ISSN 1851-1295

Fascículo 8

Cursos de grado

Roberto Cignoli

Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2016

Cursos de grado

Fascículo 8

ISSN 1851-1317 (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1295 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción

Roberto Cignoli

Índice general

Prefacio

Se ofrece una presentación de la axiomática de Zermelo–Fraenkel, que es hoy aceptada como un fundamento satisfactorio para la teoría de conjuntos. El objetivo es didáctico, no hay ningún resultado original. Está fuertemente influenciado por los textos en los que he aprendido la teoría de conjuntos, principalmente los libros de Halmos [7], de Shoenfield [14], de Krivine [10], de Sierpinski [15], de DiPrisco [4] así como los dos primeros capítulos del libro de Dugundji [6]. Reflejan la experiencia adquirida por el dictado de cursos básicos de teoría de conjuntos en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires. Debo a los alumnos de esos cursos muchas observaciones que han contribuido para mejorar la presentación. También debo agradecer las perspicaces observaciones hechas por Daniele Mundici después de una minuciosa lectura de una versión previa.

Si bien el tratamiento es riguroso, he procurado utilizar un estilo coloquial, motivando los conceptos introducidos para facilitar la comprensión de los mismos por parte de lectores que no asistan a un curso formal.

Los cuatro primeros capítulos dan los elementos de la teoría de conjuntos que se utilizan en los cursos de álgebra y de análisis: Enunciados equivalentes del Axioma de Elección, teoría de ordinales y cardinales. Los restantes son intrínsecos de la teoría de conjuntos: En el Capítulo 5 se consideran las consecuencias tanto del Axioma de Regularidad como de su negación. En el Capítulo 6 se utilizan los modelos internos para ejemplificar resultados de independencia de los axiomas y la insuficiencia de los mismos para probar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles. Finalmente en el Capítulo 7 se da una demostración del famoso resultado de Gödel sobre la consistencia relativa del Axioma de Elección.

Este libro puede considerarse preparatorio para estudios más avanzados de la teoría de conjuntos, principalmente los métodos de *forcing* introducidos por P. Cohen en la década de 1960, que además requieren conocimientos más sofisticados de Lógica Matemática (ver, por ejemplo el libro de Kunen [11]).

Para la historia del desarrollo de la teoría de conjuntos (y de la matemática en general) recomiendo el libro de Bourbaki [3].

Buenos Aires, Marzo de 2016

Roberto Cignoli

Capítulo 1

Teoría axiomática

1.1. La Paradoja de Russell

El matemático alemán Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos en base a la siguiente definición, dada por él en 1895:

> *Se entiende por conjunto la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra percepción o de nuestro pensamiento.*

Así, en principio, se podría considerar el conjunto de todos los caballos blancos, o el conjunto de todos los triángulos equiláteros.

Pero esta noción tan amplia de conjunto lleva a paradojas, como lo demostró el lógico inglés Bertrand Russell a principios del siglo XX. En efecto, la definición cantoriana permite concebir conjuntos que sean elementos de sí mismos: por ejemplo, el conjunto de todas las ideas abstractas es una idea abstracta. Siguiendo a Russell, llamaremos *ordinarios* a los conjuntos que no son elementos de si mismos, y *extraordinarios* a los demás. Esto es, un conjunto X es ordinario si y sólo si $X \notin X$ y extraordinario si y sólo si $X \in X$. De acuerdo con la definición de Cantor podemos considerar el conjunto A de todos los conjuntos ordinarios. Como A es un conjunto, deberá ser ordinario o extraordinario. Si A fuese ordinario, entonces debería ser $A \in A$, lo que significa que A sería extraordinario. Luego no puede ser A ordinario. Pero tampoco puede ser extraordinario, pues si A fuese extraordinario, entonces $A \notin A$, y por lo tanto sería ordinario. En otras palabras, hemos derivado la contradicción $A \in A$ si y sólo si $A \notin A$.

La noción cantoriana de conjunto está ligada a la noción de *propiedad*: Dada una propiedad P, podemos formar el conjunto $\{x : P(x)\}$ de los objetos que satisfacen P (y, recíprocamente, dado un conjunto C, le podemos asociar la propiedad "pertenecer a C").

En 1908, en su trabajo sobre los fundamentos de la teoría de conjuntos, el matemático alemán Ernest Zermelo señala que la paradoja de Russell muestra que no es admisible asignarle a cualquier propiedad lógicamente bien definida un conjunto como su extensión. Por lo tanto la definición original de Cantor debe restringirse, y como esta definición no ha podido ser reemplazada por otra que sea igualmente simple y que no de lugar a paradojas, Zermelo concluye que:

> *Bajo estas circunstancias no nos queda en este punto más que proceder en la dirección opuesta y, partiendo del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos, buscar los principios requeridos para fundamentar esta disciplina matemática. Para resolver este problema debemos, por un lado, restringir estos principios suficientemente para excluir contradicciones y, por el otro, elegirlos suficientemente amplios para retener todo lo de valor que tenga la teoría.*

En otras palabras, para eliminar la paradoja, Zermelo propone considerar como conjuntos sólo aquellos objetos que satisfagan las condiciones impuestas por ciertos axiomas. El propósito de este curso es desarrollar esta idea.

Intuitivamente, podemos pensar que los conjuntos se van formando en etapas: para poder formar un conjunto, todos sus posibles elementos deben ya estar definidos. Habría dos tipos de objetos: individuos (llamados *urelemente*) y conjuntos. En la etapa inicial sólo habría individuos. Los conjuntos de la primera etapa estarían formados por individuos. Los de la segunda etapa, por individuos y conjuntos de la primera etapa. En general, los conjuntos de una etapa estarían formados por individuos y conjuntos definidos en etapas anteriores.

Vamos a considerar una teoría *pura* de conjuntos, esto es, *sin individuos.* Entonces en la primera etapa tendremos el conjunto vacío $\emptyset$, en la segunda $\emptyset$ y el conjunto que tiene por único elemento al vacío $\{\emptyset\}$, en la tercera $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ y así siguiendo. De esta manera podemos concebir una colección de objetos, que llamaremos el **universo de la teoría de conjuntos** y denotaremos por $\mathcal{U}$. En $\mathcal{U}$ tenemos una relación binaria, que llamaremos **relación de pertenencia** y denotaremos por $\in$. Si a, b son objetos de $\mathcal{U}$, $a \in b$ se lee como "a pertenece a b" o "a es un elemento de b". La relación $a \in b$ puede darse sólo si a aparece en una etapa anterior a la aparición de b.

La teoría axiomática que desarrollaremos, debida esencialmente a Zermelo, tiene como propósito formalizar estas ideas intuitivas sobre el universo $\mathcal{U}$ y la relación $\in$.

Para conseguir este propósito, debemos fijar algunas propiedades básicas como axiomas. Pero aquí se plantea otra cuestión ¿Qué tipo de propiedades son admisibles? Obviamente deben ser propiedades que se refieran a conjuntos. La siguiente paradoja, debida a Berry y divulgada por Russell, si bien se refiere a números y no a conjuntos, muestra que hay que ser cuidadosos:

Sea P la propiedad "ser definible por medio de una oración en idioma castellano de no más de treinta palabras". La propiedad P tiene sentido para números naturales: si n es un número natural, $P(n)$ será verdadera si y sólo si n puede definirse en castellano con no más de treinta palabras. Como hay sólo un número finito de oraciones castellanas que se pueden formar con no más de treinta palabras, debe haber números naturales que no satisfacen P. Sea m el primer número natural que no satisface P. Esto es, "m es el primer número natural que no puede definirse en castellano por medio de una oración con no más de treinta palabras". Pero esta oración define a m, está en castellano y tiene veintitrés palabras. Por lo tanto m satisface P, contrariando la definición de m.

Esta paradoja es de naturaleza ditinta a la de Russell, pues si bien P tiene sentido para números, no es una propiedad de los números sino del lenguaje que utilizamos para expresarla.[1] Para estar seguros de que hay un primer número que satisface una cierta propiedad, ésta debe referirse sólo a condiciones derivadas de las operaciones aritméticas, independientemente del lenguaje que usemos para expresarla. Análogamente, al hablar de propiedades de conjuntos, queremos decir propiedades que se puedan expresar en términos de las relaciones de igualdad y pertenencia. Comenzaremos entonces por definir un lenguaje adecuado para expresar en forma precisa tales propiedades.

1.2. El lenguaje de la teoría

Un lenguaje está formado por listas (finitas) de símbolos. Luego para definir un lenguaje debemos dar un número finito de símbolos básicos, que

[1]Para una interpretación de la Paradoja de Berry en lenguajes formales y sus aplicaciones a la lógica matemática, ver [5].

constituyen el **alfabeto** y las reglas que nos indiquen que listas de símbolos son admisibles.

El lenguaje que vamos a definir para formalizar la teoría de conjuntos es un caso particular de los lenguajes de primer orden, estudiados en lógica matemática.

El alfabeto que usaremos está formado por los símbolos:

$$v,\ |,\ \wedge,\ \neg,\ (,\ ),\ \exists,\ =,\ \in .$$

$\wedge$ y $\neg$ son los conectivos de **conjunción** y de **negación** y $\exists$ es el **cuntificador existencial**.

Llamaremos **variables individuales** o simplemente **variables** a las listas formadas por el símbolo v seguido de un número finito de barras $|$. Para simplificar la escritura, usaremos v_n como abreviatura de v seguido de n barras. Así $v_0 = v$, $v_1 = v|$, $v_2 = v||$, etc.

Llamaremos **fórmula atómica** a las listas de símbolos de la forma: $(x \in y)$ y $(x = y)$, donde x e y denotan variables.

Podemos dar ahora las reglas de formación de los elementos principales de nuestro lenguaje, que se llaman **fórmulas**.

Una lista de símbolos es una fórmula si se la puede generar mediante un número finito de pasos respetando las siguiente reglas:

F1) Las fórmulas atómicas son fórmulas.

F2) Si φ es una fórmula, entonces $\neg\varphi$ también lo es.

F3) Si φ y ψ son fórmulas, también lo es $(\varphi \wedge \psi)$.

F4) Si φ es una fórmula y x una variable, entonces $\exists x\varphi$ es una fórmula.

¿Qué significa que una lista de símbolos se obtenga aplicando un número finito de veces las reglas F1) – F4)? La respuesta precisa es la siguiente:

Definición 1.2.1. Llamaremos **cadena de formación de fórmulas** a una lista finita $X_1, X_2, \ldots, X_n$, donde para cada i, $1 \leq i \leq n$, X_i es una lista finita de símbolos del alfabeto que satisface una (y sólo una) de las siguientes condiciones:

CFF1) X_i es una fórmula atómica,

CFF2) o bien existe $1 \leq j < i$ tal que X_i es $\neg X_j$,

CFF3) o bien existen $1 \leq j, k < i$ tales que X_i es $(X_j \wedge X_k)$,

CFF4) o bien existe $1 \leq j < i$ y una variable x tal que X_i es $\exists x X_j$.

Una lista X de símbolos del alfabeto es una fórmula si y sólo si existe una cadena de formación de fórmulas $X_1, \ldots, X_n$ tal que $X = X_n$.

Debemos notar que *los cuantificadores se aplican únicamente a las variables* y no a otro tipo de expresiones. Esta propiedad caracteriza a los *lenguajes de primer orden.*

Llamaremos **grado de complejidad de una fórmula** φ, y lo denotaremos por $\mathrm{comp}(\varphi)$, al número de conectivos y cuantificadores que figuran en φ, contados tantas veces como aparezcan.

Observemos que:

1. $\mathrm{comp}(\varphi) = 0$ si y sólo si φ es una fórmula atómica,
2. $\mathrm{comp}(\neg\varphi) = \mathrm{comp}(\varphi) + 1$,
3. $\mathrm{comp}(\varphi \wedge \psi) = \mathrm{comp}(\varphi) + \mathrm{comp}(\psi) + 1$,
4. $\mathrm{comp}(\exists x\varphi) = \mathrm{comp}(\varphi) + 1$.

Como una aplicación de lo anterior, definiremos inductivamente la noción de **subfórmula** de una fórmula.

Sea φ una fórmula. Si $\mathrm{comp}(\varphi) = 0$ (esto es, si φ es una fórmula atómica), entonces φ es la única subfórmula de φ. Supongamos ahora que $\mathrm{comp}(\varphi) = n > 0$ y que hemos definido subfórmulas para toda fórmula de complejidad menor que n. Si $\varphi = \neg\psi$ o si $\varphi = \exists x\psi$, entonces $\mathrm{comp}(\psi) = n - 1$, y las subfórmulas de φ son φ, ψ y las subfórmulas de ψ. Si $\varphi = (\psi \wedge \zeta)$, entonces debe ser $\mathrm{comp}(\psi) < n$ y $\mathrm{comp}(\zeta) < n$. Las subfórmulas de φ son φ, ψ, ζ y las subfórmulas de ψ y de ζ. Esto completa la definición de subfórmula para cualquier fórmula φ.

En lo que sigue no expresaremos todas nuestras fórmulas usando sólo símbolos del alfabeto, sino que introduciremos nuevos símbolos como abreviaturas de fórmulas enteras e incluso expresaremos algunas ideas en lenguaje coloquial.

Por de pronto, introducimos los conectivos de **disyunción** $\vee$, **implicación** $\rightarrow$, **si y sólo si** $\leftrightarrow$ y el **cuantificador universal** $\forall$ del modo siguiente:

Para fórmulas φ, ψ y variable x se tiene que:

1. $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\, \varphi \wedge\ \neg\, \psi)$,
2. $\varphi \rightarrow \psi \equiv \neg\, \varphi \vee \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\, \psi)$,
3. $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$,
4. $\forall x\varphi \equiv \neg\, \exists\, x\, \neg\varphi$.

Las expresiones de la izquierda deben entenderse como una abreviatura de las expresiones de la derecha.

Además, en algunas ocasiones, para mayor claridad en fórmulas anidadas, usaremos llaves $\{, \}$ y corchetes $[,]$ además de paréntesis como símbolos de puntuación, o simplemente no usaremos ningún símbolo si la puntuación queda sobreentendida. Usaremos las letras x, y, z (posiblemente con subíndices) para designar variables. Además seguiremos el uso habitual en matemática y abreviaremos las negaciones $\neg(x = y)$ y $\neg(x \in y)$ por $x \neq y$ y $x \notin y$, respectivamente.

Por ejemplo
$$(\exists\, y\ (y \in x)) \rightarrow (\forall x\ ((x \notin y))) \tag{1.1}$$
abrevia la fórmula
$$(\neg\ (\neg\ (\exists\ y\ (y \in x))) \wedge (\neg\ ((\neg\ \exists\ \neg x(\neg\ (x \in y))))))$$

Una variable x figura **ligada** en una fórmula φ si está afectada por un cuantificador $\exists x$ o $\forall x$. En caso contrario, se dice que figura **libre** en φ.

Por ejemplo la primera y segunda vez que figura y en (1.1) está ligada y la tercera, libre. La primera vez que figura x está libre, mientras que la segunda y tercera está ligada.

Definición 1.2.2. Un **enunciado** es una fórmula sin variables libres.

En todo este curso supondremos que *las variables representan conjuntos, esto es, individuos del universo $\mathcal{U}$*. Luego $\exists\ x$ se interpreta como "existe un conjunto x" y $\forall\ x$ como "para todo conjunto x".

Los enunciados expresan propiedades del universo que dependen sólo de la relación de pertenencia y de las relaciones lógicas (incluyendo entre éstas la igualdad). Estos enunciados serán verdaderos si y sólo si expresan una propiedad del universo de acuerdo a la mencionada interpretación. En realidad como en toda teoría axiomática vamos a considerar verdaderos aquellos enunciados que puedan deducirse de los enunciados que tomamos como axiomas aplicando las reglas lógicas habituales para el uso de los conectivos y cuantificadores[2].

Escribiremos $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que las variables $x_1, \ldots, x_n$ figuran libres en la fórmula φ. A diferencia de los enunciados, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ no expresa una proposición verdadera o falsa. Será verdadera o falsa según los valores que tomen las variables (esto es análogo a lo que ocurre con las expresiones algebraicas del tipo $5x + 3 = 2y$).

Cuando una variable figura como libre en una fórmula φ puede ser reemplazada por otra variable que no figure en φ sin cambiar el significado de la fórmula. Si y es una variable que no figura en φ, escribiremos $\varphi(x|y)$ para indicar la fórmula que se obtiene reemplazando todas las veces que x figura como libre por la variable y, y dejando el resto inalterada.

Usaremos también la siguiente notación, común en los textos de matemática, para indicar que hay un único objeto que hace verdadera a una fórmula: si $\varphi(x)$ es una fórmula con x libre, $\exists! x\varphi(x)$ abrevia la fórmula

$$(\exists x\varphi(x)) \ \wedge \ (\forall x\forall y((\varphi(x) \wedge \varphi(x|y)) \ \rightarrow \ (y = x))).$$

Dada una fórmula con una única variable libre, $\varphi(x)$, llamaremos **clase** a la colección de objetos $\mathcal{C}_\varphi$ del universo $\mathcal{U}$ formada por los x tales que $\varphi(x)$ es verdadera, y escribiremos $\mathcal{C}_\varphi = \{x : \varphi(x)\}$. Diremos informalmente que x *está* en la clase $\mathcal{C}_\varphi$ si $\varphi(x)$ es verdadero. Cuando no sea necesario especificar la fórmula φ, denotaremos una clase simplemente por $\mathcal{C}$ y escribiremos $\mathcal{C}(x)$ para indicar que x está en $\mathcal{C}$.

La idea de clase se corresponde con la idea de conjunto en el sentido de la definición de Cantor: son los objetos que satisfacen una cierta propiedad. Pero en nuestra teoría, los conjuntos son los *individuos* del universo, y *no* las colecciones de individuos, que son las clases[3].

[2]El lector interesado podrá encontrar los detalles sobre las interpretaciones de los lenguajes de primer orden y la noción de verdad para los mismos en cualquier texto de lógica matemática.

[3]Existen tratamientos de la teoría de conjuntos donde las clases intervienen como objetos que conforman la teoría. Este tratamiento es seguido en el libro de Suppes [16] y en el Apéndice de [9]

Tanto las clases, como el universo $\mathcal{U}$, no constituyen objetos de la teoría. Son nociones intuitivas que ayudan a entender los conceptos tratados. En realidad, todo el desarrollo de la teoría se basa en la manipulación formal de listas de símbolos del alfabeto.

1.3. Primeros axiomas

Los axiomas de esta sección se los llama con frecuencia *axiomas del álgebra de conjuntos*, ya que con ellos es posible definir las operaciones elementales de unión, intersección, producto cartesiano, etc.

Es razonable pensar que si dos conjuntos tienen los mismos elementos deben ser iguales. Esto es lo que expresa el siguiente axioma. Formalmente, relaciona el símbolo de igualdad $=$ con el de pertenencia $\in$.

Axioma de Extensionalidad: $\forall x \; \forall y \; ((\forall t \; (t \in x \; \leftrightarrow \; t \in y)) \; \rightarrow \; (x = y))$.

Como $x = y$ implica que x e y tienen las mismas propiedades, resulta que también vale que

$$\forall x \; \forall y \; ((x = y) \rightarrow ((\forall t \; (t \in x \; \leftrightarrow \; t \in y)))),$$

por lo que el Axioma de Extensionalidad significa que *dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.*

La definición que sigue es un ejemplo de introducción de un símbolo nuevo en la teoría.

Definición 1.3.1. Sean a y b conjuntos. Diremos que a es un **subconjunto** de b o que a está **incluido** o **contenido** en b y lo escribiremos $a \subseteq b$, si $\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$. Escribiremos $a \subset b$ para indicar que $a \subseteq b$ y $a \neq b$.

Utilizando el nuevo símbolo $\subseteq$, el Axioma de Extensionalidad puede expresarse así:

$$\forall x \forall y(((x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)) \rightarrow (x = y)). \tag{1.2}$$

Axioma del Vacío: $\exists y \; \forall x \; \neg(x \in y)$.

Si a es vacío y b es un conjunto, entonces $a \subseteq b$. En efecto, es cierto que $\forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$ debido a que $(x \in a)$ es falso cualquiera sea x. De acá resulta que el conjunto vacío es único. En efecto, si a y b son ambos vacíos, tendremos que $a \subseteq b$ y $b \subseteq a$, y por (1.2), resulta que $a = b$. El conjunto vacío será simbolizado por $\emptyset$.

Axioma (esquema) de Especificación: Si φ es una fórmula con la variable t libre, entonces el enunciado siguiente es un axioma:

$$\forall\, x\, \exists\, y\ ((\forall t\ (t \in x\ \wedge\ \varphi(t))\ \leftrightarrow\ (t \in y)).$$

Los axiomas deben ser enunciados del lenguaje de la teoría de conjuntos. El axioma anterior no es un axioma, sino un esquema para formar axiomas. Para cada fórmula φ tenemos un axioma. Como hay infinitas fórmulas, el esquema nos da infinitos axiomas.

Observemos que del Axioma de Extensionalidad se deduce fácilmente que para toda fórmula $\varphi(t)$ y todo conjunto x, el conjunto y cuya existencia garantiza el Esquema de Especificación es único. Será designado con la siguiente notación:

$$\{t \in x : \varphi(t)\}.$$

Intuitivamente, el Esquema de Especificación significa que dada una propiedad P, podemos formar un conjunto *con los elementos de un conjunto a* que satisfacen la propiedad. Esta restricción de la propiedad P a los elementos de un conjunto a previamente dado es coherente con nuestra descripción intuitiva del universo $\mathcal{U}$: todos los elementos de a deben haberse definido en etapas anteriores, por lo tanto están disponibles para ser elementos de un conjunto. Esta restricción es la idea fundamental de Zermelo para evitar paradojas del tipo de la de Russell. En efecto, para poder demostrar que la clase $\{x : x \notin x\}$ es un conjunto aplicando el Esquema de Especificación, habría que demostrar primero el enunciado $\exists y \forall x (x \notin x \to x \in y)$, esto es, que hay un conjunto que contiene a todos los conjuntos ordinarios. Volveremos sobre este punto en el Capítulo 5. Ahora nos contentaremos con ver que el universo $\mathcal{U}$ no puede ser un conjunto, esto es, que no puede existir un conjunto u tal que $\forall x (x \in u)$. Más generalmente, veamos que:

$$\forall x\ \exists y\ (y \notin x).$$

En efecto,sea a un conjunto y sea $b = \{x \in a :\ x \notin x\}$. Si $b \in a$, entonces $b \notin b \wedge b \in a\ \leftrightarrow\ b \in b \wedge b \in a$, que una contradicción. Luego $b \notin a$.

Axioma del Par: $\forall x\ \forall y\ \exists z \forall t\ (((t = x) \vee (t = y))\ \leftrightarrow (t \in z))$.

Por el Axioma de Extensionalidad el conjunto z debe ser único, lo que justifica la siguiente definición:

Definición 1.3.2. Llamaremos **par (desordenado)** y lo denotaremos por $\{x, y\}$, al conjunto que tiene por únicos elementos x, y, y cuya existencia está garantizada por el Axioma del Par.

Cuando $x = y$ obtenemos el **conjunto unitario** $\{x\}$, cuyo único elemento es x.

Observemos que el Axioma del Par está de acuerdo con nuestra idea intuitiva del universo: Si hemos definido los conjuntos a y b, en una etapa posterior podrán ser elementos de un conjunto.

Notemos también que $\forall x (x \in \{x\})$. Esto significa que todo conjunto es elemento de otro conjunto, y concuerda con la idea de que no hay una etapa final.

Antes de proseguir con el listado de axiomas, diremos algo respecto de definiciones y expresiones como la del par.

Si $\varphi(x, y)$ es una fórmula con dos variables libres x e y y $\mathcal{C}$ una clase, y supongamos que es verdadero $\forall x\ (\mathcal{C}(x) \ \rightarrow\ \exists! y \varphi(x, y))$ (ver la notación introducida en la página 7), entonces diremos que $\varphi(x, y)$ es **funcional** en $\mathcal{C}$. En estas circunstancias tiene sentido introducir el símbolo F y la notación $y = F(x)$, para simbolizar que dado x en $\mathcal{C}$, y es el único conjunto para el cual $\varphi(x, y)$ es verdadera. A F la llamaremos **operación** o **relación funcional** sobre $\mathcal{C}$. Es fácil generalizar esta idea para obtener fórmulas funcionales de múltiples variables. La definición de par es justamente una operación en $\mathcal{U}$ que a dos conjuntos cualesquiera x e y asigna el conjunto z tal que $z = \{x, y\}$. Otros ejemplos de operaciones los veremos a continuación con la presentación de los axiomas que siguen.

Axioma de Unión: $\forall x\ \exists z\ \forall t\ ((\exists y\ (y \in x \wedge t \in y)) \ \leftrightarrow\ (t \in z))$.

Como por el Axioma de Extensionalidad el conjunto z resulta ser único, podemos dar la siguiente definición:

Definición 1.3.3. Dado un conjunto a, llamaremos **unión** de a y lo denotaremos por $\cup a$ al conjunto que tiene por elementos a los elemementos de los elementos de a, cuya existencia está garantizada por el Axioma de la Unión:

$$\forall x[x \in \cup a \leftrightarrow (\exists y\ (y \in a\ \wedge x \in y))].$$

Una notación que puede resultar más familiar para la unión es $\cup_{c \in a} c$. Esta notación está ligada a la noción de familia de conjuntos, que veremos un poco más adelante.

Si c es un par, digamos $c = \{a, b\}$, entonces siguiendo la costumbre escribiremos $a \cup b$ en vez de $\cup\{a, b\}$.

Según nuestra idea intuitiva, los elementos de un conjunto a son conjuntos obtenidos en etapas anteriores. A su vez, los elementos de estos conjuntos deben haber sido obtenidos en etapas previas a su definición. Por consiguiente todos ellos están disponibles para formar la unión, por lo que el Axioma de la Unión es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$.

Observemos que de los Axiomas del Par y de la Unión resulta fácilmente que dado un número finito de conjuntos $a_1, \ldots a_n$, podemos formar un conjunto que los tiene como elementos. El (único) conjunto formado por estos elementos será denotado por $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Otra operación importante en el álgebra de conjuntos es la intersección. Pero para definirla no necesitamos un nuevo axioma.

Definición 1.3.4. Sea a un conjunto no vacío, llamaremos **intersección** de a al conjunto

$$\cap a = \{x \in b : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\}$$

donde b es cualquier elemento de a.

El Esquema de Especificación asegura que para todo $a \neq \emptyset$, $\cap a$ es un conjunto, y el Axioma de Extensionalidad asegura que $\cap \, a$ no depende del conjunto $b \in a$ elegido para definirla. En efecto, si b y c son elementos de a, entonces los conjuntos

$$\{x \in b : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\} \ \text{ y } \ \{x \in c : \ \forall y \ (y \in a \ \rightarrow x \in y)\}$$

tienen los mismos elementos.

Como en el caso de la unión, escribiremos $a \cap b$ en vez de $\cap\{a, b\}$.

El motivo por el que la definición de intersección se aplica sólo a conjuntos no vacíos es el siguiente: Dado un conjunto x, para probar que $x \notin \cap \, \emptyset$ deberíamos probar que existe un $y \in \emptyset$ tal que $x \notin y$. Como esto no es posible, debemos tener que $\cap \, \emptyset = \mathcal{U}$, que ya sabemos que no es un conjunto.

Definición 1.3.5. La **diferencia** de los conjuntos a y b es el conjunto

$$a \setminus b = \{x \in a : \ x \notin b\}.$$

Siguiendo con nuestra idea intuitiva de formación de los conjuntos, tenemos que si un conjunto a ha sido obtenido en una cierta etapa, entonces todos sus elementos deben haber sido obtenidos en etapas anteriores. Luego en la misma etapa en la que está disponible a están también disponibles todos los subconjuntos de a, lo que permite tomarlos como elementos de un nuevo conjunto en una etapa posterior. Resulta entonces natural el axioma siguiente:

Axioma del Conjunto Potencia: $\forall x\ \exists y\ (\forall t\ (t \subseteq x\ \leftrightarrow\ t \in y))$.

Como el Axioma de Extensionalidad implica la unicidad del conjunto y, damos la siguiente definición:

Definición 1.3.6. Dado un conjunto a, llamaremos **partes** de a o **potencia** de a, y lo denotaremos por $\mathcal{P}(a)$, al conjunto que tiene por elementos a los subconjuntos de a y cuta existencia está garantizada por el Axioma del Conjunto Potencia: $\forall x(x \in \mathcal{P}(a) \leftrightarrow x \subseteq a)$.

Ejemplo: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Es un resultado elemental de la teoría intuitiva de conjuntos que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos. Partiendo del ejemplo anterior, vemos así que tomando partes de partes podemos formar conjuntos finitos tan grandes como queramos.

Con los axiomas vistos hasta ahora no sólo se puede desarrollar el álgebra elemental de conjuntos, sino que también permiten definir dentro de la teoría las nociones de producto cartesiano, de relación y de función.

Para definir el producto cartesiano necesitamos la noción de par ordenado. La propiedad fundamental de los pares ordenados es que permite distinguir entre el primero y el segundo elemento del par, esto es, $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. La única justificación de la siguiente definición de par ordenado, debida a Kuratowski, es la satisfacción de esta propiedad.

Definición 1.3.7. Dados dos conjuntos a y b, se llama **par ordenado** con primer elemento a y segundo elemento b al conjunto $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

No es difícil probar que la definición anterior implica que $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$ (ver Ejercicio 1.4.9).

La definición de par ordenado es suficientemente simple como para poder mostrar explícitamente la fórmula $\varphi(x, y, z)$ del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos que expresa que $z = \langle x, y\rangle$, suponiendo que $x = v_0$, $y = v_1$ y $z = v_2$:

$$\forall v_3[(v_3 \in v_2) \leftrightarrow$$
$$((\forall v_5((v_5 \in v_3) \leftrightarrow (v_5 = v_0))) \vee (\forall v_6((v_6 \in v_3) \leftrightarrow ((v_6 = v_0) \vee (v_6 = v_1)))))].$$

Definición 1.3.8. Dados dos conjuntos a y b llamaremos **producto cartesiano** de a por b al conjunto $a \times b = \{\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)) : (x \in a) \wedge (y \in b)\}$.

La noción de producto cartesiano permite definir las nociones de relación binaria y de función.

Definición 1.3.9. Llamaremos **relación** entre los conjuntos a y b a cualquier subconjunto del producto cartesiano $a \times b$. Dada la relación $r \subseteq a \times b$, se llama **dominio** de r al conjunto

$$\mathrm{dom}(r) = \{x \in a : \exists y((y \in b) \wedge (\langle x, y\rangle \in r))\}$$

y se lama **imagen** de r al conjunto

$$\mathrm{img}(r) = \{y \in b : \exists x(x \in a \wedge \langle x, y\rangle \in r)\}.$$

Una relación $r \subseteq a \times a$ se dirá una **relación binaria sobre** a.

Como un primer ejemplo de relación binaria sobre un conjunto a tenemos la **relación de igualdad**:

$$\Delta(a) = \{(x, y) \in a \times a : x = y\}. \tag{1.3}$$

Se tiene que $\mathrm{dom}(\Delta(a)) = \mathrm{img}(\Delta(a)) = a$.

Observación 1.3.10. Al definir una relación como un subconjunto de $a \times b$, parecería que estamos restringiendo la idea intuitiva de relación binaria a aquellas relaciones entre elementos de dos conjuntos previamente dados. Parecería más natural definir una relación binaria simplemente como un conjunto de pares ordenados, sin referencia a los conjuntos a y b. Esto es, llamar relaciones binarias a los conjuntos r que satisfacen la siguiente propiedad:

$$z \in r \rightarrow \exists x \exists y(z = \langle x, y\rangle).$$

Pero en realidad esta definición no sería más general que la dada. En efecto, como por hipótesis r es un conjunto, podemos definir $\cup r$, y si $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in r$, entonces $\{x, y\} \in \cup r$. Luego $x \in \cup \cup r$ e $y \in \cup \cup r$, lo que significa que $r \subseteq \cup \cup r \times \cup \cup r$. En particular tenemos que $\mathrm{dom}(r) \subseteq \cup \cup r$ e $\mathrm{img}(r) \subseteq \cup \cup r$.

La observación anterior sugiere extender la noción de dominio e imagen para conjuntos arbitrarios del modo siguiente:

Dado un conjunto a, se llama **dominio** de a al conjunto

$$\mathrm{dom}(a) = \{x \in \cup \cup a : \exists y \, \langle x, y \rangle \in a\} \tag{1.4}$$

y se llama **imagen** de a al conjunto

$$\mathrm{img}(a) = \{y \in \cup \cup a : \exists x \, \langle x, y \rangle \in a\}. \tag{1.5}$$

NOTACIÓN: En lo sucesivo, para simplificar la escritura, utilizaremos las abreviaturas:

$$\forall x \in y \; \varphi(x) \;\text{ y }\; \exists x \in y \; \varphi(x)$$

en lugar de

$$\forall x((x \in y) \to \varphi(x)) \text{ y de } \exists x((x \in y) \wedge \varphi(x)),$$

respectivamente.

Definiremos dos tipos de relaciones que serán utilizadas con frecuencia.

Definición 1.3.11. Una relación binaria r definida en un conjunto a se llama una **relación de orden**, o, simplemente, un **orden** sobre a si satisface las siguientes propiedades:

1. *Reflexiva:* $\forall x \in a \; (\langle x, x \rangle \in r)$,
2. *Antisimétrica:* $\forall x \forall y (((\langle x, y \rangle \in r) \wedge (\langle y, x \rangle \in r) \to x = y))$,
3. *Transitiva:* $\forall x \forall y \forall z (((\langle x, y \rangle \in r) \wedge (\langle y, z \rangle \in r)) \to (\langle x, z \rangle \in r))$.

Un orden r definido en a se dice **total** si cumple que

$$\forall \; x \in a \; \forall \; y \in a \; (\langle x, y \rangle \in r) \vee (\langle y, x \rangle \in r)).$$

Un **conjunto ordenado** es un par ordenado $\langle a, r \rangle$ tal que a es un conjunto y r es un orden sobre a. Cuando r es total, el par $\langle a, r \rangle$ es un **conjunto totalmente ordenado**.

Obsevemos que la relación de igualdad es una relación de orden, que no es orden total para conjuntos con más de un elemento.

Definición 1.3.12. Una **relación de orden estricto** o un **orden estricto** sobre un conjunto a es una relación $r \subseteq a \times a$ que es transitiva y anti-reflexiva: $\forall\, x \in a\ (\langle x, x\rangle \notin r)$.

El siguiente lema, cuya fácil demostración dejamos a cargo del lector, establece las relaciones entre órdenes y órdenes estrictos.

Lema 1.3.13. *Sea a un conjunto y $r \subseteq a \times a$. Se tiene que:*

i) *r es un orden estricto si y sólo si $r \cap \Delta(a) = \emptyset$ y $r \cup \Delta(a)$ es un orden,*

ii) *r es un orden si y sólo si $r \setminus \Delta(a)$ es un orden estricto.* □

Notación: Si r es una relación de orden sobre a, escribiremos $x \leq_r y$, o alternativamente $y \geq_r x$, para indicar que $\langle x, y\rangle \in r$. Cuando $\langle x, y\rangle \in r$ y $x \neq y$, escribiremos $x <_r y$, o alternativamente $y >_r x$. Cuando no haya lugar a confusión, omitiremos el subíndice r. Más aún, siguiendo la costumbre en matemática a veces designaremos las relaciones de orden directamente por $\leq$ y diremos simplemente *conjunto ordenado* a para indicar al par $\langle a, \leq\rangle$.

A continuación recordaremos algunas nociones básicas sobre conjuntos ordenados que utilizaremos a lo largo del curso.

Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado y $b \subseteq a$.

Diremos que $z \in a$ es una **cota superior** de b si $x \leq z$ para todo $x \in b$.

Una cota superior z de b se dice **estricta** si $z \notin b$, esto es, $x < z$ para todo $z \in b$.

Observemos que b puede tener a lo sumo una cota superior no estricta. Si esta cota superior no estricta existe, se denomina el **elemento máximo** o también el de b.

El subconjunto b se dice **acotado superiormente** si existe una cota superior de b en a.

Un elemento $y \in b$ se dice **maximal** en b si no existen en b elementos estrictamente mayores que y. Esto es, para todo $x \in a$, si $y \leq x$, entonces $y = x$ ó $x \notin b$.

Es claro que si b tiene elemento máximo u, entonces u es maximal en b (y el único elemento maximal de b). Pero en general b puede tener varios elementos maximales, sin tener elemento máximo. Un ejemplo extremo es la relación de igualdad considerada como relación de orden sobre a. Si b tiene más de un elemento, todos sus elementos son maximales, pero no tiene elemento máximo. Por otro lado, si a es un conjunto totalmente ordenado, un elemento maximal de b debe ser necesariamente el elemento máximo de b.

Si en las definiciones anteriores cambiamos $\leq$ por $\geq$, obtenemos las definiciones de **cota inferior**, **cota inferior estricta**, **elemento mínimo** o **primer elemento**, **acotado inferiormente** y **elemento minimal**.

Se define el **supremo** de b como el mínimo, si existe, del conjunto de las cotas superiores de b en a. En otras palabras, $s \in a$ es el supremo de b si y sólo si satisface las dos propiedades siguientes:

S1) $s \in a$ y $x \leq s$ para todo $x \in b$,

S2) si $z \in a$ y $x \leq z$ para todo $x \in b$, entonces $s \leq z$.

Es claro que el supremo, si existe, es único.

Análogamente, se define el **ínfimo** de b como el máximo, si existe, de las cotas inferiores de b en a.

Veremos ahora como se puede definir la noción de función dentro de nuestra teoría.

Definición 1.3.14. Una **función** es una relación f tal que

$$\forall x \forall y \forall z (((\langle x, y\rangle \in f) \wedge (\langle x, z\rangle \in f)) \to y = z).$$

Si $x \in \mathrm{dom}(f)$, el único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$ será indicado por $f(x)$.

Sea $f \subseteq a \times b$ una función y sea $c \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

La **imagen de** c **por** f es el conjunto

$$f^{\rightarrow}(c) = \{y \in b : \exists\, x \in c\ (y = f(x))\}.$$

La imagen de $\mathrm{dom}(f)$ por f se llama la **imagen de** f y se la simboliza por $\mathrm{img}(f)$.

La **restricción** de f a $c \subseteq \mathrm{dom}(f)$ es la función $f|_c \subseteq f$ tal que $\mathrm{dom}(f|c) = c$ y $f|_c(x) = f(x)$ para todo $x \in c$. Observar que $f^{\rightarrow}(c) = \mathrm{img}(f|_c)$.

Notación $f : a \to b$ significa que f *es una función tal que* $\mathrm{dom}(f) = a$ *e* $\mathrm{img}(f) \subseteq b$.

El siguiente ejemplo ilustra la diferencia entre $f(c)$ y $f^{\rightarrow}(c)$.

Ejemplo 1.3.15. *Pongamos* $x = \emptyset$, $y = \{\emptyset\}$, $z = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ *y* $a = b = \{x, y, z\}$. *Sea* $f\colon a \to b$ *tal que* $f(x) = z$, $f(y) = y$, $f(z) = x$. *Si* $c = \{x, y\}$, *se tiene que* $f(c) = x$, *pero* $f^{\rightarrow}(c) = \{z, y\}$.

Sea $f\colon a \to b$ y sea $c \subseteq b$. La **imagen inversa** de c por f es el conjunto

$$f^{\leftarrow}(c) = \{x \in a : f(x) \in c\}.$$

Una función $f : a \to b$ se dice **inyectiva** si

$$\forall x \in a \forall t \in a((f(x) = f(t)) \to (x = t)),$$

se dice **sobreyectiva** si $\operatorname{img}(f) = b$ y se dice **biyectiva** o una **biyección** si f es inyectiva y sobreyectiva.

Si $f\colon a \to b$ es una biyección, entonces está definida la **función inversa** $f^{-1}\colon b \to a$: Para todo $y \in b$, $f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$.

La misma función biyectiva considerada en el Ejemplo 1.3.15 sirve para ilustrar la diferencia entre $f^{-1}(c)$ y $f^{\leftarrow}(c)$.

Supondremos al lector familiarizado con las propiedades básicas de las relaciones y funciones. En este punto sólo queremos destacar que relaciones y funciones pueden definirse como conjuntos dentro de la teoría axiomática que estamos desarrollando y establecer notaciones.

Sean a e I conjuntos. Una función $f : I \to a$ suele representarse en la forma de una **familia de conjuntos** indexada por I, $\{x_i\}_{i \in I}$, donde $x_i = f(i)$. Con esta notación se omite mencionar a la función f, pero hay que tener presente que para que tenga sentido, debe existir un conjunto a tal que $x_i \in a$ para todo $i \in I$. En este caso $f = \{t \in I \times a : t = \langle i, x_i \rangle\}$.

