ISSN en trámite

Fascículo 4

Notas de matemática

Eduardo Dubuc

Un poco de álgebra (multi) lineal elemental

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2014

Notas de matemática

Fascículo 4

ISSN en trámite

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

UN POCO DE ALGEBRA (MULTI) LINEAL ELEMENTAL

Este texto es un desarrollo esquemático pensado para ser complementado en clase. Característicamente se nota la falta de ejemplos y comentarios clarificadores.

Se desarrolla ***explícitamente*** *la relación entre el tratamiento moderno del* ***álgebra tensorial*** *y el tratamiento clásico (con manejo de índices y leyes de transformación) de los* ***entes llamados tensores.***

Eduardo J. Dubuc

Tomemos tres espacios vectoriales V, W y H sobre un cuerpo K (puede imaginarse - si se quiere - que K es un anillo conmutativo con unidad, o, que K son los números reales, según preferencias).

§1. Definición.

Una aplicación $V \times W \xrightarrow{\varphi} H$ es bilineal si:

i) $\varphi(v+u,w) = \varphi(v,w) + \varphi(u,w)$
   $\varphi(v,w+t) = \varphi(v,w) + \varphi(v,t)$

ii) $\varphi(\lambda v,w) = \lambda\,\varphi(v,w)$
   $\varphi(v,\lambda w) = \lambda\,\varphi(v,w)$

Equivalentemente $\varphi(\sum_i \lambda_i v_i, \sum_j \mu_j w_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \varphi(v_i,w_j)$.

<u>Nota</u>. Muchas veces omitiremos escribir cosas como $v \in V$, $t \in W$, $\forall u \in V$, $\lambda \in K$, $\mu_i \in K$, $i \in \mathbf{N}$, etc. El lector deberá suplir los cuantificadores, pertenencias, y *toda otra* especificación que falte, mediante el uso del sentido común.

§2. Proposición.

Si $E = \{e_1 e_2 \dots e_n\}$ y $F = \{f_1 f_2 \dots f_k\}$ son bases de V y W, φ queda caracterizada por la matriz $\varphi(e_i, f_j)$ de nk elementos de H.

§3. Definición.

Fijados V, W, una ***aplicación bilineal universal*** se caracteriza por la si-

* Impresión subvencionada por la Fundación Ernesto Paenza

guiente propiedad:

i) $V \times W \xrightarrow{\theta} C$ es bilineal.

ii) Para toda otra $V \times W \xrightarrow{\psi} H$ existe una única aplicación lineal $C \xrightarrow{\overline{\psi}} H$ tal

que $\overline{\psi}\theta = \psi$. Esta ecuación se indica diciendo que el diagrama $\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\psi"'] & C \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ & H \end{tikzcd}$ conmuta.

Ser única significa que vale la siguiente implicación:

(1) $$C \overset{\varphi}{\underset{\varphi'}{\rightrightarrows}} H \quad \text{lineales,} \quad \varphi\theta = \varphi'\theta \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \varphi'$$

<u>Afirmación</u>. Todo otro par $\eta, B : V \times W \xrightarrow{\eta} B$ que satisfaga i), ii) es isomorfo al par θ, C mediante un único isomorfismo

$$\ell : C \approx B \qquad \text{tal que} \qquad \begin{tikzcd} & C \arrow[d, "\ell"] \\ V \times W \arrow[ur, "\theta"] \arrow[dr, "\eta"'] & \\ & B \end{tikzcd} \qquad \ell\theta = \eta\,.$$

Esto se ve así: Por ii) se tienen $C \xrightarrow{\ell} B$ y $B \xrightarrow{\ell'} C$ tales que $\ell\theta = \eta$ y $\ell'\eta = \theta$. Pero entonces $\ell'\ell\theta = \theta$ y $\ell\ell'\eta = \eta$. Como se pueden tachar θ y η debido a la implicación (1) arriba, se tiene $\ell'\ell = \mathrm{id}$ y $\ell\ell' = \mathrm{id}$, lo que termina la demostración.

§4. **Notación** (Producto tensorial).

La propiedad i), ii) caracteriza entonces (salvo isomorfismo único) al espacio C y la aplicación bilineal θ. Se adopta la siguiente notación:

$$C = V \otimes W \quad , \qquad \theta = \otimes \quad , \qquad V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W \quad , \qquad \otimes(v, w) = v \otimes w\,.$$

Se tiene:

$$\forall\, V \times W \xrightarrow{\psi} H \text{ bilineal, } \exists!\, V \otimes W \xrightarrow{\overline{\psi}} H \text{ lineal tal que } \overline{\psi}(v \otimes w) = \psi(v, w).$$

(! indica unicidad). El espacio $V \otimes W$ se llama *"producto tensorial"* de V con W.

Ejercicio. El producto $K \times V \longrightarrow V$ induce un isomorfismo $K \otimes V \approx V$.

§5. **Proposición** (Producto tensorial de aplicaciones lineales).

