ISSN en trámite

Fascículo 6

Notas de matemática

Norberto Fava
Graciela Fernández
Héctor Pérez

Magnitudes continuas

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2018

Notas de matemática

Fascículo 6

ISSN en trámite

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Magnitudes continuas

N. Fava, G. Fernández y H. Pérez

Introducción

Se ha aludido a la Geometría como "ciencia que estudia la relación entre *forma* y *cantidad*". Del concepto abstracto de cantidad y de su relación con los números se ocupa esta nota, producto de muchas conversaciones entre colegas amigos. La primera sección se dedica a una construcción cuidadosa del cuerpo real; la segunda a los números reales como operadores sobre las magnitudes continuas; la tercera a una definición axiomático-geométrica de la longitud, que es el ejemplo más representativo de lo que se entiende por una magnitud continua. Área y volumen son otros ejemplos de magnitudes continuas así como el tiempo y la masa.

Nos parece oportuno destacar la demostración debida a Otto Stolz de que el axioma de continuidad implica la divisibilidad y la propiedad de Arquímedes (teoremas 1 y 2 de la sección II). En este punto nos hemos servido del artículo de G. Vitali en la colección [4].

La monografía de H. Lebesgue [6], dirigida a profesores de escuela media, presenta definiciones directas (no tradicionales) de áreas de polígonos y volúmenes de poliedros que gozan de las propiedades fundamentales de aditividad e invariancia bajo congruencias.

Para la construcción del cuerpo real hemos preferido el método de las cortaduras porque permite apreciar inmediatamente la propiedad que distingue el orden de los números reales.

I. El cuerpo real

El método axiomático tiene muchas ventajas sobre el trabajo honesto.
–Bertrand Russell

1. Construcción. Partimos de las propiedades del cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Entre las que nos harán falta destacamos la *densidad*: el hecho de que entre dos números racionales distintos se encuentra siempre otro número racional, y la *arquimedianidad*: el hecho de que para cualquier número racional positivo δ existe un entero positivo n tal que $1/n < \delta$. En todo lo que sigue la palabra *número* es sinónimo de *número racional*;

convengamos en que no hay, por ahora, otros números.

Llamamos *cortadura* a cada conjunto (o clase) α de números racionales que cumpla las siguientes condiciones:

1. $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$; es decir, α es un subconjunto propio de $\mathbb{Q}$.
2. Si $r \in \alpha$ y $s > r$, entonces $s \in \alpha$; es decir, todo número mayor que un elemento de α pertenece también a α.
3. α no tiene mínimo.

Denotamos por $\widetilde{\alpha} = \mathbb{Q} \backslash \alpha$ la clase complementaria, formada por los números que no pertenecen a α. Si $a \in \widetilde{\alpha}$ y $A \in \alpha$, entonces $a < A$. En efecto, la relación $a \geqslant A$ implicaría $a \in \alpha$, lo que sería absurdo.

Ejemplos

1. Para cada número r, el conjunto $r^* = \{s : s > r\}$ formado por los números mayores que r, es una cortadura. En particular 0^* está formada por los números positivos y 1^* por los números mayores que 1. Nótese que r es el máximo de la clase complementaria de r^*, formada por los números s que verifican $s \leqslant r$.

2. Denotemos por α al conjunto de los números positivos cuyo cuadrado es mayor que 2. Es claro que cualquiera de estos números es mayor que 1 y que si $r \in \alpha$, la relación $s > r$ implica $s \in \alpha$. Es también claro que α no es vacía y que tampoco lo es su clase complementaria $\widetilde{\alpha}$ (la segunda incluye, por ejemplo, al número 1 y a todos los números negativos). Para mostrar que α es una cortadura sólo faltaría probar que no tiene mínimo.

Dado $r \in \alpha$, si $0 < \delta < 1$ tendremos $r - \delta > 0$ y además:

$$(r - \delta)^2 = r^2 - 2r\delta + \delta^2 > r^2 - 2r\delta,$$

y el último número es mayor que 2, siempre que se cumpla $(r^2 - 2)/2r > \delta$. Un número δ que cumpla las dos condiciones requeridas es, por ejemplo,

$$\delta = \frac{r^2 - 2}{r^2 - 2 + 2r}.$$

Hemos probado que α es una cortadura. Sin embargo, esta cortadura difiere de las del ejemplo anterior en el hecho de que su clase complementaria $\widetilde{\alpha}$ no tiene máximo. En efecto, sea r un número positivo que verifica $r^2 < 2$. Entonces podemos hallar un número δ entre 0 y 1 que verifique $(r+\delta)^2 < 2$, pues si $0 < \delta < 1$, tendremos:

$$(r+\delta)^2 = r^2 + 2r\delta + \delta^2 < r^2 + 2r\delta + \delta = r^2 + (2r+1)\delta,$$

y el último número es menor que 2, a condición de que se cumpla $\delta < (2-r^2)/(2r+1)$. Basta, entonces, elegir

$$\delta = \frac{2-r^2}{2-r^2+2r+1}$$

para tener cumplidas las dos condiciones que se requieren en este caso. Queda probado que α es una cortadura cuya clase complementaria $\widetilde{\alpha}$ no tiene máximo.