Definimos la **unión de una familia** como el conjunto $\bigcup_{i \in I} x_i = \cup \operatorname{img}(f)$, y si $\operatorname{img}(f) \neq \emptyset$, definimos la **intersección** como $\bigcap_{i \in I} x_i = \cap \operatorname{img}(f)$.

Todo conjunto puede representarse como familia de sus elementos: Si $f\colon I \to a$ es una función sobreyectora, $a = \{x_i\}_{i \in I}$. En particular si $I = a$ y f es la función identidad, $a = \{x_x\}_{x \in a}$.

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. *Escriba una fórmula que exprese $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle$ usando sólo los símbolos originales del alfabeto.*

Ejercicio 1.4.2. *Sea $\varphi(x, y) = ((\exists y(y \in x)) \vee (\forall x(\neg(x \in y))))$.*

A) Escriba la fórmula $\varphi(x|z, y)$.

B) Si reemplazamos las apariciones libres de x por y, la fórmula que se obtiene ¿Expresará lo mismo que la original?

Ejercicio 1.4.3. *¿De cuales de los siguientes conjuntos es x un elemento, un subconjunto o ninguna de las dos cosas?*

A) $\{\{x\}, y\}$,

B) x,

C) $\emptyset \cap x$,

D) $\{x\} \setminus \{\{x\}\}$,

E) $\{x\} \cup x$,

F) $\{x\} \cup \emptyset$.

Ejercicio 1.4.4. *Verifique las siguientes igualdades, donde las letras $a, b, \ldots$ indican conjuntos:*

A) $\cup\, \emptyset = \emptyset$,

B) $\cup\{a\} = a$,

C) Si $a \in c$, entonces $a \subseteq \cup\, c$.

D) $\bigcup\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\} = \{a, b, c, d, e, f\}$,

E) $\bigcap\{\{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{a, f\}\} = \{a\}$,

F) $\cap\{a\} = a$ para todo conjunto a.

Ejercicio 1.4.5. *Muestre que si a, b son conjuntos, entonces $(\cap a) \cap (\cap b) \supseteq \cap(a \cap b)$, y muestre con ejemplos que la inclusión puede ser propia.*

Ejercicio 1.4.6. *De un ejemplo de dos conjuntos a, b tales que $\mathcal{P}(a \cup b) \neq \mathcal{P}(a) \cup \mathcal{P}(b)$.*

Ejercicio 1.4.7. *Demuestre que $\forall x \bigcup \mathcal{P}(x) = x$, y que $\forall x(x \subseteq \mathcal{P}(\cup x))$, y muestre con ejemplos que esta última inclusión puede ser propia.*

Ejercicio 1.4.8. *Dado un conjunto a, pruebe que $\{a\}$ es un conjunto sin utilizar el Axioma del Par.*

Ejercicio 1.4.9. *Recordar que el par ordenado* $\langle a, b\rangle$ *está caracterizado por la propiedad:*
$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ *si y sólo si* $a = c$ *y* $b = d$.

A) Demostrar que la definición de Kuratowski, $\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ *es adecuada.*

B) Determinar cuales de estas posibles definiciones de par ordenado serían adecuadas:

(1) $\langle a, b\rangle_1 = \{\{a, \emptyset\}, \{b, \{\emptyset\}\}\}$,

(2) $\langle a, b\rangle_2 = \{\{a, \emptyset\}, \{b\}\}$,

(3) $\langle a, b\rangle_3 = \{\{a, \emptyset\}, b\}$.

Ejercicio 1.4.10. *Todo par ordenado, por definición, es un conjunto. Muestre con ejemplos que un par ordenado puede tener un único elemento.*

Ejercicio 1.4.11. *Demuestre las siguientes igualdades, donde* a, b *son conjuntos:*

A) $\bigcap\bigcap\langle a, b\rangle = a$.

B) $(\bigcap\bigcup\langle a, b\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle a, b\rangle \setminus \bigcup\bigcap\langle a, b\rangle) = b$.

Ejercicio 1.4.12. *Dados los conjuntos* a, b, c, *pruebe que:*

A) $a \times a = b \times b$ *implica* $a = b$,

B) $a \times b = a \times c$ *y* $a \neq \emptyset$ *implican* $b = c$.

Ejercicio 1.4.13. *Sean* a, b, c *conjuntos,* $r \subseteq a \times b$ *y* $s \subseteq b \times c$. *La composición de las relaciones* r *y* s *es la relación*

$$r \circ s = \{\langle x, z\rangle \in a \times c : \exists\, y(\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle y, z\rangle) \in s\}.$$

Pruebe que

A) $\mathrm{dom}(r \circ s) = \emptyset$ *si y sólo si* $\mathrm{img}(r) \cap \mathrm{dom}(s) = \emptyset$.

B) $\mathrm{dom}(r \circ s) \subseteq \mathrm{dom}(r)$ *e* $\mathrm{img}(r \circ s) \subseteq \mathrm{img}(s)$. *De ejemplos que muestren que las inclusiones pueden ser propias.*

C) Si r y s son funciones, entonces $r \circ s$ es función. ¿Puede ser que la relación $r \circ s$ sea función sin que lo sea alguna de ellas o ambas?

Ejercicio 1.4.14. *Sean a, b conjuntos y sean $p_a \colon a \times b \to a$ y $p_b \colon a \times b \to b$ definidas por $p_a(\langle x, y\rangle) = x$ y $p_b(\langle x, y\rangle) = y$ para todo $\langle x, y\rangle \in a \times b$. Pruebe que p_a y p_b son ambas sobreyectivas y que vale la siguiente propiedad:*

Si c es un conjunto y $f \colon c \to a$ y $g \colon c \to b$, entonces existe una única *$h \colon c \to a \times b$ tal que $p_a \circ h = f$ y $p_b \circ h = g$.*

Ejercicio 1.4.15. *Sea a un conjunto. Pruebe que:*

A) la inclusión entre subconjuntos de a es una relación de orden,

B) si $b \subseteq \mathcal{P}(a)$, entonces $\cup b$ es el supremo de b en $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$,

C) si $\emptyset \neq b \subseteq \mathcal{P}(a)$, entonces $\cap\, b$ es el ínfimo de b en $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$.

¿ Existe el ínfimo de $\emptyset$ en $(\mathcal{P}(a), \subseteq)$?

Capítulo 2

El axioma del infinito

2.1. El conjunto ω

Ya observamos que con los axiomas anteriores podemos formar conjuntos finitos tan grandes como queramos. El axioma que introduciremos ahora nos permitirá obtener conjuntos infinitos. En particular, nos permitirá expresar al conjunto de los números naturales dentro de la teoría. Conviene destacar que hasta ahora estamos usando "finito" e "infinito" en el sentido intuitivo. Más adelante daremos las definiciones precisas dentro de la teoría.

Definición 2.1.1. Dado un conjunto a, el **siguiente** o **sucesor** de a es $a' = a \cup \{a\}$.

Es claro que la correspondencia $a \mapsto a'$ establece una relación funcional en el universo $\mathcal{U}$. Por iteración podemos, partiendo de $\emptyset$, obtener conjuntos con n elementos:

- $\emptyset$ (0 elementos),
- $\emptyset' = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$ (un elemento),
- $\emptyset'' = \{\emptyset\}' = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (2 elementos),
- $\emptyset''' = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (3 elementos),
- $\ldots$.

Estos conjuntos servirán para interpretar los números naturales dentro de la teoría. Como veremos en el Capítulo 6, los axiomas vistos hasta ahora no nos garantizan la existencia de un conjunto que tenga a todos ellos como elementos. Por lo tanto debemos postularlo.

Definición 2.1.2. Diremos que un conjunto y es **inductivo**, y escribiremos $ind(y)$, si y sólo si hace verdadera la siguiente fórmula:

$$\emptyset \in y \ \wedge \ \forall x \ (x \in y \ \rightarrow \ x' \in y).$$

Axioma del Infinito: $\exists y \ ind(y)$.

Resulta inmediatamente de la definición, que si u es un conjunto no vacío, cuyos elementos son todos conjuntos inductivos, entonces $\cap u$ es un conjunto inductivo.

Sea a un conjunto inductivo y sea $c(a) = \{x \in \mathcal{P}(a) : ind(x)\}$. Como $a \in c(a)$, $c(a) \neq \emptyset$, luego $\omega = \cap c(a)$ es un conjunto inductivo. Si b es cualquier conjunto inductivo, $a \cap b \in c(a)$. Luego $\omega \subseteq b$. Resulta así que ω *es un conjunto inductivo mínimo*, en el sentido que está contenido en todo otro conjunto inductivo. Por el Axioma de Extensionalidad este conjunto inductivo mínimo es único.

Definición 2.1.3. El conjunto ω será llamado el **conjunto de los números naturales**, y los elementos de ω serán llamados **números naturales**.

El siguiente teorema, que expresa el principio de inducción finita, es una consecuencia inmediata de la minimalidad de ω.

Teorema 2.1.4. $\forall x \ [(x \subseteq \omega \wedge ind(x)) \rightarrow x = \omega]$.

Definición 2.1.5. Diremos que un conjunto x es **transitivo**, y escribiremos $trans(x)$, si y sólo si $\forall t \ (t \in x \ \rightarrow \ t \subseteq x)$.

En otras palabras, un conjunto a es transitivo si y sólo si

$$\forall \ x \forall \ y(((x \in y) \wedge (y \in a)) \rightarrow (x \in a)).$$

Teorema 2.1.6. $trans(\emptyset) \ \wedge \ \forall x \ (trans(x) \ \rightarrow \ trans(x'))$. *En palabras: el conjunto vacío es transitivo, y si x es transitivo, su sucesor x' también lo es.*

Demostración. La expresión $(x \in \emptyset \ \ \rightarrow \ \ x \subseteq \emptyset)$ es verdadera para todo x porque $x \in \emptyset$ es falso para todo x. Por lo tanto $\emptyset$ es transitivo. Sea x transitivo. Si $y \in x'$, entonces $(y \in x) \vee (y = x)$ y en ambos casos tenemos $y \subseteq x$. □

Corolario 2.1.7. $\forall x \ (x \in \omega \ \ \rightarrow \ \ trans(x))$, *esto es, todo los elementos de* ω *son transitivos.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.6 el conjunto $a = \{x \in \omega : \ trans(x)\}$ es inductivo; como $a \subseteq \omega$, $a = \omega$. □

Corolario 2.1.8. *Para todo* $n \in \omega$, n' *está caracterizado por las propiedades siguientes:* $n' \in \omega$, $n \in n'$ *y* $\forall x \in \omega((n \in x) \rightarrow (n' \subseteq x))$. □

En general, que todos los elementos de un conjunto sean transitivos no implica que el conjunto sea transitivo, como lo muestra el siguiente ejemplo: $\{\{\emptyset\}\}$.

Teorema 2.1.9. ω *es transitivo.*

Demostración. Sea $a = \{x \in \omega : \ x \subseteq \omega\}$. Veremos que a es inductivo. Como ω es inductivo, $\emptyset \in \omega$; además $\emptyset \subseteq \omega$, por lo tanto $\emptyset \in a$. Sea $x \in a$. Tomemos $y \in x' = x \cup \{x\}$, entonces $y \in x \ \vee \ y = x$. Si $y = x$, entonces $y \in \omega$; por otra parte, si $y \in x$, como $x \subseteq \omega$, tenemos que $y \in \omega$. Por lo tanto $x' \subseteq \omega$. Como ω es inductivo, $x \in \omega$ implica que $x' \in \omega$; por consiguiente $x' \in a$.

Con esto hemos demostrado que a es inductivo y como $a \subseteq \omega$, tenemos que $a = \omega$. Esto significa que para todo $n \in \omega$, $n \subseteq \omega$. □

El teorema anterior muestra que los elementos de un número natural son números naturales. Intuitivamente, tenemos $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$, $2 = 1' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \ldots n' = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Lema 2.1.10. $\forall x \ \forall y \ [(trans(x) \ \wedge \ y' \subseteq x') \ \ \rightarrow \ \ y \subseteq x]$. *Esto es, si* x *es transitivo e* y' *es un subconjunto de* x', *entonces* y *es un subconjunto de* x.

Demostración. Como $y \in y'$, $y' \subseteq x'$ implica $y \in x'$; entonces $y \in x$ o y es igual a x. Como x es transitivo ambas posibilidades para y muestran que y es un subconjunto de x. □

Corolario 2.1.11. *Si* $m, n \in \omega$, *entonces* $(m' = n') \rightarrow (m = n)$. □

El lector no tendrá ahora dificultad en verificar que el conjunto ω satisface los conocidos Axiomas de Dedekind-Peano que caracterizan al conjunto de los números naturales. Esto justifica nuestra definición. Como los números enteros, racionales, reales y complejos pueden construirse a partir de los naturales por operaciones conjuntistas[1], todos ellos pueden definirse dentro de nuestra teoría axiomática.

Vamos a dirigir ahora nuestra atención a las propiedades de orden de los números naturales.

Lema 2.1.12. $\forall x\ ((trans(x) \wedge\ x \notin x) \rightarrow\ x' \notin x')$*: Si x es transitivo y no pertenece a sí mismo, el siguiente de x tampoco.*

Demostración. Si $x' \in x'$, se sigue que $(x' \in x) \vee (x' = x)$. Como x es transitivo tenemos que $x' \subseteq x$, y esto implica que $x \in x$. □

Lema 2.1.13. $\forall n\ [(n \in \omega)\ \rightarrow\ (n \notin n)]$*: Ningún elemento de ω es miembro de si mismo.*

Demostración. Sea $a = \{n \in \omega :\ n \notin n\}$. El conjunto vacío pertenece a a porque $\neg(\emptyset \in \emptyset)$. Si $n \in a$, tenemos que n es transitivo y $n \notin n$, y por el Lema 2.1.12, $n' \notin n'$, entonces $n' \in a$. Por consiguiente a es inductivo. Luego por el Teorema 2.1.4 $a = \omega$. □

Teorema 2.1.14. *Dados m y n en ω, se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones: $n \in m$, $m \in n$, $n = m$.*

Demostración. Veamos primero que a lo sumo se puede satisfacer una de las condiciones. En efecto, si $m = n$ y $m \in n$, tendríamos $m \in m$, lo que es imposible por el Lema 2.1.13. Análogamente se ve que no puede ocurrir que $m = n$ y $m \in n$. Finalmente, supongamos que $m \in n$ y $m \in n$. Entonces por el Corolario 2.1.7 tendríamos $m \subseteq n$ y $n \subseteq m$, esto es $m = n$, lo que es absurdo por el Lema 2.1.13.

Para $m \in \omega$, sea

$$S(m) = \{n \in \omega\ :\ (n \in m) \vee (m \in n) \vee (n = m)\}.$$

[1]Estas construcciones están tratadas en detalle en los libros de Balanzat y de Landau mencionados en la bibliografía.

Decir que se cumple al menos una de las tres condiciones, equivale a decir que $S(m) = \omega$ para todo $m \in \omega$. Por lo tanto, para completar la demostración bastará probar que el conjunto

$$S = \{m \in \omega\ : S(m) = \omega\}$$

es inductivo.

Primero veremos que $\emptyset \in S$, esto es, que $S(\emptyset) = \omega$.

Para ver esto mostraremos que $S(\emptyset)$ es inductivo. Es claro que $\emptyset \in S(\emptyset)$. Si $n \in S(\emptyset)$, entonces $(\emptyset \in n) \vee (n = \emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in n' = n \cup \{n\}$, y por lo tanto $n' \in S(\emptyset)$.

Probemos ahora que si $m \in S$, entonces $m' \in S$.

Sea $m \in S$, esto es $S(m) = \omega$. Debemos ver que también $S(m') = \omega$ y para ello probaremos que $S(m')$ es inductivo:

Como ya vimos que $S(\emptyset) = \omega$, tenemos que $m' \in S(\emptyset)$, lo que implica que $\emptyset \in S(m')$.

Sea $x \in S(m')$. Esto es se cumple una, y sólo una, de las siguientes condiciones

$$(1)\ \ x \in m', \qquad (2)\ \ m' \in x, \qquad (3)\ \ x = m'.$$

Como por la hipótesis inductiva $S(m) = \omega$, resulta también que $x' \in \omega = S(m)$, esto es

$$(m \in x') \vee (x' \in m) \vee (x' = m).$$

Consideremos cada una de estas posibilidades:

I) Si $m \in x'$ entonces $(m \in x) \vee (x = m)$. Si $x = m$, entonces $x' = m'$, y $x' \in S(m')$. Si $m \in x$, no puede ser que se cumpla (1), por lo tanto deberá cumplirse (2) o (3) y en ambos casos obtenemos que $m' \in x'$, lo que implica que $x' \in S(m')$.

II) Si $x' \in m$, entonces $x' \in m'$ y resulta $x' \in S(m')$.

III) Si $x' = m$, entonces $x' \in m'$. y también ahora $x' \in S(m')$.

En todos los casos $x' \in S(m')$; por lo tanto $S(m') = \omega$, es decir, $m' \in S$. Esto muestra que S es inductivo y por consiguiente igual a ω. □

Corolario 2.1.15. *Para m, n en ω, se tiene que*

$$m \subseteq n \leftrightarrow ((m = n) \vee (m \in n)).$$

Demostración. Supongamos que $m \subseteq n$. No puede ser que $n \in m$, pues esto implicaría que $n \in n$, contrariando el Lema 2.1.13. Luego, por el Teorema 2.1.14, debe ser $(m = n) \vee (m \in n)$. Por otro lado, si $(m = n) \vee (m \in n)$, entonces por el Corolario 2.1.7 resulta que $m \subseteq n$. □

Del Teorema 2.1.14 y del Corolario 2.1.15 resulta que la relación de inclusión $\subseteq$ define un orden total sobre ω.

Definición 2.1.16. Una relación de orden $\leq$ sobre un conjunto a se dice un **buen orden** si y sólo si todo subconjunto no vacío de a tiene primer elemento.

Observación 2.1.17. *Todo conjunto bien ordenado $\langle a, \leq \rangle$ es totalmente ordenado.* En efecto, dados x, y en a, el par $\{x, y\}$ tiene primer elemento, luego debe ser $(x \leq y) \vee (y \leq x)$.

Teorema 2.1.18. *La relación de inclusión $\subseteq$ define un buen orden sobre ω.*

Demostración. Ya observamos que $\subseteq$ es una relación de orden. Luego resta probar que todo subconjunto no vacío de ω tiene primer elemento. Supongamos que b es un subconjunto de ω que no tiene primer elemento y sea a el conjunto de las cotas inferiores de b en ω Es claro que $0 = \emptyset \in a$. Como b no tiene elemento mínimo, todas sus cotas inferiores deben ser estrictas, por lo tanto si $n \in a$, entonces $n \in x$ para todo $x \in b$. Luego por el Corolario 2.1.8 tendremos que $\forall\, x \in b\ (n' \subseteq x)$, esto es, que $n' \in a$. Hemos probado así que a es inductivo, y por consiguiente, que $a = \omega$. Supongamos que $b \neq \emptyset$ y sea $m \in b$. Como $m' \in \omega = a$, tendríamos $m' \subseteq m$, lo que es imposible. Luego si b no tiene primer elemento debe ser vacío. □

Es inmediato verificar que si $\langle a, \leq \rangle$ es un conjunto bien ordenado, entonces todo subconjunto b de a, con el orden heredado de a, es bien ordenado. De esta observación y del teorema anterior resulta que:

Corolario 2.1.19. *Para todo $n \in \omega$, se tiene que $\langle\, n, \subseteq\, \rangle$ es un conjunto bien ordenado.* □

2.2. Principio de Inducción Transfinita

Usamos el principio de inducción para probar el buen orden de los números naturales. Veremos ahora que estos dos conceptos están estrechamente vinculados.

Comenzaremos por la siguiente:

Definición 2.2.1. Sea a un conjunto ordenado. Llamaremos **sección inicial** determinada por $y \in a$ al conjunto $a_y = \{x \in a : \ x < y\}$ (recordar que x <y significa que $x \leq y$ y $x \neq y$).

Teorema 2.2.2. *Sea a un conjunto bien ordenado y b un subconjunto de a que satisface la siguiente propiedad:*

(P) *Para todo $x \in a$, si $a_x \subset b$ entonces $x \in b$.*

Se tiene que $b = a$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que exista $b \subset a$ tal que b satisface (P) y $b \neq a$. Entonces $a \setminus b \neq \emptyset$ y tiene primer elemento u. Veamos que $a_u \subset b$. En efecto, si u es el primer elemento de a, entonces $a_u = \emptyset \subset b$. Si u no es el primer elemento de a, entonces $a_u \neq \emptyset$. Sea $x \in a_u$. Como u es el primer elemento de $a \setminus b$, no puede ser que $x \in a \setminus b$, luego $x \in b$. Consecuentemente $a_u \subset b$, y como b satisface (P), resulta que $u \in b$. Pero esto es absurdo, puesto que $u \in a \setminus b$. □

Observación 2.2.3. Sea a bien ordenado y z el primer elemento de a. Como $a_z = \emptyset \subset b$ cualquiera que sea b, se tiene que la condición (P) en el enunciado del teorema anterior puede desdoblarse del modo siguiente:

(P1) $z \in b$

(P2) Para todo $x \in a$, si $y \in b$ para todo $y < x$, entonces $x \in b$.

El hecho de que todo subconjunto $b \subset \omega$ que satisface (P1) y (P2) debe coincidir con ω suele darse frecuentemente como una forma alternativa del principio de inducción finita para los naturales. De hecho, este enunciado equivale a la buena ordenación de ω (ver Ejercicio 2.6.9).

2.3. Ordinales

De los Corolarios 2.1.7 y 2.1.19 y de los Teoremas 2.1.9 y 2.1.18 resulta que tanto los números naturales como ω son conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de inclusión. Vamos a estudiar ahora los conjuntos que tienen estas dos propiedades y que constituyen una importante generalización de los números naturales. Comenzaremos por algunas consideraciones generales sobre conjuntos bien ordenados.

Definición 2.3.1. Sea a un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Diremos que b es **decreciente** si $x \in b$ e $y \leq x$ implican que $y \in b$.

Lema 2.3.2. *Sea a un conjunto bien ordenado, $b \subseteq a$ y b decreciente. Si $b \neq a$, entonces existe $z \in a$ tal que $b = a_z$.*

Demostración. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Como a es bien ordenado, $a \setminus b$ tiene primer elemento z. Mostraremos que $b = a_z$.

Si $y \in a_z$, entonces $y < z$, por lo tanto el elemento y no pertenece a $a \setminus b$ y esto implica que $a_z \subseteq b$.

Si $y \in b$, supongamos que $z \leq y$. El conjunto b es decreciente, entonces $z \in b \cap (a \setminus b) = \emptyset$: absurdo. Por lo tanto $y < z$, es decir $y \in a_z$. $\square$

Definición 2.3.3. Sea a un conjunto, diremos que $\in$ **es un buen orden estricto sobre** a si y sólo si:

Ord_1 $\forall x\ (x \in a\ \rightarrow\ x \notin x)$.

Ord_2 $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(x \in a\ \wedge\ y \in a\ \wedge\ z \in a\ \wedge\ x \in y\ \wedge\ y \in z)\ \rightarrow\ x \in z]$.

Ord_3 $\forall u\ \{(u \subseteq a \wedge u \neq \emptyset)\ \rightarrow\ \exists z\ [z \in u \wedge \forall x\ (x \in u \wedge x \neq\ z\ \rightarrow\ z \in x)]\}$

Observación 2.3.4. $\in$ es un buen orden estricto sobre a si y sólo si se satisface Ord_1 y $r_\in = \{\langle x, y\rangle \in a \times a : (x \in y) \vee (x = y)\}$ es un buen orden sobre a *(comparar con el Lema 1.3.13).*

Definición 2.3.5. Diremos que un conjunto x es un **ordinal** y escribiremos $ord(x)$, si y sólo si $\in$ es un buen orden estricto sobre x y x es transitivo. Es decir, $ord(x)$ es la conjunción $Ord_1(x)\ \wedge\ Ord_2(x)\ \wedge\ Ord_3(x)\ \wedge\ trans(x)$.

De los Teoremas 2.1.9 y 2.1.18 y de los Corolarios 2.1.15, 2.1.7, 2.1.19 resulta que ω y todos los números naturales son ordinales.

En general usaremos letras griegas para designar ordinales. Por ejemplo, la notación $\forall\alpha$ abreviará $\forall y\ (ord(y) \rightarrow \dots$.

Teorema 2.3.6. *Si α es un ordinal, entonces:*

i) $\alpha \notin \alpha$.

ii) *Si $x \in \alpha$, entonces $ord(x)$.*

iii) *Si $\beta \in \alpha$, entonces $\alpha_\beta = \beta$.*

iv) $ord(\alpha')$

Demostración. i) Por Ord_1, $(\alpha \in \alpha) \rightarrow (\alpha \notin \alpha)$. Por lo tanto α no puede pertenecer a α.

ii) Sea $x \in \alpha$. Como α es transitivo, $x \subseteq \alpha$; por consiguiente Ord_1, Ord_2 y Ord_3 se cumplen para x. Resta ver que x es transitivo. Sea $t \in x$ y $s \in t$. Como α es transitivo, $t \in \alpha$ y $s \in \alpha$. Por Ord_2, tenemos que $s \in x$; por consiguiente x es transitivo. Luego x satisface todas las propiedades de la definición de ordinal.

iii) Si $\beta \in \alpha$, como el orden lo da la relación de pertenencia,

$$\alpha_\beta = \{x \in \alpha\ : x < \beta\} = \{x \in \alpha\ : x \in \beta\} = \alpha \cap \beta = \beta$$

ya que $\beta \subseteq \alpha$.

iv) Si $x \in \alpha'$, entonces $x \in \alpha$ ó $x = \alpha$. Por la propiedad *i)* y Ord_1 tenemos que en ambos casos $x \notin x$.

Supongamos que x, y, z están en α' y que $x \in y \in z$. Si los tres pertenecen a α, entonces $x \in z$. Caso contrario, como acabamos de ver que α' satisface Ord_1, a lo sumo uno de ellos puede ser α. Si fuese $x = \alpha$, tendríamos $\alpha \in y$, y como $y \in \alpha$ y α es transitivo, tendríamos $\alpha \in \alpha$, lo que es imposible. Análogamente podemos ver que que no puede ser $y = \alpha$. Por lo tanto $z = \alpha$ y Ord_3 se reduce a la transitividad de α. Por lo tanto α' satisface Ord_2.

Sea $u \subseteq \alpha'$ y $u \neq \emptyset$. Si $u \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces es un subconjunto no vacío de α, luego por Ord_3 existe $z \in u \cap \alpha$ tal que $z \in x$ para todo

$x \in u \cap \alpha$, $z \neq x$. Como $z \in \alpha$, resulta que $z \in x$ para todo $x \in u$, $x \neq z$. Si $u \cap \alpha = \emptyset$, entonces $u = \{\alpha\}$, que tiene a α como primer elemento. Luego se satisface Ord_3. Finalmente, por el Teorema 2.1.6, $trans(\alpha) \rightarrow trans(\alpha')$; por consiguiente α' es un ordinal.

□

Teorema 2.3.7. *Si α y β son ordinales, una y sólo una de las siguientes fórmulas es verdadera:* $(\alpha \in \beta)$, $(\beta \in \alpha)$ *ó* $(\alpha = \beta)$.

Demostración. La transitividad de los ordinales y la propiedad (i) del Teorema 2.3.6 implican que las tres condiciones son mutuamente incompatibles (ver la demostración del Teorema 2.1.14). Para ver que al menos una de las condiciones se cumple, sea $c = \alpha \cap \beta$. Si $t \in x \in c$, $x \in \alpha$ y $x \in \beta$; como α y β son transitivos, $t \in \alpha$ y $t \in \beta$, esto es $t \in c$; por consiguiente c es un subconjunto decreciente tanto de α como de β. Entonces por el Lema 2.3.2 y (iii) del Teorema 2.3.6 se tiene que c es un ordinal tal que $c = \alpha$ ó $c \in \alpha$. Análogamente se ve que $c = \beta$ ó $c \in \beta$. Combinando estas posibilidades resultan los 4 casos siguientes:

(1) $c = \alpha$ y $c = \beta$,

(2) $c = \alpha$ y $c \in \beta$,

(3) $c \in \alpha$ y $c = \beta$,

(4) $c \in \alpha$ y $c \in \beta$.

Por (ii) del Teorema 2.3.6 los casos (1), (2) y (3) corresponden a $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$ y $\beta \in \alpha$, respectivamente. El caso (4) es imposible. En efecto, otra vez por (ii) del Teorema 2.3.6, (4) implicaría que c es un ordinal y que $c \in \alpha \cap \beta = c$, lo que es imposible por (i) del mismo teorema. □

Observación 2.3.8. Razonando como en la demostración del Corolario 2.1.15, de la transitividad de los ordinales y del Teorema 2.3.7 podemos deducir que *si α y β son ordinales, entonces* $(\alpha \in \beta) \vee (\alpha = \beta) \ \leftrightarrow \ \alpha \subseteq \beta$. *Además se tiene que* $\alpha \in \beta \ \leftrightarrow \ \alpha \subset \beta \ \leftrightarrow \ \alpha = \beta_\alpha$.

Teorema 2.3.9. *Sea a un conjunto de ordinales, estos es*

$$\forall x \ (x \in a \rightarrow ord(x)).$$

Entonces se cumple que:

(i) *a está bien ordenado por la relación de inclusión.*

(ii) *Si a es transitivo, entonces es un ordinal.*

(iii) *$\cup a$ es un ordinal.*

Demostración. *(i)* Por el Teorema 2.3.7 y la Observación 2.3.8, sabemos que a está totamente ordenado por $\subseteq$. Para ver que está bien ordenado, sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$, y sea $\alpha \in b$. Si $\alpha \subseteq \beta$ para todo β en b, entonces α es el primer elemento de b. Si no, existe β en b tal que $\beta \in \alpha$. De esto resulta que $\alpha \cap b \neq \emptyset$. Entonces, como α es bien ordenado, $\alpha \cap b$ tiene primer elemento, que llamaremos γ. Sea δ en b. Si δ está en $b \setminus \alpha$, $\delta \notin \alpha$, entonces $\gamma \in \alpha \subseteq \delta$, y por lo tanto $\gamma \subset \delta$. Si $\delta \in \alpha \cap b$, tenemos que $\gamma \subseteq \delta$. Luego γ es el primer elemento de b.
(ii) Por (i) del Teorema 2.3.6 los elementos de a satisfacen Ord_1, y teniendo en cuenta las Observaciones 2.3.4 y 2.3.8, de *(i)* resulta que $\in$ es un buen orden estricto sobre a, y como a es transitivo por hipótesis, a es un ordinal.
(iii) Como $\cup a$ es también un conjunto de ordinales, por *(ii)* bastará probar que $\cup a$ es transitivo. Sea $\beta \in \cup a$. Por la definición de la unión, existe $\alpha \in a$ tal que $\beta \in \alpha$, y como α es transitivo, resulta que $\beta \subseteq \alpha \subseteq \cup a$. □

Observación 2.3.10. *La propiedad* (iii) *en el teorema anterior nos dice que el supremo, con respecto a la relación de inclusión, de un conjunto de ordinales es un ordinal (ver Ejercicio 1.4.15).*

Corolario 2.3.11. *No existe un conjunto que tenga entre sus elementos a todos los ordinales.*

Demostración. Supongamos que existiese un conjunto b tal que

$$\forall x\ (ord(x) \to x \in b).$$

Entonces podríamos formar el conjunto $a = \{x \in b : ord(x)\}$, esto es a sería el conjunto de todos los ordinales: $\forall x\ (ord(x) \leftrightarrow x \in a)$. Como por (ii) del Teorema 2.3.6 a sería transitivo, de (ii) del teorema anterior resultaría que a es un ordinal y por lo tanto que $a \in a$, en contradicción con (i) del Teorema 2.3.6. □

El enunciado del corolario anterior, conocido como la **Paradoja de Burali-Forti**, fue publicado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti (aunque parece que el mismo Cantor ya la había descubierto en 1895). Es otra paradoja de la teoría ingenua de conjuntos desarrollada por Cantor, pero al depender de una noción compleja como la de ordinal no tuvo el mismo impacto que la Paradoja de Russell, que utiliza sólo las nociones más intuitivas de conjunto y pertenencia. Para nosotros, la Paradoja de Burali-Forti significa simplemente que la clase $\{x : ord(x)\}$ no es un conjunto.

2.4. Conjuntos Finitos

Vamos a ver ahora como se pueden caracterizar los números naturales, esto es, los elementos de ω, en términos de ordinales. Comenzaremos por la siguiente:

Observación 2.4.1. *Si α es un ordinal, su siguiente α' está caracterizado por las dos propiedades siguientes* (comparar con el Corolario 2.1.8)*:*

(I) $\alpha \in \alpha'$ y

(II) si $ord(\beta)$ y $\alpha \subset \beta$, entonces $\alpha' \subseteq \beta$.

Definición 2.4.2. Un ordinal α tiene un **antecesor** si existe β tal que $\alpha = \beta'$. Si $\alpha \neq \emptyset$ y no tiene antecesor inmediato, diremos que α es **límite**.

Teorema 2.4.3. *Para todo ordinal α, las siguientes propiedades son equivalentes:*

I*) α es límite.*

II*) α es inductivo.*

III*) $\cup\alpha = \alpha$ y $\alpha \neq \emptyset$.*

Demostración. $i)$ implica $ii)$: Como $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \notin \emptyset$ debe ser $\emptyset \in \alpha$. Si $\beta \in \alpha$, entonces por la Observación 2.4.1 tenemos que $\beta' \subseteq \alpha$, y como no puede ser $\beta' = \alpha$, debemos tener que $\beta' \in \alpha$. Hemos probado así que $ind(a)$.
$ii)$ implica $iii)$: Si α es inductivo, entonces $t \in \alpha \;\rightarrow\; t' \in \alpha$. Como $t \in t'$ resulta que $t' \subseteq \alpha$, y por consiguiente, que $t \in \cup\alpha$. Luego $\alpha \subseteq \cup\alpha$. Por otra parte, si $t \in \cup\alpha$, hay un β en α tal que $t \in \beta$, como α es transitivo por ser ordinal, tenemos $t \in \alpha$. Luego también $\cup\alpha \subseteq \alpha$.
$iii)$ implica $i)$: supongamos que $iii)$ es verdadero y que existe un ordinal γ tal que $\alpha = \gamma'$. Entonces $\gamma' = \alpha = \cup\alpha = \cup\gamma' = \gamma$; esto implica $\gamma \in \gamma$ que es absurdo por ser γ ordinal. $\square$

De (ii) del teorema anterior se sigue que ω *es un ordinal límite.*

Definición 2.4.4. Diremos que α es un **ordinal finito**, y escribiremos *ordfin*(α) si ni él ni sus elementos son límites:

$$\forall x((x \subseteq \alpha) \rightarrow ((x = \emptyset) \vee (\exists \beta (x = \beta')))).$$

Teorema 2.4.5. $\forall x\ (\mathit{ordfin}(x) \leftrightarrow x \in \omega)$*. Esto es, los números naturales coinciden con los ordinales finitos.*

Demostración. Veamos primero que todos los elementos de ω son ordinales finitos. Sea $a = \{x \in \omega\ :\ \mathit{ordfin}(x)\}$. El vacío pertenece a ω y es un ordinal finito por definición, por lo tanto es un elemento de a. Si $x \in a$, como ω es inductivo $x' \in \omega$ y el ítem *iv*) del Teorema 2.3.6, x' es un ordinal. Dado que x' no es ordinal límite y sus elementos tampoco (porque x es ordinal finito), tenemos que x' es finito. Hemos probado que a es inductivo y por lo tanto $\omega = a$.

Ahora veamos que todos los ordinales finitos pertenecen a ω. Si x un ordinal finito, por el Teorema 2.3.7 $x \in \omega\ \vee\ \omega \in x\ \vee x = \omega$, pero como ω es ordinal límite, no puede pertenecer a x ni ser igual a x, por consiguiente $x \in \omega$. $\square$

Este último teorema podría hacer pensar que se podría prescindir del Axioma del Infinito. En efecto, si bien los números naturales sirvieron para motivar la introducción de los ordinales, la demostración de las propiedades de estos últimos no dependieron de ningún resultado sobre números naturales. Por lo tanto los ordinales podrían haberse definido antes de introducir el Axioma del Infinito y posteriormente introducir los naturales como los ordinales finitos. Pero como los ordinales no forman un conjunto (Paradoja de Burali-Forti), no tendríamos medios para probar la existencia del conjunto de los ordinales finitos (esto se verá con precisión en el Teorema 6.2.5). De modo que aún siguiendo este camino necesitaríamos de un axioma para garantizar la existencia del conjunto de los ordinales finitos. Este camino es posible y de hecho es el seguido en muchos tratamientos de la teoría axiomática de conjuntos. El siguiente teorema muestra como el Axioma del Infinito puede ser formulado en términos de ordinales.

Teorema 2.4.6. *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

I) *Existe un conjunto inductivo (Axioma del Infinito).*

ii) *Existe un conjunto c que tiene entre sus elementos a todos los ordinales finitos.*

iii) *Existe un ordinal límite.*

Demostración. i) implica ii): Como todo conjunto inductivo contiene a ω, la implicación resulta del Teorema 2.4.5.
ii) implica iii): Supongamos que existe c con la propiedad requerida. Sea $a = \{x \in c : \ ordfin(x)\}$. Tomemos $x \in a$. Si $t \in x$, entonces t es ordinal finito porque x es ordinal finito (en efecto, si $s \in t$, entonces $s \in x$ porque x es transitivo por lo tanto s no es ordinal límite), por consiguiente $t \in a$; esto muestra que a es transitivo. Como a es un conjunto transitivo de ordinales, a es un ordinal. Si a fuese finito, tendríamos que $a \in a$, lo que no es posible. Por lo tanto a es infinito y como todos sus elementos son finitos, a debe ser un ordinal límite.
iii) implica i): Esta implicación es el resultado obtenido en el Teorema 2.4.3. □

Observación 2.4.7. Hemos definido a ω como el menor conjunto inductivo con respecto a la inclusión. Del Teorema 2.4.5 resulta que también ω *es el menor ordinal infinito con respecto a la inclusión:*

$$\forall x \ ((ord(x) \wedge \neg \ ordfin(x)) \to (\omega \subseteq x)).$$

Esta propiedad suele expresarse diciendo que ω *es el primer ordinal transfinito.*

Nos proponemos ahora definir la noción de conjunto finito.

Definición 2.4.8. Diremos que a y b son **equipotentes**, y escribiremos $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$, si existe una función de a en b biyectiva.

Definición 2.4.9. El conjunto a es **finito** si existe $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{a}}$.

Teorema 2.4.10. i) *Si $n \in \omega$ y $a \subset n$, entonces existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{a}}$.*

ii) *Si $k \in n$, entonces $\bar{\bar{k}} \neq \bar{\bar{n}}$.*

Demostración. i) Sea $s = \{n \in \omega \ : \ \forall\, x\ ((x \subset n) \to \exists k(k \in n\ \wedge\ \bar{\bar{k}} = \bar{\bar{x}}))\}$. Veremos que s es inductivo y por lo tanto igual a ω.

Es claro que $\emptyset \in s$. Supongamos que $n \in s$ y sea $x \subset n' = n \cup \{n\}$. Consideraremos los dos casos siguientes:

Caso 1: $n \notin x$. Entonces $x \subset n$ o $x = n$. Como $x \in s$, $x \subset n$ implica que existe $k \in n \subset n'$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{x}}$. Si $x = n$, entonces $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}}$, y $n \in n'$. Por lo tanto en este caso se tiene que $n' \in s$.

