ISSN 1851-1295

Fascículo 15 | Cursos de grado

Pablo Amster

Notas de análisis complejo

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2022

Cursos de grado

Fascículo 15

ISSN 1851-1317 (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1295 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-5285-7618

Pablo Amster

Notas de análisis complejo

Buenos Aires, marzo 2022

Prefacio

Este apunte corresponde al curso de análisis complejo dictado de manera virtual durante el segundo cuatrimestre de 2021. La presente versión consiste en una recopilación de las notas subidas al campus, revisadas y agrupadas en capítulos. El texto abarca todos los temas de la materia, aunque en un orden ligeramente distinto al habitual. En particular, se ha optado por deducir el teorema de la aplicación abierta a partir de las propiedades básicas de las funciones analíticas de variable compleja y de allí otros resultados fundamentales, como los teoremas de módulo máximo y Liouville, antes de introducir la integración sobre curvas. Muchas secciones o comentarios llevan un asterisco y pueden ser salteados sin mayor cargo de conciencia: por regla general, se trata de observaciones o temas que van un poco más allá de los contenidos usuales del curso y tienen por objetivo mostrar que las herramientas del análisis complejo permiten dar cuenta de una amplia variedad de temas matemáticos.

Quiero agradecer a quienes leyeron el texto y me hicieron llegar sus observaciones y correcciones: Lola López Menalled, Ramiro Akris, Julia Zack, Sebastián Zaninovich, Gabriel Sac Himelfarb. Seguramente muchos errores todavía persisten y, desde ya, cualquier comentario al respecto será muy valorado. Por supuesto, quiero expresar también mi enorme agradecimiento a quienes participaron en el curso y, con infinita paciencia, soportaron las sesiones de zoom a las que nos acostumbró la pandemia de Covid 19. Este agradecimiento incluye a mi familia, que en ocasiones se vio forzada a presenciar el penoso espectáculo de un matemático encerrado en un cuarto, lidiando con torpeza contra las dificultades técnicas, fallas de internet y otras delicias.

Pablo Amster
pamster@dm.uba.ar

Índice general

Capítulo 1

Los números complejos

1.1. Conceptos básicos

Han pasado varios siglos desde que Leibniz describiera la raíz cuadrada de la unidad negativa como *una especie de anfibio entre el ser y el no ser*. También se había referido al número i el holandés Huygens en términos similares: *Hay algo ahí oculto que nos resulta incomprensible*. Por supuesto, hoy nadie piensa de esa manera (al menos, en lo que a anfibios respecta) y el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se ha incorporado a la matemática como cualquier hijo de vecino. Muchas de las propiedades de $\mathbb{C}$ como cuerpo ya se vieron en las materias previas; el objetivo de este curso es -como su nombre indica- estudiar las funciones de variable compleja desde la perspectiva del análisis. Y, por supuesto, todo lo que corresponde a la noción de continuidad es más o menos inmediato, ya que la topología (más precisamente, la métrica) de $\mathbb{C}$ no es otra que la que proviene de su identificación con $\mathbb{R}^2$. A fin de unificar la notación, llamaremos $D_r(w)$ al disco abierto de radio r centrado en w, es decir,

$$D_r(w) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}.$$

Antes de ir al grano, conviene hacer un brevísimo repaso por algunas de las posibles construcciones formales de $\mathbb{C}$, más allá de la no muy convincente idea que aprendimos en el colegio, según la cual se trata, a grandes rasgos, de agregar a los números reales un "objeto" i tal que $i^2 = -1$. Claro que, como nos dijeron en su momento, eso significa que *además* hay que agregar muchas otras cosas, todas las que se necesitan para tener un conjunto cerrado por las operaciones de suma y producto. Esto hay que decirlo con más precisión, pero a esa altura de la vida ya somos capaces de darnos cuenta de que, forzosamente, dicho conjunto debe contener todos los objetos de la forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Pero, por otro lado, si se pretende que la suma y el producto se comporten bien, entonces con esto alcanza, porque sumar o multiplicar tales expresiones vuelve a dar una expresión de la misma forma. Por eso, una manera algo más formal de definir los números complejos consiste en tomar el conjunto $\mathbb{R}^2$ provisto de la suma usual y definir, de manera un poco tendenciosa, el producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Con espíritu algebraico, podemos tomar otro camino: a partir del anillo $\mathbb{R}[X]$ de polinomios con coeficientes reales, definir el ideal I generado por el elemento x^2+1, lo cual no es más que una forma algo pomposa de decir que se trata del conjunto de todos los polinomios divisibles por x^2+1. Luego, los complejos pueden identificarse con el cociente $\mathbb{R}[X]/I$. Para expresarlo de otra manera, lo que estamos haciendo es tomar congruencias módulo x^2+1, según la cual dos polinomios p y q son equivalentes si y solo si $p \equiv q(x^2+1)$, es decir, si x^2+1 divide a $p-q$. La idea es clara: como x^2+1 es equivalente al polinomio nulo, entonces el polinomio x va a cumplir el rol del número i.

Podemos mencionar todavía otra forma de obtener $\mathbb{C}$, que suena también artificial, aunque admite una interpretación razonable. Consideremos el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de matrices cuadradas rales de 2×2 y tomemos el subespacio generado por la base $\{I, J\}$ donde J es la matriz dada por

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $J^2 = -I$, es inmediato verificar que este conjunto, provisto del producto usual de matrices, funciona como pretendemos. Por supuesto, los detalles de cada una de estas construcciones quedan como ejercicio.

Una de las primeras cuestiones que se ven al definir los números complejos es que, además de la escritura binomial, para muchas situaciones resulta útil la llamada *forma polar*. A veces se recurre también a aquello que alguna vez nos enseñaron como *notación exponencial* aunque, como sospechamos desde entonces, es mucho más que una notación. Desde ya, resulta útil para justificar de manera intuitiva (por así decirlo) las fórmulas de De Moivre, pero en realidad esconde algunos de los aspectos más profundos de la teoría de variable compleja. Un detalle muy importante es que el argumento de un número complejo $z \neq 0$ no está determinado de manera única, pues se le pueden sumar múltiplos enteros de 2π. Es posible establecer alguna convención, por ejemplo, elegir ángulos en $(-\pi, \pi]$, lo que se suele llamar *rama principal* del argumento. Aunque es claro que, en esta elección, que el argumento no puede ser una función continua: por ejemplo, si tomamos $\theta_n = -\frac{n\pi}{n+1}$ entonces vale

$$z_n := \cos(\theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_n) \to -1 = \cos(\pi) + i \operatorname{sen}(\pi)$$

pero $\theta_n \not\to \pi$. Como cabe esperar, no se trata de una falla de esta definición particular sino que ocurre para cualquier posible definición del argumento:

Proposición 1.1.1. *No existe una función continua $a : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ tal que para todo z vale $z = |z|[\cos(a(z)) + i \operatorname{sen}(a(z))]$.*

<u>*Demostración*</u>: Supongamos que existe tal a, entonces la función

$$r(z) := \sqrt{|z|}\left[\cos\left(\frac{a(z)}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{a(z)}{2}\right)\right]$$

es continua y verifica verifica $r(z)^2 = z$ para todo $z \neq 0$. En particular, tomando $z = w^2$ tenemos

$$r(w^2)^2 = w^2,$$

de donde $r(w^2) = \pm w$ para todo $w \neq 0$. Dicho de otra manera,

$$\frac{r(w^2)}{w} = \pm 1$$

y, como $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ es conexo, se deduce que

$$\frac{r(w^2)}{w} \equiv 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{r(w^2)}{w} \equiv -1.$$

Supongamos que se da el primer caso, entonces vale, por ejemplo

$$1 = r(1^2) = r((-1)^2) = -1,$$

lo que es absurdo. Una contradicción análoga se verifica si suponemos $r(w^2) = -w$. □

1.2. Plano extendido - Homografías

Para algunas aplicaciones, resulta de utilidad definir el objeto conocido como *esfera de Riemann* o también *plano complejo extendido*, que consiste simplemente en agregar al plano complejo un punto adicional, llamado "punto del infinito":

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Por supuesto, para que esto tenga sentido, hay que hacerlo con cuidado. En lo que sigue vamos a explicar brevemente la construcción, que nos permitirá comprender qué tiene que ver esto con una esfera. A decir verdad, la idea es casi obvia, a partir de aquello que alguna vez conocimos como *proyección estereográfica*: dada la esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, tomamos el polo norte $N \in S^2$ como pivote y proyectamos cada punto $P = (x_1, x_2, x_3)$ calculando la intersección de la recta que pasa por P y N con el plano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Es claro que esta función está definida para cualquier punto de la esfera, salvo N; más aún, es fácil verificar que define una biyección entre $S^2\backslash\{N\}$ y $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Para encontrar la fórmula explícita, alcanza con calcular la recta definida por

$$\lambda(x_1, x_2, x_3 - 1) + (0, 0, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e igualar a 0 la tercera coordenada. De esta forma, identificando $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ con $\mathbb{C}$, resulta la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2)$$

que se extienda a una biyección $\pi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$, enviando el polo norte al único lugar que queda libre, el punto del infinito. Y, desde ya, esto nos permite definir una topología en $\hat{\mathbb{C}}$ copiando la de S^2, vale decir, como la única topología que hace de π un homeomorfismo. Por supuesto, podríamos pensar en copiar directamente la métrica, aunque no necesitamos tanto: a grandes rasgos, lo único que interesa es poder darle un sentido preciso a la expresión "converge a infinito". Pensando en la esfera, es fácil entender cómo debe comportarse la topología de $\hat{\mathbb{C}}$; para decir que un conjunto $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ es abierto, debe ocurrir una de estas dos cosas:

1. $\infty \notin U$ y U es abierto en $\mathbb{C}$.
2. $\infty \in U$ y $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es compacto en $\mathbb{C}$.

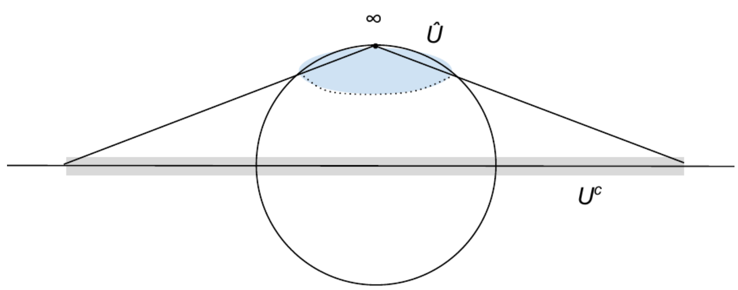


Figura 1.1: Un entorno de infinito

Esta idea se generaliza, dando lugar a aquello que en topología se conoce como *compactificación de Alexandroff*. Aunque nos olvidemos por completo de la esfera, es fácil probar de manera directa que el conjunto $\hat{\mathbb{C}}$ resulta compacto: si lo cubrimos con una familia cualquiera de abiertos, alguno de ellos contiene el punto ∞, de modo que su complemento K es compacto. De esta forma, obtenemos un subcubrimiento si, al abierto que teníamos, le agregamos una cantidad finita de abiertos de la familia que cubren el conjunto K.

Dejando de lado las cuestiones más abstractas, es inmediato verificar que, para esta topología, las sucesiones de números complejos convergentes en $\mathbb{C}$ son las mismas que antes. Y si tenemos una sucesión $\{z_n\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ tal que $z_n \to \infty$, esto equivale a decir que para todo entorno U de ∞ existe n_0 tal que $z_n \in U$ cuando $n \geq n_0$. Dicho de otra forma: para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$ existe n_0 tal que $z_n \notin K$ para $n \geq n_0$.

La esfera de Riemann permite también dar sentido a expresiones un tanto inverosímiles como $\frac{1}{0}$ o, más en general, $\frac{w}{0}$ para cualquier $w \neq 0$, diciendo que el resultado es simplemente ∞. Por supuesto, se pierde el carácter algebraico de la operación, pero funciona bien de acuerdo con las reglas del límite. Consideremos, por ejemplo, la función $T(z) = \frac{1}{z}$ que, según nuestros vastos conocimientos sobre el tema, si la pensamos como $T : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ resulta continua y biyectiva , con inversa también continua (cosa bastante zonza, porque, en este caso, $T^{-1} = T$). La novedad es que se puede extender a una función $\hat{T} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ definiendo, como cualquiera esperaría,

$$\hat{T}(0) := \infty, \qquad \hat{T}(\infty) := 0.$$

Es inmediato verificar que $\hat{T}$ resulta un homeomorfismo de acuerdo con la anterior topología; más en general, esto ocurre con cualquiera de las llamadas *homografías*

$$T(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad \neq bc$. Esta última condición, como es obvio, evita que T coincida con una función constante. El caso previo corresponde a tomar $a = d = 0$ y $b = c = 1$; más en general, si $c \neq 0$ entonces $T : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\}$ es biyectiva, lo que da lugar a una (única) extensión continua al conjunto $\hat{\mathbb{C}}$, definiendo

$$\hat{T}\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \qquad \hat{T}(\infty) := \frac{a}{c}.$$

Nuevamente, es facil ver que $\hat{T}$ es un homeomorfismo y, ya que estamos, podemos calcular su inversa despejando w en la igualdad $T(w) = z$:

$$\hat{T}^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Aunque suene extraño, el caso $c = 0$ también se llama homografía, por más ganas que tengamos de decirle función lineal. Más bien es al revés: en muchos textos todas las homografías se denominan "funciones lineales", entendidas directamente en el plano ampliado. Esto tiene un sentido geométrico preciso, que se ve en en los ejercicios de la práctica; para nuestros fines, alcanza con mencionar que tal tipo de transformaciones (llamadas también *de Möbius*) se obtienen a partir de cuatro operaciones geométricas elementales: traslación, rotación, cambio de escala e inversión. El conjunto de las transformaciones de Möbius sobre $\hat{\mathbb{C}}$ forma un grupo para la composición, y se le puede dar una estructura geométrica conocida como *Grupo de Lie*.

En el caso lineal propiamente dicho, con $c = 0$, la extensión de la función T se obtiene definiendo su valor en el único punto que falta:

$$\hat{T}(\infty) := \infty.$$

Otro caso importante es el siguiente: dado un número complejo fijo w de módulo menor que 1, se define

$$T(z) := \frac{z - w}{1 - \overline{w}z}.$$

Más allá de su extensión a $\hat{\mathbb{C}}$, que ya vimos, lo que interesa ahora es el hecho de que T transforma el disco unitario $D := \{|z| < 1\}$ en sí mismo. ¿Cómo ver esto? Antes de quedar envueltos en un mar de cuentas, conviene observar lo siguiente: si $|z| = 1$, entonces $z^{-1} = \overline{z}$, de modo que

$$|T(z)| = \frac{|z|.|1 - w\overline{z}|}{|1 - \overline{w}z|} = \frac{|1 - \overline{w}z|}{|1 - \overline{w}z|} = 1.$$

Esto muestra que $T(\partial D) \subset \partial D$ pero, ¡atención! Otro tanto vale para la función T^{-1}, que tiene la misma forma, aunque en el lugar de $-w$ ahora aparece w:

$$T^{-1}(z) = \frac{z + w}{1 + \overline{w}z}.$$

Esta es una gran noticia, porque entonces se deduce que $T(\partial D) = \partial D$. Y no solo eso; el hecho de que $T(0) = -w \in D$ implica que $T(D) \subset D$, ya que $T(D)$ es arco-conexo: más precisamente, para cualquier $z \in D$ podemos considerar la curva

$$\gamma(t) := T(tz), \qquad t \in [0,1],$$

que se mantiene dentro de D, pues su imagen no contiene puntos del borde. Finalmente, como esto mismo vale para T^{-1}, se deduce que $T(D) = D$.

Capítulo 2

Diferenciación

2.1. Nociones básicas

Según dijimos, todas las propiedades que se desprenden de la noción de continuidad de una función de variable compleja $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se deducen de forma inmediata a partir de la identificación de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la cuestión cambia por completo cuando se introduce la derivada compleja, a partir de la idea de *cociente incremental*, que es la misma que aprendimos en nuestro primer curso de análisis en una variable real. La novedad es que, ahora, tanto el incremento como el cociente son complejos; a grandes rasgos, todo lo que viene a continuación consiste en estudiar las notables consecuencias que tiene esta "pequeña diferencia".

Definición 2.1.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $z_0 \in U$. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ se dice derivable en z_0 si y solo si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

En tal caso, dicho límite se llama derivada de f en z_0 y se denota $f'(z_0)$. Si f es derivable en un entorno de z_0, entonces se dice que es **holomorfa** en z_0. Si f es derivable en todo punto de U, diremos que es holomorfa en U.

Para enfatizar esta idea de que hay un incremento, podemos escribir $z - z_0 := h \in \mathbb{C}$. Con la intención de empezar a entender la diferencia respecto de la derivación de funciones de una variable real, veamos lo que ocurre con una función tan buena e inocente como $f(z) = |z|^2$: al calcular el cociente incremental, resulta

$$\frac{|z+h|^2 - |z|^2}{h} = \frac{(z+h)(\overline{z} + \overline{h}) - z\overline{z}}{h} = \overline{z} + \frac{z\overline{h}}{h}.$$

Tomando por ejemplo h en el eje real o en el eje imaginario, el valor $\frac{\overline{h}}{h}$ es respectivamente ± 1, de modo que f no es derivable en ningún $z \neq 0$. Todavía más drástico es el caso de $f(z) = \overline{z}$, ya que el cociente incremental da directamente $\frac{\overline{h}}{h}$. Pronto vamos a dar razones más profundas para explicar el hecho de que funciones de este tipo nunca podrían ser holomorfas. En cambio, por ejemplo para $f(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} \to n z^{n-1} \qquad \text{para } h \to 0,$$

tal como cabía esperar.

Al igual que en las funciones de $\mathbb{R}$, se puede entender el concepto de derivada a partir de la idea de *mejor aproximación lineal*, que obviamente coincide con la noción de diferencial:

Proposición 2.1.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$. Entonces f es derivable en $z_0 \in U$ si y solo si existe $\alpha \in \mathbb{C}$ y $R : U \to \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + R(z),$$

con

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0.$$

Por supuesto, el valor de α no es otro que $f'(z_0)$. La demostración es directa a partir de la definición y permite probar de manera inmediata las propiedades básicas de la derivada, que quedan como ejercicio:

Ejercicio 1. A partir de la definición de derivada, probar las siguientes propiedades:

1. Reglas de suma, producto, cociente y de la cadena.
2. Si f es derivable en z_0 entonces es continua en z_0.
3. Si f y g son derivables en z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Observación 2.1.2. Una definición equivalente, algo menos conocida, es la de Carathéodory: f es derivable en z_0 si y solo si existe una función $\phi : U \to \mathbb{C}$ continua en z_0 tal que

$$f(z) - f(z_0) = \phi(z)(z - z_0)$$

para todo $z \in U$. Con esto, la regla de la cadena se prueba -por decirlo en términos bien modernos- en un periquete: en efecto, dadas f derivable en z_0 y g derivable en $w_0 = f(z_0)$, escribimos

$$f(z) - f(z_0) = \phi_f(z)(z - z_0), \qquad g(w) - g(w_0) = \phi_g(w)(w - w_0)$$

de donde

$$g \circ f(z) - g \circ f(z_0) = \phi_g(f(z))\phi_f(z)(z - z_0).$$

2.2. Condiciones de Cauchy-Riemann

En ocasiones, resulta de utilidad pensar una función $f : U \to \mathbb{C}$ como $f = u + iv$, donde $u, v : U \to \mathbb{R}$. Si además escribimos $z = x + iy$, podemos pensar directamente que u y v son funciones de (x, y). Como vimos con el ejemplo $f(z) = |z|^2$, donde $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v \equiv 0$, el hecho de que u y v sean suaves (C^∞) no es suficiente para garantizar que f resulta derivable. Una primera observación, cuando identificamos $\mathbb{C}$ con el plano, es que la existencia de la derivada implica que el límite del cociente incremental es el mismo en cualquier dirección; en particular, tomando $t \in \mathbb{R}$ tenemos, para $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

y también

$$f'(z_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = \frac{u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)}{i}$$
$$= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

De esta forma, se deducen las llamadas *condiciones de Cauchy-Riemann*:

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0).$$

Las cuentas anteriores dicen que además vale

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Para expresar el resultado con mayor precisión podemos, como antes, identificar U con el correspondiente abierto de $\mathbb{R}^2$ y definir $F : U \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Si f es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0$, entonces F es diferenciable en (x_0, y_0): en efecto, escribiendo $f'(z_0) = a + ib$, para $h = h_1 + ih_2$ tenemos que

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (a + bi)(h_1 + ih_2) + R(z_0 + h) = ah_1 - bh_2 + i(ah_2 + bh_1) + R(z).$$

Por comodidad, podemos pensar F como vector columna, de modo que

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \tilde{R}(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

donde $\tilde{R}$ verifica

$$\frac{\|\tilde{R}(x_0 + h_1, y_0 + h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{|R(z_0 + h)|}{|h|} \to 0$$

para $(h_1\, h_2) \to (0, 0)$. En otras palabras, si f es derivable entonces F es diferenciable y $DF(x_0, y_0)$ tiene una forma muy especial que (no por casualidad) lleva el nombre de $\mathbb{C}$-lineal. Para hacerlo más sencillo, dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, podemos considerar la aplicación lineal inducida $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ directamente como una función de la variable compleja $z = x + iy$ y escribir $A(z)$. En otras palabras, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está dada por $A(z) = ax + by + i(cx + dy)$. Como A es aditiva (más aún, $\mathbb{R}$-lineal), la $\mathbb{C}$-linealidad se reduce a una única propiedad:

Definición 2.2.1. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ se dice $\mathbb{C}$-lineal sii para $z, w \in \mathbb{C}$ cualesquiera vale $A(zw) = zA(w)$.

Una simple cuenta muestra que A es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $a = d$ y $b = -c$; de hecho, la cuenta se hace todavía más corta si observamos que, debido a la $\mathbb{R}$-linealidad, en realidad se verifica que A es $\mathbb{C}$-lineal si y solo si $A(i) = iA(1)$, vale decir, si y solo si $b + di = i(a + ci)$. En cualquier caso, las condiciones de Cauchy-Riemann se pueden expresar de la siguiente manera:

Proposición 2.2.1. *En la situación anterior, f es derivable en z_0 si y solo si F es diferenciable en (x_0, y_0) y además $DF(x_0, y_0)$ es $\mathbb{C}$-lineal.*

Demostración: Ya vimos que vale la necesidad, así que resta probar solamente la suficiencia. A partir de la fórmula

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0, y_0) = DF(x_0, y_0)(h_1, h_2) + \tilde{R}(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

donde, por hipótesis, vale $DF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, obtenemos

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2) + R(z_0 + h) = \alpha h + R(z_0 + h),$$

con $\alpha := a + bi$. El resultado se deduce entonces del hecho de que

$$\frac{|R(z_0 + h)|}{|h|} = \frac{\|\tilde{R}(x_0 + h_1, y_0 + h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \to 0$$

para $h \to 0$. $\square$

No hace falta ser un campeón de la derivada para verificar que las funciones constantes satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, al igual que la función identidad. En cambio, para los polinomios la cuenta no es tan inmediata, aunque en realidad ya sabemos que son funciones derivables porque consisten en sumas y productos de funciones derivables. A modo de ejemplo, observemos que las condiciones se cumplen para $f(z) = z^2$, pues

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy$$

$$u_x = 2x = v_y, \qquad u_y = -2y = -v_x$$

y lo mismo ocurre para $f(z) = z^3$, donde

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2, \qquad v(x, y) = 3x^2y - y^3$$

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y, \qquad u_y = -6xy = -v_x.$$

Sin embargo, comprobar que valen las condiciones de Cauchy-Riemann para la función $f(z) = z^n$ aplicando el binomio de Newton parece requerir una inducción más temeraria. Es bastante más sencillo asumir como hipótesis inductiva que las condiciones valen para $z^n = u + iv$ y luego observar que

$$z^{n+1} = (u + iv)(x + iy) = xu - yv + i(xv + yu) := \tilde{u} + i\tilde{v},$$

de donde se deduce:

$$\tilde{u}_x = u + xu_x - yv_x = u + xv_y + yu_y = \tilde{v}_y,$$

$$\tilde{v}_x = v + xv_x + yu_x = v - xu_y + yv_y = -\tilde{u}_y.$$

Ejercicio 2. Empleando las condiciones de Cauchy-Riemann, verificar que los campos ∇u y ∇v son ortogonales. ¿Vale la recíproca? ¿Qué ocurre si tomamos por ejemplo

$$f(z) := \Re(z), \quad g(z) := \Im(z)?$$

2.3. Funciones elementales

Esta primera aproximación a la noción de derivada nos permitió, a partir de las propiedades de suma y producto, completar nuestra primera colección de funciones holomorfas, constituida por los polinomios. Por supuesto que también podemos dividir polinomios para formar -excluyendo del dominio los ceros del denominador- las funciones racionales. Pero, como diría Sabato, este es todavía un resultado muy magro al cabo de tanto tiempo de estudio, de modo que podemos permitirnos aspirar a algo más. Como sea, las condiciones de Cauchy-Riemann nos alertan sobre el hecho de que no cualquier función que se nos ocurra va a ser derivable, así que andaremos con cuidado. Nuestro primer ejemplo, sin duda, es el punto de partida de cualquier curso de de variable compleja:

Función exponencial

Una de las principales funciones que nos va a acompañar de aquí en adelante es la exponencial $f(z) = e^z$, definida para $z = x + iy$ de la siguiente manera:

$$e^z := e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Esto parece más que razonable: por un lado, ya dejamos traslucir que alguna vez vimos la identidad de Euler, según la cual $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$; por otro lado, si pretendemos que valgan las propiedades usuales de la exponencial, entonces es de esperar que $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Más adelante discutiremos la validez de todo esto; por ahora, podemos comenzar verificando que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, pues:

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

y

$$u_y = -e^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Estas derivadas nos llevan a pensar que la definición de f no debe ser casual ya que, siendo $f' = u_x + iv_x$, resulta

$$f'(z) = f(z). \tag{2.1}$$

De esta manera, se puede pensar que la definición de f obedece al hecho de tratarse de la única solución posible de la ecuación (2.1) con condición inicial $f(0) = 1$. Por supuesto, nuestra experiencia previa con ecuaciones diferenciales no incluye las funciones de variable compleja, aunque es fácil probar la unicidad de la siguiente forma. En primer lugar, de la definición se desprende que e^z no se anula; luego, si $g(z)$ es otra solución, entonces la función $h(z) := \frac{g(z)}{e^z}$ verifica

$$h'(z) = \frac{g'(z)e^z - g(z)e^z}{(e^z)^2} = 0$$

para todo z, de modo que $h(z) \equiv \frac{g(0)}{e^0} = 1$. Pero, ¿estamos seguros de esta última conclusión? Para una función de variable real, esto se desprende del teorema de valor medio; sin embargo, ahora no tenemos algo así. Aunque, felizmente, tenemos las condiciones de Cauchy-Riemann, que permiten probar el siguiente resultado:

Proposición 2.3.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $f'(z) = 0$ para todo z, entonces f es constante.*

Demostración: Como $f' \equiv 0$, vale que $u_x = v_x = 0$ y también $u_y = v_y = 0$. En otras palabras ∇u y ∇v son nulos, lo que prueba que u y v son constantes.[1] □

Otra opción consiste en razonar directamente a partir de la ecuación (2.1), que traducida en términos de u y v resulta

$$u_x(x, y) = u(x, y), \qquad v_x(x, y) = v(x, y).$$

De aquí se obtiene

$$u(x, y) = c(y)e^x, \qquad v(x, y) = s(y)e^x$$

para ciertas funciones a las que (sospechosamente) llamamos c y s. Pero, además, por Cauchy-Riemann sabemos que

$$c'(y)e^x = u_y = -v_x = -s(y)e^x, \qquad c(y)e^x = u_x = v_y = s'(y)e^x,$$

es decir:

$$c'(y) = s(y), \qquad s'(y) = c(y).$$

Por otro lado, la condición $f(0) = 1$ nos dice que

$$1 = u(0, 0) = c(0), \qquad 0 = v(0, 0) = s(0),$$

de modo que (¡oh, sorpresa!), $c(y) = \cos y$, $s(y) = \operatorname{sen} y$.

Por si alguien todavía no terminó de convencerse de las bondades de la definición de f, cabe también observar que si $g(z)$ es cualquier función que verifica (2.1) con $g(0) = 1$, entonces la curva $\gamma(t) := g(it)$ satisface

$$\gamma'(t) = i\gamma(t), \qquad \gamma(0) = 1.$$

[1] Para quienes no recuerden estos detalles, alcanza con ver, para cualquier $z_0 \in U$, que el conjunto cerrado $\{z \in U : f(z) = f(z_0)\}$ también es abierto. Pero esto último es fácil, porque en un disco $D \subset U$ se puede aplicar el teorema de valor medio a las funciones u y v.

De esta forma,

$$\gamma_1'(t) = \gamma_2(t), \qquad \gamma_2(t) = -\gamma_1(t), \qquad \gamma_1(0) = 1, \quad \gamma_2(0) = 0$$

y así -¿quién lo hubiera dicho?- se deduce que $\gamma(t) = \cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)$.

Observación 2.3.1. Notemos que el anterior argumento de unicidad permite obtener también las fórmulas de De Moivre, sin necesidad de meterse con las propiedades de las funciones trigonométricas. En efecto, tomando por ejemplo $w \in \mathbb{C}$ fijo, podemos definir las funciones

$$f(z) := e^{z+w}, \qquad g(z) = e^z e^w$$

que no se anulan y verifican $f(0) = g(0)$. Pero, además, vale $f'(z) = f(z)$ y $g'(z) = g(z)$, de donde se deduce que $f = g$. De la misma forma, para $n \in \mathbb{Z}$ podemos considerar ahora

$$f(z) := (e^z)^n, \qquad g(z) := e^{nz},$$

que verifican $f(0) = g(0) = 1$. Por otro lado,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{n\,(e^z)^{n-1}\,e^z e^{nz} - (e^z)^n e^{nz} n}{(e^{nz})^2} \equiv 0$$

y, como antes, concluimos que $f = g$.

Ramas del logaritmo

El exitoso resultado de la observación anterior podría provocar que, envalentonados, pretendamos probar un enunciado más general del tipo $(e^z)^w = e^{zw}$ para z, w cualesquiera. Pero es fácil ver que esto sería demasiado ambicioso, observando por ejemplo que

$$\left(e^{2\pi i}\right)^t \equiv 1 \neq e^{2\pi i t}.$$

A esta altura, caemos en la cuenta de que la situación es aún más desastrosa: todavía no dijimos qué significa, dados dos números complejos $z, w \neq 0$, la expresión z^w. Y la razón de esto es porque, en realidad, la potenciación compleja no se puede definir de manera unívoca.

Para fijar ideas, comencemos por aceptar que, allá lejos por el secundario, tampoco nos explicaron demasiado bien el significado de a^r cuando $r \in \mathbb{R}$ y a es un número real positivo. En principio, es fácil dar una justificación intuitiva a expresiones de la forma $a^{p/q}$ y luego, con un poco de paciencia, se ve que la función a^r con $r \in \mathbb{Q}$ se extiende de manera única para $r \in \mathbb{R}$. Pero hay un procedimiento mucho mejor, basado en el simple hecho de que $a = e^{\ln a}$; de esta forma, tiene todo el sentido del mundo definir $a^r := e^{r \ln a}$. Aunque esta "definición" parece morderse la cola, ya que requiere conocer de antemano la función logaritmo que, a su vez, es la inversa de la exponencial; queda como ejercicio pensar la manera de zafar de esta situación un tanto incómoda.

Como sea, la intención no es cuestionar todo lo que conocemos sobre las funciones de variable real, sino tomarlo como idea para llevar a cabo un procedimiento similar en este complejo mundo en el que estamos metidos ahora. Y el primer paso, entonces, consiste en definir algo que merezca el nombre de logaritmo. Aquí nos topamos, de entrada, con un escollo: la función $f(z) = e^z$ no es inyectiva pues, por ejemplo, $f(2\pi i) = 1 = f(0)$. Es fácil ver que ahí se encuentra precisamente el problema, en aquellos números complejos cuya parte imaginaria difiere en un múltiplo de 2π: en efecto, si escribimos $z = x + iy$, $w = u + iv$, entonces vale

$$e^z = e^w \Longleftrightarrow x = u, \quad y = v + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Por otra parte, a diferencia de la exponencial real, la función f toma cualquier valor complejo salvo el 0. Esto es casi tautológico, porque ya sabemos que cualquier $w \neq 0$ se escribe en la forma $w = |w|e^{i\theta}$, de modo que si buscamos $z = x + iy$ tal que $e^z = w$, entonces debemos tomar

$$x = \ln|w|, \qquad y = \theta + 2k\pi.$$

Esto nos dice qué pinta debe tener cualquier posible inversa de la función exponencial: se trata, justamente, de las llamadas *ramas del logaritmo*.

Definición 2.3.2. Sea $U \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un abierto. Una rama del logaritmo en U es una función $g : U \to \mathbb{C}$ continua tal que $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in U$.

Es importante observar que no siempre existen ramas del logaritmo: de acuerdo con lo anterior, de existir una tal función g entonces vale

$$g(z) = \ln|z| + i\arg(z),$$

donde 'arg' es alguna determinación del argumento. A partir de la definición, se deduce que dicho argumento tiene que ser continuo y, como vimos, esto no puede ocurrir cuando, por ejemplo, tomamos $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Es claro que si hay una rama g, entonces hay infinitas, pues la función $g(z) + i2k\pi$ también satisface la definición. De hecho, esas son esencialmente todas las ramas:

Proposición 2.3.2. *Si U es conexo, entonces dos ramas del logaritmo definidas en U difieren en un múltiplo de $2\pi i$.*

Demostración: Alcanza con observar que si

$$e^{g(z)} = z = e^{\tilde{g}(z)}$$

entonces $e^{g(z)-\tilde{g}(z)} \equiv 1$. Esto significa que, para todo z, se cumple que $g(z) = \tilde{g}(z) + 2k_z\pi i$ para cierto $k_z \in \mathbb{Z}$, es decir, $g - \tilde{g} : U \to 2\pi i\mathbb{Z}$. Pero, como U es conexo y $g - \tilde{g}$ es continua, se deduce que k_z es el mismo para todo z. $\square$

La observación que sigue en la lista es que cualquier rama del logaritmo es necesariamente holomorfa. Por supuesto, se podría intentar calcular alguna fórmula explícita para el argumento y verificar las condiciones de Cauchy-Riemann, aunque todo parece indicar que debe haber una razón más profunda. Dicho y hecho, el secreto está en otro viejo conocido, el teorema de la función inversa, que nos ayudará a comprobar, además, que para cualquier $z_0 \neq 0$ existen ramas definidas en algún entorno de z_0.

Teorema 2.3.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Supongamos, además, que $f = u + iv$ con u y v de clase C^1. Si para $z_0 \in \mathbb{C}$ se verifica que $f'(z_0) \neq 0$, entonces existen entornos abiertos $\tilde{U} \subset U$ y V de z_0 y $f(z_0)$ respectivamente tales que $f : \tilde{U} \to V$ es biyectiva, con $f^{-1} : V \to \tilde{U}$ holomorfa. Además, vale

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

<u>*Demostración*</u>: Llamando como antes $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, si escribimos $z_0 = x_0 + iy_0$ y $f'(z_0) = a + bi$, entonces por las condiciones de Cauchy-Riemann sabemos que

$$\det(DF(x_0, y_0)) = a^2 + b^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0.$$

De esta forma, $DF(x_0, y_0)$ es inversible y concluimos que F tiene inversa local. Notemos, además, que vale

$$DF(x_0, y_0)^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

lo que prueba que f^{-1} también verifica las condiciones de Cauchy-Riemann en $f(z_0)$. Más aún, la forma de esta última matriz prueba que

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{f'(z_0)}}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

□

Observación 2.3.3. Según veremos más adelante, la hipótesis de que u y v son de clase C^1 puede omitirse, ya que esto ocurre para cualquier f holomorfa.

Como anticipamos, esto permite probar sin hacer cuentas que las ramas del logaritmo son holomorfas. Esto es consecuencia inmediata del hecho de que la exponencial tiene inversa local (holomorfa) en cualquier punto, pues su derivada nunca se anula.

En efecto, supongamos que $g : U \to \mathbb{C}$ es una rama del logaritmo y fijemos $z_0 \in U$. Dada $f(z) = e^z$, podemos aplicar el teorema de la función inversa para obtener entornos abiertos V y $\tilde{U}$ de $g(z_0)$ y z_0 respectivamente, de manera tal que $f : V \to \tilde{U}$ tiene inversa (holomorfa). Si ahora tomamos $r > 0$ tal que el disco abierto $D_r(z_0)$ esté contenido en $U \cap \tilde{U}$, entonces f^{-1} y g son dos ramas del logaritmo definidas en $D_r(z_0)$. Luego, difieren en una constante, lo que prueba que g es holomorfa en z_0.

Observación 2.3.4. A partir de la definición, es claro también que si g es una rama del logaritmo, entonces vale

$$1 = \left[e^{g(z)}\right]' = e^{g(z)} g'(z) \Longrightarrow g'(z) = \frac{1}{z}.$$

Como consecuencia de lo anterior, se definen ramas de la función potencial de la siguiente manera:

Definición 2.3.5. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto tal que existe $\log : U \to \mathbb{C}$ una rama del logaritmo. Dado $w \in \mathbb{C}$ fijo, se define, para $z \in U$,

$$z^w := e^{w \log(z)}.$$

Por ejemplo, la rama principal del logaritmo se define tomando ángulos en el intervalo $(-\pi, \pi)$, lo que excluye del dominio la semirrecta $\mathbb{R}_{\leq 0}$. En otras palabras, para $U := \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}$ se define Log: $U \to \mathbb{C}$ dada por

$$\operatorname{Log}(z) := \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

donde el argumento principal $\operatorname{Arg}(z)$ es el único valor $\theta \in (-\pi, \pi)$ tal que

$$\cos(\theta) = \frac{\Re(z)}{|z|}, \qquad \operatorname{sen}(\theta) = \frac{\Im(z)}{|z|}.$$

Es fácil verificar (ejercicio) que la función Log es continua en U y coincide con el logaritmo real para $z \in \mathbb{R}_{>0}$, lo que justifica que la hayamos llamado "principal". Así, en este dominio tenemos por ejemplo la rama principal de la raíz cuadrada, definida por

$$z^{1/2} := e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i}{2}\operatorname{Arg}(z)},$$

que obviamente coincide con la raíz cuadrada común para $z \in \mathbb{R}_{>0}$.

Observación 2.3.6. De acuerdo con esta definición, vale $\left(z^{1/2}\right)^2 = z$, aunque esto no lleva a una contradicción como la que vimos en la Proposición 1.1.1. La clave está en que no se trata de una inversa de la función cuadrática sino, como mencionamos, solamente de una inversa a derecha. En este caso, cuando $w^2 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ (es decir, $w \notin i\mathbb{R}$), podemos escribir

$$\left(\left(w^2\right)^{1/2}\right)^2 = w^2$$

y sabemos, además, que $\left(1^2\right)^{1/2} = 1$. Sin embargo, como $\mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}$ no es conexo, esto no implica que $\left(w^2\right)^{1/2} \equiv w$. Como se puede verificar, lo que en realidad ocurre es que

$$\left(w^2\right)^{1/2} = \begin{cases} w & \Re(w) > 0 \\ -w & \Re(w) < 0. \end{cases}$$

La raíz cuadrada es más poderosa de lo que podría pensarse; por ejemplo, en [2] se muestra que sirve para demostrar de manera elemental algunas importantes propiedades topológicas del plano.

Otro ejemplo es la rama principal de la función que consiste en elevar a la potencia i, dada por

$$z^i := e^{i \operatorname{Log}(z)} = e^{-\operatorname{Arg}(z) + i \ln |z|}$$

para $z \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. En particular, para $z = i$ obtenemos otra identidad famosa ya conocida por Euler, que según ciertos autores constituye *la fórmula más hermosa de la matemática*:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Funciones trigonométricas

En esta pequeña galería de funciones no podían faltar otros importantes ejemplos "basados en hechos reales": las funciones trigonométricas complejas, definidas como

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Otra vez, estas definiciones no son un mero capricho: en este caso, se basan en que, para $z \in \mathbb{R}$, se deducen de manera inmediata a partir de la identidad de Euler. Y veremos que, tal como ocurre con la exponencial, se trata de la única extensión holomorfa de las funciones trigonométricas reales al plano complejo. Pero, siempre hay que preguntar: ¿por qué holomorfa? Podríamos tomarnos el trabajo de calcular la parte real e imaginaria de ambas funciones, a fin de verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, aunque es claro que no hace falta: alcanza con observar, en ambos casos, que son sumas de funciones holomorfas. Y las derivadas cumplen lo que esperamos de ellas, vale decir

$$(\cos z)' = -\operatorname{sen} z; \qquad (\operatorname{sen} z)' = \cos z.$$

Además, es fácil ver que vale la identidad pitagórica $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ aunque, ¡atención!: ahora se trata de funciones no acotadas, cosa que se ve si nos movemos, por ejemplo, sobre el eje imaginario

$$\cos(it) = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} \to +\infty \qquad t \to \pm\infty$$

$$i \operatorname{sen}(it) = \frac{e^{-t} - e^{t}}{2} \to \mp\infty \qquad t \to \pm\infty.$$

También se deducen a partir de la definición otras propiedades conocidas de las funciones trigonométricas, como la 2π-periodicidad, obviamente emparentada con el hecho de que la exponencial es $2\pi i$-periódica. Y, ya que estamos, cabe mencionar las fórmulas que dicen cómo calcular el coseno y el seno de la suma de dos valores:

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w,$$

$$\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w.$$

La verificación de todo esto queda, claro está, como ejercicio.

2.4. Transformaciones conformes

Vamos a ver ahora otra de las propiedades básicas de las funciones holomorfas, que es la de preservar ángulos. Para ser más precisos,supongamos que tenemos dos curvas regulares que pasan por un punto z_0; por simplicidad, podemos considerar $\gamma, \delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ tales que $\gamma(0) = \delta(0) = z_0$. La regularidad implica que $\gamma'(0), \delta'(0) \neq 0$, de modo que el ángulo entre γ

y δ en $t = 0$ se define como el ángulo θ entre los respectivos vectores tangentes. Si pensamos por un momento γ y δ como curvas en $\mathbb{R}^2$, podemos recordar que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \gamma'(0), \delta'(0) \rangle}{\|\gamma'(0)\|.\|\delta'(0)\|};$$

sin embargo, empleando la notación compleja, esto se escribe más fácilmente observando que el producto escalar entre los vectores $\gamma'(0)$ y $\delta'(0)$ no es otra cosa que la parte real del número complejo $\gamma'(0)\overline{\delta'(0)}$, es decir:

$$\cos(\theta) = \frac{\Re(\gamma'(0)\overline{\delta'(0)})}{|\gamma'(0)|.|\delta'(0)|}.$$

Por supuesto, más fácil todavía es observar que si escribimos

$$\gamma'(0) = |\gamma'(0)|e^{i\alpha}, \qquad \delta'(0) = |\delta'(0)|e^{i\beta}$$

entonces

$$\frac{|\gamma'(0)|}{|\delta'(0)|}e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{\gamma'(0)}{\delta'(0)} = \frac{\gamma'(0)\overline{\delta'(0)}}{|\delta'(0)|^2}.$$

Luego, la fórmula anterior se deduce del hecho de que

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \Re\left(e^{i(\alpha-\beta)}\right).$$

Una función que preserva ángulos en un punto z_0 se dice *conforme* en z_0. Más precisamente, dado un par cualquiera de curvas γ y δ regulares en 0 tales que $\gamma(0) = \delta(0) = z_0$, el ángulo que forman en 0 es el mismo que el ángulo que forman en 0 las curvas $f \circ \gamma$ y $f \circ \delta$. Por supuesto, una condición necesaria para esto es que, efectivamente, estas curvas definan un ángulo, es decir, que sean regulares en 0. En otras palabras, lo mínimo que hace falta pedir es que, para cualquier curva γ regular en 0 tal que $\gamma(0) = z_0$, se verifique:

$$f \circ \gamma \text{ es derivable en } 0, \text{ con } (f \circ \gamma)'(0) \neq 0.$$

En principio, esto no obliga a que f sea derivable en z_0, sino simplemente que, pensada como función de $\mathbb{R}^2$, sea diferenciable y la diferencial en dicho punto sea inversible. Por ejemplo, la función $f(z) = \overline{z}$ no es holomorfa y respeta ángulos aunque -pequeño detalle- los invierte. En algunos textos, se distingue entre aquellas funciones que, además de preservar ángulos, respetan o no la orientación: se las suele llamar, respectivamente, *directa* o *inversamente* conformes. Pero, en general, cuando se habla de funciones conformes se suele referir únicamente a las primeras; por eso, para dejar a todo el mundo (por así decirlo) conforme, conviene dar la siguiente

Definición 2.4.1. Una función f se dice conforme en un punto z_0 si preserva ángulos orientados.

Resulta inmediato verificar que una función derivable en z_0 es conforme, siempre -claro está- que $f'(z_0) \neq 0$. Esto se ve fácilmente escribiendo $f'(z_0) = re^{i\theta}$; de esta forma, si γ es una curva regular en 0 tal que $\gamma(0) = z_0$ se tiene:

$$(f \circ \gamma)'(0) = re^{i\theta}\gamma'(0).$$

Esto quiere decir que, al componer con f, al vector tangente a la curva se le aplica una rotación con ángulo θ y se multiplica su módulo por r (el famoso “cambio de escala”), dos cantidades que no dependen de la curva. Geométricamente la idea es bastante clara, porque, como vimos, la matriz diferencial de la función asociada en $\mathbb{R}^2$ es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, es decir, un múltiplo de una matriz ortogonal (que, ¡oh, casualidad!, es una matriz de rotación).

A continuación veremos que, esencialmente, estas son todas las transformaciones conformes. La cuenta se puede hacer de manera directa, aunque resulta cómodo introducir ciertos operadores formales, como veremos en la próxima sección.

Ejercicio 3. Probar que si f es una función holomorfa, entonces la función $g(z) := \overline{f(\overline{z})}$ también es holomorfa. ¿Cuál es la interpretación geométrica?

2.5. Los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$

Hasta el momento, hemos visto que una función de la variable compleja $z = x + iy$ se puede pensar como $f = u + iv$ donde u y v son variables de x, y. En lo que sigue vamos a introducir las variables z y $\overline{z}$, basándonos en el hecho de que

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

Luego, si derivamos formalmente respecto de z y $\overline{z}$ la expresión $f = u + iv$ obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u_x \frac{1}{2} + u_y \frac{1}{2i} + i\left(v_x \frac{1}{2} + v_y \frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right].$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = u_x \frac{1}{2} - u_y \frac{1}{2i} + i\left(v_x \frac{1}{2} - v_y \frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left[u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right].$$

Esto muestra, para u y v diferenciables, que las condiciones de Cauchy-Riemann equivalen a la condición $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$, lo cual responde al hecho intuitivo de que una función holomorfa “no depende de $\overline{z}$”. Los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ también se pueden escribir como:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Es fácil verificar, a partir de la definición, la validez de la siguiente regla de la cadena “formal”. Supongamos que $f = u + iv$ con u y v diferenciables y $\gamma : I \to \mathbb{C}$ es una curva derivable para cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si pensamos $f = f(z, \overline{z})$, entonces la siguiente fórmula suena de lo más razonable:

$$(f \circ \gamma)' = \frac{\partial f}{\partial z}\gamma' + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\overline{\gamma'}. \tag{2.2}$$

Esto parece un mero formalismo, pero se prueba de manera rigurosa. Por ejemplo, podemos calcular

$$(f \circ \gamma)'(t) = (u \circ \gamma)'(t) + i(v \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla u, \gamma' \rangle + i\langle \nabla v, \gamma' \rangle$$

$$u_x\gamma_1' + u_y\gamma_2' + i[v_x\gamma_1' + v_y\gamma_2'] = \frac{\partial f}{\partial x}\gamma_1' + \frac{\partial f}{\partial y}\gamma_2'.$$

Luego, escribiendo $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$, se ve que esta última expresión da por resultado el término derecho de (2.2).

Proposición 2.5.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ conforme en z_0. Entonces f es derivable en z_0, con $f'(z_0) \neq 0$.*

Demostración: Como f es conforme, dadas dos curvas regulares γ, δ con $\gamma(0) = \delta(0) = z_0$, se tiene que

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{(f \circ \delta)'(0)} = c\frac{\gamma'(0)}{\delta'(0)}$$

para cierta constante real $c > 0$, es decir:

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)} = c\frac{(f \circ \delta)'(0)}{\delta'(0)}, \qquad c > 0.$$

Como esto vale para cualquier par de curvas, se deduce que el argumento de $\frac{(f\circ\gamma)'(0)}{\gamma'(0)}$ es independiente de la elección de γ. De acuerdo con (2.2), tenemos

$$\frac{(f \circ \gamma)'(0)}{\gamma'(0)} = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0, \overline{z}_0) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0, \overline{z}_0)\frac{\overline{\gamma'(0)}}{\gamma'(0)}$$

y, como el argumento es el mismo para toda curva γ, se concluye que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0, \overline{z}_0) = 0$. Observemos, finalmente, que $f'(z_0) \neq 0$ ya que en caso contrario vale $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ para toda curva γ tal que $\gamma(0) = z_0$ y, en consecuencia, f no puede preservar ángulos. $\square$

2.6. Funciones armónicas

Como vimos, el hecho de que una función $f = u + iv$ sea holomorfa equivale a decir que el campo asociado F es diferenciable y se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. También podemos expresarlo diciendo que el campo conjugado $\overline{F} := (u, -v)$ es irrotacional y no tiene fuentes ni sumideros, ya que

$$\operatorname{div} \overline{F} = u_x - v_y = 0, \qquad \operatorname{rot} \overline{F} = u_x + v_y = 0.$$

Pero ya que andamos recordando tan gratos conceptos de análisis en dos variables, cabe traer a escena también las funciones *armónicas*. Dada una función $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, se define su laplaciano en la forma

$$\Delta\varphi := \varphi_{xx} + \varphi_{yy}.$$

Esto también se puede pensar como la divergencia del gradiente de φ, razón por la cual a veces se emplea la notación ∇^2, entendida como $\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi$. Esto es frecuente en los libros de física pero, más allá de las preferencias, el hecho es que una función se llama armónica cuando su laplaciano es nulo. Los ejemplos típicos de estas funciones que suelen verse en los cursos de análisis son $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$ o bien $\varphi(x,y) = e^x \cos y$ que (¡vaya sorpresa!) ya han aparecido anteriormente por estas páginas. La explicación es muy simple: si f es una función holomorfa y suponemos que u y v son funciones de clase C^2 (como anticipamos, más adelante probaremos que esto ocurre siempre), entonces por las condiciones de Cauchy-Riemann resultan armónicas, ya que

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy},$$
$$v_{xx} = (-u_y)_x = (-u_x)_y = (-v_y)_y = -v_{yy}.$$

Una primera observación sobre estas funciones es que su matriz hessiana en cualquier punto es (semi)definida negativa, lo cual hace sospechar que no pueden tener máximos o mínimos estrictos en ningún abierto. Pronto veremos que esto es efectivamente así.

Dos funciones armónicas u y v se dicen *conjugadas* cuando $f = u + iv$ es holomorfa, vale decir, cuando cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. La pregunta más o menos obvia es: dada $u : U \to \mathbb{R}$ armónica, ¿existe siempre una armónica conjugada v? Si hay una, entonces hay infinitas, porque podemos sumarle cualquier constante; sin embargo, es fácil verificar que la función

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$$

es armónica, pero no tiene armónica conjugada definida en $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$. A modo de explicación, podemos observar que u es la parte real de cualquier rama del logaritmo. Esto hace pensar que, en caso de existir tal función v, entonces tendríamos una rama del logaritmo definida en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, cosa que -como ya sabemos- no ocurre.

Pero no nos adelantemos: en realidad, conocemos los resultados necesarios para afirmar esto sin necesidad de meternos con las funciones de variable compleja. En efecto, encontrar una conjugada armónica de u equivale a encontrar una función v de clase C^1 tal que

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x,$$

pues en tal caso v resulta automáticamente de clase C^2 y armónica. Y esto es un problema bien conocido del análisis en varias variables reales: dado el campo $G = (-u_y, u_x)$ de clase C^1, ¿bajo qué condiciones se puede afirmar que existe una función potencial v, es decir, tal que $\nabla v = G$? Como todo el mundo recordará (digamos), esto ocurre si y solo si la integral de G sobre curvas cerradas es siempre nula. O bien, por decirlo de otra forma, cuando la integral de G a lo largo de una curva que une dos puntos cualesquiera no depende del camino elegido.[2] En particular, para la anterior función u tenemos que

$$G(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

y tomando $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ con $t \in [0, 2\pi]$ obtenemos:

$$\int_\gamma G \cdot d\sigma = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt = 2\pi \neq 0.$$

[2] La necesidad se deduce de manera inmediata de la regla de la cadena, mientras que para la suficiencia se puede suponer que el dominio U es conexo y fijar $(x_0, y_0) \in U$. Luego, alcanza con definir $v(x,y) = \int_\gamma G \cdot d\sigma$, donde $\gamma : [0,1] \to U$ es cualquier curva suave tal que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ y $\gamma(1) = (x, y)$.

Una situación especial se da cuando, a diferencia del ejemplo previo, el conjunto U no tiene agujeros: en ese caso, el hecho de que $(G_1)_y = (G_2)_x$, garantiza la existencia de una conjugada armónica. La explicación de esto se basa en el teorema de Green: si γ es una curva cerrada simple que encierra una región R, entonces

$$\int_\gamma -u_y\, dx + u_x\, dy = \iint_R (u_{xx} + u_{yy})\, dxdy = 0.$$

Los dominios (abiertos conexos) sin agujeros se denominan *simplemente conexos*; más adelante veremos una definición más precisa. Pero lo que vimos ya alcanza para comprobar que se pueden definir ramas del logaritmo en cualquier dominio U simplemente conexo que no contiene al 0 ya que la anterior función u tiene una (única salvo constantes) conjugada armónica v. En efecto, la correspondiente función holomorfa $f = u + iv$ verifica

$$f' = u_x + iv_x = u_x - iu_y = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

de donde se deduce que $f'(z) = \frac{1}{z}$. ¿Alcanza esto para decir que f es una rama del logaritmo? No exactamente, pero casi: en primer lugar, recordemos que, dado cualquier $z_0 \in U$, existe un entorno $D_r(z_0) \subset U$ y una rama del logaritmo $\tilde{f} : D_r(z_0) \to \mathbb{C}$, que también verifica $\tilde{f}'(z) = \frac{1}{z}$. Esto quiere decir que $f - \tilde{f}$ es constante en $D_r(z_0)$ y, en consecuencia, también lo es $e^{f-\tilde{f}}$. Como $e^{\tilde{f}(z)} = z$, se deduce que $\frac{e^{f(z)}}{z}$ es una función localmente constante, de modo que es constante en todo U. En otras palabras, $e^{f(z)} = cz$ para cierta $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$; de este modo, fijando $a \in \mathbb{C}$ tal que $e^a = c$ se deduce que $f - a$ es una rama del logaritmo.

De lo anterior se desprende que, en general, el problema de encontrar una conjugada armónica requiere resolver una integral; sin embargo, existe un "método práctico" que, en ciertos casos, permite hacerlo de manera directa. Lo que sigue es algo informal, pero se puede justificar debidamente. Empecemos observando que si u es la parte real de una función holomorfa f, entonces

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right).$$

Ahora bien, como f es holomorfa, $\overline{f(z)}$ depende solamente de $\overline{z}$. Esto da lugar a una primera escritura (un tanto polémica):

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left(f(x + iy) + \overline{f}(x - iy)\right),$$

donde $\overline{f} := u - iv$. La segunda cuestión polémica surge cuando ahora reemplazamos por los valores $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2i}$, lo que da lugar a la igualdad

$$u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f}(0)\right).$$

Finalmente, recordemos que v se define salvo constantes, de modo que podemos suponer que $v(0, 0) = 0$ y, de esta forma, obtenemos

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right) - u(0, 0).$$

Se puede objetar que esta fórmula es completamente inútil para una función como $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, que precisamente no está definida en $(0,0)$. Sin embargo, en tal caso se pueden elegir los valores de x e y de manera diferente, por ejemplo:

$$u\left(\frac{z+1}{2}, \frac{z-1}{2i}\right) = \frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f}(1)\right).$$

De esta forma, si ahora suponemos $v(1,0) = 0$, queda

$$f(z) = 2u\left(\frac{z+1}{2}, \frac{z-1}{2i}\right) - u(1,0).$$

Haciendo la cuenta se obtiene (¡milagro, milagro!):

$$f(z) = \frac{z+1}{\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{2i}\right)^2} - 1 = \frac{z+1}{z} - 1 = \frac{1}{z}.$$

Por supuesto, el "método práctico" solo sirve para aquellas funciones u a las que tenga sentido evaluar en $\mathbb{C}$: por ejemplo, no serviría para encontrar una conjugada armónica de $u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, ya que obligaría a tener definida de antemano alguna rama del logaritmo.

Ya que nos introdujimos en el mundo de los procedimientos turbios, podemos todavía sacar provecho de los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ para resolver otro asunto famoso, el llamado *problema de Laplace*:

$$\Delta u(x,y) = h(x,y)$$

donde h es alguna función. Como se trata de un problema lineal, es claro que las soluciones son de la forma $u_p + u_{hom}$, donde u_p es una solución particular y u_{hom} es una solución del homogéneo (lisa y llanamente, una función armónica). Y la gracia de este comentario consiste en que el laplaciano se puede escribir de manera bonita mediante los operadores mencionados: en efecto, a partir de la definición es inmediato verificar que

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{4}\Delta.$$

Dicho sea de paso, esto vuelve a mostrarnos que, cuando f es holomorfa, u y v son armónicas, ya que $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Pero, además, proporciona una manera de encontrar una solución particular para el problema de Laplace. A modo de ejemplo, supongamos que queremos encontrar una solución del problema

$$\Delta u(x,y) = x - y^2.$$

Si escribimos $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$, el problema se transforma en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left[\frac{z+\overline{z}}{2} - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2\right] = \frac{1}{8}\left[z + \overline{z} - z\overline{z} + \frac{z^2+\overline{z}^2}{2}\right].$$

Lo que resta es un pequeño bodrio de cuentas, pero permite encontrar una solución, integrando primero respecto de $\overline{z}$ y luego respecto de z:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{8}\left[\left(z + \frac{z^2}{2}\right)\overline{z} + \frac{(1-z)\overline{z}^2}{2} + \frac{\overline{z}^3}{6}\right]$$

$$u = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}\right)\overline{z} + \left(\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}\right)\overline{z}^2 + z\frac{\overline{z}^3}{6}\right].$$

Esto sigue teniendo un pésimo aspecto, aunque se puede escribir mucho mejor:

$$u = \frac{|z|^2}{8}\left(\frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{z^2+\overline{z}^2}{6} - \frac{|z|^2}{4}\right)$$

Y parece que la fortuna ha jugado ha nuestro favor, ya que ahora se hace fácil rescatar las variables originales, empleando el hecho de que $z+\overline{z} = 2x$, $|z|^2 = x^2+y^2$, de donde se deduce también

$$z^2 + \overline{z}^2 = (z+\overline{z})^2 - 2z\overline{z} = 2(x^2 - y^2).$$

En definitiva, obtenemos una solución de lo más coqueta:

$$u(x,y) = \frac{x^2+y^2}{8}\left(x + \frac{x^2-7y^2}{12}\right).$$

Capítulo 3

Series y funciones analíticas

3.1. Series numéricas y de funciones

Como anticipamos en los capítulos previos, las funciones holomorfas son muy buenas, tanto que en realidad siempre son funciones analíticas, vale decir, localmente desarrollables en series de potencias. Pero demostrar esto no es inmediato y requiere varios resultados de integración sobre curvas que veremos un poco más adelante. Mientras llega ese momento tan esperado, conviene revisar algunas cuestiones básicas sobre series, que nos ayudarán a entender mejor las propiedades de las funciones de variable compleja.

Comencemos por la noción elemental de serie numérica, que es la habitual: dada una sucesión $\{z_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$, se consideran las sumas parciales $S_N := \sum_{n=0}^{N} z_n$. Se dice que la serie es *convergente* si la sucesión $\{S_N\}$ converge a un número $S \in \mathbb{C}$; en tal caso, se escribe $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$. Es claro que, si esto ocurre, necesariamente $z_n \to 0$. La sucesión se dice *absolutamente convergente* cuando la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ es convergente, cosa que se suele expresar diciendo $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$. Es inmediato verificar que toda serie que converge absolutamente es también convergente.

Vamos a asumir que se conocen las propiedades elementales sobre series; por ejemplo, las de suma, comparación y aquella que garantiza que, si una serie converge absolutamente, entonces cualquier reordenamiento converge al mismo límite:

Ejercicio 4. Sean $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolutamente convergente y $\sigma : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ biyectiva. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ es absolutamente convergente y vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

Otra propiedad útil es el siguiente principio de convergencia mayorada para series, que permite conmutar un límite con una sumatoria:

Proposición 3.1.1. *Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\{z_{mn}\}_{n\geq 0}$ una sucesión. Supongamos que se* *cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Existe* A_n *tal que* $\sum_{n=0}^{\infty} A_n < \infty$ *y* $|z_{mn}| \leq A_n$ *para todo* m *y todo* n.
2. *Para todo* n *existe* z_n *tal que* $\lim_{m\to\infty} z_{mn} = z_n$.

Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge y vale*

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} z_{mn} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n.$$

<u>*Demostración*</u>: Por propiedades del límite, se deduce que también $|z_n| \leq A_n$, de modo que esta última serie converge. Dado $\varepsilon > 0$, podemos fijar N_0 de manera tal que $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} A_n < \frac{\varepsilon}{3}$ y, en consecuencia, para todo m vale

$$\left| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} (z_{mn} - z_n) \right| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, empleando la primera hipótesis podemos tomar M_0 tal que para $m \geq M_0$ resulta

$$\left| \sum_{n=0}^{N_0} (z_{mn} - z_n) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De esta forma, para $m \geq M_0$ se deduce

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_{mn} - \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{N_0} (z_{mn} - z_n) \right| + \left| \sum_{n=N_0+1}^{\infty} (z_{mn} - z_n) \right| < \varepsilon.$$

□

Por ejemplo, la proposición anterior brinda una demostración inmediata de que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$: para eso, alcanza con escribir

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{1}{m^n}$$

donde, como es habitual, definimos $\binom{m}{n} := 0$ para $n > m$. Es claro que

$$\binom{m}{n} \frac{1}{m^n} = \frac{m \ldots (m-n+1)}{m^n} \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n!} := A_n.$$

Además, para $m \to \infty$ vale $\frac{m \ldots (m-n+1)}{m^n} \to 1$, de modo que

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} \frac{1}{m^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Otra consecuencia es la propiedad de cambio de orden de sumación para series dobles. Dados $a_{nm} \in \mathbb{C}$, supongamos que existe C tal que para todo $N, M \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} |a_{nm}| \leq C,$$

entonces los límites

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}$$

existen y son iguales. Para esto, alcanza con observar que, si fijamos n o m, la serie de término general a_{nm} converge absolutamente y, más aún,

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| \leq C \qquad N \in \mathbb{N}_0.$$

Luego, alcanza con observar que para todo M vale

$$\sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M} a_{nm}$$

donde

$$\left| \sum_{m=0}^{M} a_{nm} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| := A_n$$

Es fácil verificar que las condiciones anteriores implican en realidad la existencia del límite doble

$$\sum_{n,m} a_{nm} := \lim_{M,N \to \infty} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_{nm}$$

que coincide con el valor anterior. Y ya que antes invocamos un teorema de integración, cabe mencionar ahora que esto no es otra cosa que el teorema de Fubini para series.

Series de funciones

En este breve repaso (por así decirlo), llega el turno de las series de funciones. Para ello, recordemos en primer lugar los conceptos de convergencia puntual y uniforme:

Definición 3.1.1. Dado $U \subset \mathbb{C}$, consideremos las funciones $f_n, f : U \to \mathbb{C}$. Se dice que $f_n \to f$ puntualmente en U si $f_n(z) \to f(z)$ para todo $z \in U$. Se dice que $f_n \to f$ uniformemente cuando la velocidad de convergencia es independiente de z, es decir: para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in U$.

Por supuesto, la convergencia uniforme implica la puntual, pero la recíproca no vale: para funciones de variable real, tenemos el sencillo ejemplo de $f_n(x) = x^n$ en $[0, 1]$, que no nos deja mentir. Una manera inmediata de ver que el límite de estas funciones no es uniforme consiste en observar que no es una función continua ya que, en general, se tiene el siguiente resultado:

Ejercicio 5. Sean $f_n, f : U \to \mathbb{C}$ tales que $f_n \to f$ uniformemente. Si f_n es continua para todo n, entonces f es continua.

El criterio anterior no nos sirve cuando se trata de ver que la misma familia de funciones no converge uniformemente tampoco en $[0, 1)$, por más que el límite puntual sea la función (continua) $f \equiv 0$. Volviendo a la variable compleja, lo mismo ocurre con $f_n(z) := z^n$ en el disco $D_1(0)$: para cada z fijo la sucesión tiende a 0 pero, dado $\varepsilon > 0$, es fácil comprobar que el n_0 requerido por la definición es mayor cuando z tiene módulo cercano a 1. Para decirlo con mayor precisión, observemos que, como la sucesión $\{|z|^n\}$ es decreciente, entonces el valor "óptimo" de n_0 es aquel que verifica

$$|z|^{n_0} < \varepsilon,$$

es decir (suponiendo ya que $\varepsilon < 1$), el primer natural tal que se cumple

$$n_0 > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |z|},$$

de modo que $n_0(z) \to \infty$ cuando $|z| \to 1^-$.

A partir de los conceptos previos, cuando se trata de una serie de funciones tenemos convergencias para todos los gustos: dada una sucesión de funciones $f_n : U \to \mathbb{C}$, se dice que la serie $\sum_n f_n(z)$ converge puntual o uniformemente en U según si la sucesión de sumas parciales $S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} f_n(z)$ converge, respectivamente, de manera puntual o uniforme. Pero también se dice que la serie converge absolutamente en U cuando, para todo z, la serie $\sum_n f_n(z)$ converge absolutamente. Desde ya, puede ocurrir que la serie no sea convergente en todo el dominio; en tal caso, se define su *dominio de convergencia* como el conjunto de aquellos valores para los cuales converge.

Como es sabido, las nociones de convergencia uniforme y absoluta son independientes: la serie $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge absoluta pero no uniformemente en el disco unitario abierto D (¿por qué?), mientras que la serie armónica alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge uniforme pero no absolutamente en cualquier U (bueno, concedamos que hace falta pedir $U \neq \emptyset$). Este último ejemplo puede parecer una tontería porque no depende de z, aunque es fácil disimularlo un poco definiendo, por ejemplo, la serie de término general $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n+|z|}$ que, gracias al criterio de Leibniz, converge uniformemente en $\mathbb{C}$.

Como es habitual, a la hora de probar la convergencia uniforme, no siempre conocemos el valor del límite; por eso resulta útil introducir la idea de que una serie puede ser "uniformemente de Cauchy":

Proposición 3.1.2. *Dadas f_n como antes, la serie $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente en U si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que si $M > N \geq N_0$ entonces*

$$\left| \sum_{n=N+1}^{M} f_n(z) \right| < \varepsilon$$

para todo $z \in U$.

Demostración: $\Longrightarrow$) Sea $S(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z)$. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos N_0 tal que si $N \geq N_0$ entonces $|S(z) - S_N(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo z. Luego, para $M > N \geq N_0$ y cualquier z vale

$$|S_M(z) - S_N(z)| \leq |S_M(z) - S(z)| + |S(z) - S_N(z)| < \varepsilon.$$

$\Longleftarrow$) Para z fijo, la sucesión $\{S_N(z)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$, de modo que converge a cierto límite $S(z)$. Dado $\varepsilon > 0$, fijamos N_0 tal que si $M > N \geq N_0$ entonces $|S_M(w) - S_N(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $w \in U$. Además, para cada $z \in U$ existe $N_z > N_0$ tal que si $N \geq N_z$ entonces $|S_N(z) - S(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, dado $N \geq N_0$ se verifica:

$$|S(z) - S_N(z)| \leq |S(z) - S_{N_z}(z)| + |S_{N_z}(z) - S_N(z)| < \varepsilon.$$

□

Y, desde ya, en este repaso no podía faltar el criterio de Weierstrass:

Proposición 3.1.3. *Sean f_n como antes y supongamos que existen A_n tales que $|f_n(z)| \leq A_n$ para todo $z \in U$. Si $\sum_n A_n < \infty$, entonces la serie $\sum_n f_n(z)$ converge uniforme y absolutamente en U.*

Demostración: La convergencia absoluta se deduce directamente del criterio de comparación. Para la convergencia uniforme, alcanza con usar el resultado previo: dado $\varepsilon > 0$, fijamos N_0 tal que para $M > N \geq N_0$ vale $\sum_{n=N+1}^{M} A_n < \varepsilon$ y asunto resuelto. □

3.2. Series de potencias

En nuestro camino a la analiticidad, la última escala indispensable es aquella en la cual repasaremos las series de potencias, radio de convergencia y todas esas cuestiones. La definición es sencilla: se trata de casos particulares de series de funciones, con $f_n(z) = a_n z^n$, con $a_n \in \mathbb{C}$. En este caso, el criterio de Weierstrass brinda un primer resultado inmediato:

Proposición 3.2.1. *Supongamos que $\sum_n |a_n| r^n < \infty$ para cierto $r > 0$. Entonces la serie $\sum_n a_n z^n$ converge uniforme y absolutamente en $\overline{D_r}$, donde D_r es el disco de radio r centrado en 0.*

A esta altura debemos decir que casi todo en esta vida se deduce de la serie geométrica. Por ejemplo, aunque no supiéramos nada sobre la exponencial real, lo anterior ya alcanza para probar que la serie

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente sobre cualquier compacto, ya que para cualquier r fijo se cumple, si n es grande, que $\frac{r^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$, lo que asegura la convergencia absoluta y uniforme en $\overline{D_r(0)}$. Por ahora esta serie se bautiza con ese misterioso 'exp' porque todavía no hemos probado que la función límite coincide con e^z (¿Será cierto? ¡Qué nervios!). Aunque, por supuesto, tenemos fuertes sospechas de que esto ocurre, que se hacen más profundas cuando observamos, usando otra vez el principio de "convergencia mayorada", que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ la serie coincide en con el límite de $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ para $m \to \infty$.

El criterio dado por la proposición anterior se puede refinar un poco más; a tal fin, vamos a definir el conjunto

$$\mathcal{A} := \{r \geq 0 : \text{ la sucesión } \{a_n r^n\} \text{ es acotada}\},$$

que es obviamente un intervalo no vacío, y el valor

$$\rho := \begin{cases} \sup \mathcal{A} & \text{si } \mathcal{A} \text{ es acotado} \\ \infty & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La denominación $\mathcal{A}$, claro está, viene de un nombre propio:

Lema 3.2.1. *(de Abel) En la situación anterior, se cumple:*

1. *Si $0 \leq r < \rho$, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}_r$.*
2. *Si $r > \rho$, entonces la serie no converge para $|z| = r$.*

<u>*Demostración*</u>: Dado $r < \rho$, podemos fijar $\tilde{r}$ tal que $r < \tilde{r} < \rho$ y escribir

$$|a_n| r^n = |a_n| \tilde{r}^n \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^n \leq C \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^n$$

para cierta constante C. Como la serie geométrica de base $\frac{r}{\tilde{r}} < 1$ converge, vale $\sum |a_n| r^n < \infty$ y el resultado se deduce de la proposición anterior. La segunda parte es inmediata, ya que si $|z| = r \notin \mathcal{A}$, entonces la sucesión $a_n z^n$ no está acotada y, en particular, no tiende a 0. $\square$

Como se ve, el lema no proporciona información para $|z| = \rho$, situación que en los libros se suele expresar con un resignado "no se sabe". En muchos casos es fácil verlo de manera directa, como la serie geométrica $\sum_{n \geq 0} z^n$, cuyo radio es 1 y obviamente no converge para $|z| = 1$. Cabe observar, sin embargo, que la suma de esta serie es $\frac{1}{1-z}$, que está definida también fuera del disco unitario (salvo, obviamente, en $z = 1$); en cambio, hay series que "se portan mal", en el sentido de que no se pueden extender como funciones continuas a ningún punto del borde de su dominio de convergencia.

Ejemplo 3.2.2. * Un caso típico de estas funciones "malas" es la serie

$$S(z) = \sum_{n \geq 0} z^{2^n}$$

cuyos términos son una subsucesión de la geométrica, aunque dejando mucho espacio entre uno y otro. Es claro aquí que $\rho = 1$ ya que, por un lado, $1 \in \mathcal{A}$ pero, por otro, la serie no converge para $|z| = 1$. Para ver que S no se extiende a ningún punto del borde observemos, en primer lugar, que vale $S(z^2) = S(z) - z$; luego, inductivamente,

$$S\left(z^{2^k}\right) = S(z) - \sum_{n=0}^{k-1} z^{2^n}.$$

Esto ya permite ver que S no se puede extender en forma continua hasta $z = 1$, fabricando una sucesión $\{z_j\} \subset D_1(0)$ tal que $z_j \to 1$ y $|S(z_j)| \to \infty$. Por ejemplo, podemos comenzar tomando una sucesión de números reales $w_n \in (0, 1)$ tales que $w_n \to 1$. Si $\{S(w_n)\}$ es no acotada, se puede elegir $z_j = w_{n_j}$ con $S(w_{n_j}) \to \infty$. En caso contrario, tomando una subsucesión podemos suponer que $S(w_n)$ converge a cierto $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. De esta forma,

$$S\left(w_n^{2^j}\right) = S(w_n) - \sum_{k=0}^{j-1} w_n^{2^k} \to \alpha - j$$

para $n \to \infty$, pues $w_n \to 1$. Luego, para cada j podemos fijar n_j tal que

$$\left|S\left(w_n^{2^j}\right) - \alpha\right| > \frac{j}{2} \qquad n \geq n_j$$

y la conclusión se deduce mediante un argumento del tipo diagonal, tomando $z_j := w_{n_j}^{2^j}$. Se puede objetar que no está garantizado que $z_j \to 1$ pero, otra vez, esto se resuelve tomando una subsucesión convergente: el hecho de que $S\left(w_n^{2^j}\right) \to \infty$ asegura que el límite de tal subsucesión no puede dar otra cosa que 1.

El paso siguiente consiste en mostrar, a partir de la anterior sucesión, que se puede hacer lo mismo para cualquier punto de un subconjunto denso de $\partial D_1(0)$: específicamente, el conjunto de todas las posibles raíces 2^k-ésimas de la unidad, vale decir, todos los objetos de la pinta

$$w = e^{\frac{2\pi M}{2^k} i} \qquad M, k \in \mathbb{N}_0.$$

A tal fin, podemos definir, para cada k fijo, el número complejo

$$w_j = \sqrt[2^k]{z_j} e^{\frac{2\pi M}{2^k} i} \in D_1$$

que verifica:

$$w_j \to e^{\frac{2\pi M}{2^k} i} := w, \qquad w_j^{2^k} = z_j.$$

De esta forma,

$$S(z_j) = S\left(w_j^{2^k}\right) = S(w_j) - \sum_{s=0}^{k-1} w_j^{2^s}.$$

Como k está fijo, la suma del último término permanece acotada; esto implica que $|S(w_j)| \to \infty$ y S no se puede extender de manera continua al valor w. Queda como ejercicio verificar ahora que S no se puede extender de manera continua a ningún punto de $\partial D_1(0)$ (¿otro argumento diagonal, tal vez?).

Cabe mencionar también un resultado curioso (o quizás no tanto) de la teoría de probabilidades según el cual “casi todas” las series con coeficientes 0 o 1 se comporta de esta manera: más precisamente, si generamos una secuencia $\{a_n\} \subset \{0, 1\}$ arrojando una moneda al azar infinitas veces, entonces la probabilidad de que la serie resultante pueda extenderse de manera continua a alguna región del borde es nula. $\square$

Como vimos, dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, el lema de Abel muestra que existe $\rho \in [0, +\infty]$ tal que la serie converge uniforme y absolutamente en cualquier subconjunto compacto del disco abierto $D_\rho(0)$ y diverge fuera de $\overline{D_\rho(0)}$. Esto incluye los casos felices en los que $\rho = \infty$, para los cuales la serie converge en todo $\mathbb{C}$ y define lo que se llama una función *entera*.

En lo que sigue vamos a obtener una expresión explícita para ρ. Por supuesto, la primera aproximación intuitiva consiste en usar los criterios que aprendimos en nuestra más tierna infancia (o, mejor dicho, en nuestro más tierno curso de ingreso a la universidad): por ejemplo, usando el hecho de que

$$\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n} = \frac{a_{n+1}z}{a_n}$$

concluimos que, si el límite $L = \text{lím}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, entonces la serie converge para $|z|L < 1$ y diverge para $|z|L > 1$, es decir: $\rho = \frac{1}{L}$. [1] Pero es claro que esto no funciona si la sucesión $\{a_n\}$ tiene infinitos ceros, así que parece conveniente mover el banco de suplentes; sacamos a D'Alembert y hacemos entrar a Cauchy, quien nos sugiere calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}|z| := L|z|.$$

La conclusión es la misma que antes; la serie converge absolutamente si $|z| < \frac{1}{L}$ y diverge si se invierte la desigualdad. Pero, otra vez, el límite podría no existir; por eso vamos a enunciar un resultado más preciso, echando mano a la noción de límite superior. Como se recordará, hay distintas maneras de definirlo, por ejemplo:

Definición 3.2.3. Dada $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ acotada superiormente, definimos la sucesión decreciente dada por $s_n := \sup\{c_j : j \geq n\}$ y

$$\limsup_{n\to\infty} c_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Si $\{c_n\} \subset \mathbb{R}$ no es acotada superiormente definimos

$$\limsup_{n\to\infty} c_n := \infty.$$

Es claro, cuando $L \in \mathbb{R}$, que decir $\limsup_{n\to\infty} c_n = L$ equivale a decir que, para todo $\varepsilon > 0$, se verifica:

1. Existe n_0 tal que $c_n - L < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.
2. $L - c_n < \varepsilon$ para infinitos valores de n.

En otras palabras, el límite de cualquier subsucesión convergente es menor o igual que L pero, además, existe una subsucesión que efectivamente converge a L. Otra manera de pensarlo es la siguiente:

$$\limsup_{n\to\infty} c_n = \sup \bigcap_{n\geq 1} \overline{C_n},$$

[1] Según la convención usual, cuando $L = 0$ o $L = \infty$ la fórmula indica, respectivamente, que $\rho = \infty$ o $\rho = 0$.

donde $C_n := \{c_j : j \geq n\}$. Y ahora sí, con la tranquilidad de que el límite superior existe siempre, podemos probar el mismo resultado que ya conocíamos para series en $\mathbb{R}$:

Proposición 3.2.2. *En la situación previa, definimos*

$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Entonces $\rho = \frac{1}{L}$.

<u>*Demostración*</u>: Dado $r > \frac{1}{L}$, sabemos que $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r}$ para infinitos n, de modo que $a_n r^n \not\to 0$, es decir, la serie no converge para $|z| = r$. Por otra parte, si $r < \frac{1}{L}$ entonces existe n_0 tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r} \qquad n \geq n_0.$$

Luego, la sucesión $\{a_n r^n\}$ está acotada, lo que prueba que r pertenece a aquel conjunto $\mathcal{A}$ antes definido. $\square$

Para quienes conservan cierto cariño por el criterio de D'Alembert, podemos enunciar más formalmente el comentario anterior:

Proposición 3.2.3. *Supongamos que el límite*

$$L := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

existe. Entonces $\rho = L$.

<u>*Demostración*</u>: Dado $r > L$, existe n_0 tal que

$$0 < \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < r \qquad n \geq n_0.$$

Luego, para todo k vale

$$|a_{n_0}| < r|a_{n_0+1}| < \ldots < r^k|a_{n_0+k}|,$$

es decir:

$$|a_n r^n| > |a_{n_0}| r^{n_0}$$

para todo $n \geq n_0$. Se deduce que $a_n r^n \not\to 0$, de modo que la serie no converge para $z| = r$, es decir: $L \geq \rho$.

Por otro lado, para $r < L$ podemos fijar n_0 tal que

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > r \qquad n \geq n_0.$$

Por inducción, se deduce que $|a_{n+k}|r^k < |a_{n_0}|$ para todo k, o bien

$$|a_n| r^n < |a_{n_0}| r^{n_0} \qquad n \geq n_0.$$

En consecuencia, la sucesión $\{a_n r^n\}$ está acotada, de donde $r \in \mathcal{A}$. $\square$

Dejando de lado el análisis de la convergencia, las series de potencias se pueden sumar y multiplicar formalmente: dadas las series $A = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $B = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, se define

$$A + B := \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n, \qquad AB := \sum_{n\geq 0} c_n z^n,$$

donde los coeficientes c_n son los que provienen de multiplicar entre sí los términos cuyos exponentes suman n, es decir:

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

En algunos textos (por ejemplo, [3]) se considera el conjunto de todas las series formales que, con las operaciones anteriores tiene estructura de anillo y se lo suele denotar $\mathbb{C}[[X]]$. El siguiente lema prueba que el subconjunto $\mathbb{C}\{X\}$ de todas las series con radio de convergencia positivo es un subanillo de $\mathbb{C}[[X]]$:

Lema 3.2.4. *En la situación anterior, si ρ_A y ρ_B son positivos, entonces ρ_{A+B} y ρ_{AB} son positivos. Más precisamente,*

$$\rho_{A+B}, \rho_{AB} \geq \min\{\rho_A, \rho_B\} := \rho.$$

Además, para $|z| < \rho$ vale

$$(A + B)(z) = A(z) + B(z), \qquad (AB)(z) = A(z)B(z).$$

Demostración: Para la suma, es claro, porque si $r < \rho$ entonces $\{a_n r^n\}$ y $\{b_n r^n\}$ son acotadas y, en consecuencia, $\{(a_n + b_n)r^n\}$ es acotada.[2] El hecho de que $(A + B)(z) = A(z) + B(z)$ se deduce de las propiedades del límite.

Consideremos ahora $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ y $r < \rho$. Como antes, sabemos que existe M tal que, para todo $n \geq 0$ vale $|a_n|r^n, |b_n|r^n \leq M$, luego

$$|c_n| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{M}{r^j}\frac{M}{r^{n-j}} = \frac{(n+1)M^2}{r^n}.$$

Esto dice que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{r}\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)M^2} = \frac{1}{r},$$

es decir: $\rho_{AB} \geq \rho$. Por otra parte, dado $z \in D_\rho(0)$, observemos que las sumas parciales de las respectivas series A, B y AB verifican

$$A_N(z)B_N(z) = (AB)_N(z) + \sum_{n=N+1}^{2N} \tilde{c}_n z^n,$$

[2] Dicho de otra manera: $\mathcal{A}_A \cap \mathcal{A}_B \subset \mathcal{A}_{A+B}$. Por supuesto, es fácil encontrar situaciones en las que la inclusión es estricta: un ejemplo extremo consiste en fijar cualquier serie A con radio finito y elegir arteramente $b_n := -a_n$.

donde $\tilde{c}_n = \tilde{c}_n(N)$ es igual a c_n pero con algunos sumandos menos; más específicamente:

$$\tilde{c}_n = \sum_{j=n-N}^{N} a_j b_{n-j}, \qquad n = N+1, \ldots, 2N.$$

Fijemos r tal que $|z| < r < \rho$ y un valor M como antes, luego vale

$$|\tilde{c}_n| \leq \frac{(2N-n+1)M^2}{r^n} < \frac{nM^2}{r^n}.$$

de modo que

$$\left| \sum_{n=N+1}^{2N} \tilde{c}_n z^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} nM^2 \left(\frac{|z|}{r} \right)^n.$$

Como $\sqrt[n]{nM^2} \to 1$, la serie $\sum_{n\geq 0} nM^2 w^n$ converge absolutamente en $D_1(0)$ y, en particular, para $w = \frac{|z|}{r}$. Esto quiere decir que, dado $\varepsilon > 0$ existe N_0 tal que, para $N \geq N_0$, el término de la derecha en la última desigualdad es menor que ε y, en consecuencia,

$$|A_N(z)B_N(z) - (AB)_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{2N} \tilde{c}_n z^n \right| < \varepsilon.$$

□

Esto de habernos puesto a sumar y multiplicar series nos anima a comprobar que, tal como sospechábamos, la función definida por la serie $\exp(z)$ coincide con la exponencial. Empecemos, con ánimo combinatorio, comprobando que $\exp(z+w)$=$\exp(z)\exp(w)$, ya que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \sum_{n\geq 0} \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Por otra parte, nuestros conocimientos sobre series reales nos permiten asegurar que $\exp(x)$= e^x y, además,

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y).$$

De esta forma,

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = e^x[\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y)] = e^z.$$

Observación 3.2.5. * Dividir series puede parecer más complicado, aunque el siguiente argumento (otra vez, “formal”) viene en nuestra ayuda. En principio notemos que, dadas dos series A y B, es posible definir la serie compuesta $A \circ B$ dada por $A \circ B(z) := A(B(z))$, siempre que $b_0 = 0$. Esta última condición puede sonar extraña, pues no hace falta para definir la composición de las respectivas funciones; sin embargo, la cuestión se explica cuando escribimos

$$A \circ B(z) = \sum_{j\geq 0} a_j (B(z))^j.$$

Asumiendo $b_0 = 0$ resulta que, para cada n, el coeficiente correspondiente al término de orden n en la serie $B(z)^j$ es nulo cuando $j > n$ y, de esta forma, podemos definir

$$A \circ B(z) := \sum_{n \geq 0} C_n z^n,$$

donde C_n es el coeficiente correspondiente al término de orden n en la serie $\sum_{j=0}^{n} a_j (B(z))^j$. En cambio, si fuera $b_0 \neq 0$, la serie $B(z)^j$ puede tener un término n-ésimo no nulo para infinitos valores de j, lo que impide definir C_n de manera general.

A partir de lo anterior, podemos encarar entonces el procedimiento de invertir una serie $S(z) = \sum_{n \geq 0} s_n z^n$, a la cual pedimos $s_0 \neq 0$. En principio, esto no hace más que aumentar la confusión, pero la justificación es clara: si queremos definir una serie para $\frac{1}{S(z)}$, es razonable suponer $S(0) \neq 0$. Y ahora el truco consiste en observar que vale

$$(1 - z) \sum_{n \geq 0} z^n = \sum_{n \geq 0} z^n - \sum_{n \geq 1} z^n = 1.$$

Cabe aclarar que esto último no depende del dominio de convergencia ni de que sepamos calcular la serie geométrica, sino que se trata de una identidad de series formales. Esto permite decir (con toda formalidad), que vale

$$G(z) = \frac{1}{1 - z} := \sum_{n \geq 0} z^n$$

De esta manera, si $s_0 = 1$, entonces se define

$$\frac{1}{S(z)} = \frac{1}{1 - [1 - S(z)]} := \sum_{n \geq 0} [1 - S(z)]^n = G \circ B(z)$$

donde la composición está bien definida, pues la serie $B := 1 - S$ satisface $b_0 = 0$. Si ahora $s_0 \neq 0$ es cualquier valor, escribimos

$$\frac{1}{S(z)} := \frac{1}{s_0} \frac{1}{\frac{S(z)}{s_0}} = \sum_{n \geq 0} \frac{[s_0 - S(z)]^n}{s_0^{n+1}}.$$

En general, dadas dos series de potencias A y B con $b_0 \neq 0$, lo anterior brinda una expresión para la serie cociente $\frac{A}{B}$. Es un poco engorroso probar de manera directa que si $\rho_A, \rho_B > 0$ entonces vale $\rho_{A/B} > 0$; sin embargo, dentro de pocas páginas podremos comprobar que esto vale sin necesidad de hacer mayores esfuerzos. Y, por supuesto, hay un argumento aún más poderoso: como veremos, A y B son holomorfas, lo cual implica que también $\frac{A}{B}$ resulta holomorfa cerca de 0. Pero, tal como venimos anunciando, más adelante veremos que de aquí se deduce la analiticidad; en particular $\frac{A}{B}$ se puede escribir como serie de potencias centrada en 0.

Al margen de esto, no está mal, como ejercicio, intentar calcular algunos coeficientes de la división de series. Para hacerlo sencillo, consideremos $S(z)$ como antes, con $s_0 = 1$ y veamos qué pinta tienen los coeficientes de

$$\frac{1}{S} = \sum_{n\geq 0}[1 - S(z)]^n = \sum_{n\geq 0}\left(-\sum_{j\geq 1} s_j z^j\right)^n := \sum_{n\geq 0} C_n z^n.$$

Para el primero, no hay mayores dudas: tiene que valer $C_0 = 1$. El siguiente tampoco es un gran misterio, alcanza con mirar el primer término cuando $n = 1$, es decir, $C_1 = -s_1$. En cambio, con C_2 la cosa se pone más interesante, ya que aparecen dos términos cuadráticos: uno con $n = 1$, en la serie $-\sum_{j\geq 1} s_j z^j$ y y otro para $n = 2$, en la serie $\left(-\sum_{j\geq 1} s_j z^j\right)^2$. En definitiva, tenemos

$$C_2 = -s_2 + s_1^2.$$

Así sucesivamente, se deducen uno a uno los coeficientes

$$C_3 = -s_3 + 2s_1 s_2 - s_1^3$$

$$C_4 = -s_4 + 2s_1 s_3 + s_2^2 - 3s_1^2 s_2 + s_4^4$$

etc. Por supuesto, existen maneras más eficientes para calcular esto, desde identidades combinatorias hasta diversos métodos numéricos. Y también se pueden obtener los coeficientes por una simple recurrencia: sabiendo que

$$(1 + s_1 z + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \ldots)(C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \ldots) = 1,$$

obtenemos

$$C_0 = 1$$

$$C_1 + s_1 C_0 = 0 \Longrightarrow C_1 = -s_1$$

$$C_2 + s_1 C_1 + s_2 C_0 = 0 \Longrightarrow C_2 = -s_2 + s_1^2$$

$$C_3 + s_1 C_2 + s_2 C_1 + s_3 C_0 = 0 \Longrightarrow C_3 = -s_3 + s_1 s_2 + s_1 s_2 - s_1^3$$

$$\ldots$$

Esta cuenta se puede escribir de manera similar a la división usual de polinomios, como se muestra en la Figura 3.1.

Figura 3.1: Dividiendo series

Para concluir esta sección, ¿qué le hace una definición formal más al tigre? Dada una serie $S = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, podemos considerar las respectivas series derivada y primitiva, dadas por

$$D(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n, \qquad I(z) := \sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}z^n.$$

Por supuesto, nuestro objetivo es verificar que todas estas series definen -en el interior de su disco de convergencia- funciones holomorfas y vale $I' = S$ y $S' = D$, tarea que llevaremos a cabo en la próxima sección. Por ahora, podemos observar ya que las tres tienen el mismo radio de convergencia, pues vale

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(n+1)a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_{n-1}}{n}\right|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Ejercicio 6. Sea S una serie de convergencia de radio $\rho > 0$. Si $S(z)$ converge para cierto z tal que $|z| = \rho$, entonces el dominio de convergencia de su segunda primitiva es $\overline{D_\rho(0)}$.

3.3. Funciones analíticas

Definición 3.3.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $z_0 \in U$. Una función $f : U \to \mathbb{C}$ se dice analítica en z_0 si y solo si existe una serie $S = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ con radio $\rho > 0$ tal que $f(z) = S(z)$ en un entorno de z_0. Si f es analítica en todo $z_0 \in U$, entonces se dice que f es analítica en U.

Cabe mencionar que todo lo visto en la sección previa se extiende en forma inmediata para series centradas en cualquier z_0; en particular, si f y g son analíticas en z_0, entonces también lo son $f+g$ y fg. Como anticipamos, la analiticidad de $\frac{f}{g}$ cuando $g(z_0) \neq 0$ va a ser demostrada de manera indirecta (¡ya falta muy poco!). En cambio, el siguiente lema se prueba sin mayor trámite:

Lema 3.3.2. *Si f es analítica en z_0, entonces es continua en un entorno de z_0 y vale $f(z_0) = a_0$.*

Demostración: Alcanza con observar que, en cierto entorno de z_0, la función f es límite uniforme de los polinomios $S_N(z) := \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_0)^n$. □

Esto ya basta para disipar las dudas sobre el cociente de funciones analíticas, las cuales, según anunciamos, se puede pensar como una composición: $\frac{1}{f(z)} = g \circ f(z)$, donde $g(z) := \frac{1}{z}$ que (serie geométrica mediante) resulta analítica en cualquier $z_0 \neq 0$.[3]

[3] Como se recordará, esto sale de escribir

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - (z_0 - z)} = \frac{1}{z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z_0 - z}{z_0}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

que converge para $|z - z_0| < |z_0|$. El truco es elemental, pero lo usaremos unas cuantas veces.

Lema 3.3.3. *Si f es analítica en z_0 y g es analítica en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es analítica en z_0.*

Demostración: Por el lema previo, para un entorno V de z_0 vale que $f(V)$ está contenida en el dominio de g, de modo que la composición está bien definida. Escribimos $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ y $g(w) = \sum_{n\geq 0} b_n(w-w_0)^n$, con $w_0 = f(z_0) = a_0$ y radios respectivos $\rho_f, \rho_g > 0$. Ya sabemos que la composición formal $g \circ f(z) := \sum_{j\geq 0} b_j \left(\sum_{n\geq 1} a_n(z-z_0)^n\right)^j$ define una serie de potencias centrada en z_0; además, por continuidad podemos fijar $r < \rho_f$ tal que $|f(z) - w_0| < \rho_g$ para $|z - z_0| < r$. De esta manera, la serie compuesta converge en $D_r(z_0)$, lo que prueba que su radio de convergencia es mayor o igual que r □

Y, por supuesto, también es fácil comprobar que una función analítica en z_0 resulta derivable en dicho punto:

Lema 3.3.4. *Si f es analítica en z_0, entonces es derivable en z_0 y vale $f'(z_0) = a_1$.*

Demostración: Para h cercano al origen, escribimos el cociente incremental

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \sum_{n\geq 1} a_n h^{n-1} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} h^n := T(h),$$

Por el lema previo, vale $\lim_{h\to 0} T(h) = T(0) = a_1$. □

Pero el hecho de que f sea analítica en z_0 dice en realidad mucho más; por empezar, que no solo es derivable en z_0 sino en todo un entorno, vale decir: es holomorfa. Para esto alcanza con probar el siguiente enunciado, que en primera instancia parece una tautología: una serie con radio $\rho > 0$ es analítica en $D_\rho(0)$. La gracia (por así decirlo) está en el hecho de que la definición nos dice que la serie es analítica en 0, pero falta ver que eso vale también si tomamos como centro cualquier otro $z_0 \in D_\rho(0)$. De paso, la misma cuenta nos muestra que la serie se puede derivar término a término:

Proposición 3.3.1. *Sea $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con $\rho > 0$. Entonces S es analítica en $D_\rho(0)$ y vale $S'(z) = D(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$.*

Demostración: Dado $z_0 \in D_\rho(0) \setminus \{0\}$, podemos fijar $r > 0$ tal que $r + |z_0| < \rho$. Para $z \in D_r(z_0) \subset D_\rho(0)$, escribimos

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0 + z_0)^n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_0^{n-j}(z-z_0)^j.$$

Como $|z - z_0| + |z_0| < r + |z_0| < \rho$, resulta $\sum_{n\geq 0} |a_n|(|z-z_0| + |z_0|)^n < \infty$, lo que permite cambiar el orden de sumación:

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n\geq j} a_n \binom{n}{j} z_0^{n-j}(z-z_0)^j := \sum_{j\geq 0} b_j (z-z_0)^j$$

Veamos que, en efecto, los coeficientes $b_j := \sum_{n\geq j} a_n \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} z_0^{n-j}$ son números complejos bien definidos: por ejemplo, alcanza con observar que, para cada j fijo, vale

$$\sqrt[n]{\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}} \to 1 \qquad \text{para } n \to \infty,$$

de modo que la serie $\sum_{n\geq j} a_n \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} z^{n-j}$ tiene el mismo radio de convergencia ρ y, en particular, converge cuando $z = z_0$. Como la elección del valor $r < \rho - |z_0|$ es arbitraria, se deduce que el radio de convergencia de la serie centrada en z_0 es mayor o igual que $\rho - |z_0|$. Finalmente, por el lema anterior sabemos además que $S'(z_0) = b_1 = \sum_{n\geq 1} a_n n z_0^{n-1} = D_S(z_0)$. □

Corolario 3.3.1. *Si f es analítica en z_0, entonces f es holomorfa en z_0. Más aún, existe un entorno de z_0 en el que f es infinitamente derivable.*

Demostración: Como f coincide con S en un entorno de z_0, se deduce que es analítica. Además, f' coincide con la serie derivada, que tiene el mismo radio de convergencia. Por inducción, f resulta infinitamente derivable. □

Observación 3.3.5. De lo anterior se deduce también que todas las derivadas de f son analíticas en z_0 y en un entorno vale

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

En otras palabras, una función es analítica en z_0 cuando es infinitamente derivable y coincide con su serie de Taylor en un entorno de z_0.

Ejemplo 3.3.6. Fijemos una rama del logaritmo definida en un entorno de 1, luego $f(z) := \log(1+z)$ es holomorfa en un entorno de $z_0 = 0$. Como vale $e^{f(z)} = 1 + z$, resulta

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n.$$

De acuerdo con los resultados previos, la serie

$$I(z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

es una primitiva de la anterior en el disco unitario abierto, que además verifica $I(0) = 0 = f(0) + 2k\pi i$. Se deduce que $I - f = 2k\pi i$ en un entorno de 0, de modo que $I(z) = \mathrm{Log}(1+z)$, donde Log es la rama principal. Observemos que la función $\mathrm{Log}(1+z)$ está definida en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq -1}$, pero coincide con $I(z)$ solamente en $D_1(0)$.

El ejemplo previo muestra algo que vale en general: una función analítica siempre tiene primitivas locales analíticas:

Proposición 3.3.2. *Sean $f : U \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in U$. Entonces existe un entorno abierto $V \subset U$ de z_0 y una función analítica $F : V \to \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in V$.*

Demostración: Basta observar, como antes, que si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ en un entorno de z_0, entonces la serie $I(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ tiene el mismo radio de convergencia y su derivada coincide con f en un antorno de z_0. $\square$

3.4. Propiedades de las funciones analíticas

Como vimos, las funciones analíticas en cierto z_0 son aquellas que coinciden con su desarrollo en serie de Taylor cerca de z_0. Esto nos recuerda ejemplos de funciones reales "buenas" para las cuales esto no ocurre: uno muy drástico es

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver, en efecto, que f es de clase C^∞ y vale $f^{(n)}(0) = 0$ para todo n, pues e^{-1/x^2} tiende a 0 más rápido que cualquier potencia de x. Por supuesto, el ejemplo se arruina de inmediato cuando lo pensamos en el contexto de la variable compleja, ya que la función $f(z)$ deja de ser tan buena: de hecho, ni siquiera es continua en $z = 0$, cosa que se verifica cuando la evaluamos en puntos de la forma $z = \frac{i}{n}$.

Pero, más allá del ejemplo específico, queda claro que la función anterior tiene un impedimento infranqueable para candidatearse como función analítica: 0 es una raíz de multiplicidad infinita.

Definición 3.4.1. Dada una función suave, se dice que z_0 es un cero de multiplicidad o de orden n si $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Más en general, se dice que f toma el valor a en z_0 con multiplicidad n si $f - a$ tiene en z_0 un cero con multiplicidad n.

El siguiente lema muestra que la aparición de un cero de multiplicidad infinita es, en este contexto, un fenómeno poco habitual:

Lema 3.4.2. *Sea f analítica en z_0. Si $f^{(n)}(z_0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces $f \equiv 0$ en un entorno de z_0.*

Demostración: Como $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ en un entorno de z_0, donde $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, se deduce que la serie es nula. $\square$

Bastante más notable es el siguiente resultado, que asegura que un cero z_0 de una función analítica es aislado, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que f no tiene otros ceros en $D_\varepsilon(z_0)$. Esto a menos, claro, que la función sea constante en un entorno de z_0:

Proposición 3.4.1. *Sea f analítica en z_0. Si z_0 es un cero no aislado, entonces $f \equiv 0$ en un entorno de z_0.*

Demostración: Sea V un entorno de z_0 tal que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ en V. Si $f \not\equiv 0$ entonces existe algún n_0 tal que $a_{n_0} \neq 0$. Podemos suponer que n_0 es mínimo; luego, para $z \in V$ vale

$$f(z) = (z-z_0)^{n_0} \sum_{n\geq n_0} a_n(z-z_0)^{n-n_0} = (z-z_0)^{n_0} h(z),$$

donde la serie $h(z) := \sum_{n\geq 0} a_{n+n_0}(z-z_0)^n$ define una función continua que verifica $h(z_0) = a_{n_0} \neq 0$. Esto quiere decir que, en un entorno de z_0, h no se anula y el resultado se deduce del hecho de que la función $(z-z_0)^{n_0}$ se anula solamente en z_0. □

Una consecuencia inmediata es la siguiente:

Teorema 3.4.1. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica con $U \subset \mathbb{C}$ abierto y conexo. Si f no es constante en U, entonces sus ceros son aislados.

Demostración: Sea $V \subset U$ el conjunto de ceros no aislados. Es claro que V es cerrado en U ya que, para cualquier $z_0 \notin V$ existe $\varepsilon > 0$ tal que f no se anula en $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$. La proposición anterior nos dice que V es también abierto, de modo que $V = \emptyset$ o $V = U$. □

Lo anterior se puede expresar de diferentes maneras y da lugar a aquello que se suele conocer como *principio de prolongación analítica.* A grandes rasgos, dada una función analítica definida en cierto abierto, si existe una función analítica que la extiende a un abierto conexo más grande, entonces dicha extensión es única. Esto se desprende de manera inmediata del siguiente corolario:

Corolario 3.4.1. *Sean U abierto conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f \equiv 0$ en un abierto no vacío $V \subset U$, entonces $f \equiv 0$. En particular, si dos funciones analíticas definidas en U coinciden en un abierto no vacío, entonces son iguales.*

Demostración: Es trivial, porque los elementos de V son ceros no aislados de f. Si ahora tenemos g y h analíticas que coinciden en V, para ver que son iguales alcanza con tomar $f := g - h$. □

El problema de extender funciones analíticas no es en absoluto sencillo. Un ejemplo bien conocido es la zeta de Riemann, definida por

$$\zeta(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^z}, \qquad \Re(z) > 1,$$

donde n^z se define usando la rama principal del logaritmo, es decir:

$$n^z := e^{\ln(n)z}.$$

Como $|n^z| = e^{\ln(n)\Re(z)} = n^{\Re(z)}$, es claro que la serie está bien definida y converge absoluta y uniformemente en cualquier conjunto de la forma $\{\Re(z) \geq s\}$ para $s > 1$; con un poco más de esfuerzo se puede probar que es holomorfa y en consecuencia -como veremos- analítica. Pero no es obvio que se pueda extender para $\Re(z) \leq 1$. Desde ya, es claro que ninguna de tales extensiones va a estar definida en $z = 1$; sin embargo, se puede probar que existe una (única) extensión analítica a todo $\mathbb{C}\backslash\{1\}$.

Observación 3.4.3. La función de Riemann es famosa por su relación con los números primos. Una explicación informal de dicha relación surge de escribir, para un primo p,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=\frac{p}{p-1}.$$

Si multiplicamos dos de estas expresiones para primos $p\neq q$, resulta:

$$\sum_{j,k\geq 0}\frac{1}{p^jq^k}=\frac{p}{p-1}\frac{q}{q-1}$$

y, más en general, para los primeros N primos $p_1,\ldots,p_N$ vale

$$\sum_{j_1,\ldots,j_N\geq 0}\frac{1}{p_1^{j_1}\ldots p_N^{j_N}}=\prod_{j=1}^{N}\frac{p_j}{p_j-1}.$$

Ahora bien, por el teorema fundamental de la aritmética podemos ver que, a medida que N aumenta, en el término de la derecha van apareciendo todas las fracciones de la forma $\frac{1}{n}$, con $n\in\mathbb{N}$, lo que lleva a escribir

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{p}{p-1},$$

donde $\mathcal{P}$ es el conjunto de todos los primos. Ahora bien, el razonamiento es incorrecto porque -¡menudo detalle!- la serie armónica no converge y en consecuencia, el producto del lado derecho tampoco: esta observación le inspiró a Euler una nueva (y notable) demostración de que hay infinitos primos.[4] Pero para $s>1$ se puede probar rigurosamente que vale la igualdad

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}=\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{p^s}{p^s-1}.$$

El término de la izquierda no es otra cosa que $\zeta(s)$, lo que revela ya alguna conexión entre la función ζ y el conjunto $\mathcal{P}$; por supuesto, de allí a probar el célebre teorema de la distribución de los primos hay largo trecho. Más adelante diremos algo sobre esto.

También se puede entender el resultado anterior observando que dos funciones analíticas $f\neq g$ no pueden coincidir sobre una curva no constante, justamente porque, en tal caso, $f-g$ tendría ceros no aislados. Un caso particular es el siguiente:

Corolario 3.4.2. *Sean $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analíticas tales que $f(z)=g(z)$ para todo $z\in\mathbb{R}$. Entonces $f\equiv g$.*

[4] Existe una gran variedad (por no decir infinita) de demostraciones diferentes de este hecho; entre ellas, una "rítmica", basada en realidad en otra demostración topológica debida a Furstenberg. La idea es muy simple y se puede resumir así: dado un conjunto $A\subset\mathbb{Z}$, decimos que A es periódico si su función característica $\chi_A:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ lo es, vale decir, $\chi_A(n+T)\equiv\chi_A(n)$ para cierto T. Es claro que los conjuntos $p\mathbb{Z}$ son periódicos; por otro lado, si A y B son periódicos, entonces también lo es $A\cup B$. La conclusión se deduce del hecho de que el conjunto $\bigcup_{p\in\mathcal{P}}p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\backslash\{\pm 1\}$, no es periódico.

Por ejemplo, e^z es la única extensión analítica que tiene la función exponencial real. Y el resultado permite probar, sin hacer cuentas, algunas propiedades elementales. Supongamos, por ejemplo, que estamos apuradísimos y tenemos que probar que $\cos^2(z)+\operatorname{sen}^2(z)=1$. Nada más fácil: los dos términos de la igualdad son funciones analíticas que coinciden en $\mathbb{R}$; luego, son iguales. Una versión más general del corolario anterior dice que dos funciones analíticas distintas no pueden coincidir sobre una sucesión que se acumule dentro de un dominio U:

Corolario 3.4.3. *Sean U un abierto conexo y $f,g: U\to\mathbb{C}$ analíticas. Supongamos que $f(z_n)=g(z_n)$ para cierto conjunto infinito $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset K$, donde $K\subset U$ es compacto. Entonces $f\equiv g$.*

Demostración: Como K es compacto, existe una subsucesión $z_{n_j}\to z_0\in K$. Como $f(z_{n_j})=g(z_{n_j})$, por continuidad se deduce que $f(z_0)=g(z_0)$, de donde z_0 es un cero no aislado de $f-g$. $\square$

No hace falta aclarar que la hipótesis de compacidad en el corolario previo es importante: por ejemplo, las funciones $f(z)=e^z$ y $g(z)\equiv 1$ coinciden sobre la sucesión $z_n := 2\pi ni$, que obviamente no se acumula en ningún lado.

Una pregunta que quedó flotando desde el momento en empezamos a hablar de funciones analíticas es la siguiente: de acuerdo con la definición, la función se desarrolla como serie de potencias en un entorno de cualquier punto, pero: ¿qué ocurre si la serie converge más allá de dicho entorno? Por supuesto, ambas funciones tienen que seguir valiendo lo mismo:

Corolario 3.4.4. *Sean U abierto, $f: U\to\mathbb{C}$ analítica y $z_0\in U$. Si $f(z)=S(z)$ en un entorno de z_0 y la serie converge en $D_r(z_0)\subset U$, entonces $f\equiv S$ en $D_r(z_0)$.*

La demostración es trivial, ya que $D_r(z_0)$ es conexo, y tanto la serie como f son allí funciones analíticas.

Observación 3.4.4. * Más adelante veremos un resultado mucho más fuerte: si f es analítica en U y $D_r(z_0)\subset U$, entonces en este disco la serie S converge y (obviamente) coincide con f. En otras palabras, el radio de convergencia de la serie siempre es mayor o igual que la distancia de z_0 al borde de U. Por ejemplo, ya vimos que la serie de la función $f(z)=\operatorname{Log}(1+z)$ centrada en $z_0=0$ es $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}$, cuyo radio de convergencia es 1. ¿Casualidad? Seguramente no, ya que en este caso $U=\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq -1}$ y vale $\operatorname{dist}(0,\partial U)=1$. La propiedad incluye el caso $U=\mathbb{C}$ aunque, para esto, hace falta tomarse la pequeña licencia poética de decir que la distancia de un punto al vacío es infinita. Pero, como veremos, funciona bien: una función analítica en $\mathbb{C}$ siempre es entera, vale decir, su serie de potencias, centrada en un punto cualquiera, converge en todo el plano. Esto muestra una diferencia con funciones analíticas reales como $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, cuya serie de potencias centrada en $x=0$ tiene radio de convergencia 1. La explicación, a esta altura, es obvia: mirada como función de variable compleja, el dominio de f es $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$ de modo que, otra vez, la distancia de 0 al borde es 1.

Y ya que andamos "coroleando", vamos a ver todavía una consecuencia más, esta vez con una pinta ligeramente algebrosa:

Corolario 3.4.5. *Dado $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo, el anillo de funciones analíticas en U es un dominio íntegro, vale decir:*

$$fg \equiv 0 \Longrightarrow f \equiv 0 \text{ o } g \equiv 0.$$

<u>*Demostración*</u>: Supongamos que $f(z_0) \neq 0$, entonces f no se anula en un entorno V de z_0. Esto quiere decir que $g \equiv 0$ en V, de donde $g \equiv 0$. $\square$

Observación 3.4.5. * Quienes recuerden un poco de álgebra, podrán sentir aquí cierta satisfacción, porque el hecho de tener un dominio íntegro permite definir lo que se llama el *cuerpo de fracciones*: en este caso, objetos de la forma $\frac{f}{g}$, que se pueden sumar, multiplicar o dividir alegremente. Por supuesto, hay que pedir que $g \not\equiv 0$; en tal caso, $\frac{f}{g}$ es una función analítica, definida en todo U salvo el conjunto de ceros de g. Pero este conjunto está compuesto por puntos aislados y en consecuencia es, a lo sumo, numerable. Además, cualquier cero z_0 de g es de orden finito: como antes, podemos escribir $g(z) = (z - z_0)^k \tilde{g}(z)$, donde $\tilde{g}$ es analítica y no se anula en z_0. De la misma forma, $f(z) = (z - z_0)^j \tilde{f}(z)$ (eventualmente $j = 0$); luego se obtiene

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{j-k} h(z),$$

donde la función $h(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$ es analítica en z_0 y vale $h(z_0) \neq 0$. Si $n := j - k > 0$, se dice que $\frac{f}{g}$ tiene un cero de orden n en z_0; en cambio, si $n < 0$ se dice que $\frac{f}{g}$ tiene un polo de orden $-n$ en z_0.

3.5. El teorema de la aplicación abierta

En esta sección probaremos uno de los teoremas fundamentales del análisis complejo:

Teorema 3.5.1. (de la aplicación abierta) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y sea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica no constante. Entonces f es abierta, es decir, $f(V)$ es abierto para todo $V \subset U$ abierto.

<u>*Demostración*</u>: Dado $z_0 \in V$, queremos ver que $f(V)$ es un entorno de $f(z_0)$. Si $f'(z_0) \neq 0$, el resultado es inmediato gracias al teorema de la función inversa (nota mental: pensada como función de dos variables reales, f es de clase C^∞): existen $A \subset V$ y $B \subset \mathbb{C}$ entornos respectivos de z_0 y $f(z_0)$ tales que $f : A \to B$ es biyectiva y, de yapa, con inversa holomorfa.

El caso más delicado es, entonces, $f'(z_0) = 0$. Por comodidad, supongamos primero que $z_0 = 0$ y $f(z_0) = 0$. Como f no es constante, en un entorno de 0 vale $f(z) = \sum_{n \geq k} a_n z^n$ para cierto $k \geq 2$ con $a_k \neq 0$. Esto también se puede escribir en la forma

$$f(z) = a_k z^k h(z),$$

donde $h(z)$ es analítica, con $h(0) = 1$. Todo el secreto de la demostración consiste en observar que, cerca de $z = 0$, vale $f(z) = [\varphi(z)]^k$, donde φ es una función analítica. Para probar esto, en primer lugar podemos elegir cualquier raíz k-ésima $a \neq 0$ de a_k, vale decir, tal que $a^k = a_k$. Y, en segundo lugar, recordemos las siempre útiles ramas del logaritmo: por ejemplo, la rama principal, que está definida en $D_1(1)$ y, como vimos, es analítica. Para $r > 0$ suficientemente chico, tenemos que $D_r(0) \subset V$ y, además, $h(D_r(0)) \subset D_1(1)$, lo que permite definir

$$g(z) := e^{\frac{1}{k}\operatorname{Log}(h(z))}$$

y luego tomar simplemente

$$\varphi(z) := azg(z).$$

Y ahora solo resta observar que $\varphi'(z) = ag(z) + azg'(z)$, de modo que

$$\varphi'(0) = ag(0) \neq 0.$$

Como antes, el teorema de la función inversa nos dice que existe $A \subset D_r(0)$ entorno de 0 tal que $\varphi(A)$ es entorno de 0; luego, basta verificar que la función $\psi(z) := z^k$ transforma entornos de 0 en entornos de 0. Pero esto es claro, pues todo número complejo $z \neq 0$ tiene k raíces distintas, todas de módulo $\sqrt[k]{|z|}$, de modo que $\psi(D_s(0)) = D_{s^k}(0)$.

Para el caso general, alcanza con definir $g(z) := f(z+z_0) - f(z_0)$, que es obviamente analítica, no constante y verifica $g(0) = 0$. En otras palabras, f se puede pensar como la función g (que es abierta) compuesta con traslaciones. $\square$

A modo de reflexión "filosófica", de la demostración previa se desprende que, salvo traslaciones, toda función analítica se puede escribir localmente como un difeomorfismo conforme (analítico) entre entornos de 0 elevado a una cierta potencia k, que representa la multiplicidad con la que f toma el valor z_0:

$$f(z) = f(z_0) + [\varphi(z - z_0)]^k. \tag{3.1}$$

Observación 3.5.1. En particular, si f no es constante cerca de z_0, entonces vale $k > 0$ y, tal como ocurre con las raíces k-ésimas, podemos encontrar entornos A de z_0 y B de $f(z_0)$ de modo tal que, para todo $b \in B \setminus \{f(z_0)\}$, la ecuación $f(z) = b$ tiene exactamente k raíces distintas en A. La explicación es sencilla: al igualar $f(z) = f(z_0)$, nos queda la ecuación $[\varphi(z - z_0)]^k = 0$, es decir, $\varphi(z - z_0) = 0$, cuya única solución es $z = z_0$. En cambio, si nos movemos un poco y elegimos un valor $b \neq f(z_0)$, al igualar $f(z) = b$ queda

$$[\varphi(z - z_0)]^k = b - f(z_0).$$

Esto determina exactamente k ecuaciones distintas para las raíces k-ésimas $\{c_1, \ldots, c_k\}$ de $b - f(z_0)$

$$\varphi(z - z_0) = c_j, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

cada una de ellas con solución única. Más adelante veremos una versión más precisa de este resultado.

3.6. Módulo máximo y teorema de Liouville

El teorema de la aplicación abierta y su demostración tienen varias consecuencias notables; una muy sencilla e inmediata es la siguiente, que vuelve a marcar una diferencia con las funciones analíticas reales:

Proposición 3.6.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ analítica e inyectiva. Entonces $f'(z) \neq 0$ para todo z.*

Demostración: Por lo anterior, si $f'(z_0) = 0$, entonces en un entorno V de z_0 vale la fórmula (3.1) con $k \geq 2$. El resultado se deduce del hecho de que $\{\varphi(z - z_0) : z \in V\}$ contiene un disco $D_r(0)$ y elevar a una potencia $k \geq 2$ sobre $D_r(0)$ no es una función inyectiva. □

Una vez más, la explicación de por qué esto no es cierto en $\mathbb{R}$ se ve a partir de un ejemplo sencillo: la función $f(x) = x^3$ es inyectiva (y $f'(0) = 0$), pero deja de serlo cuando la extendemos al plano complejo. Observemos, de paso, que la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es derivable en $x = 0$, cosa que no puede pasar con una función de variable compleja: si $f : U \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva, la inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ es holomorfa. Esto se debe a la proposición anterior, combinada con el teorema de la función inversa.

Observación 3.6.1. * Un resultado topológico conocido como *invariancia de dominio* dice que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ es continua e inyectiva, entonces su inversa es continua. El caso $n = 1$ es inmediato; sin embargo, la demostración para $n > 1$ involucra cuestiones topológicas bastante delicadas. Más adelante veremos una prueba sencilla empleando herramientas básicas del análisis complejo.

3.6.1. Principio del módulo máximo

Uno de los teoremas "estrella" de la teoría de variable compleja es el principio del módulo máximo, que implica a su vez otros resultados de gran importancia. Veamos el enunciado habitual:

Teorema 3.6.1. (módulo máximo) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : U \to \mathbb{C}$ analítica. Si existe $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para todo $z \in U$, entonces f es constante.

En otras palabras, si f no es constante, su módulo no puede alcanzar un máximo en el interior de U. En particular, si U es acotado y f se extiende de manera continua hasta el borde, entonces

$$\sup_{z \in U} |f(z)| = \max_{z \in \partial U} |f(z)|$$

y el supremo del término izquierdo no se alcanza, es decir: existe $z_0 \in \partial U$ tal que $|f(z)| < |f(z_0)|$ para todo $z \in U$. Cabe aclarar que el resultado también impide que se alcancen máximos locales: si $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo z en cierto entorno V de z_0, entonces f es constante en V, cosa que (como ya sabemos) implica que f es constante en U.

La demostración del teorema es más sencilla de lo que esperábamos: si f no es constante, entonces $f(U)$ es abierto; en particular contiene un disco centrado en $f(z_0)$. Pero este disco necesariamente contiene puntos cuyo módulo es mayor que $|f(z_0)|$, lo que es absurdo. □

También existe -¿por qué no?- un principio del módulo mínimo. Sin embargo, algo dice que debemos tener cuidado: por ejemplo, para una función tan tonta como la identidad, el módulo alcanza un mínimo en $z = 0$ sin que se nos caiga abajo toda la estantería matemática. Precisamente, allí está el problema, que se ve cuando tratamos de imitar la demostración anterior: para poder asegurar que en un disco $D_r(w)$ existen números complejos de módulo menor que $|w|$, tenemos que pedir $w \neq 0$. En definitiva, el resultado requiere una hipótesis adicional, que la función no se anule:

Teorema 3.6.2. (módulo mínimo) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y sea $f : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ analítica. Si existe $z_0 \in U$ tal que $|f(z)| \geq |f(z_0)|$ para todo $z \in U$, entonces f es constante.

Con el mismo criterio de las demostraciones previas, se puede también probar que la parte real o imaginaria de una función analítica no constante no puede alcanzar un máximo o un mínimo en un abierto conexo. Y esto se generaliza para funciones armónicas, en un ejercicio que en principio no tiene ni el menor vestigio de números complejos:

Ejercicio 7. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica, con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto conexo. Haciendo un poco de trampa, probar que si u alcanza un máximo o un mínimo local en U, entonces u es constante. **Sugerencia**: dado cualquier $(x_0, y_0) \in U$, la función u admite una conjugada armónica en un entorno de (x_0, y_0). Pero, ¿cuál es la trampa? Respuesta: que todavía no probamos que una función holomorfa es analítica.

Observación 3.6.2. * El ejercicio anterior permite probar, en particular, la unicidad en el problema de Laplace $\Delta u(x, y) = \varphi(x, y)$ en un dominio acotado $U \subset \mathbb{R}^2$ bajo una condición de borde llamada *de Dirichlet*: $u|_{\partial U} = g$, donde g es una función dada. En efecto, si u y $\tilde{u}$ son dos posibles soluciones, entonces la diferencia $u - \tilde{u}$ resulta armónica y se anula en ∂U. Lo que sigue se parece al teorema de Rolle: como $w := u - \tilde{u}$ es constante en el borde, entonces alcanza un máximo o un mínimo absoluto en U, de donde se deduce que $w \equiv 0$. Pero hay una forma directa de ver esto, si recordamos los teoremas clásicos de cálculo vectorial: basta observar que

$$\operatorname{div}(w\nabla w) = \langle \nabla w, \nabla w\rangle + w \operatorname{div}(\nabla w) = \|\nabla w\|^2 + w\Delta w.$$

De esta forma, como w es armónica obtenemos, por el teorema de la divergencia,

$$\int_U \|\nabla w\|^2 \, dxdy = \int_U \operatorname{div}(w\nabla w)\, dxdy = \int_{\partial U} w\frac{\partial w}{\partial \nu} d\sigma = 0,$$

pues w se anula en el borde. Se deduce que $\nabla w \equiv 0$, de donde w es constante, es decir, $w \equiv 0$.

Si alguien se pregunta para qué pueden servir estas cosas, una respuesta contundente es el siguiente resultado, que no por nada se llama "fundamental":

Teorema 3.6.3. (Teorema fundamental del álgebra) Sea $P(z)$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Demostración: Como P es continua y $|P(z)| \to \infty$ para $|z| \to \infty$, podemos fijar $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ para $|z| > R$. Pero $\overline{D_R(0)}$ es compacto, de modo que el módulo de P alcanza allí un mínimo en cierto z_0. Además, para $|z| > R$ vale

$$|P(z_0)| \leq |P(0)| < |P(z)|$$

y, en definitiva,

$$|P(z_0)| = \min_{w\in\mathbb{C}} |P(w)|.$$

Como P es una función analítica no constante, se deduce que $P(z_0) = 0$. □

Esto no está mal, en especial para quienes conozcan alguna demostración puramente (mejor dicho: *casi* puramente) algebraica de este hecho, que ocupa unos cuantos renglones más. Un argumento alternativo consiste en observar que si P no se anula entonces $\frac{1}{P(z)} \to 0$ para $|z| \to \infty$, y esto obliga a que el módulo de $\frac{1}{P}$ alcance un máximo. Esta sencilla variante nos pone en el contexto de otro tremendo teoremón, que es el de Liouville: si suponemos que P no se anula, entonces la función $\frac{1}{P}$ sería acotada y esto no puede ocurrir:

Teorema 3.6.4. (Liouville) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y acotada, entonces f es constante.

<u>*Demostración*</u>: Consideremos la función

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0. \end{cases}$$

Claramente, g es continua y verifica $g(z) \to 0$ para $|z| \to \infty$, de modo que $|g(z)|$ alcanza un máximo absoluto. Luego, alcanza con verificar que g es analítica. Para $z_0 \neq 0$ es claro; por otra parte, en un entorno de 0 vale $f(z) - f(0) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$, de modo que $g(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$.
□

Un argumento similar se usa en este otro resultado, que a simple vista puede parecer algo anodino pero va a tener varias consecuencias interesantes:

Lema 3.6.3. *(de Schwarz) Sea $f : D_1(0) \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo z. Entonces vale*

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in D_1(0), \qquad |f'(0)| \leq 1. \tag{3.2}$$

Además, si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ o $|f'(0)| = 1$, entonces $f(z) = cz$ para cierta constante c tal que $|c| = 1$.

