ISSN en trámite

Fascículo 5

Notas de matemática

Norberto Fava
Ursula Molter

Cantidades dimensionadas

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2017

Notas de matemática

Fascículo 5

Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
E-mail: cabrelli@dm.uba.ar

Gabriela Jerónimo
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
E-mail: jeronimo@dm.uba.ar

Claudia Lederman
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires
E-mail: clederma@dm.uba.ar

Leandro Vendramin
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: lvendramin@dm.uba.ar

ISSN en trámite

Derechos reservados
© 2017 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,

Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Cantidades dimensionadas

N. Fava y U. Molter

Resumen

Las reglas que rigen las operaciones con cantidades dimensionadas se justifican con una interpretación natural de los símbolos que representan las unidades. El tema se relaciona con los fundamentos del Análisis Dimensional.

1. Introducción. Para expresar las cantidades concretas los pueblos han usado una gran variedad de unidades (o *medidas* como también se las llama). Así, las longitudes y las distancias se expresan no sólo en las unidades del sistema métrico sino también en pies, pulgadas, millas y yardas, entre otras; y en tiempos no tan remotos fueron expresadas en leguas, brazas, varas, toesas, codos, palmos y nudillos. Encontraremos áreas expresadas en acres; pesos en libras, onzas, adarmes, quintales y arrobas; velocidades en nudos; capacidades en galones y en pintas; presiones en hectopascales, atmósferas y libras por pulgada cuadrada, para mencionar algunas.

Para las medidas angulares el radián y la revolución sirven como unidades naturales, pero no existe en el caso de las longitudes un segmento que pueda elegirse como unidad natural. Las unidades con que se mide el tiempo guardan una relación aproximada con los movimientos de la tierra en el sistema solar, aunque en la Antigüedad y en la Edad Media se han usado los relojes de agua, los de sol y los de arena; y en las brumas inglesas el rey Alfredo el Grande medía el tiempo por el consumo de unas velas de gran longitud que hacía encender una a continuación de otra.

Hace algunos años se nos planteó el problema de conseguir una interpretación matemática de las *las cantidades dimensionadas:* monomios formados con coeficientes reales y símbolos de unidades tales como

$$10\ \mathrm{ft}, \qquad 104\ \mathrm{m}^2, \qquad 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, \qquad 50\,\frac{\mathrm{mile}}{\mathrm{hr}}, \qquad \text{o} \qquad 15\ \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

así como de las operaciones que se realizan con esos símbolos en el Análisis Dimensional. La nota contiene la respuesta que elaboramos en aquel entonces [2].

Corresponde agregar que operando formalmente con esos símbolos los físicos y los ingenieros han alcanzado conclusiones sumamente útiles y a veces sorprendentes.

Mediante la simple observación de una secuencia de imágenes el físico inglés G.I. Taylor usó el Análisis Dimensional para estimar con suficiente exactitud la energía liberada en la primera explosión nuclear [6]. La difusión de ese dato causó cierto revuelo en aquel entonces por tratarse de una información clasificada como secreta. El análisis dimensional de las cantidades involucradas lleva a concluir que en los primeros instantes la distancia R alcanzada por la onda de choque está dada por la fórmula $R = CE^{1/5}\rho^{-1/5}t^{2/5}$, donde C es una constante real, E la energía liberada, ρ la densidad inicial del aire y t el tiempo transcurrido (§9).

Para que sirvan de referencia anotamos las relaciones de algunas unidades tradicionales con las unidades correspondientes del Sistema Métrico; usamos el punto en lugar de la coma decimal.