Caso 2: $n \in x$. Sea $y = x \setminus \{n\}$. Como $y \subset x$, por la hipótesis inductiva resulta que existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \bar{\bar{y}}$, es decir, existe una función biyectiva $f\colon y \to k$. Sea $g\colon x \to k'$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in y, \\ k & \text{si } t = n. \end{cases}$$

Claramente g es biyectiva, lo que significa que $\bar{\bar{k'}} = \bar{\bar{x}}$. Para terminar de probar que también en este caso $n' \in s$, hay que ver que $k' \in n'$. Como $n' \subseteq k'$ implicaría que $n \in k$ o $n = k$, lo que contradiría $k \in n$, por el Corolario 2.1.15 debe ser $k' \in n'$. Por lo tanto $n' \in s$ y completamos la demostración de (i).

ii) Sea $a = \{n \in \omega : \forall k(k \in n \to \bar{\bar{k}} \neq \bar{\bar{n}})\}$. Probaremos que a es inductivo. $\emptyset \in a$ porque para todo k es falso $k \in \emptyset$. Si $n \in a$ veremos que $n' \in a$. Supongamos que $n' \notin a$, entonces existe $k \in n'$ y una función biyectiva $f\colon n' \to k$. La función $g\colon n \to k \setminus \{f(n)\}$, determinada por $g(t) = f(t)$ para todo $t \in n$ es biyectiva, entonces $\bar{\bar{n}} = \overline{\overline{k \setminus \{f(n)\}}}$. Por otra parte, como $k \setminus \{f(n)\} \subset k$, por *i)* existe $j \in k$ tal que $\bar{\bar{j}} = \overline{\overline{k \setminus \{f(n)\}}}$. Dado que $k \subseteq n$, tenemos $j \in n$ y $\bar{\bar{j}} = \bar{\bar{n}}$, contradiciendo $n \in a$. $\square$

Corolario 2.4.11. *Cada uno de los enunciados listados a continuación implica al siguiente:*

I) *x es un conjunto finito.*

II) *Existe un único n en ω tal que $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}}$.*

III) *Si $y \subseteq x$, entonces y es finito.*

IV) *Si $y \subseteq x$ y $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}}$, entonces $x = y$.*

Demostración. *i)* implica *ii)*: Si n y m están en ω y $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}} = \overline{\overline{m}}$, por el teorema anterior $n \notin m$ y $m \notin n$, por lo tanto $n = m$.
ii) implica *iii)*: Existe un único n tal que existe una $f : x \mapsto n$ biyectiva. Si $y \subseteq x$, sea $g = f|_y$. Como f es biyectiva, $\mathrm{img}(g) \subset n$, entonces existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{k}} = \overline{\overline{\mathrm{img}(g)}} = \bar{\bar{y}}$.
iii) implica *iv)*: Como $x \subseteq x$, x es finito. Si $y \subseteq x$ y $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, sea $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{n}}$. Supongamos que $x \neq y$. Con un argumento similar al dado en la demostración de *ii)*$\rightarrow$ *iii)*, se ve que existe $k \in n$ tal que $\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{k}}$, entonces $\bar{\bar{n}} = \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{k}}$ que es absurdo por el teorema anterior. □

En realidad los enunciados listados en el corolario anterior son equivalentes, pero para demostrar que *iv)* implica *i)* se requiere del Axioma de Elección, que presentaremos en el Capítulo 4.

Para los ordinales tenemos dos nociones de "finitud": una, la de ordinal finito, otra la de ser finito como conjunto. Resulta del corolario anterior que ambas nociones coinciden:

Corolario 2.4.12. *Un ordinal α es un conjunto finito si y sólo si es un número natural.*

Demostración. Es claro que los números naturales son conjuntos finitos. Por otra parte ω es un conjunto infinito. En efecto, si fuese ω finito existiría $n \in \omega$ tal que $\bar{\bar{\omega}} = \bar{\bar{n}}$, y como $n \subseteq \omega$, por *iv)* del Corolario 2.4.11 resultaría que $\omega = n$, lo que es absurdo. Sea ahora α un ordinal que es un conjunto finito. Tenemos que $(\alpha \in \omega) \vee (\omega \subseteq \alpha)$; pero si $\omega \subseteq \alpha$, por *(iii)* del Corolario 2.4.11 resultaría ω finito. □

Observación 2.4.13. De *(ii)* del Corolario 2.4.11 resulta que no puede haber una biyección entre dos números naturales distintos. En particular, se tiene que $\bar{\bar{n}} \neq \overline{\overline{n'}}$. Esta propiedad también caracteriza a los ordinales finitos. En efecto, si α es un ordinal no finito, entonces $\omega \subseteq \alpha$. Sea $f \colon \alpha \to \alpha \setminus \{\emptyset\}$ definida por

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta & \text{si } \beta \in \alpha \setminus \omega \ , \\ \beta' & \text{si } \beta \in \omega. \end{cases}$$

Esta f es biyectiva, por lo tanto $\bar{\bar{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha \setminus \{\emptyset\}}}$. Si definimos $g \colon \alpha' \to \alpha$ dada por $g(t) = f(t)$ para $t \in \alpha$ y $g(\alpha) = \emptyset$, vemos que g es también biyectiva. Luego $\bar{\bar{\alpha}} = \overline{\overline{\alpha'}}$.

2.5. Principios de Mínimo y de Inducción para clases de ordinales

Como todo ordinal es un conjunto bien ordenado, satisface que todo subconjunto no vacío tiene elemento mínimo y el principio de inducción transfinita. El teorema que sigue extiende estos principios a *clases* de ordinales. El item (i) del teorema se conoce como **Principio de Mínimo Para Ordinales** y el item (ii) como **Principio de Inducción Sobre los Ordinales**.

Teorema 2.5.1. *Sea φ una fórmula con una única variable libre. Entonces se satisfacen los siguientes enunciados, donde α, β, γ denotan ordinales:*

(i) $(\exists\ \alpha(\varphi(\alpha))) \to (\exists\ \beta(\varphi(\beta) \wedge (\forall\ \gamma(\varphi(\gamma) \to \beta \in \gamma))))$.

Esto es, toda clase no vacía de ordinales tiene un elemento mínimo.

(ii) $(\forall\alpha\ \{[\forall\beta\ (\beta \in \alpha) \to \varphi(\beta)] \to \varphi(\alpha)\}) \to \forall\gamma\ \varphi(\gamma)$.

Esto es, si una fórmula vale para un ordinal siempre que valga para sus anteriores, entonces vale para todos los ordinales.

Demostración. Para probar (i) supongamos $\varphi(\alpha)$ y sea $c = \{\gamma \in \alpha' : \varphi(\gamma)\}$. Como $\emptyset \neq c \subseteq \alpha'$, c tiene primer elemento β. Si $\varphi(\gamma)$ y $\gamma \notin c$, entonces $\gamma \supseteq \alpha'$. Luego β es el mínimo buscado.

Para probar (ii), supongamos que existe un γ tal que $\neg\varphi(\gamma)$. Sea

$$c = \{\beta \in \gamma' : (\beta \leq \gamma) \wedge \neg\varphi(\beta)\}.$$

El conjunto c es no vacío, pues $\gamma \in c$. Sea γ_0 el primer elemento de c. Si $\beta \in \gamma_0$ entonces $\varphi(\beta)$ es verdadera, de lo contrario γ_0 no sería el primer elemento de c. Por lo tanto, $\forall\beta\ (\beta \in \gamma_0 \to \varphi(\beta))$ y por hipótesis implica $\varphi(\gamma_0)$ que es absurdo porque $\gamma_0 \in a$. □

2.6. Ejercicios

Ejercicio 2.6.1. *Sea a un conjunto y sea $r_\in = \{\langle x, y\rangle \in a \times a : x \in y\}$.*

1. *¿Es cierto que si a es transitivo, entonces $r_\in$ es una relación transitiva sobre a?*

2. *¿Es cierto que si* $r_\in$ *es un a relación transitiva sobre* a*, entonces* a *es transitivo?*

Fundamente sus respuestas.

Ejercicio 2.6.2. *Probar que para todo conjunto* a *los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. a *es transitivo.*
2. *Para todo* $b \subseteq a$, $\cup\, b \subseteq a$.
3. $\mathcal{P}(a)$ *es transitivo.*
4. $\cup a' = a$.

Ejercicio 2.6.3. *De un ejemplo de un conjunto transitivo* a *tal que* $\cup\, a = a$ *y un ejemplo de un conjunto transitivo* b *tal que* $\cup\, b \neq b$.

Ejercicio 2.6.4. *Probar que si* a *es transitivo también lo es* $\cup a$*. De un ejemplo para mostrar que* $trans(\cup a)$ *no implica* $trans(a)$.

Ejercicio 2.6.5. *Probar que si* a *es un conjunto tal que todos sus elementos son transitivos, entonces* $\cup a$ *es transitivo.*

Ejercicio 2.6.6. *Probar que un conjunto totalmente ordenado* $(a, \leq)$ *es bien ordenado si y sólo si* $\leq$ *es un buen orden sobre todas sus secciones iniciales.*

Ejercicio 2.6.7. *Un conjunto totalmente ordenado es bien ordenado si y sólo si todo subconjunto propio decreciente es una sección inicial.*

Ejercicio 2.6.8. *Sea* a *un conjunto de ordinales. Probar que si* $a \neq \emptyset$*, entonces* $\cap a \in a$.

Ejercicio 2.6.9. *Un conjunto ordenado* $(a, \leq)$ *satisface el* ***Principio de Inducción Transfinita*** *si todo subconjunto de* a *con la propiedad (P) del enunciado del Teorema 2.2.2 coincide con* a*. Esto es, si para todo* $b \subset a$*, si* b *satisface (P), entonces* $b = a$*. Probar que todo conjunto* totalmente *ordenado con primer elemento y que satisface el principio de inducción transfinita es bien ordenado.*

Ejercicio 2.6.10. *Sea* $(a, \leq)$ *un conjunto bien ordenado tal que* a *es transitivo y para todo* $x \in a$, $x = a_x$*. Pruebe que* a *es un ordinal.*

Ejercicio 2.6.11. *Sea a un conjunto de ordinales.*

1. *De ejemplos en los que $\cup a \in a$ y en los que $\cup a \notin a$.*

2. *Si $a \neq \emptyset$, entonces $\cap a$ el primer elemento de a.*

Ejercicio 2.6.12. *Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado y $b \subseteq a$. Se dice que b es* ***cofinal en*** *a (respecto al orden $\leq$) si para todo $x \in a$ existe $y \in b$ tal que $x \leq y$. Sea α un ordinal y $b \subseteq \alpha$.*

1. *Pruebe que si α es límite, entonces b es cofinal en α (respecto al orden $\subseteq$) si y sólo si $\cup b = \cup \alpha$.*

2. *Si $\alpha \neq \emptyset$ y α no es límite, de una condición necesaria y suficiente para que b sea cofinal en α.*

Ejercicio 2.6.13. *Diremos que una relación r es* ***bien fundada*** *sobre un conjunto a si se cumple:*

$$\forall x((x \subseteq a) \wedge (x \neq \emptyset)) \to \exists y((y \in x) \wedge \neg(\exists t(t \in x) \wedge (\langle t, y \rangle \in r)). \qquad (2.1)$$

Diremos que el y de (2.1) es un elemento r-minimal de x.

Demuestre que:

1. *r es bien fundada sobre a si y sólo si no existe una función $f\colon \omega \to a$ tal que $\langle f(n), f(n') \rangle \in r$ para todo $n \in \omega$.*

2. *Un conjunto totalmente ordenado $(a, \leq)$ es bien ordenado si y sólo si $<$ es bien fundada sobre a.*

3. *La relación vacía $\emptyset$ es bien fundada sobre todo conjunto a y todo $y \in x \subseteq a$ es $\emptyset$-minimal de x.*

4. *Si $(a, \leq)$ es un conjunto ordenado finito, entonces $<$ es bien fundada sobre a.*

5. *Si r es bien fundada sobre a, entonces vale el siguiente principio de inducción, donde φ denota una fórmula con una variable libre:*

$$(\forall y \in a\ (\langle y, x \rangle \in r \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in a\ \varphi(x).$$

Capítulo 3

El axioma de Sustitución

3.1. Los sistemas Z y ZF

Hasta ahora hemos considerado los siguientes axiomas:

1) Axioma de Extensionalidad,

2) Axioma del conjunto vacío (existencia de un conjunto),

3) Axioma Esquema de Especificación,

4) Axioma del Par,

5) Axioma de la Unión,

6) Axioma del Conjunto Potencia,

7) Axioma del Infinito.

Como estos axiomas fueron introducidos por Zermelo en 1908, se denominan **Axiomas de Zermelo** y la teoría de conjuntos que se puede desarrollar a partir de los mismos se la simboliza con la letra Z.

Como no hay un conjunto que tenga entre sus elementos a todos los ordinales (Paradoja de Burali-Forti), el Axioma de Especificación no puede utilizarse para probar la existencia de conjuntos de ordinales que satisfagan una cierta propiedad.

Por ejemplo, si α es un ordinal. ¿Existe un conjunto a tal que $\alpha \in a$ y $\forall x\ ((x \in a) \to (x' \in a))$? Cuando $\alpha = \emptyset$ este conjunto existe por el Axioma del Infinito. Pero, ¿existe cuando $\alpha = \omega$?

La existencia de este tipo de conjuntos es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$, y su existencia podría postularse, transformando el Axioma del Infinito en un esquema válido para cada ordinal α y no sólo para $\emptyset$. Pero este tipo de axioma esquema no sería suficiente para otras situaciones que se plantean naturalmente:

Sea $a_0 = \omega$ y pongamos $\omega_0 = \cup a_0 = \omega$. Usando un axioma esquema del tipo indicado, podríamos definir el conjunto $a_1 = \{\omega_0, \omega_0', \omega_0'' \ldots\}$ y definir $w_1 = \cup a_1$. Así siguiendo, para cada $n \in \omega$ podríamos definir un conjunto de ordinales a_n de modo que el primer elemento de $a_{n'}$ fuese $\cup a_n$. Pero un axioma esquema del tipo indicado no nos permitiría asegurar la existencia de un conjunto que tuviese entre sus elementos a todos los conjuntos a_n para $n \in \omega$.

Observemos que todos estos ejemplos son del tipo siguiente:

Hay un conjunto I y para todo $i \in I$ está definido un único conjunto a_i, y quisiéramos encontrar un conjunto a tal que $a_i \in a$ para todo $i \in I$.

En el primer caso $I = \omega$ y $a_n = \alpha^{(n)}$, donde con el exponente (n) estamos indicando tomar n veces el siguiente, y en el segundo, también $I = \omega$ y $a_0 = \omega$ y $a_{n'} = \{\cup a_n, (\cup a_n)', (\cup a_n)'' \ldots\}$.

Más generalmente, supongamos que tenemos una relación funcional sobre un conjunto a (ver página 10). Esto es, tenemos una fórmula con dos variables libres $\varphi(x, y)$ tal que $\forall x\ ((x \in a) \to \exists! y\ \varphi(x, y)$.

De acuerdo con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$, en la misma etapa en que están disponibles los elementos x del conjunto a también deben estar disponibles los conjuntos $F(x)$ determinados por la relación funcional φ, lo que nos permite formar un nuevo conjunto que los tenga por elementos.

Es decir, la clase $\{F(x) : x \in a\}$ debe ser un conjunto. Este es el significado del axioma esquema siguiente.

Axioma (Esquema) de Sustitución:[1] Sea φ una fórmula entre cuyas variables libres figuran x e y, y sea t una variable que no figura en φ. Entonces el siguiente enunciado es un axioma:

$$\forall z\ \{[\ \forall x\ \forall y\ \forall t\ (x \in z\ \wedge\ \varphi(x, y)\ \wedge\ \varphi(x, y|t)) \to\ y = t\ ] \to$$

$$\exists u\ [\forall y\ (\exists x\ (x \in z\ \wedge\ \varphi(x, y)))\ \leftrightarrow\ (y \in u)]\}.$$

Con la notación introducida en la página 7 el Axioma Esquema de Sustitución

[1] Ver página 7 para la notación $\varphi(x, y|t)$.

puede escribirse:

$\forall z[\forall x((x \in z) \rightarrow (\exists ! y(\varphi(x,y))] \rightarrow \exists u\, [\forall y\, (\exists x\, (x \in z \wedge \varphi(x,y)))\ \leftrightarrow\ (y \in u)].$

Dada una "función" F en $\mathcal{U}$ y un conjunto a, el axioma anterior nos permite construir una función f de a en algún conjunto: en efecto, primero consideramos el conjunto

$$b = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ y = F(x))\}$$

cuya existencia asegura el Axioma de Sustitución, luego, el conjunto

$$f = \{r \in a \times b :\ \exists x\ \exists y\ (r = \langle x, y\rangle\ \wedge\ y = F(x))\}.$$

Es sencillo verificar que el conjunto f es efectivamente una función de a en b. Para expresar esta noción escribiremos $f = F|_a$.

La teoría de conjuntos desarrollada en base a los siguientes axiomas se conoce como la teoría de Zermelo–Fraenkel[2] y se la simboliza por ZF:

1) Axioma de Extensionalidad,

2) Axioma del Conjunto Vacío,

3) Axioma Esquema de Sustitución,

4) Axioma de la Unión,

5) Axioma del Conjunto Potencia,

6) Axioma del Infinito.

Tanto el Axioma de Especificación como el Axioma del Par son derivables en ZF:

Derivación del Axioma de Especificación: Sea ψ una fórmula con una única variable libre y sea $\varphi(x,y)$ la fórmula $(x = y \wedge \psi(y))$. Esta fórmula es funcional. En efecto, $\forall x \forall v\ ((\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,y|v)) \rightarrow (y = x = v))$. Luego por el Axioma Esquema de Sustitución tenemos que

$$\forall z\ \exists u\ \forall y\ [(y \in u) \leftrightarrow (\exists x\ ((x \in z) \wedge (y = x) \wedge \psi(y)))],$$

[2]Este nombre fue propuesto por el propio E. Zermelo en 1930, pues le atribuyó A. A. Fraenkel el enunciado del Axioma de Sustitución, aunque también había sido considerado por J. von Neumann y T. Skolem.

que es un enunciado equivalente al Axioma de Especificación.

Derivación del Axioma del Par: Dados los conjuntos u, v la idea es encontrar una fórmula funcional que restringida a un conjunto con dos elementos tenga por imagen al conjunto $\{u, v\}$.

Comencemos por observar que:

1) $\emptyset \neq \mathcal{P}(\emptyset)$,

2) $x \in \mathcal{P}(\emptyset) \leftrightarrow x = \emptyset$,

3) $x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \leftrightarrow (x = \emptyset \vee x = \mathcal{P}(\emptyset))$.

Con estos conjuntos formaremos la fórmula adecuada para aplicar el Esquema de Sustitución.

Sea $\varphi(z, y, u, v)$ la fórmula $(z = \emptyset \wedge y = u) \vee (z = \mathcal{P}(\emptyset) \wedge y = v)$.

Si $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$ y $\varphi(y) \wedge \varphi(y|t)$, entonces $y = t$, por lo tanto φ es funcional en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$. Por lo tanto,

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) \wedge \varphi(y)], \tag{3.1}$$

que más detalladamente se escribe

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))) \wedge (z = \emptyset \wedge y = u) \vee (z = \mathcal{P}(\emptyset) \wedge y = v)].$$

Como cuando $z = \emptyset$, es $y = u$ y cuando $z = \mathcal{P}(\emptyset)$, es $y = v$, resulta que (3.1)) afirma que

$$\forall u \forall v[\exists x(y \in x \leftrightarrow (y = u \vee y = v)]$$

que es el axioma del par.

Observación 3.1.1. El Axioma de Sustitución nos permite relajar la condición impuesta en la definición de familia de conjuntos (ver § 1.2) que para considerar una familia $\{a_i\}_{i \in I}$ hay que asegurar la existencia de un conjunto a tal que $a_i \in a$ para todo $i \in I$. La existencia de a está garantizada por el Axioma de Sustitución.

3.2. Ordinales y conjuntos bien ordenados

Definición 3.2.1. Sean a y b conjuntos ordenados. Una función $f : a \to b$ es un **morfismo**, si siempre que x e y estén en a y se cumpla que $x \leq y$, se tenga $f(x) \leq f(y)$; y es un **monomorfismo** si $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$. Si f es un monomorfismo y es sobreyectivo diremos que es un **isomorfismo**. Diremos que a es **similar** a b, y escribiremos $a \sim b$, si existe un isomorfismo de a sobre b.

En la definición anterior hemos cometido un abuso de lenguaje común en matemática: hemos representado con el mismo símbolo $\leq$ el orden en a y en b, entendiendo que del contexto resulta claro a cuál de ellos nos estamos refiriendo. Así si x, y son elementos de a, en $x \leq y$ el orden debe ser el de a, mientras que en $f(x) \leq f(y)$, el orden debe ser el de b. Esta convención permite hacer la escritura (y la lectura!) menos pesada, y será usada habitualmente.

Ejemplo: Sea a un conjunto totalmente ordenado, y sea $s(a)$ el conjunto de todas las secciones iniciales de a, ordenadas por inclusión. Entonces la función $f : a \to s(a)$ definida por $f(x) = a_x$ para todo $x \in a$ es un isomorfismo. Luego $a \sim s(a)$.

Observaciones 3.2.2. *Sean a y b conjuntos ordenados y $f : a \to b$ un monomorfismo. Entonces:*

(i) *f es una función inyectiva.* (Pero hay morfismos inyectivos que no son monomorfismos, como lo muestra el siguiente ejemplo: $a = \{x, y\}$, con el orden dado por $x \leq y \leftrightarrow x = y$, $b = \{s, t\}$ con el orden dado por $s < t$ y $f : a \to b$, definida por $f(x) = t$, $f(y) = s$.)

(ii) *f es un isomorfismo de a sobre* $\mathrm{img}(f) \subseteq b$.

(iii) *Si f es sobreyectiva (esto, si f es un isomorfismo), entonces para todo $x \in a$ la restricción de f a la sección inicial a_x es un isomorfismo de a_x sobre $b_{f(x)}$.*

La noción de similaridad es debida a Cantor, quién utilizaba la notación $\bar{a} = \bar{b}$ para indicar que $a \sim b$. Con esta notación quería señalar que los conjuntos similares son iguales si hacemos abstracción de la naturaleza de sus elementos pero no del orden en que estos elementos están relacionados. En cambio, con la notación $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$, que utilizamos en el capítulo anterior, quería indicar que los conjuntos son iguales si hacemos abstracción tanto de la naturaleza de sus elementos como del orden entre los mismos. Una raya sobre el conjunto indicaba entonces una abstracción y dos rayas, una doble abstracción.

Como la función identidad es obviamente un isomorfismo, la función inversa de un isomorfismo es un isomorfismo y la composición de isomorfismos es un isomorfismo, resulta que la similaridad tiene las propiedades de una equivalencia: es reflexiva, transitiva y simétrica: Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$. La simetría nos permite decir que dos conjuntos ordenados son **similares** cuando existe un isomorfismo de uno sobre el otro. Cantor estudió particularmente la similaridad entre conjuntos bien ordenados, e introdujo los ordinales como "lo que tenían de común los conjuntos bien ordenados similares entre sí". En la teoría axiomática los ordinales son conjuntos especiales. Para ver que sirven para clasificar a los conjuntos bien ordenados, es fundamental el teorema siguiente.

Teorema 3.2.3. *Sean α y β ordinales. Existe un isomorfismo $f : \alpha \to \beta$ si y sólo si $\alpha = \beta$ y en este caso f es la identidad.*

Demostración. Sea f un isomorfismo de α en β. Sea $a = \{\zeta \in \alpha : f(\zeta) \neq \zeta\}$. Supongamos que $a \neq \emptyset$. Como α es bien ordenado, sea γ el primer elemento de a. Si $\zeta \in \gamma$, entonces $\zeta \notin a$ y $\zeta = f(\zeta)$; como f es isomorfismo (recordar que el orden está dado por la pertenencia) $f(\zeta) \in f(\gamma)$, entonces $\zeta \in f(\gamma)$: esto muestra que $\gamma \subseteq f(\gamma)$.

Dado que $\gamma \subseteq f(\gamma)$ y que $\gamma \neq f(\gamma)$, por el Teorema 2.3.7 tenemos que $\gamma \in f(\gamma) \in \beta$, y como β es transitivo, esto implica que $\gamma \in \beta$. Luego por la sobreyectividad de f, existe $\delta \in \alpha$ tal que $f(\delta) = \gamma$.

Existen dos posibilidades: $\delta \in a$ ó $\delta \notin a$. Veremos que ambos casos conllevan a una contradicción. Si $\delta \notin a$, entonces $\delta = f(\delta) = \gamma \in a$, que es absurdo. Si $\delta \in a$, entonces $\gamma \subseteq \delta$, lo que implica $f(\gamma) \subseteq f(\delta) = \gamma$, entonces $f(\gamma) \subseteq \gamma$; como $\gamma \subseteq f(\gamma)$, $\gamma = f(\gamma)$ y esto es absurdo porque $\gamma \in a$. Con esto hemos probado que el conjunto a es vacío y por consiguiente que f es la identidad.

Por ser f la identidad y sobreyectiva, $\forall x(x \in \alpha \leftrightarrow x \in \beta)$, y el axioma de extensionalidad afirma que $\alpha = \beta$. □

En la demostración del siguiente teorema utilizaremos el Axioma Esquema de Sustitución. Veremos más adelante (Teorema 6.1.17) que este teorema no es derivable en Z.

Teorema 3.2.4. *Para todo conjunto bien ordenado a existe un único ordinal γ tal que $a \sim \gamma$.*

Demostración. Sea $\varphi(x,y)$ la fórmula $(ord(y) \wedge a_x \sim y)$ y sea

$$b = \{x \in a : \exists\beta\varphi(x,\beta)\}.$$

Si $x \in a$ y $\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,v)$, entonces y y v son dos ordinales similares y por el teorema anterior, son iguales. Por lo tanto φ es funcional en a. El Axioma de Sustitución nos dice que existe un conjunto c tal que

$$y \in c \leftrightarrow ord(y) \wedge \exists x(x \in a \wedge \varphi(x,y)).$$

Veamos que c es transitivo: Sea $\alpha \in c$. Existe $x \in a$ y un isomorfismo f de α sobre a_x. Sea $\beta \in \alpha$. Por lo observado en 3.2.2 (III), $\beta = \alpha_\beta \sim a_{f(\beta)}$ y por lo tanto $\beta \in c$. Como c es un conjunto transitivo de ordinales resulta ser un ordinal.

Por otra parte, b es decreciente en a. En efecto, sea x en b e $y \in a$ tal que $y < x$. Existe un ordinal α y un isomorfismo f de a_x sobre α. Como $y \in a_x$, $f(y) \in \alpha$, luego $f(y)$ es un ordinal y otra vez por lo observado en 3.2.2 (III), $a_y \sim f(y)$, lo que prueba que $y \in b$.

Ahora probaremos que b es similar a c.

Sea $F : b \to c$ dada por $F(x) =$ "el único ordinal similar a a_x". Comprobemos que F es un isomorfismo. Supongamos que x e y están en b y $x < y$. Existe un isomorfismo g de a_y sobre $F(y)$, y la restricción de g a a_x es un isomorfismo de a_x sobre $g(x)$. Por la definición de F, $F(x) = g(x) \in F(y)$. Luego $x < y$ implica $F(x) < F(y)$. Supongamos ahora que α, β están en c y $\beta \in \alpha$. Sean $x, y \in b$ tales que $\alpha = F(x)$ y $\beta = F(y)$. Si fuese $x \leq y$, sería $F(x) \leq F(y)$, esto es, tendríamos $\beta \in \alpha \subseteq \beta$, lo que es absurdo. Luego debe ser $y < x$. Como F es sobreyectiva, hemos probado que F es un isomorfismo y $b \sim c$.

Finalmente, como $b \sim c$, si existiese x en a tal que $b = a_x$, resultaría $a_x \sim c$, y por lo tanto $c \in c$ que es absurdo. Luego b no puede ser una sección inicial y como es decreciente, debe ser $b = a$, y la demostración se completa tomando $\gamma = c$. □

3.3. Definición por Recurrencia

Queremos ahora generalizar el Principio de Definición por Inducción a un **Principio de Definición por Recurrencia** sobre los ordinales.

En el caso de los números naturales, se puede definir una función u cuyo valor en $n \in \omega$ depende, por medio de una función prefijada f, de los valores que u toma en el segmento inicial ω_n. Vamos a generalizar esta idea del modo siguiente:

Supongamos que tenemos una relación funcional $\varphi(x, y)$ (ver página 10). Esto nos permite considerar una "función" $F : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ del universo en el universo, donde $F(x) = y \leftrightarrow \varphi(x, y)$. Si $\mathcal{O}rd$ es la clase de los ordinales, queremos ver que existe una " función" $T : \mathcal{O}rd \to \mathcal{U}$ tal que para todo ordinal α, $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, donde $T|_\alpha = \{\langle \beta, T(\beta)\rangle : \beta \in \alpha\}$. Observemos que como α es un conjunto, por el axioma de sustitución resulta que $T|_\alpha$ es un conjunto. Más precisamente, es una función con dominio α: $T|_\alpha \colon \alpha \to \{T(\beta) : \beta \in \alpha\}$.

Las propiedades siguientes deben entenderse relativas a la relación funcional F, que supondremos fija.

Definición 3.3.1. Sea α un ordinal. Diremos que una función f es una α-función si $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ y $f(\beta) = F(f|_\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$.

Si $\beta \in \alpha$ y f es una α-función, entonces $f|_\beta$ es una β-función. En efecto, para $\gamma \in \beta$, $(f|_\beta)|_\gamma = f|_\gamma$.

Lema 3.3.2. *Para cada α existe a lo sumo una α-función.*

Demostración. Sean f y g dos α-funciones. Por definición, $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) = \alpha$. Supongamos que existe un ordinal en α para el cual las funciones toman distintos valores, sea γ el primero para el cual esto ocurre. Como γ es el primero, si $\beta \in \gamma$ entonces $f(\beta) = g(\beta)$, por lo tanto $f|_\gamma = g|_\gamma$. Como f y g son α-funciones, y $\gamma \in \alpha$ tenemos que $f(\gamma) = F(f|_\gamma) = F(g|_\gamma) = g(\gamma)$: absurdo porque habíamos supuesto que $f(\gamma) \neq g(\gamma)$. □

Dada la unicidad de estas funciones para cada ordinal, podemos establecer la fórmula funcional dada por

$$T(x) = \begin{cases} F(f) & \text{si } x = \alpha \text{ es un ordinal y } f \text{ una } \alpha\text{-función} \\ \emptyset & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Lema 3.3.3. *Si existe una α-función f, entonces $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$.*

Demostración. Sabemos que si $\beta \in \alpha$, entonces $f|_\beta$ es una β-función. Por lo tanto $f(\beta) = F(f|_\beta) = T(\beta)$. Esto muestra que $T|_\alpha = f|_\alpha = f$ y por consiguiente que $T(\alpha) = F(f) = F(T|_\alpha)$. □

Si para todo α existe una α-función, habremos probado el Principio de Definición por Recurrencia.

Lema 3.3.4. *Para todo ordinal α existe una α-función.*

Demostración. Supongamos que para cada $\beta \in \alpha$ existe una β-función. Entonces por el Lema 3.3.3 tendremos que $T(\beta) = F(T|_\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$. Sea $f = T|_\alpha$. Como $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ y para todo $\beta \in \alpha$ tenemos $f(\beta) = F(T|_\beta) = F(f|_\beta)$, resulta que f es una α-función.

Si $\varphi(x) = ord(x) \wedge (\exists f \text{ } x\textit{-función})$, hemos probado que

$$\forall\alpha(\forall\beta(\beta \in \alpha \wedge \varphi(\beta)) \to \varphi(\alpha)).$$

Luego por inducción en los ordinales tenemos que $\forall\alpha\varphi(\alpha)$, es decir, para todo α existe una (única) α-función. □

Hemos completado así la demostración de la existencia de la relación funcional T tal que para todo ordinal α, $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, y por lo tanto, la demostración del Principio de Definición por Recurrencia.

Ahora veremos una reformulación que resulta útil en algunas aplicaciones.

Teorema 3.3.5. *Si a_0 es un conjunto y F_1 y F_2 son "funciones", entonces existe una "función" T tal que para todo ordinal α se satisface*

$$T(\alpha) = \begin{cases} a_0 & \textit{si } \alpha = \emptyset, \\ F_1(T|_{\beta'}) & \textit{si } \alpha = \beta', \\ F_2(T|_\alpha) & \textit{si } \alpha \textit{ es ordinal límite.} \end{cases}$$

Demostración. Definamos la "función" $F\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ del modo siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} a_0 & \text{si } x = \emptyset, \\ F_1(x) & \text{si } \exists\beta(ord(\beta) \wedge x \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(x) = \beta'), \\ F_2(x) & \text{si } \exists\alpha\ (\alpha \text{ ordinal límite} \wedge x \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(x) = \alpha), \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Por el Principio de Definición por Recurrencia existe una "función" T tal que $T(\alpha) = F(T|_\alpha)$, esto es, $T(0) = F(T|_0) = a_0$, $T(\beta') = F(T|_{\beta'}) = F_1(T|_{\beta'})$ y si α es un ordinal límite, $T(\alpha) = F(T|_\alpha) = F_2(T|_\alpha)$. □

El siguiente corolario es un primer ejemplo de aplicación de la definición por recurrencia, en la que intervienen sólo los ordinales $\leq \omega$. En capítulos posteriores veremos aplicaciones más sofisticadas.

Corolario 3.3.6. *Dado un conjunto a existe una función T_a con* $\mathrm{dom}(T_a) = \omega'$ *tal que*

1. $T_a(\emptyset) = a$,
2. $T_a(n') = \cup T_a(n)$ *si* $n \in \omega$,
3. $T_a(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} T_a(n)$.

Demostración. Consideremos $a_0 = a$,

$$F_1(x) = \begin{cases} \cup x(\beta) & \text{si } x \text{ es función} \wedge \mathrm{dom}(x) = \beta', \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

y $F_2(x) = \cup\mathrm{img}(x)$. El teorema anterior nos garantiza que existe una función T_a tal que $T_a(0) = a$, $T_a(n') = F_1(T_a|_{n'}) = \cup T_a(n)$ y $T_a(\omega) = F_2(T_a|_\omega) = \cup\{T_a(n) : n \in \omega\}$. □

Definición 3.3.7. El conjunto $T_a(\omega)$ se llama **clausura transitiva** de a y será denotado por $\mathrm{Tr}(a)$.

Este nombre se lo debe a que $\mathrm{Tr}(a)$ es el menor conjunto transitivo que contiene a a, esto es:

Teorema 3.3.8. *Para todo conjunto a,* $\mathrm{Tr}(a)$ *satisface:*

i) $a \subseteq \mathrm{Tr}(a)$,

ii) $\mathrm{Tr}(a)$ *es transitivo y*

iii) *si $a \subseteq b$ y b es transitivo, entonces* $\mathrm{Tr}(a) \subseteq b$.

Demostración. $a = T_a(0) \subseteq \cup\{T_a(n) : n \in \omega\}$, lo que prueba *i)*.

Si $x \in T_a(\omega)$, existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in T_a(n_0)$, luego $x \subseteq \cup T_a(n_0) = T_a(n_0') \subseteq T_a(\omega)$. Por lo tanto $T_a(\omega)$ es transitivo.

Para probar *iii)*, observemos que $T_a(0) = a \subseteq b$; y si $T_a(n) \subseteq b$, entonces $T_a(n') = \cup T_a(n) \subseteq \cup b = b$ (La última igualdad vale porque b es transitivo). Por lo tanto el conjunto de los $n \in \omega$ tal que $T_a(n) \subseteq b$ es inductivo, luego igual a ω. Por lo tanto, $T_a(\omega) = \bigcup_{n\in\omega} T_a(n) \subseteq b$. □

3.4. Suma de ordinales

Siguiendo la costumbre, el conjunto vacío, considerado como ordinal, será denotado por 0, $0'$ por 1 y $1' = 0''$ por 2 (ver lo dicho a continuación del Teorema 2.1.9, en la página 23).

Definición 3.4.1. Sean (a, r) y (b, s) conjuntos ordenados, con $a \cap b = \emptyset$. Llamaremos **suma ordinal** de a y b, y lo denotaremos $a \sqcup b$, al conjunto ordenado

$$(a \cup b, r \cup s \cup (a \times b)).$$

Esto es, $x \leq y$ en $a \sqcup b$ si y sólo si se satisface una de las tres condiciones siguientes, que son mutuamente excluyentes:

I) x e y pertenecen ambos a a y $\langle x, y\rangle \in r$,

II) x e y están ambos en b y $\langle x, y\rangle \in s$,

III) $x \in a$ e $y \in b$.

La demostración del lema siguiente es muy fácil y la dejamos a cargo del lector.

Lema 3.4.2. *Si a y b son conjuntos bien ordenados tales que $a \cap b = \emptyset$, entonces $a \sqcup b$ es bien ordenado y a es un subconjunto decreciente de $a \sqcup b$.* □

Notemos que si $\langle a, r\rangle$ es un conjunto orenado y z un conjunto, el conjunto $a \times \{z\}$ resulta ordenado por la relación $\langle x, z\rangle \leq \langle y, z\rangle$ si y sólo si $\langle x, y\rangle \in r$, donde x, y son elementos de a, y es claro que la correspondencia $x \mapsto \langle x, z\rangle$ establece un isomorfismo entre $\langle a, r\rangle$ y $\langle a \times \{z\}, \leq\rangle$.

Luego, dados los ordinales α y β, los conjuntos $\alpha \times \{0\}$ y $\beta \times \{1\}$ son conjuntos bien ordenados y disjuntos, isomorfos a α y a β respectivamente.

Definición 3.4.3. Dados los ordinales α y β se llama **suma** de α y β y se lo simboliza $\alpha \oplus \beta$, al único ordinal isomorfo a la suma ordinal $\alpha \times \{0\} \sqcup \beta \times \{1\}$, cuya existencia está garantizada por el Lema 3.4.2 y por el Teorema 3.2.4.

Observemos que si a y b son conjuntos bien ordenados y disjuntos, con $a \sim \alpha$ y $b \sim \beta$, entonces $a \sqcup b \ \sim \ \alpha \times \{0\} \ \sqcup \ \beta \times \{1\}$. Por lo tanto $\alpha \oplus \beta$ es el ordinal isomorfo a la suma ordinal de cualquier par de conjuntos bien ordenados y disjuntos e isomorfos a los ordinales α y β respectivamente.

Teorema 3.4.4. *La suma de ordinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β y γ denotan ordinales arbitrarios:*

i) *El 0 es el elemento neutro:* $0 \oplus \alpha = \alpha \oplus 0 = \alpha$.

ii) *Es asociativa:* $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$.

iii) $\alpha \oplus 1 = \alpha'$

iv) $\alpha \oplus \beta' = (\alpha \oplus \beta)'$.

Demostración. i) resulta del hecho que

$$0 \times \{0\} \sqcup \alpha \times \{1\} = \emptyset \sqcup \alpha \times \{1\} \ \sim \ \alpha \sim \alpha \times \{0\} \sqcup \emptyset = \alpha \times \{0\} \sqcup \emptyset \times \{0\}.$$

ii) Sean a, b y c conjuntos bien ordenados y disjuntos dos a dos. Se tiene que $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ y se verifica fácilmente que la identidad es un isomorfismo de $a \sqcup (b \sqcup c)$ sobre $(a \sqcup b) \sqcup c$.

iii) La función $f : \alpha' \mapsto (\alpha \times \{0\}) \sqcup (1 \times \{1\})$ definida por: $f(\zeta) = \begin{cases} (\zeta, 0) & \text{si } \zeta \in \alpha \\ (0, 1) & \text{si } \zeta = \alpha \end{cases}$ es un isomorfismo.

iv) Por *ii)* y *iii)*: $\alpha \oplus \beta' = \alpha \oplus (\beta \oplus 1) = (\alpha \oplus \beta) \oplus 1 = (\alpha \oplus \beta)'$.

□

Observación 3.4.5. *La suma de ordinales no es conmutativa.* Por ejemplo, la función $f : 1 \times \{0\} \ \sqcup \ \omega \times \{1\} \ \mapsto \ \omega$ definida por $f((0,0)) = 0$ y $f((n,1)) = n'$ es un isomorfismo, lo que muestra que $1 \oplus \omega = \omega$, mientras que por *iii)* del lema anterior, $\omega \oplus 1 = \omega' \neq \omega$. Este ejemplo muestra algo más: *no vale la propiedad cancelativa a derecha,* puesto que $0 \oplus \omega = 1 \oplus \omega = \omega$ pero $0 \neq 1$.

Sean α y β ordinales tales que $\alpha \in \beta$. Entonces $\beta \setminus \alpha$ es un conjunto bien ordenado (por ser un subconjunto del conjunto bien ordenado β), pero no transitivo. Por el Teorema 3.2.4 existe un único ordinal isomorfo a $\beta \setminus \alpha$ que será denotado por $\beta \ominus \alpha$. Pondremos también que $\beta \ominus \beta = 0$.

