ISSN 1853-709X

Fascículo 14

Cursos y seminarios de matemática

**Serie A**

*Jean Dieudonné*

# Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

**Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A**

**Fascículo 14**



ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **14**

cursos
y seminarios
de matemática

*Jean Dieudonné*

# REPRESENTACIONES DE GRUPOS COMPACTOS Y FUNCIONES ESFERICAS



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
1964

# PRÉFACE

Ce volume reproduit le cours que j'ai eu l'honneur de professer à l'Université de Buenos Aires pendant l'été 1961, sur l'invitation de cette Université et de l'UNESCO. Le temps limité dont je disposais ne m'a pas permis de traiter des représentations des groupes localement compacts de façon plus approfondie, et je me suis borné à des questions qui ne demandaient que relativement peu de préliminaires et pouvaient intéresser à la fois des analystes et des algébristes.

Deux auditeurs de mon cours, MM. Porta et Toranzos, ont bien voulu se charger de la lourde tâche de la rédaction, d'après les notes prises au cours; ils s'en sont acquittés avec beaucoup de zèle et de soin et je leur dois de nombreuses observations et simplifications utiles; qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma reconnaissance.

J. Dieudonné

# INTRODUCCION

El presente curso consiste en una exposición detallada de la teoría de funciones esféricas propuesta por R. Godement en [5] , con algunos prolegómenos. Esta teoría - y sobre todo la presentación que hemos adoptado - es particularmente interesante ya que une de manera muy estrecha cuestiones de álgebra por una parte y de análisis por otra. Más exactamente: verá el lector que los poderosos instrumentos algebraicos de que nos proveerá el capítulo III simplificarán notablemente los problemas de análisis funcional resueltos en los que le siguen.

Obtendremos como subproducto de apreciable valor la teoría de representaciones de grupos compactos (cap. IV), que es una generalización de la correspondiente teoría para grupos finitos desarrollada por G. Frobenius (y contenida en [12] , donde además aparecen listas completas de los trabajos de Frobenius, publicados en su mayoría en el Sitzungsberichte der Preussischen Akademie, de Berlin). La generalización de los resultados de Frobenius a grupos de Lie compactos se debe a F. Peter, H. Weil y E. Cartan (bibliografía en [13] ). Una vez demostrada la existencia de medidas de Haar, los métodos integrales de H. Weil (y en consecuencia los resultados de Frobenius) se extienden a su generalización definitiva: el caso de grupos compactos. Gran parte de [13] (primer tratamiento sistemático y completo) está destinado a esta tarea. Exposiciones más modernas se encuentran en [10] , [6] y [9] . Cada una de estas obras (y por supuesto [13] ) contiene casi integramente nuestros capítulos I, II, y IV. El capítulo III está integramente contenido en [1] . (La fuente clásica de la teoría de zócalo y piés es [4] ). Los primeros cuatro capítulos son, en consecuencia, clásicos. Los dos siguientes, que están parcialmente estudiados en [9] , son casi clásicos. La teoría de representaciones inducida se remonta a Frobenius - es decir al comienzo del siglo - para los grupos finitos ("erzeugt Darstellung", [12] ). Para el caso compacto puede verse [13] (nuestro teorema V.2. / coincide con una afirmación suya, en la página 83, que generaliza un teorema de Frobenius), y para el caso general (localmente compacto), [2] . Algunos trabajos de G. Mackey ( [7] ) tratan también el tema.

El capítulo VII - aunque aparece último... - es la parte central del curso y aún no está contenido en ningún libro: hemos seguido [5] . Del caso particular de grupos de Lie, que tratamos en el parágrafo 3 de este capítulo, se encuentra una somera exposición en [3].

La importancia de la teoría general de funciones esféricas (a la que, repetimos, está dedicado el curso) se hace evidente al comprobar que los polinomios de Legendre y las funciones de Bessel son ejemplos de tales funciones y que algunos teoremas generales permiten obtener resultados clásicos referentes a ecuaciones diferenciales y funcionales y representaciones integrales de estas funciones especiales. Para llegar a los polinomios de Legendre hemos dedicado un parágrafo completo al estudio de los polinomios armónicos, pese a que aparecen tratados en el Fascículo 3 de esta colección, debido a que nuestro enfoque es algo distinto y por lo tanto las presentaciones difieren.

------------

PRERREQUISITOS

Usaremos continuamente estructuras algebraicas: grupos, anillos, módulos, espacios vectoriales y álgebras. El lector deberá conocer, por lo tanto, los resultados referentes a estos conceptos, en el nivel de [1], Livre II, Chap. I, II y III.

Con igual frecuencia aparecerán estas estructuras topologizadas: resultados principales en el nivel de [1] (Banach-Steinhaus para tonelados, por ejemplo).

También se utilizarán medidas de Háar (nivel de [8], [10], [13]), integración en espacios localmente compactos ([8], [1], Liv. VI) y rudimentos de integración a valores vectoriales (también [1], Liv. VI).

Con respecto a Grupos de Lie, muy poco más que la definición es necesario: el lector que haya estudiado el "Theory of Lie Groups" de Chevalley (Princeton, 1946) o [10] podrá matar la mosca de un cañonazo. Para nuestras necesidades, [2] es satisfactorio.

(No se usará ningún concepto de geometría compleja o de topología algebraica).

---------------

NOTACIONES

Agruparemos a continuación las notaciones y definiciones generales que se utilizarán a lo largo de todo el texto. Al comenzar cada parágrafo, con número propio y bajo el subtítulo "Notación", agruparemos las notaciones e hipótesis propias de ese parágrafo.

1) El símbolo "$\boxtimes$" indicará el final de cada demostración; la notación "sii" será una abreviatura de "si y solamente si". Ambas notaciones son debidas a P. Halmos.

2) Designaremos con $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a los cuerpos topológicos de números reales y complejos respectivamente. Cuando se afirme una propiedad para el cuerpo $\mathbb{K}$, deberá entenderse que dicha propiedad es válida para $\mathbb{R}$ y para $\mathbb{C}$.

3) Preferiremos denotar con letras góticas minúsculas a los ideales de los anillos que aparecen en el texto. Usaremos las últimas letras latinas mayúsculas para indicar las representaciones de grupos en espacios vectoriales. En general las primeras letras latinas minúsculas indicarán elementos de espacios vectoriales y las últimas elementos de grupos.

