado si A^c es abierto.

Observación 2.1.5.

1. $\emptyset, X$ son cerrados.

2. Intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

3. Unión de finitos cerrados es cerrado.

Notar que la topología de X queda unívocamente determinada por la familia $\mathcal{F}$ de los cerrados de X. Es decir, dar una topología en X es equivalente a dar una familia $\mathcal{F}$ que cumplan las condiciones (1),(2) y (3) de la observación anterior.

Definición 2.1.6. Sea X un espacio topológico. Dado $A \subseteq X$ se define el interior de A como $A^\circ = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ abierto}}} U$.

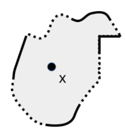
Ejercicio 2.1.7. Probar que A° es abierto, $A^\circ \subseteq A$, y que $A^\circ = A$ si y solo si A es abierto.

Definición 2.1.8. Sea X un espacio topológico. Dado $A \subseteq X$ se define la clausura de A como $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{A \subseteq F \\ F \text{ cerrado}}} F$.

Ejercicio 2.1.9. Probar que $\overline{A}$ es cerrado, $A \subseteq \overline{A}$, y que $\overline{A} = A$ si y solo si A es cerrado.

Observación 2.1.10. Si $A \subseteq F \subseteq X$ y F es cerrado en X, entonces $\overline{A} \subseteq F$.

Definición 2.1.11. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Un entorno de x en X es un subconjunto $V \subseteq X$ tal que existe un abierto U con $x \in U \subseteq V$.



Un entorno de x en $\mathbb{R}^2$

Notar que los entornos no son necesariamente abiertos y que si V es un entorno de x, entonces $x \in V^\circ$. Un entorno abierto de x es un abierto que contiene a x.

Proposición 2.1.12. Sea X espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Son equivalentes:

(i) $x \in \overline{A}$.

(ii) Todo entorno de x en X interseca a A.

(iii) Todo entorno abierto de x en X interseca a A.

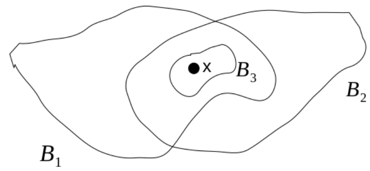
Demostración. Para ver $(i) \Rightarrow (iii)$, supongamos que existe un entorno abierto V de x tal que $V \cap A = \emptyset$. Entonces $A \subseteq V^c$ que es cerrado y por lo tanto $\overline{A} \subseteq V^c$. Pero como $x \in \overline{A}$, se tiene que $x \in V^c$. Absurdo.
Veamos ahora que $(iii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $x \notin \overline{A}$, entonces $x \in (\overline{A})^c$ que es un abierto, y por hipótesis, $(\overline{A})^c \cap A \neq \emptyset$. Absurdo ya que $A \subseteq \overline{A}$.
La implicación $(ii) \Rightarrow (iii)$ es obvia.
Para probar $(iii) \Rightarrow (ii)$ tomamos V entorno de x, entonces $x \in V^\circ$ que es abierto y por lo tanto $V^\circ \cap A$ es no vacío. En particular V interseca a A. □

2.2. Bases y sub-bases

Definición 2.2.1. Sea X un conjunto. Una base para una topología en X es una familia $\beta \subseteq P(X)$ que cumple:

1. β cubre a X, es decir $X = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$.

2. $\forall B_1, B_2 \in \beta$ y $\forall x \in B_1 \cap B_2,\ \exists\ B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.



Definición 2.2.2. Sea X un conjunto y sea β una base para una topología en X. La topología generada por β es

$$\mathcal{T}_\beta = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U,\ \exists\ B_x \in \beta \text{ con } x \in B_x \subseteq U\}.$$

Veamos que $\mathcal{T}_\beta$ es efectivamente una topología en X. Es claro que $\emptyset \in \mathcal{T}_\beta$ y que $X \in \mathcal{T}_\beta$ ya que β cubre a X. Sea $\{U_i\}_{i\in J}$ tal que $U_i \in \mathcal{T}_\beta$ $\forall i \in J$. Veamos que $\bigcup\limits_{i\in J} U_i \in \mathcal{T}_\beta$. Si $x \in \bigcup\limits_{i\in J} U_i$ entonces $x \in U_j$ para algún j, entonces existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq U_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. Por último, si $U, V \in \mathcal{T}_\beta$ veamos que $U \cap V \in \mathcal{T}_\beta$. Dado $x \in U \cap V$, existe $B_1 \in \beta$ tal que $x \in B_1 \subseteq U$ y existe $B_2 \in \beta$ tal que $x \in B_2 \subseteq V$. Por definición de base, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U \cap V$ y por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}_\beta$.

Notar que si β es base entonces $\beta \subseteq \mathcal{T}_\beta$ (es decir los elementos de la base son abiertos de la topología generada). Los elementos de β se llaman abiertos básicos.

Ejemplo 2.2.3. Si X es un espacio métrico, $\beta = \{B_\varepsilon(x)\}_{\substack{\varepsilon>0\\ x\in X}}$ es base y la topología generada es la inducida por la métrica. Observar que $\beta' = \{B_{1/n}(x)\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ x\in X}}$ también es base para la misma topología.

Proposición 2.2.4. Sea X un conjunto y β base para una topología en X. Entonces la topología generada $\mathcal{T}_\beta$ consiste en todas las uniones posibles de elementos de β.

Demostración. Denotemos con $\mathcal{T}'$ a todas las uniones posibles de elementos de β y veamos que $\mathcal{T}_\beta = \mathcal{T}'$. Si $U \in \mathcal{T}_\beta$ entonces para todo $x \in U$ existe un $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Por lo tanto $U = \bigcup\limits_{x\in U} B_x$ y esto implica que $U \in \mathcal{T}'$. Recíprocamente, si $U \in \mathcal{T}'$ entonces es unión de ciertos $B_i \in \beta$ y como $\beta \subseteq \mathcal{T}_\beta$ y $\mathcal{T}_\beta$ es una topología entonces $U \in \mathcal{T}_\beta$. $\square$

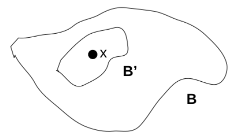
Notar que $\mathcal{T}_\beta$ es la topología menos fina que contiene a β. Es decir, si $\mathcal{T}'$ es una topología en X y $\beta \subseteq \mathcal{T}'$, entonces $\mathcal{T}_\beta \leq \mathcal{T}'$.

Observación 2.2.5. Sea X un conjunto. Entonces $\beta_1 = \{X\}$ es base para la topología indiscreta y $\beta_2 = \{\{x\}\}_{x\in X}$ es base para la topología discreta.

Proposición 2.2.6. Sea X un conjunto y sean β, β' bases para topologías en X. Sean $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ las topologías generadas por β y β'. Son equivalentes:

1. $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$.

2. $\forall B \in \beta$ y $\forall x \in B$, $\exists\ B' \in \beta'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

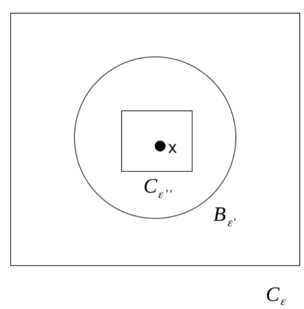


Demostración. Veamos primero que (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $B \in \beta$ y $x \in B$. Como $B \in \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, por definición de $\mathcal{T}'$ se tiene que existe $B' \in \mathcal{T}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

Veamos ahora (2) $\Rightarrow$ (1). Sea $U \in \mathcal{T}$, debo ver que $U \in \mathcal{T}'$. Por definición de $\mathcal{T}$, para todo $x \in U$ existe $B_x \in \beta$ tal que $x \in B_x \subseteq U$. Por hipótesis, existe $B'_x \in \beta'$ tal que $x \in B'_x \subseteq B_x \subseteq U$. Por lo tanto, por definición de $\mathcal{T}'$, $U \in \mathcal{T}'$. $\square$

Ejercicio 2.2.7. Notar primero que la topología usual de $\mathbb{R}$ (es decir, la métrica) admite como base al conjunto de todos los intervalos abiertos, es decir $\beta = \{(a,b) \mid a < b\}$. Tomemos ahora al conjunto $\beta_l = \{[a,b) \mid a < b\}$. Probar que β_l es base para una topología en $\mathbb{R}$ y $\mathcal{T}_\beta < \mathcal{T}_{\beta_l}$ (la usual es estrictamente menos fina que esta).

Ejemplo 2.2.8. En $\mathbb{R}^n$ las bases dadas por las bolas abiertas $\beta = \{B_\varepsilon(x)\}$ y los cubos abiertos $\beta' = \{C_\varepsilon(x)\}$ definen la misma topología (la usual).



Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathcal{T}(X)$. Notar que la intersección $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \subseteq P(X)$ es también una topología en X. Más aún $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$ es el ínfimo de $\{\mathcal{T}, \mathcal{T}'\}$ en el poset $\mathcal{T}(X)$. Es decir, $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}' \leq \mathcal{T}, \mathcal{T}'$ y si $\mathcal{T}'' \leq \mathcal{T}, \mathcal{T}'$ entonces $\mathcal{T}'' \leq \mathcal{T} \cap \mathcal{T}'$.

¿Existe el supremo de $\{\mathcal{T}, \mathcal{T}'\}$ en el poset $\mathcal{T}(X)$? Y en tal caso, ¿cómo definirlo? Notar que en general la unión $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ no es topología. Si $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ fuese por lo menos una base para una topología, podríamos tomar la topología generada, pero en general $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ ni siquiera es base para una topología (puede fallar la condición de la intersección). Queremos entonces definir la topología generada por una familia $\beta \subseteq P(X)$ que no sea necesariamente una base para una topología.

Definición 2.2.9. Sea X un conjunto. Una sub-base para una topología en X es una familia $\beta \subseteq P(X)$ que cubre a X, es decir $X = \bigcup\limits_{B \in \beta} B$.

Definición 2.2.10. Dada una sub-base β, se define la topología generada $\mathcal{T}_\beta$ como el conjunto de todas las uniones arbitrarias de las intersecciones finitas de elementos de β. Es decir, a partir de β nos creamos una base $\widetilde{\beta}$ tomando todas las intersecciones finitas de elementos de β y $\mathcal{T}_\beta$ es la generada por esa base $\widetilde{\beta}$.

Notar que si β es base, la topología generada por β vista como base o como sub-base es la misma.

De esta forma podemos definir el supremo de dos topologías $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in \mathcal{T}(X)$ como la topología generada por la sub-base $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$.

2.3. Topología del orden

Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado de cardinal mayor o igual a 2. Si X no tiene máximo ni mínimo, se define la topología del orden en X como la topología generada por la base

$$\beta = \{(a, b) \mid a < b \ \in X\}.$$

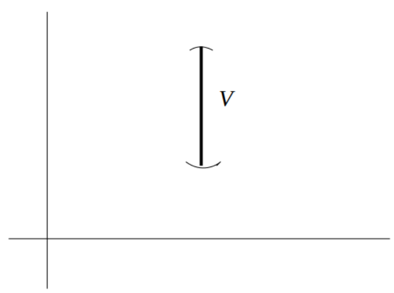
Si X tiene mínimo a_0, le agregamos a β los subconjuntos de la forma $[a_0, b)$ para todo $b \in X$. Si X tiene máximo b_0 le agregamos los subconjuntos de la forma $(a, b_0]$ para todo $a \in X$.

Ejercicio 2.3.1. Verificar que β es una base para una topología

Ejemplos 2.3.2. 1. La topología del orden en $\mathbb{R}$ (con el orden usual) coincide con la métrica.

2. La topología del orden en $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y en cualquier conjunto ordenado finito es la topología discreta (porque todos los elementos resultan abiertos).

3. Consideremos a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con el orden lexicográfico (inducido por el orden usual en cada copia de $\mathbb{R}$). Notar que la topología del orden en este caso resulta estrictamente más fina que la topología usual de $\mathbb{R}^2$.



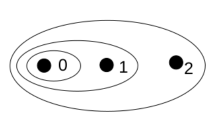
Abierto en topología con orden lexicográfico
que no es abierto en la topología usual

2.4. Puntos de acumulación y redes

Definición 2.4.1. Sea X espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que x es un punto de acumulación de A si todo entorno V de x en X interseca a $A \setminus \{x\}$. Equivalentemente: si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Notaremos con A' a los puntos de acumulación de A. Notar que x puede pertenecer o no a A y que $\overline{A} = A \cup A'$.

Ejemplo 2.4.2. Consideremos el siguiente espacio X.



Sea $A = \{0, 1\}$. Notar que $0 \notin A',\ 1 \in A',\ 2 \in A'$.

Dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, decimos que la sucesión converge a un punto $x \in X$ si para todo entorno V de x en X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$. Notaremos $x_n \to x$.

Observación 2.4.3. 1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $A \subseteq X$ y $x_n \to x$ entonces $x \in \overline{A}$.

2. Si X tiene topología métrica, dado $A \subseteq X$ y $x \in X$, se tiene que $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una sucesión en A que converge a x. Notar que la sucesión se puede construir tomando $x_n \in A \cap B_{1/n}(x)$.

Ejemplo 2.4.4. Sea $X = S_\Omega \cup \{\Omega\}$, es decir le agregamos al conjunto ordenado S_Ω construido en el Capítulo 1 un elemento máximo Ω. Le damos a X la topología del orden. Notar que los abiertos básicos alrededor de Ω son los conjuntos de la forma $(\alpha, \Omega]$ para todo $\alpha \in S_\Omega$. Sea $A = S_\Omega \subset X$. Veamos que $\Omega \in \overline{A}$: para esto basta ver que todo abierto básico $(\alpha, \Omega]$ alrededor de Ω interseca a A. Esto equivale a pedir que para todo $\alpha \in S_\Omega$ exista $\gamma \in S_\Omega$ tal que $\alpha < \gamma$. Ahora bien, como $S_\alpha \cup \{\alpha\}$ es numerable y S_Ω no lo es, entonces existe γ en el complemento de $S_\alpha \cup \{\alpha\}$ y por ser un orden total resulta $\alpha < \gamma$. Así probamos que $\Omega \in \overline{A}$. Ahora bien, dada una sucesión (x_n) en A, como la sucesión es numerable, por la Proposición 1.3.2, la sucesión está acotada superiormente en S_Ω por un cierto elemento β y por lo tanto toda la sucesión cae fuera del entorno $(\beta, \Omega]$ de Ω.

El ejemplo anterior nos dice dos cosas: por un lado que $X = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ no es metrizable (ya que Ω está en la clausura de A y no hay sucesión en A que tienda a Ω). Por otro lado nos dice que las sucesiones en general no sirven para describir a las clausuras. Para eso se tiene una generalización de las sucesiones que son las redes.

Definición 2.4.5. Un conjunto dirigido $(\Lambda, \leq)$ es un poset que tiene la siguiente propiedad adicional: $\forall\ \alpha, \beta \in \Lambda\ \exists\ \gamma \in \Lambda$ tal que $\alpha, \beta \leq \gamma$.

Observación 2.4.6. Notar que los conjuntos (totalmente) ordenados son dirigidos, en particular $\mathbb{N}$ con el orden usual es dirigido.

Definición 2.4.7. Sea X un espacio topológico. Una red en X es una función $\varphi : \Lambda \to X$ donde Λ es conjunto dirigido. Denotamos $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, y con $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ denotamos a la red.

Notar que las sucesiones son casos particulares de redes.

Definición 2.4.8. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en un espacio X. Decimos que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ tiende a $x \in X$ si para todo entorno V de x existe $\gamma \in \Lambda$ tal que $x_\beta \in V\ \forall\ \beta \geq \gamma$. Lo notamos $x_\alpha \to x$.

Notar que los límite de redes (así como los de sucesiones) no son necesariamente únicos. Por ejemplo, si X tiene la topología indiscreta, toda red en X converge a todo punto de X.

Teorema 2.4.9. *Sea X espacio topológico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y solo si existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en A que converge a x.*

Demostración. Dado $x \in \overline{A}$ nos construimos una red en A que converge a x de la siguiente manera. Tomamos como Λ al conjunto de todos los entornos de x en X. Le damos a Λ el siguiente orden parcial: dados $V_1, V_2 \in \Lambda$, $V_1 \leq V_2$ si $V_2 \subseteq V_1$. Veamos que Λ con este orden parcial resulta dirigido. Dados $V_1, V_2 \in \Lambda$ debemos encontrar un $V_3 \in \Lambda$ tal que $V_1, V_2 \leq V_3$. Basta tomar $V_3 = V_1 \cap V_2$ que es entorno de x porque V_1 y V_2 lo son y $V_3 \subseteq V_1, V_2$. Ahora construyamos la red. Como $x \in \overline{A}$, dado $V \in \Lambda$ se tiene que $A \cap V \neq \emptyset$ (ya que V es entorno de x). Elijo $x_V \in A \cap V$. Así hemos construido $(x_V)_{V \in \Lambda}$. Veamos que $x_V \to x$. Dado un entorno U de x en X, vemos a U como elemento de Λ y si $V \geq U$ en Λ entonces $V \subseteq U$ y por lo tanto $x_V \in A \cap V \subseteq A \cap U \subseteq U$. Así hemos visto que para todo $V \geq U$, $x_V \in U$. Esto prueba que la red tiende a x.

La otra implicación es sencilla. □

Veamos ahora la definición de sub-red.

Definición 2.4.10. 1. Sea Λ un poset. Un sub-poset $\widetilde{\Lambda} \subseteq \Lambda$ se dice cofinal si para todo $\alpha \in \Lambda$ existe $\beta \in \widetilde{\Lambda}$ tal que $\alpha \leq \beta$.

2. Sean Γ y Λ conjuntos dirigidos. Una función $f : \Gamma \to \Lambda$ es cofinal si es morfismo de posets (respeta $\leq$) y la imagen $f(\Gamma)$ es cofinal en Λ.

3. Sea $\varphi : \Lambda \to X$ una red en X y sea $f : \Gamma \to \Lambda$ cofinal. La composición $\varphi \circ f : \Gamma \to X$ se llama sub-red. Si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ denota a la red, denotamos con $(x_{\lambda_\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ a la sub-red de $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Notar que las sub-redes son redes en sí mismas y que si $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en X que converge a x, toda sub-red converge a x.

Observación 2.4.11. Las sucesiones son redes, las subsucesiones son subredes de la sucesión pero una sucesión (vista como red) puede admitir sub-redes que no son subsucesiones. Veremos más adelante que en un espacio compacto toda red tiene alguna sub-red convergente. Hay ejemplos de compactos que tienen sucesiones que no tienen subsucesiones convergentes (pero obviamente sí tienen sub-redes convergentes).

2.5. Funciones continuas

Sean X e Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ es continua si para todo $U \subseteq Y$ abierto se tiene que $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto.

Notar que, como $f^{-1}(\bigcup\limits_\alpha U_\alpha) = \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(U_\alpha)$ y $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, entonces para chequear continuidad basta ver que $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo $U \subseteq Y$ abierto de una sub-base de la topología.

Proposición 2.5.1. (Ejercicio para el lector) Sea $f : X \to Y$. Son equivalentes:

(i) f continua.

(ii) $\forall\ A \subseteq X,\ f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iii) $f^{-1}(F) \subseteq X$ es cerrado para todo $F \subseteq Y$ cerrado.

(iv) $\forall\ (x_\alpha)$ red en X tal que $x_\alpha \to x$, se tiene que $f(x_\alpha) \to f(x)$ en Y.

Es fácil comprobar que composición de funciones continuas es continua.

Definición 2.5.2. Una función $f : X \to Y$ se dice abierta (resp. cerrada) si $f(A)$ es abierto (resp. cerrado) en Y para todo A abierto (resp. cerrado) de X. Un homeomorfismo $f : X \to Y$ es una función continua y biyectiva tal que la inversa f^{-1} es continua.

Notar que f es homeomorfismo si y solo si es continua, biyectiva y abierta si y solo si es continua, biyectiva y cerrada.

Sea X un conjunto y sean $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ topologías en X. Consideremos la función identidad: $1_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$, $1_X(x) = x \ \forall \ x \in X$. Notar que 1_X es continua si y solo si $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$, 1_X es abierta si y solo si $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ y finalmente 1_X es homeomorfismo si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Capítulo 3

Topologías iniciales y finales

3.1. Topología del subespacio

Dado un espacio topológico X y un subconjunto $A \subseteq X$. ¿Qué topologías podemos darle a A para que la inclusión $i : A \to X$ sea continua? Observar que si $U \subseteq X$, $i^{-1}(U) = U \cap A$. Para que i sea continua, $U \cap A \subseteq A$ debe ser abierto en A para todo U abierto de X.

Se define la topología de subespacio en $A \subseteq X$ como

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}.$$

Equivalentemente: $\mathcal{T}_A = \{V \subseteq A \mid \exists\, U \subseteq X \text{ abierto con } V = U \cap A\}$.

Dejamos como ejercicio sencillo probar que $\mathcal{T}_A$ es efectivamente una topología en A. Notar que con esta topología la inclusión $i : A \to X$ resulta continua. Pero no es la única topología que hace a la inclusión continua. Por ejemplo, si le damos a A la topología discreta (todo $V \subseteq A$ es abierto) entonces la $i : A \to X$ también resulta continua.

Lo que sucede es que $\mathcal{T}_A$ tiene exactamente los abiertos necesarios para que la inclusión sea continua. Es decir:

Definición 3.1.1. La topología $\mathcal{T}_A$ es la topología menos fina en A que hace la inclusión $i : A \to X$ continua.

Veamos que la topología de subespacio $\mathcal{T}_A$ se puede definir, alternativamente, mediante una propiedad universal. Para eso veamos primero el siguiente resultado.

Proposición 3.1.2. La topología $\mathcal{T}_A$ cumple la siguiente propiedad:

$$(*)\ \ \forall\, Z \text{ espacio topológico y } \forall\, f : Z \to A \text{ función,}$$
$$f \text{ es continua si y solo si } i \circ f : Z \to X \text{ es continua.}$$

Demostración. Si $f : Z \to A$ es continua, como i es continua se tiene que $i \circ f : Z \to X$ lo es. Recíprocamente, dada una función $f : Z \to A$ tal que $i \circ f : Z \to X$ es continua, debemos ver que f lo es. Sea $V \subseteq A$ abierto. Por definición de $\mathcal{T}_A$ existe U abierto de X tal que $V = U \cap A = i^{-1}(U)$. Entonces $f^{-1}(V) = f^{-1}(i^{-1}(U)) = (i \circ f)^{-1}(U)$ que es abierto porque $i \circ f : Z \to X$ es continua. Por lo tanto f es continua. $\square$

Ahora podemos caracterizar la topología $\mathcal{T}_A$ en forma universal.

Proposición 3.1.3. $\mathcal{T}_A$ es la única topología en A que cumple la propiedad $(*)$ de la proposición anterior.

Demostración. Ya vimos que $\mathcal{T}_A$ cumple la propiedad $(*)$. Veamos que es la única topología que la cumple. Sea $\mathcal{T}$ una topología en A que cumple la propiedad $(*)$. Veamos primero que $\mathcal{T}$ hace la inclusión continua. Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (A,\mathcal{T}) \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "i\circ 1_A = i"'] & (A,\mathcal{T}) \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{T}$ cumple $(*)$ y la identidad 1_A es continua, entonces $i = i \circ 1_A$ es continua.
Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} (A,\mathcal{T}) \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & (A,\mathcal{T}_A) \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Como $i : (A,\mathcal{T}) \to X$ es continua y $(A,\mathcal{T}_A)$ cumple $(*)$, entonces $1_A : (A,\mathcal{T}) \to (A,\mathcal{T}_A)$ es continua y por lo tanto $\mathcal{T}_A \leq \mathcal{T}$.
Cambiando los roles de $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A$ y considerando el diagrama:

$$\begin{tikzcd} (A,\mathcal{T}_A) \arrow[r, "1_A"] \arrow[rr, bend right, "i"'] & (A,\mathcal{T}) \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

obtenemos que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_A$. Así hemos probado entonces que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_A$. □

Moraleja: La topología de subespacio $\mathcal{T}_A$ se pude definir de estas 3 formas equivalentes:

1. $\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}$.
2. $\mathcal{T}_A$ es la topología menos fina que hace la inclusión $i : A \to X$ continua.
3. $\mathcal{T}_A$ es la única topología en A que cumple la propiedad $(*)$.

Antes de avanzar con otras topología iniciales veamos primero algunas propiedades básicas de la topología de subespacio que nos serán muy útiles a lo largo del curso.

Observación 3.1.4. Sea $A \subseteq X$ un subespacio (es decir, un subconjunto con la topología del subespacio). Sea $i : A \to X$ la inclusión.

1. Si $g : X \to Y$ es continua, entonces la restricción $g|_A = g \circ i : A \to Y$ es continua.
2. Si $h : Z \to X$ es continua y $h(Z) \subseteq A$, entonces la co-restricción $h|^A : Z \to A$ es continua (notar que esto se deduce de la propiedad $(*)$).

Observación 3.1.5. Sea $A \subseteq X$ subespacio. Entonces $F \subseteq A$ es cerrado si y solo si existe G cerrado en X tal que $F = G \cap A$.

Definición 3.1.6. $A \subseteq X$ se dice subespacio cerrado (resp. abierto) si A tiene la topología de subespacio y A es cerrado (resp. abierto) en X.

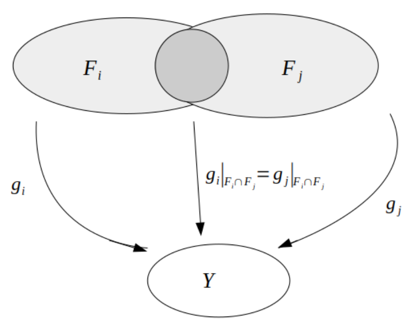
Ejercicio 3.1.7. $A \subseteq X$ es subespacio cerrado (resp. abierto) si y solo si A es subespacio y la inclusión $i : A \to X$ es cerrada (resp. abierta).

Vamos a estudiar ahora los "lemas de pegado"que nos permiten, bajo ciertas condiciones, pasar de lo local a lo global: podemos construir funciones continuas (o verificar continuidad de funciones) a partir de construir funciones continuas localmente.

Sea X un conjunto y sea $\{A_i\}_{i\in J}$ una familia de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup\limits_{i\in J} A_i$. Dar una función $f : X \to Y$ equivale a dar una familia de funciones $f_i : A_i \to Y$ para todo $i \in J$ tal que $\forall\ i, j$ si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $f_i|_{A_i\cap A_j} = f_j|_{A_i\cap A_j}$. Es decir, basta definir funciones en cada A_i y que se peguen bien.

Para espacios topológicos y funciones continuas esto obviamente no es cierto. Si se tiene una función continua $f : X \to Y$ y $\{A_i\}_{i\in J}$ es una familia de subespacios de X tal que $X = \bigcup\limits_{i\in J} A_i$, es claro que las $f_i = f|_{A_i}$ son continuas pero no vale la recíproca, es decir, que las $f_i = f|_{A_i}$ sean continuas para todo i no implica que la f lo sea. Lo que dicen los lemas de pegado es que si los subespacios son todos abiertos, o son todos cerrados y J es finito, entonces vale la recíproca.

Lema de pegado versión "cerrados". Sea X un espacio topológico y sean $F_1, \dots, F_n \subseteq X$ subespacios cerrados que lo cubren (es decir $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$). Sea Y un espacio topológico y sean $g_i : F_i \to Y$ funciones continuas para todo i que se pegan bien, es decir $g_i|_{F_i\cap F_j} = g_j|_{F_i\cap F_j}$ para todo i, j. Entonces la función $g : X \to Y$ definida por $g(x) = g_i(x)$ si $x \in F_i$ es continua.



Demostración. Sea $A \subseteq Y$ cerrado, debemos ver que $g^{-1}(A)$ es cerrado en X. Notar que $g^{-1}(A) = g_1^{-1}(A) \cup \ldots \cup g_n^{-1}(A)$. Como cada g_i es continua, entonces $g_i^{-1}(A)$ es cerrado en F_i para todo i, y como F_i es cerrado en X, $g_i^{-1}(A)$ resulta cerrado en X y por lo tanto $g^{-1}(A)$ es cerrado en X por ser unión finita de cerrados. $\square$

Notar que la siguiente es una formulación equivalente del lema anterior: Sea X un espacio topológico y sean $F_1, \dots, F_n \subseteq X$ subespacios cerrados que lo cubren. Sea Y un espacio topológico y sea $g : X \to Y$ una función. Si $g|_{F_i} : F_i \to Y$ es continua para todo i, entonces la función $g : X \to Y$ es continua.

La versión para abiertos es similar, pero en este caso la familia puede ser infinita. Dejamos la demostración a cargo del lector:

Lema de pegado versión "abiertos". Sea X un espacio topológico y sea $\{U_i\}_{i\in J}$ una familia de subespacios abiertos que lo cubren. Sea Y un espacio topológico y sea $g : X \to Y$ una función. Si $g|_{U_i} : U_i \to Y$ es continua para todo i, entonces la función $g : X \to Y$ es continua.

Generalicemos ahora lo que hicimos con la topología de subespacio:

Definición 3.1.8. Sea X un espacio topológico, A un conjunto y $g : A \to X$ una función de conjuntos. La topología inicial en A (respecto de la función g) es la definida por cualquiera de estas tres propiedades equivalentes:

1. $\mathcal{T}_A = \{g^{-1}(U) \mid U \subseteq X \text{ abierto}\}$.

2. $\mathcal{T}_A$ es la topología menos fina en A que hace a la función $g : A \to X$ continua.

3. $\mathcal{T}_A$ es la única topología en A que cumple la propiedad $(*)$:

$$(*)\ \ \forall\ Z \text{ espacio topológico y } \forall\ f : Z \to A \text{ función,}$$
$$f \text{ es continua si y solo si } g \circ f : Z \to X \text{ es continua.}$$

Dejamos como ejercicio para el lector probar que las 3 definiciones son equivalentes reemplazando lo que hicimos para subespacios con la inclusión i por la función g.

Cuando A tiene la topología inicial respecto de una función $g : A \to X$ decimos que la función g es inicial.

Muchas veces utilizaremos una noción más laxa de subespacio que es la siguiente. Dados A y X espacios topológicos. Decimos que una función $j : A \to X$ es subespacio si es inyectiva e inicial. Esto equivale a pedir que $j : A \to j(A) \subseteq X$ sea un homeomorfismo, donde $j(A)$ tiene la topología de subespacio de X. En la misma dirección, decimos que $j : A \to X$ es subespacio abierto (resp. cerrado) si j es inyectiva, continua y abierta (resp. cerrada). Notar que en estos casos se deduce que j es inicial.

3.2. Topología producto

Sean X e Y espacios topológicos. Queremos darle al producto cartesiano

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

una topología coherente con la de X y la de Y. Consideremos las proyecciones $p_X : X \times Y \to X$, $p_X(x, y) = x$ y $p_Y : X \times Y \to Y$, $p_Y(x, y) = y$. Similarmente a lo que hicimos con subespacios, si queremos que ambas proyecciones sean continuas, entonces para todo abierto U de X, $p_X^{-1}(U) = U \times Y$ debe ser abierto en $X \times Y$, y para todo abierto V de Y, $X \times V$ debe ser abierto también. Igual que antes, puede haber varias topologías en el producto cartesiano que hagan a ambas proyecciones continuas (por ejemplo la topología discreta), pero como buscamos reflejar exactamente las topologías de X e Y queremos la topología menos fina que haga a ambas proyecciones continuas.

Ahora bien, $\{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ abierto}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ abierto}\}$ en general no es una topología en $X \times Y$, ya que por ejemplo $(U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ no está en esa unión. Pero esa unión forma una sub-base para una topología y podemos definir:

Definición 3.2.1. La topología producto en $X \times Y$ es la generada por la sub-base

$$\beta = \{U \times Y \mid U \subseteq X \text{ abierto}\} \cup \{X \times V \mid V \subseteq Y \text{ abierto}\}.$$

Equivalentemente, es la generada por la base:

$$\widetilde{\beta} = \{U \times V \mid U \subseteq X,\ V \subseteq Y \text{ abiertos}\}.$$

Notar que otra forma equivalente de definir la topología producto es como la topología menos fina que hace que las funciones $p_X : X \times Y \to X$ y $p_Y : X \times Y \to Y$ sean continuas.

Claramente, podemos hacer los mismo cuando tenemos una familia $X_1, \ldots, X_n$ de espacios topológicos. La topología producto en $X = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i\}$ es la menos fina que hace las n proyecciones $p_i : X \to X_i$ continuas. Equivalentemente, la generada por la sub-base $\beta = \{X_1 \times \ldots \times U \times \ldots \times X_n \mid U \subseteq X_j \text{ abierto}, \ j = 1, \ldots, n\}$. Equivalentemente, la generada por la base $\widetilde{\beta} = \{U_1 \times \ldots \times U_n \mid U_i \subseteq X_i \text{ abiertos}\}$.

Queda como ejercicio para el lector la demostración del siguiente resultado.

Proposición 3.2.2. La topología producto en $\prod_{i=1}^{n} X_i$ es la única que cumple:

$$(*) \ \ \forall\, Z \text{ espacio topológico y } \forall\, f : Z \to \prod_{i=1}^{n} X_i \text{ función,}$$
$$f \text{ es continua si y solo si } p_j \circ f : Z \to X_j \text{ es continua para todo } j.$$

La topología producto en $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ es entonces la topología inicial respecto de las proyecciones $p_j \ j = 1, \ldots, n$.

¿Qué pasa si queremos considerar un producto infinito de espacios $\prod_{i \in J} X_i$? Esencialmente es lo mismo: es la única que cumple la propiedad $(*)$ respecto de todas las proyecciones $p_j : X \to X_j, \ j \in J$. En términos de sub-base es la generada por $\beta = \{p_i^{-1}(U) \mid U \subseteq X_i \text{ abierto }, \ i \in J\}$. Pero en términos de la base hay que tener un poco de cuidado, dado que la base se consigue a partir de la sub-base mediante intersecciones finitas. Entonces, en términos de base, es la generada por la base

$$\widetilde{\beta} = \{\prod_{i \in J} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ abierto } \forall\, i \text{ y } U_i = X_i \text{ salvo para finitos } i\}.$$

Dado X un espacio topológico y S un conjunto, consideramos el producto $\prod_{s \in S} X = X^S$. Los elementos del producto pueden ser visto como uplas $(x_s)_{s \in S}$ con $x_s \in X \ \forall s$, o equivalentemente como funciones $f : S \to X$ (donde $f(s) = x_s$). Con la topología producto en X^S los abiertos de la sub-base se corresponden con subconjuntos $B_{s_0, U_{s_0}} = \{f : S \to X \mid f(s_0) \in U_{s_0}\}$ (para $s_0 \in S$ y $U_{s_0} \subseteq X$ abierto).

Ejemplo 3.2.3. Sea $X = \{0, 1\}$ con la topología discreta y sea $S = \mathbb{N}$. Entonces $X^{\mathbb{N}}$ son las sucesiones de 0 y 1 con la topología producto. Notemos que $X^{\mathbb{N}}$ no es un espacio discreto (aunque X sí lo es). Los puntos de $X^{\mathbb{N}}$ no son abiertos ya que todo abierto tiene incluido a uno de la base y los de la base son de la forma $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_r \times X \times X \times X \ldots$ (a partir de un momento son todas copias de X).

Sea $\Delta : X \to X \times X$, $\Delta(x) = (x, x)$, la diagonal. Notar que Δ es continua ya que $\Delta^{-1}(U \times V) = U \cap V$. En general la diagonal $\Delta : X \to X^S$ es continua si X^S tiene la topología producto. Un abierto de la base de X^S es de la forma $\prod_{s \in S} U_s$ donde $U_s = X$ salvo para finitos $s_1, \ldots, s_r$ y por lo tanto $\Delta^{-1}(\prod_{s \in S} U_s) = U_{s_1} \cap \ldots \cap U_{s_r}$ que resulta abierto de X.

Otra topología a tener en cuenta en el producto cartesiano $\prod_{i \in J} X_i$, en el caso de que J sea infinito, es la llamada topología caja.

Definición 3.2.4. La topología caja en $\prod_{i \in J} X_i$ es la generada por la base

$$\beta = \{\prod_{i \in J} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ abiertos } \forall\, i\}.$$

Notar que la topología caja es en general más fina que la topología producto. Es decir, las proyecciones $p_j : \prod_{i \in J} X_i \to X_j$ son continuas, pero no es inicial respecto de las proyecciones (tiene más abiertos que los necesarios).

Notar también que con la topología caja, si los X_i son discretos para todo $i \in J$, entonces $\prod_{i \in J} X_i$ es discreto.

Observación 3.2.5. Con la topología caja la diagonal $\Delta : X \to X^S$ puede no ser continua. Por ejemplo si $X = \mathbb{R}$ y $S = \mathbb{N}$, consideremos $U = \prod_{n \in \mathbb{N}} (-1/n, 1/n) \subseteq X^S$. Con la topología caja U es abierto (con la producto no sería un abierto) y $\Delta^{-1}(U) = \{0\}$ que no es un abierto de $\mathbb{R}$.

3.3. Topologías iniciales

Damos ahora la definición general de topología inicial. Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios topológicos. Sea A un conjunto y $g_s : A \to X_s$ funciones para todo s. La topología inicial en A respecto de la familia $\{g_s : A \to X_s\}_{s \in S}$ es la topología menos fina que hace a todas las g_s continuas.

En términos de sub-base, se tiene $\beta = \{g_s^{-1}(U) \mid U \subseteq X_s \text{ abierto}, s \in S\}$.

En términos de propiedad universal: es la única que cumple

$$(*) \quad \forall\, Z \text{ espacio topológico y } \forall\, f : Z \to A \text{ función,}$$
$$f \text{ es continua si y solo si } g_s \circ f : Z \to X \text{ es continua } \forall s$$

Si A tiene la topología inicial respecto de la familia $\{g_s : A \to X_s\}_{s \in S}$, a esa familia de funciones se las llama familia inicial.

Dejamos la demostración del siguiente resultado como ejercicio para el lector.

Proposición 3.3.1. Sea $f : X \to Y$ continua y sean $g_s : Y \to Y_s$ continuas para todo $s \in S$. Si $\{g_s \circ f : X \to Y_s\}_{s \in S}$ es una familia inicial, entonces $f : X \to Y$ es inicial.

3.4. Topologías finales y cocientes

Ahora tenemos una función $f : X \to A$ donde X es un espacio topológico y A un conjunto al que queremos darle una topología que herede de X mediante la función f.

Definición 3.4.1. La topología final en A (respecto de la función f) es la más fina que hace a la función f continua.

Es decir le damos a A la mayor cantidad de abiertos posibles tal que la f sea continua. Notar que la topología indiscreta en A hace siempre a la f continua, pero queremos darle la mayor cantidad de abiertos y que siga siendo continua. Concretamente, la topologia final es $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\}$. Observar que $\mathcal{T}_A$ es efectivamente una topología en A.

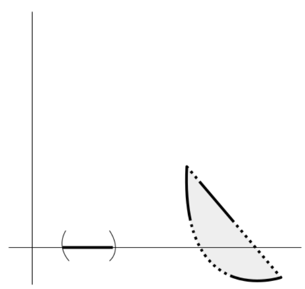
Dejamos la demostración del siguiente resultado como ejercicio (es similar a los análogos para topologías iniciales):

Proposición 3.4.2. La topología final en A respecto de $f : X \to A$ es la única topología que cumple:

$$(*)\ \ \forall\ Z \text{ espacio topológico y } \forall\ h : A \to Z \text{ función,}$$
$$h \text{ es continua si y solo si } h \circ f : X \to Z \text{ es continua.}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h\circ f"'] & A \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.4.3. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual y la función $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i(x) = (x, 0)$. ¿Qué relación tiene la topología usual de $\mathbb{R}^2$ con la topología final dada por la i? Notar que la topología usual de $\mathbb{R}^2$ hace a la $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua, por lo tanto la topologia final es más fina que la usual (eventualmente podría ser igual). Veamos que la topología final respecto de la i es estrictamente más fina que la usual (es decir que hay abiertos con la final que no son abiertos con la topología usual). Por ejemplo, estos son abiertos con la topología final que no son abiertos con la usual:



En realidad cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que al intersecarlo con el eje X sea abierto nos dará un abierto en la topología final.

En general, dada $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos, A un conjunto y $g_s : X_s \to A$ funciones para todo s, la topología final en A respecto de la familia $\{g_s : X_s \to A\}_{s\in S}$ es la topología más fina que hace a todas las g_s continuas. Concretamente, $\mathcal{T}_A = \{U \subseteq A \mid g_s^{-1}(U) \text{ es abierto en } X_s\ \forall s\}$. En términos de propiedad universal: es la única que cumple

$$(*)\ \ \forall\ Z \text{ espacio topológico y } \forall\ h : A \to Z \text{ función,}$$
$$h \text{ es continua si y solo si } h \circ g_s : X_s \to Z \text{ es continua } \forall s.$$

Un ejemplo importante de topología final es la unión disjunta (o coproducto): dada una familia $\{X_s\}_{s\in S}$ de espacios topológicos, tomamos $X = \coprod_{s\in S} X_s$ (la unión disjunta) y le damos la topología final respecto de las inclusiones $i_s : X_s \to X$. Concretamente: $U \subseteq X$ es abierto si y solo si $U \cap X_s$ es abierto en X_s para todo s.

Podemos reformular los lemas de pegado que vimos en la sección de subespacios, en términos de topologias finales:

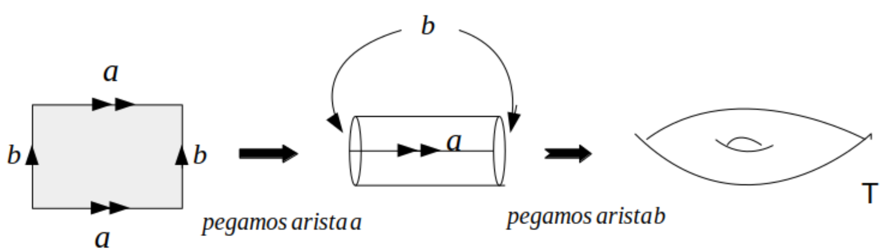
Lemas de pegado versión cerrados. Sea X espacio topológico y sean $F_1, \ldots, F_n$ subespacios cerrados que cubren a X. Entonces X tiene la topología final respecto de la familia de inclusiones $\{i_j : F_j \to X\}_{j=1,\ldots,n}$.

Lemas de pegado versión abiertos. Sea X espacio topológico y sean $\{U_s\}_{s\in S}$ una familia de subespacios abiertos que cubren a X. Entonces X tiene la topología final respecto de la familia de inclusiones $\{i_s : U_s \to X\}_{s\in S}$.

Ahora nos concentraremos en la topología final más importante que es la topología cociente. La idea es obtener un espacio topológico a partir de uno dado, identificando puntos del espacio original. Veamos algunas ideas y ejemplos antes de formalizar la definición.

Ejemplos 3.4.4.

1. El toro T es el espacio que se obtiene a partir de un cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ identificando (o pegando) lados opuestos. Es decir, identificamos los puntos de la forma $(0, y)$ con los de la forma $(1, y)$ (para $y \in [0,1]$) y los puntos de la forma $(x, 0)$ con los puntos $(x, 1)$ (para $x \in [0, 1]$).

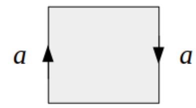


Identificamos la arista a con la a y la b con la b
en la dirección indicada por las flechas

2. Consideremos el disco $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ con la topología usual de subespacio de $\mathbb{R}^n$ y la esfera $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| = 1\}$ (el borde del disco). Si tomamos el disco e identificamos todos los puntos del borde en uno solo obtenemos la esfera $\mathbb{S}^n$.

La esfera $\mathbb{S}^2$ se obtiene del disco $\mathbb{D}^2$
identificando todos los puntos del borde $\partial\mathbb{D}^2$

3. La banda de Möbius se obtiene a partir de un cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ identificando cada punto de la forma $(0, y)$ con el $(1, 1-y)$.



Para construir la banda de Möbius identificamos la arista a con la a en el sentido que marcan las flechas.

Definición 3.4.5. Una función continua $q : X \to Y$ se dice cociente (o que Y tiene la topología cociente respecto de q) si q es sobreyectiva y final.

Vamos a dar una definición equivalente a ser cociente en términos de abiertos o cerrados "saturados". Para eso observemos primero que dada una función cualquiera $f : X \to Y$ y dado $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice saturado si $A = f^{-1}(f(A))$. Notar que si $V \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$ es saturado.