LONGITUD

pie castellano = 12 pulgada = 0.278 633 3 m
pie inglés (*foot*; símbolo, ft) = 12 pulgada
= 0.304 799 47 m
pie estadounidense (*foot*; símbolo, ft) = 12 pulgada
= 0.304 800 61 m
pulgada estadounidense (*inch*; símbolo, in) = 2.54 cm
yarda (*yard*; símbolo, yd) = 3 ft = 0.9144 m
vara = 2 codo = 3 pie castellano = 4 palmo = 0.8359 m
legua terrestre = 20 000 pie castellano = 5572.7 m
braza = 2 vara = 1.6718 m
palmo = 12 dedo = 10 nudillo = 0.21475 m
toesa (medida antigua francesa)= 1.946 m
milla terrestre (*mile*; símbolo, mi) = 5280 ft
= 1609.34 m
milla náutica = 1' de meridiano = 6076.1 ft = 1852 m
legua náutica = 3 milla náutica = 5556 m
parsec = 3.087×10^{13} km

MASA

libra (*pound*; símbolo, lb) = 16 onza = 0.453 592 kg
onza (*ounce*; símbolo, oz) = $\frac{1}{16}$ lb = 28.349 523 g
grano (*grain*) = $\frac{1}{7000}$ lb = 64.8 mg
libra castellana = 16 onzas = 460 g

quintal = 100 libra castellana = 4 arroba = 46 kg
onza castellana = 16 adarme = 140 quilate

CAPACIDAD

galón estadounidense (*gallon*; símbolo, gal) = 4 quart
= 8 pint = 3.785 litro
pint = 16 fluid ounce = 0.473 125 litro
galón imperial británico = 4.547 litro
fanega = 55.5 litro
celemín = 4 cuartillo = 4.625 litro

El *acre* equivale a $4840\,\mathrm{yd}^2 = 0.4047\,\mathrm{ha}$, y el *nudo* a una milla náutica por hora, es decir, 1.852 km/h.

Una mirada a esas equivalencias torna evidentes las ventajas de un sistema global unificado al que todavía no hemos arribado enteramente en la práctica. El primer paso hacia la unificación se dio en el tiempo de la Revolución Francesa.

2. Breve reseña histórica. En 1791 la Asamblea Nacional francesa encargó a una comisión científica de la que participaron, entre otros, los matemáticos Lagrange, Laplace y Monge, el diseño de un sistema de unidades que satisficiera unos criterios ideales de comodidad, simplicidad, precisión y estabilidad. El primero se refiere a la posibilidad de disponer de unidades adecuadas a los objetos propios de cada actividad; el segundo, a la existencia de unas relaciones simples entre las distintas unidades; el tercero, a la posibilidad de relacionarlas de manera precisa con las unidades de los otros sistemas y el último, a la inalterabilidad de los patrones. La comisión completó su labor en 1799, dando origen a nuestro sistema métrico.

Inicialmente se pretendió que el segmento unitario (el metro) representara la diez millonésima parte de un cuadrante de meridiano, en tanto que el kilogramo debía representar la masa de un decímetro cúbico de agua destilada a presión normal en su estado de máxima densidad. La duración del segundo se hallaba establecida en la 86400 ava parte del día solar medio. A tal efecto se realizó una medición del arco de meridiano entre Dunkerke y Barcelona, y en 1799 se construyeron patrones materiales del metro y el kilogramo, cuya exactitud quedó desvirtuada por otras mediciones posteriores más precisas.

Después de varias rectificaciones, con los consiguientes cambios de patrones, el propósito de relacionar el metro con las dimensiones de la tierra de manera exacta hubo de ser abandonado.

En 1899, la primera Conferencia General de la Oficina de Pesas y Medidas, con sede en Sèvres, aprobó nuevas definiciones del metro y el kilogramo en base a las últimas mediciones, pero entonces con referencia exclusiva a unos patrones construidos con cuidados muy especiales.

Sin embargo el progreso científico hizo posible alcanzar unos niveles de precisión difíciles de imaginar en los comienzos, forzando al abandono de los patrones primitivos. En la actualidad el metro se define en base a la velocidad de la luz en el vacío, y el segundo en base al fenómeno periódico que ocurre en un núcleo atómico. La única unidad todavía definida por un patrón material es el kilogramo.