4) Si $A$ es un anillo cualquiera, el anillo de las matrices cuadradas de orden $n$ sobre $A$ se notará con $M_n(A)$.

5) Si $G$ es un grupo de operación "$\circ$", llamaremos GRUPO OPUESTO de $G$, al grupo $G^o$ cuyo espacio base sea el mismo de $G$ y con operación "$\circ$" definida por $s \circ t = t \circ s$

6) Si $X$ es un conjunto, notaremos con $\iota_X$ a la aplicación idéntica de $X$ en sí mismo.

7) Si $G$ y $G'$ son estructuras algebraico-topológicas (grupos topológicos, espacios vectoriales topológicos, etc.) notaremos con $\mathrm{Hom}(G, G')$ al conjunto de los homomorfismos continuos de $G$ en $G'$. Abreviaremos $\mathrm{Hom}(G, G)$ con $\mathrm{End}(G)$. En el caso particular de dos módulos $G$ y $G'$ ambos sobre el mismo anillo $A$, notaremos en los casos susceptibles de confusión, $\mathrm{Hom}_A(G, G')$. Análogamente $\mathrm{End}_A(G)$.

8) Si $E$ es un espacio vectorial topológico, designaremos con $GL(E)$ al grupo de los automorfismos algebraicos de $E$, con el producto de composición usual. Notaremos con $\mathcal{GL}(E)$ al subgrupo de los automorfismos bicontinuos. En particular, si $E = K^n$ usaremos la notación $GL(n, K)$,

considerando a este grupo canónicamente isomorfo al sub grupo de $M_n(K)$ formado por las matrices inversibles. Ocasionalmente necesitaremos destacar dos subgrupos de $GL(n,K)$: $0(n,k)$ formado por las matrices inversibles ortogonales, es decir, aquellas matrices en que su inversa coincide con su transpuesta, y $SO(n,K)$ constituído por las matrices ortogonales de determinante igual a 1 . Para las propiedades y resultados referentes a estos grupos de matrices, puede consultarse Chevalley, op. cit.

9) Si $E$ y $E'$ son dos espacios vectoriales en dualidad (topológica), designaremos con $\sigma(E,E')$ a la topología débil de dualidad de $E$ .

10) Si $G$ es un grupo topológico localmente compacto y unimodular designaremos con $ds$ a una medida de Haar bilátera de $G$ En particular, si $G$ es compacto tomaremos, sin aclaración previa, $ds$ normalizada, es decir tal que $\int_G ds = 1$ . Notaremos con $N_p$ a la norma-p definida por

$$N_p(f) = \left[ \int_G \left[ f(s) \right]^p dx \right]^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$$

Designaremos con $L^p(G)$ al espacio de Banach de las (clases de) funciones $f$ tales que $N_p(f) < \infty$.

11) Sea $\{E_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subespacios del espacio vectorial topológico $E$ . Diremos que $E$ es SUMA DIRECTA TOPOLOGICA de los $E_\lambda$ y notaremos

$$E = \overset{T}{\underset{\lambda \in L}{\oplus}} E_\lambda$$

sii se verifica

$$\text{a)} \quad E = \overline{\underset{\lambda \in L}{\oplus} E_\lambda}$$

$$\text{b)} \quad \overline{E}_\lambda \cap \overline{\underset{\mu \in L-\{\lambda\}}{\oplus} E_\mu} = \{0\}$$

Análogamente, sea $\{H_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subespacios del espacio de Hilbert $H$ . Diremos que $H$ es SUMA HILBERTIANA de los $H_\lambda$ y notaremos

$$H = \underset{\lambda \in L}{\oplus} H_\lambda$$

sii se verifica que

a) $H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in L} H_\lambda}$

b) Si $\mu \neq \lambda$ entonces $H_\mu$ es ortogonal a $H_\lambda$ .

Para propiedades y resultados referentes a esta última definición, puede consultarse [1] , Livre V, Ch. V, § 2 , N° 2 .

# CAPITULO I

## REPRESENTACIONES DE GRUPOS

### § 1 .- PRIMEROS CONCEPTOS Y EJEMPLOS

#### I.1.1.- NOTACION

Designaremos con G un grupo topológico localmente compacto con elemento neutro e , y cuyos elementos serán notados habitualmente por s, t, $\sigma$ , $\tau$ . E será un espacio vectorial topológico sobre el cuerpo K y sus elementos se indicarán con a, b, c, x, y, z . En el caso de que G y/o E carezcan de estructura topológica se mantendrá las definiciones considerándolos provistos de la topología discreta.

#### I.I.2.- DEFINICION

Llamaremos REPRESENTACION de G en E a toda aplicación T de G en $\mathcal{GL}(E)$ que sea un homomorfismo algebraico. Si $\mathcal{T}$ es una determinada topología de $\mathcal{GL}(E)$ , llamaremos REPRESENTACION $\mathcal{T}$-COMPATIBLE a todo homomorfismo continuo de G en $\mathcal{GL}(E)$ . Si el homomorfismo es inyectivo, diremos que la representación es FIEL.

Por abuso de lenguaje, cuando esté bien determinada la topología $\mathcal{T}$ sobreentenderemos que las representaciones consideradas son $\mathcal{T}$-compatibles. Frecuentemente nos referiremos a E como "el espacio de la representación T ". En otras palabras, una representación de G en E será una aplicación T que a cada elemento s de G asocia un automorfismo continuo $T_s$ de E , de forma que $T_e = \iota_E$ ; $T_s o T_t = T_{st}$ $\forall$ s, t $\in$ G . En estas condiciones se verificará que $(T_s)^{-1} = T_{s^{-1}}$ , así que los automorfismos serán no solo continuos sino bicontinuos.

I. 1. 3. - DEFINICION

Llamaremos ANTIRREPRESENTACION de G en E a toda representación del grupo opuesto G en E .

Según esta definición, si $s \longrightarrow U_s$ es una antirrepresentación de G en E se verificará que $U_e = \iota_E$ ; $U_s o U_t = U_{ts}$ .

Daremos a continuación una serie de ejemplos que aclararán el sentido real de estas definiciones. En estos ejemplos no especificaremos topología para $\mathcal{GL}(E)$ , es decir que no trataremos la compatibilidad de las representaciones que enunciaremos.

