universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fascículo 1
páginas 1-51

instituto de matemática
san luis
argentina

REVISTA MATEMATICA CUYANA

La Revista Matemática Cuyana está destinada a la publicación de trabajos originales en los campos de la matemática pura y aplicada, y aparece en forma de fascículos sueltos sin periodicidad fija, anualmente reunidos en un volumen de 250 páginas, aproximadamente.

Castellano, inglés, alemán, francés e italiano, son los idiomas de la Revista.

Los artículos para la Revista deben ser escritos a máquina con doble espacio y enviados a uno de los miembros del Comité de Redacción.

Los colaboradores tienen derecho a 50 tiradas aparte gratis, de sus artículos, y podrán, si lo desean, recibir hasta 150 tiradas aparte a precio de costo.

En todo lo referente a suscripciones, adquisición de números atrasados, etc., dirigirse al Director del Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, San Luis.

universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fasciculo 1
páginas 1-51

instituto de matemática
san luis
argentina

Particiones en conjuntos de números ordinales*

Por RODOLFO RICABARRA

1. Introducción. El presente artículo consta de tres partes relativamente independientes que presentan, sin embargo, suficientes rasgos comunes en cuanto a método y demostración como para formar parte de un mismo capítulo de la teoría de los números ordinales. La primera parte trata de la profundización de un teorema de Alexandroff-Urysohn sobre funciones de números ordinales en números ordinales. La segunda parte trata sobre la existencia de particiones de una sección de números ordinales en conjuntos positivos (ver definiciones más adelante), con especial énfasis en la intervención de de diferentes axiomas de elección de fuerza creciente. La tercera y última parte está dedicada a dar un teorema de representación de los cuadros ramificados de conjuntos deducidos de particiones de una sección de números ordinales (teorema 7). En esta parte se estudian propiedades ligadas al « orden de anulación » de conjuntos de números ordinales, de interés independiente de la teoría de sucesiones ramificadas.

Este trabajo está orientado hacia — y en verdad ha surgido de — una teoría sobre conjuntos ordenados y ramificados, desarrollada en un seminario sobre el problema de Suslin que funcionara durante más de dos años en Mendoza, La Plata y Bahía Blanca sucesivamente. Deseo dejar sentado aquí mi agradecimiento a los miembros de ese seminario, en especial a la Sta. M. L. Bruschi a quien se deben el teorema 5, § 3, y el lema 4, § 4. Los problemas anunciados en el curso de este artículo, en especial los enunciados al final, tienen mayor interés que el que pueda deducirse automáticamente del texto, porque son cuestiones a decidir dentro de la teoría de conjuntos ordenados y ramificados a la que acabamos de referirnos. Esta teoría, todavía no publicada, será presentada próximamente en forma de libro en una edición de la Universidad Nacional del Sur.

* Recibido el 9 de octubre de 1957.

2. El teorema de la función retractante. En el transcurso de este artículo se considerarán exclusivamente números ordinales y conjuntos de números ordinales contenidos en la sección de los números ordinales menores que el primer ordinal no numerable. Indicaremos con ω_1 a este ordinal, y con $[0, \omega_1)$ a la correspondiente sección. Es cierto que resultados análogos a los que obtendremos son válidos cuando se reemplaza ω_1 por ω_α (un número inicial de cualquier clase de Cantor), pero no nos detendremos en hacer los desarrollos correspondientes. El conjunto $[0, \omega_1)$ puede considerarse, además de conjunto bien ordenado, como un espacio topológico en su topología de intervalo: un conjunto es *cerrado* si contiene los límites de sus sucesiones crecientes. Está claro pues lo que se entiende por «una variable ordinal que converge a ω_1». Diremos que un conjunto A, subconjunto de $[0, \omega_1)$, es *cofinal* en ω_1 (o más propiamente, cofinal en $[0, \omega_1)$), si para todo $\beta < \omega_1$ existe $\alpha \in A$, tal que $\beta \leq \alpha$. Es claro que A es cofinal en ω_1 si y sólo si es no numerable. Sea f una función unívoca cuyo dominio D_f es cofinal en ω_1 y cuyos valores son elementos de $[0, \omega_1)$. Diremos que f converge hacia ω_1 con el argumento si dado $\beta \in [0, \omega_1)$ existe $\alpha \in [0, \omega_1)$ tal que para todo $\gamma \in [\alpha, \omega_1) \cap D_f$ se tiene $f(\gamma) \geq \beta$. Es claro que f, supuesto D_f cofinal en ω_1, converge hacia ω_1 con el argumento si y sólo si f no toma el mismo valor una cantidad no numerable de veces. Si llamamos *conjunto de nivel* de f a un conjunto imagen completa inversa por la función f de un elemento (número ordinal) entonces podemos decir que, supuesto D_f cofinal en ω_1, para que f no converja a ω_1 con el argumento es necesario y suficiente que f tenga un conjunto de nivel no numerable.

Diremos que f es un función *retractante*, siempre supuesto dominio y contradominio en $[0, \omega_1)$, si $f(\alpha) < \alpha$ para todo α en el dominio de f. Alexandroff-Urysohn [1], observaron el siguiente hecho:

> *toda función retractante definida en $(0, \omega_1)$ tiene un conjunto de nivel no numerable, o sea no converge hacia ω_1 con el argumento.*

La demostración de esta afirmación es sencilla y no la expondremos porque está contenida en la demostración del teorema 1. Llamaremos *teorema de la función retractante* a aquella afirmación de Alexandroff-Urysohn. El objetivo de este parágrafo es dar el dominio máximo de validez del teorema de la función retractante, en el sentido formulado explícitamente en los teoremas 1, 3, 3'. No nos interesan las generalizaciones a ordinales iniciales superiores ya que ellas son enteramente triviales.

Los conjuntos no numerables más interesantes (subconjuntos de $[0, \omega_1)$) son los cerrados cofinales. Un ejemplo es el conjunto de los números indescomponibles (coincidentes con todos sus restos no nulos), o sea los de la forma ω^α (Cantor). Intuitivamente los cerrados cofinales son conjuntos con «muchos» elementos. Quizás la mejor manera de transmitir esta idea es demostrando que

> *la intersección de los conjuntos de una clase numerable de cerrados cofinales es un cerrado cofinal.*

Sea (F_n), $0 \leq n < \omega$, la familia numerable dada de cerrados cofinales. Definimos por inducción una sucesión doble α_n^m, $0 \leq n, m < \omega$ tomando $\alpha_0^0 =$ primer elemento de F_0, $\alpha_1^0 =$ primer elemento de F_1 mayor que α_0^0, $\alpha_n^0 =$ primer elemento de F_n mayor que α_{n-1}^0.... Luego $\alpha_0^1 =$ primer elemento de F_0 mayor que todos los α_n^0, $\alpha_1^1 =$ primer elemento de F_1 mayor que α_0^1, etc. La idea es clara. Supuesto definidos todos los α_n^m por inducción, resulta que $\lim \alpha_n^m$ para $m \to \omega$, es un número independiente de n, que pertenece a todo F_n, o sea es un punto común a todos los F_n, o sea la intersección de los F_n, $0 \leq n < \omega$, es no vacía. Como el razonamiento puede repetirse con la familia de cerrados cofinales $F_n^\alpha = F_n \cap [\alpha, \omega_1)$, deducimos que los F_n tienen puntos comunes tan «grandes» como se quiera o sea que la intersección $\bigcap_n F_n$ es cofinal en ω_1, que era lo que debíamos demostrar.

En particular esto nos muestra que no hay dos cerrados cofinales disjuntos, o también, para que dos conjuntos cerrados sean disjuntos es necesario que uno por lo menos sea numerable.

Los cerrados cofinales tienen pues la siguiente propiedad: tienen una cantidad no numerable de puntos comunes con el conjunto de los puntos de acumulación de cualquier conjunto no numerable. Llamaremos *positivo* a un conjunto que tenga esta propiedad. O sea, un conjunto se dirá positivo si intersecta a todo cerrado cofinal. La clase de los conjuntos positivos incluye a los cerrados cofinales, a los que contienen cerrados cofinales, y conjuntos esencialmente diferentes de estos, como se verá en el § 3. Llamaremos *nulo* a un conjunto que no es positivo. O sea un conjunto es nulo si es disjunto con algún cerrado cofinal. Por lo que hemos visto hasta ahora tenemos

LEMA. *Los conjuntos nulos forman un σ-ideal de conjuntos que contiene a los complementarios de los conjuntos cerrados cofinales y por tanto en particular a los conjuntos numerables.*

La vinculación entre los conjuntos nulos y el teorema de la función retractante está dada por el siguiente teorema (Neumer [2], Satz 2 y 3).

TEOREMA. *Sea* A *un conjunto cofinal en* $[0, \omega_1)$. *Para que exista una función rectractante* f *con dominio* $D_f = A$ *que converja a* ω_1 *con el argumento, es necesario y suficiente que* A *sea un conjunto nulo que no contiene al cero.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que la condición es suficiente. Sea B un cerrado que contiene al cero, cofinal y disjunto con A. Para cada $\alpha \in A$ definimos $f(\alpha)$ = último elemento de B menor que α, existente por ser B cerrado. Es fácil ver que f es una función retractante que converge a ω_1 con el argumento.

Veamos que la condición es necesaria. Sea A un conjunto cofinal en ω_1 y f una función retractante con $D_f = A$ convergente a ω_1 con el argumento. Evidentemente A no contiene al cero. Vamos a definir por inducción un conjunto cerrado cofinal $B = \{\beta_\alpha\}$, cuyo conjunto de puntos de acumulación (el derivado de B) va a ser un cerrado cofinal disjunto de A. Ponemos $\beta_0 = 0$. Supuesto definido β_α definimos $\beta_{\alpha+1}$ como el primero de los elementos de A, tales que en todos los números mayores o iguales que ellos, f toma valores mayores que β_α. Si α es de segunda especie y β_γ está definido para todo γ con $\gamma < \alpha$, defimos $\beta_\alpha = \lim \beta_\gamma \; (\gamma < \alpha)$. El conjunto $B = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{\beta_\alpha\}$ es cerrado y sus puntos de acumulación son los β_α con α de segunda especie. Veamos que estos puntos no pertenecen a A. En efecto, si $\beta_\alpha \in A$, la función f está definida sobre β_α, y tenemos $f(\beta_\alpha) < \beta_\alpha$. Si α es de segunda especie, entonces existe un $\gamma < \alpha$ tal que

$$f(\beta_\alpha) < \beta_\gamma < \beta_{\gamma+1} < \beta_\alpha.$$

lo que contradice a la definición de $\beta_{\gamma+1}$.

Esto termina la demostración del teorema.

Q. E. D.

El teorema 1 admite un perfeccionamiento. En efecto, la parte no trivial de este teorema dice que toda función retractante cuyo dominio es un conjunto positivo, tiene un conjunto de nivel no numerable. El perfeccionamiento consiste en mostrar que la función tiene con seguridad un conjunto de nivel positivo. Esto lo deducimos de la consideración de una situación ligeramente más general (teorema 2).

En los siguientes dos teoremas usamos el axioma de elección.

Teorema 2. *Sea* (A_α) *una clase de conjuntos disjuntos dos a dos (subconjuntos de* $[0, \omega_1)$*), e indiquemos con* X *al conjunto formado por los primeros elementos de los conjuntos* A_α. *Entonces, condición necesaria y suficiente para que* $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ *sea un conjunto nulo es que* X *y cada* A_α *sean nulos.*

Demostración. Bastará demostrar que si todos los A_α son nulos y X es nulo, entonces $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ es nulo. Para eso definiremos una función retractante con dominio $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, que en caso que $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ sea cofinal en ω_1, convergirá a ω_1 con el argumento. Si $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ no es cofinal entonces es numerable y por tanto nulo. Nuestra función retractante la definimos por partes: si ξ_α es el primer elemento de A_α, definimos por teor. 1, y para cada α, una función retractante f_α con dominio $A_\alpha - \{\xi_\alpha\}$, a valores mayores o iguales que ξ_α (lo cual siempre es evidentemente posible) y convergente hacia ω_1 con el argumento si el dominio es cofinal en ω_1; si el dominio es numerable tomamos la función idénticamente igual a ξ_α. Sobre X definimos, otra vez usando la hipótesis que X es nulo y aplicando el teor. 1, una función g retractante, salvo quizás en el 0 si X contiene el 0, y convergente hacia ω_1 con el argumento, si X es no numerable; si X es numerable definimos g idénticamente igual a 0. La función f cuya restricción a X coincide con g y cuya restricción a $A_\alpha - \{\xi_\alpha\}$ coincide con f_α, está definida sobre $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ (salvo eventualmente en el 0 si $0 \in \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$), es retractante y converge hacia ω_1 con el argumento, si su dominio es no numerable — por otra parte el único caso que interesa. Dejamos la verificación al lector.

El teorema 2 puede aplicarse al caso en que se tiene dada una función definida sobre un dominio, digamos no numerable, considerando la clase de los conjuntos de nivel de dicha función. Ellos forman una clase de conjuntos disjuntos dos a dos. Se obtiene el

TEOREMA 3. *Toda función retractante cuyo dominio es un conjunto positivo tiene un conjunto de nivel positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la clase de los conjuntos de nivel de la función dada. Bastará demostrar que el conjunto X (definición análoga a la dada en el teorema 2) es nulo, para inferir que alguno de los conjuntos de nivel es positivo. Pero sobre X la función retractante dada es biunívoca, luego ciertamente converge hacia ω_1 con el argumento, si X es no numerable (único caso dudoso). Luego por teor. 1 X es nulo, y el teorema está demostrado.

Un razonamiento análogo permite decir que todo conjunto contenido en el dominio de una función retractante y que intersecta a cada conjunto de nivel en un conjunto nulo es nulo.

El teorema 3 permite la generalización del teorema 1 a varias funciones retractantes.

TEOREMA 3'. *Para toda familia finita de funciones retractantes definidas sobre un conjunto positivo existe un subconjunto positivo del dominio en el cual son constantes todas las funciones de la familia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (f_i), $1 \leq i \leq n$, la familia de funciones dada. Por el teorema 3 existe un conjunto de nivel de f_1 que es positivo. Se restringe la familia (f_i), $2 \leq i \leq n$, sobre dicho conjunto de nivel, y se repite el razonamiento. Una inducción finita nos da la tesis del teorema.

Se verá en el § 3 que el teorema 3' no puede generalizarse a familias infinitas, ni siquiera numerables.

Otra aplicación del teorema 1 la tenemos en lo que llamaremos *el teorema de la función progresante*. La función f con dominio contenido en $[0, \omega_1)$ se dirá progresante si su valor es mayor que el argumento, es decir si $f(\alpha) > \alpha$ para todo α en el dominio de la función.

TEOREMA 4. *El contradominio de una función progresante es un conjunto nulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f la función progresante dada y admitamos que su contradominio es no numerable. Para cada β del contradominio de f sea $g(\beta) =$ el primero de los ordinales α tales que $f(\alpha) = \beta$. Es fácil ver que g es una función retractante, biunívoca, y con dominio igual al contradominio de f. De la biunicidad sigue que g converge a ω_1 con el argumento. Luego el teorema 1 nos da la tesis.