Sean $V \times W \xrightarrow{\theta} C$ la (o 'una' si se prefiere) aplicación bilineal universal, y $V \xrightarrow{\varphi} V$, $W \xrightarrow{\psi} W$ un par de aplicaciones lineales cualesquiera. Puesto que la composición

$$\theta(\varphi \times \psi) : V \times W \xrightarrow{\varphi \times \psi} V \times W \xrightarrow{\theta} C$$

es bilineal [donde $\varphi \times \psi$ indica la aplicación definida por la fórmula $(\varphi \times \psi)(v, w) =_{\mathrm{def}} (\varphi(v), \psi(w))$], se sigue que existe una única aplicación lineal $C \xrightarrow{\delta} C$ tal que:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\varphi \times \psi"'] & C \arrow[d, "\delta"] \\ V \times W \arrow[r, "\theta"] & C \end{tikzcd} \qquad \text{conmuta} \quad : \quad \delta\theta = \theta(\varphi \times \psi)\,.$$

Con la notación §4 se tiene entonces $\delta : V \otimes W \longrightarrow V \otimes W$. Se denota $\delta = \varphi \otimes \psi$ y resulta entonces la fórmula:

(a) $$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w)\,.$$

§6. **Sumas formales** (estrictamente hablando, combinaciones lineales formales).

Si $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ es un conjunto (de "símbolos"), se denota $L(S)$ al conjunto de sumas formales $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i$.

$L(S)$ es un espacio vectorial mediante las operaciones:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i S_i\Big) =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) S_i$$

$$\lambda\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i\Big) =_{\mathrm{def}} \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i) S_i$$

Se tiene una aplicación de conjuntos $S \longrightarrow L(S)$ que manda S_i a la suma formal "$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j S_j$" donde $\lambda_j = 0$ si $j \neq i$ y $\lambda_j = 1$ si $j = i$. Es razonable escribir esta suma simplemente "S_i", denotando luego a la aplicación $S \longrightarrow L(S)$, $S_i \longmapsto S_i$ con la letra invisible (o cualquier otra letra invisible).

$L(S)$ tiene dimensión n y una base (canónica) formada por los símbolos - ya promovidos a vectores - $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Es decir, los S_i son libres y generan $L(S)$.

La correspondencia: $(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_i) \sim (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ establece un isomorfismo (canónico) entre $L(S)$ y K^n.

Cuando K es un anillo cualquiera, suele decirse que $L(S)$ es el módulo libre en los S_i.

§7. **Afirmación.**

Sea $E = \{e_1 e_2 \ldots e_n\}$ una base de V, si se consideran los elementos de E como símbolos, la correspondencia:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)}_{\text{suma formal}} \sim \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i e_i\right)}_{\text{suma en } V}$$

establece un isomorfismo entre $L(E)$ y V (que obviamente "deja quietos" los e_i).

§8. **Proposición** (construcción de $V \otimes W$ mediante bases).

Sean $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ y $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ bases de V y de W respectivamente. Sea S el conjunto de nk símbolos $S = \{e_i \otimes f_j\}$. Escribimos $S = E \times F$. Se tiene entonces que $V \otimes W = L(E \times F)$ munido de la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} V \times W &\xrightarrow{\otimes} L(E \times F) \\ (v, w) &\longmapsto \sum_{ij} (\lambda_i \mu_j)(e_i \otimes f_j) \end{aligned}$$

donde $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ y $w = \sum_{j=1}^{k} \mu_j f_j$ son las expresiones de v, w en las respectivas bases.

§9. **Comentario** (a guisa de demostración).

De acuerdo con la proposición §2, la aplicación bilineal $\otimes$ está caracterizada por los elementos (vectores) $e_i \otimes f_j$, que son *libres* y *generan* $L(E \times F)$. Este hecho es lo que esencialmente significa la propiedad ii) en definición §3. Los elementos t de $L(E \times F)$ son expresiones de la forma $t = \sum_{ij} t_{ij}(e_i \otimes f_j)$. Dada una aplicación bilineal $V \times W \xrightarrow{\psi} H$, se define $L(E \times F) \xrightarrow{\overline{\psi}} H$ así: $\overline{\psi}(t) =_{\text{def}} \sum_{ij} t_{ij}\psi(e_i, f_j)$.

El chequeo que todo anda bien de acuerdo a la definición §3 es una actividad de aquellas que - si bien necesarias - más vale hacerlas en privado que exhibirlas en público por escrito.

§10. **Observaciones.**

Se sigue (de §8 y de §6) que los vectores $\{e_i \otimes f_j\}$ forman una base de $V \otimes W$ (luego, en particular, este espacio tiene dimensión nk). De Notación §4 se tiene entonces:

$$v \otimes w = \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j=1}^{k} \mu_i f_i\Big) = \sum_{ij}^{nk} (\lambda_i \mu_i)(e_i \otimes f_j),$$

que no es otra cosa que la expresión de la bilinealidad en la definición §1. Vemos además (de §7) que se tiene $L(E) \otimes L(F) \approx L(E \times F)$.

§11. **Definición** (Matriz de una transformación lineal y cambios de base).

Consideremos V y una base $E = \{e_1 e_2 \dots e_n\}$ de V. Dada una transformación lineal $V \xrightarrow{\varphi} V$, las expresiones de los transformados de los vectores de la base determinan una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times n$. Se tiene, por definición:

(1) $$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i \qquad j = 1, 2, \dots, n\,.$$

Así, las coordenadas del vector $\varphi(e_j)$ forman la *j-ésima columna* de la matriz de φ, denotada aquí con la letra A.