Denotamos las cortaduras por letras griegas: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, los elementos de cada una de ellas por las correspondientes letras latinas mayúsculas: $A, B, C, \ldots$ y los de sus clases complementarias por las respectivas letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$, lo que facilita algunos razonamientos si se tiene en cuenta que en cualquier circunstancia será: $a < A,\ b < B,\ c < C$, etc. Debemos esta cómoda notación a Hardy [3].

2. Ordenación. Para cualquier par de cortaduras $\alpha,\ \beta$ se verifica alguna de las inclusiones:

$$\alpha \subset \beta \quad \text{o bien} \quad \beta \subset \alpha.$$

En efecto, si α no está incluida en β, existe un número A en α que no está en β, y por consiguiente, $A = b$ (un número de la clase complementaria $\widetilde{\beta}$). Entonces cualquier B de β verifica $B > A$, de donde $B \in \alpha$. Hemos probado que si α no está incluida en β, entonces β está incluida en α.

Definición. $\alpha \leqslant \beta$ si y sólo si $\alpha \supset \beta$.

Se ve fácilmente que $\leqslant$ es una relación de orden total entre las cortaduras. Como es usual en estas relaciones pondremos: **(i)** $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \leqslant \beta$ y $\alpha \neq \beta$; **(ii)** $\alpha \geqslant \beta$ si $\beta \leqslant \alpha$ y **(iii)** $\beta > \alpha$ equivale a $\alpha < \beta$.

Un conjunto de cortaduras $\mathcal{C} = (\gamma)$ se llama *acotado inferiormente* si existe una cortadura β tal que $\beta \leqslant \gamma$ para cualquier $\gamma \in \mathcal{C}$. En tal caso decimos que β es una *cota inferior* de $\mathcal{C}$.

Teorema. Si $\mathcal{C}$ es no vacío y acotado inferiormente, existe una cortadura σ tal que:

1^o) σ es una cota inferior de $\mathcal{C}$;

2^o) cualquier cota inferior de $\mathcal{C}$ es $\leqslant \sigma$.

En otras palabras, σ es la *cota inferior máxima* de $\mathcal{C}$.

Demostración. Supongamos que la cortadura β verifica $\beta \leqslant \gamma$ para cualquier $\gamma \in \mathcal{C}$ (es decir, $\beta \supset \gamma$ para cualquier $\gamma \in \mathcal{C}$). Definamos ahora la clase σ como la unión de todas las γ del conjunto $\mathcal{C}$. En símbolos:

$$\sigma = \bigcup \{\gamma : \gamma \in \mathcal{C}\}.$$

Es decir, r pertenece a σ si y sólo si r pertenece a algún γ del conjunto $\mathcal{C}$, que por hipótesis no es vacío. Por tanto, σ no es vacía.

Claramente, $\beta \supset \sigma$, de donde se sigue que $\sigma \neq \mathbb{Q}$. Por último, los hechos de que σ no tiene mínimo y que todo número mayor que un elemento de σ está también en σ se prueban con la misma facilidad. Luego, σ es una cortadura incluida en β, y por consiguiente, $\beta \leqslant \sigma$, lo que demuestra el teorema si tenemos en cuenta que β era cualquier cota inferior de $\mathcal{C}$.

Notemos el papel que ha jugado en la demostración el hecho de que $\mathcal{C}$ es acotado inferiormente.

Definición. La cota inferior máxima del conjunto $\mathcal{C}$ se llama *extremo inferior* o *ínfimo* de $\mathcal{C}$ y se denota por el símbolo $\inf \mathcal{C}$.

En forma simétrica se definen los conceptos de cota superior y conjunto acotado superiormente. Entonces podemos probar el siguiente corolario.

Corolario. Todo conjunto de cortaduras que sea no vacío y acotado superiormente, tiene una cota superior mínima.

En efecto, si $\mathcal{C}$ es no vacío y acotado superiormente, el conjunto $\mathcal{U}$ formado por todas las cotas superiores de $\mathcal{C}$ es no vacío y acotado inferiormente, pues cada elemento de $\mathcal{C}$ es una cota inferior de $\mathcal{U}$. Por tanto, la cortadura $\tau = \inf \mathcal{U}$ es una cota superior de $\mathcal{C}$; es decir, $\tau \in \mathcal{U}$, lo que prueba que $\mathcal{U}$ tiene un elemento mínimo, como queríamos demostrar.

Definición. La cota superior mínima del conjunto $\mathcal{C}$ se llama *extremo superior* o *supremo* de $\mathcal{C}$ y se denota por el símbolo $\sup \mathcal{C}$.

3. Operaciones. El siguiente lema será útil para estudiar las propiedades de las operaciones aritméticas que se introducen en este párrafo.

Lema. Dados: una cortadura α, un número a_0 de su clase complementaria y un número $\delta > 0$, existe un par de números $A \in \alpha$ y $a \in \widetilde{\alpha}$, tales que:

$$a \geqslant a_0 \ \text{ y } \ A - a < \delta.$$

Para demostrarlo, elegimos un número A_0 en α y un entero positivo n tal que $(A_0 - a_0)/n < \delta$, y consideramos la sucesión finita

$$r_k = a_0 + k\,\frac{A_0 - a_0}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Basta tomar el mínimo k tal que $r_k \in \alpha$ (obviamente $k > 0$) y poner $A = r_k$, $a = r_{k-1}$.