<u>*Demostración*</u>: Definimos como antes $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ si $z \neq 0$ y $g(0) := f'(0)$. Ya sabemos por la demostración anterior que g es analítica; además, por el principio del máximo sabemos, para $|z| \leq r < 1$, que

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| \leq \frac{1}{r},$$

pues $|f(w)| \leq 1$. Como esto vale para todo $r < 1$, se deduce que $|g(z)| \leq 1$ para todo z, lo que implica (3.2). Observemos, finalmente, que si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ o $|f'(0)| = 1$, entonces $|g(z)| = 1$ para algún z. Nuevamente, el principio del máximo dice que $g(z) \equiv c$, con $|c| = 1$ y $f(z) = cz$. □

Las hipótesis del lema anterior implican que $f : D_1(0) \to D_1(0)$, ya que no puede valer $|f(z)| = 1$ para ningún z. Esto lleva a preguntarse cuáles son las transformaciones analíticas del disco que además son biyectivas. Ya sabemos que esto implica que la inversa es holomorfa y más adelante podremos decir que es analítica; por ahora, vamos a omitir este detalle y enunciar el resultado de la siguiente manera:

Proposición 3.6.2. *Sea $f : D_1(0) \to D_1(0)$ analítica biyectiva, con inversa analítica. Si $f(0) = 0$, entonces $f(z) = cz$ para cierta constante c tal que $|c| = 1$.*

<u>*Demostración*</u>: Por el lema previo, vale $|f(z)| \leq |z|$ y también $|f^{-1}(w)| \leq |w|$, para cualquier z y cualquier w. Poniendo $w = f(z)$, se ve que $|f(z)| = |z|$ para todo z, y la conclusión se desprende del lema anterior. $\square$

Cabe preguntarse también por aquellas transformaciones del disco más generales, que no tienen por qué dejar fijo el 0. El lema de Schwarz nos pone en condiciones de caracterizarlas; en rigor, se trata de viejas conocidas, rotaciones de aquellas entrañables homografías de las primeras clases:

Corolario 3.6.1. *Sea $f : D_1(0) \to D_1(0)$ analítica biyectiva, con inversa analítica. Entonces existen $c, a \in \mathbb{C}$ con $|c| = 1$ y $|a| < 1$ tales que*

$$f(z) = c\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

<u>*Demostración*</u>: La idea es sencilla: si el problema es que $f(0)$ no cae en el origen, entonces forcemos a que eso ocurra. Llamando $w = f(0)$, podemos definir la homografía $T : D_1(0) \to D_1(0)$

$$T(z) = \frac{z - w}{1 - \overline{w}z},$$

que es una función analítica en $D_1(0)$, al igual que su inversa. Luego, también son analíticas $T \circ f$ y su inversa $(T \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ T^{-1}$. Como además vale $T \circ f(0) = 0$, por el lema anterior existe una constante c de módulo 1 tal que $T \circ f(z) = cz$. Haciendo la cuenta, se obtiene:

$$f(z) = T^{-1}(cz) = \frac{cz + w}{1 + \overline{w}cz} = c\frac{z + w\overline{c}}{1 + \overline{w}cz},$$

de donde se deduce el resultado con $a = -w\overline{c}$. $\square$

Observación 3.6.4. En el primer capítulo usamos un argumento de conexión para probar que las funciones $T_w(z) = \frac{z-w}{1-\overline{w}z}$ con $|w| < 1$ (transformaciones de Möbius del disco) verifican $T_w(D_1(0)) \subset D_1(0)$. Sin embargo, sabiendo que se trata de una función analítica en el disco de radio $\frac{1}{|w|} > 1$, el resultado es aún más inmediato: como vale $|T_w(z)| = 1$ para $|z| = 1$, el principio de módulo máximo dice que $|T_w(z)| < 1$ para $|z| < 1$.

Ya que nos tomamos la libertad de componer con homografías, podemos mencionar también la siguiente generalización del lema de Schwarz, para funciones analíticas cualesquiera del disco:

Lema 3.6.5. *(Schwarz-Pick) * Sea $f : D_1(0) \to D_1(0)$ analítica, y sean $z, w \in D_1(0)$. Entonces*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - f(z)\overline{f(w)}}\right| \leq \left|\frac{z - w}{1 - z\overline{w}}\right|$$

y

$$|f'(z)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Además, si la primera desigualdad (para algún $z \neq w$) o la segunda (para algún z) no es estricta, entonces $f(z) = c\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ con $|c| = 1$ y $|a| < 1$.

<u>*Demostración*</u>: Empleando la notación anterior, la primera desigualdad dice, para w fijo, que

$$|T_{f(w)}(f(z))| \leq |T_{-w}(z)|$$

para todo z. Llamando $a := T_{-w}(z)$ y observando que $T_{-w}^{-1} = T_w$, esto equivale a decir que

$$|T_{f(w)}(f(T_w(a)))| \leq |a|$$

para todo $a \in D_1(0)$. Pero esto se cumple por el lema de Schwarz, ya que la función $T_{f(w)} \circ f \circ T_w : D_1(0) \to D_1(0)$ verifica $T_{f(w)} \circ f \circ T_w(0) = 0$. Además, si vale la igualdad para algún $a \neq 0$, es decir, para $z \neq w$, entonces se tiene que $T_{f(w)} \circ f \circ T_w$ es una rotación y, en consecuencia, f es inversible. La segunda desigualdad sale de reescribir la primera para $z \neq w$ en la forma

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right| \leq \left|\frac{1-f(z)\overline{f(w)}}{1-z\overline{w}}\right|$$

y tomar límite para $w \to z$. Queda como ejercicio (simpático) ver qué ocurre cuando la segunda desigualdad no es estricta para algún z. □

Observación 3.6.6. * El lema de Schwarz-Pick no solo sirve para resolver ejercicios de la práctica sino que tiene relación, por ejemplo, con uno de los modelos clásicos para la geometría hiperbólica de Lobachevski, el llamado *disco de Poincaré*. En rigor, se trata del mismo disco $D_1(0)$ de toda la vida, pero provisto de una métrica especial, llamada precisamente hiperbólica. Para esta métrica, las transformaciones de Möbius son isometrías y las funciones $f : D_1(0) \to D_1(0)$ analíticas son siempre contracciones, como se desprende (¡por supuesto!) del lema de Schwarz-Pick.

Capítulo 4

Integración

Con el objetivo “holomorfa implica analítica” en nuestro horizonte, vamos a definir la integración de funciones de variable compleja sobre curvas que, desde ya, es muy similar a lo que ya sabemos sobre integrales curvilíneas. Pero, al igual que en los temas previos, podemos hacer todo sin necesidad de recordar nada de lo que vimos, allá lejos y hace tiempo, en nuestros primeros cursos de análisis. Empecemos por definir, de manera obvia, la integral de una función continua sobre un segmento.

Definición 4.0.1. Dada $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua, se define

$$\int_a^b F(t)\,dt := \int_a^b \Re(F(t))\,dt + i \int_a^b \Im(F(t))\,dt$$

Es inmediato verificar que se cumplen, entre otras, las siguientes propiedades:

1. $\int_a^b (cF + G) = c \int_a^b F + \int_a^b G$ para $c \in \mathbb{C}$.
2. La función $t \mapsto \int_a^t F$ es derivable, con derivada $F(t)$. En particular, si $\tilde{F}$ es una primitiva de F, vale $\int_a^b F = \tilde{F}|_a^b = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$.
3. $\left|\int_a^b F\right| \leq \int_a^b |F|$.

Intentar probar la última propiedad acotando directamente puede resultar un pequeño fiasco; es mucho más sencillo apelar a un truco típico de la variable compleja: si escribimos $\int_a^b F = Re^{i\theta}$ con $R = |F|$, entonces

$$R = e^{-i\theta} \int_a^b F = \int_a^b e^{-i\theta} F.$$

Como $R \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$R = \int_a^b \Re\left(e^{-i\theta} F\right) \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} F\right| = \int_a^b |F|.$$

Pero ya es hora de llamar las cosas por su nombre: una función de un intervalo hacia $\mathbb{C}$ no es otra cosa que una curva y, fieles a las tradiciones, vamos a denotarla mediante una letra griega. Cuando se trata de curvas derivables, es fácil demostrar que se cumplen las reglas de suma, producto y cociente, es decir:

$$(\gamma+\delta)'=\gamma'+\delta', \qquad (\gamma\delta)'=\gamma\delta'+\gamma'\delta, \qquad \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)'=\frac{\gamma'\delta-\gamma\delta'}{\gamma^2} \quad (\gamma\neq 0).$$

Y también se tiene la idea de reparametrización: dadas $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ y $r:[c,d]\to[a,b]$ biyectiva, queda definida la curva $\gamma\circ r:[c,d]\to\mathbb{C}$ y, si se trata de funciones derivables, vale $(\gamma\circ r)'(t)=\gamma'(r(t))r'(t)$. Por otro lado, si $f:U\to\mathbb{C}$ es holomorfa y $\gamma:[a,b]\to U$ es derivable, entonces se verifica que $(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

En lo que sigue, vamos a considerar aquellas curvas $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ que son C^1 a trozos, es decir, tales que γ es continua y existe una secuencia

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b$$

con $\gamma_j:=\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ de clase C^1 para $j=0,\ldots,N-1$. Una curva así a veces se llama *camino*. En particular, si además vale $\gamma(a)=\gamma(b)$, diremos que γ es un camino cerrado.

Definición 4.0.2. Dadas $f:U\to\mathbb{C}$ continua y $\gamma:[a,b]\to U$ de clase C^1, se define

$$\int_\gamma f(z)\,dz:=\int_a^b f\circ\gamma(t)\gamma'(t)\,dt.$$

Si γ es, como antes, un camino, se define

$$\int_\gamma f(z)\,dz:=\sum_{j=0}^{N-1}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz.$$

La relación con las integrales curvilíneas se ve de inmediato, si nos tomamos el pequeño atrevimiento de escribir

$$f=u+iv, \qquad dz=dx+idy,$$

de donde

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma (u\,dx-v\,dy)+i\int_\gamma (v\,dx+u\,dy). \tag{4.1}$$

No vamos a hacer uso explícito de esta relación, aunque nos ayudará a interpretar mejor los resultados que se obtienen cuando f es holomorfa, vale decir: cuando se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Observación 4.0.3. * Cabe hacer una pequeña digresión sobre una posible interpretación de la integral. Por simplicidad, podemos suponer que γ es de clase C^1 y está parametrizada por longitud de arco, de modo que $|\gamma'(t)|=1$ para cada t. De esta forma, los números complejos

$$T:=\gamma'(t), \qquad N:=-i\gamma'(t)=\gamma_2'(t)-i\gamma_1'(t)$$

forman, pensados como vectores de $\mathbb{R}^2$, una base ortonormal para todo t. Dada $f = u + iv$, miremos el campo conjugado, definido en $\mathbb{R}^2$ por $\overline{f} = (u, -v)$, que escrito en la base ortonormal resulta

$$\overline{f} = \langle \overline{f}, T\rangle T + \langle \overline{f}, N\rangle N.$$

Haciendo las cuentas,

$$\langle \overline{f}, T\rangle = u\gamma_1' - v\gamma_2' = \Re(f\gamma')$$
$$\langle \overline{f}, N\rangle = u\gamma_2' + v\gamma_1' = \Im(f\gamma')$$

y en consecuencia

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b \langle \overline{f}, T\rangle\, dt + i \int_a^b \langle \overline{f}, N\rangle\, dt.$$

En otras palabras, la parte real de $\int_\gamma f(z)\, dz$ representa el trabajo de la fuerza $\overline{f}$ a lo largo de γ, mientras que la parte imaginaria representa su flujo a través de γ. Cabe observar que si γ es una curva cerrada simple y está orientada en sentido antihorario, entonces se trata del flujo saliente.

Uno de los ejemplos por excelencia de curva es la circunferencia $\gamma(t) = re^{it}$, para $t \in [0, 2\pi]$. En particular, para $f(z) = \frac{1}{z}$, que está definida en un entorno de la imagen de γ, vale

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Tal vez suene exagerado pero, en cierto sentido, una gran parte de los resultados que veremos se apoya en esta sencilla cuenta. Pero la vida no se trata solamente de funciones holomorfas: por ejemplo, ¿qué ocurre si ahora integramos la función $f(z) = \overline{z}$? El resultado es también significativo:

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_0^{2\pi} re^{-it} ire^{it}\, dt = 2\pi r^2 i.$$

¿Casualidad? Por supuesto que no: en general, si γ es una curva suave, cerrada y simple (orientada positivamente) que encierra una región R, entonces por (4.1) vale

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = \int_\gamma x\, dx + y\, dy + i \int_\gamma -y\, dx + x\, dy.$$

Ahora entra en escena, nuevamente, el teorema de Green: como $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$ y $\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$, se deduce que

$$\int_\gamma \overline{z}\, dz = i \iint_R [1 - (-1)]\, dxdy = 2i\text{Área}(R).$$

En otras palabras, si queremos calcular el área de una región R simple y acotada (con frontera suave), entonces solo debemos integrar la función $\overline{z}$:

$$\text{Área}(R) = -\frac{i}{2} \int_{\partial R} \overline{z}\, dz,$$

donde ∂R se recorre positivamente.

Entre las propiedades básicas de la integral, cabe mencionar en primer lugar que es invariante por reparametrizaciones que preservan la orientación: más en general, si $r : [c, d] \to [a, b]$ es cualquier función derivable tal que $r(c) = a$ y $r(d) = b$, aunque no sea biyectiva, se cumple

$$\int_{\gamma \circ r} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

En efecto, se puede suponer que γ es de clase C^1 y entonces

$$\int_{\gamma \circ r} f(z)\, dz = \int_c^d f(\gamma \circ r(t))(\gamma \circ r)'(t))\, dt = \int_c^d f(\gamma(r(t)))\gamma'(r(t))r'(t)\, dt$$

$$= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\, ds = \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Es claro también que, en cambio, si invertimos la orientación solo se modifica el signo.

Por otra parte, si f tiene una primitiva F, entonces el valor de la integral solo depende de los valores $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$, concretamente:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{4.2}$$

Este "Barrow para curvas" surge, una vez más, de la propia definición: se puede suponer que γ es de clase C^1 y entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\, dt = (F \circ \gamma)|_a^b.$$

Para evitar suspicacias, cabe aclarar que el "se puede suponer"(que repetiremos unas cuantas veces), en este caso se debe al hecho de que, si γ es un camino, la fórmula (4.2) se obtiene a partir de una suma telescópica:

$$\sum_{j=0}^{N-1} [F(\gamma(t_{j+1}) - F(\gamma(t_j))] = F(\gamma(t_N)) - F(\gamma(t_0)).$$

Esto tiene una primera consecuencia importante:

Proposición 4.0.1. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Si f tiene una primitiva en U, entonces $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ para todo camino cerrado γ.*

A modo de aplicación, podemos volver a comprobar (por si quedaba alguna duda) que no existen ramas del logaritmo definidas en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En realidad, no tenemos nada nuevo por hacer: ya sabemos que cualquier rama del logaritmo es una primitiva de $\frac{1}{z}$ y, como vimos, la integral de esta función sobre una circunferencia centrada en 0 es $2\pi i \neq 0$. Pero claro, esto no es solo por obra y gracia del agujero que tiene el dominio, sino que la función aporta lo suyo: por ejemplo, la función $f(z) = \frac{1}{z^2}$, definida también en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, tiene primitiva y, por consiguiente, la integral sobre cualquier curva cerrada que no pase por el origen es nula. Pero, ya que hablamos de logaritmos, podemos ir haciendo precalentamiento con el siguiente ejercicio:

Ejercicio 8. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa con f' continua. Si $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$, entonces vale $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ para todo camino cerrado γ en U.

Llegado este punto, cualquiera se preguntaría si vale la recíproca de la proposición anterior, pues la situación se parece muy sospechosamente a aquel clásico resultado de análisis que involucra campos gradientes. Y, para alegría de todo el mundo, la respuesta es que sí, aunque para eso conviene ver antes otra propiedad que, según estimaciones moderadas, emplearemos algunos cientos de veces:

Proposición 4.0.2. *Dada f continua definida sobre la imagen de γ, se verifica:*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \|f \circ \gamma\|_\infty \mathrm{Long}(\gamma).$$

Aquí la norma infinito se emplea con el único fin de denotar el máximo valor que toma $|f \circ \gamma|$ sobre el segmento $[a, b]$, vale decir, el máximo valor de $|f(z)|$ sobre el conjunto (compacto) $\gamma([a, b])$. Y la longitud de un camino γ se define como la suma de las longitudes correspondientes a cada intervalo, es decir:

$$\mathrm{Long}(\gamma) := \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

A partir de esto, la demostración es inmediata porque, como ya sabemos,

$$\left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt \right| \leq \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\, dt \leq \|f \circ \gamma\|_\infty \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)|\, dt.$$

En realidad, entre esos “cientos de veces”, en ocasiones no emplearemos exactamente la desigualdad anterior sino alguna de sus consecuencias inmediatas:

Proposición 4.0.3. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f_n : U \to \mathbb{C}$ continuas.*

1. *Si existe $f : U \to \mathbb{C}$ tal que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente sobre subconjuntos compactos de U, entonces $\int_\gamma f_n(z)\, dz \to \int_\gamma f(z)\, dz$ para todo camino γ en U.*

2. *Si la serie $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de U, entonces*

$$\int_\gamma \sum_{n \geq 0} f_n(z)\, dz = \sum_{n \geq 0} \int_\gamma f_n(z)\, dz$$

para todo camino γ en U.

<u>*Demostración*</u>: El primer enunciado se desprende del hecho de que

$$\left|\int_\gamma [f_n(z) - f(z)]\,dz\right| \le \|(f_n - f)|_K\|_\infty \mathrm{Long}(\gamma) \to 0,$$

donde $K := \gamma([a,b])$. El segundo es consecuencia del primero, ya que

$$\sum_{n=0}^{N} \int_\gamma f_n(z)\,dz = \int_\gamma \sum_{n=0}^{N} f_n(z)\,dz \to \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\,dz \qquad N \to \infty.$$

□

Ahora sí, veamos la prometida afirmación recíproca de la Proposición 4.0.1:

Teorema 4.0.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para todo camino cerrado γ en U vale $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Entonces existe $F : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in U$.

<u>*Demostración*</u>: Todo abierto de $\mathbb{R}^2$ es unión de sus componentes conexas, que son abiertas (y numerables, dicho sea de paso). Alcanza entonces con demostrar que existe una primitiva en cada componente conexa; en definitiva, se puede suponer directamente que U es conexo y, como U es abierto, esto quiere decir que es conexo por arcos. También podemos suponer (¡flor de pavada!) que U es no vacío. Después de tantas suposiciones, fijamos cualquier $z_0 \in U$, el que más nos guste, y definimos

$$F(z) := \int_\gamma f(w)\,dw,$$

donde $\gamma : [a,b] \to U$ es un camino (de vuelta, el que más nos guste) tal que $\gamma(a) = z_0$ y $\gamma(b) = z$. Se deduce de la hipótesis que F está bien definida, es decir, no depende de la elección de γ. Esto permite la escritura (un tanto controvertida)

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw,$$

con la cual se obtiene, cuando $z + h \in U$:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(w)\,dw.$$

Pero además, si $|h|$ es chico, el segmento que une z y $z + h$ está contenido en U; si lo parametrizamos mediante la curva $\gamma(t) = z + th$ con $t \in [0,1]$, obtenemos:

$$\int_{z}^{z+h} dw = \int_0^1 h\,dt = h.$$

De esta forma,

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} [f(w) - f(z)]\,dw\right|$$

$$\leq \max_{t\in[0,1]} |f(z+th)-f(z)| \to 0$$

para $h \to 0$. □

Observación 4.0.4. Es claro, en la demostración anterior, que no hace falta que se verifique la hipótesis para *cualquier* camino: por ejemplo, es suficiente pedir que se cumpla solamente para poligonales sin autointersecciones. Más aún, se puede suponer que los segmentos de tales poligonales son siempre paralelos a los ejes. La explicación de esto es sencilla: un abierto conexo U, no solo es arco-conexo sino que dos puntos cualesquiera siempre se pueden conectar por una de tales poligonales.[1] Con esta idea en mente, se puede dar una versión ligeramente distinta de la demostración, definiendo F por medio de estas poligonales y calculando directamente las derivadas parciales de $u := \Re(F)$ y $v := \Im(F)$, que son muy fáciles de obtener y verifican $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Esta cuenta se parece más a la que suele verse en los cursos de análisis: por ejemplo, se puede fijar $w = a + ib$ suficientemente cerca de $z = x + iy$ con $a \neq x$, $b \neq y$, de donde resulta

$$F(z) = F(w) + \int_a^x f(t+ib)\,dt + i\int_b^y f(x+it)\,dt$$

y también

$$F(z) = F(w) + i\int_b^y f(a+it)\,dt + \int_a^x f(t+iy)\,dt.$$

Derivando la primera expresión respecto de y y la segunda respecto de x, obtenemos

$$F_y = if(z), \qquad F_x = f(z),$$

es decir: $f = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

En consecuencia, se tiene:

Proposición 4.0.4. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para toda poligonal cerrada simple γ en U con lados paralelos a los ejes vale $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$. Entonces f tiene una primitiva definida en U.*

Ejemplo 4.0.5. Dados un disco abierto D y $f : D \to \mathbb{C}$ analítica, ¿será cierto que f tiene una primitiva en D? Ya vimos que esto vale cuando f es una serie de potencias convergente en D; sin embargo, todo lo que sabemos por el momento sobre una función analítica cualquiera es que admite primitivas locales. Pero quizás podamos decir algo más: de acuerdo con la fórmula (4.1), vale

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).$$

y, por una exitosa combinación de Cauchy-Riemann con Green, para cualquier rectángulo $R \subset D$ podemos integrar sobre su borde[2] para obtener:

$$\int_{\partial R} (u\,dx - v\,dy) = \iint_R (-v_x - u_y)\,dxdy = 0$$

[1] Como es habitual, dada una curva continua que une dos puntos, se la puede cubrir con una cantidad finita de discos centrados sobre puntos de dicha curva. A partir de esto, es fácil obtener una de tales poligonales.

[2] Para ir acostumbrándonos a la notación: para cualquier región simple R, siempre que escribamos ∂R entenderemos que dicho borde se recorre en sentido antihorario.

y

$$\int_{\partial R} (v\,dx + u\,dy) = \iint_R (u_x - v_y)\,dxdy = 0$$

Además, como D es un disco, lo anterior ya alcanza para convencerse de que si $P \subset D$ es una poligonal cerrada con lados paralelos a los ejes, vale $\int_P f(z)\,dz = 0$ y entonces, ¡milagro! Por el Teorema 4.0.1, se deduce que f admite una primitiva en D.

Ahora bien, podríamos pensar que lo anterior se cumple para cualquier función holomorfa, ya que las condiciones de Cauchy-Riemann no requieren que f sea analítica. Sin embargo, en la demostración anterior usamos el teorema de Green, para el que se asume que las funciones involucradas son de clase C^1. Y esto, por el momento, no lo sabemos. Fue un buen intento, de todas formas...

Ejercicio 9. Probar (sin hacer cuentas) que $\int_{\partial R} \frac{1}{z}\,dz = 0$ para cualquier rectángulo cerrado R que no contiene al origen. Deducir que lo mismo vale si R es una región simple que no contiene al origen cuyo borde es una poligonal cerrada con lados paralelos a los ejes. Concluir que existe una rama del logaritmo en cualquier abierto $U \subset \mathbb{C}$ con la propiedad de que si R es cualquier región simple que contiene al origen, entonces $\partial R \not\subset U$.

4.1. * Teorema de Cauchy: preliminares (un poco de bla-bla)

A fin de entender mejor las funciones holomorfas (y probar, de una vez por todas, que son analíticas), vamos a intentar obtener una fórmula -por así decirlo- autorreferencial: dada una función f, buscaremos un modo de escribirla por medio de una integral en la que aparece la propia f. Quizás esto suene extraño, así que no viene mal un ejemplo "de juguete" para ayudar a la intuición. Consideremos una función $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que es armónica. En este contexto tan elemental, eso quiere decir simplemente que $u'' \equiv 0$ y, en consecuencia, u es una función lineal. Pero, así como Euclides dio una definición sumamente poética para la recta (*recta es aquella línea que yace igualmente respecto de todos sus puntos*), en esta situación podemos decir algo parecido, pero empleando ahora promedios. A tal fin, cabe observar que el valor de una función lineal en cada punto coincide con su promedio en un intervalo centrado en el punto, es decir:

$$u(x_0) = \frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} u(t)\,dt \tag{4.3}$$

para cualquier $r > 0$. Esto es claro si u es constante y, por linealidad, alcanza entonces con ver que la fórmula vale para $u(t) = t$:

$$\frac{1}{2r} \int_{x_0-r}^{x_0+r} t\,dt = \frac{1}{4r}[(x_0 + r)^2 - (x_0 - r)^2] = x_0.$$

Todo esto parece una tontería, aunque ayuda a dilucidar cuánto de armónicas tienen las funciones armónicas: como veremos, en $\mathbb{R}^2$ se verifica una fórmula similar.[3] Pero ahora pensemos al revés: si u satisface (4.3) para todo x_0 y todo r, ¿qué propiedades cumple? ¿Podemos asegurar que es lineal?

En principio, es claro que u tiene que ser derivable y vale:

$$u'(x) = \frac{1}{2r}[u(x+r) - u(x-r)]$$

para todo x y todo $r > 0$. Luego es de clase C^1, ya que el término de la derecha es una función continua. Pero, ¿dijimos C^1? En tal caso el término de la derecha es de clase C^1, lo que implica que u es de clase C^2 y así sucesivamente: en definitiva, una función continua que cumple (4.3) es de clase C^∞. Pero ahora, para cada x fijo podemos escribir

$$u(x+r) - u(x-r) = 2ru'(x)$$

y derivar respecto de r:

$$u'(x+r) + u'(x-r) = 2u'(x).$$

Nada nos implide derivar una vez más, para obtener

$$u''(x+r) - u''(x-r) = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\, r > 0.$$

Se deduce que u'' es constante: por ejemplo, dado $x > 0$ tomamos $r = x$ y resulta $u''(2x) = u''(0)$; del mismo modo, para $x < 0$ tomamos $r = -x$, de donde $u''(0) = u''(2x)$. En resumen, como x es arbitrario, concluimos que $u'' \equiv u''(0)$. Esto dice que $u(x) = ax^2+bx+c$; finalmente, observemos que la función x^2 no cumple la fórmula (4.3) ni de carambola, de modo que necesariamente $a = 0$.

Un poco más convencidos de las bondades de una fórmula, como dijimos, “autorreferencial”, vamos a intentar obtener algo similar para una función holomorfa. Para ello, el paso fundamental va a ser el teorema de Cauchy, cuya primera versión dice que si f es holomorfa en un disco abierto D, entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para cualquier camino cerrado en D. Como vimos en el Ejemplo 4.0.5, esto vale cuando f es analítica; más aún, ya probamos también que se verifica cuando f es holomorfa y f' es continua. El siguiente argumento nos puede convencer todavía un poco más de esto.

Supongamos, por simplicidad, que $D = D_r(0)$ y que γ es de clase C^1. Para $s \in [0,1]$, consideremos la curva $\gamma_s(t) := s\gamma(t)$ y definamos

$$I(s) = \int_{\gamma_s} f(z)\,dz = \int_a^b f(s\gamma(t))s\gamma'(t)\,dt.$$

[3] También la serie armónica se llama así por un motivo similar: cada término $\frac{1}{n}$ es el promedio entre el anterior y el posterior. La diferencia es que no se trata del promedio usual sino del llamado *promedio armónico*, que se define para dos números $A, B > 0$ como el inverso del promedio de sus inversos, es decir: $\left(\frac{A^{-1}+B^{-1}}{2}\right)^{-1}$. No por casualidad, esta serie tiene relación también con los armónicos en la música, que provienen de un problema de autovalores.

Derivando, se obtiene

$$I'(s) = \int_a^b [f(s\gamma(t))\gamma'(t) + sf'(s\gamma(t))\gamma(t)\gamma'(t)]\,dt.$$

Pero, ¡oh sorpresa! Resulta que el integrando, pensado como función de t, tiene primitiva, ya que

$$\begin{gathered}[(f\circ\gamma_s)\gamma_s]'(t) = f'(\gamma_s(t))\gamma_s(t)\gamma_s'(t) + f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)\\ s[f(s\gamma(t))\gamma'(t) + sf'(s\gamma(t))\gamma(t)\gamma'(t)].\end{gathered}$$

En otras palabras, para $s > 0$ vale

$$I'(s) = \frac{1}{s}[(f\circ\gamma_s)\gamma_s]|_a^b = 0,$$

pues la curva es cerrada. Esto quiere decir que I es constante, de modo que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = I(1) = I(0) = 1.$$

Pero entonces, ¿ya probamos el teorema de Cauchy? Lamentablemente, esto no fue más que otro buen intento: en realidad, para poder derivar bajo el signo integral necesitamos saber algo más sobre f... por ejemplo, que es de clase C^1, lo que nos deja otra vez con la misma desazón del Ejemplo 4.0.5.

Aclaración: derribando mitos (o bien: derivando integrales). Dada una función $\varphi : [a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua y derivable respecto de su segunda variable, sabemos que, en general, la función dada por

$$g(s) := \int_a^b \varphi(t,s)\,dt$$

no siempre resulta derivable. Con la integración de Lebesgue se pueden ver condiciones precisas para que lo sea; sin embargo, para nuestros fines no hace falta ir tan lejos, pues la tarea es muy sencilla si suponemos que φ es de clase C^1 respecto de s. En efecto, en tal caso alcanza con escribir

$$\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h} - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\,dt\right| \le \int_a^b \left|\frac{\varphi(t,s+h)-\varphi(t,s)}{h} - \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\right|\,dt$$

$$= \int_a^b \left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\right|\,dt$$

donde $\xi = \xi(t)$ es un valor intermedio entre s y $s+h$. Como $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ es (uniformemente) continua en $[a,b]\times[c,d]$, dado $\varepsilon > 0$ alcanza con elegir $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,\xi) - \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para $|\xi - s| < \delta$. Luego, si $|h| < \delta$, se obtiene que

$$\left|\frac{g(s+h)-g(s)}{h} - \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s)\,dt\right| < \varepsilon.$$

4.2. Teorema de Cauchy, primera versión

En la sección previa anunciamos ya el teorema que resultará clave para todo lo que vendrá a continuación. Como vimos, es fácil probarlo cuando f es holomorfa y su derivada es continua; la novedad es que ahora lo vamos a probar sin hacer uso de esta última hipótesis. El enunciado original es de Cauchy, aunque la demostración clásica se debe a Goursat:

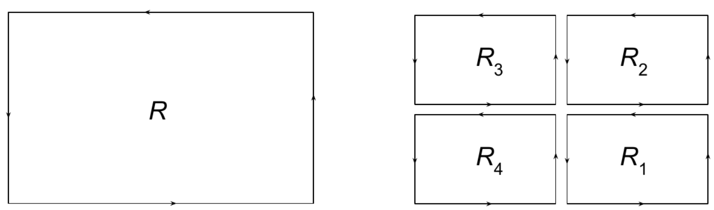
Teorema 4.2.1. Sea U abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si $R \subset U$ es un rectángulo cerrado, entonces

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

Demostración: Dividamos el rectángulo original en cuatro partes iguales, de manera que

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial R_j} f(z)\, dz$$

ya que las integrales sobre lados comunes se cancelan. Luego, para cierto j se verifica que



$$\left| \int_{\partial R_j} f(z)\, dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right|.$$

Llamando $R^1 := R_j$ y, repitiendo el procedimiento, obtenemos una sucesión decreciente de rectángulos

$$R \supset R^1 \supset R^2 \supset \dots$$

con

$$\left| \int_{\partial R^k} f(z)\, dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R^{k-1}} f(z)\, dz \right| \geq \dots \geq \frac{1}{4^k} \left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right|. \tag{4.4}$$

Pero, además, vale

$$\mathrm{Long}(\partial R^k) = \frac{1}{2}\mathrm{Long}(\partial R^{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k}\mathrm{Long}(\partial R)$$

y

$$\mathrm{Diag}(\partial R^k) = \frac{1}{2}\mathrm{Diag}(R^{k-1}) = \dots = \frac{1}{2^k}\mathrm{Diag}(R),$$

donde 'Diag' indica la longitud de la diagonal (es decir, el diámetro de R). Como $\mathrm{Diag}(\partial R^k) \to 0$, se deduce que

$$\bigcap_{k \geq 1} R^k = \{z_0\}$$

para cierto $z_0 \in R$. Por esas cosas de la diferenciabilidad, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces vale

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Luego, podemos fijar k_0 tal que $R^k \subset D_\delta(z_0)$ para $k \geq k_0$ y entonces, como la función $g(z) := f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ tiene primitiva, obtenemos

$$\left| \int_{\partial R^k} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial R^k} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz \right|$$

$$\leq \varepsilon \max_{z \in \partial R^k} |z - z_0| \mathrm{Long}(\partial R^k) \leq \varepsilon \, \mathrm{Diag}(\partial R^k) \mathrm{Long}(\partial R^k).$$

Empleando (4.4) y las fórmulas previas, resulta

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| \leq 4^k \left| \int_{\partial R^k} f(z)\, dz \right| \leq \varepsilon \mathrm{Diag}(\partial R) \mathrm{Long}(\partial R)$$

y, como esto vale para todo $\varepsilon > 0$, concluimos que $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$. □

Corolario 4.2.1. *Sean D un disco abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces f tiene primitiva en D.*

Demostración: Se deduce de la Proposición 4.0.1 y del hecho de que D es un disco. □

Corolario 4.2.2. *Sean D un disco abierto y $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para todo camino cerrado γ en D.

Demostración: Se deduce del corolario anterior y la Proposición 4.0.1. □

Nuestra demostración de que "holomorfa implica analítica" se basará en realidad en dos hechos elementales. Uno de ellos, la suma de la serie geométrica; el otro, que para cualquier z_0 y cualquier radio r vale, como ya vimos,

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{z - z_0}\, dz = 2\pi i.$$

A decir verdad, lo que vamos a usar es un resultado algo más general, según el cual la integral vale lo mismo si cambiamos el centro z_0 por cualquier otro elemento dentro del disco:

Lema 4.2.1. *Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$. Dado $w \in D_r(z_0)$, se cumple:*

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{z-w}\, dz = 2\pi i.$$

Para demostrar esto, podemos suponer que $z_0 = 0$. Lo curioso es que la cuenta directa se puede hacer, aunque es fácil empantanarse: para $|w| < r$, se tiene

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{z-w}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}-w}\, dt \tag{4.5}$$

que, a simple vista, puede parecer intimidante. Es mucho más fácil usar otras cosas que ya sabemos, por ejemplo, la existencia de ramas del logaritmo en regiones razonablemente buenas. Queda como tarea pensarlo, pero el dibujito de la Figura 4.1 es de lo más elocuente:

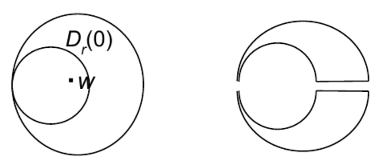


Figura 4.1: Un pase al centro

Otra opción es agregar un parámetro $s \in [0,1]$ a la integral y considerar la función

$$I(s) = \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{z-sw}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}-sw}\, dt,$$

que está bien definida y vale

$$I'(s) = w\int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(re^{it}-sw)^2}\, dt = w\int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{(z-sw)^2}\, dz = 0$$

ya que la función $g_s(z) := \frac{1}{(z-sw)^2}$ tiene primitiva en $\overline{D_r(0)} \setminus \{sw\}$ para todo $s \in [0,1]$. De esta forma, $I(1) = I(0)$, que (esto ya lo sabemos) vale $2\pi i$.

Observación 4.2.2. * En realidad, la anterior integral "intimidante" no es tal y se puede resolver de manera más general. A tal fin, observemos para empezar que el lado derecho de (4.5) no es otra cosa que $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$, donde $\gamma(t) := re^{it} - w$. En general, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada (por simplicidad, de clase C^1) que no pasa por el origen, se tiene

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt = \int_a^b \frac{\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}}{|\gamma(t)|^2}\, dt.$$

Si escribimos $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, nos queda algo de lo más prometedor:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_a^b \frac{x'(t)x(t) + y'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}\,dt + i\int_a^b \frac{y'(t)x(t) - x'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}\,dt$$

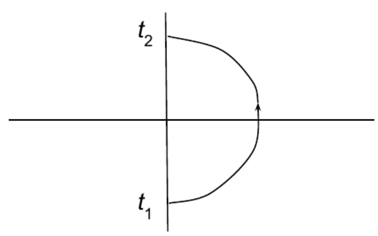
La buena noticia es que la parte real de esta última integral tiene primitiva fácil de calcular: $\ln[x(t)^2 + y(t)^2]$. De esta forma, como la curva es cerrada, vale

$$\int_a^b \frac{x'(t)x(t) + y'(t)y(t)}{x(t)^2 + y(t)^2}\,dt = \ln[x(t)^2 + y(t)^2]\Big|_a^b = 0.$$

Y la sorpresa es que la parte imaginaria también tiene primitiva "fácil": concretamente, $\arctan\left[\frac{y(t)}{x(t)}\right]$. ¿Podremos decir entonces, con el mismo criterio de antes, que la parte imaginaria también da 0? La respuesta es: ¡no tan rápido! El detalle es que, a diferencia del caso anterior, esta nueva función tiene problemas cada vez que x se anula, vale decir, cuando la curva atraviesa el eje imaginario. Teniendo en cuenta además que

$$\lim_{r\to\pm\infty} \arctan(r) = \pm\frac{\pi}{2},$$

es fácil ver cuánto aporta a la integral total cada uno de los pedacitos de la curva que se encuentra entre dos ceros consecutivos t_1 y t_2 de la función $x(t)$, por ejemplo:



$x(t_1^+) > 0 > y(t_1^+)$; $x(t_2^+), y(t_2^+) > 0$

$\arctan(+\infty) - \arctan(-\infty) = \pi$

Esto ya alcanza para resolver el caso específico (4.5), pues la curva cruza el eje imaginario solo dos veces y el resultado se verifica de inmediato. Más en general, la idea sirve para entender la noción de índice de una curva que, a grandes rasgos, cuenta el número de vueltas que dicha curva da alrededor de un punto. Para ser más precisos, si γ es una curva cerrada que no pasa por w, se define

$$I(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - w}\,dw.$$

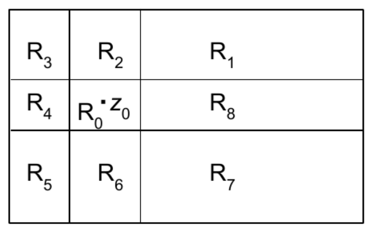
Con este nuevo léxico, la cuenta anterior dice simplemente que, cuando $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, vale $I(\gamma, w) = 1$ para cualquier $w \in D_r(z_0)$. Más adelante veremos una extensión de esta idea y varias importantes aplicaciones.

Lo que sigue es una pequeña generalización técnica del teorema anterior, que nos va a permitir obtener, por fin, la prometida fórmula “autorreferencial”. Aunque, como se probará dentro de algunas páginas, en realidad se trata de una generalización que no generaliza nada:

Proposición 4.2.1. *Sea U abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$ para cierto $z_0 \in U$. Si $R \subset U$ es un rectángulo cerrado, entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

<u>*Demostración*</u>: Si $z_0 \notin R$, no hay nada que probar. En caso contrario, podemos suponer por comodidad que z_0 se encuentra en el interior de R, y tenemos otra vez un dibujito elocuente:



En efecto, dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir los rectángulos de manera tal que R_0 (el que contiene al punto z_0) sea por ejemplo un cuadrado de lado menor que ε. Una vez más, los lados que “van y vuelven” se cancelan y queda

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{8} \int_{\partial R_j} f(z)\, dz$$

Pero, por el teorema anterior, $\int_{\partial R_j} f(z)\, dz = 0$ para $j \neq 0$, de modo que

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial R_0} f(z)\, dz \right| \leq 4\varepsilon \| f|_{\partial R_0} \|_\infty,$$

de donde se deduce el resultado. □

Como antes, esto implica de manera automática el siguiente corolario:

Corolario 4.2.3. *Sea D un disco y $f : D \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $D \backslash \{z_0\}$. Entonces f tiene primitiva en D. En particular, la integral de f es nula sobre cualquier camino cerrado contenido en D.*

Observación 4.2.3. La condición en el lema previo se puede debilitar: alcanza, por ejemplo, con pedir que f se mantenga acotada cerca de z_0. O, todavía más general, aunque f no esté definida en z_0 es suficiente asumir que vale

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0. \tag{4.6}$$

En efecto, para $z_0 \notin \partial R$, en la demostración anterior podemos elegir R_0 centrado en z_0 y fijar $\tilde{z} \in \partial R_0$ tal que $\|f|_{\partial R_0}\|_\infty = |f(\tilde{z})|$. Usando el hecho de que $\frac{\varepsilon}{2} \leq |\tilde{z} - z_0| \leq \varepsilon$, se verifica:

$$\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| \leq 4\varepsilon \|f|_{\partial R_0}\|_\infty \leq 8|f(\tilde{z})(\tilde{z} - z_0)|,$$

que se hace arbitrariamente chico si ε es chico.

Corolario 4.2.4. *Sea D un disco y $f : D\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si además vale (4.6), entonces f tiene una primitiva en $D\backslash\{z_0\}$. En particular, la integral de f es nula sobre cualquier camino cerrado contenido en $D\backslash\{z_0\}$.*

Demostración: Por la observación previa, la integral de f es nula sobre cualquier poligonal en $D\backslash\{z_0\}$ con lados paralelos a los ejes y el resultado se deduce de la Proposición 4.0.4. □

Ahora sí, ya tenemos todos los ingredientes necesarios para la fórmula que venimos anunciando con bombos y platillos. Esto nos pone tan contentos que vamos a dedicarle una nueva sección:

4.3. Fórmula de Cauchy

En los preliminares del teorema de Cauchy empezamos con un ejemplo "de juguete", con el objetivo de mostrar que las armoniosas funciones armónicas son aquellas que coinciden, en cada punto, con su promedio sobre bolitas centradas en dicho punto. Claro que esto lo vimos en dimensión 1, donde la tarea se vuelve prácticamente trivial. A continuación veremos una idea similar para funciones de variable compleja. En principio, la relación con lo anterior no es tan clara, pero más adelante mostraremos que la idea es exactamente la misma. Sin embargo, a pedido del público, esta vez iremos directo a la fórmula y dejaremos el bla-bla para el final.

Proposición 4.3.1. *(Fórmula de Cauchy) Sean $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Entonces para cualquier $z \in D_r(z_0)$ vale*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw. \tag{4.7}$$

Demostración: Consideremos un disco $D \subset U$ que contiene a $\overline{D_r(z_0)}$ y la función

$$g(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z. \end{cases}$$

Es claro que g es continua en D y holomorfa en $D\backslash\{z\}$; luego, por el Corolario 4.2.3 vale $\int_{\partial D_r(z_0)} g(z)\, dz = 0$, es decir:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{w - z}\, dw = f(z) \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{w - z}\, dw.$$

El resultado se deduce entonces del Lema 4.2.1. □

* ¿Y qué hay de los promedios?

En nuestro ejemplo "de juguete" comparamos la propiedad de las funciones armónicas con la definición que dio Euclides de la recta, según la cual nos la imaginamos yaciendo cómodamente sobre el plano. Pero tal vez la idea de una línea yaciente se vea con más claridad si en vez de promedios "sólidos"(es decir, sobre todo un intervalo), solamente promediamos respecto de los extremos:

$$u(x) = \frac{u(x+r) + u(x-r)}{2} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R},\ r > 0.$$

Queda como ejercicio probar que, también en este caso, las funciones continuas que tienen esta propiedad son necesariamente lineales; la novedad es que ahora no sabemos *a priori* que u es derivable, así que el argumento de la Sección 4.1 no funciona.[4]

Para una función f de variable compleja, el análogo de tomar promedio sobre el borde es

$$P(z,r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt.$$

Para z fijo, mientras el disco $\overline{D_r(z)}$ esté contenido en el dominio de f, la anterior función está definida y, si f es buena, entonces se puede derivar:

$$P'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(z + re^{it})e^{it}\, dt = \frac{1}{2\pi r}\int_{\partial D_r(z)} f'(z)\, dz = 0$$

ya que (¡menuda tautología!) f' tiene primitiva. Esto dice que P no depende de r, pero las buenas noticias no acaban allí: cuando evaluamos para $r = 0$, resulta

$$P(z,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\, dt = f(z).$$

En otras palabras, se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt$$

para todo r tal que $\overline{D_r(z)} \subset U$.

Pero, ¿qué tiene que ver esto con Cauchy? La respuesta es inmediata, basta observar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\frac{ire^{it}}{re^{it}}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\frac{ire^{it}}{z + re^{it} - z}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

[4] Cabe observar que en la sección mencionada llegamos a una fórmula similar, pero para u'. Esto no es casualidad y vale en general, ya que si u es una función armónica, entonces también sus derivadas lo son.

que es un caso particular de (4.7).

También cabe preguntarse por los promedios "sólidos", que se pueden deducir de la siguiente manera. Por empezar, la fórmula anterior también vale para una función armónica $u : U \to \mathbb{R}$, pues tiene conjugada armónica en cualquier disco:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u[(x,y) + r(\cos t, \operatorname{sen} t)]\, dt.$$

Ahora vamos a suponer que $\overline{D_R(x,y)} \subset U$ y vamos a apelar a un truco, que parece algo deshonesto pero resulta eficaz. Como la fórmula anterior vale para cualquier $r \leq R$, podemos multiplicar la anterior igualdad por $\frac{R^2}{2} = \int_0^R r\, dr$ para obtener

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R r \int_0^{2\pi} u[(x,y) + r(\cos t, \operatorname{sen}\, t)]\, dt dr.$$

Haciendo el cambio de variables $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x,y) + r(\cos t, \operatorname{sen}\, t)$, resulta

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{D_R(x,y)} u(\tilde{x}, \tilde{y})\, d\tilde{x} d\tilde{y},$$

justito como queríamos.

Ejercicio 10. Usando la fórmula anterior, probar que si U es conexo y u alcanza un máximo o un mínimo en U, entonces es constante. Del mismo modo, usando la fórmula para f, se deduce el principio de módulo máximo (sin asumir que f es analítica). El principio de módulo mínimo se obtiene a partir del otro, ya que si f es holomorfa y no se anula, entonces $\frac{1}{f}$ también es holomorfa. **Sugerencia**: si $|f|$ alcanza un máximo en z_0, entonces para todo r chico vale

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt.$$

Deducir que f es constante en un entorno de z_0. Concluir que el conjunto $\{z \in U : |f(z)| = |f(z_0)|\}$ es abierto y cerrado en U.

4.4. Se confirman los rumores: holomorfa implica analítica

La fórmula de Cauchy tiene varias consecuencias notables; entre otras, permite dar una prueba directa del hecho de que toda función holomorfa es analítica. Tal como anticipamos, el único "ingrediente secreto" será la suma de la serie geométrica. Veamos un enunciado más preciso, que además brinda una fórmula para los coeficientes de la serie:

Teorema 4.4.1. Sean $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $z_0 \in U$. Si $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ entonces para $z \in D_r(z_0)$ vale $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$, donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw.$$

Además, el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que r.

<u>*Demostración*</u>: Dado $z \in D_r(z_0)$ fijo, por la fórmula de Cauchy sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

El hecho crucial es que w vive en el borde del disco, de modo que

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{r} := C,$$

que es una constante menor que 1. ¡Gran ocasión para usar la serie geométrica! Dicho y hecho, podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0 - (z - z_0)}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}\right)}\, dw$$

de donde se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw.$$

Ahora bien, el hecho de que $C < 1$ indica que la serie converge uniformemente respecto de w, de modo que la sumatoria conmuta con la integral, es decir:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n dw = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n.$$

Como esto vale para todo $z \in D_r(z_0)$, se deduce que el radio de convergencia de la serie es mayor o igual que r. □

* Enfoque "Taylor"

El teorema anterior se puede probar mediante un enfoque ligeramente distinto, siempre a partir de la fórmula de Cauchy. A tal fin, vamos a hacernos los distraídos y suponer que todavía no sabemos que una función holomorfa es analítica.

Veamos en primer lugar que, de manera similar a la cuenta del final de la Sección 4.1, para funciones complejas también se puede derivar bajo el signo integral. Claro que no se puede usar el teorema de valor medio en su versión de análisis en una variable real, sino la forma general, que en $\mathbb{C}$ es muy fácil verificar: dada una función $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa (con derivada continua), si el segmento $[z, w]$ que une dos puntos z, w está contenido en U, entonces vale

$$|f(z) - f(w)| \leq \max_{\xi \in [z,w]} |f'(\xi)|.|z - w|. \tag{4.8}$$

La demostración sale directamente integrando la derivada sobre el segmento: más formalmente, si tomamos $\gamma(t) = z + tw$ con $t \in [0,1]$, entonces

$$|f(z) - f(w)| = \left| \int_\gamma f'(\xi)\, d\xi \right| \leq \max_{\xi \in [z,w]} |f'(\xi)| \mathrm{Long}(\gamma)$$

de donde se deduce el resultado. Y la misma cuenta sirve para acotar también el resto de Taylor de orden 1, tomando $\gamma(t) = z + th$ y escribiendo

$$|f(z+h) - f(z) - hf'(z)| = \left| \int_\gamma [f'(\xi) - f'(z)]\, d\xi \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |f'(z+th) - f'(z)|.|h|$$

o, si se prefiere,

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |f'(z+th) - f'(z)|. \tag{4.9}$$

Lema 4.4.1. *Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos y sea $\varphi : U \times V \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para cada w fijo la función φ es derivable respecto de z y que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} : U \times V \to \mathbb{C}$ es continua. Entonces, para cualquier camino γ en U la función $g(z) := \int_\gamma \varphi(w,z)\, dw$ es holomorfa y vale*

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w,z)\, dw.$$

<u>*Demostración*</u>: Fijamos $r > 0$ tal que $\overline{D_r(z)} \subset V$. Como antes, basta observar que, para $|h| < r$, vale

$$\left| \tfrac{g(z+h)-g(z)}{h} - \int_\gamma \tfrac{\partial \varphi}{\partial z}(w,z)\, dw \right| = \left| \int_\gamma \left[\tfrac{\varphi(w,z+h)-\varphi(w,z)}{h} - \tfrac{\partial \varphi}{\partial z}(w,z) \right] dw \right|$$

y, empleando (4.9) para $f(z) := \varphi(w,z)$ con cada w fijo, se ve que el último término es menor o igual que

$$\max_{t \in [0,1], w \in \mathrm{Im}(\gamma)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z+th) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w,z) \right| \mathrm{Long}(\gamma).$$

El resultado se deduce de la continuidad uniforme de la función $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ sobre el conjunto compacto $\mathrm{Im}(\gamma) \times \overline{D_r(z)}$. $\square$

Esto se aplica de manera directa a la siguiente situación:

Lema 4.4.2. *Sea γ un camino cerrado y sea $\psi : \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ continua. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función $F_n : \mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{C}$ dada por*

$$F_n(z) := \int_\gamma \frac{\psi(w)}{(w-z)^n}\, dw.$$

Entonces F_n es holomorfa y vale $F_n' = nF_{n+1}$.

Como consecuencia, a partir de la fórmula de Cauchy, tomando $\gamma = \partial D_r(z_0)$ y $\psi := f|_\gamma$ vale $f(z) = \frac{1}{2\pi i} F_1(z)$. Se deduce que f es infinitamente derivable y, en particular,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw,$$

lo que nos da exactamente los mismos coeficientes a_n que obtuvimos en el Teorema 4.4.1. Pero, por supuesto, estamos todavía lejos de cantar victoria, ya que infinitamente derivable no es lo mismo que analítica. Debemos ver, en efecto, que la serie de Taylor coincide localmente con f.

Para empezar, observemos que el resto $R_n(z)$ de Taylor de orden n se comporta tal como esperamos: sus derivadas en z_0 de orden menor o igual que n son todas nulas y, además,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R_n(z)}{(z - z_0)^n} = 0.$$

Para ver esto, resulta tentador usar la regla de L'Hôpital, pero: ¡cuidado! El tercer ítem del Ejercicio 1 no aplica en este caso, así que mejor intentar otros caminos.[5] Por supuesto, se puede usar lo que ya conocemos sobre series de Taylor para funciones de variables reales, pero no vale la pena, porque tenemos un arma poderosa: la fórmula de Cauchy. Claro que todavía no sabemos si se puede aplicar a $g(z) = \frac{R_n(z)}{(z-z_0)^n}$, que no está definida para $z = z_0$, pero podemos usar el siguiente lema, que va a ser importante en varios contextos. Se deduce de manera directa de la Observación 4.2.3 y ya permite entender cabalmente por qué dijimos que la generalización técnica del lema de Cauchy en realidad "no generaliza nada":

Lema 4.4.3. *Sea $g : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) g(z) = 0.$$

Entonces g se extiende de manera holomorfa a todo U.

<u>*Demostración*</u>: Consideremos la función

$$h(z) := \begin{cases} (z - z_0) g(z) & z \neq z_0 \\ 0 & z = z_0 \end{cases}$$

que es continua en U y holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$. Por el Corolario 4.2.3, sabemos que h tiene una primitiva H y, por lo anterior, H es infinitamente derivable. En particular, h es derivable en z_0, de modo que

$$\lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = h'(z_0).$$

Esto significa que g se extiende en forma continua a todo el conjunto U. Usando nuevamente el Corolario 4.2.3, deducimos que g tiene una primitiva, que resulta infinitamente derivable y (¡por fin!) esto nos permite concluir que g es derivable. □

[5] En efecto, el ejercicio mencionado sirve para calcular el límite de $\frac{f(z)}{g(z)}$ cuando $f(z_0) = g(z_0) = 0$, pero asume como hipótesis que $g'(z_0) \neq 0$. Más adelante probaremos la regla de L'Hôpital más general.

Ahora sí, veamos que, como corresponde, el resto de Taylor se va a cero más rápido que $(z-z_0)^n$. Para darle un apariencia más general (aunque las apariencias engañan), podemos enunciarlo para una función g cualquiera:

Lema 4.4.4. *Sea g una función holomorfa tal que $g^{(k)}(z_0)=0$ para $k=0,\ldots,n$. Entonces*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} = 0.$$

<u>*Demostración*</u>: Ya sabemos que vale para $n=1$; ahora supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que entonces también se cumple para n. Observemos en primer lugar que, por la hipótesis inductiva, vale

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{g(z)}{(z-z_0)^n} = 0$$

y, por el lema anterior, $\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ se extiende de manera holomorfa a z_0. Por la fórmula de Cauchy, si $\overline{D_r(z_0)}$ está contenido en el dominio de g, entonces vale

$$\frac{g(z)}{(z-z_0)^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(w)}{(w-z_0)^n(w-z)}\,dw.$$

Tomando límite para $z\to z_0$, el término de la derecha converge (¿por qué?) al valor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = 0.$$

$\square$

Observemos ahora que el Lema 4.4.3 también se aplica a la función

$$g(z) := \frac{R_n(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

y, en consecuencia, se puede usar otra vez la fórmula de Cauchy:

$$\frac{R_n(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{R_n(w)}{(w-z_0)^{n+1}(w-z)}\,dw.$$

De esta forma se deduce una expresión para el resto de Taylor:

Proposición 4.4.1. *Sea $f: U\to\mathbb{C}$ holomorfa y supongamos $\overline{D_r(z_0)}\subset U$. Entonces para $z\in D_r(z_0)$ el resto de Taylor verifica la fórmula*

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}(w-z)}\,dw\,(z-z_0)^{n+1}.$$

<u>*Demostración*</u>: Por lo anterior, alcanza con probar que vale

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{P_n(w)}{(w-z_0)^{n+1}(w-z)}\, dw \equiv 0$$

donde P_n es el polinomio de Taylor de orden n y $z \in D_r(z_0)$. Pero, por linealidad, alcanza entonces con probar que, para cualquier $j \geq 1$, vale

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)^j(w-z)}\, dw \equiv 0.$$

Ahora notemos que, para z fijo, el término de la izquierda no es otra cosa que la función $F_j(z_0)$ definida en el Lema 4.4.2 con $\psi(w) = \frac{1}{w-z}$. Por el Lema 4.4.2, alcanza entonces con probar que $F_1 \equiv 0$, cosa que podemos hacer con toda elegancia, apelando a unas inesperadas fracciones simples:

$$\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{(w-z_0)(w-z)}\, dw = \frac{1}{z-z_0} \int_{\partial D_r(z_0)} \left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0} \right) dw = 0,$$

ya que $\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{w-z}\, dw = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{w-z_0}\, dw = 2\pi i.$ $\square$

Una consecuencia de esto es la convergencia, feliz y uniforme, de la serie de Taylor. Para esto, supongamos que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ y fijemos $\tilde{r} > r$ tal que $\overline{D_{\tilde{r}}(z_0)} \subset U$. Por lo anterior, para $|z-z_0| \leq r$ vale

$$|R_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\tilde{r}}(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}(w-z)}\, dw \right| |z-z_0|^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \partial D_{\tilde{r}}(z_0)} \frac{|f(w)|}{\tilde{r}^{n+1}|w-z|} r^{n+1} 2\pi\tilde{r} \leq \frac{\tilde{r}}{\tilde{r}-r} \max_{w \in \partial D_{\tilde{r}}(z_0)} |f(w)| \left(\frac{r}{\tilde{r}}\right)^{n+1} \to 0.$$

Esto muestra que, para $n \to \infty$, $R_n \to 0$ uniformemente en $\overline{D_r(z_0)}$.

4.5. Algunas consecuencias

Dejando de lado la digresión tayloriana de la sección previa, el hecho es que ya tenemos el teorema que nos asegura que una función holomorfa es analítica y, más aún, tenemos una buena expresión para los coeficientes de la serie. En efecto, vimos que vale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw \tag{4.10}$$

para todo $r > 0$ tal que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$. Pero, atención: ¿dijimos *para todo*? Esto es muy bueno, porque asegura que el radio de convergencia de la serie es tan grande como el del mayor disco centrado en z_0 que podamos meter en U (dicho en criollo, la distancia de z_0 al borde de U).

En particular, si $U = \mathbb{C}$, entonces el radio de convergencia es ∞, lo que justifica el nombre de función *entera*: una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa se puede escribir como una única serie, centrada donde nos venga en gana.[6] La fórmula (4.10) nos dice, además, cómo calcular las derivadas de una función conociendo únicamente el valor de f sobre el borde de un disco:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw.$$

Pero, además, nos permite deducir las llamadas *desigualdades de Cauchy*:

Lema 4.5.1.

$$|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \tag{4.11}$$

donde

$$M_r := \max_{z \in \partial D_r(z_0)} |f(z)|.$$

La demostración de esto es clara, porque, como en la sección previa, de la fórmula para a_n se obtiene

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in \partial D_r(z_0)} \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M_r}{r^n}.$$

De aquí se deduce otra vez el teorema de Liouville: si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está acotada por cierta constante M, entonces para cualquier $n \geq 1$ vale

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \to 0$$

y, en consecuencia, el único coeficiente no nulo es a_0. Más en general,

Proposición 4.5.1. *(Liouville generalizado) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$ para algún $n \geq 1$. Entonces f es un polinomio de grado menor que n.*

Demostración: La hipótesis dice que, para cualquier $A > 0$ existe B tal que

$$|f(z)| \leq A|z|^n + B.$$

Usando como antes las fórmulas de Cauchy, se obtiene $a_k = 0$ para todo $k > n$. Además, para todo r se cumple

$$|a_n| \leq A + \frac{B}{r^n} \to A$$

para $r \to \infty$ y, como A es arbitrario, se deduce que también vale $a_n = 0$. $\square$

[6] Esto recuerda la esfera de Pascal, *cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna.* Aunque seguramente Pascal no vería con buenos ojos el hecho de que, en este caso, los coeficientes de la serie varían cuando cambiamos el centro.

Observación 4.5.2. * Una consecuencia curiosa del teorema de Liouville es que si f es una función entera no constante, entonces su imagen es un subconjunto denso de $\mathbb{C}$. Esto es fácil de entender: si $D_r(w) \subset \mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(f)$, entonces la función $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ verifica $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ para todo z, de modo que, por Liouville, resulta constante. En realidad hay un resultado más fuerte, debido a Picard, según el cual la imagen de tal f es todo el plano salvo, a lo sumo, un punto. Más todavía, el llamado *gran teorema de Picard* dice que si f no es un polinomio, entonces existe w_0 tal que, para todo $w \neq w_0$, la preimagen $f^{-1}(w)$ es un conjunto infinito (por supuesto, numerable). Claro que probar esto requiere bastante más trabajo que el teorema de Liouville. Para hacernos una idea de la validez del resultado, pensemos en el ejemplo más obvio de función entera no polinómica, que es la exponencial: dado cualquier $w \neq 0$, la ecuación $e^z = w$ tiene infinitas soluciones. Dicho sea de paso, ¿por qué dijimos "por supuesto, numerable"?

Como anticipamos, algunos otros resultados que vimos previamente se pueden volver a probar empleando resultados de integración. Por ejemplo, el teorema fundamental del álgebra que, como ya sabemos, se deduce del principio de módulo máximo (o mínimo) y también de Liouville. Pero también se obtiene como una consecuencia directa de la fórmula de Cauchy: si P es un polinomio que no se anula, entonces $\frac{1}{P}$ es holomorfa y vale, para todo $r > 0$,

$$0 < \left| \frac{1}{P(0)} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{P(w)w}\, dw \right| \leq \max_{|z|=r} \left| \frac{1}{P(z)} \right|.$$

Si suponemos que P no es constante, entonces el término de la derecha tiende a 0 cuando $r \to \infty$, lo que es absurdo.