Proposición 3.4.6. Sea $q : X \to Y$ continua y sobreyectiva. Entonces q es cociente si y solo si $q(U) \subseteq Y$ es abierto para todo abierto saturado $U \subseteq X$. El resultado sigue valiendo si cambiamos abiertos por cerrados.

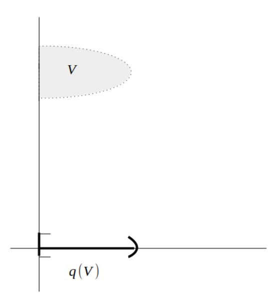
Demostración. Supongamos primero que q cociente y sea $U \subseteq X$ un abierto saturado. Debo ver que $q(U)$ es abierto en Y. Como q es final (por hipótesis), debemos ver que $q^{-1}(q(U))$ es abierto en X, pero $q^{-1}(q(U)) = U$ (que es abierto) porque U es saturado.

Para la otra implicación, debemos ver que q es final y para esto basta ver que si $V \subseteq Y$ cumple que $q^{-1}(V)$ es abierto en X entonces V es abierto. Como q es sobreyectiva, $V = q(q^{-1}(V))$ y $q^{-1}(V)$ es abierto saturado por lo observado previamente. Entonces, por la hipótesis, $V = q(q^{-1}(V))$ es abierto en Y. □

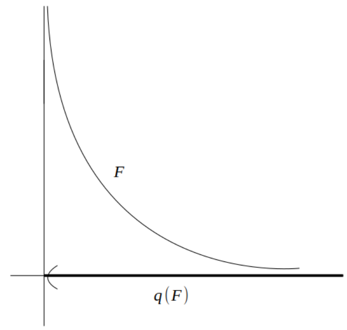
Corolario 3.4.7. Si $q : X \to Y$ es continua, sobreyectiva y abierta (o cerrada) entonces q es cociente.

Veamos ahora un ejemplo de una función cociente que no es abierta ni cerrada.

Ejemplo 3.4.8. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ o } y = 0\}$ y sea X el eje X de $\mathbb{R}^2$ (ambos con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$). Sea $q : A \to X$, $q(x, y) = (x, 0)$. Notar que q es continua porque la proyección es continua y A tiene la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$. Es claro que q es sobreyectiva. Veamos que q es final (y así probaremos que q es cociente): dado $F \subseteq X$ tal que $q^{-1}(F) \subseteq A$ es cerrado, debo ver que F cerrado. Pero $F = q^{-1}(F) \cap X$ y $q^{-1}(F)$ es cerrado en A por hipótesis y como A es cerrado en $\mathbb{R}^2$, $q^{-1}(F)$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto $F = q^{-1}(F) \cap X$ es cerrado en X (porque tiene la topología de subespacio). Esto prueba que q es cociente. Las siguientes figuras prueban que q no es abierta ni cerrada.



Un abierto $V \subset A$ cuya imagen $q(V)$ es un intervalo semi-abierto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto no es abierto.



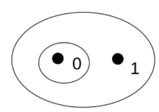
Un cerrado $F = Graf(1/x) \subset A$ cuya imagen $q(F)$ no es cerrado.

Ejemplos 3.4.9.

1. Sea $\{X_s\}_{s\in S}$ una familia de espacios topológicos y sea $X = \prod_{s\in S} X_s$ con la topología producto. Entonces para todo $s \in S$, la proyección $p_s : X \to X_s$ es cociente, ya que es continua, sobreyectiva y abierta.

2. La función $q : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $q(t) = e^{2\pi it}$ es cociente por ser continua, abierta y sobreyectiva.

3. Sea $\mathcal{S}$ el espacio de Sierpinski.



Sea $q : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$ definida por $q(x) = 0$ si $x < 0$ y $q(x) = 1$ si $x \geq 0$. Notar que q es final y sobreyectiva y por lo tanto es cociente.

Veamos ahora una construcción muy importante para entender mejor los cocientes. Sea X un espacio topológico y sea $\sim$ una relación de equivalencia en X (=reflexiva, simétrica y transitiva). Considero el conjunto de clases de equivalencia:

$$X/\sim = \{\overline{x} \mid x \in X\}$$

donde $\overline{x} = \overline{y}$ si y solo si $x \sim y$ ($\overline{x}$ es la clase de x). Tomemos la función $q : X \to X/\sim$ definida por $q(x) = \overline{x}$. Notar que q es sobreyectiva. Le damos al conjunto de clases de equivalencia $X/\sim$ la topología final respecto de q y por lo tanto $q : X \to X/\sim$ resulta cociente.

Por ejemplo, podemos ver al toro T como un cociente del cuadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ por una relación de equivalencia: definimos en el cuadrado la relación $\sim$ como $(x,y) \sim (x,y)$ $\forall (x,y)$, $(0,y) \sim (1,y)$ $\forall y$, $(x,0) \sim (x,1)$ $\forall x$. Así $T = X/\sim$.

Dado un espacio X y un subconjunto $A \subseteq X$, denotamos X/A al espacio cociente $X/\sim$ donde la relación $\sim$ identifica a todos los puntos de A en uno solo. Es decir: $x \sim x$ $\forall x \in X$ y $x \sim y$ $\forall x, y \in A$. Como ya vimos antes, $\mathbb{D}^n/(\partial\mathbb{D}^n) = \mathbb{S}^n$.

Definición 3.4.10. Dada una función $f : X \to Y$ y dado $y \in Y$, al conjunto $f^{-1}(y) \subseteq X$ se lo llama la fibra de y.

Proposición 3.4.11. Sea $q : X \to Y$ cociente y sea $f : X \to Z$ continua tal que f es constante en las fibras de q (es decir, si $q(x) = q(x')$ entonces $f(x) = f(x')$). Entonces existe una única

$\widetilde{f}: Y \to Z$ continua tal que $\widetilde{f} \circ q = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "\exists! \widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\widetilde{f}(y) = f(x)$ para algún $x \in q^{-1}(y)$. Notar que $\widetilde{f}$ está bien definida porque q es sobreyectiva y f es constante en las fibras de q. Por construcción $\widetilde{f}$ es la única que hace conmutar el diagrama y es continua porque q es final y f es continua. □

Corolario 3.4.12. Sea $f : X \to Z$ continua y $A \subseteq X$ tal que $f|_A$ es constante. Entonces existe una única $\widetilde{f} : X/A \to Z$ continua tal que $\widetilde{f}(\overline{x}) = f(x)$.

El siguiente resultado prueba que todo cociente es en realidad un cociente por una relación de equivalencia.

Teorema 3.4.13. *Sea $f : X \to Y$ cociente. Definimos en X la siguiente relación de equivalencia: $x \sim x'$ si $f(x) = f(x')$. Entonces Y es homeomorfo a $X/\sim$.*

Demostración. Considero el cociente $q : X \to X/\sim$, $q(x) = \overline{x}$. Se tiene el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\exists! \widetilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Como f es constante en las fibras de q, existe una única $\widetilde{f} : X/\sim \to Y$ que hace conmutar el diagrama. Es decir $\widetilde{f}(\overline{x}) = f(x)$. Ahora tomamos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X/\sim \\ Y \arrow[ur, dotted, "\exists! \widetilde{q}"'] & \end{tikzcd}$$

Si $f(x) = f(x')$ entonces $x \sim x'$ y así $q(x) = q(x')$. Es decir, q es constante en las fibras de f y por lo tanto existe una única $\widetilde{q} : Y \to X/\sim$, $\widetilde{q}(y) = q(x)$ si $f(x) = y$.
Ahora bien, $\widetilde{f}\widetilde{q}(y) = \widetilde{f}(\overline{x})$ donde $f(x) = y$ y $\widetilde{f}(\overline{x}) = f(x) = y$. Similarmente, $\widetilde{q}\widetilde{f}(\overline{x}) = \widetilde{q}(f(x)) = q(x) = \overline{x}$. Esto prueba que son inversas una de otra. □

Capítulo 4

Conexión, arco-conexión y componentes

4.1. Conexión y arco-conexión

Definición 4.1.1. Sea X un espacio topológico. Una desconexión en X consiste de un par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$. Un espacio X se dice conexo si no tiene desconexiones.

Proposición 4.1.2. X es conexo si y solo si los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados son $\emptyset$ y X.

Demostración. Sea $A \subseteq X$ abierto y cerrado en X, entonces A y A^c son abiertos y $A \cup A^c = X$, $A \cap A^c = \emptyset$. Como X es conexo A o A^c debe ser vacío. Recíprocamente, si U y V son abiertos con intersección vacía y que cubren X, entonces $U = V^c$ y por lo tanto U es abierto y cerrado y entonces U o $V = U^c$ debe ser vacío, con lo cual X es conexo. □

Ejemplos 4.1.3.

1. Si X tiene la topología indiscreta entonces es conexo.
2. El espacio de Sierpinski $\mathcal{S}$ es conexo.
3. Si X tiene la topología discreta y más de un punto entonces no es conexo. Más aún, es totalmente disconexo. Un espacio X se dice totalmente disconexo si $\forall\ a \neq b$ en X existe una desconexión U, V tal que $a \in U,\ b \in V$.
4. Existen espacios totalmente disconexos que no son discretos. Por ejemplo $\mathbb{Q}$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ (dados $a < b \in \mathbb{Q}$, tomar c irracional con $a < c < b$, los abiertos $U = (-\infty, c) \cap \mathbb{Q}$ y $V = (c, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ forman una desconexión).

Proposición 4.1.4. Sea X espacio topológico y sea $\{U, V\}$ una desconexión en X. Si $Y \subseteq X$ es subespacio conexo entonces $Y \subseteq U$ o $Y \subseteq V$.

Demostración. Consideremos $U' = U \cap Y,\ V' = V \cap Y$. Notar que ambos son abiertos de Y que tienen intersección vacía y que lo cubren. Como Y es conexo $U' = \emptyset$ o $V' = \emptyset$. Esto implica que $Y \subseteq U^c = V$ o $Y \subseteq V^c = U$. □

Dejamos a cargo del lector la demostración de los siguientes resultados básicos de conexión.

Ejercicios 4.1.5.
1. Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio conexo. Si B es un subespacio de X tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo. En particular, si A es conexo, su clausura también lo es.
2. Si $f : X \to Y$ es continua y X es conexo entonces $f(X) \subseteq Y$ es subespacio conexo. En particular si X e Y son homeomorfos, X es conexo si y solo si Y lo es.
3. Si $f : X \to Y$ es continua, X es conexo e Y totalmente disconexo entonces f es constante.

Recordamos de cursos anteriores de análisis el siguiente resultado:

Teorema 4.1.6. $\mathbb{R}$ *es conexo. Además los intervalos y semi-rectas en* $\mathbb{R}$ *también son conexos.*

Dejamos el teorema del valor medio como ejercicio para el lector:

Proposición 4.1.7. Sea X un espacio conexo e Y un conjunto ordenado con la topología del orden. Sea $f : X \to Y$ continua. Sean $a, b \in X,\ y \in Y$, tales que $f(a) < y < f(b)$. Entonces existe $c \in X$ tal que $f(c) = y$.

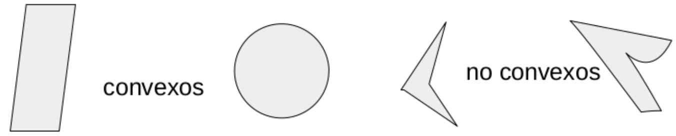
De ahora en más notaremos al intervalo real $[0, 1]$ (con la topología usual) como I.

Definición 4.1.8. Un espacio X se dice arco-conexo si $\forall x, y \in X,\ \exists\ \omega : I \to X$ continua tal que $\omega(0) = x$ y $\omega(1) = y$. A ω se lo llama un camino de x a y.

Proposición 4.1.9. Si X es arco-conexo entonces es conexo.

Demostración. Supongamos que existe una desconexión $\{U, V\}$. Elegimos $x \in U,\ y \in V$. Como X es arco-conexo tomamos un camino $\omega : I \to X$ de x a y. Pero como I es conexo, entonces la imagen del camino $\omega(I) \subseteq X$ también lo es. Por lo tanto todo el camino cae en U o en V, que es un absurdo ya que $x \in U,\ y \in V$. □

Ejemplos 4.1.10.
1. Recordemos que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo si $\forall x, y \in A$ el segmento $\{tx + (1 - t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ cae en A.

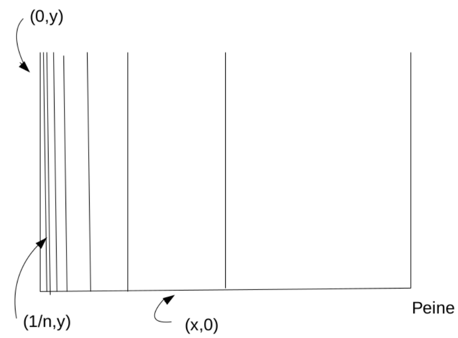


Por definición, es fácil ver que los convexos de $\mathbb{R}^n$ son arco-conexos.

2. Para $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{$ finitos puntos $\}$ es arco-conexo y no convexo.
3. El "peine" es el siguiente espacio topológico:

$$X = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1/n, y) \mid n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1\}$$

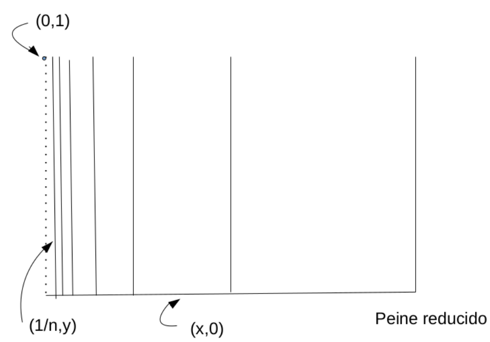
con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$. El peine es arco-conexo.



4. El "peine reducido" es el siguiente espacio

$$X = \{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1/n, y) \mid n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0, 1)\}$$

con la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$. El peine reducido es conexo pero no es arco-conexo (queda como ejercicio para el lector).



5. Si $f : X \to Y$ es continua y X es arco-conexo entonces $f(X) \subseteq Y$ es subespacio arco-conexo. En particular para $n \geq 1$, la esfera $\mathbb{S}^n$ es arco-conexa ya que es la imagen de la función continua $q : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n, q(x) = \frac{x}{||x||}$ y $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es arco-conexo.

4.2. Composición de caminos y π_0

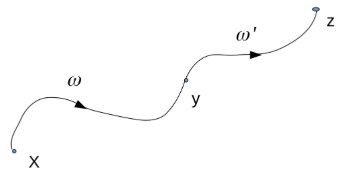
Definición 4.2.1. Dado un camino $\omega : I \to X$, se define el camino inverso $\overline{\omega} : I \to X$ como $\overline{\omega}(t) = \omega(1 - t)$

Notar que ω es continua si y solo si $\overline{\omega}$ lo es. Además si ω es un camino de x a Y, $\overline{\omega}$ es un camino de y a x.

Dado un $x \in X$, se define el camino constante en x, $c_x : I \to X, c_x(t) = x\ \forall t$.

Definición 4.2.2. Si $\omega, \omega' : I \to X$ son caminos tales que $\omega(1) = \omega'(0)$ (uno empieza donde termina el anterior), se define la composición de caminos como $\omega * \omega' : I \to X$

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \omega'(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$



Notar que $\omega * \omega'$ está bien definido porque $\omega(2 \cdot 1/2) = \omega(1) = \omega'(0) = \omega'(2 \cdot 1/2 - 1)$. Además $\omega * \omega'$ es continua por el lema de pegado (versión cerrados).

Definición 4.2.3. Dado un espacio X. Definimos la relación $\sim$ en X como: $x \sim y$ si existe un camino continuo de x a y. Observar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para ver reflexividad usamos los caminos constantes c_x. Para simetría usamos los inversos de los caminos $\overline{\omega}$. Para ver transitividad usamos la composición de caminos.

Podemos definir así el conjunto
$$\pi_0(X) = \{[x] \mid x \in X\}$$
donde $[x]$ denota la clase de x por la relación de equivalencia definida arriba. Es decir $[x] = [y]$ si $x \sim y$, es decir si existe un camino de x a y. Los elementos de $\pi_0(X)$ se llaman componentes arco-conexas de X.

Notar que X es arco-conexo si y solo si $\pi_0(X)$ tiene un solo elemento.

π_0 es un "invariante topológico". Esto significa lo siguiente: toda función continua $f : X \to Y$ induce una función de conjuntos $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, definida por $f_*([x]) = [f(x)]$ (dejamos como ejercicio comprobar que está bien definida, es decir no depende del representante elegido). Y la f_* cumple las siguientes condiciones:

1. Si se tienen $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ continuas, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.
2. Si $1_X : X \to X$ es la función identidad, entonces $(1_X)_* = 1_{\pi_0(X)} : \pi_0(X) \to \pi_0(X)$.

De lo anterior se deduce que si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ es una biyección de conjuntos con inversa $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$.

Ejemplo 4.2.4. Si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos, porque si existiera un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, se tendría un homeomorfismo $f|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Pero $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ no es arco-conexo y $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ sí lo es.

Para definir las componentes conexas de un espacio, veamos primero un resultado cuya demostración dejamos como ejercicio.

Proposición 4.2.5. Sean A y B subespacios conexos de un espacio X, tal que $A \cap B \neq \emptyset$. Entonces $A \cup B$ es conexo.

Definición 4.2.6. Dado un espacio X, definimos la siguiente relación: $x \sim y$ si existe $A \subseteq X$ conexo tal que $x, y \in A$.

Notar que, por la proposición anterior, esto define una relación de equivalencia en X. Las clases de equivalencia de X por esta relación $\sim$ se llaman componentes conexas de X.

Observación 4.2.7. Sean $\{C_i\}_{i \in J}$ las componentes conexas de X. Entonces se tiene:

1. $X = \coprod_{i \in J} C_i$ (la unión disjunta de las componentes).
2. $C_i \subseteq X$ es subespacio conexo para todo i.
3. Para todo $A \subseteq X$ conexo, existe un único C_i tal que $A \subseteq C_i$.

4.3. Conexión y arco-conexión local

Definición 4.3.1. Un espacio X se dice localmente conexo (respectivamente localmente arco-conexo) si $\forall x \in X$ y para todo V entorno de x, existe un abierto conexo (resp. arco-conexo) U tal que $x \in U \subseteq V$.

Equivalentemente: X se dice localmente conexo (resp. localmente arco-conexo) si admite una base de abiertos conexos (resp. arco-conexos).

Notar que conexión no implica conexión local y conexión local no implica conexión. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 4.3.2.

1. $X = (0,1) \cup (2,3) \subset \mathbb{R}$ con la topología de subespacio no es conexo pero sí localmente conexo, de hecho es localmente arco-conexo.
2. El peine reducido es conexo, no es arco-conexo ni es localmente arco-conexo.
3. $\mathbb{Q}$ no es conexo ni localmente conexo.

Dejamos la siguiente proposición como ejercicio:

Proposición 4.3.3. Si X es conexo y localmente arco-conexo entonces es arco-conexo.

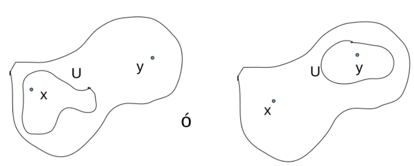
Capítulo 5

Primeros axiomas de separación

Sabemos que en los espacios métricos podemos “separar” puntos por medio de abiertos disjuntos. Concretamente, si X es un espacio métrico, dados $x \neq y \in X$, existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $x \in U,\ y \in V$. Más aún, podemos separar cerrados disjuntos por medio de abiertos disjuntos. Esto no sucede en general en cualquier espacio topológico. Por ejemplo, los espacios con topología indiscreta no tienen abiertos propios (el único abierto no vacío es todo el espacio) y por lo tanto no se pueden separar los puntos entre sí. En el espacio de Sierpinski $\mathcal{S}$ el único abierto que contiene al 1 es todo el espacio. Los axiomas de separación miden qué tanto se pueden separar los puntos entre sí (o los puntos de los cerrados, o los cerrados entre sí).

5.1. T_0

Un espacio X se dice T_0 si para todo $x \neq y$ en X existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U,\ y \notin U$ o $y \in U,\ x \notin U$. Es decir, existe un abierto que contiene a solo uno de los dos puntos.



Ejemplos 5.1.1. 1. Espacios métricos son T_0.

2. Si X tiene topología indiscreta y más de un punto no es T_0.

3. Si X tiene la topología discreta es T_0.

4. El espacio de Sierpinski $\mathcal{S}$ es T_0. Notar que puedo separar al 0 del 1 con el abierto $U = \{0\}$.

Proposición 5.1.2. Productos de espacios T_0 son T_0. Subespacios de espacios T_0 son T_0.

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in J}$ una familia de espacios T_0 y sea $X = \prod_{i \in J} X_i$. Dados $(x_i)_{i \in J} \neq (y_i)_{i \in J} \in X$, existe algún j tal que $x_j \neq y_j$ y como X_j es T_0 existe un abierto $U \subseteq X_j$ que tiene a solo uno de los dos. Entonces el abierto $\widetilde{U} = p_j^{-1}(U) \subseteq X$ separa a $(x_i)_{i \in J}$ de $(y_i)_{i \in J}$ (acá p_j denota la proyección en la coordenada j).

Para la segunda parte de la proposición, tomamos un subespacio A de un espacio X T_0. Sean $x \neq y \in A$. Como X es T_0 existe un abierto U de X que los separa (es decir, contiene a solo uno de los dos). Tomamos $U' = U \cap A$ que es un abierto de A que los separa. $\square$

Ahora vamos a caracterizar a todos los espacios T_0 utilizando el espacio de Sierpinski $\mathcal{S}$. Para esto, dado un espacio X y un subespacio $A \subseteq X$ consideramos la función característica $\chi_A : X \to \mathcal{S}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Proposición 5.1.3. Dado un espacio X y un subespacio $A \subseteq X$, χ_A es continua si y solo si A es cerrado en X.

Demostración. Es sencilla, notar que el único cerrado propio de $\mathcal{S}$ (es decir distinto de $\mathcal{S}$ y del vacío) es $\{1\}$. $\square$

Proposición 5.1.4. Dado un espacio X, la familia de funciones

$$\mathcal{U} = \{h : X \to \mathcal{S} \mid h \text{ es continua}\}$$

es inicial (es decir X tiene la topología inicial respecto de esa familia).

Demostración. Probemos la propiedad $(*)$ de la topología inicial: sea Z espacio topológico y $f : Z \to X$ una función. Debemos ver que f es continua si y solo si $h \circ f : Z \to \mathcal{S}$ es continua para toda $h \in \mathcal{U}$. Es claro que si f es continua entonces $h \circ f : Z \to \mathcal{S}$ es continua para toda $h \in \mathcal{U}$ porque las funciones en $\mathcal{U}$ son continuas. Recíprocamente, si $h \circ f : Z \to \mathcal{S}$ es continua para toda $h \in \mathcal{U}$, veamos que f es continua. Tomamos $A \subseteq X$ cerrado, queremos ver que $f^{-1}(A)$ es cerrado. Como $\chi_A : X \to \mathcal{S}$ es continua entonces $\chi_A \in \mathcal{U}$, entonces por hipótesis $\chi_A \circ f$ es continua y por lo tanto $(\chi_A \circ f)^{-1}(\{1\})$ es cerrado, pero $(\chi_A \circ f)^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(A)$ $\square$

Proposición 5.1.5. Dado un espacio X, definimos la función $i : X \to \prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S}$ como $i(x) = (h(x))_{h \in \mathcal{U}}$ (es decir en la coordenada h-ésima la función vale $h(x)$). Entonces i es inicial.

Demostración. Sea $p_h : \prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ la proyección en coordenada h. Notar que la función $i : X \to \prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S}$ es continua porque $p_h \circ i = h : X \to \mathcal{S}$ es continua para toda $h \in \mathcal{U}$. Ahora bien, como la familia $\{p_h : \prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S} \to \mathcal{S} \mid h \in \mathcal{U}\}$ es inicial (por topología producto) y la familia $\{h : X \to \mathcal{S} \mid h \text{ es continua}\}$ es inicial por la proposición anterior, el resultado se sigue de la Proposición 3.3.1. $\square$

Ahora ya podemos caracterizar a los espacios T_0:

Teorema 5.1.6. *Un espacio X es T_0 si y solo si X es subespacio de un producto de varias copias del espacio de Sierpinski $\mathcal{S}$.*

Demostración. Si X es subespacio de un producto de copias de $\mathcal{S}$, entonces X es T_0 por Proposición 5.1.2.

Recíprocamente, dado un espacio X que es T_0, considero la función $i : X \to \prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S}$ de la proposición anterior. Por la proposición anterior sabemos que i es inicial. Para ver que X es subespacio de $\prod_{h \in \mathcal{U}} \mathcal{S}$ basta ver que i es inyectiva (recordemos que inicial e inyectiva es subespacio). Para probar la inyectividad de i usamos que X es T_0. Dados $x \neq y$ en X, debemos ver que $i(x) \neq i(y)$. Es decir, debemos ver que para alguna $h \in \mathcal{U}$ se tiene que $(i(x))_h \neq (i(y))_h$. Equivalentemente, debemos ver que existe una función continua $h : X \to \mathcal{S}$ tal que $h(x) \neq h(y)$. Pero como X es T_0 existe un cerrado A que contiene a solo uno de los dos puntos y por lo tanto la función continua χ_A en uno de los dos vale 0 y en el otro vale 1. □

Notar en particular que como todo espacio métrico es T_0, entonces todo espacio métrico es subespacio de un producto de copias de $\mathcal{S}$.

5.2. T_1

Un espacio X se dice T_1 si para todo $x \neq y \in X$ existen abiertos $U, V \subseteq X$ tales que $x \in U,\ y \notin U,\ y \in V,\ x \notin V$.

Es claro, por definición, que si un espacio es T_1 entonces es T_0. Pero hay espacios T_0 que no son T_1, por ejemplo el espacio de Sierpinski.

Proposición 5.2.1. Un espacio X es T_1 si y solo si los puntos son cerrados en X.

Demostración. Supongamos que X es T_1 y sea $x \in X$. Debemos ver que $\{x\}$ es cerrado en X. Dado $y \neq x$, existe U_y abierto tal que $y \in U_y,\ x \notin U_y$. Tomemos $U = \bigcup\limits_{y \neq x} U_y$. Este es un abierto de X y su complemento es $\{x\}$, que por lo tanto es cerrado.

Para ver la otra implicación, tomemos $x \neq y$. Como $\{x\}$ es cerrado entonces el complemento $V = \{x\}^c$ es un abierto que contiene a y y no a x. Hacemos ahora lo mismo intercambiando los roles de los puntos y así probamos que X es T_1. □

La demostración del siguiente resultado es análoga a la hecha para espacios T_0.

Proposición 5.2.2. Productos de espacios T_1 son T_1. Subespacios de espacios T_1 son T_1.

Observar que si X es un espacio finito (es decir con finitos puntos) y es T_1 entonces es discreto (ya que todo conjunto es unión finita de puntos y por lo tanto todo conjunto es cerrado).

5.3. T_2 o Hausdorff

Un espacio X se dice T_2 (o Hausdorff) si para todo $x \neq y$, existen abiertos disjuntos U, V de X tales que $x \in U,\ y \in V$.

Notar que $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Los espacios métricos son Hausdorff (ejercicio sencillo) y los discretos también. Veamos un ejemplo de un espacio que es T_1 y no es T_2.

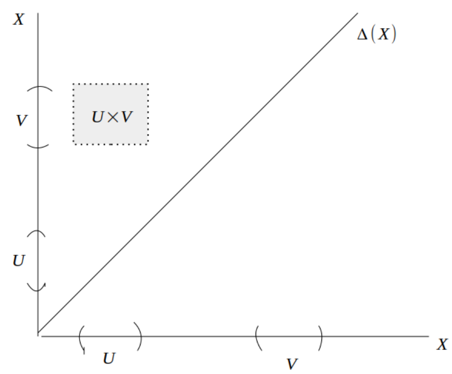
Ejemplo 5.3.1. Sea X un conjunto infinito con la topología cofinita (es decir $U \subseteq X$ es abierto si U es vacío o su complemento U^c es finito). Para ver que X es T_1 podemos chequear que los puntos son cerrados. Si $x \in X$ su complemento $\{x\}^c$ es abierto ya que $(\{x\}^c)^c = \{x\}$, que es finito. Entonces $\{x\}$ es cerrado.

Para ver que X no es T_2 basta ver que si U, V son abiertos no vacíos de X entonces $U \cap V \neq \emptyset$. Y esto vale porque si $U \cap V = \emptyset$ entonces $V \subseteq U^c$ pero U^c es finito por definición de la topología y V es infinito también por definición de la topología y porque X es infinito.

Proposición 5.3.2. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

1. X es Hausdorff.
2. $\Delta(X) \subset X \times X$ es un conjunto cerrado (donde $\Delta : X \to X \times X$ es la diagonal, $\Delta(x) = (x,x)$).
3. Toda red convergente en X tiene límite único.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): Notar primero que dados $U, V \subseteq X$, $U \cap V = \emptyset$ si y solo si $U \times V \cap \Delta(X) = \emptyset$.



Para ver que $\Delta(X) \subset X \times X$ es cerrado, veamos que su cumplemento es abierto. Si $(x,y) \in (\Delta(X))^c$ entonces $x \neq y$ y por hipótesis existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U,\ y \in V$. Así $U \times V \subseteq X \times X$ es abierto, contiene al punto (x,y) y por lo dicho anteriormente $U \times V \cap \Delta(X) = \emptyset$, es decir $U \times V \subseteq (\Delta(X))^c$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Dados $x \neq y \in X$, se tiene que $(x,y) \in (\Delta(X))^c$, que es abierto por hipótesis y por lo tanto existe un abierto de la base $U \times V$ tal que $(x,y) \in U \times V \subseteq (\Delta(X))^c$. Estos abiertos resultan entonces disjuntos y separan a los puntos dados.

(1) $\Rightarrow$ (3): Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ una red en X y supongamos que $x_\alpha \to x$ y $x_\alpha \to y$, con $y \neq x$. Por hipótesis existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U,\ y \in V$. Como $x_\alpha \to x$, existe α_1 tal que $x_\alpha \in U,\ \forall \alpha \geq \alpha_1$. Y como $x_\alpha \to y$, existe α_2 tal que $x_\alpha \in V,\ \forall \alpha \geq \alpha_2$. Tomamos $\alpha_3 \geq \alpha_1, \alpha_2$ (acá se usa que Λ es dirigido). Entonces para todo $\alpha \geq \alpha_3$ se tiene que $x_\alpha \in U \cap V$, pero esto es absurdo porque $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto $x = y$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Esta es la implicación más interesante del teorema. Sean $x \neq y \in X$, debemos ver que podemos separarlos con abiertos disjuntos. Sea

$$\mathcal{A} = \{U \cap V \mid U, V \text{ abiertos tales que } x \in U,\ y \in V\}.$$

Debo ver que $\emptyset \in \mathcal{A}$ (esto implicaría que existen abiertos disjuntos U y V que separan a x y a y). Le damos a $\mathcal{A}$ el siguiente orden parcial: $A_1 \leq A_2$ si $A_2 \subseteq A_1$. Veamos que $(\mathcal{A}, \leq)$ es dirigido: dados $A_1 = U_1 \cap V_1$ y $A_2 = U_2 \cap V_2$ en $\mathcal{A}$ tomamos $A_3 = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$. Notar que $A_3 \in \mathcal{A}$ y $A_3 \geq A_1, A_2$.

Supongamos que $\emptyset \notin \mathcal{A}$, entonces para todo $A = U \cap V \in \mathcal{A}$, $\exists\ x_A \in A$. Considero entonces la red $(x_A)_{A \in \mathcal{A}}$. Por construcción $x_A \to x$ y $x_A \to y$, y por hipótesis $x = y$ que es un absurdo. Entonces $\emptyset \in \mathcal{A}$ y esto dice que X es Hausdorff. $\square$

El siguiente resultado es análogo a lo que ya se hizo para espacios T_0 y T_1.

Proposición 5.3.3. Productos de espacios Hausdorff son Hausdorff. Subespacios de Hausdorff son Hausdorff.

El siguiente resultado es muy útil, la demostración es sencilla y queda a cargo del lector.

Proposición 5.3.4. Sean $f, g : X \to Y$ continuas y supongamos que Y es T_2. Entonces:

1. El conjunto $E = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.
2. Si $A \subset X$ es denso en X (es decir $\overline{A} = X$) y $f|_A = g|_A$, entonces $f = g$.

Capítulo 6

Funciones propias y espacios compactos

6.1. Productos fibrados y funciones propias

Supongamos que tenemos un diagrama de espacios topológicos y funciones continuas:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Queremos encontrar un espacio W y funciones continuas $\overline{f} : W \to Y$, $\overline{g} : W \to X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

y queremos además que W esté "lo más cerca posible del diagrama original", es decir, queremos que cumpla la siguiente propiedad universal: para todo W' espacio topológico, $f' : W' \to Y$, $g' : W' \to X$ tales que $fg' = gf'$, exista una única función continua $q : W' \to W$ tal que $\overline{g}q = g'$, $\overline{f}q = f'$.

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[dr, dotted, "\exists ! q"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\ & W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

A ese espacio W se lo llamará el pullback o producto fibrado del diagrama original y es único (salvo homeomorfismo) justamente porque cumple una propiedad universal.

Veamos la existencia de W: dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

definimos $W = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\} \subseteq X \times Y$ con la topología de subespacio del producto $X \times Y$. Definimos las funciones $\overline{g} : W \to X$ y $\overline{f} : W \to Y$ como $\overline{g}(x,y) = x$ y $\overline{f}(x,y) = y$. Observar que resultan continuas por ser las proyecciones restringidas a un subespacio, y que además hacen conmutar el diagrama $f\overline{g}(x,y) = f(x) = g(y) = g\overline{f}(x,y)$. La notación $\overline{f}$ y $\overline{g}$ es simplemente, como una regla de notación, porque son las funciones que están opuestas en el diagrama a las funciones dadas f y g.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

A este espacio W que construimos (que se lo llama el producto fibrado) lo denotamos $W = X \times_Z Y$.

Veamos que el W construido cumple la propiedad universal requerida: dado W', $f' : W' \to Y$, $g' : W' \to X$ tales que $fg' = gf'$, definimos $q : W' \to W$ como $q(w') = (g'(w'), f'(w'))$. Notar que $q(w') \in W$ para todo $w' \in W'$ y que es continua. Además q es la única función (por construcción) que hace conmutar todo el diagrama:

$$\begin{tikzcd} W' \arrow[dr, dotted, "\exists! q"] \arrow[drr, bend left, "g'"] \arrow[ddr, bend right, "f'"'] & & \\ & W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Así hemos probado la existencia de W que cumple la propiedad universal requerida. Como dijimos antes, la unicidad de W se deduce del hecho de que cumple la propiedad universal: si $\widetilde{W}$ (junto con funciones $\widetilde{f}, \widetilde{g}$) es otro que la cumple, se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{W} \arrow[dr, bend right, "\exists! q"'] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{g}"] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{f}"'] & & \\ & W \arrow[ul, bend right, "\exists! \widetilde{q}"'] \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

La existencia de $q : \widetilde{W} \to W$ es porque W cumple la propiedad universal y la existencia de $\widetilde{q} : W \to \widetilde{W}$ es porque $\widetilde{W}$ la cumple. Además $q\widetilde{q} = 1_W$ y $\widetilde{q}q = 1_{\widetilde{W}}$ ya que las identidades en ambos casos son las únicas funciones que hacen conmutar los diagramas.

Notaremos

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

"al" pullback (es único salvo homeomorfismos) del diagrama original.

A veces usaremos la propiedad universal del pullback y a veces la construcción explícita de W que hicimos.

Veamos algunos ejemplos de productos fibrados.

Ejemplos 6.1.1. 1.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

donde $X \to *$ es la única función al singleton y p_X, p_Y son las proyecciones.

2. Dado $y \in Y$ y $f : X \to Y$ continua, y notamos $c_y : * \to Y$ a la función constante y, se tiene un pullback

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(y) \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ * \arrow[r, "c_y"] & Y \end{tikzcd}$$

donde $f^{-1}(y)$ tiene la topología de subespacio de X e i es la inclusión.

3. Más en general, si $A \subseteq Y$ es un subespacio, se tiene un pullback

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión de A.

4. Dada $f : Y \to X$ se tiene un pullback:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "1_X"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Dejamos ahora un ejercicio que será útil más adelante:

Ejercicio 6.1.2. Dado el siguiente diagrama conmutativo de espacios topológicos y funciones continuas

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

1. Probar que si los cuadrados (1) y (2) son pullbacks entonces el diagrama completo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)+(2)"] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

es pullback.

2. Si el diagrama completo (1)+(2) es pullback y el cuadrado (2) también, entonces el cuadrado (1) es pullback.

Antes de seguir avanzando, vamos a hacer algunas observaciones para entender la forma de trabajar con pullbacks.

Observación 6.1.3. El hecho de que los pullbacks de un diagrama dado sean todos homeomorfos nos permite trabajar, cuando lo necesitemos, con un representante en particular, por ejemplo con el $W = X \times_Z Y$ que construimos antes.

Observación 6.1.4. Si tenemos dos pullbacks de un mismo diagrama:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

El homeomorfismo $\varphi : W' \to W$ cumple $\overline{f}\varphi = f'$ y $\overline{g}\varphi = g'$. Entonces, como $\overline{f}$ y f' difieren solo en un homeomorfismo ($\overline{f}\varphi = f'$), $\overline{f}$ y f' tienen las mismas propiedades topológicas (por ejemplo, una es abierta si y solo si la otra lo es, una es cociente si y solo si la otra lo es, etc). Lo mismo con $\overline{g}$ y g'. Esto será de absoluta importancia, ya que dado un pullback

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

vamos a querer obtener información sobre $\overline{f}$ y $\overline{g}$ y no nos va a importar cuál es el representante que tomemos como pullback, porque las funciones tendrán las mismas propiedades independientemente del representante elegido.

Definición 6.1.5. Una clase $\mathcal{C}$ de funciones continuas se dice que es estable por cambio de base si cada vez que se tiene un pullback

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

si $f \in \mathcal{C}$ entonces $\overline{f} \in \mathcal{C}$. Equivalentemente: si $g \in \mathcal{C}$ entonces $\overline{g} \in \mathcal{C}$ (notar que tenemos el mismo pullback si cambiamos de lugar la X con la Y).

Ejemplos 6.1.6. 1. Los homeomorfismos son estables por cambio de base. Concretamente, si se tiene

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

y f es homeomorfismo, entonces $\overline{f}$ también. Para ver esto, consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[drr, bend left, "f^{-1}g"] \arrow[dr, dotted, "\exists!\varphi"] \arrow[ddr, bend right, "1_Y"'] & & \\
& W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

El candidato a $\overline{f}^{-1}$ es φ. Sabemos que $\overline{f}\varphi = 1_Y$, para ver que $\varphi\overline{f} = 1_W$ consideramos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[drr, bend left, "\overline{g}"] \arrow[dr, bend left=15, "\varphi\overline{f}"] \arrow[dr, bend right=15, "1_W"'] \arrow[ddr, bend right, "\overline{f}"'] & & \\
& W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Por unicidad (en la propiedad universal), se tiene que $\varphi\overline{f} = 1_W$.

2. Las funciones abiertas (y continuas) son estables por cambio de base. Es decir, si f abierta entonces $\overline{f}$ es abierta.

3. Las funciones cerradas no son estables por cambio de base. Consideremos por ejemplo el pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

La función $\mathbb{R} \to *$ es cerrada pero la proyección $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no es cerrada, ya que, por ejemplo $A = Graf(1/x)$ (gráfico de la función $1/x$ para $x > 0$) es cerrado en $\mathbb{R}^2$ y la proyección $p_1(A) = (0, +\infty)$ no es un cerrado de $\mathbb{R}$.

El hecho de que las funciones cerradas no sean estables por cambio de base nos induce a considerar una subfamilia de funciones cerradas que sí lo sean, esas son las funciones propias:

Definición 6.1.7. Una función continua $f : X \to Z$ se dice propia si es "universalmente cerrada", es decir: si cada vez que se tiene un pullback

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

la función $\overline{f}$ es cerrada.

Notar que si f es propia, en particular es cerrada ya que podemos considerar el pullback

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r, "1_Z"] & Z
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que f es cerrada.

Proposición 6.1.8. La clase $\mathcal{C}$ de funciones propias es una "clase buena", es decir cumple las siguientes tres propiedades:

1. Los homeomorfismos son funciones propias.

2. La clase $\mathcal{C}$ es estable por cambio de base.

3. La composición de funciones propias es propia.

Demostración. Notar que (1) se deduce inmediatamente del hecho de que los homeomorfismos son estables por cambio de base y que además son funciones cerradas.

Para probar (2) veamos que si tenemos un pullback

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

y f es propia entonces $\overline{f}$ también es propia. Para eso consideramos un pullback

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & W \arrow[d, "\overline{f}"] \\ S \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

y debemos ver que $\hat{f}$ es cerrada. Pero tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & W \arrow[r] \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Por el Ejercicio 6.1.2 el diagrama total es un pullback y como f es propia entonces $\hat{f}$ resulta cerrada.

Para probar (3), tomamos dos funciones propias $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ y queremos ver que $gf : X \to Z$ es propia. Consideramos un pullback:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[d, "\overline{gf}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d, "gf"] \\ T \arrow[r, "h"] & Z \end{tikzcd}$$

y debemos ver que $\overline{gf}$ es cerrada. Tomamos el pullback de

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

llamémoslo S, y por propiedad del pullback existe una única función continua $\varphi : W \to S$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\exists!\ \varphi"] \arrow[d, "\overline{h}"'] \arrow[rr, bend left, "\overline{gf}"] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & S \arrow[r, "\overline{g}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & T \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

Como el diagrama total (1)+(2) es pullback y (2) es pullback, entonces por el Ejercicio 6.1.2 se tiene que el cuadrado (1) es pullback, y como f es propia entonces φ resulta cerrada. Por otro lado, como g es propia entonces $\overline{g}$ es cerrada y así $\overline{gf} = \overline{g}\varphi$ es cerrada (por ser composición de cerradas). $\square$

Observación 6.1.9. Sabemos que las funciones cerradas no son estables por cambio de base, pero las inclusiones cerradas (subespacios cerrados) sí son estables por cambio de base, ya que si $i : A \to X$ es subespacio cerrado y tomamos un pullback:

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{i}"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & A \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

se tiene que $g^{-1}(A) \to Y$ es subespacio cerrado. En particular, las inclusiones cerradas son propias. Esto lo usaremos más adelante.

Dado un espacio X, ¿la función $X \to *$ es propia? A veces sí, por ejemplo si $X = *$, y a veces no lo es, por ejemplo si $X = \mathbb{R}$, porque ya vimos que si tomamos el pullback

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

la proyección $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ no es cerrada. Los espacios topológicos X tales que la fución $X \to *$ es propia se llaman compactos y son los que estudiaremos en la próxima sección.

6.2. Espacios compactos

Definición 6.2.1. Un espacio X se dice compacto si la función $X \to *$ es propia.

Por lo visto hasta ahora, $\mathbb{R}$ no es compacto y el singleton sí lo es. Pero, ¿qué significa que la función $X \to *$ sea propia? Por definición, esto es equivalente a que para todo espacio topológico Y, la proyección $p_Y : X \times Y \to Y$ sea cerrada, ya que todos los pullbacks posibles que involucran a la función $X \to *$ son de la forma:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\text{PULL}"] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & *
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, por definición, un espacio X es compacto si y solo si para todo espacio Y, la proyección $p_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Veamos primero algunas propiedades básicas de los espacios compactos que podemos deducir de la definición. Luego veremos un resultado que provee varias definiciones equivalentes de compacidad y que nos será muy útil para trabajar con estos espacios.

Proposición 6.2.2. Si X e Y son compactos entonces el producto $X \times Y$ también es compacto.

Demostración. Como $X \to *$ es propia (porque X es compacto) entonces $p_Y : X \times Y \to Y$ es propia por el ítem (2) de la Proposición 6.1.8. Además la función $Y \to *$ es propia porque Y es compacto. Entonces la composición $X \times Y \to Y \to *$ es propia por el item (3) de la Proposición 6.1.8 y esto prueba que $X \times Y$ es compacto. □

Proposición 6.2.3. Si X es compacto y $A \subseteq X$ es subespacio cerrado, entonces A es compacto.

Demostración. Como la inclusión $i : A \to X$ es propia (por ser subespacio cerrado) y la función $X \to *$ es propia porque X es compacto, entonces la composición $A \to X \to *$ es propia por item (3) de la Proposición 6.1.8. Esto dice que A es compacto. □

Antes de enunciar el teorema que describe a los espacios compactos de varias formas equivalentes, veamos una definición.

