ISSN 1853-709X

Fascículo 13

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

*Jan Mikusinski*

# Una introducción de la integral sin la noción de medida

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2011

**Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A**

**Fascículo 13**



ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO 13

cursos
y seminarios
de matemática

*Jan Mikusiński*

# UNA INTRODUCCION DE LA INTEGRAL SIN LA NOCION DE MEDIDA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES · DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

1963

# PREFACIO

El objeto de esta exposición es dar un método elemental para introducir la integral de Lebesgue, de modo tal que la teoría resulte accesible, sin una preparación especial, a los físicos e ingenieros, por ejemplo.

Las funciones sumables están definidas, en lo que sigue, como límites en casi todo punto ("presque partout") de series de funciones características de intervalos. Por otra parte, no hay ni siquiera necesidad de definir previamente la noción de "presque partout", ya que basta decir que la serie converge hacia la función dada en todo punto en que converja absolutamente. Así, la noción de convergencia absoluta puede eliminar, en las demostraciones, la noción de convergencia en casi todo punto ("presque partout"), lo cual da a la teoría un aspecto más familiar al análisis clásico.

Se encara, desde el comienzo, el tratamiento de funciones de varias variables. Sin embargo, el estudio se limita a las funciones de valores finitos. Esta restricción que, por otra parte, no es más que aparente, permite considerar el conjunto de las funciones integrables como un espacio lineal. En principio se dan demostraciones completas, salvo para los teoremas 3.1, 5.1 y 5.2, en cuyo caso sólo se esbozan los lineamientos generales de las demostraciones para no entrar en los detalles de algunos lemas geométricos carentes de interés en el resto de la exposición. Lo que es esencial en los parágrafos 1-6 son las propiedades (A), (Z) y (D), que sirven de base para las consideraciones siguientes y es así que la teoría se vuelve axiomática a partir del parágrafo 7.

No se ha tentado dar en este curso una exposición completa de la teoría de la integral (que será, en cambio, el objeto de un libro que se encuentra ya en preparación). No obstante se ve fácilmente, aún desde la "Primera Parte" que es la más importante, que la exposición que se ofrece difiere considerablemente de las presentaciones anteriores *). Por esta razón fue necesario demostrar, en la "Segunda Parte", la equivalencia de las nociones introducidas con las de Lebesgue. Esta "Segunda Parte" es un poco menos elemental y su lectura exige, sobre todo en los parágrafos finales 16 y 17, un cierto conocimiento de teorías más clásicas.

*) Cfr. por ejemplo: P.J.Daniell, A general form of integral, Ann. of Math. 19, 279-294 (1917); Beppo Levi, Teoría de la integral de Lebesgue independiente de la noción de medida, Publicaciones del Instituto de Matemática, Rosario, 3, 67-116 (1941); N.Bourbaki, Intégration, Paris (1952)

# P R I M E R A   P A R T E

## §1 - INTEGRAL DE FUNCIONES SIMPLES.

Consideraremos funciones $f(x)$, donde $x = (\xi_1, \ldots, \xi_q)$, y supondremos que están definidas en todo el espacio y que toman valores reales finitos. El no considerar los valores $+\infty$ y $-\infty$ no constituye ninguna restricción, y en cambio es conveniente para poder considerar al conjunto de las funciones "sumables" como espacio lineal.

Si $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ y $b = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$,

$a \leqslant x$ quiere decir $\alpha_i \leqslant \xi_i$ para $i = 1, \ldots, q$,

$x < b$ significa $\xi_i < \beta_i$ para $i = 1, \ldots, q$.

Con esto es inmediato el significado de $a \leqslant x < b$.

D e f i n i c i ó n :

Llamaremos i n t e r v a l o al conjunto de todos los $x$ tales que $a \leqslant x < b$, para $a$ y $b$ finitos dados.

D e f i n i c i ó n :

Llamaremos f u n c i ó n s i m p l e a una función característica de un intervalo. Es decir, dados $a \leqslant b$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } a \leqslant x < b \\ 0 & \text{en los demás puntos.} \end{cases}$$

El conjunto $a \leqslant x < b$ se llama el s o p o r t e de la función $f(x)$. En el caso límite $a = b$ la función $f(x)$ tiene su soporte vacío y es idénticamente nula.

D e f i n i c i ó n :

La integral de una función simple $f$ de soporte $a \leqslant x < b$, que denotaremos con $\int f$, será el "volumen del soporte", en este sentido:

$$\int f = (\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_q - \alpha_q) \quad , \quad \alpha_i \leqslant \xi_i < \beta_i \quad ( i = 1, \ldots, q) .$$

## § 2 - SERIES FUNDAMENTALES Y FUNCIONES SUMABLES.

D e f i n i c i ó n :

Una serie

(2.1) $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots ,$$

donde $\lambda_i$ son números reales y $f_j$ funciones simples, es una serie f u n d a m e n t a l si y sólo si la serie

(2.2) $$|\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \ldots$$

es convergente.

Las funciones simples $f_j$ pueden tener soportes arbitrarios. Notemos además que (2.1) es una serie de funciones, sobre cuya convergencia todavía no afirmamos nada, y que en cambio (2.2) es una serie numérica (de términos no-negativos, ya que $\int f \geqslant 0$ ).

D e f i n i c i ó n :

Diremos que una función f es s u m a b l e si existe una serie fundamental con la propiedad siguiente: en todo punto en que $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots$ converge absolutamente se tiene la igualdad $f(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots$ .

Esto lo expresamos diciendo que " f se desarrolla en la serie fundamental $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots$ " , y escribimos

$$f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots .$$

## § 3 - INTEGRAL DE FUNCIONES SUMABLES .

D e f i n i c i ó n :

Para toda función f sumable definimos como su integral a

$$\int f = \lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \ldots ,$$

si $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots$ .

La serie $\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \ldots$ converge, porque $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots$ es fundamental por hipótesis.

Es claro que tenemos que probar que la definición dada es correcta, que $\int f$ está unívocamente determinado. Es decir, hay que mostrar que su valor no depende de la elección de la serie fundamental en que se desarrolla la función $f$.

Previamente necesitamos unos teoremas auxiliares.

Teorema 3.1

Sea $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots$ una serie fundamental.

Si $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots \geqslant 0$ en todo punto donde la serie converge absolutamente, y si además esta serie diverge a $+\infty$ en los demás puntos, entonces $\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \ldots \geqslant 0$.

Idea de la demostración:

Se puede aumentar un poco los soportes de las funciones cuyos coeficientes son positivos y disminuir un poco los soportes de las funciones cuyos coeficientes son negativos, de tal manera que dado cualquier número positivo $\delta > 0$, las sumas parciales de la serie así modificada permanezcan mayores que $-\delta$ para $n$ suficientemente grandes. La modificación de los coeficientes puede efectuarse además de tal modo que

1º la suma $\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \ldots$ para la serie dada sólo difiera en poco de la suma análoga correspondiente a la serie modificada y

2º fuera de un intervalo común a todas, las sumas parciales de la serie modificada sean siempre positivas.

Entonces ya se puede mostrar fácilmente que la suma

$$\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \ldots$$

es mayor que un número negativo arbitrariamente fijado, y por consiguiente no menor que cero.

Teorema 3.2

El conjunto de los puntos, en los que una serie fundamental converge absolutamente, es denso en el espacio. Es decir, dada la serie fundamental $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots$, existe en todo intervalo no vacío $a \leqslant x < b$ un punto, donde la serie converge absolutamente.

D e m o s t r a c i ó n :

Razonamos "por el absurdo". Supongamos que exista un intervalo $a \leqslant x < b$ no vacío tal que la serie dada no converja absolutamente en ningún punto del mismo. Sea $f_0$ la función simple con soporte $a \leqslant x < b$ , y consideremos la serie

$$\lambda_0 f_0 + |\lambda_1| f_1 + |\lambda_2| f_2 + \dots \quad . \tag{3.1}$$

Puesto que al agregar un sólo término a una serie no se cambia su comportamiento en cuanto a la convergencia, esta serie también es fundamental; por hipótesis no converge absolutamente en $a \leqslant x < b$ , luego diverge a $\infty$; y fuera de dicho intervalo el término $\lambda_0 f_0$ desaparece, de modo que la serie allí es convergente a un límite no-negativo o divergente a $\infty$. Por lo tanto la serie (3.1) satisface las hipótesis del teorema 3.1 y deducimos que

$$\lambda_0 \int f_0 + |\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots \geqslant 0 \quad ,$$

esto es:

$$|\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots \geqslant -\lambda_0 \int f_0 = M \ .$$

Como podemos elegir $\lambda_0 < 0$ y arbitrariamente grande en valor absoluto, resulta que la serie $|\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots$ no puede ser convergente y por eso no ser fundamental. Así hemos demostrado que es imposible que la serie $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ no converja absolutamente en todo un intervalo.

<u>T e o r e m a 3.3</u>

Si para una serie fundamental la relación $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots \geqslant 0$ tiene lugar en todo punto donde la serie converge absolutamente, entonces $\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \dots \geqslant 0$ .

Notemos que este teorema es mas fuerte que el 3.1 , pues no pedimos nada en los puntos donde la serie no converge absolutamente.

D e m o s t r a c i ó n :

Por hipótesis $|\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots$ converge.

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un índice $n_o$ tal que

$$(3.2) \qquad R_{n_o} = |\lambda_{n_o+1}| \int f_{n_o+1} + |\lambda_{n_o+2}| \int f_{n_o+2} + \cdots < \varepsilon .$$

En los puntos de convergencia absoluta de $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$ también se cumple la desigualdad

$$(3.3) \qquad \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_{n_o} f_{n_o} + |\lambda_{n_o+1}| f_{n_o+1} + \cdots \geq 0 ,$$

puesto que en esos puntos también ésta serie converge y

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{n_o} f_{n_o} + |\lambda_{n_o+1}| f_{n_o+1} + \cdots \geq \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \geq 0 .$$

En los puntos restantes (3.3) diverge a $\infty$. Entonces por el teorema 3.1 se obtiene

$$(3.4) \qquad \lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \cdots + \lambda_{n_o} \int f_{n_o} + R_{n_o} \geq 0 ,$$

y como

$$\lambda_{n_o+1} \int f_{n_o+1} + \lambda_{n_o+2} \int f_{n_o+2} + \cdots \geq -\left( |\lambda_{n_o+1}| \int f_{n_o+1} + |\lambda_{n_o+2}| \int f_{n_o+2} + \cdots \right) = -R_{n_o}$$

resulta, sumando esta desigualdad a (3.4), que

$$\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \cdots \geq -2 R_{n_o} > -2\varepsilon ,$$

y puesto que $\varepsilon$ es arbitrario, queda probado el teorema.

T e o r e m a 3.4

Dadas dos series fundamentales, tales que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots \leq \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots$$

en todo punto en que ambas convergen absolutamente, se tiene la desigualdad
$$\lambda_1 \int f_1 + \lambda_2 \int f_2 + \cdots \leq \mu_1 \int g_1 + \mu_2 \int g_2 + \cdots .$$

D e m o s t r a c i ó n :

En los puntos comunes de convergencia absoluta de las series dadas es

$$\mu_1 g_1 - \lambda_1 f_1 + \mu_2 g_2 - \lambda_2 f_2 + \cdots =$$
$$= (\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots) - (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots) \geq 0 .$$

Como la serie del primer miembro también es fundamental, el teorema 3.3 implica que

$$\mu_1\int g_1 - \lambda_1\int f_1 + \mu_2\int g_2 - \lambda_2\int f_2 + \cdots \geqslant 0 \quad ,$$

y por lo tanto

$$\mu_1\int g_1 + \mu_2\int g_2 + \cdots \geqslant \lambda_1\int f_1 + \lambda_2\int f_2 + \cdots \quad ,$$

como queríamos demostrar.

T e o r e m a 3.5

Si dos series fundamentales verifican

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots = \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots$$

en todos los puntos en que ambas convergen absolutamente, entonces

$$\lambda_1\int f_1 + \lambda_2\int f_2 + \cdots = \mu_1\int g_1 + \mu_2\int g_2 + \cdots \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Surge inmediatamente del teorema 3.4 , si se consideran las dos desigualdades opuestas.

Ahora podemos probar el siguiente resultado fundamental, ya anunciado.

C o r o l a r i o 3.6

La definición de la integral de una función sumable es correcta.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$ y también $f \sim \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots$ , estas dos series tienen el mismo límite $f(x)$ en los puntos $x$ en que ambas convergen absolutamente, y por lo tanto

$$\int f = \lambda_1\int f_1 + \lambda_2\int f_2 + \cdots = \mu_1\int g_1 + \mu_2\int g_2 + \cdots \quad .$$

## §4 - EJEMPLOS DE FUNCIONES SUMABLES .

Vamos a dar algunos ejemplos de funciones sumables definidas en la recta real.

E j e m p l o 1

Toda combinación lineal de funciones simples es sumable.

