universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fascículo 2
páginas 53-77

instituto de matemática
san luis
argentina

REVISTA MATEMATICA CUYANA

La REVISTA MATEMÁTICA CUYANA está destinada a la publicación de trabajos originales en los campos de la matemática pura y aplicada, y aparece en forma de fascículos sueltos sin periodicidad fija, anualmente reunidos en un volumen de 250 páginas, aproximadamente.

Castellano, inglés, alemán, francés e italiano, son los idiomas de la Revista.

Los artículos para la Revista deben ser escritos a máquina con doble espacio y enviados a uno de los miembros del Comité de Redacción.

Los colaboradores tienen derecho a 50 tiradas aparte gratis, de sus artículos, y podrán, si lo desean, recibir hasta 150 tiradas aparte a precio de costo.

En todo lo referente a suscripciones, adquisición de números atrasados, etc., dirigirse al Director del Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, San Luis.

revista matemática cuyana

universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fascículo 2
páginas 53-77

instituto de matemática
san luis
argentina

On a local L^2-variant of Ikehara's theorem

BY NORBERT WIENER AND AUREL WINTNER *

1. A fundamental theorem of Vivanti and Pringsheim states that if

$$a_n \geqq 0 \tag{1}$$

holds for all coefficients of a power series

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{2}$$

which converges for $|z| < 1$, then either the point $z = 1$ or no point of the circumference $|z| = 1$ is a singular point of the function $p(z)$. Clearly, the theorem becomes false if (1) is relaxed to

$$s_n \geqq 0, \quad \text{where} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{3}$$

(for, by changing the value of a_0 alone, $|s_n| <$ const. can be reduced to (3), whereas trivial examples show $|s_n| <$ const. is certainly not sufficient for the alternative of Vivanti-Pringsheim). Still less is it possible to relax (1) to the existence of some Cesàro index $m (= 1, 2, ...)$ satisfying, for the series $\sum a_n$, the condition

$$S_n{}^m \geqq 0 \quad (\text{as } n \to \infty, \text{ while } m \text{ is fixed}), \tag{4}$$

since (3) is equivalent to the case $m = 0$ of (4).

The Vivanti-Pringsheim theorem has a certain variant which, as an application of his Fourier methods in general Tauberian theory (cf., in particular, the proof of Ikehara's theorem in [2], § 19), one of us proved, but did not publish, some time ago. This theorem (quoted, but not proved, in [1], p. 242 and p. 250, item 12.6f) states that if (1) holds for the coefficients of a power series (2) which con-

* Received Sept. 5-1957.

verges for $|z| < 1$ and is of class L^2 on *some* (no matter how narrow) sector containing the segment $0 \leqq z < 1$, then it is of class L^2 on the entire circle. By this is meant that if there exists on *some* arc $-\varepsilon \leqq \theta \leqq \varepsilon$ of the circumference $|z| = 1$ a measurable function $p_0(\theta)$ satisfying

$$(5) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\, p\,(re^{i\theta}) - p_0(e^{i\theta})\,|^2 \, d\theta \to 0 \ \text{ as } \ r \to 1,$$

with $z = re^{i\theta}$ (and $r < 1$) in (2), and if (1) is assumed, then $p_0(\theta)$ can be extended from $[-\varepsilon, \varepsilon]$ to $[-\pi, \pi]$ in such a way that

$$(6) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |\, p\,(re^{i\theta}) - p_0(e^{i\theta})\,|^2 \, d\theta \to 0 \ \text{ as } \ r \to 1$$

will hold (it being understood that $p_0(e^{i\theta})$ is of class L^2 on $[-\pi, \pi]$).

2. It will be shown in this paper that, in contrast with the Vivanti-Pringsheim theorem itself, *the* L^2 *variant can be generalized so as to relax* (1) *to* (3), *and even to* (4).

The theorem remains true if the power series (2) is replaced by a Laplace integral and (3) or (4) is adjusted to this general case. We shall give the proof for this more general case. This will have, among other things, the advantage of exhibiting the parallelism with the proof of Ikehara's theorem directly.

3. Let $f(s)$ be a function which is regular in the half-plane $\sigma > 1$, where $s = \sigma + it$, and suppose that there exists on a fixed t-interval $[-a, a]$ a function $f_0(t)$ of class L^2 satisfying

$$(7) \qquad \int_{-a}^{a} |\, f(\sigma + it) - f_0(t)\,|^2 \, dt \ \text{as } \sigma \to 1$$

(by $\sigma \to 1$ is meant $\sigma \to 1 + 0$). Then $f(s)$ will be called *of class* $L^2(a)$. In view of the completeness of the space of the L^2-functions on a t-interval $[-a, a]$, condition (7) is equivalent to

$$(8) \qquad \int_{-a}^{a} |\, f(\sigma_1 + it) - f(\sigma_2 + it)\,|^2 \, dt \to 0 \ \text{as } (\sigma_1, \sigma_2) \to (1, 1),$$

where $\sigma_1\,(> 1)$ and $\sigma_2\,(> 1)$ are independent variables.

In this terminology, the main theorem, to be proved, can be formulated as follows:

Let $\mu(u)$, *where* $0 \leqq u < \infty$, *be of bounded variation on every finite interval* $0 \leqq u \leqq U\ (< \infty)$, *suppose that the Laplace-Stieltjes transform,*

$$(9) \qquad f(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, d\mu(u),$$

of μ *is convergent* (but, possibly, not absolutely convergent) *on the half-plane* $\sigma > 1$, *where* $s = \sigma + it$, *and let*

$$(10) \qquad \mu(0) = 0 \text{ and } \mu(u) \geqq 0, \text{ where } 0 < u < \infty$$

(but

$$(10 \text{ bis}) \qquad d\mu(u) \geqq 0, \quad \text{where} \quad 0 \leqq u < \infty,$$

is not assumed). *Then the function* $f(s)$ *cannot be of class* $L^2(a)$ *for any* $a = \varepsilon$ *unless it is of class* $L^2(a)$ *for every* $a = N$.

In contrast, the proof of Ikehara's theorem ([2], § 19), which assumes (10 bis), cannot be improved so as to relax (10 bis) to *(10)*. In this connection, cf. [3].

4. Conditions (10) and (10 bis) correspond to (3) and (1) respectively, if (9) is identified with (2), by choosing $\mu(u)$ to be a step-function and placing $z = e^{-s}$ (except that the radius of convergence R of (2) then becomes $R = L/e$, instead of $R = 1$).

Correspondingly, the generalization (4) of (3) results if the assumption $\mu(u) \geqq 0$ is relaxed to the assumption that there exists some m satisfying $\mu_m(u) \geqq 0$ (for large u), where

$$\mu_m(u) = \int_0^u \mu_{m-1}(v)\, dv, \qquad \mu_1(u) = \mu(u).$$

But it will be clear from the proof that the case of an arbitrary m can be treated in the same way as the case $m = 1$, if the partial integration, leading from (9) to (13) and (14) below, is applied m times. For this reason, it will be sufficient to deal with the case of the assumption (10), where $m = 1$ (the assumption (10 bis) would correspond to $m = 0$).

5. In the proof of the theorem, it can be assumed that the given a-value, the value for which $f(s)$ is supposed to be of class $L^2(a)$, is $a = 1$ (this normalization is accomplished by a change of the unit of length on the t-axis). Then the assumption is that

$$(11)\quad \int_{-1}^{1} |f(1+\varepsilon+it) - f(1+\eta+it)|^2 \, dt \to 0 \text{ as } (\varepsilon, \eta) \to (0, 0)$$

(where $1 + \varepsilon = \sigma_1$ and $1 + \eta = \sigma_2$ in the earlier notations), and the assertion is that

$$\int_{-a}^{a} |f(1+\varepsilon+it) - f(1+\eta+it)|^2 \, dt \to 0$$

must hold for every fixed positive $a < \infty$.