Otra cuestión a tener en cuenta, que se desprende de todo lo anterior, es que si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa no constante y U es conexo entonces sus ceros tienen orden finito. Esto equivale a decir que, para cualquier $z_0 \in U$, la función se puede escribir en la forma

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

donde $n \geq 0$ y g es holomorfa, con $g(z_0) \neq 0$. En particular, podemos deducir de manera muy sencilla una versión más general de la mencionada regla de L'Hôpital:

Proposición 4.5.2. *Sean f, g funciones holomorfas definidas en un entorno de cierto z_0 tales que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g \not\equiv 0$ cerca de z_0. Entonces vale*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Demostración: Podemos suponer que f tampoco es constante cerca de z_0 y escribir

$$f(z) = (z - z_0)^n j(z), \qquad g(z) = (z - z_0)^k h(z)$$

con $n, k \geq 1$ y $j(z_0), h(z_0) \neq 0$. De esta forma,

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = (z - z_0)^{n-k} \frac{n}{k} \left(\frac{j(z) + (z - z_0)\frac{j'(z)}{n}}{h(z) + (z - z_0)\frac{h'(z)}{k}} \right).$$

El límite del paréntesis grandote del término derecho es $\frac{j(z_0)}{h(z_0)}$, así que el resultado es obvio cuando $n = k$. Si $n > k$, vale $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = 0$; en cambio, ambos límites son infinitos cuando $n < k$. □

Observación 4.5.3. En la proposición anterior se podría haber esperado alguna hipótesis del tipo "si existe $\lim_{z\to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$". Sin embargo, la cuenta anterior prueba, en particular, que el límite siempre existe, admitiendo la posibilidad de que valga ∞.

Cabe observar que la regla también vale cuando f y g son holomorfas en un entorno de ∞:

Proposición 4.5.3. *Sean $f, g : \{z : |z| > R\} \to \mathbb{C}$ funciones holomorfas tales que $f(\infty) = g(\infty) = 0$, es decir:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} g(z) = 0.$$

Supongamos además que g no es constante, entonces

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to\infty} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Demostración: Definiendo $\tilde{f}(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$, $\tilde{g}(z) := g\left(\frac{1}{z}\right)$, el resultado es consecuencia de la proposición anterior para $z_0 = 0$. Cabe aclarar que se usa una vez más el Lema 4.4.3, ya que en principio $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ no están definidas en 0, pero se extienden de manera continua (y luego, holomorfa). □

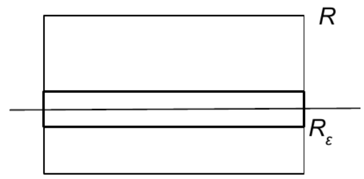
Otra aplicación simpática del teorema de Cauchy y sus consecuencias es el siguiente *principio de reflexión*, que sirve para resolver algunas situaciones del problema de prolongación analítica, que a veces no es nada sencillo. Supongamos que tenemos un abierto U simétrico respecto del eje real y llamemos

$$U^+ := \{z \in U : \Im(z) > 0\}, \qquad U^- := \{z \in U : \Im(z) < 0\}.$$

¿Bajo qué condiciones una función holomorfa definida en alguna de esas regiones se puede extender a todo U? Por empezar, la función tiene que extenderse de manera continua al borde, pero es claro que eso no alcanza (¿algún ejemplo, lectora o lector?). El siguiente resultado dice que es suficiente, por ejemplo, que la restricción de f a dicho borde sea una función real.

Proposición 4.5.4. ** (Principio de reflexión) Sea U como antes y sea $f : \overline{U^+} \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en U^+ tal que $f(\partial U^+) \subset \mathbb{R}$. Entonces f se extiende de manera holomorfa a todo U. Además, si U es conexo la extensión es única.*

Demostración: Podemos suponer que U es conexo y extender f para $z \in U^-$ definiendo $\tilde{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$ que, como ya sabemos (¿ah, si?) es holomorfa. Así extendida, la función (que llamaremos directamente f) es continua. Consideremos ahora un punto $z_0 \in \mathbb{R} \cap U$ y un disco $D = D_r(z_0) \subset U$. Si $R \subset D$ es un rectángulo que no se corta con el eje real, ya sabemos que $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$. Por otra parte, si $R \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, entonces podemos recortar un poquito por



arriba y otro por abajo, para quedarnos con un rectángulo R_ε que es simétrico en el eje real y tiene altura ε arbitrariamente pequeña.

Luego vale

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R_\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{\partial R_\varepsilon^+} f(z)\,dz + \int_{\partial R_\varepsilon^-} f(z)\,dz.$$

Por comodidad, podemos llamar $M := \|f|_R\|_\infty$ e identificar R_ε con el rectángulo $[a,b] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \subset \mathbb{R}^2$. Es claro que la integral de f sobre cada lado vertical de R_ε se acota por $2M\varepsilon$ y los lados horizontales se parametrizan por medio de las curvas

$$\gamma^+(t) = ta + (1-t)b + \varepsilon i, \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma^-(t) = tb + (1-t)a - \varepsilon i, \qquad t \in [0,1].$$

De esta forma, obtenemos

$$\int_{\gamma^+} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = (a-b)\left(\int_0^1 f(\gamma^+(t))\,dt - \int_0^1 \overline{f(\overline{\gamma^-(t)})}\,dt\right).$$

Llamando $s = 1-t$, resulta

$$\int_0^1 \overline{f(\overline{\gamma^-(t)})}\,dt = -\int_0^1 \overline{f(\gamma^+(s))}\,ds,$$

de donde

$$\int_{\gamma^+} f(z)\,dz + \int_{\gamma^-} f(z)\,dz = 2(a-b)i \int_0^1 \Im(f(\gamma^+(t)))\,dt$$

y en consecuencia

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4M\varepsilon + 2|b-a| \max_{z \in R_\varepsilon} |\Im(f(z))|.$$

Y ahí viene la hipótesis: como $f|_\mathbb{R}$ es real y $[a,b]$ es compacto, el máximo que aparece en el último término tiende a 0 para $\varepsilon \to 0$. En otras palabras, la integral de f sobre cualquier rectángulo contenido en $D_r(z_0)$ es nula; luego, f tiene allí una primitiva, lo que a su vez implica que es holomorfa. La unicidad se deduce del principio de prolongación analítica. $\square$

Observación 4.5.4. (Teorema de Morera) El argumento empleado en el último tramo de la demostración anterior se conoce en muchos textos como teorema de Morera: si una función f continua tiene integral nula sobre cualquier camino cerrado en U, entonces es holomorfa. Lo que sabíamos hasta hace un tiempito es que tenía una primitiva F; ahora sabemos que además F es analítica y, en consecuencia, f también.

Ejercicio 11. Sea $f : \overline{D_1(0)} \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $D_1(0)$ tal que $f|_{\partial D_1(0)}$ es real. Probar que entonces existe una única extensión entera de f. **Sugerencia**: se puede dar una demostración directa similar a la anterior, aunque... ¿no será mejor usar alguna homografía?

* Fórmula de Jensen

Una aplicación interesante de la fórmula de Cauchy permite estimar el número y la localización de ceros de una función analítica. Más precisamente, establece una relación entre dichos ceros y los valores de f sobre el borde de un disco. Sea $f : \overline{D_r(0)} \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante y, por simplicidad, supongamos que $f(0) \neq 0$.[7] Sean $a_1, \ldots, a_n \neq 0$ las raíces (no necesariamente distintas) de f en $D_r(0)$, entonces vale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(re^{it})|\,dt = \ln|f(0)| + \sum_{j=1}^{n} \ln\left|\frac{r}{a_j}\right|. \tag{4.12}$$

Observemos que si f no se anula en $\overline{D_r(0)}$, entonces la función $u(x,y) = \ln|f(z)|$ es armónica, cosa que se puede verificar por medio de una cuenta directa (usando Cauchy-Riemann) o, de un modo mucho más canchero, observando que cerca de cualquier z_0 existe una rama de $\log(f(z))$, cuya parte real es precisamente $\ln|f(z)|$. En tal caso, la fórmula anterior se reduce a la de Cauchy, en su versión para funciones armónicas.

Para una demostración de (4.12), se puede ver primero el caso particular $r = 1$. Supongamos, para empezar, que f tiene en $\overline{D_1(0)}$ una única raíz $a \neq 0$, que es simple y verifica $|a| < 1$. Podemos entonces definir

$$F(z) := f(z)\frac{1 - \overline{a}z}{z - a},$$

que es analítica, no se anula en $\overline{D_1(0)}$ y además satisface $|F(z)| = |f(z)|$ para $|z| = 1$. Como dijimos, la función $\ln|F(z)|$ es armónica y entonces vale

$$\ln|F(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|F(e^{it})|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(e^{it})|\,dt.$$

El resultado se deduce entonces porque $\ln|F(0)| = \ln|\frac{f(0)}{a}|$. Si ahora tenemos raíces no nulas $a_1, \ldots, a_n \in D_1(0)$, la cuenta sale como antes, definiendo ahora

$$F(z) = f(z)\prod_{j=1}^{n} \frac{1 - \overline{a}_j z}{z - a_j}.$$

[7] Cuando f tiene en 0 un cero de multiplicidad k, se deduce una versión más general del resultado aplicando la fórmula para la función $g(z) := \frac{f(z)}{z^k}$.

En principio, esto funciona si asumimos que f no se anula en $\partial D_1(0)$, aunque no es difícil probar que esta hipótesis no hace falta.[8] Finalmente, la fórmula para $r \neq 1$ se obtiene empleando la función $g(z) := f(rz)$, que es analítica en $\overline{D_1(0)}$ y verifica $g(0) = f(0)$.

4.6. Más aplicaciones de la fórmula de Cauchy

En las páginas precedentes vimos, Cauchy mediante, que toda función holomorfa es analítica. Aunque, para ser precisos, más que "Cauchy mediante" podemos decir que fue *únicamente* debido a su fórmula, pues es en la demostración no empleamos ninguna otra propiedad de las funciones holomorfas. En particular, esto quiere decir que si f es una función que safisface la fórmula de Cauchy sobre un disco centrado en z_0, entonces es analítica en z_0. Hay que pedir, eso sí, que f sea continua (en realidad alcanza con un poquito menos), porque la fórmula de Cauchy requiere poder meterla dentro de una integral. O, si se prefiere, es posible ir más atrás, al Cauchy original:

Lema 4.6.1. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ para cualquier rectángulo cerrado $R \subset U$, entonces es holomorfa.*

<u>*Demostración*</u>: Es inmediata, pues la hipótesis implica que f tiene primitivas locales. □

Observación 4.6.2. Se puede ver, además, que "Cauchy implica Cauchy": si ya sabemos que cualquier función holomorfa en U verifica la fórmula de Cauchy entonces, dada f holomorfa y $z_0 \in U$, podemos considerar la función (holomorfa) $g(z) := (z - z_0)f(z)$. De esta forma se obtiene, para $\overline{D_r(z_0)} \subset U$,

$$\int_{\partial D_r(z_0)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{g(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i g(z_0) = 0.$$

El comentario puede parecer una trivialidad completa, aunque más adelante le daremos algún sentido. Cabe aclarar que el segundo "Cauchy" es objetable, porque en el Teorema 4.2.1 (el que nos permitió hacer todo) no se integra sobre circunferencias sino sobre rectángulos.

El procedimiento del Teorema 4.4.1, además, nos proporcionó una buena fórmula para los coeficientes de la serie centrada en cualquier punto z_0; a su vez, esto brinda también una expresión para la derivada, que no solo funciona en z_0 sino para cualquier $z \in D_r(z_0)$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw. \tag{4.13}$$

Pero, hablando de objeciones, aquí el sindicato de lectores podría presentar una queja formal, diciendo que esto último lo vimos, pero dentro de una sección marcada con asterisco; sin embargo, tenemos una manera rápida de contrarrestar esto. Para $n = 0$, se trata de la

[8] En efecto, los posibles ceros de f son aislados y se puede ver entonces que la función $\ln |f(e^{it})|$ resulta integrable.

fórmula de Cauchy hecha y derecha; notemos, además, que si h y g son funciones holomorfas cualesquiera, entonces $(gh)'$ tiene obviamente primitiva. Luego, sobre cualquier camino cerrado γ vale la integración por partes:

$$\int_\gamma g(z)h'(z)\,dz = -\int_\gamma g'(z)h(z)\,dz.$$

Muy bien, ahora para obtener (4.13) alcanza con escribir la fórmula de Cauchy para $f^{(n)}$ dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f^{(n)}(w)}{w-z}\,dw$$

y después integrar por partes muchas veces seguidas.[9] Pronto enunciaremos más propiedades maravillosas de las funciones holomorfas; por ahora, a modo de entremés, vamos a ver algunas otras consecuencias de la fórmula de Cauchy.

A esta altura, ya tenemos bastante claro que las funciones derivables de variable compleja son bastante diferentes de las funciones de variable real; por si faltaba algo para convencernos, probaremos ahora que si una función es límite uniforme de funciones holomorfas, entonces también es holomorfa. Esto no es lo que ocurre en $\mathbb{R}$; de hecho, el buen Weierstrass nos mostró que cualquier función continua sobre un intervalo compacto, por fea que sea, es límite uniforme de funciones buenísimas (polinomios). Sin embargo, al mismo matemático alemán no le tembló el pulso a la hora de probar el siguiente resultado:[10]

Teorema 4.6.1. Sean $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas y $f : U \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset U$. Entonces f es holomorfa; más aún, para todo j se cumple que $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ uniformemente sobre compactos.

Demostración: Dado $z_0 \in U$, si $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ se tiene, para $z \in D_r(z_0)$,

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f_n(w)}{w-z}\,dw.$$

Como $\partial D_r(z_0)$ es compacto, podemos tomar límite de los dos lados para obtener

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

y, como mencionamos, el hecho de que esta igualdad valga para todo z_0 y todo $z \in D_r(z_0)$ implica que f es holomorfa. Finalmente, si $K \subset U$ es compacto, podemos fijar $r > 0$ tal que $\overline{D_{2r}(z)} \subset U$ para todo $z \in K$ y elegir $z_1, \ldots, z_N \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{k=1}^N D_r(z_k)$. De esta forma, para todo $z \in K$ existe z_k tal que $z \in D_r(z_k)$; como además $|z-w| \geq r$ para $w \in \partial D_{2r}(z_k)$, se obtiene:

$$|f_n^{(j)}(z) - f^{(j)}(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\partial D_{2r}(z_k)} \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^{j+1}}\,dw\right| \leq \frac{2}{r^j}\|(f_n - f)|_{K_r}\|_\infty$$

[9] Felizmente, el capítulo de álgebra en el que aprendimos inducción no llevaba asterisco.

[10] No le ponemos nombre propio para evitar ambigüedades: en esta materia, si elegimos un teorema al azar, la probabilidad de que sea de Weierstrass es llamativamente alta.

donde $K_r := \bigcup_{k=1}^N \overline{D_{2r}(z_k)}$. Como f_n tiende uniformemente a f sobre K_r, se deduce entonces que $f_n^{(j)} \to f^{(j)}$ uniformemente sobre K. $\square$

Otra propiedad interesante es que una función continua φ de dos variables complejas y holomorfa respecto de cada una de ellas verifica que sus derivadas parciales son también holomorfas en cada variable.[11] Lo gracioso es que, en el fondo, el resultado puede verse como una consecuencia del teorema de Fubini:

Proposición 4.6.1. *Sea $\varphi : U \times V \to \mathbb{C}$ continua tal que para todo $w \in U$ y todo $z \in V$ las funciones $\varphi(w, \cdot)$ y $\varphi(\cdot, z)$ son holomorfas. Entonces $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(w, \cdot)$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\cdot, z)$ son holomorfas para todo w y todo z.*

Demostración: Para w fijo, sabemos que si $\overline{D_r(z_0)} \subset V$ entonces vale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{\varphi(w, u)}{(u - z)^2}\, du \qquad z \in D_r(z_0). \tag{4.14}$$

Esto prueba, en primer lugar, que $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ es continua, escribiendo

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(w_0, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \left[\frac{\varphi(w, u)}{(u - z)^2} - \frac{\varphi(w_0, u)}{(u - z_0)^2}\right] du,$$

que tiende a 0 para $(w, z) \to (w_0, z_0)$, porque el integrando es continuo respecto de las variables w, z y u para $u \in \partial D_r(z_0)$ y z cercano a z_0. Luego, para z fijo y un rectángulo $R \subset U$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} \frac{\partial\varphi}{\partial z}(w, z)\, dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{\varphi(w, u)}{(u - z)^2}\, du\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{(u - z)^2}\int_{\partial R} \varphi(w, u)\, dw\, du = 0,\end{aligned}$$

ya que $\varphi(\cdot, u)$ es holomorfa para todo u. La conclusión se obtiene entonces a partir del Lema 4.6.1. La demostración para $\frac{\partial\varphi}{\partial w}$ es análoga. $\square$

Observación 4.6.3. El "Fubinazo" de la demostración previa se prueba de manera directa, empleando la definición de integral. Esto vale, en general, para cualquier par de curvas C^1 a trozos γ en U y δ en V y $g : U \times V \to \mathbb{C}$ continua:

$$\int_\gamma\int_\delta g(w, z)\, dzdw = \int_\delta\int_\gamma g(w, z)\, dwdz.$$

En efecto, podemos suponer que $\gamma : [a, b] \to U$ y $\delta : [c, d] \to V$ son de clase C^1, entonces

$$\int_\gamma\int_\delta g(w, z)\, dzdw = \int_\gamma\int_c^d g(w, \delta(t))\delta'(t)\, dtdw$$

[11] Cabe aclarar que esto no es tautológico: por ejemplo, para cada w fijo sabemos que la función $\varphi(w, z)$ es infinitamente derivable respecto de z, pero eso no nos dice que $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(z, w)$ sea derivable respecto de w.

$$= \int_a^b \left(\int_c^d g(\gamma(s), \delta(t))\delta'(t)\, dt \right) \gamma'(s)\, ds,$$

y el resultado se deduce a partir del teorema de Fubini que aprendimos en los primeros cursos de análisis. Para quienes tengan todavía algún recelo, también se puede aplicar el Lema 4.4.1 : a tal fin, basta observar que, para z fijo y $V_z := V\backslash\{z\}$, la función $h(w,u) := \frac{\varphi(w,u)}{(u-z)^2}$ es continua en $U \times V_z$ y holomorfa respecto de w. Esto implica que $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\cdot, z)$ es holomorfa y otro tanto se puede hacer para $\frac{\partial\varphi}{\partial w}(w, \cdot)$.

* **Digresión** (sobre las conexiones inesperadas)

Tal vez el empleo del adjetivo "gracioso", unos párrafos atrás, parezca algo inadecuado, ya que el hecho no es para desternillarse de la risa. Sin embargo, más allá del burdo intento de "ponerle un poco de onda", el espíritu consiste, simplemente, en expresar algún entusiasmo ante la aparición de conexiones inesperadas entre diversos terrenos de la matemática.[12] Lo de Fubini quizás no sea tan sorprendente, pues veníamos hablando de integración, pero: ¿quién se iba a imaginar que el teorema de Cauchy se aplica también en el álgebra lineal? Comencemos por una observación sencilla: dada una serie de potencias $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ con radio de convergencia $\rho > 0$, tiene sentido evaluarla en una matriz $M \in \mathbb{C}^{N\times N}$, siempre que $\|M\| < \rho$. La norma, cabe aclarar, es la que proviene de pensarla como una función lineal $M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, vale decir,

$$\|M\| := \max_{|Z|\leq 1} |MZ|,$$

donde Z es un vector en $\mathbb{C}^N$ (escrito como columna) y $|Z|$ indica la norma (euclídea) de Z, es decir, $|Z| := \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2}$. Todo esto es, en definitiva, para poder observar que para cualquier Z vale $|MZ| \leq \|M\|.|Z|$ y, por un argumento inductivo, se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad $\|M^n\| \leq \|M\|^n$. En consecuencia, la serie $f(M) = \sum_{n\geq 0} a_n M^n$ converge absoluta y uniformemente sobre cualquier subconjunto compacto de $\{M : \|M\| < \rho\}$: en efecto, para $\|M\| \leq r < \rho$ vale $\|a_n M^n\| < |a_n| r^n$ y se aplica el criterio de (¡otra vez!) Weierstrass. Un ejemplo obvio, claro está, es la serie que permite calcular la inversa de una matriz cercana a la identidad. Más precisamente, para $\|M\| < 1$ la serie geométrica evaluada en M converge y, como vimos para las series formales, vale

$$(I - M) \sum_{n\geq 0} M^n = \sum_{n\geq 0} M^n - \sum_{n\geq 1} M^n = I,$$

es decir,

$$\sum_{n\geq 0} M^n = (I - M)^{-1}.$$

Este último cálculo no fue inocente, sino que está cargado de intencionalidad, pues lo vamos a emplear para probar una fórmula de Cauchy para series de matrices. Esto no significa que (parafraseando el tango) "yo sé que ahora vendrán integrales extrañas", sino que vamos a

[12] Tal espíritu parece concordar con aquella definición de Poincaré, según la cual *la matemática es el arte de llamar de la misma manera a cosas diferentes.*

intentar darle un sentido razonable a un integrando de la pinta $\frac{f(z)}{z-w}$, donde $z \in \partial D_r(0) \subset \mathbb{C}$ pero, en cambio, en el lugar de w pondremos una matriz. Es claro, entonces, que en vez de z habrá que escribir zI; por otra parte, es de mal gusto (y de pésima matemática) poner matrices en el denominador, así que resultará más cauto pensar en términos de la forma $f(z)(zI - M)^{-1}$. Y, para asegurarnos de que la inversa existe, deberíamos pedir $\frac{\|M\|}{|z|} < 1$; de esta forma, se puede fijar r tal que $\|M\| < r < \rho$ e integrar con toda la confianza del mundo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} f(z)(zI - M)^{-1}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z}\left(I - \frac{M}{z}\right)^{-1} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{M}{z}\right)^{n} dz.\end{aligned}$$

Como ya sabemos, la convergencia de la serie es uniforme para $z \in \partial D_r(0)$ y, entonces, se puede intercambiar la suma con la integral para obtener:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} f(z)(zI - M)^{-1}\,dz = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\right) M^n.$$

Pero también sabemos que los coeficientes de la última serie son precisamente los de la serie f, de modo que se deduce una bonita identidad:

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} f(z)(zI - M)^{-1}\,dz.$$

Ha llegado el momento de desempolvar nuestros recuerdos algebraicos y sumar a la discusión el hecho de que la inversa de una matriz tiene una fórmula explícita

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}A^*,$$

donde A^* se conoce como *matriz adjunta* o, para evitar ambigüedades, *matriz de cofactores.* La anterior fórmula de Cauchy puede escribise, entonces, en la forma

$$f(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} \frac{f(z)}{\det(zI - M)}(zI - M)^*\,dz.$$

En particular, esto vale para polinomios: por ejemplo, ¿qué tal si elegimos $f(z) = \det(zI - M)$? Esta expresión se encontraba en el mismo baúl de recuerdos recién abierto, a veces escrita como $\chi(M)$: no es otra cosa que el polinomio característico de M. Esta elección de f parece bastante oportuna, porque entonces el denominador se cancela y queda

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(0)} (zI - M)^*\,dz.$$

Pero, por cuentoso que parezca, lo que tenemos dentro de la integral consiste únicamente en sumas y productos; en definitiva, como función de z, no es otra cosa un polinomio. En particular, es una función holomorfa, lo que muestra que $\chi(M) = 0$. En otras palabras, la fórmula de Cauchy nos permitió dar una prueba sencilla del teorema de Cayley-Hamilton. Y las delicias no acaban aquí: más adelante veremos que sirve también para probar algunas otras "figuritas difíciles", como el teorema de la forma de Jordan.

Capítulo 5

Homotopías

5.1. El bla-bla nuestro de cada día...

En el capítulo previo, cuando estábamos intentando entender esto de la integración y el teorema de Cauchy, le dedicamos algún esfuerzo (¡sin exagerar!) a probar que si $w \in D_r(z_0)$ entonces $\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{1}{z-w}\, dz = 2\pi i$. La cuenta es directa, dijimos, si $w = z_0$; sin embargo, nos vimos obligados a dar alguna explicación adicional para el caso en que esto no ocurre. Ninguno de los argumentos que dimos fue complicado; en particular, uno de ellos se basó en mostrar que la integral anterior da lo mismo que si integramos sobre una circunferencia centrada en w. Sin embargo, a partir de lo que veremos ahora, el resultado se va a transformar en algo completamente trivial y, si alguien nos pregunta, podremos responder, sin dudar ni un segundo: "lo que pasa es que las curvas son homotópicas". La idea ya apareció en una de las cuentas que hicimos, cuando supusimos $z_0 = 0$ y probamos que la integral

$$I(s) = \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{z - sw}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it} - sw}\, dt$$

no depende de s. Notemos, en efecto, que $I(s)$ coincide con la integral de la función $\frac{1}{z}$ sobre la curva $\gamma_s(t) = re^{it} - sw$; de esta forma, al probar que $I(1) = I(0)$ mostramos en realidad que

$$\int_{\partial D_r(w)} \frac{1}{z}\, dz = \int_{\partial D_r(0)} \frac{1}{z}\, dz.$$

La función $h(t,s) := \gamma_s(t)$ se denomina lo que se llama una *homotopía* entre $\gamma_0(t) = re^{it}$ y $\gamma_1(t) = re^{it} - w$ y se puede interpretar como una deformación suave ambas curvas a lo largo del "tiempo" que transcurre entre $s = 0$ y $s = 1$. Un detalle importante es que la homotopía es *admisible* para la función que estamos integrando, pues se mantiene siempre dentro de su dominio $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$: al elegir $w \in D_r(0)$ nos aseguramos que $h(t,s) \neq 0$ para todo $(t,s) \in [0,2\pi] \times [0,1]$. Y otro detalle es que las curvas intermedias sean siempre cerradas; si no fuera así, sería muy fácil cortar la circunferencia y volver a cerrarla, dejando el 0 afuera.

Más en general, el truquito de derivar la integral $I(s)$ funciona bien siempre que h sea suave: supongamos que $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $h : [a,b] \times [0,1] \to U$, entonces para $\gamma_s := h(\cdot, s)$ la integral

$$I(s) := \int_{\gamma_s} f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma_s(t))\gamma_s'(t)\, dt = \int_a^b f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial t}(t,s)\, dt$$

está bien definida y vale

$$\begin{aligned} I'(s) &= \int_a^b \left[f'(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}(t,s)\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) + f(h(t,s))\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(t,s) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[f'(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}(t,s)\frac{\partial h}{\partial t}(t,s) + f(h(t,s))\frac{\partial^2 h}{\partial t \partial s}(t,s) \right] dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}\left[f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}(t,s) \right] dt = f(h(\cdot,s))\frac{\partial h}{\partial s}(\cdot,s)\Big|_a^b \end{aligned}$$

Si además pedimos que las curvas sean cerradas, es decir, $h(a,s) = h(b,s)$ para todo s, entonces también vale $\frac{\partial h}{\partial s}(a,s) = \frac{\partial h}{\partial s}(b,s)$ y, en definitiva, $I'(s) = 0$. En otras palabras, la integral se mantiene constante a lo largo de la homotopía y, en particular,

$$\int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz.$$

En lo que sigue veremos una versión más general de esta propiedad, conocida como *invariancia por homotopía*. Se trata de un concepto topológico y, de hecho, veremos que vale para cualquier h continua, siempre que f sea holomorfa. Pero esto requiere pensar algo que todavía no es del todo claro: ¿qué quiere decir integrar sobre curvas $\gamma_s = h(\cdot, s)$ que son solamente continuas? A simple vista, el panorama parece bastante sombrío: pensemos, por ejemplo, que una curva continua puede ser un fractal. En las próximas secciones nos dedicaremos a lidiar con estas dificultades.

Observación 5.1.1. * Cabe observar que toda curva, por fea que resulte, se aproxima por curvas suaves; de esta forma, una manera posible de definir la integral consiste en mostrar, para γ suave, que el valor de $\int_\gamma f(z)\, dz$ se mantiene constante si reemplazamos $\gamma : [a,b] \to U$ por otra curva suave $\tilde{\gamma} : [a,b] \to U$ que se encuentre cerca, en el sentido de que $\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_\infty$ es chico. Esto es fácil de hacer y queda como ejercicio; a partir de allí, para definir la integral sobre γ continua alcanza con tomar una curva $\tilde{\gamma}$ suave suficientemente cercana a γ. Dejamos los detalles para quienes tengan interés; en lo que sigue haremos una construcción diferente, que nos permitirá introducir otro concepto importante, el de primitiva a lo largo de una curva.

5.2. Homotopías entre curvas

En esta sección vamos a definir la noción general de homotopía entre curvas, asumiendo únicamente que son continuas. Por simplicidad, para la definición podemos suponer que su dominio es el intervalo $[0,1]$, aunque vale para curvas definidas sobre cualquier intervalo compacto. No nos limitaremos a las curvas cerradas o *lazos*, sino que también nos interesará estudiar las curvas que unen dos puntos prefijados del conjunto U. Tenemos entonces dos clases de homotopías:

1. *Con extremos fijos*: sean $\gamma, \delta : [0,1] \to U$ curvas continuas tales que
$$\gamma(0) = \delta(0) = z_0, \qquad \gamma(1) = \delta(1) = z_1$$
para ciertos $z_0, z_1 \in U$. Una homotopía con extremos fijos entre γ y δ es una función $h : [0,1] \times [0,1] \to U$ continua tal que
$$h(t,0) = \gamma(t), \qquad h(t,1) = \delta(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$$
y además
$$h(0,s) = z_0, \qquad h(1,s) = z_1 \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

2. *Lazos*: sean $\gamma, \delta : [0,1] \to U$ curvas continuas tales que
$$\gamma(0) = \gamma(1), \qquad \delta(0) = \delta(1).$$
Una homotopía entre γ y δ es una función $h : [0,1] \times [0,1] \to U$ continua tal que
$$h(t,0) = \gamma(t), \qquad h(t,1) = \delta(t) \qquad \forall\, t \in [0,1]$$
y además $h(\cdot, s)$ es un lazo para todo s, es decir:
$$h(0,s) = h(1,s) \qquad \forall\, s \in [0,1].$$

En cualquiera de los dos casos, escribiremos $\gamma \sim \delta$, o a veces $\gamma \sim_h \delta$, en caso de que nos interese enfatizar cuál es la homotopía específica que estamos empleando. En particular, si un lazo γ es homotópico a una curva constante, se dice *reducible* y se escribe $\gamma \sim 0$. Por ejemplo, esto ocurre con cualquier lazo cuando $U = \mathbb{C}$, donde podemos tomar el 0 al pie de la letra: por ejemplo, la homotopía $h(t,s) = s\gamma(t)$ verifica $h(t,1) = \gamma$ y $h(t,0) \equiv 0$. Se podrá objetar que entonces lo que probamos es que $0 \sim \gamma$ y no al revés, aunque resulta obvio que $\sim$ es simétrica. Más aún, es fácil ver que se trata de una relación de equivalencia.

Observación 5.2.1. * Las clases de equivalencia se denominan clases de homotopía y permiten definir un importante invariante topológico llamado grupo fundamental. Esto vale para cualquier espacio topológico X: si fijamos un punto $x_0 \in X$ y consideramos todos los lazos $\gamma : [0,1] \to X$ tales que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, entonces se puede definir una operación entre dos clases de equivalencia mediante la simple "concatenación", vale decir: poner un representante de cada clase a continuación del otro. Desde este punto de vista, tiene mayor sentido la escritura $\gamma \sim 0$, ya que significa que la clase de equivalencia de γ es el elemento neutro del grupo.

La anterior situación, tan benévola, en la que todo lazo es homotópico a una constante se debe al hecho bastante visible de que $\mathbb{C}$ no tiene agujeros. Esto corresponde a la idea más general de conjunto *simplemente conexo*.

Definición 5.2.2. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Decimos que U es simplemente conexo sii $\gamma \sim 0$ para todo lazo γ en U.

Es claro que lo anterior no vale únicamente cuando $U = \mathbb{C}$; por ejemplo, podemos tomar cualquier conjunto convexo o, más en general, cualquier conjunto estrellado, es decir, tal que para cierto $z_0 \in U$ se verifica que el segmento $[z_0, z]$ está contenido en U para todo $z \in U$.[1] En un caso así, la homotopía entre z_0 y cualquier lazo γ contenido en U es obvia, una generalización de la anterior, llamada (con toda justicia) homotopía lineal:

$$h(t, s) = s\gamma(t) + (1 - s)z_0.$$

Por supuesto, sería interesante convencerse de que la noción recién definida captura realmente la idea intuitiva de que un conjunto simplemente conexo no tiene agujeros. Para ello, el primer ejemplo que nos viene a la cabeza es $\mathbb{C}\backslash\{0\}$: si llega a resultar que todos los lazos son reducibles, entonces se nos queman todos los papeles. Pero, como veremos, no es así; de hecho, ya tenemos un buen argumento a nuestro favor a partir de lo que vimos en la sección previa: si por ejemplo la curva $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ fuera homotópica a una constante por medio de una homotopía h suave, entonces integrar sobre γ la función $f(z) = \frac{1}{z}$ daría 0, cosa que, como ya sabemos, no ocurre.

5.3. Primitivas a lo largo de curvas

Desde que se inventó el cálculo integral, todo el mundo (bueno, *casi* todo el mundo) sabe que conocer una primitiva de una función es una gran cosa; en particular, a la hora de calcular la integral de una función compleja f sobre una curva γ, alcanza con evaluar la primitiva en $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$. El problema, claro, es que no siempre existe una primitiva, lo que nos arruina la perspectiva de usar Barrow; sin embargo, hay una noción que también nos va a permitir calcular una integral evaluando, pero no en los extremos de la curva sino directamente en los puntos a y b. La idea se basa en el hecho de que si f es holomorfa, entonces existen primitivas locales; luego, dada una curva γ podemos construir una nueva curva $F(t)$ "pegando" pedacitos de la forma $g \circ \gamma(t)$, donde g es una primitiva local de f. Esto requiere cierto cuidado, además de verificar que siempre se puede hacer, por eso conviene comenzar con la definición:

Definición 5.3.1. Sean $f : U \to \mathbb{C}$ y $\gamma : [a, b] \to U$ continuas. Una primitiva a lo largo de γ es una función $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua que verifica: para todo $t_0 \in [a, b]$ existen J entorno de t_0 y V entorno de $\gamma(t_0)$ tales que

1. $\gamma(J) \subset V$.
2. Existe $g : V \to \mathbb{C}$ primitiva de f tal que $F(t) = g(\gamma(t))$ para todo $t \in J$.

Como adelantamos, si f tiene una primitiva g definida en todo el conjunto U, entonces la vida es mucho más sencilla: en tal caso, para definir tal F alcanza con tomar $J = [a, b]$, $V = U$

[1] En algunos textos, dicho z_0 se conoce como centro o *mirador*, ya que desde allí se pueden "ver" todos los elementos del conjunto.

y $F(t) = g(\gamma(t))$. Por eso, se puede intuir que la definición anterior tiene gracia, justamente cuando no hay primitiva: por ejemplo (¡cuándo no!) la función $f(z) = \frac{1}{z}$ en $U = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Este sencillo ejemplo nos va a ayudar a entender mejor la idea, que a primera vista puede resultar un poco desconcertante:

Ejemplo 5.3.2. Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ y $\gamma(t) = e^{it}$. Entonces $F(t) = it$ es una primitiva para f a lo largo de γ. En efecto, para cualquier $t_0 \in [0, 2\pi]$ se puede elegir una rama g del logaritmo definida en un entorno de $\gamma(t_0)$ eligiendo como argumento precisamente el valor t y, de esta forma, se cumple que $g(e^{it}) = it = F(t)$. La interpretación de esta función como "logaritmo a lo largo de la curva" resulta clara, pues se cumple que $e^{F(t)} = \gamma(t)$.

Cabe observar, en el ejemplo previo, que la rama del logaritmo elegida en el punto de llegada $t = 2\pi$ no es la misma que la que corresponde a $t = 0$ sino que se le suma $2\pi i$. Esto significa que $F(2\pi) - F(0) = 2\pi i$ y, no por casualidad, el resultado coincide con el valor de la integral de f sobre γ. Ahora, ¿qué ocurre si en lugar del intervalo $[0, 2\pi]$ tomamos $[0, 4\pi]$? Sencillamente, que estamos dando una segunda vuelta y, en ese caso, el valor de la integral es $4\pi i = F(4\pi) - F(0)$. Esto se verifica en general:

Proposición 5.3.1. *Sean $f : U \to \mathbb{C}$ continua y $\gamma : [a, b] \to U$ una curva C^1 a trozos. Si F es una primitiva para f a lo largo de γ, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(b) - F(a). \tag{5.1}$$

<u>*Demostración*</u>: Podemos suponer que γ es de clase C^1. Por compacidad, existen $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ y abiertos V_j con $g_j : V_j \to \mathbb{C}$ primitivas de f tales que $\gamma_j([t_j, t_{j+1}]) \subset V_j$ $g_j(\gamma(t)) = F(t)$ para $t \in [t_j, t_{j+1}]$. De esta forma,

$$\int_{\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}} f(z)\, dz = g_j(\gamma(t_{j+1})) - g_j(\gamma(t_j)) \qquad j = 0, \ldots, n-1$$

y se deduce que

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=0}^{n-1} [F(t_{j+1}) - F(t_j)] = F(b) - F(a).$$

□

Para evitar miradas de desconfianza, conviene aclarar ese misterioso "por compacidad" que aparece en la demostración previa. Lo más fácil es usar el número de Lebesgue de (bien ganada) fama: si para cada t fijamos abiertos J_t y V_t y primitivas g_t que verifican la definición 5.3.1, alcanza con tomar un número de Lebesgue L para al cubrimiento $\{J_t\}_{t\in[a,b]}$ y una partición $\{t_j\}$ de norma menor que L. Cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$ se mete en alguno de los J_t y podemos entonces denominar V_j y g_j a los correspondientes V_t y g_t.

La última proposición hace sospechar, además, que si existe una primitiva a lo largo de una curva, entonces debe ser única salvo constantes. Esto es claro cuando se trata de una curva C^1 a trozos: si tenemos dos primitivas F_1 y F_2 a lo largo de γ, entonces el argumento anterior aplicado al intervalo $[a,t]$ nos dice que vale

$$F_1(t) - F_1(a) = \int_{\gamma|_{[a,t]}} f(z)\,dz = F_2(t) - F_2(a)$$

para cualquier t, es decir, $F_1 - F_2 \equiv F_1(a) - F_2(a)$. Cuando γ es solamente continua, para cualquier t tomamos J_t^k, V_t^k y g_t^k como en la definición, con $k = 1, 2$. Además, por comodidad se puede suponer que los entornos V_t^k son discos, entonces g_t^1 y g_t^2 difieren en una constante. De esta forma, $F_1(t) - F_2(t) = g_t^1(\gamma(t)) - g_t^2(\gamma(t))$ es constante en $J_t^1 \cap J_t^2$; en otras palabras, $F_1 - F_2$ es localmente constante y, en consecuencia, es constante.

Lo anterior dice todavía algo más: si existe una primitiva F para f a lo largo de cierta curva continua γ, entonces podemos tomar la fórmula (5.1) como una *definición* de la integral de f sobre γ. El siguiente resultado nos muestra que estamos de suerte: si f es holomorfa, entonces siempre existe una primitiva a lo largo de cualquier curva continua.

Teorema 5.3.1. Sean $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma : [a,b] \to U$ continua. Entonces existe $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ primitiva de f a lo largo de γ. Además, F es única salvo constantes, lo que permite definir

$$\int_\gamma f(z)\,dz := F(b) - F(a).$$

<u>*Demostración*</u>: Como f es holomorfa, para cualquier t existe una primitiva $\tilde{g}_t$ definida en un disco V_t centrado en $\gamma(t)$ y entonces se puede definir $F(t) = \tilde{g}_t(\gamma(t))$. El problema consiste en lograr que todas estas primitivas se peguen bien. Para esto (¡gracias otra vez, Lebesgue!) podemos considerar el cubrimiento $\{\gamma^{-1}(V_t)\}$ y una partición $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ tal que $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ está contenido, para todo j, en uno de los discos, al que llamamos V_j. Ahora solo falta ajustar las constantes de las primitivas asociadas a los V_j. Pero, una vez fijada $F(t) := \tilde{g}_0(\gamma(t))$ en el intervalo $[t_0, t_1]$, dichas constantes quedan determinadas de manera única. Para hacerlo de manera ordenada, definimos $g_0 := \tilde{g}_0$ y luego, inductivamente,

$$g_j := \tilde{g}_j - \tilde{g}_j(\gamma(t_j)) + g_{j-1}(\gamma(t_j))$$

hasta $j = n$. De esta forma, la función $F(t) := g_j(\gamma(t))$ para $t \in (t_j, t_{j+1}]$ resulta continua. $\square$

Observación 5.3.3. * Cabe mencionar que la existencia y unicidad de F pueden comprobarse sin invocar el nombre de Lebesgue, gracias a una propiedad poderosa: la conexión. Por ejemplo, supongamos que F_1 y F_2 son dos primitivas a lo largo de γ tales que $F_1(a) = F_2(a)$ y consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{t \in [a,b] : F_1 \equiv F_2 \text{ en } [a,t]\}$, que es claramente un intervalo cerrado no vacío. Dado $t_0 < b$ tal que $t_0 \in \mathcal{A}$, en un entorno de t_0, para $j = 1, 2$ tenemos que $F_j(t) = g_j(\gamma(t))$, donde g_j son primitivas de f definidas en un entorno de $\gamma(t_0)$. Como $g_1(\gamma(t_0)) = g_2(\gamma(t_0))$, se deduce que que $g_1 \equiv g_2$ en un entorno de $\gamma(t_0)$ y, en consecuencia, $F_1 \equiv F_2$ en un entorno de t_0. La prueba de existencia queda como ejercicio: por ejemplo, es fácil demostrar prácticamente sin despeinarse que el intervalo $\mathcal{A} := \{t \in [a,b] :$ existe una primitiva F definida en $[a,t]\}$ es abierto, cerrado y no vacío.

Ejemplo 5.3.4. Como antes, si $f(z) = \frac{1}{z}$, entonces cualquier primitiva local g es, salvo un término constante, una rama del logaritmo. De esta forma, en un entorno de cualquier t_0, la igualdad $F(t) = g_{t_0}(\gamma(t))$ implica que $e^{F(t)} = c\gamma(t)$. En otras palabras, la función $\frac{e^{F(t)}}{\gamma(t)}$ es localmente constante, de modo que $e^{F(t)} = c\gamma(t)$ para todo t. El valor de c es arbitrario y, en el teorema previo, depende de la elección de g_0; en particular, si $c = 1$ tenemos una versión general de lo que antes llamamos "logaritmo a lo largo de γ". Es inmediato verificar que también vale la afirmación recíproca: si F es continua y satisface $e^{F(t)} = c\gamma(t)$ para todo t, entonces es una primitiva de $\frac{1}{z}$ a lo largo de γ.

todo esto sirve para probar como corresponde una propiedad que anticipamos en la Observación 4.2.2: el índice de una curva es un número entero. Más aún, ahora lo tenemos definido para cualquier lazo, no necesariamente C^1 a trozos:

Definición 5.3.5. Dada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ continua cerrada y $w \notin \mathrm{Im}(\gamma)$, se define

$$I(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-w}\,dz.$$

Proposición 5.3.2. *Para todo* $w \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ *se tiene que* $I(\gamma, w) \in \mathbb{Z}$.

Demostración: De acuerdo con la definición, $I(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i}[F(b) - F(a)]$, donde F es una primitiva de la función $\frac{1}{z-w}$ a lo largo de γ. Al igual que en el ejemplo previo, podemos elegir F de manera tal que $e^{F(t)} = \gamma(t) - w$; de esta forma,

$$e^{F(b)-F(a)} = \frac{\gamma(b) - w}{\gamma(a) - w} = 1,$$

de modo que $F(b) - F(a) = 2k\pi i$, es decir, $I(\gamma, w) = k$. $\square$

Ejemplo 5.3.6. Para distraernos un poco, vamos a ver una aplicación del índice en el contexto de las ecuaciones diferenciales. Supongamos que tenemos el problema

$$x''(t) = \varphi(t, x(t), x'(t))$$

donde φ es una función buena (¿alguien dijo "Lipschitz"?). Para hacerlo fácil, supongamos que $\varphi(t, 0, 0) = 0$, de modo que $x \equiv 0$ es solución. Supongamos ahora que tenemos una solución no constante $x(t)$, que además es T-periódica, vale decir, $x(t + T) \equiv x(t)$. Luego, podemos identificar el plano de fases con $\mathbb{C}$ y definir la curva $\gamma(t) = x(t) + ix'(t)$, que es cerrada pues $\gamma(T) = \gamma(0)$. Notemos, además, que $\gamma(t)$ no se anula para ningún t ya que, por unicidad en el problema de valores iniciales, si $x(t_0) = x'(t_0) = 0$ entonces $x \equiv 0$. Calculemos ahora el índice $I(\gamma, 0)$

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\,dt.$$

Como sabemos (ahora con todas las letras), el resultado es un número entero, así que para calcularlo alcanza con mirar la parte imaginaria del integrando:

$$I(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \Im\left(\frac{\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}}{|\gamma(t)|^2}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{x''(t)x(t) - x'(t)^2}{x(t)^2 + x'(t)^2}\,dt.$$

Pero, ¿qué significa si este número da un valor $k \in \mathbb{Z}$? Cada vez que γ completa una vuelta, corta el eje imaginario por lo menos dos veces; de esta forma, la solución $x(t)$ tiene por lo menos $2|k|$ ceros en el intervalo $[0, T)$, vale decir: en cada período. Un ejemplo absolutamente elemental de esto es la ecuación lineal $x''(t) = -x(t)$, cuyas soluciones son combinaciones lineales de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ y, en consecuencia, resultan T-periódicas cuando T es un múltiplo de 2π. Observemos que, en este caso, $x''(t)x(t) = -x(t)^2$, de modo que $I(\gamma, 0) = -\frac{T}{2\pi}$. En particular, para $T = 2\pi$ sabemos que las soluciones no triviales de la forma $a\cos t + b\operatorname{sen} t$ se anulan (exactamente) dos veces en el intervalo $[0, 2\pi)$

5.4. Invariancia por homotopía

El objetivo de esta sección es probar que si f es holomorfa en cierto U, entonces su integral es la misma sobre curvas homotópicas, tanto si se trata de lazos como de curvas con extremos fijos. Notemos, de paso, que el argumento que vimos en la Sección 5.1 para h suave también vale si se trata de una homotopía con extremos fijos: para ello, basta observar que si $h(a, s) = z_a$ y $h(b, s) = z_b$ para todo $s \in [0, 1]$, entonces $\frac{\partial h}{\partial s}(a, s) = \frac{\partial h}{\partial s}(b, s) \equiv 0$. Como sea, esto solo sirve para ir más confiados al caso general en el que h es solamente continua, para el cual la idea de derivar la función $I(s)$ se arruina olímpicamente. Pero tenemos una buena parte de la tarea ya hecha: al menos, ahora ya sabemos qué significa integrar f sobre la curva $h_s(t) := h(t, s)$.

Una manera sencilla de demostrar la invariancia homotópica consiste en definir, como antes, la noción de primitiva a lo largo de h. Aunque en realidad debería ser también "a lo ancho", ya que h depende de t y de s. Para salir de este pequeño dilema semántico, vamos a apelar a una denominación con menor propensión a la metáfora.

Definición 5.4.1. Sean $f : U \to \mathbb{C}$ y $h : [a, b] \times [0, 1] \to U$ continuas. Una primitiva para f según h es una función $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ continua tal que, para todo $(t_0, s_0) \in [a, b] \times [0, 1]$ existen J entorno de (t_0, s_0) y V entorno de $h(t_0, s_0)$ tales que

1. $h(J) \subset V$.
2. Existe $g : V \to \mathbb{C}$ primitiva de f tal que $F(t, s) = g(h(t, s))$ para todo $(t, s) \in J$.

La buena noticia es que, gracias a nuestra vasta experiencia previa, el siguiente resultado ya no es ninguna sorpresa:

Teorema 5.4.1. Sean $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $h : [a, b] \times [0, 1] \to U$ continua. Entonces existe $F : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ primitiva de f según h, que resulta única salvo constantes.

Demostración: Como antes, para cada (t, s) existe un disco $V_{(t,s)}$ centrado en $h(t, s)$ y $\tilde{g}_{(t,s)} : V_{(t,s)} \to \mathbb{C}$ primitiva de f. Agradeciendo una vez más a Lebesgue, podemos considerar

$$a = t_0 < \ldots < t_n = b, \qquad 0 = s_0 < \ldots < s_n = 1$$

y $g_{jk} : V_{jk} \to \mathbb{C}$ primitivas de f tales que $h(R_{jk}) \subset V_{jk}$, donde R_{jk} es el rectángulo dado por $R_{jk} = [t_j, t_{j+1}] \times [s_k, s_{k+1}]$ para $0 \leq j, k \leq n - 1$. El primer impulso es definir F en R_{00} por

$F(t,s) := \tilde{g}_{00}(h(t,s))$ y luego extenderla a los rectángulos contiguos, tanto hacia la derecha como hacia arriba, ajustando las constantes tal como hicimos antes.

Pero hay que hacerlo con cuidado: concretamente, ¿cuáles son las g_{jk}? Sin embargo, esto es fácil de arreglar, ya que si L es el lado de cualquier rectángulo, $h(L)$ es un conjunto conexo y, en consecuencia, dos primitivas que coinciden en un punto tienen que ser iguales en todo ese conjunto. En otras palabras, podemos tomar $g_{00} := \tilde{g}_{00}$ y luego, inductivamente,

$$g_{(j+1)k} := \tilde{g}_{(j+1)k} - \tilde{g}_{(j+1)k}(h(t_{j+1}, s_{k+1})) + g_{jk}(h(t_{j+1}, s_{k+1})),$$

$$g_{j(k+1)} := \tilde{g}_{j(k+1)} - \tilde{g}_{j(k+1)}(h(t_{j+1}, s_{k+1})) + g_{jk}(h(t_{j+1}, s_{k+1})).$$

De esta forma, g_{jk} es una primitiva en V_{jk} para $0 \leq j,k \leq n-1$ y vale

$$g_{(j+1)k}(h(t_{j+1}, s)) = g_{jk}(h(t_{j+1}, s)) \qquad s \in [s_k, s_{k+1}], j \leq n-2,$$

$$g_{j(k+1)}(h(t, s_{k+1})) = g_{jk}(h(t, s_{k+1})) \qquad t \in [t_j, t_{j+1}], k \leq n-2.$$

Luego la función $F(t,s) := g_{jk}(h(t,s))$ para $(t,s) \in R_{jk}$ está bien definida y a otra cosa, mariposa. $\square$

Observación 5.4.2. Como antes, se puede dar una demostración más directa empleando la misma idea de Observación 5.3.3.

Un hecho que resulta inmediato a partir de la definición es que si tenemos $F : [a,b]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ primitiva para f según h, entonces $F_s(t) := F(t,s)$ es una primitiva para f a lo largo de $h_s(t) := h(t,s)$. En particular, resulta

$$\int_{h_s} f(z)\,dz = F(b,s) - F(a,s).$$

Esto permite verificar el resultado general de invariancia por homotopía:

Teorema 5.4.2. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ continuas tales que $\gamma_0 \sim \gamma_1$. Entonces

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

<u>*Demostración*</u>: Por lo anterior, si h es una homotopía entre γ_0 y γ_1, podemos considerar una primitiva F según h de manera tal que

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = F(b,0) - F(a,0)$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = F(b,1) - F(a,1).$$

En caso de que se trate de una homotopía con extremos fijos, se cumple, para todo s, que $h(a,s) = z_a$, $h(b,s) = z_b$. Esto implica que, en un entorno de cualquier s_0 vale

$$F(a,s) = g_{(a,s_0)}(h(a,s)) \equiv g_{(a,s_0)}(z_a), \quad F(b,s) = g_{(b,s_0)}(h(b,s)) \equiv g_{(b,s_0)}(z_b).$$

En otras palabras, las funciones $F(a,\cdot)$ y $F(b,\cdot)$ son localmente constantes; luego, son constantes y resulta

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_0} f(z)\,dz = F(b,1) - F(b,0) - [F(a,1) - F(a,0)] = 0.$$

En cambio, si h es una homotopía entre lazos, en un entorno de cualquier s_0 se verifica que

$$F(b,s) - F(a,s) = g_{(b,s_0)}(h(b,s)) - g_{(a,s_0)}(h(a,s)).$$

Como $h(a,s_0) = h(b,s_0)$, cerca de allí las primitivas $g_{(a,s_0)}$ y $g_{(b,s_0)}$ difieren en una constante; de esta forma, concluimos como antes que $F(b,\cdot) - F(a,\cdot)$ es constante y, en particular,

$$\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = F(b,0) - F(a,0) = F(b,1) - F(a,1) = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

□

El teorema anterior trae todo tipo de consecuencias felices: por empezar, una versión más general del teorema de Cauchy.

Teorema 5.4.3. (Cauchy, versión homotópica) Sean $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y γ un lazo en U tal que $\gamma \sim 0$. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Demostración: Es consecuencia inmediata del teorema anterior, ya que el resultado de integrar sobre una curva constante es 0. □

Esto nos dice, ahora con mayor fundamento, que para $\mathbb{C}\backslash\{w\}$ no es simplemente conexo para ningún w, pues la integral de la función (holomorfa) $f(z) := \frac{1}{z-w}$ sobre $\gamma(t) := w + e^{it}$ da distinto de 0. Y también vale una propiedad que ya anticipamos y podemos anunciar ahora con bombos y platillos:

Proposición 5.4.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo tal que $0 \notin U$. Entonces existe una rama del logaritmo definida en U.*

Demostración: Basta observar que la función $f(z) = \frac{1}{z}$ es holomorfa en U y, por el teorema previo, se cumple que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ para todo lazo en U, lo que implica que f tiene primitiva. Eligiendo adecuadamente la constante de integración, obtenemos una rama del logaritmo. □

Observación 5.4.3. Como veremos más adelante, en realidad el hecho de poder definir ramas del logaritmo se trata de la mismísima esencia de la conexión simple: un abierto conexo U es simplemente conexo si y solo si para todo $w \notin U$ existe una rama de $\log(z-w)$. Aunque suene extraño, esto incluye el caso $U = \mathbb{C}$: al no haber ningún w tal que $w \notin \mathbb{C}$, la hipótesis se cumple de manera tautológica.[2]

[2] Es la famosa (aunque algo controvertida) ley de la implicación material: si p es falsa, entonces $p \implies q$ es verdadera, sea cual sea q.

Cabe preguntarse, también cuál será la versión homotópica de la fórmula de Cauchy. Esta vez podemos hacer al revés, pensar primero en la demostración e intentar llegar al resultado. Para ello, alcanza con recordar que si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa, entonces para cualquier $z \in U$ la función $g(w) := \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ se extiende de manera holomorfa a U. De esta forma, si $\gamma \sim 0$ en U y $z \notin \operatorname{Im}(\gamma)$ entonces tenemos, por el teorema anterior:

$$\int_\gamma g(w)\, dw = 0,$$

es decir

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\, dw = f(z) \int_\gamma \frac{1}{w-z}\, dw.$$

Pero, ¡oh, sorpresa! El factor que acompaña a la función $f(z)$ en el último término tiene pinta conocida; dividiendo todo por $2\pi i$ llegamos a la fórmula que queríamos:

Teorema 5.4.4. (Fórmula de Cauchy, versión homotópica) Sea $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma \sim 0$ en U. Para $z \notin \operatorname{Im}(\gamma)$ vale

$$f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Observación 5.4.4. * En línea con la Observación 5.1.1, notemos que si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y las curvas $\gamma, \delta : [a, b] \to U$ son continuas, cercanas entre sí y además son cerradas o coinciden en los extremos, entonces $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\delta f(z)\, dz$. La pregunta es: ¿cuán cercanas hace falta pedir? Supongamos por ejemplo que tenemos un lazo γ y llamemos $\varepsilon := \operatorname{dist}(\operatorname{Im}(\gamma), \partial U)$. Entonces, para cualquier lazo $\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\|\gamma - \delta\|_\infty < \varepsilon$ se verifica que $\delta(t) \in U$ para todo t. Más aún, si definimos $h(t, s) := s\delta(t) + (1 - s)\gamma(t)$ con $0 \leq s \leq 1$, entonces

$$|h(t, s) - \gamma(t)| = s|\delta(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$$

para todo t, de donde $h(t, s) \in U$. Esto implica la igualdad de las integrales y lo mismo se puede hacer para curvas cercanas con extremos fijos. Según mencionamos, esto se puede pensar como definición alternativa de la integral: dadas $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa y $\gamma : [a, b] \to U$ continua, fijamos ε como antes y tomamos $\delta : [a, b] \to U$ suave que coincida con γ en los extremos y tal que $\|\delta - \gamma\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$; de esta forma, se define la integral de f sobre γ como su integral sobre δ.

La integral así definida no depende de la aproximación: si $\tilde{\delta}$ es otra curva suave, también a distancia menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ de γ, entonces

$$\|\tilde{\delta} - \delta\|_\infty < \frac{2\varepsilon}{3} < \operatorname{dist}(\operatorname{Im}(\delta), \partial U),$$

lo que prueba que ambas integrales coinciden. Notemos que la prueba de esto último no depende de toda la construcción de las últimas páginas, pues solo emplea la invariancia de la integral sobre una homotopía lineal entre curvas suaves que, como vimos al comienzo del capítulo, se demuestra de manera directa. Finalmente, una vez definida la integral para cualquier γ continua, la propiedad general de invariancia por homotopía se debe al hecho de que tanto en el conjunto de curvas con extremos fijos

$$\mathcal{C}_{z_a,z_b}(U) := \{\gamma : [a,b] \to U \text{ continua} : \gamma(a) = z_a, \gamma(b) = z_b\}$$

como en el de lazos

$$\mathcal{L}(U) := \{\gamma : [a,b] \to U \text{ continua} : \gamma(a) = \gamma(b)\}$$

con la distancia inducida por la norma infinito, una homotopía continua h se puede pensar como una curva continua $s \mapsto h_s$. De esta forma, en cualquiera de los dos casos, dos curvas homotópicas se encuentran en la misma componente (arco)conexa. El resultado se deduce entonces del hecho de que, en ambos conjuntos, la integral de una función holomorfa f fija es localmente constante.

Repasando un poco el capítulo previo, vemos que existe una propiedad que fue crucial para probar diversos resultados pero su extensión al caso γ continua genera cierta desconfianza. Se trata de aquella desigualdad según la cual la integral de f sobre una curva γ es menor o igual que $\|f \circ \gamma\|_\infty \text{Long}(\gamma)$. La pregunta temible es: ¿qué hacemos si γ tiene longitud infinita? Felizmente la preocupación no pasa a mayores, porque igual podemos encontrar una cota respetable:

Lema 5.4.5. *Dados $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua y K un entorno compacto de* $\text{Im}(\gamma)$*, existe una constante $c = c(K)$ tal que, para cualquier f holomorfa definida en un abierto $U \supset K$ vale*

$$\int_\gamma f(z)\, dz \leq c\|f|_K\|_\infty.$$

<u>*Demostración*</u>: De acuerdo con lo anterior, alcanza con tomar cualquier curva suave δ homotópica a γ en K, pues en tal caso resulta

$$\left|\int_\gamma f(z)\, dz\right| = \left|\int_\delta f(z)\, dz\right| \leq \text{Long}(\delta)\|f \circ \delta\|_\infty \leq c\|f|_K\|_\infty,$$

con $c := \text{Long}(\delta)$. □

Ejercicio 12. Obtener una versión directa de la prueba anterior mediante una primitiva para f a lo largo de γ.

Como consecuencia, tenemos dos resultados útiles, cuyas demostraciones se deducen igual que para curvas C^1 a trozos:

Corolario 5.4.1. *Sean $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua y f_n, f holomorfas tales que $f_n \to f$ uniformemente en un entorno de* $\text{Im}(\gamma)$*. Entonces*

$$\int_\gamma f_n(z)\, dz \to \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Corolario 5.4.2. *Sean $U, V \subset \mathbb{C}$ abiertos y sea $\varphi : U \times V \to \mathbb{C}$ continua. Supongamos que para cada $w \in U$ y cada $z \in V$ las funciones $\varphi(w, \cdot)$ y $\varphi(\cdot, z)$ son holomorfas, con $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\cdot, z)$ holomorfa. Entonces, para cualquier curva continua $\gamma : [a, b] \to U$ la función $g(z) := \int_\gamma \varphi(w, z)\, dw$ es holomorfa y vale*

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}(w, z)\, dw.$$

Observación 5.4.6. Como ya sabemos, en estos dos corolarios no hace falta pedir que f y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(\cdot, z)$ sean holomorfas ya que “no pueden no serlo”. En el caso de f, se trata de algo que vamos a usar algunas veces; en el caso de φ, la conclusión se debe a la Proposición 4.6.1. Para quienes gusten, el segundo corolario también se puede probar usando directamente Cauchy.

5.5. El índice, los ceros... y un poco de topología

De acuerdo con las secciones anteriores, dado un lazo γ se define el índice $I(\gamma, w)$ para cualquier w que no se encuentre sobre la imagen de la curva. Dijimos, además, que su valor es siempre de un número entero, lo que permite pensarlo como una función

$$I(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\gamma) \to \mathbb{Z}.$$

Resulta inmediato verificar que se trata de una función localmente constante, vale decir: constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\gamma)$; por ejemplo, empleando la invariancia por homotopía. De buenas a primeras, cabe preguntarse qué tienen que hacer aquí las homotopías, si hablamos de una única curva; sin embargo, resulta claro a partir de la definición que

$$I(\gamma, w) = I(\gamma_w, 0),$$

donde $\gamma_w(t) := \gamma(t) - w$; más en general,

$$I(\gamma, w) = I(\gamma_{w_0}, w - w_0).$$

Notemos, en efecto, que si γ es C^1 entonces vale

$$\int_\gamma \frac{1}{z - w}\, dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}\, dt = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w_0 - (w - w_0)}\, dt$$
$$= \int_{\gamma_{w_0}} \frac{1}{z - (w - w_0)}\, dz$$

y el resultado se extiende fácilmente cuando γ es solo continua. Pero entonces la continuidad de $I(\gamma, \cdot)$ es obvia, alcanza con tomar $\varepsilon := \mathrm{dist}(w, \mathrm{Im}(\gamma))$ ya que, de esta forma, para cualquier w_0 tal que $|w_0 - w| < \varepsilon$ se define la homotopía lineal $h(t, s) := \gamma(t) - sw - (1 - s)w_0$, que verifica

$$|h(t, s)| \geq |\gamma(t) - w| - (1 - s)|w - w_0| > 0 \qquad s \in [0, 1]$$

y, en consecuencia:

$$I(\gamma, w_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{h_0} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{h_1} \frac{1}{z}\,dz = I(\gamma, w).$$

Lo anterior puede verse como un ejercicio simpático, pero en realidad no hacía falta complicarnos la vida, pues la propiedad se deduce de manera todavía más directa a partir del Corolario 5.4.2. En efecto, la función $g(w) := I(\gamma, w)$ es holomorfa y su derivada cumple

$$g'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(z-w)^2}\,,$$

que vale siempre 0 porque el integrando tiene primitiva. Por supuesto, siempre queda la opción de hacer la cuenta: si calculamos $I(\gamma, w) - I(\gamma, w_0)$ por definición, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{1}{z-w} - \frac{1}{z-w_0}\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w-w_0}{(z-w)(z-w_0)}\,dz$$

todo sale en un cerrar y abrir de ojos.