La naturaleza paradójica del teorema 4 puede apreciarse mejor en la siguiente formulación: si en cada semirrecta ordinal (α, ω_1) se elige un elemento, entonces el conjunto de elementos así seleccionado es necesariamente un conjunto nulo. El resultado se mantiene si en lugar de elegir un punto se elige un conjunto nulo en cada semirecta. Esto resulta del teorema 2 ya que los conjuntos nulos elegidos pueden suponerse disjuntos — sin pérdida de generalidad — y el conjunto de los primeros elementos de estos conjuntos nulos es nulo por el teorema 4 (correspondiendo al caso de elegir un solo punto en cada semirrecta).

Estos problemas sobre funciones retractantes están estrechamente vinculados con teoremas de puntos fijos. Nos limitaremos a dar un ejemplo. Si f es una función definida en todo $[0, \omega_1)$ tal que $f(\alpha) \leq \alpha$ para todo α, y f converge hacia ω_1 con el argumento, entonces del teorema 1 resulta que el conjunto $\{\alpha : f(\alpha) = \alpha\}$, conjunto de puntos fijos de f, contiene un cerrado cofinal en ω_1.

Observación 1. No sabemos si es posible eliminar la intervención del axioma de elección en los teoremas 2, 3, 3′. Más precisamente no sabemos si es posible dar un método constructivo que permita, dado un conjunto nulo, construir un cerrado cofinal disjunto con él, o, equivalentemente, construir una función retractante que tenga al conjunto nulo dado por dominio y que sea convergente a ω_1 con el argumento.

3. Existencia de n-particiones en conjuntos positivos. El ejemplo más elemental de conjunto positivo es el de cerrado cofinal en ω_1. Más generalmente es positivo cualquier conjunto del filtro engendrado por los cerrados cofinales en ω_1. Si indicamos con (CC) a este filtro, tenemos:

Condición necesaria y suficiente para que la clase de los conjuntos positivos coincida con (CC) es que (CC) sea un ultrafiltro, o equivalentemente, que la clase de los conjuntos positivos sea un filtro, o también que no existan dos conjuntos positivos disjuntos.

Un teorema de Ulam [3], pág. 145, muestra que existen conjuntos positivos disjuntos si se acepta el axioma de elección. Sin embargo parece imposible (por lo menos parece muy difícil), construir por inducción transfinita un conjunto positivo cuyo complementario sea tambien positivo, sin usar ninguna forma del axioma de elección, y parece razonable preguntarse si el postulado que (CC) sea un ultrafiltro no será compatible con los demás axiomas de una teoría de conjuntos donde no hay axiomas de elección.

Si llamamos n-partición de un conjunto a especificar a una partición en n conjuntos (n es un número cardinal), podemos decir que el objetivo de este parágrafo es mostrar que uno de los axiomas zermelianos más débiles que se conocen (el axioma (Z_0), abajo) implica la existencia de una 2-partición de $[0, \omega_1)$ en conjuntos positivos, mientras que aumentando la fuerza del axioma (axioma (II), abajo) se obtienen particiones en $\aleph_1$ conjuntos positivos. La idea parece ser que a medida que se aceptan axiomas zermelianos más y más fuertes se obtienen n-particiones en conjuntos positivos con n más y más grande.

Llamaremos n-*función de partición*, o brevemente n-función a una función definida sobre una clase de conjuntos a especificar en cada caso, que asocia a cada conjunto de la clase una partición de dicho conjunto en n conjuntos no vacíos. Las n-funciones más sencillas son las que se obtienen « por semejanza » a partir de una n-partición de $[0, \omega_1)$ fija; estas n-funciones están definidas sobre la clase de todos los conjuntos no numerables y para cada uno de estos conjuntos la partición se define a través del isomorfismo ordinal « canónico » del $[0, \omega_1)$ con el conjunto no numerable dado, como la imagen de la partición dada en $[0, \omega_1)$. Estas n funciones se dirán *deducidas de una* n-*partición*. Llamaremos n-p-*función* a una n-función de partición cuyo dominio es la clase de los conjuntos *positivos*, que parte a cada positivo en n componentes *positivas*.

Indicaremos con (Z_0) al axioma zermeliano que dice que $\aleph_1$ es menor o igual que $2^{\aleph_0}$, o sea que pide la existencia de un conjunto de números reales de potencia $\aleph_1$.

TEOREMA 5 (BRUSCHI). (Z_0) *implica la existencia de una* 2-p-*función.*

DEMOSTRACIÓN. Como el conjunto de las permutaciones de los enteros naturales tiene la potencia del continuo, (Z_0) equivale a la existencia de una familia (h_α), $0 \leq \alpha < \omega_1$ de tales permutaciones que supondremos diferentes dos a dos. Vamos a dar explícitamente para cada conjunto A positivo una 2-partición en conjuntos positivos.

Sea A un conjunto positivo dado y consideremos la subfamilia de los h_α con los índices α restringidos a A. Por hipótesis cada h_α es una correspondencia biunívoca del conjunto $(0, 1, 2, ...)$ sobre sí mismo. Si definimos

$$A_n^0 = \{ \alpha \in A : h_\alpha(0) = n \},$$

la clase (A_n^0), $n = 0, 1, \ldots$, forma una partición numerable de A y por tanto existe un primer n tal que A_n^0 es positivo. Llamémoslo A^0. Supuesto definido A^k definimos A^{k+1}, como el primero de los

$$A_n^{k+1} = \{ \alpha \in A^k : h_\alpha (k+1) = n \}$$

que sea un conjunto positivo.

Tenemos

$$A \supset A^0 \supset A^1 \supset \ldots \supset A^k \supset \ldots ,$$

con relación no necesariamente estricta de « contenido ». La intersección de esta sucesión decreciente de conjuntos es o vacía o contiene exactamente un número ordinal, pues si α y β están en la intersección, las h_α, h_β deben coincidir sobre todos los enteros $0, 1, \ldots$, y por tanto deben ser idénticas.

Por tanto existe un primer k tal que $A - A^k$ es positivo, ya que lo contrario implicaría que salvo a lo sumo un elemento, A sería reunión numerable de conjuntos nulos, lo que es imposible.

Definimos nuestra 2-p-función como aquella que asocia a A las componentes A^k, $A - A^K$ donde $A - A^k$ es el primer conjunto positivo recién indicado.

Esto termina la demostración.

Q. E. D.

Corolario. (Z_0) *implica la existencia de una* χ_0-p-*función.*

Basta reiterar la 2-p-función dada por el teorema precedente y por inducción finita quedará definida la función pedida en la tesis del corolario. Convenimos en iterar la 2-p-función sobre la componente que tiene el menor primer elemento (de los dos primeros elementos correspondientes a las dos componentes).

Observación 2. No sabemos si vale la recíproca del teorema 5. Tampoco sabemos si la existencia de una 2-partición en conjuntos positivos de $[0, \omega_1)$ implica la existencia de una 2-p-función. A este respecto vale la pena observar que la 2-función deducida de una 2-partición de $[0, \omega_1)$ en conjuntos positivos *no es* una 2-p-función, porque al iterar por semejanza la 2-partición dada en cualquiera de sus dos componentes aparece un conjunto nulo (§ 4, Lema 4). Esto da fuerte evidencia en favor de que la hipótesis: « existe una 2-partición en conjuntos positivos de $[0, \omega_1)$ » es una hipótesis zermeliana estrictamente más débil que (Z_0), e incluso más débil que la hipótesis de existencia de una 2-p-función. Quizá estemos aquí en presencia de tres axiomas zermelianos de fuerza creciente estrictamente diferentes. No lo sabemos.

Indiquemos con (II) al conjunto de los ordinales de segunda especie. Para cada conjunto A indiquemos con Π_A el conjunto de todas las funciones selectoras que asocian con cada $\alpha \epsilon A \cap (\mathrm{II})$ una sucesión de tipo ω estrictamente creciente y convergente hacia α. Π_A puede concebirse evidentemente como un producto cartesiano. Cuando A incluye a (II) escribiremos Π en lugar de Π_A. Indicaremos con (Π_A) al axioma zermeliano que pide que Π_A sea no vacío (en cuyo caso tiene la potencia $2^{\aleph_1}$, como es fácil ver).

Se sabe, y es fácil demostrar, que (Π) aquivale a dar una sucesión doble (n_β^α), $0 \leq \beta < \alpha$, $\omega \leq \alpha < \omega_1$, donde para cada α, la sucesión

$$n_0^\alpha, \ \ldots, \ n_\beta^\alpha, \ \ldots \ (\beta < \alpha)$$

incluye exactamente una vez a cada número natural (es una reordenación). Usando el axioma (Π) en esta forma Ulam da una demostración muy sencilla de un teorema ([3], pág. 145), que incluye como caso particular el siguiente:

Teorema 6. (Π) *implica la existencia de una* $\aleph_1$-p-*función.*

Demostración. (de Ulam). Primeramente se define una matriz de conjuntos $A_n^\beta = \{\alpha : n_\beta^\alpha = n\}$. Es inmediato la verificación de las siguientes propiedades : $\bigcup_n A_n^\beta = (\beta, \omega_1)$ si $\beta \geq \omega$, si $\beta \neq \beta'$ entonces $A_n^\beta \cap A_n^{\beta'} = \emptyset$. Con ayuda de esta matriz definimos la función de partición que andamos buscando dando una regla constructiva para señalar dentro de cada conjunto positivo una clase de $\aleph_1$ subconjuntos disjuntos dos a dos y positivos. El resto convenimos en agregárselo al subconjunto positivo con menor primer elemento. Veamos en qué consiste la regla : se toma el primer n tal que las intersecciones del positivo dado (digamos A) $A \cap A_n^\beta$, cuando β varía tienen una cantidad no numerable de positivos. La existencia de un tal n (y por tanto de un primer n) resulta razonando por el absurdo, razonamiento que dejamos al lector.

Es interesante señalar que si se acepta la forma original del axioma (Π), o sea la existencia de funciones $h_k(\alpha)$ definidas para cada $\alpha \epsilon$ (II), tales que para cada α, la sucesión $h_k(\alpha)$, $0 \leq k < \omega$, converge creciento estrictamente hacia α, entonces puede demostrarse que existe un k tal que h_k tiene $\aleph_1$ conjuntos de nivel positivos y se obtiene así una nueva demostración del teorema 6. Además esta familia numerable de funciones retractantes da un contraejemplo a la generalización del teorema 3′ para familias infinitas de funciones. Precisamente: si para cada k se toma un conjunto de nivel B_k de la función h_k, entonces la intersección de los B_k (respecto de k) es vacía o consta de exactamente un elemento. Esto es inmediata consecuencia de que la sucesión $h_k(\alpha)$ determina el elemento α, puesto que converge hacia él.

Observación 3. Si $A \in (CC)$ entonces (Π_A) es equivalente a (Π). como es fácil ver. No sabemos en cambio qué relación hay entre los axiomas (Π_A) cuando A es positivo con complementario positivo. Tampoco sabemos qué relación hay entre (Z_0) y la proposición que pide la existencia de una $\aleph_1$-p-función, o la que pide la existencia de una $\aleph_1$-partición de $[0, \omega_1)$ en componentes positivas.

4. Sucesiones ramificadas deducidas de una función de partición. Dada una n-función puede construirse por inducción transfinita una familia ramificada de conjuntos en $[0, \omega_1)$ mediante el procedimiento de reiterar la función en cada componente de una partición ya obtenida y definir para los pasos de segunda especie a los conjuntos intersección de las cadenas formadas con los conjuntos ya obtenidos. Haremos en lo que sigue un estudio detallado de un caso particularmente importante: cuando la n-función es deducida de una n partición de $[0, \omega_1)$.

Comenzamos con las definiciones necesarias, introducidas en su mayoría por G. Kurepa en su tesis [4].

Un conjunto parcialmente ordenado $\mathbf{C}$ se llama *cuadro ramificado* si para cada $a \in \mathbf{C}$ el conjunto $\mathbf{C}_a = \{x \in \mathbf{C} : x \prec a, x \neq a\}$, está bien ordenado respecto de $\prec$ (indicamos con $\prec$ a la relación de orden parcial en $\mathbf{C}$). Los conjuntos $\mathbf{C}_a$ permiten definir dos relaciones de equivalencia en $\mathbf{C}$:

Primera relación de equivalencia: dos elementos $a, b \in \mathbf{C}$ se dicen equivalentes si $\mathbf{C}_a$ y $\mathbf{C}_b$ tienen el mismo tipo de orden. Las correspondientes clases de equivalencia se llamarán *rangos de* $\mathbf{C}$. La función $r(a)$ que a cada elemento de un rango de $\mathbf{C}$ le hace corresponder el ordinal que le está naturalmente asociado es una aplicación de $\mathbf{C}$ sobre una sección inicial de números ordinales. El tipo de orden de esta sección se llamará la *longitud* de $\mathbf{C}$. Llamaremos α-rango al rango que va en el número α. En particular el 0-rango es el conjunto de los elementos minimales de $\mathbf{C}$. Con sentido evidente hablaremos de los rangos de primera y segunda especie.

Segunda relación de equivalencia: dos elementos a, $b \in \mathbf{C}$ se dicen equivalentes si $\mathbf{C}_a = \mathbf{C}_b$. Esta relación es un refinamiento de la anterior, sus clases de equivalencia se llamarán *nudos*. Todo nudo está contenido en un rango y por tanto tiene sentido hablar de *nudos de primera especie o segunda especie*. Por ejemplo el 0-rango es un nudo.

Diremos que un cuadro ramificado es una *sucesión ramificada* si para cada $a \in \mathbf{C}$ y cada α menor que la longitud de $\mathbf{C}$ existe un b en el α-rango comparable con a. Si $\alpha \leq r(a)$ la condición se cumple automáticamente, de modo que para verificar la condición de sucesión ramificada interesan solamente los $\alpha > r(a)$.

Por *cuadro ramificado de conjuntos* se entiende generalmente una clase de conjuntos (subconjuntos de un espacio a especificar) ordenada parcialmente por la relación «contiene» como relación « $\preceq$ », en la que dos conjuntos incomparables son necesariamente disjuntos, y que verifica en su orden parcial la condición de cuadro ramificado. Recalcamos que el 0-rango de un cuadro ramificado de conjuntos está formado por los conjuntos que intuitivamente son maximales en el sentido ordinario.

En lo que sigue nos van a interesar exclusivamente sucesiones ramificadas de longitud ω_1.

EJEMPLOS:

(i) $\mathbf{C}_1$ = conjunto de todas las sucesiones bien ordenadas de $0's$ y $1's$ de tipo numerable, con solo un número finito de coordenadas diferentes de 0 (dualmente diferentes de 1), con la relación de «prolonga» en lugar de « $\succ$ ».

(ii) $\mathbf{C}_2^\alpha$ = conjunto de las sucesiones bien ordenadas de $0's$ y $1's$ de tipo numerable en la que los índices correspondientes a las coordenadas iguales a 1 forman un conjunto unión finita de intervalos (de $[0, \omega_1)$) de tipo menor que ω^α (dualmente intercambiado 0 con 1) con la relación de orden como en (i).

(iii) $\mathbf{C}_3$ = conjunto de las sucesiones bien ordenadas de $0's$ y $1's$ de tipo numerable en las que los índices correspondientes a las coordenadas iguales a 1 forman un conjunto unión finita de intervalos (de $[0, \omega_1)$), con igual relación de orden que en (i). Aquí el ejemplo «dual» coincide con el dado.

Se observa que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2^1$ y que $\mathbf{C}_2^\alpha$ así con sus duales estan contenidos en $\mathbf{C}_3$ para todo α.