To this end, it will be sufficient to show that

$$(12)\qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(1+\varepsilon+it+ic) - f(1+\eta+it+ic)|^2 \, dt \to 0$$

holds for every real c. In fact, (12) can be written in the form

$$\int_{-\frac{1}{2}+c}^{\frac{1}{2}+c} |f(1+\varepsilon+it) - f(1+\eta+it)|^2 \, dt \to 0.$$

If this is applied to $c = 3/2$ and to $c = -3/2$, and if both of the resulting relations are added to (11), it follows that (11) remains true if its $[-1,1]$ is increased to $[-2,2]$.

Clearly, a repetition of this process leads to $[-N, N]$ for any fixed $N > 0$. This is the reason why it will be sufficient to prove that (11) leads to (12) for any fixed real c.

6. If the integral (9) is convergent for $\sigma > 1$, and if, without loss of generality, $\mu(0) = 0$ in (9), then a partial integration shows that

$$(13)\qquad f(s) = sF(s),$$

where

$$(14)\qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-su} \mu(u) \, du,$$

the convergence of the integral (14) for $\sigma > 1$ being part of the statement. [It is worth emphasizing that, whereas the condition (10), which was not used here, and the convergence of (9) for $\sigma > 1$ do not imply the absolute convergence of (9) for $\sigma > 1$, they do imply the absolute convergence of (14) for $\sigma > 1$.]

Since both s and $1/s$ are regular and bounded on every $(\sigma + it)$-rectangle of the form $1 < \sigma < 2$, $-N < t < N$, it is clear from (13) that (11) and (12) are equivalent to

$$(15) \qquad \int_{-1}^{1} | F(1 + \varepsilon + it) - F(1 + \eta + it) |^2 dt \to 0$$

and

$$(16) \qquad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} | F(1 + \varepsilon + it + ic) - F(1 + \eta + it + ic) |^2 dt \to 0$$

respectively. Hence the assertion of the theorem is equivalent to the statement that, *if* (10) *is assumed*, (15) leads to (16) for every real c.

Actually, (16) will prove to be true, not only for every fixed c, but *uniformly* on the *infinite* range $-\infty < c < \infty$. But this additional information is immaterial in the proof of the theorem.

7. The beginning of the proof is about the same as that of Ikehara's theorem; it proceeds as follows:

For any fixed $\sigma > 1$ and for any fixed real c, put

$$F_\sigma(t; c) = (1 - |t|) F(\sigma + it + ic) \text{ if } |t| \leqq 1, \quad F_\sigma(t; c) = 0 \text{ if } |t| \geqq 1,$$

where $-\infty < t < \infty$, and also put

$$G_\sigma(t; c) = e^{-\sigma u} \mu(u) e^{-icu} \text{ if } u \geqq 0, \quad G_\sigma(u; c) = 0 \text{ if } u \leqq 0,$$

where $-\infty < u < \infty$ (and $\mu(0) = 0$). Then, since the function

$$(17) \qquad S(u) = \left(\sin \frac{1}{2} u\right)^2 \Big/ \left(\frac{1}{2} u\right)^2, \qquad (S(0) = 1),$$

where $-\infty < u < \infty$, is a positive constant multiple of the Fourier transform of $\max(0, 1 - |t|)$, where $-\infty < t < \infty$, it is readily verified from (14), where $\mu(u) \geqq 0$, that the Fourier transform of the function $F_\sigma(t; c)$ of t is the convolution $S(u) * G_\sigma(u; c)$ (if a normalizing constant factor, such as $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$, is disregarded). In view of the definitions of $F_\sigma(t; c)$ and $G_\sigma(u; c)$, this means that the identity

$$(18) \qquad \int_{-1}^{1} e^{ixt}(1 - |t|) F(\sigma + it + ic)\, dt = H_\sigma(x; c),$$

where

$$(19) \qquad H_\sigma(x; c) = \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma u} \mu(u) e^{-icu} S(x - u)\, du,$$

holds for $\sigma > 1$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < c < \infty$ (to a neglected positive constant factor); and that, by Plancherel's relation,

$$\int_{-1}^{1} (1 - |t|)^2 |F(\sigma + it + ic)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H_\sigma(x; c)|^2 dx$$

(to a constant factor, the square of the preceding constant factor).

If all of this is applied, not to the functions belonging to one $\sigma > 1$, but to the difference of the functions belonging to two σ values, $\sigma = 1 + \varepsilon$ and $\sigma = 1 + \eta$, where $\varepsilon > 0$ and $\eta > 0$, then what results is that the expression

$$(20) \qquad \int_{-1}^{1} (1 - |t|)^2 |F(1 + \varepsilon + it + ic) - F(1 + \eta + it + ic)|^2 dt$$

is a constant multiple of the expression

$$(21) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |H_{1+\varepsilon}(x; c) - H_{1+\eta}(x; c)|^2 dx.$$

8. Since $(1 - |t|)^2$ has a positive minimum on the interval $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$, it is clear that the integral on the left of the relation (16) is majorized by a constant multiple of the integral (20). Hence, in order to prove that the relation (16) holds for every fixed c, it is sufficient to show that the function (21) of $(\varepsilon, \eta; c)$ tends to 0 as $(\varepsilon, \eta) \to (0, 0)$. But this property of (21) can readily be concluded (as a matter of fact, *uniformly* for $-\infty < c < \infty$), as follows:

According to (10) and (17), both functions μ, S are non-negative. Hence it is clear from (19) that

$$|H_{1+\varepsilon}(x;c) - H_{1+\eta}(x;c)|$$
$$\leqq \left| \int_0^\infty (e^{-(1+\varepsilon)u} - e^{-(1+\eta)u})\, \mu(u)\, S(x-u)\, |e^{-icu}|\, du \right|$$

(whether $\varepsilon > \eta$, $\varepsilon < \eta$ or $\varepsilon = \eta$). But since $|e^{-icu}| = 1$, it is also seen from (19) that the last inequality can be written in the form

$$|H_{1+\varepsilon}(x;c) - H_{1+\eta}(x;c)| \leqq |H_{1+\varepsilon}(x;0) - H_{1+\eta}(x;0)|.$$

Hence, if (ε, η) is fixed, the function (21) of c is majorized by the value attained by (21) at $c = 0$.

Consequently, if (ε, η) is fixed, the function (21) of c is majorized by a constant multiple of the value attained by (20) at $c = 0$, and the constant factor is independent of (ε, η). But since $(1 - |t|)^2 \leqq 1$ if $-1 \leqq t \leqq 1$, the value of (20) at $c = 0$ is majorized by the integral occurring in (15). Since the limit relation (15), where $(\varepsilon, \eta) \to (0, 0)$, is assumed this proves that the function (21) of $(\varepsilon, \eta; c)$ tends to 0 as $(\varepsilon, \eta) \to (0, 0)$, uniformly for $-\infty < c < \infty$.

REFERENCES

[1] R. P. Boas, Jr., *Entire functions*, New York, 1954.

[2] N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge, 1933.

[3] A. Wintner, « On the Tauberian nature of Ikehara's theorem », *American Journal of Mathematics*, vol. 69 (1947), pp. 99-103.

Massachusetts Institute of Technology
The Johns Hopkins University.

Anwenduwg dualer quatàrnionen auf Kinematik

Von WILHELM BLASCHKE (Hamburg) *

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie einfach sich die Formeln für die Kinematik des Euklidischen Raumes gestalten lassen, wenn man im Anschluss en EULER die Drehungen mittels der Quaterni nen darstellt und dazu noch die sogenannten « dualen Zahlen ».

$$a + \varepsilon b, \quad \varepsilon^2 = 0$$

zuhilfe nimmt.