Si $s_n = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ es una tal combinación, la serie

$$s_n = \lambda_1 f_1 + \lambda_n f_n + 0.f_{n+1} + 0.f_{n+2} + \cdots \quad ,$$

donde $f_{n+i}$ , $i \geq 1$ , son funciones simples cualesquiera, converge absolutamente en todo punto y además

$$\int s_n = \lambda_1 \int f_1 + \cdots + \lambda_n \int f_n \ .$$

Obviamente lo dicho también vale en espacios de varias variables.

<u>Ejemplo 2</u>

La función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{para} \quad -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{para} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en los demás puntos} \end{cases} ,$$

es sumable. El gráfico correspondiente está dado en la figura 1.

Queremos aproximar la $f$ mediante funciones simples adecuadas. Llamaremos $f_{(a,b)}$ a la función característica del intervalo $a \leq x < b$ .

El primer paso en nuestra aproximación estará dado por la función

$$s_1 = \frac{1}{2} f_{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \ .$$

En un segundo paso agregaremos la siguiente combinación lineal de funciones simples:

$$s_2 = \frac{1}{4}\left[ f_{(-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4})} + f_{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} + f_{(\frac{2}{4}, \frac{3}{4})} \right] .$$

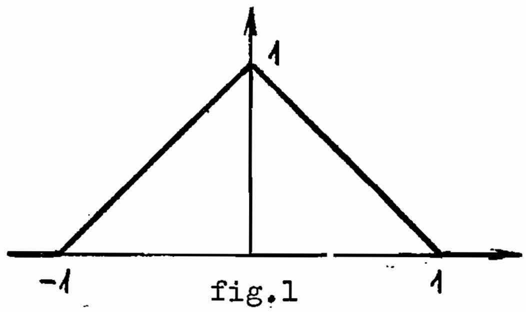

fig.1

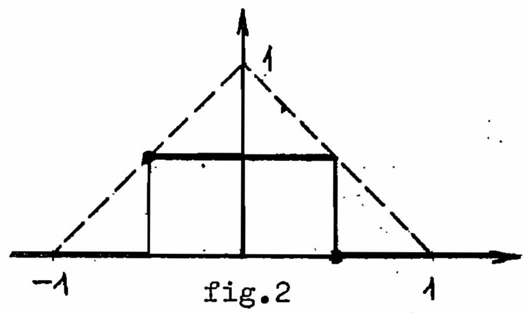

fig.2

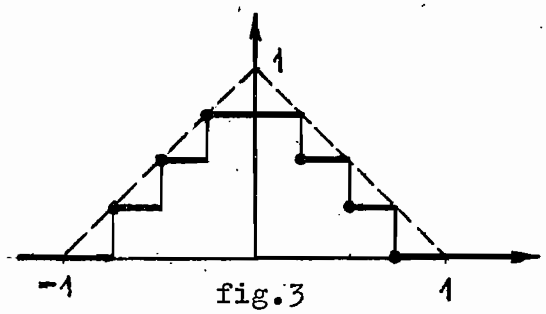

fig.3

La figura 3 representa la nueva aproximación $s_1 + s_2$ .

En general agregaremos en el paso n-ésimo la suma

$$s_n = \frac{1}{2^n}\left[ f_{\left(-\frac{2^n-1}{2^n},-\frac{2^n-2}{2^n}\right)} + f_{\left(-\frac{2^n-3}{2^n},-\frac{2^n-4}{2^n}\right)} + \cdots + f_{\left(-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}\right)} + f_{\left(\frac{2}{2^n},\frac{3}{2^n}\right)} + \cdots + f_{\left(\frac{2^n-2}{2^n},\frac{2^n-1}{2^n}\right)} \right] .$$

La serie $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$ converge absolutamente en todo punto, ya que se trata de una serie de términos positivos mayorada por la función $f$. Además es fácil ver que el límite es la propia función $f$. Para probar que la serie es fundamental es necesario todavía asegurarse que la serie correspondiente a las integrales es convergente. Se comprueba inmediatamente que esta serie es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 \quad ,$$

y que en este caso su suma es el valor de la integral.

Ejemplo 3

Toda función continua, cuyo módulo está mayorado por una función sumable, es sumable.

Para la demostración hay que efectuar una construcción análoga a la que se hizo en el ejemplo anterior. Los detalles de esto los vamos a omitir.

Ejemplo 4

La función

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \alpha \\ 0 & \text{si } x \neq \alpha \end{cases}$$

es un ejemplo de una función sumable discontinua.

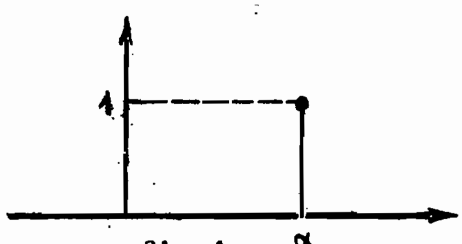

fig.4

Es fácil dar una serie fundamental que converge en todo punto a $f_\alpha$ .

Sea $\beta_n$ una sucesión decreciente de números tal que $\beta_n \searrow \alpha$ , y consideremos las funciones simples

$$f_o = f_{(\alpha,\beta_1)} \quad , \quad f_n = f_{(\beta_{n+1},\beta_n)} \quad , \quad ( n = 1,2, \ldots) \quad .$$

Entonces la serie $\int f_o - \int f_1 - \int f_2 - \ldots$ converge absolutamente, porque salvo el primero todos los términos tienen el mismo signo. Además

$$f_\alpha = f_o - f_1 - f_2 - \ldots$$

converge en todo punto.

La integral de $f_\alpha$ es

$$\lim_{n\to\infty}\left( \int f_o - \int f_1 - \ldots - \int f_{n-1}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[ (\beta_1 - \alpha) - (\beta_1 - \beta_2) - \ldots - (\beta_{n-1} - \beta_n)\right] = \lim_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha) = 0 .$$

De este ejemplo se desprende que las funciones características de intervalos cualesquiera en la recta - abiertos, cerrados, semiabiertos - son sumables. Porque las funciones características de $a < x < b$ , $a \leqslant x \leqslant b$ , $a < x \leqslant b$ son, respectivamente $f_{(a,b)} - f_a$ , $f_{(a,b)} + f_b$ , $f_{(a,b)} - f_a + f_b$ .

Por lo que hemos demostrado, las integrales correspondientes son iguales.

<u>Ejemplo 5</u>

La función de Dirichlet

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \text{ racional} \\ 0 & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

es sumable.

Para demostrarlo, ordenemos los números racionales $p/q$ en una sucesión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n, \ldots$ y representemos la función $d(x)$ por la serie

$$d(x) = f_{\alpha_1} + f_{\alpha_2} + \ldots \quad ,$$

donde las $f_{\alpha_i}$ están definidas como en el ejemplo anterior.

Recordando que $f_{\alpha_i} = \lambda_{i1} f_{i1} + \lambda_{i2} f_{i2} + \ldots$ , tenemos por el procedimiento diagonal que

$$d(x) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} f_{ij} = \sum_k \lambda_k g_k \quad ,$$

y se puede ver que la serie es fundamental. Por último, puesto que $\int f_{\alpha_i} = 0$ , la serie de integrales $\int f_{\alpha_1} + \int f_{\alpha_2} + \dots$ converge a cero y por lo tanto $\int d = 0$ .

El presente ejemplo es interesante por dos razones. La función de Dirichlet

1º no tiene integral de Riemann y sin embargo es sumable, y

2º es una función no-negativa, que vale 1 en un conjunto denso, y a pesar de ello su integral es nula.

## §5 - DOS TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE LAS FUNCIONES SUMABLES.

Teorema 5.1

Si una función $f$ es sumable, entonces $|f|$ también es sumable. Además, si $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ , entonces

$$\int |f| \leqslant |\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots \quad .$$

Idea de la demostración:

En todo punto en que la serie $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ converge absolutamente, vale

$$|f| = \lim_{n \to \infty} |\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n| \quad .$$

La sucesión $|\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n|$ puede transformarse en una serie fundamental

$$|f| \sim \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \dots \quad ,$$

que converge absolutamente en los mismos puntos que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ y tiene la propiedad siguiente:

$$\mu_1 \int g_1 + \mu_2 \int g_2 + \dots = \lim_{n \to \infty} \int |\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n| \quad .$$

De esto sigue

$$\int |f| \leqslant \lim_{n \to \infty} \left( |\lambda_1| \int f_1 + \dots + |\lambda_n| \int f_n \right) = |\lambda_1| \int f_1 + |\lambda_2| \int f_2 + \dots \quad .$$

T e o r e m a 5.2

Si $l_n$ son funciones sumables y $l_1 + l_2 + \dots$ converge en todo punto absolutamente hacia una función $f$, y si

$$\int |l_1| + \int |l_2| + \dots$$

converge, entonces $f$ es sumable y además

$$\int f = \int l_1 + \int l_2 + \dots \quad .$$

I d e a d e l a d e m o s t r a c i ó n :

Cada una de las funciones $l_i$ puede desarrollarse en una serie fundamental

$$(5.1) \qquad l_i \sim \lambda_{i1} f_{i1} + \lambda_{i2} f_{i2} + \dots \qquad ( i = 1,2, \dots )$$

La serie

$$(5.2) \qquad \lambda_{11} f_{11} + \lambda_{12} f_{12} + \lambda_{21} f_{21} + \lambda_{13} f_{13} + \lambda_{22} f_{22} + \lambda_{31} f_{31} + \dots ,$$

en la que cada término de las series (5.1) aparece una, y sólo una vez, en general no es una serie fundamental. Pero es posible reordenar primero en cada una de las series (5.1) un número finito de términos, de tal modo que la suma de las series así modificadas quede inalterada, pero también la serie (5.2) resulte fundamental. En todo punto en que esta última serie converge absolutamente, ella converge hacia $f$. De esto sigue la igualdad

$$\int f = \int l_1 + \int l_2 + \dots$$

## § 6 - PROPIEDADES BÁSICAS DE LA INTEGRAL .

T e o r e m a 6.1

Si $f$ es sumable, entonces $\lambda f$ es sumable para todo número real $\lambda$, y además $\int (\lambda f) = \lambda \int f$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ .

Las series $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$ y $\lambda\lambda_1 f_1 + \lambda\lambda_2 f_2 + \dots$ tienen los mismos puntos de convergencia absoluta, y en esos puntos se verifica

$$\lambda f = \lambda(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots ) = \lambda\lambda_1 f_1 + \lambda\lambda_2 f_2 + \dots ,$$

y $|\lambda\lambda_1|\int f_1+|\lambda\lambda_2|\int f_2+\dots$ converge; es decir:

$$\lambda f \sim \lambda\lambda_1 f_1 + \lambda\lambda_2 f_2 + \dots \quad .$$

Entonces

$$\int(\lambda f) = \lambda\lambda_1\int f_1+\lambda\lambda_2\int f_2+\dots = \lambda(\lambda_1\int f_1+\lambda_2\int f_2+\dots) = \lambda\int f \quad .$$

<u>Teorema 6.2</u>

Si $f$ y $g$ son funciones sumables, entonces $f+g$ también es sumable y $\int(f+g) = \int f + \int g$ .

Demostración:

Sea $f \sim \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\dots$ y $g \sim \mu_1 g_1+\mu_2 g_2+\dots$ .

Entonces

$$\lambda_1 f_1+\mu_1 g_1+\lambda_2 f_2+\mu_2 g_2+\dots =$$
$$= (\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\dots) + (\mu_1 g_1+\mu_2 g_2+\dots) = f+g$$

en los puntos en que las tres series convergen absolutamente, y sólo en ellos. Además

$$|\lambda_1|\int f_1+|\mu_1|\int g_1+\dots = (|\lambda_1|\int f_1+\dots) + (|\mu_1|\int g_1+\dots) \quad .$$

Luego

$$f+g \sim \lambda_1 f_1+\mu_1 g_1+\dots \quad ,$$

y

$$\int(f+g) = \lambda_1\int f_1+\mu_1\int g_1+\dots =$$
$$= (\lambda_1\int f_1+\dots)+(\mu_1\int g_1+\dots) = \int f+\int g \quad .$$

<u>Teorema 6.3</u>

Si $f\geqslant 0$ , entonces $\int f\geqslant 0$ .

Demostración:

Es una consecuencia inmediata del teorema 3.3. Porque si $f \sim \lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\dots$ , en los puntos de convergencia absoluta de la serie es $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\dots = f\geqslant 0$ , y por lo tanto

$$\lambda_1\int f_1+\lambda_2\int f_2+\dots = \int f\geqslant 0 \quad .$$

T e o r e m a 6.4

Si una sucesión de funciones sumables $f_n$ es monótona, $\left|\int f_n\right| \leqslant M$ para $n = 1,2,\ldots$ y $f_n \rightarrow f$ (puntualmente), entonces $f$ es sumable y $\int f_n \rightarrow \int f$.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $f_n = l_1 + \ldots + l_n$. Entonces la serie $l_1 + l_2 + \ldots$ satisface las hipótesis del teorema 5.2. En consecuencia $f$ es sumable y además $\int f_n \rightarrow \int f$, porque $\int f_n = \int l_1 + \ldots + \int l_n$.