Ya que estamos en el baile, notemos también que $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$ tiene siempre una (única) componente conexa no acotada. Allí, como es lógico, el índice debe ser 0. Intuitivamente, es claro que si w está muy lejos del origen, la curva γ no tiene forma de dar vueltas a su alrededor; más formalmente, podemos tomar r grande tal que $\mathrm{Im}(\gamma) \subset D_r(0)$. Para $|w| \geq r$, la función $\frac{1}{z-w}$ tiene primitiva definida en $D_r(0)$, de modo que $\int_\gamma \frac{1}{z-w}\,dw = 0$.[3] En resumen, al cabo de (literalmente) muchas vueltas, hemos probado:

Proposición 5.5.1. *Dado un lazo γ, la función $I(\gamma, \cdot)$ es continua en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$ y se anula en la componente conexa no acotada.*

Y a todo esto, ¿para qué sirve el índice? Al fin y al cabo, andar por ahí contando vueltas parece más bien tedioso e inútil, casi como Sócrates midiendo el salto de las pulgas, según se burlaban sus detractores. Sin embargo, hay bastante para decir a favor del índice -y también, quizás, de las pulgas-. En particular, haciendo honor a su nombre, nos va a servir para "indicar"... ¿qué cosa? Naturalmente, la presencia de agujeros. En efecto, si $I(\gamma, w) \neq 0$, esto quiere decir que cualquier homotopía entre γ y una constante necesariamente pasa por el punto w: de no ser así, la función $\frac{1}{z-w}$ sería holomorfa y el índice daría 0. Dicho de otra manera, si $\gamma \sim_h 0$, entonces la función $f(z) = z$ toma el valor w sobre $\mathrm{Im}(h)$. Esto tal vez suene un poco pretencioso, pero la idea era preparar el terreno para una generalización, reemplazando la anterior f por una función cualquiera:

Proposición 5.5.2. *Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lazo y $f : U \to \mathbb{C}$ continua con $\mathrm{Im}(\gamma) \subset U$. Supongamos que $\gamma \sim_h 0$ en U. Supongamos que $f(\gamma((t)) \neq w$ para todo $t \in [a, b]$ y vale $I(f \circ \gamma, w) \neq 0$, entonces existe $z \in \mathrm{Im}(h)$ tal que $f(z) = w$.*

[3] Para quienes hayan quedado prendados por las homotopías, también se puede considerar $h(t, s) = s\gamma(t)$, que verifica $h(t, s) \neq w$ para todo t y todo s.

<u>*Demostración*</u>*: Si $f \neq w$ sobre la imagen de h, entonces la función $H(t,s) = f(h(t,s))$ no toma el valor w y verifica:*

$$H(t,0) = f \circ \gamma(t), \qquad H(t,1) = cte.$$

Luego

$$0 \neq I(f \circ \gamma, w) = I(H_0, w) = I(H_1, w) = 0,$$

lo que es absurdo. □

Tal como está escrito, el resultado es un tanto confuso, pero dice algo muy sencillo y útil. Para verlo mejor, supongamos que C es un abierto convexo acotado y γ es una parametrización de su borde. Entonces siempre es posible definir una homotopía lineal $h(t,s) = s\gamma(t) + (1-s)z_0$ que, sin salirse del dominio, deforma γ en la constante $z_0 \in C$. De esta forma, si $I(f \circ \gamma, 0) \neq 0$, esto quiere decir que f se anula en C. Lo mismo vale, naturalmente, si C es estrellado, y en otras situaciones mucho más generales: alcanza con pedir que $\gamma \sim 0$ en $\overline{C}$.

Ejemplo 5.5.1. Sea f un polinomio de grado $n \geq 1$ y $\gamma(t) = re^{it}$, ¡qué originalidad! En principio, no parece muy fácil calcular $I(f \circ \gamma, 0)$ pero, si r es grande, podemos sospechar que el término que "manda" es el principal. Esto nos motiva a definir la homotopía

$$h(t,s) = sa_n\gamma(t)^n + (1-s)f(\gamma(t))$$

que en definitiva se puede escribir como

$$h(t,s) = a_n\gamma(t)^n + (1-s)\sum_{j=0}^{n-1} a_j\gamma(t)^j$$

$$= r^n \left(a_n e^{int} + (1-s)\sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{ijt} r^{j-n} \right).$$

Ahora, por esas cosas de que "el término grande se come al chico", para $r \gg 0$ la función h no se anula, y entonces $I(h_0, 0) = I(h_1, 0)$, es decir

$$I(f \circ \gamma, 0) = I(g \circ \gamma, 0),$$

donde $g(z) := a_n z^n$. Pero este último índice es fácil de calcular, pues

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{g\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{(g\circ\gamma)'(t)}{g\circ\gamma(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{na_n\gamma(t)^{n-1}\gamma'(t)}{a_n\gamma(t)^n}\,dt = n.$$

Esto quiere decir que $I(f \circ \gamma, 0) = n$ y, en particular, que f se anula en $D_r(0)$.

Observación 5.5.2. La cuenta anterior dice en realidad algo más general: si γ es cualquier lazo que no pasa por el origen y $\gamma^n(t) := \gamma(t)^n$, entonces $I(\gamma, 0) = nI(\gamma, 0)$. Esto es claro cuando γ es suave, pues $\frac{(\gamma^n)'}{\gamma^n} = n\frac{\gamma'}{\gamma}$ y el resultado para γ continua se deduce entonces por aproximación. Pero, a modo de divertimento (digamos), también cabe ensayar una demostración empleando solamente la definición. A tal fin, recordemos una vez más que $I(\gamma^n, 0) = \frac{1}{2\pi i}[F(b) - F(a)]$, donde F es una rama del logaritmo a lo largo de γ^n, es decir: $e^{F(t)} = \gamma(t)^n$ para todo n. Consideremos ahora la función $\delta(t) := e^{\frac{F(t)}{n}}$, que verifica $\delta(t)^n = \gamma(t)^n$, o bien $\left(\frac{\delta(t)}{\gamma(t)}\right)^n = 1$. Como el conjunto de raíces n-ésimas de 1 es finito, lo anterior implica que $\delta(t) = \xi\gamma(t)$ para cierta constante ξ tal que $\xi^n = 1$. En consecuencia, $\frac{F(t)}{n}$ es una primitiva de $\frac{1}{z}$ a lo largo de γ, de donde

$$I(\gamma^n, 0) = \frac{n}{2\pi i}\left(\frac{F(b)}{n} - \frac{F(a)}{n}\right) = nI(\gamma, 0).$$

Volviendo al ejemplo previo, la pregunta es si hacía falta, a esta altura, volver a probar el teorema fundamental del álgebra, sobre el que ya no quedaban muchas dudas. Sin embargo, lo anterior nos proporciona otro dato interesante: el índice que calculamos es exactamente n, el grado del polinomio. ¿Tendrá que ver con la cantidad de raíces? Más adelante nos ocuparemos de esto. Además, esta herramienta de mirar el índice de $f \circ \gamma$ brinda también un resultado de *localización*: allí donde sea distinto de 0, ubicamos alguna raíz de f. Observemos, incidentalmente, que si en el ejemplo anterior poníamos $f(z) = a_n z^n + q(z, \overline{z})$, donde q es un polinomio de grado menor que n, el resultado hubiera sido exactamente el mismo, lo que proporciona un teorema fundamental del álgebra "generalizado". Sobre este sí que no sabíamos nada hasta el momento, ya que la función f no es analítica. Pero, ¡atención!: en este caso la cantidad total de raíces puede ser diferente: por ejemplo, el polinomio $f(z) = z^n - \overline{z}$ tiene en total $n + 2$ raíces: 0 y las raíces $(n + 1)$-ésimas de la unidad.

5.5.1. * Y por fin, la topología prometida

Ya que hablamos de funciones que no son analíticas, podemos ver por ejemplo qué pasa con una función continua $f : \overline{D_1(0)} \to \overline{D_1(0)}$ que, según se anda comentando por ahí, tiene que tener algún punto fijo. Eso es lo que afirma el teorema de Brouwer, que en el plano se demuestra de una manera notablemente sencilla:

Teorema 5.5.1. (Brouwer) Sea $f : \overline{D_1(0)} \to \overline{D_1(0)}$ continua. Entonces existe z tal que $f(z) = z$.

Demostración: Consideremos la función $g(z) = z - f(z)$. Si g se anula en $\partial D_1(0)$, ya estamos, así que podemos suponer que no lo hace y calcular el índice de $g \circ \gamma$ respecto del 0, donde $\gamma(t) = e^{it}$. Para esto, nada mejor que una homotopía

$$h(t, s) = \gamma(t) - sf(\gamma(t)),$$

que, de acuerdo con nuestra suposición, no se anula para $s = 1$. Y tampoco lo hace para $s < 1$ pues $|sf(\gamma(t))| \leq s < |\gamma(t)|$. Esto prueba que

$$I(g \circ \gamma, 0) = I(h_1, 0) = I(h_0, 0) = 1$$

y, por la Proposición 5.5.2, concluimos que g se anula en $D_1(0)$. □

Observación 5.5.3. En particular, si f es holomorfa y $f(z) \neq z$ sobre $\partial D_1(0)$, entonces el punto fijo es único. ¿Por qué? A modo de ayuda, cabe observar en primer lugar que, en caso de existir más de un punto fijo, f no puede ser constante y, por módulo máximo, $f(D_1(0)) \subset D_1(0)$ y entonces se puede aplicar algún lema que vimos por ahí. Nuevamente, el número de soluciones de la ecuación $g(z) = 0$ coincide con el valor del índice de $g \circ \gamma$, ¿será casualidad? ¡Qué misterio!

En dimensión 1, el teorema de Brouwer es casi una tontería, no es otra cosa que una forma distinta de enunciar el teorema de Bolzano. En efecto, dada $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ continua, la función $g(x) := x - f(x)$ cambia de signo y, en consecuencia, se anula. Y también se puede pensar al revés: si $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ es continua y $g(-1) < 0 < g(1)$, entonces para $M \gg 0$ la función $f(x) := x - \frac{g(x)}{M}$ verifica $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ y luego tiene un punto fijo, es decir: g se anula. En otras palabras, los teoremas son equivalentes y, en rigor, también son equivalentes al axioma de completitud de los números reales. En el plano, se da una situación similar: el teorema de Brouwer equivale a este otro, que es una especie de "Bolzano generalizado". Lo curioso es que no es tan conocido, en general aparece en la literatura bajo el nombre de *teorema de Poincaré-Miranda*:

Teorema 5.5.2. (Poincaré-Miranda) Sea $f = u + iv : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{C}$ continua tal que para todo $z = x + iy$ vale

$$u(-1, y) \leq 0 \leq u(1, y), \qquad v(x, -1) \leq 0 \leq v(x, 1).$$

Entonces existe z tal que $f(z) = 0$.

Las hipótesis dicen que, para cada y, la parte real de f se anula en alguna parte y, además, para cada x, la parte imaginaria tiene algún cero. Lo que no es tan claro es que haya algún punto en el que ambas coordenadas se anulan a la vez. Pero la demostración, cuyos detalles quedan como ejercicio, funciona gracias a los argumentos previos: si f no tiene ceros en el borde del cuadrado, entonces la homotopía

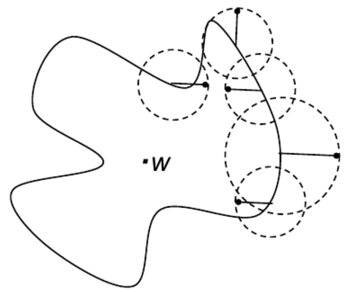
$$h(t, s) = s\gamma(t) + (1 - s)f(\gamma(t))$$

donde γ parametriza el borde del cuadrado, no se anula.

Para concluir con este paseo topológico, vamos a enunciar un resultado que puede entenderse como un paseo en sentido literal. En realidad, podemos decir, *casi* literal: lo cierto es que en muchos textos se lo describe informalmente como el "teorema de la vuelta al perro". La idea es muy sencilla y funciona para todas las razas: supongamos que un paseador sale con su perrito por el plano, en torno a un punto w. La correa puede tener longitud variable; la única condición es que su longitud sea siempre menor que la distancia entre el paseador y el punto w. De esta forma, si describimos las trayectorias del paseador y del pichicho mediante respectivas curvas γ y δ, tenemos que

$$|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t) - w|. \tag{5.2}$$

Además, suponemos que ambos vuelven al punto de partida, vale decir, se trata de curvas cerradas. Entonces no importa cuánto salte, se mueva u olisquee el perrito alrededor de su dueño, el número de vueltas que ambos dan alrededor de w es el mismo.



Teorema 5.5.3. Sean γ, δ lazos tales que se cumple (5.2) para todo t. Entonces $\gamma(t), \delta(t) \neq w$ y vale

$$I(\gamma, w) = I(\delta, w).$$

Demostración: Como la desigualdad (5.2) es estricta, se verifica que $\gamma(t) \neq w$ para todo t; por otro lado, si $\delta(t) = w$ para algún t, entonces en (5.2) queda $|\gamma(t) - w| < |\gamma(t) - w|$, lo que es absurdo. La misma cuenta, más en general, prueba que la homotopía lineal

$$h(t, s) = s\delta(t) + (1 - s)\gamma(t)$$

no toma el valor w: en efecto, si $h(t, s) = w$, entonces

$$s[\gamma(t) - \delta(t)] = \gamma(t) - w,$$

lo que contradice (5.2) para $s \in [0, 1]$. $\square$

Ejercicio 13. Sean γ, δ lazos tales que $|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)| + |\delta(t)|$. Entonces $I(\gamma, 0) = I(\delta, 0)$.
Sugerencia: ¿en qué situación se cumple la igualdad $|z + w| = |z| + |w|$?

Más adelante veremos una versión diferente de este hecho, en el llamado *teorema de Rouché*, que permite efectuar un conteo exacto de los ceros de funciones analíticas; por el momento, vamos a ver alguna otra aplicación, más allá de (¡otra vez no, por favor!) el teorema fundamental del álgebra, donde el paseador es el polinomio y el perrito su término principal, evaluados sobre el borde de $D_r(0)$.[4] Por ejemplo, esta versión cuantitativa del teorema de la aplicación abierta:

Ejemplo 5.5.4. Sea $f : D_1(0) \to D_M(0)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Entonces se cumple que $M \geq 1$ y, además, la imagen de f contiene un disco de radio $\frac{1}{6M}$ centrado en 0. Para ver esto, podemos escribir $f(z) = a_1 z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ con $|a_1| = 1$. Por las fórmulas

[4] Una variante del teorema dice que la condición (5.2) se puede reemplazar por otra que diga que w nunca puede quedar entre el perro y el paseador, es decir: $w \neq [\gamma(t), \delta(t)]$. La demostración de esto es clara, equivale a decir que la homotopía lineal no toma el valor w.

de Cauchy, sabemos que $|a_n| \leq M$ para todo n; en particular, esto (y también el lema de Schwarz) dice que $M \geq 1$. Consideremos z tal que $|z| = \frac{1}{4M}$, entonces

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4M} - \sum_{n\geq 2} M \left(\frac{1}{4M}\right)^n = \frac{3M-1}{4M(4M-1)} \geq \frac{1}{6M}.$$

Fijemos ahora $w \in D_{1/6M}(0)$ y la función $g(z) = f(z) - w$. Para $\gamma(t) = \frac{e^{it}}{4M}$ se verifica que

$$|g \circ \gamma(t) - f \circ \gamma(t)| = |w| < \frac{1}{6M} \leq |f \circ \gamma(t)|$$

y entonces, por el teorema anterior, se deduce que

$$I(g \circ \gamma, 0) = I(f \circ \gamma, 0).$$

La pregunta es cómo hacemos ahora para calcular este índice; sin embargo, una vez más, las homotopías vienen en nuestra ayuda. En efecto, si llamamos

$$h(t,s) = a_1\gamma(t) + s\sum_{n\geq 2} a_n\gamma(t)^n,$$

entonces la misma cuenta de antes nos dice que $|h(t,s)| \geq \frac{1}{6M}$ y, en particular, h no se anula. De esta forma,

$$I(f \circ \gamma, 0) = I(h_1, 0) = I(h_0, 0) = I(a_1\gamma, 0) = 1.$$

Esto implica, en definitiva, que la función g se anula en $D_{1/4M}(0)$, es decir, que $w \in f(D_{1/4M}(0))$.

Ejercicio 14. Sea $f : D_r(0) \to D_M(0)$ holomorfa tal que 0 es un cero de orden k y sea $c = |f^{(k)}(0)| \neq 0$. Encontrar un radio $R = R(r, M, c)$ tal que $B_R(0) \subset \mathrm{Im}(f)$.

* Aplicación: un problema de Dirichlet

Vamos a ver con un sencillo ejemplo que esto de detectar ceros puede ser muy útil en distintos contextos, por ejemplo, en los problemas de contorno para ecuaciones diferenciales. Supongamos que tenemos un sistema

$$\begin{cases} x''(t) = \varphi(t, x(t), y(t)) \\ y''(t) = \psi(t, x(t), y(t)) \end{cases}$$

donde $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones suaves. Estamos acostumbrados al teorema de existencia y unicidad, que garantiza la existencia de soluciones bajo una condición inicial

$$(x(0), y(0)) = (x_0, y_0), \qquad (x'(0), y'(0)) = (u_0, v_0)$$

definida en algún entorno de $t = 0$. Pero las condiciones de contorno son diferentes: no se establecen condiciones sobre la función y su derivada en un punto, sino sobre el borde de un intervalo. Un caso particular es la condición de Dirichlet (homogénea), que para el intervalo $[0,1]$ tiene esta forma:

$$(x(0), y(0)) = (x(1), y(1)) = (0, 0).$$

En este caso, lo que aprendimos en nuestros primeros cursos no nos sirve de mucho, porque el teorema de existencia y unicidad es local: de hecho, ni siquiera sabemos si una solución definida cerca de $t = 0$ va a tener la dicha de llegar sana y salva hasta el valor $t = 1$. Hay maneras de asegurar esto último: una de ellas (un tanto drástica) consiste en pedir que las funciones φ y ψ sean acotadas.[5] Aún así, no resulta obvio que el problema vaya a tener solución y, en caso de teneral, podría haber más de una. Usando lo anterior, veremos que el supuesto de que φ y ψ sean acotadas es suficiente para asegurar la existencia de al menos una solución. Para esto, vamos a apelar a un método algo rústico pero eficaz: resolver el problema con una condición inicial

$$(x(0), y(0)) = (0, 0), \qquad (x'(0), y'(0)) = (a, b)$$

y luego intentar hallar un vector (a, b) de manera tal que la correspondiente solución $S(t) = (x(t), y(t))$ verifique $S(1) = (0, 0)$. Pero quien dice (a, b) dice $z = a + bi$ y, de la misma forma, podemos interpretar la solución S, que depende de los valores iniciales, como una función $S_z : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Lo que buscamos, entonces, es un cero de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) := S_z(1)$. Los teoremas de dependencia continua (¡uy, cierto!) nos dicen que f es continua.

Ahora observemos lo siguiente: al integrar una vez el sistema con la condición inicial obtenemos

$$\begin{cases} x'(t) = a + \int_0^t \varphi(s, x(s), y(s))\, ds \\ y'(t) = b + \int_0^t \psi(s, x(s), y(s))\, ds \end{cases}$$

e integrando una vez más hasta $t = 1$ queda

$$\begin{cases} x(1) = a + \int_0^1 \int_0^r \varphi(s, x(s), y(s))\, dsdr \\ y(1) = b + \int_0^1 \int_0^r \psi(s, x(s), y(s))\, dsdr \end{cases}$$

pues $x(0) = y(0) = 0$. Pero dijimos que φ y ψ son acotadas, así que podemos olvidarnos de esas integrales medio feúchas y decir, directamente, que

$$|f(z) - z| = |S_z(1) - z| = |x(1) + iy(1) - (a + bi)| < R$$

para cierto R. En particular, si consideramos la curva $\gamma(t) = Re^{it}$, resulta que

$$|f \circ \gamma(t) - \gamma(t)| < R = |\gamma(t)|$$

[5] Por supuesto, alcanza con mucho menos: por ejemplo, se puede pedir que tengan crecimiento lineal respecto de x y de y, vale decir,

$$|\varphi(t, x, y)|, |\psi(t, x, y)| \le A|x| + B|y| + C \qquad t \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}.$$

y el teorema del perrito nos asegura que

$$I(f \circ \gamma, 0) = I(\gamma, 0) = 1$$

lo que implica que f se anula en $D_R(0)$. Otra alternativa, claro está, consiste en observar que la función $g(z) = z - f(z)$ verfica que $g(\overline{D_R(0)}) \subset D_R(0)$ y, en consecuencia, g tiene un punto fijo, que corresponde a un cero de f. Aquí podríamos preguntarnos si no hay manera de obtener conclusiones más precisas, usando por ejemplo el lema de Schwarz. Sin embargo, el camino no parece muy viable ya que, salvo excepciones triviales, esta función f no puede resultar holomorfa. ¿Alguién se anima a decir por qué?

5.6. * Perdón, ¿dijo homotopía u homología?

En las secciones previas, además de la versión homotópica del teorema de Cauchy, vimos que el índice $I(\gamma, w)$ es constante sobre las componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash \text{Im}(\gamma)$ y 0 sobre la componente conexa no acotada. Después nos distrajimos con los ceros y puntos fijos de algunas funciones; es hora de retomar la buena senda y mostrar que la noción de índice resulta de utilidad para entender mejor algunos otros aspectos topológicos del plano. Empecemos por una idea muy simple, dicho esto de manera sumamente literal: si γ es una curva cerrada simple (de Jordan, bah), entonces todo parece indicar que $\mathbb{C} \backslash \text{Im}(\gamma)$ queda separada en dos componentes conexas, una interior y otra exterior. Esto, en realidad, no es ninguna pavada y tiene nombre propio: es el teorema de Jordan. Pero, sin meternos en detalles tenebrosos, podemos empezar por la observación más elemental de que $I(\gamma, w) = 0$ para w en la componente conexa no acotada, que bien merece llamarse "exterior". Esto motiva la siguiente

Definición 5.6.1. Dado un lazo γ, se define su interior en la forma

$$\text{Int}(\gamma) := \{w \in \mathbb{C} \backslash \text{Im}(\gamma) : I(\gamma, w) \neq 0\}.$$

Este conjunto siempre es acotado; si la curva es muy vueltera, algunas componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash \text{Im}(\gamma)$ pueden quedar en el "exterior". Pero lo que es seguro es que si $\gamma \sim 0$ en cierto abierto U, entonces el interior de γ está contenido en U:

Proposición 5.6.1. *Sea γ un lazo en un abierto U tal que $\gamma \sim 0$ en U, entonces $I(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin U$.*

Demostración: Es inmediato, ya que para $w \notin U$ la función $f(z) := \frac{1}{z-w}$ es holomorfa y luego

$$I(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

$\square$

Observación 5.6.2. Si se prefiere, en la demostración anterior alcanza con observar que la función $g(z) := z - w$ es continua y no se anula, de modo que, por la Proposición 5.5.2, vale $I(\gamma, w) = I(g \circ \gamma, 0) = 0$.

Esta propiedad se expresa de otra manera, a partir de la noción de *homología*:

Definición 5.6.3. Sea γ un lazo en un abierto U. Se dice que γ es homólogo a 0 en U sii $I(\gamma, w) = 0$ para todo $w \notin U$. Más en general, dos lazos γ, δ en U son homólogos si vale $I(\gamma, w) = I(\delta, w)$ para todo $w \notin U$.

En términos tan ceremoniosos, la proposición anterior dice, simplemente, que si $\gamma \sim 0$ en U entonces γ es homólogo a 0. La recíproca no vale: hay un ejemplo famoso, llamado *contorno de Pochhammer*, de un lazo homólogo a 0 en $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ que no es homotópico a una constante (aunque esto último requiere algún argumento más sofisticado).

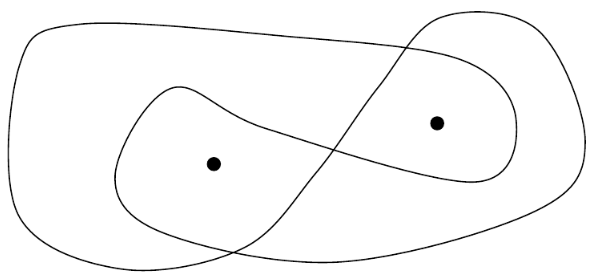


Figura 5.1: Contorno de Pochhammer

Como sea, esta noción más débil permite dar una versión más general de los resultados de Cauchy:

Teorema 5.6.1. (Cauchy, versión homológica) Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y γ un lazo homólogo a 0 en U. Entonces para cualquier $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa vale

1. Para $z \notin \operatorname{Im}(\gamma)$ vale
$$f(z)I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

2. $\int_\gamma f(w)\, dw = 0$.

<u>*Demostración*</u>: Tal vez sorprenda que hayamos puesto las conclusiones del teorema en este orden pero, como anticipamos, se trata de un clásico "Cauchy implica Cauchy". En efecto, si verificamos que la primera fórmula vale para cualquier función holomorfa f, entonces podemos fijar cualquier $z \notin \operatorname{Im}(\gamma)$ y definir $g(w) = (w - z)f(w)$. La fórmula de Cauchy, aplicada a la función holomorfa g en el punto z, da por resultado la segunda afirmación. Veamos entonces que vale la fórmula. Para ello, consideremos la función

$$\varphi(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

que es continua (¿por qué?) y holomorfa en cada variable. Por el Corolario 5.4.2, la función $h(w) := \int_\gamma \varphi(z,w)\,dz$ es holomorfa. Además, para $|w| \gg 0$ sabemos que $w \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ y vale $I(\gamma, w) = 0$, de modo que

$$h(w) = \int_\gamma \frac{f(z) - f(w)}{z - w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\,dz.$$

Como f es obviamente acotada sobre $\mathrm{Im}(\gamma)$, esto muestra que $h(w) \to 0$ para $|w| \to \infty$ y, como h es entera, por el teorema de Liouville se deduce que $h \equiv 0$. En particular, para cualquier $w \notin \mathrm{Im}(\gamma)$ vale

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - w}\,dz = \int_\gamma \frac{f(w)}{z - w}\,dz = 2\pi i f(w) I(\gamma, w).$$

$\square$

Observación 5.6.4. A diferencia de la versión homotópica, en este caso vale también una afirmación recíproca, en el siguiente sentido: si γ es un lazo en U que verifica alguna de las dos conclusiones del teorema para toda $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces γ es homólogo a 0. La explicación es casi trivial: si $w \notin U$, entonces la función $f(z) = \frac{1}{z-w}$ es holomorfa y entonces $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, es decir, $I(\gamma, w) = 0$. ¿Y por qué la recíproca es falsa para la versión homotópica? Muy sencillo: si fuera cierta, entonces todo lazo γ homólogo a 0 verificaría también que $\gamma \sim 0$, cosa que, como sabemos, no vale. Sin embargo, la no-obviedad de ejemplos para esta última cuestión hace pensar que sí vale una suerte de recíproca para la primera versión del teorema de Cauchy: dado un rectángulo R tal que $\partial R \subset U$, si $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$ para toda $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces $R \subset U$. En efecto, como dijimos, se deduce que ∂R es homólogo a 0 y además, en este caso, el interior de ∂R coincide con el interior de R, en el sentido topológico.

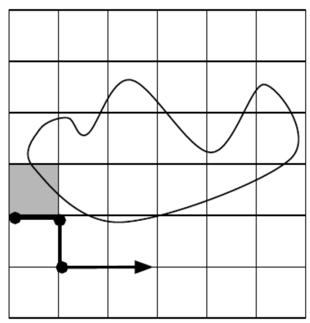
Ya dijimos que la noción de homología es más general que la de homotopía; sin embargo, hay una situación muy especial en las que ambas coinciden: cuando se trata de dominios simplemente conexos. En otras palabras, para un abierto conexo U, se verifica que si todo lazo es homólogo a 0 entonces todo lazo es homotópico a una constante. Esto no es del todo inmediato, aunque se puede esbozar una demostración a partir del siguiente lema, cuya representación visual es muy clara pero conviene escribir con cierto cuidado:

Lema 5.6.5. *Sea $V \subset \mathbb{C}$ un abierto acotado. Dado $\varepsilon > 0$, existe una poligonal cerrada simple γ con lados paralelos a los ejes tal que $\mathrm{dist}(\gamma(t), \overline{V}) < \varepsilon$ para todo t y vale $I(\gamma, w) = 1$ para todo $w \in V$.*

<u>*Demostración*</u>: Como $\overline{V}$ es acotado, se mete dentro de un cuadrado C. Podemos dividir este cuadrado en “baldosas” cerradas de diagonal menor que ε, a las que llamamos B_{jk} con $1 \leq j, k \leq N$. Consideremos ahora el conjunto

$$\mathcal{C} := \{(j,k) : B_{jk} \cap V \neq \emptyset\}$$

y llamemos j_0 al mínimo de los j tales que $B_{jk} \in \mathcal{C}$ para algún k. Tomando ahora k_0 como el mínimo de los k tales que $B_{j_0 k} \in \mathcal{C}$, vamos a elegir el extremo inferior izquierdo de $B_{j_0 k_0}$ como punto de partida de nuestra curva. Observemos que la base de $B_{j_0k_0}$ no contiene elementos de V, ya que en tal caso k_0 no sería mínimo. De esta forma, tenemos el tramo inicial de la curva γ y llegamos al vértice inferior izquierdo de $B_{(j_0+1)k_0}$. Si la base de esta nueva baldosa no se corta con V, entonces la tomamos como segundo tramo de γ; en caso contrario, el lado izquierdo de $B_{(j_0+1)(k_0-1)}$ no se interseca con V (otra vez, porque k_0 es mínimo) y nos movemos hacia abajo. Así sucesivamente, vamos construyendo la curva γ moviéndonos con gran elegancia por los bordes de las baldosas.[6] Por construcción, la curva γ es una poligonal cerrada simple (con lados paralelos a los ejes) y recorrida en sentido antihorario; además, cada baldosa de $\mathcal{C}$ se corta con V, de modo que la distancia de la curva al conjunto es menor que el diámetro de las baldosas, a su vez menor que ε.



Su índice respecto de cualquier punto $w \in V$ es claramente 1; por ejemplo (usando que el índice es localmente constante) podemos desplazar w un poquito si hace falta y suponer que se encuentra en el interior de cierta baldosa $B_{j_0k_0}$. Luego se verifica

$$I(\gamma, w) = \sum_{(j,k)\in\mathcal{C}} I(B_{jk}, w) = I(B_{j_0k_0}, w) = 1.$$

□

Veamos entonces la propiedad mencionada. Por ahora se trata de una demostración algo informal, aunque más adelante estaremos en condiciones de justificarla de una manera distinta.

Proposición 5.6.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que todo lazo en U es homólogo a* 0*. Entonces U es simplemente conexo.*

Demostración: Dado un lazo γ en U, mediante una homotopía podemos suponer que se trata de una poligonal con lados paralelos a los ejes. También se puede suponer, obviamente, que los lados verticales y horizontales se alternan. Esto quiere decir que podemos pensar la curva como una unión finita de segmentos $\gamma([t_j, t_{j+1}])$ con $j = 0, \ldots, N$, horizontales o verticales (de

[6] Cabe aplicar aquí la expresión “gambetear en una baldosa”.

manera alternada), para $\gamma(t_0) = \gamma(t_N)$. Si V es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\gamma)$, usando la compacidad de $\overline{V}$ y el lema anterior, existe un lazo δ en U tal que $I(\delta, w) = 1$ para todo $w \in V$. Como δ es homólogo a 0 en U, lo anterior significa que $V \subset U$. Luego, podemos considerar un segmento $S : \gamma([t_j, t_{j+1}])$ cuya coordenada real es mínima y moverlo hacia la derecha hasta que se encuentra por primera vez con otro vértice (ver Figura 5.2). De esta forma, el rectángulo queda "aplastado" y, renombrando los vértices que hagan falta, nos queda una poligonal con un número menor de vértices. El resultado se sigue entonces por inducción.

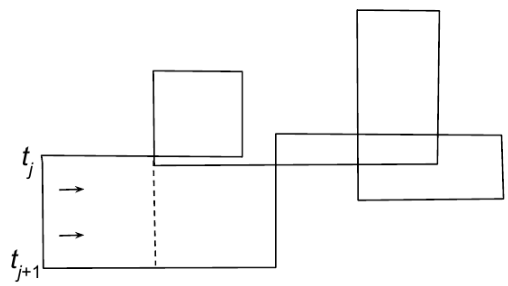


Figura 5.2: Aplastando rectángulos

□

5.7. Conjuntos simplemente conexos: aquí están, estos son

En la sección previa vimos que un abierto conexo U es simplemente conexo si y solo si todo lazo en U es homólogo a 0. Por el teorema de Cauchy (versión homológica), esta última propiedad equivale a decir que para todo lazo en U y toda $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa vale $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ y, a su vez, esto equivale a decir que toda $f : U \to \mathbb{C}$ tiene primitiva. Todas estas equivalencias nos hacen pensar nuevamente en la frase de Poincaré mencionada en el capítulo previo (ver nota al pie 12). Para enfatizar esto un poco más, podemos establecer otra equivalencia, esta vez con un enunciado que califica muy bien de "cosa diferente": un abierto conexo es simplemente conexo cuando su complemento es conexo. Claro que, dicho así, es un hecho fácilmente refutable: por ejemplo, una franja como

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1\}$$

es un conjunto simplemente conexo y su complemento no es conexo. Pero la cuestión cambia cuando, en vez de $\mathbb{C}$, miramos el complemento en el plano ampliado:

Proposición 5.7.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Entonces todo lazo en U es homólogo a 0 si y solo si $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es conexo.*

Demostración: $\Longrightarrow$) Supongamos que $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es la unión de dos cerrados A, B disjuntos. Supongamos que B es el que contiene el punto del infinito, entonces $A \subset \mathbb{C}$ es compacto. Fijemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{dist}(z, B) > 2\varepsilon$ para todo $z \in A$ y llamemos $V = \bigcup_{z \in A} D_\varepsilon(z)$. Por el Lema 5.6.5, existe un lazo simple γ tal que $V \subset \mathrm{Int}(\gamma)$ y $\mathrm{dist}(\gamma(t), \overline{V}) < \varepsilon$ para todo t, de donde $\mathrm{Im}(\gamma) \cap B = \emptyset$. Como $A \subset V$, se deduce que γ es un lazo en U que no es homólogo a 0, lo que es absurdo.

$\Longleftarrow$) Sean γ un lazo en U. Como $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es conexo, se encuentra contenido en una de las componentes conexas de $\hat{\mathbb{C}} \backslash \mathrm{Im}(\gamma)$, que necesariamente es la que contiene el punto ∞. Esto quiere decir que $\mathbb{C} \backslash U$ se encuentra contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \backslash \mathrm{Im}(\gamma)$, para cuyos puntos w se sabe que $I(\gamma, w) = 0$. Dicho de otra manera, $\mathrm{Int}(\gamma) \subset U$, es decir, γ es homólogo a 0. $\square$

Pero las equivalencias no acaban aquí. El hecho de que toda función holomorfa en U tiene primitiva implica, a su vez, que si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula, entonces la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene primitiva. Y no es por hacer alharaca, pero esto es importante, ya que se trata de la famosa *derivada logarítmica* y lleva a imaginar que, en una situación así, tiene que existir una rama del logaritmo de $f(z)$. Dicho y hecho:

Proposición 5.7.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para toda $f : U \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ holomorfa existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $e^{g(z)} = f(z)$ para todo $z \in U$.*

Demostración: Dado $z_0 \in U$, fijamos un valor $w \in \mathbb{C}$ tal que $e^w = f(z_0)$. Sea $g : U \to \mathbb{C}$ una primitiva de $\frac{f'}{f}$ tal que $g(z_0) = w$ y consideremos la función $h(z) = \frac{e^{g(z)}}{f(z)}$, que verifica

$$h'(z) = \frac{e^{g(z)}[g'(z)f(z) - f'(z)]}{f(z)^2} \equiv 0,$$

de modo que h es constante. Además, $h(z_0) = \frac{e^w}{f(z_0)} = 1$, lo que prueba que $e^g = f$. $\square$

Como caso especial, siempre se tiene la honorable función $f(z) = z - w$ con $w \notin U$ para la cual -no por casualidad- vale $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-w}$:

Corolario 5.7.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para todo $w \notin U$ existe una rama del logaritmo de $z - w$ definida en U.*

También cabe recordar que si tenemos logaritmo, entonces tenemos raíces. Por ejemplo, la más sencillita de todas, que es la raíz cuadrada:

Proposición 5.7.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para toda $f : U \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ holomorfa existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $h(z)^2 = f(z)$ para todo $z \in U$.*

Demostración: Como siempre, alcanza con tomar g como en la proposición anterior y definir $h(z) = e^{\frac{g(z)}{2}}$. $\square$

Y claro, cada proposición con su corolario:

Corolario 5.7.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces para todo $w \notin U$ existe una rama de la raíz cuadrada de $z - w$ definida en U.*

La tesis del último enunciado se suele conocer como *propiedad de la raíz cuadrada*. Y lo sorprendente es que así, tan debilucha que parece, es suficiente para probar que U es simplemente conexo. Podemos expresar este hecho tan feliz por medio de un resultado general, que resume todo lo que venimos diciendo y caracteriza por completo tales dominios:

Teorema 5.7.1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Entonces son equivalentes:

1. U es simplemente conexo.
2. Para todo lazo γ en U y todo $w \notin U$ vale $I(\gamma, w) = 0$.
3. $\hat{\mathbb{C}} \backslash U$ es conexo.
4. Para todo lazo γ en U y toda $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa vale $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.
5. Toda $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tiene primitiva.
6. Para toda $f : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existe una rama del logaritmo de $f(z)$ definida en U.
7. Para toda $f : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ existe una rama de la raíz cuadrada de $f(z)$ definida en U.
8. Para todo $w \notin U$ existe una rama del logaritmo de $z - w$ definida en U.
9. Para todo $w \notin U$ existe una rama de la raíz cuadrada de $z - w$ definida en U.

Demostración: A partir de todo lo visto, alcanza con demostrar que la última propiedad verifica la segunda (que a su vez, por la Proposición 5.6.2 implica la primera). A tal fin, consideremos un lazo δ y supongamos que w se encuentra en una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\delta)$. Vamos a probar que $w \in U$; de esta forma, se verifica que $\mathrm{Int}(\delta) \subset U$. A tal fin, supongamos que $w \notin U$. Por el Lema 5.6.5 podemos considerar un lazo γ en U tal que $I(\gamma, w) = 1$. Sea ahora $r : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $r(z)^2 = z - w$ y llamemos $\delta(t) = r(\gamma(t))$, es decir, $\delta(t)^2 = \gamma(t) - w$. Por la Observación 5.5.2 sabemos que

$$I(\gamma, w) = I(\gamma - w, 0) = I(\delta^2, 0) = 2I(\delta, 0).$$

Esto significa que $I(\gamma, w)$ es par, lo que es absurdo. □

* **Digresión:** Invariancia de dominio.

En el teorema previo empleamos la Observación 5.5.2 que, expresada de otra forma, dice que si un lazo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ verifica $\gamma(t) = \delta(t)^2$ para otro lazo δ, entonces $I(\gamma, 0)$ es par. Esto en realidad es un si y solo si: en efecto, supongamos que $I(\gamma, 0)$ es par y consideremos F continua tal que $e^{F(t)} = \gamma(t)$. La función $\delta(t) := e^{\frac{F(t)}{2}}$ es continua y verifica $\delta(t)^2 = \gamma(t)$, así que solo resta verificar que es un lazo. Para esto, alcanza con observar que

$$2k = I(\gamma, 0) = \frac{F(b) - F(a)}{2\pi i},$$

de donde

$$\frac{\delta(1)}{\delta(0)} = e^{\frac{F(b)-F(a)}{2}} = e^{2k\pi i} = 1.$$

Lo sorprendente es que, siguiendo las ideas de [2], este simple resultado es suficiente para probar el importante resultado topológico mencionado en la Observación 3.6.1 con $n = 2$: si $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ es continua e inyectiva, entonces $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo. Para esto, debemos verificar que, para cualquier $z_0 \in U$, la imagen de f contiene un disco centrado en $f(z_0)$. Por simplicidad, se puede suponer $z_0 = 0 = f(z_0)$: a esta altura, una traslación más o una menos no nos va a cambiar la vida. Consideremos $r > 0$ tal que $\overline{D_r(0)} \subset U$ y la homotopía $h(t,s) := f(\gamma(t)) - f(-s\gamma(t))$, donde $\gamma(t) := re^{it}$. Gracias a la inyectividad, h no se anula, de modo que

$$I(f \circ \gamma, 0) = I(\Gamma, 0),$$

con $\Gamma(t) := f(\gamma(t)) - f(-\gamma(t))$. Veamos que Γ no puede ser el cuadrado de ningún lazo: en efecto, si $\Gamma(t) = \delta(t)^2$, entonces

$$\delta(t+\pi)^2 = \Gamma(t+\pi) = -\Gamma(t) = -\delta(t)^2.$$

Esto quiere decir, para todo t, que $\delta(t+\pi) = i\delta(t)$ o bien $\delta(t+\pi) = -i\delta(t)$ y, si δ es continua, se deduce que

$$\delta(t+\pi) \equiv i\delta(t) \qquad \text{o bien } \delta(t+\pi) \equiv -i\delta(t).$$

En cualquiera de los dos casos, resulta

$$\delta(2\pi) = \delta(\pi+\pi) = \pm i\delta(\pi) = (\pm i)^2\delta(0) = -\delta(0),$$

lo que prueba que δ no es cerrada. En definitiva, el índice de Γ respecto del origen es impar y, por la invariancia homotópica, esto también vale para $f \circ \gamma$. Pero el índice es localmente constante, así que para cualquier w cercano a 0 vale $I(f \circ \gamma, w) = I(f \circ \gamma, 0)$ que, por esas cosas de la imparidad, es distinto de 0. Esto nos alegra sobremanera, ya que entonces la Proposición 5.5.2 garantiza que $w \in \mathrm{Im}(f)$.

Observación 5.7.1. La misma cuenta que hicimos para la curva Γ sirve para probar otro resultado conocido, el *teorema de Borsuk*, que en este contexto dice lo siguiente: si una función $g : \overline{D_r(0)} \to \mathbb{C}$ es continua, impar y no se anula sobre $\gamma(t) = re^{it}$, entonces $I(g \circ \gamma, 0)$ es impar.

Para concluir, cabe mencionar que todas las equivalencias del teorema previo no son nada comparadas con el enunciado, sencillito y contundente, según el cual los abiertos simplemente conexos U son aquellos conjuntos conformemente equivalentes al disco unitario, es decir, tales que existe una biyección holomorfa $f : U \to D$. Tal es el resultado conocido como *teorema de representación conforme* o también *teorema de Riemann*. Es claro que debemos pedir $U \neq \emptyset$ y (¡no se olviden de Liouville!) el resultado debe excluir también el caso $U = \mathbb{C}$. Pero a estos dos los conocemos bastante bien y nos podemos desentender de ellos; lo notable es que cualquier otro abierto simplemente conexo, acotado o no, por más forma extraña que pueda tener, se transforma en el disco unitario mediante una aplicación que preserva ángulos. Un enunciado tan magnífico merece que le dediquemos un capítulo aparte, en el que además probaremos algunas cuestiones fundamentales relativas a las sucesiones de funciones holomorfas.

Capítulo 6

Teorema de representación conforme

En el capítulo previo vimos mil y una maneras (bueno, quizás algunas menos) de decir que un conjunto es simplemente conexo. Pero, como anticipamos, todas estas caracterizaciones parecen poca cosa ante una afirmación formidable: un abierto no vacío $U \subsetneq \mathbb{C}$ es simplemente conexo si y solo si existe $f : U \to D_1(0)$ holomorfa y biyectiva. Como se recordará, esto último implica que la función inversa $f^{-1} : D_1(0) \to U$ es también holomorfa (hmmmm, ¿por qué era eso?); por tal motivo, se suele decir que f es un difeomorfismo conforme. Y el resultado, debido a Riemann, se conoce también como *teorema de representación conforme*. Para probarlo, emplearemos algunas propiedades básicas de las funciones holomorfas; entre ellas, el hecho de que si $f_n : U \to \mathbb{C}$ son funciones holomorfas que convergen a una cierta $f : U \to \mathbb{C}$ uniformemente sobre cualquier $K \subset U$ compacto, entonces f resulta holomorfa. Este tipo de convergencia se conoce habitualmente como *convergencia uniforme sobre compactos* y va a ser de gran importancia en varios de los resultados que veremos a continuación.

6.1. En busca del Riemann perdido

En los párrafos previos nos referimos a una equivalencia "formidable", expresada en el teorema de Riemann. Pero es claro que lo notable de tal equivalencia es la ida, ya que la vuelta parece bastante trivial. En efecto, es fácil ver que la conexión simple se preserva por difeomorfismos conformes:

Proposición 6.1.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva. Si U es simplemente conexo, entonces $f(U)$ es simplemente conexo.*

<u>*Demostración*</u>: Sabemos que f es abierta, de modo que $f(U)$ es un abierto conexo y su inversa $f^{-1} : f(U) \to U$ es continua. Si $\gamma : [a, b] \to f(U)$ es un lazo, entonces $\delta := f^{-1} \circ \gamma$ es un lazo

en U. Consideremos una homotopía $h : [a,b] \times [0,1] \to U$ entre δ y una constante w, entonces $f \circ h$ es una homotopía entre los lazos γ y la constante $f(w)$. $\square$

Pero si de equivalencias hablamos, queda claro que en la proposición previa podríamos haber empleado como hipótesis cualquiera de las afirmaciones del Teorema 5.7.1. A modo de ejemplo, podemos ver una prueba directa de que la segunda propiedad de dicho teorema también se preserva:

Proposición 6.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo tal que todo lazo en U es homólogo a 0. Dada $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa e inyectiva, se cumple que todo lazo en $f(U)$ es homólogo a 0.*

Demostración: Sea γ un lazo en $f(U)$ y sea $w \notin f(U)$. Si γ es suave, entonces definimos el lazo $\delta := f^{-1} \circ \gamma$, luego

$$I(\gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\delta} \frac{1}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\delta(t))\delta'(t)}{f(\delta(t))-w}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{f'(z)}{f(z)-w}\, dz.$$

Pero la función $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)-w}$ es holomorfa en U; en consecuencia, usando la hipótesis y la versión homológica del teorema de Cauchy se deduce que $I(\gamma, w) = 0$. Si ahora γ es un lazo cualquiera, el resultado se deduce tomando un lazo suave homotópico a γ en U. $\square$

Observación 6.1.1. Por tratarse de un resultado topológico, en realidad la conclusión se verifica para cualquier homeomorfismo $f : U \to f(U)$. Esto es claro en la primera de las proposiciones, aunque no en la segunda, donde empleamos fuertemente el hecho de que f es holomorfa.

Teniendo en cuenta la última observación, cabe preguntar: ¿hacía falta pasar por esto? ¿No habíamos dicho que las dos definiciones de simplemente conexo eran equivalentes? Sin embargo, lo que sigue puede verse como una demostración alternativa a la prueba informal de la Proposición 5.6.2. Recordemos, en efecto, que en el Teorema 5.7.1 demostramos la equivalencia de las propiedades 2 hasta 9; a su vez, la proposición mencionada nos aseguraba que todo eso era lo mismo que la propiedad (en principio más fuerte), de que el conjunto en cuestión era simplemente conexo. En lo que sigue veremos que la definición “debil” alcanza ya para probar el teorema de Riemann. En realidad, la primera parte de la tarea es fácil: meter el dominio dentro de $D_1(0)$; para esto, alcanza con una hipótesis todavía más débil:

Lema 6.1.2. *Sea $U \subsetneq \mathbb{C}$ abierto no vacío y supongamos para cierto $w \notin U$ existe $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $g(z)^2 = z - w$ para todo $z \in U$. Entonces para todo $z_0 \in U$ existe $f : U \to D_1(0)$ holomorfa inyectiva tal que $f(z_0) = 0$.*

Demostración: Observemos, en primer lugar, que g no se anula y, además, si $g(z_1)^2 = g(z_2)^2$, entonces $z_1 - w = z_2 - w$, es decir, $z_1 = z_2$. Esto implica, por un lado, que g es inyectiva y, por otro, que si $b \in \mathrm{Im}(g)$ entonces $-b \notin \mathrm{Im}(g)$. Como g es abierta, podemos fijar $b \in \mathrm{Im}(g)$ y $r > 0$ tal que $\overline{D_r(b)} \subset \mathrm{Im}(g)$ y entonces $\overline{D_r(-b)} \cap \mathrm{Im}(g) = \emptyset$. Luego $h(z) := \frac{1}{g(z)+b}$ es inyectiva y satisface $|h(z)| < \frac{1}{r}$ para todo $z \in U$, lo que permite definir la función holomorfa (e inyectiva)

$$f(z) := \frac{r}{2}[h(z) - h(z_0)],$$

que verifica $f(z_0) = 0$ y $|f(z)| < 1$ para todo $z \in U$. □

De acuerdo con lo anterior, alcanza entonces con probar el teorema de Riemann para dominios $U \subset D_1(0)$ tales que todo lazo es homólogo a 0. Pero, ya que le tomamos el gustito a las raíces cuadradas, vamos a probarlo usando otro de los enunciados equivalentes del Teorema 5.7.1, al que conviene ponerle nombre así evitamos tener que llamarlo todo el tiempo "propiedad 7":

Definición 6.1.3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto. Diremos que U tiene la propiedad fuerte de la raíz cuadrada si para toda $\phi : U \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorfa existe $h : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $h(z)^2 = \phi(z)$ para todo $z \in U$.

Cabría preguntar aquí por qué no contentarnos con la propiedad de la raíz cuadrada más débil, la última en el Teorema 5.7.1: para todo $w \notin U$ existe una rama holomorfa de $\sqrt{z-w}$ definida en U. Sin embargo, no resulta claro que se pueda probar de manera directa que esta propiedad se preserva; en cambio, para la propiedad "fuerte" es muy sencillo:

Lema 6.1.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto con la propiedad fuerte de la raíz cuadrada. Si $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa e inyectiva, entonces $f(U)$ tiene la propiedad fuerte la raíz cuadrada.*

Demostración: Dada $\phi : f(U) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorfa, por hipótesis existe $h : U \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $h(z)^2 = \phi \circ f(z)$ para todo $z \in U$, es decir, $[h \circ f^{-1}(w)]^2 = \phi(w)$ para todo $w \in f(U)$.
□

De esta forma, nuestra demostración del teorema de Riemann se reducirá a probar que si $U \subset D_1(0)$ abierto conexo que verifica la propiedad fuerte de la raíz cuadrada, entonces para cada $z_0 \in U$ existe $f : U \to D_1(0)$ holomorfa y biyectiva tal que $f(z_0) = 0$. Más aún, f es única salvo rotaciones, cosa que a esta altura no es ninguna sorpresa: como veremos, es consecuencia inmediata del lema de Schwarz. Sin embargo, para probar la existencia vamos a necesitar algunos resultados adicionales, que veremos en las próximas secciones.

6.2. Los teoremas de Montel y Hurwitz

Es bien sabido, en los espacios de funciones continuas, que una sucesión acotada puede no tener subsucesiones convergentes. No hace falta bucear en aguas del lema de Riesz para llegar a tan sesuda conclusión: alcanza con tomar, por ejemplo, las funciones $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dadas por $f_n(x) := x^n$ que en $(-1, 1]$ convergen puntualmente a una función discontinua y, por ende, no hay la menor esperanza de encontrar una subsucesión que converja de manera uniforme. Pero enseguida encontramos una explicación intuitiva para justificar este fracaso: "Ah, lo que pasa es que las derivadas no están acotadas". Esto último no es una condición necesaria, como muestra por ejemplo la sucesión $f_n(x) := \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n}$; sin embargo, algo de cierto hay, ya que tener una cota uniforme para las derivadas es una de las maneras por excelencia de garantizar que vale la *equicontinuidad* y aplicar el teorema de Arzelá-Ascoli. A modo de observación trivial, notemos que para $f_n(x) = x^n$, las derivadas sí están acotadas uniformemente en cualquier intervalo de la forma $[-r, r]$ con $r < 1$ y (¡vaya bobada!) ahí la sucesión converge uniformemente a $f \equiv 0$. En cambio, la sucesión $f_n(x) := \operatorname{sen}(nx)$ sale mucho peor parada, porque no tiene subsucesiones que converjan uniformemente en $[-r, r]$ para ningún $r > 0$. Hay varias formas de ver esto último; por ejemplo, es prácticamente trivial para quien haya visto algo de espacios L^2 y series de Fourier. Pero no es preciso ir tan lejos, porque se puede dar una demostración directa. Supongamos que existe una subsucesión $f_{n_j} \to \varphi$ uniformemente en $[-r, r]$ y fijemos $\alpha \in (-r, r)$. Llamando x_j al último cero de f_{n_j} en el intervalo $[-r, \alpha]$, se verifica que $x_j \to \alpha$ y luego

$$|\varphi(\alpha)| \leq |\varphi(\alpha) - \varphi(x_j)| + |\varphi(x_j) - f_{n_j}(x_j)| \to 0$$

para $j \to \infty$. Esto implica que $\varphi \equiv 0$, lo que es absurdo, ya que $\|f_n|_{[-r,r]}\|_\infty = 1$ para todo n suficientemente grande.

A continuación veremos que esto no puede pasar cuando se trata de funciones holomorfas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ ya que, a grandes rasgos, tener una cota para la sucesión implica también tener una cota para las derivadas. Aunque esto no es exactamente así, como nos muestra el primero de los ejemplos anteriores: la sucesión de funciones $f_n(z) := z^n$ está uniformemente acotada en $D_1(0)$ y sus derivadas no. La formulación correcta del resultado nos va a ayudar mejor por qué ocurre esto:

Lema 6.2.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas. Supongamos que existe M tal que $|f_n(z)| \leq M$ para todo $z \in U$ y todo n. Entonces para cualquier compacto $K \subset U$ existe M_K tal que $|f_n'(z)| \leq M_K$ para todo $z \in K$ y todo n.*

Demostración: Fijando $r > 0$ tal que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ para todo $z_0 \in K$, se tiene:

$$|f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz \right| \leq \frac{M}{r} := M_K.$$

□

Observación 6.2.2. * Volviendo al ejemplo $f_n(z) = z^n$, la situación queda más clara: la cota del lema previo empeora cuando K se encuentra muy cerca del borde de U, lo que explica que no exista una cota que sirva para todo el disco unitario. Específicamente, para $R \in (0, 1)$ el lema dice que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $nR^{n-1} \leq \frac{1}{1-R}$. Notemos que en este caso se puede obtener una cota de manera directa: escribiendo $R = e^{-a}$ con $a > 0$ y empleando el hecho de que $xe^{-ax} \leq \frac{1}{ae}$ para todo $x > 0$, se obtiene la simpática desigualdad

$$nR^{n-1} \leq \frac{1}{eR \ln \frac{1}{R}},$$

que es un poco más fina que la anterior cuando R está cerca de 1. También se entiende mejor el otro ejemplo, el de la sucesión, $f_n(x) = \operatorname{sen}(nx)$, que se arruina cuando la pensamos en el ámbito variable compleja. El hecho de que haya una cota uniforme sobre intervalos de la recta real es más bien fortuito: en efecto, la sucesión $\{\text{sen}(nz)\}$ no está acotada en ningún abierto no vacío de $\mathbb{C}$.

Tal como anticipamos, la cota para las derivadas permite hacer uso del teorema de Arzelá-Ascoli, que en el contexto anterior nos da un primer resultado bastante decente:

Corolario 6.2.1. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas. Supongamos que existe M tal que $|f_n(z)| \leq M$ para todo $z \in U$ y todo n. Dado $K \subset U$ compacto, existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge uniformemente sobre K.*

Demostración: Consideremos $D_1, \ldots, D_N$ discos tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^N \overline{D_j} \subset U$. Por el lema previo, existe M_1 tal que $|f_n'(z)| \leq M_1$ para $z \in \overline{D_1}$ y $n \in \mathbb{N}$. Usando por ejemplo (4.8), esto implica que

$$|f_n(z) - f_n(w)| \leq M_1|z - w| \qquad z, w \in \overline{D_1}, n \in \mathbb{N},$$

lo que prueba que la familia $\{f_n\}$ es equicontinua en $\overline{D_1}$. Por Arzelà-Ascoli, existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ que converge uniformemente sobre $\overline{D_1}$. A su vez, de esta subsucesión podemos extraer otra que converge uniformemente sobre $\overline{D_2}$ y así sucesivamente (mejor dicho: *subsucesivamente*) hasta el último disco. □

La demostración previa nos permite intuir que en realidad el procedimiento puede llevarse a cabo incluso cuando no hay un "último disco", por medio de una repetición *ad infinitum.* Concretamente, sabemos que (¡gracias, Lindelöff!) U se puede escribir como una unión numerable

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j, \qquad \overline{D}_j \subset U \quad j \in \mathbb{N};$$

entonces, ¿habrá forma de encontrar una función $f : U \to \mathbb{C}$ y una subsucesión convergente $f_{n_j} \to f$? La experiencia nos dice que no podemos aspirar a que la convergencia sea uniforme en U, aunque sí sobre subconjuntos compactos.

Una buena respuesta a la pregunta anterior surge de aplicar el famoso proceso diagonal de Cantor: primero tomamos un conjunto infinito (ordenado) $S_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\{f_j\}_{j \in S_1}$ converge uniformemente en $\overline{D}_1$, luego nos quedamos con un subconjunto $S_2 \subset S_1$ tal que $\{f_j\}_{j \in S_2}$ converge uniformemente en $\overline{D}_2$, y así sucesivamente. De esta forma, si consideramos el conjunto $\mathcal{D} := \{d_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ donde d_j es el j-ésimo elemento de S_j, entonces la sucesión $\{f_j\}_{j \in \mathcal{D}}$ es una subsucesión de la original, que converge uniformemente en cada $\overline{D}_j$. Pero, como U se cubre por los conjuntos D_j, esto quiere decir que la subsucesión converge sobre cualquier subconjunto compacto de U. Más aún, no hace falta en realidad que la sucesión $\{f_n\}$ esté uniformemente acotada en todo U: alcanza con pedir que lo esté sobre subconjuntos compactos. Ese es, ni más ni menos, el teorema de Montel:

Teorema 6.2.1. (Montel) Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas. Supongamos que para todo compacto $K \subset U$ existe una constante M_K tal que $|f_n(z)| \leq M_K$ para todo n y todo $z \in K$. Entonces existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ que converge uniformemente sobre cualquier compacto $K \subset U$ a una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$.

Demostración: Tomando D_j como antes, alcanza con observar que, como $\overline{D_j} \subset U$, entonces existe $K_j \subset U$ compacto tal que $\overline{D_j} \subset K_j^\circ$. El hecho de que $\{f_n\}$ es acotada sobre K_j implica que cualquiera de sus subsucesiones tiene una subsucesión que converge uniformemente en $\overline{D_j}$, lo que garantiza el correcto funcionamiento del método diagonal. Finalmente, la convergencia uniforme de $\{f_{n_j}\}$ sobre compactos implica que f es holomorfa. $\square$

Observación 6.2.3. * Puestos a diagonalizar, cabe preguntarse si no habrá una demostración alternativa del teorema, que no requiera golpear las puertas de Arzelà y Ascoli. Y la respuesta es que sí; para ello dado $z_0 \in U$ fijemos $R > r > 0$ con $\overline{D_R(z_0)} \subset U$. Si escribimos

$$f_n(z) = \sum_{k\geq 0} a_k^n (z - z_0)^k,$$

las fórmulas de Cauchy nos dicen que

$$|a_k^n| \leq \frac{M_R}{R^k}$$

donde, por hipótesis, la cota M_R se puede elegir independiente de n. Pero entonces existen subconjuntos infinitos (ordenados) $\mathbb{N} \supset S_0 \supset S_1 \supset \dots$ tales que $\{a_k^n\}_{n\in S_k}$ converge a cierto a_k cuando $n \to \infty$, para todo k. Como antes, tomamos la diagonal $\mathcal{D}$ y probaremos que la subsucesión $\{f_n\}_{n\in\mathcal{D}}$ converge uniformemente sobre $\overline{D_r(z_0)}$ a la serie $\sum_{k\geq 0} a_k(z - z_0)^k$. Notemos, de paso, que $|a_k| \leq \frac{M_R}{R^k}$, lo que dice que esta última serie tiene radio de convergencia mayor o igual que R.

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ podemos fijar k_0 tal que $\sum_{k>k_0} |\frac{M_R}{R^k} r^k| < \frac{\varepsilon}{4}$ y, de esta forma, resulta

$$\left|\sum_{k>k_0} a_k^n (z - z_0)^k - \sum_{k>k_0} a_k (z - z_0)^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $z \in \overline{D_r(z_0)}$. Pero, además, tomando $n \to \infty$ en $\mathcal{D}$, se tiene que $a_k^n \to a_k$ para todo k. En particular, podemos fijar $n_0 \in \mathcal{D}$ tal que si $n \in \mathcal{D}$ es mayor que n_0 entonces vale

$$\left|\sum_{k=0}^{k_0} a_k^n (z - z_0)^k - \sum_{k=0}^{k_0} a_k (z - z_0)^k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $z \in \overline{D_r(z_0)}$, lo que prueba que

$$|f_n(z) - \sum_{k\geq 0} a_k (z - z_0)^k| < \varepsilon \qquad z \in \overline{D_r(z_0)}.$$

El resultado se deduce cubriendo como antes U con una familia numerable de discos $\overline{D_j}$ y aplicando otra vez el método diagonal.