I. 1. 4. - EJEMPLOS

A) Si G es un grupo y E un espacio vectorial, ambos sin estructura topológica, les asignamos, de acuerdo con (I. 1. 1. ), la topología discreta. Entonces resulta ser $\mathcal{GL}(E) = GL(E)$ , y todo homomorfismo algebraico de G en GL(E) es una representación de G en E . A tales representaciones suele llamárselas representaciones algebraicas, y, por contraposición, topológicas a las definidas en (I. 1. 2. ). Sin embargo, esta distinción es superflua ya que, como hemos visto, las algebraicas son caso particular de las topológicas.

B) La aplicación $T: G \longrightarrow \mathcal{GL}(E)$ definida por $T_s = \iota_E$ cualquiera sea $s \in G$ , es una representación de G en E que llamaremos representación trivial.

C) Si G es un subgrupo de $\mathcal{GL}(E)$ con alguna topología localmente compacta, la inyección canónica de G en $\mathcal{GL}(E)$ es una representación de G en E .

D) Sea G un subgrupo de GL(n, K) , con la topología inducida. Sea $E = \mathcal{P}^{m}$ el espacio vectorial de los polinomios de n variables, con coeficientes en K y de grado menor o igual a m , con la topología habitual como espacio de dimensión finita. A cada $\sigma \in G$ le asociamos el operador $T_\sigma$ que actúa en E , y definido por

$$(T_\sigma P)(x) = P(\sigma^{-1}x) \qquad P \in E \quad ; \quad x \in K^n \tag{'}$$

Es inmediato que $T_\sigma$ es un automorfismo continuo de E , y además se verifica que $T_e = \iota_E$ . Finalmente veamos que:

$$T_{\sigma\tau}P = P\circ(\sigma\tau)^{-1} = P\circ\tau^{-1}\circ\sigma^{-1} = T_{\sigma}(P\circ\tau^{-1}) = T_{\sigma}\circ T_{\tau}P$$

luego la correspondencia $\sigma \longrightarrow T_{\sigma}$ es una representación de G en E . Si F es el espacio de los polinomios de n variables, con coeficientes en K y homogéneos de grado m , la misma fórmula (') nos permite definir una representación de G en F .

E) Sea $E = L^2(R^3)$ , como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ , y sea $G = SO(3,R)$ , ambos con su topología habitual. Sea $s \longrightarrow T_s$ definida por

$$(T_s f)(x) = f(s^{-1}x) \qquad f \in E \quad ; \quad x \in R^3 \quad ; \quad s \in G$$

Razonando como en el ejemplo anterior se demuestra que esta aplicación es una representación de G en E . La mecánica cuántica asocia al átomo de hidrógeno un operador hermitiano H que actúa en $L^2(R^3)$ , llamado operador de Schrödinger. La importancia de la representación que acabamos de definir reside en que el operador H conmuta con ella, es decir que $T_sH = HT_s$ cualquiera sea $s \in G$ , lo que resulta de la simetría del átomo de hidrógeno respecto de su centro.

Como ya hicimos notar, en los ejemplos precedentes no especificamos ninguna topología en $\mathcal{GL}(E)$ . Veamos ahora tres topologías que pueden asignarse naturalmente a este grupo a partir de la topología de E .

a) Topología fuerte o uniforme.

Es la topología de la convergencia uniforme en acotados (ver [1] Livre V). Si E es de Banach es la topología dada por la norma habitual de operadores.

b) Topología puntual fuerte. (más débil que la anterior)

Es aquella topología por la cual un filtro $\{U_\alpha\}$ tiende al elemento U sii $\{U_\alpha(x)\}$ tiende a U(x) en la topología de E , cualquiera sea $x \in E$ .

c) Topología puntual débil (más débil que las anteriores).

Es la topología por la cual un filtro $\{U_\alpha\}$ tiende al elemento $U \in \mathcal{GL}(E)$ sii $\{U_\alpha(x)\}$ tiende a U(x) en la topología $\sigma(E,E')$ para todo $x \in E$ . Es claro que esta última topología no es adecuada en espacios donde no valga el teorema de Hahn-Banach.

## I. 1. 5. - EJEMPLOS

A) La representación trivial definida en (I. 1. 4. B) es siempre compatible con cualquiera de las tres topologías descriptas.

B) En $GL(n,K)$ las trés topologías coinciden. La inyección canónica de cualquier subgrupo es compatible. Las representaciones descriptas en (I. 1. 4. D. ) son ambas compatibles.

C) La representación descripta en (I. 1. 4. E) resulta compatible para la topología puntual fuerte de $\mathcal{G}\mathcal{L}(L^2(R^3))$, y por ende para la puntual débil.

A continuación daremos varias definiciones en forma muy suscinta. Sin embargo, como los conceptos a definir son fundamentales, se recomienda al lector especial cuidado en profundizar una por una.

## I. 1. 6. DEFINICIONES

Diremos que una representación es de DIMENSION FINITA $N$ si su espacio de representación tiene dimensión finita $N$. Llamaremos CARACTER ABELIANO de un grupo $G$ a toda representación de $G$ de dimension 1. Sean $T'$ y $T''$ dos representaciones de dimensión finita de $G$ en $E'$ y $E''$, respectivamente. Llamaremos PRODUCTO TENSORIAL de $T'$ y $T''$ a la representación $T' \otimes T''$ de $G$ en $E' \otimes E''$ definida por

$$(T' \otimes T'')_s \left(\sum_1^n x_i \otimes y_i\right) = \sum_1^n (T'_s x_i) \otimes (T''_s y_i)$$

Llamaremos SUMA de $T'$ y $T''$ a la representación $T' \oplus T''$ de $G$ en $E' \oplus E''$ definida por

$$(T' \oplus T'')_s (x+y) = (T'_s x) + (T''_s y)$$

En la definición de producto tensorial podemos quitar la restricción de dimensión finita para $E'$ y $E''$ dotando a $E' \otimes E''$ de una adecuada topología de Grothendieck.

## I. 1. 7.- DEFINICIONES

Sea $T$ una representación de $G$ en $E$. Diremos que un subespacio $F$ de $E$ es INVARIANTE PARA $T$ (o más brevemente T-invariante o T-estable) sii $T_s(F) \subset F$ cualquiera sea $s \in G$. Diremos que $T$ es ALGEBRAICAMENTE (Resp. TOPOLOGICAMENTE) IRREDUCIBLE si $E$ no contiene ningún subespacio (resp. subespacio cerrado) propio invariante para $T$. En caso contrario diremos que es ALGEBRAICAMENTE (resp. TOPOLOGICAMENTE) REDUCIBLE.