Sintetizando lo que hemos demostrado hasta ahora, podemos decir que el conjunto $L$ de las funciones sumables es un espacio lineal – es decir: si $f, g \in L$, entonces $f + g \in L$ (cf. teorema 6.2) y $\lambda f \in L$ para todo número real $\lambda$ (cf. teorema 6.1) –, con la propiedad adicional de que $f \in L$ implica $|f| \in L$. Sobre este espacio lineal tenemos definida una funcional que a cada $f \in L$ le asocia el número real $\int f$, y esta funcional tiene las siguientes propiedades básicas.

(J) $\int (\lambda f) = \lambda \int f$ para todo $\lambda$ real (cf. teorema 6.1),

(A) $\int (f+g) = \int f + \int g$ (cf. teorema 6.2),

(Z) $f \geqslant 0$ implica $\int f \geqslant 0$ (cf. teorema 6.3),

(D) Si una sucesión de funciones $f_n \in L$ es monótona, $\left|\int f_n\right| \leqslant M$ para $n = 1,2,\ldots$ y $f_n \rightarrow f$, entonces $f \in L$ y $\int f_n \rightarrow \int f$ (cf. teorema 6.4).

Se demostrará más adelante que la propiedad (J) es consecuencia de (A) y (Z), de modo que ella no es esencial.

## §7 - TEORÍA AXIOMÁTICA DE LA INTEGRAL.

Veremos en seguida cómo de (A), (Z) y (D) pueden deducirse todas las demás propiedades interesantes de la integral, sin hacer ya referencia a la definición especial de la integral que hemos dado. Quiere decir que podemos basar una teoría general de integración en las propiedades (A), (Z) y (D) tomadas como axiomas, y entonces esa teoría incluirá como caso particular a la que parte de la integral que hemos definido más arriba.

Consideremos un espacio lineal $F$ de funciones reales definidas sobre un conjunto arbitrario $K$, tal que si $f \in F$, entonces $|f| \in F$.

Sobre $F$, suponemos definida una funcional que a cada función $f$ le asigna un número real $\int f$, de tal modo que se satisfagan los siguientes axiomas:

(A) $\int (f+g) = \int f + \int g$ ,

(Z) $f \geqslant 0$ implica $\int f \geqslant 0$ .

Leeremos $\int f$ como "integral de f".

A partir de (A) y (Z) se pueden demostrar fácilmente las siguientes propiedades de la integral.

<u>Teorema 7.1</u>

$\int 0 = 0$ .

Demostración:

Pongamos en (A) $f = g = 0$ .

Entonces $\int 0 = \int 0 + \int 0$ . Esto implica $\int 0 = 0$ .

<u>Teorema 7.2</u>

$\int (-f) = -\int f$ .

Demostración:

Utilicemos nuevamente el axioma (A), esta vez con $g = -f$.

Entonces $$\int f + \int (-f) = \int 0 = 0 ,$$

en virtud del teorema 7.1. La tesis resulta inmediatamente.

Teorema 7.3

$\int (f - g) = \int f - \int g$ .

Demostración:

Haciendo uso del axioma (A) y el teorema 7.2 tenemos

$$\int (f - g) = \int [f + (- g)] = \int f + \int (- g) = \int f + \left(- \int g\right) = \int f - \int g .$$

Teorema 7.4

$f \leqslant g$ implica $\int f \leqslant \int g$ .

Demostración:

$g - f \geqslant 0$ es equivalente a la hipótesis. El axioma (Z) implica $\int (g - f) \geqslant 0$ y por el teorema 7.3 $\int g - \int f \geqslant 0$ , o sea $\int g \geqslant \int f$ .

Teorema 7.5

$\left| \int f \right| \leqslant \int |f|$ .

Demostración:

Por el teorema 7.4, $f \leqslant |f|$ implica $\int f \leqslant \int |f|$ , y $-|f| \leqslant f$ implica $-\int |f| = \int (-|f|) \leqslant \int f$ , debido además al teorema 7.2. Por lo tanto $-\int |f| \leqslant \int f \leqslant \int |f|$ , es decir $\left| \int f \right| \leqslant \int |f|$ .

Teorema 7.6

$\int |f| = 0$ implica $\int f = 0$ .

Demostración:

De $0 \leqslant \left| \int f \right| \leqslant \int |f| = 0$ se deduce $\int f = 0$ .

Para la demostración del próximo teorema vamos a utilizar el lema siguiente.

Lema

Si $\varphi(\lambda)$ es una función real de variable real monótona, tal que $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$ para todo $\lambda, \mu$ , entonces para todo $\lambda$ se cumple $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1)$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Escribamos

$$2\varphi(2^{-1}) = \varphi(2^{-1})+\varphi(2^{-1}) = \varphi(2^{-1}+2^{-1}) = \varphi(1) .$$

De aquí resulta

$$\varphi(2^{-1}) = 2^{-1}\varphi(1) ,$$

y por inducción se obtiene

$$\varphi(2^{-n}) = 2^{-n}\varphi(1) .$$

Por inducción sobre $m$ se prueba mas generalmente que la fórmula

$$\varphi(m.2^{-n}) = m.2^{-n}\varphi(1)$$

vale para todo $m = 1,2, \dots$ . De esto se obtiene fácilmente, teniendo en cuenta la ecuación funcional dada, que esta misma fórmula también vale para $m = 0, -1, -2, \dots$ .

Es decir, la igualdad $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1)$ queda probada para todos los valores $\lambda = m.2^{-n}$ . Como el conjunto de estos números es denso en la recta y la función $\varphi(\lambda)$ se supone monótona, la misma igualdad debe verificarse para todo $\lambda$ real.

<u>T e o r e m a 7.7</u>

$\int(\lambda f) = \lambda\int f$ para todo $\lambda$ real.

D e m o s t r a c i ó n :

Supongamos primero que $f \geqslant 0$ ó $f \leqslant 0$ y consideremos la función

$$\varphi(\lambda) = \int(\lambda f) .$$

Esta función cumple las hipótesis del lema anterior, como consecuencia de (A) y el teorema 7.4. Luego

$$\int(\lambda f) = \varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1) = \lambda\int 1.f = \lambda\int f .$$

En el caso general de una $f$ cualquiera podemos escribir

$$f = f^{+} + f^{-} ,$$

donde

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{en los demás puntos} \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{en los demás puntos} \end{cases}.$$

Es fácil ver que valen las igualdades

$$f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|) \quad \text{y} \quad f^- = \frac{1}{2}(f - |f|),$$

y por lo tanto, en virtud de las propiedades del espacio lineal $F$, que $f^+ \in F$, $f^- \in F$, y podemos hablar de sus integrales. Teniendo en cuenta además que $f^+ \geqslant 0$ y $f^- \leqslant 0$, se justifica la siguiente cadena de igualdades.

$$\int(\lambda f) = \int(\lambda f^+ + \lambda f^-) = \int \lambda f^+ + \int \lambda f^- = \lambda \int f^+ + \lambda \int f^- =$$
$$= \lambda\left(\int f^+ + \int f^-\right) = \lambda \int (f^+ + f^-) = \lambda \int f.$$

## §8 - FUNCIONES EQUIVALENTES.

Definición:

Diremos que $f$ es equivalente a $g$, en símbolos $f \sim g$, si y sólo si $\int |f - g| = 0$.

Esto es ciertamente una relación de equivalencia, ya que se cumplen los axiomas

(i) $f \sim f$,

(ii) Si $f \sim g$, entonces $g \sim f$,

(iii) Si $f \sim g$ y $g \sim h$, entonces $f \sim h$.

La verificación de (i) y (ii) es trivial; vamos a hacerlo para (iii).

De

$$|f - h| \leqslant |f - g| + |g - h|$$

sigue

$$\int |f - h| \leqslant \int |f - g| + \int |g - h|,$$

y como ambos términos del segundo miembro se suponen nulos, resulta $f \sim h$.

Podemos probar además las siguientes propiedades de la relación de equivalencia.

(iv) Si $f \sim g$, entonces para todo $\alpha$ real es $\alpha f \sim \alpha g$ y $|f| \sim |g|$, $f^+ \sim g^+$, $f^- \sim g^-$;

(v) Si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ , entonces

$$f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2 ,$$
$$\max (f_1, g_1) \sim \max (f_2, g_2) ,$$
$$\min (f_1, g_1) \sim \min (f_2, g_2) ;$$

(vi) Si $f \sim g$ , entonces $\int f = \int g$ .

D e m o s t r a c i ó n :

$f \sim g$ quiere decir $\int |f - g| = 0$ . Por lo tanto

$$\int |\alpha f - \alpha g| = |\alpha| \int |f - g| = 0 .$$

Consideramos esta propiedad del valor absoluto:

$$\big| |f| - |g| \big| \leqslant |f - g| .$$

Teniendo en cuenta que el primer miembro de esta desigualdad es una función perteneciente a $F$ , podemos escribir en base al teorema 7.4

$$\int \big| |f| - |g| \big| \leqslant \int |f - g| = 0 .$$

Luego $|f| \sim |g|$.

Antes de concluir con (iv), probemos la primera parte de (v):

$$\int |(f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)| \leqslant \int |f_1 - f_2| + \int |g_1 - g_2| = 0 .$$

Gracias a ésto resulta $f^+ \sim g^+$, $f^- \sim g^-$ . Porque

$$f^+ = \frac{1}{2} (f + |f|) \quad y \quad g^+ = \frac{1}{2} (g + |g|) ,$$

y entonces, como $f \sim g$ implica $|f| \sim |g|$, es

$$f + |f| \sim g + |g|$$

y finalmente

$$\frac{1}{2} (f + |f|) \sim \frac{1}{2} (g + |g|) .$$

Análogamente se procede para

$$f^- = \frac{1}{2} (f - |f|) \quad , \quad g^- = \frac{1}{2} (g - |g|) .$$

La segunda y tercera afirmación de (v) se prueba en forma similar, verificando previamente que

$$\max (f,g) = \frac{1}{2} (f + g + |f - g|) , \quad \min (f,g) = \frac{1}{2} (f + g - |f - g|) .$$

Por último,

$$\left| \int f - \int g \right| = \left| \int (f - g) \right| \leqslant \int |f - g| = 0 ,$$

es decir

$$\int f = \int g .$$

## §9 - CONVERGENCIA SEGÚN LA NORMA .

D e f i n i c i ó n :

Sean $f_n \in F$ , $f \in F$ . Diremos que la sucesión $f_n$ converge a $f$ s e g ú n l a n o r m a , y escribiremos $f_n \xrightarrow{C} f$ , si y sólo si $\int |f_n - f| \to 0$ para $n \to \infty$ .

O b s e r v a c i ó n 1 :

Distinguimos en la notación a la noción de convergencia recién definida de la convergencia puntual $f_n \to f$ usual, porque se trata de nociones estrictamente diferentes. Por ejemplo la sucesión $f_n$ con

$$f_n(x) = \frac{n^3x^2}{1+n^4x^4}$$

tiene límite cero en todo punto y sin embargo $\int |f_n|$ no converge a cero.

O b s e r v a c i ó n 2 :

El límite según la norma de una sucesión convergente de funciones en general no está definido unívocamente, ya que

$f_n \xrightarrow{C} f$ implica $f_n \xrightarrow{C} f+h$ para toda $h$ tal que $\int |h| = 0$ (quiere decir: $h$ es equivalente a cero).

En efecto, $$\int |f_n - (f+h)| \leq \int |f_n - f| + \int |h| = \int |f_n - f| \to 0 .$$

Sin embargo podemos afirmar:

Si $f_n \xrightarrow{C} f$ y $f_n \xrightarrow{C} g$ , entonces $f \sim g$ .

Efectivamente, $$\int |f - g| \leq \int |f - f_n| + \int |f_n - g| \to 0 .$$

Dicho brevemente, el límite de una sucesión convergente según la norma está definido salvo una función equivalente a cero.

T e o r e m a 9.1

Si $f_n \xrightarrow{C} f$ , entonces $\lambda f_n \xrightarrow{C} \lambda f$ para todo $\lambda$ real .

Teorema 9.2

Si $f_n \xrightarrow{c} f$ y $g_n \xrightarrow{c} g$, entonces $f_n + g_n \xrightarrow{c} f+g$.

Teorema 9.3

Si $f_n \xrightarrow{c} f$, entonces $\int f_n \to \int f$.

Omitimos las demostraciones, porque son totalmente evidentes.

Teorema 9.4

Sean $f_n$, $f$, $g$ funciones pertenecientes a F y $\varepsilon_n$ números positivos tales que $\varepsilon_n \to 0$. Si las $f_n$ tienen la propiedad de que $|f_n - f| \leqslant \varepsilon_n g$, entonces $f_n \xrightarrow{c} f$ y además

$$f_n \to f$$

puntualmente.