Einen Teil des Folgenden habe ich an der Universitaet in Buenos Aires im Mai 1957 vorgetragen und ich möchte diese Gelegenheit benutzen, um meinen argentinischen Freunden und Kollegen für ihre Gastfreundschaft herzlichst zu danken.

§ 1. QUATERNIONEN

Es seien die q_i zunächst reele Zahlen, dann schreiben wir eine Quaternion in der Gestalt

$$\mathfrak{Q} = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3,$$

und erklären Addition und Multiplikation durch die Formeln

$$(1,2) \qquad \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}' = \sum_0^3 (q_i + q'_i)\, e_i,$$

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}' = \sum_0^3 q_i q'_k e_i e_k$$

mit

$$(1,3) \qquad e_0e_i = e_ie_0 = e_i,$$

* Eingegangen am 19. Sept. 1957.

sodass wir auch

$$e_0 = 1 \tag{1,4}$$

setzen können, und

$$\begin{gathered} e_1 e_1 = e_2 e_2 = e_3 e_3 = -1 \\ e_i e_k = -e_k e_i = e_l \end{gathered} \tag{1,5}$$

für $\qquad i, k, l. = 1, 2, 3\,;\, 2, 2, 1\,;\, 3, 1, 2.$

Dann gilt für die Multiplikation das assoziative Gesetz

$$\mathbf{Q}\,(\mathbf{Q}'\mathbf{Q}'') = (\mathbf{Q}\mathbf{Q}')\,\mathbf{Q}''. \tag{1,6}$$

Statt (1,1) schreiben wir auch

$$\mathbf{Q} = q_0 + \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3. \tag{1,7}$$

Dann soll $\mathbf{q}$ ein *Vektor* heissen und wir führen die *koniugierte Quaternion* ein durch

$$\widetilde{\mathbf{Q}} = q_0 - \mathbf{q}. \tag{1,8}$$

Man bestätigt eie Rechenregeln

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}' = q_0 q'_0 + q_0 \mathbf{q}' + q'_0 \mathbf{q} - <\mathbf{q}\mathbf{q}'> + (\mathbf{q} \times \mathbf{q}'), \tag{1,9}$$

wobei das Skalarprodukt

$$<\mathbf{q}\mathbf{q}'> = q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3 \tag{1,10}$$

und das Vektorprodukt

$$\mathbf{q} \times \mathbf{q}' = (q_2 q'_3 - q_3 q'_2)\, e_1 + (q_3 q'_1 - q_1 q'_3)\, e_2 + (q_2 q'_2 - q_2 q'_1) e_3 \tag{1,11}$$

benutzt ist. Ferner wird

$$\begin{gathered} \mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{Q}} = q^2_0 + q^2_1 + q^2_2 + q^2_2 = <QQ>, \\ \tfrac{1}{2}(\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{Q}}' + \mathbf{Q}'\widetilde{\mathbf{Q}}) = q_0 q'_0 + q_1 q'_1 + q_2 q'_2 + q_3 q'_3 = <QQ'> \end{gathered} \tag{1,12}$$

und

$$\widetilde{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'} = \widetilde{\mathbf{Q}'}\widetilde{\mathbf{Q}}. \tag{1,13}$$

Anstelle der reelen q_i werden wir auch «duale» Zahlen verwenden

(1,14) $$\underline{q}_i = q_i + \varepsilon\bar{q}_i,$$

wobei die q_i, $\bar{q}_i$ reel sind und ε den Regeln genügt

(1,15) $$\varepsilon^2 = 0, \quad e_i\varepsilon = \varepsilon e_i$$

Dabei ist q_i ein *Nullteiler* für $q_i = 0$. Die division durch Nullteiler ist unzulässig. Wir setzen für duale Quaternionen

(1,16) $$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}} &= q_0 + \varepsilon\bar{q}_0 + \mathbf{q} + \varepsilon\bar{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_0 + \underline{\mathbf{q}}\,; \\ \mathbf{q} &= q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3, \\ \bar{\mathbf{q}} &= \bar{q}_1e_1 + \bar{q}_2e_2 + \bar{q}_3e_3 \end{aligned}$$

und führen die Bezeichnungen ein

(1,17) $$\begin{aligned} \tilde{\underline{\mathbf{Q}}} &= q_0 + \varepsilon\bar{q}_0 - \mathbf{q} - \varepsilon\bar{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_0 - \underline{\mathbf{q}}\,; \\ \underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon &= q_0 - \varepsilon\bar{q}_0 + q - \varepsilon\bar{q}. \end{aligned}$$

Dann wird

(1,18) $$\begin{aligned} 4q_0 &= \underline{\mathbf{Q}} + \tilde{\underline{\mathbf{Q}}} + \underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon + \tilde{\underline{\mathbf{Q}}}_\varepsilon, \\ 4\bar{q}_0 &= \underline{\mathbf{Q}} + \tilde{\underline{\mathbf{Q}}} - \underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon - \tilde{\underline{\mathbf{Q}}}_\varepsilon, \\ 4\mathbf{q} &= \underline{\mathbf{Q}} - \tilde{\underline{\mathbf{Q}}} + \underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon - \tilde{\underline{\mathbf{Q}}}_\varepsilon, \\ 4\mathbf{q} &= \underline{\mathbf{Q}} - \tilde{\underline{\mathbf{Q}}} - \underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon + \tilde{\underline{\mathbf{Q}}}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Die duale Quaternion $\underline{\mathbf{Q}}$ heisse gernormt, wenn

(1,19) $$\underline{\mathbf{Q}}\,\tilde{\underline{\mathbf{Q}}} = 1\,; \quad \mathbf{Q}\tilde{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{Q}\mathbf{Q} \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{Q}\mathbf{Q} \rangle = 0$$

Die Quaternionen hat L. Euler (1707-1783) 1748 eingeführt Spaeter wurden sie von K. F. Gauss (1777-1855) 1819 und insbesondere von W. R. Hamilton (1805-1865) 1840 verwendet. Duale Zahlen dürfte W. K. Clifford (1835-1879) zuerst benutzt haben. Für eine differanzierbare Funktion F der dualen Veränderlichen $q + \varepsilon\bar{q}$ setzt man

(1,20) $$\begin{aligned} F(q + \varepsilon\bar{q}) &= F(q) + \varepsilon\bar{q}F'(q), \\ F'(q) &= \frac{dF(q)}{dq}. \end{aligned}$$

§ 2. LINIENGEOMETRIE

Es sei

$$\mathsf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \tag{2,2}$$

ein Punkt mit den rechtwinkligen Koordinaten x_i auf einer Geraden und $\mathfrak{g}$ ein Einheitsvektor auf dieser (gerichteten) Geraden. Dann setzen wir

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathsf{x} \times \mathfrak{g} \tag{2,2}$$

und bemerken, dass sich dieses Vektorprodukt nicht ändert, wenn wir x durch einen andern Punkt

$$\mathsf{x}^* = \mathsf{x} + \nu \mathfrak{g} \tag{2,3}$$

ersetzen. Unsere Gerade $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$ wird dann durch dass Vektorpaar $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ bestimmt und (2,1) ist die Bedingung dafür, dass der Punkt x auf der Geraden $\{\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}}\}$ liegt. Die Vektoren $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$ erfüllen die Bedingungen

$$<\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}> = 1, \quad <\mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}> = 0. \tag{2,4}$$

Man kann diese beiden Bedingungen in eine zusammenfassen durch Einführung des dualen Einheitsvektors

$$\begin{gathered} \underline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \varepsilon\bar{\mathfrak{g}}; \\ <\underline{\mathfrak{g}}\,\underline{\mathfrak{g}}> = <\mathfrak{g}\,\mathfrak{g}> + 2\varepsilon<\mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}> = 1. \end{gathered} \tag{2,5}$$

Damit werden die (gerichteten) Geradən des Raumes auf die *dualen Punkte* der Einheitskugel abgebildet.

