ISSN en trámite

Fascículo 3

Notas de matemática

Norberto Fava
Guillermo Keilhauer

Integrales sobre la esfera S^{n-1}

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2014

Notas de matemática

Fascículo 3

ISSN en trámite

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Integrales sobre la esfera S^{n-1}

N. Fava y G. Keilhauer

Resumen

Las coordenadas esféricas y las integrales sobre la esfera juegan un papel destacado en muchas cuestiones del Análisis en los Espacios Euclídeos. Otros enfoques del mismo tema se hallarán entre los ítems de la bibliografía.

1. Coordenadas esféricas. Será útil comenzar por un estudio cuidadoso de las coordenadas esféricas en el espacio euclídeo de dimensión n. Nos referimos a la aplicación $x = T(r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ de una parte de $\mathbf{R}^n$ en sí mismo, definida por las fórmulas

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1 \\
x_2 &= r\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\
x_3 &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_3 \\
&\;\;\vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_{n-1} &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= r\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\cdots\operatorname{sen}\theta_{n-2}\operatorname{sen}\theta_{n-1}\,,
\end{aligned} \tag{1}$$

donde $r > 0$, $\;0 < \theta_i < \pi\;$ para $\;1 \leqslant i \leqslant n-2\;$ y $\;0 < \theta_{n-1} < 2\pi$.

Las restricciones sobre los argumentos son para lograr que T sea un difeomorfismo entre dos subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$, en la forma que precisamos a continuación:

El punto $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ varía en el intervalo $L = (0, \pi)^{n-2} \times (0, 2\pi)$ de $\mathbf{R}^{n-1}$, de modo que (r, θ) varía en el conjunto $P = (0, \infty) \times L$.

De las ecuaciones anteriores se sigue fácilmente que $T(P) \subset G$, donde $G = \{x : x_n \neq 0 \text{ ó } x_{n-1} < 0\}$. En efecto, si $x_n = 0$ entonces $\theta_{n-1} = \pi$ y por consiguiente $x_{n-1} < 0$.

Por inducción sobre n se probarán las siguientes afirmaciones:

1. Si $x = T(r, \theta)$, entonces $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$;
2. T aplica biyectivamente P sobre G;

3. El jacobiano de T es $J = r^{n-1} \operatorname{sen}^{n-2} \theta_1 \operatorname{sen}^{n-3} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{n-2}$.

Antes de probarlas hagamos dos observaciones: (i) el complemento de G consta de los puntos x de $\mathbf{R}^n$ que satisfacen las relaciones $x_n = 0,\ x_{n-1} \geqslant 0$; (ii) el jacobiano de T, que escribimos abreviadamente en la forma

$$J = r^{n-1} g(\theta), \tag{2}$$

donde $g(\theta) = \operatorname{sen}^{n-2} \theta_1 \operatorname{sen}^{n-3} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{n-2}$, es positivo en P. Luego, la aplicación inversa T^{-1} es de clase C^∞ en G.

Para probar las afirmaciones anteriores expresamos T en la forma $T = T_2 \circ T_1$, donde T_2 y T_1 se definen por medio de los siguientes sistemas de ecuaciones:

T_2	T_1
$x_1 = x_1$	$x_1 = r \cos \theta_1$
$x_2 = r_1 \cos \theta_2$	$r_1 = r \operatorname{sen} \theta_1$
$x_3 = r_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_3$	$\theta_2 = \theta_2$
$x_4 = r_1 \operatorname{sen} \theta_2 \operatorname{sen} \theta_3 \cos \theta_4$	$\theta_3 = \theta_3$
$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$	$\vdots \quad \vdots$
$x_{n-1} = r_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$	$\theta_{n-2} = \theta_{n-2}$
$x_n = r_1 \operatorname{sen} \theta_2 \cdots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1}$	$\theta_{n-1} = \theta_{n-1}$

Notemos que T_2 actúa como la identidad en la primera coordenada y transforma las restantes según unas ecuaciones análogas a las de T aunque en el espacio de dimensión $n-1$; en tanto que T_1 transforma las dos primeras coordenadas según las ecuaciones polares del plano y actúa como la identidad en las restantes.