3.1. Suma. Definimos la suma de las cortaduras α y β por medio de la fórmula:

$$\alpha + \beta = \{A + B : \ A \in \alpha \ \& \ B \in \beta\},$$

es decir, el conjunto de todas las sumas $A + B$ con A en α y B en β.

(i) Es claro que $\alpha + \beta$ no es vacía. (ii) Tampoco lo es su clase complementaria, pues cualquier número de la forma $a + b$ es menor estrictamente, y por consiguiente distinto, que cualquiera de la forma $A + B$. (iii) Si un número r es mayor que otro de la forma $A + B$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $r = A + B + \delta = A + B'$, un elemento de $\alpha + \beta$. (iv) Dado $A + B$, tomemos un $B' < B$ en la clase β. Entonces tendremos $A + B' < A + B$, lo que termina de probar que $\alpha + \beta$ es una cortadura.

Claramente se ve el cumplimiento de las leyes asociativa y conmutativa de la suma:

$$\text{(I)} \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \qquad \text{(II)} \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

pero la siguiente ley merece alguna consideración:

$$\text{(III)} \quad \alpha + 0^* = \alpha.$$

En primer lugar, es evidente que el primer miembro de la igualdad está incluido en el segundo. Por otro lado, dado $A \in \alpha$ existe también en α un número $A' < A$. Luego,

$A = A' + (A - A')$ pertenece al primer miembro.

Definiremos la *opuesta* de una cortadura α por la siguiente formula:

$$\beta = \{B : \ B > -a \ \text{ para algún } a \text{ en la clase } \widetilde{\alpha}\,\}.$$

Debemos probar que β es una cortadura. En primer lugar es evidente que β no es vacía: basta considerar un número de la forma $-a+1$. Por otro lado, ningún número $-A$ puede estar en β, pues eso implicaría una desigualdad $-A > -a$. Dejamos el resto de la demostración a cargo del lector.

Ahora podemos probar que $\alpha+\beta = 0^*$. En primer lugar, por la definición de β, cualquier número $A + B$ es mayor que uno de la forma $A - a$, que pertenece a 0^* por ser positivo. Eso prueba que $\alpha + \beta \subset 0^*$. Por otro lado, dado $\delta > 0$, en virtud del lema existe un par de números A, a tales que $A - a < \delta$; por consiguiente, hay un número positivo ε tal que $\delta = A - a + \varepsilon = A + B$, un número de $\alpha + \beta$.

La cortadura opuesta de α será denotada por el símbolo $-\alpha$, y como es habitual escribiremos $\alpha - \beta$ en lugar de $\alpha + (-\beta)$.

IV. Si $\alpha \leqslant \beta$, entonces $\alpha + \gamma \leqslant \beta + \gamma$.

La demostración sigue inmediatamente del hecho de que todo B es un A.

3.2. Producto de cortaduras no negativas. Decimos que α es *no negativa* si $\alpha \geqslant 0^*$, en cuyo caso los elementos de α son números positivos. La relación $\alpha > 0^*$ define a las cortaduras *positivas*. El *producto* de cortaduras no negativas se define por la fórmula:

$$\alpha\beta = \{AB : \ A \in \alpha \ \& \ B \in \beta\}.$$

Para probar que la fórmula define una cortadura, observemos que si $r > AB$, entonces para algún número positivo δ se cumple:

$$r = AB + \delta = A(B + \delta/A) = AB'.$$

El resto de la fácil demostración queda a cargo del lector.

V. $\alpha\beta = \beta\alpha$, **VI.** $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, **VII.** $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

La última merece una observación: un número de su segundo miembro es de la forma $AB + A'C$. Suponiendo $A \geqslant A'$, tendremos $AB + A'C \geqslant AB + AC = A(B + C)$, un número del primer miembro.

VIII. $\alpha\, 1^* = \alpha$

En efecto, un número del primer miembro es de la forma Ar con $r > 1$. Por otro lado, para cualquier A existe A' tal que $A' < A$ y por consiguiente, $A = A'(A/A')$ es un número del primer miembro.

La *inversa* de una cortadura positiva α se define por la siguiente fórmula:

$$\beta = \{B : \ B > \frac{1}{a} \ \text{ para algún } \ a > 0 \ \text{ en } \ \widetilde{\alpha}\,\}.$$

Se ve muy fácilmente que β es una cortadura positiva. En primer lugar, la relación $\alpha > 0^*$ significa que α es un subconjunto propio de 0^*. Por consiguiente, hay números positivos en su clase complementaria. Tomando un $a > 0$, tendremos $1/a + 1 = B$, un elemento de β; luego, β no es vacía, y es claro que tampoco lo es su complemento con respecto a $\mathbb{Q}$. Los dos requerimientos que falta considerar se cumplen de modo evidente. Por último, β es positiva porque cualquier número $1/A$ pertenece a $\widetilde{\beta}$.