Dado un espacio X y una familia de subconjuntos $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$. Decimos que la familia $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita (PIF) si para todo subconjunto finito $S' \subseteq S$ se tiene que $\bigcap_{s\in S'} F_s \neq \emptyset$.

Nuestro objetivo es probar el siguiente teorema:

Teorema 6.2.4. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(1) X es compacto (es decir, la función $X \to *$ es propia).

(2) Todo cubrimientos por abiertos $\{U_s\}_{s\in S}$ de X admite un subcubrimiento finito.

(3) Para toda familia de cerrados $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ con la PIF se tiene que $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \emptyset$.

(4) Toda red en X tiene alguna sub-red convergente.

Antes de probar el teorema interpretemos el ítem (4) en términos de puntos de acumulación de redes.

Definición 6.2.5. Sea $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una red en X. Un punto $x \in X$ se dice punto de acumulación de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si para todo entorno U de x y para todo $\alpha \in \Lambda$, existe un $\alpha' \geq \alpha$ tal que $x_{\alpha'} \in U$.

Lema 6.2.6. $x \in X$ es punto de acumulacion de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ si y solo si existe una sub-red que converge a x.

Demostración. Si hay una sub-red de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ que converge a x, es claro que x es punto de acumulación. Veamos la otra implicación, que es la implicación interesante. Supongamos que x es de acumulación, queremos encontrar una sub-red que converja a x. Consideremos el siguiente conjunto

$$\Gamma = \{(\alpha, U) \mid \alpha \in \Lambda \text{ y } U \text{ es entorno de } x \text{ con } x_\alpha \in U\}.$$

Le damos a Γ el siguiente orden parcial: $(\alpha_1, U_1) \leq (\alpha_2, U_2)$ si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $U_2 \subseteq U_1$. Veamos que $(\Gamma, \leq)$ es dirigido. Sean $(\alpha_1, U_1),\ (\alpha_2, U_2) \in \Gamma$. Tomamos $\alpha_3 \geq \alpha_1, \alpha_2$ y como x es punto de acumulación por hipótesis, existe $\alpha_4 \geq \alpha_3$ tal que $x_{\alpha_4} \in U_1 \cap U_2$. Entonces $(\alpha_4, U_1 \cap U_2) \geq (\alpha_1, U_1), (\alpha_2, U_2)$. Esto prueba que Γ es dirigido.

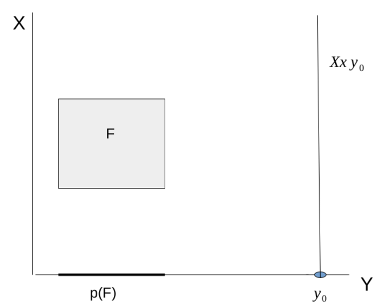
Sea $\phi : \Gamma \to \Lambda,\ \phi(\alpha, U) = \alpha$. Notar que ϕ es cofinal porque x es punto de acumulación de la red. Entonces $(x_{(\alpha,U)})$ es una sub-red. Veamos que $x_{(\alpha,U)} \to x$. Dado un entorno U de x, existe $x_\alpha \in U$ (por ser de acumulación) y por lo tanto $(\alpha, U) \in \Gamma$. Si tomamos $(\alpha', U') \geq (\alpha, U) \in \Gamma$ entonces $x_{(\alpha'.U')} = x_{\alpha'} \in U' \subseteq U$. □

La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) del teorema es lo que se llama el “lema del tubo”(en realidad esta es una de las formulaciones posibles del lema).

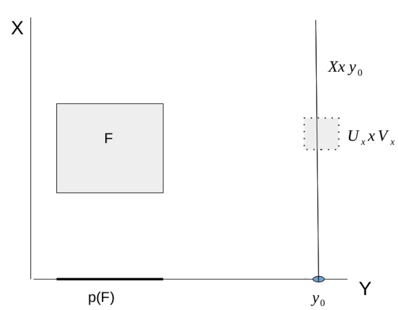
Lema del tubo. Sea X espacio topológico tal que todo cubrimiento por abiertos de X admite subcubrimiento finito. Entoces X es compacto (es decir $\forall\ Y,\ p_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada).

Demostración. Sea Y espacio topológico. Denotemos con $p : X \times Y \to Y$ a la proyección. Debemos ver que p es cerrada. Sea $F \subseteq X \times Y$ un cerrado, veamos que $p(F)$ es cerrado en Y. Para esto, veremos que el complemento $p(F)^c$ es abierto. Tomemos $y_0 \in p(F)^c$ y veamos que podemos conseguir un abierto W tal que $y_0 \in W \subseteq p(F)^c$.

Como $y_0 \in p(F)^c$ entonces $X \times \{y_o\} \subseteq F^c$.

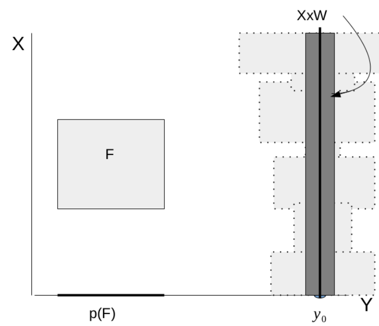


Como $F^c \subseteq X \times Y$ es abierto, para todo $x \in X$ existen abietos $U_x \subseteq X$ y $V_x \subseteq Y$ (abietos de la base) tales que $(x, y_0) \in U_x \times V_x \subseteq F^c$.



Se tiene así un cubrimiento por abiertos $\{U_x\}_{x \in X}$ de X y por hipótesis existe un subcubrimiento finito $\{U_1, \ldots, U_n\}$. Denotemos $V_1, \ldots, V_n$ a los abiertos V_x correspondientes a esos U_i. Entonces $X \times \{y_0\} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i \times V_i \subseteq F^c$.

Tomamos $W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ que es claremente un abierto de Y y se tiene que $y_0 \in W$.



Veamos que $W \subseteq p(F)^c$. Esto es equivalente a ver que $X \times W \subseteq F^c$. Tomemos un punto $(x, y) \in X \times W$ y veamos que está en F^c. Como $x \in U_j$ para algún j y el punto $y \in W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, entonces en particular $y \in V_j$ y se tiene que $(x, y) \in U_j \times V_j \subseteq F^c$. □

Probemos ahora finalmente el Teorema 6.2.4.

Demostración de Teorema 6.2.4. (2) ⇔ (3) sale tomando complementos ($F_s = U_s^c$).

(2) ⇒ (1) es el lema del tubo.

(1) ⇒ (4): Nuestra hipótesis es que X es compacto y queremos ver que toda red tiene sub-red convergente. Por el Lema 6.2.6, dada una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en X, debemos ver que existe $x \in X$ un punto de acumulación de la red. Consideramos el conjunto $\Lambda^* = \Lambda \cup \{\infty\}$ y le damos la siguiente topología: para todo $\alpha \in \Lambda$, $\{\alpha\}$ es un abierto de Λ^* (es decir, pensamos a Λ como espacio discreto) y los entornos de ∞ son $\{\Lambda^*_{\geq\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ donde

$$\Lambda^*_{\geq\alpha} = \{\beta \in \Lambda \mid \beta \geq \alpha\} \cup \{\infty\}.$$

Notar que $\Lambda^* = \overline{\Lambda}$ (la clausura de Λ). Como X es compacto, la proyeccion $p : \Lambda^* \times X \to \Lambda^*$ es cerrada. Sea $F = \overline{\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}} \subseteq \Lambda^* \times X$. Entonces $p(F)$ es cerrado en Λ^* y contiene a Λ, entonces $p(F) = \Lambda^*$. Como $\infty \in \Lambda^*$, entonces existe $x \in X$ tal que $(\infty, x) \in F$. Veamos que este x es un punto de acumulación de la red: como $(\infty, x) \in F = \overline{\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}}$ todo entorno de (∞, x) interseca a $\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$. Dado V entorno de $x \in X$ y dado $\alpha \in \Lambda$, considero $\Lambda^*_{\geq\alpha} \times V$ entorno de (∞, x), y como todo entorno interseca a $\{(\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$, existe $(\alpha', x_{\alpha'}) \in \Lambda^*_{\geq\alpha} \times V$. Es decir, existe $\alpha' \geq \alpha$ tal que $x_{\alpha'} \in V$. Esto dice que x es punto de acumulación de la red.

(4) ⇒ (3): Sea $\mathcal{F} = \{F_s\}_{s\in S}$ una familia de cerrados en X con la PIF. Debemos ver que $\bigcap_{s\in S} F_s \neq \emptyset$, sabiendo que toda red tiene algún punto de acumulación. Sea $\Gamma = \{J \mid J \subseteq S \text{ es finito }\}$ con el orden parcial $J_1 \leq J_2$ si $J_1 \subseteq J_2$. Veamos que Γ es dirigido: dados $J_1, J_2 \in \Gamma$, tomamos $J_3 = J_1 \cup J_2$. Es claro que $J_3 \in \Gamma$ y que $J_3 \geq J_1, J_2$. Esto prueba que es dirigido. Para cada $J \in \Gamma$ elegimos $x_J \in \bigcap_{s\in J} F_s$ (que sabemos por hipótesis que es no vacío). Así nos construimos una red $(x_J)_{J\in\Gamma}$ en X y por hipótesis tiene un punto de acumulación $x \in X$. Veamos que $x \in \bigcap_{s\in S} F_s$. Para esto debemos ver que $x \in F_s$ para todo $s \in S$, pero como los F_s son cerrados, basta ver que para todo s y para todo entorno U de x, $U \cap F_s \neq \emptyset$. Dados $s \in S$ y U entorno de x, como $\{s\} \in \Gamma$ y x es de acumulación de la red, entonces existe $J \in \Gamma$ con $J \geq \{s\}$ (es decir $s \in J$) tal que $x_J \in U$. Pero $x_J \in \bigcap_{s'\in J} F_{s'}$ y por lo tanto $x_J \in U \cap F_s$ (ya que $s \in J$). Esto prueba que $U \cap F_s \neq \emptyset$. □

Veamos más propiedades de los compactos.

Observación 6.2.7. Todo espacio con finitos abiertos es compacto. En particular los espacios finitos (es decir, de cardinal finito) y los espacios con topología indiscreta son compactos.

Observación 6.2.8. Si $A \subseteq X$ es un subespacio compacto de un espacio X, A no es necesariamente cerrado en X. Por ejemplo si $X = \mathcal{S}$ el espacio de Sierpinski, $A = \{0\}$ es compacto (por ser finito) pero A no es cerrado en X.

Proposición 6.2.9. Si X es T_2 y $A \subseteq X$ es subespacio compacto, entonces A es cerrado en X.

Demostración. Sea $x \in \overline{A}$, debemos ver que $x \in A$. Como $x \in \overline{A}$, existe una red $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ en A tal que $x_\alpha \to x$. Como A es compacto, existe una sub-red x_{α_γ} que converge a un punto $y \in A$. Pero como la red $x_\alpha \to x$, entonces la sub-red $x_{\alpha_\gamma} \to x$. Como X es Hausdorff, los límites de redes (y sub-redes) son únicos y por lo tanto $x = y \in A$. $\square$

Ejercicio 6.2.10. Si $f : X \to Y$ es continua y $K \subseteq X$ es compacto, entonces $f(K) \subseteq Y$ es subespacio compacto.

Corolario 6.2.11. Si $f : X \to Y$ es continua y biyectiva y si X es compacto e Y es Hausdorff entonces f es homeomorfismo.

Demostración. Basta ver que f es cerrada, pero si $F \subseteq X$ es cerrado, como X es compacto entonces F es compacto y por el ejercicio anterior, $f(F)$ es un compacto en Y. Como Y es Hausdorff, $f(F)$ es cerrado en Y, y esto prueba que f es cerrada. $\square$

Proposición 6.2.12. Si X es Hausdorff, podemos separar compactos de puntos con abiertos. Es decir: si $K \subset X$ es compacto y $x \in X,\ x \notin K$, entonces existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $K \subseteq U,\ x \in V$.

Demostración. Para cada $y \in K$, como $y \neq x$ y X es T_2, existen abiertos disjuntos U_y, V_y tales que $y \in U_y,\ x \in V_y$. Como K es compacto y los abiertos $\{U_y\}_{y\in K}$ lo cubren, existen $U_1, \ldots, U_n$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Tomamos $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ (los V_i correspondientes a esos U_i). $\square$

Dejamos como ejercicio para el lector, la demostración del siguiente corolario.

Corolario 6.2.13. Sea X un espacio Hausdorff y sean $A, B \subset X$ subespacios compactos disjuntos. Entonces existen abiertos disjuntos $U, V \subset X$ tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Terminamos esta sección con un resultado que caracteriza las funciones propias en términos de pre-imágenes de compactos. La demostración queda como ejercicio para el lector.

Proposición 6.2.14. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Son equivalentes:

1. f es propia.
2. f es cerrada y $f^{-1}(\{y\})$ es compacto para todo $y \in Y$.
3. f es cerrada y $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subseteq Y$ compacto.
4. Para todo Z espacio topológico, $1_Z \times f : Z \times X \to Z \times Y$ es cerrada.

6.3. Espacios localmente compactos y compactificación de Alexandroff

Definición 6.3.1. Un espacio X se dice localmente compacto si todo $x \in X$ tiene un entorno compacto.

Notar que esta definición no es coherente con la de "localmente conexo" por ejemplo (donde pedíamos que tenga una base de entornos conexos). Pero es la definición estándar. Notar que, por definición, si X es compacto entonces es localmente compacto.

Cuando X es Hausdorff, la noción de localmente compacto es la correcta:

Proposición 6.3.2. Sea X un espacio T_2. Entonces X es localmente compacto si y solo si X tiene una base de abiertos cuyas clausuras son compactas. Más concretamente, para todo $x \in X$ y para todo U entorno de x, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ y $\overline{V}$ es compacto.

Demostración. Sea $x \in X$ y sea U entorno de x. Notar que podemos suponer que U es abierto (si no, lo cambiamos por su interior). Como X es localmente compacto, existe F_x entorno compacto de x. Si $F_x \subseteq U$, tomamos $V = F_x^\circ$ (el interior) y listo, ya que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F_x \subseteq U$ y $\overline{V}$ resulta compacto por ser cerrado dentro de un compacto.

Si $F_x \nsubseteq U$, sea $A = F_x \cap U^c$. Notar que A es no vacío y $x \notin A$. Notar también que A es compacto ya que es cerrado (porque F_x es un compacto dentro de un Hausdorff y U^c cerrado) y está contenido en F_x que es compacto. Entonces, como X es Hausdorff, existen abiertos disjuntos W, W' tales que $x \in W,\ A \subseteq W'$. Tomamos $V = W \cap F_x^\circ$. Notar que V es abierto y que $x \in V$. Además $\overline{V}$ es compacto ya que $V \subseteq F_x$, entonces $\overline{V} \subseteq F_x$ y $\overline{V}$ es cerrado dentro de un compacto. Por otro lado como $V \subseteq W \subseteq (W')^c$, entonces $\overline{V} \subseteq (W')^c \subseteq A^c = (F_x \cap U^c)^c = F_x^c \cup U$, y como $\overline{V} \subseteq F_x$, entonces $\overline{V} \cap F_x^c = \emptyset$ y por lo tanto $\overline{V} \subseteq U$. $\square$

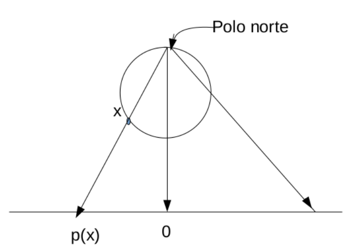
Estudiaremos ahora la compactificación en un punto (o compactificación Alexandroff) de un espacio. Pero antes de dar la definición formal, veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 6.3.3.

1. Sea $X = \mathbb{N}$ con la topología discreta. Una base para la topología en $\mathbb{N}$ es $\beta = \{\{n\}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Consideramos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ con base $\beta^* = \beta \cup \beta_\infty$ donde $\beta_\infty = \{\mathbb{N}_{\geq n} \cup \{\infty\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ son los entornos abiertos de ∞.

   Notar que $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ es subespacio y $\mathbb{N}^*$ es compacto porque todo abierto que contenga a ∞ va a tener toda la cola $\mathbb{N}_{\geq m}$ incluida (para algún m).

2. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología usual. Consideramos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si β es base de entornos abiertos de $\mathbb{R}$, definimos una base de entornos abiertos de $\mathbb{R}^*$ como $\beta^* = \beta \cup \beta_\infty$ donde $\beta_\infty = \{[a, b]^c \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ son los entornos abiertos de ∞. Notar que $\mathbb{R}^*$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ via la proyección estereográfica $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^*$



Entonces $\mathbb{R}^*$ es compacto y $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ subespacio.

Definición 6.3.4. Sea X un espacio topológico. La compactificación Alexandroff (o compactificación en un punto) de X es el espacio topológico $X^* = X \cup \{\infty\}$ con la topología generada por la base de entornos abiertos $\beta^* = \beta \cup \beta_\infty$ donde β base de entornos abiertos de X y

$$\beta_\infty = \{U \subseteq X^* \mid \infty \in U \text{ y } X \setminus U \text{ es compacto y cerrado en } X\}$$

son los entornos abiertos básicos de ∞.

Proposición 6.3.5. Sea X un espacio topológico y X^* su compactificación Alexandroff. Entonces:

1. $X \subset X^*$ es subespacio.
2. X^* es compacto.
3. $X^* = \overline{X}$ si y solo si X no es compacto.
4. Si X es Hausdorff y localmente compacto entonces X^* es Hausdorff.

Demostración. Probaremos solamente el ítem (4). Como X es T_2, para ver que X^* es T_2 solo debemos ver que podemos separar al punto ∞ de cualquier $x \in X$. Sea $x \in X$. Como X es localmente compacto, existe un entorno compacto $x \in F_x \subseteq X$. Como X es Hausdorff, F_x es también cerrado y por lo tanto $V = X^* \setminus F_x$ es un entorno abierto de ∞. Los abiertos V y F_x° separan a ∞ de x. □

6.4. Axiomas de separación (segunda parte)

Ya habíamos visto los axiomas de separación T_0, T_1 y T_2. Aclaramos primero que la nomenclatura de los axiomas de separación varía según los autores. Seguiremos esencialmente la nomenclatura de [Bourbaki, Munkres].

Definición 6.4.1. Un espacio X se dice regular o T_3 si:

1. X es T_1 (es decir, los puntos son cerrados).
2. X separa puntos de cerrados mediante abiertos disjuntos: $\forall F \subseteq X$ cerrado y $\forall x \in X$ tal que $x \notin F$, $\exists\, U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $F \subseteq U$, $x \in V$.

Observar que la condición (2) no implica la (1). Por ejemplo, $X = \{0, 1, 2\}$ donde los abiertos propios son solamente $\{0\}, \{1, 2\}$ cumple la segunda condición pero no la primera.

Observar también que $T_3 \Rightarrow T_2$ (ya que los puntos son cerrados).

Lema 6.4.2. Sea X un espacio T_1. Entonces X es T_3 si y solo si para todo $x \in X$ y para todo entorno U de x, existe un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. En particular, si X es localmente compacto y T_2 entonces es T_3.

Demostración. Supongamos que X es T_3 y tomemos $x \in X$ y U un entorno de x. Podemos suponer que U es abierto porque si no lo achicamos a U°. Sea $F = U^c$. Como F es cerrado y $x \notin F$, entonce existen abiertos disjuntos V, W tales que $x \in V$, $F \subseteq W$. Veamos que $\overline{V} \subseteq U$:

como $F = U^c$, debemos ver que $\overline{V} \cap F = \emptyset$. Si $y \in F$ entonces $y \in W$ y por lo tanto $y \notin \overline{V}$ (ya que si $y \in \overline{V}$ entonces $V \cap W \neq \emptyset$). Esto implica que $\overline{V} \cap F = \emptyset$.

Para ver la otra implicación, tomamos F cerrado en X y $x \notin F$. Debemos ver que los podemos separar con abiertos disjuntos. Pero como $x \notin F$, entonces $x \in U = F^c$ que es abierto, y por hipótesis, existe V abierto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Entonces V y $(\overline{V})^c$ separan a x de F.

□

Proposición 6.4.3. Subespacios de T_3 son T_3. Productos de T_3 son T_3.

Demostración. Veámoslo primero para subespacios. Sea $Y \subseteq X$ un subespacio de un espacio regular X. Notar que Y es T_1 porque X lo es. Sea $A \subseteq Y$ cerrado y sea $y \in Y,\ y \notin A$. Como A es cerrado en Y entonces $A = F \cap Y$ para algún F cerrado de X y como $y \in Y,\ y \notin A$ entonces $y \notin F$. Como X es regular, podemos separar a y de F mediante abiertos disjuntos U, V de X. Entonces $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos disjuntos de Y que separan a y de A.

Ahora veamos que el producto de regulares es regular. Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios regulares. Veamos que $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ es T_3. Es claro que X es T_1. Por el lema anterior, dado $x \in X$ y U entorno abierto de x, debemos encontrar un abierto V tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Podemos suponer que U es un abierto de la base (porque si no, lo achicamos a un abierto de la base que contenga a x). Entonces $U = \prod\limits_{s \in S} U_s$ donde U_s es un abierto de X_s para todo s y $U_s = X_s$ salvo para finitos. Como cada X_s es regular, existe para todo s un abierto W_s tal que $x_s \in W_s \subseteq \overline{W}_s \subseteq U_s$. Tomamos $V_s = W_s$ si $U_s \neq X_s$ y $V_s = U_s = X_s$ cuando $U_s = X_s$. Así $V = \prod\limits_{s \in S} V_s$ es un abierto que cumple lo pedido. □

Definición 6.4.4. Un espacio X se dice normal o T_5 si:

1. X es T_1.
2. X separa cerrados disjuntos mediante abiertos disjuntos: $\forall A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existen $U, V \subseteq X$ abiertos disjuntos tales que $A \subseteq U,\ B \subseteq V$.

Observar que $T_5 \Rightarrow T_3$ (porque los puntos son cerrados). No nos hemos olvidado de T_4 (ese axioma de separación lo vemos después).

Ejemplos 6.4.5.

1. Si X es compacto y T_2 entonces es normal, ya que los cerrados en X resultan compactos y en un Hausdorff podemos separar compactos disjuntos mediante abiertos disjuntos.
2. Los espacios métricos son normales.

Dejamos la demostración del siguiente lema como ejercicio. Es similar a lo demostrado para espacios regulares.

Lema 6.4.6. Sea X un espacio T_1. Entonces X es normal si y solo si para todo $A \subseteq X$ cerrado y para todo abierto U tal que $A \subseteq U$, existe un abierto V tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

El siguiente resultado nos provee de una gran familia de espacios normales.

Teorema 6.4.7. *Sea $(X, <)$ un conjunto bien ordenado con la topología del orden. Entonces X es normal.*

Demostración. Primero observemos algunas cosas:

(1): Si $x \in X$, entonces $\{x\}$ es cerrado ya que $\{x\}^c = \{y \in X \mid y < x\} \cup \{y \in X \mid y > x\}$ (ambos abiertos en la topología del orden). Entonces X es T_1.

(2): Si $x \in X$ no es máximo entonces tiene un sucesor inmediato $x' \in X$ (ya que X es bien ordenado y por lo tanto el conjunto $\{y \in X \mid y > x\} \neq \emptyset$ tiene mínimo). Por lo tanto, los conjuntos de la forma $(a, b]$ son abiertos en X ya que $(a, b] = (a, b')$ (donde b' es el sucesor inmediato de b). En el caso que b sea máximo, el intervalo $(a, b]$ también es abierto por definición de la topología del orden.

(3): Si a_0 es mínimo de X entonces $\{a_0\}$ es abierto ya que $\{a_0\} = [a_0, a_0')$ donde a_0' es el sucesor inmediato de a_0.

Observar que no todo elemento tiene necesariamente predecesor inmediato (si no, X sería discreto).

Ahora sí, sean $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, debemos ver que los podemos separar con abiertos disjuntos.

Caso 1: Supongamos que $a_0 \notin A$, $a_0 \notin B$ (donde a_0 es el mínimo de X). Dado $a \in A$, como $a \notin B$ y B es cerrado entonces existe un abierto de la base (a^-, a^+) tal que $a \in (a^-, a^+)$ y $(a^-, a^+) \cap B = \emptyset$. En caso que a sea máximo de X tomamos $(a^-, a]$ que es abierto de la base. En todo caso, por lo visto en (2), $(a^-, a]$ es abierto que contiene a a y $(a^-, a] \cap B = \emptyset$.

Entonces $A \subseteq U = \bigcup\limits_{a \in A} (a^-, a]$. De la misma manera procedemos con los elementos de B y obtenemos $B \subseteq V = \bigcup\limits_{b \in B} (b^-, b]$. Veamos que $U \cap V = \emptyset$: supongamos que existe $x \in U \cap V$ entonces existen $a \in A$, $b \in B$ tal que $x \in (a^-, a] \cap (b^-, b]$. Supongamos $a < b$ (el caso $b < a$ es análogo). Como $x \in (b^-, b]$ entonces $b^- < x$ y como $x \in (a^-, a]$ entonces $x \leq a$, entonces $b^- < x \leq a < b$ y por lo tanto $a \in (b^-, b]$ que es absurdo porque estos intervalos no intersecan a A. Por lo tanto U y V son disjuntos y separan a A y B.

Caso 2: Supongamos que $a_0 \in A$ o $a_0 \in B$. Si $a_0 \in A$ tomamos $A' = A \setminus \{a_0\}$. Como A es cerrado y $\{a_0\}$ es abierto en X entonces A' sigue siendo cerrado de X y $A' \cap B = \emptyset$. Por el caso 1, existen abiertos disjuntos U', V tales que $A' \subseteq U'$, $B \subseteq V$. Entonces $U = U' \cup \{a_0\}$ y V son abiertos disjuntos que separan a A y B.

□

Nos concentramos ahora en un ejemplo que tiene consecuencias importantes. Consideremos el conjunto S_Ω (definido y estudiado al final del Capítulo 1) con la topología del orden. Y tomamos $S_\Omega^* = S_\Omega \cup \{\Omega\}$ también con la topología del orden. Ambos son T_5 por ser bien ordenados. Además S_Ω^* es compacto y $S_\Omega^* = \overline{S_\Omega}$ ya que los entornos básicos de Ω en S_Ω^* son $(\alpha, \Omega]$ (para todo $\alpha \in S_\Omega$) e intersecan a S_Ω. Notar que S_Ω^* es la compactificación en un punto de S_Ω.

Por lo tanto $S_\Omega^* \times S_\Omega^*$ es compacto y T_2 (por ser produto de dos espacios compactos y Hausdorff). En particular $S_\Omega^* \times S_\Omega^*$ es T_5.

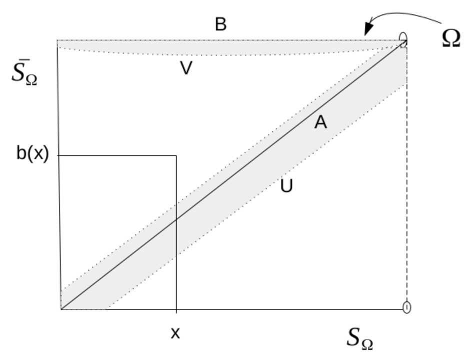
Veremos ahora que $S_\Omega \times S_\Omega^*$ no es T_5. Esto mostrará entonces que subespacios de T_5 y productos de T_5 no son necesariamente T_5.

Proposición 6.4.8. $S_\Omega \times S_\Omega^*$ no es T_5.

Demostración. Veamos que existen dos cerrados disjuntos que no podemos separar con abiertos disjuntos. Sea $\Delta \subset S_\Omega^* \times S_\Omega^*$ la diagonal, $\Delta = \{(x, x) \mid x \in S_\Omega^*\}$. Como S_Ω^* es Hausdorff, $\Delta \subset S_\Omega^* \times S_\Omega^*$ es cerrado y por lo tanto $A = \Delta \cap S_\Omega \times S_\Omega^*$ es un cerrado de $S_\Omega \times S_\Omega^*$. Sea $B =$

$S_\Omega \times \{\Omega\} \subset S_\Omega \times S^*_\Omega$. Como $B = (S_\Omega \times S_\Omega)^c$ y $S_\Omega \times S_\Omega$ es abierto en $S_\Omega \times S^*_\Omega$, entonces B es cerrado. Es claro que A y B son disjuntos.

Supongamos que existen abiertos disjuntos $U, V \subseteq S_\Omega \times S^*_\Omega$ tales que $A \subseteq U,\ B \subseteq V$. Dado $x \in S_\Omega$ veamos que existe $b(x) \in S_\Omega$ tal que $x < b(x) < \Omega$ y $(x, b(x)) \notin U$. Supongamos que no, entonces para todo $\beta > x,\ (x, \beta) \in U$. Esto implica que $(x, \Omega) \in \overline{U}$ pero $(x, \Omega) \in B \subseteq V$ y V es abierto y $U \cap V = \emptyset$, lo cual sería una contradicción ya que $(x, \Omega) \in \overline{U}$. Entonces probamos que para todo $x \in S_\Omega$ existe $b(x)$ con $x < b(x) < \Omega$ tal que $(x, b(x)) \notin U$. Elijamos para cada x, un $b(x)$ con esa propiedad.



Nos construimos la siguiente sucesión en S_Ω: elegimos algún $x_1 \in S_\Omega$. Luego inductivamente tomamos $x_n = b(x_{n-1})$. La sucesión es creciente ya que $x < b(x)\ \forall x$ y como es un conjunto numerable en S_Ω tiene cota superior. Sea $a = sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Como la sucesión es creciente $x_n \to a$, pero como $x_n = b(x_{n-1})$, $b(x_n) \to a$ y así $(x_n, b(x_n)) \to (a, a) \in S_\Omega \times S_\Omega$. Pero $(a, a) \in A \subseteq U$ y U es abierto y no tiene ningún punto de la forma $(x, b(x))$. Absurdo. $\square$

Definición 6.4.9. Un espacio X se dice completamente regular o T_4 si:

1. X es T_1.
2. X separa puntos de cerrados mediante funciones continuas: para todo $F \subseteq X$ cerrado y todo $x \in X,\ x \notin F$, existe $h : X \to I$ continua tal que $h(x) = 0$ y $h(F) = \{1\}$.

Observar que la definición no dice que $h^{-1}(0) = \{x\}$ y $h^{-1}(1) = F$.

Observación 6.4.10. $T_4 \Rightarrow T_3$, ya que si tenemos F cerrado y $x \notin F$, por hipótesis los podemos separar con una función continua $h : X \to I$ con $h(x) = 0$ y $h(F) = \{1\}$. Tomando $U = h^{-1}([0, 1/2))$ y $V = h^{-1}((1/2, 1])$ obtenemos dos abiertos disjuntos que los separan.

Veremos después, como corolario inmediato del Lema de Urysohn, que $T_5 \Rightarrow T_4$. Para probar Urysohn usaremos el Lema 6.4.6 y los número diádicos.

Sea $D = \{\frac{n}{2^m} \mid n \text{ es impar}, m \in \mathbb{N},\ \frac{n}{2^m} < 1\} \subset I$. Notar que D es denso en I (y numerable).

Teorema 6.4.11 (Lema de Urysohn)**.** *Sea X espacio topológico normal. Dados $A, B \subseteq X$ cerrados disjuntos, existe una función continua $f : X \to I$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

Demostración. Como $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subseteq B^c$, que es abierto. Por Lema 6.4.6 existe un abierto $U_{1/2}$ tal que
$$A \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq B^c.$$

Ahora consideramos $A \subseteq U_{1/2}$ y $\overline{U_{1/2}} \subseteq B^c$. Por Lema 6.4.6 existen abiertos $U_{1/4}$ y $U_{3/4}$ tales que

$$A \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U_{1/4}} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U_{3/4}} \subseteq B^c.$$

Ahora continuamos inductivamente (en m, y para cada $m \in \mathbb{N}$ recursivamente en n) y obtenemos para cada diádico $d = \frac{n}{2^m} \in D$ un abierto U_d tal que $A \subseteq U_d$ y de tal forma que si $d \leq d' \in D$, $A \subseteq U_d \subseteq \overline{U_d} \subseteq U_{d'} \subseteq \overline{U_{d'}} \subseteq B^c$.

Definimos $f : X \to I$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{d \mid x \in U_d\} & \text{si } x \in U_d \text{ para algún } d \in D \\ 1 & \text{si } x \notin U_d \ \forall d \end{cases}$$

Notar que si $x \in A$ entonces $x \in U_d$ $\forall d$ y por lo tanto $f(x) = 0$ (por densidad). Por otro lado, si $x \in B$ entonces $x \notin U_d$ $\forall d$ ya que $U_d \subseteq B^c$, y por lo tanto $f(x) = 1$.

Solo resta probarse que f es continua. Para esto solo basta ver que $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto de la sub-base de I, es decir, abiertos de la forma $U = [0, a)$ y abiertos de la forma $U = (b, 1]$.

Ahora bien, $f^{-1}([0, a)) = \bigcup\limits_{d<a} U_d$ y por lo tanto es abierto. Para ver que $f^{-1}((b, 1])$ es abierto, probemos que $f^{-1}((b, 1]^c)$ es cerrado, es decir, que $f^{-1}([0, b])$ es cerrado.

Veamos que $f^{-1}([0, b]) = \bigcap\limits_{d>b} \overline{U_d}$. Probemos la doble contención. Sea $f(x) \in [0, b]$. Supongamos que $x \notin \overline{U_r}$ para algún $r > b$. Entonces $x \notin U_d$ $\forall d \leq r$. Esto implica que $f(x) \geq r > b$. Absurdo. Para probar la otra contención: si $x \in \overline{U_r}$ entonces $x \in U_d$ para todo $d > r$ y así $f(x) \leq r$. Por lo tanto, si $x \in \bigcap\limits_{d>b} \overline{U_d}$, entonces $f(x) \leq d$ $\forall d > b$ y por densidad $f(x) \leq b$.

□

El Lema de Urysohn nos dice entonces que si X separa cerrados disjuntos con abiertos disjuntos entonces separa cerrados disjuntos mediante funciones continuas a I. En particular, como los puntos son cerrados, separa puntos de cerrados por medio de funciones continuas. Entonces $T_5 \Rightarrow T_4$.

Dejamos como ejercicio para el lector la demostración del siguiente resultado.

Proposición 6.4.12. Subespacios de espacios T_4 son T_4. Productos de espacios T_4 son T_4.

Vamos a caracterizar ahora a los espacios T_4 similarmente a lo que hicimos con los espacios T_0. Esto será de mucha utilidad al estudiar la compactificación de Stone-Čech.

Teorema 6.4.13. *Un espacio X es T_4 si y solo si X es subespacio de un producto de copias de I.*

Demostración. Si X es subespacio de un producto de copias de I es claro que es T_4 porque I lo es y por la proposición anterior.

Para ver la implicación interesante, dado X un espacio T_4, consideramos

$$\mathcal{H} = \{h : X \to I \mid h \text{ es continua}\}$$

y la función $i : X \to \prod\limits_{h \in \mathcal{H}} I$ dada por $i(x) = (h(x))_{h \in \mathcal{H}}$. Es claro que i es continua ya que al componerla con cada proyección $p_h : \prod\limits_{h \in \mathcal{H}} I \to I$ se tiene $p_h i = h$ que es continua. Para ver que es inicial, por la Proposición 3.3.1, como la i es continua y la familia $\{p_h : \prod_{h\in\mathcal{H}} I \to I \mid h \in \mathcal{H}\}$ es inicial, basta ver que la familia $\{h : X \to I \mid h \in \mathcal{H}\}$ es inicial. Para ver esto, basta ver que si $U \subseteq X$ es abierto, entonces existen $h_j \in \mathcal{H}$ y $U_j \subseteq I$ abiertos (para ciertos $j \in J$) tales que $U = \bigcup_{j\in J} h_j^{-1}(U_j)$. Ahora bien, para cada $x \in U$, como U^c es cerrado y $x \notin U^c$, existe una función continua $h_x : X \to I$ tal que $h_x(x) = 0$ y $h_x(U^c) = \{1\}$. Entonces $x \in h_x^{-1}([0, 1/2))$ que es un abierto contenido en U y por lo tanto, $U = \bigcup_{x\in U} h_x^{-1}([0, 1/2))$. Esto prueba que i es inicial.

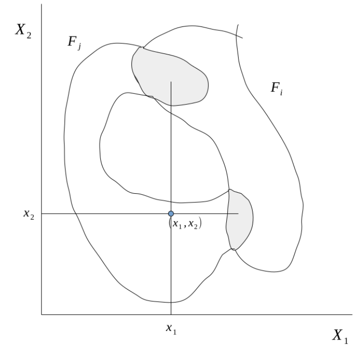
Para ver que i es inyectiva, dados $x \neq y \in X$, como los puntos son cerrados, consideramos el cerrado $\{y\}$ y entonces existe $h : X \to I$ continua tal que $h(x) = 0$ y $h(y) = 1$. Por lo tanto en esa coordenada $h \in \mathcal{H}$, $(i(x))_h \neq (i(y))_h$ y por lo tanto $i(x) \neq i(y)$. □

6.5. Teorema de Tychonoff y compactificación de Stone-Čech

El teorema de Tychonoff afirma que el producto de una familia arbitraria de compactos es compacto. Nosotros ya probamos que el producto de dos (y por lo tanto finitos) compactos es compacto. Para probar que, en realidad, el producto de una cantidad arbitraria de compactos también lo es, se necesitan otras herramientas. El truco será utilizar familias maximales con la PIF y el Lema de Zorn.

Sabemos que un espacio X es compacto si y solo si para toda familia $\mathcal{F}$ de cerrados con la PIF, la intersección de toda la familia es no vacía (Teorema 6.2.4). Para pasar a familias maximales, nos conviene reformular un poco esa afirmación: notemos que un espacio X es compacto si y solo si para toda familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i\in J}$ de subconjuntos con la PIF, se tiene que $\bigcap_{i\in J} \overline{F_i} \neq \emptyset$ (ya que la familia de sus clausuras sería una familia de cerrados con la PIF).

La idea es la siguiente: dado $X = \prod_{s\in S} X_s$, donde los X_s son compactos, para ver que X es compacto, tomamos una familia $\mathcal{F}$ con la PIF y queremos ver que la intersección de todas sus clausuras es no vacía. Ahora bien, para cada $s \in S$ tenemos la familia de las proyecciones $\{p_s(F_i)\}_{i\in J}$ y como X_s compacto, $\bigcap_{i\in J} \overline{p_s(F_i)} \neq \emptyset$ y podemos elegir un x_s en esa intersección. Así nos construimos un elemento $(x_s)_{s\in S} \in X$ y quisiéramos que ese elemento esté en la intersección de las clausuras de la familia $\mathcal{F}$. Pero si elegimos "mal" los x_s puede pasar que $(x_s)_{s\in S}$ no esté en esa intersección.



Para no tener este problema, se cambia la familia original $\mathcal{F}$ por una maximal con la PIF y que contenga a $\mathcal{F}$ (acá es donde se usa el Lema de Zorn).

Lema 6.5.1. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X con la PIF. Entonces existe $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de X tal que:

1. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.

2. $\mathcal{D}$ tiene la PIF.

3. $\mathcal{D}$ es maximal con respecto a estas propiedades.

Demostración. Sea $A = \{$Familias $\mathcal{G}$ de subconjuntos de $X \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{G}$ tiene la PIF $\}$. Notar que A es un poset con el orden dado por la inclusión y que no es vacío ya que $\mathcal{F} \in A$. Veamos que cumple las condiciones del Lema de Zorn. Dada una cadena(=subconjunto totalmente ordenado) $B \subseteq A$, tomamos $\mathcal{C} = \bigcup\limits_{\mathcal{G} \in B} \mathcal{G}$. Es claro que $\mathcal{C}$ es cota superior de B. Veamos que $\mathcal{C} \in A$. Para esto tenemos que ver que $\mathcal{C}$ contiene a $\mathcal{F}$, cosa que es clara por definición de $\mathcal{C}$, y que tiene la PIF. Dados $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$, tenemos que ver que su intersección es no vacía. Pero cada C_i pertenece a alguna familia $\mathcal{G}_i \in B$, y como B es una cadena, existe una familia $\mathcal{G}_{i_0} \in B$ que contiene a todas las familias $\mathcal{G}_i$ (con $i = 1, \ldots, n$). Entonces todos los C_i están en la familia $\mathcal{G}_{i_0}$ y como $\mathcal{G}_{i_0}$ tiene la PIF, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \neq \emptyset$. Por el Lema de Zorn, A tiene elementos maximales, tomamos $\mathcal{D} \in A$ maximal. Por definición de A, $\mathcal{D}$ cumple lo pedido. $\square$

Lema 6.5.2. Sea X un espacio y $\mathcal{D}$ una familia de subconjuntos de X con la PIF y que es maximal con esa propiedad. Entonces:

1. Si $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$, entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}$.

2. Si $A \subseteq X$ cumple que $A \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$, entonces $A \in \mathcal{D}$.

Demostración. Para probar (1), tomamos $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$ y denotamos $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i$. Veamos que $B \in \mathcal{D}$. Sea $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{B\}$. Notar que $\mathcal{E}$ sigue teniendo la PIF (por la hipótesis) y que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$. Por maximalidad, $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ y entonces $B \in \mathcal{D}$.

Para probar (2), sea $A \subseteq X$ tal que $A \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. Considero $\mathcal{E} = \mathcal{D} \cup \{A\}$. Dados $D_1, \ldots, D_n \in \mathcal{D}$, $A \cap (D_1 \cap \ldots \cap D_n) \neq \emptyset$ ya que $B = \bigcap\limits_{i=1}^{n} D_i \in \mathcal{D}$ por el ítem (1) y $A \cap B \neq \emptyset$ por hipótesis. Entonces $\mathcal{E}$ tiene la PIF, y por maximalidad $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ y entonces $A \in \mathcal{D}$. $\square$

Ahora ya estamos en condiciones de probar el teorema.

Teorema 6.5.3 (Teorema de Tychonoff)**.** *Sea $\{X_s\}_{s \in S}$ una familia de espacios compactos. Entonces $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X con la PIF, debemos ver que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$. Por el Lema 6.5.1, existe $\mathcal{D}$ familia maximal con la PIF que contiene a $\mathcal{F}$. Vamos a probar que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \neq \emptyset$ y esto claramente implicará que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$ ya que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D} \subseteq \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Para cada $s \in S$, considero la proyección de la familia $\{p_s(D)\}_{D \in \mathcal{D}}$, que es una familia con la PIF en X_s y, como X_s es compacto, $\bigcap\limits_{D \in \mathcal{D}} \overline{p_s(D)} \neq \emptyset$. Elegimos $x_s \in \bigcap\limits_{D \in \mathcal{D}} \overline{p_s(D)}$. Así construimos un elemento $x = (x_s)_{s \in S} \in X$. Veamos que $x \in \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{D}$. Para esto, vemos que todo entorno abierto U de x interseca a D para todo $D \in \mathcal{D}$. Como todo abierto de la topología contiene a uno de la base, basta verificarlo para entornos abiertos U de x de la base.

Primero lo vemos para abiertos de la sub-base: sea $U = p_s^{-1}(U_s)$ (para algún $s \in S$) abierto de la sub-base alrededor del punto x. Notar que $U_s \cap p_s(D) \neq \emptyset$ ya que $x_s \in \overline{p_s(D)}$ y U_s es abierto alrededor de x_s, y como $U_{s'} = X_{s'}$ para todo $s' \neq s$, se tiene que $U \cap D \neq \emptyset$. Esto vale para todo $D \in \mathcal{D}$ y por el Lema 6.5.2, se tiene que $U \in \mathcal{D}$.

Ahora sí, supongamos que tenemos un abierto U de la base con $x \in U$. Como U es abierto de la base, entonces $U = \bigcap_{i=1}^{r} U_i$ para ciertos abiertos U_i de la sub-base y como $U_i \in \mathcal{D}$ para todo $i = 1, \ldots, r$ por lo visto en el párrafo anterior, se tiene que $U \in \mathcal{D}$ por el Lema 6.5.2. Como $\mathcal{D}$ tiene la PIF y $U \in \mathcal{D}$, entonces $U \cap D \neq \emptyset \ \forall D \in \mathcal{D}$. □

Estudiamos ahora la compactificación de Stone-Čech, pero primero veamos qué entendemos en estas notas por compactificación.

Dado un espacio X, una compactificación de X en el "sentido tradicional" es un par (Y, i) donde Y es un espacio compacto e $i : X \to Y$ es subespacio denso (es decir, i es subespacio y la imagen $i(X) \subseteq Y$ es densa). Por ejemplo, si X es compacto $(X, 1_X)$ es una compactificación, y si X no es compacto la compactificación de Alexandroff (X^*, i) es compactificación. Dos compactificaciones se dicen equivalentes si existe un homeomorfismo entre ambas que deje fijo al espacio original X.