El segundo teorema importante de esta sección también empieza con un “contraejemplo” para funciones reales. Consideremos la sucesión $f_n(x) := x^2 + \frac{1}{n}$, que converge uniformemente en cualquier compacto $[-r, r]$ a la función $f(x) = x^2$. ¿Y qué tiene esto de especial? Simplemente, el hecho de que f_n no se anula, mientras que f sí. Esto no puede pasar en las funciones de variable compleja, a menos que la función límite sea constante; más precisamente:

Teorema 6.2.2. (Hurwitz) Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que f_n converge uniformemente sobre compactos a cierta $f : U \to \mathbb{C}$. Si f_n no se anula en U para ningún n, entonces f no se anula en U, o bien $f \equiv 0$.

Demostración: Supongamos que $f(z_0) = 0$ para cierto z_0. Si f no es constante, podemos fijar $r > 0$ tal que f no se anula en $\overline{D_r(z_0)} \backslash \{z_0\}$. Como f_n no se anula, por módulo mínimo sabemos que

$$\min_{z \in \partial D_R(z_0)} |f_n(z)| \leq |f_n(z_0)| \to |f(z_0)| = 0.$$

Luego, podemos tomar $z_n \in \partial D_r(z_0)$ tales que $f_n(z_n) \to 0$ y, eligiendo una subsucesión, podemos suponer que z_n converge a cierto $z \in \partial D_r(z_0)$. Se cumple entonces que

$$|f(z)| \leq |f(z) - f(z_n)| + |f(z_n) - f_n(z_n)| + |f_n(z_n)| \to 0,$$

lo que es absurdo porque f no se anula en $\partial D_r(z_0)$. □

Tal como ocurrió con Montel, el "contraejemplo" anterior se arruina al reemplazar x por z: cuando tomamos $f_n(z) = z^2 + \frac{1}{n}$, la hipótesis de que f_n no se anula para ningún es falsa en cualquier entorno de 0. El teorema tiene una consecuencia inmediata que nos va a resultar útil:

Corolario 6.2.2. *Sean $U \subset \mathbb{C}$ conexo y $f_n, f : U \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de U. Si f_n es inyectiva para todo n, entonces f es inyectiva o constante.*

Demostración: Supongamos que $f(a) = f(b)$ para ciertos $a \neq b$ y consideremos las funciones $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$ y $g(z) := f(z) - f(a)$. Si f no es constante, entonces (usando que U es conexo) se ve que $g \not\equiv 0$ en ningún abierto no vacío. Tomemos ahora $r > 0$ tal que los discos $D_r(a)$ y $D_r(b)$ son disjuntos. Como g se anula en $D_r(a)$, por el teorema anterior existe una subsucesión de funciones $\{g_{n_j}\}$ que se anulan en cierto $z_{n_j} \in D_r(a)$. A su vez, como g se anula en $D_r(b)$, existe una subsucesión $\{g_{n_{j_k}}\}$ que se anula en cierto $w_{n_{j_k}} \in D_r(b)$, es decir:

$$f_{n_{j_k}}(z_{n_{j_k}}) - f(a) = 0 = f_{n_{j_k}}(w_{n_{j_k}}) - f(a).$$

De aquí se deduce que $f_{n_{j_k}}(z_{n_{j_k}}) = f_{n_{j_k}}(w_{n_{j_k}})$, lo que es absurdo. □

Observación 6.2.4. * Como se vio en esta sección, el concepto de convergencia uniforme sobre compactos tiene gran importancia y permite definir una topología en el conjunto $\mathcal{H}(U)$ de funciones holomorfas definidas en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$. Por empezar, ya sabemos que si $f_n \in \mathcal{H}(U)$ y f_n converge uniformemente sobre compactos a cierta f, entonces $f \in \mathcal{H}(U)$; de esta forma, los cerrados de $\mathcal{H}(U)$ se definen como aquellos conjuntos C tales que si $f_n \in C$ y $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos, entonces $f \in C$. Pero el teorema de Montel nos dice mucho más, pues nos permite caracterizar las llamadas *familias normales*, es decir, aquellas familias $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(U)$ que son relativamente compactas (dicho de otra forma: cuya clausura es compacta). Más adelante veremos que este espacio es metrizable, es decir, su topología se puede obtener a partir de una métrica; en consecuencia, la propiedad de que una familia sea normal (en el sentido matemático, claro) equivale al hecho de que cualquier sucesión en

$\mathcal{F}$ tiene alguna subsucesión convergente en $\mathcal{H}(U)$. Y esto, Montel mediante, equivale a decir que los elementos de $\mathcal{F}$ están uniformemente acotados sobre compactos. En particular, como cualquier sucesión de Cauchy es acotada, se deduce que $\mathcal{H}(U)$ es completo.

6.3. ¡Que viva la raíz cuadrada!

En esta sección completaremos por fin la demostración del teorema de Riemann. Si un abierto $U \subsetneq \mathbb{C}$ tiene la propiedad de la raíz cuadrada, ya sabemos meterlo dentro de $D_1(0)$, así que nos alcanza con probar el resultado para $U \subset D_1(0)$. Para esto, veamos primero un último enunciado preliminar:

Lema 6.3.1. *(Koebe) Sea $U \subsetneq D_1(0)$ abierto tal que $0 \in U$. Si U tiene la propiedad fuerte de la raíz cuadrada, entonces existe $r : U \to D_1(0)$ holomorfa inyectiva tal que $r(0) = 0$ y $|r(z)| > |z|$ para todo $z \neq 0$.*

Demostración: Dado $w \in D_1(0) \backslash U$, fijemos z_0 tal que $z_0^2 = -w$. Definimos

$$g(z) := T_{-w}\left(T_{-z_0}(z)^2\right),$$

donde, para $a \in D_1(0)$, la función $T_a : D_1(0) \to D_1(0)$ es la homografía $T_a(z) := \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ que, como sabemos, verifica:

$$T_a(0) = -a, \qquad T_a(a) = 0, \qquad T_a^{-1} = T_{-a}.$$

De esta forma, se ve que

$$g(0) = T_{-w}(z_0^2) = T_{-w}(-w) = 0$$

y, además, g no es biyectiva; luego, el lema de Schwarz nos asegura que $|g(z)| < |z|$ para $z \neq 0$. Esto no parece muy auspicioso, porque es justo al revés de lo que queríamos, pero... ¡paciencia! La idea es construir r como una inversa a derecha de esta función g, es decir, tal que $g(r(z)) = z$ para todo $z \in U$ y, de esta manera,

$$|z| = |g(r(z))| < |r(z)|$$

para todo $z \neq 0$. Bien mirado, el procedimiento es bastante obvio, pues buscamos $r(z)$ tal que

$$T_{-w}\left(T_{-z_0}(r(z))^2\right) = z,$$

o bien

$$T_{-z_0}(r(z))^2 = T_w(z).$$

Pero la función T_w no se anula en U, de modo que existe h tal que $h(z)^2 = T_w(z)$ para todo $z \in U$. Además, como $h(0)^2 = T_w(0) = -w$, podemos elegir h de manera tal que $h(0) = z_0$. luego, alcanza con definir $r(z) := T_{z_0}(h(z))$. Observemos, por si quedaban dudas, que $r(0) = T_{z_0}(z_0) = 0$ y además r es inyectiva, justamente porque es una inversa a derecha de g. En efecto, si $r(z_1) = r(z_2)$ entonces $z_1 = g(r(z_1)) = g(r(z_2)) = z_2$. $\square$

Observación 6.3.2. La hipótesis de que $U \neq D_1(0)$ no solo fue útil para la demostración sino que es necesaria: en efecto, por el lema de Schwarz sabemos que para $U = D_1(0)$ no puede existir tal función r.

Observación 6.3.3. * Quien haya seguido atentamente los pasos de la demos-tración previa podrá advertir que no hacía falta invocar la propiedad fuerte de la raíz cuadrada, pues alcanzaba con la "débil". En efecto, para el caso específico de T_w alcanza con tener una raíz cuadrada para el numerador $z - w$ y otra para el denominador $1 - \overline{w}z$, que se puede escribir como $-\overline{w}\left(z - \frac{1}{\overline{w}}\right)$. Pero, al fin y al cabo, nada de esto importa mucho porque, al final del día, ambas propiedades son equivalentes.

Tal como anticipamos, la siguiente proposición es la que hace el trabajo pesado en el teorema de Riemann:

Proposición 6.3.1. *Sea $U \subset D_1(0)$ abierto conexo tal que $0 \in U$. Si U tiene la propiedad fuerte de la raíz cuadrada, entonces existe $f : U \to D_1(0)$ holomorfa biyectiva tal que $f(0) = 0$.*

<u>*Demostración*</u>: Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de funciones $f : U \to D_1(0)$ holomorfas e inyectivas tales que $f(0) = 0$, entre las que ocupa un honroso lugar la inclusión $z \mapsto z$. Dado $b \in U \backslash \{0\}$, llamamos

$$\kappa := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(b)| \in (0, 1].$$

Tomemos ahora una sucesión $f_n \in \mathcal{F}$ tal que $|f_n(b)| \to \kappa$. Por el teorema de Montel, eligiendo una subsucesión podemos suponer que $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre compactos a cierta $f : U \to \mathbb{C}$, que es holomorfa y verifica $f(0) = 0$. Además, por el Corolario 6.2.2, f resulta inyectiva, ya que $|f(b)| = \kappa > 0 = f(0)$ y, en particular, f no es constante. Como $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in U$, por módulo máximo se deduce que $|f(z)| < 1$, es decir, $f \in \mathcal{F}$. Supongamos ahora que $f(U) \neq D_1(0)$; en tal caso, el conjunto $f(U) \subsetneq D_1(0)$ tiene la propiedad fuerte de la raíz cuadrada y, por el lema de Koebe, existe $r : f(U) \to D_1(0)$ holomorfa inyectiva tal que $r(0) = 0$ y $|r(z)| > |z|$ para todo $z \neq 0$. Luego, la función $r \circ f : U \to D_1(0)$ es inyectiva, $r \circ f(0) = 0$ y además verifica

$$|r \circ f(b)| > |f(b)| = \kappa,$$

lo que es absurdo pues $r \circ f \in \mathcal{F}$. □

En resumen, ya tenemos todo lo que necesitábamos:

Teorema 6.3.1. (Riemann) Sea $U \subsetneq \mathbb{C}$ abierto conexo con la propiedad fuerte de la raíz cuadrada. Dado $z_0 \in U$, existe $f : U \to D_1(0)$ holomorfa biyectiva y única salvo rotaciones tal que $f(z_0) = 0$.

<u>*Demostración*</u>: Como anticipamos, la unicidad se obtiene a partir del Lema de Schwarz: si g es otra función que cumple la tesis del teorema, entonces la función $g \circ f^{-1} : D_1(0) \to D_1(0)$ es holomorfa, biyectiva y vale $g \circ f^{-1}(0) = 0$. Esto implica que $g \circ f^{-1}(z) = cz$ para todo z, con $|c| = 1$; luego, escribiendo $w = f^{-1}(z)$ se deduce que $g(w) = cf(w)$ para todo $w \in U$. Para probar la existencia, empleando el Lema 6.1.2 tenemos una función holomorfa e inyectiva $g : U \to D_1(0)$ tal que $g(z_0) = 0$. Si g no es suryectiva, aplicando la proposición previa

tenemos $h : g(U) \to D_1(0)$ holomorfa biyectiva tal que $h(0) = 0$ y, en consecuencia, $f := h \circ g$ cumple lo pedido. $\square$

Esto termina de despejar cualquier duda que podría haber quedado respecto de la Proposición 5.6.2: si $U \subsetneq \mathbb{C}$ es un abierto conexo tal que todo lazo es homólogo a 0, entonces cumple la propiedad fuerte de la raíz cuadrada y, en consecuencia, es conformemente equivalente al disco unitario. De esta forma, U es simplemente conexo y no se discute más.

Ya que hablamos tanto de la propiedad fuerte de la raíz cuadrada, ¿qué ocurre en el caso $U = \mathbb{C}$? Ahora no se puede usar el teorema de Riemann, pero las equivalencias del Teorema 4.1 siguen vivitas y coleando. En particular, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ es holomorfa, entonces tiene que existir una raíz cuadrada holomorfa de f. Y también podemos rescatar otra propiedad importante, que teníamos algo olvidada: el mismo teorema dice que existe una rama holomorfa de $\log(f(z))$. Aunque se trate de algo sencillo, el resultado merece ser elevado al rango de proposición y, a modo de repaso, podemos volver a demostrarlo:

Proposición 6.3.2. *Sea f entera tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces existen funciones enteras g y h tales que*

$$g(z)^2 = f(z), \qquad e^{h(z)} = f(z) \qquad z \in \mathbb{C}.$$

<u>*Demostración*</u>: La función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ es entera y, en consecuencia, tiene una primitiva $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $e^{h(0)} = f(0)$. Derivando, se verifica que

$$\left(f(z)e^{-h(z)} \right)' = f'(z)e^{-h(z)} - f(z)e^{-h(z)} \frac{f'(z)}{f(z)} \equiv 0,$$

de modo que $f(z)e^{-h(z)} \equiv f(0)e^{-h(0)} = 1$. Para definir una raíz cuadrada, alcanza con tomar $g(z) := e^{\frac{h(z)}{2}}$. $\square$

Ejemplo 6.3.4. Lo anterior tiene algunas aplicaciones interesantes, por ejemplo: si f y g son funciones enteras tales que $f(z)^2 + g(z)^2 = 1$ para todo z, entonces existe una función entera h tal que $f(z) = \cos(h(z))$ y $g(z) = \operatorname{sen}(h(z))$. Todo hace pensar que sería una locura intentar despejar una función holomorfa h a partir de las igualdades, pero podemos asumir su existencia con el mayor de los optimismos y ver qué propiedades debe cumplir. Concretamente, queremos que valga $e^{ih(z)} = f(z) + ig(z)$, y aquí es donde nos topamos con las bondades de la hipótesis: en efecto, la identidad $1 \equiv f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$ nos garantiza que las funciones $f \pm ig$ no pueden valer 0. Luego, la proposición previa dice que $f(z) + ig(z) = e^{\tilde{h}(z)}$ para cierta función holomorfa $\tilde{h}$, lo que permite definir $h(z) := -i\tilde{h}(z)$. Resta ahora convencernos de que todo funciona bien, aunque ya casi estamos, pues también vale

$$e^{-ih(z)} = \frac{1}{f(z) + ig(z)} = \frac{f(z) - ig(z)}{f(z)^2 + g(z)^2} = f(z) - ig(z)$$

y a partir de la identidad previa se deduce que

$$e^{ih(z)} + e^{-ih(z)} = 2f(z), \qquad e^{ih(z)} - e^{-ih(z)} = 2ig(z),$$

es decir,

$$f(z) = \cos(h(z)), \qquad g(z) = \operatorname{sen}(h(z)).$$

Otra consecuencia inmediata del teorema de Riemann es la siguiente:

Corolario 6.3.1. *Sean $U, V \subsetneq \mathbb{C}$ abiertos no vacíos simplemente conexos. Entonces existe $f : U \to V$ holomorfa biyectiva.*

La pregunta es: ¿se puede generalizar esto para dominios con agujeros? Supongamos, por ejemplo, que tanto U como V tienen exactamente un agujero, ¿serán conformemente equivalentes? El siguiente ejemplo muestra que no. Para simplificar la notación, los conjuntos de números complejos cuyo módulo es mayor/menor que cierto $r \geq 0$ se escribirán respectivamente como

$$\{|z| > r\}, \qquad \{|z| < r\}.$$

De la misma forma, el anillo $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ pasará a escribirse directamente $\{r < |z| < R\}$.

Ejemplo 6.3.5. * (tomado del libro de Ahlfors [1]) Para $j = 1, 2$, consideremos los anillos

$$A_j := \{r_j < |z| < R_j\}$$

para ciertos $R_j > r_j > 0$. Entonces existe $f : A_1 \to A_2$ holomorfa biyectiva si y solo si $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.

$\Longleftarrow$) Alcanza con tomar $f(z) = \frac{r_2}{r_1} z$.

$\Longrightarrow$) Observemos que si existe tal f, entonces la función $g(z) := \frac{f(r_1 z)}{r_2}$ es una biyección entre $\{1 < |z| < \frac{R_1}{r_1}\}$ y $\{1 < |z| < \frac{R_2}{r_2}\}$. En otras palabras, se puede suponer que $r_1 = r_2 = 1$. Dado $r \in (1, R_1)$, llamemos $M_r := \max_{|z|=r} |f(z)|$. Por los principios de módulo máximo y módulo mínimo, vale $M_r \in (1, R_2)$. Observemos además que, como el conjunto $f(\{1 < |z| < r\})$ es conexo, está contenido en una de las componentes conexas de $A_2 \backslash f(\{|z| = r\})$. Componiendo si hace falta con la aplicación $z \mapsto \frac{R_2}{z}$, se puede suponer que

$$f(\{1 < |z| < r\}) \subseteq \{1 < |z| < M_r\}. \tag{6.1}$$

Veamos que si $|z_n| \to 1$, entonces $|f(z_n)| \to 1$. En efecto, en caso contrario, tomando una subsucesión podemos suponer $f(z_n) \to w$ con $1 < |w| < M_r$ y luego $z_n \to f^{-1}(w)$, lo que es absurdo. Del mismo modo, se ve que si $|z_n| \to R_1$ entonces $|f(z_n)| \to R_2$. Esto quiere decir, en particular, que

$$\lim_{r \to 1^+} M_r = 1, \qquad \lim_{r \to R_1^-} M_r = R_2.$$

Ahora consideremos, para $p, q \in \mathbb{Z}$ arbitrarios, la función $g(z) := \frac{f(z)^p}{z^q}$, que es holomorfa y entonces, para $\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2$ se verifica:

$$|g(z)| \leq \max\left\{ \frac{M_{\rho_1}^p}{\rho_1^q}, \frac{M_{\rho_2}^p}{\rho_2^q} \right\}.$$

En particular, si $|z| = r$ para cierto $r \in (1, R_1)$ fijo, entonces tomando $\rho_1 \to 1^+$ y $\rho_2 \to R_1^-$ se deduce que

$$\frac{|f(z)|^p}{r^q} = |g(z)| \leq \text{máx}\left\{1, \frac{R_2^p}{R_1^q}\right\}$$

y, elegiendo z tal que $|f(z)| = M_r$ obtenemos:

$$M_r \leq \text{máx}\left\{r^{q/p}, \frac{r^{q/p}}{R_1^{q/p}} R_2\right\}.$$

Ahora llamemos $\alpha := \frac{\ln(R_2)}{\ln(R_1)}$, de modo que $R_1^\alpha = R_2$ y tomemos $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ tales que $\frac{q_n}{p_n} \to \alpha$. La desigualdad anterior nos dice que

$$M_r \leq \text{máx}\left\{r^\alpha, \frac{r^\alpha}{R_1^\alpha} R_2\right\} = r^\alpha.$$

Como esto vale para cualquier r, deducimos que $|f(z)| \leq |z|^\alpha$ para todo $z \in A_1$. De la misma forma, usando que $f^{-1} : A_2 \to A_1$ es biyectiva se obtiene $|f^{-1}(w)| \leq |w|^{1/\alpha}$ para todo $w \in A_2$, es decir, $|z| \leq |f(z)|^{1/\alpha}$ para todo $z \in A_1$. La conclusión es que $|f(z)| = |z|^\alpha$ para todo z.

Finalmente, dado $z_0 \in A_1$ podemos fijar una rama del logaritmo definida en un disco D centrado en z_0. Llamemos $h(z) := e^{\alpha \log(z)}$, entonces vale $\left|\frac{f(z)}{h(z)}\right| = 1$ en D, lo que muestra que $\frac{f(z)}{h(z)} \equiv c$, con $|c| = 1$. Esto implica que $f'(z)h(z) = f(z)h'(z)$, de donde

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha}{z}.$$

Notemos que, si bien la elección de h es local, esta última fórmula vale para todo $z \in A_1$ y, en consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{\alpha}{z}\, dz = \alpha.$$

Pero el término de la izquierda no es otra cosa que el índice de la curva $f \circ \gamma$ respecto del origen, donde $\gamma(t) = re^{it}$, lo que prueba que $\alpha \in \mathbb{Z}$. En particular, sea quién sea z_0, vale $h(z) = z^\alpha$. Por lo anterior, se deduce que $\frac{f(z)}{z^\alpha}$ coincide localmente con una constante de módulo 1, de modo que $f(z) = cz^\alpha$ con $|c| = 1$. Finalmente, como f es inyectiva, usando (6.1) concluimos que $\alpha = 1$. Esto nos dice (como queríamos) que $R_= R_2$ y, más aún, que f es una vulgar rotación (lo de “vulgar” es solo para ponerle un poco más de dramatismo al asunto).

A modo de curiosa nota final, cabe observar que el teorema de Riemann tampoco vale en un territorio sensiblemente más pedregoso: el de funciones de varias variables complejas. Por ejemplo (aunque no es trivial), se puede probar que la bola unitaria de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ no es conformemente equivalente a la bola unitaria de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$... tomando, claro está, métricas diferentes. Más precisamente, si consideramos los conjuntos

$$B := \{(z, w) : |z|^2 + |w|^2 < 1\}$$

y

$$D^2 := D \times D = \{(z, w) : |z|, |w| < 1\},$$

el primero es la bola (hecha y derecha) de $\mathbb{R}^4$ mientras que el otro se suele llamar *polidisco* (en este caso con "poli"$= 2$). Si bien se trata de abiertos simplemente conexos homeomorfos, no existe un difeomorfismo conforme entre ellos.

Capítulo 7

Series de Laurent y teoría de residuos

7.1. Singularidades aisladas

Tiempo atrás, todavía en la edad de la inocencia, estábamos preparando el terreno para probar que toda función holomorfa es analítica. Con tal loable objetivo en el horizonte, demostramos una "generalización técnica" del teorema de Cauchy que, según anunciamos, en realidad no generalizaba nada. Pero esto, claro, lo sabemos con el diario del lunes en la mano: en su momento, para probar la fórmula homónima, resultó crucial saber que el teorema sigue valiendo si asumimos que $f : U \to \mathbb{C}$ es continua y holomorfa en $U \backslash \{z_0\}$ para cierto $z_0 \in U$. Poco después nos vinimos a enterar de que una función así también es derivable en z_0, hecho que podemos tomar con el mejor de los ánimos: "Ah, se trata de una *singularidad evitable*". Pero, hilando más fino, gracias al Corolario 4.2.4 sabemos que esto sigue valiendo incluso bajo una hipótesis más débil que la continuidad: si $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y vale

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

entonces f se extiende a una función holomorfa definida en U. Esto implica, en particular, que $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es finito, cosa que nos lleva a preguntar: ¿Qué pasa si el límite es infinito? ¿Y si no existe? Como veremos, cada una de las distintas situaciones corresponde a un tipo distinto de singularidad. Antes de pasar a las definiciones, pensemos qué ocurre en una situación más general que la anterior, cuando

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^r f(z) = 0$$

para algún $r > 0$. El caso $r \leq 1$ ya lo conocemos, es la singularidad evitable; para $r > 1$, podemos escribir $r = k+\alpha$ con $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in (0, 1]$; de esta forma, la función $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ verifica

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)g(z) = 0,$$

y luego se extiende a una función holomorfa $h(z)$. En otras palabras, f se puede escribir en la forma $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k}$, donde h es una función holomorfa. Si k es mínimo (o, equivalentemente, si $h(z_0) \neq 0$), se dice que z_0 es un polo de orden k de la función f. Esto motiva la siguiente

Definición 7.1.1. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y $z_0 \in U$. Dada $f : U \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa, se dice que z_0 es una singularidad aislada de f. Si existe $k \in \mathbb{N}_0$ mínimo tal que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) = 0,$$

decimos que z_0 es

- una singularidad evitable, si $k = 0$,
- un polo de orden k, si $k > 0$.

En caso contrario, se dice que z_0 es una singularidad esencial de f.

En virtud de los comentarios anteriores, se ve que si z_0 es un polo de orden k, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{(z - z_0)^k} = \infty$$

Esta situación se da, por ejemplo, cuando U es conexo y $f := \frac{1}{g}$, donde $g : U \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante. Si $g(z_0) = 0$, entonces z_0 es aislado y tiene orden finito, de modo que la función f es holomorfa en $D_r(z_0) \backslash \{z_0\}$ para cierto $r > 0$ y tiene un polo en z_0. Más en general, si $g, h : U \to \mathbb{C}$ son holomorfas y h es no constante, entonces la función $f := \frac{g}{h}$ está definida en $U \backslash S$, donde S es el conjunto (discreto) de ceros de h. Los elementos de S son singularidades de f, todas evitables o polares. Una función con esta propiedad se llama *meromorfa*; puede verse, aunque no es trivial, que las funciones meromorfas siempre se pueden escribir como cociente de funciones holomorfas. Más adelante probaremos esta propiedad para $U = \mathbb{C}$.

Ahora, ¿qué ocurre con las singularidades esenciales? En la definición anterior parecen solamente un descarte: “Y bueh, a las que no son evitables o polos las vamos a llamarlas esenciales”. Sin embargo, el siguiente resultado nos muestra que se las puede caracterizar de una manera muy razonable y, como veremos, la esencialidad es más esencial de lo que pensábamos. Antes de enunciarlo, veamos lo que ocurre en el más típico de los ejemplos, la función $f(z) = e^{1/z}$. El hecho de que la singularidad en 0 es esencial se desprende directamente de la definición; una mirada más profunda del comportamiento de f cerca del origen nos va a convencer de que “acá pasan cosas raras”. En efecto, observemos que, para cualquier $\varepsilon > 0$, la imagen del conjunto $D_\varepsilon(0) \backslash \{0\}$ es $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Sin duda, esto se puede ver resolviendo la ecuación $e^{1/z} = a$ para cualquier $a \neq 0$: como exponencial es $2\pi i$-periódica, a partir de una solución z_0 obtenemos infinitas: específicamente, resolviendo la ecuación $\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0} + 2n\pi i$ obtenemos, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, una solución dada por

$$z_n = \frac{z_0}{1 + 2n\pi i z_0} \to 0 \qquad n \to \pm\infty.$$

Pero, mejor aún, para $w = \frac{1}{z}$ y $g(w) = e^w$, la periodicidad dice, justamente, que la imagen de g es la misma sobre cualquier franja horizontal de altura 2π, entonces alcanza con observar que el conjunto $\{|w| > \frac{1}{\varepsilon}\}$ contiene infinitas de tales franjas. Dejando de lado esta justificación "geométrica", podemos ver que, en el fondo, este comportamiento es el que cabe esperar en presencia deuna singularidad esencial:

Teorema 7.1.1. (Weierstrass-Casorati) Sea $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa y supongamos que z_0 es una singularidad esencial. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ tal que $D_\varepsilon(z_0) \subset U$ el conjunto $f(D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\})$ es denso en $\mathbb{C}$.

En otras palabras, es como si la función estallara en z_0 pues la imagen de cualquier disco punteado centrado en z_0, por pequeño que sea, se esparce por todo $\mathbb{C}$.[1] Más allá de la imagen poética (por así decirlo), no está de más mencionar que hay otro resultado -de un tal Picard, el mismo que mencionamos en la Observación 4.5.2- según el cual siempre vale en realidad lo que vimos para $f(z) = e^{1/z}$: la imagen de cualquiera de tales discos punteados es todo $\mathbb{C}$ salvo, a lo sumo, un punto. Pero esto es más difícil, así que por ahora nos contentaremos con demostrar el Teorema de Weierstrass y Casorati, que no es poca cosa:

Demostración del Teorema 7.1.1: Supongamos que para cierto $\varepsilon > 0$ la imagen de $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ no es densa, vale decir, existen $r > 0$ y $w \in \mathbb{C}$ tales que $f(D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}) \cap D_r(w) = \emptyset$. Entonces la función $g(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ es holomorfa en $D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}$ y verifica $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$ para $0 < |z - z_0| < \varepsilon$. A su vez, esto implica que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)g(z) = 0,$$

de modo que z_0 es una singularidad evitable de g. Además, g no es constante en $D_\varepsilon(z_0)$, de modo que podemos escribir $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, con $k \in \mathbb{N}_0$ y h holomorfa tal que $h(z_0) \neq 0$. Esto implica que

$$f(z) = w + \frac{1}{(z - z_0)^k h(z)},$$

se deduce que $(z - z_0)^{k+1} f(z) \to 0$ para $z \to z_0$, lo que es absurdo. □

Una consecuencia directa del teorema anterior es el hecho de que, en una singularidad esencial, el límite no puede existir; tal como ocurre con $e^{1/z}$, en la imagen podemos encontrar sucesiones que se aproximen a cualquier valor prefijado:

Corolario 7.1.1. *Sea z_0 una singularidad esencial de f y sea $w \in \hat{\mathbb{C}}$. Entonces existe $z_n \to z_0$ tal que $f(z_n) \to w$.*

Demostración: Si $w \in \mathbb{C}$, de acuerdo con el teorema anterior podemos tomar $z_n \in D_{1/n}(z_0)\backslash\{z_0\}$ tal que $f(z_n) \in D_{1/n}(w)$. Si $w = \infty$, alcanza con tomar $z_n \in D_{1/n}(z_0)\backslash\{z_0\}$ tal que $f(z_n) \in D_1(n)$. □

En definitiva, esto completa la caracterización:

[1] De acuerdo con la convención habitual, se llama disco punteado de radio r centrado en z_0 al conjunto $\{0 < |z - z_0| < r\}$.

Proposición 7.1.1. *Sea z_0 una singularidad aislada de f, entonces:*

- z_0 *es evitable* $\iff$ *existe* $\lim_{z\to z_0} f(z)$ *y es finito.*
- z_0 *es un polo* $\iff$ $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.
- z_0 *es esencial* $\iff$ *no existe* $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Demostración: La primera equivalencia ya la sabíamos. Como vimos, la definición de polo implica que el límite es infinito y, recíprocamente, cuando el límite es infinito no puede tratarse de una singularidad evitable ni (por Weierstrass-Casorati) tampoco esencial. □

A partir de lo anterior se observa que si z_0 es un polo de orden k, entonces en un entorno de z_0 la función se escribe en la forma

$$f(z) = \sum_{n\geq -k} a_n (z-z_0)^n$$

donde ¡vaya sorpresa! los coeficientes tienen exactamente el aspecto que esperamos:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

para cualquier $r > 0$ suficientemente chico. Y la explicación no requiere emplear nada que no sepamos: alcanza con escribir

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} = \sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^{n-k},$$

donde

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz.$$

Llamando $a_n := b_{n+k}$ se obtiene la fórmula anterior. La pregunta del millón es: ¿qué pasará cuando la singularidad es esencial? ¿Series doblemente infinitas, quizás? Todo llegará, a su debido tiempo; antes de ocuparnos de esta cuestión vamos a definir otro tipo de singularidad aislada que también tiene su importancia:

Definición 7.1.2. Se dice que una función f tiene una singularidad aislada en ∞ si existe R tal que f es holomorfa en $\{|z| > R\}$.

La clasificación de estas singularidades se apoya en lo que ya vimos; simplemente consideramos la función $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$, que es holomorfa en $D_{1/R}(0)\backslash\{0\}$ y decimos:

- ∞ es una singularidad evitable de f si y solo si 0 es singularidad evitable de g.
- ∞ es un polo de orden k de f si y solo si 0 es un polo de orden k de g.
- ∞ es una singularidad esencial de f si y solo si 0 es singularidad esencial de g.

Un caso particular de funciones que tienen una singularidad aislada en ∞ es el de las funciones enteras, para cuyo análisis contamos con una herramienta muy buena:

Proposición 7.1.2. *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si ∞ es una singularidad evitable o un polo, entonces f es un polinomio.*

Demostración: Escribiendo $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ y $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$, el hecho de que $z^k g(z)$ se extienda a una función holomorfa significa que, cerca de $z = 0$ vale $|z^k g(z)| \leq M$ para una constante M. En otras palabras, para $w = \frac{1}{z}$ de módulo suficientemente grande vale

$$|f(w)| \leq M|w|^k$$

y esto, Liouville (generalizado) mediante, implica que f es un polinomio de grado menor o igual que k. □

Pero, cuando se trata de funciones enteras, Weierstrass y Casorati nos tienen reservadas aún otras sorpresas; por ejemplo, que muy pocas de ellas son inversibles:

Teorema 7.1.2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa y biyectiva. Entonces f es un polinomio de grado 1.

Demostración: Consideremos como antes la función $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$. Como f es biyectiva, el conjunto $g(D_\varepsilon(0)\backslash\{0\}) = f(\{|z| > \frac{1}{\varepsilon}\})$ no es denso para ningún $\varepsilon > 0$, de modo que 0 es a lo sumo un polo de g. Esto significa que f tiene en ∞ una singularidad evitable o un polo. Por la proposición anterior, f es un polinomio y, como es una función biyectiva, necesariamente es de grado 1. □

El teorema previo recuerda aquellos tiempos en los que nos deleitábamos con el lema de Schwarz y sus gratas consecuencias. Específicamente, para el disco unitario D, vimos en primer lugar que si $f : D \to D$ es holomorfa y biyectiva tal que $f(0) = 0$, entonces es una rotación. Pero luego, más en general, dejando de lado la hipótesis de que el 0 queda fijo, probamos que, salvo rotaciones, f tiene que ser una de esas homografías $T_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ con $|a| < 1$, que tan útiles resultaron para probar el teorema de Riemann. Claramente, en tal caso f se extiende a $\overline{D}$ y vale $f(\partial D) \subset \partial D$, lo que nos motiva a preguntarnos cómo son, en general, las transformaciones del disco cerrado para las cuales el borde es un conjunto invariante.

Ejercicio 15. Sea $f : \overline{D} \to \overline{D}$ continua y holomorfa en D tal que $f(\partial D) \subset \partial D$. Entonces f es una función racional, es decir, $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ para ciertos polinomios p y q. **Sugerencia**: ver que f tiene un número finito de ceros $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset D$ y mostrar que la función $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, con

$$g(z) := \prod_{j=1}^{n} T_{a_j}(z)^{k_j}$$

donde k_j es la multiplicidad de a_j, es constante.

Se puede objetar que este ejercicio se encuentra medio desubicado, ya que podría haber estado en la sección dedicada al módulo mínimo (¡uh, qué spoilazo!). Pero el objetivo era preparar el terreno para una situación análoga que se va a presentar a partir de la próxima definición. El contexto general es el de las ya mencionadas funciones meromorfas, que ahora podemos definir con más precisión:

Definición 7.1.3. 1. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Se dice que f es una función meromorfa en U si existe $S \subset U$ discreto tal que $f : U \backslash S \to \mathbb{C}$ es holomorfa y todos los elementos de S son a lo sumo polos de f.

2. f se dice meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ si existe $S \subset \mathbb{C}$ finito tal que $f : \mathbb{C} \backslash S \to \mathbb{C}$ es holomorfa y todos los elementos de $S \cup \{\infty\}$ son a lo sumo polos.

Por supuesto, podemos suponer de una vez que los elementos de S son polos, ignorando olímpicamente el "a lo sumo", pues las singularidades evitables se pueden -precisamente- evitar. Y cabe decir también que, cuando S es finito, la definición anterior no esconde mayores misterios: si cada polo z_j tiene multiplicidad k_j, entonces la función

$$g(z) := \prod_{z_j \in S} (z - z_j)^{k_j} f(z)$$

es (se extiende a) una función holomorfa, de modo que la función original se escribe en la forma $f(z) = \frac{g(z)}{q(z)}$, donde q es un polinomio. Como caso especial, tenemos el de una función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, que además tiene a lo sumo un polo en ∞. Si se trata de una singularidad evitable, esto quiere decir que $f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene límite finito para $z \to 0$. De esta forma, la función (entera) g verifica que $|g(w)| \leq C|q(w)|$ para $|w| \gg 0$, es decir: g es un polinomio. En cambio, si f tiene un polo en ∞, entonces vale

$$g\left(\tfrac{1}{z}\right) = f\left(\tfrac{1}{z}\right) q\left(\tfrac{1}{z}\right) \to \infty$$

para $z \to 0$, de modo que g tiene un polo en ∞ y, otra vez, concluimos que g es un polinomio. En definitiva, hemos probado lo siguiente:

Proposición 7.1.3. *Si f es una función meromorfa en $\hat{\mathbb{C}}$, entonces es una función racional.*

Siguiendo esta idea, se podría pensar en hacer lo mismo cuando S es infinito (por supuesto, numerable) y concluir que una función meromorfa es siempre un cociente de funciones holomorfas. Pero claro, hay que tener mucho cuidado, porque ahora el producto $\prod_{z_j \in S}(z - z_j)^{k_j}$ no es un polinomio: en rigor, ni siquiera está definido. Más adelante volveremos sobre este asunto.

7.2. Series de Laurent

En la sección previa mencionamos el hecho, bastante inmediato, de que si una función tiene un polo de orden k en cierto z_0, entonces cerca de allí se puede escribir en la forma $f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n$. La serie converge en $D_\rho(z_0) \backslash \{z_0\}$ para cierto $\rho > 0$ aunque, claro, esta convergencia no es uniforme. Ya estamos acostumbrados a que la serie puede converger más lentamente cuando nos acercamos a $\partial D_\rho(z_0)$ pero, además, ahora tenemos que lidiar con una singularidad en z_0. Sin embargo, la convergencia uniforme está garantizada cuando tomamos subconjuntos compactos del disco punteado $D_\rho(z_0) \backslash \{z_0\}$. La pregunta que quedó picando es: ¿qué ocurre cuando tenemos una singularidad esencial? Como ya mencionamos, un ejemplo típico es $f(z) = e^{1/z}$, que no tiene límite para $z \to 0$ y vale

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!z^n} = \sum_{n\leq 0} \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Escribirlo así puede parecer una tontería, pero se trata justamente de enfatizar que esta serie se compone de infinitos términos negativos que, en este caso, converge en todo $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. La convergencia, además, es uniforme en $\{|z| \geq r\}$ para cualquier $r > 0$, ya que la serie de la función exponencial converge uniformemente para $|w| \leq \frac{1}{r}$. En cambio, si a la función anterior le sumamos por ejemplo la serie geométrica, obtenemos una serie de términos positivos y negativos que converge en $D_1(0)\backslash\{0\}$ y uniformemente sobre $\{r \leq |z| \leq R\}$ para $0 < r < R < 1$.

En general, podemos pensar en expresiones formales del tipo

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n z^n := P(z) + N(z).$$

La serie de términos positivos tiene un radio de convergencia R, que supondremos mayor que 0; para la otra, podemos aplicar el mismo truco de antes: llamando $w = \frac{1}{z}$ tenemos

$$\sum_{n<0} a_n z^n = \sum_{n>0} a_{-n} w^n.$$

Si esta última serie tiene radio de convergencia $\rho > 0$, entonces la serie de términos negativos converge uniformemente para $|z| \geq \tilde{r}$ para cualquier $\tilde{r} > r := \frac{1}{\rho}$. Claro, podríamos tener la pésima suerte de que $r \geq R$ y quizás nuestra serie original no converge en ninguna parte; en caso contrario, f define una función holomorfa en el anillo $\{r < |z| < R\}$ y la convergencia es uniforme en $\{\tilde{r} \leq |z| \leq \tilde{R}\}$ para $r < \tilde{r} \leq \tilde{R} < R$. Cabe aclarar que al decir $R, \rho > 0$ estamos incluyendo la posibilidad de que alguno de ellos sea infinito: en particular, puede ocurrir que $r = 0$ y el anillo no sea otra cosa que un disco punteado (o el plano punteado, si también $R = \infty$).

Lo anterior nos permite concluir, además, que la serie se puede derivar término a término en $\{r < |z| < R\}$, es decir:

$$f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n a_n z^{n-1}.$$

Respecto de los términos positivos, esto no es ninguna novedad; si alguien no termina de convencerse de que la derivación vale también para los términos negativos, alcanza con escribir como antes $N(z) := g\left(\frac{1}{z}\right)$, donde $g(w)$ es una función holomorfa para $|w| < \frac{1}{r}$. De esta forma, N es holomorfa y resulta

$$N'(z) = -\frac{1}{z^2} g'\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} \sum_{n>0} n a_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} = \sum_{n<0} n a_n z^{n-1}.$$

Además, si consideramos cualquier $\tilde{r} \in (r, R)$ la convergencia uniforme también nos garantiza, para $n \in \mathbb{Z}$ fijo, que

$$\int_{|z|=\tilde{r}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{|z|=\tilde{r}} z^{n-k-1}\, dz.$$

Pero, si algo sabemos a esta altura, es calcular estas integrales: de hecho, es muy fácil porque la función z^{n-k-1} tiene primitiva en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, a menos que $k = n$. En otras palabras, en el lado derecho de la igualdad desaparece casi todo salvo el término de orden n, para el cual la integral da $2\pi i$. Esto prueba que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\tilde{r}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

como ya estábamos empezando a sospechar. Y el resultado no tiene nada de espectacular, aunque ya nos permite probar la unicidad: si en el anillo vale

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n,$$

entonces $a_n = b_n$ para todo n.

En resumen, las expresiones anteriores definen, si $r < R$, funciones holomorfas en $\{r < |z| < R\}$; recíprocamente, veamos que toda función holomorfa en un anillo cualquiera admite un desarrollo en serie, llamada *de Laurent*:

Teorema 7.2.1. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$, $r < R$ y $f : A := \{r < |z - z_0| < R\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Entonces existen únicos $a_n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n \qquad z \in A.$$

Además, para todo n y todo $\tilde{r} \in (r, R)$ vale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\tilde{r}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz. \tag{7.1}$$

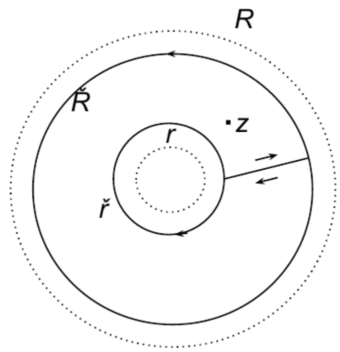
Demostración: Dado $z \in A$, fijemos $\tilde{r}$ y $\tilde{R}$ tales que $r < \tilde{r} < |z - z_0| < \tilde{R} < R$ y una curva γ como se ve en la figura.

Como $I(\gamma, z) = 1$ y las integrales sobre el segmento se cancelan, la fórmula generalizada de Cauchy dice que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{R}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{r}} \frac{f(w)}{w-z}\, dw.$$

Para la primera integral, el hecho de que $|z - z_0| < |w - z_0| = \tilde{R}$ nos permite escribir (como alguna vez hicimos):

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n.$$



Además, recordemos que, como z está fijo, la convergencia de la serie es uniforme sobre $\{|w-z_0| = \tilde{R}\}$, de modo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{R}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{R}} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw(z-z_0)^n.$$

De modo análogo, para la segunda integral usamos el hecho de que $|z-z_0| > |w-z_0| = \tilde{r}$ y entonces

$$\frac{-1}{w-z} = \frac{1}{z-z_0-(w-z_0)} = \frac{1}{z-z_0}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^k$$

y, como antes, se obtiene

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{r}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=\tilde{R}} f(w)(w-z_0)^k\,dw\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

La expresión para los términos negativos de la serie se deduce entonces llamando $n = -(k+1)$. Para concluir, observemos que la cuenta anterior (eligiendo otro segmento cuando haga falta) sirve para cualquier z tal que $\tilde{r} < |z-z_0| < \tilde{R}$. Notemos, además, que los coeficientes a_n no dependen de la elección de $\tilde{r}$ y $\tilde{R}$: alcanza con observar, por ejemplo, que todas las circunferencias $\{|w-z_0| = \rho\}$ con $r < \rho < R$ son homotópicas entre sí. De esta forma, como los valores $\tilde{r}$ y $\tilde{R}$ son arbitrarios, se deduce que la serie obtenida converge en todo el anillo A, y uniformemente sobre subconjuntos compactos de A. □

Podemos ahora volver al caso $r = 0$. Pero, ¿por qué volver? La respuesta es simple: se trata de las singularidades aisladas, que podemos caracterizar completamente en términos de los coeficientes a_n de las series de Laurent:

Proposición 7.2.1. *Sea z_0 una singularidad aislada de una función f y sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ la serie de Laurent para f en $\{0 < |z-z_0| < R\}$. Entonces se cumple:*

1. *z_0 es evitable $\Longleftrightarrow a_n = 0$ para todo $n < 0$.*
2. *z_0 es un polo de orden $k \Longleftrightarrow a_n = 0$ para todo $n < -k$ y $a_{-k} \neq 0$.*
3. *z_0 es esencial $\Longleftrightarrow a_n \neq 0$ para infinitos $n < 0$.*

Demostración: La primera equivalencia es inmediata. Para la segunda, la suficiencia se deduce del hecho de que la serie de $(z-z_0)^k f(z)$ define una función holomorfa y la necesidad se ve multiplicando la serie de Laurent por $(z-z_0)^k$, lo que define una función holomorfa que no se anula en z_0. Finalmente la tercera equivalencia se debe a que (¡vaya tontería!) no corresponde a ninguna de las dos situaciones anteriores. □

Ejemplo 7.2.1. Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ y $z_0 = 0$. En el dominio $D_1(0)$ la función es holomorfa, así que la serie no es otra que nuestra vieja conocida, la de Taylor. Para encontrarla no hace falta calcular integrales; alcanza con un poco de fracciones simples y otro poco de series geométricas:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n\geq 0} z^n,$$

es decir,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

La cuenta es diferente si consideramos ahora el anillo $\{1 < |z| < 2\}$; con-cretamente, hay que modificar el desarrollo del segundo sumando, pues ahora $|z| > 1$:

$$f(z) = \frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n<0} z^n.$$

Finalmente, para el anillo dado por $\{|z| > 2\}$ (es decir, con $R = \infty$), todo parece indicar que nos van a quedar solo términos negativos. En efecto, ahora podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{2}{z})} - \frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \sum_{n\geq 0}\frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n<0} z^n = \sum_{n<0}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

Este sencillo ejemplo nos puede tomar por sorpresa: la anterior función tiene un polo simple en $z = 1$ y en $z = 2$; ¿no contradice eso el hecho de que la serie de Laurent nos haya quedado con infinitos términos negativos? La respuesta es que no, porque las series que encontramos no estaban centradas en una singularidad sino en $z_0 = 0$. Pero si en el ejemplo elegimos $z_0 = 1$ o $z_0 = 2$, entonces es claro que nos queda un único término negativo.

7.3. Residuos

De acuerdo con lo visto sobre series de Laurent, podemos intuir que, entre todos los coeficientes, hay uno que tiene especial importancia: nos referimos al que corresponde al valor

$n = -1$, porque sirve para calcular la integral de f. Y esto no se verifica solamente para la curva $\gamma(t) = z_0 + \tilde{r}e^{it}$, como es obvio a partir de (7.1), sino para cualquier curva cerrada en el anillo pues, como mencionamos, todos los términos $a_n(z - z_0)^n$ con $n \neq -1$ tienen primitiva:

$$\int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n \, dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z - z_0} \, dz = 2\pi i a_{-1} I(\gamma, z_0). \tag{7.2}$$

Observación 7.3.1. No está de más recordar que esto último vale porque se puede conmutar la integral con el límite de la serie. El motivo es el mismo de siempre: la convergencia uniforme sobre compactos. Pero, según dijimos, esta propiedad es la que también permite derivar la serie término a término; por eso, otra forma de verlo consiste en observar que f se puede escribir en la forma

$$f(z) = g'(z) + \frac{a_{-1}}{z - z_0},$$

donde g es una función holomorfa, concretamente

$$g(z) = \sum_{n\neq-1} a_n \frac{(z - z_0)^{n+1}}{n + 1}.$$

Podemos pensar que estas últimas observaciones no constituyen logros especialmente destacables; sin embargo, hay una situación particular en el que este mágico numerito a_{-1} va a cobrar gran relevancia. Se trata (otra vez) del caso $r = 0$, vale decir, cuando z_0 es una singularidad aislada de f. ¿Y cuál es la relevancia? Que, en muchos casos, dicho coeficiente se puede obtener fácilmente y, en consecuencia, va a ser de utilidad para el cálculo de integrales. Este hecho tan feliz lo hace merecedor de un nombre propio:

Definición 7.3.2. Sea f holomorfa en $\{0 < |z - z_0| < R\}$. El coeficiente correspondiente a $(z - z_0)^{-1}$ de su serie de Laurent se llama **residuo** de la función en z_0 y se denota $\mathrm{Res}(f, z_0)$, es decir,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z) \, dz \qquad 0 < r < R.$$

Cabe preguntarse por las razones de tan curiosa denominación para un valor que, de acuerdo con lo que veremos, no tiene nada de inservible. Pero, en el fondo, la explicación es bastante clara: como ya dijimos, al integrar f sobre una curva cerrada, todos los términos de la serie desaparecen y solo queda, de manera "residual", el que corresponde al valor $n = -1$. En algunos casos, su cálculo es especialmente sencillo, por ejemplo:

$$f(z) = \frac{1}{z} \Longrightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = 1,$$

$$f(z) = e^{1/z} \Longrightarrow \mathrm{Res}(f, 0) = 1,$$

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z - 2)} \Longrightarrow \mathrm{Res}(f, 2) = -\mathrm{Res}(f, 1) = 1.$$

Sobre los dos primeros ejemplos, no hay mucho que aclarar, pues conocemos explícitamente las respectivas series de Laurent; para el tercero, es muy sencillo calcularla también. Pero ni siquiera hace falta: alcanza con escribir

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

En efecto, para $z_0 = 2$, podemos desentendernos del último término, ya que cerca del punto es una función holomorfa; lo mismo ocurre con el primer término cuando $z_0 = 1$. Pero, incluso si nos da algo de pereza hacer el cálculo de las fracciones simples, podemos observar que la función $g(z) := (z-2)f(z)$ es (se extiende a) una función holomorfa cerca de $z_0 = 2$ y vale $g(2) = \frac{1}{2-1} = 1$, que es justamente el residuo ¿Casualidad? A ver, probemos con $z_0 = 1$: ahora $g(z) = (z-1)f(z)$ y $g(1) = \frac{1}{1-2} = -1$.

La explicación de este pequeño milagro es de lo más sencilla y ocurre siempre que tengamos un polo de orden 1: en efecto, para $f(z) = \sum_{n \geq -1} a_n(z-z_0)^n$, la susodicha función $g(z) := (z-z_0)f(z)$ verifica

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-1}(z-z_0)^n \Longrightarrow g(z_0) = a_{-1}.$$

No hace falta tener una imaginación demasiado frondosa para intuir lo que ocurre cuando f tiene un polo de orden más alto:

Proposición 7.3.1. *Si f tiene en z_0 un polo de orden k, entonces*

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!},$$

donde $g(z) := (z-z_0)^k f(z)$.

Demostración: Escribiendo $\sum_{n \geq -k} a_n(z-z_0)^n$, tenemos que

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-k}(z-z_0)^n,$$

donde $a_{n-k} = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$. El resultado se deduce poniendo $n = k-1$. □

Pero entonces, ya que tenemos formas buenas de calcular el residuo -al menos cuando se trata de polos-, llega la hora de darle una aplicación bien concreta:

Teorema 7.3.1. (de los residuos, primera versión). Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : U \backslash S \to \mathbb{C}$ holomorfa, donde $S = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Si γ es una curva cerrada tal que $\gamma \sim 0$ en U y $S \cap \mathrm{Im}(\gamma) = \emptyset$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

Demostración: Cerca de cada z_j, la función se escribe en la forma $f(z) = P_j(z) + N_j(z)$. Observemos, además, que si bien la serie P_j de términos positivos converge en un entorno de z_j, la de términos negativos $N_j(z)$ define una función holomorfa en todo $\mathbb{C}\backslash\{z_j\}$. De esta forma, la función

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{n} N_j(z)$$

es (se extiende a) una función holomorfa en U, ya que

$$\lim_{z\to z_j} g(z) = \lim_{z\to z_j} \left(P_j(z) - \sum_{k\neq j} N_k(z) \right) = P_j(z_j) - \sum_{k\neq j} N_k(z_j).$$

Por el teorema de Cauchy (versión homotópica) vale $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$, de donde

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{n} \int_\gamma N_j(z)\, dz$$

y el resultado se deduce porque, como en (7.2), vale

$$\int_\gamma N_j(z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(N_j, z_j) I(\gamma, z_j) = 2\pi i \mathrm{Res}(f, z_j) I(\gamma, z_j).$$

□

Ejemplo 7.3.3. Para empezar con algo sencillito, veamos cuánto vale la integral $\int_{|z|=2} f(z)\, dz$, donde

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z+3)}.$$

Podemos formularlo al modo de los antiguos comerciales: ¿Alguna vez sintió pocas ganas de calcular fracciones simples? Entonces ¡el teorema de residuos es para usted! En efecto, aquí se trata de una función racional y podríamos encarar la tarea de buscar una primitiva, aunque es mucho más fácil observar que, en el dominio $U := D_3(0)$ la función tiene únicamente las singularidades $z = \pm 1$, que resultan polos simples y pertenecen a $D_2(0)$. El teorema asegura entonces que

$$\int_{|z|=2} f(z)\, dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, 1) + \mathrm{Res} f(-1)].$$

Pero además, por la Proposición 7.3.1 sabemos que

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{Res}(f, 1) = \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = -\frac{1}{4},$$

así que la integral vale $-\frac{\pi i}{8}$. Cabe observar que un cálculo similar se puede efectuar si ahora tomamos

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z^2-1)(z+3)},$$

para la cual las esperanzas de obtener una primitiva se desvanecen. Es claro que $z = \pm 1$ siguen siendo polos simples, pero ahora aparecen otras dos singularidades: en efecto, de la igualdad $\operatorname{sen}(z^2-1) = 0$ se obtiene $z^2 - 1 = k\pi$, que tiene soluciones en $\{|z| \leq 2\}$ para $k = 0, -1$. Es cierto que si otra vez tomamos $U = D_3(0)$ entonces aparece otra singularidad, pero no importa mucho, ya que no pertenece al interior de γ y, en consecuencia, el índice es 0. En definitiva, solo tenemos que preocuparnos por las cuatro singularidades en $D_2(0) \subset U$:

$$z = \pm 1, \pm i\sqrt{\pi - 1}.$$

El residuo en las dos primeras vale lo mismo que antes, así que al resultado anterior hay que sumarle

$$2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, i\sqrt{\pi-1}) + \operatorname{Res}(f, -i\sqrt{\pi-1})\right],$$

cuyo cálculo queda como ejercicio.

Ejemplo 7.3.4. Calcular $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$

$$f(z) = \frac{3z-1}{z \operatorname{sen} z}.$$

En principio, esto sale igual que en el ejemplo previo; la única singularidad para $|z| < \pi$ es $z = 0$, de modo que la integral sobre $\partial D_1(0)$ vale $2\pi i \operatorname{Res}(f, 0)$. La novedad es que ahora se trata de un polo de orden 2, así que debemos calcular $\operatorname{Res}(f, 0) = g'(0)$ donde $g(z) = z^2 f(z) = \frac{(3z-1)z}{\operatorname{sen} z}$. La derivada se puede obtener de la manera que más nos guste, aunque la cuenta se puede hacer un pelín más corta si observamos que

$$\int_{|z|=1} f(z)\, dz = \int_{|z|=1} \frac{3}{\operatorname{sen} z}\, dz - \int_{|z|=1} \frac{1}{z \operatorname{sen} z}\, dz.$$

¿Cuál es la ganancia? La primera integral da claramente $6\pi i$, ya que el residuo en 0 de $\frac{3}{\operatorname{sen} z}$ es $\lim_{z\to 0} \frac{3z}{\operatorname{sen} z} = 3$. Y la segunda integral da 0, como muestra el siguiente lema.

Lema 7.3.5. *Sea f una función holomorfa definida en $D_r(0)\backslash\{0\}$. Si f es par, entonces la serie de Laurent centrada en 0 tiene solamente términos de orden par. En particular,* $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$.

Demostración: Para ver que que los términos impares son nulos, alcanza con integrar la función $g(z) := \frac{f(z)}{z^{2k}}$ para cierto $\rho \in (0, r)$. En efecto, se verifica que

$$\int_{|z|=\rho} g(z)\, dz = i\rho \left(\int_0^\pi g(\rho e^{it}) e^{it}\, dt + \int_0^\pi g(\rho e^{i(t+\pi)}) e^{i(t+\pi)}\, dt \right)$$

$$= i\rho \left(\int_0^\pi g(\rho e^{it}) e^{it}\, dt - \int_0^\pi g(-\rho e^{it}) e^{it}\, dt \right) = 0,$$

ya que g es par. $\square$

Una demostración alternativa del lema previo, quizás más interesante, consiste en mostrar directamente que $f(z) = h(z^2)$ para cierta función h holomorfa en $V := D_{r^2}(0)\backslash\{0\}$. Tal función se puede obtener, de manera un tanto temeraria, como $h(w) = f(\sqrt{w})$ para alguna raíz cuadrada. Por supuesto, esto suena a sacrilegio, ya que no hay rama holomorfa de la raíz cuadrada definida en todo el disco punteado; sin embargo, la paridad viene en nuestra ayuda. Por ejemplo, si $\sqrt{w}$ es la rama principal, definida en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ y s es otra rama, definida ahora en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces para para $w \in V\backslash\mathbb{R}$ vale $\sqrt{w} = \pm s(w)$ y, en consecuencia, $f(\sqrt{w}) = f(s(w))$. Esto muestra que la función definida en V como

$$h(w) := \begin{cases} f(\sqrt{w}) & w \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \\ f(s(w)) & w \in \cap\mathbb{R}_{<0} \end{cases}$$

es holomorfa, pues cerca de cualquier $w < 0$ coincide con $f \circ s$.

Como vimos, el teorema de los residuos se verifica para una función holomorfa en un abierto, salvo un conjunto finito S de singularidades aisladas. Pero, según anticipamos, el resultado sigue valiendo, sin cambiar ni una coma, aún en caso de que S sea infinito; aunque esto ocurra, el término que involucra los residuos sigue siendo una suma finita. Para enfatizar este hecho, podemos escribirlo de la siguiente forma:

Teorema 7.3.2. (de los residuos, segunda versión). Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $f : U\backslash S \to \mathbb{C}$ holomorfa, donde S es un conjunto discreto. Si γ es una curva cerrada tal que $\gamma \sim 0$ en U y $S \cap \mathrm{Im}(\gamma) = \emptyset$, entonces $S \cap \mathrm{Int}(\gamma)$ es finito y vale

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in S \cap \mathrm{Int}(\gamma)} \mathrm{Res}(f, z) I(\gamma, z).$$

<u>*Demostración*</u>: Sea h una homotopía entre γ y una constante, entonces $\mathrm{Im}(h)$ es compacto, de modo que $\mathrm{Im}(h) \cap S$ es finito. Por otra parte, si $w \notin \mathrm{Im}(h)$ entonces la función $g(z) = \frac{1}{z-w}$ es holomorfa en un entorno de $\mathrm{Im}(h)$; luego, $\int_\gamma g(z)\, dz = 0$, es decir, $I(\gamma, w) = 0$. En otras palabras, $\mathrm{Int}(\gamma) \subset \mathrm{Im}(h)$. En consecuencia, podemos fijar un abierto $\tilde{U} \subset U$ tal que $\mathrm{Im}(h) \subset \tilde{U}$ y $\tilde{U}$ no contiene otros elementos de S; de esta forma, el resultado se deduce aplicando la primera versión del teorema. $\square$

En definitiva, esta segunda versión no es más que una luz verde para aplicar la fórmula, sin preocuparse por la cantidad de singularidades aisladas que tenga la función: por más que sean infinitas, solo una cantidad finita de ellas queda encerrada en el interior de la curva. Tal es la situación, por ejemplo de una función como $f(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}(z)}$, con polos simples en $z_k = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Luego, para cualquier $r > 0$ tal que $r \neq k\pi$ vale

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{\mathrm{sen}(z)}\, dz = 2\pi i \sum_{|k\pi|<r} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Pero

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to k\pi} \frac{z - k\pi}{\mathrm{sen}\ z} = (-1)^k,$$

de modo que la integral vale $\pm 2\pi i$, según sea la parte entera de $\frac{r}{\pi}$ un número par o impar.

Una ligera modificación del ejemplo previo nos muestra una situación de gran importancia para los resultados que veremos a continuación. Consideremos ahora la función $f(z) = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$ y r como antes. Los polos son los mismos z_k, nada más que ahora vale

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \lim_{z \to k\pi} \frac{(z - k\pi)\cos z}{\operatorname{sen} z} = 1$$

para todo k. De esta forma, la integral sobre $\{|z| = r\}$ da por resultado $2\pi i$ multiplicado por $2k+1$, que es la cantidad de ceros que tiene el denominador $\operatorname{sen} z$ en $D_r(0)$. Esto no es casualidad, ya que en todos esos puntos el residuo funciona como un contador: suma una unidad a medida que va apareciendo cada uno de ellos. Y tampoco es casualidad que en el numerador se encuentre justamente la derivada del denominador; en la siguiente sección daremos una explicación más general de estos hechos tan llamativos.

7.4. Principio del argumento y consecuencias

El teorema de los residuos tiene variadas aplicaciones; entre ellas, una de las más importantes es el llamado *principio del argumento* que, como anticipamos, permite sacar conclusiones para una función f estudiando su derivada logarítmica $\frac{f'}{f}$. A tal fin, veamos primero un resultado elemental:

Proposición 7.4.1. *Sea f una función meromorfa en U. Entonces $g(z) := \frac{f'(z)}{f(z)}$ es meromorfa en U. Además, todas las singularidades aisladas de g son polos simples, que se encuentran ubicados en los ceros y polos de f. Más precisamente,*

- *z_0 cero de orden k de $f \Longrightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = k$.*
- *z_0 polo de orden k de $f \Longrightarrow \operatorname{Res}(g, z_0) = -k$.*

Demostración: Escribiendo $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$, con $m = \pm k$ y h holomorfa en z_0 tal que $h(z_0) \neq 0$, se obtiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

lo que prueba el resultado. □

Observación 7.4.1. ¿Se podrá justificar el valor del residuo obtenido en la anterior proposición por el puro y simple hecho de tratarse de una derivada logarítmica? Es claro que no tiene por qué valer una igualdad como $\log f(z) = m \log(z - z_0) + \log h(z)$, pero sin embargo...