Para tener una idea de la precisión lograda, baste decir que el metro se determina con un error menor que 0.01 nm (el nanometro equivale a un millonésimo de milímetro).

A partir de la undécima Conferencia General (1960) de la Comisión Electrotécnica Internacional y la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada, el Sistema Métrico Decimal deja paso al Sistema Internacional de Unidades (SI), que además de las unidades mecánicas fundamentales (metro, kilogramo y segundo) incluye unidades para otras magnitudes que no interesarán para el propósito de esta nota.

3. Unidades mecánicas. Las unidades derivadas de uso más frecuente en la mecánica se muestran en la tabla siguiente, cuyas dos últimas columnas expresan cada unidad en función de las otras unidades del sistema y en función de las unidades fundamentales.

Magnitud	**Nombre**	**Símbolo**	**Expresión 1**	**Expresión 2**
velocidad	—	—	—	$m \cdot s^{-1}$
aceleración	—	—	—	$m \cdot s^{-2}$
fuerza	newton	N	—	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
energía	joule	J	N m	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
potencia	watt	W	J/s	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
presión	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$

Pero el papel de las unidades no se limita a la expresión simbólica de las cantidades. En el Análisis Dimensional se opera algebraicamente con monomios formados con coeficientes reales y símbolos de unidades afectados por exponentes enteros o racionales. La aplicación de las leyes del álgebra a esas operaciones parece tan natural que la necesidad de una justificación puede pasar inadvertida. El siguiente ejemplo es ilustrativo.

Ejemplo. La velocidad con que se propaga una perturbación a lo largo de una cuerda elástica homogénea con densidad lineal (masa por unidad de longitud) $\mu = 0.1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ sometida a una tensión $T = 10\ \mathrm{N} = 10\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{0.1\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}}} = \sqrt{100\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Ahora bien, las operaciones con símbolos de unidades son legítimas siempre que exista una interpretación que las haga consistentes. *Lo esencial en Matemática* —ha escrito G.H. Hardy— *es que sus símbolos sean capaces de alguna interpretación.*

En lo que sigue revisamos una interpretación natural de dichas operaciones, comenzando por las magnitudes geométricas (longitud, área y volumen). A tal fin recordemos que dos figuras del espacio se llaman *congruentes* si existe un movimiento rígido que lleva a una de ellas a coincidir puntualmente con la otra. Por segmento *no trivial* entendemos uno que no se reduzca a un punto único.

4. Longitud. La noción de longitud como una magnitud física se basa en la siguiente proposición cuya demostración elemental omitimos.

Proposición 1. Dados un segmento no trivial U y un número $u > 0$, existe una única función L que asigna a cada segmento S un número $L(S) \geq 0$, de forma tal que se satisfagan las siguientes propiedades:

1. Si los segmentos S_1 y S_2 son congruentes, entonces
$$L(S_1) = L(S_2);$$
2. Si el segmento S es la unión de dos segmentos consecutivos S_1 y S_2, entonces
$$L(S) = L(S_1) + L(S_2);$$
3. $L(U) = u$.

Para destacar los parámetros que determinan a L como una función numérica escribiremos $L(S) = L(S; U, u)$. La notación pone de manifiesto que el valor numérico de L depende no sólo de S sino también del segmento U y del valor numérico u que se asigne a dicho segmento.

Definición 1. Llamamos a U el *segmento unitario* y a u el *parámetro real*. El par (U, u) es lo que llamamos una *unidad de longitud*.

Fácilmente se demuestra que

$$L(S; U, u) = \alpha u,$$

donde α es un número no negativo que depende solamente de S y de U. El número α es la *medida* de S con respecto a U o *razón* entre los segmentos S y U. Para denotarlo usamos el símbolo $|S|_U$ o bien $\frac{S}{U}$. De modo que:

$$L(S; U, u) = \alpha u = \frac{S}{U}\, u = |S|_U\, u.$$

Ahora podemos establecer la definición que nos servirá de base:

Definición 2. Por *longitud* del segmento S en el sistema (U, u) entendemos la función lineal

$$u \to \alpha u$$

definida sobre la semirrecta positiva $u > 0$, concisamente representada por la expresión αu.