Merece la pena probar con detalle la fórmula $\alpha\beta = 1^*$. En primer lugar, cada número del primer miembro es de la forma AB, donde B es mayor que un número $1/a$ con $a > 0$; entonces $AB > A/a > 1$, de modo que $AB \in 1^*$. Supongamos $r > 1$ y sea a_0 un número positivo de $\widetilde{\alpha}$. En virtud del lema, dado un número cualquiera $\delta > 0$, por ahora no especificado, existe un par de números $A \in \alpha$, $a \in \widetilde{\alpha}$ tales que $a \geqslant a_0$ y $A - a < \delta$. Entonces tendremos:

$$\frac{A}{a} = \frac{a + (A - a)}{a} = 1 + \frac{A - a}{a} < 1 + \frac{\delta}{a_0} = r,$$

a condición de elegir $\delta = a_0(r - 1)$. Entonces existe un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$r = \frac{A}{a} + \varepsilon = A\left(\frac{1}{a} + \frac{\varepsilon}{A}\right) = AB,$$

lo que prueba la fórmula. Hemos probado que para cualquier $\alpha > 0^*$ existe $\beta > 0^*$ tal que $\alpha\beta = 1^*$.

La fórmula $\alpha\, 0^* = 0^*$ es útil para abreviar la consideración de casos en el siguiente párrafo. También deberemos tener en cuenta que la relación $\alpha < 0^*$ equivale a $-\alpha > 0^*$.

3.3. Producto de cortaduras cualesquiera. El producto se extiende a cualquier par de cortaduras por medio de la siguiente fórmula inspirada en la *regla de los signos*:

$$\alpha\beta = \begin{cases} -\alpha(-\beta) & \text{si } \ \alpha \geqslant 0^*, \ \beta < 0^*; \\ -(-\alpha)\beta & \text{si } \ \alpha < 0^*, \ \beta \geqslant 0^*; \\ (-\alpha)(-\beta) & \text{si } \ \alpha < 0^*, \ \beta < 0^*. \end{cases}$$

Es necesario comprobar que con esta definición se mantienen válidas las leyes fundamentales de la aritmética, que han sido probadas sólo para cortaduras no negativas. Las demostraciones se realizan por consideración del signo de cada factor, comenzando por la comprobación de las siguientes leyes:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad \alpha(-\beta) = -\alpha\beta, \quad (-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta, \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

Las dos primeras exigen considerar cuatro casos que pueden esquematizarse así: $(+,+),(+,-),(-,+),($- la tercera es consecuencia de la anterior, y la última se divide en ocho casos que pueden reducirse a cinco, uno de los cuales ha sido ya considerado, a saber, el caso $(+,+,+)$.

La ley distributiva: $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$ se reduce, en esencia, a la consideración de cuatro casos, según los signos de α, β, γ y $\beta+\gamma$:

$$(+,+,-,+),(+,+,-,-),(+,-,-,-),(-,*,*,*),$$

donde las estrellas indican signos cualesquiera . Para el primer caso basta multiplicar por α la identidad $\beta = (\beta+\gamma)+(-\gamma)$; para el segundo, multiplicar por α la identidad $-\gamma = \beta+(-\beta-\gamma)$ y para el tercero, tendremos: $\alpha(\beta+\gamma) = -\alpha(-\beta-\gamma) = -[\alpha(-\beta)+\alpha(-\gamma)] = -(-\alpha\beta-\alpha\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$, lo que agota las posibilidades que pueden presentarse con α positivo. Para el último caso, podemos escribir: $\alpha(\beta+\gamma) = (-\alpha)(-\beta-\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$.

Ahora es muy fácil extender la fórmula $\alpha\, 1^* = \alpha$ para cualquier α y probar que para cualquier $\alpha \neq 0$ existe β tal que $\alpha\beta = 1^*$.

4. Cuerpos ordenados. En este párrafo definimos la noción abstracta de cuerpo ordenado y mostramos que todo cuerpo ordenado contiene una copia de los números racionales.

Un cuerpo $\mathbb{K}$ se llama *ordenado* si se ha señalado un subconjunto suyo llamado de los *elementos positivos* que goce de las siguientes propiedades:

1. Para cada $a \in \mathbb{K}$: se verifica alguna de las afirmaciones

$$a = 0, \quad a \text{ es positivo}, \quad -a \text{ es positivo}$$

   y estas posibilidades son mutuamente excluyentes.

2. La suma y el producto de elementos positivos son positivos.

Ejemplo 1. El cuerpo de los números racionales se ordena declarando positivo al número racional $r = a/b$ (a y b enteros) si se verifica $ab > 0$.

Ejemplo 2. El cuerpo de las cortaduras es un cuerpo ordenado. Los elementos positivos de este cuerpo son las cortaduras mayores que 0^*.

Ejemplo 3. Diremos que un polinomio no nulo f con coeficientes enteros es *positivo* si su coeficiente líder es positivo. El cuerpo de fracciones racionales con coeficientes enteros se ordena señalando como positiva a una fracción f/g si el producto fg es un polinomio positivo.

En adelante $\mathbb{K}$ será un cuerpo ordenado y los elementos que se consideren serán elementos de $\mathbb{K}$.

Se dice que a es *menor* que b (o bien que b es *mayor* que a) y se escribe $a < b$ (o bien $b > a$) si la diferencia $b - a$ es un elemento positivo. En particular, $a > 0$ si y sólo si a es positivo.

Sugerimos probar las siguientes afirmaciones:

1. $(a < b \ \& \ b < c)$ implica $a < c$

2. $a < b$ implica $a + c < b + c$

3. $a < b$ & $c > 0$ implican $ac < bc$

4. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$

5. $0 < 1$.