Ahora sí, tenemos la mesa servida para el resultado principal de esta sección:

Teorema 7.4.1. (Principio del argumento) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y sea f una función meromorfa no constante en U. Dado un lazo $\gamma \sim 0$ en U que no pasa por ningún cero o polo de f, se cumple:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in Z_\gamma(f)} \mathrm{ord}(z) I(\gamma,z) - \sum_{z\in P_\gamma(f)} \mathrm{ord}(z) I(\gamma,z)$$

donde $Z_\gamma(f)$ y $P_\gamma(f)$ son, respectivamente, los conjuntos de ceros y polos de la función f en el interior de γ y $\mathrm{ord}(z)$ denota el orden de z.

Demostración: Se sigue de manera inmediata del Teorema 7.3.2 y la proposición previa. □

Un caso de especial importancia es aquel en el cual la curva es simple aunque, a pesar de su nombre, este concepto puede meternos en discusiones topológicas un tanto delicadas.[2] Resulta mucho más cómodo formular el resultado echando mano a una idea cercana, aunque no equivalente: que el índice de la curva respecto de cualquier punto (fuera de su imagen, claro) sea siempre 0 o 1.

Teorema 7.4.2. (De los ceros y polos) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y sea f una función meromorfa no constante en U. Sea γ un lazo tal que $\gamma \sim 0$ en U y que no pasa por ningún cero o polo de f. Supongamos, además, que $I(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \#Z_\gamma(f) - \#P_\gamma(f),$$

donde los ceros y polos se cuentan con su orden.

El resultado es claramente una consecuencia del anterior; el signo # es un pequeño abuso de notación ya que no se trata verdaderamente del cardinal, pero es fácil acostumbrarse: por ejemplo, para la función $f(z) = z^n$ se verifica

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{nz^{n-1}}{z^n}\,dz = n;$$

luego, el teorema anterior nos dice (¡vaya novedad!) que f tiene n ceros en $D_1(0)$. En definitiva, el teorema no es lo suficientemente astuto como para detectar la presencia de ceros de multiplicidad mayor que 1. Notemos, sin embargo, que la presencia de ceros múltiples es bastante inestable: ni bien nos movemos un poquito del origen, fijando $b \neq 0$, encontramos n soluciones distintas (y simples) para la ecuación $f(z) = b$. Esto vale en general y ya lo habíamos comentado hace muuuucho (allá por el Capítulo 3), cuando probamos el teorema de la aplicación abierta. Para mayor claridad, veamos primero la siguiente

Definición 7.4.2. Dada una función f holomorfa en un abierto U, decimos que z_0 es solución de la ecuación $f(z) = a$ con multiplicidad k si y solo si z_0 es un cero de orden k de la función $f(z) - a$.

[2] Tal como se menciona en la Sección 5.6, no es es en absoluto sencillo probar que una curva de Jordan separa el plano en exactamente dos componentes conexas.

El comentario informal del Capítulo 3 se había basado en observar que, en la situación anterior, la función se escribe en la forma

$$f(z) = a + [\varphi(z - z_0)]^k,$$

donde φ es un difeomorfismo conforme entre entornos del origen, con $\varphi(0) = 0$. Más concretamente, podemos quedarnos con $r > 0$ y un abierto V_r tal que $\varphi : V_r \to D_r(0)$ es biyectiva; luego, para $0 < |b - a| < r^k$ tenemos exactamente k raíces k-ésimas diferentes $w_1, \ldots, w_k \in D_r(0)$ de $b - a$, y cada una de las ecuaciones $\varphi(z - z_0) = w_j$ tiene exactamente una solución en $z_0 + V_r$. Notemos, incidentalmente, que la multiplicidad de estas soluciones es 1, ya que vale $f'(z) = k[\varphi(z - z_0)]^{k-1}\varphi'(z) \neq 0$ para $z \neq z_0$. Pero el teorema previo nos permite, como anticipamos, dar una versión aún más precisa de este resultado:

Teorema 7.4.3. Sean $U \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante y z_0 una solución de la ecuación $f(z) = a$ con multiplicidad k. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, existe U_ε entorno abierto de a que verifica: para cualquier $b \in U_\varepsilon \backslash \{a\}$ la ecuación $f(z) = b$ tiene exactamente k soluciones distintas en $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$, todas con multiplicidad 1.

Demostración: Como f y f' son holomorfas, $f \not\equiv 0$ y U es conexo, podemos fijar $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$f(z) \neq a, \quad f'(z) \neq 0 \qquad \text{si } 0 < |z - z_0| < \varepsilon_0. \tag{7.3}$$

Para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, la función $g(z) := f(z) - a$ tiene exactamente k ceros (contados con su multiplicidad) en $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$, de modo que

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\,dz.$$

donde $\gamma_\varepsilon(t) := z_0 + \varepsilon e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Consideremos ahora la curva $\Gamma_\varepsilon(t) = f(\gamma_\varepsilon(t))$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma_\varepsilon(t))\gamma_\varepsilon'(t)}{f(\gamma_\varepsilon(t)) - a}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - a}\,dz,$$

es decir,

$$I(\Gamma_\varepsilon, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - a}\,dz = k.$$

Llamando U_ε a la componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\mathrm{Im}(\Gamma_\varepsilon)$ en la que se encuentra el punto a, se deduce que $I(\Gamma_\varepsilon, b) = k$ para todo $b \in U_\varepsilon$ y repitiendo la cuenta anterior se obtiene:

$$k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1}{z - b}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z) - b}\,dz.$$

De acuerdo con el teorema previo, este último valor corresponde a la cantidad de ceros de $f(z) - b$ en $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$, contados con su multiplicidad. Pero, además, cuando $b \neq a$ la condición (7.3) garantiza que dichos ceros son distintos de z_0 y, en consecuencia, son simples. $\square$

Como corolario, tenemos una demostración alternativa del teorema de la aplicación abierta:

Corolario 7.4.1. *Sean U abierto conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ holomorfa no constante. Entonces f es abierta.*

Demostración: Dado $z_0 \in U$, para $\varepsilon > 0$ chico el conjunto U_ε del teorema previo es un entorno de $f(z_0)$ contenido en la imagen de f. □

Hablando de demostraciones alternativas, el siguiente resultado muestra que si una función es holomorfa e inyectiva, su inversa es holomorfa. Esto ya lo vimos, usando que f' no se anula: luego, el teorema de la función inversa y las condiciones de Cauchy-Riemann hacen el resto del trabajo. En cambio, el principio del argumento permite algo todavía mejor, no solamente probar de manera directa que existe la función inversa, sino también expresarla por medio de una integral. Para eso, veamos antes un lema auxiliar:

Lema 7.4.3. *Sean U abierto conexo, f meromorfa no constante en U y $g : U \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si γ es un lazo que no pasa por los ceros y polos de f y vale $\gamma \sim 0$ en U, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z\in Z_\gamma(f)} ord(z)I(\gamma,z)g(z) - \sum_{z\in P_\gamma(f)} ord(z)I(\gamma,z)g(z).$$

Demostración: Si z_0 es un cero o un polo de f, sabemos que es un polo simple de $\frac{f'}{f}$. Si $g(z_0) = 0$, entonces z_0 es una singularidad evitable de la función $h(z) := g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ y trivialmente vale $\mathrm{Res}(h, z_0) = 0$. En cambio, cuando $g(z_0) \neq 0$ sabemos que z_0 es un polo de orden 1 y vale

$$\mathrm{Res}(h, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)h(z) = g(z_0)\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z_0)\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right).$$

Además, el residuo de $\frac{f'}{f}$ en z_0 vale $\pm ord(z_0)$ según se trata de un cero o un polo y el resultado se deduce entonces del principio del argumento. □

Teorema 7.4.4. Sea f una función holomorfa en un abierto U y sea $z_0 \in U$ tal que $f'(z_0) \neq 0$. Entonces para ε suficientemente pequeño existe un abierto U_ε tal que $f : \{|z - z_0| < \varepsilon\} \to U_\varepsilon$ es biyectiva y vale

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\,dz.$$

Demostración: La existencia de U_ε se debe al Teorema 7.4.3, porque z_0 es una raíz de la ecuación $f(z) = f(z_0)$ con multiplicidad 1. La fórmula para la inversa se deduce aplicando el lema previo para $g(z) = z$ y $\tilde{f}(z) := f(z) - w$, cuyo único cero (simple) en $\{|z - z_0| < \varepsilon\}$ es justamente $f^{-1}(w)$. □

Observación 7.4.4. La fórmula obtenida en el teorema previo vuelve a mostrar, sin emplear el teorema de la función inversa, que f^{-1} es holomorfa. Por supuesto, sabiendo esto de antemano podemos observar que si $\gamma_\varepsilon(t) = z_0 + \varepsilon e^{it}$ entonces $f \circ \gamma_\varepsilon$ parametriza el borde de U_ε y vale

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma_\varepsilon} \frac{f^{-1}(u)}{u - w}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f^{-1}(f\circ\gamma_\varepsilon(t))(f\circ\gamma_\varepsilon)'(t)}{f\circ\gamma_\varepsilon(t) - w}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma_\varepsilon(t)(f\circ\gamma_\varepsilon)'(t)}{f\circ\gamma_\varepsilon(t) - w}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\, dz.$$

En resumen, esto no dice nada nuevo, pero sirve para convencernos de que la elección de g en la demostración previa no fue un simple galerazo.

Para concluir esta sección, veamos otra consecuencia del principio del argumento que también nos trae el recuerdo de dulces épocas pasadas. En la Sección 5.5.1, como una aplicación del índice, vimos aquel teorema "perruno" que dice: si $\gamma, \delta : [a,b] \to \mathbb{C}$ son lazos tales que

$$|\gamma(t) - \delta(t)| < |\gamma(t)|$$

para todo $t \in [a,b]$, entonces $I(\gamma, 0) = I(\delta, 0)$. Pero, como anticipamos, esto se puede ver como un caso particular del siguiente resultado:

Teorema 7.4.5. (Rouché) Sean $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorfas y $\gamma \sim 0$ en U tal que $I(\gamma, z) = 1$ para todo $z \in \mathrm{Int}(\gamma)$. Supongamos, además, que vale

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \qquad z \in \mathrm{Im}(\gamma).$$

Entonces $\#(Z_\gamma(f)) = \#(Z_\gamma(g))$ donde, como siempre, los ceros se cuentan con su multiplicidad.

Demostración: Observemos, en primer lugar, que la desigualdad estricta de la hipótesis implica que f y g no se anulan sobre $\mathrm{Im}(\gamma)$. Además, la hipótesis sigue valiendo en un entorno de $\mathrm{Im}(\gamma)$, lo que nos permite suponer que γ es una curva suave. Por otro lado, se verifica fácilmente que[3]

$$\frac{(g/f)'}{g/f} = \frac{g'}{g} - \frac{f'}{f},$$

de modo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(g/f)'(z)}{(g/f)(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right) dz = \#(Z_\gamma(g)) - \#(Z_\gamma(f)).$$

Consideremos ahora la curva $\Gamma(t) = \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}$, entonces se verifica que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(g/f)'(z)}{(g/f)(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w}\, dw = I(\Gamma, 0).$$

Notemos, finalmente, que por hipótesis vale $|\Gamma(t) - 1| < 1$ y, como la función $\frac{1}{w}$ tiene primitiva en $D_1(1)$ se deduce que $I(\Gamma, 0) = 0$. □

Por supuesto, aquí también podemos dar una demostración alternativa, que no requiere suavizar la curva γ y, además, nos ayuda a entender mejor la relación con lo que vimos en la

[3] Como antes, el hecho se puede deducir sin hacer la cuenta, usando que se trata de la derivada logarítmica de $\frac{g}{f}$.

Sección 5.5.1 . Por empezar, observemos que para cualquier lazo γ, si f es holomorfa y no se anula en $\mathrm{Im}(\gamma)$ entonces vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz = I(f\circ\gamma, 0).$$

Este hecho, que ya usamos en la demostración previa, es trivial cuando la curva es suave. Pero si revisamos la definición general de integral (usando una primitiva a lo largo de una curva), entonces es claro que sigue valiendo, pues la función $\frac{f'}{f}$ siempre tiene como primitiva local una rama del logaritmo de $f(z)$. De esta forma, dado cualquier t se cumple, para una cierta rama de $\log f$ definida en un entorno de $\gamma(t)$ y cualquier valor $\tilde{t} > t$ cercano:

$$\int_{\gamma|_{[t,\tilde{t}]}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \log f(\gamma(\tilde{t})) - \log f(\gamma(t)) = \int_{f\circ\gamma|_{[t,\tilde{t}]}} \frac{1}{z}\,dz.$$

Demostración homotópica del teorema de Rouché: Por el teorema de ceros y polos y el comentario previo, alcanza con verificar que

$$\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz = \int_{g\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz.$$

Pero esto es trivial, ya que, debido a la hipótesis, la homotopía

$$h(t,s) = sf(\gamma(t)) + (1-s)g(\gamma(t))$$

no se anula. □

Y, al igual que en tan mentada Sección 5.5.1, queda como ejercicio probar la siguiente versión, atribuida a Easterman:

Ejercicio 16. Probar que el resultado previo sigue valiendo si se reemplaza la hipótesis por

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad z \in \mathrm{Im}(\gamma).$$

A esta altura, no hace falta seguir insistiendo en dar demostraciones del teorema fundamental del álgebra, aunque el teorema de Rouché se presta especialmente para ello: dado un polinomio $g(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, alcanza con tomar $f(z) = a_n z^n$ y $\gamma(t) = Re^{it}$ con $R \gg 0$. Pero tal vez podamos ver otras aplicaciones, por ejemplo para estimar la cantidad de ceros en una región.

Ejemplo 7.4.5. Sea $f(z) = z^{10} + 5z^7 - 10z^4 + 3$. Veamos que f tiene exactamente 4 ceros (con su multiplicidad) en $D_1(0)$. Para ello, alcanza con tomar $g(z) := -10z^4$ y observar que

$$|f(z) - g(z)| = |z^{10} + 5z^7 + 3| \leq 9 < |10z^4| = |g(z)| \qquad \text{si } |z| = 1.$$

También vimos, en el Ejemplo 5.5.4, que todo esto sirve para dar una versión cuantitativa del teorema de la aplicación abierta. Pero, ahora, quienes acostumbran saltear las secciones marcadas con asterisco tienen una segunda oportunidad de probarlo, empleando directamente Rouché:

Ejercicio 17. Sea $f : D_1(0) \to D_M(0)$ holomorfa tal que $f(0) = 0$ y $|f'(0)| = 1$. Entonces $M \geq 1$ y, además, la imagen de f contiene un disco de radio $\frac{1}{6M}$ centrado en 0. **Sugerencia**: probar que si $|z| = \frac{1}{4M}$ entonces $|f(z)| \geq \frac{1}{6M}$. Luego, para $|w| < \frac{1}{6M}$, aplicar el teorema de Rouché con $g(z) = f(z) - w$.

7.5. Residuos en ∞

Para concluir con las diversas versiones del teorema de residuos, falta considerar el caso de una función con una singularidad aislada en infinito, es decir, holomorfa en $\{|z| > R\}$ para algún R. Esto requiere ponernos previamente de acuerdo respecto de lo que significa el residuo en ∞:

Definición 7.5.1. Dada $f : \{|z| > R\} \to \mathbb{C}$ holomorfa, se define

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := \operatorname{Res}(g, 0), \qquad \text{donde } g(z) := -\tfrac{1}{z^2} f\left(\tfrac{1}{z}\right).$$

La aparición de ese factor $-\frac{1}{z^2}$ puede parecer extraña, aunque ya lo tenemos visto de algún lado: se trata de la derivada de $\frac{1}{z}$. Esto no es un gran hallazgo, pero permite aclarar un poco el panorama. Según vimos hasta ahora, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y una función f holomorfa en $D_r(z_0) \backslash \{z_0\}$, se tiene que

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} f(z)\, dz$$

para cualquier $\rho < r$. Entonces, con la misma lógica, $\operatorname{Res}(f, \infty)$ debería coincidir con el valor de la integral sobre circunferencias orientadas positivamente respecto de ∞, vale decir, para $R_1 > R$:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{[|z|=R_1]^-} f(z)\, dz,$$

donde el signo $-$ significa que estamos recorriendo la curva en sentido negativo (horario). Haciendo la sustitución $w = \frac{1}{z}$, vale

$$\int_{[|z|=R_1]^-} f(z)\, dz = \int_{|w|=\frac{1}{R_1}} -\tfrac{1}{w^2} f\left(\tfrac{1}{w}\right) dw = \int_{|w|=\frac{1}{R_1}} g(w)\, dw,$$

lo que justifica la anterior definición. Y, no solo eso, sino que transforma esta nueva versión del teorema de los residuos en algo prácticamente trivial:

Teorema 7.5.1. (De los residuos, tercera versión) Sea f con finitas singularidades en $\mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{z \in \tilde{\mathbb{C}}} \operatorname{Res}(f, z) = 0.$$

<u>*Demostración*</u>: Fijemos R tal que el conjunto S de singularidades de f se encuentre contenido en $D_R(0)$. Por la definición anterior, sabemos que $\operatorname{Res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z)\, dz$. Por otra

parte, la primera versión del teorema de los residuos nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} f(z)\,dz = \sum_{z\in S}\mathrm{Res}(f,z),$$

lo que prueba el resultado. □

Observación 7.5.2. Aunque parezca algo desprolija, la anterior sustitución $w = \frac{1}{z}$ se puede justificar formalmente en un contexto más general para una integral

$$\int_\gamma f(A(z))A'(z)\,dz,$$

donde A es una función holomorfa. En efecto, si γ es una curva suave, llamando $\Gamma(t) := A(\gamma(t))$, resulta

$$\int_\gamma f(A(z))A'(z)\,dz = \int_a^b f(A(\gamma(t))A'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt,$$

es decir:

$$\int_\gamma f(A(z))A'(z)\,dz = \int_{A\circ\gamma} f(w)\,dw.$$

Por supuesto, de aquí a escribir $w = A(z)$ y $dw = A'(z)dz$ el camino es peligrosamente corto. Si f es holomorfa, la identidad sigue valiendo también cuando γ solo es continua.

7.6. Aplicación al cálculo de integrales reales

En esta sección veremos algunos ejemplos de aplicación de la teoría de residuos al cálculo de integrales de funciones de variable real. Para entrar en calor, empecemos con un caso elemental, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx,$$

donde $b^2 < 4c$, es decir, el denominador no tiene raíces reales. Se puede objetar que esto es prácticamente trivial, ya que completando cuadrados es fácil encontrar una primitiva; luego, aplicando la regla de Barrow sobre el intervalo $[-R,R]$ se obtiene el resultado. Cabe aclarar que el límite para $R\to+\infty$ da el llamado *valor principal*, que puede existir aunque la integral no sea convergente. Pero, una vez que se sabe que la integral converge (como obviamente ocurre en este ejemplo), es claro que su valor coincide con el valor principal, que en muchos casos es más fácil de calcular.

Sin embargo, empleando residuos la cuenta es todavía más corta: alcanza con tomar el semicírculo superior $U = \{|z| < R, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y observar que

$$\int_{\partial U} \frac{1}{z^2+bz+c}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx + \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2+bz+c}\,dz,$$

donde $\gamma_R(t) = Re^{it}$ para $t \in [0, \pi]$. La integral del lado izquierdo se obtiene calculando el residuo en la única raíz z_0 que tiene el denominador en U. Pero esto es fácil y ni siquiera hace saber quién es z_0: la otra raíz (que no está en U) es $\overline{z_0}$, y entonces

$$\int_{\partial U} \frac{1}{z^2 + bz + c}\, dz = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{(z - z_0)(z - \overline{z_0})}, z_0\right) = \frac{1}{z_0 - \overline{z_0}} = \frac{1}{i\sqrt{4c - b^2}}.$$

Por otro lado, para $R \gg 0$, vale

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2 + bz + c}\, dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - |b|R - |c|}$$

de modo que, tomando $R \to +\infty$ concluimos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + bx + c}\, dx = \frac{2\pi}{\sqrt{4c - b^2}}.$$

Por ejemplo, para $b = 0$ y $c = 1$ la integral vale π, que obviamente se corresponde con el hecho de que $\arctan(R) \to \pm\frac{\pi}{2}$ para $R \to +\infty$. En este ejemplo particular, la ventaja del método parece exigua; sin embargo, el mismo procedimiento se puede aplicar a cualquier función racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, donde $q \neq 0$ sobre $\mathbb{R}$ y $\mathrm{gr}(q) \geq \mathrm{gr}(p) + 2$. O, más en general, para f con finitas singularidades en $\mathbb{C}$ (ninguna en $\mathbb{R}$) tal que $|z|^\alpha f(z) \to 0$ para $|z| \to \infty$ y algún $\alpha > 1$ se verifica:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z) > 0} \mathrm{Res}(f, z).$$

Otro ejemplo es una integral del tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx$$

con $a > 0$. Si bien la convergencia es clara, no se reduce al caso anterior ya que la función $\cos z$ está acotada en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$; más aún, se puede ver en este caso que la integral sobre la anterior curva γ_R no tiende a 0 cuando $R \to \infty$. En cambio, si pensamos $\cos x = \Re(e^{ix})$, la integral anterior se puede calcular como la parte real de $\int_{\mathbb{R}} f(z)\, dz$, donde

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}.$$

La única singularidad en el semiplano $\{\Im(z) > 0\}$ es $z_0 = ia$, y vale

$$\mathrm{Res}(f, ia) = \lim_{z \to ia} \frac{e^{iz}}{z + ia} = \frac{e^{-a}}{2ia};$$

por otro lado, para $R > a$ vale

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right| \leq \pi R \max_{|z| = R, \Im(z) \geq 0} |f(z)| \leq \frac{\pi R}{R^2 - a^2} \max_{|z| = R, \Im(z) \geq 0} |e^{iz}|.$$

Notemos, finalmente, que para $\Im(z) \geq 0$ se cumple

$$|e^{iz}| = e^{-\Im(z)} \leq 1,$$

de modo que la integral sobre $\gamma_R \to 0$ para $R \to \infty$, es decir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\, dx = 2\pi i \mathrm{Res}(f, ia) = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Otro ejemplo similar y bastante célebre es el de la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ que, como es sabido, converge pero no de manera absoluta. La explicación de esto último se debe al hecho de que cada una de las "pancitas" que se encuentran entre dos ceros consecutivos de la función tiene área comparable con $\frac{1}{n}$ y, en consecuencia, la integral se compara con la serie armónica. Más precisamente, observemos que en el intervalo $(k\pi, (k+1)\pi)$ vale

$$|p_k(x)| \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1,$$

donde p_k es la poligonal que interpola la función en los valores $k\pi$, $\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ y $(k+1)\pi$. De esta forma, para $k \neq 0$ se tiene

$$\frac{1}{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |p_k(x)|\, dx \leq \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| \leq \frac{1}{k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\operatorname{sen} x|\, dx,$$

es decir:

$$\frac{\pi}{2(k+1)} \leq \left| \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \right| \leq \frac{2}{k}.$$

La primera desigualdad muestra que la integral de $\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right|$ diverge, mientras que la segunda, empleando un argumento similar al de Leibniz para series alternadas, prueba que $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ converge. Pero una cosa es decir que converge y otra calcular su valor; no hace falta aclarar que cualquier intento más o menos honesto de encontrar una primitiva está destinado al fracaso. Sin embargo, con el teorema de los residuos es fácil; alcanza con escribir $\operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, de modo que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \Im \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right).$$

Consideremos entonces la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$. La diferencia con el ejemplo previo es que aparece una (única) singularidad en $z = 0$. Pero podemos considerar la región U dada por la Figura 7.1, donde por comodidad llamamos γ_ε a la semicircunferencia de radio ε orientada positivamente.[4] Como no hay singularidades en U, la integral de f sobre el borde de U es 0. Se cumple, entonces que

$$\int_{\mathbb{R}} f(z)\, dz = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz - \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz.$$

[4] En muchos textos, las regiones acotadas son llamadas "recintos", como los espacios en los que se practican artes marciales. La referencia no es del todo inadecuada, si se tiene en cuenta que, en muchos casos, la integración es una verdadera lucha.

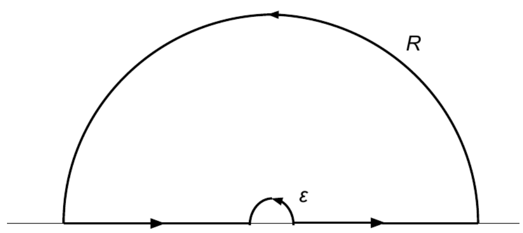


Figura 7.1: Esquivando singularidades

Para $R \gg 0$ la cuenta sale como antes, aunque acotando con mayor sutileza:

$$z = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi] \Longrightarrow \left|e^{iz}\right| = e^{-R \operatorname{sen} t}$$

y entonces

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen}\, t}\,dt \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2t}{\pi}}\,dt = \left.\frac{-\pi e^{-R\frac{2t}{\pi}}}{R}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \to 0$$

para $R \to +\infty$. Por otro lado, escribiendo $f(z) = \frac{1}{z} + h(z)$, donde h es una función holomorfa, tenemos que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = \pi i + \int_{\gamma_\varepsilon} h(z)\,dz,$$

y la última integral tiende a 0 para $\varepsilon \to 0$. En definitiva,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\, x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\Im(\pi i) = \frac{\pi}{2}.$$

La misma cuenta sirve, un poco más en general, para cualquier integral de la forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ con $a > 0$ y f con finitas singularidades aisladas (ninguna de ellas en $\mathbb{R}$) y tal que $|zf(z)|$ se mantiene acotado para $|z| \gg 0$. Y, por supuesto, la teoría de residuos se aplica a muchas otras integrales reales.

* Digresión: no solo de curvas vive Jordan

Al final del Capítulo 4 vimos que el teorema de Cauchy se puede aplicar para demostrar un hecho muy importante de la teoría de matrices: el teorema de Cayley-Hamilton. El teorema de residuos puede entenderse como una generalización de Cauchy y, metidos ya en terreno del álgebra lineal, sirve para dar una demostración de otro resultado fundamental:

Teorema 7.6.1. (Jordan) Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es similar a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} [A_1] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [A_2] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [A_M] \end{pmatrix}$$

en donde cada $[A_j]$ es un bloque de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Para dar una demostración compleja (aunque muy simple), podemos escribir

$$\det(zI - A) = \prod_{j=1}^{K} (z - z_j)^{\mu_j}, \text{ donde } \sum_{j=1}^{K} \mu_j = n.$$

Luego, si definimos la *resolvente* $R(z) := (zI - A)^{-1}$, es claro que cada coeficiente de R es una función holomorfa en $\mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_K\}$ y cada singularidad z_j es un polo de orden μ_j. Más precisamente, recordando que $R(z) = \frac{1}{\det(zI-A)}(zI - A)^*$, donde * indica la matriz adjunta (de cofactores), se ve que cada coeficiente de $R(z)$ es una función racional de la forma $R_{jk}(z) = \frac{p_{jk}(z)}{\det(zI-A)}$, en donde el polinomio p_{jk} es nulo o de grado menor que n. En particular, $R_{jk}(z) \to 0$ para $|z| \to \infty$.

Notemos, además, que vale

$$R(z) - R(w) = (w - z)R(z)R(w), \tag{7.4}$$

que para $n = 1$ no es otra cosa que la igualdad $\frac{1}{z-a} - \frac{1}{w-a} = \frac{w-z}{(z-a)(w-a)}$. En cualquier caso, la cuenta general no es difícil, alcanza con imitar, de manera algo más cuidadosa, el procedimiento de obtener un denominador común:

$$\begin{aligned} R(z) - R(w) &= R(z)(wI - A)R(w) - R(z)(zI - A)R(w) \\ &= R(z)(wI - zI)R(w) = (w - z)R(z)R(w). \end{aligned}$$

Con esto ya tenemos todo lo que necesitábamos:

<u>*Demostración del Teorema de Jordan*</u>: Fijemos $\delta > 0$ tal que $\delta < |z_j - z_k|$ para todo $j \neq k$ y consideremos para cada j la curva $\gamma_j(t) := z_j + \delta e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Definimos las matrices

$$P_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} R(z)\, dz, \qquad N_j := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} (z - z_j)R(z)\, dz,$$

integrando, como corresponde, en cada coeficiente. Observemos, para empezar, que si $j \neq k$ entonces vale

$$P_jP_k = N_jP_k = P_jN_k = N_jN_k = 0.$$

La explicación de esto es sencilla y se debe al teorema de Fubini. Podemos probar todo de un solo saque, mediante el simple truco de usar exponentes $\sigma_{j,k} = 0, 1$:

$$\int_{\gamma_j} (z - z_j)^{\sigma_j} R(z)\, dz \int_{\gamma_k} (w - z_k)^{\sigma_k} R(w)\, dw$$

$$= \int_{\gamma_j} \int_{\gamma_k} (z - z_j)^{\sigma_j} (w - z_k)^{\sigma_k} R(z)R(w)\, dwdz.$$

Empleando la identidad (7.4), la última integral se puede escribir en la forma

$$\int_{\gamma_j} \int_{\gamma_k} \frac{(w - z_j)^{\sigma_k}}{w - z}\, dw(z - z_j)^{\sigma_j} R(z)\, dz - \int_{\gamma_k} \int_{\gamma_j} \frac{(z - z_j)^{\sigma_j}}{w - z}\, dz(w - z_j)^{\sigma_k} R(w)\, dw$$

y el resultado se sigue entonces del hecho de que $\overline{D_\delta(z_j)} \cap \overline{D_\delta(z_k)} = \emptyset$ y, en consecuencia

$$\int_{\gamma_k} \frac{(w - z_j)^{\sigma_k}}{w - z}\, dw = \int_{\gamma_j} \frac{(z - z_j)^{\sigma_j}}{w - z}\, dz = 0.$$

Veamos ahora algunas otras propiedades:

1. $P_j^2 = P_j$ (la famosa *idempotencia*).
2. $N_jP_j = N_jP_j = N_j$.

   De vuelta, podemos probar ambas propiedades a la vez, aunque ahora conviene definir $\tilde{\gamma}_j(t) := z_j + \frac{\delta}{2}e^{it}$ y observar que (por ejemplo, empleando una homotopía) en la definición anterior se puede reemplazar la curva original por $\tilde{\gamma}_j$:

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_j} R(z)\, dz, \qquad N_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_j} (z - z_j)R(z)\, dz.$$

   Escribiendo $P_j := I_0$, $N_j := I_1$, podemos mandarnos como antes un fubinazo poniendo $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$ con $\sigma + \tau \leq 1$ (dicho en criollo, que no sean ambos iguales a 1):

$$(2\pi i)^2 I_\sigma I_\tau = \int_{\tilde{\gamma}_j} (z - z_j)^\sigma R(z)\, dz \int_{\gamma_j} (w - z_j)^\tau R(w)\, dw$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}_j} \int_{\gamma_j} (z - z_j)^\sigma (w - z_j)^\tau R(z)R(w)\, dwdz$$

$$= \int_{\tilde{\gamma}_j} \int_{\gamma_j} \frac{(w - z_j)^\tau}{w - z}\, dw(z - z_j)^\sigma R(z)\, dz - \int_{\gamma_j} \int_{\tilde{\gamma}_j} \frac{(z - z_j)^\sigma}{w - z}\, dz(w - z_j)^\tau R(w)\, dw.$$

Observemos ahora que para todo $w \in \mathrm{Im}(\gamma_j)$ la función $g(z) := \frac{(z-z_j)^\sigma}{w-z}$ es holomorfa en $\overline{D_{\frac{\delta}{2}}(z_j)}$, así que el último término se anula. En cambio, en la primera integral, vemos que para $z \in \mathrm{Im}(\tilde{\gamma}_j)$ fijo vale

$$\int_{\gamma_j} \frac{(w-z_j)^\tau}{w-z}\, dw = 2\pi i \mathrm{Res}(h, z),$$

donde $h(w) := \frac{(w-z_j)^\tau}{w-z}$. Pero este residuo es simplemente $(z-z_j)^\tau$; de esta forma,

$$(2\pi i)^2 I_\sigma I_\tau = 2\pi i \int_{\tilde{\gamma}_j} (z-z_j)^\tau (z-z_j)^\sigma R(z)\, dz = (2\pi i)^2 I_{\sigma+\tau},$$

es decir, $I_\sigma I_\tau = I_{\sigma+\tau}$.

3. $N_j = P_j(A - z_j I)$.

   En efecto, como $R(z)(zI - A) = I$, vale $\int_{\gamma_j} R(z)(zI-A)\, dz = 0$ y entonces

$$2\pi i P_j(A - z_j I) = \int_{\gamma_j} R(z)(A - z_j I)\, dz =$$

$$\int_{\gamma_j} [R(z)(A - z_j I) + R(z)(zI - A)]\, dz = \int_{\gamma_j} R(z)(zI - z_j I)\, dz = 2\pi i N_j.$$

4. $N_j^{\mu_j} = 0$ (la famosa *nilpotencia*).

   Para ver esto, observemos en primer lugar que, como $R(z)$ conmuta con $A - z_j I$, entonces P_j también. Luego,

$$\begin{aligned} 2\pi i N_j^k = 2\pi i [P_j(A - z_j I)]^k = 2\pi i P_j^k (A - z_j I)^k = 2\pi i P_j (A - z_j I)^k \\ = \int_{\gamma_j} R(z)(A - z_j I)^k\, dz. \end{aligned}$$

   Ahora podemos repetir exactamente lo que hicimos para $k = 1$, sumar dentro de la integral el término analítico $(A - z_j I)^{k-1}$, que se puede escribir como

$$(A - z_j I)^{k-1} = R(z)(zI - A)(A - z_j I)^{k-1} = R(z)(A - z_j I)^{k-1}(zI - A).$$

   De esta forma,

$$2\pi i N_j^k = \int_{\gamma_j} R(z)(A - z_j I)^k + (A - z_j I)^{k-1}\, dz =$$

$$\int_{\gamma_j} R(z)(A - z_j I)^{k-1}(A - z_j I + zI - A)\, dz = \int_{\gamma_j} (z - z_j) R(z)(A - z_j I)^{k-1}\, dz.$$

Inductivamente, sumando el término $(z-z_j)^{r-1}(A-z_jI)^{k-r}$ para $r=1,\dots,k$ se ve que

$$2\pi i N_j^k = \int_{\gamma_j} (z-z_j)^k R(z)\,dz;$$

luego, como la función $(z-z_j)^{\mu_j}R(z)$ tiene una singularidad evitable en z_j, se deduce que $N_j^{\mu_j}=0$.

5. $\sum_{j=1}^{K} P_j = I$.
Por el teorema de los residuos, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{K} P_j = \sum_{j=1}^{K} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j} R(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} R(z)\,dz,$$

en donde $\gamma_R(t) = Re^{it}$ con $R > \max|z_j|$. Pero

$$\int_{\gamma_R} R(z)\,dz = \int_{\gamma_R}\left(R(z) - \frac{1}{z}R(z)A\right)\,dz + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z}R(z)A\,dz$$

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{z}R(z)(zI-A)\,dz + \int_{\gamma_R}\frac{1}{z}R(z)A\,dz.$$

Como $R(z)(zI-A) = I$, el primer término vale $2\pi i I$. Por otro lado, si $\|\cdot\|$ denota la norma de matrices, entonces

$$\left\|\int_{\gamma_R}\frac{1}{z}R(z)A\,dz\right\| \leq \|A\|\left\|\int_{\gamma_R}\frac{1}{z}R(z)\,dz\right\| \leq 2\pi\|A\|\max_{|z|=R}\|R(z)\| \to 0$$

para $R\to+\infty$.

En conclusión, a partir de las propiedades anteriores podemos escribir

$$A = \sum_{j=1}^{K} P_jA = \sum_{j=1}^{K} z_jP_j + \sum_{j=1}^{K} P_j(A-z_jI) = \sum_{j=1}^{K} z_jP_j + \sum_{j=1}^{K} N_j,$$

y entonces, señoras y señores, tenemos ya la descomposición de Jordan. Y en este punto se acaba, en realidad, el análisis complejo, aunque a pedido del público (?) vamos a completar la demostración mediante una pequeña ráfaga de vientos algebraicos:

Por empezar, notemos que las identidades $N_j = P_j(A-z_jI) = (A-z_jI)P_j$ y$N_j = N_jP_j = P_jN_j$ implican que

$$AP_j = z_jP_j + N_j = z_jP_j + P_jN_j = P_j(z_jI+N_j) = (z_jI+N_j)P_j.$$

Esto dice que $E_j := \mathrm{Im}(Pj)$ es un subespacio invariante para la matriz A, y allí vale $A = z_jI + N_j$.

Por otra parte, si N es un operador nilpotente de orden k en un espacio E de dimensión μ, entonces podemos fijar $v \notin \ker(N^{k-1})$ y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ lineal de manera tal que $\varphi(N^{k-1}(v)) = 1$. Consideremos los subespacios

$$V := \operatorname{gen}\{v, Nv, \ldots, N^{k-1}v\},$$

$$W := \{w : \varphi(N^j w) = 0, j = 0, \ldots, k-1\}.$$

Es claro que V y W son N-invariantes, es decir, $N(V) \subset V$ y $N(W) \subset W$. Además, si $\sum_{j=0}^{k-1} a_j N^j v = 0 \in W$ entonces de las sucesivas igualdades

$$\varphi(N^r \sum_{j=0}^{k-1} a_j N^j v) = 0$$

para con $r = k-1, \ldots, 0$ se ve que $a_j = 0$ para todo j. En particular, se verifica que $V \cap W = \{0\}$ y $\dim(V) = k \le \mu$. Con un argumento similar al anterior se verifica que $\dim(W) = \mu - k$, de modo que $E = V \oplus W$. Observemos que para $N|_V : V \to V$, la matriz asociada a la anterior base está formada únicamente por ceros, salvo debajo de la diagonal, donde tiene unos. Luego, la matriz correspondiente al operador $T : V \to V$ dado por $Tw := \lambda w + Nw$, es un bloque de Jordan. Repitiendo el procedimiento para $N : W \to W$, se obtiene inductivamente la forma de Jordan del operador T. El resultado se deduce tomando ahora $T_j : E_j \to E_j$ dado por $T_j := A|_{E_j} = z_j I + N_j$. Observar que, como $N_j(E_j) \subset E_j$, entonces vale $\mu_j \le \dim(E_j)$ y luego

$$n = \sum_{j=1}^{K} \mu_j \le \sum_{j=1}^{K} \dim(E_j) = n,$$

es decir: $\mu_j = \dim(E_j)$ para todo j.

Capítulo 8

Productos infinitos y fracciones simples

8.1. El espacio de funciones holomorfas

Según mencionamos en la Observación 6.2.4, dado un abierto U, se puede definir el conjunto $\mathcal{H}(U)$ de funciones holomorfas $f : U \to \mathbb{C}$ y dotarlo de una topología para la cual las sucesiones convergentes son aquellas que convergen uniformemente sobre compactos. No es difícil comprobar que este espacio es *metrizable*, es decir, su topología proviene de una métrica. A tal fin, podemos escribir

$$U = \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N,$$

donde $\{K_N\}$ es una sucesión creciente de conjuntos compactos, es decir,

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots$$

Más aún, por comodidad podemos suponer que $K_1^\circ \neq \emptyset$ y $K_N \subset K_{N+1}^\circ$ para todo N. Sobre cada uno de estos compactos tenemos la norma infinito, lo que define seminormas sobre U:

$$\|f\|_N := \|f|_{K_N}\|_\infty = \max_{z \in K_N} |f(z)|$$

Cabe observar que, si U es conexo, estas seminormas son en realidad normas sobre U, ya que si $\|f\|_N = 0$, eso significa que $f \equiv 0$ en K_N y entonces $f \equiv 0$ en U. Pero esto no tiene mayor relevancia, ya que basta con tener seminormas para definir en U la métrica

$$d(f, g) := \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\|f - g\|_N}{2^N(1 + \|f - g\|_N)}.$$

Es fácil verificar que, en efecto, d es una métrica pero, además, se cumple que $d(f_n, f) \to 0$ si y solo si $\|f_n - f\|_N \to 0$ para todo N, lo que equivale a decir que $f_n \to f$ uniformemente sobre compactos. La necesidad es inmediata porque si $f_n \to f$ para la métrica d, entonces para todo N fijo vale

$$\frac{\|f_n - f\|_N}{2^N(1 + \|f_n - f\|_N)} \to 0,$$

es decir

$$\frac{\|f_n - f\|_N}{1 + \|f_n - f\|_N} \to 0.$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ podemos fijar $\tilde{\varepsilon} \in (0, 1)$ tal que $\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-\tilde{\varepsilon}} < \varepsilon$ y n_0 tal que $\frac{\|f_n-f\|_N}{1+\|f_n-f\|_N} < \tilde{\varepsilon}$ para $n \geq n_0$. De esta forma, vale

$$\|f_n - f\|_N(1 - \tilde{\varepsilon}) < \tilde{\varepsilon} \Longrightarrow \|f_n - f\|_N < \varepsilon$$

para $n \geq n_0$. Además, para cualquier compacto $K \subset U$ existe N tal que $K \subset K_N$, de modo que $f_n \to f$ uniformemente sobre K. Para la recíproca, dado $\varepsilon > 0$ podemos fijar N_0 tal que

$$\sum_{N>N_0} \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

y n_0 tal que

$$\sum_{N=1}^{N_0} \frac{\|f_n - f\|_N}{2^N(1 + \|f_n - f\|_N)} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n \geq n_0.$$

De esta forma, para $n \geq n_0$ vale $d(f_n, f) < \varepsilon$.

En consecuencia, el teorema de Montel permite caracterizar los conjuntos compactos de $\mathcal{H}(U)$ como aquellos que son uniformemente acotados sobre compactos. Y, como anticipamos, esto también muestra que $\mathcal{H}(U)$ es completo. En algunos casos especiales, es muy fácil entender quién es este $\mathcal{H}(U)$: por ejemplo, para $U = \mathbb{C}$, es decir, para el conjunto de las funciones enteras, sabemos que cualquier f se escribe como una serie centrada por ejemplo en 0, que converge uniformemente sobre cualquier compacto. En otras palabras, de acuerdo con esta métrica, f es límite de una sucesión de polinomios, lo que muestra que $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ se puede pensar como el completado de $\mathbb{C}[X]$. Por tal motivo, es razonable preguntarse si algunas propiedades de los polinomios se extienden de alguna manera al contexto de las funciones holomorfas.

La primera de tales propiedades, parafraseando a Bernoulli, podría expresarse diciendo que "por las raíces se conoce al polinomio". En efecto, si conocemos las raíces de un polinomio $p(z)$ con sus multiplicidades, entonces p queda determinado, salvo un factor constante, de manera única. Extender esta idea para un conjunto discreto S de ceros nos llevará a hablar, en las próximas secciones, a los *productos infinitos*. Pero antes vamos a ocuparnos de otra propiedad, muy conocida también, según la cual un cociente de polinomios se puede expresar como suma de *fracciones simples*. Concretamente, si tenemos un cociente $\frac{p(z)}{q(z)}$ con $q(z) = a \prod_{j=1}^{K} (z - z_j)^{m_j}$, entonces en primer lugar aplicamos el algoritmo de división para escribir

$$\frac{p(z)}{q(z)} = c(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$$

donde el grado de r es menor que el de q y, ahora sí, esta última fracción se desarrolla como suma finita

$$\frac{r(z)}{q(z)} = f_1(z) + \ldots + f_K(z),$$

donde cada f_j es de la forma

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_k}{(z - z_j)^k}$$

para ciertos coeficientes a_k que dependen de cada j. Dicho de otra manera,

$$f_j(z) = p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right),$$

donde p_j es un polinomio de grado menor o igual que m_j y sin término independiente. Y también se puede pensar al revés: dados un conjunto $S = \{z_1 \ldots, z_K\}$ y polinomios p_j sin término independiente, la expresión

$$\sum_{j=1}^{K} p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right)$$

define una función racional. Pero, ¿se podrá hacer lo mismo si tenemos cualquier conjunto S discreto? O bien, si tenemos una función meromorfa en $\mathbb{C}$, ¿podremos desarrollarla en fracciones simples? En la próxima sección vamos a responder ambas preguntas a la vez, mediante un teorema debido a Mittag-Leffler.[1]

8.2. Fracciones simples

Supongamos que f es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y llamemos, sin pretensión de originalidad, S al conjunto de sus polos. Como anticipamos hace ya tiempo, si S es finito no hay mayores sorpresas: llamando μ_j al orden de cada polo $z_j \in S$, la función

$$\prod_{z_j \in S} (z - z_j)^{\mu_j} f(z)$$

se extiende a una función entera $h(z)$, de modo que f se escribe en la forma de fracción

$$f(z) = \frac{h(z)}{q(z)},$$

[1] En algún momento circuló la leyenda de que este matemático sueco fue la causa por la cual no existe el premio Nobel de matemática: se decía, en efecto, que don Magnus Gustaf (o Gösta, como le decían) tuvo algunos escarceos amorosos con la esposa de Alfred Nobel. Sin embargo, esto fue refutado por distintas razones; entre ellas, el hecho de que Nobel no estaba casado.

donde q es un polinomio.[2] Pero, ¿cómo desarrollamos esto en fracciones simples? Esto, valga la redundancia, es muy simple: tal como hicimos en la demostración del teorema de residuos, cerca de cada singularidad z_j escribimos

$$f(z) = P_j(z) + N_j(z),$$

donde N_j es la serie de términos negativos, que converge en $\mathbb{C}\backslash\{z_j\}$. Pero ahora es mucho mejor, porque z_j es un polo, de modo que N_j es precisamente de la forma

$$N_j(z) = p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right),$$

donde p_j tiene grado μ_j y no tiene término independiente. La función $g(z) := f(z) - \sum N_j(z)$ es entera, de modo que podemos escribir

$$f(z) = g(z) + \sum_{j\in S} p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right).$$

El problema es que si S es infinito, la serie de los N_j no tiene por qué ser convergente, y ahí es donde aparece Mittag-Leffler a arreglarnos el estofado.[3] La idea consiste en agregar ciertos términos "correctivos"; específicamente, polinomios q_j que, ahora sí, garantizan la convergencia de la serie de término general $N_j(z) - q_j(z)$. Pero basta de palabreríos y pasemos al teorema. Recordemos, de paso, que si $S \subset \mathbb{C}$ es un conjunto discreto e infinito, se lo puede escribir directamente como una sucesión $\{z_n\}$ de términos diferentes dos a dos tal que $z_n \to \infty$, pues no tiene subsucesiones convergentes.

Teorema 8.2.1. (Mitag-Leffler) Sean $S := \{z_j\}$ con $z_j \to \infty$ y $p_j(z)$ polinomios sin término independiente. Entonces existen polinomios q_j tales que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) - q_j(z)\right]$$

define una función meromorfa con polos en S y partes singulares $N_j(z) = p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$. Más aún, dada cualquier función f meromorfa en $\mathbb{C}$ con polos en S, existen p_j, q_j como antes y una función entera g tales que

$$f(z) = g(z) + \sum_{j=1}^{\infty}\left[p_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right) - q_j(z)\right].$$

Demostración: Es claro que podemos suponer, por comodidad, que $z_j \neq 0$ para todo j. En tal caso, para cada j fijo la función $p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$ es holomorfa para $|z| < |z_j|$ y luego existen

[2] Cabe observar que, en la sección previa, llamamos m_j al orden de la raíz z_j en la factorización de q. Esto se debe al detalle, más bien insignificante, de que no pedimos que p y q sean coprimos. Por eso, m_j no coincide necesariamente con μ_j, el orden del polo y el grado de los polinomios p_j es "menor o igual" que m_j.

[3] La expresión habitual es "arruinar el estofado"; esta variante, más esperanzadora, viene a decir que hasta el peor estofado puede volverse comestible.

coeficientes r_n (que dependen de j) tales que

$$p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) = \sum_{n\geq 0} r_n z^n,$$

con radio de convergencia $|z_j|$. Luego podemos fijar, por ejemplo, un valor n_j de manera tal que

$$|\sum_{n>n_j} r_n z^n| \leq \frac{1}{2^j} \qquad \text{para } |z| \leq \frac{|z_j|}{2}$$

y definir $q_j(z) := \sum_{n=0}^{n_j} r_n z^n$. Tal vez se nos haya ido la mano con la cota, pero lo importante es que funciona. En efecto, dado el conjunto compacto $K := \overline{D_R(0)}$, fijamos j_0 tal que $|z_j| > 2R$ para todo $j \geq j_0$ y entonces vale, para cualquier $j \geq j_0$:

$$\left|p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - q_j(z)\right| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Por el criterio de Weierstrass, la serie

$$\sum_{j\geq j_0}\left[p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - q_j(z)\right]$$

converge absoluta y uniformemente en K a una función holomorfa, mientras que los primeros términos

$$\sum_{j=1}^{j_0-1}\left[p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - q_j(z)\right]$$

definen una función racional con partes singulares $p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$. La conclusión es que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - q_j(z)\right]$$

converge en todo $z \in \mathbb{C}\backslash S$ y define una función meromorfa con polos en S, y la parte singular en cada uno de esos polos es $p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$. Veamos finalmente la unicidad: si tenemos una función meromorfa f cuyas partes singulares son las mismas que las de la serie anterior, al restarlas, cada una de dichas singularidades se cancela. De esta forma, la diferencia

$$g(z) := f(z) - \sum_{j=1}^{\infty}\left[p_j\left(\frac{1}{z-z_j}\right) - q_j(z)\right]$$

es (se extiende a) una función entera. $\square$

La necesidad de tales términos correctivos se ve, por ejemplo, si queremos una función meromorfa con polos simples en $S = \mathbb{Z}$ y parte singular $\frac{1}{z-n}$: por más empeño que pongamos, la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

no converge. Sin embargo, un ligero ajustecito alcanza para definir una función meromorfa hecha y derecha: para $n \neq 0$, notemos que

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{n(z-n)},$$

así que podemos tomar $q_n := \frac{1}{n}$ y la serie

$$f(z) := \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right]$$

define una función meromorfa en $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. ¿De qué función se tratará? ¡Qué intriga!

Para ir ganando tiempo, podemos derivar la serie anterior término a término, cosa que se puede hacer gracias a la convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}$. [4] Se obtiene entonces

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2};$$

en este caso las partes singulares $-\frac{1}{(z-n)^2}$ se "portan bien" y no hace falta aplicarles ningún correctivo para asegurar la convergencia (de hecho, esto es obvio aún sin saber que se trata de la derivada de f, porque los términos se comparan con $\frac{1}{n^2}$). Ahora sí, la fórmula explícita para esta nueva serie parece más fácil de encontrar; para empezar, pensemos en la primera función que se nos ocurra cuyas partes singulares sean exactamente $\frac{1}{(z-n)^2}$. En principio, esto quiere decir que cada $n \in \mathbb{Z}$ es un polo doble y, además, el residuo allí vale 0. Un candidato inmejorable es la función $\frac{1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$ pues, justamente, tiene un polo de orden 2 y, por ser par, el residuo en 0 es nulo. Para dejarlo más claro,

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = 0,$$

y lo mismo ocurre para cualquiera de las singularidades $n \in \mathbb{Z}$; de hecho, la función es 1-periódica. Sin embargo, hace falta un pequeño ajuste para que el término a_2 de la serie de Laurent sea 1, ya que

$$\lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \frac{1}{\pi^2}.$$

En definitiva, la función que buscamos es $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$ y, de acuerdo con el teorema de Mittag-Leffler, vale

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = g(z) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2},$$

[4] Recordemos que, de acuerdo con el Teorema Teorema 4.6.1, si una sucesión de funciones holomorfas $\{g_n\}$ converge uniformemente sobre compactos a cierta g, entonces $\{g_n'\}$ converge uniformemente sobre compactos a g.

con g entera. Pero observemos que la serie del lado derecho, que no es otra que $-f'(z)$, también es periódica de período 1, así que lo mismo vale para g. Además, para $z = x+iy$ con $x \in [0,1]$ resulta, para $n \neq 0$

$$\left|(z-n)^2\right| = (x-n)^2 + y^2 \geq (|n|-1)^2 + y^2,$$

de donde se deduce (¡ejercicio!) que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \to 0$$

uniformemente en x cuando $|y| \to \infty$. Veamos que otro tanto ocurre con la función $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$. Pero esto es sencillo, escribiendo como antes $z = x+iy$, tenemos

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \frac{e^{i\pi x}e^{-\pi y} - e^{-i\pi x}e^{\pi y}}{2i}$$

y, de manera uniforme en x, cuando $|y| \to \infty$ uno de los dos términos se va a infinito y el otro se va a 0. Esto dice, en particular, que la función $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$ es acotada por ejemplo para $|y| \geq 1$, al igual que la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$. La conclusión no parece especialmente emocionante pero, al restar ambas funciones, nos queda la función entera g, que (usando ahora la periodicidad) es acotada también en la franja $|y| \leq 1$. En resumen, g es acotada en todo el plano y, por Liouville, tiene que ser constante. Si además observamos distraídamente que $g(x+iy) \to 0$ para $y \to \infty$, se concluye entonces que $g \equiv 0$, es decir,

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

Esto permite resolver el misterio de la anterior f, cuya derivada, de acuerdo con nuestros últimos hallazgos, esta última vale $-\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}$. El asunto es que esta última función tiene una primitiva fácil de calcular: concretamente, $\pi\operatorname{cotg}(\pi z)$. De esta manera, resulta

$$\pi\operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right] + c$$

para cierta constante c. Pero, además, calculando su valor en algún punto podemos determinar el valor de c: por ejemplo, podemos escribir

$$\pi\operatorname{cotg}(\pi z) - \frac{1}{z} = \sum_{n\neq 0}\left[\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right] + c$$

y evaluar (léase: tomar límite) en $z = 0$. Del lado derecho, es claro que queda c; del lado izquierdo, un simple cálculo muestra que

$$\lim_{z\to 0}\left(\pi\operatorname{cotg}(\pi z) - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

Por supuesto, quien haya usado L'Hôpital para este último límite no tiene nada de qué avergonzarse, aunque sale más directo, observando que el residuo de la función $\pi\text{cotg}(\pi z)$ en 0 vale 1. En cualquier caso, todos los caminos llevan a concluir que $c = 0$.

Por otra parte, la identidad previa para la función $\frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)}$ tiene algunas otras consecuencias interesantes; por ejemplo, podemos escribir

$$\frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

y, en particular, para $z = 0$ vale

$$\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2}.$$

Como antes, L'Hôpital es una herramienta siempre noble, pero también tenemos otro as en la manga: por ejemplo, escribiendo $\text{sen}^2(\pi z) = \frac{1-\cos(2\pi z)}{2}$, resulta

$$\text{sen}^2(\pi z) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{(2\pi z)^{2n}}{(2n)!} = (\pi z)^2 + A(z),$$

donde el primer término de la serie $A(z)$ es $-\frac{1}{2}\frac{(2\pi z)^4}{4!} = -\frac{\pi^4 z^4}{3}$. De esta manera,

$$\frac{\pi^2}{\text{sen}^2(\pi z)} - \frac{1}{z^2} = \frac{(\pi z)^2 - \text{sen}^2(\pi z)}{z^2\,\text{sen}^2(\pi z)} = \frac{-A(z)}{z^2\,\text{sen}^2(\pi z)} \to \frac{\pi^2}{3}$$

para $z \to 0$. Y esta no es más que una de las tantas veces en la vida en las que calcularemos la suma

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Observación 8.2.1. Existen resultados análogos al de Mittag-Leffler para funciones meromorfas en un abierto conexo U cualquiera, aunque hace falta tener un poco más de cuidado, ya que un conjunto discreto S se puede acumular en el borde de U. Para una demostración, ver por ejemplo [6].

Ya que hablamos de periodicidades, podemos agregar un pequeño ejemplo "extemporáneo", ya que no tiene que ver con Mittag-Leffler, aunque sí con sucesiones de funciones.

Ejemplo 8.2.2. (Series de Fourier - Versión ultra-elemental)

Sea f una función entera 2π-periódica. Es un ejercicio sencillo verificar que f se puede escribir en la forma $g(e^{iz})$, donde $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es holomorfa. En efecto, si log es la rama principal del logaritmo, para encontrar $g(w)$ con $w \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ alcanza con despejar la igualdad $e^{iz} = w$ usando justamente la rama principal, es decir: $z = -i\log w$. De esta forma, definimos

$$g(w) := f(-i\log w).$$

Análogamente, si ahora elegimos otra rama $\widetilde{\log} : \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$, podemos tomar

$$\tilde{g}(w) := f(-i\widetilde{\log} w).$$

Para $w \notin \mathbb{R}$, $-i(\log w - \widetilde{\log} w) = 2k\pi$, y como f es 2π-periódica, esto implica que g y $\tilde{g}$ se pegan bien; en otras palabras, la función

$$g(z) = \begin{cases} f(-i\log w) & w \notin \mathbb{R}_{\leq 0} \\ f(-i\widetilde{\log} w) & w \in \mathbb{R}_{\leq 0} \end{cases}$$

es holomorfa y verifica lo pedido.

Consideremos ahora, para $n \in \mathbb{Z}$, las integrales

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt.$$

Por lo anterior, podemos escribir

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-int}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) e^{-i(n+1)t} i e^{it}\, dt,$$

es decir,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw, \qquad \gamma(t) := e^{it}.$$

En otras palabras, estos coeficientes no son otra cosa que los de la serie de Laurent de g, de modo que

$$g(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n w^n$$

y, en definitiva,

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inz},$$

donde la convergencia de la serie es uniforme sobre compactos. Es la famosa *serie de Fourier* que, según se comprueba, vale para funciones f mucho más generales. Una versión apenas diferente (que queda como ejercicio) surge de escribir $e^{inz} = \cos nz + i \operatorname{sen} nz$, lo que permite obtener la serie

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} [a_n \cos(nz) + b_n \operatorname{sen}(nz)],$$

donde

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt, \qquad b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen}(nt)\, dt.$$

8.3. Productos infinitos

Como vimos en la sección previa, cualquier función meromorfa se puede desarrollar de una manera que merece el nombre de fracciones simples. Claro que eso dejó picando otra cuestión, que responderemos en esta sección: ¿será cierto que las funciones meromorfas son la generalización de las funciones racionales, vale decir, siempre son un cociente de funciones enteras? Ya vimos que esto es evidente cuando el conjunto de polos es finito: en tal caso, la función meromorfa f puede escribirse directamente en la forma $f(z) = \frac{h(z)}{q(z)}$, donde q es un polinomio. Esto se logra simplemente multiplicando f por los (finitos) factores $(z-z_j)^{\mu_j}$, donde z_j son los polos de orden μ_j. Pero, como anticipamos, para extender esta idea necesitamos decir algunas palabritas sobre los productos infinitos. Tal como ocurre con los polinomios, vamos a buscar la forma de, dado un conjunto discreto $S = \{z_j\}$ y una familia $\{\mu_j\} \subset \mathbb{N}$, encontrar una función entera cuyos ceros sean exactamente los valores z_j, con multiplicidad μ_j. Como mencionamos, esto requiere cuidado cuando S es infinito, porque no se puede multiplicar factores a lo bruto sin tener asegurada la convergencia. Podemos pensarlo al revés: así como cualquier polinomio se factoriza por completo mediante sus raíces, ¿habrá alguna versión análoga para las funciones enteras? Por supuesto, cuando se trata de una función como $f(z) = e^z$, no hay mucho que factorizar; a diferencia de los polinomios, que podemos escribir

$$f(z) = a \prod_{j=1}^{K} (z - z_j)^{\mu_j}$$

donde $a \in \mathbb{C}$, para el caso de las funciones enteras vamos a tener expresiones del tipo

$$f(z) = g(z)P(z),$$

donde $P(z)$ es cierto producto cuyas raíces coinciden con las de f y g es una función entera que no se anula. Tal es el resultado del teorema que veremos en la próxima sección, debido a Weierstrass (uno más, y van...).

8.3.1. * Una pequeña digresión para comenzar

Antes de encarar el teorema de Weierstrass, a modo de recreo (cada uno se recrea con lo que puede), vamos a efectuar algunos comentarios sobre una vieja conocida que, como dijimos en la Observación 3.4.3, se puede escribir como producto: la función zeta de Riemann. Como mencionamos, para $s > 1$ es fácil probar que la serie armónica generalizada verifica

$$\xi(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s - 1}\right)$$

donde $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ es el conjunto de números primos. Esto le permitió a Euler, muy suelto de cuerpo, decir que los primos son infinitos: de no ser así, la igualdad seguiría valiendo para $s = 1$, pero he aquí que la serie armónica diverge. En realidad, Euler dijo mucho más: como el producto del lado derecho tiende a $+\infty$ para $s = 1$, a partir de la igualdad

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j}}\right) = -\sum_{j=1}^{N}\ln\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$$

donde $\mathcal{P} = \{p_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se deduce que hay suficientes primos como para que la serie

$$-\sum_{p\in\mathcal{P}}\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

sea divergente. Pero observemos que

$$-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right) = \ln\left(\frac{p}{p-1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{p-1}\right),$$

que es un número positivo y menor que $\frac{1}{p-1}$; en consecuencia, la serie $\sum\frac{1}{p-1}$ es divergente y, por consiguiente, también lo es la serie $\sum\frac{1}{p}$. Este resultado es de por sí bastante notable, pero tiene una consecuencia más notable aún: el subespacio generado por las funciones $\{1, \{t^p\}_{p\in\mathcal{P}}\}$ es denso en el espacio de Banach $C[0,1]$.[5]

Más allá de estos divagues, digamos algunas palabras sobre la importancia de la función zeta que, como ya vimos, se puede extender sin dificultad para aquellos $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > 1$. Tampoco es complicado (en rigor, sale con lo que veremos en la próxima sección), ver que ξ se extiende por reflexión al conjunto $\{\Re(z) < 0\}$ mediante una identidad bastante llamativa

$$\xi(z) := 2^z\pi^{z-1}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-z)\xi(1-z),$$

donde Γ es la archifamosa función gamma, algunas de cuyas propiedades veremos más adelante. Mucho menos sencillo es extenderla de manera holomorfa a la franja que falta, para $0 \leq \Re(z) \leq 1$, pero se puede hacer a excepción del valor $z = 1$, que es un polo. Esto último parece muy claro, porque $\lim_{s\to 1^+}\xi(s) = \infty$ mientras que, si tomamos $\Re(z) > 1$, es fácil ver que $z\xi(z)$ se mantiene acotado cuando $z \to 1$. Observemos también que, aceptando ya como un hecho que ξ se extiende hasta $z = 0$, en la fórmula anterior el cero simple de la función seno se compensa con el polo que tiene ξ en 1 (y los otros factores no se anulan).