Suponiendo $n \geqslant 3$ y denotando por P' el conjunto análogo de P en el espacio $\mathbf{R}^{n-1}$, tendremos:

$$P \xrightarrow{T_1} \mathbf{R} \times P' \xrightarrow{T_2} G.$$

Supongamos ahora que las tres afirmaciones son verdaderas en el espacio euclídeo de dimensión $n-1$. Entonces tendremos:

- $r^2 = x_1^2 + r_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

- T es biyectiva porque lo son T_1 y T_2. Es claro que $0 < \theta_1 < \pi$ por ser $r_1 > 0$.

- Denotando por J_i el jacobiano de T_i $(i = 1, 2)$, tendremos:

$$J_1 = \frac{\partial(x_1, r_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})}{\partial(r, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})} = \frac{\partial(x_1, r_1)}{\partial(r, \theta_1)} = r;$$

  y en virtud de la hipótesis inductiva,

$$J_2 = \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{\partial(x_1, r_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})} = \frac{\partial(x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)}{\partial(r_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-1})}$$

$$= r_1^{n-2} \operatorname{sen}^{n-3} \theta_2 \operatorname{sen}^{n-4} \theta_3 \ \cdots \ \operatorname{sen} \theta_{n-2}.$$

La demostración concluye teniendo en cuenta que $J = J_2 J_1$ y reemplazando r_1 por su valor $r \operatorname{sen} \theta_1$.

2. Elemento de área de una hipersuperficie. Una hipersuperficie H se define localmente por medio de una aplicación de clase C^∞

$$\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

donde U es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^{n-1}$. Escribimos $x = \varphi(u)$ y representamos los vectores de $\mathbf{R}^n$ en forma de matriz columna:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(u) \\ \vdots \\ \varphi_n(u) \end{pmatrix}.$$

Suponemos que la derivada $\varphi'(u)$ tiene rango $n - 1$ en cada punto de U. Bajo esta hipótesis, decimos que φ es una *inmersión* y el par (U, φ) se llama *carta local* o *sistema local de coordenadas de H.*

Los vectores

$$\mathbf{v}_k(u) = \frac{\partial x}{\partial u_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

son linealmente independientes y generan el subespacio tangente H_x en el punto $x = \varphi(u)$ de H.

Denotando por $N(u)$ un vector unitario en el complemento ortogonal de H_x, el *elemento de área* de H se define por medio de la fórmula

$$d\sigma = g(u)\, du, \tag{3}$$

donde:

$$g(u) = |\det(N(u), \mathbf{v}_1(u), \dots, \mathbf{v}_{n-1}(u))|. \tag{4}$$

La justificación heurística reside en el hecho de que $g(u)$ representa el volumen del paralelepípedo engendrado por $N(u)$ y los vectores tangentes $\mathbf{v}_1(u)\ \dots\ , \mathbf{v}_{n-1}(u)$ que generan su base. Dicho volumen es igual al área de la base debido a que el vector $N(u)$ es ortogonal al subespacio tangente y tiene norma 1. La justificación se refuerza con la ecuación

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) = \sum_{k=1}^{n-1} h_k \mathbf{v}_k(u) + o(|h|),$$

en la que suponemos $0 \leqslant h_k \leqslant \delta_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Esa ecuación da idea de cómo se transforma, aproximadamente, el intervalo de $\mathbf{R}^{n-1}$ de lados $[u_k, u_k + \delta_k]$.

La integral de una función $f(x)$ sobre H se define por medio de la fórmula

$$\int_H f\, d\sigma = \int_U f(\varphi(u))\, g(u)\, du.$$

Otra forma útil de expresar la función g es la siguiente:

$$g(u) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n-1} J_k^2(u)}, \tag{5}$$

donde

$$J_k(u) = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \hat{\varphi}_k, \dots, \varphi_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})}$$

y el símbolo $\hat{\varphi}_k$ indica la supresión de φ_k.