Nosotros en estas notas vamos a relajar la condición de que $i : X \to Y$ sea subespacio. Vamos a pedir solamente que i sea continua para obtener compactificaciones de espacios más generales, y luego ver que, si pedimos más condiciones al espacio obtenemos compactificaciones en el sentido tradicional.

Un problema general es el siguiente: dado un espacio X, encontrar un espacio Y con ciertas propiedades (por ejemplo, que Y sea compacto, Hausdorff, etc) y una función contiua $i : X \to Y$ tal que para todo espacio Z que tenga ciertas propiedades (que pueden ser las mismas que las de Y o no) y para toda función continua $f : X \to Z$, exista una única función continua $\overline{f} : Y \to Z$ que haga conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & Y \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \overline{f}"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

y además, en el caso de que X tenga ciertas propiedades extras, la $i : X \to Y$ resulte subespacio (y a veces subespacio denso).

Para la compactificación de Stone-Čech se le pide a Y y a Z que sean compactos y Hausdorff. Es decir: dado X espacio topológico, queremos encontrar un espacio Y compacto y Hausdorff y una función continua $i : X \to Y$ que cumpla:

$$(*) \ \forall Z \text{ espacio compacto y } T_2 \text{ y } \forall f : X \to Z \text{ continua}, \exists! \ \overline{f} : Y \to Z \text{ tal que } \overline{f} i = f$$

En este caso particular, para que $i : X \to Y$ sea subespacio, como Y es compacto y T_2 (y por lo tanto T_5), X debe ser T_4, ya que T_5 implica T_4 y subespacios de T_4 son T_4. Pero podemos obtener "compactificaciones" de Stone-Čech para cualquier X (y en el caso que X sea T_4 será una compactificación tradicional, en el sentido de que X será subespacio denso).

Vamos a construir la compactificación de Stone-Čech y ver en dos pasos que cumple la propiedad $(*)$ enunciada arriba.

Dado un espacio X construiremos un espacio βX compacto y T_2 y una función continua $i : X \to \beta X$ que extienda en forma única las funciones continuas $f : X \to I$. Es decir, que cumpla:

$$(**)\ \forall f : X \to I \text{ continua },\ \exists!\ \overline{f} : \beta X \to I \text{ continua tal que } \overline{f} i = f$$

Para hacer esto, consideramos $\prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ donde $\mathcal{H} = \{h : X \to I \mid h \text{ es continua } \}$ y la función $i : X \to \prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ dada por $i(x) = (h(x))_{h\in\mathcal{H}}$ (que utilizamos cuando hicimos la caracterización de espacios T_4). Ya hemos visto que esta función i es continua. Notar que como I es T_2, entonces $\prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ es T_2, y como I es compacto, por el Teorema de Tychonoff, $\prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ es compacto.
Ahora bien, dada una $f : X \to I$ continua, $f \in \mathcal{H}$ y por lo tanto se tiene la proyeccíón en la coordenada f, $p_f : \prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I \to I$ y por lo tanto

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I \arrow[dl, "p_f"] \\ I & \end{tikzcd}$$

conmuta. El problema es que $p_f : \prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I \to I$ quizás no es la única función continua que hacer conmutar el diagrama, entonces $\prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ no es el βX buscado. Lo que debemos hacer es "achicarlo" un poco para conseguir unicidad. Definimos

$$\beta X = \overline{i(X)} \subseteq \prod_{h\in\mathcal{H}} I$$

(la clausura de $i(X)$ en $\prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I$ con la topología del subespacio). Notar que la co-restricción $i : X \to \beta X$ sigue siendo continua porque le damos la topología del subespacio y que βX es compacto y T_2 por ser subespacio cerrado de un compacto y T_2.

Veremos que βX cumple la propiedad $(**)$ (extiende funciones a I en forma única) y luego deduciremos que también cumple la propiedad $(*)$ (extiende funciones a cualquier compacto y Hausdorff en forma única).

Definición 6.5.4. A βX se lo llama la compactificación de Stone-Čech de X. Notar que si X es T_4, la función $i : X \to \beta X$ resulta subespacio (por el Teorema 6.4.13) y denso (por construcción de βX).

Para probar que βX cumple la propiedad $(**)$: dada $f : X \to I$ continua, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & i(X) \arrow[r, hook] \arrow[dl, "p_f|_{i(X)}"'] & \overline{i(X)} = \beta(X) \arrow[r, hook] \arrow[dll, "p_f|_{\beta X}"] & \prod\limits_{\mathcal{H}} I \arrow[dlll, bend left, "p_f"] \\ I & & & \end{tikzcd}$$

Como ya dijimos, $p_f i = f$ pero $p_f : \prod\limits_{h\in\mathcal{H}} I \to I$ no es la única en general que hace conmutar el diagrama, pero claramente $p_f|_{i(X)} : i(X) \to I$ sí es la única tal que $p_f i = f$ (porque justamente vale $p_f(i(x)) = f(x)$. El problema es que $i(X)$ no tiene por qué ser compacto y es por eso que tomamos $\beta X = \overline{i(X)}$ y como $i(X) \subseteq \beta X$ es denso y el espacio I es Hausdorff, por Proposición 5.3.4, $p_f|_{\beta X} : \beta X \to I$ sigue siendo la única que cumple $p_f|_{\beta X} i = f$. Llamando $\overline{f}$ a $p_f|_{\beta X}$, hemos probado que βX cumple la propiedad $(**)$.

Ahora probamos que cumple la propiedad $(*)$ deseada.

Teorema 6.5.5. *Sea X un espacio topológico y sea $i : X \to \beta X$ la compactifiación de Stone-Čech. Dado K espacio compacto y Hausdorff y $f : X \to K$ continua, existe una única función continua $\overline{f} : \beta X \to K$ que extiende a f:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \beta X \arrow[dl, dotted, "\exists!\ \overline{f}"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Demostración. Sabemos que el teorema vale cuando $K = I$ y queremos probarlo para cualquier compacto y T_2. Sea K un compacto y Hausdorff, entonces K es T_5 y en particular es T_4 y por lo tanto es un subespacio de un producto de copias de I, $i_K : K \to \prod_{h \in \mathcal{H}'} I$.

Sea $f : X \to K$ continua. Dada $h \in \mathcal{H}' = \{h : K \to I \mid h \text{ continua}\}$, considero el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & \beta X \arrow[dr, bend left, "\exists!\ \overline{hf}"] & \\ K \arrow[r, hook, "i_K"] \arrow[rr, bend right, "=h"'] & \prod_{\mathcal{H}'} I \arrow[r, "p_h"] & I \end{tikzcd}$$

Como βX cumple la propiedad $(**)$, considerando la función $hf : X \to I$, se tiene que existe una única función continua $\overline{hf} : \beta X \to I$ que hace conmutar el diagrama anterior. Como esto lo hacemos para todas las $h \in \mathcal{H}'$, por propiedad del producto obtenemos una única $\overline{f} : \beta X \to \prod_{\mathcal{H}'} I$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \beta X \arrow[d, dotted, "\exists!\ \overline{f}"] \\ K \arrow[r, hook, "i_K"] & \prod_{\mathcal{H}'} I \end{tikzcd}$$

Pero nosotros queremos que $\overline{f} : \beta X \to K$. Como $i_K : K \to \prod_{\mathcal{H}'} I$ es subespacio, solo nos resta ver que en realidad $\overline{f}(\beta X) \subseteq i_K(K)$. Pero como $\overline{f} i = i_K f$, se tiene

$$\overline{f}(\beta X) = \overline{f}(\overline{i(X)}) \subseteq \overline{i_K(K)} = i_K(K)$$

La última igualdad se debe a que $i_K(K)$ es compacto y subespacio de un Hausdorff, y por lo tanto es cerrado. $\square$

Ejercicio 6.5.6. Probar que βX es el único espacio compacto y Hausdorff, salvo homeomorfismos, que cumple la propiedad $(*)$.

Capítulo 7

Espacios de funciones y topología compacto-abierta

7.1. Convergencia puntual y ley exponencial

Empecemos fijando notación. Dados dos espacios X e Y, notaremos con Y^X al conjunto de funciones de X a Y y con $\mathrm{Hom}(X,Y)$ al conjunto de funciones continuas de X a Y.

Nuestro objetivo es darle al conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ una topología "conveniente".

Definamos primero la topología de convergencia puntual. Notar primero que, visto como conjunto, $Y^X = \prod\limits_{x\in X} Y$. Definimos la topología de convergencia puntual de la siguiente manera: nos olvidamos de la topología de X (lo vemos solo como un conjunto) y le damos a $Y^X = \prod\limits_{x\in X} Y$ la topologia producto y a $\mathrm{Hom}(X,Y) \subseteq Y^X$ la topología de subespacio del producto. Esa es la llamada topología de convergencia puntual en $\mathrm{Hom}(X,Y)$. Notar que con esta topología, una sub-base sería

$$\beta = \{S(x,U) \mid x \in X,\ U \subseteq Y \text{ abierto}\},$$

donde $S(x,U)$ es el conjunto de funciones continuas de X a Y tales que $f(x) \in U$ (es decir, $p_x^{-1}(U) \cap \mathrm{Hom}(X,Y)$).

Notar que los abiertos de la sub-base $S(x,U)$ son muy pocos y muy grandes. Un abierto de la base equivaldría a dar finitos puntos $x_1,\dots,x_n \in X$ y abiertos $U_1,\dots,U_n \subseteq Y$ tales que $f(x_i) \in U_i$ para todo $i = 1,\dots,n$.

Esta topología tiene abiertos muy grandes (no separan bien las funciones continuas) y además no refleja la topología de X (solo vemos a X como un conjunto).

Por otro lado, se tiene el siguiente problema básico, que es la ley exponencial:

Ley exponencial para conjuntos. Dados A,B,C conjuntos. Denotemos ahora con $\mathrm{Hom}(A,B)$ al conjunto de funciones (de conjuntos) de A a B. Notar que se tiene una biyección de conjuntos:

$$\mathrm{Hom}(A\times B, C) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,C))$$

donde $\varphi(f)(a)(b) = f(a,b)$ y $\psi(g)(a,b) = g(a)(b)$.

Esto es lo que se llama la ley exponencial para conjuntos.

Nuestro objetivo es tener una ley exponencial para espacios topológicos. Concretamente: dados X, Y, Z espacios topológicos, buscamos una topología conveniente para el conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (de funciones continuas) para tener una biyección de conjuntos:

$$(LE) \qquad \mathrm{Hom}(Z \times X, Y) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}(Z, \mathcal{C}(X,Y))$$

donde $\mathcal{C}(X,Y)$ es el conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ de funciones continuas, provisto de una topología conveniente. Las funciones de conjuntos φ, ψ son las definidas anteriormente: $\varphi(f)(z)(x) = f(z,x)$, $\psi(g)(z,x) = g(z)(x)$.

Notar que si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\varphi(f)(z) : X \to Y$ es continua para todo $z \in Z$ (es decir $\varphi(f)(z) \in \mathrm{Hom}(X,Y)$) ya que para cada $z \in Z$ fijo, $\varphi(f)(z) : X \to Y$ es la composición fi_z donde $i_z : X \to Z \times X$ es $i_z(x) = (z,x)$ que es continua.

Para tener la ley exponencial (LE) lo que necesitamos es que las funciones de conjuntos φ y ψ estén bien definidas. Para eso necesitamos que la topología que le damos a $\mathcal{C}(X,Y)$ cumpla estas dos propiedades:

(1) Si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\varphi(f) : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua (así la φ queda bien definida).

(2) Si $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua, entonces $\psi(g) : Z \times X \to Y$ es continua (y así la ψ queda bien definida).

Entonces si la topología que le damos a $\mathcal{C}(X,Y)$ cumple (1) y (2) se tendrá la ley exponencial (LE). Notar que, por definición de las funciones, automáticamente resultarán una biyección.

Vamos a conseguir una topología adecuada para que se cumplan (1) y (2) pero no para todos los espacios, sino para cuando el espacio X sea localmente compacto y T_2. La topología que definiremos se llama topología compacto-abierta y la veremos en la próxima sección. Pero antes, vamos a ver que podemos dar una condición más fuerte que (2) y que es que la función evaluar sea continua:

Observación 7.1.1. Sea $\mathcal{C}(X,Y)$ el conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ con una cierta topología. Se define la evaluación $Ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$, $Ev(f,x) = f(x)$. Notar que si Ev es continua entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ cumple la propiedad (2) anterior: dada $g : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ continua, $Ev(g \times 1_X) = \psi(g)$, y por lo tanto si Ev continua, $\psi(g)$ es continua.

Entonces, buscaremos una topología en $\mathcal{C}(X,Y)$ que cumpla:

(1) Si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\varphi(f) : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ sea continua.

(2') $Ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ sea continua.

En particular esto implicará que se cumplan (1) y (2) y se tendra la (LE). Como dijimos antes, esa topología será la compacto-abierta y estas condiciones valdrán para el caso en que el espacio X sea localmente compacto y T_2.

7.2. Topología compacto-abierta

Sean X e Y espacios topológicos. Dados $K \subseteq X$ compacto y $U \subseteq Y$ abierto, definimos

$$S(K,U) = \{f : X \to Y \text{ continuas } \mid f(K) \subseteq U\}.$$

La topología compacto-abierta en el conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (de funciones continuas de X a Y) es la generada por la sub-base $\beta = \{S(K,U) \mid K \subseteq X \text{ compacto}, U \subseteq Y \text{ abierto}\}$.

Notar que si $x \in X$, $S(x,U)$ es un elemento de β ya que $K = \{x\}$ es compacto, y por lo tanto la topología compacto-abierta es una topología más fina que la de convergencia puntual.

Denotamos de ahora en más con $\mathcal{C}(X,Y)$ al $\mathrm{Hom}(X,Y)$ con la topología compacto-abierta.

Proposición 7.2.1. $\mathcal{C}(X,Y)$ cumple la propiedad (1) anterior para todo X,Y.

Demostración. Debemos ver que si $f : Z \times X \to Y$ es continua, entonces $\varphi(f)$ lo es. Para esto basta ver que $\varphi(f)^{-1}(S(K,U))$ es abierto en Z para todo K compacto de X y U abierto de Y. Equivalentemente, veamos que su complemento es cerrado.

Como f es continua, entonces $f^{-1}(U)$ es abierto de $Z \times X$ y por lo tanto $f^{-1}(U) \cap (Z \times K)$ es abierto en $Z \times K$. Su complemento $(f^{-1}(U) \cap (Z \times K))^c$ es entonces cerrado en $Z \times K$ y por compacidad, la proyección en Z, $p_Z((f^{-1}(U) \cap (Z \times K))^c)$ es un cerrado de Z. Pero este conjunto es exactamente $(\varphi(f)^{-1}(S(K,U)))^c$. $\square$

Proposición 7.2.2. Si X es localmente compacto y T_2, entonces $\mathcal{C}(X,Y)$ cumple $(2')$, es decir la evaluación $Ev : \mathcal{C}(X,Y) \times X \to Y$ es continua.

Demostración. Sea U un abierto de Y y sea $(f,x) \in \mathcal{C}(X,Y) \times X$ tal que $Ev(f,x) \in U$. Veamos que existe un abierto $A \subseteq \mathcal{C}(X,Y) \times X$ que contiene al punto (f,x) y tal que $Ev(A) \subseteq U$. Como $f(x) = Ev(f,x) \in U$, entonces $x \in f^{-1}(U)$ que es un abierto de X al que denotamos W. Como X es localmente compacto y Hausdorff, por la Proposición 6.3.2 existe un abierto V de X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq W$ y $\overline{V}$ es compacto.

Tomamos $A = S(\overline{V},U) \times V$. Notar que A es un abierto de $\mathcal{C}(X,Y) \times X$, que $(f,x) \in A$ y que $Ev(A) \subseteq U$. $\square$

Corolario 7.2.3. Si X es localmente compacto y Hausdorff, $\mathcal{C}(X,Y)$ cumple la ley exponencial (LE).

Finalmente observemos que si $\mathcal{C}'(X,Y)$ es otra topología en $\mathrm{Hom}(X,Y)$ que hace a la evaluación $Ev : \mathcal{C}'(X,Y) \times X \to Y$ continua, entonces $\mathcal{C}'(X,Y)$ es más fina que la compacto abierta $\mathcal{C}(X,Y)$, ya que si $Ev : \mathcal{C}'(X,Y) \times X \to Y$ es continua, por Proposición 7.2.1 $\varphi(Ev) : \mathcal{C}'(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua. Pero $\varphi(Ev)(h)(x) = Ev(h,x) = h(x)\ \forall x$. Es decir $\varphi(Ev)(h) = h\ \forall h$ y por lo tanto $\varphi(Ev) = 1$ (la identidad). Como la identidad $\mathcal{C}'(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y)$ es continua, $\mathcal{C}'(X,Y)$ es más fina que $\mathcal{C}(X,Y)$.

Capítulo 8

Espacios de adjunción e introducción a los CW-complejos

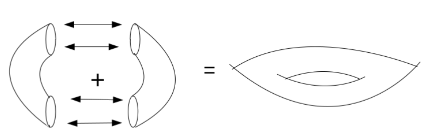
8.1. Espacios de adjunción

Queremos construir espacios pegando dos o más espacios. Cuando estudiamos cocientes vimos cómo construir nuevos espacios a partir de pegar (o identificar) puntos de un espacio dado. Ahora hacemos algo similar pero identificando o pegando puntos de distintos espacios. Veamos algunos ejemplos antes de formalizar esto.

Ejemplos 8.1.1. 1. Tomamos el cilindro (hueco) $\mathbb{S}^1 \times I$ y le pegamos un disco $\mathbb{D}^2$ identificando los puntos del borde del disco $\partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ con el borde de abajo del cilindro hueco $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$.

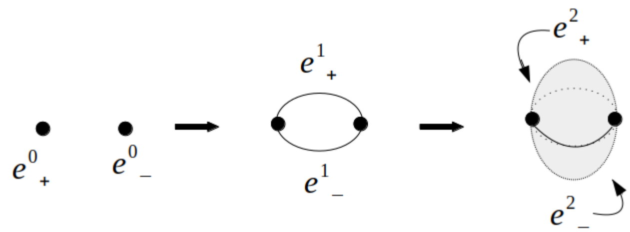
El espacio que nos queda, que es como una lata vacía sin la tapa de arriba (pero con la tapa de abajo) es homeomorfo al disco $\mathbb{D}^2$. Si uno quiere definir el homeomorfismo de este espacio construido al disco $\mathbb{D}^2$, lo va a poder hacer definiendo funciones en los dos espacios que pegamos $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{D}^2$ y $\varphi_2 : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ tales que se peguen bien (es decir, que coincidan en las partes que identificamos para armar el espacio).

2. De nuevo tomamos $\mathbb{S}^1 \times I$ pero lo vemos "doblado" y le pegamos otra copia igual identificando los bordes de un cilindro con el otro y obtenemos el toro.



3. También podemos obtener espacios pegandos espacios recursivamente. Por ejemplo, podemos construir la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$ a partir de "celdas"

dimensión por dimensión, de la siguiente manera. En el Paso 0 empezamos con dos puntos aislados (es decir $\mathbb{S}^0$), a esos puntos los llamamos 0-celdas y los denotamos e^0_- y e^0_+. En el Paso 1 vemos a $\mathbb{S}^0 = \{e^0_-, e^0_+\}$ como ecuador de $\mathbb{S}^1$ y construimos $\mathbb{S}^1$ pegando al ecuador dos copias de $\mathbb{D}^1$ identificando los bordes de cada $\mathbb{D}^1$ con los puntos de $\mathbb{S}^0$ (los $\mathbb{D}^1$ serán los hemisferios de la esfera $\mathbb{S}^1$ construida). Recursivamente, en el Paso m obtengo $\mathbb{S}^m$ a partir de su ecuador $\mathbb{S}^{m-1}$ pegando dos copias de $\mathbb{D}^m$ identificando sus bordes con el ecuador.



¿Pero qué significa pegar espacios? Los espacios se pegan mediante funciones continuas. Queremos pegar un espacio X con un espacio B identificando un subespacio cerrado $A \subseteq X$ con su imagen por una función continua $f : A \to B$.

Definición 8.1.2. Sean X y B espacios topológicos, sea A un subespacio cerrado de X y $f : A \to B$ una función continua. El espacio de adjunción $B \cup_f X$ se define a partir de la unión disjunta $B \coprod X$ identificando los puntos $a \in A$ con los puntos $f(a) \in B$. Concretamente $B \cup_f X = B \coprod X/ \sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada por la relación $a \sim f(a)\ \forall a \in A$. A la función $f : A \to B$ se la llama función de adjunción.

Notar que si f no es inyectiva y se tienen $a, a' \in A$ tales que $f(a) = f(a')$ entonces $a \sim a'$. Por eso decimos la relación generada por $a \sim f(a)$ (la hacemos transitiva).

Sea $i : A \to X$ la inclusión. Definimos $\overline{i} : B \to B \cup_f X$ como $\overline{i}(b) = [b]$ (la clase de b en el cociente), es decir $\overline{i}$ es la composición de la inclusión de B en $B \coprod X$ con la función cociente $B \coprod X \to B \cup_f X$. Similarmente definimos $\overline{f} : X \to B \cup_f X$ como $\overline{f}(x) = [x]$. Notar que si $a \in A$, se tiene $\overline{f}(a) = [a] = [f(a)]$. Se tiene entonces un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "="] & B \arrow[d, "\overline{i}"] \\ X \arrow[r, "\overline{f}"] & B \cup_f X \end{tikzcd}$$

Las notaciones $\overline{i}, \overline{f}$ se deben a que, en el diagrama, son las funciones que están enfrente de las i, f dadas.

Observación 8.1.3. Notar que como $B \coprod X$ tiene la topología final respecto de las inclusiones de B y X y la función cociente $B \coprod X \to B \cup_f X$ es en particular final, entonces $B \cup_f X$ tiene la topología final respecto de las funciones $\overline{i} : B \to B \cup_f X$ y $\overline{f} : X \to B \cup_f X$. Es decir: $U \subseteq B \cup_f X$ es abierto si y solo si $\overline{i}^{-1}(U) \subseteq B$ y $\overline{f}^{-1}(U)$ son abiertos en B y X respectivamente.

Notar que si $x, x' \in X \setminus A$, entonces $[x] = [x']$ si y solo si $x = x'$ (la relación $\sim$ solo puede identificar puntos de A). Si $b, b' \in B$, entonces $[b] = [b']$ si y solo si $b = b'$. Es decir, como conjunto (no como espacio topológico), $B \cup_f X$ es la unión disjunta de B y $X \setminus A$ (los puntos de A quedan pegados con su imagen $f(a) \in B$).

Ejemplo 8.1.4. Sabemos que otra forma de obtener $\mathbb{S}^n$ es como cociente del disco identificando todos los puntos del borde $\mathbb{S}^n = \mathbb{D}^n/\partial\mathbb{D}^n$. Pero esto es lo mismo que tomar $X = \mathbb{D}^n,\ A = \partial\mathbb{D}^n$, $B = *$ (singleton) y la función $f : A \to B$ constante (la única función al punto). Y así $\mathbb{S}^n = * \cup_f \mathbb{D}^n$.

Como decíamos anteriormente, para definir una función continua g que salga del espacio de adjunción $B \cup_f X$ a otro espacio, basta definir funciones continuas en los espacios que pegamos B, X, de tal manera que las funciones se peguen bien (es decir al restringirlas a A coincidan). Eso es lo que dice la siguiente proposición, cuya demostración queda a cargo del lector.

Proposición 8.1.5. El espacio de adjunción $B \cup_f X$ cumple la siguiente propiedad universal: para todo Z espacio topológico y para todo par de funciones continuas $g_B : B \to Z,\ g_X : X \to Z$ tales que $g_B f = g_X i$, existe una única función continua $g : B \cup_f X \to Z$ tal que $g\bar{i} = g_B,\ g\bar{f} = g_X$. Esto se esquematiza en el siguiente diagrama:

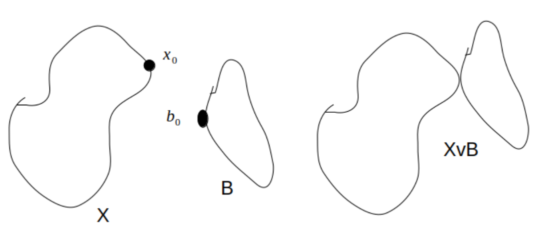
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{ADJ}"] & B \arrow[d, "\bar{i}"] \arrow[ddr, bend left, "g_B"] & \\
X \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[drr, bend right, "g_X"'] & B \cup_f X \arrow[dr, dotted, "\exists!\ g"] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Por ejemplo, como indicamos en el ítem (1) de Ejemplos 8.1.1, para definir el homeomorfismo del espacio de adjunción a $\mathbb{D}^2$, basta definir funciones $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{D}^2$ y $\varphi_2 : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ que se peguen bien.

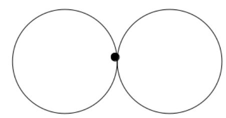
Ejemplos 8.1.6.

1. Si $A = \emptyset$ entonces $B \cup_f X = B \coprod X$ (no se identifica nada).
2. Si $A = X$ y $f : A = X \to B$ es cualquier función continua, entonces $B \cup_f X = B$ (todo X queda fundido en su imagen en B).
3. Si $A = B$ y $f = 1_B : A \to B$, entonces $B \cup_f X = X$.
4. Sean $F, G \subseteq Y$ subespacios cerrados de un espacio Y. Sea $A = F \cap G,\ X = F,\ B = G$ y la función $f : A = F \cap G \to B = G$ la inclusión. Entonces el espacio de adjunción en este caso es $F \cup G$ con la topología de subespacio de Y. ¿Por qué?
5. Si $B = *$ entonces el espacio de adjunción es el cociente X/A.

Unión en un punto. Si $A = \{x_0\},\ x_0 \in X$ y $f : A \to B$ es $f(x_0) = b_0 \in B$, entonces $B \cup_f X$ se llama la unión en un punto de X y B, y es el resultado de pagar a X con B identificando el punto x_0 con el punto b_0.



Este espacio se denota $B \vee X$ y también se lo llama la unión wedge de B y X. Por ejemplo, si $X = B = \mathbb{S}^1$, el espacio $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ se denomina “figura 8” (o simplemente “el 8”).



Adjunción de n-celdas. Vamos a generalizar lo que hicimos en el ítem (3) de los Ejemplos 8.1.1. Sea $X = \mathbb{D}^n$ y $A = \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Sea $f : \partial\mathbb{D}^n \to B$ una función continua.

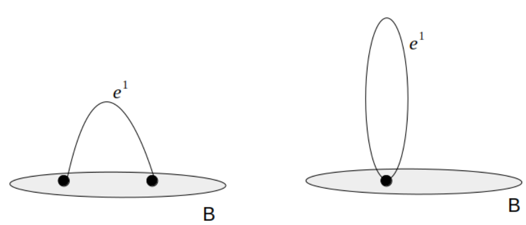
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ADJ}"] & B \arrow[d, "\bar{i}"] \\
\mathbb{D}^n \arrow[r, "\overline{f}"] & B \cup_f X = B \cup e^n
\end{tikzcd}$$

En este caso, al espacio de adjunción $B \cup_f \mathbb{D}^n$ se lo denota $B \cup e^n$ y decimos que $B \cup e^n$ se obtiene de B adjuntándole una n-celda. La n-celda e^n es la imagen de $\mathbb{D}^n$ por $\overline{f}$ ($e^n = \overline{f}(\mathbb{D}^n) \subseteq B \cup e^n$) y la función $\overline{f}$ se llama función característica de la celda.

Veamos algunos ejemplos de adjunción de celdas y de cómo armar espacios adjuntando celdas de distintas dimensiones.

Para $n = 0$, con la convención de que $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$, como $\mathbb{D}^0 = *$ adjuntar una 0-celda a un espacio B es hacer la unión disjunta de B con un punto $*$.

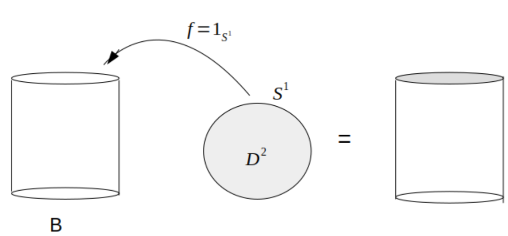
Para $n = 1$, pegar una 1-celda es pegar un intervalo $\mathbb{D}^1$ a B identificando los extremos del intervalo con dos puntos o un punto de B, según si la $f : \mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} \to B$ es inyectiva o no.



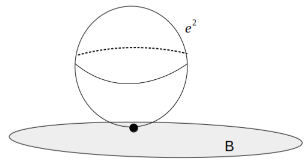
Notar que la celda $e^n = \overline{f}(\mathbb{D}^n)$ no es necesariamente homeomorfa a $\mathbb{D}^n$.

Veamos algunos ejemplos de adjuntar 2-celdas.

1. Adjuntamos una 2-celda a un cilindro $B = \mathbb{S}^1 \times I$ mediante la función identidad $1 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$.

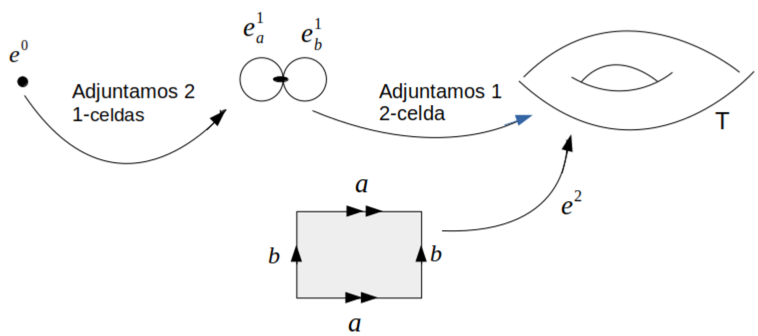


2. Si $f : \mathbb{S}^1 \to B$ es constante.



3. $B = \mathbb{S}^1$ y $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ es $f(z) = z^2$ (pensando a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$). En ese caso $B \cup e^2$ es el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$.

4. Veamos cómo armar el toro a partir de un punto (0-celda) e^0, adjuntando primero dos 1-celdas y luego una 2-celda:



Veamos ahora cómo construir $\mathbb{S}^n$ de dos formas distintas. La primera es como hicimos en el ítem (3) de Ejemplos 8.1.1, que tiene dos m-celdas por cada $0 \leq m \leq n$. Otra forma distinta de armar $\mathbb{S}^n$ es con una 0-celda e^0 y adjuntando luego una n-celda e^n:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{ADJ}"] & * = e^0 \arrow[d] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r] & \mathbb{S}^n = * \cup e^n \end{tikzcd}$$

Así obtenemos una estructura para $\mathbb{S}^n$ con una 0-celda y una n-celda

Para terminar esta sección, veamos algunas propiedades básicas de los espacios de adjunción. La siguiente proposición es fácil de probar, dejamos la demostración a cargo del lector.

Proposición 8.1.7. Sean X, B espacios topológicos, $A \subseteq X$ subespacio cerrado y $f : A \to B$ continua. Sea $B \cup_f X$ el espacio de adjunción y sean $\bar{i} : B \to B \cup_f X$, $\overline{f} : X \to B \cup_f X$ las funciones $\bar{i}(b) = [b]$, $\overline{f}(x) = [x]$. Entonces se tiene:

1. $\bar{i} : B \to B \cup_f X$ es subespacio cerrado.

2. $\overline{f}|_{X \setminus A} : X \setminus A \to B \cup_f X$ es subespacio abierto.

Hay ejemplos de espacios B y X Hausdorff tales que $B \cup_f X$ no es Hausdorff. Dejamos al lector pensar algunos ejemplos. Pero bajo ciertas condiciones extras en A y X, se cumple que $B \cup_f X$ es Hausdorff (si B y X lo son). El lector puede consultar el libro [Brown] para más detalles. Estas condiciones extras en A y X son cumplidas por $A = \mathbb{S}^{n-1} \subseteq X = \mathbb{D}^n$ y por lo tanto se tiene el siguiente resultado:

Corolario 8.1.8. Si B es T_2, el espacio $B \cup e^n$ que se obtiene adjuntándole una n-celda también lo es.

8.2. CW-complejos

Recordemos que adjuntar una n-celda a un espacio B es tomar el espacio de adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ADJ}"] & B \arrow[d, "\bar{i}"] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r, "\overline{f}"] & B \cup e^n \end{tikzcd}$$

La función f es la función de adjunción de la celda, la $\overline{f}$ es la característica de la celda, la celda e^n es la imagen del disco vía la función $\overline{f}$. El borde de la celda es $\dot{e}^n = f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset e^n$ y el interior de la celda es $\overset{\circ}{e}{}^n = e^n \setminus \dot{e}^n$.

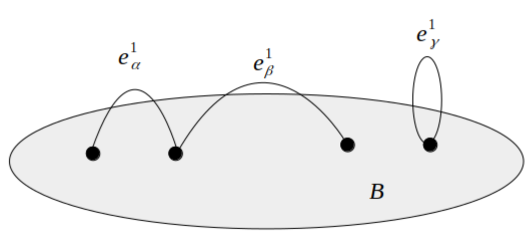
Notar que, por la Proposición 8.1.7, $f|_{\overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^n} : \overset{\circ}{\mathbb{D}}{}^n \to \overset{\circ}{e}{}^n$ es un homeomorfismo. Es decir, los interiores de las celdas son homeomorfos a discos abiertos.

Podemos también adjuntar muchas n-celdas al mismo tiempo (el mismo n para todas las celdas): sea Λ un conjunto arbitrario (eventualmente vacío), consideramos el espacio de adjunción

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{S}^{n-1} \arrow[r, "\coprod_\alpha f_\alpha"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\text{ADJ}"] & B \arrow[d] \\ \coprod_{\alpha \in \Lambda} \mathbb{D}^n \arrow[r] & B \cup_\alpha e^n_\alpha \end{tikzcd}$$

Decimos en este caso que el espacio $B \cup_\alpha e^n_\alpha$ se obtiene de B adjuntándole n-celdas (indexadas por el conjunto Λ).

Si $\Lambda = \emptyset$, $B \cup_\alpha e^n_\alpha = B$. Notar que los interiores de las n-celdas adjuntadas no se intersecan (las n-celdas adjuntadas solo se intersecan en el borde).



Por lo dicho al final de la sección anterior, si B es T_2, al adjuntar n-celdas sigue siendo T_2.

Definición 8.2.1. Sea X un espacio topológico. Una estructura de CW-complejo para X consiste un un filtración por subespacios:

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq X^{n+1} \subseteq \ldots \subseteq X$$

tal que:

1. X^0 es un subespacio discreto (y sus elementos se llaman 0-celdas).
2. Para todo n, X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntándole n-celdas (indexadas en cierto conjunto J_n).
3. $X = \bigcup\limits_{n \geq 0} X^n$ con la topología final (es decir $U \subseteq X$ es abierto si y solo si $U \cap X^n$ es abierto en X^n para todo $n \geq 0$).

Los subespacios X^n se llaman los n-esqueletos de X.

Definición 8.2.2. Un CW-complejo es un espacio topológico X que admite una estructura de CW-complejo.

En general, si un espacio admite una estructura de CW-complejo entonces admite infinitas estructuras de CW-complejos. Cuando hablemos de un CW-complejo X estaremos pensando en un espacio con una estructura de CW-complejo fijada.

Sea X un CW-complejo (con estructura fijada). Decimos que $\dim X = n$ si $X = X^n$ y $X \neq X^{n-1}$. Notar que, como X^0 es discreto (y en particular es T_2) y adjuntar celdas preserva la condición de Hausdorff, se ve inmediatamente que los CW-complejos de dimensión finita son T_2. En realidad, aunque la dimensión de X sea infinita, se puede probar que también es T_2.

Dejamos la demostración de los siguientes dos ejercicios (no triviales) a cargo del lector.

Proposición 8.2.3. Sea X un CW-complejo. Entonces X tiene la topología final respecto de sus celdas (cerradas) $\{e^n_\alpha \mid n \geq 0,\ \alpha \in J_n\}$.

Proposición 8.2.4. Un CW-complejo es finito (es decir tiene finitas celdas) si y solo si es compacto.

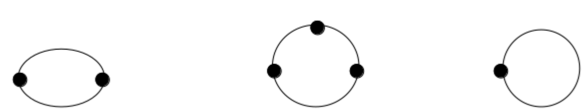
Dado un CW-complejo finito X (con estructura fija), se define la característica de Euler de X como

$$\chi(X) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$$

donde α_n es la cantidad de n-celdas de X.

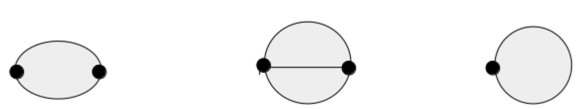
Ejemplos 8.2.5.

1. Algunas estructuras para $\mathbb{S}^1$



Notar que con todas las estructuras $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$

2. Algunas estructuras para $\mathbb{D}^2$:



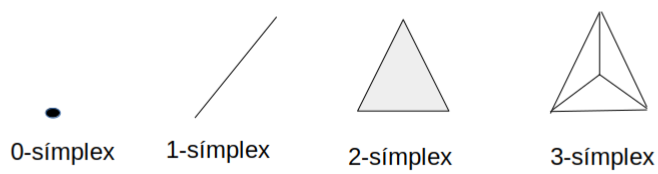
Notar que con todas las estructuras $\chi(\mathbb{D}^2) = 1$

En realidad vale que $\chi(X)$ no depende de la estructura elegida, es un invariante topológico y depede solo de la homología de X.

El Ejemplo 4 de la página 76 muestra como armar el toro con una 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda, con lo cual $\chi(T) = 0$.

8.3. Breve introducción a los complejos simpliciales

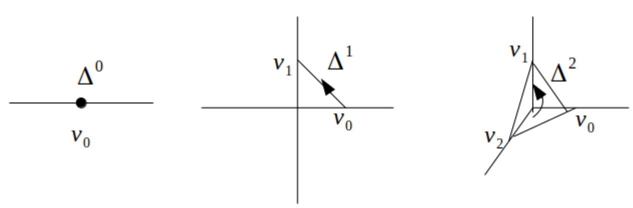
Sea $n \geq 0$. Un n-símplex (geométrico) σ en $\mathbb{R}^m$ (para algún $m \geq n$) es la cápsula convexa de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^m$ afínmente independientes, que se llaman vértices de σ.



Notar que los vértices $v_0, \dots, v_n$ de σ lo determinan, ya que $\sigma = \{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i \mid t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1\}$, pero también quedan determinados por σ. Entonces muchas veces identificamos a σ con el conjunto de sus vértices $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$.

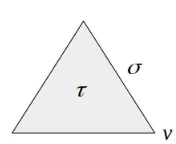
El n-símplex estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$ es

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$



Notar que los vértices de Δ^n son los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Los Δ^n aparecerán cuando veamos homología singular.

Si σ es un n-símplex, decimos que $\dim \sigma = n$. Dados dos símplices σ, τ, decimos que σ es cara de τ, y escribimos $\sigma \leq \tau$ si σ es la cápsula convexa de un subconjunto de vértices de τ.



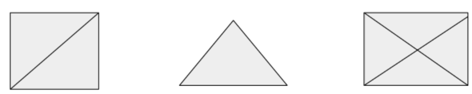
$\sigma, v \leq \tau$

Definición 8.3.1. Un complejo simplicial (finito) es la unión de finitos simplícies $K = \bigcup_{\sigma \in S_K} \sigma \subset \mathbb{R}^m$, tal que para todo par de símplices $\sigma, \tau \in S_K$, $\sigma \cap \tau = \emptyset$ o $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \tau$. La topología de K es la final con respecto a la familia de símplices que lo conforman, o equivalentemente (como son finitos cerrados de $\mathbb{R}^m$) es la de subespacio de $\mathbb{R}^m$.

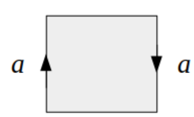
Un espacio topológico X se dice poliedro (compacto) si existe un complejo simplicial (finito) K tal que X es homeomorfo a K. A K (con la estructura simplicial inherente) se lo llama una triangulación de X.

Ejemplo 8.3.2. La figura que está a la izquierda no es una triangulación de un espacio (es decir, no es un complejo simplicial) porque $\sigma \cap \tau$ no es cara ni de σ ni de τ. La figura de la derecha es una triangulación del mismo espacio subyacente.

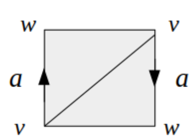
Ejemplos 8.3.3. 1. Triangulaciones de $\mathbb{D}^2$.



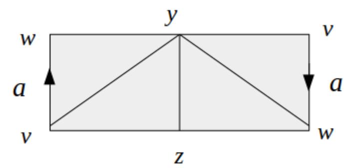
2. Busquemos una triangulación de la banda de Möbius, que es el espacio que se obtiene de $I \times I$ identificando los puntos de la forma $(0, t)$ con los de la forma $(1, 1 - t)$.



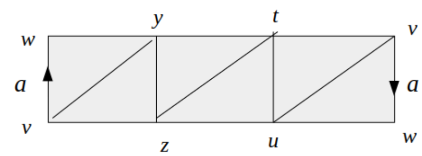
La siguiente NO es una triangulación de la banda de Möbius, ya que los triángulos en realidad no son triángulos (notar que no tienen 3 vértices distintos).



La siguiente TAMPOCO es una triangulación de la banda de Möbius, aunque todos son triángulos (es decir, es una triangulación de algún espacio) porque identifica más puntos que los que hay que identificar (hay dos triángulos que son el mismo).



La siguiente SÍ es una triangulación de la banda de Möbius.



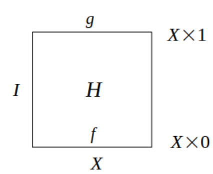
Capítulo 9

Homotopía y grupo fundamental

9.1. Homotopías

Recordemos que $I = [0,1]$ con la topología usual.

Definición 9.1.1. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Una homotopía de f a g es una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x),\ H(x,1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Denotamos $H : f \simeq g$.



Es decir, la homotopía H deforma continuamente la función f (que es lo que vale H en el instante de tiempo $t = 0$) en la función g (que es lo que vale H en el instante de tiempo $t = 1$).

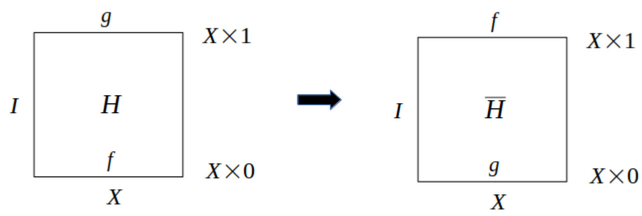
Decimos que f es homotópica a g (y denotamos $f \simeq g$) si existe alguna $H : X \times I \to Y$ homotopía de f a g.

Observación 9.1.2. Dada $H : X \times I \to Y$, $H : f \simeq g$, se tiene para todo instante de tiempo $t \in I$ una función continua $H_t : X \to Y$ definida por $H_t(x) = H(x,t)$, que es la deformación de la función inicial $f = H_0$ en el instante de tiempo t. Al llegar al instante $t = 1$, se tiene $H_1 = g$. Esto nos da una familia $\{H_t\}_{t \in I}$ de funciones continuas. Pero la homotopía $H : f \simeq g$ es continua en x y en t (no solo es tener la familia de las H_t continuas, sino que la deformación también es continua en la variable t).

Sean $i_0, i_1 : X \to X \times I$, $i_0(x) = (x,0),\ i_1(x) = (x,1)$ las inclusiones de X en las tapas del cilindro $X \times I$. Notar que una homotopía $H : f \simeq g$ es una función continua $H : X \times I \to Y$ tal que $Hi_0 = f,\ Hi_1 = g$.

Definición 9.1.3. Dada $H : f \simeq g$, definimos $\overline{H} : g \simeq f$ como $\overline{H}(x,t) = H(x, 1-t)$. Notar que $\overline{H}(x,0) = H(x,1) = g(x)$ y $\overline{H}(x,1) = H(x,0) = f(x)$. Es decir $\overline{H} : g \simeq f$.