Más allá de que la extensión analítica de ξ es algo trabajosa, lo que dijimos hasta el momento ya es suficiente para entender el significado de la hipótesis de Riemann. Es inmediato verificar que ξ no se anula para $\Re(z) > 1$; además, como veremos, la función Γ no tiene ceros; de esta manera, para $\Re(z) < 0$ las únicas raíces de ξ aparecen cuando $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$, es decir, $z = -2k$, con $k \in \mathbb{N}$. Son las llamadas *raíces triviales* de la función ξ, lo que nos da pie para formular la famosa (HR) de la siguiente manera:

Todos los ceros no triviales de ξ se encuentran en la recta $\{\Re(z) = \frac{1}{2}\}$.

[5] Esto se deduce de un teorema general debido a Müntz-Szasz, que dice: dada una sucesión $\lambda_j \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, el subespacio (complejo) generado por $\{1, \{t^{\lambda_j}\}_{j\in\mathbb{N}}\}$ es denso en $C([0,1],\mathbb{C})$ si y solo si la serie $\sum\frac{1}{\lambda_j}$ diverge.

¡Impresionante! No queda claro cómo pudo Riemann llegar a una conclusión sesmejante, aunque no la probó y, en rigor, todavía es un problema abierto: una de las célebres "preguntas del millón". En principio, todo viene a cuento del teorema de los números primos, que ya había formulado Gauss, sin demostración: que la cantidad $\pi(n)$ de números primos menores o iguales que n se aproxima por el valor $\frac{n}{\ln n}$. Más precisamente, hay una función que se llama logaritmo integral,

$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\, dt$$

que, para $x \gg 0$, se comporta como $\frac{x}{\ln x}$ más un término del orden de $\frac{x}{\ln^2 x}$. El teorema de los números primos afirma que

$$\frac{\pi(n)}{\mathrm{Li}(n)} \to 1$$

para $n \to \infty$ y, como señaló Riemann, esto vale si (HR) es verdadera. Finalmente, el teorema de los números primos se probó empleando un resultado más débil que la hipótesis original, aunque demostrar (HR) permitiría sacar conclusiones más precisas sobre la distribución de primos y algunas otras maravillas. En particular, se mostró que (HR) implica una cota mucho más exacta de la forma en que "se parecen" $\pi(n)$ y $\mathrm{Li}(n)$, específicamente, (HR) es equivalente al siguiente enunciado:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, C_\varepsilon > 0 : |\pi(n) - \mathrm{Li}(n)| \leq C_\varepsilon n^{\frac{1}{2+\varepsilon}}.$$

Algunas otras equivalencias de la hipótesis de Riemann son de lo más sorprendentes, por ejemplo:

$$\forall n : \sum_{d|n} d \leq S_n + e^{S_n} \ln S_n,$$

donde $S_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Aunque, claro está, si alguien pidiera al autor de estas notas que demostrase algo de todo esto, lo pondría en serios aprietos.

8.4. Productos infinitos

Volviendo un poco a la realidad, vamos a estudiar los productos de la forma

$$P := \prod_{n \in \mathbb{N}} p_n$$

donde $\{p_n\}$ es una sucesión de números complejos. Esto no siempre está bien definido; lo que sin duda existe es la sucesión de los productos parciales

$$P_N := \prod_{n=1}^N p_n$$

y parece sensato definir el producto infinito cuando la sucesión $\{P_N\}$ converge a cierto $P \in \mathbb{C}$. Pero, ¡no tan rápido! Por empezar, si alguno de los p_n se anula, entonces es claro que $P_N = 0$ para todo $N \geq n$ y la cuestión pierde toda su gracia. Pero además, aunque todos los factores sean distintos de 0, hay razones de sobra para comprender que el caso que tiene interés es $P \neq 0$. Por ese motivo, aunque suene extraño, vamos a definir el producto de la siguiente manera:

Definición 8.4.1. Dada una sucesión $\{p_n\} \subset \mathbb{C}$, decimos que $\prod_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge si se cumple:

1. Existe n_0 tal que $p_n \neq 0$ para todo $n \geq n_0$.
2. Existe el límite
$$\lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{N} p_n$$
y es un número complejo distinto de 0.

Por simplicidad, el producto de todos los factores hasta $n = N$, excluyendo los que se anulan, se seguirá llamando P_N. La justificación de todas estas precauciones es sencillla: tenemos planeado construir funciones holomorfas multiplicando factores que se anulan en ciertos ceros z_n de multiplicidad finita. Pero, para que el asunto funcione, necesitamos que el producto esté bien definido, por más que algunos de dichos factores eventualmente se anulen. Ya veremos esto con más cuidado; por el momento, observemos una propiedad obvia:

Proposición 8.4.1. *Si $\prod_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge, entonces $p_n \to 1$.*

Demostración: Para todo $N \gg 0$ el término p_N no se anula y además vale $P_N \to P \neq 0$, de modo que $p_{N+1} = \frac{P_{N+1}}{P_N} \to 1$. □

La proposición anterior nos sugiere escribir $p_n = 1 + a_n$ donde, para que haya alguna esperanza de convergencia, necesitamos que a_n tienda a 0. Por comodidad, podemos desentendernos por un rato de los primeros términos y considerar primero el caso en que $|a_n| < 1$ para todo n.

Proposición 8.4.2. *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ tal que $|a_n| < 1$ y $a_n \to 0$. Entonces*
$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1 + a_n) \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \log(1 + a_n) \text{ converge},$$
donde log *es la rama principal del logaritmo.*

Demostración: Si la sucesión $\{S_N\}$ de sumas parciales de la serie converge a cierto $S \in \mathbb{C}$, entonces $e^{S_N} \to e^S := P \neq 0$. Pero además
$$e^{S_N} = e^{\sum_{n=1}^{N} \log(1+a_n)} = \prod_{n=1}^{N} e^{\log(1+a_n)} = P_N,$$

lo que prueba que vale $\Longleftarrow$). Para la recíproca (es decir, la necesidad), debemos tener un ligero cuidado, ya que no sabemos dónde vive P: concretamente, podríamos tener la pésima suerte de que $P \in \mathbb{R}_{<0}$ y ahí no hay logaritmo principal que aguante. Pero sabemos que $P \neq 0$; luego, podemos definir una rama $\widetilde{\log}$ en un entorno U de P y luego, para N grande, se verifica que $P_N \in U$ y

$$\widetilde{\log} P_N = \ln |P_N| + i\,\widetilde{\arg}(P_N) \to \widetilde{\log} P.$$

Por otra parte,

$$e^{S_N} = P_N = e^{\widetilde{\log} P_N},$$

lo que muestra que

$$S_N = \widetilde{\log} P_N + 2k_N\pi i$$

para cierto $k_N \in \mathbb{Z}$. Si restamos $S_{N+1} - S_N$, obtenemos

$$\underbrace{\log(1+a_{N+1})}_{\to 0} = \underbrace{\widetilde{\log} P_{N+1} - \widetilde{\log} P_N}_{\to 0} + 2\pi(k_{N+1} - k_N).$$

Esto muestra que, a partir de algún N_0, la sucesión $\{k_N\}$ se vuelve constantemente igual a cierto k y entonces

$$S_N \to \widetilde{\log} P + 2k\pi i.$$

$\square$

Como ocurre con las series de potencias, la convergencia que realmente nos va a importar es la absoluta, que se define a partir de la proposición previa.

Definición 8.4.2. servir Dados a_n tales que $|a_n| < 1$ para todo n y $a_n \to 0$, decimos que

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1+a_n) \text{ converge absolutamente sii } \sum_{n\in\mathbb{N}} \log(1+a_n) \text{ converge absolutamente.}$$

Felizmente, hay una forma sencilla de caracterizar esto, sin necesidad de meterse con logaritmos ni cosas raras:

Proposición 8.4.3.

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} (1+a_n) \textit{ converge absolutamente } \Longleftrightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \textit{ converge }.$$

<u>*Demostración*</u>: Para $|z| < 1$, sabemos que

$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z + z^2 h(z),$$

donde h es holomorfa. Fijemos $\varepsilon \in (0,1)$ y $\delta > 0$ tal que $|zh(z)| < \varepsilon$ para $|z| < \delta$, de donde

$$(1-\varepsilon)|z| < |\log(1+z)| < (1+\varepsilon)|z|, \qquad |z| < \delta.$$

En particular, tomando n_0 tal que $|a_n| < \delta$ para $n \geq n_0$ se verifica

$$(1-\varepsilon)|a_n| < |\log(1+a_n)| < (1+\varepsilon)|a_n|,$$

y el resultado se deduce por comparación. $\square$

Un ejemplo obvio de producto absolutamente convergente es

$$\prod_{n\geq 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

pues la serie de $a_n = -\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente. Pero, además, en este caso no es difícil calcular el límite: observemos, en efecto, que

$$P_N = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{\prod_{n=1}^{N-1} n \prod_{n=3}^{N+1} n}{N!^2} = \frac{(N-1)!(N+1)!}{2N!^2} \to \frac{1}{2}.$$

Incluso más fácil, podríamos haber escrito

$$P_N = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{N}\frac{N+1}{2}$$

mostrando, de paso, que la telescopicidad no es solo aditiva.

Otro producto clásico es el de Wallis, que suele escribirse así:

$$\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\ldots = \frac{\pi}{2}.$$

El cálculo exacto del límite tiene sus vericuetos, aunque existe una demostración que usa solamente el teorema de Pitágoras (y algo de ingenio, claro. Ver [7]). Pero nuestros objetivos son más modestos: verificar que se trata de un producto que converge, aunque no absolutamente. En efecto, aquí el factor general es $\frac{n+1}{n}$ o bien $\frac{n}{n+1}$, según sea n impar o par, es decir:

$$p_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{n} & n \text{ impar} \\ 1-\frac{1}{n+1} & n \text{ par.} \end{cases}$$

El hecho de que la convergencia no es absoluta se sigue de la proposición anterior, ya que la serie armónica no converge. Pero, por otra parte, se trata de un producto alternado, en el sentido de que los términos impares son mayores que 1 y los pares son menores. La situación es completamente análoga a la de las series alternadas y queda como ejercicio imitar el criterio de Leibniz para probar la convergencia. Más aún, es claro que si multiplicamos únicamente los términos impares el límite es ∞, mientras que si multiplicamos los pares los productos parciales tienden a 0. Usando esto, es fácil ver que, mediante reordenamientos, podemos hacer que el producto converja a cualquier valor $s \in [0, +\infty]$ que se nos ocurra o, si estamos de mal talante, lograr que no converja.

8.4.1. Productos de funciones

Hay un día en la vida en que pasamos de las series numéricas a las series de funciones; del mismo modo, vamos a definir ahora productos infinitos de funciones $f_n(z)$ definidas sobre un abierto U. Lo que nos interesa, en realidad, es cierta clase especial de productos, que provienen de nuestras ambiciones de factorización de una función entera f; por tal motivo, vamos a comenzar con un ejemplo concreto, el producto

$$P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Esto ayuda a entender el porqué de nuestra anterior definición: aunque los factores se pueden anular para algunos valores de z, solo lo hacen una cantidad finita de veces (una, para ser exactos), de modo que podemos hablar de la convergencia de P sin preocuparnos por los valores $z = n \in \mathbb{N}$ donde el producto se hace 0. Veamos que, como es de esperar, los productos parciales P_N convergen absolutamente en todo z, y lo hacen de manera uniforme sobre cualquier compacto. Por ejemplo, si consideramos la función $g(w) = (1-w)e^w$, como $g(0) - 1 = g'(0) = 0$ podemos fijar una constante $c > 0$ y $\delta > 0$ tal que

$$|g(w) - 1| \le c|w|^2, \qquad |w| < \delta.$$

De esta forma, dado $R > 0$ fijo, para $n > \frac{R}{\delta}$ resulta

$$\left| g\left(\frac{z}{n}\right) - 1 \right| \le c\frac{|z|^2}{n^2} \qquad |z| \le R.$$

En otras palabras, si el factor general del producto se escribe en la forma $\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} = 1 + a_n(z)$, lo anterior dice que $|a_n(z)| \le \frac{cR^2}{n^2}$, lo que prueba la convergencia absoluta y uniforme en $\overline{D_R(0)}$. ¿Alguien se anima a pronosticar de qué función (holomorfa, claro) se trata? Una función entera, con ceros simples en $\mathbb{N}$... hmmm, tenemos que pensarlo.

8.4.2. Productos canónicos

El último ejemplo da una pista bastante precisa de la escritura que buscamos para las funciones enteras. Empecemos por lo más obvio, un polinomio no constante, cuyas raíces son $z_1, \ldots, z_N$. Por razones que pronto se verán, es más cómodo olvidarse de las multiplicidades y suponer que, eventualmente, en la lista anterior hay elementos repetidos. Entonces f tiene grado N y se puede escribir en la forma

$$f(z) = a \prod_{n=1}^{N} (z - z_n).$$

para cierto $a \neq 0$. Pero claro, si pretendemos que haya alguna chance de pasar de aquí a un producto infinito, necesitamos escribir los factores como $1 + a_n(z)$: para esto, para cada $z_n \neq 0$ alcanza con poner

$$(z - z_n) = -z_n \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Resumiendo, podemos concluir que todo polinomio no nulo es una función de la forma

$$f(z) = cz^m \prod_{n=1}^{K} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

donde $c \neq 0$, $m \geq 0$ y $z_1, \ldots, z_K$ son las raíces no nulas, eventualmente repetidas.

Pasemos ahora a una función entera f con una cantidad finita de ceros. En ese caso, si dividimos f por un polinomio que tiene exactamente esos ceros, nos queda una función entera que no se anula, es decir:

$$f(z) = g(z) z^m \prod_{n=1}^{K} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

Pero, además, como $g \neq 0$ entonces existe una función entera h tal que $g(z) = e^{h(z)}$ (ayuda-memoria:, la función $\frac{g'}{g}$ es entera y, en consecuencia, tiene primitiva). Luego,

$$f(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n=1}^{K} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$$

La pregunta es si esta forma tan elegante de escribir se puede generalizar para una función entera cualquiera que, además de -posiblemente- el 0, tiene infinitas raíces no nulas $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Como ya sabemos, en tal caso debe ocurrir que $z_n \to \infty$, así que el factor general $1 - \frac{z}{z_n}$ tiende a 1 uniformemente sobre compactos. ¡Vamos, todavía! Sin embargo, aún así el producto infinito puede no converger. A continuación mostraremos que, como ocurre con las fracciones simples, se puede lograr una escritura canónica agregando factor correctivo, que en este caso tiene una forma bien específica. A grandes rasgos, la idea consiste en elegir factores de la forma

$$\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z/z_n)}$$

donde p_n son polinomios sin término independiente aunque, como veremos, estos polinomios tienen nombre y -¿por qué no?- apellido. La única duda es si aguantaremos hasta la próxima sección para develar la incógnita de quiénes son estos misteriosos p_n... ¡qué nervios!

8.5. Weierstrass, para qué nombrarlo tanto

En la sección previa introdujimos los productos infinitos y quedó pendiente la cuestión de verificar que si f es una función entera no constante con una cantidad infinita de ceros, entonces puede escribirse en la forma

$$f(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z/z_n)}$$

donde z_n son las raíces no nulas, $m \in \mathbb{N}_0$ y p_n es un polinomio sin término independiente. Recordemos que, en este producto, no se tienen en cuenta las multiplicidades, es decir, la sucesión $\{z_n\}$ puede contener elementos repetidos. Como sea, los ceros no se acumulan, así que $z_n \to \infty$ y, si tenemos ganas, podemos asumir que $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \to \infty$. Una observación sencilla nos muestra, por fin, qué pinta deben tener esos misteriosos polinomios p_n.

En primer lugar, recordemos que el factor general de un producto convergente debe tender a 1, lo que explica el requerimiento de que p_n no tenga término independiente ya que, de otra forma, las posibilidades de que $e^{p_n(z/z_n)} \to 1$ se verían seriamente afectadas. Ahora bien, si logramos que esto ocurra, entonces para n grande tiene sentido pensar que

$$\log\left[\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{p_n(z/z_n)}\right] = \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + p_n\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{8.1}$$

donde log es la rama principal del logaritmo. La pregunta es si esto último es una bestialidad completa o apenas una pequeña; sin embargo, para n grande se puede justificar debidamente, a partir del siguiente

Lema 8.5.1. *Sea* log *la rama principal del logaritmo. Entonces existe $\delta \in (0,1)$ tal que para $|A|, |B| < \delta$ vale*

$$\log\left[(1 - A)e^B\right] = \log(1 - A) + B.$$

<u>*Demostración*</u>: Eligiendo δ chico, se cumple que $|(1 - A)e^B - 1| < 1$. Luego, alcanza con observar que, como

$$e^{\log[(1-A)e^B]} = (1 - A)e^B = e^{\log(1-A)}e^B = e^{\log(1-A)+B}$$

entonces

$$\log[(1 - A)e^B] = \log(1 - A) + B + 2k\pi i.$$

Notemos ahora que las partes imaginarias de $\log[(1-A)e^B]$ y $\log(1-A)$ tienen módulo menor que $\frac{\pi}{2}$: como, además, la parte imaginaria de B tiene módulo menor que π, se deduce que $k = 0$. □

A fin de garantizar la convergencia del anterior producto infinito, la idea es acelerar un poco la forma en que el factor general tiende a 1. Para eso, nada mejor que elegir p_n de manera tal que, en la "bestia" fórmula (8.1), se cancelen unos cuantos términos de la serie

$$\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n.$$

En otras palabras, vamos a tomar $p_n\left(\frac{z}{z_n}\right) := \sum_{n=1}^{M_n} \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z_n}\right)^n$, de modo que el término derecho de (8.1) se convierta en algo del estilo

$$g_n(z) := \frac{h_n(z)}{z_n^{M_n}},$$

con h_n holomorfa. Luego, eligiendo M_n tan grande como haga falta intentaremos garantizar, ahora sí, que los factores

$$\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z/z_n)} = e^{g_n(z)}$$

tienden a 1 de manera veloz y efectiva. Más allá de esta aproximación informal, el procedimiento se puede escribir con cuidado:

Teorema 8.5.1. (Weierstrass) Sea $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $z_n \to \infty$ y $z_n \neq 0$ para todo n. Entonces existen $M_n \in \mathbb{N}_0$ tales que para $p_n(w) := \sum_{j=1}^{M_n} \frac{w^j}{j}$ el producto

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z/z_n)}$$

converge uniformemente sobre compactos a una función entera cuyos ceros son los valores z_n. Más aún, si f es una función entera cuyos ceros no nulos son dichos valores z_n, entonces existen h entera y $m \in \mathbb{N}_0$ tales que

$$f(z) = e^{h(z)} z^m P(z).$$

Demostración: En primer lugar, observemos que si $P(z)$ converge en todo z, entonces para para cualquier $R > 0$ podemos escribir

$$P(z) = \prod_{|z_j|\leq R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{p_n(z/z_n)} \tilde{P}(z),$$

donde el primer factor es un producto finito y $\tilde{P} \neq 0$ en $\overline{D_R(0)}$. En efecto, para $|z| \leq R$, ninguno de los factores de $\tilde{P}(z)$ se anula y, de acuerdo con la definición, el límite del producto infinito, $\tilde{P}(z)$ es distinto de 0. De esta forma, los ceros de P son exactamente los valores z_n. Además, si f es como en el enunciado, la función $\frac{f(z)}{z^m P(z)}$ es entera y no se anula, así que se escribe en la forma $e^{h(z)}$. Veamos, entonces, la parte jugosa: la existencia de los M_n. Como se recordará, para analizar la convergencia absoluta del producto podemos quedarnos ya con los factores cercanos a 1 y analizar la convergencia absoluta de la serie de sus logaritmos. Con la fórmula (8.1) en mente, es razonable buscar buena cota para la cola de la serie de $\log(1-w)$. Sin demasiada fineza, podemos observar que si $|w| \leq \frac{1}{2}$, entonces

$$\left|\log(1-w) + \sum_{j=1}^{M} \frac{w^j}{j}\right| = \left|\sum_{j>M} \frac{w^j}{j}\right| \leq \frac{1}{M2^M} \leq \frac{1}{2^M}.$$

Esto nos permite aventurar, criterio de Weierstrass mediante, que va a alcanzar con elegir $M_n = n$. En efecto, dados $R > 0$ y $\delta \in (0,1)$ como en el lema previo, la idea es asegurarnos de que, para n grande, si $|z| \leq R$ entonces tanto $\left|\frac{z}{z_n}\right|$ como $\left|p_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ son menores que δ y, de esta forma, se puede aplicar la fórmula (8.1). A tal fin, observemos en primer lugar que si

$|w| < 1$ entonces

$$|p_n(w)| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|w|^j}{j} \leq -\ln(1-|w|) = \ln\left(1 + \frac{|w|}{1-|w|}\right) \leq \frac{|w|}{1-|w|};$$

en consecuencia, para $|w| < \frac{\delta}{2}$ tenemos:

$$|p_n(w)| \leq \frac{|w|}{1-|w|} < \frac{\frac{\delta}{2}}{1-\frac{\delta}{2}} = \frac{\delta}{2-\delta} < \delta.$$

Luego, alcanza con fijar n_0 tal que $|z_n| > \frac{2R}{\delta}$ para $n \geq n_0$. En efecto, tomando $|z| \leq R$ y $w = \frac{z}{z_n}$, se cumple entonces que $|w| < \frac{\delta}{2}$ y $|p_n(w)| < \delta$. Pero además $|w| < \frac{1}{2}$, así que vale también la anterior cota "poco fina", es decir:

$$\log\left[(1 - \frac{z}{z_n})e^{p_n(\frac{z}{z_n})}\right] = \left|\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + p_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Por el criterio de Weierstrass, esto quiere decir que en $\overline{D_R(0)}$ las sumas parciales

$$S_N(z) = \sum_{n=n_0}^{N} \log\left[(1 - \frac{z}{z_n})e^{p_n(\frac{z}{z_n})}\right]$$

convergen absoluta y uniformemente y, en consecuencia, también lo hacen los productos

$$P_N(z) = \prod_{n=n_0}^{N} (1 - \frac{z}{z_n})e^{p_n(\frac{z}{z_n})} = e^{S_N(z)}.$$

□

Tal como ocurrió con el teorema de Mittag-Leffler es claro, en la anterior demostración, que pudimos haber exagerado un poco al acotar. Eso de poner $M_n = n$ es suficiente, pero, ¿no será demasiado? En muchos casos, se puede lograr que la sucesión $\{M_n\}$ se mantenga siempre por debajo de cierta constante $M \in \mathbb{N}_0$; de ser así, la menor posible de tales cotas se conoce como *género* de la función.

Por ejemplo, el producto de la sección previa

$$P(z) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

tiene género 1, porque $p_n = \frac{z}{n}$ para todo n, pero no converge si eliminamos el factor $e^{\frac{z}{n}}$, vale decir, no es de género 0. En cambio, esto última situación puede darse cuando los ceros están más espaciados: por ejemplo, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$$

converge absoluta, uniforme y alegremente sobre cualquier compacto. Pero dejémonos de tonterías y vamos a algunos ejemplos concretos. Antes de eso, el corolario que todo el mundo quería escuchar:

Corolario 8.5.1. *Sea $f \neq 0$ meromorfa en $\mathbb{C}$. Entonces existen g y h enteras tales que $f = \frac{g}{h}$.*

Demostración: Por el teorema anterior, construimos una función de la forma $h(z) = z^m P(z)$, donde los ceros de P son exactamente los polos no nulos de f, repetidos tantas veces como indiquen sus multiplicidades y $m \geq 0$ es la multiplicidad de $z = 0$. Luego, todas las singularidades de $f(z)h(z)$ son evitables, de modo que se extiende a una función entera $g(z)$. $\square$

8.6. Ejemplos buenos y baratos

8.6.1. Siempre se vuelve al primer amor

Un primer ejemplo más o menos obvio de función entera con infinitos ceros simples es $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z)$, donde el coeficiente π es un agregado amable para que el conjunto de ceros sea, ni más ni menos, que el mismísimo $\mathbb{Z}$, sin elementos repetidos porque los ceros son simples. Ya sabemos que el género 0 es acá una utopía, porque desde aquel momento hasta hoy las cosas no han cambiado: la serie armónica sigue siendo divergente. Pero, de acuerdo con lo que vimos, el producto (doblemente) infinito

$$g(z) := \prod_{n \neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

converge, vale decir, la función g tiene género 1. Según el teorema previo, resulta entonces:

$$\operatorname{sen}(\pi z) = e^{h(z)} z g(z).$$

Tenemos todas las ganas de verificar que h es constante, siguiendo nuestro anhelo filosófico de que las cosas en este mundo guardan una bella y conmovedora armonía.

Allá vamos, entonces: para empezar, dada la igualdad

$$e^{h(z)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z g(z)}$$

podemos aplicar derivada logarítmica[6] para obtener:

$$h'(z) = \pi \operatorname{cotg}(\pi z) - \frac{1}{z} - \frac{g'(z)}{g(z)}. \tag{8.2}$$

[6] Por las dudas, recordemos que esto funciona aunque el logaritmo no se pueda aplicar: donde f y g no se anulan, vale $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$ y $\frac{(f/g)'}{f/g} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$.

Nuestra intención es mostrar que $h' \equiv 0$; una vez logrado esto, evaluando en $z = 0$ y usando el hecho de que $g(0) = 1$, resulta:

$$e^{h(z)} \equiv e^{h(0)} = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z} = \pi.$$

Felizmente, hay muchas cosas que ya conocemos desde los tiempos mittag-lefflerianos. Empecemos por calcular la derivada logarítmica de g, en principio (como estamos acostumbrados) a lo bruto:

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{n\neq 0} \left(\frac{-\frac{1}{n}}{1-\frac{z}{n}} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right). \tag{8.3}$$

¡Pero esta es una vieja conocida! Con término correctivo y todo, es la misma serie que obtuvimos en la Sección 8.2 y ahora nos viene como anillo al dedo. Más precisamente, vimos que

$$\pi \operatorname{cotg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

de modo que, de acuerdo con la identidad (8.2), se verifica $h' \equiv 0$, es decir:

$$\operatorname{sen}(\pi z) = \pi z \prod_{n\neq 0} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Por ejemplo, evaluando en $z = \frac{1}{2}$ la fórmula obtenida para $\operatorname{sen}(\pi z)$, deducimos otra identidad de lo más simpática:

$$\prod_{n\neq 0} \frac{2n-1}{2n} e^{\frac{1}{2n}} = \frac{2}{\pi}.$$

Pero, ojo al piojo, porque podemos escribir

$$\prod_{n\neq 0} \left(\frac{2n-1}{2n} \right) e^{\frac{1}{2n}} = \prod_{n>0} \frac{2n-1}{2n} e^{\frac{1}{2n}} \prod_{n>0} \frac{2n+1}{2n} e^{-\frac{1}{2n}} = \prod_{n>0} \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n},$$

lo que permite probar la fórmula obtenida por Wallis.

Falta justificar que la derivada logarítmica de g se puede calcular término a término, como hicimos de manera tan despreocupada. Pero esto es similar a argumentos que ya empleamos anteriormente: si los productos parciales $P_N(z) = \prod_{n=1}^{N} p_n(z)$ convergen uniformemente sobre compactos al producto infinito P que se anula en un conjunto (discreto) S, entonces para $z \notin S$ vale

$$\frac{P_N'(z)}{P_N(z)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n'(z)}{p_n(z)}.$$

Además, sabemos que $P_N' \to P'$ uniformemente sobre compactos, de modo que $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n'(z)}{p_n(z)}$.

Ejercicio 18. Encontrar un desarrollo para la función $f(z) = e^z - 1$. ¿Cuál es su género?

Retomemos ahora aquella función definida en la Sección 8.4 formada solamente por la mitad (por así decirlo) de los factores del anterior producto. Por comodidad, vamos a quedarnos los factores negativos, aunque es claro que el producto de los factores positivos se obtiene por simetría. Consideremos entonces

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

que define una función entera con ceros en $-\mathbb{N}$. Justamente por la mentada simetría, ya sabemos que

$$zP(z)P(-z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}.$$

Por otro lado, la función $P(z-1)$ se anula en $-\mathbb{N}_0$ y todos sus ceros son simples, así que por el teorema anterior se deduce que

$$P(z-1) = e^{\gamma(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = e^{\gamma(z)} z P(z), \tag{8.4}$$

donde γ es una función entera. Aquí, debemos confesar, no le pusimos ese nombre porque tenga que ver con curvas sino porque se trata de otra "celebridad", por ahora de incógnito aunque, con el debido respeto, procederemos a desenmascarar. Por empezar, ya sabemos que es válido aplicar derivada logarítmica en ambos extremos de la igualdad (8.4), lo que permite obtener:

$$\frac{P'(z-1)}{P(z-1)} = \gamma'(z) + \frac{1}{z} + \frac{P'(z)}{P(z)},$$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n}\right] = \gamma'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right].$$

El truco ahora consiste en mover un lugarcito la serie del término izquierdo y luego restar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n+1}\right] = \gamma'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n}\right],$$

$$\gamma'(z) + \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right].$$

Por las habituales maravillas telescópicas, concluimos que $\gamma' \equiv 0$, es decir, γ es constante. Para ver de cuál se trata (aunque el nombre la delata), observemos que de la igualdad "desplazada"(8.4) se obtiene

$$1 = P(0) = e^{\gamma} P(1) = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}}.$$

Pero para este último producto observemos que (nuevamente en escena, la telescopicidad multiplicativa):

$$P_N(1) = \prod_{n=1}^{N} \left(\frac{n+1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} = e^{-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}} \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = e^{-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}}(N+1).$$

Aplicando logaritmo natural, el de toda la vida, a la identidad previa, concluimos que $\gamma + \ln P_N(1) \to 0$, es decir:

$$\gamma + \ln(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to 0.$$

Se acabó el misterio: a partir del obvio hecho de que $\ln(N+1) - \ln N \to 0$, resulta que γ no es otra que la constante de Euler, también llamada de Euler-Mascheroni:

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) \right).$$

Su valor aproximado es $\gamma \sim 0,577$ aunque, curiosamente, no se sabe todavía si se trata de un número irracional. Cabe ahora detenernos y efectuar un breve resumen de nuestros logros hasta el momento: aún no logramos decir quién es P, pero al menos obtuvimos una propiedad importante:

$$P(z-1) = e^{\gamma} z P(z).$$

8.6.2. * Una gamma trae la otra

En esta variada "gama" de ejemplos no podía faltar la función Γ que, por supuesto, está muuuuy relacionada con la que vimos en la sección previa. Empecemos con una definición lisa y llana, para $z \notin -\mathbb{N}_0$:

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma z}}{zP(z)} \tag{8.5}$$

donde P es el mismo producto de antes. Pero en este punto se podrá aducir que ya existe una función con ese nombre, definida mediante una integral. Por ejemplo, quienes hayan tomado un curso de probabilidades seguramente han visto, para $s > 0$, la definición

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\, dt,$$

que permite verificar directamente la propiedad $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ que, sumada al hecho de que $\Gamma(1) = 1$, muestra inductivamente que $\Gamma(n+1) = n!$

Para ver que esto no es solo una desgraciada homonimia, debemos proceder con cierta cautela. En primer lugar, la integral anterior se extiende para $\Re(z) > 0$ donde, claro está, podemos pensar $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$. Es fácil verificar que la integral impropia converge en dicho semiplano y define allí una función holomorfa. Para evitar ambigüedades, por ahora vamos a ponerle a esta integral un bonito nombre provisorio, hasta que logremos probar que coincide con la otra función:

$$I(z) := \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}\,dt.$$

Vamos a ver ahora qué nos dice la definición (8.5): en primer lugar, empleando la fórmula (8.4) vale

$$\Gamma(z-1) = \frac{e^{-\gamma z}e^{\gamma}}{(z-1)P(z-1)} = \frac{e^{-\gamma z}}{(z-1)zP(z)} = \frac{\Gamma(z)}{z-1}$$

o, en otras palabras:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Esto nos confirma que vamos por buen camino, pues además

$$\Gamma(1) = \frac{e^{-\gamma}}{P(1)} = 1,$$

es decir: $\Gamma(n+1) = n!$

Repasando, tenemos que Γ es meromorfa en $\mathbb{C}\backslash S$, con $S = -\mathbb{N}_0$; además, todos sus polos son simples y no tiene ceros. Recordemos también que vale

$$zP(z)P(-z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi}$$

y luego

$$(z-1)P(1-z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi(z-1))}{\pi P(z-1)} = -\frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\pi P(z-1)}.$$

De esta forma, empleando otra vez (8.4) se obtiene

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{e^{-\gamma z}}{zP(z)}\frac{e^{\gamma(z-1)}}{(1-z)P(1-z)}$$

$$= \frac{e^{-\gamma}}{zP(z)}\frac{\pi P(z-1)}{\operatorname{sen}(\pi z)} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

Esto es una verdadera maravilla, porque si probamos que esta función coincide con la anterior integral para $\Re(z) > 0$, entonces, la fórmula

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\Gamma(1-z)\operatorname{sen}(\pi z)}$$

se puede interpretar como la (única) extensión analítica de I al semiplano $\Re(z) \leq 0$, que -de manera inevitable- tiene polos simples en $-\mathbb{N}_0$. Antes de continuar, cabe mencionar que la comprobación de que I coincide con Γ permite ver que se cumplen otras propiedades geniales, fáciles de verificar para la última, por ejemplo:

- $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(1-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})}$, es decir: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Esto es un golazo, especialmente cuando en el curso de Proba tenemos que lidiar con la distribución casualmente llamada Γ. Claro que la propiedad se ve también de manera directa empleando la integral, pues:

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}.$$

- El volumen de la bola unitaria n-dimensional es $\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$. ¿Alguien se anima a explicar por qué?

A fin de verificar que vale $I(z) = \Gamma(z)$ para $\Re(z) > 0$, comencemos por un ejercicio:

Ejercicio 19. Empleando la siempre efectiva integración por partes, verificar que

$$I(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z}{z}\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{z+j}.$$

En virtud de lo anterior y ya avisados (por no decir "avivados") de que en algún momento tiene que aparecer la constante γ, para $\Re(z) > 0$ podemos escribir

$$n^z = e^{z\ln n} = e^{\sum_{j=1}^{n}\frac{z}{j} + z(\ln n - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})},$$

de donde

$$\frac{n^z}{z}\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{z+j} = e^{z(\ln n - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j})}\prod_{j=1}^{n}\frac{j}{z+j}e^{\frac{z}{j}} \to \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{j=1}^{\infty}\frac{j}{z+j}e^{\frac{z}{j}}$$

para $n\to\infty$. Luego, la identidad $I \equiv \Gamma$ se verifica con solo probar que

$$P(z)\prod_{j=1}^{\infty}\frac{j}{z+j}e^{\frac{z}{j}} = 1.$$

Pero esta identidad es milagrosamente cierta vale al multiplicar factor a factor: ni más ni menos,

$$\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}\frac{j}{z+j}e^{\frac{z}{j}} = 1$$

para todo j.

Observación 8.6.1. * Más allá de haber demostrado que $I = \Gamma$, un hecho destacable que se deduce de (8.5) es que la función Γ tiene, en el semiplano $\{\Re(z) > 0\}$ una representación que resulta muy útil:

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}e^{h(z)} \tag{8.6}$$

donde h es una función holomorfa que verifica $h(z)\to 0$ para $z\to\infty$ sobre cualquier conjunto de la forma $\{\Re(z) \geq c > 0\}$. La demostración de esto no es complicada, aunque excede nuestros ánimos algo opacados a esta altura del texto.[7] Cabe mencionar que (8.6) se conoce como *fórmula de Stirling* y esto no es casualidad: para $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}e^{-(n+1)}e^{h(n+1)} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e}\left(\frac{n+1}{e}\right)^n e^{h(n+1)}$$

y, como $h(n+1) \to 0$ para $n \to \infty$ se deduce, si $n \gg 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

ya que $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$. Esta última igualdad es la versión habitual de la fórmula que tantas alegrías nos deparó en nuestros tiempos mozos, cuando dábamos nuestros primeros pasos en el cálculo de límites.

Vamos a usar la fórmula de Stirling para proporcionar una prueba alternativa de que $\Gamma = I$. En primer lugar, ya podemos asumir que I está definida como una función meromorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $S = -\mathbb{N}_0$. Para esto no hace falta ninguna fórmula maravillosa, sino emplear el hecho de que $I(z-1) = \frac{I(z)}{z-1}$ lo que permite ir barriendo hacia atrás, franja por franja, para $\{-(k+1) < \Re(z) \leq k\}$. Esta gloriosa propiedad de recurrencia es compartida con Γ, de modo que

$$\frac{I(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{zI(z)}{z\Gamma(z)} = \frac{I(z)}{\Gamma(z)}.$$

En otras palabras, la función $g(z) := \frac{I(z)}{\Gamma(z)}$ es entera y 1-periódica que, además, verifica $g(1) = 1$.[8]

Observemos que para $1 \leq x \leq 2$, si $z = x + iy$ entonces $|I(z)| \leq I(x) \leq C$ para cierta constante C. Pero, por otra parte, (8.6) nos asegura que

$$|\Gamma(z)| \geq D|z^{z-\frac{1}{2}}e^{h(z)}|$$

donde D es otra constante y $e^{h(z)} \to 1$ para $|y| \to \infty$. Además, una valiente cuenta nos muestra que

$$|z^{z-\frac{1}{2}}| = |z|^{x-\frac{1}{2}}e^{-y\arg(z)},$$

donde "arg" no es una expresión de disgusto sino el argumento principal. A decir verdad, no hace falta ser tan precisos, solo necesitamos deducir que para algún $E > 0$ (¡otra constante!) vale

$$|\Gamma(z)| \geq Ee^{-\frac{\pi}{2}|y|},$$

y con esto ya casi estamos. Tal como vimos en la sección 8.2.2, por ser 1-periódica la función g puede escribirse en la forma

$$g(z) = f(e^{2\pi iz}),$$

[7] Se puede consultar una demostración, por ejemplo, en [1].

[8] En realidad, ya sabemos mucho más: g vale 1 sobre $\mathbb{N}$ (y también, ya que estamos, en $z = \frac{1}{2}$), aunque no necesitamos tanto: como siempre, veremos que g es constante y entonces alcanza con conocer su valor en cualquier punto.

con $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Llamando $w = e^{2\pi i(x+iy)}$ con $1 \leq x \leq 2$, decir que $w \to 0$ equivale a decir que $y \to +\infty$ y, en tal caso,

$$|f(w)| = |g(z)| \leq \frac{C}{E}e^{\frac{\pi}{2}y} = \frac{C}{E|w|^{\frac{1}{4}}}.$$

Esto muestra que

$$\lim_{w\to 0} wf(w) = 0,$$

es decir, 0 es una singularidad evitable de f. Por otro lado, para $w \to \infty$ tenemos que $y \to -\infty$ y

$$|f(w)| \leq \frac{C}{E}e^{-\frac{\pi}{2}y} = \frac{C}{E}|w|^{\frac{1}{4}}.$$

Ahora es el amigo Liouville quien nos dice que f es constante y, en consecuencia, g es constante.

Para concluir, mencionemos algunas otras propiedades clásicas de la función Γ, para quien quiera entretenerse:

Ejercicio 20. Probar que vale:

1. Dados $\alpha \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, se define, como es habitual,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

   Entonces

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n+1)}.$$

2.

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \Gamma(\alpha+\beta)\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt.$$

Capítulo 9

* El teorema de Picard

Entre una cosa y otra, hemos completado los principales temas de un curso de variable compleja. Como corresponde a las secciones con asterisco, los temas que siguen son optativos y pueden saltearse sin mayor cargo de conciencia. A modo de aliciente, cabe mencionar que nos encontraremos con uno de los resultados más profundos en esta materia, nada menos que el gran teorema de Picard. Y esto de "gran" es algo más que una expresión de admiración: se lo suele llamar así para distinguirlo de otro teorema, el "pequeño", que es más débil y bastante más fácil de probar. Pero antes de pasar al enunciado, fieles a nuestro estilo, vamos a hacer algunos comentarios.

Recordemos que el nombre de Picard ya surgió por estas notas, cuando vimos algunos resultados similares. Por ejemplo, mencionamos que si f es una función entera cuya imagen no es densa, entonces es constante. Esto era en tiempos de Liouville, cuando nuestros conocimientos sobre el asunto no iban mucho más allá de proponer, dado un disco $D_r(w_0)$ disjunto con $\text{Im}(f)$, la función $g(z) := \frac{1}{f(z)-w_0}$ que es entera y acotada. Pero, tiempo después, vimos algo mejor: si en vez de la anterior función g definimos $g(z) := f(\frac{1}{z})$, entonces el hecho de que $g(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ no sea denso implica, de acuerdo con Weierstrass-Casorati, que 0 es a lo sumo un polo de g. Esto implica que f es un polinomio y, por el teorema fundamental del álgebra, tiene que ser constante.

Pero, ¿por qué dijimos que es mejor? En realidad, no empleamos toda la potencia del teorema de Weierstrass y Casorati, que asegura, cuando 0 es una singularidad esencial de g, entonces la imagen de *cualquier* disco punteado $D_\varepsilon(0)\backslash\{0\}$ es densa. De hecho, esto nos proporciona un resultado más fino: en vez de poner como hipótesis que las preimágenes de todos los elementos de un abierto son vacías, supondremos que son finitas.

Proposición 9.0.1. *Sea f entera. Supongamos que existe un abierto no vacío W tal que $f^{-1}(w)$ es finito para todo $w \in W$, entonces f es un polinomio.*

Demostración: Como antes, supongamos que 0 es una singularidad esencial de $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ y consideremos los abiertos $U_n := \{0 < |z| < \frac{1}{n}\}$. Luego $g(U_n)$ es un abierto denso y, por el teorema de Baire, el conjunto $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(U_n)$ es denso. Ahora observemos que para cualquier $w \in A$ existe una sucesión $z_n \to 0$ tal que $g(z_n) = w$; esto implica que $g^{-1}(w)$ es infinito. En particular, si elegimos $w \in W \cap A$, lo anterior implica que también es infinito $f^{-1}(w)$, lo que es absurdo. $\square$

La demostración anterior permite observar que también vale una versión más poderosa de Weierstrass-Casorati: no se trata solamente de que la imagen de cualquier disco punteado es densa, sino de que existe un mismo conjunto denso que está contenido en la imagen de todos los discos.[1]

Proposición 9.0.2. *(Weierstrass-Casorati generalizado) Sea z_0 una singularidad esencial de una función f. Entonces existe un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ denso tal que $A \subset f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración: Como antes, alcanza con tomar

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(D_\varepsilon(z_0)\backslash\{z_0\}).$$

$\square$

No está de más recordar que el anterior A es, en términos de las categorías de Baire, un conjunto "grande", porque su complemento es de primera categoría; más específicamente, A^c es unión numerable de cerrados con interior vacío. Pero no tan grande como lo que prueba Picard, que liquida de un plumazo las dos proposiciones anteriores. Enunciemos primero el teorema "pequeño":

Teorema 9.0.1. Sea f entera no constante. Entonces la imagen de f excluye a lo sumo un punto.

Se puede objetar que la Proposición 9.0.1 no se deduce de aquí, ya que el resultado no nos dice nada sobre la cantidad de preimágenes. Pero el teorema "grande" viene a contrarrestar todas las objeciones:

Teorema 9.0.2. (Picard) Sea z_0 una singularidad esencial de una función f. Entonces existe w_0 tal que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\mathbb{C}\backslash\{w_0\} \subset f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}).$$

Es inmediato verificar que el Picard grande se come al chico, porque si f es entera y no es un polinomio, entonces $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad esencial en 0 y luego $\mathrm{Im}(f) \supset \mathbb{C}\backslash\{w_0\}$. Pero, además, en el mismo banquete se come, de un bocado, las dos proposiciones anteriores. Sobre la segunda, no hay duda; respecto de la primera, basta observar que para f

[1] Dicho de otra manera, se invierte el orden de los cuantificadores; en vez de "para todo ε existe un conjunto A denso...", decimos: "existe un conjunto A denso tal que, para todo ε...". Cabe aclarar que, al decir "para todo ε", damos por sobreentendido que se trata de aquellos ε tales que el correspondiente disco punteado está contenido en el dominio de f.

entera no polinómica y $g(z) := f\left(\frac{1}{z}\right)$ vale $\mathbb{C}\backslash\{w_0\} \subset g(\{0 < |z| < \frac{1}{n}\})$ para todo n. De esta forma, dado $w \neq w_0$ existe una sucesión $z_n \to \infty$ tal que $f(z_n) = w$.

Cabe aclarar, de todas formas que Weierstrass y Casorati siguen amenizando nuestros cursos de variable compleja porque demostrar el Teorema 9.0.2 demanda un esfuerzo mucho más considerable, como veremos en la próxima sección. Pero, ya que "estamos en el Baire", vamos a concluir esta sección con un ejercicio que nada tiene que ver con singularidades, pero es singularmente bonito.

Ejemplo 9.0.1. (Teorema de Osgood) Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorfas tales que $\{f_n\}$ converge puntualmente en U a cierta función f. Entonces existe un subconjunto abierto V denso en U tal que $f_n \to f$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de V (y luego f es holomorfa en V).

Demostración: Dados z_0 y $r > 0$ tales que $\overline{D_r(z_0)} \subset U$ definimos, para $N \in \mathbb{N}$,

$$F_N := \{z \in \overline{D_r(z_0)} : |f_n(z)| \leq N \text{ para todo } n\}.$$

Es claro que F_N es cerrado y, como $f_n(z) \to f(z)$ para todo z, se verifica que

$$\overline{D_r(z_0)} \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N.$$

Por el teorema de Baire, existe N tal que $F_N^\circ \neq \emptyset$. Podemos elegir por ejemplo N mínimo; de esta forma, para cada z_0 y cada posible valor de r llamamos $V(z_0, r) := F_N^\circ$ y definimos el abierto $V := \bigcup V(z_0, r)$, que es obviamente denso. Sea ahora $K \subset V$ compacto y supongamos que $f_n \not\to f$ uniformemente en K. Eligiendo una cantidad finita de conjuntos $V(z_j, r_j)$ tales que $K \subset \bigcup V(z_j, r_j) := W$, se verifica que la sucesión $\{f_n\}$ es acotada en W. Si $f_n \not\to f$ uniformemente sobre K, entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ tales que $\|(f_{n_j} - f)|_K\|_\infty \geq \varepsilon$. Pero por el teorema de Montel, $\{f_{n_j}\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de W, y su límite es f, lo que es absurdo. $\square$

Es oportuno señalar que, más allá de su belleza, este resultado no es la panacea para todas las malas convergencias. Notemos, en efecto, que tener un abierto V denso en U no significa que sea realmente "grande". Por ejemplo, para cualquier conjunto denso $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ (los puntos de coordenadas racionales, pongamos por caso), el abierto

$$V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\varepsilon/2^n}(z_n)$$

es denso pero, en términos de medida, se puede hacer arbitrariamente chico.

9.1. Demostración (ideas principales)

En esta sección veremos una prueba del teorema de Picard. En realidad, esto es poco engañoso, pues una parte sustancial de dicha prueba se basa en otro teorema, que no es difícil pero sí un tanto técnico, cuya demostración omitiremos.

Teorema 9.1.1. (Schottky) Sean $\alpha, r > 0$, entonces para todo $\beta \in (0, r)$ existe una constante C tal que si $f : \overline{D_r(z_0)} \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ es holomorfa tal que $|f(z_0)| \leq \alpha$, entonces $|f(z)| \leq C$ para todo $z \in \overline{D_\beta(z_0)}$.

Por ejemplo, en [4] se puede ver una demostración elemental. Existen versiones explícitas del valor $C = C(\alpha, \beta)$, una muy reciente aparece en [5].

Pero ahora veamos otro resultado fundamental, una poderosa variante del teorema de Montel para aquellas funciones cuya imagen excluye dos puntos:

Teorema 9.1.2. (Montel-Caratheodory) Sean U conexo y $f_n : U \to \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ holomorfas. Entonces ocurre alguna de estas dos cosas:

1. Existen una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ y una función $f : U \to \mathbb{C}$ tales que $f_{n_j} \to f$ uniformemente sobre compactos.

2. Existe una subsucesión $\{f_{n_j}\}$ tal que $f_{n_j} \to \infty$ uniformemente sobre compactos.

<u>*Demostración*</u>: Supongamos en primer lugar que para cierto $z_0 \in U$ la sucesión $\{f_n(z_0)\}$ está acotada. Dado $z \in U$, unimos z_0 con z mediante una poligonal en U, a la que cubrimos con discos $\overline{D_r(z_j)} \subset U$ para $j = 0, \ldots, z_N = z$, elegidos de manera tal que $z_{j+1} \in \overline{D_r(z_j)}$ para todo j. Por el teorema de Schottky, tomando $\alpha = \sup |f_n(z_0)|$, existe C_0 tal que $|f_n(z)| \leq C_0$ para todo $z \in \overline{D_r(z_0)}$ y todo n. Ahora podemos repetir el procedimiento en el siguiente disco, tomando $\alpha = C_1$ y así sucesivamente: en definitiva, existe una constante C tal que $|f_n(w)| \leq C$ para todo n y todo $w \in \overline{D_r(z)}$. En otras palabras, para cualquier $z \in U$ existe un entorno sobre el cual la sucesión es uniformemente acotada. La conclusión es que si $K \subset U$ es cualquier compacto, entonces $\{f_n|_K\}$ es acotada; luego, por el teorema de Montel existe una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de U a una función f.

Supongamos ahora que para algún z_0 la sucesión $\{f_n(z_0)\}$ no está acotada y, tomando una subsucesión, podemos asumir $f_n(z_0) \to \infty$. Consideremos para cada n la función $g_n := \frac{1}{f_n}$, que es holomorfa y tampoco toma los valores $\{0, 1\}$. Como $g_n(z_0) \to 0$, por el caso anterior existe $\{g_{n_j}\}$ que converge uniformemente sobre compactos a cierta función g, que se anula en z_0 y, por Hurwitz, se deduce que $g \equiv 0$. Luego $f_{n_j} \to \infty$ uniformemente sobre compactos. $\square$

Y ahora, con honda emoción, podemos anunciar que estamos a un paso de probar el teorema de Picard. Un detalle curioso es que, en este caso, no hace falta recurrir a ningún teorema renombrado para comprobar que el orden de los cuantificadores no altera el producto. En efecto alcanza con probar el siguiente resultado, en apariencia más débil:

Teorema 9.1.3. Sea z_0 una singularidad esencial de una función f. Entonces para todo ε existe w_0 tal que

$$\mathbb{C}\backslash\{w_0\} \subset f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\}).$$

Esto se explica de la siguiente manera una vez probado el Teorema 9.1.3, es claro que, si hay un valor excluido de la imagen, entonces tiene que ser siempre el mismo. En efecto, fijemos $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ y supongamos que

$$w_j \notin f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon_j\}), \qquad j = 1, 2.$$

Si $w_1 \neq w_2$, entonces

$$w_2 \in \mathbb{C}\backslash\{w_1\} \subset f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon_1\}) \subset f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon_2\}),$$

lo que es absurdo.

Demostración del Teorema 9.1.3: Supongamos que existen $\varepsilon > 0$ y dos valores $w_1 \neq w_2$ que no pertenecen al conjunto $f(\{0 < |z - z_0| < \varepsilon\})$. Luego, la función

$$g(z) := \frac{f(z + z_0) - w_1}{w_2 - w_1}$$

tiene una singularidad esencial en 0 y vale

$$0, 1 \notin g(\{0 < |z| < \varepsilon\}).$$

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n : \{0 < |z| < \varepsilon\} \to \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}$ dada por $g_n(z) = g\left(\frac{z}{n}\right)$, entonces por Montel-Caratheodory tenemos dos situaciones posibles:

1. Existe una subsucesión $\{g_{n_j}\}$ que converge uniformemente sobre compactos a una función holomorfa. Luego, podemos fijar por ejemplo una constante M tal que para todo n_j vale
$$\left|g\left(\frac{z}{n_j}\right)\right| = |g_{n_j}(z)| \leq M \qquad \text{para } |z| = \frac{\varepsilon}{2}$$
es decir
$$|g(w)| \leq M \qquad \text{si } |w| = \frac{\varepsilon}{2n_j}.$$
Consideremos el anillo $A_j := \{\frac{\varepsilon}{2n_{j+1}} < |w| < \frac{\varepsilon}{2n_j}\}$; por el principio de módulo máximo, vale
$$|g(w)| \leq M, \qquad w \in \overline{A_j}.$$
Como esto se verifica para todo j, concluimos que g es acotada en el disco punteado $\{0 < |w| < \frac{\varepsilon}{2}\}$. Esto quiere decir que 0 es una singularidad evitable, lo que es absurdo.

2. Existe una subsucesión $g_{n_j} \to \infty$ uniformemente sobre compactos. Entonces $\frac{1}{g_{n_j}} \to 0$ uniformemente sobre compactos y, por el caso anterior, se deduce que la función $\frac{1}{g}$ tiene una singularidad evitable en 0 y otra vez llegamos (de manera inevitable) a un absurdo.

$\square$

9.2. Algunas consecuencias

Ante las maravillas de la sección previa, cabe preguntarse si el Teorema de Picard tiene alguna aplicación o se trata solamente de una “cara bonita”. En el terreno del análisis complejo, no es difícil ver que la tiene: por ejemplo, para responder una pregunta que surge de manera bastante natural en el ámbito de los dominios simplemente conexos.

Ejemplo 9.2.1. Supongamos que U es simplemente conexo y $f : U \to \mathbb{C}$ es holomorfa. Si f es inyectiva, sabemos que f' no se anula. Pero sabemos que la recíproca no vale: tenemos el ejemplo de la exponencial, que no nos deja fantasear con cosas raras. Y ni siquiera hace falta ir tan lejos; la función $f(z) = z^2$ transforma un entorno U de la semicircunferencia unitaria en un anillo: precisamente, las imágenes de puntos cercanos a 1 se superponen con las de puntos cercanos a -1. Esta observación ayuda a entender mejor lo que ocurre, porque hay otra condición necesaria que no tuvimos en cuenta: si f es inyectiva, entonces $f : U \to f(U)$ es un difeomorfismo conforme, de modo que $f(U)$ también tiene que ser simplemente conexo. La pregunta es si estas dos condiciones necesarias para la inyectividad serán también suficientes.

La cuestión no es trivial y, de hecho, se han publicado algunas supuestas demostraciones de que una f así es forzosamente inyectiva. Pero una picardía (por así decirlo) nos muestra que, como dice la canción, todas las demostraciones nos salieron mal. Consideremos por ejemplo una función no constante g que sea entera y par ($g(z) = z^2$, pongamos por caso), y llamemos $f(z)$ a la primitiva de $e^{g(z)}$ que se anula en $z = 0$. Es claro, por un lado, que $f' \neq 0$ y, por otro, que f es impar. Si f fuera inyectiva, entonces su imagen sería un conjunto simplemente conexo... pero no todo $\mathbb{C}$ porque, de acuerdo con el Teorema 7.1.2, en ese caso debería ser lineal. Esto quiere decir que existe algún punto w que no está en la imagen. Pero además $w \neq 0$ y, como f es impar, también sabemos que $-w \notin \mathrm{Im}(f)$. De esta forma, la imagen de f excluye dos puntos: esto prueba que f es constante, lo que es absurdo.

Según dijimos -con una buena dosis de literalidad- el ejemplo previo es una picardía, aunque de las pequeñas, ya que usa solamente el Teorema 9.0.1. En cambio, el siguiente ejemplo corresponde a un ámbito completamente distinto y emplea toda la maquinaria del Teorema 9.0.2.

Ejemplo 9.2.2. En la teoría de ecuaciones diferenciales existe una clase especial de problemas que incluye un retardo, por ejemplo en la forma

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)).$$

Esto es muy común en diversas aplicaciones: imaginemos, con espíritu matemático, que queremos darnos una ducha. La mayoría de las personas lo hace de vez en cuando y, por tal motivo, conoce la técnica: se trata de girar el grifo hacia un lado o el otro, en procura de que el agua vaya alcanzando la temperatura deseada T. Esto se puede describir mediante una ecuación diferencial, en la cual la variación de la temperatura en cada instante t depende de la diferencia entre su valor en t y la temperatura ideal. No es lo más frecuente concurrir a la ducha provistos de lápiz y papel, así que vamos a simplificar muchísimo la situación asumiendo que la temperatura x se rige por la fórmula

$$x'(t) = a[T - x(t)]$$

donde a es una constante positiva. El término de la derecha se puede pensar como una especie de *control*: si la temperatura es menor que T, queremos que x aumente y por eso el término de la derecha es positivo; en cambio, si $x(t) > T$ es porque nos estamos quemando, de modo que accionamos el grifo para lograr que x disminuya. La ecuación anterior se resuelve fácilmente y sus soluciones tienden a T; sin embargo, todos sabemos que la realidad no es tan idílica sino que, en general, recién llegamos a una temperatura aceptable después de haber pasado algunas veces del agua que pela a congelarnos hasta los tuétanos. Este fenómeno (no muy fenomenal, que digamos) se conoce como *oscilaciones*, cuya presencia de debe al hecho de que, en realidad, al modelo anterior le falta tener en cuenta un detalle. La clave está en que, en realidad, nuestra acción llega con cierto retraso, debido a la distancia entre el grifo y la regadera de la ducha. Si suponemos que el tiempo transcurrido entre nuestro manotazo desesperado y el momento en que el agua se empieza a mezclar es una constante $r > 0$, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$x'(t) = a[T - x(t - r)]$$

o bien, llamando $y := T - x$,

$$y'(t) = -ay(t - r). \tag{9.1}$$

A diferencia de las ordinarias, esta ecuación puede tener soluciones que oscilan: por ejemplo, poniendo $a = 1$ y $r = \frac{\pi}{2}$ tenemos la solución $y(t) = \operatorname{sen} t$, pues

$$y'(t) = \cos t = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -y\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

No es difícil comprobar que si la cañería es corta (por ejemplo, las duchas de un vestuario en Liliput) entonces las eventuales oscilaciones son pequeñas; en cambio, para $r > \frac{\pi}{2}$ existen soluciones con oscilaciones no acotadas y nuestra ducha puede resultar un completo fracaso. Por eso, antes de elegir alojamiento para un viaje, resulta conveniente consultar sobre la longitud de las cañerías, información que no suele figurar en los sitios de reservas online.

Ahora supongamos que, al volver de las vacaciones, queremos calcular todas las soluciones de la ecuación (9.1). En tales casos, siempre es sabio proponer soluciones complejas de la forma $y(t) = e^{\lambda t}$, que, al reemplazar en (9.1), dan lugar a la igualdad

$$\lambda e^{\lambda t} = ae^{\lambda(t-r)},$$

es decir

$$\lambda = ae^{-\lambda r}.$$

Si se tratara de una ecuación ordinaria (con $r = 0$), esto daría lugar al famoso *polinomio caracteristíco*, que en un caso tan zonzo como este consistiría simplemente en la función lineal $\lambda - a$. Pero para $r > 0$ no queda una ecuación polinómica sino *trascendente* y, como veremos, pueden existir muchas soluciones linealmente independientes. En efecto, sabiendo ya que $\lambda \neq 0$, se puede hacer el reemplazo $z = \frac{1}{\lambda}$, para obtener la ecuación equivalente

$$aze^{-\frac{r}{z}} = 1.$$

Ahora bien, el término de la izquierda es una función holomorfa, con una singularidad esencial en $z = 0$, que además no se anula. Esto quiere decir, Picard mediante, que cualquier otro valor $w \neq 0$ tiene infinitas preimágenes; en particular, eso ocurre para $w = 1$, lo que muestra la existencia de una sucesión $z_n \to 0$ de soluciones, es decir: una sucesión $\lambda_n \to \infty$ de valores característicos. Cabe decir que, en este ejemplo específico, no hacía falta invocar resultados tan potentes para llegar a la conclusión porque la ecuación característica puede resolverse “a mano”. Sin embargo, en situaciones más generales, la tarea puede volverse mucho más complicada.

No deja de ser notable que el ejemplo cero de la teoría de ecuaciones con retardo (una ecuación de primer orden, lineal, homogénea y con coeficientes constantes) nos haya llevado, de manera tan rápida, a hablar de singularidades esenciales y otras tantas fuentes de deleite. Pero ya habrá otra ocasión de hablar de estas cuestiones; por el momento, es tiempo de cerrar el agua de la ducha y, con ella, este curso de variable compleja.

Bibliografía

[1] L. Ahlfors, *Análisis de variable compleja*, Aguilar, 1966.

[2] P. Amster, J. A. Cid, *The full power of the square power*. Expositiones Mathematicae 40 no. 4 (2022), 994–1013.

[3] H. Cartan, *The Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*. Dover Publications Inc., 1995.

[4] C. Ivorra Castillo, *Funciones de variable compleja*. Versión electrónica disponible en https://www.uv.es/ivorra/Libros/Varcom.pdf

[5] Z. Li, Q. Yi, *A remark on Schottky's theorem*. Bulletin of The London Mathematical Society 39 (2007), 242–246.

[6] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, Madrid, 1988.

[7] J. Wästlund, *An elementary proof of Wallis' product formula for pi*. Linköping studies in Mathematics, No. 2, (2005). Texto disponible en http://liu.diva-portal.org/smash/get/diva2:375184/FULLTEXT01.pdf