Für zwe duale Einheitsvektoren $\underline{\mathfrak{g}}$, $\underline{\mathfrak{g}}'$ haben wir

$$<\underline{\mathfrak{g}}\,\underline{\mathfrak{g}}'> = <\mathfrak{g}\mathfrak{g}'> + \varepsilon\{<\mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}'> + <\bar{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}'>\}. \tag{2,6}$$

Liegt der Punkt x auf der Geraden $\underline{\mathfrak{g}}$ und x' auf $\underline{\mathfrak{g}}'$, so wird

$$<\mathfrak{g}\,\bar{\mathfrak{g}}'> + <\bar{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}'> = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathsf{x} - \mathsf{x}'], \tag{2,7}$$

wenn die eckige Klammer dio Determinante der drei Vektoren bedeutet. Nehmen wir für x, x' insbesondere die Punkte, deren Verbindungsgerade $\underline{\mathbf{g}}''$ sowohl $\underline{\mathbf{g}}$ wie $\underline{\mathbf{g}}'$ rechtwinklig schneidet, so können wir setzen

(2,8) $$<\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{g}}'> = \cos(\varphi + \varepsilon\bar{\varphi})$$

oder ausführlich

(2,9) $$<\mathbf{g}\,\mathbf{g}'> = \cos\varphi, \quad <\mathbf{g}\,\bar{\mathbf{g}}'> + <\bar{\mathbf{g}}\,\mathbf{g}'> = -\varepsilon\bar{\varphi}\sin\varphi$$

und bemerken, dass φ den Winkel von $\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{g}}'$ und wegen (2,7) $\bar{\varphi}$ den kürzesten Abstand von $\underline{\mathbf{g}}$, $\underline{\mathbf{g}}'$ bedeutet.

Dabei sind die Vorzeiahen von φ, $\bar{\varphi}$ aneinander gebunden.

(2,10) $$<\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{g}}'> = 0$$

bedeutet insbesondere rechtwinkliges Schneiden von $\underline{\mathbf{g}}$, $\underline{\mathbf{g}}'$.
Für $\underline{\mathbf{g}}''$ finden wir

(2,11) $$\underline{\mathbf{g}}'' = \frac{\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}'}{\sqrt{1 - <\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{g}}'>}}$$

unter der Annahme

(2,12) $$\underline{\mathbf{g}} \times \underline{\mathbf{g}}' \neq 0.$$

Die Anwendung dualer Zahlen auf die Liniengeometrie soll von W. K. Clifford 1873 stammen. Dann folgen Schriften von A. P. Kotjelnikoff (1865-1944) 1895. J. Petersen = Hjelmsley (1873-1950) 1900, G. Fubini (1879-1943) 1900 und insbesondere E. Study (1862-1930) 1903 in seiner *Geometrie der Dynamen*.

§ 3. BEWEGUNGEN

Einem Punkt $\mathbf{x}$ mit den rechtwinkligen Koordinaten x_i haben wir zunächst den *Vektor*

(3,1) $$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

zugeordnet. Dann nehmen wir noch die duale Quaternion

(3,2) $$\underline{\mathbf{X}} = 1 + \varepsilon\mathbf{x}.$$

Ist

$$u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \tag{3,3}$$

mit

$$\mathbf{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3, \quad <\mathbf{u}\,\mathbf{u}> = 1 \tag{3,4}$$

die Gleichung einer (gerichteten) Ebene, so soll ihr die duale Quaternion

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathbf{u} + \varepsilon u_0 \tag{3,5}$$

entsprechen.

Für vereinigte Lage der Geraden $\underline{\mathbf{g}}$ mit dem Punkt $\underline{\mathbf{X}}$ finden wir dann als Bedingung

$$\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{X}} - \underline{\mathbf{X}}\,\underline{\mathbf{g}}_\varepsilon = 2\varepsilon(\overline{\mathbf{g}} - \mathbf{x} \times \mathbf{g}) = 0. \tag{3,6}$$

Für vereinigte Lage der Geraden $\mathbf{g}$ mit der Ebene $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\underline{\mathbf{g}}\,\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{g}}_\varepsilon = 0 \tag{3,7}$$

Schliesslich für vereinigte Lage von Punkt $\underline{\mathbf{X}}$ und Ebene $\underline{\mathbf{U}}$:

$$\underline{\mathbf{X}}\,\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}_\varepsilon \underline{\mathbf{X}}_\varepsilon = 2\varepsilon\{u_0 + <\mathbf{u}\mathbf{x}>\} = 0. \tag{3,8}$$

Mittels einer genormten dualen Quaternion $\underline{\mathbf{Q}}$ kann man nun eine Bewegung des Raumes in ihrer Wirkung auf die Geraden so darstellen:

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{g}}'\,\underline{\mathbf{Q}}, \quad \underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}} = 1, \tag{3,9}$$

ferner in ihrer Wirkung auf Punkte:

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{X}}'\,\underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon, \tag{3,10}$$

und auf Ebenen

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_\varepsilon\,\underline{\mathbf{U}}'\,\underline{\mathbf{Q}}. \tag{3,11}$$

Insbesondere erhalten wir eine Bewegung von der Periode zwei (involutorische Bewegung) für $\underline{\mathbf{q}}_0 = 0$, naemlich die Spiegelung an der Geraden $\underline{\mathbf{q}}$.

Merken wir noch die Formeln für die *Umlegungen* an, die aus den Bewegungen (3,9), (310), (3,11) durch Zusammensetzung mit der Spiegelung am Ursprung

$$\underline{\mathbf{g}} = - \underline{\mathbf{g}}'_{\varepsilon}, \quad \underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{X}}'_{\varepsilon}, \quad \underline{\mathbf{U}} = - \underline{\mathbf{U}}'_{\varepsilon} \tag{3,12}$$

hervorgehen:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{g}} &= - \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}\, \underline{\mathbf{g}}'_{\varepsilon}\, \underline{\mathbf{Q}}, \\ \underline{\mathbf{X}} &= + \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}\, \underline{\mathbf{X}}_{\varepsilon}\, \underline{\mathbf{Q}}_{\varepsilon}, \\ \underline{\mathbf{U}} &= - \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_{\varepsilon}\, \underline{\mathbf{U}}_{\varepsilon}\, \underline{\mathbf{Q}}. \end{aligned} \tag{3,13}$$

Insbesondere gibt es zwei Typen involutorischer Umlegungen, naemlich für

$$\underline{\mathbf{Q}} = 1 + \varepsilon \bar{\mathbf{q}}, \tag{3,14}$$

die Spiegelung am Punkte $- \bar{\mathbf{q}}$ und für

$$\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{U}} = \mathbf{q} + \varepsilon \bar{q}_0 \tag{3,15}$$

die Spiegelung and der Ebene $\underline{\mathbf{U}}$.