Es fácil probar que $T$ es algebraicamente (resp. topológicamente) irreducible sii para cada $x \in E$, $x \neq 0$, el conjunto $T_G x = \{T_s x \; ; \; s \in G\}$ genera todo $E$ (resp. es un conjunto total en $E$).

I.1.8. DEFINICIONES

Sea $T$ una representación de $G$ en $E$. Sea $L$ un subgrupo de $G$ y $F$ un subespacio T-invariante de E. Llamaremos RESTRICCION de $T$ al subgrupo $L$, a la representación $T'$ de $L$ en $E$ definida restringiendo el campo de variabilidad de $T$. Llamaremos CONTRACCION de $T$ al subespacio $F$, a la representación $T''$ de $G$ en $F$ definida asociando a cada $s \in G$ el operador $T''_s$ definido restringiendo el $T_s$ a $F$.

I.1.9.- DEFINICION

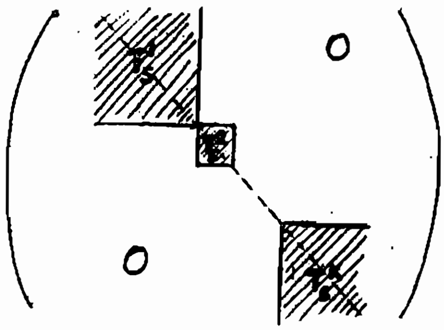
Diremos que una representación $T$ de $G$ en $E$ es COMPLETAMENTE REDUCIBLE si $E$ admite una descomposición $E = \overline{\bigoplus_{i \in I} E_i}$ tal que se verifique $\forall i \in I$:

a) $E_i$ es T-invariante y cerrado

b) La contracción $T^i$ de $T$ a $E_i$ es topológicamente irreducible.

Si $T$ es de dimensión finita, será completamente reducible si se puede descomponer el espacio de representación $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k$ en forma que cada $E_i$ sea invariante y la contracción de $T$ a él irreducible.

Recordemos además que, para una base prefijada de $E$, $T_s$ es una matriz de $n \times n$ inversible. Es fácil comprobar entonces que la completa reducibilidad de $T$ equivale al hecho de que, para cierta base de $E$, los operadores $T_s$ sean matrices formadas por "bloques" cuadrados colocados sobre la diagonal principal, de forma que la longitud de cada bloque sea precisamente la dimensión de cada uno de los $E_i$.



y que cada $s \longrightarrow T^i_s$ sea irreducible.

## I.1.10.- DEFINICION

Sean $T$ y $U$ dos representaciones de $G$ en los espacios $E$ y $F$ respectivamente. Diremos que $T$ y $U$ son SEMEJANTES sii existe un isomorfismo (de toda la estructura) $\varphi : E \longrightarrow F$ tal que el siguiente diagrama conmute para todo $s \in G$ :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_s"] \arrow[d, "\varphi"'] & E \arrow[d, "\varphi"] \\ F \arrow[r, "U_s"] & F \end{tikzcd}$$

Es claro que las propiedades de irreducibilidad algebraica y topológica, completa reducibilidad, etc., se conservan por semejanza. Además la semejanza es una relación de equivalencia en el (supuesto existente) "conjunto" de todas las representaciones de $G$ (ver IV.6. 1.).

## I.1.11.- DEFINICION

Sea $T$ una representación de $G$ en el espacio de Hilbert $H$ . Diremos que $T$ es UNITARIA si cualquiera sea $s \in G$ , el operador $T_s$ es unitario es decir, si se verifica que $(x \mid y) = (T_s x \mid T_s y)$ para todo par $x, y$ de elementos de $H$ .

I. 1. 12. - EJEMPLOS

A) Sea $G = R$ , el grupo aditivo real, y $E = C^2$ el espacio complejo bidimensional. Asociamos a cada $x \in R$ la matriz

$$T_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$$

La correspondencia $x \longrightarrow T_x$ es una representación de G en E puesto que $T_x \in GL(2, C)$ ; $T_0 = \iota_E$ y además se verifica

$$T_x T_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 1 \end{pmatrix} = T_{x+y}$$

Observemos que el subespacio formado por los vectores con primera componente nula es T-invariante, luego la representación es reducible. Sin embargo, como se ve de inmediato, no es completamente reducible.

B) Sea $G = GL(n, \mathbb{C})$ y Q el espacio vectorial de las formas cuadráticas de n variables complejas. Definimos una representación T de G en Q en la misma forma que en el ejemplo (I. 1. 4. D). Veamos que esta representación es irreducible. Sea $N \subset Q$ el conjunto de las formas no degeneradas. Designemos con $\pi$ a la función de Q en $\mathbb{C}$ que a cada forma cuadrática asocia su determinante. Entonces es inmediato que $\pi$ es continua, y que $\complement \{0\}$ es abierto en $\mathbb{C}$ . Pero $N = \pi^{-1} \{ \complement \{0\} \}$ luego es abierto en Q , y como es no vacío, genera todo Q . Sea ahora F un subespacio T-invariante de Q , que no se reduce al elemento nulo. Existe entonces $\phi_0 \in F$ , $\phi_0 \neq 0$ , es decir, que si r = rango de $\phi_0$ , entonces $1 \leq r \leq n$ . Si fuera $r = n$ entonces $\phi_0 \in N$. En caso contrario, si $r < n$ , existen, por el conocido teorema de reducción de formas cuadráticas, $s_1, s_2, \ldots, s_{n-r} \in G$ tales que verifiquen

$$\phi_i = T_{s_i} \phi_0 = \sum_{k=i}^{r+i-1} x_k^2$$

Pero por la invariancia de F será $\phi_i \in F$ , y por lo tanto también será $\phi = \sum_{i=1}^{n-r} \phi_i \in F$ , pero $\phi \in N$ . En esta forma se demuestra que $F \supset N$ y por lo deducido anteriormente es $F = Q$ , luego T es irreducible.