Cada sucesión bien ordenada de $0's$ y $1's$ de tipo α que aparece en estos ejemplos puede pensarse así: se considera una partición del intervalo $[0, \alpha)$ en una clase finita de intervalos *disjuntos* dos a dos, y se asocia alternativamente 0 ó 1 dentro de cada intervalo comenzando (digamos) por la izquierda. En $\mathbf{C}_1$, los intervalos dentro de los cuales se asocia el 1 deben ser conjuntos finitos o sea de tipo menor que ω, en $\mathbf{C}_2^\alpha$, dichos intervalos deben tener tipo menor que ω^α mientras que en $\mathbf{C}_3$ no hay ninguna restricción.

Dejamos para el lector la verificación de que $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2^\alpha$, $\mathbf{C}_3$ son sucesiones ramificadas en las que todo nudo de primera especie incluído el 0-nudo consta de dos elementos, todo nudo de segunda especie consta de exactamente un elemento, los α-rangos con $\alpha < \omega$ son finitos (tienen $2^{\alpha+1}$ elementos) y con $\alpha \geq \omega$ tienen potencia $\aleph_0$. Finalmente estas sucesiones ramificadas tienen todas una longitud ω_1, pudiendo representarse intuitivamente sus cadenas maximales no numerables mediante sucesiones de tipo ω_1 de $0's$ y $1's$ que terminan en $0's$ o en $1's$ según los diferentes casos. Más adelante daremos más detalles sobre estas sucesiones.

Vamos a dar ahora una clase general de ejemplos que contiene a los dados precedentemente como caso particular.

Comenzamos recordando que se llama indescomponible un número ordinal que coincide con todos sus restos no nulos. En lo que sigue entenderemos por indescomponibles a los que son menores o iguales que ω_1: ellos son los de la forma ω^α y ω_1.

Para todo α, $2 \leq \alpha \leq \omega_1$, y toda función $j(\beta)$ de la sección inicial $[0, \alpha)$ en el conjunto de los números indescomponibles (de modo que para cada $\beta < \alpha$, $j(\beta)$ es de la forma ω^α o bien coincide con ω_1), Definimos la sucesión ramificada $\mathbf{C}(\alpha, j)$ como el conjunto (ordenado por prolongamientos) de todas las sucesiones bien ordenadas de tipo numerable que satisfacen las siguientes condiciones:

Los índices de la sucesión (sección inicial numerable de $[0, \omega_1)$) admiten una descomposición en una clase finita de intervalos disjuntos dos a dos, tal que en cada intervalo de esta clase las coordenadas de la sucesión son todas iguales a un mismo número ordinal menor que α; y si β es dicho ordinal, el tipo de orden del intervalo correspondiente es menor que $j(\beta)$.

La longitud de $\mathbf{C}(\alpha, j)$ es ω_1 si y sólo si $\sup\limits_{\beta} j(\beta) = \omega_1$. Al escribir $\mathbf{C}(\alpha, j)$ en lo que sigue, supondremos siempre que $\sum\limits_{\beta<\alpha} j(\beta) \geq \omega_1$.

Para $\alpha = 2$ se obtienen los ejemplos (i), (ii), (iii), tomando j convenientemente.

Es fácil ver que $\mathbf{C}(\alpha, j)$ es siempre una sucesión ramificada cuyos nudos de segunda especie son puntuales y cuyos nudos de primera especie (incluído el 0-nudo) tienen la cardinalidad de α, independiente de la función j.

El interés de estos ejemplos radica en que ellos son los que aparecen como cuadros ramificados de conjuntos, deducidos de funciones de partición especiales (Teorema 7, abajo).

Definición de cuadro ramificado de conjuntos deducido de una n-función de partición. Dada una n-función F definimos un cuadro $\mathbf{C}_F$ formado por subconjuntos de $[0, \omega_1)$ que se dirá *deducido* de F, mediante el siguiente procedimiento:

Si A es un conjunto del dominio de F indicaremos con $F(A)$ a la clase de las componentes de la partición de A dada por F.

El 0-rango de $\mathbf{C}_F$ es $F([0, \omega_1))$.

Supuesto definido el α-rango de $\mathbf{C}_F$, definimos el $\alpha + 1$-rango como

$$\bigcup_A F(A), \text{ para los } A \text{ del } \alpha\text{-rango y del dominio de } F.$$

Supuesto definidos los β-rangos para todo $\beta < \alpha \in (\mathrm{II})$, definimos el α-rango como la clase de todos los conjuntos que pertenecen al dominio de F y son intersección de cadenas maximales dentro del cuadro ramificado formado por la unión de los β-rangos con $\beta < \alpha$.

Por inducción transfinita queda definido un cuadro ramificado de conjuntos, eventualmente vacío (si $[0, \omega_1)$ no pertenece al dominio de F), de longitud menor que ω_2, en el que los conjuntos (elementos del cuadro) que no pertenecen al dominio de F ocupan rangos de primera especie. En general este cuadro no es sucesión ramificada.

El objeto de este párrafo es estudiar los cuadros $\mathbf{C}_F$ correspondientes a funciones F que son deducidas de una n-partición de $[0, \omega_1)$.

Supongamos pues dada un partición de $[0, \omega_1)$ a cuyos conjuntos (que suponemos no numerables) los ordenamos según el orden de sus primeros elementos. Por semejanza, esta partición da origen a una función de partición, que tiene por dominio a la clase de los conjuntos no numerables. Vamos a indicar con F a la función de partición deducida, y con F^β a la función que a cada conjunto no numerable A le hace corresponder la β-ésima componente no numerable de la partición asociada: $F^\beta(A)$. Con esta notación la partición de $[0, \omega_1)$ que ha dado origen a F se indica con $(F^{\beta}([0, \omega_1)))$. Indicaremos con $o(F)$ al tipo de orden de esta sucesión, que es el tipo de orden de los primeros elementos de los componentes de cualquier partición, ordenados por magnitud creciente como números ordinales.

Definición de sucesión anuladora de un conjunto. Si G es un conjunto no numerable, definimos para todo conjunto no numerable A *la sucesión anuladora de* A *respecto a* G, como la sucesión (A^{α}) definida por inducción transfinita mediante :

$$A^{0} = A$$

$$A^{\alpha+1} = T_{A^{\alpha}}(G),$$

donde por T_B para un B no numerable, se entiende el isomorfismo ordinal (unívocamente determinado) de $[0, \omega_1)$ sobre B;

$$A^{\alpha} = \bigcap_{\beta<\alpha} A^{\beta}, \quad \text{si } \alpha \text{ es de segunda especie,}$$

y A^{α} es no numerable.

Es evidente que el primer α para el cual A^{α} no está definido es de segunda especie, y corresponde a cuando la intersección de los A^{β} ya definidos es numerable.

Definición de orden de anulación de un conjunto : $on(G)$, Definimos como $on(G)$ al tipo de orden de la sucesión anuladora de G respecto de G.

Definición de isomorfismo canónico de un $\mathbf{C}_F$. Sea F una una función de partición cualquiera (no necesariamente deducida de una partición de $[0, \omega_1)$). Para cada $A \in \mathbf{C}_F$ que está en un rango de primera especie o en el 0-rango, definimos $\varphi(A) = \beta$, si $A = F^{\beta}(B)$ para $B \in \mathbf{C}_F$ o $B = [0, \omega_1)$. Dado ahora un $A \in \mathbf{C}_F$ cualquiera (situado en un rango de primera o segunda especie) indicaremos con $A_{(\alpha)}$ para todo α de primera especie menor o igual que el rango de A al elemento de $\mathbf{C}_F$ comparable con A situado en el α-rango. Finalmente definimos $\bar{\varphi}(A)$ para todo A de $\mathbf{C}_F$ mediante

$$\bar{\varphi}(A) = (\varphi(A_{(\alpha)})),$$

Es inmediato que $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo de $\mathbf{C}_F$ sobre un cuadro ramificado de sucesiones bien ordenadas (de tipo $< \omega_2$) de números ordinales menores que ω_1, con el orden parcial definido mediante prolongamiento de sucesiones.

Teorema 7. *Si F es una función de partición deducida de una partición de* $[0, \omega_1)$, *entonces*

$$\bar{\varphi}(\mathbf{C}_F) = \mathbf{C}(\alpha, j),$$

donde $\alpha = o(F)$, $j(\beta) = \text{on}F^\beta([0, \omega_1))$. *Recíprocamente, para cada* $\mathbf{C}(\alpha, j)$ *existe una función de partición* F *deducida de una partición de* $[0, \omega_1)$ *tal que* $\bar{\varphi}(\mathbf{C}_F) = \mathbf{C}(\alpha, j)$.

La demostración resultará de una serie de lemas que dan información un poco más precisa que la estrictamente necesitada para la demostración. En particular se obtiene un panorama claro de ciertos aspectos de los conjuntos positivos y nulos.

Comenzamos estudiando las sucesiones anuladoras de los conjuntos no numerables.

Lema 1. *Sean* A *y* G *dos conjuntos no numerables. Si* A^α *y* G^α *indican respectivamente el* α*-ésimo término de las sucesiones anuladoras de* A *y* G *respecto de* G, *entonces* $T_A T_G^{-1}(G^\alpha) = A^\alpha$, *y por tanto ambas sucesiones tienen el mismo tipo de orden.*

Lema 2. *Si* A^α *es el* α*-ésimo término de la sucesión anuladora de* A *respecto de* G, *entonces la sucesión anuladora de* A^α *respecto de* G *coincide con el resto a partir de* α *de la sucesión anuladora de* A *respecto de* G.

Ambos lemas se demuestran sin dificultad por inducción transfinita.

Veamos un esbozo de la demostración del Lema 1. Basta considerar los pasos de primera especie. Por tanto se trata de demostrar $T_A T_G^{-1}(G^{\alpha+1}) = A^{\alpha+1}$ en la hipótesis que $T_A T_G^{-1}(G^\alpha) = A^\alpha$. La identidad a demostrar se escribe, por definición:

$$T_A T_G^{-1} T_{G^\alpha}(G) = T_{A^\alpha}(G),$$

y resulta de la observación que $T_A T_G^{-1} T_{G^\alpha}$ y T_{A^α} son isomorfismos ordinales con el mismo dominio ($[0, \omega_1)$) y el mismo contradominio (por la hipótesis), que es A^α, y por tanto son coincidentes punto a punto como isomorfismos.

Si $G \neq [0, \omega_1)$ sea g la máxima sección inicial de $[0, \omega_1)$ contenida en G, que evidentemente es de tipo numerable, y para cada A no numerable indiquemos con $rn(A)$ al conjunto numerable (eventualmente vacío) intersección de todos los términos de la sucesión anuladora de A (respecto de un G que será inequívoco en cada caso).

LEMA 3. *Sea* $G \neq [0, \omega_1)$ *no numerable. Todos los* A *no numerables tienen sucesiones anuladoras respecto de* G *con el mismo tipo de orden, que es un ordinal indescomponible menor o igual que* ω_1, *el cual es por definición igual a* $\mathrm{on}(G)$. *Para todo tal* A *es* $T_A(g) \subset \mathrm{rn}(A)$, *valiendo el signo de igualdad conjuntista si* $\mathrm{on}(G) = \omega_1$.

DEMOSTRACIÓN. Del Lema 1 resulta que todas las sucesiones anuladoras de conjuntos no numerables respecto de un mismo G no numerable tienen el mismo tipo de orden. Del Lema 2 resulta que este tipo de orden es igual al tipo de orden de sus restos. Luego es un indescomponible. Falta ver que este indescomponible es a lo sumo ω_1. Para ello vamos a demostrar que la familia de los términos A^α con $\alpha < \omega_1$ tiene una intersección numerable (supuesta la sucesión anuladora de longitud por lo menos ω_1). Esto dirá que la sucesión anuladora si tiene tipo mayor o igual que ω_1, entonces tiene tipo exactamente igual a ω_1. Más precisamente veamos que si A^α está definido para todo $\alpha < \omega_1$, entonces la intersección de la familia de estos A^α es $T_A(g)$. Si llamamos I a dicha intersección es evidente que $I \supset T_A(g)$. Bastará demostrar que I no contiene un elemento que ocupe en I rango igual al tipo de orden g. A su vez esto resultará de la siguiente proposición: *si* λ_α *es el elemento de* A^α *que ocupa en* A^α *el rango igual al tipo de orden de* g, *entonces la sucesión* (λ_α) $0 \leq \alpha < \omega_1$, *es estrictamente creciente y por tanto converge a* ω_1. Para demostrar esta proposición basta ver que $\lambda_{\alpha+1} < \lambda_\alpha$, pues la sucesión (λ_α) es evidentemente monótona no decreciente. Si indicamos con γ al tipo de orden de g y con γ_1 al primer elemento de G mayor que γ, resulta γ_1 el elemento de G que ocupa en G el rango γ, como consecuencia de la definición de g. De $\gamma < \gamma_1$ resulta $\lambda_\alpha = T_{A^\alpha}(\gamma) < T_{A^\alpha}(\gamma_1) = \lambda_{\alpha+1}$, que era lo que deseábamos demostrar.

Por tanto hemos demostrado también la última parte del lema, a saber que si $on(G) = \omega_1$, entonces $T_A(g) = rn(A)$. El hecho de que para todo A no numerable es $T_A(g) \subset rn(A)$ resulta trivialmente de las definiciones.

Q. E. D.

Ahora vamos a ver que si G es positivo es $on(G) = \omega_1$, mientras que si G es nulo son posibles todos los casos, o sea $on(G)$ puede ser (con convenientes G nulos) cualquier ω^α, o ω_1.

LEMA 4. *Si* G *es no numerable cualquiera,* $G - T_G(G)$ *es un conjunto nulo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la siguiente partición de G:

$$G = \{ T_G(\alpha) : \quad T_G(\alpha) > \alpha \} \cup \{ T_G(\alpha) : \quad T_G(\alpha) = \alpha \}.$$

El conjunto de la izquierda es el rango de una función progresante, luego, por teorema 4 es un conjunto nulo. Veamos que este conjunto nulo contiene a $G - T_G(G)$, lo que nos dará la tesis del lema. En efecto, todo elemento del conjunto de la derecha está contenido en $T_G(G)$, pues es de forma

$$T_G(T_G(\alpha)) = T_G(\alpha),$$

para un $\alpha \in [0, \omega_1)$. Q. E. D.

Observemos que $G - T_G(G)$ puede ser un conjunto «positivo relativo a G», lo cual sucede si y sólo si G tiene complementario positivo. Este lema, debido a M. Bruschi, tiene un interés especial ya que muestra que ninguna *n-p*-función es una *n*-función deducida de una partición de $[0, \omega_1)$ (ver observación 2).

LEMA 5. $\mathrm{on}(G) = \omega_1$ *para todo* G *positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Bastará demostrar que si G^α está definido, entonces $G - G^\alpha$ es un conjunto nulo. Lo hacemos por inducción transfinita.

El lema 4 dice exactamente que $G - G^1$ es nulo. Además $G^\alpha \subset G$ da

$$G^\alpha - G^{\alpha+1} \subset G^\alpha - T_{G^\alpha}(G^\alpha),$$

de donde deducimos que el miembro izquierdo es un conjunto nulo como consecuencia del lema 4. Por tanto si $G - G^\alpha$ es nulo, también $G - G^{\alpha+1}$ es nulo. Finalmente, si α es de segunda especie y G^α está definido, por lema 3 es $\alpha < \omega_1$, luego $G - G^\alpha$ es la unión de una cantidad numerable de $G - G^\beta$ con $\beta < \alpha$, y por tanto nulo si estos son nulos.