Así, la longitud del segmento unitario es u –función identidad– en tanto que su medida es 1.

Mientras las longitudes son funciones lineales de u, veremos que las áreas se expresarán naturalmente como funciones cuadráticas y los volúmenes como funciones cúbicas del mismo parámetro real u. Por tal motivo nos referimos a la unidad (U, u) como un *sistema de medidas geométricas*.

Corolario. Para que dos funciones que satisfacen las condiciones 1 y 2 de la proposición anterior sean idénticas es suficiente que coincidan en algún segmento no trivial.

Cambio de Unidad. Siendo (U, u) y (V, v) dos unidades de longitud, supongamos que $L(V; U, u) = \tau u$, de modo que $\tau = V/U$ es la relación entre los segmentos unitarios.

Supongamos ahora que para un segmento arbitrario S tenemos:

$$L_1(S) = L(S; U, u) = \alpha u, \qquad L_2(S) = L(S; V, v) = \beta v.$$

Por tratarse de la longitud del mismo segmento expresada en dos sistemas distintos, desearíamos poder escribir $\alpha u = \beta v$. En virtud del corolario, bastaría que las dos funciones coincidieran en algún segmento no trivial, por ejemplo en V, es decir, que se cumpliera

$$v = \tau u.$$

Por tanto, la igualdad $\alpha u = \beta v$ es correcta si convenimos en que los parámetros u y v no son independientes, sino que están relacionados por la función lineal $v = \tau u$. Una vez adoptado este *convenio*, las medidas de S con respecto a U y a V se relacionan por medio de la fórmula $\beta = \tau^{-1}\alpha$.

Ejemplo. Las unidades de longitud más usuales son (M, m) y (F, ft), donde M y F son los segmentos que llamamos *metro* y *pie*, respectivamente. Puesto que la medida de F con respecto a M es 0.3048, la relación lineal $\mathrm{ft}{=}0.3048\,\mathrm{m}$ entre ambos parámetros reales nos habilita para igualar la longitud de un segmento expresada en el sistema (M, m) a su expresión en el sistema (F, ft).

Razón entre dos segmentos. Supongamos ahora que

$$L(S; U, u) = \alpha u \quad \text{y} \quad L(T; U, u) = \beta u, \quad \text{con } \beta \neq 0.$$

Entonces tendremos $\alpha u = L(S; T, \beta u) = \dfrac{S}{T}\,\beta u$. Por tanto:

$$\frac{S}{T} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|S|_U}{|T|_U}.$$

La razón entre dos segmentos es igual al cociente de sus medidas con respecto a una misma unidad.

Producto por un número real. Incurriendo por simplicidad en abuso de notación escribimos $S = \alpha U$ como equivalente de la afirmación $S/U = \alpha$ (ambas equivalentes a $|S|_U = \alpha$).

El postulado de continuidad de la Geometría permite afirmar que para cualquier $\alpha \geq 0$ existe un segmento S tal que $S = \alpha U$.

Supongamos ahora que $S = \alpha U$ y $T = \beta S = \beta(\alpha U) = \lambda U$. Entonces $\lambda = |T|_U = \dfrac{|T|_U}{|S|_U} \cdot |S|_U = \beta\alpha$, lo que prueba la fórmula asociativa $\beta(\alpha U) = (\beta\alpha)U$.

5. Área y volumen. Conviene recordar dos conceptos: (1) Por *figura plana* entendemos un conjunto plano medible en el sentido de Jordan (para simplificar supondremos que todas las figuras que se consideren están contenidas en un mismo plano); (2) Siendo (U, u) la unidad de longitud, denotamos por $Q = Q(U)$ un cuadrado cuyos lados son congruentes con el segmento unitario U, al que llamamos *cuadrado unitario* .