C) Sea $G = GL(n,\mathbb{C})$ y sea $B$ el espacio de las funcionales bilineales en $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$, es decir, que $B = \mathbb{C}^{n*} \otimes \mathbb{C}^{n*} = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ es el espacio de los tensores dos veces covariantes. Definimos la representación $U = T \otimes T$ de $G$ en $B$ como producto tensorial de la representación definida en el ejemplo anterior, pero aplicada al espacio $\mathbb{C}^{n*}$ de las funcionales lineales en $\mathbb{C}^n$. En otras palabras, será:

$$(U_s \varphi)(x,y) = \varphi(s^{-1}x, s^{-1}y) \qquad s \in G \; ; \; \varphi \in B \; ; \; (x,y) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n .-$$

Ahora bien, cualquiera sea $\varphi \in B$, podemos escribir

$$\varphi(x,y) = \varphi_s(x,y) + \varphi_A(x,y) \quad \text{donde sean}$$
$$\varphi_s(x,y) = \tfrac{1}{2}(\varphi(x,y) + \varphi(y,x))$$
$$\varphi_A(x,y) = \tfrac{1}{2}(\varphi(x,y) - \varphi(y,x))$$

Si llamamos $S$ al subespacio de las funcionales bilineales simétricas y $A$ el de las antisimétricas, es inmediato que $\varphi_s \in S$ y $\varphi_A \in A$. Entonces podemos expresar $B = S \oplus A$. Resulta fácil demostrar que estos subespacios son U-invariantes, y más aún, la contracción de $U$ a cada uno de estos subespacios es irreducible. La demostración de este último hecho para $S$ coincide con la del ejemplo anterior ya que $S \cong Q$. En el caso de $A$ la demostración es análoga. Hemos probado así que la representación $U$ de $G$ en $B$ es completamente reducible.

---------

Como hemos supuesto desde el comienzo que $G$ es localmente compacto y unimodular, sabemos que existe una (única a menos de un factor constante) medida de Haar bilátera $ds$. Esta medida nos resultará de gran utilidad para el estudio y construcción de representaciones de $G$. En el caso de que $G$ sea compacto, como veremos en el Capítulo IV, se puede calcular todas las representaciones de $G$ con el auxilio de esa medida. El instrumento principal para este estudio será un tipo de representaciones de $G$, englobado bajo el nombre genérico de "representaciones regulares", y que ahora pasamos a definir. Es conocido que el espacio $L^2(G)$ es un espacio de Hilbert. En el capítulo IV veremos que en algunos casos admite también la estructura de álgebra. Definiremos dos representaciones $R$ y $R'$ de $G$ en $L^2(G)$ mediante

$$\left.\begin{aligned} (R_s f)(t) &= f(ts) \\ (R'_s f)(t) &= f(s^{-1}t) \end{aligned}\right\} \qquad s,t \in G \; ; \quad f \in L^2(G) \tag{'}$$

Es inmediato, por la invariancia de ds , que son representaciones unitarias. Sin embargo, salvo por este hecho, observemos que en la definición no es esencial que el espacio de representación sea $L^2(G)$ . En otras palabras, la fórmula (') permite definir representaciones sobre otros subespacios de $\mathbb{C}^G$ . Para que esto sea posible es necesario que tales subespacios tengan definiciones razonablemente buenas y topologías convenientes, es decir, como diremos habitualmente, que sean espacios funcionales "razonables". Ejemplos de tales espacios son $L^p(G)$ , $\mathscr{C}(G)$ , $\mathcal{K}(G)$, $\overline{\mathcal{K}(G)}$ , y si G es de Lie, $\mathcal{D}(G)$ , y $\mathscr{E}(G)$ .

## I. 1. 13. - DEFINICION

<u>Llamaremos REPRESENTACIONES REGULARES (resp. a derecha y a izquierda) de G en un espacio funcional razonable, a las representaciones R y R' dadas por la fórmula (') .</u>

## I. 1. 14. - PROPOSICION

<u>Las representaciones regulares de G en $L^2(G)$ son compatibles con la topología puntual fuerte de $\mathscr{GL}(L^2(G))$.</u>

Probaremos que la representación $R : G \longrightarrow \mathscr{GL}(L^2(G))$ es contin ua en un punto, digamos $s_o$ , de G , cuando en $\mathscr{GL}(L^2(G))$ se considera la topología puntual fuerte. Eso significa que, fijada una función $f \in L^2(G)$ , para cada $\mathcal{E} > 0$ , existe un entorno U de $s_o$ tal que

$$N_2(R_s f - R_{s_o} f) < \mathcal{E} \qquad \text{si} \quad s \in U \quad . \tag{1}$$

Consideremos primero el caso en que $f \in \mathcal{K}(G)$, es decir cuando f es continua y su soporte K es compacto. Sean además W un entorno compacto simétrico de e ( = unidad de G ) y H = $= K s_o^{-1} W$ . H es compacto y como f es continua será uniformemente continua sobre H , de donde se concluye la existencia de un entorno $V \subset W$ de e tal que se verifica

$$| f(ts) - f(ts_o)| < \mathcal{E} / |H|^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

toda vez que $t \in H$ , $ss_o^{-1} \in V$ (aquí $|H| = \int_H ds$ ; $|H| \neq 0$ puesto que W tiene interior). Pero entonces $U = Vs_o$ es el entorno buscado ya que de (2) se concluye (1) sin dificultad:

$$N_2(R_s f - R_{s_o} f) = \left( \int_G |f(ts) - f(ts_o)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left( \int_H |f(ts) - f(ts_o)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{E} .$$

Sea ahora $f \in L^2(G)$ . Se sabe que $\mathcal{K}(G)$ es denso en $L^2(G)$ , luego existe $g \in \mathcal{K}(G)$ tal que $N_2(f - g) < \mathcal{E}/3$ y por ser R unitaria será

$$N_2(R_s f - R_s g) = N_2(R_{s_o} f - R_{s_o} g) = N_2(f - g) < \mathcal{E}/3$$

Pero como

$$(R_s f - R_{s_o} f) = (R_s f - R_s g) + (R_s g - R_{s_o} g) + (R_{s_o} g - R_{s_o} f)$$

obtenemos la tesis. La demostración para R' es análoga. ⊠

## I.1.15.- EJEMPLOS

A) Analicemos nuevamente el ejemplo (I.1.4.E). La teoría de representaciones de grupos compactos, que estudiaremos en el Capítulo IV, permite afirmar que toda representación de un grupo compacto en un espacio de Banach es irreducible o completamente reducible. Ahora bien, SO(3,R) es compacto, y $L^2(R^3)$ es no sólo de Banach sino de Hilbert. Además es inmediato que la representación T considerada es unitaria, y por lo tanto, los subespacios invariantes $E_\lambda$ , que, por la teoría general, son de dimensión finita, resultan ser además ortogonales dos a dos. Es decir , vale que

$$L^2(R^3) = \bigoplus_{\lambda \in L} E_\lambda$$

Como dijimos antes, el operador H de Schrödinger conmuta con todos los $T_s$ ; entonces se puede demostrar que su restricción a cada E es un escalar, es decir que vale

$$Hf = \lambda f \qquad \forall \, f \in E$$

En otras palabras, cada $E_\lambda$ es un subespacio propio constituído por autofunciones de H . La descomposición así obtenida nos dá, según la mecánica cuántica, los posibles niveles $\lambda$ de energía del átomo de hidrógeno, en sus diversas etapas estables.