Q. E. D.

De la demostración del lema se deduce que todos los términos de la sucesión anuladora de G respecto de G cuando G es positivo, son conjuntos positivos. El lema 4 puede precisarse diciendo que

$G - T_G(G)$ tiene *on* (orden de anulación) igual a ω, o sea el menor posible. Para verlo vamos a definir «sucesión anuladora mixta» (G_A^α).

Sean G, A dos conjuntos no numerables. Llamaremos *sucesión anuladora mixta* (*sam*) (G_A^α) a la sucesión definida por inducción mediante:

$G_A^0 = T_G(A)$; si $\alpha + 1$ es impar o sea de la forma $\omega\gamma + 2n + 1$, definimos $G_A^{\alpha+1} = T_{G_A^\alpha}(G)$; si $\alpha + 1$ es par o sea de la forma $\omega\gamma + 2n$ definimos $G_A^{\alpha+1} = T_{G_A^\alpha}(A)$; y si α es de segunda especie definimos $G_A^\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} G_A^\beta$.

Lema 6. *Si ponemos* $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_\mathrm{A}^0$ *e indicamos con* (G_1^α) *a la sucesión anuladora de* G_1 *respecto de* G_1, *entonces tenemos*

$$\mathrm{G}_1^{\omega\gamma+\mathrm{n}} = \mathrm{G}_\mathrm{A}^{\omega\gamma+2\mathrm{n}}, \qquad 0 \leq \omega\gamma + \mathrm{n} < \mathrm{on}(\mathrm{G}_1).$$

En particular, la longitud (tipo de orden) de un sam es un indescomponible menor o igual que ω_1.

Demostración. Partimos de la identidad $T_B T_C = T_{T_B(C)}$, que expresa la propiedad de semigrupo para la clase de las tranformaciones de la forma T_B, B no numerable.

La fórmula que expresa la tesis del lema se demuestra por inducción. En los pasos de segunda especie no hay dificultad ya que en ambas sucesiones los términos que ocupan rango de segunda especie se definen por intersección de los términos de rango menor. Por tanto la inducción se puede hacer respecto del índice n de la fórmula.

Supongamos pues que

$$G_1^{\omega\gamma+n} = G_1^{\omega\gamma+2n}.$$

Entonces se tiene (si $\alpha = \omega\gamma + n$)

$$G_1^{\omega\gamma+n+1} = T_{G_1^\alpha}(G_1) = T_{G_1^\alpha} T_G(A) = T_{T_{G_1^\alpha}(G)}(A) = T_{T_{G_A^{\alpha+n}}(G)}(A)$$
$$= T_{G_A^{\alpha+n+1}}(A) = G_A^{\alpha+n+2} = G_A^{\omega\gamma+2(n+1)}$$

Que era lo que deseábamos demostrar.

Q. E. D.

Lema 7. *Si* A *y* G *son disjuntos, el sam correspondiente tiene longitud* ω.

Demostración. Veamos directamente que la intersección de los términos con rango menor que ω es vacía. Si así no fuera y α es el primer elemento del conjunto intersección, indiquemos con $r_n(\alpha)$ al rango que ocupa α en G^n_A. La sucesión $r_n(\alpha)$ es decreciente y por tanto a partir de un n se estaciona: $r_n(\alpha) = r_{n+1}(\alpha) = \dots$ (podría verse que es $n = 1$). Pero por definición de sam el número $r_n(\alpha)$ es un elemento de A o de G según que n sea impar o par respectivamente. Tendríamos así un punto común a A y a G, lo que es imposible.

Q. E. D.

Como corolario de los lemas 6 y 7 tenemos:

Corolario. $\mathrm{on}(G - T_G(G)) = \omega$ *para todo* G *no numerable con complementario no numerable.*

Lema 8. *Si* A *y* G *son dos conjuntos no numerables que difieren en un conjunto numerable, entonces lo mismo ocurre con* A^α *y* G^α, *los respectivos* α *ésimos términos de las sucesiones anuladoras de* A *y de* G *respectivamente. En particular es* $\mathrm{on}(A) = \mathrm{on}(G)$.

Demostración. Razonamos por inducción. Basta considerar las etapas de primera especie. Supongamos pues que A^α y G^α tengan diferencia simétrica numerable y lo mismo ocurra con A y G. Sea β el supremo de ambas diferencias simétricas y sea ω^γ el primer indescomponible numerable mayor que β. Salvo un conjunto numerable $A^{\alpha+1}$ coincide con el conjunto de los elementos de A^α que ocupan rangos en A^α iguales a los ordinales de A mayores que ω^γ. Análogamente para $G^{\alpha+1}$, salvo un conjunto numerable, éste coincide con el conjunto de elementos de G^α, que ocupan en G^α rangos iguales a los ordinales de G mayores que ω^γ. Ahora bien, el conjunto de ordinales de A mayores que ω^γ coincide con el conjunto de los ordinales de G mayores que ω^γ; y el elemento A^α que ocupa en A^α un rango igual a un tal ordinal coincide con el elemento del subconjunto de A^α formado por sus elementos mayores que β que ocupa en este subconjunto rango igual al ordinal en cuestión. Lo mismo para G^α. Pero los subconjuntos de A^α y G^α formados respectivamente por sus elementos mayores que β, coinciden. De aquí la tesis.

Q. E. D.

Se podría ver que dos conjuntos no numerables con diferencia simétrica con $on = \omega$, pueden tener diferente on, o sea el lema 8 no puede generalizarse de conjuntos numerables a conjuntos con $on = \omega$.

LEMA 9. *Para cada indescomponible* ω^β *menor o igual que* on(G *existe un* $G_1 \subset G$ *con* $\mathrm{on}(G_1) = \omega^\beta$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a indicar con s a un conjunto numerable y con s^α al α-ésimo término de la «sucesión anuladora» de s respecto de s definida por analogía evidente con el caso no numerable.

Podemos suponer que el indescomponible ω^β dado es menor que $on(G)$, y además que G no contiene el cero. Sea α_0 el primer elemento de G^{ω^β}, y llamamos s_0 a la parte G formada por sus elementos menores que α_0. Decimos que s_0 tiene las siguientes propiedades:

(*a*) s_0^γ existe para todo γ, $0 \leq \gamma < \omega^\beta$ y tiene tipo de orden igual al del s_0.

(*b*) $\bigcap\limits_{0 \leq \gamma < \omega^\beta} s_0^\gamma = \emptyset$.

Estas propiedades son consecuencia de que s_0^γ coincide con la parte de G^γ formada por sus elementos menores que α_0, lo cual es a su vez consecuencia de que el conjunto formado por los elementos de G menores que α_0 (o sea s_0) es isomorfo con el conjunto de los elementos de G^γ menores que α_0 a través del isomorfismo natural (unívocamente determinado) que manda G sobre G^γ; ya que este isomorfismo, por lema 2, deja invariante G^{ω^β} punto a punto y en particular deja invariante α_0.

Vamos a definir ahora por inducción una familia de conjuntos numerables s_δ, $0 \leq \delta < \omega_1$. Supuesto definidos los $s_{\delta'}$ para $0 \leq \delta' < \delta$, definimos s_δ de la siguiente manera: Llamemos A al conjunto formado por los elementos de G mayores que el primer indescomponible numerable mayor que el supremo de $\bigcup s_{\delta'}$ $(\delta' < \delta)$. Por lema 8, $on(A) = on(G)$. Por tanto existe A^{ω^β}. Llamamos s_δ al subconjunto de A formado por sus elementos menores que el primer elemento de A^{ω^β}. Evidentemente s_δ goza de las propiedades (*a*) y (*b*) enunciadas arriba.

Decimos que el conjunto

$$G_1 = \bigcup \{ s_\delta : 0 \leq \delta < \omega_1 \}$$

verifica la tesis del lema. Más precisamente vale

$$G_1^\gamma = \mathsf{U} \{ s_\delta^\gamma : 0 \leq \delta < \omega_1 \}.$$

Esta fórmula se demuestra por inducción, bastando tratar los pasos de primera especie, por un razonamiento análogo al usado en la demostración del lema 8, que nos disponemos a repetir. Observamos que G_1 es disjunto con el cerrado cofinal en ω_1 que se obtiene al tomar la adherencia de $\mathsf{U} \{ \sup s_\delta : 0 \leq \delta < \omega_1 \}$, lo que conviene tener presente para lo que sigue.

LEMA 10. *Sea* G *un cerrado cofinal,* $0 \notin$ G. *Para cada indescomponible* ι *menor o igual* ω_1 *existe un par de conjuntos disjuntos* $\mathrm{G}_1(\iota)$, $\mathrm{G}(\iota)$ *contenidos en* G *y tales que el primero tiene* on *igual a* ι, *y el segundo es cerrado cofinal. Podemos suponer además que* $\mathrm{G}_1(\iota)$ *contiene el primer elemento de* G.

DEMOSTRACIÓN. Si G es cerrado cofinal su *on* es ω_1 como se ve directamente o por lema 5. Si el indescomponible dado es menor que ω_1 aplicamos el lema 9 y al conjunto allí construído incrementado del primer elemento de G lo llamamos $G_1(\iota)$ $(\iota = \omega^\lambda)$. Teniendo en cuenta la observación final del lema 9 y que en nuestro caso G es cerrado, definimos $G(\iota)$ igual a la adherencia de la unión de los sup s_δ, $0 \leq \delta < \omega_1$. Así se encuentra verificada la tesis de este lema.

Si $\iota = \omega_1$ modificamos la construcción de G_1 dada en la demostración del lema 9, construyendo por inducción s_δ con exactamente ω^δ términos en su sucesión anuladora, cosa que se puede hacer porque G es cerrado y por tanto el A de aquella demostración es cerrado cofinal. La fórmula final

$$G_1^\gamma = \mathsf{U} \{ s_\delta^\gamma : 0 \leq \delta < \omega_1 \}$$

sigue valiendo, lo que muestra que G_1 tiene *on* igual a ω_1, pues a partir de un δ_γ los sumandos son no nulos, para cada γ. Finalmente agregamos al G_1 así construído el primer elemento de G, si no lo tiene, y al resultado llamamos $G_1(\omega_1)$. $G(\omega_1)$ se define como antes, o sea como la adherencia de la unión de los números sup s_δ, $0 \leq \delta < \omega_1$. Y queda verificada la tesis del lema en su totalidad.

Observamos que nuestro método es constructivo y por tanto determina unívocamente los conjuntos $G_1(\iota)$, $G(\iota)$ en todos los casos.

Q. E. D.

Es evidente que la tesis de este lema vale con G y $G(\xi)$ positivos en lugar de cerrados cofinales.

No deja de tener interés la investigación sistemática de las propiedades de la función $on(G)$, pero nosotros nos contentaremos con lo ya expuesto y lo que necesitamos para el teorema 7.

Observamos que el ejemplo más sencillo de G con $on(G) = \omega^\beta$, está provisto por G igual al complementario de los números de la forma $\omega^\beta . \alpha$, $0 < \alpha < \omega_1$. Y el más sencillo con $on(G) = \omega_1$ está dado por el complementario del conjunto de los indescomponibles. En ambos casos el complementario de G es cerrado cofinal. Estos ejemplos permiten por lo tanto descomponer $[0, \omega_1)$ en dos conjuntos disjuntos uno de los cuales tiene $on = \omega_1$ y el otro tiene on prefijado cualquiera (indescomponible menor o igual que ω_1). Esta descomposición es un caso particular de una descomposición más general que pasamos a exponer.

Lema 11. *Sea* α *tal que* $2 \leq \alpha \leq \omega_1$, *y* $\mathrm{j}(\beta)$ *una función definida en* $[0, \alpha)$ *a valores indescomponibles* $\leq \omega_1$, *arbitraria salvo la condición que* $\Sigma\, \mathrm{j}(\beta)$, $0 \leq \beta < \alpha$, *sea mayor o igual que* ω_1. ***Entonces existe una partición*** (G_β), $0 \leq \beta < \alpha$, *de* $[0, \omega_1)$ *tal que* $\mathrm{on}\,(\mathrm{G}_\beta) = \mathrm{j}(\beta)$.

Demostración. Observemos que la condición $\Sigma\, j(\beta) \leq \omega_1$ $(0 \leq \beta < \alpha)$ equivale a decir que si $\alpha < \omega_1$, entonces existe un β tal que $j(\beta) = \omega_1$. Esta condición no pide nada si $\alpha = \omega_1$. Además debe tenerse en cuenta que al indicar a la partición con (G_β) se sobreentiende que sus términos están indicados de acuerdo con el orden creciente de sus primeros elementos.

Vamos a definir a la partición pedida en la tesis por inducción y aplicación reiterada del lema 10. Trataremos separadamente dos casos.

$\alpha = \omega_1$. Comenzamos definiendo una familia (G'_β): si $j(0) < \omega_1$ definimos G_0 igual al complementario de los números de la forma $j(0) . \alpha$, $0 < \alpha < \omega_1$; si $j(0) = \omega_1$ definimos G'_0 igual al complementario de los indescomponibles numerables. Definimos $G''_0 =$ al complementario de G'_0. G''_0 es cerrado cofinal. Supuesto definidas las familias G'_β, G''_β hasta un γ exclusive, con la propiedad de ser G''_β cerrado cofinal, definimos G'_γ, G''_γ como iguales respectivamente a $G_1(j(\gamma))$, $G(j(\gamma))$ (dados por lema 10) cuando se toma $G = \cap \{ G''_\beta : 0 \leq \beta < \gamma \}$. Resulta evidentemente posible la inducción y tenemos como consecuencia una familia (G_β) de conjuntos disjuntos dos a dos donde los índices respetan el orden de los primeros elementos de los respectivos conjuntos indicados de modo que para terminar la demostración basta agregar a G'_β el β-ésimo elemento del conjunto complementario a $[0, \omega_1)$ de la unión de los G'_β, $0 \leq \beta < \omega_1$. Esto nos dará la partición buscada.

$\alpha < \omega_1$. Se define la inducción de igual manera que en el caso precedente pero tomamos únicamente los términos G'_β con $\beta < \alpha$. Por hipótesis existe un primer β tal que $on(G'_\beta) = \omega_1$. Llamémoslo γ. Sea X el complementario a $[0, \omega_1)$ del conjunto $\{$ unión de los G'_β, $0 \leq \beta < \alpha$, reunido todavía con el intervalo $[0, pG'_\gamma) \}$, donde pG'_γ indica el primer elemento de G'_γ. Si ponemos $G_\beta = G'_\beta$ cuando $\beta \neq \gamma$, 0, $G_\gamma = G'_\gamma \cup X$, $G_0 = G'_{0u}$ $\{$ restantes $\}$; tenemos la partición buscada. En efecto $pG_\beta = pG'_\beta$, de modo que los índices de (G_β) guardan el orden de los primeros elementos de los respectivos conjuntos indicados, $on(G_0) = on(G'_0)$ por lema 8, y $on(G_\gamma) = \omega_1$ porque G_γ contiene a X el cual contiene un cerrado cofinal y por tanto G_γ es positivo (lema 5). De manera que $on(G_\beta) = j(\beta)$ para todo β, $0 \leq \beta < \alpha$.

Q. E. D.

El lema 11 da en particular una $\aleph_1$-partición de $[0, \omega_1)$ en conjuntos con $on = \omega_1$, pero *nulos*. Esto es lo más parecido a una partición de $[0, \omega_1)$ en conjuntos positivos, que podemos hacer sin usar el postulado de Zermelo. Confróntese con teorema 6.