6. $0 < 1 < 1+1 < 1+1+1 < \cdots$

4.1. Enteros positivos. Un conjunto $A \subset \mathbb{K}$ se llama *inductivo* si (1º) $1 \in A$ y (2º) Para todo x, si $x \in A$, entonces $x+1 \in A$. Por ejemplo, el conjunto $\mathbb{K}$ y el conjunto de los elementos positivos de $\mathbb{K}$, son inductivos.

Los elementos de $\mathbb{K}$ que pertenecen a cualquier conjunto inductivo (por ejemplo, 1) se llaman *enteros positivos*, y el conjunto de todos ellos será denotado por $\mathbb{N}$. En símbolos: $\mathbb{N} = \bigcap\{A : A \text{ es inductivo}\}$.

De acuerdo con lo anterior, $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo incluido en cualquier conjunto inductivo, de donde se deduce que *cualquier subconjunto inductivo de* $\mathbb{N}$ *es idéntico a* $\mathbb{N}$ (principio de inducción).

Usando el principio de inducción se prueban fácilmente las siguientes afirmaciones:

1. La suma y el producto de enteros positivos son enteros positivos. En símbolos: $\mathbb{N}+\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ y $\mathbb{N}\cdot\mathbb{N} \subset \mathbb{N}$.

2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geqslant 1$.

3. $(\forall n \in \mathbb{N})$ ($n = 1$ ó $n - 1 \in \mathbb{N}$).

4. Si m y n son elementos de $\mathbb{N}$ y $m < n$, entonces $n - m \in \mathbb{N}$.

4.2. Enteros y racionales de $\mathbb{K}$. Los elementos de $\mathbb{K}$ de la forma $m - n$ con m y n enteros positivos, se llaman *enteros de* $\mathbb{K}$, y el conjunto de todos ellos, que será denotado por $\mathbb{Z}$, es un anillo isomorfo al anillo de los números enteros. En símbolos: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Finalmente, el conjunto de los elementos de $\mathbb{K}$ de la forma $a/b = ab^{-1}$ con a y b enteros y $b \neq 0$, que será representado por el símbolo $\mathbb{Q}$, es un cuerpo isomorfo al cuerpo de los números racionales.

En resumen, podemos afirmar que el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ tiene un subcuerpo $\mathbb{Q}$ isomorfo al cuerpo de los números racionales que naturalmente se identifica con este cuerpo. Cada elemento de $\mathbb{Q}$ se identifica con su correspondiente número racional.

4.3. Completitud. Diremos que el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es *completo* si cualquier subconjunto suyo que sea no vacío y tenga una cota superior, tiene una cota superior mínima.

En adelante supondremos que el cuerpo ordenado $\mathbb{K}$ es completo, y bajo esa hipótesis esbozaremos la demostración de que $\mathbb{K}$ es isomorfo al cuerpo de las cortaduras.

En primer lugar se demuestra que $\mathbb{N}$ no tiene ninguna cota superior. [Si tuviera una, como no es vacío tendría una cota superior mínima u. Entonces habría un elemento $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > u - 1$, de donde $n + 1 > u$, lo que sería absurdo, pues $n + 1 \in \mathbb{N}$].

Sigue de lo anterior que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que $1/n < \varepsilon$.

Ahora podemos probar que $\mathbb{Q}$ es *denso* en $\mathbb{K}$, lo que significa que si a y b son elementos de $\mathbb{K}$ que verifican $a < b$, entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $a < r < b$. En efecto: comenzamos por elegir un entero positivo n tal que $\dfrac{1}{n} < b - a$. A continuación consideramos el mínimo entero m tal que $a < \dfrac{m}{n}$. Entonces tendremos $a < \dfrac{m}{n} = \dfrac{m-1}{n} + \dfrac{1}{n} < a + (b - a) = b$.

Finalmente dejaremos como ejercicio probar que si para cada $x \in \mathbb{K}$ denotamos por $\phi(x)$ el conjunto de todos los $r \in \mathbb{Q}$ tales que $r > x$, la aplicación ϕ es un isomorfismo de $\mathbb{K}$ sobre el cuerpo de las cortaduras. Precisamente, deberán probarse las siguientes afirmaciones:

1. Si $x < y$, entonces $\phi(x) < \phi(y)$
2. Si α es una cortadura, existe un x en $\mathbb{K}$ tal que $\alpha = \phi(x)$ [Sugerencia: $x = \inf \alpha$].
3. $\phi(x) + \phi(y) = \phi(x + y)$
4. $\phi(x)\phi(y) = \phi(xy)$ [Basta considerar el caso $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$].

Demostramos la última. Supongamos que $r \in \phi(xy)$, lo que significa que $r > xy$. Es decir, existe un elemento $p > 0$ en $\mathbb{K}$ tal que $r = xy + p$. Podemos elegir un δ en $\mathbb{K}$ que verifique las relaciones $0 < \delta < 1$, $(x + \delta)(y + \delta) < xy + p$ [basta tomar $\delta = \dfrac{p}{1 + x + y + p}$].

A continuación elegimos dos números racionales r_1 y r_2, tales que

$$x < r_1 < x + \delta \ \text{ y } \ y < r_2 < y + \delta.$$

Entonces tendremos $r = xy + p > r_1r_2$, lo que muestra que $r \in \phi(x)\phi(y)$. La recíproca es inmediata.