B) Sea $G = \mathbb{U}$ el grupo multiplicativo de los complejos de módulo 1 (circunferencia unitaria). Sea $R$ la representación regular de $\mathbb{U}$ en $L^2(\mathbb{U})$ ya definida. Puesto que $\mathbb{U}$ es compacto, $R$ será completamente reducible por la teoría general ya enunciada, es decir:

$$L^2(\mathbb{U}) = \bigoplus_n E_n$$

Pero como $\mathbb{U}$ es abeliano, para que las contracciones de $R$ a cada $E_n$ sean irreducibles, es necesario, como demostraremos poco más adelante (Prop. I.1.18) que cada $E_n$ sea de dimensión 1. En efecto, resulta $E_n$ ser el subespacio generado por la función $\varphi_n(\xi) = \xi^n = e^{in\theta}$ ($n$ entero), donde es $\theta = \arg \xi$. Entonces si $f(\theta) = f(\xi) \in L^2(U)$ podemos poner

$$f(\theta) = \hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \xi^n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}$$

donde los $c_n$ son los coeficientes de Fourier de $f$, que se obtienen, por la ortogonalidad de los subespacios $E_n$, mediante

$$c_n = (\hat{f} \,|\, \varphi_n) = \int_U \hat{f}(\xi)\overline{\xi^n}\, d\xi = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

Es decir que, al afirmar que la representación regular de $\mathbb{U}$ en $L^2(\mathbb{U})$ es completamente reducible, y que $L^2(\mathbb{U})$ es suma hilbertiana de los subespacios $E_n$ de dimensión 1, hemos expresado brevemente el fundamento teórico del desarrollo de Fourier.

C) Sea $R$ la representación regular de $G$ en $\mathcal{K}(G)$ topologizado con la norma del supremo. Un sencillo argumento de continuidad uniforme permite afirmar que en este caso también hay compatibilidad. Dejamos al lector el cuidado de hacerlo.

---------

Si imponemos condiciones adicionales al grupo o al espacio, las representaciones pueden conocerse más detalladamente. Algunas propiedades en este sentido son explicitadas en los enunciados siguientes.

I.1.16.- PROPOSICION

Sea $G$ localmente compacto y $E$ tonelado, y sea $T$ una representación de

G en E , compatible con la topología puntual fuerte de $\mathcal{GL}(E)$ . La aplicación $T : (s,x) \longrightarrow T_s x$ es continua de $G \times E$ en E .

Sea $(t,a)$ un elemento arbitrario de $G \times E$ y U un entorno abierto de $T_t a$ . Por hipótesis existe un entorno compacto K de t tal que si $s \in K$ entonces $T_s a \in U$ . Pero como $T_K = \{T_s \; ; \; s \in K\}$ es imagen continua de un compacto será compacto en $\mathcal{GL}(E)$ para la topología puntual fuerte, y, puesto que E es tonelado, será equicontinuo por Banach-Steinhaus. Entonces existe un entorno V de a tal que $T_s V \subset U$ cualquiera sea $s \in K$ . Pero esto equivale a la continuidad simultánea de T en sus dos variables.

Esta proposición permite afirmar que si se satisfacen las hipótesis, la representación hace operar a G continuamente sobre E , en el sentido de [1] , Ch. III, 3eme, Edition. En particular puede aplicarse la proposición a las representaciones regulares en que el espacio funcional razonable elegido sea tonelado. ⊠

I. 1. 17. - PROPOSICION

Toda representación fuertemente continua de un grupo compacto en un espacio de Hilbert es semejante a una representación unitaria.

Sea G compacto, $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert (con producto escalar $( \mid )$ ), y T una representación de G en $\mathcal{H}$ . Si definimos

$$[x,y] = \int_G (T_s x \mid T_s y) \, ds$$

donde ds es la (única) medida de Haar normalizada, resulta fácil verificar que $[\, , \,]$ satisface los axiomas de producto escalar. La única propiedad no inmediata és que si $x \neq 0$ entonces $|||x||| = [x,x]^{\frac{1}{2}} > 0$ . Pero recordemos que $s \longrightarrow T_s(x)$ es una función continua, y por lo tanto también lo es $h(s) = \| T_s x \|^2 = (T_s x \mid T_s x)$ y además es $h(s)$ positiva y $h(e) = (T_e x \mid T_e x) = (x \mid x) > 0$ , de donde resulta de inmediato lo que buscábamos.

Designaremos con $\mathcal{H}'$ al espacio $\mathcal{H}$ con el producto escalar $[\, , \,]$ . Sea $\pi$ la aplicación idéntica de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}'$. Veamos que $\pi$ es un isomorfismo de espacios vectoriales topológicos.

Como $s \longrightarrow T_s$ es continua para la topología puntual fuerte, para cada $x \in \mathcal{H}$, los elementos $T_s x$ forman un conjunto acotado (en virtud de la compacidad de $G$) y entonces los operadores $T_s$ son uniformemente acotados en norma por el teorema de Banach-Steinhaus. Es decir que existe una constante $B$ tal que cualesquiera sean $s \in G$ ; $x \in \mathcal{H}$

$$\| T_s x \| \leq B \| x \|$$

Entonces resulta fácilmente que

$$|||x||| = \left( \int_G \| T_s x \|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq B \left( \int_G \| x \|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} = B \| x \|$$

Por otra parte observemos que si $y = T_s x$ entonces $x = T_s^{-1} y = T_{s^{-1}} y$ ; y razonando como antes será $\|x\| \leq B\, |||x|||$ lo que prueba que $\| \;\|$ y $|||\;|||$ son equivalentes. Si llamamos $T'$ a $T$ considerada como de $G$ en $\mathcal{H}'$ verifiquemos que es unitaria. En efecto

$$[T_t x, T_t y] = \int_G (T_{st} x \mid T_{st} y)\, dx = \int_G (T_s x \mid T_s y)\, ds = [x, y]$$