Demostración del teorema 7. Por lema 11, lo único que falta demostrar es (en la notación del enunciado del teorema 7) que $\bar{\varphi}(\mathbf{C}_F) = \mathbf{C}(\alpha, j)$.

Sea $A \in \mathbf{C}_F$. Vamos a mostrar que $\bar{\varphi}(A) \in \mathbf{C}(\alpha, j)$: $\bar{\varphi}(A)$ es una sucesión bien ordenada de tipo numerable de números ordinales menores que $\alpha = o(F)$. Indicaremos con $\lambda(A)$ al tipo de orden de dicha sucesión. Vamos a mostrar que existe un índice δ con la propiedad que las coordenadas α_γ con $\delta \leq \gamma < \lambda(A)$ son todas iguales. A un índice con esta propiedad lo llamaremos índice asociado a A.

Si $\lambda(A)$ es de primera especie basta tomar $\delta = \lambda(A) - 1$. Supongamos pues que $\lambda(A)$ es de segunda especie. Indiquemos con $A_{(\gamma)}$ al conjunto del γ-rango, $\gamma < \lambda(A)$, de $\mathbf{C}_F$ comparable con A (o sea que lo precede en el orden de cuadro ramificado o que lo contiene en el orden conjuntista ordinario) y si α es el primer elemento de A sea $r_\gamma(\alpha)$ el rango que α ocupa en $A_{(\gamma)}$, $0 \leq \gamma < \lambda(A)$. La sucesión $r_\gamma(\alpha)$ es monótona no creciente y por tanto se estaciona a partir de un índice, al primero de los cuales llamamos δ. Evidentemente $\delta < \lambda(A)$. Veamos que δ es un índice asociado a A. En efecto, por definición, las coordenadas (α_γ), $0 \leq \gamma < \lambda(A)$, de la sucesión $\bar{\varphi}(A)$, están caracterizadas por las propiedades:

$$A_{(0)} = F^{\alpha_0}([0, \omega_1)), \quad A_{(n)} = F^{\alpha_n}(A_{(n-1)}), \quad \text{para} \quad 1 \leq n < \omega,$$
$$(A_{(\gamma+1)} = F^{\alpha_\gamma}(A_{(\gamma)}), \quad \text{para} \quad \omega \leq \gamma < \lambda(A).$$

Sean pues $\delta \leq \gamma < \lambda(A)$. Tenemos, supuesto para fijar ideas $\omega \leq \delta$:

$$A_{(\gamma+1)} = F^{\alpha_\gamma}(A_{(\gamma)}), \qquad A_{(\delta+1)} = F^{\alpha_\delta}(A_{(\delta)}),$$

pero el elemento α, que pertenece a $A_{(\gamma+1)}$ y a $A_{(\delta+1)}$ ocupa en $A_{(\gamma)}$ y en $A_{(\delta)}$ el *mismo* rango, luego por ser F una función de partición, esto obliga a que $\alpha_\gamma = \alpha_\delta$. Por tanto efectivamente δ es un índice asociado a A.

Definimos ahora por inducción una sucesión de números ordinales. Ponemos $\delta_0 = \lambda(A)$. Supuesto definido δ_k para $k < \omega$ definimos δ_{k+1} como el primer índice asociado a $A_{(\delta_k)}$. Como esta sucesión es estrictamente decreciente existe un primer k que llamamos n tal que $\delta_n = 0$. Es evidente que $\bar{\varphi}(A)$ considerada como función sobre $[0, \lambda(A))$ es constante sobre cada intervalo $[\delta_k, \delta_{k-1})$, $1 \leq k \leq n$.

Por otra parte es fácil ver, recordando las definiciones, que si $\bar{\varphi}(A)$ vale β en el intervalo $[\delta_k, \delta_{k-1})$ y si $\delta_k + \gamma \in [\delta_k, \delta_{k-1})$ entonces $A_{(\delta_k+\gamma)}$ es el γ-ésimo término de la sucesión anuladora de $A_{(\delta_k)}$ respecto de $F^\beta([0, \omega_1))$, y por consecuencia el tipo de orden del intervalo $[\delta_k, \delta_{k-1})$ es menor o igual que $j(\beta)$. Pero no puede ser igual porque la intersección de los términos $A_{(\gamma)}$, $\delta_k \leq \gamma < \delta_{k-1}$, contiene al conjunto no numerable A.

Esto termina la demostración de que $\bar{\varphi}(A) \in \mathbf{C}(\alpha, j)$.

Recíprocamente, sea (α_γ) un elemento de $\mathbf{C}(\alpha, j)$. Como sabemos, las coordenadas de (α_γ) se reparten en un número finito de intervalos de manera que en cada uno de ellos son constantemente iguales a un β tal que $j(\beta)$ mayora el tipo de orden del correspondiente intervalo. Esta es precisamente la condición que asegura la obtención de un elemento de $\mathbf{C}_F$, recordando lo demostrado en el lema 3 que asegura que la longitud de una sucesión anuladora de A respecto de G no depende A y es siempre igual (para todos los A) a $on(G)$. Dejamos los detalles evidentes al lector.

Q. E. D.

Sin usar el postulado de Zermelo parece imposible definir funciones de partición esencialmente diferentes de las deducidas de una partición de $[0, \omega_1)$. Esto da mayor interés a las sucesiones ramificadas $\mathbf{C}(\alpha, j)$. El teorema 7 es un teorema de representación y es útil en ambos sentidos, ya que según cual sea el problema que se quiera aclarar puede convenir pensar en sucesiones de ordinales o en particiones de $[0, \omega_1)$. Un problema interesante es el de caracterizar abstractamente estas sucesiones ramificadas. Probablemente, si α es numerable las sucesiones $\mathbf{C}(\alpha, j)$ sean isomórficas independientemente de j, dependiendo solamente de la cardinalidad de α, o sea de la cardinalidad de los nudos. Si $\alpha = \omega_1$ la situación es mucho más complicada. Dejando de lado el caso no interesante de $\sup j(\beta) < \omega_1$ y por ejemplo si $j(\beta)$ es para todo β menor que ω_1, $\mathbf{C}(\alpha, j)$ no tiene cadenas maximales no numerables, mientras que si para un β es $j(\beta) = \omega_1$, entonces $\mathbf{C}(\alpha, j)$ es cubierto por las cadenas no numerables; en este caso pues, hay con seguridad dos sucesiones ramificadas no isomórficas. ¿ Habrá más de dos? Otro problema interesante está vinculado con el número cardinal del conjunto de las cadenas maximales no numerables. Es fácil ver que $\mathbf{C}(\alpha, j)$ tiene exactamente $\aleph_1$ tales cadenas, salvo en el caso mencionado en que $j(\beta) < \omega_1$ para todo β (lo que obliga a que $\alpha = \omega_1$). Para cuadros ramificados de subconjuntos de $[0, \omega_1)$, de longitud ω_1 y rangos numerables no se sabe si el número cardinal del conjunto de las cadenas maximales no numerables puede ser *mayor* que $\aleph_1$. Este es un problema difícil que ya ha sido planteado por Kurepa [5], adonde remitimos al lector en conexión con los problemas sobre cuadros ramificados que acabamos de citar.

REFERENCIAS

1. M. P. Alexandroff y P. Urysohn, Proc. Ac. Si., Amsterdam, Eerste sectie, Deel XIV, nº 1, 1929, pág. 95.

2. Walter Neumer, *Verallgemeinerung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn*, Math. Zeitschrift, 54 (1951), 254-261.

3. S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math., 16 (1930), 140-150

4. G. Kurepa, Tesis, Publ. Math. IV, 1935, Belgrade, págs. 1-138.

5. G. Kurepa, *A propos d'une généralisation de la notion d'ensembles bien ordonnés*, Acta Math., 75 (1943), 139-150.

Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahía Blanca.

Quantifiers and equivalence relations *

POR OSCAR VARSAVSKY

Equivalence relations between maximal ideals have been known for a long time to be a dual concept to subalgebras of the given algebra (Stone 1937 [1], Birkhoff 1935 [2], Ore 1942 [3], Davis 1952 [4], Halmos 1955 [5]), yet they do not seem to be regarded with favour as a working tool, and in one case at least they are explicitly rejected.

This is justified in so far as it is not considered proper to work with the dual space — of all ultrafilters or maximal ideals —, a construct whose very existence is frowned upon. And of course there is a marked preference for algebraic over topological methods.

In spite of all this, we expect to show that equivalence relations in topological spaces may be fruitfully used in several ways: to simplify proofs, to suggest new results and problems and in general to provide a clear heuristic insight — at least to the geometrically minded — into what is going on.

In this paper we apply very elementary properties of closed and open equivalences to the representation theory of « monadic algebras », extending the results of Halmos' ([5]) with a view to future applications to non-classical logic.

I. REVIEW OF KNOWN DEFINITIONS AND RESULTS

The representation theory of « monadic algebras » (or « m-algebras » as we will say in the sequel) has been developped by Halmos, op. cit. In this review of results obtained algebraically we will also quote some unpublished concepts of Monteiro.

* Received october 26, 1957.

Monadic algebra or **m-algebra**: is a couple $(\mathbf{A}; K)$ where $\mathbf{A}$ is a Boolean algebra and K an operator — called an « existential quantifier » — with domain $\mathbf{A}$ and range $\mathbf{B}$ in $\mathbf{A}$, satisfying what we will from now on call the « K-conditions » :

K-1) $Ko = o$

K-2) $Ka \geq a$, for every $a \varepsilon \mathbf{A}$

K-3) $K(a \wedge Kb) = Ka \wedge Kb$, for every $a, b \varepsilon \mathbf{A}$.

In other words, K is a closure operator on $\mathbf{A}$, for which every open element is closed. Its range $\mathbf{B}$ is a special kind of subalgebra with the property that for every $a \varepsilon \mathbf{A}$, $\wedge \{ b \varepsilon \mathbf{B};\ b \geq a \}$ exists and belongs to $\mathbf{B}$ (« relative completeness »). Conversely, every relatively complete subalgebra $\mathbf{B}$ defines biunivocally a quantifier K in the natural way :

$$Ka = \wedge \{ b \varepsilon \mathbf{B};\ b \geq a \}$$

If Ca means the complement of a, then CKC is the interior operator corresponding to the closure K, and is called a « universal quantifier » for logical reasons. For us, however, « quantifier » will always mean « existential quantifier ».

Monadic ideals and **filters**, or **m-ideals** and **m-filters**: ordinary ideals and filters of a m-algebra $(\mathbf{A}; K)$ are called « monadic » iff they have a basis of elements of $\mathbf{B}$, the range of K (iff = if and only if). That is, an ideal $\mathbf{I}$ (a filter $\mathbf{F}$) is a m-ideal (m-filter) iff with every element a it also contains Ka $(CKCa)$.

They are the kernels of all homomorphisms compatible with K, that is, the quotient algebras $\mathbf{A}/\mathbf{I}$ and $\mathbf{A}/\mathbf{F}$ are monadic with a quantifier which is the natural image of K.

m-ideals and m-filters can be maximalized — since ordinary ideals and filters in $\mathbf{B}$ can be — with respect to those properties, and then the image of K in the quotient is the « simple » quantifier : $K_s a = 1$ for every $a \neq 0$. At the other extreme from the simple quantifier, which corresponds to the chaotic topology, stands the « discrete » quantifier ; $K_d a = a$.

Every m-algebra is m-semisimple, that is, the intersection of all its maximal m-ideals (m-ultrafilters) is $\{0\}$ $(\{1\})$. (This result would seem to be the content of Gödel's completeness theorem for one variable).

Free filters or **f-filters** (Monteiro). An ordinary filter **F** in (**A**: K) is called « free », iff it is as free from elements of **B** as possible: $F \cap B = \{1\}$. In other words $Ka = 1$, for every $a \varepsilon$ **F**.

Every representation of **A** onto **B** leaving **B** invariant has a maximal f-filter as a kernel, but the reciprocal is not true in general, and this is the only source of trouble in this theory,

Every f-filter is contained in a « f-ultra » (short for maximal or ultra f-filter), and the intersection of all f-ultras is $\{1\}$, that is, f-semisimplicity.

When a f-ultra, **F**, is such that **A**/**F** = **B**, it is called an « individual constant », or, for short, *individual*.

Individuals may not exist at all (Example 3 in p. 34), and so Halmos says that a m-algebra (**A**; K) is *rich* iff to every $a \varepsilon A$ there corresponds at least an individual **F** such that $a = Ka$ modulo **F**. This individual is said to *witness* a.

A rich m-algebra can be represented as a function algebra from a set of individuals onto **B**, with pointwise operations, except that K is represented — more satisfactorily — by the supremum of the function, or rather the maximum, as it is actually attained at its witnesses.

The main result of Halmos' paper ([**5**]) is the proof that every m-algebra can be embedded in a sufficiently rich one. This he does in a clever and not very simple way (see below, p. 35).

Monteiro does it simply completing by cuts, and proving that in a complete m-algebra every f-ultra is an individual.

II. EQUIVALENCE RELATIONS IN BOOLEAN SPACES

We review now the dual Stonian language to Boolean algebras, in order to justify the definitions to be given later on.

« Clopen » is a set which is both open and closed in a topological space.

« Boolean » is a space which is compact and totally disconnected (that is, Hausdorff with a basis of clopen sets).

The famous representation theorem of Stone ([1]) states that if T is the set of all ultrafilters of the Boolean algebra A, then: (calling « x » the point of T which is the ultrafilter **X**).

1) T is a Boolean space with the « hull-kernell » topology (the

closure of the set $\{x_i\}$ is the set of all ultrafilters containing the filter $\bigcap_i \mathbf{X}_i$).

2) If to every filter $\mathbf{F}$ one assigns the closed set F whose points are all ultrafilters containing $\mathbf{F}$, and if to every closed set F one assigns the filter $\mathbf{F}$ obtained as the infimum (intersection) of all ultrafilters which are points of F, then a correspondence is established between the lattice of all filters of $\mathbf{A}$ and the lattice of all closed sets of T, which is an anti-isomorphism: the bigger the filter, the smaller the closed set.

3) The correspondence set up in 2) gives in particular an isomorphism between the elements of $\mathbf{A}$ and the clopen sets of T, via the principal ideal generated by each element. The Boolean operations go into the usual set operations.

4) Elements of $\mathbf{A}$ equivalent modulo a filter $\mathbf{F}$ correspond to clopens in T with equal intersection with F. In this way F, which is a Boolean space in the relative topology, becomes dual to the quotient Boolean algebra $\mathbf{A}/\mathbf{F}$.

In particular an element p of $\mathbf{A}$ belongs to a filter $\mathbf{F}$ iff the associated clopen set P contains the associated closed set F.

5) Subalgebras of A correspond to equivalence relations in T with certain qualifications which we presently determine anew, as they have not been quite clearly translated into this language in the existing litterature.

An *equivalence relation* $\pounds$ in a set T is a partition of T, that is, a covering of T by disjoint subsets which we call the «$\pounds$-sets»: $\{\pounds_i\}$.

$\pounds$ generates an operator on the class of all parts of T: *saturation*. To every part S of T there corresponds its *saturated* $\pounds S$, consisting of all points $\pounds$-equivalent to some point of S:

$$\pounds S = \bigcup \{\pounds_i ;\ \pounds_i \cap S \neq \varnothing\ \}$$

It is clear that every saturation operator fulfills the three K-conditions:

$$\pounds\varnothing = \varnothing\ ; \quad \pounds S \supset S; \quad \pounds(S \cap \pounds R) = \pounds S \cap \pounds R, \quad \text{for } S, R \subset T.$$

so that the operator $\pounds$ is a quantifier on the Boolean algebra of all parts of T.