Zum Nachweis von (3,9) bemerke man, dass aus

$$\underline{\mathbf{g}}' + \underline{\tilde{\mathbf{g}}}' = 0 \tag{3,16}$$

folgt

$$\underline{\mathbf{g}} + \underline{\bar{\mathbf{g}}} = 0, \tag{3,17}$$

dass also Vektoren wieder in Vektoren übergehen. Ferner folgt aus

$$\underline{\mathbf{g}}' \underline{\tilde{\mathbf{g}}}' = 1 \tag{3,18}$$

wieder

$$\underline{\mathbf{g}} = \underline{\tilde{\mathbf{g}}} = 1. \tag{3,19}$$

Die Substitution (3,9) ist also orthogonal. Setzen wir schliesslich

$$\begin{aligned} &\underline{\mathbf{Q}} = \cos \underline{\omega} + \underline{\mathbf{a}} \sin \underline{\omega}, \quad \underline{\mathbf{a}}\, \underline{\tilde{\mathbf{a}}} = 1; \\ &\underline{\omega} = \omega + \varepsilon \bar{\omega}, \end{aligned} \tag{3,20}$$

so bedeutet $\underline{\mathbf{a}}$ die Schraubachse der Bewegung $\underline{\mathbf{Q}}$, 2ω den Winkel der Drehung um $\underline{\mathbf{a}}$ und $2\,\overline{\omega}$ die Grösse der Schiebung (Translation) längs $\underline{\mathbf{a}}$ bei geeigneter Vorzeichenwahl.

Aus der Formel (3,9) gewinnt man dann die andern (3,10) und (3,11) mittels der Bedingungen (3,6), (3,7), (3,8) für vereinte Lage. Merken wir noch für die Schraubachse an

$$\underline{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{q}}{\sqrt{1 - \underline{\mathbf{q}}_0^2}}. \tag{3,21}$$

Sie wird unbrauchbar für

$$q_0^2 = 1, \quad \mathbf{q} = 0, \quad \underline{\mathbf{Q}} = 1 + \varepsilon\overline{\mathbf{q}},$$

also für die Schiebungen (Translationen).

§ 4. Eingliedrige Bewegungsvorgänge

Wir betrachten jetzt einen « eingliedrigen Bewegungsvorgang », indem wir Bewegung und die zugehörige genormte duale Quaternion von einem reellen Parameter t, der « Zeit » abhängen lassen :

$$\underline{\mathbf{g}}(t) = \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}(t)\,\underline{\mathbf{g}}'\,\underline{\mathbf{Q}}(t). \tag{4,1}$$

Dann führen wir zu $\underline{\mathbf{Q}}(t) = \underline{\mathbf{Q}}_0(t)$ ein geeignet gewähltes Quadrupel genormter orthogonaler Quaternionen $\underline{\mathbf{Q}}_j(t)$; $j = 0, 1, 2, 3$ ein

$$< \underline{\mathbf{Q}}_i\,\underline{\mathbf{Q}}_k > = \delta_{ik} \tag{4,2}$$

und erhalten dann in bekannter Weise *Ableitungsgleichungen*

$$\begin{array}{rcccccc}
d\underline{\mathbf{Q}}_0 = & * & + \underline{\mathbf{Q}}_1\underline{\rho} & * & * & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_1 = & - \underline{\mathbf{Q}}_0\underline{\rho} & * & + \underline{\mathbf{Q}}_2\underline{\sigma} & * & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_2 = & * & - \underline{\mathbf{Q}}_1\underline{\sigma} & * & + \underline{\mathbf{Q}}_3\underline{\tau} & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_3 = & * & * & - \underline{\mathbf{Q}}_2\underline{\tau} & * & ,
\end{array} \tag{4,3}$$

Darin sei

$$\begin{gathered}
\underline{\mathbf{Q}}_i = \mathbf{Q}_i + \varepsilon\overline{\mathbf{Q}}_i, \\
\underline{\rho} = \rho + \varepsilon\overline{\rho}, \quad \underline{\sigma} = \sigma + \varepsilon\overline{\sigma}, \quad \underline{\tau} = \tau + \varepsilon\overline{\tau}.
\end{gathered} \tag{4,4}$$

Dann ergeben die Formeln (4,3) ausführlich

$$
(4,5)\qquad
\begin{array}{llllll}
d\underline{\mathbf{Q}}_0 = & * & +\,\underline{\mathbf{Q}}_1\rho & * & * & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_1 = & = \underline{\mathbf{Q}}_1\rho & * & +\,\underline{\mathbf{Q}}_2\sigma & * & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_2 = & * & -\,\underline{\mathbf{Q}}_1\rho & * & +\,\underline{\mathbf{Q}}_3\tau & , \\
d\underline{\mathbf{Q}}_3 = & * & * & -\,\underline{\mathbf{Q}}_2\tau & * & ,
\end{array}
$$

und

$$
(4,6)\qquad
\begin{array}{llllllllll}
d\bar{\mathbf{Q}}_0 = & * & +\,\mathbf{Q}_1\bar{\rho} & * & * & * & +\,\bar{\mathbf{Q}}_1\rho & * & * & ; \\
d\bar{\mathbf{Q}}_1 = & -\,\mathbf{Q}_0\bar{\rho} & * & +\,\mathbf{Q}_2\bar{\sigma} & * & -\,\bar{\mathbf{Q}}_0\rho & * & +\,\bar{\mathbf{Q}}_2\rho & * & , \\
d\bar{\mathbf{Q}}_2 = & * & -\,\mathbf{Q}_1\bar{\sigma} & * & +\,\mathbf{Q}_3\bar{\tau} & * & -\,\bar{\mathbf{Q}}_1\sigma & * & +\,\bar{\mathbf{Q}}_3\tau & , \\
d\bar{\mathbf{Q}}_3 = & * & * & -\,\mathbf{Q}_2\bar{\tau} & * & * & * & -\,\bar{\mathbf{Q}}_2\tau & * & .
\end{array}
$$

Wir führen jetzt die dualen Einheitsvektoren ein

$$
(4,7)\qquad \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_0\,\underline{\mathbf{Q}}_i = \underline{\mathbf{p}}_i, \quad \underline{\mathbf{Q}}_i\,\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_0 = \underline{\mathbf{p}}'_i; \quad i = 1, 2, 3
$$

mit

$$
(4,8)\qquad <\underline{\mathbf{p}}_i\,\underline{\mathbf{p}}_k> \,=\, <\underline{\mathbf{p}}'_i\,\underline{\mathbf{p}}'_k> \,=\, \delta_{ik}
$$

$$
(4,9)\qquad
\begin{array}{lll}
\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_2\underline{\mathbf{Q}}_3 = -\,\underline{\mathbf{p}}_1, & \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_3\underline{\mathbf{Q}}_1 = -\,\underline{\mathbf{p}}_2, & \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_1\underline{\mathbf{Q}}_2 = -\,\underline{\mathbf{p}}_3, \\
\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_3\underline{\mathbf{Q}}_2 = +\,\underline{\mathbf{p}}_1, & \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_1\underline{\mathbf{Q}}_3 = +\,\underline{\mathbf{p}}_2, & \underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_2\underline{\mathbf{Q}}_1 = +\,\underline{\mathbf{p}}_3,
\end{array}
$$

und

$$
(4,10)\qquad
\begin{array}{lll}
\underline{\mathbf{Q}}_2\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_3 = -\,\underline{\mathbf{p}}'_1, & \underline{\mathbf{Q}}_3\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_1 = -\,\underline{\mathbf{p}}'_2, & \underline{\mathbf{Q}}_1\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_2 = -\,\underline{\mathbf{p}}'_3, \\
\underline{\mathbf{Q}}_3\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_2 = +\,\underline{\mathbf{p}}'_1, & \underline{\mathbf{Q}}_1\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_3 = +\,\underline{\mathbf{p}}'_2, & \underline{\mathbf{Q}}_2\underline{\widetilde{\mathbf{Q}}}_1 = +\,\underline{\mathbf{p}}'_3.
\end{array}
$$

Für die rechtwinkligen Dreibeine der Vektoren $\underline{\mathbf{p}}_i$, $\underline{\mathbf{p}}'$ ergeben sich dann Ableitungsgleichungen

$$
(4,11)\qquad
\begin{array}{lllllllll}
d\underline{\mathbf{p}}_1 = & * & +\,\underline{\mathbf{p}}_2\lambda & * & , & d\underline{\mathbf{p}}'_1 = & * & +\,\underline{\mathbf{p}}'_2\underline{\lambda}' & * \;, \\
d\underline{\mathbf{p}}_2 = & -\,\underline{\mathbf{p}}_1\lambda & * & +\,\underline{\mathbf{p}}_3\mu & , & d\underline{\mathbf{p}}'_2 = & -\,\underline{\mathbf{p}}'_1\underline{\lambda}' & * & +\,\underline{\mathbf{p}}'_3\underline{\mu}', \\
d\underline{\mathbf{p}}_3 = & * & -\,\underline{\mathbf{p}}_2\mu & * & , & d\underline{\mathbf{p}}'_3 = & * & -\,\underline{\mathbf{p}}'_2\underline{\mu}' & * \;,
\end{array}
$$

Diese Gleichungen lassen sich entsprechend zu (4,5), (4,6) aus (4,3) wieder ausführlich schreiben.