Hemos probado que dos cuerpos ordenados completos cualesquiera son isomorfos; cualquiera de ellos puede servir como cuerpo real, por lo que viene al caso una cita de Henri Poincare:

> *Los matemáticos no tratan con objetos sino con relaciones entre objetos; por tanto son libres de reemplazar unos objetos por otros mientras se mantengan las mismas relaciones. Para ellos el contenido es irrelevante, ya que sólo están interesados en la forma.*

II. Números reales como operadores

5. Magnitudes. Las leyes que rigen las operaciones entre números reales y cantidades físicas –entre éstas, las geométricas– se aceptan sin discusión en los primeros años de estudio por escasez de tiempo y falta de madurez. De ello se ocupa la teoría de las magnitudes continuas.

El ejemplo más representativo de una magnitud continua es la longitud; las longitudes pueden sumarse y compararse por su tamaño, y no hay quien ignore las propiedades de dichas operaciones que tienen su origen en la experiencia. En la última sección se muestra cómo se formaliza la noción de longitud en un marco axiomático.

Las magnitudes que estudiamos suelen llamarse *magnitudes escalares positivas*; los enunciados con números romanos son los axiomas de la teoría.

5.1. Suma de cantidades. Consideremos un conjunto $\mathcal{M} = \{A, B, C, \ldots\}$ entre cuyos elementos, que llamamos *cantidades* de la magnitud $\mathcal{M}$, se ha definido una ley de composición "+", llamada *suma*, de modo tal que se satisfacen las siguientes propiedades:

I. (asociatividad) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

II. (conmutatividad) $A + B = B + A$.

III. *Existe un elemento* $0 \in \mathcal{M}$ *tal que* $A + 0 = A$ *para cualquier* A.

IV. *Si* $A + B = 0$, *entonces* $A = B = 0$.

DEFINICIÓN. *Decimos que* A *es menor que* B *y escribimos* $A < B$ *o bien* $B > A$, *si existe* $L \neq 0$ *tal que* $B = A + L$. Como de costumbre, $A \leqslant B$ equivale a la disyunción $A < B$ ó $A = B$.

Supondremos que $\mathcal{M}$ no es trivial, es decir, que contiene elementos distintos de 0.

Inmediatamente se deducen las siguientes afirmaciones:

1º) $A \neq 0$ equivale a $A > 0$; 2º) $A < B$ y $B < C$ implican $A < C$.

V. (tricotomía) *Para cualquier par de elementos de* $\mathcal{M}$ *se cumple una y sólo una de las relaciones* $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Corolario. *Si* $A < B$, *entonces* $A + C < B + C$; *si* $A + C = B + C$, *entonces* $A = B$ *(ley cancelativa).*

DEFINICIÓN. *Si* $B < A$, *el único* L *que satisface* $A = B + L$ *se llama* diferencia *entre* A *y* B *y se denota por* $A - B$.

Ejercicio. Probar que las relaciones $A < B < C$ implican $C - B < C - A$.

VI. *Si* $A > 0$, *entonces existe* B *tal que* $0 < B < A$.

Las fórmulas

$$1A = A, \quad (n+1)A = nA + A,$$

definen de modo inductivo el producto del entero positivo n por el elemento A. Por inducción se prueban las fórmulas:

$$(m+n)A = mA + nA, \qquad m(nA) = (mn)A$$
$$n(A+B) = nA + nB, \qquad n(A-B) = nA - nB.$$

Notemos que estamos habilitados para escribir sin ambigüedad mnA en lugar de $m(nA)$ o $(mn)A$.

Dejamos como ejercicio probar las siguientes afirmaciones:

(1) Si $nA = 0$, entonces $A = 0$

(2) Si para algún $A \neq 0$, $mA = nA$, entonces $m = n$

(3) Si $B \leqslant A$, entonces $B = A - (A - B)$

VII. (continuidad). *Si $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subconjuntos no vacíos de $\mathcal{M}$ con la propiedad de que cualquier elemento del primero es menor que cualquiera del segundo, entonces existe $B \in \mathcal{M}$ tal que $H \leqslant B \leqslant K$ para cualquier H del primer conjunto y cualquier K del segundo.*

Teorema 1. (divisibilidad). *Dados A y n, existe un único B tal que $nB = A$.*

Para su demostración necesitamos el siguiente lema.

Lema. *Si $A > 0$, entonces para cualquier n existe $B > 0$ tal que $nB < A$.*

En efecto, el axioma VI permite escribir A en la forma $A = B_1 + C_1$, donde $0 < B_1 \leqslant C_1$. Luego $2B_1 \leqslant A$; y aplicando el mismo argumento a B_1, podemos hallar $B_2 > 0$ tal que $2B_2 \leqslant B_1$, de donde $2^2 B_2 \leqslant A$.

Por inducción, para cada entero positivo n existe un elemento $B_n > 0$ tal que $2^n B_n \leqslant A$, de modo que $nB_n < 2^n B_n \leqslant A$, lo que demuestra el lema.

Para probar el teorema basta considerar el caso $A > 0,\ n > 1$. En tal situación, definamos una partición de $\mathcal{M}$ en dos clases: $\mathcal{H} = (H)$ y $\mathcal{K} = (K)$, definidas por las relaciones $nH \leqslant A$ y $nK > A$, respectivamente. Es claro que $0 \in \mathcal{H}$ y $A \in \mathcal{K}$; también que cada H es menor que cualquier K.