Si $v \in V$, será $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Denotamos $\approx_E$ el isomorfismo entre V y K^n definido por la correspondencia

$$v \sim_E X: \qquad V \ni v = \sum x_i e_i \quad \sim_E \quad X = (x_1 x_2 \dots x_n) \in K^n\,,$$

Se tiene entonces que la matriz A de φ está caracterizada por la conmutatividad del siguiente diagrama:

(2) $$\begin{array}{ccccc} v & V & \xrightarrow{\approx_E} & K^n & X \\ \updownarrow & \downarrow \varphi & & \downarrow A & \updownarrow \\ \varphi(v) & V & \xrightarrow{\approx_E} & K^n & AX \end{array}\,, \qquad A \approx_E \;=\; \approx_E \varphi\,,$$

(donde AX es la multiplicación matricial con X escrito en forma vertical). Es decir:

(2) $$\text{Si } \; v \sim X \; \text{ y } \; \varphi(v) \sim X', \; \text{ entonces } \; X' = AX,$$

que es la expresión de los coordenados de $\varphi(v)$ en términos de las coordenadas de v. Por definición de la multiplicación matricial se tiene:

(3) $$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

que es la ley por la cual cambian las coordenadas de un vector.

Notar que (2) dice exactamente lo mismo que (1). Vemos así, por medio de (2), que las ecuaciones (1) son equivalentes a las ecuaciones (3).

En el caso en que φ es inversible, los vectores $h_i = \varphi(e_i)$ forman una base H, y recíprocamente, dada cualquier base H, se tiene una única φ inversible tal que $h_i = \varphi(e_i)$. Supongamos $u \in V$, $u \sim_H X$. Poniendo $u = \varphi(v)$ en las consideraciones anteriores, será $u \sim_E X'$. Luego tenemos:

Las ecuaciones (3) *expresan las coordenadas de un vector en base* E *en términos de sus coordenadas en base* H .

Notar que la misma matriz *transpuesta* expresa, en las ecuaciones (1), a la base H en términos de la base E.

§**12. Proposición** (Matriz del producto tensorial de transformaciones lineales).

Nos encontramos en la situación de §**5**, §**8** y §**11.**

V con base $E = \{e_i\}$. $V \xrightarrow{\varphi} V$ con matrix $A = (a_{ij})$.

W con base $F = \{f_\ell\}$. $W \xrightarrow{\psi} W$ con matriz $B = (b_{\ell s})$.

$V \otimes W$ con base $E \times F = \{e_i \otimes f_\ell\}$. $V \otimes W \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} V \times W$.

$\varphi \otimes \psi$ tendrá una matriz (de $nk \times nk$) $C = (c_{(i\ell)(js)})$ caracterizada por las correspondientes ecuaciones (1)

$$(1) \qquad \varphi \otimes \psi(e_j \otimes f_s) = \sum_{i\ell}^{nk} c_{(i\ell)(js)}(e_i \otimes f_\ell)$$

Se trata de encontrar a C en términos de A y de B.

Se tiene $\varphi(e_j) = \sum_i^n a_{ij}e_i$, $\psi(f_s) = \sum_\ell^k b_{\ell s} f_\ell$. Luego, por bilinealidad de $\otimes$ y la fórmula (a) de §**5** hacemos:

$$\varphi \otimes \psi(e_j \otimes f_s) = \varphi(e_j) \otimes \psi(f_s) = \sum_{i\ell}^{nk} a_{ij}b_{\ell s}(e_i \otimes f_\ell) .$$

Por lo tanto tenemos

$$c_{(i\ell)(js)} = a_{ij}b_{\ell s} .$$

Si $t = \sum_{i\ell} t_{i\ell}(e_i \otimes f_\ell)$ es un elemento de $V \otimes W$ (ver §**9**), sus coordenadas cambiarán (luego de aplicar la transformación $\varphi \otimes \psi$) de acuerdo con la ley (3) en definición §**11.** Es decir, si $(\varphi \otimes \psi)(t) = \sum_{i\ell} t'_{i\ell}(e_i \otimes f_\ell)$, se tiene:

$$t'_{i\ell} = \sum_{js}^{nk} a_{ij} b_{\ell s} t_{js} \,, \tag{3}$$

Supongamos ahora que se tienen otras dos bases $H \subset V$, $G \subset W$ y sean φ, ψ tales que $\varphi(E) = H$, $\psi(F) = G$. De la fórmula (a) en §**5** se sigue que $(\varphi \otimes \psi)(E \times F) = H \times G$. Luego, el resultado al final de §**11** dice en este caso:

Las ecuaciones (3) *expresan las coordenadas de un elemento de* $V \otimes W$ *en la base* $E \times F$ *en términos de sus coordenadas en la base* $H \times G$.

§**13. Definición** (tensores contravariantes).

Tomemos un espacio V y pongamos $W = V$, $F = E$, $k = n$, en §**8**, §**9**, §**10**, §**11** y §**12**. Un elemento $v \in V$ determina en cada base E de V un n-tupla de números, $v \sim_E (x_1 x_2 \ldots x_n)$, $v = \sum_i x_i e_i$. Si denotamos $Bases(V)$ al conjunto de todas las bases de V tenemos la siguiente definición:

<u>Un tensor (contravariante) de orden 1</u> (o vector) es una función $X : Bases(V) \longrightarrow K^n$, $X(E) = (x_1 x_2 \ldots x_n)$ tal que se tiene un elemento $v \in V$ que la determina por medio de la correspondencia $v \sim_E X(E)$.