Demostración:

$$\int |f_n - f| \leqslant \int \varepsilon_n g = \varepsilon_n \int g = \varepsilon_n \cdot M \to 0 \quad .$$

Por otra parte

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_n g(x) = \varepsilon_n \cdot N \to 0$$

para cada $x$ fijo.

## §10 - NUEVAS PROPIEDADES EN BASE AL AXIOMA (D).

A partir de ahora vamos a agregar a (A) y (Z) una nueva suposición sobre nuestra funcional $\int f$, para deducir más propiedades de la integral, partiendo de los tres axiomas conjuntamente. Se trata del axioma (D) ya mencionado anteriormente.

(D) Si una sucesión de funciones $f_n \in F$ es monótona, $\left|\int f_n\right| \leqslant M$ para $n = 1,2,\ldots$ y $f_n \to f$ en todo punto, entonces $f \in F$ y $\int f_n \to \int f$.

Observación:

La condición " $\left|\int f_n\right| \leqslant M$ " puede sustituirse por " $\int f_n$ es convergente ", tratándose de $f_n$ monótona.

Lema de Fatou 10.1

Si $f_n \in F$ , $f_n \geqslant 0$ , $f_n \to f$ en todo punto y $\int f_n \leqslant M$ , entonces $f \in F$ y $\int f \leqslant M$ .

(Pero en general no podemos afirmar que $\int f_n \to \int f$ ).

Demostración:

Introducimos las funciones auxiliares

$$g_{np} = \min (f_n, \ldots, f_p) \quad \text{para} \quad p \geqslant n.$$

Entonces

$$g_{np} \in F \quad y \quad g_{np} \geqslant 0 .$$

Para cada $n$ fijo $g_{np}$ es una sucesión monótona no-creciente para $p \to \infty$ . Más aún

$$g_{np} \searrow \inf (f_n, f_{n+1}, \ldots) = g_n .$$

Como por definición

$$0 \leqslant g_{np} \leqslant f_n \quad ,$$

es

$$0 \leqslant \int g_{np} \leqslant \int f_n \leqslant M$$

y por lo tanto $g_{np}$ y $g_n$ satisfacen las hipótesis del axioma (D). Luego podemos afirmar que $g_n \in F$ y

$$\int g_{np} \searrow \int g_n \quad , \quad \text{si} \quad p \to \infty \; .$$

Ahora

$$0 \leqslant g_n \leqslant f_n$$

y

$$0 \leqslant \int g_n \leqslant \int f_n \leqslant M \quad ,$$

y la sucesión $g_n$ es monótona no-decreciente, y como $f_n \to f$ por hipótesis,

$\lim g_n = \lim \left\{ \inf (f_n, f_{n+1}, \ldots) \right\} = \liminf f_n = \lim f_n = f$ .

Una nueva aplicación del axioma (D) nos da $f \in F$ y $\int g_n \nearrow \int f$ .

De $\int g_n \leqslant M$ se deduce $\int f \leqslant M$ . como queríamos demostrar.

Teorema 10.2

Si $f_n \in F$ , $f_n \to f$ en todo punto, y $\int k_n \leqslant M$ , donde

$$k_n = \max\,(|f_1|,\dots,|f_n|)\ ,$$

entonces $f \in F$ y $f_n \xrightarrow{c} f$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Consideremos las funciones auxiliares

$$g_{np} = \min\,(f_n,\dots,f_p)\quad ,\quad h_{np} = \max\,(f_n,\dots,f_p)\ ,\quad (\ p \geqslant n\ )\ .$$

Entonces se verifica

$$-\,k_p \leqslant g_{np} \leqslant h_{np} \leqslant k_p\ ,$$

lo que implica

$$-\,M \leqslant \int g_{np} \leqslant \int h_{np} \leqslant M\ ,$$

es decir

$$\Big|\int g_{np}\Big| \leqslant M \quad \text{y} \quad \Big|\int h_{np}\Big| \leqslant M\ .$$

Como para cada $n$ fijo las sucesiones $g_{np}$ y $h_{np}$ son monóto-nas según $p$ , tenemos

$$g_{np} \searrow \inf\,(f_n,f_{n+1},\dots) = g_n$$

y

$$h_{np} \nearrow \sup\,(f_n,f_{n+1},\dots) = h_n$$

para $p \to \infty$. Además

$$g_{np} \in F\ ,\quad h_{np} \in F\ .$$

Luego deducimos del axioma (D) que

$$g_n \in F\ ,\quad h_n \in F$$

y que

$$\int g_{np} \searrow \int g_n\ ,\quad \int h_{np} \nearrow \int h_n\ .$$

Como $g_n \leqslant h_n$ , resulta todavía

$$-\,M \leqslant \int g_n \leqslant \int h_n \leqslant M\ ,$$

es decir

$$\Big|\int g_n\Big| \leqslant M\ ,\quad \Big|\int h_n\Big| \leqslant M\ ,$$

y como

$$g_n \nearrow f \ \text{ y } \ h_n \searrow f\ ,$$

el axioma (D) implica $f \in F$ y

$$\int g_n \to \int f\ ,\quad \int h_n \to \int f\ .$$

Pero como también valen las desigualdades

$$g_n \leqslant f \leqslant h_n \quad \text{y} \quad g_n \leqslant f_n \leqslant h_n\ ,$$

se tiene
$$|f_n - f| \leqslant h_n - g_n$$
y finalmente
$$\int |f_n - f| \leqslant \int h_n - \int g_n = \left(\int h_n - \int f\right) + \left(\int f - \int g_n\right) \longrightarrow 0 \; .$$
Esto quiere decir que $f_n \xrightarrow{c} f$ , con lo que concluye la demostración.

Consecuencia inmediata de esto último es que $\int f_n \longrightarrow \int f$ , debido al teorema 9.3.

## §11 - CONVERGENCIA EN CASI TODO PUNTO .

Definición:

Diremos que una sucesión de funciones $f_n$ pertenecientes a F converge a $f$ en casi todo punto, y escribiremos
$$f_n \rightleftarrows f \quad ,$$
si y sólo si existe una sucesión de funciones $g_n$ tales que $g_n \in F$ y $g_n \sim f_n$ , que converge a $f$ puntualmente.

Observación 1:

Si consideramos esta definición en el espacio L de las funciones sumables definidas en el §2 , resulta en particular que
$$f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots \quad \text{implica} \quad \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \rightleftarrows f \; .$$
Pues sea
$$g_n = \begin{cases} \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \;, & \text{si } \lambda_1 f_1 + \dots \text{ converge absolutamente} \\ f & \text{en los puntos restantes} \end{cases}$$
Entonces $g_n \longrightarrow f$ puntualmente, y como las funciones
$$h_n = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n - g_n$$
son nulas en los puntos de convergencia absoluta de $\lambda_1 f_1 + \dots$ , por el teorema 3.5 se tiene
$$\int |h_n| = \int 0 = 0 \quad ,$$
o sea
$$g_n \sim \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n \; .$$

Si $f_n \overset{\sim}{\rightarrow} f$ , entonces también $f_n \overset{\sim}{\rightarrow} h$ para toda función $h \sim f$ .

En efecto, existen $g_n$ tales que $g_n \sim f_n$ y $g_n \rightarrow f$ .
Sean $h_n = g_n - f + h$ ; entonces $h_n \sim g_n \sim f_n$ y $h_n \rightarrow h$ .

Ahora vamos a mostrar que el límite "en casi todo punto" es único a menos de funciones equivalentes. Es decir,

$$f_n \overset{\sim}{\rightarrow} g \quad y \quad f_n \overset{\sim}{\rightarrow} h \quad \text{implica} \quad g \sim h \ .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por hipótesis existen funciones $g_n \sim f_n$ con $g_n \rightarrow g$ y $h_n \sim f_n$ con $h_n \rightarrow h$ .
Por la propiedad transitiva de la equivalencia es además $g_n \sim h_n$ .
Si llamamos $l_n = g_n - h_n$ , entonces $l_n \rightarrow g - h$ .
Considerando que

$$\int \max (|l_1|, \ldots, |l_n|) \leq \int (|l_1| + \cdots + |l_n|) = \int |l_1| + \cdots + \int |l_n| = 0 \ ,$$

podemos hacer uso del teorema 10.2 para deducir que

$$g - h \in F \quad y \quad l_n \xrightarrow{c} g - h \ .$$

Ahora

$$\int |g - h| \leq \int |g - g_n| + \int |g_n - h_n| + \int |h_n - h| = \int |g - g_n| + \int |h - h_n| \rightarrow 0$$

y $g \sim h$ .

O b s e r v a c i ó n 2 :

Se verifica fácilmente que de $f_n \overset{\sim}{\rightarrow} f$ sigue

$$f_n^+ \overset{\sim}{\rightarrow} f^+ \quad y \quad f_n^- \overset{\sim}{\rightarrow} f^- \ .$$

Es una consecuencia inmediata de que

$$g_n \rightarrow f \quad \text{implica} \quad g_n^+ \rightarrow f^+ \ , \quad g_n^- \rightarrow f^-$$

y

$$g_n \sim f_n \quad \text{implica} \quad g_n^+ \sim f_n^+ \ , \quad g_n^- \sim f_n^- \ .$$

<u>D e f i n i c i ó n :</u>

Diremos que $f$ es menor o igual que $g$ en casi todo punto, en símbolos $f \lesssim g$ , si y sólo si existe $h \in f$ tal que $h \leq g$ en todo punto.

O b s e r v a c i ó n 3 :

Considerando esta definición en el espacio $L$, evidentemente

$$f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots \quad y \quad g \leqslant \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots$$

implica

$$g \lessapprox f \ .$$

Pues tomando

$$h = \begin{cases} g \ , \text{ si } \lambda_1 f_1 + \dots \text{ converge absolutamente} \\ f \quad \text{en los puntos restantes} \end{cases}$$

resulta $h \leqslant f$ en todo punto y $h \sim g$ .

<u>T e o r e m a d e L e b e s g u e 11.1</u>

Si $f_n \in F$ , $f_n \xrightarrow{\sim} f$ y $|f_n| \lessapprox f_o \in F$ , entonces

$$f \in F \quad y \quad f_n \xrightarrow{c} f \ .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Por hipótesis existe una sucesión $g_n$ tal que $g_n \sim f_n$ y $g_n \longrightarrow f$ , y una sucesión $h_n$ tal que $h_n \sim f_n$ y $|h_n| \leqslant f_o$ .

Sean

$$k_n = \max (|g_1|, \dots, |g_n|) \ , \quad l_n = \max (|h_1|, \dots, |h_n|) \ .$$

Puesto que $g_n \sim h_n$, resulta de las propiedades de la relación que hemos probado, que

$$|g_n| \sim |h_n| \quad , \quad \max (|g_1|, |g_2|) \sim \max (|h_1|, |h_2|)$$

y por inducción que

$$k_n \sim l_n \ .$$

Además

$$l_n \leqslant f_o \ .$$

Ahora

$$\int k_n = \int l_n \leqslant \int f_o = M \ , \quad g_n \in F \ , \quad g_n \longrightarrow f \ ;$$

luego es lícito aplicar el teorema 10.2 a la sucesión $g_n$ para obtener que $f \in F$ y $g_n \xrightarrow{c} f$ . De aquí se desprende finalmente:

$$\int |f_n - f| \leqslant \int |f_n - g_n| + \int |g_n - f| = \int |g_n - f| \longrightarrow 0 \ ,$$

esto es,

$$f_n \xrightarrow{c} f \ .$$

## §12 - CONJUNTOS INTEGRABLES.

Sea $Z \subset K$. La función característica de $Z$ es

$$f_Z(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in Z \\ 0 & \text{si } x \notin Z \end{cases} .$$

Puesto que la correspondencia entre los subconjuntos $Z$ de $K$ y sus funciones características es biunívoca y tal que $Z_1 \subset Z_2$ es equivalente a $f_{Z_1} \leqslant f_{Z_2}$, vamos a usar en la notación la misma letra $Z$ para designar tanto al conjunto como a su función característica, sin tener que temer confusiones. Por supuesto que así aparecerán relaciones chocantes en un primer momento, como por ejemplo $Z_1 \leqslant Z_2$ o $Z_1 \cup Z_2 = \max(Z_1, Z_2)$, pero que será fácil interpretar correctamente en cada caso.

Pueden verificarse las siguientes relaciones básicas entre conjuntos y las correspondientes funciones características.

$$Z_1 \cup Z_2 = \max(Z_1, Z_2), \qquad \bigcup_\alpha Z_\alpha = \sup_\alpha Z_\alpha ,$$

$$Z_1 \cap Z_2 = \min(Z_1, Z_2), \qquad \bigcap_\alpha Z_\alpha = \inf_\alpha Z_\alpha ,$$

$$Z_1 \setminus Z_2 = \max(Z_1, Z_2) - Z_2 .$$

La primera, por ejemplo, quiere decir que $f_{Z_1 \cup Z_2} = \max(f_{Z_1}, f_{Z_2})$.