Además $T'$ es semejante a $T$ puesto que $T'_s \circ \Pi = \Pi \circ T_s \quad \forall s \in G$ . ⊠

I. 1. 18. - <u>PROPOSICION</u>

<u>Toda representación irreducible de dimensión finita de un grupo abeliano es un carácter abeliano.</u>

Sea $G$ abeliano y $s \longrightarrow T_s$ una representación irreducible de $G$ en el espacio $E$ de dimensión finita pero indeterminada. Sea $t$ un elemento arbitrario de $G$ . El operador $T_t$ será una matriz cuadrada inversible de $n \times n$ donde $n$ es la (desconocida) dimensión de $E$ . Existirá entonces al menos un vector no nulo $a \in E$ y un complejo $\lambda$ tales que

$$T_t a = \lambda a \qquad (')$$

Llamemos $E_\lambda$ al subespacio de los autovectores de $T_t$ con autovalor $\lambda$ es decir al subespacio de todos los vectores que verifican (') . Sea $x \in E$ y $s \in G$ , entonces se verifica

$$T_t(T_s x) = T_{ts} x = T_{st} x = T_s(T_t x) = T_s(\lambda x) = \lambda T_s x$$

es decir que, por definición de $E_\lambda$ , $T_s x \in E_\lambda$ , lo que equivale a decir que $E_\lambda$ es invarian te para $T$. Pero es evidente que $E_\lambda \neq \{0\}$ ya que $a \in E$, entonces será $E_\lambda = E$ por ser $T$ irreducible. Esto equivale a afirmar que $T_t$ es una homotecia de razón $\lambda$. Pero en el razonamiento precedente $t$ era fijo pero arbitrario en $G$, es decir que todos los operadores $T_s$ son homotecias. Entonces, necesariamente deberá ser $\dim E = 1$ ya que en caso contrario, cualquier subespacio propio sería T-invariante, en contra de la hipótesis de la irreducibilidad de $T$. ⊠

Observemos que en la demostración de la proposición precedente hemos hecho uso expreso de la hipótesis de dimensión finita de la representación. Es natural preguntar si se mantiene el resultado si quitamos esa restricción. Dicho más rigurosamente: Toda representación topológicamente irreducible de un grupo abeliano es un carácter abeliano? No existe demostración general ni contraejemplos de ésta afirmación. Si la representación es unitaria en un espacio de Hilbert, se puede demostrar que se verifica la afirmación.

## I. 1. 19. - DEFINICION

Sea $s \longrightarrow T_s$ una representación de $G$ en $E$. Llamaremos REPRESENTACION CONTRAGREDIENTE de $T$ a la representación $s \longrightarrow \check{T}_s$ de $G$ en el dual topológico $E'$, definida por

$$\langle x , x' \rangle = \langle T_s x , \check{T}_s x \rangle \qquad s \in G \; ; \quad x \in E \; ; \quad x' \in E'$$

Si $E$ es de dimensión finita, o bien si no tiene topología, se puede definir la representación contragrediente actuando en el dual algebraico $E^*$.

Si llamamos "transpuesto" del operador $U$ que actúa en $E$, al operador ${}^tU$ que actúa en $E'$, definido por

$$\langle x , {}^tU x' \rangle = \langle U x , x' \rangle$$

resulta de inmediato que cualquiera sea $s$ $G$, vale $\check{T}_s = {}^tT_{s^{-1}}$

## I. 1. 20. - EJEMPLO

Analizaremos un ejemplo importante de representación contragrediente. Sea $R^n$ el espacio de $n$ variables reales y $G = GL(n, \mathbb{R})$. Estudiaremos la representación $T$ de $G$ en el espacio $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de funciones de prueba (ver [11] ), definida como en (I. 1. 4. D), es decir :

$$(\check{T}_s f)(x) = f(s^{-1}x) \qquad s \in G \; ; \; f \in \mathcal{D} \; ; \; x \in \mathbb{R}^n$$

Recordemos que cada elemento $s$ $G$ será una matriz de $n \times n$ inversible $s = (a_{ij})$ y que si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces será:

$$y = sx = (y_1, \ldots, y_n) \qquad \text{tal que} \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

La representación contragrediente $s \longrightarrow \check{T}_s$ actuará en el espacio $\mathcal{D}'$ es decir el espacio de Schwartz de distribuciones en $\mathbb{R}^n$ ( [11] ) , y estará definida por la relación

$$\langle \check{T}_s \alpha , T_s f \rangle = \langle \alpha , f \rangle \qquad s \in G \; ; \; f \in \mathcal{D} ; \; \alpha \in \mathcal{D}' .$$

Trataremos ahora (afortunadamente con éxito) de calcular $\check{T}_s \alpha$ cuando $\alpha$ pertenece al subespacio $\mathcal{U}$ de las distribuciones con soporte en el origen. Notamos con $D_i$ la derivación en el origen con respecto a $x_i$ : $D_i = (\partial / \partial x_i)_{x=0}$ . Si $\lambda$ es un multiíndice $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con cada $\lambda_i$ entero no negativo. $\vec{D}^\lambda$ significará, como es habitual, el producto

$$\vec{D}^\lambda = D_1^{\lambda_1} \, D_2^{\lambda_2} \, \ldots \, D_n^{\lambda_n} \quad .$$

Es claro que cada $\vec{D}^\lambda$ es una distribución con soporte en el origen. Vale además que el subespacio generado por los $\vec{D}^\lambda$ es todo $\mathcal{U}$ ( [11], Tomme I, Th. XXXV), es decir, toda distribución con soporte en el origen es combinación lineal (finita) de distribuciones del tipo $\vec{D}^\lambda$ . Esto permite reducir el problema de la determinación de $\check{T}$ sobre $\mathcal{U}$ a un problema algebraico elemental. En efecto, si para cada sistema de $p$ índices entre $1$ y $n$ $(G = GL_n)$ $i_1, \ldots, i_p$ se considera, la distribución $D_{i_1} \ldots D_{i_p}$ (puede haber repetición, por supuesto), es claro que la familia de los $D_{i_1} \ldots D_{i_p}$ es un sistema de generadores para el subespacio de $\mathcal{U}$ de los polinomios de derivación homogéneos de grado $p$ . Ahora bien, mediante un simple cálculo, se comprueba que, si $s = \{a_{ij}\} \in GL_n$ , vale

$$\check{T}_s D_{i_1} \ldots D_{i_p} = \sum_{h_1 \ldots h_p} x \, a_{h_1 \cdot 1} \, a_{h_2 \cdot 2} \, \ldots \, a_{h_p \cdot p} \quad D_{h_1} \ldots\ldots D_{h_p} \tag{1}$$

De esta fórmula se puede concluir que el subespacio de los polinomios homogéneos de derivación de grado $p$ es invariante para $\check{T}$ .