Leiten wir jetzt etwa die Gleichung

$$\underline{\mathfrak{p}}_1 = \underline{\widetilde{\mathfrak{Q}}}_0 \underline{\mathfrak{Q}}_1 \tag{4,12}$$

ab unter Beachtung von (4,11), (4,3), (4,7), so folgt

$$\underline{\mathfrak{p}}_2 \underline{\lambda} = \underline{\widetilde{\mathfrak{Q}}}_1 \underline{\mathfrak{Q}}_1 \underline{\varrho} + \underline{\mathfrak{Q}}_0 \left(- \underline{\mathfrak{Q}}_0 \underline{\varrho} + \underline{\mathfrak{Q}}_2 \underline{\sigma}\right) = \underline{\mathfrak{p}}_2 \underline{\sigma}). \tag{4,13}$$

Somit ist

$$\underline{\lambda} = \underline{\sigma}. \tag{4,14}$$

Entsprechend gewinnen wir durch Ableitung von (4,7), (4,9), (4,10)

$$\begin{aligned} \underline{\lambda} &= \underline{\sigma}, \quad \underline{\mu} = \underline{\tau} - \underline{\varrho}, \\ \underline{\lambda}' &= \underline{\sigma}, \quad \underline{\mu}' = \underline{\tau} + \underline{\varrho} \end{aligned} \tag{4,15}$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda' = \sigma, \quad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}' = \bar{\sigma}; \\ \mu &= \tau - \varrho\,, \quad \bar{\mu} = \bar{\tau} - \bar{\varrho}; \\ \mu' &= \tau + \varrho\,, \quad \bar{\mu}' = \bar{\tau} - \bar{\varrho}. \end{aligned} \tag{4,16}$$

Aus (4,1) folgt durch Ableitung unter Beachtung von (4,1)

$$\begin{aligned} d\underline{g} &= d\underline{\widetilde{Q}} \cdot \underline{g}' \cdot \underline{Q} + \underline{\widetilde{Q}} \cdot \underline{g}' \cdot d\underline{Q} \\ &= d\underline{\widetilde{Q}} \cdot \underline{Q}\underline{g}\underline{\widetilde{Q}}\,\underline{Q} + \underline{\widetilde{Q}}\,\underline{Q}\,\underline{g}\,\underline{\widetilde{Q}} \cdot d\,\underline{Q} = d\,\underline{\widetilde{Q}} \cdot \underline{Q}\,\underline{g} + \underline{g}\,\underline{\widetilde{Q}} \cdot d\,\underline{Q} \end{aligned} \tag{4,17}$$

und weiter wegen (4,3), (4,7)

$$d\underline{g} = (\underline{g}\,\underline{p}_1 - \underline{p}_1 \underline{g})\,\underline{\varrho} = 2\,(\underline{g} \times \underline{p}_1)\,\underline{\varrho}. \tag{4,18}$$

Somit ist für $\underline{g} = \underline{p}_1$, $d\underline{g} = 0$, das heisst $\underline{p}_1$ ist die *augenblickliche Schraubenachse* unseres Bewegungsvorgangs.
Wegen (4,11) ist

$$\langle \underline{p}_3 \underline{p}_1 \rangle = 0, \quad \langle \underline{p}_3, d\underline{p}_1 \rangle = 0, \tag{4,19}$$

das heisst: $\underline{p}_3$ ist die gemeinsame Normale benachbarter Schraubachsen. Dadurch ist das «*kanonische Achsenkreuz*» der $\underline{p}_i$ im bewegten System («Gangsystem») und der $\underline{p}'_i$ im «*Rastsystem*» gedeutet.

§ 5. ACHSENFLÄCHEN

Es sei $\underline{k}$ der Ursprung des kanonischen Achsenkreuzes der $\underline{p}_i$, also nach (2,2)

$$\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_1 = \bar{\mathfrak{p}}_i. \tag{5,1}$$

Daraus für $i = 1,3$ folgt durch Ableitung mittels (4,11)

$$\begin{aligned} (d\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_1) + (\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_2)\,\lambda &= +\mathfrak{p}_2\bar{\lambda} + \bar{\mathfrak{p}}_2\lambda, \\ (d\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_3) - (\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_2)\,\mu &= -\mathfrak{p}_2\bar{\mu} - \bar{\mathfrak{p}}_2\mu \end{aligned} \tag{5,2}$$

und somit nach (5,1)

$$d\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_1 = +\mathfrak{p}_2\bar{\lambda}, \quad d\mathbf{k} \times \mathfrak{p}_3 = -\mathfrak{p}_2\bar{\mu}. \tag{5,3}$$

Hieraus ist

$$d\mathbf{k} = \mathfrak{p}_1\bar{\mu} = \mathfrak{p}_3\bar{\lambda} \tag{5,4}$$

und entsprechend

$$d\mathbf{k}' = \mathfrak{p}'_1\bar{\mu}' + \mathfrak{p}'_3\bar{\lambda}'. \tag{5,6}$$

Da $\mathbf{k}$ Schnittpunkt der Schraubachse $\underline{\mathfrak{p}}_1$ ist mit der geraden $\underline{\mathfrak{p}}_3$ die $\underline{\mathfrak{p}}_1$ und $\underline{\mathfrak{p}}_1 + d\underline{\mathfrak{p}}_1$ rechtwinklig schneidet, ist $\mathbf{k}$ «*Kehlpunkt*» der Achsenfläche $(\underline{\mathfrak{p}}_1)$.

Beachten wir einige *Sonderfälle*. Ist für alle t

$$\lambda = \lambda' = 0, \tag{5,7}$$

so folgt aus dem Realteil der Formeln (4,11)

$$d\mathfrak{p}_1 = d\mathfrak{p}'_1 = 0. \tag{5,8}$$

Die Achsenflächen sind somit Zylinder und wir können den Bewegunsvorgang, bei dem eine Richtung des Gangsystems fest bleibt, *zylindrisch* nennen. Für

$$\bar{\rho} = 0, \quad \bar{\mu} = \bar{\mu}' \tag{5,9}$$

sind die Achsenflächen aufeinander verbiegbar (abwickelbar) und wir haben es mit einem *Rollvorgang* zu tun.

Gelten (5,7) und (5,9) gleichzeitig, so entsteht ein *ebener Bewegungsvorgang*. Endlich gibt

(5,10) $$\rho = 0$$

die *Schiebvorgänge* (Translationsvorgänge).