Lo esquematizamos así:

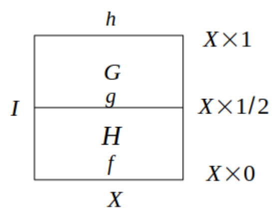


Definición 9.1.4. Dadas $f, g, h : X \to Y$ continuas y homotopías $H : f \simeq g$, $G : g \simeq h$, definimos la composición vertical de homotopías $H * G : X \times I \to Y$ como

$$H * G(x,t) = \begin{cases} H(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notar que $H * G$ está bien definida ($H(x,1) = G(x,0)$) y es continua por el lema de pegado para cerrados. Además $H * G(x,0) = H(x,0) = f(x)$ y $H * G(x,1) = G(x,1) = h(x)$ y por lo tanto $H * G : f \simeq h$.

Esquematizamos así



Lo que hace la homotopia $H * G$ es aplicar primero la deformación H al doble de velocidad y luego la G también al doble de velocidad.

Proposición 9.1.5. $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathrm{Hom}(X,Y)$ de funciones continuas de X a Y.

Demostración. Para ver que $f \simeq f$, tomamos $H(x,t) = f(x)$ $\forall t$. Esto prueba que es reflexiva.
Si $H : f \simeq g$, entonces $\overline{H} : g \simeq f$. Esto prueba que es simétrica.
Si $H : f \simeq g$, $G : g \simeq h$, entonces $H * G : f \simeq h$. Esto prueba transitividad.

□

Ejemplo 9.1.6. Sea $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio convexo (recordemos que esto significa que para todo par de puntos $a, b \in Y$, el segmento que los une $\{ta + (1-t)b \mid t \in I\}$ está contenido en Y). Dado X un espacio topológico y $f, g : X \to Y$ continuas, se tiene una homotopía $H : X \times I \to Y$ definida por $H(x,t) = tf(x) + (1-t)g(x)$. Notar que H está bien definida y es continua porque Y es subespacio convexo y $H : g \simeq f$.

Proposición 9.1.7. $\simeq$ se lleva bien con la composición de funciones. Es decir: dadas $f_0, f_1 : X \to Y$, $g_0, g_1 : Y \to Z$ continuas tal que $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, entonces $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.

Demostración. Como $\simeq$ es relación de equivalencia, por transitividad basta ver que si $f_0 \simeq f_1$ entonces $gf_0 \simeq gf_1$ y que si $g_0 \simeq g_1$ entonces $g_0 f \simeq g_1 f$.

Si $f_0 \simeq f_1$ entonces existe $H : X \times I \to Y$ tal que $H_0 = f_0,\ H_1 = f_1$. Dada $g : Y \to Z$ considero $G : X \times I \to Z$, $G = gH$. Es claro que $G : gf_0 \simeq gf_1$.

Supongamos ahora que tenemos $g_0 \simeq g_1 : Y \to Z$ y una $f : X \to Y$. Si $H : Y \times I \to Z$ es una homotopía $H : g_0 \simeq g_1$, entonces $G : X \times I \to Z$ definida por $G(x,t) = H(f(x),t)$ es una homotopía entre $g_0 f$ y $g_1 f$. Notar que G es continua ya que $G = H(f \times 1_I)$. □

Definición 9.1.8. Una equivalencia homotópica es una función continua $f : X \to Y$ tal que existe una función continua $g : Y \to X$ con $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$. Dados dos espacios X, Y, decimos que son homotópicamente equivalentes o que tienen el mismo tipo homotópico si existe alguna $f : X \to Y$ equivalencia homotópica. Denotamos en este caso $X \simeq Y$.

La equivalencias homotópicas son deformaciones de un espacio en otro. Dos espacios son homotópicamente equivalentes si se pueden deformar continuamente uno en el otro.

Ejemplos 9.1.9.

1. Si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces en particular es una equivalencia homotópica. En particular dos espacios homeomorfos son homotópicamente equivalentes.
2. La inclusión $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es una equivalencia homotópica. Una inversa homotópica es por ejemplo la función $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n$ definida por $r(x) = \frac{x}{||x||}$. Notar que $ri = 1_{\mathbb{S}^n}$ (en particular, $ri \simeq 1_{\mathbb{S}^n}$) y que $ir(x) = \frac{x}{||x||} \simeq 1_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$. Para ver que $\frac{x}{||x||} \simeq 1_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ podemos tomar $H : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $H(x,y) = tx + (1-t)\frac{x}{||x||}$, que está bien definida y es continua ya que $x \neq 0$.

Definición 9.1.10. Una función $f : X \to Y$ se dice null homotópica si es homotópica a la función constante c_y para algún $y \in Y$ (c_y denota la función constante y). Un espacio X se dice contráctil si es homotópicamente equivalente al singleton $*$.

Ejemplos 9.1.11.

1. Si $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio convexo entonces es contráctil.
2. El Peine (ver Ejemplos 4.1.10) es contráctil.

Dejamos la demostración del siguiente resultado a cargo del lector.

Proposición 9.1.12. Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:

1. X es contráctil.
2. $1_X : X \to X$ es null homotópica.
3. $1_X \simeq c_x$ para todo $x \in X$ (c_x es la función constante x).
4. Para todo espacio Z y para toda función continua $f : Z \to X$, $f \simeq c_x$ para todo $x \in X$.
5. Para todo espacio Z y para toda función continua $g : X \to Z$ existe algún $z \in Z$ tal que $g \simeq c_z$.

Veamos ahora el concepto de homotopía relativa que será de gran utilidad para entender los retractos por deformación fuerte y también para definir luego homotopías de caminos y lazos y el grupo fundamental.

Definición 9.1.13. Sea $A \subseteq X$ un subespacio y $f, g : X \to Y$ continuas tales que $f|_A = g|_A$. Decimos que f es homotópica a g relativo a A (y notamos $f \simeq g$ rel A) si existe una homotopía $H : f \simeq g$ tal que para todo instante de tiempo $t \in I$, $H_t|_A = f|_A = g|_A$ (es decir, $H(a,t) = f(a) = g(a)\ \forall a \in A$).

Lo que hace la homotopía relativa es deformar la f en la g dejando fijo a A en todo instante de tiempo.

Notar que $\simeq$ rel A es una relación de equivalencia.

Un caso particular de homotopia relativa es cuando A es un punto: Sea X un espacio y $x_0 \in X$. Dadas $f, g : X \to Y$ tales que $f(x_0) = g(x_0)$ denotamos $f \simeq g$ rel x_0 a $f \simeq g$ rel $\{x_0\}$.

Teorema 9.1.14. *Sea $f : \mathbb{S}^n \to X$ continua y sea $p_0 \in \mathbb{S}^n$. Son equivalentes:*

(i) f es null homotópica.

(ii) f se extiende continuamente al disco $\mathbb{D}^{n+1}$ (es decir existe $\widetilde{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ continua tal que $\widetilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$).

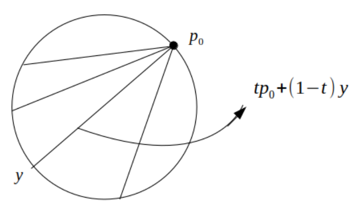
(iii) $f \simeq c$ rel p_0 (donde c es alguna función constante).

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como f es null homotópica, existe $x_0 \in X$ tal que $f \simeq c_{x_0}$. Sea $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$, $H : f \simeq c_{x_0}$. Definimos $\widetilde{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ como

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} x_0 & ||z|| \leq 1/2 \\ H(\frac{z}{||z||}, 2 - 2||z||) & 1/2 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Notar que $\widetilde{f}$ está bien definida y es continua (por el lema de pegado para cerrados) y $\widetilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Dada $\widetilde{f} : \mathbb{D}^{n+1} \to X$ tal que $\widetilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$, definimos $H : \mathbb{S}^n \times I \to X$ como $H(y, t) = \widetilde{f}(tP_0 + (1 - t)y)$. Notar que $H : f \simeq c$ rel p_0 donde la constante es $\widetilde{f}(p_0)$.



$(iii) \Rightarrow (i)$ es trivial por definición. □

Recordemos que un subespacio $A \subseteq X$ es un retracto si existe $r : X \to A$ continua tal que $r|_A = 1_A$ (equivalentemente, $ri = 1_A$ donde $i : A \to X$ es la inclusión).

Observación 9.1.15. Del teorema anterior deducimos que $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ es un retracto si y solo si la identidad $1_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ se extiende continuamente al disco $\mathbb{D}^{n+1}$ si y solo si $1_{\mathbb{S}^n}$ es null homotópica, es decir, si y solo si $\mathbb{S}^n$ es contráctil. Veremos más adelante que $\mathbb{S}^n$ no es contráctil y por lo tanto $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{D}^{n+1}$ no es un retracto.

Definición 9.1.16.

1. $A \subseteq X$ se dice retracto por deformación si existe $r : X \to A$ retracción (es decir $ri = 1_A$, donde $i : A \to X$ es la inclusión) tal que $ir \simeq 1_X$. Notar que en particular $A \simeq X$.

2. $A \subseteq X$ se dice retracto por deformación fuerte (abreviaremos rdf) si existe $r : X \to A$ retracción tal que $ir \simeq 1_X$ rel A.

Observación 9.1.17. Dado $x_0 \in X$, es fácil ver que $\{x_0\} \subseteq X$ es siempre un retracto (tomar $r = c_{x_0}$). Notar que $\{x_0\} \subseteq X$ es retracto por deformación si y solo si X es contráctil.

Ejemplos 9.1.18.

1. $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es rdf.
2. Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un convexo, entonces para todo $x \in C$, $\{x\} \subseteq C$ es rdf.
3. El peine P es contráctil y por lo tanto $\{(0,1)\} \subset P$ es retracto por deformación, pero $\{(0,1)\} \subset P$ no es rdf (Ejercicio).

9.2. Grupoide fundamental y grupo fundamental

Recordemos primero que, dado un espacio X y dados $x, y \in X$, un camino de x a y es una función continua $\omega : I \to X$ tal que $\omega(0) = x,\ \omega(1) = y$. Lo denotamos $x \xrightarrow{\omega} y$. Si tenemos un camino $x \xrightarrow{\omega} y$ y un camino $y \xrightarrow{\omega'} z$, se tiene la composición o producto de caminos $\omega * \omega'$ que es un camino de x a z, donde

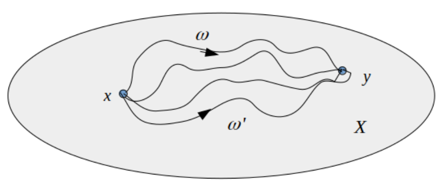
$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \omega'(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

Recordemos también que dado w camino de x a y se tiene el camino inverso $\overline{\omega}$ de y a x definido por $\overline{\omega}(t) = \omega(1-t)$.

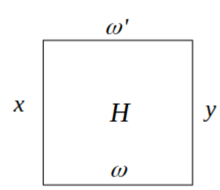
Dado $x \in X$ denotamos con $c_x : I \to X$ al camino constante $c_x(t) = x\ \forall t \in I$.

Notemos primero que en general $\omega * \overline{\omega} \neq c_x$, $(\omega * \omega') * \omega'' \neq \omega * (\omega' * \omega'')$ y $\omega * c_x \neq \omega$.

Definición 9.2.1. Dados dos caminos ω, ω' de x a y, decimos que ω y ω' son homotópicos como caminos si $\omega \simeq \omega'$ rel $\{0,1\}$. Es decir, existe $H : I \times I \to X$ tal que: $H(s,0) = \omega(s),\ H(s,1) = \omega'(s),\ H(0,t) = x\ \forall t,\ H(1,t) = y\ \forall t$.



Lo esquematizamos así:



Denotamos $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ cuando son homotópicos como caminos.

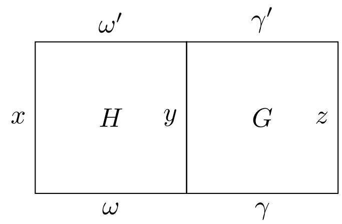
Observación 9.2.2. $\underset{p}{\simeq}$ es una relación de equivalencia en el conjunto de caminos de x a y.

Proposición 9.2.3. $\underset{p}{\simeq}$ se lleva bien con la composición de caminos. Es decir, si ω, ω' son caminos de x a y y γ, γ' son caminos de y a z y $\omega \underset{p}{\simeq} \omega',\ \gamma \underset{p}{\simeq} \gamma'$, entonces $\omega * \gamma \underset{p}{\simeq} \omega' * \gamma'$.

Demostración. Sean $H : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, $G : \gamma \underset{p}{\simeq} \gamma'$. Consideramos la composición horizontal de homotopías de caminos $H + G : I \times I \to X$ definida por:

$$H + G(s,t) = \begin{cases} H(2s,t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s-1,t) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esquematizamos así:



Notar que $H+G$ está bien definida y es continua (por lema de pegado para cerrados) y cumple $H + G(s,0) = \omega * \gamma,\ H + G(s,1) = \omega' * \gamma',\ H + G(0,t) = x,\ H + G(1,t) = z.$ □

Ahora ya estamos en condiciones de definir el grupoide fundamental y el grupo fundamental, pero primero entendamos bien cuál es la estructura algebraica detrás de esto. Es decir, estudiemos en general a los grupoides y sus propiedades básicas.

Definición 9.2.4. Un grupoide $\mathcal{G}$ consiste de:

(1) Un conjunto $Obj(\mathcal{G})$ de objetos.

(2) Para todo $a, b \in Obj(\mathcal{G})$ un conjuntos de morfismos o flechas de a a b denotado $\mathcal{G}(a,b)$.

(3) Una regla de composición o producto para todo $a, b, c \in Obj(\mathcal{G})$:

$$* : \mathcal{G}(a,b) \times \mathcal{G}(b,c) \to \mathcal{G}(a,c)$$

que cumple

(i) Asociatividad: $\omega * (\omega' * \omega'') = (\omega * \omega') * \omega''$.

(ii) Identidades: $\forall a \in Obj(\mathcal{G})$ existe $e_a \in \mathcal{G}(a,a)$ tal que $\omega * e_a = \omega$ para todo $\omega \in \mathcal{G}(b,a)$ (para todo b), y $e_a * \omega = \omega$ para todo $\omega \in \mathcal{G}(a,b)$ (para todo b).

(iii) Inversos: $\forall \omega \in \mathcal{G}(a,b),\ \exists\, \overline{\omega} \in \mathcal{G}(b,a)$ tal que $\omega * \overline{\omega} = e_a$ y $\overline{\omega} * \omega = e_b$.

Vamos a introducir algo de notación. Dado un grupoide $\mathcal{G}$ y dado $a \in Obj(\mathcal{G})$, denotamos $\mathcal{G}_a$ al conjunto $\mathcal{G}(a,a)$ (flechas de a a a). Notar que $(\mathcal{G}_a, *)$ es un grupo (con la composición heredada de $\mathcal{G}$) donde e_a es el neutro y $\overline{\omega}$ es el inverso de ω. De hecho, todo grupo G se puede ver como un grupoide $\mathcal{G}$ con un único objeto 0, donde $\mathcal{G}_0 = G$ con la composición dada por el producto de G.

Un grupoide $\mathcal{G}$ se dice conexo si para todo par de objetos $a, b \in Obj(\mathcal{G})$ existe alguna flecha entre ellos, es decir $\mathcal{G}(a,b) \neq \emptyset$. $\mathcal{G}$ se dice simplemente conexo si para todo $a, b \in Obj(\mathcal{G})$, $\mathcal{G}(a,b)$ tiene exactamente un elemento.

Estudiemos ahora la conjugación en grupoides, que será necesaria luego para entender por qué el grupo fundamental de un espacio arco-conexo no depende (salvo isomorfismos) del punto base elegido.

Sea $\mathcal{G}$ un grupoide, sean $a, b \in Obj(\mathcal{G})$ y sea $\omega \in \mathcal{G}(a, b)$. Se tiene un isomorfismo de grupos (llamado "conjugación por ω"): $\hat{\omega} : \mathcal{G}_a \to \mathcal{G}_b$ definido por $\hat{\omega}(\alpha) = \overline{\omega} * \alpha * \omega$. Notar que $\hat{\omega}^{-1} = \hat{\overline{\omega}}$. En particular, si $\mathcal{G}$ es conexo, todos los grupos $\mathcal{G}_a$ son isomorfos para todo $a \in Obj(\mathcal{G})$.

Más generalmente, si $\alpha \in \mathcal{G}(a, a')$ y $\beta \in \mathcal{G}(b, b')$ se tiene una biyección de conjuntos $\varphi : \mathcal{G}(a, b) \to \mathcal{G}(a', b')$ dada por $\varphi(\omega) = \overline{\alpha} * \omega * \beta$.

Dejamos la demostración del siguiente resultado como ejercicio.

Proposición 9.2.5. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide y sean $a, b \in Obj(\mathcal{G})$ tales que $\mathcal{G}(a, b) \neq \emptyset$. Entonces $\mathcal{G}_a$ es un grupo abeliano si y solo si $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{G}(a, b),\ \hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

Definición 9.2.6. Sean $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ grupoides. Un morfismo de grupoides $F : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ le asigna a cada $a \in Obj(\mathcal{G})$ un objeto $F(a) \in Obj(\mathcal{H})$ y a cada $\omega \in \mathcal{G}(a, b)$ una $F(\omega) \in \mathcal{H}(F(a), F(b))$ tal que $F(e_a) = e_{F(a)}$ para todo $a \in Obj(\mathcal{G})$ y $F(\omega * \omega') = F(\omega) * F(\omega')$.

Observar que si G y H son grupos vistos como grupoides con un solo objeto $\mathcal{G}, \mathcal{H}$, entonces un morfismo de grupos de G a H es lo mismo que un morfismo de grupoides de $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$.

Ahora definimos el grupoide fundamental de un espacio.

Definición 9.2.7. Sea X un espacio topológico. Se define el grupoide fundamental de X como el grupoide $\pi_1(X)$ cuyos objetos son $Obj(\pi_1(X)) = X$ (los objetos son los puntos de X) y para cada $x, y \in X$ las flechas de x a Y son:

$$\pi_1(X, x, y) = \{[\omega] \mid \omega \text{ camino de } x \text{ a } y\}$$

donde $[\omega]$ denota la clase del camino ω por la relación de equivalencia $\underset{p}{\simeq}$, es decir $[\omega] = [\omega']$ si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. La composición o producto en el grupoide $\pi_1(X)$ está dada por la composición de caminos:

$$* : \pi_1(X, x, y) \times \pi_1(X, y, z) \to \pi_1(X, x, z)$$

$[\omega] * [\omega'] := [\omega * \omega']$. Notar que la composición está bien definida en las clases por la Proposición 9.2.3.

Para verificar que efectivamente $\pi_1(X)$ es un grupoide tenemos que chequear que:

1. Existen identidades: para todo $x \in X$ existe $e_x \in \pi_1(X, x, x)$ tal que $[\omega] * e_x = [\omega]$ y $e_x * [\omega] = [\omega]$.
2. Asociatividad: $([\omega] * [\omega']) * [\omega''] = [\omega] * ([\omega'] * [\omega''])$.
3. Inversos: $\forall [\omega]\ \exists\ \overline{[\omega]}$ tal que $[\omega] * \overline{[\omega]} = e_x$, $\overline{[\omega]} * [\omega] = e_y$.

Estas tres propiedades se deducirán inmediatamente del siguiente teorema, tomando $e_x = [c_x]$ donde c_x es el camino constante x, y $\overline{[\omega]} = [\overline{\omega}]$.

Teorema 9.2.8. *Sea X un espacio topológico. Dados $x \xrightarrow{\omega} y$, $y \xrightarrow{\omega'} z$, $z \xrightarrow{\omega''} u$ caminos en X. Entonces:*

(i) $c_x * \omega \underset{p}{\simeq} \omega$, $\omega * c_y \underset{p}{\simeq} \omega$ *(donde c_x es el camino constante x).*

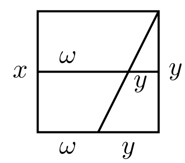
(ii) $(\omega * \omega') * \omega'' \underset{p}{\simeq} \omega * (\omega' * \omega'')$.

(iii) $\omega * \overline{\omega} \underset{p}{\simeq} c_x$, $\overline{\omega} * \omega \underset{p}{\simeq} c_y$.

Demostración. (i) Veamos que $\omega * c_y \underset{p}{\simeq} \omega$. Para eso definimos $H : I \times I \to X$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} \omega(\frac{2s}{t+1}) & 0 \le s \le \frac{t+1}{2} \\ y & \frac{t+1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

El siguiente es el equema de la homotopía definida, notar que para cada instante de tiempo t recorremos ω reparametrizado para que termine en la recta $s = \frac{t+1}{2}$ y luego seguimos con el camino constante y hasta $s = 1$:

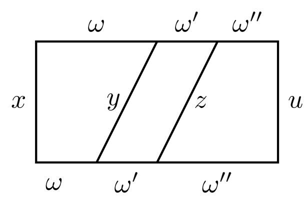


Notar que $H : \omega * c_y \underset{p}{\simeq} \omega$.

(ii) Definimos $H : I \times I \to X$ como

$$H(s,t) = \begin{cases} \omega(\frac{4s}{t+1}) & 0 \le s \le \frac{t+1}{4} \\ \omega'(4(s - \frac{t+1}{4})) & \frac{t+1}{4} \le s \le \frac{t+2}{4} \\ \omega''((\frac{4}{2-t})(s - \frac{t+2}{4})) & \frac{t+2}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

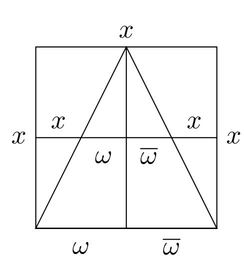
En esta caso la homotopía en el instante t recorre ω, ω' y ω'' a velocidades que varían proporcionalmente. El esquema de la homotopía es el siguiente:



(iii) Veamos que $\omega * \overline{\omega} \underset{p}{\simeq} c_x$. En esta caso, la homotopía $H : I \times I \to X$ recorre proporcionalmente con el tiempo, al camino constante x, luego recorre ω y $\overline{\omega}$ truncados (se van cancelando proporcionalmente al tiempo t) y termina nuevamente con el camino constante x. Concretamente:

$$H(s,t) = \begin{cases} x & 0 \le s \le t/2 \\ \omega(2s - t) & t/2 \le s \le 1/2 \\ \omega(2 - 2s - t) & 1/2 \le s \le 1 - t/2 \\ x & 1 - t/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

El esquema de la homotopía es:



□

Hemos probado entonces que $\pi_1(X)$ es un grupoide. Ahora bien, dado $x_0 \in X$, se tiene el grupo $\pi_1(X, x_0, x_0)$ de las clases (módulo $\underset{p}{\simeq}$) de caminos de x_0 a x_0, donde el producto es la (clase de la) composición de caminos. A este grupo lo denotamos simplemente $\pi_1(X, x_0)$ y se llama el "grupo fundamental de X con punto base x_0". Sus elementos entonces son clases de caminos de x_0 a x_0. A los caminos de x_0 a x_0 los llamaremos de ahora en más "lazos en x_0", y dados dos lazos ω, ω', $[\omega] = [\omega']$ si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$.

Por las definiciones y propiedades que vimos para grupoides (en general), deducimos las siguientes observaciones:

Observación 9.2.9. X es un espacio arco-conexo si y solo si $\pi_1(X)$ es grupoide conexo.

Observación 9.2.10. Dados $x, y \in X$ y un camino $x \xrightarrow{\alpha} y$, se tiene un isomorfismo de grupos:

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$$

definido por $\hat{\alpha}([\omega]) = [\overline{\alpha} * \omega * \alpha]$ (la conjugación por α). El inverso es $\hat{\overline{\alpha}}$ (la conjugación por el inverso de α). En particular, si X es arco-conexo, para todo $x, y \in X$ se tiene que $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos.

Definición 9.2.11. Un espacio X se dice simplemente conexo si es arco-conexo y $\pi_1(X, x) = 0$ (el grupo trivial) para algún (= para todo) $x \in X$.

Dejamos como ejercicio para el lector verificar el siguiente resultado:

Proposición 9.2.12. X es simplemente conexo si y solo si el grupoide fundamental $\pi_1(X)$ es simplemente conexo.

Definición 9.2.13. Sea $f : X \to Y$ continua y $x \xrightarrow{\omega} x'$ camino en X, entonces $f\omega : I \to Y$ es un camino $f(x) \xrightarrow{f\omega} f(x')$ en Y. Además, es claro que, si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, entonces $f\omega \underset{p}{\simeq} f\omega'$. Por lo tanto para todo $x, x' \in X$ se tiene una función

$$f_* : \pi_1(X, x, x') \to \pi_1(Y, f(x), f(x'))$$

definida por $f_*([\omega]) = [f\omega]$. Además $f(\omega * \omega') = f\omega * f\omega'$ y por lo tanto $f_*([\omega] * [\omega']) = f_*([\omega]) * f_*([\omega'])$. Esto nos dice que $f : X \to Y$ induce un morfismo de grupoides $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$. En los objetos $f_*(x) = f(x)$ y en las flechas $f_*([\omega]) = [f\omega]$.

Observar que, dadas dos funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, se tiene que $(gf)_* = g_* f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Z)$. Además si consideramos la identidad $1_X : X \to X$, $(1_X)_* = 1_{\pi_1(X)} : \pi_1(X) \to \pi_1(X)$. Y por estas propiedades funtoriales, se deduce entonces que si $f : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es un isomorfismo de grupoides.

A nivel de los grupos fundamentales: dada una función continua $f : X \to Y$, sabemos que $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es un morfismo de grupoides, y en particular para cada $x \in X$ se tiene un morfismo de grupos

$$f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$$

dado por $f_*([\omega]) = [f\omega]$ y si f es homeomorfismo, entonces para todo $x \in X$, el morfismo $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo de grupos.

Observación 9.2.14. Sea X un espacio y $C \subseteq X$ una componente arco-conexa de X. Dado $x \in C$, el morfismo $i_* : \pi_1(C, x) \to \pi_1(X, x)$ inducido por la inclusión $i : C \to X$ es un isomorfismo. Para ver esto, notar que como I es arco conexo, todo lazo en x de X cae en realidad en C y esto dice que i_* es sobreyectiva. Como $I \times I$ es arco-conexo, toda homotopía de caminos entre lazos en x cae en realidad en C y por lo tanto i_* es inyectiva (si dos lazos son homotópicos en X, también lo son en C).

Estudiaremos ahora con más detalle qué pasa con las funciones, las homotopías y los grupos fundamentales cuando cambiamos el punto base x. Observemos primero que la notación $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ puede ser confusa ya que f_* no especifica el punto base x. Si tomamos otro punto base $x' \in X$, también denotamos $f_* : \pi_1(X, x') \to \pi_1(Y, f(x'))$ aunque en realidad es otra función (ya que tiene otro dominio y codominio). Cuando querramos distinguir una de otra, las notaremos f_*^x y $f_*^{x'}$.

Ejercicio 9.2.15. Sea $f : X \to Y$ continua. Dados $x, x' \in X$ y un camino $x \xrightarrow{\alpha} x'$, probar que se tiene un diagrama conmutativo de morfimos de grupos:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*^x"] \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \pi_1(Y, f(x)) \arrow[d, "\hat{f\alpha}"] \\
\pi_1(X,x') \arrow[r, "f_*^{x'}"] & \pi_1(Y, f(x'))
\end{tikzcd}$$

donde $\hat{\alpha}$ y $\hat{f\alpha}$ son las conjugaciones correspondientes a α y $f\alpha$.

Supongamos ahora que tenemos $f, g : X \to Y$ con $f \simeq g$. ¿Qué pasa con f_* y g_*? Uno pensaría que $f_*([\omega]) = [f\omega] = [g\omega] = g_*([\omega])$ pero el problema es que $[f\omega]$ y $[g\omega]$ “viven” en lugares distintos. Si $x \in X$ y $[\omega] \in \pi_1(X, x)$, entonces $[f\omega] \in \pi_1(Y, f(x))$ y $[g\omega] \in \pi_1(Y, g(x))$. Si $f(x) \neq g(x)$, no son el mismo grupo. Lo que dice la siguiente proposición es que igual se pueden relacionar.

Proposición 9.2.16. Sean $f, g : X \to Y$ continuas tales que $f \simeq g$. Sea $x \in X$ y sea $H : f \simeq g$ una homotopía de f a g. Consideremos el camino $\alpha = H_x : I \to Y$, $\alpha(t) = H(x, t)$ (notar que $f(x) \xrightarrow{\alpha} g(x)$). Entonces se tiene un diagrama conmutativo de morfismos de grupos

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,x) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(x)) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\
 & \pi_1(Y, g(x))
\end{tikzcd}$$

Es decir $g_*([\omega]) = \hat{\alpha} f_*([\omega])$ y por lo tanto f_* y g_* “ difieren” solo en la conjugación $\hat{\alpha}$.

Demostración. Sea ω un lazo en x (es decir $[\omega] \in \pi_1(X, x)$). Debemos ver que $[g\omega] = [\overline{\alpha} * f\omega * \alpha]$, o equivalentemente, que $g\omega \underset{p}{\simeq} \overline{\alpha} * f\omega * \alpha$. Para eso definimos para cada $t \in I$ fijo el camino $\overline{\alpha_t} : I \to Y$ como $\overline{\alpha_t}(s) = \overline{\alpha}((1-t)s)$.

Notar que $\overline{\alpha_t}(0) = \overline{\alpha}((1-t)0) = \alpha(1) = g(x)$ y $\overline{\alpha_t}(1) = \alpha(t)$. Es decir que para cada t fijo, $g(x) \xrightarrow{\overline{\alpha_t}} \alpha(t)$.

Definimos $G : I \times I \to Y$ como $G(s, t) = (\overline{\alpha_t} * H_t\omega * \alpha_t)(s)$ (recordar que $H_t : X \to Y$, $H_t(x) = H(x, t)$). Donde α_t denota el camino inverso al $\overline{\alpha_t}$ que definimos antes. Notar que G es continua por ley exponencial ya que para todo t la función $\overline{\alpha_t} * H_t\omega * \alpha_t$ es continua.

Notar también que G está bien definida, es decir $\overline{\alpha_t} * H_t\omega * \alpha_t$ está bien definido ya que $\overline{\alpha_t}(1) = \alpha(t) = H_t\omega(0)$ y $H_t\omega(1) = H_t(x) = \alpha(t) = \alpha_t(0)$.

Veamos que $G : \overline{\alpha} * f\omega * \alpha \underset{p}{\simeq} c_{g(x)} * g\omega * c_{g(x)}$:

$$\begin{aligned} G(s,0) &= (\overline{\alpha_0} * H_0\omega * \alpha_0)(s) = (\overline{\alpha} * f\omega * \alpha)(s) \\ G(s,1) &= (\overline{\alpha_1} * H_1\omega * \alpha_1)(s) = (c_{g(x)} * g\omega * c_{g(x)})(s) \\ G(0,t) &= (\overline{\alpha_t} * H_t\omega * \alpha_t)(0) = \overline{\alpha_t}(0) = g(x) \\ G(1,t) &= (\overline{\alpha_t} * H_t\omega * \alpha_t)(1) = \alpha_t(1) = g(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto $G : \overline{\alpha} * f\omega * \alpha \underset{p}{\simeq} c_{g(x)} * g\omega * c_{g(x)}$. Pero como $c_{g(x)} * g\omega * c_{g(x)} \underset{p}{\simeq} g\omega$, tenemos que $\overline{\alpha} * f\omega * \alpha \underset{p}{\simeq} g\omega$. □

Corolario 9.2.17. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $f_*^x : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, f(x))$ es un isomorfismo para todo $x \in X$.

Demostración. Sea $g : Y \to X$ una inversa homotópica de f ($fg \simeq 1_Y$, $gf \simeq 1_X$). Sea $H : gf \simeq 1_X$. Dado $x \in X$, consideremos $\alpha = H_x$, $gf(x) \xrightarrow{\alpha} x$. Por la proposición anterior tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x) \arrow[r, "g_*^{f(x)} f_*^x"] \arrow[dr, "1_{X*}"'] & \pi_1(X, gf(x)) \arrow[d, "\hat{\alpha}"] \\ & \pi_1(X,x) \end{tikzcd}$$

Como $(1_X)_*$ y $\hat{\alpha}$ con isomorfismos, deducimos que $g_*^{f(x)} f_*^x$ es un isomorfismo y en particular $g_*^{f(x)}$ es epismorfismo y f_*^x es un monomorfismo.

Ahora tomamos $G : fg \simeq 1_Y$, y sea $\beta = G_{f(x)}$. Nuevamente por la proposición anterior, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y,f(x)) \arrow[r, "f_*^{gf(x)} g_*^{f(x)}"] \arrow[dr, "1_{Y*}"'] & \pi_1(Y, fgf(x)) \arrow[d, "\hat{\beta}"] \\ & \pi_1(Y,f(x)) \end{tikzcd}$$

Como $(1_Y)_*$ y $\hat{\beta}$ con isomorfismos, deducimos que $f_*^{gf(x)} g_*^{f(x)}$ es un isomorfismo y en particular $g_*^{f(x)}$ es monomorfismo. Pero como también vimos que $g_*^{f(x)}$ es epimorfismo, entonces $g_*^{f(x)}$ es un isomorfismo y por lo tanto f_*^x es un isomorfismo. □

Corolario 9.2.18. Si X es un espacio contráctil, en particular es simplemente conexo.

Capítulo 10

Fibraciones y revestimientos

10.1. Fibraciones y levantamientos de caminos

Dada una función continua $p : E \to B$ y dado $b \in B$, denotaremos con E_b a la fibra, $E_b = p^{-1}(b) \subseteq E$ con la topología del subespacio. Observar que $E_b \neq \emptyset$ si y solo si $b \in p(E)$.

Definición 10.1.1. Sean $p : E \to B$ y $f : X \to B$ funciones continuas. Decimos que f se levanta a E si existe $\widetilde{f} : X \to E$ continua tal que $p\widetilde{f} = f$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\exists\ \widetilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Notar que si no le pidiéramos continuidad a la función $\widetilde{f}$, bastaría que p fuese sobreyectiva para que cualquier f se levante a E (eligiendo cualquier punto en la fibra). Pero al pedirle continuidad, incluso cuando $p : E \to B$ es sobreyectiva, puede pasar que no exista levantado. Las fibraciones son funciones continuas $p : E \to B$ que tienen la propiedad de levantar homotopías con una condición inicial.

Definición 10.1.2. Una función continua $p : E \to B$ se dice fibración si para todo espacio topológico X, toda función continua $f : X \to E$ y toda homotopía $H : X \times I \to B$ tal que $H_0 = pf$, existe $G : X \times I \to E$ continua tal que $pG = H$ y $G_0 = f$ (es decir, se puede levantar la homotopía H a una homotopía G con la condición inicial $G_0 = f$). En términos de diagramas, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, phantom, "=" near start] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[ur, dotted, "\exists G"] \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, phantom, "=" near end] & B \end{tikzcd}$$

Al espacio E se lo llama “espacio total” y a B “espacio base”.

Ejemplo 10.1.3. Dados B, Y espacios topológicos. La proyección $p_B : E = B \times Y \to B$ es una fibración. Para ver esto, dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & B \times Y \arrow[d, "p_B"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Definimos $G : X \times I \to B \times Y$ de la siguiente manera: notar que $f = (f_1, f_2)$ donde $f_1 = H_0$, si tomamamos $G = (H, f_2 p_X)$, donde $p_X : X \times I \to X$ es la proyección, se tiene que $p_B G = H$ y $G_0 = f$.

Veamos algunas propiedades básicas de las fibraciones.

Proposición 10.1.4. Sea $p : E \to B$ una fibración. Sean $f, g : X \to B$ continuas tales que $f \simeq g$. Entonces f se levanta a E si y solo si g lo hace. Además, en ese caso, se pueden conseguir levantados $\widetilde{f}, \widetilde{g} : X \to E$ tales que $\widetilde{f} \simeq \widetilde{g}$.

Demostración. Sea $H : f \simeq g$. Supongamos que f se levanta a E, veamos que podemos levantar g. Sea $\widetilde{f} : X \to E$ levantado de f. Por definición de fibración existe $G : X \times I \to E$ continua que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\exists G"] & B \end{tikzcd}$$

Definimos $\widetilde{g} = G_1 : X \to E$, es decir $\widetilde{g}(x) = G(x, 1)$. Notar que $p\widetilde{g} = pG_1 = H_1 = g$ y por lo tanto es un levantado de g. Además $G : \widetilde{f} \simeq \widetilde{g}$ (es decir, conseguimos un levantado que además es homotópico al levantado $\widetilde{f}$). $\square$

Observación 10.1.5. Que $p : E \to B$ sea una fibración NO implica que si se tienen $f, g : X \to E$ tales que $pf \simeq pg$ entonces $f \simeq g$.

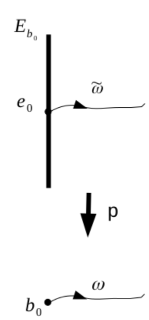
Dejamos la demostración del siguiente resultado como ejercicio.

Proposición 10.1.6. 1. Los homeomorfismos son fibraciones.

2. La composición de fibraciones es una fibración.

3. Las fibraciones son estables por cambio de base.

Proposición 10.1.7. Sea $p : E \to B$ una fibración, sea $b_0 \in B$ y $e_0 \in E_{b_0}$. Sea ω un camino en B que comienza en b_0 ($\omega : I \to B,\ \omega(0) = b_0$). Entonces existe un camino $\widetilde{\omega}$ en E que comienza en e_0 y que levanta a ω, es decir $p\widetilde{\omega} = \omega$.



Demostración. Sale inmediatamente de la definición de fibración aplicada a $X = *$ (singleton):

$$\begin{tikzcd} * \arrow[r, "c_{e_0}"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ * \times I \arrow[r, "\omega"] \arrow[ur, dotted, "\exists\, \widetilde{\omega}"] & B \end{tikzcd}$$

$\square$

Notar que el levantado $\widetilde{\omega}$ no es en general único. Por ejemplo, tomando la fibración $E \to *$ (donde E es cualquier espacio), todo camino en E es un levantado del camino constante.

Definición 10.1.8. Decimos que una función continua $p : E \to B$ tiene la LUC ("propiedad de levantamiento único de caminos") si para todo $b_0 \in B$, para todo $e_0 \in E_{b_0}$ y para todo camino ω en B que comienza en b_0, existe un único camino $\widetilde{\omega}$ en E que empieza en e_0 y que levanta a ω (es decir, $p\widetilde{\omega} = \omega$).

En general las fibraciones no tienen la LUC.

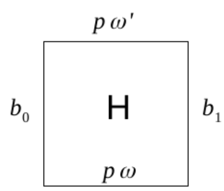
Observación 10.1.9. Supongamos que $p : E \to B$ tiene la LUC y ω, ω' son caminos en E tales que $\omega(0) = \omega'(0)$ y $p\omega = p\omega'$. Entonces $\omega = \omega'$. Esto se deduce inmediatamente de la definición de LUC ya que ω y ω' son levantados del mismo camino $p\omega = p\omega'$ y empiezan en el mismo punto.

Lema 10.1.10. Si $p : E \to B$ tiene la LUC, $b_0 \in B$ y ω es es un camino que cae en E_{b_0}, entonces ω es constante.

Demostración. Sea $e_0 = \omega(0)$. Como ω es un camino en E_{b_0} entonces $p\omega = c_{b_0}$ (constante). Pero c_{e_0} es levantado de c_{b_0} y $c_{e_0}(0) = e_0 = \omega(0)$. Por la observación anterior, $\omega = c_{e_0}$. $\square$

Teorema 10.1.11. *Sea $p : E \to B$ una fibración con LUC (=fibración que además tiene la LUC). Sean ω, ω' caminos en E tales que $\omega(0) = \omega'(0) = e_0$ y $p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega'$. Entonces $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ y en particular $\omega(1) = \omega'(1)$.*

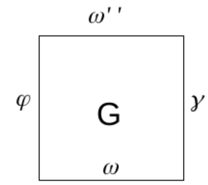
Demostración. Sea $H : p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega'$. Esquematizamos H:



Consideramos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Como p es fibración, existe $G : I \times I \to E$ tal que $G_0 = \omega$ y $pG = H$. Notar que, a priori, esta función G es una homotopía de funciones, nosotros buscamos una homotopía de caminos. Sea $\omega'' = G_1 : I \to E$. Sean $\varphi : I \to E,\ \varphi(t) = G(0,t)$ y $\gamma : I \to E,\ \gamma(t) = G(1,t)$. Esquematizamos G:



Ahora bien, $p\varphi(t) = pG(0,t) = H(0,t) = b_0$ $\forall t$. Por el lema previo, como p tiene la LUC y φ cae en E_{b_0}, se tiene que φ es constante, y como $\varphi(0) = G(0,0) = \omega(0) = e_0$, entonces $\varphi = c_{e_0}$. De la misma manera, $p\gamma = c_{b_1}$ y por lo tanto $\gamma = c_{e_1}$ para algún e_1. Entonces $G : \omega \underset{p}{\simeq} \omega''$.

Por otro lado, $p\omega'' = pG_1 = H_1 = p\omega'$ y $\omega''(0) = \omega(0) = \omega'(0) = e_0$. Por la observación previa, $\omega'' = \omega'$. Esto prueba que en realidad $G : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. □

Corolario 10.1.12. Sea $p : E \to B$ fibración con LUC. Sea $b_0 \in B$ y $e_0 \in E_{b_0}$. Entonces $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es monomorfismo.

Demostración. Sean $[\omega], [\omega'] \in \pi_1(E, e_0)$ tales que $p_*([\omega]) = p_*([\omega'])$. Entonces $p\omega \underset{p}{\simeq} p\omega'$ y como $\omega(0) = \omega'(0) = e_0$, por el teorema anterior $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$, es decir $[\omega] = [\omega']$. □

Corolario 10.1.13. Sea $p : E \to B$ fibración con LUC. Sea $b_0 \in B$ y $e_0 \in E_{b_0}$. Entonces existe una función bien definida $\varphi_{e_0} : \pi_1(B, b_0) \to E_{b_0}$, $\varphi_{e_0}([\omega]) = \widetilde{\omega}(1)$, donde $\widetilde{\omega}$ es el único levantado de ω a partir de e_0.

Demostración. Para ver que φ_{e_0} está bien definida veamos primero que $\widetilde{\omega}(1) \in E_{b_0}$, pero esto vale ya que $p\widetilde{\omega} = \omega$ y $\omega(1) = b_0$. Luego debemos ver que la función no depende del representante ω elegido. Concretamente, si $[\omega] = [\omega']$, debemos ver que $\widetilde{\omega}(1) = \widetilde{\omega'}(1)$. Pero como $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ y $\widetilde{\omega}(0) = \widetilde{\omega'}(0) = e_0$, por el teorema anterior $\widetilde{\omega} \underset{p}{\simeq} \widetilde{\omega'}$ y en particular $\widetilde{\omega}(1) = \widetilde{\omega'}(1)$. □

Antes de probar el teorema más importante de esta sección, recordemos definiciones básicas de acciones de grupos sobre conjuntos.

Sea G un grupo y S un conjunto. Una acción a derecha de G en S es una función $\phi : S \times G \to S$, $\phi(s, g) = s.g$, tal que $s1 = s$ para todo $s \in S$ y $s(gh) = (sg)h$ para todo $s \in S$ y $g, h \in G$ (1 denota el neutro del grupo G).

Si G actúa a derecha sobre S y $x \in S$, la órbita de x es el conjunto $O_x = \{xg \mid g \in G\}$. Decimos que la acción es transitiva si $O_x = S$ para algún (= para todo) $x \in S$. Equivalentemente, si para todo $x, y \in S$, existe $g \in G$ tal que $xg = y$.

Dado $x \in S$, el grupo de isotropía (ó estabilizador) es $G_x = \{g \in G \mid xg = x\} \leq G$. Se tiene que el conjunto de coclases a derecha G/G_x está en biyección con O_x. Concretamente, se tiene una biyección $\varphi : G/G_x \to O_x$ dada por $\varphi(G_x.a) = xa$. En particular, si la acción es transitiva se tiene una biyección $G/G_x \equiv S$.

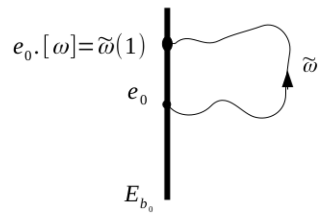
Ahora sí estamos en condiciones de probar el resultado más importante de esta sección. Este teorema será utilizado para el caso particular de los revestimientos y nos permitirá calcular el grupo fundamental de espacios conocidos.

Teorema 10.1.14. *Sea $p : E \to B$ fibración con LUC. Sea $b_0 \in B$ tal que $E_{b_0} \neq \emptyset$. Entonces $\pi_1(B, b_0)$ actúa a derecha en E_{b_0} vía $e_0.[\omega] = \widetilde{\omega}(1)$ donde $\widetilde{\omega}$ es el levantado de ω a partir de e_0. Más aún, si E es arco-conexo, la acción es transitiva y por lo tanto, para todo $e_0 \in E_{b_0}$ se tiene una biyección*

$$\varphi_{e_0} : \pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0)) \to E_{b_0}$$

En particular, si E es simplemente conexo, se tiene una biyección $\pi_1(B,b_0) \equiv E_{b_0}$.