Teorema 3.4.6. *Sean α, β y γ ordinales.*

i) *Si $\alpha \in \beta$, entonces $\beta = \alpha \oplus (\beta \ominus \alpha)$.*

ii) *Si $\beta \in \gamma$, entonces $\alpha \oplus \beta \in \alpha \oplus \gamma$ (monotonía a derecha).*

iii) *Si $\alpha \oplus \beta = \alpha \oplus \gamma$, entonces $\beta = \gamma$ (propiedad cancelativa a izquierda).*

Demostración. i) La función $f\colon \beta \to \alpha \times \{0\} \sqcup (\beta \setminus \alpha) \times \{1\}$ definida por: $f(\zeta) = \begin{cases} (\zeta, 0) & \text{si } \zeta \in \alpha \\ (\zeta, 1) & \text{si } \zeta \in \beta \setminus \alpha \end{cases}$ es un isomorfismo.

ii) Si $\beta \in \gamma$, por *i)* tendremos que $\gamma = \beta \oplus (\gamma \ominus \beta)$. Luego usando la propiedad asociativa tendremos: $\alpha \oplus \gamma = (\alpha \oplus \beta) \oplus (\gamma \ominus \beta)$ y como $\gamma \ominus \beta \neq 0$, teniendo en cuenta el Lema 3.4.2 resulta que $\alpha \oplus \beta \in \alpha \oplus \gamma$.

iii) Si $\alpha \oplus \gamma = \alpha \oplus \beta$, por *ii)* y el Teorema 2.3.7 debe ser $\beta = \gamma$.

□

Teorema 3.4.7. *Si m y n son números naturales, entonces:*

i) *$m \oplus n \in \omega$ y*

ii) *$m \oplus n = n \oplus m$.*

Demostración. i) Sea $m \in \omega$ y $a_m = \{n \in \omega : m \oplus n \in \omega\}$. Veamos que a_m es inductivo: $0 \in a_m$, pues $m \oplus 0 = m \in \omega$. Supongamos que $n \in a_m$. Entonces $m \oplus n \in \omega$, y $m \oplus n' = (m \oplus n)' \in \omega$.

ii) Es fácil verificar que $\overline{\overline{m \times \{0\} \sqcup n \times \{1\}}} = \overline{\overline{n \times \{0\} \sqcup m \times \{1\}}}$, luego $\overline{\overline{m \oplus n}} = \overline{\overline{n \oplus m}}$, y como por *i)* $m \oplus n$ y $n \oplus m$ son ordinales finitos, por (ii) en el Teorema 2.4.10 debemos tener que $m \oplus n = n \oplus m$.

□

Observación 3.4.8. G. Peano demostró que la suma de números naturales es la única función de $\omega \times \omega \mapsto \omega$ que satisface las ecuaciones: $m + 0 = m$ y $m + n' = (m + n)'$. De los teoremas 3.4.4 parte *(iv)* y 3.4.7 *(i)* resulta entonces que $m \oplus n$ coincide con la suma ordinaria de números naturales, y por ende que la suma de ordinales es una generalización de la suma de naturales.

La noción de suma ordinal de dos conjuntos ordenados puede extenderse a familias de conjuntos ordenados indexados por un conjunto bien ordenado:

Definición 3.4.9. Sea I un conjunto bien ordenado y para cada $i \in I$ sea $\langle a_i, r_i \rangle$ un conjunto ordenado, tal que $a_i \cap a_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Llamaremos **suma ordinal de una familia** $\{a_i\}_{i \in I}$ al conjunto ordenado

$$\bigsqcup_{i \in I} a_i = \langle \bigcup_{i \in I} a_i, \bigcup_{i \in I} r_i \cup \bigcup_{i<j} (a_i \times a_j) \rangle.$$

De acuerdo con esta definición, $x \leq y$ en $\bigsqcup_{i \in I} a_i$ si y sólo si se presenta uno (y sólo uno) de los casos siguientes:

1. Existe $i \in I$ tal que $x \in a_i$, $y \in a_i$ y $\langle x, y \rangle \in r_i$, ó

2. Existen i y j en I tales que $i < j$, $x \in a_i$ e $y \in a_j$.

Notemos todavía que la suma ordinal $a \sqcup b$ definida al principio de la sección coincide con la suma ordinal de la familia $\{a_i\}_{i \in 2}$ donde $a_0 = a$ y $a_1 = b$: $a \sqcup b = \bigsqcup_{i \in 2} a_i$.

Se prueba fácilmente que si los a_i son conjuntos bien ordenados para todo $i \in I$ y disjuntos dos a dos, entonces $\bigsqcup_{i \in I} a_i$ resulta ser bien ordenado.

Sea β un ordinal y $\{\alpha_\zeta\}_{\zeta \in \beta}$ una familia de ordinales. La suma ordinal $\bigsqcup_{\zeta \in \beta} (\alpha_\zeta \times \{\zeta\})$ es un conjunto bien ordenado.

Definición 3.4.10. Llamaremos **suma de una familia ordinales** $\{\alpha_\zeta\}_{\zeta \in \beta}$ al único ordinal isomorfo a $\bigsqcup_{\zeta \in \beta} (\alpha_\zeta \times \{\zeta\})$, que denotaremos $\bigoplus_{\zeta \in \beta} \alpha_\zeta$.

La existencia está garantizada por el Teorema 3.2.4.

Estas "series" de ordinales nos permitirán definir una operación de producto de ordinales, como veremos en la sección siguiente.

3.5. Producto de ordinales

Recordemos que en la escuela primaria nos enseñaron que el producto de números naturales es una "suma abreviada":

$$m \cdot n = \overbrace{m + m + \cdots + m}^{n \text{ veces}}.$$

Esto sugiere la siguiente definición de producto de ordinales:

Definición 3.5.1. Llamaremos **producto** de los ordinales α y β, y lo denotaremos $\alpha \odot \beta$, al ordinal $\bigoplus_{\zeta\in\beta} \alpha_\zeta$, donde $\alpha_\zeta = \alpha$ para todo $\zeta \in \beta$.

Observación 3.5.2. Se verifica fácilmente que $\bigsqcup_{\zeta\in\beta}(\alpha \times \{\zeta\}) = \alpha \times \beta$, y el orden definido en $\alpha \times \beta$ es el llamado **orden lexicográfico inverso**: dados (γ, ζ) y (δ, η) pertenecientes a $\alpha \times \beta$, $(\gamma, \zeta) < (\delta, \eta)$ si y sólo si se cumple una de las dos condiciones siguientes: 1) $\zeta < \eta$ ó 2) $\zeta = \eta$ y $\gamma < \delta$.

Ejemplo 3.5.3. $2 \odot \omega \sim \bigsqcup_{n\in\omega} 2 \times \{n\}$. *Este conjunto puede listarse de la manera siguiente:* $(0, 0) < (1, 0) < \cdots < (0, n) < (1, n) < \cdots$ *y es obvio que* $2 \odot \omega \sim \omega$. *Precisamente, puede verse que la función* $f : \bigsqcup_{n\in\omega} 2 \times \{n\} \mapsto \omega$ *definida por* $f((i, n)) = 2n + i$, $i \in 2$, *es un isomorfismo.*

Por otra parte, $\omega \odot 2 = \omega \oplus \omega$. En particular, vemos que el producto de ordinales no es conmutarivo. Como $(1 \oplus 1) \odot \omega = 2 \odot \omega = \omega \in \omega \oplus \omega = (1 \odot \omega) \oplus (1 \odot \omega)$, vemos que tampoco vale la distributiva a derecha del producto respecto a la suma.

Teniendo en cuenta la Observación 3.5.2 la demostración de las propiedades listadas en el teorema siguiente resulta muy sencilla y la dejamos a cargo del lector.

Teorema 3.5.4. *Si α, β y γ son ordinales, se tiene que:*

i) $0 \odot \alpha = \alpha \odot 0 = 0$,

ii) $1 \odot \alpha = \alpha \odot 1 = \alpha$,

iii) $\alpha \odot (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \odot \beta) \oplus (\alpha \odot \gamma)$,

iv) *Si* $\alpha > 0$ *y* $\beta > 1$, *entonces* $\alpha \in \alpha \odot \beta$,

v) *Si* $\alpha > 0$ *y* $\alpha \odot \beta = \alpha \odot \gamma$, *entonces* $\beta = \gamma$,

vi) $\alpha \odot \beta' = (\alpha \odot \beta) \oplus \alpha$.

□

La demostración del siguiente teorema es análoga a la del teorema 3.4.7, y se puede hacer teniendo en cuenta las propiedades indicadas en *i)* y *vii)* del teorema 3.5.4 y la observación anterior.

Teorema 3.5.5. *Si m y b son números naturales, entonces:*

I) $m \odot n \in \omega$,

II) $\overline{\overline{m \odot n}} = \overline{\overline{m \times n}}$,

III) $m \odot n = n \odot m$.

$\square$

Observación 3.5.6. G. Peano demostró que el producto de números naturales es la única función de $\omega \times \omega \mapsto \omega$ que satisface l as ecuaciones $m \cdot 0 = 0$ y $m \cdot n' = (m \cdot n) + m$. De los teoremas 3.5.4 *(vii)* y 3.5.5 resulta entonces, teniendo en cuenta la Observación hecha luego del Teorema 3.4.7 sobre la suma de naturales, que $m \odot n$ con el producto ordinario de números naturales, y por ende que el producto de ordinales es una generalización del producto de números naturales.

3.6. Ejercicios

Ejercicio 3.6.1. *El teorema 3.2.4 nos dice que para todo conjunto bien ordenado a existe un único ordinal α y un isomorfismo $f : a \to \alpha$. Pruebe que también el isomorfismo f es único.*

Ejercicio 3.6.2. *Sea α un ordinal y β un ordinal límite. Pruebe que:*

1. $\alpha \oplus \beta = \bigcup_{\xi \in \beta} (\alpha \oplus \xi)$.
2. $\alpha \odot \beta = \bigcup_{\xi \in \beta} (\alpha \odot \xi)$.

Los cuatro ejercicios siguientes muestran como la suma y producto de ordinales pueden también ser definidas por recursión, aunque las definiciones directas dadas en el texto son más intuitiva y hacen que las propiedades de ambas operaciones resulten más aparentes.

Ejercicio 3.6.3. *Sea α un ordinal. Demuestre que la clase*

$$S_\alpha = \{\langle \beta, \gamma \rangle : \gamma = \alpha \oplus \beta\}$$

es funcional y que es la única "función" de la clase de los ordinales en sí misma que satisface las siguientes propiedades:

a) $S_\alpha(0) = \alpha$,

b) $S_\alpha(\beta') = S_\alpha(\beta)'$,

c) $S_\alpha(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} S_\alpha(\xi)$ *si* β *es límite.*

Ejercicio 3.6.4. *Para cada ordinal* α *sea "*$G_\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$*" definida para todo conjunto* x *por*

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{si } x = 0, \\ (x(\beta))' & \text{si } x \text{ es función y } \operatorname{dom}(x) = \beta', \\ \bigcup_{\xi\in\beta} x(\xi) & \text{si } x \text{ es función y } \operatorname{dom}(x) = \beta \text{ y } \beta \text{ es ordinal límite}, \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Aplique la definición por recurrencia para demostrar la existencia de una "$F_\alpha\colon \mathcal{O}rd \to \mathcal{O}rd$*" satisfaciendo las propiedades* $a), b)$ *y* $c)$ *del ejercicio anterior.*

Ejercicio 3.6.5. *Sea* α *un ordinal. Demuestre que la clase*

$$P_\alpha = \{\langle\beta, \gamma\rangle : \gamma = \alpha \odot \beta\}$$

es funcional y que es la única "función" de la clase de los ordinales en sí misma que satisface las siguientes propiedades:

a) $P_\alpha(0) = 0$,

b) $P_\alpha(\beta') = P_\alpha(\beta) \oplus \beta$,

c) $P_\alpha(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} P_\alpha(\xi)$ *si* β *es límite.*

Ejercicio 3.6.6. *Para cada ordinal* α *sea "*$H_\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}$*" definida para todo conjunto* x *por*

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} (x(\beta)) \oplus \alpha & \text{si } x \text{ es función y } \operatorname{dom}(x) = \beta' \text{ e } \operatorname{img}(x) \subset \mathcal{O}rd, \\ \bigcup_{\xi\in\beta} x(\xi) & \text{si } x \text{ es función y } \operatorname{dom}(x) = \beta \text{ y } \beta \text{ es ordinal límite}, \\ \emptyset & \text{en todo otro caso.} \end{cases}$$

Aplique la definición por recurrencia para demostrar la existencia de una "$G_\alpha\colon \mathcal{O}rd \to \mathcal{O}rd$*" satisfaciendo las propiedades* $a), b)$ *y* $c)$ *del ejercicio anterior.*

Ejercicio 3.6.7. *Demuestre que para cada ordinal* α *existe una única "función"* $E_\alpha\colon \mathcal{O}rd \to \mathcal{O}rd$ *satisfaciendo las propiedades:*

a) $E_\alpha(0) = 1$,

b) $E_\alpha(\beta') = E_\alpha(\beta) \odot \alpha$,

c) $E_\alpha(\beta) = \bigcup_{\xi\in\beta} E_\alpha(\xi)$ *si* β *es límite.*

Esta operación es la ***exponenciación*** *de ordinales y se escribe* $E_\alpha(\beta) = \alpha^{\cdot\beta}$.

Ejercicio 3.6.8. *Sean* α, β, γ *ordinales. Demuestre que:*

1. $\alpha^{\cdot\beta} \odot \alpha^{\cdot\gamma} = \alpha^{\cdot(\beta\oplus\gamma)}$,
2. $(\alpha^{\cdot\beta})^{\cdot\gamma} = \alpha^{\cdot(\beta\odot\gamma)}$,
3. *Si* $\alpha > 0$, $0^\alpha = 0$.

Ejercicio 3.6.9. *Demuestre que:*

1. *Si* $m, n \in \omega$, *entonces* $m^{\cdot n} = m^n$,
2. $2^{\cdot\omega} = \omega$.

Capítulo 4

El Axioma de Elección

4.1. Cardinalidad o número de elementos

Definición 4.1.1. Dados dos conjuntos a y b diremos que **el cardinal de** a **es menor que el cardinal de** b o que **el número de elementos de** a **es menor que el de** b, y escribiremos $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$, si existe una función inyectiva de a en b.

Como la función identidad es inyectiva y la composición de funciones inyectivas es inyectiva, resultan inmediatamente las dos propiedades siguientes:

I) Para todo conjunto a es $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{a}}$.

II) Si $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{c}}$, entonces $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{c}}$.

¿ Qué ocurre en el caso de que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$?

Para responder a esta pregunta, observemos que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ significa que existe una función inyectiva $f : a \to b$, y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$ que existe una inyección $g : b \to a$, y en principio no hay relación alguna entre f y g.

El famoso teorema de Cantor–Dedekind–Bernstein–Schröder afirma que la existencia de tales funciones inyectivas implica que existe una función biyectiva de a sobre b. O sea que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ y $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$ implican que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$.

Este es un resultado nada trivial, y hay varias demostraciones del mismo. La que daremos se debe a B. Knaster y A. Tarski (1928)[1] y se apoya en el siguiente lema.

[1] Ver la referencia [17] para detalles históricos.

Lema 4.1.2. *Sea a un conjunto y $k : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(a)$ una función que preserva la relación de inclusión: si $y \subseteq a$, y $x \subseteq y$, entonces $k(x) \subseteq k(y)$. En estas condiciones, existe $z \in \mathcal{P}(a)$ tal que $k(z) = z$. Esto es, la función k tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $c = \{x \in \mathcal{P}(a) : x \subseteq k(x)\}$ y sea $z = \cup c = \bigcup_{x\in c} x$. Vamos a probar que z es el elemento fijo de k, esto es, que $k(z) = z$. En primer lugar, como k preserva la inclusión, y $x \subseteq z$ para todo $x \in c$, tendremos que $x \subseteq k(x) \subseteq k(z)$, de donde resulta que $z = \bigcup_{x\in c} x \subseteq k(z)$. Para probar que también $k(z) \subseteq z$, basta observar que $z \subseteq k(z)$ implica que $k(z) \subseteq k(k(z))$, o sea, que $k(z) \in c$, y por lo tanto debe ser $k(z) \subseteq \cup c = z$. $\square$

Teorema 4.1.3 (Cantor–Dedekind–Bernstein–Schröder)**.** *Si existe una función inyectiva de a en b y existe una función inyectiva de b en a, entonces existe una función biyectiva de a sobre b.*

Demostración. Sean $f : a \to b$ y $g : b \to a$ funciones inyectivas, y definamos $k : \mathcal{P}(a) \to \mathcal{P}(a)$ del siguiente modo: para todo $c \subseteq a$, $k(c) = a \setminus g^{\to}(b \setminus f^{\to}(c))$. Es fácil verificar que k es realmente una función y que además preserva la relación de inclusión. Luego, por el lema de Knaster-Tarski existe $d \subseteq a$ tal que $k(d) = d = a \setminus g^{\to}(b \setminus f^{\to}(d))$, lo que también puede escribirse $a \setminus d = g^{\to}(b \setminus f^{\to}(d))$. Entonces si definimos

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in d, \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in a \setminus d, \end{cases}$$

es fácil verificar que h es una función biyectiva de a sobre b. $\square$

Si f es una función inyectiva, entonces $\mathrm{img}(f) \subseteq b$ y $\bar{\bar{a}} = \overline{\overline{\mathrm{img}(f)}}$. Luego, decir que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ equivale a decir que a tiene el mismo cardinal que un subconjunto de b. En este sentido, $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ expresa intuitivamente que a no puede tener "más elementos" que b.

Una propiedad que parece natural de acuerdo con esta interpretación es que los números de elementos de dos conjuntos deben ser siempre comparables: dados a y b, $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ o $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$.

Esta propiedad no puede probarse en ZF y debe postularse como un nuevo axioma. En realidad, es una de las formas en ZF del llamado Axioma de Elección. Para comprender el significado de este postulado de comparabilidad de cardinales necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.4 (Hartogs)**.** *Dado un conjunto a existe un ordinal α tal que $\bar{\bar{\alpha}} \not\leq \bar{\bar{a}}$.*

Demostración. Sea

$$F = \{(c, <) \in \mathcal{P}(a) \times \mathcal{P}(a \times a) : < \text{ es buen orden sobre } c\},$$

esto es, F es el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de a con sus posibles relaciones de buen orden.

Sea $\alpha_{(c,<)}$ el único ordinal isomorfo a $(c, <) \in F$, cuya existencia está garantizada por el Teorema 3.2.4. Es claro que la correspondencia $c \mapsto \alpha_{(c,<)}$ asocia un único ordinal a cada elemento del conjunto F, y por el Axioma de Sustitución sabemos que existe el conjunto $\phi = \{\alpha_{(c,<)} : (c, <) \in F\}$. Veamos que el conjunto de ordinales ϕ es transitivo: Sea $\alpha \in \phi$ y $\beta \in \alpha$. Existe $(x, <) \in F$ y un isomorfismo f de α sobre $(x, <)$. Luego si f_1 es la restricción de f a $\beta \subset \alpha$, resulta que f_1 es un isomorfismo de β sobre la sección inicial $(f(\beta), <)$ de $(x, <)$. Entonces $\beta = \alpha_{(f(\beta),<)} \in F$.

Como ϕ es un conjunto transitivo de ordinales, es un ordinal (Teorema 2.3.9). Veamos que $\bar{\bar{\phi}} \not\leq \bar{\bar{a}}$. Supongamos que existiese una inyección $h : \phi \to a$. Entonces definiendo $x < y$ si y sólo si $x = h(\alpha)$ e $y = h(\beta)$ con $\alpha \in \beta \in \phi$ tendríamos una relación de buen orden $<$ sobre $c = h(\phi) \subseteq a$, y sería $\phi = \alpha_{(c,<)} \in \phi$, lo que es absurdo por el Teorema 2.3.6. □

4.2. Buena Ordenación y Axioma de Elección

Teorema 4.2.1. *En ZF los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) *Dados los conjuntos a y b, se tiene que $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ o $\bar{\bar{b}} \leq \bar{\bar{a}}$.*

ii) *Todo conjunto admite un buen orden.*

iii) *Para todo conjunto a existe un ordinal α tal que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{\alpha}}$.*

Demostración. i) implica *ii)*: Supongamos que vale *i)* y sea a un conjunto. Por el Lema 4.1.4, existe un ordinal α tal que $\bar{\bar{\alpha}} \not\leq \bar{\bar{a}}$, luego por *i)* debe ser $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{\alpha}}$, esto es, existe $f : a \to \alpha$ inyectiva. La imagen de f es un conjunto de ordinales, y por lo tanto bien ordenado. Luego f es una biyección entre a y el conjunto bien ordenado $\text{img}(f)$, y la relación $x < y$ en a si y sólo si $f(x) < f(y)$ en $\text{img}(f)$ define una relación de buen orden sobre a.

ii) implica *iii)* Supongamos *ii)* verdadera y sea a un conjunto. Por *ii)* existe una relación de buen orden $\leq$ sobre a, y por el Teorema 3.2.4 existe α similar a $(a, \leq)$. Como todo isomorfismo es una biyección, resulta $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{\alpha}}$.

iii) implica *i)*: Supongamos que valga *iii)* y sean a y b conjuntos. Entonces existen ordinales α y β tales que $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{a}}$ y $\bar{\bar{\beta}} = \bar{\bar{b}}$, dado que $\alpha \subseteq \beta$ o $\beta \subseteq \alpha$ (ver Observación 2.3.8), se deduce inmediatamente que existe una función inyectiva de a en b o una de b en a. □

El enunciado *ii)* del teorema anterior suele expresarse informalmente diciendo que "todo conjunto puede ser bien ordenado" y se lo conoce como **Principio de Buena Ordenación**.

El enunciado *iii)* del mismo teorema implica que dado un conjunto $a \neq \emptyset$, existe (por lo menos) un ordinal α tal que los elementos de a pueden representarse como los términos de una "sucesión transfinita": $a = \{x_\beta\}_{\beta \in \alpha}$. Basta definir $x_\beta = f(\beta)$, donde $f : \alpha \to a$ es una biyección que existe por *iii)*.

Vamos a estudiar ahora varias formas equivalentes del principio de Buena Ordenación.

Comenzaremos por enunciar el llamado Axioma de Elección.

AC) **Axioma de Elección:** *Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos (esto es, si $x, y \in a$ y $x \neq y$, entonces $x \cap y = \emptyset$). Existe un conjunto d tal que $d \cap b$ es un conjunto unitario para todo b de a.*

En símbolos:

$$\forall z\{\{z \neq \emptyset \wedge [\forall x\ (x \in z) \to (x \neq \emptyset)] \wedge [\forall x \forall y\ (x \in z \wedge y \in z)$$

$$\to ((x \cap y = \emptyset) \vee (x = y))\} \to \exists w\ [\forall x\ (x \in z\ \to\ \exists t\ (x \cap w = \{t\}))]\}.$$

Observemos que este nueva axioma es compatible con nuestra intuición del universo $\mathcal{U}$: Al tener el conjunto a, también tendremos disponibles a los elementos de los elementos de a para formar nuevos conjuntos.

Observación 4.2.2. Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, y sea d el conjunto cuya existencia afirma el Axioma de Elección. Por el Axioma de Especificación podemos formar el conjunto $\{x \in d : \exists\ b\ (b \in a \wedge b \cap a = \{x\}\}$, esto es, existe un conjunto formado por exactamente un elemento de cada b de a.

Teorema 4.2.3. *En* Z*, el Principio de Buena Ordenación implica el Axioma de Elección.*

Demostración. Sea a un conjunto en las condiciones del enunciado del Axioma de Elección y sea $u = \cup a$. Por el Principio de Buena Ordenación, existe una relación de buen orden r sobre el conjunto u. Luego podemos formar el conjunto d formado por los primeros elementos de los conjuntos no vacíos de a:

$$d = \{x \in u : \exists\, b \in a[(x \in b) \wedge \forall y((y \in b) \rightarrow (\langle x, y\rangle \in r))]\}.$$

Por el Axioma de Especificación podemos afirmar la existencia del conjunto d. Como $b \in a$ implica que $b \subseteq u$ y $b \neq \emptyset$, se tiene que $d \cap b \neq \emptyset$, y como los elementos de a son disjuntos dos a dos, debe ser $d \cap b$ un conjunto unitario para todo $b \in a$. $\square$

Es importante destacar el carácter puramente existencial del Axioma de Elección, pues a pesar de su nombre, no nos da ninguna regla para "elegir" un elemento de cada conjunto de la familia. B. Russell daba el siguiente ejemplo intuitivo para comprender mejor el sentido de este axioma: Supongamos que tuviésemos un conjunto infinito de pares de medias. El axioma nos asegura que existe un conjunto formado por exactamente una media de cada par. Si tuviésemos en cambio una infinidad de pares de zapatos, no necesitaríamos recurrir al Axioma de Elección para formar un conjunto con un zapato de cada par; pues bastaría que eligiéramos como elemento el zapato derecho (o el izquierdo) de cada par.

Llamaremos ZC y ZFC a las teorías que se obtienen agregando a Z y a ZF, respectivamente, el Axioma de Elección.

4.3. Formas del Axioma de Elección

Hemos enunciamos el Axioma de Elección en términos de conjuntos y elementos, del mismo modo que fueron enunciados los axiomas anteriores. Usando la noción de familia de conjuntos, podemos dar una formulación equivalente, y tal vez más clara.

AC.2) **Axioma de Elección en términos de familia de conjuntos:** *Sea* $\{a_i\}_{i\in I}$ *una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos (esto es,* $I \neq \emptyset$*,* $a_i \neq \emptyset$ *para todo* $i \in I$*, y si* $i \in I$*,* $j \in I$ *e* $i \neq j$*, se tiene*

$a_i \cap a_j = \emptyset$). Entonces existe un conjunto d tal que $d \cap a_i = \{x_i\}$ para todo $i \in I$ (esto es, para cada $i \in I$ existe un único $x_i \in a_i$ tal que $x_i \in d$).

Si $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia en las condiciones del enunciado anterior y d el conjunto cuya existencia afirma el axioma, se verifica que

$$f = \{\langle i, x_i\rangle \in I \times \bigcup_{i\in I} a_i : \{x_i\} = d \cap a_i\}$$

es una función. Luego el Axioma de Elección implica que dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, $\{a_i\}_{i\in I}$, existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ tal que $f(i) \in a_i$ para todo $i \in I$. Recíprocamente, si existe una función f que satisface estas condiciones, y tomamos $d = \mathrm{img}(f)$, resultará que $d \cap a_i = \{f(i)\}$ para todo i de I. Vemos así que el axioma de elección es equivalente a la existencia de una tal función f. Para dar una formulación precisa, introduciremos la siguiente definición.

Definición 4.3.1. Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Una **función selectora** para esta familia es una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ tal que $f(i) \in a_i$ para todo i en I.

De acuerdo a lo desarrollado en el párrafo anterior, el Axioma de Elección equivale al siguiente enunciado:

AC.3') *Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos admite una función selectora.*

Para la existencia de una función selectora es claramente necesario que los conjuntos a_i sean no vacíos, pues en caso contrario no podría ser que $f(i) \in a_i$. Sin embargo, condición de que los conjuntos sean disjuntos dos a dos puede ser eliminada. Concretamente, tenemos que el siguiente enunciado, a primera vista más fuerte, resulta equivalente al Axioma de Elección.

AC.3) **Axioma de Elección en términos de funciones selectoras**: *Toda familia no vacía de conjuntos no vacíos admite una función selectora.*

Es claro que el enunciado anterior implica el enunciado AC.3', pues en este se pide que los conjuntos sean disjuntos dos a dos. Veamos que el enunciado AC.3' también implica el enunciado AC.3. Para demostrar que este nuevo enunciado se desprende del anterior, sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Para cada $i \in I$, definamos

$$b_i = \{i\} \times a_i = \{\langle j, x\rangle \in I \times \bigcup_{i\in I} a_i :\ j = i \wedge\ x \in a_i\} \subseteq I \times \bigcup_{i\in I} a_i.$$

Observemos que si $i \neq j$, entonces $b_i \cap b_j = \emptyset$ (en efecto $\langle i, x\rangle \neq \langle j, x\rangle$ si $i \neq j$). Por lo tanto $\{b_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos (recordemos que el Axioma de Sustitución garantiza que existe un conjunto que tiene a los conjuntos b_i como elementos). Por el enunciado AC.3' existe entonces una función selectora para la familia $\{b_i\}_{i\in I}$. Esto es, existe una función $f : I \to \bigcup_{i\in I} b_i$ tal que $f(i) \in b_i$ para todo i en I. Esto significa que $f(i) = \langle i, x_i\rangle$ con $x_i \in a_i$ para todo i en I. En otras palabras, f es el conjunto de los pares $\langle i, \langle i, x_i\rangle\rangle$, y tenemos que $\mathrm{img}(f)$ es el conjunto de los pares $\langle i, x_i\rangle$. Luego $g = \mathrm{img}(f)$ es función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in I}$: $g : I \to \bigcup_{i\in I} a_i$ y para todo $i \in I$, $g(i) = x_i \in a_i$.

Observemos que el producto cartesiano de los conjuntos a y b se puede expresar en términos de funciones selectoras.

Notación: Dados dos conjuntos a y b designaremos con $\mathcal{F}(a, b)$ al conjunto de todas las funciones de a en b: $\mathcal{F}(a, b) = \{f \in \mathcal{P}(a \times b) : f : a \to b\}$.

Lema 4.3.2. *Dados los conjuntos a y b, consideremos la familia $\{a_i\}_{i\in 2}$ tal que $a_0 = a$ y $a_1 = b$, e indiquemos con S al conjunto de todas las funciones selectoras de esta familia, esto es, $S = \{f \in \mathcal{F}(2, a\cup b) : f(0) \in a \wedge f(1) \in b\}$. Entonces se tiene que $\overline{\overline{a \times b}} = \overline{\overline{S}}$.*

Demostración. Debemos probar que existe una función biyectiva φ de S sobre $a \times b$. Si $f \in S$, pongamos $\varphi(f) = \langle f(0), f(1)\rangle \in a \times b$. Se verifica muy fácilmente que $\varphi : S \to a \times b$ es una función inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, sea $\langle x, y\rangle \in a \times b$ y definamos $f : 2 \to a \cup b$ mediante las fórmulas $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Es inmediato que $f \in S$ y que $\varphi(f) = \langle x, y\rangle$. Luego $\varphi : S \to a \times b$ es una función biyectiva. $\square$

El lema precedente nos dice que cada par ordenado $\langle x, y\rangle \in a \times b$ puede pensarse como una función selectora de la familia $\{a_i\}_{i\in 2}$, con $a_0 = a$ y $a_1 = b$. Como el Axioma de Elección nos permite hablar de funciones selectoras para cualquier familia de conjuntos, esto sugiere dar la siguiente noción de producto cartesiano para familias arbitrarias de conjuntos.

Definición 4.3.3. Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos. Se llama **producto cartesiano de la familia** $\{a_i\}_{i\in I}$, y se lo denota por $\prod_{i\in I} a_i$, al conjunto formado por todas las funciones selectoras de la familia. Esto es,

$$\prod_{i\in I} a_i = \{f \in \mathcal{F}(I, \bigcup_{i\in I} a_i) : \forall i(i \in I \to f(i) \in a_i)\}.$$

Para que $\prod_{i\in I} a_i \neq \emptyset$ es necesario y suficiente que exista por lo menos una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto el siguiente es un enunciado equivalente al enunciado AC.3:

AC.4) **Axioma de Elección en términos de productos cartesianos**: *El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.*

Conviene mencionar que esta es la forma en que Zermelo enunció el Axioma de Elección (con el nombre de Axioma Multiplicativo).

Ya observamos que si $a_i = \emptyset$ para algún $i \in I$, entonces la familia $\{a_i\}_{i\in I}$ no admite funciones selectoras. Por lo tanto del enunciado AC.4 resulta que:

Teorema 4.3.4. *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos. Entonces $\prod_{i\in I} a_i = \emptyset$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $a_i = \emptyset$.*

El Axioma de Elección nos permite de esta manera generalizar para familias arbitrarias de conjuntos la propiedad de que $a \times b = \emptyset$ si y sólo si $a = \emptyset$ ó $b = \emptyset$.

La noción de producto cartesiano de una familia de conjuntos es de gran importancia en matemática. Por eso veremos algunos ejemplos.

Comencemos por observar que si $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia tal que $a_i = a$ para todo $i \in I$ (o sea, $\{a_i\}_{i\in I}$ es una familia constante), entonces $\bigcup_{i\in I} a_i = a$, por lo tanto $\prod_{i\in I} a_i = \mathcal{F}(I, a)$. Esto significa que podemos pensar el conjunto $\mathcal{F}(I, a)$ de todas las funciones del conjunto I en el conjunto a como el producto cartesiano de una familia indexada por I, tal que $a_i = a$ para todo $i \in I$, esto es, como el producto de I factores iguales a a, lo que sugiere que el conjunto de las funciones de I en a sea simbolizado por a^I.

En particular, cuando $a = 2$, esto es $a_i = 2$ para todo $i \in I$, 2^I es el conjunto de todas las funciones de I en 2. Dado que $\overline{\overline{\mathcal{P}(I)}} = \overline{\overline{2^I}}$, para todo conjunto a, $\mathcal{P}(a)$ puede pensarse como el producto cartesiano de la familia $\{a_x\}_{x\in a}$, donde $a_x = 2$ para todo $x \in a$. Esto generaliza el resultado elemental de combinatoria que afirma que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.

Las observaciones anteriores muestran que la noción general de producto cartesiano justifica tanto la notación a^b para el conjunto de las funciones de

b en a, como el nombre de conjunto potencia para el conjunto de las partes de a, $\mathcal{P}(a)$. A partir de ahora la notación a^b será usada sistemáticamente, en lugar de $\mathcal{F}(b, a)$.

Sea $\{a_i\}_{i\in n}$ una familia finita y no vacía de conjuntos no vacíos. Esto es, $n \in \omega$, $n \neq \emptyset$ y $a_i \neq \emptyset$ para todo $i \in n$. Un elemento de $\prod_{i\in n} a_i$ es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in n}$, o sea un conjunto de pares ordenados $\langle i, x_i\rangle$ tales que $i \in n$ y $x_i \in a_i$. Esta función queda caracterizada si escribimos en forma ordenada los segundos elementos de dichos pares $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$. Recíprocamente, si tenemos una n-upla $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$ con $x_i \in a_i$, le podemos hacer corresponder el conjunto de pares $\langle 0, x_0\rangle, \ldots, \langle n-1, x_{n-1}\rangle$, y este conjunto de pares define una función selectora de la familia $\{a_i\}_{i\in n}$. Por lo tanto podemos identificar $\prod_{i\in n} a_i$ con el conjunto de las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_n\rangle$ tales que $x_i \in a_i$ para $i \in n$. En particular, cuando $a_i = a$ para todo $i \in n$, tenemos que $\prod_{i\in n} a_i = a^n$ se identifican con el conjunto de todas las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$ de elementos de a.

Cuando $a = 2$, entonces $\prod_{i\in n} a_i = 2^n$ se identifica con el conjunto de las n-uplas $\langle x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}\rangle$ tales que $x_i \in 2$, esto es, $x_i = 0$ o $x_i = 1$ para todo $i \in n$. En particular $\mathcal{P}(n)$ también se identifica con este conjunto de n-uplas, y esta identificación es la clave del cálculo del número de elementos de $\mathcal{P}(n)$.

Sea $a \neq \emptyset$. Una **sucesión** de elementos de a es una familia de elementos de a indexada por ω, esto es, una función de ω en a. Las sucesiones se escriben generalmente en la forma $\{x_i\}_{i\in\omega}$, donde x_n es el elemento de a que se corresponde con n por la función que define la sucesión. Si $\{a_i\}_{i\in\omega}$ es una familia de conjuntos no vacíos indexada por ω, $a_i = a$ para todo $i \in \omega$, $\prod_{i\in\omega} a_i = a^w$ es el conjunto de todas las sucesiones de elementos de a.

Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y sea $a = \prod_{i\in I} a_i$. Para todo $i \in I$ y toda $f \in a$, la fórmula $p_i(f) = f(i)$ define una función $p_i : a \to a_i$, llamada la i-ésima proyección del producto cartesiano $\prod_{i\in I} a_i$ en el conjunto a_i. Una propiedad importante de las proyecciones está expresada en el siguiente lema.

Lema 4.3.5. *Sea $\{a_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Para todo $i \in I$, la proyección $p_i : \prod_{i\in I} a_i \to a_i$ es una función sobreyectiva.*

Demostración. Dado $x \in a_i$, debemos probar que existe $f \in \prod_{i\in I} a_i$ tal que $p_i(f) = f(i) = x$. Por la forma AC.4 del Axioma de Elección sabemos que $\prod_{i\in I} a_i \neq \emptyset$, por lo tanto existe $g \in \prod_{i\in I} a_i$, esto es g es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i\in I}$. Si para todo $j \in I$ definimos $f(j)$ por las condiciones $f(j) = \begin{cases} g(j) & \text{si } j \neq i \\ x & \text{si } j = i \end{cases}$, se verifica fácilmente que f es también una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i \in I}$, o sea , $f \in \prod_{i \in I} a_i$, y es claro que $p_i(f) = f(i) = x$. □

Veremos ahora otra formulación del Axioma de Elección.

Sea a un conjunto no vacío, entonces $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ es un conjunto no vacío y además $\cup(\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}) = a$. Luego podemos considerar $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ como una familia no vacía de conjuntos no vacíos, tomando como conjunto de índices el propio conjunto $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, esto es $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ es la familia $\{b\}_{b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}}$. Una función selectora para esta familia es una función $f \colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to \cup(\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}) = a$ con la propiedad de que $f(b) \in b$. La formulación AC.3 del Axioma de Elección implica entonces que para todo $a \neq \emptyset$, existe una función $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que para todo $a \neq \emptyset$ exista

$$f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$$

tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ y sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Como $a = \bigcup_{i \in I} a_i \neq \emptyset$, existe $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ tal que $f(b) \in b$ para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. Si $d = \mathrm{img}(f)$, entonces $d \cap a_i = \{f(a_i)\}$ para todo i en I. Es decir, se satisface la formulación AC del Axioma de Elección. Probamos así, que la siguiente es otra formulación del Axioma de Elección, equivalente a las anteriores:

AC.5) **Axioma de Elección en términos del conjunto potencia**: *Para todo conjunto $a \neq \emptyset$ existe una función $f : \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ tal que $f(b) \in b$ para todo $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$.*

Finalizaremos esta sección con otra forma más del Axioma de Elección. Recordemos que si $f : a \to b$ es una función, la función inversa, si existe, es una función $f^{-1} : b \to a$ tal que $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in b$ y $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in a$. Vamos a generalizar la noción de inversa pidiendo que se satisfaga sólo una de las dos igualdades anteriores.

Definición 4.3.6. Sea $f : a \to b$ una función. Se llama **inversa a derecha** de f, o **pseudoinversa**, a una función $g : b \to a$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in b$.

Notemos que la condición $f(g(y)) = y$ para todo $y \in b$ implica que f debe ser sobreyectiva y que g debe ser inyectiva.

Es claro que si existe la función inversa de f, entonces f^{-1} es una pseudoinversa. Pero una función puede tener pseudoinversas sin tener una función inversa. Más precisamente, se tiene que el Axioma de Elección es equivalente al siguiente enunciado:

AC.6) **Axioma de Elección en términos de pseudoinversas:** *Toda función sobreyectiva $f : a \to b$ tiene pseudoinversa.*

Para probar esta equivalencia, supongamos el Axioma de Elección y sea $f : a \to b$ sobreyectiva. Entonces $\{f^{-1}(\{y\})\}_{y \in b}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos, con la propiedad que $\bigcup_{y \in b} f^{-1}(\{y\}) = a$. Se verifica fácilmente que cualquier función selectora g para esta familia es una pseudoinversa de f. Recíprocamente, supongamos ahora que toda función sobreyectiva tenga pseudoinversa, y sea $\{a_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Sea $a = \bigcup_{i \in I} a_i$ y sea $f : a \to I$ definida del modo siguiente: $f(x) = i$ si y sólo si $x \in a_i$. Como los a_i son disjuntos dos a dos, f es una función, y como $a_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$, f es sobreyectiva. Sea $g : I \to a = \bigcup_{i \in I} a_i$ una pseudoinversa de f. La condición $f(g(i)) = i$ para todo $i \in I$ implica que $g(i) \in a_i$ para todo $i \in I$, lo que muestra que g es una función selectora para la familia $\{a_i\}_{i \in I}$.

Observación 4.3.7. Si $f : a \to b$ ($a \neq \emptyset$) es una función inyectiva, independientemente del Axioma de Elección, existe una función $g : b \to a$ tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in a$. En efecto, sea $z \in a$ y definamos g del modo siguiente:

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{si } y = f(x), \\ z & \text{si } y \notin \operatorname{img}(f). \end{cases}$$

Se verifica inmediatamente que $g : b \to a$ es una función sobreyectiva y que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in a$.

4.4. Elección implica Buena Ordenación

Comenzaremos por probar el siguiente lema, que muestra que no puede existir una "función inyectiva" de la clase de los ordinales en un conjunto.