Wir haben in (4,11) wegen (4,15)

(5,11) $$d\mathbf{p}_1 = \underline{\lambda}\,\underline{\mathbf{p}}_2, \quad d\underline{\mathbf{p}}'_1 = \underline{\lambda}\,\underline{\mathbf{p}}'_2, \quad \underline{\lambda} = \lambda + \varepsilon\bar{\lambda}.$$

Darin bedeutet λ den Winkel und $\bar{\lambda}$ den kürzesten Abstand benachbarter Achsen $\underline{\mathbf{p}}_1$, $\mathbf{p}_1 + d\mathbf{p}_1$ und $\underline{\mathbf{p}}'_1$, $\underline{\mathbf{p}}'_1 + d\underline{\mathbf{p}}'_1$, somit haben die «*Gangachsenfläche*» $(\underline{p}_1)$ und die «*Rastschsenfläche*» gleichen «Drall»

(5,12) $$\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda'}{\bar{\lambda}'}.$$

Genauer: Die Integrale

(5,13) $$\int\lambda, \quad \int\bar{\lambda}$$

sind für beide Flächen dieselben. Man sagt: Die beiden Flächen $(\underline{\mathbf{p}}_1)$, $(\underline{\mathbf{p}}'_1)$ «schroten» aufeinander.

§ 6. FÜHRUNGSBEINGUNGEN RASTBEDINGUNGEN

Aus (3,10) folgt durch Ableitung nach t, wenn

(6,1) $$\underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{Q}}_0(t)$$

gesetzt wird,

(6,2) $$d\underline{\mathbf{X}} = \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_1\underline{\mathbf{X}}'\underline{\mathbf{Q}}_\varepsilon\rho + \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}\,\underline{\mathbf{X}}'\underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\rho} = \underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_1\underline{\mathbf{Q}}_1\underline{\mathbf{X}}\,\underline{\rho} + \underline{\mathbf{X}}\,\underline{\tilde{\mathbf{Q}}}_\varepsilon\underline{\mathbf{Q}}_{1\varepsilon}\underline{\rho}_\varepsilon$$

und wegen (4,7)

(6,3) $$d\underline{\mathbf{X}} = -\,\underline{\mathbf{p}}_1\underline{\mathbf{X}}\,\underline{\rho} + \underline{\mathbf{X}}\,\underline{\mathbf{p}}_{1\varepsilon}\underline{\rho}_\varepsilon$$

oder ausführlich

$$d(1+\varepsilon\mathbf{x}) = -(\mathbf{p}_1+\varepsilon\bar{\mathbf{p}}_1)(1+\varepsilon\mathbf{x})(\rho+\varepsilon\bar{\rho}) + (1+\varepsilon\mathbf{x}) \tag{6,4}$$
$$(\mathbf{p}_1-\varepsilon\bar{\mathbf{p}}_1)(\rho-\varepsilon\bar{\rho})$$

und somit

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{x}\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1\mathbf{x} - 2\bar{\mathbf{p}}_1)\,\rho - .\,2\mathbf{p}_1\bar{\rho} \tag{6,5}$$

oder

$$d\mathbf{x} = 2\{(\mathbf{x}\times\mathbf{p}_1) - \bar{\mathbf{p}}_1\}\,\rho - 2\mathbf{p}_1\bar{\rho}. \tag{6,6}$$

Wir führen darin den Ursprung k des kanonischen Achsenkreuzes der $\underline{p}_i$ ein. So wird

$$d\mathbf{x} = 2(\mathbf{x}-\mathbf{k})\,x\mathbf{p}_1\cdot\rho - 2\mathbf{p}_1\bar{\rho}. \tag{6,7}$$

Setzen wir

$$\mathbf{x}-\mathbf{k} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3, \tag{6,8}$$

sodass die x_i die Koordinaten von $\mathbf{x}$ zum kanonischen Achsenkreuz bedeuten, so wird

$$d\mathbf{x} = -\,\mathbf{p}_1\bar{\rho} + (x_3\mathbf{p}_2 - x_2\mathbf{p}_3)\,\rho. \tag{6,9}$$

Aus (6,9), (6,8) folgen unter Benutzung von (5,4), (4,11) die *Fuehrungsbedingungen.*

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\,\bar{\mu}' \quad * \quad + x_2\lambda \quad * \quad, \\ dx_1 &= \quad * \quad - x_1\lambda \quad * \quad + x_2\mu', \\ dx_3 &= -\,\bar{\lambda} \quad * \quad - x_2\mu' \quad * \quad, \end{aligned} \tag{6,10}$$

die aussagen, dass der Punkt

$$\mathbf{x} = \mathbf{k} + x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3 \tag{6,11}$$

im Gangsystem mitgeführt wird.

Entsprechend gelten für den Punkt

$$\mathbf{x}' = \mathbf{k}' + x'_1\mathbf{p}'_1 + x'_2\mathbf{p}'_2 + x'_3\mathbf{p}'_3 \tag{6,12}$$

die *Rastbedingungen*

$$
(6{,}13) \qquad
\begin{array}{llllll}
dx'_1 = & -\overline{\mu} & * & +x'_2\lambda & * & , \\
dx'_2 = & * & -x'_1\lambda & * & +x'_3\mu & , \\
dx'_3 = & -\overline{\lambda} & * & -x'_2\mu & * & ,
\end{array}
$$

die aussagen, dass er ruht.

Schreibt man die Gleichung einer Ebene in kanonischen Koordinaten

$$
(6{,}14) \qquad u_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0,
$$

so ergeben sich als Führungsbedingungen für die Ebene

$$
(6{,}15) \qquad
\begin{array}{llllll}
du_0 = & * & +u_1\overline{\mu}' & * & +u_3\overline{\lambda} & , \\
du_1 = & * & * & +u_2\lambda & * & , \\
du_2 = & * & -u_1\lambda & * & +u_3\mu' & , \\
du_3 = & * & * & -u_2\mu' & * & ,
\end{array}
$$

und als Rastbedingungen

$$
(6{,}16) \qquad
\begin{array}{llllll}
du'_0 = & * & -u'_1\overline{\mu} & * & +u'_3\overline{\lambda} & , \\
du'_2 = & * & * & +u'_2\lambda & * & , \\
du'_2 = & * & -u'_1\lambda & * & +u'_3\mu & , \\
du'_3 = & * & * & {}^*u'_2\mu & * & ,
\end{array}
$$

Endlich für Geraden wieder in kanonischen Koordinaten

$$
(6{,}17) \qquad
\begin{array}{lllll}
dg_1 = & * & +g_2\lambda & * & , \\
dg^3 = & -g_1\lambda & * & +g_3\mu' & , \\
dg_3 = & * & -g_2\mu' & * & ;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\overline{dg}_1 = & * & +g_2\overline{\lambda} & * & * & +g_2\overline{\lambda} & * & , \\
\overline{dg}_2 = & -g_2\overline{\lambda} & * & +g_3\overline{\mu}' & -\overline{g}_1\lambda & * & +\overline{g}_3\mu' & , \\
\overline{dg}_3 = & * & -g_2\overline{\mu}' & * & * & -\overline{g}_2\mu' & * & .
\end{array}
$$

Die Tangenten an die Bahnen haben somit die Koordinaten

$$
(6{,}18) \qquad
\begin{array}{ll}
g_1 = = \overline{\rho} \quad , & \overline{g}_1 = -(x^2_1 + x^2_2)\rho \ , \\
g_2 = + x_3\rho , & \overline{g}_2 = - x_3\overline{\rho} + x_1x_2\rho \ , \\
g_3 = - x_2\rho , & \overline{g}_3 = + x_2\overline{\rho} + x_1x_3\rho
\end{array}
$$

und erfüllen somit den quadratischen Komplex

$$(6,19) \qquad (g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3)\,\rho + (g^2_2 + g^2_3)\,\bar{\rho} = 0$$