La noción de área como una magnitud representable en el sistema de unidades (U, u) se basará en la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 2. Para cualquier número $\omega > 0$ existe una única función A que asigna a cada figura plana F un número $A(F) \geq 0$ de forma tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. Si las figuras F_1 y F_2 son congruentes, entonces
$$A(F_1) = A(F_2);$$
2. Si F_1 y F_2 no tienen ningún punto interior común, entonces
$$A(F_1 \cup F_2) = A(F_1) + A(F_2);$$
3. $A(Q) = \omega^2$.

Con el fin de destacar los parámetros que determinan A como una función numérica, escribiremos $A(F) = A(F; Q, \omega^2)$.

Dejamos como ejercicio probar que para cualquier rectángulo R cuyos lados tengan longitudes $a = \alpha u$ y $b = \beta u$, se cumple:

$$A(R; Q, \omega^2) = \omega^2 \alpha\beta$$

Surge entonces la pregunta de cuál es la elección más conveniente del parámetro ω. En la práctica se elige $\omega = u$, lo que conduce a la fórmula

$$A(R) = \alpha\beta u^2 = ab.$$

TEOREMA. Para cada figura F se cumple $A(F) = \sigma u^2$, donde σ es un número que depende solamente de F y de Q.

Antes de esbozar la demostración daremos dos definiciones:

Definiciones. (i) Por *área* de F en el sistema (U, u) entendemos la función cuadrática $u \to \sigma u^2$, definida sobre la semirrecta positiva $u > 0$ y representada concisamente por la expresión σu^2; (ii) El coeficiente σ es la *medida* de F con respecto a Q.

En particular, el área de Q es u^2 en tanto que su medida es 1.

En cuanto a la demostración del teorema, hemos visto que su enunciado es verdadero en el caso de que F sea un rectángulo, de donde se sigue que es también verdadero para figuras elementales (uniones finitas de rectángulos). La demostración general se realiza aproximando F interiormente y exteriormente por figuras elementales.

Finalmente señalamos que el concepto de volumen como una magnitud derivada de la longitud puede estudiarse en forma análoga, salvo que los volúmenes se expresan por funciones de la forma γu^3, donde el coeficiente γ representa la medida del sólido con respecto al cubo unitario.

6. Tiempo y masa. Para la medida del tiempo el concepto de *igual duración* juega un papel análogo al de la congruencia de segmentos. Los intervalos de los que hablamos a continuación son intervalos de tiempo.

Proposición 3. Dados un intervalo T y un número $t > 0$, existe una única función L que asigna a cada intervalo I un número $L(I) \geq 0$ de forma tal que se satisfagan las siguientes condiciones:

1. Los intervalos I_1 e I_2 tienen la misma duración si y sólo si
$$L(I_1) = L(I_2);$$
2. Si el intervalo I es unión de dos intervalos consecutivos I_1 e I_2, entonces
$$L(I) = L(I_1) + L(I_2);$$
3. $L(T) = t$.

Escribimos $L(I;T,t)$ para destacar los parámetros que determinan a L como una función con valores numéricos.

Como en el caso de la longitud, $L(I;T,t)=\beta t$, donde β es un número que depende solamente de I y de T.

El par (T,t) es lo que llamamos una *unidad de tiempo* con *intervalo unitario* T y parámetro real t.

La función lineal $t \to \beta t$, definida sobre la semirrecta positiva $t>0$ y representada concisamente por la expresión βt es lo que entendemos por *duración* o *longitud* del intervalo I.

Siendo (T,t) y (T',t') dos unidades de tiempo, supongamos que:

$$L(I;T,t)=\beta t, \qquad L(I;T',t')=\gamma t', \qquad L(T';T,t)=\kappa t.$$

Entonces, para que sea legítimo escribir $\beta t=\gamma t'$, convendremos en que los parámetros reales t y t' se relacionan por la ecuación lineal $t'=\kappa t$.