Conversely, if K is a quantifier on such an algebra, it can be regarded as a saturation by defining the K-sets as: $K_x = K\{x\}$ for each one-point set $\{x\}$ of T.

In fact, if $y \notin K_x$ then $K_y \cap K_x = K(\{y\}) \cap K_x) = K\varnothing = \varnothing$, so the K_x truly form a partition, and calling $\mathcal{E}$ the corresponding equivalence:

$$\mathcal{E}S = \bigcup \{K_x ; x \in S\} \subseteq KS$$

and, if $x \in KS - \mathcal{E}S$ (set difference):

$$K_x \cap S = \varnothing = K\varnothing = K_x \cap KS, \text{ absurd.}$$

The proof of the general case is hardly less trivial, but requires topological concepts. Let us recall then that an equivalence relation in a topological space is called *closed (open)* iff the saturated of every closed (open) set is closed (open).

We will also say that the quotient space of T by $\mathcal{E}$: $T/\mathcal{E}$, is the topological space whose parts « are » the saturated parts of T and whose open sets « are » the open saturated sets of T.

THEOREM 1. (Davis [4]). Let $\mathbf{A}$ be a Boolean algebra, T its dual Boolean space. There is a biunivocal correspondence between subalgebras $\mathbf{B}$ of $\mathbf{A}$ and such equivalences $\mathcal{E}$ in T that make $T/\mathcal{E}$ a *Boolean space. $T/\mathcal{E}$ is then dual to $\mathbf{B}$.*

PROOF. To every equivalence $\mathcal{E}$ in T we assign canonically a subalgebra $\mathbf{B}_{\mathcal{E}}$: the $\mathcal{E}$-saturated clopens.

To every subalgebra $\mathbf{B}$ in $\mathbf{A}$ we assign canonically an equivalence $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$: the $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$-sets in T are the (closed sets associated to the) filters of $\mathbf{A}$ generated by the ultrafilters of $\mathbf{B}$. They are disjoint because any two ultrafilters of $\mathbf{B}$ are incompatible. They cover T because every ultrafilter of $\mathbf{A}$ intersected with $\mathbf{B}$ is a ultrafilter of $\mathbf{B}$.

For every element r of $\mathbf{B}$ and every ultrafilter $\mathbf{F}$ of $\mathbf{B}$, either r or Cr belongs to $\mathbf{F}$. This means that the clopen sets associated to elements of $\mathbf{B}$ are $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$-saturated, in other words: $\mathbf{B}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}} \supseteq \mathbf{B}$.

For the same reason, every $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$-set is the intersection of clopen sets from $\mathbf{B}$. An ordinary argument of compactness shows then that every saturated clopen set is a finite intersection of clopens from $\mathbf{B}$, that is, belongs to $\mathbf{B}$. So $\mathbf{B}_{\mathcal{E}_{\mathbf{B}}} = \mathbf{B}$ and we have shown at the same time that $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ is the coarsest equivalence whose saturated clopens are exactly $\mathbf{B}$.

The fact that the $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$-sets are separated by saturated clopens means that $T/\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ is Hausdorff, compact, totally disconnected. The obvious isomorphism between its clopens and the elements of $\mathbf{B}$ means that $T/\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ is the dual space to $\mathbf{B}$.

Conversely, starting with an equivalence $\mathcal{E}$, it is clear that the $\mathcal{E}_{\mathbf{B}_{\mathcal{E}}}$-sets contain the $\mathcal{E}$-sets. But if in addition $T/\mathcal{E}$ is Boolean space, each $\mathcal{E}$-set is the intersection of $\mathcal{E}$-saturated clopen sets, and so contains a $\mathcal{E}_{\mathbf{B}_{\mathcal{E}}}$-set.

Corollary: The equivalence $\mathcal{E}$ associated to a subalgebra is closed.

Proof: $T/\mathcal{E}$ is compact Hausdorff.

We mention that the proof of Theorem 1 also shows that the bigger the subalgebra, the finer the equivalence, and expresses the known isomorphism between the lattice of all subalgebras of $\mathbf{A}$ and that of all equivalence relations in T such that the quotient is another Boolean space.

Such equivalences ought to be called Boolean, but as that term has already been used for a special class of them (Halmos, *op. cit.*), we settle by calling them « B-equivalences ».

Now it is easy to characterize thoose equivalences corresponding to the range of a quantifier, that is, to a « relatively complete » subalgebra.

Theorem 2. (Halmos, *op. cit.*). Let $\mathbf{A}$ be a Boolean algebra, T its dual Boolean space. There is a biunivocal correspondence between quanifiers in $\mathbf{A}$ and open-and-closed equivalence relations in T, such that the saturation operator is an extension of the quantifier to all subsets of T.

Proof. Let K be a quantifier in $\mathbf{A}$, with range $\mathbf{B}$, and let $\mathcal{E}$ be the equivalence canonically generated by $\mathbf{B}$, as in Th. 1. For every clopen R we have $KR \in \mathbf{B}$, then KR is $\mathcal{E}$-saturated, and so $KR \supseteq \mathcal{E}R$. Suppose there is a $\mathcal{E}$-set $\mathcal{E}_i$ in $KR - \mathcal{E}R$; as $\mathcal{E}_i$ is, by definition, an intersection of clopens from $\mathbf{B}$: $\mathcal{E}_i = \bigcap_j KE_j$ we have $\bigcap_j KE_j \cap R = \varnothing$, and, by compactness, $\bigcap_{k=1}^{n} KE_k \cap R = \varnothing$. But then

$$\varnothing = K\varnothing = K\left(\bigcap_{k=1}^{n} KE_k \cap R\right) = \bigcap_{1}^{n} KE_k \cap KR \supseteq \pounds_i, \quad \text{a contradiction.}$$

$\pounds$ is then an extension of K. We know it is closed, and it is also open because every open set R is a join of clopens C_i, and saturation is infinitely distributive with respect to joins:

$$\pounds R = \pounds \bigcup_i C_i = \bigcup_i \pounds C_i = \bigcup_i KC_i = \text{open}.$$

Conversely, let $\pounds$ be an open and closed equivalence relation. Then it transforms clopens into clopens and fulfills the K-conditions, and so is the extension of a quantifier K whose range is obviously the subalgebra canonically generated by $\pounds$ (Th. 1).

So B-equivalences in Boolean spaces are always closed, and the open ones amongst them correspond to quantifiers.

That the three kinds are actually different is seen in the following:

EXAMPLE 1. Let T be Cantor's discontinuum, that is, the set of all denumerable sequences of zeros and ones, with the topology of the lexicographic order. T is then a Boolean space, and its clopen intervals — the closed ones whose left end is a sequence ending in zeros and whose right end is a sequence ending in ones — form a basis.

If we identify consecutive points (that is, if we consider $\{a_1,..., a_n, 0, 1, 1, 1, ...\}$ equivalent to $\{a_1,..., a_n, 1, 0, 0, 0, ...\}$) we obtain as the quotient the real interval $[0, 1]$ with its natural topology. So this not a B-equivalence, yet it is closed, because $[0,1]$ is compact.

If we only identify those consecutive points in which n (the last coincident term of the sequences, as above) is less than a fixed number, we obtain a Boolean space, because between any two points there will still always be a jump. But the clopen interval $[\{0,1,0,0,0,...\},\{0,1,1,1,...\}]$ becomes $[\{0,0,1,1,1,...\},\{1,0,0,0,...\}]$ which is not open. So we have a B-equivalence which is not a quantifier.

It is a known result of Stone that if T is a compact Hausdorff space and $C(T)$ is the Banach algebra of all complex valued continuous functions on T with the norm of the supremum, then closed subalgebras of $C(T)$ correspond biunivocally to *closed* equivalence relations on T (the functions of the subalgebra take on constant values on each $\pounds$-set).

As we have seen the situation is, of course, different in the Boolean case, where functions on T are only allowed to assume two different values: 0 and 1. A closed equivalence only ensures that the quotient space is compact, but here we also need it totally disconnected if the two-valued continuous functions are to be enough to define the topology, and that is a proper extra conditon.

Closed equivalence relations are more closely related to lattices than to algebras; in fact.

THEOREM 3. — Let T be a compact T_1-space, and $\mathbf{C}$ a lattice of closed sets of T including $\varnothing$ and T and which is a basis (that is, every closed set is the intersection of members of $\mathbf{C}$). Let K be an operator with domain $\mathbf{C}$, range in $\mathbf{C}$ and satisfying the three K-conditions. Then there is in T a closed equivalence relation $\pounds$ extending K to all subsets of T.

PROOF. In the first place notice that $K^2 = K$, and $K(KR \cap KS) = KR \cap KS$ (this in every lattice with 1, though $K(KR \cup KS) = KR \cup KS$ is not valid in general).
Now define, for each $x \in T$:

$$\pounds_x = \bigcap_\alpha \{ KC_\alpha ;\ x \in C_\alpha \in \mathbf{C} \}$$

If y $\notin \pounds_x$ then, — as $y = \bigcap_\alpha D_\alpha$ with $D_\alpha \in \mathbf{C}$ — compactness of T gives:

$$\varnothing = \{ y \} \cap \pounds_x = \bigcap_\alpha D_\alpha \cap \bigcap_\beta KC_\beta = \bigcap_{i=1}^{n} D_{\alpha i} \cap \bigcap_{i=1}^{m} KC_{\beta i} = D \cap KC$$

with $D \in \mathbf{C}$, $x \in C \in \mathbf{C}$, by what was said above.
But then, by K-3: $KD \cap KC = \varnothing$, so $\pounds_y \cap \pounds_x = \varnothing$.

The $\pounds_x$ form then a partition of T by closed sets. Define $\pounds R = \bigcup \{ \pounds_x ;\ x \in R \}$. Then if $R \in \mathbf{C}$, clearly $\pounds R \subseteq KR$. Let $x \in KR - \pounds R$; then $\pounds_x \subseteq KR - \pounds R$, so $\pounds_x \cap R = \varnothing$, and compactness gives as before $KC \cap R = \varnothing$, with $x \in C \in \mathbf{C}$ and $KC \subseteq KR$, a contradiction whith $KC \cap KR = \varnothing$, by $K-3$.

So $\pounds$ extends K. Let us see that it is closed. If R is closed, and $R = \bigcap_\alpha C_\alpha$ with $C_\alpha \in \mathbf{C}$, then obviously $\pounds R \subseteq \bigcap_\alpha \pounds C_\alpha = \bigcap_\alpha KC_\alpha$. Suppose $\pounds_x \cap R = \varnothing$, then as before there is a $C \in \mathbf{C}$ with $R \subseteq C$ and $\pounds_x \cap C = \varnothing$. But also $\pounds_x \cap KC = \pounds_x \cap \pounds C = \varnothing$, so $\bigcap_\alpha KC_\alpha \subseteq \pounds R$. In all: $\pounds R = \bigcap_\alpha KC_\alpha$ which is closed.

The case treated above is not so particular, because it is well known that any distributive lattice **R** may be homomorphically represented by a basis **C** of closed sets of a T_1-compact space (the family of all its ultrafilters with the hull-kernell topology: Wallman's compactification).

Let f be the homomorphism: $f(\mathbf{R}) = \mathbf{C}$, and suppose there is defined in **R** an operator K satisfying the three K-conditions. Then if we define K' on **C** by: $K'f(a) = f(Ka)$ for all $a \varepsilon \mathbf{R}$, it is clear that K' also satisfies the K-conditions, provided it is well defined, that is, that $f(a) = f(b)$ implies $f(Ka) = f(Kb)$.

But this is always true: for suppose that all ultrafilters in **R** containing b also contain a, and let **U** be an ultrafilter containing Kb. Then for each element $c \varepsilon \mathbf{U}$ we must have $c \wedge Kb \neq 0$, and, by $K-3$: $b \wedge Kc \neq 0$. There is then an ultrafilter **V** containing $b \wedge Kc$, and b, and also a and Ka, whence $c \wedge Ka \neq 0$. As **U** was an ultrafilter, this means that $Ka \varepsilon \mathbf{U}$.

Thus the canonical homomorphism f preserves quantifiers. Unfortunately, for f to be an isomorphism there is a strong necessary and sufficient condition: for any non-null a, b in **R** there must be a non-null c such that $a \wedge b \wedge c = 0$ and $c \leq a$ or $c \leq b$ (Wallman's disjunction condition), which is not fulfilled in general in Brouwerian logics.

Neither does it seem easy to characterize in distributive lattices the ranges of quantifiers. They must of course be $\wedge$-relatively complete (for any element there is a least element in the range following it); they need not be sublattices and they must fulfill some extra conditions implying $K-3$.

But if the lattice is Brouwerian the situation is as simple as in Boolean algebras: the ranges of existential quantifiers are exactly those Brouwerian sublattices $\wedge$-relatively complete.

Returning to Boolean algebras, now that we know the meaning of a quantifier in topological térms — an open-and-closed equivalence — we can translate into this language the rest of the monadic concepts.

THEOREM 4. Let $(\mathbf{A}, K)$ be a m-algebra, with $(T, \pounds)$ its dual Boolean space and open-and-closed equivalence relation. Then:

1) m-filters of **A** correspond to saturated closed sets of T. The m-ultrafilters are exactly the $\pounds$-sets, that is, the points of $T/\pounds$.

2) f-filters correspond to those closed sets F such that $\pounds F = T$.

3) Individual constants correspond to those closed sets which have exactly one point in each £-set.

4) An individual I is a witness to a clopen set R iff: $R \cap I = \pounds R \cap I$.

PROOF. We think of the £-sets as vertical lines, f-filters then cut across all these lines, and m-filters are vertical stripes.

1) If K corresponds to a saturation £, then CKC is a desaturation, noted $\pounds^-$. $\pounds^- R$ is the greatest saturated set contained in R.

It is trivial then that if M is a saturated closed set and R a clopen containing M, then also $\pounds^- R$ contains M, so M is a m-filter.

And conversely, if M were not saturated, take $x \varepsilon \pounds M\text{-}M$ and let R be a clopen such that $R \supseteq M$ and $x \varepsilon R$. Then $\pounds^- R \supseteq M$ and M is not a m-filter.

2) $\pounds F = T$ and $R \supset F$ imply $\pounds R = T$, so if F is closed it is a f-filter.

Conversely, let $\pounds_i$ be a £-set such that $\pounds_i \cap F = \varnothing$, with F closed. Then by compactness there is a clopen R such that $R \supseteq F$ and $R \cap \pounds_i = \varnothing$, so $\pounds R \neq T$ and F is not a f-filter.

3) Observe that if F is any f-filter, then no two different saturated sets can have the same intersection with F. This means that $\mathbf{A}/\mathbf{F}$ contains a subalgebra isomorphic to $\mathbf{B}$, the range of K. In order that $\mathbf{A}/\mathbf{F}$ itself be canonically isomorphic to $\mathbf{B}$ it is necessary and sufficient to prove that any clopen R has the same meet with F as some saturated clopen S. If F has only one point in each £-set, then for every clopen R, $\pounds(R \cap \mathrm{F})$ is obviously the complement of $\pounds(CR \cap F)$, and since they are both closed (R $\cap$ F and $CR \cap F$ are closed sets) we find in $\pounds(R \cap F)$ the saturated clopen set equivalent to R. Conversely, suppose F has two points, x, y, in one £-set. Then a clopen set R which separates x from y cannot correspond canonically to any saturated set.