Demostración. La acción $e_0[\omega] = \widetilde{\omega}(1)$ está bien definida por el Corolario 10.1.13.



Veamos que efectivamente es una acción. Como el neutro de $\pi_1(B,b_0)$ es la clase del camino constante y el levantado del camino constante a partir de e_0 es la constante e_0, se tiene que $e_0 1 = e_0$.

Veamos ahora que $(e_o[\omega])[\omega'] = e_0([\omega] * [\omega'])$. Notemos primero que $\widetilde{\omega * \omega'} = \widetilde{\omega} * \widetilde{\omega'}$,donde $\widetilde{\omega * \omega'}$ es el levantado a partir de e_0, $\widetilde{\omega}$ es el levantado a partir de e_0 y $\widetilde{\omega'}$ es el levantado de ω' a partir de $e_1 = e_0[\omega]$. Entonces:

$$e_0([\omega] * [\omega']) = \widetilde{\omega * \omega'}(1) = \widetilde{\omega} * \widetilde{\omega'}(1) = \widetilde{\omega'}(1) = e_1[\omega'] = (e_0[\omega])[\omega']$$

Esto termina de probar que hay una acción a derecha bien definida.

Si E es arco-conexo, dados $e_0, e_1 \in E_{b_0}$, existe algún camino $e_0 \xrightarrow{\gamma} e_1$ en E. Notar que $p\gamma$ es un lazo en b_0 y por lo tanto su clase $[p\gamma] \in \pi_1(B,b_0)$. Por unicidad de levantado, $\gamma = \widetilde{p\gamma}$ (el levantado de $p\gamma$ a partir de e_0). Entonces $e_1 = e_0[p\gamma]$ y esto prueba que la acción es transitiva.

Por otro lado, dado $e_0 \in E_{b_0}$ consideramos el grupo de isotropía,

$$(\pi_1(B,b_0))_{e_0} = \{[\omega] \in \pi_1(B,b_0) \mid e_0[\omega] = e_0\}$$

Es decir, este subgrupo está compuesto por las clases de lazos que al levantarlos a partir de e_0 terminan también en e_0, es decir, son los lazos que se levantan a lazos a partir de e_0. O sea, $(\pi_1(B,b_0))_{e_0} = p_*(\pi_1(E,e_0))$, y por lo tanto se tiene la biyección buscada:

$$\varphi_{e_0} : \pi_1(B,b_0)/p_*(\pi_1(E,e_0)) \to E_{b_0}.$$

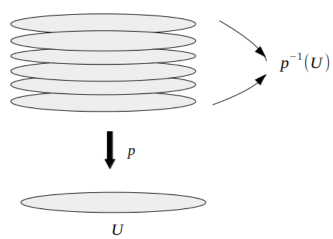
□

De ahora en más notaremos $Fix(e_0) = p_*(\pi_1(E,e_0))$ (los lazos que se levantan a lazos a partir de e_0). Notar que, como p_* es monomorfismo, $Fix(e_0)$ es isomorfo a $\pi_1(E,e_0)$.

10.2. Revestimientos

En la sección anterior estudiamos las fibraciones con LUC $p : E \to B$, y vimos que podemos estudiar el $\pi_1(B,b_0)$ mediante la fibra E_{b_0}. El problema es que la definición de fibración con LUC es de naturaleza global y esencialmente universal, y no es sencillo entonces comprobar si una función cumple con la definición de fibración con LUC, ni tampoco es fácil construir ejemplos a partir de la definición. Por eso estudiamos los revestimientos, cuya definición tiene carácter local, es decir, se definen mediante una propiedad que debe cumplirse "cerca de cada punto". Esto hace que sea más sencillo verificar si una función es un revestimiento y permite construirlos y clasificarlos. Uno de los resultados más relevantes dice que los revestimientos son fibraciones con LUC. A partir de ese resultado, podemos aplicar el Teorema 10.1.14 de la sección anterior y relacionar el grupo fundamental con la fibra. Los revestimientos también aparecen naturalmente en geometría (relacionados con orientabilidad, con grupos de Lie y con curvatura, por ejemplo) y en álgebra. Son utilizados para reemplazar en cierta medida a un espacio B por otro espacio E que localmente es parecido a B pero que tiene propiedades globales más manejables.

Definición 10.2.1. Sea $p : E \to B$ continua. Un abierto $U \subseteq B$ se dice parejamente cubierto (por p) si $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ (con $\Lambda \neq \emptyset$), donde $V_\alpha \subseteq E$ es un abierto para todo α y $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ es homeomorfismo para todo α.



Definición 10.2.2. Un revestimiento es una función continua $p : E \to B$ tal que para todo $b \in B$ existe $U \subseteq B$ entorno abierto de b parejamente cubierto por p. Al espacio E se lo llama espacio total y a B el espacio base.

Ejemplos 10.2.3.

1. Si $p : E \to B$ es homeomorfismo, entonces es un revestimiento (en ese caso se puede tomar $U = B$ para todo b).

2. Sea F un espacio discreto no vacío y sea $E = B \times F$, notar que $E = \coprod_{\alpha\in F} B$ ya que F es discreto. Sea $p : B \times F \to B$ la proyección. Entonces p es un revestimiento (de nuevo, $U = B$ es parejamento cubierto).

3. Este es uno de los ejemplos claves de la teoría. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$. Notar que $\mathbb{S}^1$ se puede cubrir con los siguientes abiertos parejamente cubiertos:
$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x > 0\} \qquad U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid x < 0\}$$
$$U_3 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y > 0\} \qquad U_4 = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 \mid y < 0\}$$
y que $p^{-1}(U_1) = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} (n - 1/4, n + 1/4)$ (los otros son similares).

4. Dado $n \in \mathbb{N}$, $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $p(z) = z^n$ es revestimiento (pensando a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$). Dejamos la verificación como ejercicio para el lector.

5. Consideremos el espacio proyectivo $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\sim$, donde la relación está dada por $x \sim (-x)$. Entonces $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = [x]$ (la clase en el cociente) es revestimiento.

Veamos ahora las primeras propiedades básicas de los revestimientos. Antes necesitamos la definición de homeomorfismo local.

Definición 10.2.4. Una función continua $p : E \to B$ es un homeomorfismo local si para todo $e \in E$ existen abiertos $V \subseteq E$ y $U \subseteq B$ tales que $e \in V$, $p(e) \in U$ y $p|_V : V \to U$ es homeomorfismo.

Propiedades básicas.

1. Si $p : E \to B$ es revestimiento, entonces es un homeomorfismo local. Para corroborarlo: dado $e \in E$, tomar U abierto parejamente cubierto alrededor de $b = p(e)$. Notar que e está en uno de los abiertos de $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ y la función p restringida a ese abierto es un homeomorfismo a U.

2. Los homeomorfismos locales son funciones abiertas. Esto se deduce fácilmente de la definición.

3. Los homeomorfismos locales en general no son revestimientos. Como ejemplo considerar la función $p : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, p es claramente un homeomorfismo local, pero $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ no tiene un entorno parejamente cubierto.

4. Los revestimientos son funciones sobreyectivas (por definición) y abiertas (por ser homeomorfismos locales) y por lo tanto son cocientes.

5. Si $p : E \to B$ es revestimiento y $b \in B$, la fibra $E_b \subseteq E$ es un subespacio discreto no vacío. Para ver que es discreto notar que si U es abierto parejamente cubierto alrededor de b, $p^{-1}(U) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ y cada abierto V_α contiene un único punto de E_b.

Teorema 10.2.5. *Sea $p : E \to B$ un revestimiento. Sea X un espacio conexo y $f, g : X \to E$ continuas tales que $pf = pg$. Si existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$, entonces $f = g$.*

Demostración. Sea $U = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$. Notar que U es no vacío ya que $x_0 \in U$. Veremos que U es abierto y cerrado en X, y como X es conexo esto implicará que $U = X$.

Veamos primero que U es abierto. Dado $x \in U$, veamos que existe un abierto W de X tal que $x \in W \subseteq U$. Sea $b = pg(x) = pf(x) \in B$ y sea $V \subseteq B$ entorno abierto de b parejamente cubierto. Entonces $p^{-1}(V) = \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$ y $p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to V$ homeomorfismo para todo α. Como $x \in U$ entonces $f(x) = g(x)$, y como $pf(x) = b \in V$, $f(x) = g(x) \in \coprod_{\alpha\in\Lambda} V_\alpha$. Por lo tanto existe un único α tal que $f(x) = g(x) \in V_\alpha$. Sea $W = f^{-1}(V_\alpha) \cap g^{-1}(V_\alpha)$. Notar que $x \in W$ y que W es abierto de X. Veamos que $W \subseteq U$. Dado $y \in W$, se tiene que $f(y), g(y) \in V_\alpha$ y como p restringida a V_α es un homeomorfismo (en particular inyectiva) y $pf(y) = pg(y)$, entonces $f(y) = g(y)$, con lo cual $y \in U$.

Veamos ahora que U es cerrado, para esto veremos que U^c es abierto. Notar que $U^c = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$. Sea $x \in U^c$, entonces $f(x) \neq g(x)$. Sea $b = pf(x) = pg(x)$. Como $f(x) \neq g(x)$, entonces $f(x)$ y $g(x)$ están en diferentes V_α's (porque la p es inyectiva en cada V_α). Entonces existen $\alpha \neq \beta \in \Lambda$ tales que $f(x) \in V_\alpha$ y $g(x) \in V_\beta$. Sea $W = f^{-1}(V_\alpha) \cap g^{-1}(V_\beta)$. Es claro que $x \in W$ y que W es abierto. Para ver que $W \subseteq U^c$, tomamos $y \in W$, entonces $f(y) \in V_\alpha$, $g(y) \in V_\beta$ y esto dice que $f(y) \neq g(y)$ y por lo tanto $y \in U^c$. □

Notar que el teorema anterior dice que, en el caso de que X sea conexo, si se tienen dos levantados a E de una misma función a B que coincidan en algún punto, entonces son iguales.

El siguiente teorema es clave en la teoría de revestimientos. En la demostración de evidencia cómo pasar de una propiedad de naturaleza local (como es la definición de revestimientos) a una de carácter global (como lo es la de fibración).

Teorema 10.2.6. *Sea $p : E \to B$ revestimiento. Entonces p es una fibración.*

Demostración. Dado un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

debemos encontrar $G : X \times I \to E$ continua tal que $pG = H$ y $G_0 = f$. Vamos a construir la función G de a poco. Primero vamos a construir para cada $x \in X$ un entorno abierto $N_x \subseteq X$ y un levantado local $G_x : N_x \times I \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N_x \arrow[r, "f|"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ N_x \times I \arrow[r, "H|"] \arrow[ur, "G_x"] & B \end{tikzcd}$$

donde, para abreviar notación, $f|$ y $H|$ son las funciones restringidas a N_x y $N_x \times I$ respectivamente. En el resto de la demostración seguiremos utilizando esa convención para funciones restringidas al dominio que se explicita.

Para definir los N_x y las G_x correspondientes procedemos así. Fijamos $x \in X$. Para cada $t \in I$ existe un entorno de $H(x,t) \in B$ parejamente cubierto, que notaremos U_t. Consideramos el abierto $H^{-1}(U_t) \subseteq X \times I$ y tomamos un abierto de la base $(x,t) \in N_{(x,t)} \times (a_t, b_t) \subseteq H^{-1}(U_t)$ (si $t = 0$ o $t = 1$ incluimos los entornos abiertos $[0, b_t)$ y $(a_t, 1]$). Entonces $\{x\} \times I \subseteq \bigcup\limits_{t \in I} N_{(x,t)} \times (a_t, b_t)$ y por compacidad de I existen finitos $t_1, \ldots, t_n$ tales que $\{x\} \times I \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} N_{(x_i,t_i)} \times (a_{t_i}, b_{t_i})$. Sea $N_x = \bigcap\limits_{i=1}^{n} N_{(x_i,t_i)}$. Entonces, quizás refinando la partición del intervalo I, existe una partición $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ de I tal que $H(N_x \times [s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_i$ para algún U_i parejamente cubierto de B.

Ahora definimos la función $G_x : N_x \times I \to E$ recursivamente en cada $N_x \times [s_{i-1}, s_i]$. Concretamente, definimos $G_i : N_x \times [s_{i-1}, s_i] \to E$ tal que:

1. $pG_i = H|$
2. $G_1(y, 0) = f(y)$
3. $G_i(y, s_{i-1}) = G_{i-1}(y, s_{i-1})$.

Comenzamos construyendo G_1: sabemos que $H(N_x \times [0, s_1]) \subseteq U_1$ para algún U_1 parejamente cubierto. Entonces $p^{-1}(U_1) = \coprod\limits_{\alpha} V_\alpha$. Veamos primero que $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x. Si $y \in N_x$ entonces $H(y, 0) \in U_1$ y como $H(y, 0) = pf(y)$, se tiene que $y \in f^{-1}(p^{-1}(U_1)) = f^{-1}(\coprod\limits_{\alpha} V_\alpha)$. Eso prueba que $\{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in \Lambda\}$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x. Por lo tanto podemos definir $G_1(y,t) = p_\alpha^{-1}(H(y,t))$ si $y \in f^{-1}(V_\alpha)$, donde p_α es la funcion p restringida a V_α. Es decir, definimos G_1 levantando la H usando el homeomorfismo local p_α. Notar que está bien definida porque los $f^{-1}(V_\alpha)$ cubren a N_x (y son disjuntos). Además por cómo está definida es claro que es continua.

Inductivamente, una vez definida la función G_{i-1}, definimos G_i de la siguiente manera: $H(N_x \times [s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_i$ que está parejamente cubierto, y por lo tanto $p^{-1}(U_i) = \coprod V_\alpha$ (seguimos notándolos V_α aunque claramente son otros abiertos distintos a los de U_1). Para cada α, sea $W_\alpha = \{y \in N_x \mid G_{i-1}(y, s_{i-1}) \in V_\alpha\}$. Similarmente a lo hecho con G_1, se puede ver que $\{W_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ es un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x, y así se puede definir $G_i(y,t) = p_\alpha^{-1}(H(y,t))$ si $y \in W_\alpha$. Es decir, levantamos la H usando el homeomorfismo local p_α correspondiente. La buena definición se debe a que los W_α forman un cubrimiento por abiertos disjuntos de N_x. Así, construimos recursivamente las $G_i : N_x \times [s_{i-1}, s_i] \to E$ y, por el lema del pegado para cerrados, esto determina una función bien definida y continua $G_x : N_x \times I \to E$ que levanta a la función $H|$ y tiene la condición inicial $G_0 = f|$.

Ahora definimos la función $G : X \times I \to E$ globalmente. Tomemos el cubrimiento por abiertos $\{N_x \times I \mid x \in X\}$ de $X \times I$. Si probamos que cuando $N_x \cap N_{x'} \neq \emptyset$, las funciones (definidas localmente) G_x y $G_{x'}$ coinciden en la intersección $(N_x \cap N_{x'}) \times I$, entonces por el lema de pegado para abiertos, tendríamos una función $G : X \times I \to E$ bien definida y continua. Solo debemos ver, entonces, que si $y \in N_x \cap N_{x'}$, $G_x(y,t) = G_{x'}(y,t)$. Ahora bien, dado $y \in N_x \cap N_{x'}$, se tiene que $pG_x|_{\{y\}\times I} = H|_{\{y\}\times I} = pG_{x'}|_{\{y\}\times I}$ y $G_x(y,0) = f(y) = G_{x'}(y,0)$. Por el Teorema 10.2.5, como $\{y\} \times I$ es conexo, $G_x|_{\{y\}\times I} = G_{x'}|_{\{y\}\times I}$. Entonces las funciones G_x definidas localmente se pegan bien y por lo tanto determinan una función global G. ☐

Corolario 10.2.7. Si $p : E \to B$ es un revestimiento entonces p tiene la LUC.

Demostración. Por Teorema 10.2.6, p es una fibración y en particular levanta caminos, y por el Teorema 10.2.5, como I es conexo, los levantados de los caminos (con condición inicial) son únicos. ☐

Corolario 10.2.8. Si $p : E \to B$ es revestimiento entonces es una fibración con LUC. En particular se tiene:

1. $p_* : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$ es monomorfismo (para todo $b_0 \in B,\ e_0 \in E_{b_0}$).
2. Si E es arco-conexo y $e_0 \in E_{b_0}$, $\pi_1(B, b_0)/Fix(e_0) \equiv E_{b_0}$.
3. Si E es simplemente conexo, $\pi_1(B, b_0)$ está en biyección con la fibra E_{b_0}.

Demostración. Se deduce del Teorema 10.2.6, del Corolario 10.2.7 y de los resultados probados en la sección previa para fibraciones con LUC. ☐

10.3. Grupo fundamental del círculo y aplicaciones

A partir de los resultados vistos para revestimientos, en esta sección calculamos el grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$ y estudiamos varias consecuencias de ese resultado. Pensamos a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

Teorema 10.3.1. $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ *es isomorfo a* $\mathbb{Z}$.

Demostración. Consideramos el revestimiento $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\ p(t) = e^{2\pi i t}$. Tomamos $b_0 = 1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Notar que la fibra E_1 coincide con $\mathbb{Z}$. Tomamos $e_0 = 0 \in \mathbb{Z} = E_1$. Como $\mathbb{R}$ es contráctil, en particular es simplemente conexo y por Corolario 10.2.8 se tiene la biyección $\varphi : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to E_1 = \mathbb{Z}$ dada por $\varphi([\omega]) = \widetilde{\omega}(1)$, donde $\widetilde{\omega}$ es el levantado de ω que empieza en 0.

Veamos que, en este caso, la biyección φ es en realidad un morfismo de grupos (y así se tiene el isomorfismo deseado). Para esto, debemos ver que $\varphi([\omega] * [\omega']) = \varphi([\omega]) + \varphi([\omega'])$.

Sea $\varphi([\omega]) = \widetilde{\omega}(1) = n \in \mathbb{Z}$ y $\varphi([\omega']) = \widetilde{\omega'}(1) = m \in \mathbb{Z}$. Debemos ver que $\widetilde{\omega * \omega'}(1) = n + m$. Definamos el siguiente camino $\gamma : I \to \mathbb{R}$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \widetilde{\omega}(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ n + \widetilde{\omega'}(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Notar que γ está bien definida dado que $\widetilde{\omega}(1) = n = n + \widetilde{\omega'}(0)$. Además se tiene $p\gamma = \omega * \omega'$ y $\gamma(0) = \widetilde{\omega * \omega'}(0) = 0$. Por unicidad de levantado, $\gamma = \widetilde{\omega * \omega'}$. Esto implica que:

$$\varphi([\omega] * [\omega']) = \widetilde{\omega * \omega'}(1) = \gamma(1) = n + m = \varphi([\omega]) + \varphi([\omega']).$$

□

Para poder estudiar consecuencias y aplicaciones de este resultado, veremos primero varias observaciones pertinentes.

Para simplificar, de ahora en más notaremos $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ al grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. En general, cuando tengamos un espacio arco-conexo X notaremos $\pi_1(X)$ al grupo fundamental de X con cierto punto base $x_0 \in X$ (que quedará implícito).

Observación 10.3.2. Como los generadores de $\mathbb{Z}$ son 1 y -1, los generadores de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ son $\gamma : I \to \mathbb{S}^1$, $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ y $\overline{\gamma} : I \to \mathbb{S}^1$, $\overline{\gamma}(t) = e^{-2\pi i t}$, ya que $\widetilde{\gamma}(1) = 1$ y $\widetilde{\overline{\gamma}}(1) = -1$. Notar que γ y $\overline{\gamma}$ son lazos en $\mathbb{S}^1$ que lo recorren dando exactamente una vuelta (en una dirección y en la otra).

Observación 10.3.3. Sea $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^n$ (para un cierto $n \in \mathbb{N}$). Entonces $f_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es $f_*[\gamma] = [\gamma]^n$ o $n[\gamma]$ si notamos con $+$ la operación de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Observación 10.3.4. Como la inclusión $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es una equivalencia homotópica, entonces $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ es un isomorfismo. Identificando a $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, tenemos $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ y en particular $i_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ no es cero. También, si tomamos $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\varphi(z) = z^n$ (para cierto $n \in \mathbb{N}$), entonces $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \mathbb{Z}$ es $\varphi_*([\gamma]) = n[\gamma]$ y por lo tanto φ_* es monomorfismo y en particular tampoco es el morfismo nulo. Utilizaremos más adelante que tanto i_* como φ_* no son el morfismo cero.

Observación 10.3.5. Si $f : X \to Y$ es una función null-homotópica (es decir homotópica a una constante), es claro que $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ es el morfismo nulo (ya que la constante induce el morfismo nulo). Por la observación anterior, se deduce entonces que la inclusión $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y las funciones $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \varphi(z) = z^n$ (para $n \in \mathbb{N}$) no son null-homotópicas.

Ahora sí estamos en condiciones de estudiar aplicaciones de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.

Proposición 10.3.6. Sea F un campo vectorial nunca nulo en $\mathbb{D}^2$. Entonces existe $x_1 \in \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ tal que $F(x_1) = \lambda x_1$ para algún $\lambda > 0$ y existe $x_2 \in \partial\mathbb{D}^2$ tal que $F(x_2) = \eta x_2$ para algún $\eta < 0$.

Demostración. Vemos al campo nunca nulo como una función continua $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Notemos que $F|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es null-homotópica ya que se extiende a $\mathbb{D}^2$.

Supongamos que no existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $F(x) = \eta x$ para algún $\eta < 0$. Definimos $H : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ como $H(x,t) = tx + (1-t)F(x)$. Veamos que H está bien definida, es decir $H(x,t) \neq 0 \ \forall\ x,t$. Si $t = 0$, $H(x,0) = F(x) \neq 0$. Si $t = 1$, $H(x,1) = x \in \mathbb{S}^1$ y por lo tanto tampoco es 0. Para $0 < t < 1$, si $tx + (1-t)F(x) = 0$, entonces $F(x) = \frac{t}{t-1}x$, pero $\frac{t}{t-1} < 0$ y esto contradice lo que suponíamos (que no existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $F(x) = \eta x$ para algún $\eta < 0$). Por lo tanto $H(x,t) \neq 0$ y entonces H está bien definida.

Notar que $H : i \simeq F : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y eso es un absurdo ya que F es null-homotópica (porque se extiende al disco) y la $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ no lo es (por las observaciones previas). Así hemos probado que existe $x_2 \in \mathbb{S}^1$ tal que $F(x_2) = \eta x_2$ para algún $\eta < 0$.

Considerando la función $G(x) = -F(x)$, se tiene que también existe $x_1 \in \mathbb{S}^1$ tal que $G(x_1) = \eta x_1$ para algún $\eta < 0$ y entonces $F(x_1) = -G(x_1) = (-\eta)x_1 = \lambda x_1$, con $\lambda = -\eta > 0$. □

Corolario 10.3.7 (Teorema del punto fijo de Brower)**.** Sea $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ continua. Entonces existe $x \in \mathbb{D}^2$ tal que $f(x) = x$.

Demostración. Supongamos que no. Entonces $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}^2$, y así la función $F(x) = f(x) - x$ es nunca nula, es decir $F : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Por la proposición anterior, existe $z \in \mathbb{S}^1$ tal que $F(z) = \lambda z$ para un cierto $\lambda > 0$. Entonces $f(z) = F(z) + z = (\lambda+1)z$. Y por lo tanto, como $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ y $||z|| = 1$, se tiene que $1 \geq ||f(z)|| = |\lambda + 1|||z|| > 1$. Absurdo. □

Lo que hemos probado es que $\mathbb{D}^2$ tiene la "propiedad del punto fijo" (es decir, que toda función continua de $\mathbb{D}^2$ en $\mathbb{D}^2$ tiene algún punto fijo). Notar que si B es un espacio topológico homeomorfo a $\mathbb{D}^2$, entonces también tiene la propiedad del punto fijo (basta componer con el homeomorfismo).

Corolario 10.3.8. Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $a_{ij} > 0$ para todo i, j. Entonces existe $\lambda > 0$ autovalor de A.

Demostración. Sea B el primer octante de $\mathbb{S}^2$, es decir, $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_i \geq 0\}$. Notar que B es homeomorfo a $\mathbb{D}^2$ y por lo tanto tiene la propiedad del punto fijo.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = Ax$. Notar que si $x \in B$, entonces $T(x)$ tiene las tres coordenadas mayores o iguales a 0 y $T(x) \neq 0$ (ya que $x_i \geq 0,\ x \neq 0,\ a_{ij} > 0$). Por lo tanto se tiene una función $\varphi : B \to B,\ \varphi(x) = \frac{T(x)}{||T(x)||}$ bien definida y continua. Como B tiene la propiedad del punto fijo, existe $z \in B$ tal que $\varphi(z) = z$. Entonces $\frac{T(z)}{||T(z)||} = z$, y así $T(z) = ||T(z)||.z$. Por lo tanto hemos encontrado $\lambda = ||T(z)|| > 0$ autovalor de A. □

Teorema 10.3.9 (Teorema fundamental del álgebra)**.** $\mathbb{C}$ *es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Sea $p \in \mathbb{C}[X]$ un polinomio no constante. Debemos ver que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = 0$. Como $\mathbb{C}$ es un cuerpo, podemos suponer que p es un polinomio mónico, $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$.

Veamos primero que podemos suponer que $|a_0| + \ldots + |a_{n-1}| < 1$: dado $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$, consideremos el polinomio $q(w) = p(cw) = c^n w^n + a_{n-1}c^{n-1}w^{n-1} + \ldots + a_0$. Entonces $\frac{q(w)}{c^n} = w^n + \frac{a_{n-1}}{c}w^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{c^n}$. Notar que p tiene alguna raíz si y solo si q la tiene y esto sucede si y solo si $\frac{q}{c^n}$ la tiene. Además, si tomamos c suficientemente grande $|a_0/c^n| + \ldots + |a_{n-1}/c| < 1$. Podemos entonces directamente suponer que $p = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ y que $|a_0| + \ldots + |a_{n-1}| < 1$.

Ahora bien, supongamos que p no tiene raíces en $\mathbb{C}$, entonces lo podemos ver como una función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Consideramos la restricción $p|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como la función $p|_{\mathbb{S}^1}$ se extiende al disco $\mathbb{D}^2$ (de hecho se extiende a todo $\mathbb{C}$), se tiene que $p|_{\mathbb{S}^1}$ es null-homotópica. Si probamos que $p|_{\mathbb{S}^1} \simeq \varphi$, donde $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es $\varphi(x) = x^n$ llegaríamos a un absurdo porque ya sabemos, por las observaciones previas, que φ no es null-homotópica.

Por lo tanto, para terminar la demostración solo debemos ver que $p|_{\mathbb{S}^1} \simeq \varphi$. Sea $H : \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $H(x,t) = x^n + t(a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0)$. Notar que $H_0 = \varphi$ y $H_1 = p|_{\mathbb{S}^1}$. Solo debemos verificar que H está bien definida, es decir que su imagen cae en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pero dados $x \in \mathbb{S}^1,\ t \in I$, usando que $||x|| = 1$ y que $|a_0| + \ldots + |a_{n-1}| < 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} H(x,t)| &\geq |x^n| - |t||a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_o| \\ &\geq 1 - |a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0| \geq 1 - (|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|) > 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $H(x,t) \neq 0$. □

Veremos ahora otras aplicaciones interesantes de $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, entre ellas el Teorema de Borsuk-Ulam y el teorema de la bisección. Para eso necesitamos una definición previa.

Definición 10.3.10. Decimos que una función $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$ preserva antípodas is $h(-x) = -h(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$.

Teorema 10.3.11. *Sea $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continua que preserva antípodas. Entonces h no es null-homotópica.*

Demostración. Dada $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ que preserva antípodas, tomamos $b_0 = h(1)$ y sea $\rho : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ rotación antihoraria tal que $\rho(b_0) = 1$. Tomamos $\widetilde{h} = \rho h$. Entonces $\widetilde{h}(1) = 1$ y $\widetilde{h}$ sigue preservando antípodas. Por otro lado $h \simeq \widetilde{h}$. Por lo tanto, cambiando h por $\widetilde{h}$, para probar el teorema podemos suponer que $h(1) = 1$.

Consideremos el revestimiento $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ q(z) = z^2$. Notar que

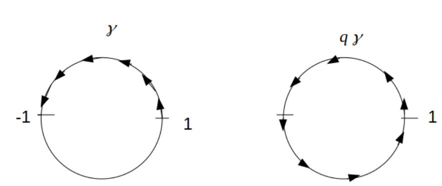
$$qh(-z) = (h(-z))^2 = (-h(z))^2 = (h(z))^2 = qh(z)$$

y como q es, en particular, cociente, se tiene:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{S}^1 \arrow[r, "q"] & \mathbb{S}^1 \\ \mathbb{S}^1 \arrow[urr, dotted, "\exists!\ g"] & & \end{tikzcd}$$

Existe una única $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ continua tal que $gq = qh$. Si probamos que $g_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ cumple $g_* \neq 0$, probaríamos que g_* es monomorfismo (ya que $g_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$), y como $q_* : \pi_1(\mathbb{S}^1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1)$ es monomorfismo (por ser q revestimiento), se tendría que $(gq)_* = g_* q_*$ es monomorfismo. Como $gq = qh$, se tendría que $q_* h_*$ es monomorfismo y entonces h_* es monomorfismo, y en particular no sería null-homotópica. Por lo tanto, solo debemos ver que $g_* \neq 0$.

Volvamos con el revestimiento $q : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1,\ q(z) = z^2$. Recordemos que $Fix(1) = q_*(\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)) \leq \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ son los lazos que se levantan a lazos a partir de $e_0 = 1$. Tomo γ camino en $\mathbb{S}^1$ tal que $\gamma(0) = 1,\ \gamma(1) = -1$. Notar que $q\gamma$ es un lazo en 1 y por lo tanto $[q\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.



Ahora bien, $g_*([q\gamma]) = [gq\gamma] = [qh\gamma]$ y $[qh\gamma] \notin Fix(1)$ ya que $h\gamma$ es un levantado de $qh\gamma$ y $h\gamma(0) = h(1) = 1$ y $h\gamma(1) = h(-1) = -h(1) = -1$, es decir no se levanta a un lazo. En particular, $[qh\gamma] \neq 0$ y por lo tanto $g_* \neq 0$. □

Corolario 10.3.12. No existe $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ continua que preserva antípodas.

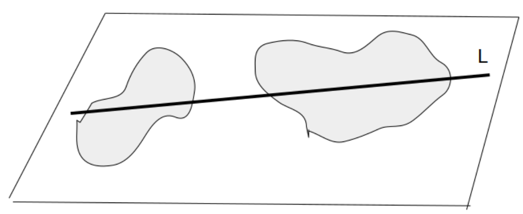
Demostración. Supongamos existe una $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ continua que preserve antípodas. Entonces al restringirla $g|_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ también preserva antípodas y, por el teorema anterior, $g|_{\mathbb{S}^1}$ no es null-homotópica. Pero $g|_{\mathbb{S}^1}$ se extiende al disco $\mathbb{D}^2$ (visto como hemisferio de $\mathbb{S}^2$) ya que g está definida en todo $\mathbb{S}^2$, y por lo tanto sería null-homotópica. Absurdo. $\square$

Corolario 10.3.13 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua. Entonces existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Demostración. Supongamos que no existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x) = f(-x)$. Consideramos entonces la función $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$, $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-f(-x)||}$. Notar que g está bien definida porque $f(x) - f(-x) \neq 0$. Pero $g(-x) = -g(x)$, es decir preserva antípodas. Absurdo. $\square$

Veremos ahora el teorema de la bisección. En realidad este teorema, al igual que el de Borsuk-Ulam, vale para todo $n \geq 2$. El teorema de la bisección para el caso $n = 3$ se llama el "teorema del sandwich de jamón".

Teorema 10.3.14 (Teorema de la bisección)**.** *Sean B_1, B_2 dos regiones acotadas y medibles en $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una recta L en $\mathbb{R}^2$ que bisecciona ambas regiones simultáneamente (es decir, L separa a B_1 y B_2 en dos partes con la misma área).*



Demostración. Vemos a $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3$. Para cada $v \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ sea P_v el plano perpendicular a v que pasa por el origen de $\mathbb{R}^3$. Notar que P_v separa a $\mathbb{R}^3$ en dos semiespacios H_v^+, que es el que contiene al vector v y H_v^- que contiene a $-v$. Llamamos $f_i(v)$ al área de B_i que cae en H_v^+ $(i = 1, 2)$.

Notar que si $v = (0, 0, 1)$ entonces $f_i(v) = Area(B_i)$, si $v = (0, 0, -1)$ entonces $f_i(v) = 0$ y si $v \neq (0, 0, 1), (0, 0, -1)$ entonces $P_v \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ es una recta, que llamamos L.

Además vale que $P_v = P_{-v}$ y $H_v^+ = H_{-v}^-$, $H_v^- = H_{-v}^+$. Es claro que $f_i(v)$ es el área de B_i de un lado de la recta y $f_i(-v)$ es el área del otro lado de la recta. Por lo tanto $f_i(v) + f_i(-v)$ es el área de B_i $(i = 1, 2)$.

Sea $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$. Por el Teorema de Borsuk-Ulam, sabemos que existe $v \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(v) = f(-v)$. Pero como $f_i(v) + f_i(-v) = Area(B_i)$, se tiene que $f(v) = 1/2Area(B_i)$ y la recta correspondiente $L = P_v \cap \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ es la que bisecciona a ambas regiones. $\square$

10.4. Levantamiento de funciones a revestimientos

Veremos en esta sección un resultado fundamental de la teoría de revestimientos que relaciona la existencia de levantados de funciones y el grupo fundamental. La propiedad de levantamiento de funciones que veremos ahora, se utiliza entre otras cosas para clasificar a los revestimientos. No vamos a ver en estas notas el resultado de existencia y clasificación de revestimientos (para espacios con condiciones "buenas"). La clasificación de revestimientos se puede leer en los libros [Munkres, Hatcher].

Recordemos que, dado un revestimiento $p : E \to B$ y dados $b_0 \in B$, $e_o \in E_{b_0}$, el subgrupo $Fix(e_0) = p_*(\pi_1(E, e_0)) \leq \pi_1(B, b_0)$ es el formado por las clases de lazos que se levantan a lazos a partir de e_0.

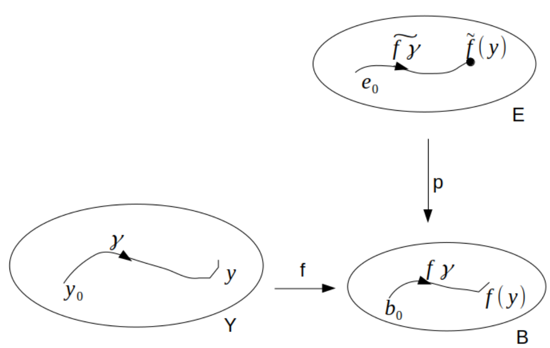
Teorema 10.4.1 (Propiedad de levantamiento de funciones)**.** *Sea $p : E \to B$ revestimiento, E arco-conexo, $b_0 \in B$, $e_0 \in E_{b_0}$. Sea Y un espacio arco-conexo y localmente arco-conexo. Sea $f : Y \to B$ continua y sea $y_0 \in Y$ tales que $f(y_0) = b_0$. Entonces existe un levantado continuo $\widetilde{f} : Y \to E$ (con $p\widetilde{f} = f$) tal que $\widetilde{f}(y_0) = e_0$ si y solo si $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq Fix(e_0)$. En ese caso, $\widetilde{f}$ es además única con esa propiedad.*

Demostración. La unicidad de $\widetilde{f}$ (en caso de existir) se deduce del Teorema 10.2.5.

Veamos primero la implicación más sencilla. Supongamos que exista un levantado $\widetilde{f}$, entonces

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(\widetilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(E, e_0)) = Fix(e_0).$$

Para ver la otra implicación, supongamos que se tiene la condición del π_1 y construyamos el levantado $\widetilde{f} : Y \to E$. Sea $y \in Y$. Como Y es arco-conexo, existe un camino $y_0 \xrightarrow{\gamma} y$ en Y. Consideramos el camino $f(y_0) \xrightarrow{f\gamma} f(y)$ en B. Por LUC, existe un único levantado $\widetilde{f\gamma}$ a partir de e_0 en E. Definimos $\widetilde{f}(y) = \widetilde{f\gamma}(1)$.



Veamos la buena definición de $\widetilde{f}$ (es decir que no depende del camino γ elegido): Si β es otro camino de y_0 a y entonces $[\gamma * \overline{\beta}] \in \pi_1(Y, y_0)$, entonces $f_*([\gamma * \overline{\beta}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq Fix(e_0)$ por hipótesis y por lo tanto cuando levantamos a partir de e_0, $\widetilde{f(\gamma * \overline{\beta})}(1) = e_0$. Entonces $\widetilde{(f\gamma) * \overline{f\beta}}(1) = e_0$ y por lo tanto $\widetilde{f\gamma}(1) = \widetilde{f\beta}(1)$. Esto prueba que $\widetilde{f}$ está bien definida.

Por definición, es claro que $p\widetilde{f} = f$. Solo resta ver que $\widetilde{f}$ es continua. Dado $y \in Y$ y $N \subseteq E$ abierto alrededor de $\widetilde{f}(y)$, debemos ver que existe W entorno abierto de y en Y tal que $\widetilde{f}(W) \subseteq N$. Sea $U \subseteq B$ entorno abierto de $f(y)$ parejamente cubierto. Sea $p^{-1}(U) = \coprod_\alpha V_\alpha$ y sea α tal que $\tilde{f}(y) \in V_\alpha$. Notar que $N \cap V_\alpha$ es un entorno abierto de $\widetilde{f}(y)$. Sea $\hat{U} = p|_{V_\alpha}(N \cap V_\alpha) \subseteq U$. Notar que $\hat{U}$ es abierto y contiene a $f(y)$. Sea $W' = f^{-1}(\hat{U}) \subset Y$. Como Y es localmente arco-conexo, existe un abierto arco-conexo $W \subseteq W'$ que contiene a y. Dado $y' \in W$, existe un camino $y \xrightarrow{\delta} y'$ en W y por lo tanto se tiene un camino $y_0 \xrightarrow{\gamma} y \xrightarrow{\delta} y'$. Aplicando la f, se tiene un camino $b_0 \xrightarrow{f\gamma} f(y) \xrightarrow{f\delta} f(y')$ donde $f\delta$ cae en $\hat{U}$. Tomamos $p|_{V_\alpha}^{-1} f\delta$ que es un camino (levantado de $f\delta$) de $\widetilde{f}(y)$ a $p|_{V_\alpha}^{-1} f(y')$ y entonces, considerando el camino $e_0 \xrightarrow{\widetilde{f\gamma}} \widetilde{f}(y) \xrightarrow{\widetilde{f\delta}} p|_{V_\alpha}{}^{-1}(f(y))$, por definión de $\widetilde{f}$, se tiene que $\widetilde{f}(y') = p|_{V_\alpha}^{-1}(f(y)) \in V_\alpha \cap N \subset N$. $\square$

Definición 10.4.2. Un revestimiento $p : E \to B$ se dice universal si E es simplemente conexo.

Observación 10.4.3. Si $p : E \to B$ es revestimiento universal y $p' : E' \to B$ es un revestimiento arco-conexo, dados $b_0 \in B,\ e_0 \in E_{b_0},\ e'_0 \in E'_{b_0}$, existe una única función continua $\varphi : E \to E'$ tal que $p'\varphi = p$ y $\varphi(e_0) = e'_0$.

Capítulo 11

El Teorema de van Kampen

11.1. Grupos libres, presentaciones y producto amalgamado

Para poder enunciar y utilizar el Teorema de van Kampen necesitamos previamente tener cierto manejo de los grupos libres y las presentaciones de grupos. Veremos en estas notas las nociones y construcciones básicas pero no nos detendremos en la formalidad de algunas demostraciones. Las referencias para esta sección son principalmente los libros [Hatcher, Lyndon-Schupp].

Un grupo libre es un grupo que admite una base. Concretamente:

Definición 11.1.1. Un grupo G se dice libre si existe $S \subseteq G$ un subconjunto (que se llama "base") que cumple la siguiente propiedad: para todo grupo H y para toda función de conjuntos $\phi : S \to H$, existe un único morfismo de grupos $\overline{\phi} : G \to H$ que extiende a ϕ.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "inc"'] & H \\ G \arrow[ur, dotted, "\exists! \overline{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

Notar que la definición de base es análoga al caso de espacios vectoriales o módulos.

Ejemplos 11.1.2.

1. El grupo trivial $G = 1$ es libre con base $S = \emptyset$.
2. $\mathbb{Z}$ es libre. $B_1 = \{1\}$ y $B_2 = \{-1\}$ son bases.
3. $\mathbb{Z}_n$ no es un grupo libre. Para ver esto, supongamos que sí y sea B una base. Como $\mathbb{Z}_n$ no es el grupo trivial entonces $B \neq \emptyset$. Sea $a \in B$. Definimos $\phi : B \to \mathbb{Z}$ como $\phi(a) = 1$ y $\phi(b) = 0$ para todo $b \neq a$. Pero no existe un morfismo $\overline{\phi} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}$ que extiende a ϕ ya que $na = 0 \in \mathbb{Z}_n$ y $\overline{\phi}(na) = n \neq 0 \in \mathbb{Z}$.
4. Si G es un grupo abeliano y G no es el grupo trivial y no es isomorfo a $\mathbb{Z}$, entonces G no es un grupo libre. Para ver esto, supongamos que sí es libre y tomamos B una base. Como G no es trivial ni es isomorfo a $\mathbb{Z}$ se tiene que $\#B \geq 2$ (¿por qué?) Sean $a \neq b \in B$. Sea H un grupo no abeliano y $x, y \in H$ tales que $xy \neq yx$ (por ejemplo tomar $H = S_3$). Definimos $\phi : B \to H$ como $\phi(a) = x$, $\phi(b) = y$, $\phi(c) = 1$ $\forall c \neq a, b$. Entonces existe $\overline{\phi} : G \to H$ morfismo de grupos que extiende a ϕ. Pero esto es absurdo porque $\overline{\phi}(ab) = xy$ y $\overline{\phi}(ba) = yx$ pero $ab = ba \in G$ y en cambio $xy \neq yx \in H$.

Proposición 11.1.3. Sea G un grupo libre y sean B_1, B_2 bases de G. Entonces $\#B_1 = \#B_2$.

Demostración. Si B es una base de un grupo G, por definición, existe una correspondencia uno a uno entre las funciones $\phi : B \to \mathbb{Z}_2$ y los morfismos de grupos $\overline{\phi} : G \to \mathbb{Z}_2$ y por lo tanto $2^{\#B} = \#Funciones(B, \mathbb{Z}_2) = \#\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$. Por lo tanto, si B_1 y B_2 son bases de G, $2^{\#B_1} = 2^{\#B_2}$ (ya que ambos son iguales a $\#\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}_2)$).

De esto se deduce que B_1 es finito si y solo si B_2 lo es, y en ese caso además $\#B_1 = \#B_2$. En el caso que sean infinitos, como ambos generan G (todo elemento de G se puede escribir como producto de finitos elementos de la base o sus inversos), se tiene que $\#B_1 = \#G = \#B_2$. $\square$

Se tiene bien definido entonces el rango de un grupo libre G, $rg(G) := \#B$ para alguna base B.

Ejercicio 11.1.4. Sean G, H grupos libres. Entonces $rg(G) = rg(H)$ si y solo si G y H son isomorfos.

Veamos ahora que para todo conjunto S, existe un grupo libre con base S. Por el ejercicio anterior, todos los grupos libres con bases del mismo cardinal son isomorfos. Notaremos $F(S)$ al grupo libre con base S.