Ejemplo. Las unidades de tiempo más usuales son la hora (H, h) y el segundo (S, s). La relación h $=3600$ s entre ambos parámetros reales permite igualar las expresiones de un mismo intervalo en cada una de dichas unidades.

Análogamente definimos una *unidad de masa* como un par (W,w), donde W es la masa unitaria y w el correspondiente parámetro real.

Ejemplo. El kilogramo (K, kg) y la libra (P, lb) son las unidades de masa más usuales. Aquí los símbolos P (por *pound*) y K representan ciertas masas que llamamos *libra* y *kilogramo*, respectivamente. La relación lb $=0{,}4536$ kg entre ambos parámetros reales permite igualar la expresión de una masa cualquiera en libras a su expresión en kilogramos.

7. Dominio de los parámetros. Para definir las magnitudes derivadas es conveniente que las magnitudes fundamentales estén definidas en un mismo dominio. Supongamos haber elegido ciertas unidades (U,u), (T,t) y (W,w) para la longitud, el tiempo y la masa, respectivamente, como un sistema fundamental de unidades mecánicas.

Definición. El dominio de los parámetros $\mathbf{\Omega}$ se define como el conjunto de todos los puntos (u,t,w) de $\mathbf{R}^3$ con coordenadas positivas.

En adelante las expresiones αu, βt y γw denotarán las siguientes funciones definidas en $\mathbf{\Omega}$, cada una dependiente de una sola coordenada:

$$(u,t,w) \to \alpha u, \quad (u,t,w) \to \beta t, \quad (u,t,w) \to \gamma w.$$

Mientras el coeficiente γ es siempre positivo, valores negativos de α o β reciben la interpretación usual de orientación opuesta.

En estas condiciones, las magnitudes derivadas de la mecánica pueden expresarse como funciones definidas en $\mathbf{\Omega}$. Por ejemplo, una velocidad escalar es de la forma

$$\frac{\text{longitud}}{\text{tiempo}} = \frac{\alpha u}{\beta t} = \frac{\alpha}{\beta}\, ut^{-1};$$

la expresión escalar de una aceleración será de la forma

$$\frac{\text{velocidad}}{\text{tiempo}} = \frac{\alpha u t^{-1}}{\beta t} = \frac{\alpha}{\beta}\, ut^{-2};$$

y de acuerdo a la ley de Newton, cada componente de una fuerza será expresable en la forma

$$F = ma = \alpha w \cdot \beta u t^{-2} = \alpha\beta\, ut^{-2} w.$$

Las expresiones obtenidas representan funciones racionales definidas en $\mathbf{\Omega}$. Las magnitudes geométricas (longitudes, áreas y volúmenes) se expresan como funciones de la primera coordenada solamente.

En general, una cantidad escalar q se expresa en la forma

$$q = \theta\, u^{\alpha} t^{\beta} w^{\gamma},$$

donde θ es real, mientras que α, β y γ son números racionales. La función $u^{\alpha} t^{\beta} w^{\gamma}$ se llama *dimensión* de q y se denota por $[q]$. Por ejemplo, para una energía E, una densidad ρ y un tiempo Θ, tendremos:

$$[E] = u^2 t^{-2} w, \qquad [\rho] = u^{-3} w, \qquad [\Theta] = t.$$

Notemos que la dimensión de un producto de varias cantidades es el producto de las dimensiones de cada factor. La dimensión de una constante positiva es 1.

8. Cambio de unidades. Si se considera otro sistema de unidades, digamos $(U', u'), (T', t'), (W', w')$, habiendo establecido entre los parámetros las relaciones:

$$u' = \tau_1 u, \quad t' = \tau_2 t \quad \text{y} \quad w' = \tau_3 w,$$

entonces la expresión de q en el nuevo sistema será $q = \theta' \, u'^{\alpha} t'^{\beta} w'^{\gamma}$, donde $\theta' = \tau_1^{-\alpha} \tau_2^{-\beta} \tau_3^{-\gamma} \theta$.