Se busca caracterizar cuando una función X es un tensor. Está claro que de §**11** se sigue inmediatamente:

Una función $X : Bases(V) \longrightarrow K^n$ es un tensor (contravariante) si y sólo si para todo par de bases E, H, si $X(E) = (x'_1 x'_2 \ldots x'_n)$ y $X(H) = (x_1 x_2 \ldots x_n)$, los x'_i se expresan en términos de los x_i por medio de las fórmulas (3) de §**11** (donde $\varphi(E) = H$) (piénselo el lector despacio y con buena letra).

No hay peligro en identificar al elemento v con el tensor X. Los escalares x_i se llaman *"las componentes del tensor"*.

<u>Un tensor (contravariante) de orden 2</u> es una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{n \times n}$, $t(E) = (t_{ij})$ tal que se tiene un elemento (que denotamos también t) $t \in V \otimes V$ que la determina por medio de: $t \sim_E t(E)$, $t = \sum_{ij} t_{ij}(e_i \otimes e_j)$ (ver §**9**). Es decir, $t(E)$ son las coordenadas de t en la base $E \times E$. Se sigue inmediatamente de §**12** la caracterización:

Una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{n \times n}$ es un tensor (contravariante) si y sólo si para todo par de bases E, H, si $t(E) = (t'_{ij})$ y $t(H) = (t_{ij})$, los t'_{ij} se expresan en términos de los t_{ij} por medio de las fórmulas (3) de §**12** (donde $\varphi(E) = H$)) (idem que para los tensores de orden 1, puede el lector - si quiere - ir a ver el texto después de (3) en §**20**).

Como antes, no hay peligro en identificar el tensor t con el elemento $t \in V \otimes V$. Los escalares t_{ij} se llaman *"las componentes del tensor"*.

Convención de Einstein. Cuando en una expresión figuren dos índices repetidos, se entenderá que se trata de una suma en la que los índices repetidos van sumados de 1 a n.

Convención de los índices arriba. Se adopta tradicionalmente la convención de anotar los índices arriba. Así, si $v \sim_E X$, es $X = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, etc. También, dadas dos bases E, H, $\varphi(E) = H$, la matriz $A = (a_{ij})$, se escribe (a^i_j), es decir, el índice de la fila arriba, y el de la columna abajo.

Se dice que las componentes x^i de un vector, y las componentes $t^{i\ell}$ de un tensor *"se transforman según las leyes (3)"* deducidas en §**11** y §**12**. Estas leyes se escriben de acuerdo a la convención de Einstein:

$$(3) \qquad x'^i = a^i_j x^j \quad , \qquad t'^{i\ell} = a^i_j \, a^\ell_s \, t^{js} \, .$$

Así, dadas las componentes de un tensor en un sistema de coordenadas, las fórmulas (3) permiten calcular las mismas en cualquier otro sistema.

§**14. Definición** (tensores (contravariantes) de todos los órdenes).

Está claro que podemos definir $V \otimes (V \otimes V)$, poniendo $W = V \otimes V$ en la definición §**3**. De hecho, conviene generalizar la definición §**3** y considerar una aplicación multilineal $V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_p \longrightarrow C$ universal. Quedan todas caracterizadas salvo isomorfismo único (como en Afirmación en §**3**) y se denota $C = V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_p$.

Todo lo hecho para el caso $p = 2$ se repite exactamente igual, y le recomendamos al lector que más le vale creer esto que tratar de verificarlo. Así, por ejemplo, si tenemos bases $E_1 \, E_2 \ldots E_p$ de los espacios $V_1 \, V_2 \ldots V_p$ respectivamente, se tiene $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_p = L(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p)$, etc.

Tomemos un espacio V con base $E = \{e_1 e_2 \ldots e_n\}$, y pongamos como antes $V_1 = V$, $V_2 = V, \ldots, V_p = V$ y $E_1 = E$, $E_2 = E, \ldots, E_p = E$. Definimos:

Un tensor (contravariante) de orden p es una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{(n^p)}$ tal que se tiene un elemento (que denotamos también t) $t \in V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (p veces) que lo determina en el sentido que para toda $E \in Bases(V)$, $t(E)$ son las coordenadas de t en la base $E \times E \times \ldots \times E$. Tenemos:

Una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{(n^p)}$ es un tensor (contravariante) si y sólo si para todo par de bases E, H, las componentes de t se transforman según las leyes:

$$t'^{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \ldots a^{i_p}_{j_p} \, t^{j_1 j_2 \ldots j_p} \; .$$

donde $\varphi(E) = H$, (a^i_j) es la matriz de φ en base E, $t(E) = (t'^{i_1 i_2 \ldots i_p})$ y $t(H) = (t^{j_1 j_2 \ldots j_p})$.

§15. El álgebra de los tensores.

Puesto que tensores del *mismo* orden son elementos del espacio vectorial $V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$, pueden *multiplicarse por un escalar* y *sumarse*. Está claro que las componentes del resultado de estas operaciones se obtienen multiplicando por el escalar y sumando las respectivas componentes. Así, si $t^{ij\ell}$ y $h^{ij\ell}$ son tensores de orden 3, los números $\lambda t^{ij\ell}$ y $t^{ij\ell} + h^{ij\ell}$ son las componentes de un tensor de orden 3, etc.