Para demostrar (5) basta estudiar la forma lineal

$$f_u(x) = \det(x, \mathbf{v}_1(u), \dots, \mathbf{v}_{n-1}(u)),$$

cuyo núcleo es el subespacio tangente $H_{\varphi(u)}$. Denotando por e_k los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^n$, tendremos:

$$f_u(x) = f_u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_u(e_k) = \langle x, \omega(u)\rangle,$$

donde $\omega(u)$ es el vector de componentes $f_u(e_k) = (-1)^{k-1}J_k(u),\ 1 \leqslant k \leqslant n$. Puesto que $\omega(u)$ es ortogonal a cada uno de los vectores $\mathbf{v}_k(u)$ existe un escalar $\lambda = \lambda(u)$ tal que $\omega(u) = \lambda N(u))$ y por consiguiente,

$$g(u) = |f_u(N(u))| = |\langle N(u), \lambda N(u)\rangle| = |\lambda| = |\omega(u)|,$$

lo que demuestra (5).

En general no basta una sola carta local para describir globalmente una hipersuperficie. Un estudio más general del tema requiere los conceptos de variedad diferenciable y partición de la unidad.

Con ayuda de las expresiones anteriores se demuestra que el área tiene una significación geométrica intrínseca; es decir, que es invariante tanto bajo cambio de coordenadas locales como bajo tranformaciones ortogonales del espacio. Ahora estamos mejor preparados para estudiar el caso particular de la esfera unitaria.

3. Elemento de área de la esfera unitaria $\mathbf{S^{n-1}}$. La aplicación

$$x' = T(1, \theta) \qquad (\theta \in L),$$

donde T es la transformación del primer párrafo y θ varía en el intervalo L, abarca la esfera unitaria S^{n-1} con excepción de un “arco de meridiano” —conjunto de área nula, intersección de la esfera con un semi-hiperplano.

Conviene escribir T en la forma $x = rx'$. Los vectores:

$$\mathbf{v}_i(\theta) = \frac{\partial x'}{\partial \theta_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

que son linealmente independientes por lo que se verá enseguida, generan el subespacio tangente en el punto x'. Por otro lado, x' es un vector unitario ortogonal a dicho subespacio. En efecto, por derivación con respecto a θ_i en la ecuación $\langle x', x'\rangle = 1$, se obtiene:

$$\langle x', \frac{\partial x'}{\partial \theta_i}\rangle = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

El jacobiano de la transformación T, que es positivo y hemos escrito en la forma $r^{n-1}g(\theta)$, puede expresarse también del modo siguiente:

$$J = \det\left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial x}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial \theta_{n-1}}\right) = \det\left(x', r\frac{\partial x'}{\partial \theta_1}, r\frac{\partial x'}{\partial \theta_2}, \ldots, r\frac{\partial x'}{\partial \theta_{n-1}}\right)$$

$$= r^{n-1} \det\left(x', \frac{\partial x'}{\partial \theta_1}, \frac{\partial x'}{\partial \theta_2}, \ldots, \frac{\partial x'}{\partial \theta_{n-1}}\right),$$

lo que demuestra que los vectores $\mathbf{v}_i(\theta)$ son linealmente independientes. El último determinante es la función $g(\theta)$ de la fórmula (2). Luego, el elemento de área de la superficie S^{n-1} puede expresarse por medio de la fórmula

$$dx' = g(\theta)\, d\theta = \operatorname{sen}^{n-2}\theta_1 \operatorname{sen}^{n-3}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1 \cdots d\theta_{n-1},$$

y la fórmula del cambio de variables para coordenadas esféricas puede escribirse del modo siguiente:

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty dr\, r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(rx')\, dx', \tag{6}$$

fórmula que es válida para cualquier función f medible no negativa.

4. Invariancia bajo rotaciones. En el caso de la esfera existe un camino directo para probar que el área de cada subconjunto de la misma es invariante bajo rotaciones.