En virtud del postulado de continuidad existe un elemento B tal que $H \leqslant B \leqslant K$ para cualquier H de la primera clase y cualquier K de la segunda. Veamos ahora que cualquiera de las relaciones $nB < A$ y $nB > A$ es imposible. Si fuera $nB < A$, podríamos hallar $L > 0$ tal que $nL < A - nB$; es decir, $n(B + L) < A$, lo que es absurdo. Si fuera $nB > A$, existiría un elemento $L > 0$ tal que $nL < nB - A < nB$, de donde $n(B - L) > A$, lo que también es absurdo. Luego, $nB = A$ como queríamos probar. La unicidad de B se demuestra fácilmente.

Definición. *Dados A y n, el único B que verifica $nB = A$ se denota por A/n. En particular, $A/1 = A$.*

Teorema 2. (propiedad de Arquímedes). *Si $0 < B < A$, entonces existe n tal que $nB > A$.*

La siguiente demostración se debe a Otto Stolz. Suponiendo que tal n no existe, definamos una partición de $\mathcal{M}$ en dos clases (H) y (K), según los siguientes criterios:

$$(\mathbf{a})\ (\forall n)\ nH \leqslant A \quad \text{y} \quad (\mathbf{b})\ (\exists n)\ nK > A.$$

Es claro que B pertenece a la primera clase, A a la segunda, y que cada H es menor que cualquier K. Además, la clase de los K no tiene mínimo: en efecto, si $nK > A$, existe un $L > 0$ tal que $nL < nK - A$, de donde $n(K - L) = nK - nL > A$.

En tal situación, el postulado de continuidad permite afirmar la existencia de un elemento C que verifica $H \leqslant C < K$ para cualquier H de la primera clase y cualquier K de la segunda.

Puesto que $C + B > C$, existe un n tal que $n(C + B) > A$, y por consiguiente,

$$2n\,\frac{C + B}{2} > A,$$

lo que es absurdo, pues $\dfrac{C + B}{2} \leqslant C$. Q.E.D.

5.2. Producto por números fraccionarios. Es conveniente, para lo que sigue, introducir algunas definiciones.

Definición. *Si f y g son funciones de $\mathcal{M}$ en sí mismo, la suma y el producto de ambas se definen por medio de las fórmulas*

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A), \qquad (fg)(A) = f(g(A)),$$

y en forma abreviada escribiremos fA en lugar de $f(A)$.

A la luz de esta definición, las reglas operativas

$$(m + n)A = mA + nA \quad \text{y} \quad m(nA) = (mn)A$$

expresan que *a la suma y al producto de los números* m *y* n *corresponden la suma y el producto de las funciones:*

$$A \to mA \quad \text{y} \quad A \to nA.$$

Por lo visto anteriormente, dichas funciones coinciden si y sólo si $m = n$. Estas propiedades justifican la identificación del entero positivo n con la función $A \to nA$, que adoptamos de aquí en adelante. Más generalmente:

Definición. *Si* m *y* n *son enteros positivos, denotamos por* m/n *la función de* $\mathcal{M}$ *en sí mismo definida por el siguiente esquema:*

$$A \to m(A/n),$$

y escribimos $\dfrac{m}{n}A$ *o bien* $(m/n)A$ *para denotar la imagen del elemento* A*.*

La relación $\dfrac{n}{1}A = n\,\dfrac{A}{1} = nA$ conduce naturalmente a la igualdad $\dfrac{n}{1} = n$.

Dejamos a cargo del lector la demostración de las siguientes afirmaciones:

1. $\dfrac{m}{n}A = \dfrac{mA}{n}$
2. $\dfrac{A/n}{k} = \dfrac{A}{nk}$
3. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{mk}{nk}$
4. $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ si y sólo si $mq = pn$
5. $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} = \dfrac{mq + pn}{nq}, \qquad \dfrac{m}{n}\dfrac{p}{q} = \dfrac{mp}{nq}$

Las últimas fórmulas justifican la identificación del número racional m/n con la correspondiente función de $\mathcal{M}$ en sí mismo, que adoptaremos en adelante.

Definición. *El elemento* $(m/n)A$ *se llama producto del número* m/n *por el elemento* A*.*

Siendo r y s racionales positivos, es fácil ver que si $A > 0$ y $r < s$, entonces $rA < sA$.

5.3. Producto por números reales. El producto del número real positivo ρ por un elemento $A > 0$ se define como el único elemento B de $\mathcal{M}$ que satisface $rA < B < r'A$ para cualquier par de números racionales positivos r y r' que verifiquen $r < \rho < r'$. La existencia y la unicidad de B están garantizadas por el postulado de continuidad y la propiedad de Arquímedes. Conviene extender la definición poniendo $0A = 0$ y $\rho 0 = 0$.

Teorema 3. $\rho A + \sigma A = (\rho + \sigma)A, \quad \rho(\sigma A) = (\rho\sigma)A.$

Haremos la demostración suponiendo que $A > 0$ y que los números ρ y σ son positivos.

1º) Sean t y t' números racionales positivos que verifican $t < \rho + \sigma < t'$. Entonces existen racionales positivos r, r', s, s' tales que

$$r < \rho < r', \quad s < \sigma < s', \quad t < r + s, \quad r' + s' < t'.$$

En tales condiciones tendremos:

$$tA < (r + s)A = rA + sA < \rho A + \sigma A < r'A + s'A = (r' + s')A < t'A,$$

lo que demuestra la primera fórmula, en virtud de la unicidad del producto.