Otra operación es el *producto de tensores*. En la proposición §8 puede verse directamente que si λ^i y μ^i son las componentes de tensores de orden 1, los productos $t^{ij} = \lambda^i \mu^j$ son las componentes de un tensor de orden $1 + 1 = 2$. Si ahora ponemos, por ejemplo, $V = V \otimes V$ y $W = V \otimes V \otimes V$ en la proposición §8, se sigue que dados tensores de orden 2, t^{ij}, y de orden 3, $h^{ks\ell}$, los productos $t^{ij} h^{ks\ell}$ son las componentes de un tensor de orden $2 + 3 = 5$, que se llama el *producto* de t^{ij} y $h^{ks\ell}$. En general, el producto de dos tensores de órdenes cualesquiera p, q, siempre está definido y es un tensor de orden $p + q$. De hecho, se tiene una aplicación bilineal $(\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ veces}}) \times (\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots V}_{q \text{ veces}}) \xrightarrow{\text{producto}} \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots V}_{p+q \text{ veces}}$ que por la condición ii) en Definición §3 se extiende a un isomorfismo

$$(\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots \otimes V}_{p \text{ veces}}) \otimes (\underbrace{V \otimes V \otimes \ldots V}_{q \text{ veces}}) \longrightarrow \underbrace{V \otimes V \otimes \ldots V}_{p+q \text{ veces}} \; .$$

Como se observa, las cuentas cierran bien.

§16. Definición (Espacio dual).

El espacio dual V^* es el conjunto de transformaciones lineales de V en K (llamadas *formas*). $V^* = \{\xi \,|\, V \xrightarrow{\xi} K \text{ lineal}\}$. V^* es un espacio vectorial mediante las operaciones $(\xi + \eta)(v) =_{\text{def}} \xi(v) + \eta(v)$ y $(\lambda\xi)(v) = \lambda\xi(v)$. Dada una forma ξ y un vector v:

Notación. El escalar $\xi(v)$ se denota indistintamente $\langle \xi, v\rangle$ o $\langle v, \xi\rangle$ (no confundir con un producto interno en V).

Si $E = \{e_1 e_2 \dots e_n\}$ es una base de V, toda forma ξ queda caracterizada por los n escalares $\langle \xi, e_i\rangle$. Por lo tanto, V^* es un espacio vectorial también de dimensión n. Para cada índice j, denotamos e^j la forma caracterizada por $\langle e^j, e_i\rangle = \delta_i^j$, donde δ_i^j es la *delta de Kroneker*. Es decir, $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$, y $\delta_i^j = 1$ si $i = j$. Dada cualquier forma ξ, se tiene obviamente $\langle \xi, e_i\rangle = \sum_j \langle \xi, e_j\rangle\langle e^j, e_i\rangle$ para todo índice i. Ello muestra que $\{e^1 e^2 \dots e^n\}$ forman una base de V^*. Se llama ***base dual*** y se denota E^*.

§**17. Definición** (Transformación dual).

Si $V \xrightarrow{\varphi} W$ es una transformación lineal y $\xi \in W^*$ es una forma, la composición $V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\xi} K$ es una forma denotada $\varphi^*(\xi) =_{\text{def}} \xi\varphi$. Es decir, si $v \in V$, se tiene por definición:

$$\langle \varphi^*(\xi), v\rangle = \langle \xi, \varphi(v)\rangle .$$

Esto define una transformación lineal $W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$, llamada dual (o transpuesta) de φ. Observar que φ^* ***va en sentido contrario*** a φ.

Sea ahora $W = V$, $V \xrightarrow{\varphi} V$ y $V^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$ (pero en sentido contrario!):

§**18. Proposición** (Matriz de la transformación dual).

Sea $A = (a_j^i)$ la matriz de $\varphi : \varphi(e_j) = \sum_i a_j^i e_i$ (ver §**11**). Se trata ahora de encontrar la matriz de φ^* (en la base E^*) en términos de A. Denotemos $B = (b_j^i)$ a la matriz buscada. Se tiene por definición: (1) $\varphi^*(e^s) = \sum_i b_s^i e^i$. Para cualquier indice j, evaluemos ambos miembros de esta ecuación en el vector e_j:

$$\langle \varphi^*(e^s), e_j\rangle = \langle e^s, \varphi(e_j)\rangle = \sum_i a_j^i \langle e^s, e_i\rangle = a_j^s$$

$$\langle \sum_i b_s^i e^i, e_j\rangle = \sum_i b_s^i \langle e^i, e_j\rangle = b_s^j .$$

Luego, se tiene $b_s^j = a_j^s$. Es decir, B es la matriz transpuesta de A.

La fórmula (1) arriba queda: (1) $\varphi^*(e^s) = \sum_i a_i^s e^i$. Como φ^* va en sentido contrario a φ, una forma $\xi \in V^*$ en realidad se mueve con la transformación φ^{*-1} cuya matriz es entonces la inversa de la transpuesta de A. Si $\xi = \sum_i y_i e^i$, y escribo $\varphi^{*-1}(\xi) = \sum_i y_i' e^i$, se sigue de lo anterior y de la fórmula (3) en definición §**11** que

(3)
$$y'_i = \sum_{j=1}^{n} c_i^j y_j$$

donde la matriz $C = (c_i^j)$ es la inversa de A (notar que aquí está involucrada una doble transposición). Esta es la ley por la cual cambian las coordenadas de una forma.