La noción de convergencia se define como la convergencia puntual en $\mathbf{\Omega}$: una sucesión $q_n = \theta_n \, u^{\alpha} t^{\beta} w^{\gamma}$ converge a q si y sólo si $\theta_n \to \theta$. La definición es independiente del sistema de unidades.

Los vectores que expresan cantidades mecánicas pueden interpretarse desde el mismo punto de vista. Por ejemplo, la expresión de una fuerza $\mathbf{F}$ es un vector de la forma:

$$\mathbf{F} = (\alpha \, wut^{-2}, \beta \, wut^{-2}, \gamma \, wut^{-2}) = wut^{-2} \, (\alpha, \beta, \gamma),$$

lo que representa una función vectorial definida en $\mathbf{\Omega}$.

En conclusión, es natural pensar los símbolos de cantidades mecánicas como funciones de tres variables independientes definidas en el dominio de los parámetros. Esa interpretación da un sentido a las operaciones que se realizan con dichos símbolos en la aplicación de las leyes físicas.

9. Ejemplo: propagación de una onda de choque. Se trata de un ejemplo famoso, citado en la introducción, del que podemos dar sólo una relación esquemática.

En una explosión se libera energía durante un tiempo breve en un espacio reducido. Al cabo de un tiempo Θ la perturbación de la atmósfera alcanza una distancia R que depende de la energía liberada E y la densidad inicial de la atmósfera ρ. Es razonable conjeturar que si el intervalo de tiempo que se considera no es demasiaso grande la distancia es una función Φ de las otras variables, es decir, $R = \Phi(E, \rho, \Theta)$.

En términos de las unidades (U, u), (T, t) y (W, w) de longitud, tiempo y masa, las dimensiones de las cantidades involucradas son:

$$[R] = u, \quad [E] = wu^2 t^{-2}, \quad [\rho] = wu^{-3}, \quad [\Theta] = t.$$

Una consideración sobre la independencia dimensional de las variables E, ρ y Θ de la que damos cuenta a renglón seguido torna plausible postular que la función buscada es de la forma $R = C \, E^a \, \rho^b \, \Theta^c$, donde C, a, b y c son constantes reales. Entonces tendremos:

$$[R] = u = [E]^a [\rho]^b [\Theta]^c = (wu^2 \, t^{-2})^a \, (wu^{-3})^b \, t^c = w^{a+b} \, u^{2a-3b} \, t^{-2a+c},$$

de donde se obtiene

$$a + b = 0, \quad 2a - 3b = 1, \quad -2a + c = 0,$$

y por consiguente, $a = 1/5$, $b = -1/5$ y $c = 2/5$.

La independencia dimensional de las cantidades E, ρ y Θ significa que una relación de la forma $[E]^a\,[\rho]^b\,[\Theta]^c = 1$ sólo es posible si $a = b = c = 0$; la constante C es independiente del sistema de unidades y se determina experimentalmente mediante detonaciones más modestas.

Para un estudio profundo de los fundamentos con muchos otros ejemplos interesantes sugerimos consultar las referencias bibliográficas [1], [4] y [5]. El libro de Hart [3] propone una estructura algebraica notoriamente complicada para tratar con matrices y vectores cuyos componentes pueden tener distintas dimensiones.

Referencias

[1] G.I. Barenblatt, *Dimensional Analysis*, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[2] N. Fava y U. Molter, *Units of measurement*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.33, #2, 2002, 293-299.

[3] G.W. Hart, *Multidimensional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[4] Henry L. Langhaar, *Dimensional Analysis and the Theory of Models*, John Wiley and Sons, Londres, 1951.

[5] L.I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, 10a. edición, CRC Press, 1993.

[6] G.I. Taylor, "The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion.II. The Atomic Explosion of 1945", Proceedings of the Royal Society of London, 1950.