Lema 4.4.1. *Sea a un conjunto y F una "función" tal que para todo ordinal α, $F(\alpha) \in a$. Entonces existen ordinales β y γ tales que $\beta < \gamma$ y $F(\gamma) = F(\beta)$*

Demostración. Sea $b = \{x \in a : \exists\alpha\ (ord(\alpha) \wedge F(\alpha) = x)\}$.

Para cada $x \in b$ sea $G(x)$ el primer ordinal tal que $F(\alpha) = x$.

La correspondencia $x \mapsto G(x)$ es funcional sobre b, y por el Axioma de Sustitución $c = \{G(x) : x \in b\}$ es un conjunto de ordinales. Por lo tanto debe existir un ordinal γ que no está en c (pues de lo contrario todos los ordinales formarían un conjunto).

Luego, γ no el primer ordinal que toma el valor $F(\gamma) \in b$ (si no, γ pertenecería a c) y por lo tanto existe $\beta \in \gamma$ tal que $F(\beta) = F(\gamma)$. □

Teorema 4.4.2. *En* ZF *el Axioma de Elección implica el Principio de Buena Ordenación.*

Demostración. Sea a un conjunto no vacío. Por la formulación del Axioma de Elección en términos de conjuntos potencia, existe una función selectora $f\colon \mathcal{P}(a) \setminus \emptyset \to a$ tal que $f(x) \in x$ para todo $x \subseteq a$, $x \neq \emptyset$.

Definamos $h\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{a\} \to a$ como $h(x) = f(a \setminus x)$. El dominio de h es el conjunto de los subconjuntos *propios* de a, y para todo $x \subset a$, $h(x) \notin x$.

Sea $b \notin a$ (por ejemplo, $b = \{x \in a : x \notin x\}$) y sea $S\colon \mathcal{U} \to a \cup \{b\}$ la "función"definida del modo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} h(\mathrm{img}(x)) & \text{si } \mathrm{img}(x) \in \mathrm{dom}(h), \\ b & \text{si } \mathrm{img}(x) \notin \mathrm{dom}(h). \end{cases}$$

Sea $F\colon \mathcal{O}rd \to a \cup \{b\}$ la "función" definida por recurrencia a partir de S:

$$F(\alpha) = S(F|_\alpha) = \begin{cases} h(\mathrm{img}(F|_\alpha)) & \text{si } \mathrm{img}(F|_\alpha) \in \mathrm{dom}(h), \\ b & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Vamos a probar que:

($*$) Si $\beta \in \alpha$ y $F(\alpha) \in a$, entonces $F(\beta) \neq F(\alpha)$.

En efecto, $F(\alpha) \in a$ implica que $F(\alpha) = h(\mathrm{img}(F|_\alpha))$. Como $F(\beta) \in \mathrm{img}(F|_\alpha)$ y $h(\mathrm{img}(F|_\alpha)) \notin \mathrm{img}(F|_\alpha)$, debe ser $F(\alpha) \neq F(\beta)$.

De ($*$) resulta que no puede ser que $F(\alpha) \in a$ para todo ordinal α, pues en este caso tendríamos una función inyectiva de los ordinales en un conjunto, lo que no es posible por el Lema 4.4.1.

Entonces existe un ordinal α tal que $F(\alpha) = b$. Sea

$$c = \{\beta \in \alpha' : F(\beta) = b\}.$$

Como $\alpha \in c$, $c \neq \emptyset$. Sea γ el primer elemento de c. Para todo $\beta \in \gamma$, debe ser $F(\beta) \in a$, y esto significa que $\mathrm{img}(F|_\gamma) \subseteq a$. Si fuese $\mathrm{img}(F|_\gamma) \subset a$, sería $\mathrm{img}(F|_\gamma) \in \mathrm{dom}(h)$ y tendríamos que $F(\gamma) \neq b$, absurdo. Por consiguiente debe ser $\mathrm{img}(F|_\gamma) = a$ y por $(*)$ resulta que $F|_\gamma \colon \gamma \to a$ es una biyección. Luego si definimos $x < y$ en a si y sólo si $\beta \in \alpha \in \gamma$ y $F(\beta) = x$, $F(\alpha) = y$, la relación $\leq$ resulta un buen orden sobre a.

Hemos probado así que el Axioma de Elección implica la existencia de una relación de buen orden sobre todo conjunto a. $\square$

De los Teoremas 4.2.3 4.4.2 resulta la equivalencia entre el Principio de Buena Ordenación y el Axioma de Elección. Si bien la demostración del Teorema 4.2.3 es válida en Z, en la demostración que dimos del Teorema 4.4.2 se recurre al Lema 4.4.1 y por lo tanto se requiere el Axioma de Sustitución. Luego la equivalencia fue probada en ZF. En realidad la equivalencia entre el Axioma de Elección y el Principio de Buena ordenación puede demostrarse en Z (ver, por ejemplo, [6, 7]).

Vamos a probar ahora la equivalencia del Axioma de Elección con el llamado Lema de Zorn, que es posiblemente la forma más común en la que se utiliza en matemática.

Teorema 4.4.3. *Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto bien ordenado de a tiene cota superior. Entonces existe un elemento maximal de a.*

Demostración. Como $a \neq \emptyset$, por la formulación del Axioma de Elección en términos de conjuntos potencia, existe una función selectora $h\colon \mathcal{P}(a) \setminus \emptyset \to a$ tal que $h(x) \in x$ para todo $x \subseteq a$, $x \neq \emptyset$.

Sea c el conjunto de los subconjuntos de a que tienen cotas superiores estrictas:

$$c = \{x \in \mathcal{P}(a) : \exists s \forall t(t \in x \to t < s)\}.$$

Para todo $x \in c$, sea m_x el conjunto de las cotas superiores estrictas de x.

Definamos $f\colon c \to a$ como $f(x) = h(m_x)$ para todo $x \in c$. Se tiene que $f(x)$ es una cota superior estricta de x.

Sea $b \notin a$ y consideremos la "función" $S\colon \mathcal{U} \to a \cup \{b\}$ definida del modo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} f(\mathrm{img}(x)) & \text{si } \mathrm{img}(x) \in c, \\ b & \text{si } \mathrm{img}(x) \notin c. \end{cases}$$

Por recurrencia se define la "función" $F\colon Ord \to a \cup \{b\}$ satisfaciendo

$$F(\alpha) = \begin{cases} f(\mathrm{img}(F|_\alpha)) & \text{si } \mathrm{img}(F|_\alpha) \in c, \\ b & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Veamos que:

($*$) Si $\beta \in \alpha$ y $F(\alpha) \in a$, entonces $F(\beta) < F(\alpha)$.

En efecto, $F(\alpha)$ es una cota superior estricta de $\mathrm{img}(F|_\alpha)$ y $F(\beta) \in \mathrm{img}(F|_\alpha)$.

Por el Lema 4.4.1, ($*$) implica que existe un ordinal α tal que $F(\alpha) = b$. Sea γ el primer elemento del conjunto $\{\beta \in \alpha' : F(\beta) = b\}$.

De ($*$) se deduce que si $\xi \in \beta \in \alpha$, entonces $F(\xi) < F(\beta)$, y como γ es totalmente ordenado, $F|_\gamma\colon \gamma \to a$ es un monomorfismo. Luego $\mathrm{img}(F|_\gamma)$ con el orden heredado de a es isomorfo a γ y por lo tanto es un subconjunto bien ordenado de a. Entonces $\mathrm{img}(F|_\gamma)$ tiene cota superior. Si alguna cota superior fuese estricta, $\mathrm{img}(F|_\gamma) \in c$ lo que implicaría que $F(\gamma) \neq b$. Por lo tanto toda cota superior de $\mathrm{img}(F|_\gamma)$ es un elemento maximal de $(a, \leq)$. $\square$

Como todo conjunto bien ordenado es totalmente ordenado, se tiene el siguiente resultado, conocido como **Lema de Zorn**:

Corolario 4.4.4. *Sea $(a, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto totalmente ordenado de a tiene cota superior. Entonces existe un elemento maximal de a.*

Veremos ahora una variante del Lema de Zorn que es muy usada en las aplicaciones.

Definición 4.4.5. Un conjunto a se dice de **carácter finito** si para todo x, $x \in a$ si y sólo si todos los subconjuntos finitos de x pertenecen a a.

Una propiedad P es de carácter finito si $\{x : P(x)\}$ es un conjunto de carácter finito. Por ejemplo, para un conjunto ordenado "ser totalmente ordenado" es una propiedade de carácter finito.

Corolario 4.4.6 (Lema de Tukey)**.** *Sea a un conjunto de carácter finito. Entonces existe un elemento maximal para el conjunto ordenado $(a, \subseteq)$, esto es, un elemento maximal respecto a la inclusión.*

Demostración. Sea a un conjunto de carácter finito y sea $c \in \mathcal{P}(a)$ totalmente ordenado por inclusión:

$$\forall x \forall y(((x \in c) \wedge (y \in c)) \rightarrow ((x \subseteq y) \vee (y \subseteq x))).$$

Veamos que $\cup c \in a$. Para ello sea d un subconjunto finito de $\cup c$. Esto es, existen $x_1, \ldots, x_n$, $n \geq 1$, tales que $d = \{x \in \cup c : (x = x_1) \vee \cdots \vee (x = x_n)\}$.

Para cada $1 \leq i \leq n$ existe $y_i \in c$ tal que $x_i \in y_i$. Como c es totalmente ordenado por inclusión, podemos suponer que los índices están elegidos de modo que $y_1 \subseteq y_2 \subseteq \cdots \subseteq y_n$. Esto implica que $d \subseteq y_n$, esto es, que d es un subconjunto finito de un elemento de a, y por lo tanto $d \in a$. Luego todo subconjunto finito de $\cup c$ está en a, lo que implica $\cup c \in a$.

Como $\cup c$ es cota superior de c respecto de la inclusión, hemos probado que todo subconjunto de a totalmente ordenado por inclusión tiene cota superior. Entonces por el Lema de Zorn resulta que existe en a un elemento maximal respecto a la inclusión. □

Teorema 4.4.7. *En* Z*, el Lema de Tukey implica el Axioma de Elección.*

Demostración. Sea a un conjunto no vacío y sea c el conjunto de las funciones selectoras parciales de $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ en a, esto es,

$$c = \{f \in \mathcal{P}(a \times a) : f \,\text{es función}, \operatorname{dom}(f) \subseteq \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \,\text{y}\, f(x) \in x \,\text{si}\, x \in \operatorname{dom}(f)\}.$$

Es fácil verificar que c es de carácter finito, luego por el Lema de Tukey existe un elemento $h \in c$ maximal respecto a la inclusión. Para terminar la demostración bastará probar que $\operatorname{dom}(h) = \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, pues entonces h será la función requerida en la formulación del Axioma de Elección en términos del conjunto potencia.

Observemos que si $f, g \in c$, entonces $f \subseteq g$ si y sólo si $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ y $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f)$.

Supongamos (por el absurdo) que $\operatorname{dom}(h) \subset \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. Entonces existiría un subconjunto no vacío y de a tal que $y \notin \operatorname{dom}(y)$. Sea $t \in y$ y definamos $h^* = h \cup \{\langle y, t \rangle\}$. Es claro que $h^* \in c$ y que $h \subset h^*$, contradiciendo la maximalidad de h. Luego debe ser $\operatorname{dom}(h) = \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$. □

La teoría de conjuntos basada en los axiomas de Zermelo–Fraenkel más el Axioma de Elección se la denota ZFC.

4.5. Cardinales

El siguiente resultado, debido a Cantor, tendrá un papel central en lo que sigue.

Teorema 4.5.1. *Para todo conjunto a, $\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$.*

Demostración. La función $h\colon a \to \mathcal{P}(a)$ definida por $h(x) = \{x\}$ es inyectiva, lo que implica que $\overline{\overline{a}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$.

Para ver que no puede existir una biyección, para toda $f\colon a \to \mathcal{P}(a)$ sea

$$b = \{x \in a : x \notin f(x)\}.$$

Si f fuese sobreyectiva, entonces existiría $z \in a$ tal que $f(z) = b$, lo que implicaría la contradicción $z \in b \leftrightarrow z \notin f(z) = b$. Luego no puede existir una función de a sobre $\mathcal{P}a$, por lo que resulta $\overline{\overline{a}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$. □

Definición 4.5.2. Un **cardinal** es un ordinal α tal que si $\beta \in \alpha$, entonces $\overline{\overline{\beta}} < \overline{\overline{\alpha}}$. La fórmula que indica que x es un cardinal será abreviada $card(x)$.

Los números naturales y ω son ejemplos de cardinales. De la Observación 2.4.13 resulta que si $\alpha \notin w$, entonces el ordinal α' es un ordinal que no es cardinal.

Teorema 4.5.3. *En* ZFC*, para todo conjunto a, existe un único cardinal α tal que $\overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$.*

Demostración. Por el Principio de Buena Ordenación todo conjunto admite un buen orden. Entonces, teniendo en cuenta que los isomorfismos son biyecciones, del Teorema 3.2.4 podemos concluir que existen ordinales β, γ tales que $\overline{\overline{\beta}} = \overline{\overline{a}}$ y $\overline{\overline{\gamma}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(a)}}$. Debe ser $\beta < \gamma$, pues si fuese $\gamma \leq \beta$ resultaría $\overline{\overline{\mathcal{P}(a)}} \leq \overline{\overline{a}}$ en contradicción con el Teorema 4.5.1. Por lo tanto el conjunto $c = \{\delta \in \gamma : \overline{\overline{\delta}} = \overline{\overline{a}}\}$ es no vacío y tiene primer elemento, que designaremos α. Entonces $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{a}}$ y α es un cardinal: si $\zeta \in \alpha$, $\overline{\overline{\zeta}} \leq \overline{\overline{\alpha}}$ y $\overline{\overline{\zeta}} \neq \overline{\overline{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$, entonces $\overline{\overline{\zeta}} < \overline{\overline{\alpha}}$. La unicidad de α resulta del Teorema 2.3.7 y de la definición de cardinal. □

Observación 4.5.4. Para probar el enunciado: *Para todo conjunto x existe un cardinal α tal que $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{x}}$* se usó el Axioma de Elección. En realidad este enunciado equivale en ZF al Axioma de Elección: una biyección entre α y x permite transferir el buen orden de α a x, y por ende el enunciado implica que todo conjunto admite un buen orden.

Definición 4.5.5. Dado un conjunto x, al único cardinal equipotente a x lo llamaremos el **cardinal de** x y lo denotaremos $\mathrm{card}(x)$.

No debemos confundir las notaciones $card(x)$, que representa la fórmula *x es un cardinal* y $\mathrm{card}(x)$, que denota al único cardinal equipotente a x.

Observemos que $\bar{\bar{a}} = \bar{\bar{b}}$ si y sólo si $\mathrm{card}(a) = \mathrm{card}(b)$, y $\bar{\bar{a}} \leq \bar{\bar{b}}$ si y sólo si $\mathrm{card}(a) \leq \mathrm{card}(b)$. La verificación de esto es muy sencilla si tenemos en cuenta el teorema anterior.

Definición 4.5.6. Un conjunto a es **numerable** si $\mathrm{card}(a) \leq \omega$.

Si a es un conjunto de cardinales, entonces $\gamma = \cup a$ es un cardinal: Por el Teorema 2.3.9 γ es un ordinal. Además, si $\beta \in \gamma$, entonces $\beta \in \alpha$ para algún α de a. Como α es cardinal, $\bar{\bar{\beta}} < \bar{\bar{\alpha}} \leq \bar{\bar{\gamma}}$.

Paradoja de Cantor: *No existe un conjunto que tenga a todos los cardinales como elementos.*

Demostración. Si a contiene a todos los cardinales, sea

$$b = \{\alpha \in a : \alpha \text{ es cardinal}\}.$$

Sabemos que $\gamma = \cup\, b$ es un cardinal. Luego $\gamma \in b$ y además $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in b$. Entonces como $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\gamma)) \in b$, sería $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\gamma)) \leq \gamma$, en contradicción con el Teorema 4.5.1. □

4.6. Operaciones con cardinales

Definición 4.6.1. Sean α y β cardinales y a y b conjuntos disjuntos tales que $\bar{\bar{\alpha}} = \bar{\bar{a}}$ y $\bar{\bar{\beta}} = \bar{\bar{b}}$. (Tales conjuntos siempre existen, por ejemplo: $a = \{0\} \times \alpha$ y $b = \{1\} \times \beta$). Definimos la **suma cardinal** $\alpha + \beta$ de α y β al cardinal de $a \cup b$: $\alpha + \beta = \mathrm{card}(a \cup b)$.

La demostración del siguiente teorema es muy sencilla y queda a cargo del lector.

Teorema 4.6.2. *La suma de cardinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β, γ denotan cardinales arbitrarios:*

I) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$,

II) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

III) $\alpha + 0 = \alpha$,

IV) $(\alpha \leq \beta) \to (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma)$.

Definición 4.6.3. Sean α y β cardinales. El **producto cardinal** de α por β es el cardinal $\alpha \cdot \beta = \mathrm{card}(\alpha \times \beta)$

Teorema 4.6.4. *El producto de cardinales goza de las siguientes propiedades, donde α, β, γ denotan cardinales:*

I) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$,

II) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

III) $\alpha \cdot 1 = \alpha$,

IV) $\alpha \cdot 0 = 0$,

V) $(\alpha \leq \beta) \to (\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma)$,

VI) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$.

Demostración. Ejercicio para el lector. □

Observación 4.6.5. Sean α, β cardinales. Como por las definiciones de suma y producto de ordinales y cardinales $\overline{\overline{\alpha + \beta}} = \overline{\overline{\alpha \oplus \beta}}$ y $\overline{\overline{\alpha \cdot \beta}} = \overline{\overline{\alpha \odot \beta}}$, resulta que $\alpha + \beta \leq \alpha \oplus \beta$ y $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \odot \beta$, y que una de estas desigualdades es una igualdad si y sólo si su segundo miembro es un cardinal.

Teorema 4.6.6. *Si $m, n \in \omega$, entonces $m + n = m \oplus n$ y $m \cdot n = m \odot n$.*

Demostración. Resulta de la observación anterior y de los Teoremas 3.4.7 y 3.5.5. □

Del teorema anterior se desprende que la suma cardinal y el producto cardinal de números naturales coinciden con la suma y el producto usuales para los enteros no negativos. Pero la situación es muy diferente para cardinales infinitos, como lo muestra el resultado siguiente.

Teorema 4.6.7. *Sea γ un cardinal. Si $\gamma \geq \omega$, entonces $\gamma^2 = \gamma$.*

Demostración. Supongamos que la afirmación sea falsa. Como para todo conjunto a, $\mathrm{card}(a) \leq \mathrm{card}(a \times a)$, debe existir un cardinal $\alpha \geq \omega$ tal que $\alpha < \alpha^2$. Sea

$$c = \{\beta \in \mathrm{card}(\mathcal{P}(\alpha)) : \beta < \beta^2 \wedge \omega \leq \beta\}.$$

Como $c \neq \emptyset$ pues por el Teorema 4.5.1 $\alpha \in c$, c tiene primer elemento, que denotaremos γ.

Sea $p = \gamma \times \gamma$ y $p_\mu = \{(\alpha, \beta) \in p : \text{máx}\{\alpha, \beta\} = \mu\}$.

Tenemos que $p_\mu \cap p_\nu = \emptyset$ si $\mu \neq \nu$, y $\bigcup_{\mu \in \gamma} p_\mu = p$.

Obtenemos un orden estricto total $\rhd$ sobre p si consideramos cada p_ξ ordenado lexicográficamente y a cada elemento de p_μ menor que cualquier elemento de p_ν siempre que $\mu < \nu$. Más precisamente, definimos orden estricto $\lhd$ sobre p del modo siguiente: $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \delta, \zeta \rangle$ si y sólo si

$$[\text{máx}(\alpha, \beta) < \text{máx}(\delta, \zeta)] \vee [(\text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\delta, \zeta)) \wedge (\alpha < \delta)] \vee$$

$$[(\text{máx}(\alpha, \beta) = \text{máx}(\delta, \zeta)) \wedge ((\alpha = \delta) \wedge (\beta < \zeta))].$$

Para ver que $\unlhd$ es un buen orden, sea $s \subseteq p$, $s \neq \emptyset$. Como la correspondencia $\langle \alpha, \beta \rangle \mapsto \text{máx}(\alpha, \beta)$ es funcional, por el Axioma de Sustitución tenemos que $\{\text{máx}(\alpha, \beta) : \langle \alpha, \beta \rangle \in s\}$ es un conjunto no vacío de ordinales. Sea μ su primer elemento y sean α_0 el primer elemento del conjunto

$$\{\alpha \in \mu : \exists\, \beta(\langle \alpha, \beta \rangle \in s \cap p_\mu)\}$$

y β_0 el primer elemento del conjunto

$$\{\beta \in \mu : \langle \alpha_0, \beta \rangle \in s \cap p_\mu\}.$$

Es inmediato verificar que $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ es el primer elemento de s respecto del orden $\unlhd$. Luego $(P, \unlhd)$ es un conjunto bien ordenado y por el Teorema 3.2.4 existe un ordinal $\theta \sim (p, \unlhd)$.

Como los isomorfismos son biyecciones, se tiene que $\overline{\overline{\theta}} = \overline{\overline{p}}$. Luego por la definición de cardinal se tiene que $\theta \geq \mathrm{card}(p) > \gamma$, lo que por el Teorema 2.3.7 implica que $\gamma \in \theta$. Por lo tanto γ es similar a una sección inicial de θ. Esto es, existe un par $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle \in p$ tal que

$$\gamma \sim q = \{(\alpha, \beta) \in p : (\alpha, \beta) < (\alpha_1, \beta_1)\}.$$

Esto implica que $\gamma = \mathrm{card}(q)$.

Sea $\mu_1 = \text{máx}(\alpha_1, \beta_1)$. Como $\mu_1 \in \gamma$, $\text{card}(\mu_1) < \gamma$.

Veamos que también $\text{card}(\mu_1 \oplus 1) < \gamma$. En efecto, si $\mu_1 \in \omega$, entonces también $\mu_1 \oplus 1 \in \omega$ y $\text{card}(\mu_1 \oplus 1) = \mu_1 \oplus 1 \in \gamma$. Si $\mu_1 \geq \omega$, entonces $\text{card}(\mu_1 \oplus 1) = \text{card}(\mu_1) \in \gamma$.

Como $q \subset \mu_1 \oplus 1 \times \mu_1 \oplus 1$, $\text{card}(q) = \gamma$ y γ es el primer cardinal estrictamente menor que su cuadrado, se tiene que

$$\gamma \leq \text{card}(\mu_1 \oplus 1) \times \text{card}(\mu_1 \oplus 1) = \text{card}(\mu_1 \oplus 1) < \gamma,$$

lo que es absurdo. Luego no puede existir un cardinal $\gamma \geq \omega$ tal que $\gamma < \gamma^2$. □

Corolario 4.6.8. *Sean α y β cardinales, $\alpha \leq \beta$ y $\beta \geq \omega$ entonces,*

I) $\alpha + \beta = \beta$.

II) *Si $\emptyset < \alpha$, entonces $\alpha \cdot \beta = \beta$.*

Demostración.

$$\beta = 0 + \beta \leq \alpha + \beta \leq \beta + \beta = (1+1) \cdot \beta = 2 \cdot \beta \leq \beta^2 = \beta,$$

lo que prueba I), y II) resulta de

$$\beta = 1 \cdot \beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \beta^2 = \beta.$$

□

Observación 4.6.9. *Si $\alpha \geq \omega$ ó $\beta \geq \omega$ entonces*

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \text{máx}\{\alpha, \beta\}.$$

Definición 4.6.10. Sea $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ una familia de cardinales. Definimos la **suma de la familia** como $\sum_{i \in I} \alpha_i = \text{card}(\bigcup_{i \in I} (\alpha_i \times \{i\}))$.

Corolario 4.6.11. *Si $I \neq \emptyset$, $\alpha_i \neq \emptyset$ para todo $i \in I$ y además, I o alguno de los α_i es mayor que ω, entonces $\sum_{i \in I} \alpha_i = \text{máx}\{\text{card}(I), \sup_{i \in I} \alpha_i\}$.*

Demostración. Como

$$\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{1 \times \bigcup_{i \in I} \{i\}}} = \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} (1 \times \{i\})}} \leq \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} (\alpha_i \times \{i\})}} = \sum_{i \in I} \alpha_i$$

y

$$\overline{\overline{\alpha_i}} = \overline{\overline{\alpha_i \times \{i\}}} \leq \sum_{i \in I} \alpha_i,$$

resulta que

$$\text{máx}\{\overline{\overline{I}}, \sup_{i \in I} \alpha_i\} \leq \sum_{i \in I} \alpha_i. \tag{4.1}$$

Sea $\alpha = \sup_{i \in I} \alpha_i$. Entonces

$$\sum_{i \in I} \alpha_i = \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} \alpha_i \times \{i\}}} \leq \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} \alpha \times \{i\}}} = \overline{\overline{\alpha \times \bigcup_{i \in I} \{i\}}} = \alpha \cdot \overline{\overline{I}} = \text{máx}\{\overline{\overline{I}}, \sup_{i \in I} \alpha_i\}. \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) se obtiene la igualdad enunciada. □

Observación 4.6.12. Del corolario anterior resulta en particular que *la unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Definiremos ahora la **exponenciación de cardinales**

Definición 4.6.13. $\alpha^\beta = \text{card}(\{f \in \mathcal{P}(\beta \times \alpha) : f \colon \beta \to \alpha\})$.

Observemos que la función $g \colon \mathcal{P}(\alpha) \to 2^\alpha$ que asigna a cada $y \in \mathcal{P}(\alpha)$ la función

$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in y, \\ 0 & \text{si } x \in \alpha \setminus y, \end{cases}$$

es una biyección. Luego $2^\alpha = \text{card}(\mathcal{P}(\alpha))$ y por el Teorema 4.5.1 se tiene que:

$$\text{Para todo cardinal } \alpha, \ \ \alpha < 2^\alpha. \tag{4.3}$$

Teorema 4.6.14. *Si α, β y γ son cardinales,*

I) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$.

II) $\alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha \cdot \beta)^\gamma$.

III) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$.

Demostración. Sean a, b y c conjuntos disjuntos dos a dos tales que $\bar{\bar{a}} = \overline{\overline{\alpha}}$, $\bar{\bar{b}} = \overline{\overline{\beta}}$ y $\bar{\bar{c}} = \overline{\overline{\gamma}}$.

i) La función $h\colon a^b \times a^c \to a^{b\cup c}$ dada por:

$$h(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in b, \\ g(x) & \text{si } x \in c, \end{cases}$$

para $f \in a^b$, $g \in a^c$ y $x \in b \cup c$, es biyectiva.

ii) La función $h\colon a^c \times b^c \to (a \times b)^c$ dada por $h(f,g)(x) = (f(x), g(x))$ para $f \in a^c$, $g \in b^c$ y $x \in c$, es una biyección.

iii) Si $f \in (a^b)^c$, entonces $f(x) \in a^b$ para $x \in c$. Sea $h\colon (a^b)^c \to a^{b\times c}$ definida por $h(f)(x,y) = f(x)(y)$, para $f \in a^b$, $x \in c$ e $y \in b$. Se verifica fácilmente que h es biyectiva. □

Teorema 4.6.15. *Para todo cardinal γ existe un único cardinal γ^+ que satisface las siguientes condiciones:*

I*)* $\gamma < \gamma^+$.

II*) Si α es un cardinal y $\gamma < \alpha$, entonces $\gamma^+ \leq \alpha$.*

Demostración. Sea $\lambda = 2^{2^\gamma}$. Sea $a = \{\alpha \in \lambda : \alpha \text{ es cardinal y } \gamma \in \alpha\}$. Resulta $a \neq \emptyset$ porque por (4.3), $2^\lambda \in a$. El primer elemento de a cumple las condiciones *i)* y *ii)*. □

El cardinal γ^+ caracterizado en el teorema anterior se llama el **cardinal sucesor** de γ.

Observación 4.6.16. Como $\omega < 2^\omega$, resulta que $\omega < \omega^+ \leq 2^\omega$.

La hipótesis del continuo dice que $\omega^+ = 2^\omega$. Y la hipótesis del continuo generalizada dice que $\gamma^+ = 2^\gamma$ para todo cardinal γ. Este nombre se debe a que 2^ω es el cardinal del conjunto de los números reales (continuo numérico). Luego la hipótesis del continuo significa que no hay un cardinal intermedio entre el cardinal de los naturales y el cardinal de los reales. La validez de estos enunciados fue un problema abierto en la teoría de conjuntos desde que fuera planteado por el mismo Cantor. De resultados obtenidos por K. Gödel en 1938 se desprende que la hipótesis generalizada del continuo es consistente con ZFC y en 1962 P. Cohen probó que también la negación de la hipótesis del continuo es consistente con ZFC. Por lo tanto la hipótesis del continuo es independiente de los axiomas de ZFC. En otras palabras, en ZFC no se puede probar ni la existencia ni la no existencia de un conjunto de numeros reales con un cardinal estrictamente mayor que el cardinal del conjunto de los números naturales y estrictamente menor que el cardinal del conjunto de los números reales. La demostraciones de estos resultados de Gödel y Cohen escapan al nivel de este curso. Referimos al lector interesado al libro de Kunen [11].

Teorema 4.6.17. *Si un cardinal γ es mayor o igual que ω, el conjunto de ordinales de cardinal γ, tiene cardinal γ^+.*

Demostración. Sea $a = \{\alpha \in \gamma^+ : \operatorname{card}(\alpha) = \gamma\}$. Si $x \in \gamma \cup a$, entonces $x \in \gamma$ ó $x \in a$, luego $x \in \gamma^+$. Si $x \in \gamma^+$, entonces $\operatorname{card}(x) < \gamma^+$. Si $\operatorname{card}(x) > \gamma$, entonces $\operatorname{card}(x) \geq \gamma^+$ en contradicción con lo anterior. Por lo tanto $\operatorname{card}(x) \leq \gamma$. Si $\operatorname{card}(x) = \gamma$, entonces $x \in a$. Si $\operatorname{card}(x) < \gamma$, entonces no puede ser que $x \geq \gamma$, y por el Teorema 2.3.7 $x \in \gamma$. Luego $x \in \gamma \cup a$. Hemos probado así que $\gamma^+ = \gamma \cup a$. Como $\gamma \cap a = \emptyset$, se tiene $\gamma^+ = \gamma + \operatorname{card}(a) = \operatorname{máx}(\gamma, \operatorname{card}(a))$, y como $\gamma^+ > \gamma$, debe ser $\operatorname{card}(a) = \gamma^+$. □

Observación 4.6.18. *ω^+ es el cardinal de todos los ordinales numerables.*

4.7. La operación $\aleph$

En esta sección veremos otra importante aplicación del Teorema 3.3.5.

Para todo conjunto x sea $F(x)$ el primer cardinal infinito γ tal que $\gamma \notin \operatorname{img}(x)$.

El Principio de Definición por Recurrencia garantiza la existencia de una operación $\aleph : \mathcal{O}rd \to \mathcal{U}$ tal que $\aleph(\alpha) = F(\aleph|_\alpha) =$ el primer cardinal infinito γ tal que $\gamma \notin \{\aleph(\beta) : \beta \in \alpha\}$.

La notación que usaremos será $\aleph_\alpha = \aleph(\alpha)$.

Observación 4.7.1. *Si $\alpha < \beta$, entonces $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.*

Teorema 4.7.2. *Para todo cardinal infinito γ, existe un ordinal α tal que $\aleph_\alpha = \gamma$.*

Demostración. Sea γ un cardinal infinito. Dado que γ es un conjunto existe un ordinal α tal que $\aleph_\alpha \notin \gamma$. En efecto, si fuese $\aleph_\alpha \in \gamma$ para todo α, por el Lema 4.4.1 existirían α y β tales que $\alpha \in \beta$ y $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ en contradicción con la Observación 4.7.1.

Luego, $\gamma \leq \aleph_\alpha$. Si $\gamma < \aleph_\alpha$, como $\aleph_\alpha$ es el primer cardinal infinito que no está en $\mathrm{img}(\aleph|_\alpha)$ y γ es un cardinal infinito, tenemos que $\gamma \in \mathrm{img}(\aleph|_\alpha)$, entonces $\gamma = \aleph_\beta$ para algún $\beta \in \alpha$. $\square$

Notemos que $\aleph_0 = \omega$ y $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$.

4.8. Ejercicios

Ejercicio 4.8.1. *Demuestre que el Axioma de Elección implica que los enunciados listados en el Corolario 2.4.11 son equivalentes.*

Ejercicio 4.8.2. *El Lema de Hausdorff dice que todo conjunto ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal respecto a la inclusión. Demuestre que:*

1. *El Lema de Zorn (Corolario 4.4.4) implica el Lema de Hausdorff.*

2. *El Lema de Hausdorff implica el Lema de Tukey (Corolario 4.4.6).*

Ejercicio 4.8.3. *Demuestre los Teoremas 4.6.2 y 4.6.4.*

Ejercicio 4.8.4. *Demuestre en* ZF *(es decir, sin usar el Axioma de Elección) que un conjunto $a \neq \emptyset$ es numerable si y sólo si existe una función* sobreyectiva $f\colon w \to a$.

Ejercicio 4.8.5. *Sean a, b conjuntos tales que $a \subset b$ y $\omega \leq \mathrm{card}(a) < \mathrm{card}(b)$. Pruebe que* $\mathrm{card}(b \setminus a) = \mathrm{card}(b)$.

Ejercicio 4.8.6. *Calcule el cardinal del conjunto de los subconjuntos finitos de ω.*

Capítulo 5

El Axioma de Regularidad

5.1. Conjuntos regulares

Consideremos la operación

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x = \emptyset, \\ \bigcup_{z \in \mathrm{img(x)}} \mathcal{P}(z) & \text{si } x \neq \emptyset. \end{cases}$$

El Principio de Definición por Recurrencia nos dice que existe una operación V tal que $V(\alpha) = S(V|_\alpha)$ para todo ordinal α. Siguiendo la costumbre en textos de teoría de conjuntos escribiremos V_α en lugar de $V(\alpha)$.

Se tiene que:

$$V_0 = S(V|_0) = \emptyset \tag{5.1}$$

y

$$\text{si } \ \alpha > 0, \quad V_\alpha = S(V|_\alpha) = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta). \tag{5.2}$$

Es claro que si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$, lo que implica que $\mathcal{P}(V_\alpha) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$. Luego para todo ordinal α:

$$V_{\alpha \oplus 1} = \bigcup_{\beta \in \alpha \oplus 1} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \mathcal{P}(V_\alpha). \tag{5.3}$$

Por consiguiente,

$$\forall x (x \in V_{\alpha \oplus 1} \leftrightarrow x \subseteq V_\alpha). \tag{5.4}$$

Si α es límite, teniendo en cuenta que $\beta \in \alpha$ implica que $\beta' \in \alpha$, resulta que

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \mathcal{P}(V_\beta) = \bigcup_{\beta \leq \alpha} V_{\beta \oplus 1} \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta.$$

Por otra parte, como $V_\beta \subseteq V_\alpha$ para todo $\beta \in \alpha$, también se tiene que $\bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta \subseteq V_\alpha$. Luego podemos concluir que

$$\text{Si } \alpha \text{ es un ordinal límite, entonces } V_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} V_\beta. \tag{5.5}$$

Lema 5.1.1. *Para todo ordinal α, V_α es un conjunto transitivo.*

Demostración. Sea $x \in V_\alpha$. Por (5.2) existe $\beta \in \alpha$ tal que $x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta \oplus 1}$ y por (5.4) resulta que $x \subseteq V_\beta \subseteq V_\alpha$. □

Definición 5.1.2. Diremos que el conjunto a es **regular** si existe un ordinal α tal que $a \in V_\alpha$; en ese caso llamaremos **rango** de a, y lo notaremos $\mathrm{rg}(a)$, al primer ordinal γ tal que $a \subseteq V_\gamma$.

Observación 5.1.3. *De (5.4) resulta que para todo conjunto regular a, $\mathrm{rg}(a) \oplus 1$ es el primer ordinal α tal que $a \in V_\alpha$.*

Lema 5.1.4. *Un conjunto $x \in V_\alpha$ si y sólo si x es regular y $\mathrm{rg}(x) < \alpha$.*

Demostración. Si $x \in V_\alpha$, entonces es regular por definición. Como en la demostración del Lema 5.1.1 se prueba que existe $\beta \in \alpha$ tal que $x \subseteq V_\beta$, lo que muestra que $\mathrm{rg}(x) < \alpha$. Por otro lado, si x es regular y $\mathrm{rg}(x) = \beta < \alpha$, entonces de (5.4) resulta que $x \in V_{\beta \oplus 1} \subseteq V_\alpha$. □

La clase de todos los conjuntos regulares será denotada por $\mathcal{V}$. Informalmente, "$\mathcal{V} = \bigcup_{ord(\alpha)} V_\alpha$".

Teorema 5.1.5. *Un conjunto a es regular si y sólo si todos los elementos de a son regulares. Además, $x \in a$ implica que $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$.*

Demostración. Sea a regular. Si $x \in a$, entonces $x \in V_{\mathrm{rg}(a)}$. Luego x es regular y por el Lema 5.1.4, $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$.

Supongamos ahora que todo $x \in a$ es regular y sea $c = \{\mathrm{rg}(x) \oplus 1 : x \in a\}$. Por el Axioma de Sustitución, c es un conjunto, y por (iii) del Teorema 2.3.9, $\cup c$ es un ordinal, que llamaremos γ: $\gamma = \cup c$. Por la Observación 5.1.3, $a \subset V_\gamma$, luego por (5.4), $a \in V_{\gamma \oplus 1}$, lo que prueba que a es regular. Debe ser $\mathrm{rg}(a) = \gamma$, pues si existiese $\beta \in \gamma$ tal que $a \subseteq V_\beta$, sería β una cota superior de c estrictamente menor que γ, lo que es absurdo. □

Corolario 5.1.6. *Todo subconjunto de un conjunto regular es regular.*

Corolario 5.1.7. *Si x es regular, entonces $x \notin x$.*

Teorema 5.1.8. *Todo ordinal α satisface las dos condiciones siguientes:*

1) $\alpha \in V_{\alpha \oplus 1}$ *y*

2) $\alpha \notin V_\alpha$.

Demostración. Supongamos por absurdo que exista un ordinal α tal que $\alpha \notin V_{\alpha\oplus 1}$. Entonces

$$c = \{\beta \in \alpha \oplus 1 : \beta \notin V_{\beta \oplus 1}\}$$

es un conjunto no vacío de ordinales y tiene primer elemento, que llamaremos γ. Si $\beta \in \gamma$, $\beta \in V_{\beta\oplus 1}$; entonces $\gamma \subseteq \bigcup_{\beta\in\gamma} V_{\beta\oplus 1} = \bigcup_{\beta\in\gamma} \mathcal{P}(V_\beta) = V_\gamma$, y esto dice que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_{\gamma\oplus 1}$ en contradicción con $\gamma \in c$. Por lo tanto se satisface 1).

Para probar 2), supongamos por absurdo que exista un ordinal γ tal que $\gamma \in V_\gamma$. Entonces por (5.4) debería existir $\beta \in \gamma$ tal que $\gamma \in \mathcal{P}(V_\beta)$. Como $\beta \in \gamma \subseteq V_\beta$ resulta que $\beta \in V_\beta$. Esto muestra que para todo ordinal γ, el conjunto $c = \{\alpha \in \gamma \oplus 1 : \alpha \in V_\alpha\}$ no puede tener primer elemento, por lo que debe ser $c = \emptyset$. Esto significa que todos los ordinales deben satisfacer 2). $\square$

Corolario 5.1.9. *Todo ordinal α es regular y* $\operatorname{rg}(\alpha) = \alpha$.

Demostración. Por la Definición 5.1.2 y (5.4), del item*I)* del teorema anterior se deduce que α es regular y que $\operatorname{rg}(\alpha) \leq \alpha$. Si fuese $\operatorname{rg}(\alpha) < \alpha$, existiría un ordinal β tal que $\beta \in \alpha \subseteq V_\beta$, en contradicción con el item *II)* del teorema anterior. $\square$

Corolario 5.1.10. *Un ordinal β pertenece a V_α si y sólo si β pertenece a α.*

Demostración. Como $\alpha \subset V_\alpha$, si $\beta \in \alpha$, entonces $\beta \in V_\alpha$.

Si $\beta \in V_\alpha$, por el Lema 5.1.1, $\beta = \operatorname{rg}(\beta) \leq \alpha$ y como $\alpha \notin V\alpha$, debe ser $\beta \in \alpha$. $\square$

Definición 5.1.11. Se dice que una clase $\mathcal{C}$ definida por una fórmula $\psi(x)$ es **transitiva** si se cumple que $\forall x\ \forall y\ [(y \in x\ \wedge\ \psi(x))\ \rightarrow\ \psi(y)]$.