Sea H otra base y φ tal que $\varphi(E) = H$, $\varphi(e_i) = h_i$. Tenemos: $\langle \varphi^*(h^i), e_j \rangle = \langle h^i, \varphi(e_j) \rangle = \langle h^i, h_j \rangle = \delta_j^i$. Luego $\varphi^*(h^i) = e^i$, $\varphi^*(H) = E$. Es decir, $\varphi^{*-1}(e^i) = h^i$. Poniendo $\eta = \varphi^{*-1}(\xi)$, será $\eta = \sum_i y_i h^i$. Luego tenemos:

Las ecuaciones (3) *expresan las coordenadas de una forma en base E^* en términos de sus coordenadas en base H^*.*

§**19. Definición** (tensores covariantes).

Dado V, un elemento (o forma) $\xi \in V^*$ determina para cada base $E = \{e_1 e_2 \dots e_n\}$ de V una n-tupla de números $\xi \sim_{E^*} (y_1 y_2, \dots y_n)$, $\xi = \sum_i y_i e^i$. Tenemos:

Un tensor (covariante) de orden 1 (o forma) es una función $\xi : Bases(V) \longrightarrow K^n$, $\xi(E) = (y_1 y_2, \dots y_n)$ tal que se tiene un elemento (que denotamos también ξ) $\xi \in V^*$ que la determina por medio de: $\xi \sim_{E^*} \xi(E)$. Los escalares y_i se llaman *"las componentes del tensor"*. De §**18** se sigue la siguiente caracterización:

Una función $\xi : Bases(V) \longrightarrow K^n$ es un tensor (covariante) si y sólo si para todo par de bases E, H, si $\xi(E) = (y'_1 y'_2 \dots y'_n)$ y $\xi(H) = (y_1 y_2 \dots y_n)$ los y'_i se expresan en términos de los y_i por medio de las fórmulas (3) de §**18** (donde $\varphi(E) = H$, y $A = (a_{ij})$ es la matriz de φ en base E). Estas leyes se escriben de acuerdo a la convención de Einstein:

$$y'_i = c_i^j y_i \qquad \text{(donde se tiene la relación: } a_k^i c_j^k = \delta_j^i\text{)}.$$

§**20. Definición** (tensores mixtos de todos los órdenes).

Por ejemplo, un elemento $t \in V \otimes V^*$ determina para cada base E de V escalares t_i^ℓ que son sus coordenadas (en la base $E \times E^*$) $t = \sum_{i\ell} t_i^\ell (e_\ell \otimes e^i)$. Se tiene entonces una función $Bases(V) \xrightarrow{t} K^{n \times n}$, que es, por definición, un tensor mixto una vez covariante y una vez contravariante. Los números t_i^ℓ se llaman *"las componentes del tensor"*.

Dadas dos bases E, H, y $V \xrightarrow{\varphi} V$, $\varphi(E) = H$ con matriz $A = (a_j^i)$ en base E, y matriz inversa $C = (c_j^i)$, se tiene $V \otimes V^* \xrightarrow{\varphi \otimes \varphi^{*-1}} V \otimes V^*$, las componentes de t se transforman según las leyes deducidas en §**11**, §**12** y §**18**:

(3) $$t'^{\ell}_i = a^{\ell}_s c^j_i t^s_j \qquad (\text{donde } a^i_k c^k_j = \delta^i_j)$$

Recíprocamente a toda función $Bases(V) \xrightarrow{t} K^{n\times n}$ tal que sus componentes $t(E) = (t'^{\ell}_i)$ y $t(H) = (t^{\ell}_i)$ se transforman según las leyes (3) arriba, le corresponde un (único) elemento $t \in V \otimes V^*$ que la determina. Es por lo tanto un tensor (para ver esto, basta poner $t = \sum_{i\ell} t^{\ell}_i (e_\ell \otimes e^i)$, donde se toma una base cualquiera E. Esta definición no depende de la base elegida debido a lo demostrado en §**11**, §**12** y §**18**).

Está claro como pueden definirse tensores mixtos de orden $p+q$, p veces contravariantes y q veces covariantes, y como obtener la ley según la cual se transforman:

Un tensor (p veces contravariante y q veces covariante) es una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{(n^p n^q)}$ tal que se tiene un elemento (denotado también t) $t \in V \otimes \ldots V \otimes V^* \otimes \ldots V^*$ (p veces V y q veces V^*) que lo determina en el sentido que para toda base E de V, $t(E)$ son las coordenadas de t en la base $E \times \ldots \times E \times E^* \times \ldots E^*$. Se tiene:

Una función $t : Bases(V) \longrightarrow K^{(n^p n^q)}$ es un tensor si y sólo si para todo par de bases E, H, sus componentes $t(H) = (t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q})$ y $t(E) = (t'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q})$ se transforman según las leyes:

(3) $$t'^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{s_1 s_2 \ldots s_q} = a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \ldots a^{i_p}_{j_p} c^{\ell_1}_{s_1} c^{\ell_2}_{s_2} \ldots c^{\ell_q}_{s_q} t^{j_1 j_2 \ldots j_p}_{\ell_1 \ell_2 \ldots \ell_q}\,.$$

donde $\varphi(E) = H$ con matriz $A = (a^i_j)$ en base E, y matriz inversa $C = (c^i_j)$.