<u>Definición</u>:

Un conjunto $Z \subset K$ se llamará *integrable* si y sólo si la función característica $Z \in F$.

En este caso está definido $\int Z$, que llamaremos la *medida* de $Z$.

Introduciremos a continuación un símbolo muy útil para lo que sigue.

<u>Definición</u>:

$$[x]_y = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leqslant |y| \\ x \cdot \left|\frac{y}{x}\right| = |y| \cdot \operatorname{sign} x & \text{si } |x| > |y| . \end{cases}$$

Necesitamos dar una expresión cerrada de esta función, en la que intervengan únicamente las operaciones de suma, resta, multiplicación por constantes, y valores absolutos. Una tal expresión es la siguiente:

$$(12.1) \qquad [x]_y = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\big|x+|y|\big| - \tfrac{1}{4}\big|x-|y|\big| + \\ + \tfrac{1}{4}\Big|x+|y| - \big|x-|y|\big|\Big| - \tfrac{1}{4}\Big|x-|y|+\big|x+|y|\big|\Big| ,$$

cuya validez puede comprobarse analizando separadamente los siguientes casos, que forman un sistema completo:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1º | $0\leqslant x\leqslant y$ , | 5º | $x\leqslant 0\leqslant y\leqslant \|x\|$ , |
| 2º | $0\leqslant y\leqslant x$ , | 6º | $-\|y\|\leqslant x\leqslant 0\leqslant y$ , |
| 3º | $y\leqslant x\leqslant 0$ , | 7º | $y\leqslant 0\leqslant x\leqslant \|y\|$ , |
| 4º | $x\leqslant y\leqslant 0$ , | 8º | $-\|x\|\leqslant y\leqslant 0\leqslant x$ . |

Enunciaremos algunas propiedades del símbolo que hemos definido.

$(\alpha)$ $\quad |x|\leqslant y$ implica $[x]_y = x$ ,

$(\beta)$ $\quad \big|[x]_y\big| = \big|[y]_x\big|$ , $\qquad (\gamma)$ $\quad \big[|x|\big]_y = \big|[x]_y\big|$ ,

$(\delta)$ $\quad [xz]_y = [x]_{\frac{y}{z}} \cdot z \quad (z \neq 0)$, $\qquad (\varepsilon)$ $\quad [x]_{[y]_{|x|}} = [x]_y$ ,

$(\zeta)$ $\quad [x+z]_y = \lim\limits_{n\to\infty} \Big[[x]_{ny} + [z]_{ny}\Big]_y$ ,

$(\eta)$ $\quad x_n \to x$ , $y_n \to y$ implica $[x_n]_{y_n} \to [x]_y$ ,

$(\theta)$ $\quad$ Si $y$ toma el valor 0 ó 1 , $[x]_{ny} \to xy$ .

Se comprueban por verificación directa, salvo en los casos $(\zeta)$ y $(\eta)$ , donde hay que tener en cuenta que $[x]_y$ es una función continua de $x$ e $y$. Para $(\zeta)$ además hace falta observar que $[x]_{ny} \to x$ , $[z]_{ny} \to z$ .

<u>T e o r e m a 12.1</u>

Si $f \in F$ y $Z$ es un conjunto integrable, entonces $fZ \in F$. Luego está definido $\int fZ$ , que llamaremos "integral de f sobre el conjunto Z" , y lo denotaremos con $\int_Z f$

Si $Z_1$ , $Z_2$ son integrables y $Z_1 Z_2 = 0$ , se verifica

$$\int_{Z_1 \cup Z_2} f = \int_{Z_1} f + \int_{Z_2} f .$$

D e m o s t r a c i ó n :

Debido a ($\theta$) vale $f_n = [f]_{nZ} \longrightarrow fZ$ .

Como $|f_n| \leqslant f$ , estó implica por el teorema de Lebesgue 11.1 que $fZ \in F$ .

Por otra parte, si $Z_1 Z_2 = 0$ , entonces $Z_1 \cup Z_2 = Z_1 + Z_2$ y

$$\int_{Z_1 \cup Z_2} f = \int f(Z_1 + Z_2) = \int fZ_1 + \int fZ_2 = \int_{Z_1} f + \int_{Z_2} f .$$

## §13 - FUNCIONES MEDIBLES .

D e f i n i c i ó n :

Una función $f$ definida sobre $K$ se llamará m e d i b l e si y sólo si $[f]_g \in F$ para toda función $g \in F$ .

De ($\alpha$) se deduce que si una función medible $f$ está mayorada por una función integrable $g$ , o sea $|f| \leqslant g$ , entonces ella misma también es integrable.

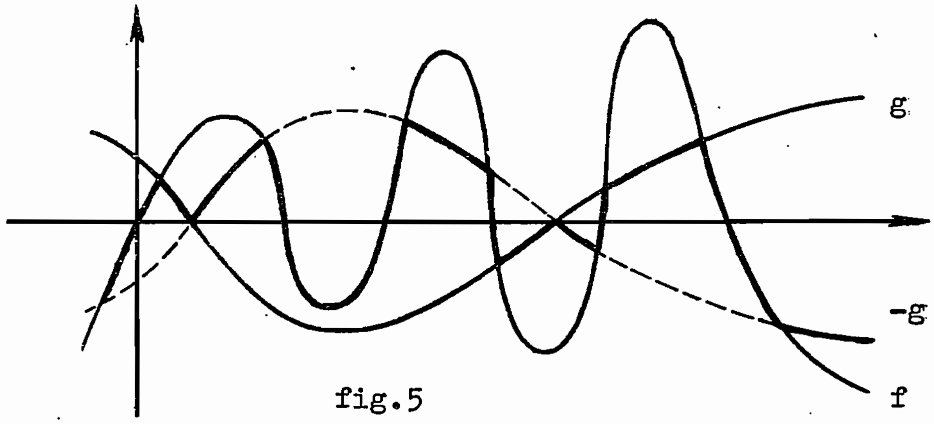


fig.5

Vamos a aclarar el significado intuitivo de $[f]_g$ .
Se trata simplemente del propio símbolo $[x]_y$ aplicado a los

valores que toman las funciones en un mismo punto. Entonces $[f]_g$ vale $f$ en los puntos en que $|f| \leqslant |g|$, pero si $|f| > |g|$, $[f]_g$ toma el valor $|g| \cdot \operatorname{sign} f$. Es decir, se "corta" a la función $f$, que puede ser "demasiado grande" en algunas partes, con el módulo de $g$. Si $f$ y $g$ son continuas, en vista de (12.1) $[f]_g$ resulta continua. Su aspecto puede verse en la figura 5, donde la línea gruesa representa la función $[f]_g$.

Denominaremos $\mathfrak{M}$ al conjunto de las funciones medibles. Observando (12.1) se ve que si $f \in F$, entonces $[f]_g \in F$ para toda $g \in F$. Luego $F \subset \mathfrak{M}$.

Teorema 13.1

$\mathfrak{M}$ es un espacio lineal y además $f \in \mathfrak{M}$ implica $|f| \in \mathfrak{M}$.

Demostración:

Sea $f \in \mathfrak{M}$, $g \in F$ y $\lambda \neq 0$. Por ($\delta$), $[\lambda f]_g = \lambda \cdot [f]_{\frac{1}{\lambda} g}$, y como $\frac{1}{\lambda} g \in F$, resulta $\lambda f \in \mathfrak{M}$. El caso $\lambda = 0$ es trivial. Si $f, h \in \mathfrak{M}$, $[f+h]_g = \lim\limits_{n \to \infty} \Big[ [f]_{ng} + [h]_{ng} \Big]_g$, como se vió en ($\xi$). $[f]_{ng}$ y $[h]_{ng}$ pertenecen a $F$ por hipótesis, luego su suma también. Además

$$\Big| \Big[ [f]_{ng} + [h]_{ng} \Big]_g \Big| \leqslant |g| \in F \quad ,$$

y por el teorema de Lebesgue 11.1 $[f+h]_g \in F$. Luego $f+h \in \mathfrak{M}$. Finalmente, debido a ($\gamma$), es

$$\big[ |f| \big]_g = \big| [f]_g \big| \in F \quad \text{y} \quad |f| \in \mathfrak{M} .$$

Para las funciones características $Z$ medibles se puede dar el teorema siguiente, análogo al 12.1.

Teorema 13.2

Si $f \in F$ y $Z$ es medible, entonces $fZ \in F$. Luego está definida $\int_Z f = \int fZ$, y si $Z_1$, $Z_2$ son medibles tales que

$Z_1 Z_2 = \cup$ , se verifica $\int_{Z_1 \cup Z_2} f = \int_{Z_1} f + \int_{Z_2} f$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Es exactamente la misma que la del teorema 12.1. Sólo hace falta observar que $[f]_{nZ} \in F$ . Esto se deduce de

$$[f]_{nZ} = [f]_{[nZ]_{|f|}}$$

(cf. propiedad (E)) y la definición de función medible.

## §14 - APROXIMACION DE LA INTEGRAL POR BANDAS RECTANGULARES .

Para lo que sigue necesitamos agregar un axioma, que llamaremos de Stone, y es éste

(S) $\quad 1 \in \mathfrak{M}$ .

Consecuencia inmediata es que $\alpha \in \mathfrak{M}$ para todo $\alpha$ real, porque $\mathfrak{M}$ es un espacio lineal.

Se verifica fácilmente que este axioma está satisfecho, si F se interpreta como el espacio L de las funciones sumables (en el sentido del §2).

T e o r e m a 14.1

Si la función $f \in F$ , entonces el conjunto

$$f_\alpha = \mathop{E}_{x \in K} \left( f(x) > \alpha \right) \quad , \quad \alpha > 0 \quad ,$$

es integrable.

D e m o s t r a c i ó n :

La función característica del conjunto en cuestión puede expresarse así:

$$f_\alpha = \frac{1}{\alpha} \lim_{n \to \infty} \min \left( n(f - \alpha)^+, \alpha \right)$$

Porque si $f(x) \leqslant \alpha$ , entonces $(f - \alpha)^+ = 0$ y $f_\alpha(x) = 0$ ; y si $f(x) > \alpha$ , entonces $(f - \alpha)^+ > 0$ y a partir de un $n_0$ es

$$n\,(f - \alpha)^+ \geqslant \alpha \quad y \quad \min\left( n(f - \alpha)^+, \alpha \right) = \alpha \ ;$$

luego $f_\alpha(x) = 1$ . Como

$$0 \leqslant \min\ (\ n(f - \alpha)^+, \alpha\ ) \leqslant f^+ \in F \quad ,$$

lo que se verifica inmediatamente, el teorema de Lebesgue 11.1 nos asegura que $f_\alpha$ es integrable.

Consideremos una función $f$ integrable y no-negativa, y una sucesión estrictamente monótona de números reales positivos que diverja hacia $\infty$ :

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots \longrightarrow \infty$$

y observemos estas sumas

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i - \alpha_{i-1})\ f_{\alpha_i} \quad .$$

Entonces resulta $s \leqslant f$ ,

Tomemos ahora una sucesión $A_n$ de sucesiones

$$0 = \alpha_{n0} < \alpha_{n1} < \dots < \alpha_{nj} < \dots \longrightarrow \infty$$

tal que para $n \longrightarrow \infty$

(14.1) $$\delta_n = \sup_j\ (\alpha_{nj} - \alpha_{n,j-1}) \longrightarrow 0 \quad .$$

y sea

$$s_n = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{ni} - \alpha_{n,i-1})\ f_{\alpha_{ni}}$$

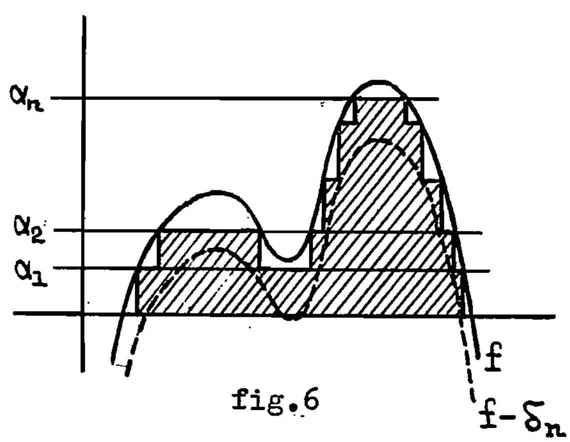


fig.6

Las funciones

$$g_n = (f - \delta_n)^+$$

pertenecen a $F$ , son no-negativas, y la sucesión de estas funciones tiende monótonamente hacia la función límite $f$ . Además

$$g_n \leqslant s_n \leqslant f$$

y

$$\int g_n \leqslant \int s_n \leqslant \int f \quad .$$

Por lo tanto

(14.2) $$\lim_{n \to \infty} s_n = f \quad y \quad \lim_{n \to \infty} \int s_n = \int f \quad .$$

Las igualdades (14.2) ofrecen la posibilidad de una nueva definición de la integral, que se basa en el concepto de conjunto integrable.