4) Because $I \cap R = I \cap \pounds R$ means that I runs inside R in all £-sets which intersect R.

Individuals are obviously f-ultras. That the converse does not hold is seen in the following elementary example:

EXAMPLE 2. Let $T = \{1, 2, 3, ..., w, w', ..., 3', 2', 1'\}$ (w = the first ordinal of the second kind). T is topologically the sum of two homeomorphic Boolean spaces (in each «half» space the clopen sets are the finite sets not containing w, w', and their complements). Let $\pounds$ be the equivalence relation of symmetrization, whose $\pounds$ sets are the two-point sets (n, n'), for $n = 1, 2, \ldots, w$.

$\pounds$ is clearly open and closed, so $(T, \pounds)$ is a m-algebra. Now the set $F = \{2, 4, 6, \ldots, w, w', \ldots, 5', 3', 1'\}$ is closed, and furnishes an example of a f-filter which is not an individual (it has two points in the $\pounds$-set (w, w'), none of which can be eliminated without destroying closure).

In this case we have F homeomorphic to T, while $T/\pounds$ is not homeomorphic to T but to $\{1, 2, \ldots, w\}$, so that f-ultras may be « really » bigger than individuals.

Kelley gave — in another connection — an example of a monadic algebra without any individuals, which we repeat for completeness.

EXAMPLE 3. (Kelley, in [6]). Let $T_w = \{1, 2, \ldots, w, \ldots, 2', 1'\}$, ($w$ as above) and $T_W = \{1, 2, \ldots, W, \ldots, 2', 1'\}$ (W the first non denumerable ordinal), both Boolean spaces in the order topology. Then the product $T = T_w \times T_W$ is a Boolean space.

Define as $\pounds$-sets the 2-point sets $\{(n, z), (n', z')\}$, $\{(n', z), (n, z')\}$, $\{(n, W), (n', W)\}$, $\{(w, z), (w, z')\}$ for $n < w$, $z < W$ and the 1-point set $\{(w, W)\}$.

Then $\pounds$ is open and closed and no closed set has exactly one point in each $\pounds$ set: there are no individuals. We leave the checking to the reader (details in [6]).

When individuals do not exist, they can be got by judiciously embedding the given algebra in a bigger one. A rather striking way of doing this is the following.

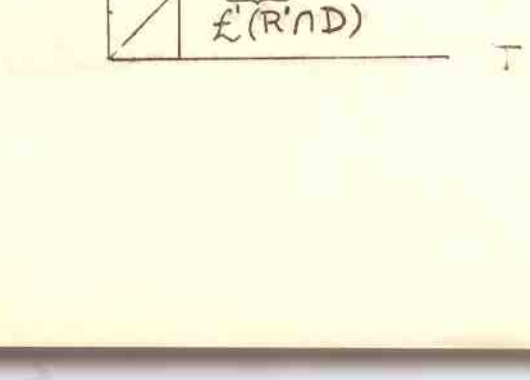

fig 1

Let $(T, £)$ be a m-algebra, and call T' the set in $T \times T$ which represents the equivalence $£$, that is $T' = \bigcup_{z \in T} \{ z \times £ \{ z \} \}$.

Clearly T' is closed in $T \times T$, and so is a Boolean space. Consider in T' the equivalence $£'$ whose $£'$-sets are the « vertical segments » $z \times £' \{ z \}$, for each $z \in T$. It is also easy to see that $£'$ is open and elosed. so that $(T', £')$ is a m-algebra.

To every clopen $R \subseteq T$ assign the clopen set of T':

$$R \to R' = (T \times R) \cup T'$$

obviously we get in this way a subalgebra of (the clopen sets of) T' isomorphic to the algebra of (the clopen sets of) T.
More than that, $£R$ goes into $£'R'$, so quantification is preserved.

Now in T' there is at least one individual: the « diagonal » $D = \{(x, x)\}$, $x \in T$.

Halmos goes a step further, trying to get an individual I to «witness» a given clopen R, which as we know means: $R \cap I = £R \cap I$.

This is not true in general of the only individual we know of: D (as seen in fig. 1). To make it true, Halmos simply erases the difference $£'(£'R' \cap D) - £'(R' \cap D)$:

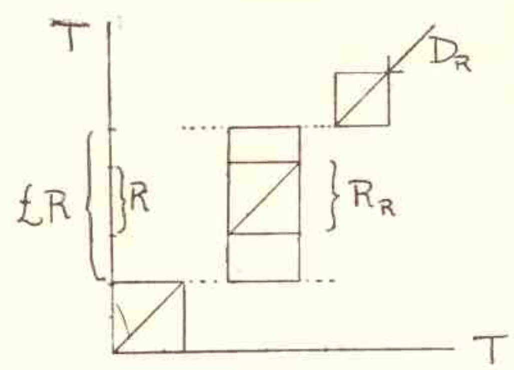

fig 2

And in this new Boolean space T_R, with the quantifier $£_R$ defined in the obvious way, there is still a subalgebra isomorphic to T, preserving $£$ and of course now $D_R = D \cap T_R$ is an individual such that (writing $S_R = S' \cap T_R$)

$$R_R \cap D_R = £_R R_R \cap D_R.$$

Suppose further that I was an individual in T witnessing some clopen S; then $I_R = (T \times I) \cap T_R$ is an individual in T_R witnessing S_R, so the extension from T to T_R does not eliminate witnesses.

The situation being so pleasant, a transfinite induction over all clopens of T gets Halmos an ultimate m-algebra which is rich (has witnesses) for the elements of the original m-algebra, but which need not be complete, nor rich for the rest of its own elements.

III. FUNCTION M-ALGEBRAS

Let Y be the set of all individuals of a m-algebra $\mathbf{A}$; we call its elements: $(x, y, z, ...)$ or $(\mathbf{I}_x, \mathbf{I}_y, \mathbf{I}_z, ...)$, indifferently, and suppose it is not empty.

As $\mathbf{A}/\mathbf{I}_y = \mathbf{B}$ for every $y \varepsilon Y$, we can set up a functional representation of $\mathbf{A}$: to an element a of $\mathbf{A}$ we assign the function from Y into $\mathbf{B}$ which at the point y assumes as its value the image of a in $\mathbf{A}/\mathbf{I}_y$. Elements of $\mathbf{B}$ are the constant functions.

With pointwise operations this correspondence is an homomorphism, though not an isomorphism in general.

Clearly the function $a(y)$ is bounded above by the constant function Ka, and below by the constant $CKCa$. These bounds are attained iff there are individuals who witness a and Ca respectively.

It is also clear that if the representation is faithful, that is, one-to-one onto its image, the only constant functions are elements of $\mathbf{B}$, and for every $a \varepsilon \mathbf{A}$, Ka is the supremum of the function $a(y)$: it is the smallest constant function bounding $a(y)$ above.

Now let us proceed conversely: let $\mathbf{B}$ be a Boolean algebra, X a non-empty set, and consider the Boolean algebra $\mathbf{B}^X$ of all functions from X into $\mathbf{B}$, with pointwise operations.

If $f \varepsilon \mathbf{B}^X$, its range $f(X)$ may or may not have a supremum in $\mathbf{B}$. If it has one, we define Kf to be the constant function whose value is $\sup \{f(x);\ x \varepsilon X\}$. K is then an operator with range isomorphic to $\mathbf{B}$, but its domain is not in general all of B^X, nor even a subalgebra. We consider from now on only non-trivial subalgebras of $\mathbf{B}^X$ closed under K:

DEFINITION 1. By a « m-function-algebra » we understand a subalgebra $\mathbf{A}$ of a $\mathbf{B}^X$ closed under K (for every $f \varepsilon \mathbf{A}$, $\sup [f(X)]$ exists in $\mathbf{B}$), including the constant functions and separating points (for

every x, $y \varepsilon X$ there is an $f \varepsilon \mathbf{A}$ such that $f(x) = 1$ and $f(y) \neq 1$).
It is clear now that:

PROPOSITION 1. Let $\mathbf{A}$ be a m-function-algebra in $\mathbf{B}^X$. Then:

1) K is a quantifier in $\mathbf{A}$.

2) For every $x \varepsilon X$, the set $\mathbf{I}_x = \{ f \varepsilon \mathbf{A} ; f(x) = 1 \}$ is an individual, and $x \neq y$ implies $\mathbf{I}_x \neq \mathbf{I}_y$.

3) The image of a function $f \varepsilon \mathbf{A}$ in the quotient $\mathbf{A}/\mathbf{I}_x$ is $f(x)$.

The proof is routine checking.

In agreement with preceding definitions, we say that the point x is a *witness* to a function f iff $f(x) = Kf$, and that $\mathbf{A}$ is *rich in* X iff there are in X witnesses to every one of its functions.

A m-function-algebra may be rich without being rich in X: for instance let $\mathbf{B}$ be complete and take $\mathbf{A} = \mathbf{B}^X$. We will show later that such an algebra is rich, yet if there is an element $b \varepsilon \mathbf{B}$ different from 0 and 1, a function assuming as values only b and Cb is not witnessed by any $x \varepsilon X$.

Of course there may be more individuals than the points of X: call Y the set of all individuals of $\mathbf{A}$, then $Y \supseteq X$, and it is clear, from Prop. 1, that the functional representation of $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}^Y$ is an extension of the functions $f \varepsilon \mathbf{A}$ to Y. This extension does not change the sup of functions, because constant functions are extended as constants and order is preserved.

The new individuals Y-X are superfluous in a way, because the X were already enough for a functional representation, but they may be wanted in order to witness elements. Suppose then that A is rich: are all individuals necessary to provide a rich representation? Let us say that an individual $\mathbf{I} \varepsilon Y$ is *expendable* iff $\mathbf{A}$ is rich in $Y - \{ \mathbf{I} \}$, then:

PROPOSITION 2. Let $\{ \mathbf{A}, K \}$ be a rich m-algebra, Y the set of all its individuals. Then an individual $\mathbf{I}$ is expendable iff it is not a principal filter.

PROOF: Let $\mathbf{I}$ be the principal filter generated by $r \varepsilon \mathbf{A}$. Then in the dual space T, both r and $\mathbf{I}$ are represented by the same clopen set R. For another individual $\mathbf{J}$ to witness R, the definition is: $\mathbf{J} \cap R = \mathbf{J} \cap \pounds R$. But $\pounds R = T$ because R is an individual, so $J \subseteq R$. However, J and R have one and only one point in each $\pounds$-set, so $\mathbf{J} = R$. Only $\mathbf{I}$ is a witness to r.

Conversely, let the set I be an individual, and E any clopen set. In the first place, if $E - I \neq \varnothing$ there is a clopen F contained in $E - I$, non-empty. Any individual J witnessing $(E - \pounds F) \cup F$ will at the same time witness E and be different from I. Graphically it is obvious; algebraically:

$$J \cap E \supseteq J \cap [(E - \pounds F) \cup F] = J \cap \pounds[(E - \pounds F) \cup F] = J \cap \pounds E.$$
$$J \cap F \neq \varnothing \quad \text{while} \quad I \cap F = \varnothing .$$

We may suppose then that $E \subseteq I$, and let I be a non-principal filter, that is, I non-open.

$I - E \subseteq C\pounds E$, so $C\pounds E$ must contain some $\pounds$-set with more than one point; otherwise $C\pounds E = I - E$ and $I = (I - E) \cup E$ would be open. So $CI \cap C\pounds E \neq \varnothing$ and we can choose a non empty clopen set F contained in it. But then any individual witnessing $E \cup F$ will also be a witness to E and be different from I.

EXAMPLES. When $\mathbf{A} = \mathbf{B}^X$ with $\mathbf{B}$ and X finite, all filters are principal, so none is expendable. But if we let X be infinite, the dual space of $\mathbf{B}^X$ is not discrete and has a finite number of $\pounds$-sets, which are then clopen. Individuals are then all sets with one point in every $\pounds$-set, so not all of them can be open.

In the m-algebra of T_w (Example 3) every single individual is expendable. On the other hand T (Example 2) provides a non-finite instance of a m-algebra without expendable individuals.

If we want to characterize those families of individuals simultaneously expendable we may choose between two well known methods: either we define in X a measure whose null sets are the expendable ones, or we define a topology whose open sets are not expendable. The second alternative appears to be more natural:
for every $f \varepsilon \mathbf{A}$ put

$$W_f = \{ x \varepsilon X ; f(x) = Kf \}$$

then

$$W_f \cap W_g = W_h,$$

where

$$h = (f \wedge g) \vee (f - Kg) \vee (g - Kf) \quad \text{if} \quad K(f \wedge g) = Kf \wedge Kg$$

and

$$h = 0, \quad \text{that is,} \quad W_h = \varnothing ,$$

otherwise.

With these sets $\{ W_f \}$ as a basis, we define the *W-topology* in X. (Every rich m-algebra being a m-function-algebra, this W-topology has a meaning in all interesting situations).

It is easy to see graphically that the W_f are clopen, although

$$C W_f = \mathbf{U} \{ W_r ; \quad Kr = 1, \quad K(r \wedge f) \neq Kf \} \neq W_{Cf}.$$

The W-topology is Hausdorff, totally disconnected, but in general not locally compact.

A direct corollary of its definition is:

THEOREM 5. Let $\mathbf{A}$ be a rich m-algebra and X the space of all its individuals with the W-topology. Then a set Z of individuals are simultaneously expendable — that is, $\mathbf{A}$ is rich in $X - Z$ — iff $X - Z$ is dense in X.

The W-topology is « natural » in the following sense:

PROPOSITION 3. Let $\mathbf{A}$ be a m-function-algebra in $\mathbf{B}^X$, rich in X. If we consider in $\mathbf{B}$ the discrete topology, then the W-topology for X is the coarsest one for which all functions of $\mathbf{A}$ are continuous.

PROOF: The coarsest topology on X induced by $\mathbf{A}$ with $\mathbf{B}$ discrete has for a basis the sets of individuals defined by:

$$Z_{f,\, b} = \{ x \varepsilon X ; \; f(x) = b \} \quad \text{for every } f \varepsilon \mathbf{A}, \; b \varepsilon \mathbf{B},$$

and this is a W_g, with

$$g = (f \wedge b) \vee (Cf \wedge Cb) \quad \text{if} \quad CKCf \leq b \leq Kf$$

and is empty otherwise.

And of course no W_f is superfluous, because

$$W_f = Z_{f,\, Kf}.$$

The obvious correspondence between the sets of the basis $\{ W_f \}$ and the elements of $\mathbf{A}$, which is biunivocal for elements of the form $f \vee CKf$, must not lead us to expect that the continuous «characteristic functions» of $\mathbf{B}^X$ will belong to $\mathbf{A}$. Curiously enough appart from trivial exceptions quite the contrary is the case because:

PROPOSITION 4. Let $\mathbf{A}$ be a m-function-algebra in $\mathbf{B}^X$, rich in X. Then every $f \varepsilon \mathbf{A}$ attains in X its maximum, its minimum and every intermediate value.

PROOF. Max and min are trivially assumed. Let now $b \varepsilon \mathbf{B}$ be such that:

$$CKCf \leq b \leq Kf,$$

then at any x witnessing

$$(b \wedge f) \vee (Cb \wedge Cf)$$

f assumes the value b. This is graphically evident, and algebraically because

$$K[(b \wedge f) \vee (Cb \wedge Cf)] = 1.$$

So we see that it is not often that an $f \varepsilon \mathbf{A}$ is finite valued, and in particular it never can be a characteristic function unless $\mathbf{B} = \{0,1\}$ or it is the first or the last element of the algebra. (Of course the family of all characteristic functions of $\mathbf{B}^X$, which is a rich subalgebra, is not a m-function-algebra, as it does not contain all constants).