Sea S un conjunto. Definimos primero el conjunto de "inversos formales" $\overline{S} = \{\overline{s} \mid s \in S\}$ y sea $A = S \coprod \overline{S}$. Llamamos a A alfabeto y a sus elementos "letras". Dado $a \in A$, si $a = s \in S$, denotamos $\overline{a} = \overline{s} \in \overline{S}$ y si $a = \overline{s} \in \overline{S}$, $\overline{a} = s \in S$ (es decir, identificamos $\overline{\overline{s}} = s$). Una palabra en A es $w = x_1 \dots x_n$ para un cierto n, donde las x_i son "letras" del alfabeto. También consideramos la palabra vacía que denotamos 1. Una palabra $w = x_1 \dots x_n$ se dice reducida si $x_i \neq \overline{x_{i+1}}$ para todo i. Se define entonces $F(S)$ como el grupo cuyo conjunto subyacente son las palabras reducidas en A y con la operación $w.w'$ que consiste en concatenar las palabras y reducir (borrar las subpalabras de la forma $x\overline{x}$). La palabra vacía 1 es el neutro. El inverso de $w = x_1 \dots x_n$ es $\overline{w} = \overline{x_n} \dots \overline{x_1}$. No probaremos en estas notas que la operación está bien definida (no depende del orden que elijamos para hacer las reducciones posibles) y que efectivamente $F(S)$ es un grupo. Para más detalles el lector puede consultar los libros [Hatcher, Lyndon-Schupp]

Ejemplo 11.1.5. Si $S = \{a, b\}$, $F(a, b)$ consiste en las palabras reducidas con letras $a, \overline{a}, b, \overline{b}$. Por ejemplo $abaa$, $b\overline{a}b, a\overline{b}$.

Observación 11.1.6. Si G es un grupo, entonces existe F un grupo libre y un epimorfismo $q : F \to G$. Para ver esto, elegimos $S \subseteq G$ un conjunto de generadores y tomamos $F = F(S)$. Consideramos la inclusión $i : S \to G$ que induce $q = \overline{i} : F(S) \to G$ (por la propiedad universal de grupo libre). Como S genera G se deduce que q es sobreyectiva. En particular, $G = F(S)/\mathrm{Ker}(q)$ y por lo tanto tenemos que todo grupo es cociente de un grupo libre.

Definición 11.1.7. Una presentación $P = \langle X \mid R \rangle$ de un grupo G consiste de un conjunto X de generadores de G y un conjunto $R \subseteq F(X)$ (palabras en los generadores) tal que G es isomorfo a $F(X)/N$, donde N es el subgrupo normal generado por $R \subseteq F(X)$ (es decir, el mínimo subgrupo normal que contiene a R, o sea $N = \langle\langle R \rangle\rangle = \bigcap\limits_{\substack{T \trianglelefteq F(X) \\ R \subseteq T}} T$). Los elementos de R se llaman relaciones.

Como todo grupo G es cociente de un libre, entonces admite una presentación (de hecho, todo grupo admite infinitas presentaciones distintas).

Ejemplos 11.1.8. 1. Si $P = \langle a \mid \ \rangle$ (en este caso $R = \emptyset$), entonces $G = F(a) = \mathbb{Z}$.

2. $\langle a \mid a\rangle$ presenta al grupo trivial.
3. $\langle a, b \mid a\rangle$ es otra presentación de $\mathbb{Z}$.
4. $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$ es una presentación de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
5. $\langle a \mid a^n\rangle$ presenta al grupo $\mathbb{Z}_n$.
6. $\langle a, b \mid ab, b\rangle$ es otra presentación del grupo trivial.
7. $\langle a, b, c \mid c\rangle$ presenta al grupo libre $F(a, b)$.
8. $\langle s, r \mid s^2, r^n, srsr\rangle$ es una presentación del grupo diedral D_n (de orden $2n$).

Definición 11.1.9. Sea $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de grupos. Se define el producto libre $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ de la siguiente manera:

$$\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha = \{g_1 \dots g_m \mid m \geq 0,\ g_i \in G_{\alpha_i},\ g_i \neq 1_{G_{\alpha_i}},\ \alpha_i \neq \alpha_{i+1}\}.$$

Es decir, son palabra finitas donde las letras son elementos de los grupos G_α y letras seguidas no pertenecen al mismo G_α y ninguna letra es un neutro. La palabra vacía es el neutro del producto libre, y la operación es concatenar y, eventualmente, reducir. En este caso la reducción es de la siguiente manera: si $g_1 \dots g_m$ no es reducida, es decir existen $g_i, g_{i+1} \in G_\alpha$ para algún α o alguna de las letras es la identidad de alguno de los grupos, la podemos reducir a una palabra de largo $m-1$ tomando $g_1 \dots (g_i g_{i+1}) g_{i+2} \dots g_m$ donde $(g_i g_{i+1})$ es el producto en el grupo G_α correspondiente, o si $g_i = 1_{G_\alpha}$ para algún α, lo eliminamos de la palabra. El inverso de una palabra $g_1 \dots g_m$ es $g_m^{-1} \dots g_1^{-1}$.

Veamos ahora la propiedad universal que tiene el producto libre de grupos. Sea $\{G_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ una familia de grupos. Para cada $\beta \in \Lambda$ se tiene una inclusión de grupos

$$i_\beta : G_\beta \to \underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$$

que a cada elemento $g \in G_\beta$ le asigna la palabra de una letra g, en el caso que g no sea el elemento trivial del grupo. Al 1 lo manda a la palabra vacía.
El producto libre $\underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha$ cumple la siguiente propiedad universal: para todo grupo H y para toda familia de morfismos de grupos $\phi_\alpha : G_\alpha \to H$ $(\alpha \in \Lambda)$, existe un único morfismo $\phi : \underset{\alpha\in\Lambda}{*} G_\alpha \to H$ tal que $\phi i_\alpha = \phi_\alpha$. Esto es sencillo de ver y dejamos los detalles al lector. Notar que el morfismo ϕ queda definido como $\phi(g_1 \dots g_m) = \phi_{\alpha_1}(g_1) \dots \phi_{\alpha_m}(g_m)$ si $g_i \in G_{\alpha_i}$.

Ejemplo 11.1.10. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z} \equiv F(a, b)$. En general, $\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ veces}} = F(n)$ (el grupo libre de rango n).

Para entender lo que nos dice el Teorema de van Kampen necesitamos estudiar el producto amalgamado de grupos, que se define de la siguiente manera.

Sea $\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi} & G \\ {\scriptstyle\psi}\downarrow & & \\ H & & \end{array}$ un diagrama de grupos. El producto amalgamado $G \underset{T}{*} H$ es el grupo $G \underset{T}{*} H = G * H/N$ donde $N \leq G * H$ es el subgrupo normal generado por la familia de elementos $\{\underbrace{\varphi(t)\psi(t)^{-1}}_{\text{palabras de 2 letras}} \mid t \in T\} \subseteq G * H$.

$G \underset{T}{*} H$ queda determinado (salvo isomorfismos) por la siguiente propiedad universal (que dejamos como ejercicio): para todo grupo S y para todo par de morfismos $f_G : G \to S$ y $f_H : H \to S$ tales que $f_G\varphi = f_H\psi$, existe un único morfismo $f : G \underset{T}{*} H \to S$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & G \arrow[d, "\overline{\psi}"] \arrow[ddr, bend left, "f_G"] & \\
H \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[drr, bend right, "f_H"'] & G \underset{T}{*} H \arrow[dr, dotted, "\exists!\ f"] & \\
 & & S
\end{tikzcd}$$

Observación 11.1.11. 1. Si $T = 1$ entonces $G \underset{T}{*} H = G * H$.

2. Si $G = H = 1$, entonces $G \underset{T}{*} H = 1$.

3. Si $G = 1$, entonces $G \underset{T}{*} H = H/\langle\langle \mathrm{Im}(\psi)\rangle\rangle$.

11.2. Teorema de van Kampen

Enunciemos primero la versión del teorema para dos abiertos. Para esto fijemos un poco de notación.

Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $X = U \cup V$. Supongamos además que U, V y $U \cap V$ son arcoconexos y no vacíos y sea $x_0 \in U \cap V$. Consideremos los siguientes diagramas de inclusiones de subespacios y de morfismos inducidos por las inclusiones en los grupos fundamentales (recordar que los morfismos inducidos por las inclusiones a nivel π_1 en general dejan de ser inyectivos). Los grupos fundamentales que consideramos son todos con punto base x_0 y los notaremos directamente $\pi_1(X)$, etc. También para simplificar notación a los morfismos inducidos por las inclusiones, por ejemplo por la inclusión i_U los notaremos de la misma forma que las inclusiones (en este caso i_U) en lugar de usar la notación $(i_U)_*$:

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, "i_U"] \arrow[d, "i_V"'] & U \arrow[d, "j_U"] \\
V \arrow[r, "j_V"'] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V) \arrow[r, "i_U"] \arrow[d, "i_V"'] & \pi_1(U) \arrow[d, "j_U"] \\
\pi_1(V) \arrow[r, "j_V"'] & \pi_1(X)
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del producto amalgamado, los morfismos j_U, j_V del segundo diagrama inducen un único morfismo $j : \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) \to \pi_1(X)$ tal que $j|_{\pi_1(V)} = j_V$ y $j|_{\pi_1(U)} = j_U$.

Teorema 11.2.1 (Teorema de van Kampen para dos abiertos)**.** *Sea X un espacio topológico, bajo las condiciones anteriores, j es un isomorfismo de grupos. Es decir:*

$$\pi_1(X) \equiv \pi_1(U) \underset{\pi_1(U\cap V)}{*} \pi_1(V) = \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N}$$

donde $N = \langle\langle i_U(\omega) i_V(\omega)^{-1}\rangle\rangle_{\omega\in\pi_1(U\cap V)}$.

Antes de hacer la demostración, veamos primero algunas aplicaciones y consecuencias. También enunciaremos la versión general del teorema (para varios abiertos) pero solo probaremos la versión para dos abiertos. La demostración de la versión general sigue la misma dirección que la de dos abiertos pero tiene algunas complicaciones técnicas. La demostración de la versión general se puede ver en [Hatcher].

Corolario 11.2.2. Sea X un espacio topológico y sean U, V abiertos de X simplemente conexos tales que $X = U \cup V$ y tal que $U \cap V$ es arco-conexo y no vacío. Entonces X es simplemente conexo.

Demostración. Sale aplicando el Teorema de van Kampen, teniendo en cuenta que $\pi_1(U) = \pi_1(V) = 1$. □

Corolario 11.2.3. Si $n \geq 2$, la esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa.

Demostración. Sean p y q los polos (norte y sur) de la esfera. Sean $U = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$. Notar que U y V son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto son contráctiles, y en particular simplemente conexos. Además $\mathbb{S}^n = U \cup V$ y $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$ que es homotópicamente equivalente al ecuador $\mathbb{S}^{n-1}$. Como $n - 1 \geq 1$, $\mathbb{S}^{n-1}$ es arco-conexo y podemos entonces aplicar el corolario anterior y así deducimos que $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo. □

Corolario 11.2.4. Sea $n \geq 2$ y sea $\mathbb{R}P^n$ el espacio proyectivo. Entonces $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$.

Demostración. Consideremos el revestimiento $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, $p(x) = [x] \in \mathbb{S}^n / x \sim x$. Sea $x \in \mathbb{R}P^n$ punto base. Notar que la fibra E_x tiene dos elementos. Como $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo, por el Corolario 10.2.8 se tiene que $\pi_1(\mathbb{R}P^n, x)$ tiene dos elementos (porque está en biyección con la fibra) y el único grupo de dos elementos es $\mathbb{Z}_2$. □

Enunciamos ahora la versión general del teorema de van Kampen.

Teorema 11.2.5 (Teorema de van Kampen–versión general)**.** *Sea X espacio topológico y sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento por abiertos de X tal que $\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \neq \emptyset$ y $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, $A_\alpha, A_\alpha \cap A_\beta$ y $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ son arco-conexos. Sea $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$. Entonces*

$$\pi_1(X, x_0) = \mathop{*}_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(A_\alpha, x_0)/N$$

donde $N = \langle\langle i_\alpha(\omega) i_\beta(\omega)^{-1} \rangle\rangle_{\substack{\omega\in\pi_1(A_\alpha\cap A_\beta)\\ \alpha,\beta\in\Lambda}}$.

Corolario 11.2.6. Bajo las hipótesis del caso general de van Kampen, si pedimos además que $A_\alpha \cap A_\beta$ sea simplemente conexo para todo $\alpha, \beta \in \Lambda$, entonces $\pi_1(X) = \mathop{*}\limits_{\alpha\in\Lambda} \pi_1(A_\alpha)$.

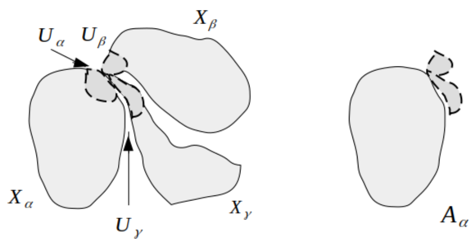
Definición 11.2.7. Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Decimos que (X, x) es un espacio bien punteado si existe un entorno abierto U de x tal que $\{x\} \subseteq U$ es rdf (retracto por deformación fuerte).

Como ejemplo, aunque no lo probaremos en estas notas, todos los CW-complejos son bien punteados (en cualquiera de sus puntos).

Para simplificar notación, cuando digamos que un espacio X es bien punteado estaremos pensando en que tenemos fijado un punto base (y que X es bien punteado en ese punto) y los grupos fundamentales serán con ese punto base.

Proposición 11.2.8. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios arco-conexos bien punteados. Sea $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ la unión en un punto. Entonces $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) = \ast_{\alpha\in\Lambda}\pi_1(X_\alpha)$. En particular, $\pi_1(\bigvee_{\alpha\in\Lambda}\mathbb{S}^1) = F(\Lambda)$ (grupo libre con base Λ).

Demostración. Para cada α tenemos un entorno abierto U_α de x_α tal que $\{x_\alpha\}\subseteq U_\alpha$ es rdf. Sea $A_\alpha = X_\alpha \bigvee_{\beta\neq\alpha} U_\beta$.



Notar que $X_\alpha\subseteq A_\alpha$ es rdf para todo α. Además, si $\alpha\neq\beta$, $A_\alpha\cap A_\beta = \bigvee_\eta U_\eta \simeq \ast$. Como $A_\alpha\cap A_\beta$ es simplemente conexo y $A_\alpha\cap A_\beta\cap A_\gamma = \bigvee_\eta U_\eta$ que es arco-conexo, por el corolario anterior tenemos que

$$\pi_1(\bigvee_\alpha X_\alpha) = \ast_\alpha \pi_1(A_\alpha) = \ast_\alpha \pi_1(X_\alpha).$$

□

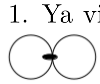
Como caso particular de la proposición anterior, deducimos que el grupo fundamental de la figura 8 ($\mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$) es $\mathbb{Z}\ast\mathbb{Z}$. Este es el ejemplo más sencillo de un espacio con grupo fundamental no abeliano.

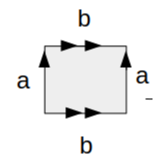
Veamos ahora como aplicar el teorema de van Kampen para calcular el grupo fundamental de CW-complejos de dimensión 2. Daremos acá solo las ideas y algunos ejemplos. Para la demostración completa y formal de lo siguiente recomendamos los libros [Munkres, Hatcher].

Veamos primero cómo cambia el grupo fundamental cuando adjuntamos una 2-celda a un espacio arco-conexo B. Supongamos que tenemos una adjunción de una 2-celda:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[d] \\ \mathbb{D}^2 \arrow[r] & B\cup e^2 \end{tikzcd}$$

"Engordando" un poco a B para obtener un abierto U de $B\cup e^2$ que se retrae por deformación fuerte a B y tomamos V como el interior de la 2-celda $\overset{\circ}{e}{}^2$. Estamos en condiciones de usar van Kampen para dos abiertos, uno de ellos, V, que es simplemente conexo, y cuya intersección (que se retrae por deformación fuerte al borde de la celda adjuntada) es arco-conexa. Así se tiene $\pi_1(B\cup e^2) = \pi_1(B)/\langle\langle \mathrm{Im}(\varphi_*)\rangle\rangle$.

Ejemplos 11.2.9. 1. Ya vimos que podemos pensar al toro como el CW-complejo que se obtiene de $B =$  $= \mathbb{S}^1\vee\mathbb{S}^1$ adjuntado una 2-celda con la función de adjunción que manda el borde del cuadrado como lo indican sus etiquetas (la arista a recorre uno de los círculos en cierta dirección y la b el otro de los círculos).

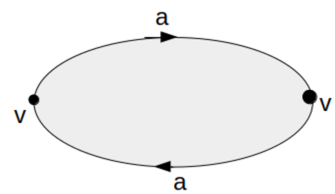


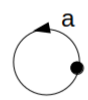
Tenemos entonces $\pi_1(B) = F(a,b)$ y $\langle\langle \mathrm{Im}(\varphi_*) \rangle\rangle = \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle$ y así obtenemos

$$\pi_1(T) = F(a,b))/\langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle$$

que es el grupo presentado por $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$, es decir $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

2. El plano proyectivo



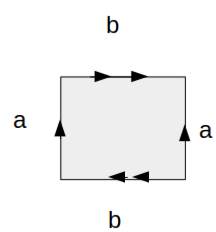
es el CW-complejo que se obtiene de $B =$ 

con la función de adjunción que recorre al círculo como marca la figura. En este caso $\pi_1(B) = F(a)$ y $\langle\langle \mathrm{Im}(\varphi_*) \rangle\rangle = \langle\langle a^2 \rangle\rangle$ y así obtenemos

$$\pi_1(T) = F(a))/\langle\langle a^2 \rangle\rangle$$

que es el grupo presentado por $\langle a \mid a^2 \rangle$, es decir $\mathbb{Z}_2$.

3. La botella de Klein se obtiene de $B = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ adjuntando una 2-celda como marca la figura



Por lo tanto su grupo fundamental es el presentado por $\langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle$.

Veamos ahora, usando estas ideas, que para todo grupo G existe un espacio arco-conexo cuyo grupo fundamental es isomorfo a G:

Dado un grupo G, tomamos una presentación $P = \langle X \mid R \rangle$ de G y nos construimos un CW-complejo de dimensión 2 de la siguiente manera:

1. Empezamos con una 0-celda v.

2. Le adjuntamos una 1-celda x por cada $x \in X$ y así obtenemos una unión en un punto de tantas copias de $\mathbb{S}^1$ como elementos de X.

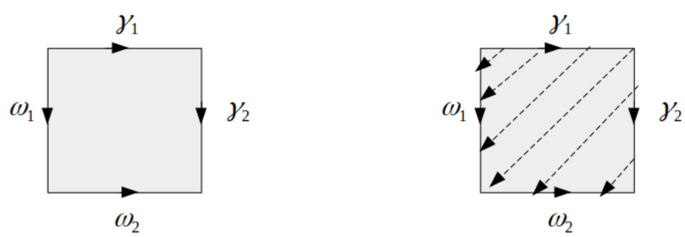
3. Por cada relación $r \in R$ adjuntamos una 2-celda tomando un n-ánogo (donde n es la longitud de la palabra r) y etiquetamos las aristas de su borde con las letras de la palabra r y pegamos cada arista del borde en el círculo correspondiente con esa arista (como hicimos en los ejemplos anteriores). Para eso, como hicimos anteriormente, le damos una dirección u orientación a las 1-celdas para distinguir una letra de su inversa.

Así obtenemos un CW-complejo Y de dimensión 2 cuyo grupo fundamental tiene como presentación $P = \langle X \mid R \rangle$, es decir con grupo fundamental isomorfo a G. Esto prueba que para todo grupo G existe un espacio arco-conexo (más aún, un CW-complejo de dimensión 2) cuyo grupo fundamental es G.

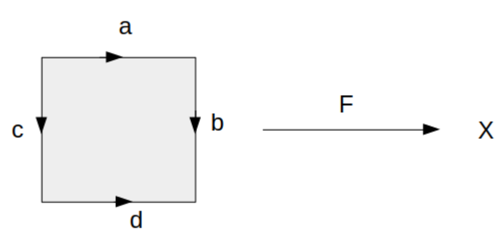
Ahora sí, veamos la demostración del teorema de van Kampen para dos abiertos. Necesitamos hacer previamente algunas observaciones.

Observación 11.2.10. Dado un espacio X, un camino $\omega : I \to X$ y una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de I, definimos los caminos $\omega_i : I \to X$ como $\omega_i = \omega|_{[t_{i-1},t_i]}\varphi_i$ donde $\varphi_i : I \to [t_{i-1}, t_i]$ es el homemomorfismo lineal que manda 0 a t_{i-1} y 1 a t_i (es decir ω_i es restringir ω al subintervalo correspondiente y re-escalarlo). Entonces $\omega \underset{p}{\simeq} \omega_1 * \ldots * \omega_n$.

Observación 11.2.11. Consideremos el cuadrado $I \times I$ y sean $\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2$ los caminos que recorren el borde del cuadrado como indica la figura de abajo. Como $I \times I$ es convexo, mediante la homotopía lineal que marca el dibujo, se tiene que $\gamma_1 * \gamma_2 \underset{p}{\simeq} \omega_1 * \omega_2$.



A partir de esto, si tenemos ahora una homotopía $F : I \times I \to X$ y la restricción de la función F a los bordes del cuadrado es:



Entonces $a * b \underset{p}{\simeq} c * d$ (ya que componemos la homotopía de caminos que teníamos a $I \times I$ con la F). De esto podemos obtener, por ejemplo, que $a \underset{p}{\simeq} c * d * \overline{b}$.

Ahora sí, la demostración de van Kampen:

Demostración de Teorema 11.2.1. Sea $X = U \cup V$ con $U, V, U \cap V$ arco conexos. Debemos probar que $\pi_1(X) \equiv \pi_1(U) \underset{\pi_1(U \cap V)}{*} \pi_1(V)$. Para ver esto, veamos que $\pi_1(X)$ tiene la propiedad universal del producto amalgamado: Dado H un grupo, $\phi_U : \pi_1(U) \to H$, $\phi_V : \pi_1(V) \to H$ tales que $\phi_U i_U = \phi_V i_V$, debemos ver que existe un único morfismo $\phi : \pi_1(X) \to H$ tal que $\phi j_V = \phi_V$, $\phi j_U = \phi_U$.

Vamos a usar la siguiente notación: si ω es un camino o un lazo en U, notaremos $[\omega]$ a su clase homotópica (como camino) en X y con $[\omega]_U$ a su clase en U. Notar que $j_U([\omega]_U) = [\omega]$. Lo mismo si está en V o en $U \cap V$. Por ejemplo $i_U([\omega]_{U \cap V}) = [\omega]_U$.

Primero probaremos la unicidad de $\phi : \pi_1(X) \to H$ (si es que existe). Notar que para ver esto, basta ver que $j_U(\pi_1(U))$ y $j_V(\pi_1(V))$ generan $\pi_1(X)$ (porque en esos lugares la ϕ tiene que valer lo que valen ϕ_U y ϕ_V). Y ver que lo generan es equivalente a ver que el morfismo $j : \pi_1(U) * \pi_1(V) \to \pi_1(X)$ es epimorfismo. Probemos eso. Tomamos $[\omega] \in \pi_1(X), \omega : I \to X$. Como I es compacto, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de I tal que $\omega|_{[t_{i-1},t_i]} \subseteq U$ o V y $\omega(t_i) \in U \cap V$ para todo i. Por la observación previa, se tiene que $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'_1 * \ldots * \omega'_n$ donde ω'_i es el camino $\omega|_{[t_{i-1},t_i]}$ re-escalado. Nosotros necesitamos escribirlo como producto de lazos que caen en U o V (no solo de caminos) y por eso hacemos los siguiente. Para cada $x_i = \omega(t_i) \in U \cap V$ $(i = 1 \ldots n-1)$ elegimos un camino $x_0 \xrightarrow{\alpha_i} x_i$ en $U \cap V$ (sabemos que $U \cap V$ es arco-conexo) y sean α_0 y α_n los caminos constantes x_0. Definimos $\omega_i = \alpha_{i-1} * \omega'_i * \overline{\alpha_i}$ y así

$$\omega \underset{p}{\simeq} (\alpha_0 * \omega'_1 * \overline{\alpha_1}) * (\alpha_1 * \omega'_2 * \overline{\alpha_2}) * \ldots * \alpha_n \underset{p}{\simeq} \omega_1 * \ldots \omega_n$$

Es decir, logramos escribir a $[\omega]$ como producto de lazos ω_i que caen en U o en V, es decir cada $[\omega_i] = j_U([\omega_i]_U)$ o $j_V([\omega_i]_V)$. Esto prueba que j es sobreyectiva.

Ahora que ya probamos la unicidad, probemos la existencia de $\phi : \pi_1(X) \to H$ tal que $\phi j_U = \phi_U$ y $\phi j_V = \phi_V$. La vamos definiendo de a poco.

Primero definimos una función ρ en los lazos que caen en U o en V. Si ω es un lazo que cae en U o en V definimos $\rho(\omega) = \phi_U([\omega]_U)$ si cae en U y $\rho(\omega) = \phi_V([\omega]_V)$ si cae en V. Si ω cae en $U \cap V$ la ρ está bien definida porque $\phi_U i_U = \phi_V i_V$. Notar que si $[\omega]_U = [\omega']_U$ entonces $\rho(\omega) = \rho(\omega')$ (ídem con V) y que $\rho(\omega * \omega') = \rho(\omega) * \rho(\omega')$.

Ahora extendemos ρ a una función ρ' definida en los caminos que caen en U o en V. Es similar a como hicimos para la unicidad: para cada $x \in X$ elegimos un camino $x_0 \xrightarrow{\alpha_x} x$. Si $x \in U$ lo elegimos en U, similarmente si está en V o en $U \cap V$ (usamos que todos son arco-conexos). Si $x = x_0$ tomamos el camino constante. Dado un camino ω de x a y lo convertimos en un lazo en x_0 tomando $L(\omega) = \alpha_x * \omega * \overline{\alpha_y}$ y definimos $\rho'(\omega) = \rho(L(\omega))$. Así extendimos ρ a los caminos que caen en U o en V.

Ahora viene el paso más complicado: extendemos ρ' a una ρ'' definida en los caminos que caen en X y de tal forma que cumpla:

1. Si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ en X entonces $\rho''(\omega) = \rho''(\omega')$.
2. $\rho''(\omega * \omega') = \rho''(\omega) * \rho''(\omega')$.

Tomando luego $\phi([\omega]) := \rho''(\omega)$ tendremos el morfismo bien definido buscado.

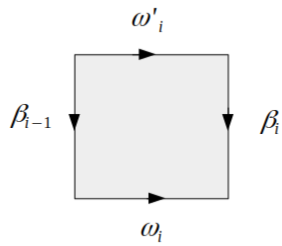
Sea ω un camino en X. Tomamos una partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ de I tal que $\omega|_{[t_{i-1},t_i]} \subseteq U$ o V. Ya vimos que $\omega \underset{p}{\simeq} \omega_1 * \ldots * \omega_n$ donde ω_i es el camino $\omega|_{[t_{i-1},t_i]}$ re-escalado. Definimos $\rho''(\omega) = \rho''(\omega_1) \ldots \rho''(\omega_n)$.

Notemos primero que ρ'' no depende de la partición $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ elegida, dado que dos particiones de I se pueden refinar a una partición (subdivisión) en común, y por lo tanto solo debemos ver que ρ'' no se altera si subdividimos una partición. Pero si agregamos $t_{i-1} < s < t_i$ y llamamos $\omega_i^1 = \omega|_{[t_{i-1},s]}$, $\omega_i^2 = \omega|_{[s,t_i]}$, como $\omega_i \underset{p}{\simeq} \omega_i^1 * \omega_i^2$ y ρ' respeta el producto, se tiene que ρ'' no cambia al subdividir.

Veamos ahora que ρ'' cumple (1). Si $\omega \underset{p}{\simeq} \omega'$ en X entonces $\rho''(\omega) = \rho''(\omega')$. Sea $F : I \times I \to X$, $F : \omega \underset{p}{\simeq} \omega'$. Por compacidad de $I \times I$, existen particiones $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ y $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ tales que $F([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U$ o V. Si llamamos

$\widetilde{\omega_j}(s) = F(s, t_j)$, se tiene que $\widetilde{\omega_0} = \omega$, $\widetilde{\omega_n} = \omega'$ y por lo tanto para ver que $\rho''(\omega) = \rho''(\omega')$ basta ver que $\rho''(\widetilde{\omega_{j-1}}) = \rho''(\widetilde{\omega_j})$ para cada fila j. Entonces podemos suponer directamente que la partición anterior en cuadraditos tiene solo una fila, es decir, podemos suponer que existe una partición $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$ de I tal que $F([s_{i-1}, s_i] \times I) \subseteq U$ o V.

En ese caso, si tomamos $\omega_i = \omega_{[s_{i-1}, s_i]}$ re-escalado y lo mismo con ω'_i y llamamos $\beta_i(t) = F(s_i, t)$, se tiene para cada i un rectángulo con los siguientes caminos en el borde:



y por la observación previa $\omega'_i \underset{p}{\simeq} \beta_{i-1} * \omega_i * \overline{\beta_i}$ y entonces $\rho'(\omega'_i) = \rho'(\beta_{i-1})\rho'(\omega_i)\rho'(\overline{\beta_i})$ y haciendo el producto de todos los $\rho'(\omega'_i)$ $(i = 1 \ldots m)$, se van cancelando los $\rho'(\overline{\beta_i})$ con los $\rho'(\beta_i)$, y finalmente se tiene que $\rho''(\omega') = \rho''(\omega)$.

Dejamos a cargo del lector la demostración de (2): $\rho''(\omega * \omega') = \rho''(\omega) * \rho''(\omega')$. $\square$

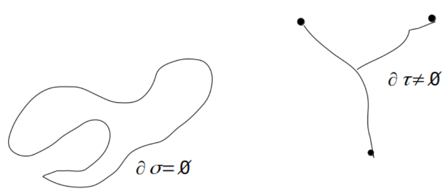
Capítulo 12

Homología y aplicaciones

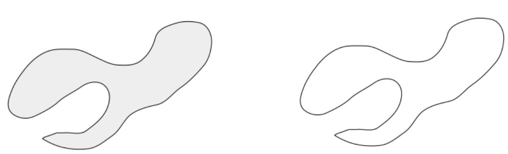
12.1. Ideas preliminares y homología simplicial

¿Cómo podemos distinguir estos tres espacios: $\mathbb{S}^2$, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{R}^2$? Concretamente, ¿cómo vemos que no podemos deformar continuamente uno en otro (es decir, que no son homotópicamente equivalentes)? $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^1$ tienen agujeros y $\mathbb{R}^2$ no, así distinguimos las esferas de $\mathbb{R}^2$. Por otro lado el agujero de $\mathbb{S}^2$ es de una dimensión más grande que el de $\mathbb{S}^1$, y así distinguimos las dos esferas entre sí. Notar que $\mathbb{S}^1$ se distingue de $\mathbb{S}^2$ y de $\mathbb{R}^2$ mediante el π_1 ya que $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ y los otros dos espacios son simplemente conexos. Pero el π_1 no distingue $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^2$. La homología mide los "agujeros" en distintas dimensiones. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $H_n(X)$ mide los agujeros de grado n en el sentido de que la esfera $\mathbb{S}^n$ tiene un agujero en grado n y ninguno en otro grado.

Un "potencial" agujero en grado 1 queda determinado por un 1-ciclo que es un camino sin bordes.



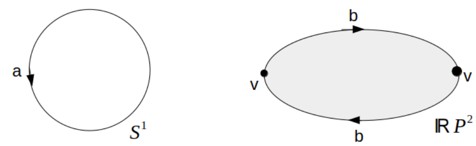
Pero el ciclo determina un agujero si no es borde de "alguien".



Ciclo que es borde, no hay agujeros

Ciclo que no es borde determina un agujero

Pero en realidad hay sutilezas a tener en cuenta:



En $\mathbb{S}^1$ el ciclo a no es borde y además $n.a$ no es borde para ningún $n \in \mathbb{Z}$, esto nos dice que $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$ (generado por el ciclo a). Pero en el plano proyectivo $\mathbb{R}P^2$ el ciclo b no es un borde pero $b + b$ sí lo es, esto nos dirá que $H_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ generado por b.

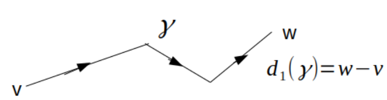
Para entender mejor cómo se define la homología veamos primero el caso simplicial, que es cómo se estudió originalmente. Recordemos que un complejo simplicial K es una unión de símplices en algún $\mathbb{R}^m$ suficientemente grande y tal que si σ, τ son símplices de K entonces $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \tau$ o $\sigma \cap \tau = \emptyset$.

¿Cómo chequeamos si un complejo simplicial K es arco-conexo?

1. Como los símplices son convexos (en particular arco-conexos) todo $x \in K$ se puede conectar por medio de un camino con un vértice, por lo tanto para ver si K es arco-conexo basta ver si se pueden conectar los vértices entre sí con caminos.

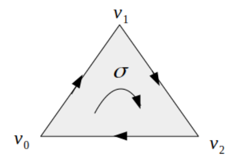
2. Si $v \xrightarrow{\gamma} w$ es un camino continuo entre dos vértices, como los símplices son convexos, podemos deformar γ a un camino γ' de v a w tal que γ' sea un camino de aristas.

3. Una arista es un 1-símplex $\{v_0, v_1\}$. Para poder caminar por aristas, necesitamos orientarlas. Denotamos $[v_0, v_1]$ a la arista orientada de v_0 a v_1 y definimos su borde como $d_1([v_0, v_1]) = v_1 - v_0$, que es un elemento en el grupo abeliano libre generado por los vértices de K y que denotamos $C_0(K)$. Denotamos $C_1(K)$ al grupo abeliano libre generado por las aristas orientadas de K donde identificamos a $[v, w]$ con $-[w, v]$ y así tenemos el morfismo de borde $d_1 : C_1(K) \to C_0(K)$ que vale $d_1([v_0, v_1]) = v_1 - v_0$ en los generadores y extendemos linealmente.



Notar que $C_0(K)/\operatorname{Im}(d_1)$ es el grupo abeliano libre generado por las componentes arcoconexas de K ya que la clase de un vértice v será igual que la de un vértice w en $C_0(K)/\operatorname{Im}(d_1)$ si existe un camino de aristas que los une. Denotamos $H_0(K) = C_0(K)/\operatorname{Im}(d_1)$. Esta es la homología del complejo simplicial K en grado 0 y mide las componentes arcoconexas. $H_0(K)$ es el grupo abeliano libre cuyo rango es la cantidad de componentes arco-conexas de K.

Si $\gamma \in C_1(K)$ (es decir, es una suma formal de 1-simplices) y $d_1(\gamma) = 0$, entonces γ no tiene borde (todos los bordes de las aristas se van cancelando con los bordes de otras aristas en orientación opuesta, si una arista llega a un vértice, la otra sale de ese vértice). Un tal "camino" γ se llama un 1-ciclo y sería un potencial agujero. Para ver si un 1-ciclo $\gamma \in \operatorname{Ker} d_1 \subseteq C_1(K)$ es el borde de "algo" de dimensión más grande, debemos considerar los 2-símplices:



En la figura el 2-símplex σ está orientado como $[v_0.v_1, v_2]$ y su borde es el 1-ciclo $\gamma = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$.

En general, para todo n tomamos $C_n(K)$ como el grupo abeliano libre generado por los n-símplices orientados de K $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ donde se identifica

$$[v_{\phi(0)}, \ldots, v_{\phi_n}] = sg(\phi)[v_0, \ldots, v_n]$$

si $\phi \in S_{n+1}$ (permutación de $n+1$ elementos) y $sg(\phi) \in \{1, -1\}$ es el signo de la permutación. El borde de un n-símplex orientado es:

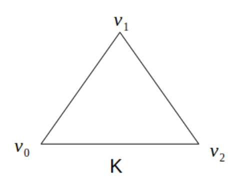
$$d_n([v_0, \ldots, v_n]) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

donde $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ es el $(n-1)$-símplex que se obtiene borrando el vértice i-ésimo. Así lo que obtenemos es un diagrama de grupo abelianos:

$$\ldots \to C_n(K) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(K) \to \ldots \to C_2(K) \xrightarrow{d_2} C_1(K) \xrightarrow{d_1} C_0(K)$$

Se puede ver que $\operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \text{Ker } d_n$ $\forall n$ y se define la homología del complejo simplicial K en grado n como el grupo abeliano $H_n(K) = \frac{\text{Ker } d_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}}$. La homología en grado n mide los n-ciclos Ker d_n módulo los n-bordes $\operatorname{Im} d_{n+1}$ y son los potenciales agujeros módulo los bordes, es decir los verdaderos agujeros de K de grado n.

Ejemplo 12.1.1. Calculemos $H_n(\mathbb{S}^1)$ $\forall n$ con esta triangulación K:

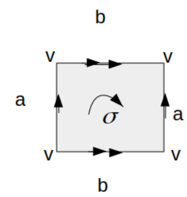


Se tiene $C_0(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por v_0, v_1, v_2, $C_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por $[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_0, v_2]$ y $C_n(K) = 0$ para $n \geq 2$. Entonces se tiene el diagrama de grupos abelianos:

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to 0$$

Se puede ver que $H_0(K) = \mathbb{Z}$ y $H_1(K) = \text{Ker } d_1 = \mathbb{Z}$ (generado por el 1-ciclo $\gamma = [v_0, v_1] + [v_1, v_2] + [v_2, v_0]$).

En realidad se puede calcular también la homología de un espacio con estructuras más flexibles que los complejos simpliciales, como por ejemplo los CW-complejos. Informalmente damos un ejemplo: tomamos el toro T con una estructura de CW-complejo con una 0-celda v, dos 1-celdas a, b y una 2-celda σ orientadas como en la figura.



Se tiene que $C_0(K) = \mathbb{Z}$ generado por v, $C_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ generado por a, b y $C_2(K) = \mathbb{Z}$ generado por σ. Además los bordes son $d_1(a) = v - v = 0$, $d_1(b) = v - v = 0$ (porque ambas empiezan y terminan en v) y $d_2(\sigma) = a + b - a - b = 0$.

Así, como $d_1 = d_2 = 0$ tenemos: $H_0(T) = \mathbb{Z}$, $H_1(T) = \frac{\text{Ker } d_1}{\text{Im } d_2} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $H_2(T) = \text{Ker } d_2 = \mathbb{Z}$ y $H_n(T) = 0 \ \forall n \geq 3$.

12.2. Background algebraico

Desarrollaremos ahora parte del background algebraico necesario para poder definir más formalmente la homología, poder calcularla y probar resultados. En lo que sigue A es un anillo conmutativo. Podemos pensar siempre que $A = \mathbb{Z}$.

Definición 12.2.1. Una sucesión de A-módulos es un diagrama de A-módulos y morfismos de A-módulos:

$$\ldots \to C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$$

Decimos que la sucesión es exacta en el lugar k si $\text{Im}\, d_{k+1} = \text{Ker } d_k$ y la sucesión se dice exacta si es exacta en todo lugar.

Observación 12.2.2.

1. $0 \to M \xrightarrow{f} N$ es exacta si y solo si f es monomorfismo.
2. $M \xrightarrow{g} N \to 0$ es exacta si y solo si g es epimorfismo.
3. $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ es exacta si y solo si f es isomorfismo.

Definición 12.2.3. Una sucesión exacta corta (SEC) es una sucesión exacta de la forma:

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N \to 0$$

Es decir, f es monomorfismo, g es epimorfismo y $\text{Ker} g = \text{Im}\, f$.

Los siguientes son dos ejemplos de SEC:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{inc_1} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{pr_2} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

Definición 12.2.4. Un complejo de cadenas de A-módulos (C_*, d) es una sucesión de A-módulos

$$\ldots \to C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$$

tal que para todo k, $d_k d_{k+1} = 0$ o equivalentemente, $\text{Im}\, d_{k+1} \subseteq \text{Ker } d_k$ (esto se denota generalmente como $d^2 = 0$). Los d_k se llaman morfismos de borde.

Definición 12.2.5. Sea (C_*, d) complejo de cadenas. Para todo $n \geq 0$ se definen:

1. Los n-ciclos $Z_n = \text{Ker } d_n \subseteq C_n$.

2. Los n-bordes $B_n = \operatorname{Im} d_{n+1} \subseteq \text{Ker } d_n \subseteq C_n$.

3. El n-ésimo grupo de homología $H_n(C_*) = Z_n/B_n = \frac{\text{Ker } d_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}}$.

Definición 12.2.6. Un complejo de cadenas (C_*, d) se dice acíclico (ó exacto) si es una sucesión exacta, es decir, si $H_n(C_*) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Definición 12.2.7. Un morfismo de complejos $f : (C_*, d) \to (C'_*, d')$ es una familia de morfismos de A-módulos $f_n : C_n \to C'_n$ para todo n tal que los diagramas siguientes conmutan

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \end{tikzcd}$$

Para abreviar notación, a los complejos de cadenas los denotaremos simplemente C_* y el morfismo de borde d quedará implícito. También a la homología $H_n(C_*)$ la denotaremos indistintamente $H_n(C)$.

Proposición 12.2.8. Un morfismo $f : C_* \to C'_*$ induce morfismo de A-módulos $f_n : H_n(C) \to H_n(C')$ entre las homologías, definidos como $f_n([x]) = [f_n(x)]$ donde $[x]$ denota la clase en el cociente.

Demostración. $H_n(C) = Z_n/B_n$ y $H_n(C') = Z'_n/B'_n$. Para ver que f induce $f_n : Z_n/B_n \to Z'_n/B'_n$ basta ver que $f(Z_n) \subseteq Z'_n$ y que $f(B_n) \subseteq B'_n$.

Si $x \in Z_n$ entonces $d_n(x) = 0$. Considero $f_n(x) \in C'_n$, debemos ver que $d'_n(f_n(x)) = 0$. Pero $d'_n(f_n(x)) = f_{n-1}(d_n(x)) = f_{n-1}(0) = 0$.

Veamos ahora que $f_n(B_n) \subseteq B'_n$. Sea $x \in B_n$, entonces $x = d_{n+1}(y)$ para algún y. Entonces $f_n(x) = f_n(d_{n+1}(y)) = d'_{n+1}(f_{n+1}(y)) \in B'_n$. $\square$

Definición 12.2.9. Sean $f, g : C_* \to C'_*$ morfismos de complejos. Una homotopía $h : f \simeq g$ (de f a g) es una familia de morfismos $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ $\forall n$, tales que $f_n - g_n = d'_{n+1}h_n + h_{n-1}d_n$

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & C'_n \arrow[r, "d'_n"] & C'_{n-1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Observemos que $\simeq$ es relación de equivalencia en el conjunto de morfismos de C_* a C'_*, ya que

1. Tomando $h_n = 0$ para todo n se ve que $f \simeq f$.

2. Si $h : f \simeq g$, entonces $-h : g \simeq f$.

3. Si $h : f \simeq g$ y $l : g \simeq r$ entonces $h + l : f \simeq r$.

Proposición 12.2.10. Sean $f, g : C_* \to C'_*$ morfismos de complejos. Si $f \simeq g$ entonces $f_n = g_n : H_n(C) \to H_n(C')$ $\forall n$.

Demostración. Sea $[x] \in H_n(C) = \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. Sea $h : f \simeq g$. Entonces

$$f_n([x]) - g_n([x]) = [f_n(x) - g_n(x)] = [d'_{n+1}h_n(x) + h_{n-1}d_n(x)] = [d'_{n+1}(h_n(x))] = 0 \in H_n(C').$$

□

De ahora en más, para simplificar más la notación, no notaremos los grados de las funciones, por ejemplo escribiremos $d : C_n \to C_{n-1}$ en lugar de d_n o $f : H_n(C) \to H_n(C')$ en lugar de f_n. El grado quedará implícito por los dominios y codominios.

Proposición 12.2.11 (Lema de la Serpiente)**.** Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de A-módulos, donde las filas son exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f'"'] & N' \arrow[r, "g'"'] & P' &
\end{tikzcd}$$

Entonces se tiene una sucesión exacta:

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\tilde{f}} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\tilde{g}} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\partial} \operatorname{CoKer}\alpha \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{CoKer}\beta \xrightarrow{\overline{g'}} \operatorname{CoKer}\gamma$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g}$ son los morfismos f, g restringidos a los núcleos y $\overline{f'}, \overline{g'}$ son los inducidos en los cocientes por f', g'. Recordemos que $\operatorname{CoKer}\alpha = M'/\operatorname{Im}\alpha$. Al morfismo ∂ se lo llama “morfismo de conexión”.

Demostración. Es fácil de ver que f' y g' pasan bien al cociente (conúcleos) y que f y g se restrigen bien a los núcleos porque los cuadrados son conmutativos. La parte interesante y no inmediata de la demostración es la definición del morfismo de conexión $\partial : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{CoKer}\alpha$.