En efecto, supongamos dada una función no-negativa $f$ y una sucesión $A_n$, definida como antes. Además las funciones $f_{\alpha_{n1}}, f_{\alpha_{n2}}, \ldots$ estén definidas como en el teorema 14.1. Representemos con $\int f_{\alpha_{nj}}$ la medida del conjunto en el cual $f > \alpha_{nj}$, y con $\int s_n$ a la suma

$$\int s_n = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_{ni} - \alpha_{n,i-1}) \int f_{\alpha_{ni}} , \tag{14.3}$$

donde $s_n$ está definido por (14.1).

La función $f$ se llamará *integrable*, si para *una cierta* sucesión $A_n$

todos los conjuntos, en los cuales $f > \alpha_{ni}$, son integrables,

todas las sumas (14.3) tienen valores finitos, y

la sucesión $s_n$ está acotada (y luego es también convergente).

En tal caso la igualdad (14.3) también vale en el sentido de las definiciones introducidas anteriormente, y por lo tanto el límite de $\int s_n$ debe ser justamente $\int f$. Esto prueba que ambas definiciones son equivalentes. Además lo que acabamos de demostrar nos muestra que para *cualquier* sucesión $A_n$ todos los conjuntos donde $f > \alpha > 0$ son integrables y por consiguiente, que el valor de la integral es independiente de la elección de la sucesión $A_n$.

La definición de la integral puede extenderse a funciones con valores arbitrarios (no necesariamente no-negativos), si se pone

$$\int f = \int f^+ - \int (-f^-) .$$

La integral $\int f$ existe, si ambas integrales $\int f^+$ y $\int (-f^-)$ existen.

En el caso particular de interpretarse $F$ como el conjunto de las funciones sumables según el §2, la definición que hemos dado aquí coincide con la definición de Lebesgue. Pero en la teoría de Lebesgue la definición de la medida es diferente de la que nosotros hemos dado, y por consiguiente para obtener una demostración completa de la equivalencia de las integrales, todavía en necesario comprobar la equivalencia de las medidas.

Finalmente conviene señalar que nuestra anterior definición abstracta es esencialmente más general, porque no requiere un axioma que asegure que las funciones constantes sean medibles (axioma de Stone).

----- o 0 o -----

# SEGUNDA PARTE

## §15 - INTEGRAL SUPERIOR.

En nuestra teoría axiomática de la integral partimos de un espacio $F$ de funciones, sobre el cual suponíamos definida una integral. Vamos a considerar ahora un conjunto más amplio que el $F$.

Definición:

$f \in \overline{F}$ si y sólo si existe una función $g \in F$ tal que $|f| \leq g$.

Evidentemente $\overline{F} \supset F$, pues toda $f \in F$ satisface a esta definición si tomamos $g = |f|$, que pertenece a $F$. Además $\overline{F}$ también es un espacio lineal tal que $f \in \overline{F}$ implica $|f| \in \overline{F}$.

Definimos ahora sobre $\overline{F}$ una funcional de la siguiente manera.

$$\overline{\int} f = \inf_{g \geqslant f} \int g \quad ,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las funciones $g \in F$ que cumplen $g \geqslant f$. Este número es siempre finito porque el conjunto de las funciones $g \in F$ con $g \geqslant f$ no es vacío por definición. Leeremos $\overline{\int} f$ como "integral superior de f".

Se ve inmediatamente que si $f \in F$, entonces $\overline{\int} f = \int f$. Luego se trata de una extensión de la funcional $\int$ al espacio $\overline{F}$.

La integral superior tiene las siguientes propiedades fundamentales.

(1) $\overline{\int}(\alpha f) = \alpha \overline{\int} f$ para todo $\alpha > 0$ ,

(2) $\overline{\int}(f+g) \leqslant \overline{\int} f + \overline{\int} g$ ,

(3) Si $f \leqslant g$, entonces $\overline{\int} f \leqslant \overline{\int} g$ ,

(4) $$\bar{\int} f = \bar{\int} f^{+} + \bar{\int} f^{-} \quad .$$

D e m o s t r a c i ó n :

$$\bar{\int}(\alpha f) = \inf_{g \geqslant \alpha f} \int g = \alpha \cdot \inf_{h=\frac{1}{\alpha}\cdot g \geqslant f} \int h = \alpha \bar{\int} f \qquad ( h \in F ) .$$

(La hipótesis $\alpha > 0$ fué usada al dividir por $\alpha$ en la desigualdad $g \geqslant \alpha f$ ).

Si $f,g \in \bar{F}$ , y $h,k \in F$ son tales que $f \leqslant h$ , $g \leqslant k$ , entonces

$$f+g \leqslant h+k \qquad y \qquad \bar{\int}(f+g) \leqslant \int h + \int k \quad .$$

Como esto vale para todo par $h,k$ , también es

$$\bar{\int}(f+g) \leqslant \inf_{h \geqslant f} \int h + \inf_{k \geqslant g} \int k = \bar{\int} f + \bar{\int} g \quad .$$

Para demostrar (3) observemos que si $h \in F$ y $h \geqslant g$ , también es $h \geqslant f$ ; luego

$$\inf_{h \geqslant f} \int h \leqslant \inf_{h \geqslant g} \int h \quad .$$

Por último sea $f = f^{+} + f^{-}$ . $f \leqslant g$ implica $f^{+} \leqslant g^{+}$ y $f^{-} \leqslant g^{-}$ .

Si $g \in F$ , entonces $g^{+}, g^{-} \in F$ y

$$\bar{\int} f^{+} \leqslant \int g^{+} \quad , \qquad \bar{\int} f^{-} \leqslant \int g^{-} \quad .$$

Sumando:

$$\bar{\int} f^{+} + \bar{\int} f^{-} \leqslant \int g^{+} + \int g^{-} = \int g \quad .$$

Luego también

$$\bar{\int} f^{+} + \bar{\int} f^{-} \leqslant \bar{\int} f \quad .$$

La desigualdad opuesta está asegurada por (2). Así concluye la demostración.

A estas propiedades (1) a (4) se llega en base a los axiomas (A) y (Z), supuestos satisfechos por la integral que está definida en F. Si a éstos les agregamos el axioma (D) se puede deducir además la propiedad

(5) Si $f_n \in \bar{F}$ , $f_n \nearrow f$ y $f \in \bar{F}$ ,

entonces $\bar{\int} f_n \longrightarrow \bar{\int} f$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Para cada $n$ existe una función $g_n \in F$, tal que $g_n \geqslant f_n$ y $\int g_n < \bar{\int} f_n + \frac{1}{n}$. Además existe una función $g \in F$, tal que $|f| \leqslant g$. Sea $h_n = [g_n]_g$. Entonces también vale $h_n \in F$, $h_n \geqslant f_n$ y

$$(15.1) \qquad \int h_n < \bar{\int} f_n + \frac{1}{n} \quad ,$$

y además $h_n \leqslant g \in F$. Sea

$$k_{np} = \min (h_n, \ldots, h_p) \quad , \quad ( p \geqslant n ) \quad ;$$

entonces $k_{np} \in F$. Como la sucesión $f_n$ es no-decreciente y cada una de las funciones $h_n, \ldots, h_p$ es no-menor que $f_n$, vale

$$(15.2) \qquad f_n \leqslant k_{np} \leqslant h_n \quad ,$$

$$\bar{\int} f_n \leqslant \int k_{np} \leqslant \int h_n \quad .$$

Puesto que $k_{np} \searrow k_n = \inf (h_n, h_{n+1}, \ldots)$, el axioma (D) implica $k_n \in F$ y

$$\int k_{np} \longrightarrow \int k_n \quad \text{para} \quad p \longrightarrow \infty \; .$$

De (15.2) sigue

$$(15.3) \qquad f_n \leqslant k_n \leqslant h_n \leqslant g \quad ,$$

$$(15.4) \qquad \bar{\int} f_n \leqslant \int k_n \leqslant \int h_n \leqslant \int g \quad .$$

Como la sucesión $k_n$ es no-decreciente y está mayorada por $g$, ella converge a una función $k \leqslant g$, que por (D) pertenece a $F$; además $\int k_n \longrightarrow \int k$.

De (15.1) y (15.4) se obtiene

$$(15.5) \qquad \int k_n - \frac{1}{n} \leqslant \bar{\int} f_n \leqslant \int k_n \quad ,$$

de donde resulta $\bar{\int} f_n \longrightarrow \int k$ para $n \longrightarrow \infty$.

De (15.3) obtenemos $f \leqslant k$ y por lo tanto $\bar{\int} f \leqslant \int k$. Por otra parte $f_n \leqslant f$ implica $\bar{\int} f_n \leqslant \bar{\int} f$, y por (15.5) es $\int k_n - \frac{1}{n} \leqslant \bar{\int} f$, de modo que $\int k \leqslant \bar{\int} f$, para $n \longrightarrow \infty$. Esta desigualdad, juntamente con la anterior, implica que $\int k = \bar{\int} f$. Por consiguiente $\bar{\int} f_n \longrightarrow \bar{\int} f$.

O b s e r v a c i ó n :

Se puede mostrar que los axiomas (1) a (5) son independientes entre sí, y que conjuntamente son equivalentes al siguiente sistema de dos axiomas:

1º $\quad \bar{\int}(\alpha f) = \alpha \bar{\int} f^{+} + \alpha \bar{\int} f^{-} \qquad$ para $\alpha \geq 0$ .

2º $\quad$ Si las funciones $f$ y $f_1, f_2, \dots$ pertenecientes a $\bar{F}$ cumplen la desigualdad $f \leq f_1 + f_2 + \dots$ , y si la serie del segundo miembro es absolutamente convergente en todo punto y además la serie $\bar{\int}|f_1| + \bar{\int}|f_2| + \dots$ converge, entonces

$$f_1 + f_2 + \dots \in \bar{F} \quad \text{y} \quad \bar{\int} f \leq \bar{\int} f_1 + \bar{\int} f_2 + \dots$$

Para hacer una teoría más general se puede tomar cualquiera de los dos sistemas de axiomas dados y abstraerse del espacio $F$ y la integral que le dieron lugar. En lo que sigue preferiremos el grupo de axiomas (1) a (5).

Partiendo por ahora de (1) a (4) solamente, podemos dar la siguiente

<u>D e f i n i c i ó n</u> :

Una función $f \in \bar{F}$ se llamará i n t e g r a b l e si y sólo si $\bar{\int} f = - \bar{\int}(-f)$ .

Intuitivamente el significado de la definición es éste. La integral superior fué definida como el ínfimo de las integrales de funciones de $F$ que aproximan a la $f$ "desde arriba" . Análogamente hubiésemos podido definir una integral inferior como el supremo de las integrales de funciones pertenecientes a $F$ y que aproximan a $f$ "por abajo". Entonces

$$\underline{\int} f = \sup_{h \leq f} \int h = - \inf_{h \leq f} \int(-h) = - \inf_{k = -h \geq -f} \int k = - \bar{\int}(-f)$$

y las funciones integrables resultarían ser aquéllas para las cuales las integrales superior e inferior coinciden.

La definición anterior caracteriza a un subconjunto $\tilde{F}$

de $\overline{F}$ , el de las funciones integrables.

Si permanecemos en el caso particular de haber partido de un espacio $F$ determinado, tenemos todavía la inclusión $F \subset \widetilde{F}$ . Porque si $f \in F$ , la linealidad de la integral implica que $f \in \widetilde{F}$ . Es decir, tenemos $F \subset \widetilde{F} \subset \overline{F}$ .

Una cuestión muy importante es poder decidir si vale asimismo $\widetilde{F} \subset F$ . Es decir, si $F = \widetilde{F}$ , o con otras palabras, si el conjunto de las funciones integrables según nuestra última definición coincide con el espacio $F$ de partida. O si por el contrario se obtiene una familia más amplia.

La respuesta es negativa, en el sentido de que en general $F \neq \widetilde{F}$ . Si tomamos por ejemplo como $F$ al conjunto de las funciones escalera con la definición de integral que es usual para ellas, se obtiene en $\widetilde{F}$ a las funciones integrables en el sentido de Riemann, que evidentemente no todas son escaleras.

Si en cambio partimos del espacio $L$ de las funciones sumables (en el sentido del §2 de la primera parte) , resultará que $L = \widetilde{L}$ .

Antes de probar este resultado, vamos a volver un poco atrás, para estudiar el caso general, ahora ya agregando (D) y por lo tanto también el axioma (5) para la integral superior. Demostraremos en seguida que una condición necesaria y suficiente para que en la construcción indicada resulte $F = \widetilde{F}$ , es que se verifique el axioma

(C) Si $f \in \widetilde{F}$ , $g \in F$ , $|f| \leq g$ y $\overline{\int} |g| = 0$ , entonces $f \in F$.