Teorema 5.1.12. *$\mathcal{V}$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sean x en $\mathcal{V}$ e $y \in x$. Existe α tal que $x \in V_\alpha$. Como V_α es transitivo, $y \in V_\alpha$; por lo tanto y está en $\mathcal{V}$. $\square$

Veremos a continuación que la clase de los conjuntos regulares es cerrada por las operaciones del álgebra de conjuntos.

Teorema 5.1.13. *Si x está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$, $\{x\}$ están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que* $\mathrm{rg}(x) \oplus \omega$.

Además, si x e y están en $\mathcal{V}$, entonces $x \times y$, $x \cup y$ e y^x están en $\mathcal{V}$ y el rango de estos conjuntos es menor estricto que $\text{máx}\{\mathrm{rg}(x), \mathrm{rg}(y)\} \oplus \omega$.

Demostración. Sea $\mathrm{rg}(x) = \alpha$.

Si $y \in \mathcal{P}(x)$, entonces $y \subseteq x \subseteq V_\alpha$, lo que implica que $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) = V_{\alpha\oplus 1}$. Luego $\mathcal{P}(x)$ es regular y $\mathrm{rg}(\mathcal{P}(x)) \leq \alpha \oplus 1$.

Si $y \in \cup x$, entonces existe z en x tal que $y \in z$. Como V_α es transitivo e $y \in z \in x \subset V_\alpha$, tenemos que $y \in V_\alpha$. En consecuencia, $\cup x \subset V_\alpha$ y se concluye que $\cup x$ es regular y $\mathrm{rg}(\cup x) \leq \alpha$.

Sea $\alpha = \text{máx}\{\mathrm{rg}(x), \mathrm{rg}(y)\}$. Dado que x e y pertenecen a $V_{\alpha\oplus 1}$, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 1}) = V_{\alpha\oplus 2}$. Luego $\{x, y\}$ es regular y $\mathrm{rg}(\{x, y\}) \leq \alpha \oplus 1$.

De lo visto para la unión se deduce que $x \cup y = \cup\{x, y\} \in V_{\alpha\oplus 1}$.

Como $V_{\alpha\oplus 1}$ es transitivo, también tenemos que

$$x \times y \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(x \cup y))) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 1}))) = V_{\alpha\oplus 4}.$$

Lo anterior implica que $y^x \in \mathcal{P}(x \times y) \subset \mathcal{P}(V_{\alpha\oplus 4}) = V_{\alpha\oplus 5}$. $\square$

Corolario 5.1.14. *Si α es un ordinal límite y $x \in V_\alpha$, entonces $\mathcal{P}(x)$, $\cup x$ y $\{x\}$ pertenecen a V_α. Además, si x e y están en V_α, entonces $x \times y$, $x \cup y$ e y^x pertenecen a V_α.*

Demostración. El teorema anterior muestra que $\cup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\}$, $x \times y$, $x \cup y$ e y^x pertenecen todos a $V_{\beta\oplus 5}$, con $\beta = \text{máx}\,\mathrm{rg}(x), \mathrm{rg}(y)$. Como α es límite y $\beta < \alpha$, entonces $(\beta \oplus 5) \in \alpha$. $\square$

5.2. Axioma de Regularidad

A continuación presentaremos otro axioma de la teoría. Este nuevo axioma tiene como propósito formalizar nuestra idea intuitiva de que el universo $\mathcal{U}$ se forma en etapas. Estas etapas están indexadas por los ordinales.

Axioma de Regularidad:

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \ \exists y \ (y \in x \ \wedge \ x \cap y = \emptyset)).$$

Teorema 5.2.1. *Los conjuntos regulares satisfacen el Axioma de Regularidad.*

Demostración. Sea $a \neq \emptyset$, a regular. Si $x \in a$, x es regular y $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(a)$ (Teorema 5.1.5). Sea

$$b = \{\beta \in \mathrm{rg}(a) : \text{existe } x \text{ en } a \text{ tal que } \mathrm{rg}(x) = \beta\}.$$

Como a es no vacío, tampoco lo es b y tiene primer elemento. Sea γ el primer elemento de b. Existe $z \in a$ tal que $\mathrm{rg}(z) = \gamma$. Si existiese $x \in z \cap a$, entonces sería $\mathrm{rg}(x) \in b$ y $\mathrm{rg}(x) < \mathrm{rg}(z) = \gamma$, contradiciendo que γ sea el primer elemento de b. Por lo tanto debe ser $z \cap a = \emptyset$. □

Teorema 5.2.2. *El Axioma de Regularidad implica que todo conjunto transitivo sea regular.*

Demostración. Sea a un conjunto transitivo y no vacío. Sea

$$b = \{y \in a : \ y \text{ es regular}\}.$$

Para probar el teorema basta probar que $a \setminus b = \emptyset$, porque entonces todos los elementos de a serán regulares y por el Teorema 5.1.5 resultará que a es regular. Supongamos que $a \setminus b \neq \emptyset$. Por el Axioma de Regularidad existe $z \in a \setminus b$ tal que $z \cap (a \setminus b) = \emptyset$. Como a es transitivo, $z \subseteq a$, entonces $z \subseteq b$. Esto implica que todos los elementos de z son regulares y por lo tanto, que z es regular. Esto dice que $z \in b$ que es absurdo porque $z \in a \setminus b$. Como el absurdo provino de suponer que $a \setminus b \neq \emptyset$, debe ser $a \setminus b = \emptyset$. □

Teorema 5.2.3. *El Axioma de Regularidad vale si y sólo si todo conjunto es regular.*

Demostración. Supongamos primero que vale el axioma. Esto implica que todo conjunto transitivo sea regular. Todo conjunto a está incluido en su clausura transitiva T, que es transitiva y por lo tanto regular, y como a es un subconjunto de un conjunto regular, es también regular.

El Teorema 5.2.1 completa la demostración. □

5.3. La teoría ZF^+

Si A denota una teoría axiomática de conjuntos, A^+ denotará la teoría que se obtiene agregando el Axioma de Regularidad. Así ZF^+ denota la teoría de Zermelo–Fraenkel con el Axioma de Regularidad y ZFC^+ la teoría de Zermelo–Fraenkel con los axiomas de Elección y de Regularidad.

El teorema siguiente generaliza el Corolario 5.1.7.

Teorema 5.3.1. *En* ZF^+ *no existe una sucesión* $\{u_n\}_{n\in\omega}$ *tal que* $u_{n\oplus 1} \in u_n$ *para todo* n.

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $x = \{u_n\}_{n\in\omega}$ tal que $u_{n\oplus 1} \in u_n$ para todo n. Sea $v = \mathrm{img}(x)$. Si $y \in v$ entonces $y = u_n$ para algún n, y tenemos que $u_{n\oplus 1} \in y \cap v$. Por lo tanto para todo $y \in v$, $y \cap v \neq \emptyset$ en contradicción del Axioma de Regularidad. $\square$

Corolario 5.3.2. *En* ZF^+ *no existe un conjunto* $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *tal que* $x_0 \in x_1 \in \cdots \in x_n \in x_0$.

Corolario 5.3.3. *En* ZF^+ *no existe* a *tal que* $a \in a$.

Teorema 5.3.4. *En* ZF^+*, si* $x \neq \emptyset$ *es transitivo, entonces* $\emptyset \in x$.

Demostración. Existe $y \in x$ tal que $y \cap x = \emptyset$, pero $y \subseteq x$ por ser x transitivo, por lo tanto $y = y \cap x = \emptyset$. $\square$

El siguiente teorema muestra como se simplifica la definición de ordinal en presencia del Axioma de Regularidad.

Teorema 5.3.5. *En* ZF^+ *el conjunto* a *es ordinal si y sólo si* a *es transitivo y para todo* x *e* y *en* α *se cumple* $(x \in y) \vee (x = y) \vee (y \in x)$.

Demostración. Si a es ordinal, entonces por definición se satisfacen las condiciones pedidas.

Para mostrar la otra implicación, como por hipótesis a es transitivo, hay que probar que se cumplen las condiciones que garantizan que $\in$ sea un buen orden estricto sobre a. Ord_1 se cumple pues $\forall x(x \notin x)$. Sean $x, y, z \in a$ tales que $x \in y$ e $y \in z$. Por hipótesis, $(x \in z) \vee (z \in x) \vee (x = z)$. Si fuese $z \in x$ o $z = x$ estaríamos en contradicción con el Corolorario 5.3.2. Por consiguiente debe ser $x \in z$, lo que prueba Ord_2. Para probar Ord_3, sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$. Existe $z \in b$ tal que $z \cap b = \emptyset$. Si existiese $x \in b$ tal que $x \in z$, tendríamos que $x \in z \cap b$. Luego para todo x en b debe ser $(z = x) \vee (z \in x)$, lo que muestra que z es el primer elemento de b. Esto prueba que también se satisface Ord_3. $\square$

Veremos ahora una forma alternativa del Axioma de Elección en ZF$^+$.

Teorema 5.3.6 (Rubin). *En* ZF*, si para todo ordinal α, $\mathcal{P}(\alpha)$ admite un buen orden, entonces todo conjunto regular admite un buen orden.*

Demostración. Como todo conjunto regular está contenido en algún V_α y como todo subconjunto de un conjunto bien ordenado es bien ordenado con el orden heredado, para probar el teorema bastará probar que la hipótesis implica que para todo ordinal α, V_α admite un buen orden.

Supongamos entonces que se cumple que $\mathcal{P}(\alpha)$ admite un buen orden para todo ordinal α, y sea υ un ordinal que supondremos fijo a lo largo de la demostración.

Por el Lema 4.1.4, existe el primer ordinal λ tal que $\overline{\overline{\lambda}} \not\leq \overline{\overline{V_\upsilon}}$.

Como $\upsilon \subset V_\upsilon$, no puede ser que $\lambda \leq \upsilon$ y por el Teorema 2.3.7 se tiene que $\upsilon \in \lambda$.

Sea r una relación de buen orden para $\mathcal{P}(\lambda)$, cuya existencia está garantizada por hipótesis y que también supondremos fija a lo largo de la demostración.

Para cada ordinal α, sea $z(\beta) = \{x \in V_\alpha : \mathrm{rg}(x) = \beta\}$. Es claro que para $\beta, \gamma \in \alpha$, $z(\beta) \cap z(\gamma) = \emptyset$, y del Lema 5.1.4 resulta que $V_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} z(\beta)$. Luego si podemos definir una relación de buen orden sobre cada $z(\beta)$, su suma ordinal nos dará un buen orden sobre V_α (ver Definición 3.4.9).

De acuerdo con las consideraciones anteriores, para completar la demostración bastará definir una función $f\colon \upsilon \to V_\upsilon \times V_\upsilon$ que asigne a cada ordinal $\alpha \in \upsilon$ una relación de buen orden sobre $z(\alpha)$.

Procederemos por inducción sobre υ. Supongamos que $\alpha \in \upsilon$ y que hemos definido $f(\beta)$ para todo $\beta \in \alpha$. Entonces la suma ordinal de la familia $\{\langle z(\beta), f(\beta)\rangle\}_{\beta\in\alpha}$ define un buen orden r_α sobre V_α.

Como $z(\alpha) \subseteq V_{\alpha\oplus 1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, una forma de definir $f(\alpha)$ es extender el orden de V_α a $V_{\alpha\oplus 1}$.

Resulta del Teorema 3.2.4 y 3.2.3 (ver Ejercicio 3.6.1) que existe un *único* ordinal δ y un *único* isomorfismo g de $(\delta, \in)$ sobre (V_α, r_α). Este isomorfismo puede expenderse a una biyección entre $\mathcal{P}(V_\alpha)$ y $\mathcal{P}(\delta)$. Como por hipótesis este último conjunto admite un buen orden, la biyección podría utilizarse para definir un buen orden sobre $\mathcal{P}(V_\alpha)$. Pero el problema es que necesitamos tener una regla para elegir un buen orden sobre cada $\mathcal{P}(V_\alpha)$ para todo $\alpha \in \upsilon$ que sea independiente de α, para evitar el uso de alguna forma del Axioma de Elección, lo que invalidaría la demostración.

Para conseguir esto, observemos que como $V_\alpha \subseteq V_\upsilon$, $g\colon \delta \to V_\upsilon$ es una función inyectiva, luego debe ser $\delta \in \lambda$. Por consiguiente $\mathcal{P}(\delta) \subset \mathcal{P}(\lambda)$, y la restricción de r a $\mathcal{P}(\delta)$ es un buen orden.

Como el isomorfismo inverso $g^{-1}\colon V_\alpha \to \delta$ es, en particular, una función biyectiva, la correspondencia que a todo $u \subseteq V_\alpha$ le hace corresponder $h(u) = \mathrm{img}(g^{-1}|_U) = \{g^{-1}(x) : x \in u\}$ establece una biyección de $\mathcal{P}(V_\alpha)$ sobre $\mathcal{P}(\delta)$. Luego si definimos

$$r_{\mathcal{P}} = \{\langle u, v\rangle \in \mathcal{P}(V_\alpha) \times \mathcal{P}(V_\alpha) : \langle h(u), h(v)\rangle \in r\},$$

resulta que $r_{\mathcal{P}(V_\alpha)}$ es un buen orden sobre $\mathcal{P}(V_\alpha)$. Definimos $f(\alpha)$ como la restricción del orden $r_{\mathcal{P}(V_\alpha)}$ a $z(\alpha)$.

Hemos completado así el proceso inductivo, definiendo un buen orden r_α sobre $z(\alpha)$ para todo $\alpha \in \upsilon$, de manera uniforme, esto es, sin que la definición dependa de cada α. □

Corolario 5.3.7. *En* ZF$^+$ *el Axioma de Elección es equivalente a que $\mathcal{P}(\alpha)$ admita un buen orden para todo ordinal α.*

El Axioma de Elección es un caso particular del siguiente:
ACM) **Axioma de Elección Múltiple:** *Sea a un conjunto no vacío cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Existe un conjunto d tal que $d \cap b$ es un conjunto* finito *y no vacío para todo b de a.*

El Teorema 5.3.6 nos permitirá probar que en presencia del Axioma de Regularidad, el Axioma de Elección Múltiple es equivalente al Axioma de Elección. Comenzaremos por dos resultados que no dependen del Axioma de Regularidad:

Lema 5.3.8. *El Axioma de Elección Múltiple es equivalente al siguiente enunciado: Para todo conjunto $a \neq \emptyset$ existe una función $f\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(a)$ tal que $f(b)$ es un subconjunto finito y no vacío de b para todo $\emptyset \neq b \subseteq a$.*

Demostración. La demostración es similar a la de la formulación AC.5 del Axioma de Elección en 4.3 (ver Ejercicio 5.5.5). □

Teorema 5.3.9. *En* ZF*, cada uno de los enunciados listados a continuación implica al siguiente:*

E_1 *Axioma de Elección.*

E_2 *Axioma de Elección Múltiple.*

E_3 *Todo conjunto parcialmente ordenado admite una anticadena maximal.*

E_4 *Todo conjunto totalmente ordenado admite un buen orden.*

E_5 *Para todo conjunto bien ordenado a, $\mathcal{P}(a)$ admite un buen orden.*

Demostración. Es trivial que E_1 implica E_2. Supongamos E_2 y sea $(a, \leq)$ un conjunto parciamente ordenado. Por el Lema 5.3.8 existe

$$f\colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to \mathcal{P}(a)$$

tal que $f(b)$ es un subconjunto finito y no vacío de b para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$.

Para todo $b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$ sea $g(b)$ el conjunto de los elementos minimales de $f(b)$. Es claro que $g(b)$ es una anticadena no vacía de a contenida en b.

Para toda anticadena $k \subseteq a$ sea

$$c(k) = \{x \in a \setminus k : k \cup \{x\} \text{ es una anticadena de } a\}.$$

Observar que $c(\emptyset) = a$. Si no hubiese anticadenas maximales, sería $c(k) \neq \emptyset$ para toda anticadena k y podríamos contradecir el Lema 4.4.1 definiendo una "función inyectiva" h de los ordinales en $\mathcal{P}(a)$ del siguiente modo:

$$h(\alpha) = \begin{cases} g(c(\emptyset)) & \text{si } \alpha = 0, \\ h(\beta) \cup g(c(h(\beta)) & \text{si } \alpha = \beta \oplus 1, \\ \bigcup_{\beta \in \alpha} h(\beta) & \text{si } \alpha \text{ es límite.} \end{cases}$$

lo que prueba que E_2 implica E_3.

Dado un conjunto totalmente ordenado $(a, \leq)$, sea

$$c = \{\langle b, x\rangle \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \times a : x \in b\}.$$

Se verifica fácilmente que la relación binria sobre c definida por

$$(b, x) \leq (d, y) \;\leftrightarrow\; (b = d) \wedge (x \leq y)$$

es un orden parcial. Observemos que toda cadena maximal de $(c, \leq)$ debe ser de la forma
$$k = \{\langle b, x\rangle : b \in \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}\},$$
lo que nos permite definir una función selectora $f_k \colon \mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\} \to a$ poniendo $f_k(b)$ igual al único x tal que $\langle b, x\rangle$ figura en k. Luego E_3 implica la exitencia de una función selectora para $\mathcal{P}(a) \setminus \{\emptyset\}$, la que a su vez implica la existencia de un buen orden sobre a, como se demostró en el Teorema 4.4.2. Luego E_3 implica E_4.

Sea $(a, \leq)$ un conjunto bien ordenado. La función $g \colon \mathcal{P}(a) \to 2^a$ que asigna a cada $y \in \mathcal{P}(a)$ la función
$$f_y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in y, \\ 0 & \text{si } x \in a \setminus y, \end{cases}$$
es una biyección. Luego si definimos un orden total sobre 2^a, este orden se trasfiere por la biyección a $\mathcal{P}(a)$, y por E_4, resultará que $\mathcal{P}(a)$ admite un buen orden, lo que probará que E_4 implica E_5. Dadas $f, g \in 2^a$, sea $c = \{x \in a : f(x) \neq g(x)\}$. Si $c = \emptyset$, entonces $f = g$. En caso contrario, sea z el primer elemento de c. Definamos $f < g$ si $f(z) < g(z)$, y $g < f$ si $g(z) < f(z)$. Es fácil verificar que esta definición da un orden total sobre 2^a. □

Como consecuencia del Teorema 5.3.6 se tiene que:

Corolario 5.3.10. *En En* ZF$^+$ *los enunciados* E_1 *-* E_5 *del Teorema 5.3.9 son mutuamente equivalentes.*

Observación 5.3.11. El hecho que en ZF$^+$ el Axioma de Elección Múltiple sea equivalente al Axioma de Elección tiene una interesante aplicación matemática, pues A. Blass, en el trabajo citado en la Bibliografía, demostró en ZF que la existencia de bases en espacios vectoriales sobre cuerpos arbitrarios implica la validez del Axioma de Elección Múltiple y por lo tanto, del Axioma de Elección en ZF$^+$, resolviendo un problema que había estado abierto por un tiempo considerable.

5.4. Negación del Axioma de Regularidad

Vimos en el Capítulo 1 que del Axioma Esquema de Especificación resulta que para todo conjunto a existe un conjunto b tal que $b \notin a$ y por consiguiente que no puede existir un conjunto que contenga a todos los conjuntos, evitando así la Paradoja de Russell. Por otra parte, el Axioma de Regularidad prohíbe la existencia de conjuntos que sean elementos de sí mismos. Nos proponemos mostrar en esta sección que el sistema ZFC es compatible con la existencia de conjuntos a tales que $a \in a$. Para ello definiremos un modelo, introducido por L. Rieger en 1957 (ver la bibliografía), que satisface los axiomas ZFC y la negación del Axioma de Regularidad. Más aún, en este modelo será falso el Teorema 5.3.1.

Comenzaremos por definir una "relación" $\in_F$ en el universo $\mathcal{U}$ de modo que en sistema $(\mathcal{U}, \in_F)$ se satisfagan los axiomas de ZFC y exista un conjunto a tal que $a \in_F a$. Es decir, serán satisfechos simultáneamente los axiomas de ZFC y la negación del Axioma de Regularidad.

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula del lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos con dos variables libres satisfaciendo las siguientes condiciones:

P$_1$ $\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z)) \to y = z)$,

P$_2$ $\forall x \forall y \forall z((\varphi(x, z) \wedge \varphi(y, z)) \to x = y)$,

P$_3$ $\forall x \exists y \varphi(x, y)$,

P$_4$ $\forall y \exists x \varphi(x, y)$.

De acuerdo con la propiedad P_1, para todo x definimos $F(x)$ como el único y tal que $\varphi(x, y)$. Esto es, $\varphi(x, F(x))$ es verdadera. Análogamente, por P_2 para todo y podemos definir $F^{-1}(y)$ como el único x tal que $\varphi(x, y)$, esto es $\varphi(F^{-1}(y), y)$ es verdadera. Por P_3 y P_4 podemos pensar a F como una "biyección" del universo $\mathcal{U}$ en si mismo, y a F^{-1} como su inversa. Claramente se tiene que:

$$\forall y F(F^{-1}(y)) = y \quad \text{y} \quad \forall x F^{-1}(F(x)) = x. \tag{5.6}$$

Observemos que para todo conjunto a, el Axioma de Sustitución garantiza que las clases

$$F^{\to}(a) = \{F(x) : x \in a\}$$

y

$$F^{\leftarrow}(a) = \{x : F(x) \in a\} = \{F^{-1}(y) : y \in a\}$$

son ambas conjuntos.

Lema 5.4.1. *Dados los conjuntos a, b se tiene que:*

(I) $(F^{\rightarrow}(a) \subseteq F^{\rightarrow}(b)) \rightarrow (a \subseteq b)$,

(II) $(F^{\leftarrow}(a) \subseteq F^{\leftarrow}(b)) \rightarrow (a \subseteq b)$.

Demostración. Supongamos que $x \in a$. Esto implica que $F(x) \in F^{\rightarrow}(a) \subseteq F^{\rightarrow}(b)$. Luego existe $y \in b$ tal que $F(x) = F(y)$. Por P_3 debe ser $x = y \in b$, lo que demuestra (i). El enunciado (ii) es una consecuencia fácil de P_4. $\square$

En el universo $\mathcal{U}$ definimos una relación $\in_F$ del modo siguiente:

$$\forall x \forall y (x \in_F y \leftrightarrow x \in F(y)).$$

Debemos modificar las fórmulas del lenguaje de primer orden definido en el Capítulo 1 sustituyendo el símbolo $\in$ por el nuevo símbolo $\in_F$. Precisamente, dada una fórmula φ, definiremos la fómula φ_F por inducción en la complejidad de φ. Si $\text{comp}(\varphi) = 0$, entonces φ es de la forma $(x \in y)$ o $(x = y)$, donde x, y son variables. Definimos $(x \in y)_F = (x \in_F y)$ y $(x = y)_F = (x = y)$. Supongamos ahora que $\text{comp}(\varphi) = n > 0$ y que hemos definido ψ_F para toda fórmula ψ tal que $\text{comp}(\psi) < n$. Entonces se puede dar uno (y sólo uno) de los casos siguientes:

1. $\varphi = \neg\psi$. En este caso debe ser $\text{comp}(\psi) = n - 1$, y usando la hipótesis inductiva definimos $\varphi_F = \neg\psi_F$.

2. $\varphi = (\psi \wedge \eta)$. Como debe ser $\text{comp}(\psi) < n$ y $\text{comp}(\eta) < n$, aplicando la hipótesis inductiva definimos $\varphi_F = (\psi_F \wedge \eta_F)$.

3. $\varphi = \exists x \psi$. Debe ser $\text{comp}(\psi) = n - 1$ y podemos definir $\varphi_F = \exists x \psi_F$.

Vamos a probar ahora que si ψ es una fórmula correspondiente a un axioma de ZFC, entonces ψ_F es verdadera en $(\mathcal{U}, \in_F)$. Esto mostrará que $(\mathcal{U}, \in_F)$ es un modelo de ZFC. Después, veremos que eligiendo una F conveniente, obtendremos un modelo de ZFC que satisface la negación del Axioma de Regularidad.

Extensionalidad. Para ver que

$$\forall x \ \forall y \ (\forall t \ (t \in_F x \leftrightarrow t \in_F y) \rightarrow (x = y))$$

es verdadera en $(\mathcal{U}, \in_F)$ observemos que teniendo en cuenta P_2 se tiene que

$$\forall t \ (t \in_F x \leftrightarrow t \in_F y) \leftrightarrow \forall t \ (t \in F(x) \leftrightarrow t \in F(y)) \leftrightarrow F(x) = F(y) \leftrightarrow x = y.$$

Conjunto vacío. Sea $\emptyset_F = F^{-1}(\emptyset)$. De la definición de $\in_F$ resulta que

$$\forall x \neg (x \in_F \emptyset_F).$$

Unión. Sea a un conjunto y sea $\cup_F a = F^{-1}(\bigcup_{y \in F(a)} F(y))$. Es fácil ver que

$$\forall t \ (t \in_F \cup_F(a) \leftrightarrow \exists y \ (y \in_F a \wedge t \in_F y)).$$

Conjunto Potencia. Sea a un conjunto. Observemos que

$$x \subseteq_F a \leftrightarrow \forall t \ (t \in_F x \to t \in_F a)) \leftrightarrow$$

$$\forall t \ (t \in F(x) \to t \in F(a)) \leftrightarrow (F(x) \subseteq F(a)) \leftrightarrow (F(x) \in \mathcal{P}(F(a))).$$

Por el Axioma de Sustitución, $\{F^{-1}(y) : y \in \mathcal{P}(a)\} = \{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\}$ es un conjunto. Sea $\mathcal{P}_F(a) = F^{-1}(\{x : F(x) \in \mathcal{P}(a)\})$. Resulta que $x \subseteq_F a \leftrightarrow x \in_F \mathcal{P}_F(a)$.

Sustitución Sea a un conjunto y $\psi(x, y)$ una fórmula tal que $\psi_F(x, y)$ define una relación funcional sobre a:

$$(\forall x \ (x \in_F a \to \exists\, !\, y \ \psi_F(x, y))) \leftrightarrow (\forall x \ (x \in F(a) \to \exists\, !\, y \ \psi_F(x, y))).$$

Por el Axioma de Sustitución en $(\mathcal{U}, \in)$,

$$\{y : \exists x \in_F a \ (\psi_F(x, y))\} = \{y : \exists x \in F(a) \ (\psi_F(x, y))\}$$

es un conjunto.

Como el Axioma de Sustitución es válido en $(\mathcal{U}, \in_F)$, también son válidos los axiomas de **Especificación** y de **Existencia del Par**.

Infinito. Sea la "función"S definida en $\mathcal{U}$ por

$$S(x) = \begin{cases} \emptyset_F & \text{si } x = 0, \\ F(x(n)) \cup \{x(n)\} & \text{si } x \text{ es función y } \operatorname{dom}(x) = n + 1, \\ \emptyset & \text{si no se cumplen las condiciones anteriores.} \end{cases}$$

Por recurrencia definimos la función f con $\operatorname{dom}(f) = \omega$ satisfaciendo $f(n) = S(f|_n)$. Se tiene que $f(0) = \emptyset_F$ y $f(n + 1) = F(f(n)) \cup \{f(n)\}$.

Observemos que $x \in f(n + 1) \leftrightarrow x \in_F f(n) \vee x = f(n)$, lo que significa que $f(n + 1) = f(n)'_F$.

Por el Axioma de Sustitución $\mathrm{img}(f)$ es un conjunto. Sea $\omega_F = F^{-1}(\mathrm{img}(f))$, y veamos que ω_F es inductivo en $(\mathcal{U}, \in_F)$: $\emptyset_F \in_F \omega_F$ porque $\emptyset_F = f(0) \in \mathrm{img}(f)$. Supongamos que $x \in_F \omega_F$. Entonces $x \in \mathrm{img}(f)$ y por lo tanto $x = f(n)$ para algún $n \in \omega$. Luego $x'_F = f(n+1) \in \mathrm{img}(f)$, lo que significa que $x'_F \in \omega_F$.

Elección. Sea a un conjunto que en $(\mathcal{U}, \in_F)$ es no vacío y cuyos elementos son no vacíos y disjuntos dos a dos. Esto es, a satisface:

I$_F$) $a \neq \emptyset_F$,

II$_F$) $\forall x((x \in_F a) \to \exists\, t\ (t \in_F x))$,

III$_F$) $\forall x\, \forall y\ (((x \in_F a) \wedge (y \in_F a) \wedge (x \neq y)) \to (\forall z\ ((z \notin_F x) \vee (z \notin_F y))))$.

En $(\mathcal{U}, \in)$, las propiedades anteriores significan que a satisface las propiedades:

I) $F(a) \neq \emptyset$,

II) $\forall x\ ((x \in F(a)) \to (F(x) \neq \emptyset))$,

III) $\forall x\ \forall\ y\ (((x \in F(a)) \wedge (y \in F(a)) \wedge (x \neq y)) \to (F(x) \cap F(y) = \emptyset))$.

Entonces, teniendo en cuenta el Axioma de Sustitución, resulta que $a_1 = \{F(x) : x \in F(a)\}$ es un conjunto no vacío de conjuntos no vacíos y disjuntos dos a dos. Luego por el Axioma de Elección existe un conjunto b_1 tal que

$$\forall\ t\ \exists! y\ ((t \in a_1) \to ((y \in t) \wedge (y \in b_1))). \tag{5.7}$$

Como $(t \in a_1) \leftrightarrow \exists x\ ((x \in F(a)) \wedge (t = F(x)))$, (5.7) se puede escribir

$$\forall x\ \exists! y\ ((x \in F(a)) \to (y \in F(x)) \wedge (y \in b_1)).$$

Definiendo $b = F^{-1}(b_1)$, se tiene que

$$\exists\ b\ (\forall x\ \exists! y\ ((x \in_F a) \to ((y \in_F x) \wedge (y \in_F b)))),$$

que es la formulación del Axioma de Elección en $(\mathcal{U}, \in_F)$.

Acabamos de ver que $(\mathcal{U}, \in_F)$ satisface los axiomas ZFC, cualquiera que sea la F definida a partir de una fórmula $\varphi(x, y)$ que satisfaga las propiedades $P_1 - P_4$.

Sea $\varphi(x,y)$ la fórmula:

$$((x=0)\to(y=1))\wedge((x=1)\to(y=0))\wedge(((x\neq 0)\wedge(x\neq 1))\to(x=y)).$$

Es claro que φ satisface $P_1 - P_4$ y la F correspondiente está definida para todo x como

$$F(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0,\\ 0 & \text{si } x=1,\\ x & \text{si } x\neq 0 \text{ y } x\neq 1.\end{cases}$$

Como $0\in F(0)=1=\{0\}$, $0\in_F 0$ y del Corolario 5.3.3 resulta que el Axioma de Regularidad es falso en $(\mathcal{U},\in_F)$ para esta elección de $\in_F$.

En particular, se deduce que *la existencia de conjuntos que sean elementos de sí mismos es compatible con la axiomática* ZFC.

Sea ahora $\phi(x,y)$ la fórmula

$$(\exists\, n\in\omega((x=n)\wedge\ (y=\{n+1\})))\vee((\exists\, n\in\omega(x=\{n+1\}))\wedge\ (y=n))\vee$$

$$(\neg\,\exists\, n\in\omega((x=n)\vee(x=\{n+1\}))\wedge(y=x)).$$

Se verifica fácilmente que $\phi(x,y)$ satisface las propiedades $P_1 - P_4$ y la F correspondiente está definida para todo x como

$$F(x)=\begin{cases}\{n+1\} & \text{si } x=n\in\omega,\\ n & \text{si } x=\{n+1\}, \text{ con } n\in\omega,\\ x & \text{en cualquier otro caso.}\end{cases}$$

Se tiene que

$$\ldots\ n+1\in_F n\in_F\ldots\ \in_F 1\in_F 0,$$

lo que prueba que sin el Axioma de Regularidad no es válido el Teorem 5.3.1.

5.5. Ejercicios

Ejercicio 5.5.1. *Usando las definiciones del Ejercicio 2.6.13 probar que:*

1. *Si a es un conjunto regular, entonces $\in$ es bien fundada sobre a.*

2. *Si $\in$ es bien fundada sobre un conjunto transitivo a, entonces a es regular.*

Ejercicio 5.5.2. *Calcular* $\mathrm{card}(V_n)$ *para* $n \in \omega$.

Ejercicio 5.5.3. *Sea* $\mathcal{C}$ *una clase no vacía. Muestre que en ZF*$^+$ *se puede probar que la clase*

$$\tau(\mathcal{C}) = \{x : \mathcal{C}(x) \wedge \forall y\ (\mathcal{C}(y) \rightarrow (\mathrm{rg}(x) \leq \mathrm{rg}(y)))\},$$

esto es, la clase de los conjuntos de rango mínimo en $\mathcal{C}$*, es un conjunto no vacío. Pista: Existe un ordinal* α *tal que* $\tau(\mathcal{C}) \subset V_\alpha$.

Ejercicio 5.5.4. *En ZF*$^+$*, para todo conjunto* x *se define* $|x|$ *del modo siguiente:*

- $|x|$ *es el primer ordinal* α *tal que* $\overline{\overline{\alpha}} = \overline{\overline{x}}$*, si tal* α *existe, esto es, si* x *admite un buen orden.*
- $|x| = \tau(\mathcal{C}_x)$*, donde* $\mathcal{C}_x = \{y : \bar{\bar{y}} = \bar{\bar{x}}\}$ *en caso contrario.*

Probar que:

I) *Para todo* x, y*,* $|x| = |y|$ *si y sólo si* $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$.

II) *Si* x *es bien ordenado,* $|x| = \mathrm{card}(x)$.

III) *Si* x *no es bien ordenado, entonces* $|x|$ *no es transitivo.*

Ejercicio 5.5.5. *Pruebe que en* Z *el Axioma de Elección Múltiple es equivalente al siguiente enunciado: Para toda familia de conjuntos* $\{a_i\}_{i\in I}$ *tal que* $I \neq \emptyset$ *y* $a_i \neq \emptyset$ *para todo* $i \in I$*, existe una función* $f\colon I \rightarrow \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(a_i)$ *tal que* $f(i)$ *es un subconjunto finito y no vacío de* a_i *para todo* $i \in I$.

Ejercicio 5.5.6. *Sea* $\in_F$ *la relación de pertenencia definida por una "función"* F *determinada por una fórmula que satisface las propiedades* $P_1 - P_4$ *consideradas en §5.3. Pruebe que:*

1. $x \cap_F y = F^{-1}(F(x) \cap F(y))$,
2. $\{x, y\}_F = F^{-1}(\{x, y\})$,
3. $\{x\}_F = F^{-1}(\{x\})$,
4. $\langle x, y\rangle_F = F^{-1}(\langle x, y\rangle)$.

Ejercicio 5.5.7. *Muestre que* ZFC *es compatible con la existencia de conjuntos* $x \neq y$ *tales que* $x \in y$ *e* $y \in x$.

Capítulo 6

Modelos internos

6.1. Modelos internos

Recordempos que desde el inicio hemos supuesto la existencia de una colección de objetos $\mathcal{U}$, que denominamos el universo de la teoría de conjuntos, y de una relación binaria $\in$ definida en $\mathcal{U}$, que denominamos relación de pertenencia, tales que el par $\langle \mathcal{U}, \in \rangle$ es un modelo de la teoría ZFC, en el sentido de que tanto los axiomas como los enunciados que se pueden derivar de los mismos son verdaderos cuando se aplican a elementos de $\mathcal{U}$ relacionados por $\in$. Llamaremos al par $\langle \mathcal{U}, \in \rangle$ el **modelo estándard** de ZFC.

Una teoría se dice **consistente** cuando a partir de sus axiomas no es posible derivar un enunciado y su negación.

Suponer la existencia del modelo estándard implica suponer que ZFC es consitente, porque si no lo fuese, existiría un enunciado sobre elementos de $\mathcal{U}$ que sería simultáneamnte verdadero y falso, contrariando el principio lógico de no contradicción.

Al final del capítulo anterior modificamos la relación de pertenencia del modelo estándard por medio de permutaciones F del universo $\mathcal{U}$, obteniendo modelos $\langle \mathcal{U}, \in_F \rangle$ de la teoría que se deriva de los axiomas de ZFC más la negación del Axioma de Regularidad. Desde el punto de vista de la lógica, esto significa que si la teoría ZFC es consistente, lo sigue siendo si le agregamos la negación del Axioma de Regularidad.

En este capítulo, vamos a considerar modificaciones del modelo estándard en las que la relación de pertenencia no se modifica, pero el universo es reemplazado por una subclase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{U}$. Este tipo de modelos se denominan

modelos internos.

En particular vamos a probar que a partir del modelo estándard se puede probar que $\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ es un modelo de ZFC$^+$. Esto probará que si la teoría ZFC es consistente, sigue siéndolo si le agregamos el Axioma de Regularidad. Este resultado, junto con la consistencia de ZFC con la negación del Axioma de Regularidad nos dice que el Axioma de Regularidad es independiente de los axiomas de ZFC, en el sentido de que se pueden obtener teorías consistentes tanto agregando el axioma como su negación.

Usaremos también modelos internos para mostrar la independencia de otros axiomas.

Al considerar los modelos $\langle \mathcal{U}, \in_F \rangle$, debimos adaptar las fórmulas de nuestro lenguaje original sustituyendo $\in$ por $\in_F$. Al considerar modelos del tipo $\langle \mathcal{C}, \in \rangle$, debemos restringir los cuantificadores existencial y universal a las variables que designen objetos de la clase $\mathcal{C}$. La forma precisa de hacerlo es la siguiente:

Definición 6.1.1. Sea $\mathcal{C}$ una clase y φ una fórmula. Definiremos $\varphi^{\mathcal{C}}$ por inducción en la complejidad de φ como sigue:

I) Si φ es atómica, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \varphi$,

II) si $\varphi = \neg\psi$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \neg\varphi^{\mathcal{C}}$,

III) si $\varphi = (\eta \ \wedge \psi)$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = (\eta^{\mathcal{C}} \ \wedge \psi^{\mathcal{C}})$,

IV) si $\varphi = \exists x \ \psi$, entonces $\varphi^{\mathcal{C}} = \exists x \ (\mathcal{C}(x) \wedge \psi^{\mathcal{C}})$.

La fórmula $\varphi^{\mathcal{C}}$ se dice la **restricción** de φ a la clase $\mathcal{C}$.

De la definición del cuntificador universal en términos del existencial y la negación se tiene que:

$$\text{Si } \ \varphi = \forall x \ \psi(x), \ \text{ entonces } \ \varphi^{\mathcal{C}} = \forall x \ (\mathcal{C}(x) \to \psi^{\mathcal{C}}(x)). \tag{6.1}$$

Diremos que una clase $\mathcal{C}$ satisface un axioma A, cuando la restricción a $\mathcal{C}$ del enunciado de A es verdadero. Si A es un axioma esquema, entonces deberán ser verdaderas las restricciones a $\mathcal{C}$ de todos los enunciados de A.

Teorema 6.1.2. *Cualquier clase transitiva satisface el Axioma de Extensionalidad.*

Demostración. El Axioma de Extensionalidad es

$$\forall x\ \forall y\ (\forall t(t \in x \leftrightarrow t \in y) \to x = y).$$

El axioma restringido a $\mathcal{C}$ toma la forma

$$\forall x\ \forall y\ \{\mathcal{C}(x) \wedge \mathcal{C}(y) \to [\forall t\ (\mathcal{C}(t) \to (t \in x \leftrightarrow t \in y)) \to x = y]\}.$$

Sean x e y en $\mathcal{C}$ tales que $x \neq y$, podemos suponer que existe t tal que $t \in x$ y $t \notin y$. Como $\mathcal{C}$ es transitiva y x está en la clase, de $t \in x$ resulta que t está en la clase.

Luego si dos conjuntos en $\mathcal{C}$ son distintos no tienen los mismos elementos de $\mathcal{C}$ (hay al menos un elemento de $\mathcal{C}$ que está en uno pero no en el otro), por lo tanto si dos conjuntos de $\mathcal{C}$ tienen los mismos elementos de $\mathcal{C}$ deben ser iguales y esto es el Axioma de Extensionalidad restringido a $\mathcal{C}$. □

Teorema 6.1.3. *Si $\mathcal{C}$ es una clase transitiva tal que $\mathcal{C}(x) \to \mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$, entonces el Axioma de Especificación vale en $\mathcal{C}$.*

Demostración. El Esquema de Especificación relativo a $\mathcal{C}$, para una fórmula φ, es $\forall x\ \{\mathcal{C}(x) \to \exists y\ [\mathcal{C}(y)\ \wedge\ (\forall t\ (\mathcal{C}(t) \to (t \in x\ \wedge\ \varphi^{\mathcal{C}}(t)\ ))\ \leftrightarrow\ t \in y)]\}$.