Sea $x \in \operatorname{Ker}\gamma \subseteq P$. Como g es epimorfismo, existe un $y \in N$ tal que $g(y) = x$, y como $\gamma(x) = 0$, $g'\beta(y) = \gamma g(y) = \gamma(x) = 0$. Esto dice que $\beta(y) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. Por lo tanto existe $z \in M'$ tal que $f'(z) = \beta(y)$. Consideramos su clase $[z] \in \operatorname{CoKer}\alpha = M'/\operatorname{Im} f$ y definimos $\partial(x) = [z]$.

Notar que en la definición de ∂ hicimos varias elecciones: elegimos un $y \in N$ tal que $g(y) = x$ y un $z \in M'$ tal que $f'(z) = \beta(y)$. Dejamos como ejercicio para el lector probar que la clase $[z]$ no depende del y y del z elegidos. De esto se deduce que ∂ es morfismo de A-módulos (porque, por ejemplo para ver que respeta la suma, elegimos la suma de los que elegimos para cada sumando). □

Definición 12.2.12. Una SEC de complejos $0 \to C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \to 0$ es un diagrama de complejos de cadenas y morfismos de complejos tal que para todo n, $0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$ es SEC de A-módulos.

El siguiente resultado algebraico lo aplicaremos luego en el contexto topológico y nos permitirá calcular fácilmente la homología de espacios a partir de cubrimientos por abiertos. También será utilizado para relacionar la homología de un espacio con la de un subespacio.

Teorema 12.2.13. *Una SEC de complejos $0 \to C_* \xrightarrow{f} D_* \xrightarrow{g} E_* \to 0$ induce una sucesión exacta larga en las homologías:*

$$\ldots \to H_n(C) \xrightarrow{f_n} H_n(D) \xrightarrow{g_n} H_n(E) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_{n-1}} H_{n-1}(E) \xrightarrow{\partial} \ldots \to$$
$$\ldots \to H_0(C) \to H_0(D) \to H_0(E) \to 0$$

Demostración. Denotemos d^C, d^D, d^E a los morfismos de borde de los tres complejos, Z_n^C, Z_n^D, Z_n^E a los n-ciclos y B_n^C, B_n^D, B_n^E a los n-bordes. Para cada n tenemos un diagrama conmutativos de filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & C_n/B_n^C \arrow[r] \arrow[d, "d_n^C"'] & D_n/B_n^D \arrow[r] \arrow[d, "d_n^D"] & E_n/B_n^E \arrow[r] \arrow[d, "d_n^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_{n-1}^C \arrow[r] & Z_{n-1}^D \arrow[r] & Z_{n-1}^E &
\end{tikzcd}$$

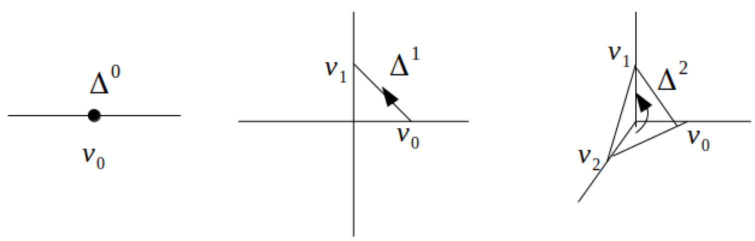
Aplicamos el Lema de la Serpiente a cada uno de esos diagramas y obtenemos para cada n una sucesión exacta:

$$H_n(C) \xrightarrow{f_n} H_n(D) \xrightarrow{g_n} H_n(E) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_{n-1}} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_{n-1}} H_{n-1}(E)$$

Concatenando todas las sucesiones exactas, se tiene la sucesión exacta larga deseada. $\square$

12.3. Homología singular y aplicaciones

Sea $n \geq 0$. Recordemos que el n-símplex estándar en $\mathbb{R}^{n+1}$ es $\Delta^n = [v_0, \dots, v_n]$ donde $\{v_0, \dots, v_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Vemos a Δ^n orientado.



Definimos la cara i-ésima de Δ^n como $[v_0, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n]$ (sacamos el vértice i) y lo identificamos con Δ^{n-1}. Por ejemplo, la cara 1-ésima del 2-símplex $[v_0, v_1, v_2]$ es $[v_0, v_2]$ (que se identifica con el 1-símplex estándar orientado de v_0 a v_2).

Definición 12.3.1. Sea X un espacio topológico. Sea $n \geq 0$. Un n-símplex singular en X es una función continua $\sigma : \Delta^n \to X$. Definimos $C_n(X)$ como el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los n-símplices singulares de X. Es decir:

$$C_n(X) = \{ \sum_{finita} n_\sigma \sigma \mid n_\sigma \in \mathbb{Z},\ \sigma : \Delta^n \to X \text{ continua}\}$$

Se define el morfismo de borde $d_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ en la base (y se extiende linealmente) como:

$$d_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}$$

donde $\sigma^{(i)}$ es la restricción a la cara i-ésima $\sigma^{(i)} = \sigma|_{[v_0 \dots \hat{v_i} \dots v_n]}$. Se tiene así un complejo de cadenas $(C_*(X), d)$:

$$\dots \to C_n(X) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(X) \to \dots \to C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \to 0$$

Veamos que efectivamente $(C_*(X), d)$ es un complejo de cadenas, es decir que $\operatorname{Im} d_n \subseteq \operatorname{Ker} d_{n-1}$ para todo n:

$$\begin{aligned} d_{n-1}d_n(\sigma) &= d_{n-1}(\sum_i (-1)^i \sigma|_{[v_0\ldots\hat{v_i}\ldots v_n]}) \\ &= \sum_{\substack{i,j \\ j<i}} (-1)^{i+j}\sigma|_{[v_0\ldots\hat{v_j}\ldots\hat{v_i}\ldots v_n]} + \sum_{\substack{i,j \\ j>i}} (-1)^{i+j+1}\sigma|_{[v_0\ldots\hat{v_i}\ldots\hat{v_j}\ldots v_n]} = 0 \end{aligned}$$

Al complejo de cadenas $(C_*(X), d)$ se lo llama complejo singular de X y su homología es la homología singular de X:

$$H_n(X) := H_n(C_*(X)) = \frac{\operatorname{Ker}\, d_n}{\operatorname{Im} d_{n+1}}$$

Ejemplo 12.3.2. Calculemos $H_n(X)$ para $X = *$ (singleton). Notar que existe una única función $\sigma : \Delta^n \to *$ para todo n (la constante). Llamemos $c_n : \Delta^n \to *$ a la función constante. Entonces $C_n(*) = \mathbb{Z}$ para todo n (generado por c_n). Calculemos $d_n : C_n(*) \to C_{n-1}(*)$.

$$d_n(c_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i c_{n-1}$$

y esto vale 0 cuando n es impar y c_{n-1} cuando n es par. Es decir, el complejo singular del singleton es:

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

Así vemos que $H_n(*) = 0$ si $n \geq 1$ y $H_0(*) = \mathbb{Z}$.

Proposición 12.3.3. Sea X espacio topológico y sean $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ sus componentes arco-conexas. Entonces $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_n(X_\alpha)$.

Demostración. Como Δ^n es arco-conexo para todo n y las $\sigma : \Delta^n \to X$ son continuas, entonces $C_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} C_n(X_\alpha)$ y $d_n = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} d_n|_{X_\alpha}$. Es decir, el complejo asociado a X es la suma directa de los complejos asociados a sus componenetes arco-conexas. Al calcular la homología se tiene entonces que $H_n(X) = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} H_n(X_\alpha)$. □

Proposición 12.3.4. Si X es arco-conexo (y no vacío) entonces $H_0(X) = \mathbb{Z}$. De esto se deduce, por la proposición anterior, que en general $H_0(X) = \bigoplus_{\substack{\#\text{componentes} \\ \text{arco-conexas}}} \mathbb{Z}$

Demostración. Sea X espacio arco-conexo. Sabemos que $H_0(X) = C_0(X)/\operatorname{Im} d_1$, donde

$$C_0(X) = \{\sum_{finita} n_x x \mid n_x \in \mathbb{Z},\ x \in X\}$$

(identificando las funciones $\sigma : \Delta^0 \to X$ con los puntos en X). Notar que, identificando Δ^1 con I, si $\sigma : \Delta^1 = I \to X$, $d_1(\sigma) = \sigma(1) - \sigma(0)$.

Considero $C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$, donde $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ es el "morfismo aumentación" definido por $\varepsilon(x) = 1$ para todo $x \in X$ (y extendiendo linealmente). Notar que, como X no es vacío, ε es un epimorfismo. Veamos que $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im} d_1$:

Dado $y \in \mathrm{Ker}\varepsilon$, $y = \sum_{j=0}^{k} n_j x_j$ con $\sum n_j = \varepsilon(y) = 0$. Por lo tanto $n_0 = -\sum_{j=1}^{k} n_j$. Sean σ_j caminos de x_0 a x_j para todo $j = 1, \dots, k$ (existen porque X es arco-conexo). Entonces:

$$d_1(\sum_{j=1}^{k} n_j \sigma_j) = \sum_{j=1}^{k} n_j (x_j - x_0) = (-\sum_{j=1}^{k} n_j) x_0 + \sum_{j=1}^{k} n_j x_j = \sum_{j=0}^{k} n_j x_j = y$$

Esto prueba que $y \in \mathrm{Im}\, d_1$.

Para la otra contención: $\varepsilon(d_1(\sigma)) = \varepsilon(\sigma(1) - \sigma(0)) = 1 - 1 = 0$. Así hemos probado que $\mathrm{Ker}\varepsilon = \mathrm{Im}\, d_1$.

Ahora bien,

$$H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\mathrm{Im}\, d_1} = \frac{C_0(X)}{\mathrm{Ker}\varepsilon} \equiv \mathrm{Im}\, \varepsilon \equiv \mathbb{Z}.$$

□

Muchas veces es conveniente trabajar con una versión de homología que se llama "homología reducida" que difiere de la homología singular solo en el $H_0(X)$. La homología reducida le "saca" una copia de $\mathbb{Z}$ al $H_0(X)$ y así, por ejemplo, se tiene que la homología reducida del singleton vale 0 para todo $n \geq 0$, y los espacios arco-conexos tienen homología reducida 0 en grado 0 (en lugar de $\mathbb{Z}$). La homología reducida será muy útil para simplificar cálculos y fórmulas que veremos después.

Concretamente, definimos la homología reducida de un espacio de la siguiente manera. Dado un espacio X no vacío, se define su complejo "aumentado" como $(\tilde{C}_*(X), d)$:

$$\ldots \to C_2(X) \xrightarrow{d_2} C_1(X) \xrightarrow{d_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

Es decir, tomamos el complejo singular de X y lo aumentamos con la ε (agregando el $\mathbb{Z}$ en grado -1). Se define la homología reducida de X como $\tilde{H}_n(X) := H_n(\tilde{C}_*(X))$ $(n \geq 0)$.

Por definición, es claro que $\tilde{H}_n(X) = H_n(X)$ $\forall n \geq 1$. Cambia en grado 0: como $\tilde{H}_0(X) = \frac{\mathrm{Ker}\varepsilon}{\mathrm{Im}\, d_1}$, y como $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ es epimorfismo y $\varepsilon d_1 = 0$, se tiene un epimorfismo $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\mathrm{Im}\, d_1} \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \to 0$, $\overline{\varepsilon}([x]) = \varepsilon(x)$. Notar que $\mathrm{Ker}\overline{\varepsilon} = \frac{\mathrm{Ker}\varepsilon}{\mathrm{Im}\, d_1} = \tilde{H}_0(X)$ y por lo tanto se tiene una SEC

$$0 \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(X) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \to 0$$

y como $\mathbb{Z}$ es libre, la SEC se parte y se tiene $H_0(X) \equiv \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Como dijimos al principio, la homología reducida en grado 0 le saca una copia de $\mathbb{Z}$ a la homología usual. Por ejemplo, $\tilde{H}_0(X) = 0$ si X es arco-conexo.

Definición 12.3.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua, entonces f induce un morfismo de complejos $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ (análogamente, se tiene $f_* : \tilde{C}_*(X) \to \tilde{C}_*(Y)$) de la siguiente manera: para cada $n \geq 0$, dada $\sigma : \Delta^n \to X$ continua, $f_*(\sigma) = f\sigma : \Delta^n \to Y$ y extendemos linealmente: $f_*(\sum n_\sigma \sigma) = \sum n_\sigma f\sigma$.

Veamos que f_* conmuta con el morfismo de borde:

$$f_*(d(\sigma)) = f_*(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma^{(i)}) = \sum (-1)^i f_*(\sigma^{(i)}) = \sum (-1)^i (f\sigma)^{(i)} = d(f_*(\sigma)).$$

Por lo tanto $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ es morfismo de complejos de cadenas y entonces induce morfismos entre las homologías $f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$ (lo mismo para homología reducida).

Además la asignación es funtorial:

1. $(fg)_* = f_* g_*$.
2. $(1_X)_* = 1_{C_*(X)}$.

Y por lo tanto, como ya hicimos con otras construcciones, si $f : X \to Y$ es homeomorfismo, entonces $f_* : C_*(X) \to C_*(Y)$ es isomorfismo de complejos y $f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$ es isomorfismo para todo n (lo mismo con la homología reducida).

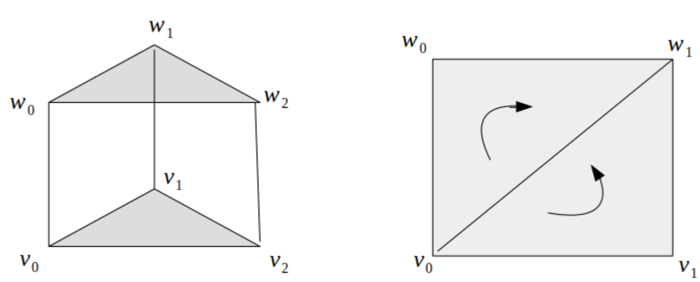
Veamos ahora qué pasa con las homotopías. Este teorema es uno de los resultados más importantes de homología singular. Dice que funciones homotópicas entre espacios topológicos inducen morfismos homotópicos a nivel complejos y, por la Proposición 12.2.10, inducen el mismo morfismo a nivel homología. Se deduce de este resultado que espacios homotópicamente equivalentes tienen la misma homología (es decir, si un espacio se puede deformar continuamente en otro entonces ambos tienen los mismos tipos de agujeros). Esto será fundamental para distinguir espacios y se utilizará para probar las aplicaciones clásicas de la homología.

Teorema 12.3.6. *Sean $f, g : X \to Y$ continuas. Si $f \simeq g$ entonces $f_* \simeq g_* : C_*(X) \to C_*(Y)$. Por lo tanto, en ese caso, $f_n = g_n : H_n(X) \to H_n(Y)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Sea $H : X \times I \to Y$, $H : f \simeq g$. Debemos ver que existe $h : f_* \simeq g_* : C_*(X) \to C_*(Y)$. Recordemos que esto significa tener $h_n : C_n(X) \to C_{n+1}(Y)$ tales que $f_n - g_n = d^Y_{n+1} h_n + h_{n-1} d^X_n$.

Dada $\sigma : \Delta^n \to X$ continua consideramos $H(\sigma \times 1_I) : \Delta^n \times I \to Y$. El "prisma" $\Delta^n \times I$ tiene como vértices a los de $\Delta^n \times \{0\}$ que denotamos $[v_0, \ldots, v_n]$ y a los de $\Delta^n \times \{1\}$ que denotamos $[w_0, \ldots, w_n]$. Podemos subdividir al prisma $\Delta^n \times I$ en $n+1$ $(n+1)$-símplices

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^{n} [v_0 \ldots v_i w_i \ldots w_n]$$



Si definimos $h(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i H(\sigma \times I)|_{[v_0 \ldots v_i w_i \ldots w_n]}$, se tiene que $(dh + hd)(\sigma) = g\sigma - f\sigma$ y por lo tanto $h : g_* \simeq f_*$ (y por lo tanto $-h : f_* \simeq g_*$). $\square$

Corolario 12.3.7. Si $f : X \to Y$ es una equivalencia homotópica, entonces $f_n : H_n(X) \to H_n(Y)$ es isomorfismo para todo n. En particular, si X es contráctil, $H_n(X) = 0$ $\forall n \geq 1$ y $H_0(X) = \mathbb{Z}$ (equivalentemente, $\tilde{H}_n(X) = 0$ $\forall n \geq 0$).

Veremos ahora el segundo teorema importante sobre homología singular que nos permitirá calcular la homología de un espacio a partir de la homología de cubrimientos por abiertos. Necesitamos previamente unas definiciones. Un complejo (C'_*, d') es un subcomplejo del complejo de cadenas (C_*, d) si $C'_n \subseteq C_n$ son submódulos para todo n y los morfismos de borde d' son las restricciones de d a los C'_n.

Definición 12.3.8. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de X. Definimos el subcomplejo $(C_*^{\mathcal{U}}(X), d)$ de $(C_*(X), d)$ de la siguiente manera. Para cada n, $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ es el $\mathbb{Z}$-módulo libre generado por los símplices singulares $\sigma : \Delta^n \to X$ tales que $\sigma(\Delta^n) \subseteq U$ para algún $U \in \mathcal{U}$ y el morfismo de borde es el de $C_*(X)$ restringido $C_*^{\mathcal{U}}$ (notar que se restringe bien).

El siguiente teorema dice que, fijado un cubrimiento por abiertos de X, para calcular $H_*(X)$ basta tomar símplices singulares cuyas imágenes caen en algún abierto del cubrimiento. La demostración se puede encontrar por ejemplo en el libro de [Hatcher]. No vamos a darla en estas notas. La demostración se basa esencialmente en subdividir suficientemente los símplices para escribir cada σ del complejo original como una suma de símplices definidos en las subdivisiones de los símplices originales y cuyas imágenes caigan dentro de algunos de los abiertos.

Teorema 12.3.9. *Sea X espacio topológico y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de X. Entonces la inclusión $i : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ es un retracto por deformación fuerte de complejos (es decir, existe un morfismo de complejos $r : C_*(X) \to C_*^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $ri = 1_{C_*^{\mathcal{U}}(X)}, ir \simeq 1_{C_*(X)}$). En particular, la inclusión induce isomorfismos $H_n(X) = H_n(C_*(X)) \equiv H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X))$.*

Corolario 12.3.10 (Sucesión de Mayer-Vietoris)**.** Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subseteq X$ abiertos tales que $X = U \cup V$. Se tiene una SEC de complejos:

$$(*) \quad 0 \to C_*(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{\beta} C_*^{\mathcal{U}}(X) \to 0$$

donde $\alpha(\sigma) = (\sigma, -\sigma)$, $\beta(\sigma, \tau) = \sigma + \tau$ y $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Y por lo tanto, se tiene una sucesión exacta larga en las homologías (llamada “sucesión de Mayer-Vietoris”):

$$\begin{aligned} \ldots \to H_n(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\beta} H_n(X) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(U \cap V) \xrightarrow{\alpha} \ldots \\ \ldots \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0 \end{aligned}$$

Demostración. Por la definición de los morfismos α y β es inmediato que $(*)$ es una SEC de complejos. Por el Teorema 12.2.13 se tiene la sucesión exacta larga correspondiente y, por el Teorema 12.3.9 podemos reemplazar $H_n(C_*^{\mathcal{U}}(X))$ por $H_n(X)$ y así obtener la sucesión larga del enunciado. $\square$

Observación 12.3.11. La sucesión de Mayer-Vietoris vale también para homología reducida. La demostración es análoga, cambiando los complejos correspondientes por sus análogos aumentados.

Veamos ahora algunas aplicaciones inmediatas de Mayer-Viertoris.

Proposición 12.3.12. $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$

Demostración. La hacemos por inducción en n (la dimensión de la esfera).

Si $n = 0$, $\mathbb{S}^0 = \{1, -1\}$ (discreto de dos puntos) y por lo tanto $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}$ (porque tiene dos componentes arco-conexas) y $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^0) = 0$ para $k \neq 0$ por Proposición 12.3.3, ya que la homología del singleton es 0 para grados positivos.

Suponemos ahora que vale el resultado para $n-1$ y lo probamos para n. Sea $U = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$, $V = \mathbb{S}^n \setminus \{q\}$ donde p y q son los polos. Entonces $\mathbb{S}^n = U \cup V$ y además, como U y V son contráctiles, se tiene que $\tilde{H}_k(U) = \tilde{H}_k(V) = 0$ para todo $k \geq 0$. Además $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p, q\}$

que es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^{n-1}$ y por hipótesis inductiva se tiene entonces que $\tilde{H}_k(U \cap V) = \tilde{H}_k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n-1 \\ 0 & k \neq n-1 \end{cases}$.

Ahora aplicamos Mayer-Vietoris (versión reducida) para el cubrimiento $\{U, V\}$, y como $\tilde{H}_k(U) \oplus \tilde{H}_k(V) = 0$ para todo k, los morfismos de conexión $\partial : \tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) \to \tilde{H}_{k-1}(U \cap V)$ son isomorfismos para todo k y así se tiene:

$$\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \tilde{H}_{k-1}(U \cap V) = \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

□

Corolario 12.3.13. Si $n \neq m$, entonces $\mathbb{S}^n$ no es homotópicamente equivalente a $\mathbb{S}^m$.

Demostración. Si $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m$ entonces en particular $\tilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = \tilde{H}_k(\mathbb{S}^m)$ para todo k. Pero $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \neq 0 = \tilde{H}_n(\mathbb{S}^m)$. □

Ahora deducimos uno de los resultados que prometimos en la introducción de las notas:

Corolario 12.3.14. Si $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ no son homeomorfos.

Demostración. Sean $n \neq m$ y supongamos que existe $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ homeomorfismo. Componiendo ϕ con una traslación de $\mathbb{R}^m$, podemos suponer que $\phi(0) = 0$, y así $\phi|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ es un homeomorfismo. Pero $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ y $\mathbb{R}^m \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$. Se tiene entonces que $\mathbb{S}^{n-1} \simeq \mathbb{S}^{m-1}$ y esto es absurdo por el corolario anterior (ya que $n \neq m$). □

Como $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z} \neq 0$, entonces $\mathbb{S}^n$ no es contráctil, y por lo tanto deducimos:

Corolario 12.3.15. No existe retracción $r : \mathbb{D}^n \to \partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

Demostración. Se deduce del hecho de que $\mathbb{S}^{n-1}$ no es contráctil (porque tiene homología no trivial) y de la Observación 9.1.15. □

Dejamos como ejercicio probar el siguiente teorema de puntos fijos (siguiendo la misma demostración que hicimos para el caso $n = 2$):

Ejercicio 12.3.16. Toda función continua $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ tiene puntos fijos.

Ahora estudiaremos la homología relativa, que relaciona la homología de un espacio con la de un subespacio. Se utilizará para probar el teorema de escisión que luego se aplicará para deducir varias de las aplicaciones clásicas de la homología.

Sea $A \subseteq X$ un subespacio. Podemos considerar el subcomplejo $C_*(A) \subseteq C_*(X)$ (a los símplices singulares de A, $\sigma : \Delta^n \to A$, los podemos ver como los símplices singulares de X cuyas imágenes caen en A). Se tiene entonces una SEC de complejos

$$(**) \qquad 0 \to C_*(A) \xrightarrow{i} C_*(X) \xrightarrow{q} \frac{C_*(X)}{C_*(A)} \to 0$$

El complejo cociente $\frac{C_*(X)}{C_*(A)}$ consiste de los módulos cocientes $\frac{C_n(X)}{C_n(A)}$ para todo n y el morfismo $\overline{d}$ es el morfismo de borde d que pasa bien al cociente.

Definición 12.3.17. Dado $A \subseteq X$ se define la homología relativa del par (X, A) como $H_n(X, A) := H_n(\frac{C_*(X)}{C_*(A)})$.

Observación 12.3.18. La SEC $(**)$ de arriba induce entonces una sucesión exacta larga en las homologías (que llamaremos la “sucesión exacta larga del par (X, A)”):

$$\ldots \to H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{q_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{q_*} \ldots$$
$$\ldots \to H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{q_*} H_0(X, A) \to 0$$

Ejercicio 12.3.19. Probar, usando la sucesión exacta larga del par, que si X es contráctil entonces $H_n(X, A) \equiv \tilde{H}_{n-1}(A)$ para todo $n \geq 1$.

Observación 12.3.20. $H_n(X, A) = 0$ para todo n si y solo si $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ es isomorfismo para todo n.

Cuando $A = \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$, denotamos directamente $H_n(X, x_0)$.

Ejercicio 12.3.21. Sea $x_0 \in X$. Entonces $H_n(X, x_0) \equiv \tilde{H}_n(X)$ para todo $n \geq 0$.

Definición 12.3.22. Sea X espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Al par (X, A) se lo llama par topológico. Un morfismo de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ es una función continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Un homeomorfismo de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ es un homeomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(A) = B$.

Observación 12.3.23. Un morfismo de pares $f : (X, A) \to (Y, B)$ induce un morfismo entre los complejos de cadenas correspondientes $\frac{C_*(X)}{C_*(A)} \to \frac{C_*(Y)}{C_*(B)}$ y éste a su vez induce morfismos en las homologías $f_n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$ para todo $n \geq 0$.

Teorema 12.3.24 (Teorema de escisión)**.** *Sean $Z \subseteq A \subseteq X$ subespacios, con Z cerrado en X y A abierto en X. Entonces la inclusión de pares $i : (X \setminus Z, A \setminus Z) \to (X, A)$ induce isomorfismos a nivel homología $i_n : H_n(X \setminus Z, A \setminus Z) \to H_n(X, A)$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Es más conveniente reformular el enunciado para poder probarlo: tomando $B = X \setminus Z$, tenemos dos abiertos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cup B = X$ (ya que $Z \subseteq A$) y lo que queremos ver es que la inclusión de pares $i : (B, A \cap B) \to (X, A)$ induce isomorfismos $i_n : H_n(B, A \cap B) \to H_n(X, A)$ para todo $n \geq 0$. Probaremos esto entonces.

Tomando el cubrimiento por abiertos $\mathcal{U} = \{A, B\}$, sabemos por el Teorema 12.3.9 que la inclusión $j : C_*^{\mathcal{U}}(X) \to C_*(X)$ es retracto por deformación fuerte de complejos de cadenas. Por otro lado, las inclusiones $C_*(A) \subseteq C_*^{\mathcal{U}}(X) \subseteq C_*(X)$ inducen un morfismo de complejos $\overline{j} : C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A) \to C_*(X)/C_*(A)$ y como j es retracto por deformación fuerte, $\overline{j}$ resulta equivalencia homotópica y por lo tanto $\overline{j}$ induce isomorfismos a nivel homología.

Pero $C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*(A) = C_*(B)/C_*(A \cap B)$. Componiendo esta identificación con el morfismo $\overline{j}$, se tiene que el morfismo inducido por la inclusión $i : C_*(B)/C_*(A \cap B) \to C_*(X)/C_*(A)$ induce isomorfismos a nivel homología $H_n(B, A \cap B) \equiv H_n(X, A)$ para todo n. $\square$

Teorema 12.3.25 (Teorema de invariancia de dimensión)**.** *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos. Si U y V son homeomorfos, entonces $n = m$.*

Demostración. Como U es no vacío, elegimos $x \in U$. Sean $Z = U^c \subseteq \mathbb{R}^n$ y $A = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Notar que $Z \subseteq A \subseteq X = \mathbb{R}^n$ con Z cerrado y A abierto, así que podemos aplicar el Teorema de escisión y obtenemos que $H_k(U, U \setminus \{x\}) \equiv H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$, pero como $\mathbb{R}^n$ es contráctil, esto es isomorfo a $\tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\})$ y como $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$, tenemos finalmente que:

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) \equiv \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \equiv \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Hacemos lo mismo para $V \subseteq \mathbb{R}^m$ y para $y \in V$ y tenemos $H_k(V, V \setminus \{y\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$.

Ahora bien, dado un homeomorfismo $f : U \to V$, tomamos $x \in U$ y sea $y = f(x) \in V$. Entonces el homeomorfismo f induce un homeomorfismo de pares $f : (U, U \setminus \{x\}) \to (V, V \setminus \{y\})$ y por lo tanto $f_* : H_k(U, U \setminus \{x\}) \to H_k(V, V \setminus \{y\})$ es isomorfismo para todo k y por lo que hemos calculado antes, se tiene que $n = m$. □

Antes de seguir avanzando, hagamos unas observaciones importantes sobre la homología del espacio vacío y Mayer-Vietoris, que serán utilizadas más adelante.

Si $X = \emptyset$, el complejo singular de X tiene $C_n(X) = 0$ para todo $n \geq 0$ ya que no existe ningún $\sigma : \Delta^n \to \emptyset$. Por lo tanto $H_n(\emptyset) = 0 \ \forall n \geq 0$.

¿Qué pasa con la homología reducida del espacio vacío? Para $n \geq 1$, $\tilde{H}_n(\emptyset) = H_n(\emptyset) = 0$. Para ver qué pasa en grado $n = 0$ observemos el complejo aumentado del espacio vacío:

$$\ldots \to C_1(\emptyset) = 0 \to C_0(\emptyset) = 0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

y por lo tanto $\tilde{H}_0(\emptyset) = 0$. Pero aparece homología en grado -1 (por el $\mathbb{Z}$ en grado -1 del complejo aumentado) y se tiene $\tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z}$.

Esto es relevante por lo siguiente: recordemos que la sucesión de Mayer-Vietoris vale tanto para la homología usual H_* como también para la reducida $\tilde{H}_*$. En ambos casos, cuando la intersección de los abiertos $U \cap V$ es no vacía, la "cola" de la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris es así:

$$\ldots \to H_0(U \cap V) \to H_0(U) \oplus H_0(V) \to H_0(X) \to 0$$

Lo mismo sucede si cambiamos H_0 por $\tilde{H}_0$.

Pero si la intersección de los abiertos $U \cap V$ es vacía, al tomar los complejos aumentados, la sucesión de Mayer-Vietoris para homología reducida termina de esta manera:

$$\ldots \tilde{H}_0(U) \oplus \tilde{H}_0(V) \to \tilde{H}_0(X) \to \tilde{H}_{-1}(\emptyset) = \mathbb{Z} \to 0$$

es decir, aparece un $\mathbb{Z}$ (antes del 0 final) que corresponde al grado -1 de la homología de la intersección (que es vacía). Esto solo pasa con intersección vacía y homología reducida (no pasa ni con la homología no reducida ni cuando la intersección es no vacía). Esta observación será utilizada más adelante, después del siguiente resultado.

Teorema 12.3.26.

1. *Sea $X \subset \mathbb{S}^n$ un subespacio homeomorfo a un disco $\mathbb{D}^k$ (para algún k). Entonces $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus X) = 0 \ \forall i$.*

2. *Sea $k < n$ y sea $Z \subset \mathbb{S}^n$ subespacio homeomorfo a una esfera $\mathbb{S}^k$. Entonces*

$$\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus Z) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n - k - 1 \\ 0 & i \neq n - k - 1 \end{cases}$$

Demostración. Probemos (1) por inducción en k (la dimensión del disco). En lugar de discos, para la inducción nos conviene trabajar con cubos I^k (sabemos que $\mathbb{D}^k \equiv I^k$).

En el caso $k = 0$, $\mathbb{D}^0 = I^0 = *$, entonces $\mathbb{S}^n \setminus X = \mathbb{S}^n \setminus \{*\} = \mathbb{R}^n$, que es contráctil y por lo tanto tiene homología trivial.

Probamos ahora el paso inductivo. Supongamos que vale el resultado cuando X es homeomorfo a un cubo I^{k-1} y queremos ver que vale cuando es homeomorfo a I^k. Sea $h : I^k \to \mathbb{S}^n$ subespacio, con $X = h(I^k)$. Escribimos $I^k = I^{k-1} \times I$. Sean $A_1 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [0, 1/2])$ y $B_1 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times [1/2, 1])$. Notar que A_1 y B_1 son abiertos de $\mathbb{S}^n$ (ya que son complementos de compactos). Se tiene que $A_1 \cap B_1 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^k) = \mathbb{S}^n \setminus X$ y $A_1 \cup B_1 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{1/2\})$. Por hipótesis inductiva, $\tilde{H}_i(A_1 \cup B_1) = 0\ \forall i$.

Aplicamos la sucesión de Mayer-Vietoris para los abiertos A_1, B_1 y tenemos:

$$\ldots \to \tilde{H}_{i+1}(A_1 \cup B_1) \to \tilde{H}_i(A_1 \cap B_1) \to \tilde{H}_i(A_1) \oplus \tilde{H}_i(B_1) \to \tilde{H}_i(A_1 \cup B_1) \to \ldots$$

Como los términos de la izquierda y derecha son 0 para cada i, entonces se tienen isomorfismos $\phi_i : \tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)) \to \tilde{H}_i(A_1) \oplus \tilde{H}_i(B_1)$ para todo i. Los morfismos ϕ_i son, salvo signo, los inducidos por las inclusiones.

Supongamos que para algún i, $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)) \neq 0$, entonces existe un ciclo α en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)$ que no es borde y, vía el isomorfismo ϕ_i, se tiene que α es un ciclo que no es borde en A_1 o en B_1. Considero $I_1 = [0, 1/2]$ si α no es borde en A_1 o $I_1 = [1/2, 1]$ si no es borde en B_1. En cualquier caso, $\alpha \neq d\beta$ en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^k \times I_1)$. Ahora subdividimos $I_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2}$ en dos subintervalos de la misma longitud (por ejemplo $[0, 1/4], [1/4, 1/2]$ si $I_1 = [0, 1/2]$), y tomamos $A_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{1,1})$ y $B_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{1,2})$.

Notar que $A_2 \cup B_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{p\})$ y $A_2 \cap B_2 = \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_1)$. Por Mayer-Vietoris e hipótesis inductiva se tiene (al igual que antes) que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_1)) \equiv \tilde{H}_i(A_2) \oplus \tilde{H}_i(B_2)$. Y como α no es borde en $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_1))$, entonces no lo es en A_2 o en B_2.

Así repetimos inductivamente el argumento y obtenemos un encaje de intervalos de longitud $l(I_{r+1}) = l(I_r)/2$

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_r \supset I_{r+1} \supset \ldots$$

tales que α no es borde en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_r)$ para todo r. Pero $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} I_r = \{q\}$ para algún punto q, y por hipótesis inductiva $\alpha = d\beta$ en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{q\})$.

Ahora bien, $\beta = \sum_{j=1}^{s} n_j \sigma_j$ para ciertos $n_j \in \mathbb{Z}$ y ciertos $\sigma_j : \Delta^{i+1} \to \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times \{q\}) = \bigcup_r \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_r)$. Por compacidad, $\bigcup_{j=1}^{s} \sigma_j(\Delta^{i+1}) \subseteq \bigcup_{\text{finitos}} \mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_r)$. Tomamos r_0 el máximo de esos finitos r, y como I_{r_0} está incluído en los otros I_r, se tiene que β es cadena en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{r_0})$ y por lo tanto $\alpha = d\beta$ en $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_{r_0})$. Esto contradice el hecho de que α no era borde en ningún $\mathbb{S}^n \setminus h(I^{k-1} \times I_r)$.

Por lo tanto hemos probado que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(I^k)) = 0\ \forall i$.

Probemos ahora el ítem (2). Sea $k < n$ y sea Z un subespacio de $\mathbb{S}^n$ homeomorfo a $\mathbb{S}^k$. Sea $h : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ subespacio con $Z = h(\mathbb{S}^k)$. Debemos probar que $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k)) = \mathbb{Z}$ si $i = n - k - 1$ y es 0 en los otros casos.

Lo probamos por inducción en k. Si $k = 0$, Z es homeomorfo a $\mathbb{S}^0$ (dos puntos aislados) y por lo tanto $\mathbb{S}^n \setminus Z = \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ y por lo tanto el resultado vale.

Probemos ahora el paso inductivo, supongamos que vale para $k - 1$ y lo probamos para k. La esfera $\mathbb{S}^k$ es unión de sus dos hemisferios (norte y sur) que denotamos $\mathbb{D}^k_+$ y $\mathbb{D}^k_-$ y se intersecan en el ecuador que es la esfera $\mathbb{S}^{k-1}$.

Sean $A = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{D}^k_+)$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{D}^k_-)$. Notar que ambos son abiertos porque son complementos de compactos. Se tiene que $A \cup B = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{D}^k_+ \cap \mathbb{D}^k_-) = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{k-1})$ y $A \cap B = \mathbb{S}^n \setminus Z$. Por hipótesis inductiva, $\tilde{H}_i(A \cup B) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n-k \\ 0 & i \neq n-k \end{cases}$.

Por la parte (1) del teorema, sabemos también que $\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(B) = 0$ para todo i. Aplicamos Mayer-Vietoris para el cubrimiento $\{A, B\}$ de $A \cup B$ y, como $\tilde{H}_i(A) = \tilde{H}_i(B) = 0$, por la sucesión exacta larga se obtienen isomorfismos $\tilde{H}_{i+1}(A \cup B) \equiv \tilde{H}_i(A \cap B)$ para todo i. Por lo tanto, $\tilde{H}_i(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^k)) = \tilde{H}_i(A \cap B) = \tilde{H}_{i+1}(A \cup B) = \mathbb{Z}$ si $i = n-k-1$ y 0 en los otros casos. □

Ahora veremos varias consecuencias del Teorema 12.3.26.

1. ¿Puede $\mathbb{S}^n$ contener un subespacio propio homeomorfo a $\mathbb{S}^n$? (Es decir, ¿existe $X \subseteq \mathbb{S}^n$ subespacio homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ con $X \neq \mathbb{S}^n$?). Notar que en el teorema anterior en el ítem (2) pedíamos $k < n$.

   Supongamos que existe subespacio $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ con $h(\mathbb{S}^n) \neq \mathbb{S}^n$. Procedemos igual que en la demostración del ítem (2) del teorema anterior: escribimos a $\mathbb{S}^n$ como unión de sus dos hemisferios $\mathbb{D}^n_+$ y $\mathbb{D}^n_-$. Tomamos $A = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{D}^n_+)$ y $B = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{D}^n_-)$. Así $A \cap B = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^n)$ y $A \cup B = \mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{n-1})$. Como estamos suponiendo que $h(\mathbb{S}^n) \neq \mathbb{S}^n$, la intersección $A \cap B$ es no vacía y al aplicar la sucesión de Mayer-Vietoris con la homología reducida se tiene que la cola de sucesión es:

   $$\ldots \to \underbrace{\tilde{H}_0(A) \oplus \tilde{H}_0(B)}_{=0 \text{ por teorema parte (1)}} \to \underbrace{\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus h(\mathbb{S}^{n-1})}_{=\mathbb{Z} \text{ por teorema parte (2)}} \to 0$$

   Es decir, $0 \to \mathbb{Z} \to 0$ sería sucesión exacta, que es un absurdo (ver observaciones previas al teorema anterior sobre sucesión de Mayer-Vietoris cuando la intersección es vacía). Por lo tanto, la esfera $\mathbb{S}^n$ no puede tener subespacios propios homeomorfos a ella misma.

2. $\mathbb{S}^n$ no tiene subespacios homeomorfos a $\mathbb{S}^m$ para $m > n$. Porque si no, tendría un subespacio propio homeomorfo a $\mathbb{S}^n$ (recordar que $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^m$ si $n < m$).

3. La esfera $\mathbb{S}^n$ no se puede meter en $\mathbb{R}^n$ (equivalentemente: $\mathbb{R}^n$ no tiene subespacios homeomorfos a $\mathbb{S}^n$). Porque si no, $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^n \subset \mathbb{S}^n$ que es absurdo.

4. $\mathbb{R}^m$ no se puede meter en $\mathbb{R}^n$ si $m > n$, más generalmente: no existe $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva si $m > n$, porque si no, se tendría una continua e inyectiva $\phi|_{\mathbb{S}^n} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ y como $\mathbb{S}^n$ es compacto y $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, $\mathbb{S}^n$ sería subespacio de $\mathbb{R}^n$, que es absurdo por el ítem anterior.

Terminamos estas notas con dos teoremas clásicos.

Teorema 12.3.27 (Teorema de la curva de Jordan)**.** *Una curva simple y cerrada en $\mathbb{S}^2$ (ó en $\mathbb{R}^2$) lo separa en dos componentes conexas. Una curva simple no cerrada no lo separa.*

Demostración. Lo vemos primero para $\mathbb{S}^2$. Sea $C \subset \mathbb{S}^2$ una curva simple y cerrada, entonces C es un subespacio homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ y por la parte (2) del Teorema 12.3.26 se tiene que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^2 \setminus C) = \mathbb{Z}$ y por lo tanto $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene dos componentes arco-conexas. Pero como $\mathbb{S}^2 \setminus C$ es un abierto de $\mathbb{S}^2$, en particular es localmente arco-conexo y por lo tanto las componentes arco-conexas son iguales a las componentes conexas. Entonces $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene dos componentes conexas.

Si $C \subset \mathbb{S}^2$ es una curva simple no cerrada, entonces es homeomorfa a I, y por la parte (1) del Teorema 12.3.26 se tiene que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^2 \setminus C) = 0$ y por lo tanto $\mathbb{S}^2 \setminus C$ tiene una componente y por lo tanto, en este caso, C no separa a $\mathbb{S}^2$

El caso de $\mathbb{R}^2$ se deduce del caso de $\mathbb{S}^2$ ya que $\mathbb{R}^2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$ y sacarle un punto a un abierto de $\mathbb{S}^2$ no le cambia la conexión. □

Teorema 12.3.28 (Teorema de invariancia de dominio)**.** *Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ subespacios homeomorfos. Si U es abierto en $\mathbb{R}^n$ entonces V también es abierto.*

Demostración. Sea $h : U \to V$ un homeomorfismo. Componiendo la función h con las inclusiones $V \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{S}^n$, pensamos a h como un función subespacio $h : U \to \mathbb{S}^n$ con $h(U) = V$. Para ver que V es abierto de $\mathbb{R}^n$, basta ver que $h(U) = V \subset \mathbb{S}^n$ es abierto en $\mathbb{S}^n$.

Sea $y \in V$, entonces existe $x \in U$ tal que $h(x) = y$. Como $U \subset \mathbb{S}^n$ es abierto, existe B tal que $x \in B \subseteq U$ y B es homeomorfo a $\mathbb{D}^n$ y $x \notin \partial B$ (en un abierto de $\mathbb{S}^n$ todo punto tiene algún entorno homeomorfo a una bola). Entonces $y = h(x) \in h(B \setminus \partial B) \subseteq V$. Como esto lo puedo hacer para cada $y \in V$, basta ver entonces que $h(B \setminus \partial B)$ es abierto en $\mathbb{S}^n$.

Consideremos $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)$. Por la parte (2) del Teorema 12.3.26, se tiene que $\tilde{H}_0(\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)) = \mathbb{Z}$ ya que $h(\partial B)$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$. Por lo tanto $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)$ tiene dos componentes arco-conexas.

Por otro lado,

$$(*) \qquad \mathbb{S}^n \setminus h(\partial B) = \mathbb{S}^n \setminus h(B) \coprod h(B \setminus \partial B).$$

Y como $\mathbb{S}^n \setminus h(B)$ es arco-conexo por la parte (1) del Teorema 12.3.26 y $h(B \setminus \partial B)$ es arco-conexo por ser homeomorfo a $\mathbb{D}^n \setminus \partial \mathbb{D}^n$, los términos de la derecha de $(*)$ son exactamente las componentes arco-conexas de $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)$, y como es localmente arco-conexo (por ser abierto de $\mathbb{S}^n$), sus componentes arco-conexas son sus componentes conexas. Como las componentes conexas son abiertas en $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)$ (porque son finitas), entonces $h(B \setminus \partial B)$ es abierto de $\mathbb{S}^n \setminus h(\partial B)$ y éste a su vez es un abierto de $\mathbb{S}^n$, con lo cual hemos probado que $h(B \setminus \partial B)$ es abierto de $\mathbb{S}^n$. □

Como dijimos en la introducción de estas notas, este resultado deja de ser válido si reemplazamos $\mathbb{R}^n$ por un espacio más general. Por ejemplo, en I (con la topología usual), los subespacios $[0, 1/2)$ y $[1/2, 1)$ son homeomorfos (vía sumar $1/2$) y el primero es abierto en I pero el segundo no lo es.

Bibliografía

[Bourbaki] N. Bourbaki. General Topology. Springer.

[Brown] R. Brown. Topology and Groupoids. Booksurge LLC.

[Hatcher] A. Hatcher. Algebraic Topology. Cambridge University Press.

[Kelley] J.L. Kelley. General Topology. Springer.

[Lyndon-Schupp] R.P. Lyndon and P.E. Schupp. Combinatorial group theory. Springer Verlag.

[Munkres] J.R. Munkres. Topology: a first course. Prentice-Hall.

[Spanier] E. Spanier. Algebraic Topology. McGraw-Hill.

[Willard] S. Willard. General Topology. Addison-Wesley.