D e m o s t r a c i ó n :

Si $F = \widetilde{F}$ tiene lugar, el axioma (C) se verifica trivialmente. Supongamos pues, recíprocamente, la validez de (C) y tomemos una $f \in \widetilde{F}$ . La observación que hicimos luego de la definición de una función integrable, y las propiedades del ínfimo y el supremo, aseguran la existencia de funciones $g_n, h_n, g$ y $h$ de $F$ tales que

$$g \leq g_n \leq f \leq h_n \leq h \quad ,$$

y

$$\int g_n \longrightarrow \underline{\int} f \quad , \quad \int h_n \longrightarrow \overline{\int} f \quad .$$

Sean

$$g_{np} = \max\,(g_n,\ldots,g_p) \quad ; \quad h_{np} = \min\,(h_n,\ldots,h_p)$$

para $p \geq n$ . Entonces

$$g_{np} \in F \quad , \quad g_{np} \nearrow \overline{g}_n = \sup\,(g_n, g_{n+1},\ldots)$$

y

$$h_{np} \in F \quad , \quad h_{np} \searrow \overline{h}_n = \inf\,(h_n, h_{n+1},\ldots)$$

para $n$ fijo y $p \to \infty$ . Además, como

$$\int g_{n1} \leq \int g_{np} \leq \int h_{np} \leq \int h_{n1} \quad ,$$

el axioma (D) implica $\overline{g}_n \in F$ , $\overline{h}_n \in F$ y

$$\int g_{np} \nearrow \int \overline{g}_n \quad , \quad \int h_{np} \searrow \int \overline{h}_n$$

para $p \to \infty$ .
Como la sucesión $\overline{g}_n$ es no-creciente y la sucesión $\overline{h}_n$ no-decreciente, y además

$$g \leq g_n \leq \overline{g}_n \leq f \leq \overline{h}_n \leq h_n \leq h \quad ,$$

resulta que existen las funciones límite $\overline{g} = \lim \overline{g}_n$ , $\overline{h} = \lim \overline{h}_n$ , y debido a (D) es $\overline{g} \in F$ , $\overline{h} \in F$ y

$$\int \overline{g} = \lim \int \overline{g}_n \quad , \quad \int \overline{h} = \lim \int \overline{h}_n \quad .$$

Además $\overline{g} \leq f \leq \overline{h}$ , es decir

$$0 \leq f - \overline{g} \leq \overline{h} - \overline{g} \quad . \tag{15.6}$$

Pero como

$$\int g_n \leq \int \overline{g}_n \leq \overline{\int} f \leq \int \overline{h}_n \leq \int h_n \quad ,$$

se obtiene para $n \to \infty$ que

$$\underline{\int} f \leq \int \overline{g} \leq \overline{\int} f \leq \int \overline{h} \leq \underline{\int} f \quad ,$$

o sea $\int \overline{g} = \overline{\int} f = \int \overline{h}$ y por lo tanto $\int (\overline{h} - \overline{g}) = 0$ .
En base a la hipótesis (C), de (15.6) resulta $f - \overline{g} \in F$ , y como $\overline{g} \in F$ y $F$ es un espacio lineal,

$$(f - \overline{g}) + \overline{g} = f \in F \quad ,$$

que es lo queríamos demostrar.

Con ésto la demostración de que $L = \widetilde{L}$ , donde $L$ es el espacio de las funciones sumables según el §2 , queda reducida a la verificación del axioma (C). Para efectuarla, nos basaremos en dos teoremas previos.

Teorema 15.1

Si $f \in L$ y $f \geqslant 0$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $g$ y una serie fundamental $\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots$, todos cuyos coeficientes $\mu_i$ son no-negativos, tales que

$$g \sim \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots \quad , \quad g \geqslant f \quad y \quad \int (g - f) < \varepsilon \ .$$

Demostración:

Supongamos que $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$. Como esta serie es fundamental, vale

$$|\lambda_{n+1}| \int f_{n+1} + |\lambda_{n+2}| \int f_{n+2} + \cdots < \frac{\varepsilon}{2}$$

para $n$ suficientemente grande. Recordando que $|\lambda_i| = \lambda_i^+ - \lambda_i^-$, esta desigualdad la podemos escribir así:

$$-(\lambda_{n+1}^- \int f_{n+1} + \lambda_{n+2}^- \int f_{n+2} + \cdots) < \frac{\varepsilon}{2} - (\lambda_{n+1}^+ \int f_{n+1} + \lambda_{n+2}^+ \int f_{n+2} + \cdots) \ ,$$

y como

$$\lambda_{n+1}^+ \int f_{n+1} + \lambda_{n+2}^+ \int f_{n+2} + \cdots \geqslant 0 \quad ,$$

también es cierto que

$$(15.7) \qquad -(\lambda_{n+1}^- \int f_{n+1} + \lambda_{n+2}^- \int f_{n+2} + \cdots) < \frac{\varepsilon}{2} \quad .$$

Por otra parte, para el $\varepsilon$ dado también es válida esta otra desigualdad:

$$(15.8) \qquad -\int (\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)^- < \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

siempre que $n$ se tome bastante grande. Esto se justifica de la siguiente manera.

De $f \sim \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots$ sigue $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n \rightrightarrows f$, debido a la obs.1 del §11, y $(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)^- \rightrightarrows f^-$, por la obs.2 del mismo §. Pero puesto que por hipótesis $f \geqslant 0$, es $f^- = 0$ y entonces $(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)^- \rightrightarrows 0$.

Además

$$|(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)^-| \leqslant |\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n| \leqslant$$
$$\leqslant |\lambda_1| f_1 + \cdots + |\lambda_n| f_n \leqslant |\lambda_1| f_1 + |\lambda_2| f_2 + \cdots \sim f_0 \quad ,$$

y esta última serie también es fundamental, luego $f_o$ sumable. Entonces, en virtud de la obs.3 del §11 se puede aplicar el teorema de Lebesgue, y resulta $(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^- \xrightarrow{c} 0$ , es decir

$$\int (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^- \longrightarrow 0 \quad ,$$

lo que demuestra (15.8).

Una vez fijado un $n$ adecuado, consideremos

$$(\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^+$$

Esta función puede expresarse como $\mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p$ con todos los $\mu_i \geqslant 0$ , lo cual no es totalmente trivial, pero puede verificarse elementalmente. Sea ahora $g$ una función que se desarrolla en la serie siguiente:

$$g \sim \mu_1 g_1 + \dots + \mu_p g_p + \lambda^+_{n+1} f_{n+1} + \lambda^+_{n+2} f_{n+2} + \dots$$

Evidentemente todos sus coeficientes son no-negativos y la serie es fundamental. Veamos que esta función $g$ satisface la tesis del teorema.

$$\begin{aligned} g - f &= (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^+ + (\lambda^+_{n+1} f_{n+1} + \lambda^+_{n+2} f_{n+2} + \dots) - \\ &\quad - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n) - (\lambda_{n+1} f_{n+1} + \lambda_{n+2} f_{n+2} + \dots) = \\ &= - (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^- - (\lambda^-_{n+1} f_{n+1} + \lambda^-_{n+2} f_{n+2} + \dots) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Luego $g - f \geqslant 0$ . Finalmente, usando el axioma (D) y las desigualdades (15.7) y (15.8) ,

$$\begin{aligned} \int (g - f) &= - \int (\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n)^- - \\ &\quad - (\lambda^-_{n+1} \int f_{n+1} + \lambda^-_{n+2} \int f_{n+2} + \dots) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Así concluye la demostración.

<u>T e o r e m a 15.2</u>

Si $f \in L$ , $f \geqslant 0$ y $\int f = 0$ , entonces $\int fg = 0$ para toda función $g$ .

D e m o s t r a c i ó n :

En virtud del teorema 15.1 precedente existen funciones

(15.9) $$g_n \sim \lambda_{n1} f_{n1} + \lambda_{n2} f_{n2} + \dots$$

con $\lambda_{ni} \geqslant 0$ , tales que $g_n \geqslant f$ y $\int (g_n - f) < \frac{1}{2^n}$ .

Por hipótesis esto equivale a decir que $\int g_n < \frac{1}{2^n}$ .

Consideremos ahora la serie

$$(15.10) \qquad \sum_{n,i} \lambda_{ni} f_{ni} = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots \quad ,$$

donde $\lambda_i \geqslant 0$ . Como

$$\lambda_1 \int h_1 + \lambda_2 \int h_2 + \ldots = \sum_{n,i} \lambda_{ni} \int f_{ni} = \sum_n \int g_n < 1 \quad ,$$

la serie $\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots$ es fundamental. Esta serie diverge a $+\infty$ en todo punto en que $f > 0$ . En efecto, en todo punto cada una de las series (15.9) o bien converge a $g_n$ , o diverge hacia $+\infty$. Entonces la serie (15.10) debe diverger a $+\infty$ en los puntos, en los cuales $f > 0$ . La serie

$$\lambda_1 h_1 - \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 - \lambda_2 h_2 + \ldots$$

también es fundamental, pero en los puntos, en los que $f > 0$ , no converge absolutamente. Por otra parte, en sus puntos de convergencia absoluta converge hacia $0$ , es decir hacia $f$ , o también $fg$ . Pero esto quiere decir, que

$$fg \sim \lambda_1 h_1 - \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 - \lambda_2 h_2 + \ldots \quad ,$$

y por lo tanto

$$\int fg = \lambda_1 \int h_1 - \lambda_1 \int h_1 + \lambda_2 \int h_2 - \lambda_2 \int h_2 + \ldots = 0 \quad ,$$

como queríamos demostrar.

El teorema 15.2 también puede interpretarse así: En una función equivalente a cero se pueden modificar arbitrariamente los valores distintos de cero, con lo cual la función sigue siendo equivalente a cero.

En efecto, si $g \quad 0$ , la función $f = g$ satisface las hipótesis del teorema 15.2, y se deduce la afirmación. De esta interpretación resulta la propiedad (C) como caso particular. Con lo cual la igualdad $L = L$ está demostrada.

De esto puede extraerse fácilmente la conclusión que la integral que nosotros hemos considerado es mas general que la integral de Riemann. En efecto, la integral superior de Riemann

$\overline{\int}^{R}$ se obtendrá considerando el espacio lineal de las funciones escalera $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ ( $f_i$ funciones simples). Entonces evidentemente es $\overline{\int} f \leqslant \overline{\int}^{R} f$ , donde la primera de estas integrales se toma en el sentido considerado anteriormente. De aquí resulta

$$-\overline{\int}^{R}(-f) \leqslant -\overline{\int}(-f) \leqslant \overline{\int} f \leqslant \overline{\int}^{R} f \ .$$

Luego si $-\overline{\int}^{R}(-f) = \overline{\int}^{R} f$ , entonces también debe ser $-\overline{\int}(-f) = \overline{\int} f$, es decir que la existencia de la integral de Riemann implica la existencia de la integral $\int f$ . Evidentemente en este caso ambas integrales son iguales.

## §16 - MEDIDA EXTERIOR DE LEBESGUE .

Nosotros hemos convenido en llamar integrable a un conjunto Z , si su función característica, que denotamos con la misma letra Z , pertenece a L (en realidad nuestra definición era más general). Si Z además está en $\overline{L}$ , está definida su integral superior $\overline{\int} Z$ . Nos preguntamos si el valor de esta integral superior es en general igual a la medida exterior de Lebesgue $\mu_e(Z)$ del conjunto, un hecho que parece muy plausible después de haber demostrado que $L = \tilde{L}$ . Efectivamente la respuesta es afirmativa, y la damos con el

T e o r e m a 16.1

Una función característica Z pertenece a $\overline{L}$ si y sólo si $\mu_e(Z) < \infty$ . En ese caso $\overline{\int} Z = \mu_e(Z)$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Supongamos que $\mu_e(Z) < \infty$ . Por la definición de la medida exterior de Lebesgue $\mu_e(Z)$ , existen intervalos abiertos $\mathcal{O}_{in}$ , tales que $\bigcup_{i=1} \mathcal{O}_{in} \geqslant Z$ (es decir, el conjunto Z está recubierto por $\bigcup_{i=1} \mathcal{O}_{in}$ ) y $\sum_{i=1}^{\infty} \int \mathcal{O}_{in} \longrightarrow \mu_e(Z)$ para $n \longrightarrow \infty$ , donde $\int \mathcal{O}_{in}$ es el volumen de $\mathcal{O}_{in}$ . Sean $I_{in}$ intervalos cerrados inferiormente, tales que sus interiores sean iguales a $\mathcal{O}_{in}$ (es decir, si $\mathcal{O}_{in} = (a_{in}, b_{in})$, entonces $I_{in} = [a_{in}, b_{in})$ ) . Evidentemente vale $\sum_{i=1}^{\infty} I_{in} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_{in} \geq Z$ y $\int \mathcal{O}_{in} = \int I_{in}$ , de donde resulta $\sum_{i=1}^{\infty} \int I_{in} \longrightarrow \mu_e(Z)$ para $n \longrightarrow \infty$ . La suma $\sum_{i=1}^{\infty} I_{in}$ puede considerarse como una serie fundamental particular, todos cuyos coeficientes son iguales a 1. Si se escribe $g_n \sim \sum_{i=1}^{\infty} I_{in}$ , y se pone $g_n = 1$ en todos los puntos en que la serie diverge (para obtener funciones con valores finitos), resulta $g_n \in L$ , $g_n \geq Z$ , $Z \in \bar{L}$ y $\int g_n \longrightarrow \mu_e(Z)$ . Pero entonces la definición de la integral superior implica que $\bar{\int} Z \leq \mu_e(Z)$ .