§21. Contracción de índices.

El álgebra de los tensores mixtos se obtiene tal cual como aquí en §**15**. Se tiene, por lo tanto, que para la *adición* los tensores deben tener las mismas características de co y contravarianza. Para el *producto* los tensores pueden ser cualesquiera, obteniéndose un tensor cuyos órdenes de co y contravarianza son las sumas de los órdenes respectivos. En esta álgebra se tiene una tercera operación, la *contracción de índices,* solamente válida para un índice covariante con un índice contravariante. Pasamos ahora a describirla (y a demostrar su existencia).

Se tiene claramente que la *evaluación* es una transformación bilineal:

$$V \times V^* \xrightarrow{\psi} K\,. \qquad (v,\xi) \xmapsto{\psi} \langle v,\xi\rangle = \xi(v)\,.$$

Se extiende luego (condición ii) en definición §**3**) en una transformación lineal $V \otimes V^* \xrightarrow{\overline{\psi}} K$, tal que $\overline{\psi}(v,\xi) = \langle v,\xi\rangle$. Dado un elemento cualquiera $t \in V \otimes V^*$, $t = \sum_{ij} t^i_j (e_i \otimes e^j)$. De

§9 se tiene entonces que

$$\overline{\psi}(t) = \sum_{ij} t^i_j \langle e_i, e^j \rangle = \sum_{ij} t^i_j \delta^j_i = \sum_i t^i_i ,$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el ejercicio en §4, más generalmente se tiene (por ejemplo) una transformación lineal:

$$V \otimes V^* \otimes V^* \xrightarrow{\overline{\psi}\otimes \mathrm{id}} K \otimes V \approx V .$$

Dado $t \in V \otimes V^* \otimes V^*$, $t = \sum_{ijs} t^i_{js}(e_i \otimes e^j \otimes e^s)$, si $h = (\overline{\psi} \otimes \mathrm{id})(t)$, se tiene

$$h = \sum_{ijs} t^i_{js} \langle e_i, e^j \rangle \otimes e^s = \sum_{ijs} t^i_{js} \delta^j_i e^s = \sum_{is} t^i_{is} e^s = \sum_s h_s e^s ,$$

donde hemos puesto $h_s = \sum_i t^i_{is}$.

Es decir, dado un tensor t de componentes t^i_{js}, se obtiene un tensor h, de componentes h_s mediante la fórmula:

$$h_s = t^i_{is} \qquad \text{(contracción de índices)} .$$

Queda claro que todo esto se generaliza para contraer índices (uno de arriba con uno de abajo) en tensores mixtos con órdenes de co y contravarianza arbitrarios. Resultando cada vez un tensor de orden total disminuido en 2. Esta operación resulta compatible con el resto de la estructura del álgebra tensorial. Es decir, teniendo que contraer índices en algún término de una suma o un producto, da lo mismo hacerlo antes o después de efectuar la operación. Nótese que esto está implícito en la notación clásica de índices. Sin embargo, típicamente se contraen índices entre términos distintos luego de efectuar las operaciones.

EJERCICIOS DE PRODUCTO TENSORIAL.

1. Cualquiera sea V, sea $K \times V \longrightarrow V$, $(\lambda, v) \longmapsto \lambda v$. Demostrar que es una aplicación bilineal universal. Por lo tanto, $K \otimes V = V$.

2. Sean $K[t]$ = Polinomios en una indeterminada, $K[x, y]$ = Polinomios en dos indeterminadas. Se tiene: $K[t] \times K[t] \longrightarrow K[x, y]$, $p(t) \longmapsto p(x)p(y)$.
Demostrar que es una aplicación bilineal universal. Por lo tanto, $K[t] \otimes K[t] = K[x, y]$.

3. Demostrar $K^n \otimes K^m = K^{n \times m}$ (matrices de $n \times m$) munido de la aplicación bilineal siguiente:

$$K^n \times K^m \longrightarrow K^{n \times m} \quad , \qquad ((\lambda_i), (\mu_j)) \longmapsto (\lambda_i \mu_j)$$

4. Sean V, W cualesquiera y $V \times W \xrightarrow{\theta} C$ una aplicación bilineal universal. Demostrar que la imagen $\theta(V \times W) \subset C$ genera todo C. No existe sub-espacio propio $L \subset C$, $L \neq C$ tal que $\theta(V \times W) \subset L$. Deducir luego que todo elemento $t \in V \otimes W$ es una suma finita de elementos de la forma $v \otimes w$, $v \in V$, $w \in W$. Es decir, $t = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots v_k \otimes w_k$ para ciertos $v_1 \ldots v_k \in V$, $w_1 \ldots w_k \in W$.

Este ejercicio es muy útil para hacer los que siguen.

5. Sean V, W ambos de igual dimensión finita n. Demostrar que todo elemento $t \in V \otimes W$ puede escribirse como suma $t = v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 \ldots + v_k \otimes w_k$. (con $k \leq n$). Exhibir elementos que no pueden escribirse como sumas de $n-1$ sumandos, de la forma $v_i \otimes w_i$.