Other topologies with interesting properties may be defined on X in a similar way.

IV. GENERAL REPRESENTATION THEORY

Having shown that the ideas and results of monadic theory can be expressed and extended in terms of certain equivalence relations in certain topological spaces, we proceed now to generalize. The preceding paragraphs are to be remembered as a justification of the terminology to be adopted.

Let us quote first some elementary properties of equivalence relations, extremely easy to prove:

LEMMA 1. Let $\pounds$ be an equivalence relation in a topological space T. Then:

a) $\pounds$ is closed iff, for every set R of T: $\overline{\pounds R} \subseteq \pounds \overline{R}$

b) $\pounds$ is open iff the closure (the interior) of every saturated set is saturated.

c) $\pounds$ is open iff for every set R of T: $\overline{\pounds R} \supseteq \pounds \overline{R}$.

d) $\pounds$ is closed and open iff saturation commutes with closure (desaturation commutes with interior).

DEFINITION 2. Let $\pounds$ be an equivalence relation in a set T, and let F be a subset of T. Then we will always call $\pounds_F$ the induced equivalence in F, whose $\pounds_F$-sets are exactly the $\pounds$-sets intersected with F.

LEMMA 2. Let $\mathcal{E}$ be a closed equivalence relation in a topological space T, F a closed subset of T. Then $\mathcal{E}_F$ is closed in F, and $\mathcal{E}_{\mathcal{E}F}$ is closed in $\mathcal{E}F$. The two quotient spaces $F/\mathcal{E}_F$ and $\mathcal{E}F/\mathcal{E}_{\mathcal{E}F}$ are homeomorphic. (Again, substituting « open » for « closed » everywhere).

We will only use this Lemma when $\mathcal{E}F = T$, and then it reads « $F/\mathcal{E}_F$ homeomorphic to $T/\mathcal{E}$ ».

The kind of representation that we are looking for is the following:

DEFINITION 3. Let T be a set, $\{F_y\}$, $y \in Y$, a family of parts of T; $\mathbf{P}_y$ the algebra of all parts of F_y, and $\Pi \mathbf{P}_y$ the product set of all $\mathbf{P}_y$, $y \in Y$.

Then by the *set representation of T through* $\{F_y\}$, we mean the homomorphism φ from the algebra of all parts of T into $\Pi\mathbf{P}_y$, defined by: $\varphi_y(R) = R \cap F_y$, for every $R \subseteq T$, and pointwise operations.

This representation is faithful iff $\bigcup_y F_y = T$, because we are considering all parts of T. But if we restrict the domain of φ to a certain family of parts of T, then equality may not be a necessary condition.

Now suppose there is an equivalence relation $\mathcal{E}$ defined on T. $\mathcal{E}$ induces an equivalence $\mathcal{E}_y$ in every F_y, which in turn generate an equivalence $\mathcal{E}'$ in $\Pi\mathbf{P}_y$, whose saturation is defined by:

$$\mathcal{E}'\{S_y\} = \{\mathcal{E}_y S_y\} \quad \text{for every} \quad \{S_y\} \in \Pi\mathbf{P}_y \quad .$$

This $\mathcal{E}'$ is not in general a proper representation of $\mathcal{E}$, because we only have, for $R \subseteq T$:

$$(\mathcal{E}R) \cap F_y \supseteq \mathcal{E}_y(R \cap F_y), \quad \text{or} \quad \varphi(\mathcal{E}R) \supseteq \mathcal{E}'\varphi(R).$$

In fact it is clear that, unless we heavily restrict the domain of φ, the equality

$$(\mathcal{E}R) \cap F_y = \mathcal{E}_y(R \cap F_y)$$

will hold for every R iff F_y is $\mathcal{E}$-saturated. In particular we obviously have:

PROPOSITION 5. With the previous notation, take as $\{F_y\}$ the $\mathcal{E}$-sets. Then the representation of T through the $\{F_y\}$ is biunivocal onto, and $\mathcal{E}'$ is the image of $\mathcal{E}$:

$$\varphi(\mathcal{E}R) = \mathcal{E}'\varphi(R) \quad \text{for every} \quad R \subseteq T.$$

We shall call this the monadic or « m-set representation » of T. Every $\pounds_y$ is the « simple » or « chaotic » equivalence:

$$\pounds_y R_y = F_y \quad \text{for} \quad R \cap F_y \neq \varnothing$$

Saturated sets of T correspond biunivocally to « characteristic functions » of $\Pi \mathbf{P}_y$.

Monadic representation is then trivial. But in most other situations we will not have a proper image of saturation $\pounds$.

An exception is the case where all $\mathbf{P}_y$ are isomorphic, because then it is meaningful to define:

$K \{S_y\} =$ the constant function valued $\bigcup\limits_{x \in Y} S_x$ at every $y \in Y$.

With this notation we have:

PROPOSITION 6. Let φ be a faithful set-representation of T through $\{F_y\}$, and let all $\mathbf{P}_y$ be isomorphic in such a way that common points of two F_y are invariant under the isomorphism. Then K is a proper image of $\pounds$ iff every F_y meets every $\pounds$-set in exactly one point.

PROOF: Graphically obvious. Algebraically: $K\varphi(F_y) = 1$, so, if K is the image of $\pounds$, we must have $\pounds F_y = \mathrm{T}$, that is, F_y meets every $\pounds$-set.

Every $\pounds$-set L_i is represented by a constant function, so all sets $L_i \cap F_y$ correspond one another in the isomorphism of the $\mathbf{P}_y$, and so must have the same cardinal number of points. Then if $t, s \in L_i \cap \mathrm{F}_y$ for a certain i and y, and are different, the one point set $\{t\}$ destroys the correspondence $\pounds \to K$.

Conversely it is evident not only that $\pounds \to K$, but that all $\mathbf{P}_y$ are isomorphic to $T/\pounds$, with invariant common points.

We now investigate what becomes of these trivial results when the domain of φ is restricted, as in logical applications.

DEFINITION 4. By a *monadic space*, or *m-space*, we understand a triple $\{T, \pounds, \mathbf{P}\}$ where T is a topological space, $\pounds$ an equivalence relation on T, and $\mathbf{P}$ is a pseudo-complemented lattice of closed sets including $\varnothing$ and T.

In particular we say that a m space is a *B-m-space* iff:

a) T is Hausdorff totally disconnected.

b) $\pounds$ is closed and the $\pounds$-sets are compact.

c) **P** is the family of all clopen sets.

In every m-space we say:

f-filter for any closed set $C \subseteq T$ such that $\pounds C = T$;

f-ultra for any minimal f-filter;

individual for any f-ultra with just one point in each $\pounds$-set;

m-filter for any saturated closed set.

And we say that a *f-ultra*, F, is witness to $P \varepsilon \mathbf{P}$ iff $P \cap F = \pounds P \cap F$.

The m-space is *rich* iff for every $P \varepsilon \mathbf{P}$ there is an *individual* witnessing it.

From what we have seen before it is clear that the monadic set representation of **P** is as trivial in general as when **P** was the family of all parts of T.

The other case, which we call the f-set representation, sets up two main ptoblems:

a) Are there many f-ultras?

b) Which of the f-ultras are individuals?

LEMMA 3. Let $\{T, \pounds, \mathbf{P}\}$ be a m-space such that all $\pounds$-sets are compact. Then every f-filter can be minimalized.

For let F be the given f-filter, and consider a chain of f-filters $F_i \subseteq F$, each F_i contained in the preceding ones. Then $\bigcap_i F_i$ is a closed set and it cannot have an empty meet with any $\pounds$-set by compactness. Now an appeal to Zorn finishes the proof.

PROPOSITION 7. Let $\{T, \pounds, \mathbf{P}\}$ be a B-m-space. Then every $P \varepsilon \mathbf{P}$ is witnessed by some f-ultra iff $\pounds$ is open.

PROOF. If $\pounds$ is open, minimalize $P \cup C\pounds P$.

Conversely, let $P \varepsilon \mathbf{P}$ and F be a f-ultra such that $P \cap F = \pounds P \cap F$. Then $\pounds P \cap F$ is a $\pounds_F$-saturated clopen set of F, and so $\pounds P$, which is the image of $\pounds P \cap F$ in the homeomorphism between $F/\pounds_F$ and $T/\pounds$ (Lemma 2), is clopen in T.

Every open set being a join of clopens and saturation being completely additive, $\pounds$ is open.

In the general case there is no hope for a similar result, unless nowhere dense sets are neglected, or some such modification of the definition of witness is introduced. As to problem *b*):

LEMMA 4. Let $\{T, £, \mathsf{P}\}$ be a m-space such that T is Hausdorff. Then a f-ultra F is an individual iff $£_F$ is open.

PROOF. Let x, y belong to the same $£_F$-set and choose a closed neighborhood V of x in F, such that $y \notin V$.

Then, if V° denotes the interior of V, the set $£_F(V^\circ) - V = N$ is open in F, $y \varepsilon N$, and N does not contain any whole $£_F$-set. $F\text{-}N$ would then be a f-filter properly smaller that F. Necessity is trivial.

COROLLARY. In a Hausdorff space with an open equivalence relation $£$, if every open set contains a $£$-set, $£$ is discrete.

LEMMA 5. Let $\{T, £, \mathsf{P}\}$ be a m-space such that T is Hausdorff, P is a basis for the topology, and $£(\mathsf{P})$ is a subalgebra of P. Then a f-ultra F is an individual iff, for every $P \varepsilon \mathsf{P}$: $£_F(P \cap F) = (£Q) \cap F$ for some $Q \varepsilon \mathsf{P}$.

PROOF. Let x, y, V be as in the preceding Lemma, and we can choose $V \varepsilon \mathsf{P}$. Now let $(£Q) \cap F = £_F(V \cap F)$. As $C£Q$ is the pseudo complement of $£Q$, it must be saturated by hypothesis. $y \varepsilon \overline{C£Q}$ would imply then $x \varepsilon \overline{C£Q}$ which is impossible because V is disjoint from $C£Q$. So $y \varepsilon \overline{C£Q}$ and then $V \cup (F \cap \overline{C£Q})$ is a f-filter properly smaller than F.

Necessity is trivial.

LEMMAS 2, 4, 5 give us three kinds of nec. and suff. conditions for a f-ultra to be an individual, none of which is very useful. For the applications it seems that one has to search for sufficient conditions, though they be not necessary. To this end we prove:

LEMMA 6. Let $\{T, £, \mathsf{P}\}$ be a m-space where the only proper f-filter is T. Then every clopen set is the interior of its $£$-saturation. Equivalently, it is the closure of its $£$-desaturation.

PROOF. We prove the second assertion. Let R be a clopen set and put $S = C£CR$. CR being clopen:

$$CR \cap \overline{S} = \overline{CR \cap S} = \varnothing .$$

On the other hand, $\pounds(CR \cup S) = T$, so $-T$ being the only f-filter $-$, $CR \cup \overline{S} = T$. That is: $R = \overline{S}$.

This Lemma suggests another nec. and suff. condition, rather unwieldy:

THEOREM 6. Let $\{T, \pounds, \mathsf{P}\}$ be a m-space and F a f-ultra in it. Then F is an individual iff: a) F is Hausdorff totally disconnected, and b) the $\pounds_F$-saturated of every clopen in F has a clopen interior in the quotient topology $F/\pounds_F$.

PROOF: apply Lemmas 2 and 6 to the m-space $\{F, \pounds_F, \mathsf{P} \cap F\}$

But it also yields a handy sufficient condition for the Boolean case:

THEOREM 7. Let $\{T, \pounds, \mathsf{P}\}$ be a B-m-space, such that $T/\pounds$ is extremely disconnected. Then every f-ultra is an individual. (Extreme disconnection means that he closure of every open set is open. For a Boolean space this means that the dual Boolean algebra is complete).

PROOF. Let F be a f ultra. We will show that $\pounds_F$ is open, or just that the $\pounds_F$-saturated of every clopen R of F is clopen in F, which implies that $\pounds_F$ is open. (We do not need $\pounds$ to be open).

By lemma 6, $R = \overline{S}$, with S a $\pounds_F$-saturated set which is open, beeause $\pounds_F$ is closed (Lemma 2).

So $\pounds_F R = \pounds_F \overline{S}$, but, $\pounds_F$ being closed, $\pounds_F \overline{S}$ is the closure of S in $F/\pounds_F = T/\pounds$. By the extreme disconnection of $T/\pounds$, $\pounds_F R$ is then clopen in F.

Now a general way of getting individuals suggests itself:

Enrichment. $\{T, \pounds, \mathsf{P}\}$ be a B-m-space. Consider in $T/\pounds$ any extremely disconnected topology finer than its own. Adding the new saturated open sets we generate a finer topology for T, whose name we change then to T'. The sets of the form $P \cap S$, where $P \varepsilon \mathsf{P}$ and S is a (new or old) saturated clopen set, form a basis of T'-clopen sets.

The relative topologies induced by T and T' on every $\pounds$-set coincide, so the $\pounds$-sets are T′-compact.

$\pounds$ is T′-closed, because each closed set is an intersection of clopens from the basis, that is, the meet of a T-closed set and a saturated closed set.

If $\pounds$ was open in T, it is open in T', again because $\pounds(P \cap S) = (\pounds P) \cap S$ and complete additivity of $\pounds$.

Calling P' the family of all T′-clopen sets, $\{T', \pounds, \mathsf{P}'\}$ is a B-m-space, satisfying the hypothesis of Theorem 7, and of Proposition 7 if $\pounds$ was T-open. It contains $\{T, \pounds, \mathsf{P}\}$ in a most natural way.

There is a more drastic method of enrichment, not restricted to the Boolean case:

SUPERENRICHMENT. $\{T, \pounds, \mathsf{P}\}$ be a m-space. Define in T the new topology T' obtained adding as new open sets all $\pounds$-sets (in the preceding case: considering the discrete topology in $T/\pounds$).

Now of course every set with just one point in each $\pounds$-set is closed, and so, an individual. $\{T', \pounds, \mathsf{P}'\}$ is then rich. All saturated sets being clopen in T', $\pounds$ is T'-open and T'-closed, whatever it was in T.

REFERENCES

[1] M. H. STONE. *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Am. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.

[2] G. BIRKOFF. *On the structure of abstract algebras.* Proc. Camb. Phil. Soc. 31 (1935) 433-454.

[3] O. ORE. *Theory of equivaleuce relations.* Duke Math. J. 9 (1942), 573-612.

[4] CH. DAVIS. *Modal operators, equivalence relations and projective algebras.* Amer. J. Math. 76 (1954), 217-249.

[5] P. R. HALMOS. *Algebraic Logic, I. Monadic Boolean algebras.* Compos. Math. 12 (1955) 217-249.

[6] I. KAPLANSKY. *Topological representations of algebras.* Trans. Am. Math. Soc. 63 (1948) p. 473.

Instituto de Matemática — Universidad del Sur.
Bahía Blanca, R. Argentina.

ESTA ENTREGA
SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL 30 DE SEPTIEMBRE DE 1958
EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »
CALLE PERÚ 684, BUENOS AIRES

CONTENIDO

RODOLFO RICABARRA, Particiones en conjuntos de números ordinales.
OSCAR VARSAVSKY, Quantifiers and equivalence relations.