Si x es un conjunto en $\mathcal{C}$, entonces $y = \{t \in x :\ \varphi^{\mathcal{C}}(t)\}$ es un conjunto que pertenece a $\mathcal{P}(x)$. Como por hipótesis $\mathcal{P}(x)$ está en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es transitiva, resulta que y está en $\mathcal{C}$, lo que prueba el resultado. □

Definición 6.1.4. Sea $\mathcal{C}$ una clase y φ una fórmula con $x_0, \ldots, x_n$ como variables libres. Diremos que φ es **$\mathcal{C}$-absoluta** o que $\mathcal{C}$ **refleja** a φ si es verdadero el enunciado

$$\forall x_0\ \ldots\ \forall x_n\ [\mathcal{C}(x_0)\ \wedge\ \ldots\ \wedge\ \mathcal{C}(x_n)\ \to\ (\varphi \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{C}})].$$

Esto es, una fórmula φ es $\mathcal{C}$-absoluta si los enunciados que resultan de asignar a las variables libres de $\varphi^{\mathcal{C}}$ y de φ los mismos elementos de $\mathcal{C}$, ambos son verdaderos o ambos son falsos.

Observación 6.1.5. Al no tener variables libres, un enunciado es $\mathcal{C}$-absoluto si y sólo si $\varphi^{\mathcal{C}} \leftrightarrow \varphi$. En palabras, φ es $\mathcal{C}$-absoluto si $\varphi^{\mathcal{C}}$ y φ son ambos verdaderos o ambos falsos.

El siguiente ejemplo de una fórmula no absoluta ayudará a comprender el concepto.

Ejemplo 6.1.6. *Sea $\varphi(z) = \neg(\exists x\ (x \in z))$ y consideremos como clase al conjunto $s = \omega \setminus \{\emptyset\}$. Entonces $\varphi^s(z) = \neg\exists x(x \in s \wedge x \in z)$, y se tiene que $\varphi^s(1)$ es verdadero pero $\varphi(1)$ es falso. Por lo tanto el enunciado*

$$\forall z(z \in s \rightarrow (\varphi^s \leftrightarrow \varphi))$$

es falso y φ no es s-absoluta.

Resulta de la Definición 6.1.1 que si φ no tiene cuantificadores, entonces $\varphi = \varphi^{\mathcal{C}}$ para cualquier clase $\mathcal{C}$. Por lo tanto si φ no tiene cuantificadores es trivialmente $\mathcal{C}$-absoluta para cualquier clase $\mathcal{C}$.

Definición 6.1.7. Los cuantificadores en una fórmula se dicen **acotados** si son de la forma $\forall x\ (x \in y\ \rightarrow\ \psi(x))$ ó $\exists x\ (x \in y\ \wedge\ \psi(x))$.

Lema 6.1.8. *Si $\mathcal{C}$ una clase transitiva, entonces toda fórmula φ sin cuantificadores no acotados es $\mathcal{C}$-absoluta.*

Demostración. Haremos la demostración por inducción en la complejidad de las fórmulas. Si $\text{comp}(\varphi) = 0$, entonces no tiene cuantificadores y el resultado es trivial. Sea $\text{comp}(\varphi) = n > 0$ sin cuantificadores no acotados y supongamos que todas las fórmulas de complejidad menor que n sin cuantificadores no acotados sean $\mathcal{C}$-absolutas. Si $\varphi = \neg\psi$ o $\varphi = (\psi \wedge \eta)$, entonces ψ y η tienen complejidad menor que n y no pueden tener cuantificadores no acotados. Luego, por la hipótesis inductiva deben ser $\mathcal{C}$-absolutas, y se ve fácilmente que esto implica que también φ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Si $\varphi(y_0, \ldots, y_n, z) = \exists x(x \in z)\psi(x, y_0, \ldots, y_n, z)$, para probar que φ es $\mathcal{C}$-absoluta debemos probar que el siguiente enunciado es verdadero:

$$\forall y_0 \cdots \forall y_n \forall z(\mathcal{C}(y_0) \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}(y_n) \wedge \mathcal{C}(z) \rightarrow$$

$$[\exists x(\mathcal{C}(x) \wedge x \in z \wedge \psi^{\mathcal{C}}(x, y_o, \ldots, y_n, z)) \leftrightarrow \exists x(x \in z \wedge \psi(x, y_0, \ldots, y_n, z))].$$

Como $\mathcal{C}$ es transitiva y $z \in \mathcal{C}$, debe ser $x \in \mathcal{C}$, luego la condición $\mathcal{C}(x)$ es superflua, y el enunciado anterior puede escribirse:

$$\forall y_0 \cdots \forall y_n \forall z(\mathcal{C}(y_0) \wedge \ldots \wedge \mathcal{C}(y_n) \wedge \mathcal{C}(z) \rightarrow$$

$$[\exists x(x \in z \wedge \psi^{\mathcal{C}}(x, y_o, \ldots, y_n, z)) \leftrightarrow \exists x(x \in z \wedge \psi(x, y_0, \ldots, y_n, z))].$$

que resulta verdadero, ya que por la hipótesis inductiva ψ debe ser $\mathcal{C} - absoluta$. □

Sea $\varphi(x, y)$ una fórmula que permita definir una relación funcional $y = F(x)$, esto es, que $\forall x\ \exists! y\ \varphi(x, y)$.

Definición 6.1.9. Diremos que la **relación funcional** F es **$\mathcal{C}$-absoluta** cuando está definida por una fórmula φ $\mathcal{C}$-absoluta que satisface la condición de existencia y unicidad en $\mathcal{C}$:

$$\forall x\ [\mathcal{C}(x) \to \exists! y\ ((\mathcal{C}(y)\ \wedge\ \varphi^{\mathcal{C}}(x, y)))].$$

De la definición anterior resulta que si F es una relación funcional $\mathcal{C}$-absoluta, entonces $F^{\mathcal{C}}(x) = F(x)$ para todo x en la clase $\mathcal{C}$.

De acuerdo con el Lemma 6.1.8 si queremos ver que dada una clase transitiva $\mathcal{C}$, una fórmula φ es $\mathcal{C}$-absoluta, bastará escribir una fórmula equivalente a ella donde los cuantificadores aparezcan acotados. Esto es lo que haremos en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 6.1.10. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisfaga los axiomas de Especificación, Par y Unión; entonces las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son $\mathcal{C}$-absolutas.*

a) $x \in y$,

b) $x = y$,

c) $x \subset y$,

d) $\{x, y\}$,

e) $\{x\}$,

f) $\langle x, y \rangle$,

g) $\emptyset$,

h) $x \cup y$,

i) $x \cap y$,

j) $x \setminus y$,

k) x',

l) $trans(x)$,

m) $\cup x$,

n) $\cap x$.

Demostración. *a)* y *b)* son triviales por ser fórmulas atómicas.
c) La fórmula $\forall t\ (t \in x \to t \in y)$ tiene todos sus cuantificadores acotados y $\mathcal{C}$ es transitiva; por lo tanto es $\mathcal{C}$-absoluta.
l) $Trans(x)$ es la fórmula $\forall y\ (y \in x\ \ \to\ \ \forall z\ (z \in y\ \ \to\ \ z \in x))$ en la que todos los cuantificadores aparecen acotados.

Por hipótesis, los conjuntos definidos por las fórmulas funcionales $\{x,y\}^{\mathcal{C}}$, $\{x\}^{\mathcal{C}}$, $\langle x,y\rangle^{\mathcal{C}}$, $\emptyset^{\mathcal{C}}$, $(x \cup y)^{\mathcal{C}}$, $(x \cap y)^{\mathcal{C}}$, $(x \setminus y)^{\mathcal{C}}$, $(x')^{\mathcal{C}}$ existen. Resta ver que coinciden con su correspondiente no relativizado. Para ello escribiremos las respectivas fórmulas que los definen de manera que los cuantificadores queden acotados, lo que implica que las fórmulas sean $\mathcal{C}$-absolutas.
d) $z = \{x,y\}$ si y sólo si $y \in z\ \wedge\ x \in z\ \wedge\ \forall t\ (t \in z\ \to\ (t = x\ \vee\ t = y))$.

e) Este es un caso particular de *d)*
f) $z = \langle x,y\rangle$ si y sólo si

$$\exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x\})\ \wedge \exists s\ (s \in z \wedge\ s = \{x,y\}) \wedge$$
$$\forall s (s \in z\ \to\ (s = \{x\}\ \vee\ s = \{x,y\}).$$

g) Podemos decir que $z = \emptyset$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \to t \neq t)$.

h) $z = x \cup y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in z \to (t \in x\ \vee\ t \in y))\ \wedge x \subset z\ \wedge\ y \subset z$.

i) $z = x \cap y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \to\ (t \in y\ \to t \in z))\ \wedge z \subset y\ \wedge\ z \subset x$.

j) $z = x \setminus y$ si y sólo si $\forall t\ (t \in x\ \to (t \notin y\ \to t \in z))\ \wedge\ z \subset x\ \wedge\ z \cap y = \emptyset$.

k) Que $x' = x \cup \{x\}$ es consecuencia de *e)* y *h)*.

m) $y = \cup x$ si y sólo si $\forall s\ (s \in x\ \to\ s \subset y) \wedge \forall t\ (t \in y\ \to\ \exists s\ (s \in x \wedge t \in s))$.

n) $y = \cap x$ si y sólo si

$$\forall t\ (t \in x\ \to\ y \subset t) \wedge \exists s_0\ \{s_0 \in x \wedge \forall t\ [t \in s_0\ \to\ (\forall s\ (s \in x\ \to t \in s))] \to t \in y\}.$$

□

Teorema 6.1.11. *En las mismas hipótesis del teorema anterior, las siguientes fórmulas y relaciones funcionales son* $\mathcal{C}$*-absolutas.*

a) *z es un par ordenado,*

b) $a \times b$,

c) r *es una relación,*

d) $\mathrm{dom}(r)$,

e) $\mathrm{img}(r)$,

f) f *es función,*

g) $f(x)$ *(ser imagen del elemento* x *por una función* f*),*

h) f *es función inyectiva.*

Demostración. Observemos que si $\varphi(x, y)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, y la relación funcional $y = F(s, t)$ es $\mathcal{C}$-absoluta, entonces la fórmula $\psi(x, s, t)$ dada por $\varphi(x, F(s, t))$ resulta $\mathcal{C}$-absoluta, puesto que a $\psi(x, s, t)$ podemos escribirla como $\varphi(x, y) \ \wedge \ (y = F(s, t))$ que es $\mathcal{C}$-absoluta.

Usando el teorema anterior, escribiremos las fórmulas de forma tal que los cuantificadores queden acotados, y algunas de las variables que aparezcan libres sean reemplazadas por relaciones funcionales $\mathcal{C}$-absolutas.

a) La fórmula que dice que "z es un par ordenado" puede expresarse como

$$\exists x \ (x \in t \ \wedge \ t = \cup z) \ \wedge \ \exists y \ (y \in s \ \wedge \ s = \cup z) \ \wedge \ z = \langle x, y \rangle.$$

Por el teorema anterior las relaciones funcionales $\langle x, y \rangle$ y $\cup z$ son $\mathcal{C}$-absoluta; además los cuantificadores están acotados, por lo tanto la fórmula es $\mathcal{C}$-absoluta.

b) $c = a \times b$ si y sólo si

$$\forall x \ \forall y \ [(x \in a \wedge y \in b) \ \rightarrow \ \langle x, y \rangle \in c] \ \wedge$$

$$\forall z \ [z \in c \ \rightarrow \ \exists x \ \exists y \ (x \in a \ \wedge \ y \in b \ \wedge \ z = \langle x, y \rangle)].$$

En esta fórmula, todos los cuantificadores están acotados.

c) "r es una relación" si y sólo si $\forall x \ (x \in r \ \rightarrow \ x$ "es un par ordenado"). Los cuantificadores están acotados y "es un par ordenado" es $\mathcal{C}$-absoluta.

d) $a = \mathrm{dom}(r)$ si y sólo si

$$\forall x\ [x \in a\ \rightarrow\ \exists y\ (y \in \cup\cup r\ \wedge\ \langle x, y\rangle \in r)]\ \wedge$$

$$\forall x\ \forall y[(x \in \cup\cup r\ \wedge\ y \in \cup\cup r\ \wedge \langle x, y\rangle \in r)\ \rightarrow\ x \in a].$$

e) $b = \mathrm{img}(r)$ si y sólo si

$$\forall y\ (y \in b\ \rightarrow\ \exists x\ (x \in \cup\cup r\ \wedge\ \langle x, y\rangle \in r)]\ \wedge$$

$$\forall x\ \forall y[(x \in \cup\cup r\ \wedge\ y \in \cup\cup r\ \wedge \langle x, y\rangle \in r)\ \rightarrow\ y \in b].$$

f) "f es función" si y sólo si

$$(f \text{ es relación })\ \wedge\ \forall x\ \forall y\ \forall z$$

$$[(x \in \cup\cup f \wedge y \in \cup\cup f \wedge z \in \cup\cup f)\ \rightarrow (\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, z\rangle \in f\ \rightarrow\ y = z)].$$

g) $y = f(x)$ si y sólo si $\exists s\ (s \in f\ \wedge\ s = \langle x, y\rangle)$.
"f es función inyectiva" si y sólo si

$$(f \text{ es función })\ \wedge\ \forall x\ \forall t$$

$$[(x \in dom(f)\ \wedge\ t \in \mathrm{dom}(f))\ \rightarrow\ (f(x) = f(t)\ \rightarrow\ x = t)].$$

□

Teorema 6.1.12. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par, Unión y Potencia. Sean a y r conjuntos en la clase $\mathcal{C}$ y supongamos que r es un buen orden sobre a y que la fórmula que dice esto es $\varphi(a, r)$. Entonces la fórmula restringida $\varphi(a, r)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.*

Demostración. La fórmula $\varphi(a, r)$ puede ser escrita como

$$[(r \subset a \times a)\ \wedge\ orden(a, r)\ \wedge\ bueno(a, r)],$$

donde $orden(a, r)$ es la fórmula

$$\forall x \in a\ \forall y \in a\ \forall z \in a\ [\langle x, x\rangle \in r \wedge \langle x, y\rangle \in r\ \wedge\ \langle y, z\rangle \in r) \rightarrow (\langle x, z\rangle \in r) \wedge$$

$$((\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle y, x\rangle \in r) \rightarrow x = y)]$$

que dice que r es un orden sobre a y $bueno(a,r)$ es

$$\forall x\{x \in \mathcal{P}(a) \ \wedge \ x \neq \emptyset \ \ \rightarrow \ \exists y\ [(y \in x) \wedge \forall t\ (t \in x \rightarrow \ \langle y,t\rangle \in r)]\},$$

la fórmula que dice que r es un buen orden.

Bajo estas hipótesis sobre $\mathcal{C}$, todas estas fórmulas, que definen buen orden, son $\mathcal{C}$-absolutas puesto que todos los cuantificadores en ellas se encuentran acotados y las fórmulas funcionales que aparecen son $\mathcal{C}$-absolutas. Por lo tanto $\varphi(a,r)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. □

Teorema 6.1.13. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface los axiomas de Especificación, Par, Unión y Potencia. Si ω está en la clase $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C}$ satisface el Axioma del Infinito.*

Demostración. El Axioma del Infinito relativo a $\mathcal{C}$ es

$$\exists x\ \{\mathcal{C}(x) \ \wedge \ [\emptyset^{\mathcal{C}} \in x \ \wedge \ \forall t\ (\mathcal{C}(t) \ \rightarrow \ \ t \in x \ \rightarrow \ (t')^{\mathcal{C}} \in x)]\}. \tag{6.2}$$

Como se satisfacen las hipótesis del Teorema 6.1.10, resulta que $\emptyset^{\mathcal{C}} = \emptyset$ y $(t')^{\mathcal{C}} = t'$, y como $\mathcal{C}(\omega)$ es verdadero, tenemos que ω hace verdadero el enunciado (6.2). □

Teorema 6.1.14. *Si α es un ordinal límite, entonces V_α satisface los axiomas de Extensionalidad, Especificación, Conjunto Vacío, Par , Unión, Potencia, Regularidad, Elección. Además, si $\alpha > \omega$, entonces V_α satisface el Axioma del Infinito.*

Lo anterior afirma que si $\alpha > \omega$, entonces V_α es un modelo de ZC^+.

Demostración. Sea α un ordinal límite. Por el Lema 5.1.1, V_α es transitivo (como conjunto), por lo tanto transitiva como clase. El Teorema 6.1.2 afirma entonces que V_α satisface Extensionalidad. Si usamos el Corolario 5.1.14 y tenemos en cuenta que V_α es transitivo, es fácil comprobar que V_α satisface los axiomas de Unión, Par y Potencia.

Nos encontramos en las hipótesis del Teorema 6.1.3, por lo tanto V_α satisface Especificación.

El Axioma del Conjunto Vacío se satisface porque $\emptyset \in V_\alpha$.

Para ver que V_α satisface Axioma de Elección, mostraremos que V_α satisface el Principio de Buena Ordenación.

Sea a un conjunto en V_α; este conjunto puede ser bien ordenado y sea r un buen orden para a. Tenemos que $r \subset a \times a \in V_\alpha$ y de esta manera nos hallamos en las hipótesis del Teorema 6.1.12, entonces V_α satisface el Principio de Buena Ordenación.

El Axioma de Regularidad vale en V_α por construcción.

La última afirmación es consecuencia del teorema 6.1.13. □

Teorema 6.1.15. *$\langle \mathcal{V}, \in \rangle$ es un modelo de ZFC$^+$.*

Demostración. La clase $\mathcal{V}$ es transitiva por el Teorema 5.1.12, por lo tanto satisface Extensionalidad. Además, por el Teorema 5.1.13, si x está en $\mathcal{V}$, entonces $\mathcal{P}(x)$, y $\cup x$ también; por lo tanto satisface los axiomas de Potencia y Unión. El Axioma de Regularidad es verdadero en $\mathcal{V}$ por construcción. El Axioma de Elección sería verdadero en $\mathcal{V}$ si fuera verdadero el de Sustitución, porque este último implica Especificación y con esto estamos en las hipótesis del Teorema 6.1.12. Por lo tanto, sólo resta ver que $\mathcal{V}$ satisface Sustitución.

Sea φ una fórmula con la variables $y_1, \ldots, y_n$, x, y libres. En palabras, el Axioma Esquema de Sustitución relativo a $\mathcal{V}$ afirmaría que: si a es un conjunto regular tal que para cada $x \in a$ existe un único conjunto regular y que hace $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}}$ verdadera, entonces existe un conjunto regular

$$b = \{y : \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}.$$ [1]

Veamos que la afirmación es cierta. Consideremos la fórmula $\psi(x,y)$ dada por $\varphi(x,y)^{\mathcal{V}}\ \wedge\ \mathcal{V}(y)$. Tenemos que ψ define una relación funcional. Luego, por el Axioma Esquema de Sustitución, existe un conjunto

$$b = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \psi(x,y))\} = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}}\ \wedge \mathcal{V}(y))\} =$$

$$\{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\ \wedge \mathcal{V}(y)\} = \{y :\ \exists x\ (x \in a\ \wedge\ \varphi(x,y)^{\mathcal{V}})\}^{\mathcal{V}}.$$

Por lo tanto basta ver que b es regular; pero esto es consecuencia del Teorema 5.1.5, ya que todos los elementos de b son regulares. □

Teorema 6.1.16. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva tal que $\mathcal{C}(x)$ y $\mathcal{C}(y)$ implica $\mathcal{C}(\mathcal{P}(x))$, $\mathcal{C}(\cup x)$ y $\mathcal{C}(\{x,y\})$. Entonces las fórmulas $ord(x)$ y $card(x)$ son $\mathcal{C}$-absolutas.*

---

[1] Notar que si $\varphi(x)$ es una fórmula con la variable x libre y $\mathcal{C}$ es un clase la fórmula $\{x :\ \varphi(x)\}^{\mathcal{C}}$ es equivalente a $\{x : \varphi(x)^{\mathcal{C}}\ \wedge\ \mathcal{C}(x)\}$; esto es, la clase de los x que satisfacen $\varphi(x)^{\mathcal{C}}$ y que están en la clase $\mathcal{C}$.

Demostración. Para ver que "ser ordinal" es $\mathcal{C}$-absoluta, por la Definición 2.3.5 debemos ver que $Trans(x)$, Ord_1, Ord_2 y Ord_3 son $\mathcal{C}$-absolutas. Sabemos que bajo las hipótesis del enunciado $\mathcal{C}$ satisface Extensionalidad y Especificación. Como $\mathcal{C}$ es transitiva y satisface Extensionalidad, Par y Unión, por el Teorema 6.1.10 $Trans(x)$ es $\mathcal{C}$ absoluta.

En Ord_1 y Ord_2 los cuantificadores están acotados, y como $\mathcal{C}$ es transitiva, se sigue que estas dos fórmulas son $\mathcal{C}$-absolutas.

Resta probar que Ord_3 es $\mathcal{C}$-absoluta, o sea que la fórmula

$$\forall u \ \{(u \subset a \ \wedge \ u \neq \emptyset) \ \rightarrow \ \exists z \ [z \in u \ \wedge \ \forall x \ (x \in u \ \wedge \ x \neq \ z \ \rightarrow \ z \in x)]\}$$

y su restirngida a $\mathcal{C}$,

$$\forall u \ \{\mathcal{C}(u) \ \rightarrow [(u \subset x \ \wedge \ u \neq \emptyset^{\mathcal{C}}) \ \rightarrow$$

$$\exists z \ [\mathcal{C}(z) \ \wedge \ z \in u \ \wedge \ \forall t \ (\mathcal{C}(t) \ \rightarrow \ (t \in u \ \wedge \ t \neq \ z \ \rightarrow \ z \in t))]]\},$$

son ambos verdaderos o ambos falsos cuando x está en la clase $\mathcal{C}$.

Por hipótesis, que x esté en la clase implica que $\mathcal{P}(x)$ también, por consiguiente si $u \subset x$, $u \in \mathcal{P}(x)$ y como $\mathcal{C}$ es transitiva u está en $\mathcal{C}$. Esto muestra que $\mathcal{C}(u)$ es redundante. En las demás partes de la fórmula, vemos que $\mathcal{C}(z)$ no varia la verdad de la fórmula porque $z \in u$ y u está en $\mathcal{C}$, y $\mathcal{C}(t)$ tampoco porque se toma $t \in u$. El Vacío restringido coincide con el Vacío, de acuerdo con el Teorema 6.1.10. Por lo tanto, todos los signos que se agregaron por la relativización son redundantes si suponemos que x está en la clase.

Hemos probado que $ord(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta. Ahora veremos que la fórmula $card(x)$ es $\mathcal{C}$-absoluta.

Primero veremos que si γ está en $\mathcal{C}$, $card(\gamma)$ implica $card(\gamma)^{\mathcal{C}}$. Supongamos que γ es un cardinal que está en la clase $\mathcal{C}$, entonces γ es un ordinal; por lo visto anteriormente γ es un ordinal relativo a $\mathcal{C}$. No existe una biyección de γ en cualquier ordinal menor. Como no hay ordinales relativos a $\mathcal{C}$ que no sean ordinales, tenemos que no hay biyección para los ordinales relativos a $\mathcal{C}$ menores que γ. Por lo tanto $card(\gamma)^{\mathcal{C}}$ es verdadera.

Supongamos que γ es un ordinal que no es cardinal. Entonces existe una biyección f de γ en un ordinal $\beta \in \gamma$. Como $f \subset \gamma \times \beta \subset \gamma \times \gamma$ y $\gamma \times \gamma$ está en $\mathcal{C}$, entonces f está en $\mathcal{C}$ por pertenecer a $\mathcal{P}(\gamma \times \gamma)$. Por otra parte, ser biyección es $\mathcal{C}$-absoluta por lo tanto γ tampoco es un cardinal relativo a $\mathcal{C}$. $\square$

Hemos usado el Axioma Esquema de Sustitución para probar que todo conjunto bien ordenado es similar a un ordinal (Teorema 3.2.4). El resultado siguiente muestra que ZC^+ no es suficiente para probarlo.

Teorema 6.1.17. *$\langle V_{\omega\oplus\omega}, \in\rangle$ es un modelo de ZC^+ en el que existen conjuntos bien ordenados no similares a un ordinal.*

Demostración. Como $\omega \oplus \omega$ es un ordinal límite, por el Teorema 6.1.14 sabemos que $V_{\omega\oplus\omega}$ es un modelo de ZC^+. Observemos que la relación de similaridad es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. En efecto, ser "función biyectiva" lo es, "preservar el orden" puede expresarse por una fórmula con todos sus cuantificadores acotados y la fórmula $f(x)$ (ser imagen de un x por una función) es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta. Mostraremos ahora que existe un conjunto bien ordenado que no es similar a ningún ordinal.

Si r es un buen orden para ω, entonces $r \subset \omega \times \omega$; por el Teorema 5.1.13 $\mathcal{P}(\omega\times\omega) \in V_{\omega\oplus\omega}$ por lo tanto $r \in V_{\omega\oplus\omega}$. Por otra parte, por el Teorema 6.1.12 r es un buen orden relativo a $V_{\omega\oplus\omega}$. Consideremos el buen orden para ω dado por $x \preceq y$ si x es par e y impar, o si $x \leq y$ siendo ambos pares o ambos impares.Como $\omega \oplus \omega$ es el único ordinal similar a $(\omega, \preceq)$ y la similaridad es $V_{\omega\oplus\omega}$-absoluta, resulta que para que exista un ordinal en $V_{\omega\oplus\omega}$ similar a $(\omega, \preceq)$ debería ser $\omega \oplus \omega \in V_{\omega\oplus\omega}$, lo que es imposible por el Corolario 5.1.10. $\square$

6.2. Cardinales fuertemente inaccesibles

El Teorema 6.1.14 nos da ejemplos de conjuntos que son modelos de ZC^+, en particular $V_{\omega\oplus\omega}$ nos da un modelo de ZC^+ que no satisface el Axioma de Sustitución. Por otra parte vimos que $\mathcal{V}$ es una clase que es modelo de ZFC^+. Una cuestión que se plantea naturalmente es si puede existir un *conjunto u* tal que $\langle u, \in\rangle$ sea un modelo interno de ZF.

Supongamos que tal u exista, es decir que los axiomas de ZF relativos al conjunto u sean satisfechos. Para asegurarnos de que los ordinales y cardinales sean u-absolutos, de acuerdo con el Teorema 6.1.16 pediremos que u sea transitivo y que si $x \in u$, entonces $\mathcal{P}(x) \in u$ y $\cup x \in u$, y si $x, y \in u$, entonces $\{x, y\} \in u$. Sea $\lambda = \mathrm{card}(u)$.

Observemos que para todo $x \in u$, $\mathrm{card}(x) < \lambda$. En efecto, la transitividad de u implica que $x \subseteq u$, luego $\mathrm{card}(x) \leq \lambda$, pero como también $\mathcal{P}(x) \in u$, debe ser $\mathrm{card}(x) < \lambda$. Si $f \in u$ es una función con $\mathrm{dom}(f) \in u$ e $\mathrm{img} f \subseteq u$, el Axioma de Sustitución implica que $\mathrm{img}(f) \in u$. Luego $\mathrm{card}(\cup\mathrm{img}(f)) < \lambda$.

De las observaciones anteriores resulta que el cardinal λ debería satisfacer las dos condiciones siguientes:

I_1 si γ es un cardinal y $\gamma < \lambda$, $2^\gamma < \lambda$,

I_2 si $\{\gamma_i\}_{i\in\iota}$ es una familia de cardinales indexada por un cardinal ι tal que que $\gamma_i < \lambda$ para todo $i \in \iota$ e $\iota < \lambda$, entonces $\sup_{i\in\iota} \gamma_i < \lambda$.

Observemos que ω satisface I_1 e I_2.

Definición 6.2.1. Un cardinal λ se dice **fuertemente inaccesible** si $\lambda > \omega$ y satisface las propiedades I_1 e I_2.

Nos proponemos probar que si λ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces V_λ es un modelo de ZFC^+, lo que mostrará que en cierto sentido para que existan *conjuntos* que sean universos de modelos internos de ZFC^+ es necesario que existan cardinales fuertemente inaccesibles. Pero veremos que tal existencia no puede probarse en ZFC^+.

Comenzaremos por considerar algunas consecuencias de las propiedades I_1 e I_2.

Lema 6.2.2. *Si λ satisface I_1 e I_2, entonces $\operatorname{card}(V_\lambda) = \lambda$, y para todo conjunto a, $a \in V_\lambda$ si y sólo si $a \subset V_\lambda$ y $\operatorname{card}(a) < \lambda$.*

Demostración. Como $\lambda \subset V_\lambda$, entonces $\lambda = \operatorname{card}(\lambda) \leq \operatorname{card}(V_\lambda)$.

Observemos que si $\alpha < \lambda$, entonces $\operatorname{card}(V_\alpha) < \lambda$. En efecto, supongamos que esto es falso, y sea α el primer ordinal menor que λ tal que $\operatorname{card}(V_\alpha) \geq \lambda$.

$$\operatorname{card}(V_\alpha) = \operatorname{card}(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)) \leq \sum_{\beta<\alpha} \operatorname{card}(\mathcal{P}(V_\beta)) =$$

$$\text{máx}\{\operatorname{card}(\alpha)\ ,\ \sup_{\beta<\alpha} 2^{\operatorname{card}(V_\beta)}\} < \lambda,$$

contradiciendo la elección de α.

De la definición se desprende que λ es límite. Luego, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha$, por consiguiente,

$$\operatorname{card}(V_\lambda) = \operatorname{card}(\bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha) = \sup_{\alpha\in\lambda} \operatorname{card}(V_\alpha) \leq \lambda.$$

Para demostrar la otra parte, sea $a \in V_\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha$. Entonces existe $\alpha \in \lambda$ tal que $a \in V_\alpha$, lo que implica que $\operatorname{card}(a) \leq \operatorname{card}(V_\alpha) < \lambda$. Para probar la recíproca, supongamos que $a \subset V_\lambda$ y $\mathrm{card}(a) < \lambda$. Consideremos la función f definida sobre a y dada por $f(x) = \mathrm{card}(\mathrm{rg}(x))$. Tenemos que $f(x) < \lambda$ para todo $x \in a$ y además $\mathrm{card}(a) < \lambda$, por lo tanto $\rho = \sup_{x\in a} f(x) < \lambda$. Si $x \in a$, $f(x) \leq \rho$, entonces $\mathrm{rg}(x) < 2^\rho$ y tenemos que $x \in V_{2^\rho}$. De lo anterior se deduce que $a \in \mathcal{P}(V_{2^\rho}) = V_{2^\rho \oplus 1}$, y dado que $2^\rho \oplus 1 < \lambda$, tenemos $a \in V_\lambda$. □

Lema 6.2.3. *Si λ satisface I_1 e I_2, entonces V_λ satisface el Axioma de Sustitución.*

Demostración. Supongamos que valen las hipótesis del Axioma de Sustitución relativo a V_λ; esto es, dada una fórmula $\varphi(x, y)$, para todo conjunto a en V_λ en el que $\varphi(x, y)^{V_\lambda}$ sea funcional, es decir, para todo $x \in a \cap V_\lambda = a$ existe un único $y \in V_\lambda$ tal que $\varphi(x, y)^{V_\lambda}$. Lo que debemos ver es que existe un conjunto b en V_λ al que perenezca todo y de V_λ tal que satisfaga $\varphi(x, y)^{V_\lambda}$ para algún x en a.

Por el Axioma de Sustitución existe el conjunto

$$b = \{y : \exists x \ (x \in a) \ \wedge \ (\varphi(x, y)^{V_\lambda})\}.$$

Tenemos que mostrar que b pertenece a V_λ.

Por hipótesis, si $x \in a$ y $\varphi(x, y)^{V_\lambda}$, entonces $y \in V_\lambda$; por lo tanto $b \subset V_\lambda$.

Por otra parte, podemos construir una $f : a \to b$ sobreyectiva dada por $f(x) = y$ donde y es tal que $\varphi(x, y)^{V_\lambda}$.

Lo anterior dice que $\mathrm{card}(b) \leq \mathrm{card}(a)$. Como $a \in V_\lambda$, el Lema 6.2.2 implica que $\mathrm{card}(a) < \lambda$, entonces $\mathrm{card}(b) < \lambda$. Si usamos nuevamente el resultado del Lema 6.2.2 obtenemos que $b \in V_\lambda$ y con esto que el Axioma de Sustitución relativo a V_λ es verdadero. □

Con los Teorema 6.1.14 y 6.2.3 se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 6.2.4. *Si λ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces $\langle V_\lambda, \in\rangle$ es un modelo de ZFC$^+$.*

Teorema 6.2.5. *V_ω satisface los axiomas de ZFC$^+$ menos el Axioma de Infinito. Más precisamente, satisface que no existe un conjunto inductivo en V_ω.*

Demostración. Por los teoremas anteriores lo único que nos falta probar es que V_ω satisface la inexistencia de un conjunto inductivo relativo a V_ω. En la demostración del Teorema 6.1.13 vemos que $ind(x)$ es V_α-absoluta para todo

α, por lo tanto es equivalente decir "inductivo que pertenece a V_ω" o "inductivo relativo a V_ω". Supongamos que x pertenece a V_ω y x es inductivo. Como ω es un subconjunto de x y vale el Axioma de las Partes, $\omega \in \mathcal{P}(x) \in V_\omega$, y por ser V_ω transitivo tendríamos que $\omega \in V_\omega$ que es absurdo. □

Teorema 6.2.6. *Es imposible demostrar la existencia de cardinales fuertemente inaccesibles en ZFC$^+$.*

Demostración. Supongamos que exista un cardinal fuertemente inaccesible λ en $\mathcal{U}$, el universo estándar de ZFC. Esto implica que el conjunto

$$\{\alpha \in \lambda' : \alpha \ \textit{ es cardinal fuertemente inaccesible}\}$$

es no vacío y por lo tanto tiene un primer elemento que denotaremos π. Es claro que π es el primer cardinal fuertemente inaccesible en $\mathcal{U}$.

Consideremos el conjunto V_π. Por el Teorema 6.2.4 este conjunto es un modelo de ZFC$^+$. Resta ver que no hay cardinales fuertemente inaccesibles relativos. Por el Teorema 6.1.16, todos los cardinales que pertenecen a V_π son cardinales relativos a V_π y viceversa. En V_π no hay cardinales fuertemente inaccesibles porque $\pi \notin V_\pi$ y π es el primero. Por lo tanto, si $\gamma \in \pi$, entonces alguna de las condiciones de inaccesibilidad debe fallar, o sea, al menos una de las siguientes debe cumplirse y todas ellas conducen a que el cardinal tampoco sea inaccesible relativo a V_π:

1. $\gamma \leq \omega$, indica que γ tampoco es inaccesible relativo a V_π.

2. Existe $\beta \in \gamma$ tal que $2^\beta \geq \gamma$, y como $\beta \in V_\pi$ por el Lema 6.2.2 tenemos que $2^\beta \in V_\pi$; por consiguiente γ no es un cardinal fuertemente inaccesible relativo.

3. Existe una familia $\{\beta_i\}_{i\in\iota}$ tal que $\iota < \gamma$ y para todo $i \in \iota$, $\beta_i < \gamma$, pero sin embargo $\gamma \leq \bigcup_{i\in\iota} \beta_i$. En este caso, como $\gamma \subset V_\pi$ el Axioma de Sustitución relativo a V_π implica que la familia $\{\beta_i\}_{i\in\iota} \in V_\pi$. La transitividad de V_π implica que $\bigcup_{i\in\iota} \beta_i \subset V_\pi$. Además card$(\bigcup_{i\in\iota} \beta_i) \leq \pi$, luego por el Lema 6.2.2 $\bigcup_{i\in\iota} \beta_i \in V_\pi$. Por lo tanto γ tampoco puede ser fuertemente inaccesible relativo a V_π.

Por lo tanto $\langle V_\pi, \in \rangle$ es un modelo de ZFC$^+$ en el que no existen cardinales fuertemente inaccesibles, lo que muestra que la existencia de tales cardinales no puede derivarse a partir de los axiomas de ZFC$^+$. □

6.3. El Teorema de la Reflexión

En esta Sección veremos un resultado, probado en la década de 1960 por Ricahard Montagne y Azriel Levi, que muestra como ciertas propiedades válidas en una clase de conjuntos se reflejan en una subclase, que puede ser un conjunto. Una consecuencia importante de este resultado es que los infinitos axiomas esquemas de ZFC^+ no pueden reemplazarse por un número finito de axiomas. Otras aplicaciones se verán en el capítulo siguiente.

En toda esta Sección utilizaremos la teoría ZF^+, esto es, supondremos $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Comenzaremos por un resultado preliminar.

Diremos que una lista de fórmulas $\phi_1 \dots \phi_n$ es **cerrada por subfórmulas** si toda subfórmula de cualquier fórmula de la lista figura en $\phi_1 \dots \phi_n$. Por ejemplo, cualquier cadena de formación de una fórmula es cerrada por subfórmulas.

Lema 6.3.1. Si $\phi_1 \dots \phi_n$ es una lista de fórmulas cerrada por subfórmulas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes para todo ordinal α:

(i) Para todo $1 \leq i \leq n$, ϕ_i es V_α-absoluta.

(ii) Si ϕ_i es de la forma
$$\exists y \phi_j(x, y_1, \dots, y_k), \tag{6.3}$$
entonces
$$\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k[((y_1 \in V_\alpha) \ \wedge \ (y_2 \in V_\alpha) \ \wedge \ \cdots \wedge \ (y_k \in V_\alpha)) \rightarrow$$
$$(\exists x(\phi_j(x, y_1 \dots, y_k)) \rightarrow \exists x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j(x, y_1, \dots, y_k)))].$$

Demostración. (i)$\Rightarrow$(ii). Sea ϕ_i de la forma (6.3). Fijemos $y_1, \dots, y_n$ en V_α y supongamos que $\exists\, x\phi_j(y_1, \dots, y_n)$ es verdadera. Esto significa que $\phi_i(y_1, \dots, y_n)$ es verdadera, y por (i) también debe serlo $\phi_i^{V_\alpha}(y_1, \dots, y_n)$. Por lo tanto es verdadera $\exists x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j^{V_\alpha}(x, y_1, \dots, y_n))$, que a su vez implica la verdad de $\exists x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j(x, y_1, \dots, y_n))$, lo que prueba (ii).

(ii)$\Rightarrow$(i). Veremos que se satisface (i) por inducción sobre la complejidad de ϕ_i, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Si ϕ_i es de complejidad 0, no hay nada que probar, porque si ϕ_i es una fórmula atómica, entonces $\phi_i = \phi_i^{V_\alpha}$.

Supongamos que comp $(\phi_i) > 0$ y que hemos verificado (i) para todas las fórmulas de la lista de complejidad menor que la complejidad de ϕ_i. En particular, suponemos válido (i) para todas las subfórmulas de ϕ_i.

Los casos $\phi_i = \neg\phi_j$ y $\phi_i = \phi_j \wedge \phi_k$, resultan de la hipótesis inductiva y la Definición 6.1.1 de restricción de una fórmula a una clase.

Supongamos ahora que $\phi_i = \exists x\phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ y fijemos $y_1, \ldots, y_n$ en V_α. Por la hipótesis inductiva $\phi_j(x, y_1, \ldots, y_n) \leftrightarrow \phi_j^{V_\alpha}(x, y_i, \ldots, y_n)$. Por lo tanto, $\exists\ x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j^{V_\alpha}(x, y_1, \ldots, y_n)) \leftrightarrow \exists\ x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n))$. Como por (ii), $\exists\ x(x \in V_\alpha \wedge \phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)) \leftrightarrow \exists\ x\phi_j(x, y_1, \ldots, y_n)$, resulta que ϕ_i es V_α-absoluta. □

Teorema 6.3.2 (Teorema de la Reflexión[2]). *Para toda lista de fórmulas* $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *vale la siguiente afirmación:*

$$\forall\ \alpha\ \exists\ \beta\ >\ \alpha\ (\phi_1, \ldots, \phi_n\ \textit{son}\ \ V_\beta\textit{-absolutas}),$$

donde α, β *designan ordinales.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\phi_1, \ldots, \phi_n$ es cerrada por subfórmulas.

Supongamos que

$$\phi_i(y_1, \ldots, y_n) = \exists x\psi(x, y_1, \ldots, y_n). \tag{6.4}$$

Dados $y_1, \ldots, y_n$, sea $\mu_i(y_1, \ldots, y_n)$ el primer ordinal que satisface

$$\exists x(x \in V_{\mu_i} \wedge \psi_j^{\mathcal{W}}(x, y_1, \ldots, y_n)) \tag{6.5}$$

y sea $\mu_i(y_1, \ldots, y_n) = 0$ si no existe tal ordinal. El Axioma de Sustitución garantiza que para todo ordinal ξ, $\{\mu_i(b_1, \ldots, b_n) : b_1, \ldots, b_n \in V_\xi\}$ es un conjunto de ordinales, y por lo tanto

$$F_i(\xi) = \sup\{\mu_i(b_1, \ldots, b_n) : b_1, \ldots, b_n \in V_\xi\}$$

es un ordinal.