Supongamos ahora que $Z \in L$ . Demostraremos que $\bar{\int} Z \geq \mu_e(Z)$ . Por definición de integral superior, para todo $\varepsilon > 0$ existe una $f \in L$ tal que $f \geq Z$ y $\int f < \bar{\int} Z + \frac{\varepsilon}{4}$ . Por el teorema 15.1 existen una función $g$ y una serie fundamental $\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots$ , tales que

$$g \sim \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 + \cdots \quad , \quad g \geq f \quad y \quad \int (g - f) < \frac{\varepsilon}{4} \ .$$

Sea $\alpha$ un número mayor que 1 , cuyo valor preciso recién se determinará mas adelante. Entonces

$$(16.1) \qquad \alpha g \sim \alpha \mu_1 g_1 + \alpha \mu_2 g_2 + \cdots$$

y $\alpha g \geq f$ (la igualdad sólo puede valer en aquellos puntos, donde $g = 0$ ) . En todos los puntos del conjunto $Z$ , es decir en todos los puntos, en los cuales $Z > 0$ , vale $\alpha g > f \geq Z$ . Ahora podemos elegir $\alpha$ de tal modo, que $(\alpha - 1) \int g < \frac{\varepsilon}{4}$ . Entonces

$$\alpha \int g < \bar{\int} Z + \frac{3}{4} \varepsilon \ .$$

Sea

$$s_n = \alpha \mu_1 g_1 + \cdots + \alpha \mu_n g_n$$

y sea $Z_n$ el conjunto de los puntos, donde $s_n > 1$ . Entonces evidentemente $Z_n \leq s_n$ y, como la sucesión $s_n$ es no-decreciente, tenemos $Z_n \leqslant Z_{n+1}$ . Puesto que $\alpha g > Z$, la suma de la serie (16.1) siempre es mayor que $Z$ , o aún infinita. Por consiguiente para cada punto existe un índice $n_0$ , tal que para $n \geqslant n_0$ en ese punto la suma parcial $s_n$ es mayor que $Z$ . Se puede mostrar que es posible representar al conjunto $Z_n$ como una suma finita de intervalos disjuntos (y cerrados inferiormente) ; como el conjunto $Z_n$ se ha definido en base a una combinación lineal finita de funciones simples, aquí sólo se trata de una demostración elemental, en cuyos detalles no queremos detenernos. En forma análoga, cada uno de los conjuntos $Z_{n+1} - Z_n$ puede representarse como una suma finita de intervalos cerrados inferiormente. Escribiendo todas estas sumas en forma sucesiva, se obtiene una serie de intervalos

$$h_1 + h_2 + \dots = Z_1 + (Z_2 - Z_1) + (Z_3 - Z_2) + \dots \quad ;$$

evidentemente en general no será $h_n = Z_n - Z_{n-1}$ . Pero como las diferencias $Z_n - Z_{n-1}$ son disjuntas entre sí, así también los intervalos $h_n$ son disjuntos entre sí. La serie $h_1 + h_2 + \dots$ puede considerarse fundamental, porque

$$\int h_1 + \int h_2 + \dots = \lim \int Z_n \leqslant \lim \int s_n = \alpha(\mu_1 \int g_1 + \mu_2 \int g_2 + \dots) = \alpha \int g < \infty .$$

Cada uno de los intervalos $h_n$ puede cubrirse por un intervalo abierto $\mathcal{O}_n$ , de tal manera que

$$\int \mathcal{O}_n - \int h_n < \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{2^n} \quad .$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int \mathcal{O}_n < \sum_{i=1}^{\infty} \int h_n + \frac{\varepsilon}{4} < \alpha \int g + \frac{\varepsilon}{4} < \bar{\int} Z + \varepsilon \quad .$$

Pero como $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{O}_n \geqslant Z$ , es decir el conjunto $Z$ está cubierto por los intervalos $\mathcal{O}_n$ , de allí resulta que

$$\mu_e(Z) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int \mathcal{O}_n < \bar{\int} Z + \varepsilon \quad .$$

Puesto que el número positivo $\varepsilon$ puede elegirse arbitrariamente pequeño, obtenemos la desigualdad deseada $\mu_e(Z) \leqslant \bar{\int} Z$ .

## §17 - EQUIVALENCIA CON LA TEORÍA DE LEBESGUE .

En este § queremos probar todavía que

1º un conjunto $A$ es integrable en el sentido de Lebesgue (es decir, medible con una medida $\mu(A)$ finita), si y sólo si $A \in L$ y $\bar{\int}(-A) = -\bar{\int}A$ ;

2º en ese caso $\mu(A) = \bar{\int}A$ .

Para ello necesitamos saber en primer lugar, que todo conjunto abierto $\mathcal{O}$ puede desarrollarse en una serie de funciones simples

$$\mathcal{O} = f_1 + f_2 + \dots ,$$

que converge en todo punto hacia $\mathcal{O}$ . La demostración puede hacerse por el "método de las redes", y aquí no la daremos en sus detalles. Como todas las funciones que aparecen en este desarrollo tienen sus soportes disjuntos, por un conocido teorema sobre la medida de Lebesgue tenemos

$$\mu(\mathcal{O}) = \mu(f_1) + \mu(f_2) + \dots .$$

Pero la medida $\mu(f_n)$ del soporte de $f_n$ es igual al volumen de dicho soporte, es decir $\mu(f_n) = \int f_n$ . Por lo tanto resulta que para conjuntos abiertos $\mathcal{O}$ vale la igualdad $\mu(\mathcal{O}) = \int \mathcal{O}$ , y que $\mathcal{O} \in L$ .

Si $A$ es integrable en el sentido de Lebesgue, entonces para todo número positivo $\varepsilon$ existe por definición un conjunto abierto $\mathcal{O} \subset A$ , tal que $\mu_e(A - \mathcal{O}) < \varepsilon$ . Pero por el teorema 16.1 esta desigualdad la podemos escribir como $\bar{\int}(A - \mathcal{O}) < \varepsilon$ , de donde resulta

$$(17.1) \qquad \bar{\int}A - \int \mathcal{O} < \varepsilon .$$

En lugar de $\mathcal{O} \subset A$ podemos escribir $\mathcal{O} \leqslant A$ , o bien $-A \leqslant -\mathcal{O}$ , lo que implica la desigualdad $\bar{\int}(-A) \leqslant \int(-\mathcal{O})$ . Como $\mathcal{O} \in L$ , tenemos $\int(-\mathcal{O}) = -\int \mathcal{O}$ , luego $\bar{\int}(-A) \leqslant -\int \mathcal{O}$ . De esta desigualdad y (17.1) sigue $\bar{\int}A + \bar{\int}(-A) < \varepsilon$ . Como $\bar{\int}A + \bar{\int}(-A) \geqslant 0$ siempre es válido y $\varepsilon$ es arbitrario, obtenemos finalmente

$\overline{\int} A + \overline{\int}(-A) = 0$ , cuyo significado es la integrabilidad de A en el sentido del §15 ; es decir $A \in L$ , porque $\tilde{L} = L$ .

Para conjuntos A integrables según Lebesgue, tenemos por definición $\mu(A) = \mu_e(A)$ . Pero como mas generalmente vale $\mu_e(A) = \overline{\int} A$ , ya tenemos la igualdad $\mu(A) = \overline{\int} A$ deseada.

Todavía nos resta mostrar que de $A \in L$ y $\overline{\int}(-A) = -\overline{\int} A$ se deduce la integrabilidad en el sentido de Lebesgue. La demostración puede basarse por ejemplo en el siguiente

T e o r e m a d e C a r a t h é o d o r y :

Un conjunto A es integrable en el sentido de Lebesgue si y sólo si $\mu_e(A) < \infty$ y además

(17.2) $$\mu_e(Z) = \mu_e(Z \setminus A) + \mu_e(Z \cap A)$$

para todo conjunto Z, tal que $\mu_e(Z) < \infty$ .

Volvamos primero un poco al estudio de la integral superior que hicimos anteriormente, y consideremos para una función $f \in \overline{L}$ la condición siguiente:

(a) $$\overline{\int} h = \overline{\int}(h - f) + \overline{\int} f \quad \text{para toda } h \in \overline{L} .$$

Esta condición es trivialmente equivalente a esta otra, que es más "simétrica" :

(b) $$\overline{\int}(h+f) = \overline{\int} h + \overline{\int} f \quad \text{para toda } h \in \overline{L} .$$

Podemos probar fácilmente que cualquiera de estas condiciones sobre f es equivalente a que f sea integrable, en el sentido de que $\overline{\int} f = -\overline{\int}(-f)$ .

Tomando en (b) $h = -f$ , tenemos $\overline{\int} 0 = \overline{\int}(-f) + \overline{\int} f$ . Pero como la función 0 es integrable, es $\underline{\int} 0 = \overline{\int} 0 = 0$ y f integrable.

Recíprocamente, sea f integrable y h cualquiera. Entonces

$$\overline{\int} h = \overline{\int}(\ (h+f) + (-f)\ ) \leqslant \overline{\int}(h+f) + \overline{\int}(-f) = \overline{\int}(h+f) - \overline{\int} f$$

y $\overline{\int} h + \overline{\int} f \leq \overline{\int}(h+f)$ , y como la desigualdad opuesta tiene lugar siempre por el axioma (2) , (b) está satisfecha.

La proposición que queremos demostrar es una consecuencia del siguiente

T e o r e m a 17.1

La función característica de un conjunto $A$ pertenece a $L$ , si y sólo si $\mu_e(A) < \infty$ y $A$ satisface la condición (17.2) de Carathéodory para todo conjunto $Z$ , tal que $\mu_e(Z) < \infty$ .

D e m o s t r a c i ó n :

Como antes, denotaremos con $Z$ indistintamente al conjunto y su función característica. Además tendremos en cuenta que hemos probado $\mu_e(Z) = \overline{\int} Z$ . Entonces la condición de Carathéodory se escribe como

$$\overline{\int} Z = \overline{\int}(Z \setminus A) + \overline{\int}(Z \cap A) \quad .$$

Si además expresamos de la siguiente manera las funciones características en cuestión,

$$Z \setminus A = \max(Z,A) - A = (Z - A)^+$$
$$Z \cap A = \min(Z,A) = A + (Z - A)^- \quad ,$$

podemos considerar en su lugar la condición

$$\overline{\int} Z = \overline{\int}(Z - A)^+ + \overline{\int}(A + (Z - A)^-) \quad .$$

Si $A \in L$ ó $\mu_e(Z) < \infty$ , resulta $A \in \overline{L}$ . Luego

$$\overline{\int}(A + (Z - A)^-) = \overline{\int} A + \overline{\int}(Z - A)^-$$

por (b), y

$$\overline{\int}(Z - A)^+ + \overline{\int}(A + (Z - A)^-) = \overline{\int}(Z - A)^+ + \overline{\int} A + \overline{\int}(Z - A)^- =$$
$$= \overline{\int}(Z - A) + \overline{\int} A \quad ,$$

observando el axioma (4) . Como $\overline{\int} Z = \mu_e(Z)$ , sigue que la condición de Carathéodory (17.2) es equivalente con (a), lo cual prueba el teorema 17.1.

El teorema de Carathéodory, mediante el teorema 17.1, implica que el conjunto $A$ es integrable en el sentido de Lebesgue si y sólo si su función característica pertenece a $L$. Entonces $\int A = \mu(A)$. De esta manera también queda demostrado que la medida de Lebesgue $\mu(A)$ es equivalente a la medida $\int A$ introducida en nuestra teoría. Por el § 14, esto además tiene por consecuencia que la integral definida por nosotros es equivalente a la de Lebesgue, si se toma la correspondiente interpretación de $F$.

----- o O o -----

Estas notas sobre "Una introducción de la integral sin la noción de medida" corresponden al curso dictado por el profesor Jan Mikusiński en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, durante el primer cuatrimestre de 1962 . El profesor Mikusiński dictó este curso enviado por la UNESCO como experto para el Centro Regional de Matemática para América Latina que funciona en el citado Departamento.

Las notas fueron tomadas y redactadas por el licenciado Wilfrid Keller, a quien se agradece su valiosa y eficiente colaboración.

I N D I C E