Die Bahnnormalen erfüllen den linearen Komplex

$$(6,20) \qquad g_1\bar{\rho} + \bar{g}_1\rho = 0.$$

Für den Winkel α benachbarter Geraden $\bar{g}$, $\bar{g} + d\bar{g}$ ergibt sich

$$(6,21) \qquad \alpha^2 = < d\mathfrak{g},\ d\mathfrak{g} > = 4\,(g^2_2 + g^2_3)\,\rho^2$$

und für ihren kürzesten Abstand

$$(6,22) \qquad \alpha\bar{\alpha} = < d\mathfrak{g}, d\bar{\mathfrak{g}} > = \{(g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3)\,\rho^2 + (g^2_2 + g^2_3)\,\rho\bar{\rho}\}.$$

Für den Kehlpunkt $\mathbf{y}$ der von der Geraden $\underline{\mathfrak{g}}$ beschriebenen Bahnfläche findet man die kanonischen Zeiger

$$(6,23) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{(g^2_1 - g^2_2 - g^2_3)\,(g_2\bar{g}_3 - g_3\bar{g}_2)}{(g^2_1 + g^2_2 + g^2_3)\,(g_2\bar{g}_2 + g_3\bar{g}_3)}, \\ y_2 &= \frac{y_1 g_2 - \bar{g}_3}{g_1}, \\ y_3 &= \frac{y_1 g_3 + \bar{g}_2}{g_1}. \end{aligned}$$

§ 7. GESCHWINGIGKEIT, BESCHLEUNIGUNG

Führen wir der Kürze halber für unsern Bewegungsvorgang eine solche Zeitverteilung ein, dass

$$(7,1) \qquad \rho = dt$$

wird, wodurch wir die Schiebungen (= Translationen) ausschliessen und setzen wir

$$(7,2) \qquad \frac{\bar{\rho}}{\rho} = \bar{R}, \quad \frac{\sigma}{\rho} = S, \quad \frac{\bar{\sigma}}{\rho} = \bar{S}, \quad \frac{\tau}{\rho} = T, \quad \frac{\bar{\tau}}{\rho} = \bar{T};$$
$$\frac{\lambda}{\rho} = L, \quad \frac{\bar{\lambda}}{\rho} = \bar{L}, \quad \frac{\mu}{\rho} = M, \quad \frac{\bar{\mu}}{\rho} = \bar{M}, \quad \frac{\mu}{\rho} = M', \quad \frac{\bar{\mu}'}{\rho} = M'$$

und deuten wir durch Punkte die Ableitungen nach t an, so haben wir nach (6,9) für den *Geschwindigkeitsvektor*

$$(7,3) \qquad \dot{\mathfrak{x}} = - \mathfrak{p}_1 \overline{R} + x_3 \mathfrak{p}_2 - x_2 \mathfrak{p}_3,$$

Daraus folgt durch Albleitung nach t für den *Beschleunigungsvektor* mittels (6,10), (4,11) $\ddot{\mathfrak{x}}$:

$$(7.4) \qquad \ddot{\mathfrak{x}} = -(\dot{\overline{R}} + x_3 L)\,\mathfrak{p}_1 - \{(L\overline{R} + \overline{L}) + 2x_2\}\,\mathfrak{p}_2 + (x_1 L - 2x_3)\,\mathfrak{p}_3.$$

Für den Ort der *Wendepunkte* der Bahnen mit

$$(7,5) \qquad \ddot{\mathfrak{x}} + f\dot{\mathfrak{x}} = 0$$

folgt aus (7.3), (7,4)

$$(7,6) \qquad \begin{aligned} * \quad * \quad -x_3 L &= \dot{\overline{R}} + f\overline{R}\,, \\ * \quad -2x_2 + x_3 f &- L\overline{R} + \overline{L}\,, \\ x_1 L - x_2 f - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

und weiter für $L \neq 0$

$$(7,7) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{4\dot{\overline{R}} + f\{L(L\overline{R} + \overline{L}) + \overline{R}\} + f^2\overline{R} + f^3\overline{R}}{2L} \\ x_2 &= -\frac{L(L\overline{R} + \overline{L}) + f\dot{\overline{R}} + f^2\overline{R}}{2L}, \\ x_3 &= -\frac{\dot{\overline{R}} + f\overline{R}}{L}. \end{aligned}$$

Für

$$(7,8) \qquad \overline{R} \neq 0$$

ist das eine Raumkurve dritter Ordnung (Kubik) C_3. Sie geht durch den Fernpunkt der Schraubachse p_1 (für $f = \infty$), berührt dort die Ferngerade der Ebene $x_3 = 0$ und hat die Fernebene zur Schmiegebene. Dié C_3 liegt auf dem parabolischen Zylinder

$$(7,9) \qquad \overline{R}(L\overline{R} + \overline{L}) + 2x_2\overline{R} + x_3\dot{\overline{R}} + x^2_3 L = 0.$$

Wenn

$$(7,10) \qquad L \neq 0, \quad \overline{R} = 0, \quad \dot{\overline{R}} \neq 0$$

ist, also für einen nicht zylindrischen Rollvorgang, entartet unsre C_3 in eine Parabel. Für

$$L = 0, \quad \overline{R} \neq 0 \tag{7,11}$$

also für einen unebenen zylindrischen Bewegungsvorgang wird unsre C_3 zu einer Geraden. Ist schliesslich

$$L = 0, \quad \overline{R} = 0, \quad \dot{\overline{R}} = 0, \tag{7,12}$$

so tritt anstelle der C_3 der Kreiszylinder

$$2\,({x^2}_2 + {x^2}_2) + x_2 \overline{L} = 0 \tag{7,13}$$

für einen ebenen Bewegungsvorgang.

Für den umgekehrten Bewegungsvorgang, der durch Vertauzschung von Rast- und Gangkreuz entsteht, wird

$$\rho^* = -\rho, \quad \overline{\rho}^* = -\overline{\rho}, \quad \lambda^* = +\lambda, \quad \overline{\lambda}^* = +\overline{\lambda}. \tag{7,14}$$

Die neue Kubik C^* enthält die Punkte, durch die drei benachbarte Ebenen laufen, und entsteht aus C_3 durch die Spiegelung

$${x^*}_1 = -x_1, \quad {x^*}_2 = -x_2, \quad {x^*}_1 = +x_3 \tag{7,15}$$

an $\mathfrak{p}_3$.

Durch nochmalige Ableitung von (7,4) entsteht

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{x}} = \; & \mathfrak{p}_1 \{(L^2\overline{R} + 2L\overline{L} - \ddot{\overline{R}}) + x_2 L (4 + M) - x_3 \dot{L}\} \\ & + \mathfrak{p}_2 \{-(L\dot{\overline{R}} + \dot{L}\overline{R} + \ddot{L}) + x_1 L (2 - M) - 4_3 x_3\} \\ & + \mathfrak{p}_3 \{(2\overline{L} - LM\overline{R} - \overline{L}M - L\overline{M}') + x_1 \dot{L} + x_2 (4 + L^2)\} \end{aligned} \tag{7,16}$$

Die Punkte für die Determinante

$$[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}] = 0 \tag{7,17}$$

wird, also die Punkte mit rastender Schmiegebene bilden daher im allgemeinen eine kubische Fläche.

Damit möchte ich diese Untersuchung vorläufig abbrechen und eine ausführlicha Darstellung mit meinem Kollegen H. R. Müller (Berlin) bringen in Fortsetzung unseres Buches «Ebene Kinematik», München 1955.

Santiago de Chile, im Juni 1956.

ESTA ENTREGA
SE TERMINÓ DE IMPRIMIR EL DÍA 28 DE NOVIEMBRE DE 1958
EN LA IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »,
PERÚ 684, BUENOS AIRES

CONTENIDO