En el caso que ϕ_i no sea de la forma (6.4), definimos $F_i(y_1, \ldots, y_n) = 0$ para todo $y_1, \ldots, y_n$.

Fijemos α y definamos

[2]Reflexión: Acción y efecto de *reflejar*.

$\beta_0 = \alpha,$
$\beta_{p+1} = \text{máx}(\beta_p \oplus 1, F_1(\beta_p), \ldots, F_n(\beta_p)).$

De esta manera hemos definido a β_p por recursión para todo $p \in \omega$. Sea, ahora, $\beta = \bigvee_{p\in\omega} \beta_p$. Como $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \ldots \beta_p < \beta_{p+1} < \ldots$, resulta que β es un ordinal límite mayor que α.

Sea ϕ_i de la forma (6.4) y supongamos que $y_1, \ldots, y_n$ representan elementos de V_β que hacen verdadero $\exists x \phi_i(y_1, \ldots, y_n)$. Entonces debe existir un ordinal $\xi < \beta$ tal que $y_1, \ldots, y_n \in V_\xi$ y se tiene que $\mu_i(y_1, \ldots, y_n) \leq F_i(\xi)$. Como $\xi < \beta$, debe existir un $p \in \omega$ tal que $\xi < \beta_p$, y esto implica que $F_i(\xi) \leq F_i(\beta_p) < \beta_{p+1} < \beta$. Luego $x \in V_{\mu_i} \subset W_\beta$.

Hemos probado así que

$$\forall y_1 \cdots \forall y_n[(y_1 \in V_\beta \wedge \cdots \wedge y_n \in V_\beta) \rightarrow$$

$$(\exists x \psi_j(x, y_1, \ldots, y_n)) \rightarrow \exists x(x \in V_\beta \wedge \psi_j(x, y_1, \ldots, y_n))]$$

y por el Lema 6.3.1 resulta que las fórmulas ϕ_i son W_β-absolutas. □

Teniendo en cuenta la Observación 6.1.5, como caso particular del teorema anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 6.3.3. *Para toda lista finita de* enunciados $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, *se tiene que el siguiente enunciado es verdadero en* ZF$^+$*:*

$$\forall \alpha \exists \beta > \alpha\, ((\varphi_1^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_n^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_n)).$$

El Axioma Esquema de Sustitución, al igual que el Axioma Esquema de Especificación, produce infinitos axiomas para ZF. Es natural preguntarse si este tipo de axioma esquema no podría reemplazarse por un número finito de enunciados. Como una aplicación del Teorema de la Reflexión vamos a ver que si ZF es consistente, entonces la respuesta a esa pregunta debe ser negativa. Comenzaremos por considerar ZF$^+$.

Corolario 6.3.4. *Sea $\phi_1, \ldots, \phi_n$ una lista de enunciados válidos en ZF$^+$. Si a partir de $\phi_1, \ldots, \phi_n$ se puediesen probar todos los axiomas de ZF$^+$ (esto es, los axiomas en la* página 43 *más el Axioma de Regularidad), entonces ZF$^+$ no sería consistente.*

Demostración. Supongamos que a partir de $\phi_1, \dots, \phi_n$ podemos probar todos los axiomas de ZF^+.

Sea β el primer ordinal tal que

$$\phi_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\beta}.$$

La existencia de tal β está garantizada por el Corolario 6.3.3. Entonces todos los axiomas de ZF^+ se cumplen en V_β. Luego todos los resultados que vimos sobre fórmulas absolutas valen interpretados en V_β. En particular, como $x \in V_\alpha$ puede escribirse:

$$On(\alpha) \wedge \exists y(y \text{ es función } \wedge \mathrm{dom}(y) = \alpha \oplus 1) \wedge$$

$$\forall \gamma(\gamma \in \alpha \oplus 1 \to (y(\gamma) = \bigcup_{\delta \in \gamma} \mathcal{P}(y(\delta)))) \wedge (x \in y(\alpha)),$$

resulta que si $\alpha \in \beta$, V_α es V_β-absoluta. Entonces ${V_\alpha}^{V_\beta} = V_\alpha \cap V_\beta = V_\alpha$.

Por el Corolario 6.3.3 interpretado en V_β tendremos que debe ser válida en V_β la siguiente proposición:

$$\exists \alpha\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

lo que significa que

$$\exists \alpha < \beta\, \phi_1^{V_\alpha} \wedge \cdots \wedge \phi_n^{V_\alpha},$$

en contradicción con la elección de β. □

Corolario 6.3.5. *Sea $\phi_1, \dots, \phi_n$ una lista de enunciados válidos en ZF. Si a partir de $\phi_1, \dots, \phi_n$ se puediesen probar todos los axiomas de ZF (esto es, los axiomas en la* página 43*), entonces ZF no sería consistente.*

Demostración. Si existiese una lista finita de enunciados $\phi_1, \dots, \phi_n$ a partir de los cuales se pudiesen probar todos los axiomas de ZF, entonces agregando a esta lista el enunciado correspondiente al Axioma de Regularidad tendríamos una lista finita de enunciados que permitirían demostrar todos los axiomas de ZF^+. Luego por el Corolario 6.3.4 ZF^+ no sería consistente. Pero vimos que ZF^+ es consistente si lo es ZF, consecuentemente también ZF sería inconsistente. □

Observación 6.3.6. Obseremos que las demostraciones de los corolarios anteriores siguen siendo válidas si a la lista de axiomas de ZF^+ y de ZF le agregamos el Axioma de Elección, por lo tanto también resulta que *si* ZFC^+ *o* ZFC *son consistentes, entonces no pueden ser axiomatizados por un número finito de enunciados.*

6.4. Ejercicios

Ejercicio 6.4.1. *Si a un conjunto no vacío, entoces la fórmula* $\exists\ z(x \in z)$ *es a-absoluta si y sólo si* $\cup\ a = a$.

Ejercicio 6.4.2. *Demuestre que en ZF*$^+$ *se cumple que la fórmula* $\exists\ x(x \in y)$ *no es* $\mathcal{C}$*-absoluta cuando* $\mathcal{C}$ *denota la clase de todos los conjuntos no vacíos, pero es* $\mathcal{C}$*-absoluta cuando* $\mathcal{C}$ *denota la clase de todos los conjuntos transitivos no vacíos.*

Ejercicio 6.4.3. *Un conjunto x se dice* ***hereditariamente finito*** *si x y todos los elementos de su clausura transitiva son finitos.*

i) *De un ejemplo de un conjunto regular finito pero no hereditariamente finito.*

ii) *Demuestre que* V_ω *es la clase de los conjuntos regulares hereditariamente finitos. Pista: Tener en cuenta el Lema 6.2.2 y que si hubiese conjuntos regulares hereditariamente finitos que no estuviesen en* V_ω*, habría uno de rango mínimo.*

El objetivo de los ejercicios siguientes es dar una versión del Teorema de la Reflexión válida en ZF. Para ello necesitamos generalizar la noción de fórmulas $\mathcal{C}$-absolutas introducidas en la Definición 6.1.4:

Definición 6.4.4. Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ clases tales que todo conjunto de la clase $\mathcal{M}$ está en la clase $\mathcal{N}$ (para abreviar, $\mathcal{M}$ "$\subseteq$" $\mathcal{N}$). Diremos que una fórmula $\varphi(x_0, \ldots, x_k)$ es $\mathcal{M},\mathcal{N}$**-absoluta** si

$$\forall x_0 \forall x_1 \cdots \forall x_k [(\mathcal{M}(x_0)\ \wedge\ \mathcal{M}(x_1)\ \wedge \cdots \wedge\ \mathcal{M}(x_k)) \rightarrow$$
$$(\varphi^{\mathcal{M}}(x_0, \ldots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\mathcal{N}}(x_0, \ldots, x_k))].$$

Ejercicio 6.4.5. *Demuestre la siguiente generalización del Lema 6.3.1:*

Sean $\mathcal{M}$ *y* $\mathcal{N}$ *clases tales* $\mathcal{M}$ *"*$\subseteq$*"* $\mathcal{N}$*. Si* $\phi_1 \ldots \phi_n$ *es una lista de fórmulas cerrada por subfórmulas, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) Para todo $1 \leq i \leq n$*,* ϕ_i *es* $\mathcal{M},\mathcal{N}$*-absoluta.*

(ii) Si ϕ_i *es de la forma* $\exists y \phi_j(x, y_1, \ldots, y_k)$*, entonces*

$$\forall y_1 \forall y_2 \cdots \forall y_k [(\mathcal{M}(y_1)\ \wedge\ \mathcal{M}(y_2)\ \wedge\ \mathcal{M}(y_k)) \rightarrow$$
$$(\exists x(\mathcal{N}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1 \ldots, y_k)) \rightarrow \exists x(\mathcal{M}(x) \wedge \phi_j^{\mathcal{N}}(x, y_1, \ldots, y_k))].$$

Ejercicio 6.4.6. *Usando los resultados del ejercicio anterior, pruebe la siguiente versión del Teorema de la Reflexión válida en ZF:*

Supongamos que $\mathcal{W}$ *es una clase, que para cada ordinal* α, W_α *es un conjunto y que se cumplen las condiciones siguientes:*

W_1 *Si* $\alpha < \beta$, *entonces* $W_\alpha \subset W_\beta$,

W_2 *Si* γ *es un ordinal límite, entonces* $W_\gamma = \bigcup_{\alpha\in\gamma} W_\alpha$,

W_3 "$\mathcal{W} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{Ord}} W_\alpha$".

Entonces, para toda lista de fórmulas $\phi_1, \ldots, \phi_n$ *vale la siguiente afirmación:*

$$\forall\ \alpha\ \exists\ \beta\ >\ \alpha\ (\phi_1, \ldots, \phi_n\ \textit{son}\ W_\beta, \mathcal{W}\textit{-absolutas}),$$

donde α, β *designan ordinales.*

Capítulo 7

Consistencia relativa del Axioma de Elección

En este Capítulo nos proponemos mostrar que a partir de un modelo de ZF$^+$ se puede construir un modelo de ZFC$^+$. Esto significa si hubiese una inconsistencia en la teoría de conjuntos ésta no se debería al Axioma de Elección. Este importante resultado fue obtenido por Kurt Gödel en 1940. El modelo que se mostrará no es el original de Gödel, formado por los *conjuntos constructibles*, sino por otro algo más simple, formado por los *conjuntos definibles por ordinales* que fue sugerido por el mismo Gödel en 1946.

7.1. Relaciones definibles por fórmulas

Dado un conjunto a, $Df(a, n)$ será el conjunto de relaciones n-arias sobre a que son definibles por medio de una fórmula ϕ de primer orden relativizada a a. Más precisamente, $Df(a, n)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de a^n de la forma

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in a^n : \phi^a(x_1, \dots, x_n)\},$$

para alguna fórmula ϕ con n variables libres.

Veamos como se puede formalizar esto en ZF, esto es, sin usar el Axioma de Elección.

Definición 7.1.1. *Sean a un conjunto, $n \in \omega$ e $i, j < n$, entonces*

(a) $Proj(a, r, n) = \{s \in a^n : \exists t \in r(t|_n = s)\}$.

(b) $Diag_{\in}(a, n, i, j) = \{s \in a^n : s(i) \in s(j)\}$.

(c) $Diag_{=}(a, n, i, j) = \{s \in a^n : s(i) = s(j)\}$.

(d) Por recursión sobre $k \in \omega$ *definimos* $Df'(k, a, n)$ *(para todo* n *simultáneamente) por:*

$$Df'(0, a, n) = \{Diag_{\in}(a, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(a, n, i, j) : i, j < n\},$$

$$Df'(k+1, a, n) = Df'(k, a, n) \cup \{a^n \setminus r : r \in Df'(k, a, n)\} \cup$$
$$\{r \cap s : r, s \in Df'(k, a, n)\} \cup \{Proj(a, r, n) : r \in Df'(k, a, n+1)\}.$$

(e) $Df(a, n) = \bigcup_{k \in \omega} Df'(k, a, n)$.

Lema 7.1.2. *Si* $r, s \in Df(a, n)$*, entonces* $a^n \setminus r \in Df(a, n)$ *y* $r \cap s \in Df(a, n)$*. Si* $r \in Df(a, n+1)$*, entonces* $Proj(a, r, n) \in Df(a, n)$*.*

Lema 7.1.3. *Sea* $\phi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ *una fórmula cuyas variables libres figuren entre* $x_0, \ldots, x_{n-1}$*. Entonces,*

$$\forall a[\{s \in a^n : \phi^a(s(o), \ldots, s(n-1))\} \in Df(a, n)]. \tag{7.1}$$

Demostración. Haremos la demostración por inducción sobre $comp(\phi)$.

Si ϕ es $x_i \in x_j$, $i, j < n$, entonces (7.1) es consecuencia del hecho que $Diag_{\in}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$. Análogamente, si ϕ es $x_i = x_j$, (7.1) vale pues $Diag_{=}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$.

Supongamos ahora que (7.1) vale para toda fórmula de grado de complejidad inferior a ϕ.

Si $\phi = \neg\psi$ ó $\phi = (\psi \wedge \eta)$, por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ψ y para η, y en consecuencia, también vale para ϕ, pues $Df(a, n)$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(a^n)$ cerrado por complementos e intersecciones.

Si $\phi = \exists y \psi$, como y no es variable libre en ϕ, se tiene que $y \notin \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$. Si y no es variable libre de ψ, entonces ϕ y ψ son equivalentes, y por la hipótesis inductiva, (7.1) vale para ϕ. Si por el contrario, y es libre en ψ, podemos renombrar y por x_n. Luego, $r = \{t \in a^{n+1} : \psi^a(t(0), \ldots, t(n))\} \in Df(a, n+1)$, y podemos afirmar que $Proj(a, r, n) \in Df(a, n)$. Pero

$$Proj(a, r, n) = \{s \in a^n : \exists\ t \in r(t|_n = s)\} =$$

$$\{s \in a^n : \exists\ z \in a\ \psi(s(0), \ldots, s(n-1), z)\} = \{s \in a^n : \phi^a(s(0), \ldots, s(n-1))\},$$

por lo que podemos concluir que (7.1) vale para ϕ. $\square$

Nos proponemos ahora probar que para todo conjunto a y $n \in \omega$, $Df(a, n)$ es un conjunto numerable. Para eso definiremos para $m \in \omega$ los conjuntos $E(m, a, n)$ del modo siguiente:

(a) Si $m = 2^i \cdot 3^j$ e $i, j < n$, entonces $E(m, a, n) = Diag_{\in}(a, n, i, j)$.

(b) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i, j < n$, entonces $E(m, a, n) = Diag_{=}(a, n, i, j)$.

(c) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$, entonces $E(m, a, n) = a^n \setminus E(i, a, n)$.

(d) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(m, a, n) = E(i, a, n) \cap E(j, a, n)$.

(e) Si $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces $E(m, a, n) = Proj(a, E(i, a, n + 1), n)$.

(f) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m, a, n) = \emptyset$.

Lema 7.1.4. *Para todo conjunto a y todo $n \in \omega$,*

$$Df(a, n) = \{E(m, a, n) : m \in \omega\}.$$

Demostración. (a) $\forall n \in \omega(E(m, a, n) \in Df(a, n))$, para todo $m \in \omega$.

Haremos la demostración por inducción sobre m.

En efecto, $E(0, a, n) = \emptyset \in Df(a, n)$, pues $Df(a, n)$ es cerrado por complementos y por intersección. Supongamos que para $k \in \omega$, $\forall n \in \omega(E(k, a, n) \in Df(a, n))$. Entonces,

(1) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j$ e $i, j < n$, entonces $E(k + 1, a, n) = Diag_{\in}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$.

(2) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ e $i, j < n$, entonces $E(m, a, n) = Diag_{=}(a, n, i, j) \in Df(a, n)$.

(3) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, entonces $E(k + 1, a, n) = E(i, a, n) \cap E(j, a, n) \in Df(a, n)$, por la hipótsesis inductiva y dado que $Df(a, n)$ es cerrado por intersecciones.

(4) Si $k + 1 = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, entonces

$$E(k + 1, a, n) = Proj(a, E(i, a, n + 1), n).$$

Como, por la hipótesis inductiva $E(i, a, n + 1) \in Df(a, n + 1)$, resulta que $Proj(a, E(i, a, n + 1), n) \in Df(a, n)$.

(5) Si m no es de la forma especificada en alguno de los incisos (a)-(e), entonces $E(m, a, n) = 0 \in Df(a, n)$.

Hemos completado así la demostración de (a).

(b) $\forall n \in \omega(Df(a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$.

Bastará probar que $\forall n \in \omega(Df'(k, a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$ para todo $k \in \omega$, lo que haremos por inducción en k . Para $k = 0$:

$$\forall n \in \omega(Df'(0, a, n) = \{Diag_{\in}(a, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(a, n, i, j) : i, j < n\} \subseteq$$
$$\{E(m, a, n) : m \in \omega\}).$$

Si $\forall n \in \omega(Df'(k, a, n) \subseteq \{E(m, a, n) : m \in \omega\})$, como $\{E(m, a, n) : m \in \omega\}$ es cerrado por complementos, intersecciones y proyecciones, también contendrá a $Df'(k + 1, a, n)$ para todo $n \in \omega$. □

Corolario 7.1.5. *$Df(a, n)$ es numerable y la función $m \mapsto E(m, a, n)$ de ω sobre $Df(a, n)$ es una enumeración.*

7.2. Conjuntos definibles por ordinales

Informalmente, un conjunto a se dice **definible por ordinales** si se lo puede definir por medio de una lista finita de ordinales. Esto es, si existe una lista finita de ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y una fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$ tal que

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a.$$

Observemos que cada ordinal es definible por ordinales. En efecto, sea $\phi(y_1, x)$ la fórmula atómica $y_1 = x$. Si α es un ordinal, vale que $\phi(\alpha, x) \leftrightarrow \alpha = x$.

Veamos como se puede definir la clase de los conjuntos definibles por ordinales en ZF$^+$, esto es,considerndo que el universo de la teoría de conjuntos es la clase $\mathcal{V}$ de los conjuntos regulares.

Comencemos por observar que a es definible por ordinales si lo es respecto a un V_β, con β suficientemente grande, más precisamente, si existe $\beta > \text{máx}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{rg}(a))$ tal que

$$\forall x \in V_\beta(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a)^{V_\beta}. \tag{7.2}$$

En efecto, si a es definible por ordinales tenemos que

$$\forall x(\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \leftrightarrow x = a),$$

para algunos ordinales $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y alguna fórmula $\phi(y_1, \ldots, y_n, x)$. Por el Teorema 6.3.2, existe $\beta > \text{máx}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \text{rg}(a))$ tal que ϕ es V_β-absoluta. Luego, (7.2) se satisface.

Por otro lado, si se cumple (7.2), entonces a es definible por ordinales en el universo V por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y β.

Estas consideraciones sugieren como expresar la definición de conjuntos definibles por ordinales en el lenguaje de primer orden de la teoría de conjuntos.

Definición 7.2.1. *Dor* es la clase de todos los conjuntos a tales que:

$$\exists \beta > \text{rg}(a) \exists n \in \omega \ \exists s \in \beta^n \ \exists \ r \in Df(V_\beta, n+1)$$

$$\forall x \in V_\beta (s\hat{\ } < x > \in r \leftrightarrow x = a),$$

donde $s\hat{\ } < x >$ denota la función $t \colon n+1 \to V_\beta$ tal que $t(i) = s(i)$, $0 \leq i \leq n-1$, $t(n) = x$.

Vamos a ver que los elementos de la clase *Dor* coinciden con los conjuntos definibles por ordinales.

Teorema 7.2.2. *Para cada fórmula* $\phi(x_o, \ldots, x_{n-1}, x)$ *se tiene que*

$$\exists \alpha_0 \ldots \exists \alpha_{n-1} [(\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a) \to Dor(a)]. \tag{7.3}$$

Demostración. Fijemos $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ y a y supongamos que

$$\forall x \phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a.$$

Por el Teorema 6.3.2 podemos fijar $\beta > \text{máx}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \text{rg}(a))$ de modo tal que ϕ sea V_β-absoluta.

Sea $r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x > \in {V_\beta}^{n+1} : \phi(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}$ y $s = < \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} > \in \beta^n$. Entonces, $\forall x \in V_\beta (s\hat{\ } < x > \in r \leftrightarrow x = a)$.

Pero por ser ϕ V_β-absoluta, resulta

$$r = \{< y_0, \ldots, y_{n-1}, x > \in {V_\beta}^{n+1} : \phi^{V_\beta}(y_0, \ldots, y_{n-1}, x)\}.$$

Luego, por el Lema 7.1.3, $r \in Df(V_\beta, n+1)$. Por lo tanto, a está en *Dor*. $\square$

El teorema anterior nos dice que todo conjunto a definible por ordinales en el sentido intuitivo, esto es, existe una fórmula ϕ con $n+1$ variables libres tal que $\forall x(\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, x) \leftrightarrow x = a)$, pertenece a Dor.

Vamos a probar la recíproca, para lo que daremos una fórmula ϕ que nos servirá para todos los conjuntos en Dor:

$$\forall a(Dor(a) \to \exists \alpha \forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = a)).$$

Esta es una especie de "forma normal". De hecho, ϕ definirá una "función" de Ord en Dor.

Los lectores que estén familiarizados con la teoría de funciones recursivas, notarán la similitud con la indexacción de las máquinas de Turing (en este caso ω debe ser sustituido por Ord) y la forma normal de Kleene.

Observemos que por la Definición 7.2.1, a cada conjunto a en la clase Dor le corresponde un número finito de ordinales: n, los n ordinales presentes en la n-upla s, β de la definición, junto con el m que caracteriza a la relación $r \in Df(V_\beta, n+1)$: $r = E(m, V_\beta, n)$ para algún $m \in \omega$.

Luego, podemos indexar los conjuntos de la clase Dor por listas finitas de ordinales, esto es, elementos de $Ord^{<\omega} =$ "$\bigcup\limits_{n\in\omega} Ord^n$".

El primer paso será ver que podemos, a su vez, indexar los elementos de $Ord^{<\omega}$ por Ord.

Si $s, t \in Ord^{<\omega}$, escribiremos $s \lhd t$ sí, y sólo si:

(i) $[\text{máx}(\text{img}(s)) < \text{máx}(\text{img}(t))] \vee$

(ii) $[(\text{máx}(\text{img}(s)) = \text{máx}(\text{img}(t))) \wedge ((\text{dom}(s) \subset \text{dom}(t)))] \vee$

(iii) $[(\text{máx}(\text{img}(s)) = \text{máx}(\text{img}(t))) \wedge (\text{dom}(s) = \text{dom}(t)) \wedge$
$(\exists k \in \text{dom}(s)((s|_k = t|_k) \wedge s(k) < t(k)))]$

Se verifica fácilmente que dados s, t, u en $Ord^{<\infty}$, $(s \neq t) \to ((s \lhd t) \vee (t \lhd s))$ y $((s \lhd t) \wedge (t \lhd u)) \to (s \lhd u)$.

Sea a un conjunto cuyos elementos están en $Ord^{<\omega}$. Veamos que $(a, \unlhd)$ es un conjunto bien ordenado, donde $s \unlhd t$ significa "$s \lhd t \vee s = t$". Es claro que $\unlhd$ es un orden sobre a. Sea $b \subseteq a$, $b \neq \emptyset$. Para probar que b tiene primer elemento, comencemos por observar que $\{\text{máx}(\text{img}(s)) : s \in b\}$ es un conjunto no vacío de ordinales, y por lo tanto tiene primer elemento γ. El conjunto $\{n \in \mathrm{dom}(s) : s \in b \wedge \text{máx}(\mathrm{img}(s)) = \gamma\}$ es un subconjunto no vacío de ω y tiene primer elemento p.

Sea $c = \{s \in b : \text{máx}(\mathrm{img}(s)) = \gamma \wedge \mathrm{dom}(s) = p\}$. Para cada $i \in p$, definamos $t(i)$ inductivamente como sigue:

(i) $t(0) = \text{mín}\{s(0) : s \in c\}$,

(ii) $t(i) = \text{mín}\{s(i) : s \in c \wedge s(j) = t(j),\ \text{para } j \in i\}$, para $0 < i \in p$.

Es claro que $t \in b$ y que $t \trianglelefteq s$ para todo $s \in b$. Por lo tanto hemos probado que $\langle a, \trianglelefteq \rangle$ es un conjunto bien ordenado.

Para cada $s \in Ord^{<\omega}$, la sección inicial $Ord_s^{<\omega} = \{t \in Ord^{<\omega} : t \triangleleft s\}$ es un conjunto. En efecto, si $\beta = \text{máx}\{\mathrm{img}(s)\}$, entonces

$$Ord_s^{<\omega} \subseteq (\beta \oplus 1)^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} (\beta \oplus 1)^n$$

que es un conjunto. Luego, para todo $s \in Ord^{<\omega}$, $Ord_s^{<\omega}$ es un conjunto bien ordenado y por lo tanto existe un único ordinal α tal que $Ord_s^{<\omega} \sim \alpha$.

La fórmula "α es un ordinal isomorfo a la sección inicial $Ord_s^{<\omega}$ " define una relación funcional $H(s) = \alpha$, "$H\colon Ord^{<\omega} \to Ord$".

Se tiene que $s \triangleleft t$ si y sólo si $H(s) < H(t)$. En efecto, si $s \triangleleft t$, entonces $Ord_s^{<\omega}$ es una sección inicial de $Ord_t^{<\omega}$. Luego $H(s)$ es isomorfo a una sección inicial de $H(t)$, y por lo tanto, $H(s) < H(t)$. Por otro lado, si $H(s) < H(t)$, no puede ser que $t \trianglelefteq s$ y por lo tanto debe ser $s \triangleleft t$.

Podemos definir la relación funcional inversa de H, J, por la fórmula $J(\alpha) = s$ sí, y sólo si, $H(s) = \alpha$, que está definida sobre la clase "imagen " $H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega}) = \{H(s) : s \text{ en } Ord^{<\omega}\}$.

En realidad H es "sobre", esto es $H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega}) = Ord$. Para verlo, observemos primero que "$H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega})$" es decreciente en Ord.

Sea $\beta < H(s)$ y sea f el isomorfismo $f\colon Ord_s^{<\omega} \to H(s)$. Por la cláusula (iii) de la Observación 3.2.2 existe $t \in Ord_s^{<\omega}$ tal que $\beta = H(t)$, lo que muestra que si α está en $H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega})$, también están todos los $\beta \in \alpha$.

Esto implica que si hubiese un γ que no está en $H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega})$, entonces debería estar $H^{\rightarrow}(Ord^{<\omega}) \subset \gamma$. Como la restrición de H a los ordinales es inyectiva, esto implicaría que hay una "función inyectiva"de los ordinales en un conjunto, lo que es imposible por el Lema 4.4.1. Luego J es una "función inyectiva" de Ord sobre $Ord^{<\omega}$.

Vamos a definir ahora una "función sobreyectiva" $K\colon Ord^{<\omega} \to Dor$.

Si s en $Ord^{<\omega}$ es de la forma $t\hat{}<\beta,n,m>$, $n,m\in\omega$, $t\in\beta^{<\omega}$, $\operatorname{dom} t=n$ y para algún (único) $a\in V_\beta$ se tiene que $(t\hat{}<x>\in E(m,V_\beta,n{+}1)\leftrightarrow x=a)$, definimos $K(s)=a$. Si s no es de la forma indicada, ponemos $K(s)=\emptyset$.

De la Definición 7.2.1 resulta que K es una "función" con dominio $Ord^{<\omega}$ e imagen contenida en Dor. Además, como $E(\_,V_\beta,n+1)\colon\omega\to Df(V_\beta,n+1)$ es sobreyectiva y $\emptyset$ está en Dor (pues todos los ordinales están), resulta que para todo conunto a en la clase Dor existe s en $Ord^{<\omega}$) tal que $a=K(s)$.

Consideremos, ahora, la composición

$$Ord \xrightarrow{J} Oord^{<\omega} \xrightarrow{K} Dor$$

Si $I=KJ$, I es una "función"de Ord sobre Dor. Si $I(\alpha)=a$, diremos que α es un **índice de** a. Todo a en Dor tiene un índice (al menos uno, por ejemplo $\emptyset$ tiene infinitos).

Sea $\psi(s,t)$ la fórmula $Ord(s)\wedge(t=I(s))$. Entonces,

$$\forall y(Dor(y)\to(\exists\alpha(Ord(\alpha)\wedge\forall x(\psi(x,\alpha)\to x=a)). \tag{7.4}$$

Esto prueba que todo conjunto en la clase Dor es definible por ordinales en el sentido informal dado al comienzo de esta Sección.

Entonces teniendo en cuenta el Teorema 7.2.2 tenemos el resultado siguiente, que muestra que hemos podido formalzar la noción de conjunto definible por ordinales en ZF$^+$:

Teorema 7.2.3. *Dor es la clase de los conjuntos definibles por ordinales.*

Nuestro próximo objetivo será utilizar los conjuntos definibles por ordinales para definir una subclase de $\mathcal{V}$ que satisfaga la relativización de los axiomas ZFC$^+$.

Lema 7.2.4. *Si v,z están en Dor, entonces*

(I) $\{v,z\}\in Dor$.

(II) $\cup v\in Dor$ y $\mathcal{P}(v)\in Dor$.

Demostración. (I) Sean $v=I(\alpha_1)$, $z=I(\alpha_2)$ y sea $\phi(y_1,y_2,x)$ la fórmula:

$$Ord(y_1)\wedge Ord(y_2)\wedge(x=\{I(y_1),I(y_2)\}).$$

Entonces, $\forall x(\phi(\alpha_1, \alpha_2, x) \leftrightarrow x = \{v, z\})$, lo que prueba que $\{v, z\} \in Dor$.
(II) Se prueba análogamente a (i), tomando como $\phi(x, y)$

$$Ord(y) \wedge (x = \cup I(y))$$

y

$$Ord(y) \wedge (x = \mathcal{P}(I(y)))$$

respectivamente. □

Como no es posible probar que Dor sea transitiva, vamos a considerar la clase de los conjuntos **hereditariamente definibles por ordinales**, que denotaremos $HDor$, formada por los conjuntos de Dor tales que su clausura transitiva está contenida en Dor:

$$HDor = \{a : Dor(a) \wedge \forall x(x \in \mathrm{Tr}(a) \to Dor(x)\}. \tag{7.5}$$

Lema 7.2.5. *"$Ord \subseteq HDor \subseteq Dor$" y $HDor$ es una clase transitiva.*

Demostración. Sea α un ordinal. Sabemos que $\alpha \in Dor$. Como $\mathrm{Tr}(\alpha) = \alpha$ y $\beta \in \alpha$ implica $\beta \in Ord \subseteq Dor$, resulta que $\mathrm{Tr}(\alpha) \subseteq Dor$. Luego, $Ord \subseteq HDor$. Es obvio que $HDor \subseteq Dor$. Veamos ahora que $HDor$ es transitiva. Sea $x \in HDor$ e $y \in x$. Como $y \in x \subseteq \mathrm{Tr}(x)$ y $\mathrm{Tr}(y) \subseteq \mathrm{Tr}(x) \subseteq Dor$, resulta que $y \in Dor$ y $\mathrm{Tr}(y) \subseteq HDor$, lo que significa que $y \in HDor$. □

Lema 7.2.6. *Para todo conjunto a, si $a \in Dor$ y $a \subseteq HDor$, entonces $a \in HDor$.*

Demostración. Resulta de observar que, para todo a, $\mathrm{Tr}(a) = a \cup \bigcup_{x \in a} \mathrm{Tr}(x)$. □

Lema 7.2.7. *Para todo α, $V_\alpha \cap HDor \in HDor$.*

Demostración. Como $V_\alpha \cap HDor \subseteq HDor$, por el lema anterior basta ver que $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. Sea $\phi(y, x)$ la fórmula

$$Ord(y) \wedge (x = V_y \cap HDor).$$

Luego, $\forall x(\phi(\alpha, x) \leftrightarrow x = V_\alpha \cap HDor)$, y por lo tanto, $V_\alpha \cap HDor \in Dor$. □

Teorema 7.2.8. *$HDor$ satisface todos los axiomas de ZFC$^+$.*

Demostración. El Axioma de Extensionalidad se cumple pues $HDor$ es una clase transitiva (Teorema 6.1.2).

Veamos que se cumple el Axioma de Especificación. Para ello debemos ver que dada una fórmula $\varphi(y, z_1, \ldots, z_k)$ se tiene que para todo $x, y, z_1, \ldots, z_k$ en $HDor$, el conjunto $c = \{y \in x : \varphi(y, z_1, \ldots, z_k)^{HDor}\}$ está en $HDor$. La transitividad de $HDor$ asegura que todos los elementos de c están en $HDor$. Luego por el Lema 7.2.6 para probar que c está en $HDor$ falta ver que c está en Dor. Sea $\phi(w_o, \ldots, w_k, x)$ la fórmula

$$Ord(w_o) \wedge \cdots \wedge Ord(w_k) \wedge (x = \{t \in I(w_0) : \varphi(t, I(w_1), \ldots, I(w_k))^{HDor}\}),$$

y sean $y = I(\alpha_0), z_1 = I(\alpha_1), \ldots, z_k = I(\alpha_k)$. Entonces

$$\phi(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, x) \leftrightarrow x = c,$$

y por el Teorema 7.2.2, $c \in HDor$.

Que el Axioma del Conjunto Vacío se satisface resulta del Lema 7.2.5.

Para ver que se cumple el Axioma de la Unión, veremos que

$$\forall a(HDor(a) \rightarrow HDor(\cup a).$$

Sea $b = \cup a$. Como por el Lema 7.2.4 b está en Dor, basta verificar que $b \subseteq HDor$. Sea $x \in b$. Existe $y \in a$ tal que $x \in y$. Como $a \in HDor$, $y \in \mathrm{Tr}(a) \subseteq HDor$, y como $HDor$ es transitiva, $x \in HDor$. Por lo tanto, $b \subseteq HDor$.

Para probar el Axioma del Conjunto Potencia basta mostrar que para todo a en $HDor$, $\mathcal{P}(a) \cap HDor \in HDor$. Sea $\alpha > \mathrm{rg}(\mathcal{P}(a)$. Entonces teniendo en cuenta el Lema 7.2.7 se tiene que $\mathcal{P}(a) \subset V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor \in HDor$, y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$\mathcal{P}(a) \cap HDor = \{x \in V_{\alpha\oplus 1} \cap HDor : x \subseteq a\} \in HDor.$$

Para probar el Axioma (Esquema) de Sustitución, sea $\varphi(x, y)$ una fórmula y a un conjunto en $HDor$ tal que se satisfaga

$$\forall x((x \in a) \rightarrow \exists! y(HDor(y) \wedge \varphi(x, y)^{HDor}.$$

Por el Axioma de Sustitución válido en $\mathcal{V}$, existe el conjunto

$$b = \{y : (HDor(y) \wedge (\exists x \in a \varphi(x, y)^{HDor})\}.$$

Debemos probar que b está en $HDor$. Sea $\alpha > \sup\{\mathrm{rg}(y)\}_{y\in b}$. Entonces $b \subset V_\alpha \cap HDor \in HDor$ y por el Axioma de Especificación relativo a $HDor$,

$$b = \{y \in V_\alpha \cap HDor : y \in b\} \in HDor.$$

Observemos que necesitamos el Axioma de Especificación relativo para probar que el Axioma de Sustitución se satisface. Por eso debimos probar primero que se satisface el Axioma de Especificación. Es claro que si pudiésemos probar directamente la validez del Axioma de Separación, no haría falta probar que se satisface el Axioma de Especificación. Por otro lado, una vez probado que se sartisface el Axioma de Separación, sabemos que también se satisface el Axioma del Par.

El Axioma del Infinito se satisface porque $\omega \in Ord \subseteq HDor$.

El Axioma de Regularidad se satisface porque $HDor \subseteq \mathcal{V}$.

Vimos entonces que la clase $HDor$ satisface los axiomas ZF$^+$.

Veamos que también se satisface el Axioma de Elección (relativo a $HDor$). Como $HDor$ es transitiva y satisface los axiomas de especificación, del par y de la unión, si a y r son conjuntos en $HDor$ y r es un buen orden sobre a, entonces por el Teorema 6.1.12 (r es un buen orden sobre a)^{HDor} es verdadero. Luego, basta probar que para todo $a \in HDor$ existe $r \in HDor$ que es un buen orden sobre a.

Sea $a = I(\alpha) \in HDor$. Como $a \subset Dor$, podemos bien ordenar los elementos de a por medio de los menores de sus índices:

$$r = \{\langle s,t\rangle \in a \times a : \exists\xi(s = I(\xi) \wedge \forall\eta \leq \xi(t \neq I(\eta))\}. \tag{7.6}$$

Es fácil verificar que r define un buen orden sobre a (ver el Ejercicio 7.3.1).

Sea

$$r(y) = \{\langle s,t\rangle \in I(y) \times I(y) : \exists\xi(s = I(\xi) \wedge \forall\eta \leq \xi(t \neq I(\eta))\}$$

y sea $\varphi(y,x)$ la fórmula $Ord(y) \wedge x = r(y)$. Si $a = I(\alpha)$, entonces

$$\varphi(\alpha, x) \leftrightarrow x = r.$$

Luego por el Teorema 7.2.2, $r \in Dor$ y como $r \subseteq a \times a \subset HDor$, por el Lema 7.2.6 resulta que r está en $HDor$. □

Corolario 7.2.9 (Gödel)**.** *Si ZF$^+$ es consistente, también lo es ZFC$^+$.*

7.3. Ejercicios

Ejercicio 7.3.1. *Probar que la relación r definida sobre a por (7.6) es un buen orden. Pista: Recordar que los elementos de a son de la forma $I(\xi)$ para algún ordinal ξ.*

El siguiente ejercicio aclarará algunos de los argumentos usados en la demostración del Teorema 7.2.8.

Ejercicio 7.3.2. *Sea $\mathcal{C}$ una clase transitiva que satisface el Axioma de Especificación y la siguiente condición:*

$$\forall x(x \subset \mathcal{C} \to \exists\, y((\mathcal{C}(y) \wedge x \subseteq y))). \tag{7.7}$$

Probar que $\mathcal{C}$ satisface los Axiomas de ZF menos el Axioma del Infinito.

Ejercicio 7.3.3. *Dar un ejemplo de una clase transitiva $\mathcal{C}$ que satisfaga el Axioma de Especificación y (7.7) pero no satisfaga el Axioma del Infinito.*

Bibliografía

[1] M. Balanzat, El número natural y sus generalizaciones, Universidad Nacional de San Luis: San Luis, 1953.

[2] A. Blass, Existence of bases implies the Axiom of Choice, Contemporary Mathematics, 31 (1984), 31–33.

[3] N. Bourbaki, Elementos de historia de las matemáticas, Alianza Universidad: Madrid, 1972 (Es traducción del francés).

[4] C. A. Di Prisco, Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Universidade Estadual de Campinas: Campinas, S. P., 1997.

[5] X. Caicedo, La Paradoja de Berry revisitada, o la indefenibilidad de la definibilidad y las limitaciones de los formalismos, http://matematicas.uniandes.edu.co/archivos/publicaciones/

[6] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon: Boston, 1966.

[7] P. R. Halmos, Naive Set Theory, Van Nostrand: Princeton, 1960. Springer: New York, 1974. (Hay traducción castellana con el nombre de "Teoría ingenua de conjuntos").

[8] T. J. Jech, The Axiom of Choice, North-Holland, Amsterdam - London, 1973.

[9] J. Kelley, Topología general, EUDEBA, Buenos Aires, 1962. (Es traducción del inglés).

[10] J. L. Krivine, Introduction to Axiomatic Set Theory, D. Reidel: Dordrecht, 1971. (Es traducción del francés).

[11] K. Kunen, Set Theory. An introduction to Independence Proofs, North-Holland: Amsterdam - New York - Oxford, 1980.

[12] E. G. H. Landau, Foundations of Analysis, Chelsea, New York, 1951. (Es traducción del alemán).

[13] L. Rieger, A contribution to Gödel's axiomatic set theory, I. Czechoslovak Mathematical Journal 7 (1957), 323–357.

[14] J. R. Shoenfield, Mathematical Logic, Addison-Wesley: Reading, Ma., 1967.

[15] W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Hafner: New York City, 1958.

[16] P. Suppes, Axiomatic Set Theory. Van Nostrand: Princeton, 1960.

[17] A. Tarski, A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific Journal of Mathematics, 5 (1955), 285–309.

Índice alfabético