2º) Sean t y t' racionales positivos que verifican $t < \rho\sigma < t'$. Entonces existen racionales positivos r, r', s, s' tales que

$$r < \rho < r', \quad , \quad s < \sigma < s', \quad t < rs, \quad r's' < t',$$

y en tales condiciones tendremos:

$$tA < (rs)A = r(sA) < r(\sigma A) < \rho(\sigma A) < r'(\sigma A) < r'(s'A) = (r's')A < t'A,$$

lo que demuestra la segunda fórmula.

El siguiente –último– teorema afirma la existencia de una razón entre A y B, siempre que sea $B > 0$.

Teorema 4. *Si $B > 0$, entonces para cualquier A existe un único $\rho \geqslant 0$ tal que $A = \rho B$.*

La demostración es inmediata si $A = 0$. Suponiendo $A > 0$, definimos ρ como la mínima cota superior de los números racionales positivos r tales que $rB < A$. Es fácil comprobar que $r < \rho < r'$ implica $rB < A < r'B$, lo que demuestra que $A = \rho B$. La unicidad del número ρ es también inmediata.

El número ρ al que se refiere el teorema anterior se llama *razón* o *cociente* entre A y B y se escribe $\rho = A/B$ o bien $\rho = A : B$.

Corolario. *Si $U > 0$ y $\beta > 0$, entonces $(\alpha U)/(\beta U) = \alpha/\beta$.*

Generalmente se elige como unidad un elemento $U > 0$. En tal circunstancia el número $\alpha = A/U$ es la *medida* de A con respecto a U, y el corolario suele expresarse diciendo que *la razón entre dos elementos de $\mathcal{M}$ es igual al cociente de sus medidas con respecto a una misma unidad.*

III. La longitud como una magnitud continua

Denotamos por PQ el segmento con extremos P y Q en ese orden; los segmentos por letras latinas minúsculas: a, b, c, etc., y para afirmar que a es *congruente* con b escribimos $a \equiv b$. Para la congruencia entre segmentos adoptamos los siguentes postulados:

1. *La congruencia es una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva).*

2. *El segmento PQ es congruente con QP.*

3. *Si un punto R del segmento PQ y un punto R' del segmento $P'Q'$ son tales que $PR \equiv P'R'$ y $RQ \equiv R'Q'$, entonces $PQ \equiv P'Q'$.*

4. *Ningún segmento es congruente con otro segmento propiamente incluido en el primero.*

5. *Dados: un segmento a y una semirrecta de origen O, existe un punto P de la misma tal que $OP \equiv a$* (el punto P es único en virtud del axioma anterior).

6. *Si P y Q son puntos distintos, existe un punto R que sigue a P y precede a Q en el orden PQ del segmento.*

7. (Continuidad) *Si el segmento PQ se divide en dos partes de suerte que:* 1º*) todo punto de PQ pertenece a una de ellas;* 2º*) el extremo P pertenece a la primera parte y Q a la segunda;* 3º*) cualquier punto de la primera parte precede a cualquier punto de la segunda en el orden PQ del segmento, entonces existe un punto R de PQ tal que todo punto del segmento que preceda a R pertenece a la primera parte, y todo punto del mismo que siga a R pertenece a la segunda.*

Definición. *La clase de equivalencia del segmento a con respecto a la relación de congruencia se llama longitud de a y se denota por $\overline{a}$.*

Denotamos las longitudes por letras mayúsculas: A, B, C, etc. y el conjunto de todas ellas por $\mathcal{L}$.

Para definir la suma de las longitudes $A = \overline{a}$ y $B = \overline{b}$, consideramos dos semirrectas opuestas con origen en un punto O. En una de ellas elegimos un punto P tal que $OP \equiv a$, y en la semirrecta opuesta un punto Q tal que $OQ \equiv b$. En estas condiciones, definimos $A + B$ como la clase de equivalencia del segmento PQ; es decir, $A + B = \overline{PQ}$.

En base a los axiomas se prueba que la suma de longitudes está bien definida y goza de las propiedades asociativa y conmutativa. Los mismos axiomas permiten probar la ley cancelativa de la suma: si $A+B = A+C$, entonces $B = C$. Finalmente, los segmentos cuyos extremos coinciden son congruentes entre sí y definen la longitud nula. En efecto,

$$\overline{PP} + \overline{PQ} = \overline{PQ} = \overline{PQ} + \overline{QQ},$$

y la conclusión se obtiene aplicando la ley cancelativa.

Bibliografía

[1] T. Dantzig, *Number, The Language of Science*, The Macmillan Co., 1954.

[2] R. Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers*, Dover, 1963.

[3] G.H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, 1958.

[4] F. Enriques, U. Amaldi, A. Guarducci, G. Vitali y G. Vailatti (con prólogo de J. Rey Pastor) *Fundamentos de la Geometría*, Editorial Ibero-Americana, Buenos Aires, 1948.

[5] N. Fava, G. Fernández y H. Pérez, *Utilización de los números reales en la Geometría y en la Física*, Revista de Educación Matemática, UMA, vol. 23, nº3, 2008.

[6] H. Lebesgue, *Sur la mesure des grandeurs*, L'Enseignement mathématique, Tom XXXI (1931) a XXXIV (1935).