Consideremos un conjunto boreliano $M \subset L$ y sea $E = T(1, M)$ la imagen de M en la esfera. Denotemos por ω_E el sector correspondiente de la bola unitaria, es decir, el conjunto

$$\omega_E = \{rx' :\ \theta \in M,\ 0 < r \leqslant 1\}.$$

Por la fórmula del cambio de variables, la medida o volumen de dicho sector es

$$|\,\omega_E| = \int_{\omega_E} dx = \int_{(0,1)\times M} r^{n-1} g(\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^1 dr\, r^{n-1} \int_M g(\theta)\, d\theta = \frac{1}{n} A(E).$$

Hemos probado que el área de un conjunto E de la esfera se relaciona con el volumen del sector correspondiente por medio de la fórmula

$$A(E) = n|\,\omega_E|,$$

cuyo segundo miembro es invariante bajo rotaciones.

En lo que sigue haremos uso de la fórmula

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\, dt = 2 \int_0^\infty r^{2p-1} e^{-r^2}\, dr.$$

Si en (6) se pone $f(x) = e^{-|x|^2} = e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_n^2}$ y se aplican el teorema de Fubini y la fórmula anterior, se obtiene el área de la superficie esférica unitaria:

$$A(S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

5. Integral de un polinomio sobre la esfera. Para calcular una integral de la forma

$$\int_{S^{n-1}} P(x)\,dx',$$

donde P es un polinomio, basta considerar el caso de un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$. Suponemos, pues, que los α_j son enteros no negativos.

Poniendo $\beta_j = \frac{\alpha_j+1}{2}$, dejaremos como importante ejercicio demostrar la fórmula:

$$\int_{S^{n-1}} x^\alpha\,dx' = \begin{cases} 0 & \text{si algún } \alpha_j \text{ es impar} \\ \frac{2\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)\cdots\Gamma(\beta_n)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)} & \text{si todos los } \alpha_j \text{ son pares} \end{cases}$$

Problemas

1. Exprese la medida (o volumen) de la bola unitaria $B = \{x : |x| \leqslant 1\}$.

2. Pruebe que los vectores $\mathbf{v}_i(\theta)$ del párrafo 3 son mutuamente ortogonales.

3. La función $f(x)$ se llama *radial* si existe $f_0 : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \to \mathbf{R}$ tal que

   $f(x) = f_0(|x|)$. Probar que si f es radial, entonces

   $$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,dx = A(S^{n-1})\int_0^\infty r^{n-1} f_0(r)\,dr$$

4. Exprese en términos de la función gamma la siguiente integral relacionada con el núcleo de Poisson en $\mathbf{R}^n$:

   $$\int_{\mathbf{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

5. Pruebe que si A es un subconjunto boreliano de $\mathbf{R}^n$ con la propiedad de que para cualquier vector $\mathbf{v}$ de norma 1, el conjunto $A_{\mathbf{v}} = \{t \in \mathbf{R} : t\mathbf{v} \in A\}$ es de medida nula, entonces A es de medida nula.

6. Pruebe que si M es un subconjunto convexo de $\mathbf{R}^n$, la frontera de M es de medida nula y M es medible.

7. Siendo A una matriz simétrica positiva definida, muestre que el volumen del elipsoide $E = \{x : \langle Ax, x\rangle \leqslant 1\}$ está dado por la fórmula

   $$|E| = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\det A}}$$

8. Para cada permutación π de los primeros n enteros positivos, pongamos $\pi x = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$, $\phi_\pi(\theta) = \pi T(1, \theta)$ $(\theta \in L)$. Muestre que las imágenes $\phi_\pi(L)$ cubren toda la esfera S^{n-1} y que para dos permutaciones cualesquiera, la aplicación $\phi_\sigma^{-1} \circ \phi_\pi$ de L en sí mismo es de clase C^∞, lo que da a la esfera una estructura de variedad compacta orientable de clase C^∞.

Bibliografía

- J.A. Baker *Integration over Spheres and the Divergence Theorem for Balls*, Amer. Math. Monthly 104, Number 1 (1997), 36-47.
- L.E. Blumenson, *A Derivation of n-dimensional Spherical Coordinates*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 63-66.
- N.A. Fava, G. Keilhauer, A. Larotonda, *Surface Integrals, Spherical Coordinates and the Area Element of* S^{n-1}, Revista de la U.M.A. 30 (1981-82), 77-84.
- G.B. Folland, *How to Integrate a Polynomial Over a Sphere*, Amer. Math. Monthly 108 (2001) 446-448.
- E.M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, 1971.