6. a) Demostrar que se tiene una transformación lineal
$(V_1 \times V_2) \otimes W \longrightarrow (V_1 \otimes W) \times (V_2 \otimes W)$
b) Demostrar que es un isomorfismo (inyectivo y suryectivo).
c) Qué argumento fácil puede darse para demostrar b) en el caso en que todos los espacios son de dimensión finita.

7. Para subespacios $V_1 V_2 \subset V$ y $W_1 \subset W$ demostrar:

$$(V_1 \cap V_2) \otimes W_1 = (V_1 \otimes W_1) \cap (V_2 \otimes W_1) \qquad \text{(ambos subespacios de } V \otimes W\text{)}$$

8. Sea X un conjunto cualquiera y V un espacio vectorial, K^X y V^X el espacio vectorial de funciones definidas en X a valores en K,V respectivamente.

a) Demostrar que se tiene una aplicación lineal inyectiva $K^X \otimes V \longrightarrow V^X$.

b) Demostrar que su imagen es el subespacio en V^X de todas las $f \in V^X$ tales que el conjunto $f(X) \subset V$ genera un subespacio de dimensión finita.

c) Deducir que si X es finito o V es de dimensión finita, se tiene $K^X \otimes V \approx V^X$.

9. Mostrar que existe una transformación lineal $\varphi : V^* \otimes W^* \longrightarrow (V \otimes W)^*$ tal que $\varphi(\xi \otimes \eta)(v \otimes w) = \xi(v)\eta(w) \in K$.

a) Observar que no es suryectiva si los espacios son de dimensión infinita.

b) Demostrar que es un isomorfismo si los espacios son de dimensión finita.

EJERCICIOS DE TENSORES CLASICOS.

10. Hemos visto en §**21** que si t^i_{js} son las componentes de un tensor, entonces $h_s = t^i_{is}$ son también las componentes de un tensor. Luego, sabemos *a priori* que dadas dos bases E, H, $V \xrightarrow{\varphi} V$, $\varphi(E) = H$, las h_s se transforman según las leyes (3) en §**20**. Demostrar *"a mano"* que si los t^i_{js} se transforman según estas leyes, entonces ello también es cierto para los h_s.

11. Qué pasa si se contraen dos índices de la misma valencia. Es decir, por ejemplo, si en la situación del ejercicio 10, definimos $h^i = t^i_{jj} = \sum_j t^i_{jj}$. ¿Son los h^i las componentes de un tensor? Qué pasa si uno trata de verlo *"a mano"*, como en el ejercicio 10.

12. Sea $t \in V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes V^*$. Supongamos que se tiene una base de V tal que las componentes del tensor satisfacen la ecuación $t^{ijk}_{\ell s} = t^{jik}_{\ell s}$. Demostrar que las componentes en toda otra base satisfacen la misma ecuación (el tensor se llama simétrico en los índices i, j).

13. Demostrar que toda aplicación bilineal $V \times V \longrightarrow K$ determina un tensor dos veces covariante. Relacionar esto con la forma en que cambian los coeficientes de una forma cuadrática $Y^t AX$ en un cambio de base.

14. Demostrar que toda aplicación lineal $V \xrightarrow{\varphi} V$ determina un tensor (mixto), una vez covariante y una vez contravariante. Relacionar esto con la forma en que cambia la matriz de φ en un cambio de base.

<u>Observación</u>. Dado un tensor (mixto), una vez covariante y una vez contravariante, $t \in V \otimes V^*$, la contracción de índices $t^i_i = h \in K$ define un escalar que es siempre el mismo cualquiera sea el sistema de coordenadas con que se lo calcule (está claro puesto que h es el escalar $\dot{h} = \overline{\psi}(t)$ donde $\overline{\psi}$ es la transformación considerada en §**21**). Se dice que es un *invariante*. En este caso se trata de la traza. Observar que esto permite por tanto definir la traza de una transformación lineal como la traza de su matriz en cualquier base.

15. Demostrar la recíproca del ejercicio 14. Es decir, dado $t \in V \otimes V^*$, demostrar que determina una transformación lineal $V \xrightarrow{\varphi} V$.

16. Demostrar que dado un tensor, una vez covariante y una vez contravariante, el escalar $h = \det(t^i_j)$ es siempre el mismo cualquiera sea el sistema de coordenadas en que se lo calcule, es decir, $\det(t^i_j)$ es un *invariante*. Ello define una aplicación $V \otimes V^* \longrightarrow K$. ¿Cuál es?

17. Sea $\mathrm{Bases}(V) \xrightarrow{t} K^{(n^3)}$ una función tal que para todo tensor dos veces covariante $\mathrm{Bases}(V) \xrightarrow{u} K^{(n^2)}$ el producto contraido $\mathrm{Bases}(V) \xrightarrow{h} K$ definido por la ecuación $h_i = t^{jk}_i u_{jk}$ es un tensor covariante. Demostrar que t es entonces un tensor dos veces contravariante y una vez covariante.

<u>Observación</u>. Lo anterior es un caso particular de un criterio general para reconocer el carácter tensorial de una función $\mathrm{Bases}(V) \longrightarrow K^{(n^{p+q})}$ llamado "ley del cociente". ¿Puede deducir y/o enunciar este criterio general?