**COMENTARIO:**

En particular cada $\check{T}_s$ (o mejor, su restricción a dicho subespacio) es representable con respecto al sistema de generadores $D_{i_1} \ldots D_{i_p}$ mediante una matriz, y es fácil comprobar a partir de (1) que si se considera ordenadas a las componentes de la distribución

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \ldots i_p} \quad D_{i_1} \ldots D_{i_p}$$

lexicográficamente a partir del último subíndice de forma tal que se obrenga una matriz columna $A(\alpha)$ , se tiene

$$A(\check{T}_s \alpha) = s \otimes s \otimes \ldots \otimes s \, . \, A(\alpha)$$

con p factores iguales a s (utilizamos la definición $A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$ ).

I. 1. 20. 1. - Más aún, de (1) resulta el siguiente hecho importante: si U es la restricción de T al subgrupo ortogonal de $GL_n$ y $\Delta$ es el Laplaciano en el origen: $\Delta = \sum_i D_i^2$ , $\Delta$ es invariante respecto de (todos los operadores de) la representación U . Eso es inmediato observando la fórmula (1) y la definición de matriz ortogonal. También es posible hacer el cálculo sobre las matrices representantes en la siguiente forma. Según lo dicho, las $n^2$ componentes con respecto a $\{D_i D_j\}$ de $\check{T}_s \Delta$ están dadas por los elementos de la matriz fila

$$B = s \otimes s \, . \, \delta$$

donde $\delta$ es una matriz cuyos elementos $\delta_{ij}$ forman un sistema de componentes de $\Delta$ en términos de los $D_i D_j$ .

Es claro que en este caso es posible tomar $\delta_{ij}$ = ( $\delta_{ij}$ de Kroneker) y entonces (puesto que s es ortogonal) las componentes de B resultan

$$b_{h,k} = \sum_{i,j} \delta_{ij} a_{hi} a_{kj} = \sum_i a_{hi} a_{ki} = \delta_{hk}$$

Eso significa que $\check{T}_s \Delta = \Delta$ . Esta propiedad será utilizada más adelante (Cap. VI, § 2).

-----

## § 2 .- PRODUCTO DE CONVOLUCION

Este parágrafo consiste, en gran parte, en un formulario sobre el producto de convolución de funciones y medidas, es decir en una colección de pequeños lemas sobre este tema, cuyas demostraciones, generalmente triviales, dejaremos a menudo a cargo del lector. En esos casos, consignaremos estos resultados a continuación de su correspondiente número, sin subtítulo ni enunciado formal.

### I. 2. 1. - NOTACION

Designaremos con G un grupo topológico, localmente compacto y unimodular. En general, las funciones y medidas sobre G serán a valores complejos. Llamaremos $\mathcal{C}(G)$ al espacio vectorial de las funciones continuas sobre G, y $\mathcal{K}(G)$ al subespacio de las funciones continuas con soporte compacto. $\mathcal{M}(G)$ será el espacio de todas las medidas sobre G, $\mathcal{M}^1(G)$ el subespacio de las medidas acotadas y $\mathcal{M}^c(G)$ el subespacio de las medidas con soporte compacto. Es conocido que $\mathcal{M}^c(G) \subset \mathcal{M}^1(G) \subset \mathcal{M}(G)$. En particular, si G es compacto los tres espacios coinciden. También admitiremos conocido, ya sea por definición o por demostración, que

$$\mathcal{M}(G) = (\mathcal{K}(G))' \quad ; \quad \mathcal{M}^1(G) = (\overline{\mathcal{K}(G)})' \quad ; \quad \mathcal{M}^c(G) = (\mathcal{C}(G))'$$

(ver apéndice: § 4 .)

### I. 2. 2. - DEFINICION

Sean $\alpha$ y $\beta \in \mathcal{M}(G)$. Llamaremos CONVOLUCION de $\alpha$ y $\beta$ a la medida $\gamma = \alpha * \beta$ definida por la fórmula

$$\int_G f(s)\, d\gamma(s) = \iint_{G\times G} f(tu)\, d\alpha(t)\, d\beta(u)$$

cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$.

No podemos asegurar que $\alpha * \beta$ exista cualesquiera sean $\alpha$ y $\beta$. Sin embargo se puede probar que $\gamma$ existe si $\alpha, \beta \in \mathcal{M}^1(G)$ o bien si al menos una de ellas tiene soporte (ver demostración en [11] ). Podemos generalizar por simple iteración esta definición para la convolución de más de dos medidas. Para asegurar la existencia pediremos que todos los factores pertenezcan a $\mathcal{M}^1(G)$ o bien que todas menos una estén en $\mathcal{M}^c(G)$ . Si la convolución de tres medidas tiene sentido, entonces vale la propiedad asociativa.

I. 2. 3. - PROPOSICION

El espacio vectorial $\mathcal{M}^1(G)$ con el producto de convolución y la norma habitual es un álgebra de Banach.

Con su norma $\mathcal{M}^1(G)$ es un espaflio de Banach, ya que es dual de un espacio de Banach. Observemos además que cualesquiera sean $\alpha, \beta \in \mathcal{M}^1(G)$ y $f \in \overline{\mathcal{K}(G)}$ se verifica

$$|\langle \alpha * \beta , f \rangle| = \left| \iint_{G \times G} f(st)\, d\alpha(s)\, d\beta(t) \right| \leq$$

$$\leq \sup_{s \in G} \left| \int_G f(st)\, d\alpha(s) \right| \|\beta\| \leq \|f\| \, \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

y dividiendo ambos miembros por $\|f\|$ y tomando supremo resulta

$$\|\alpha * \beta\| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$$

⊠

I. 2. 4. -

En las hipótesis generales del parágrafo hemos supuesto que G sea localmente compacto y unimodular, a fin de asegurar la existencia de una (única a menos de un factor constante) medida de Haar invariante por traslaciones a izquierda y derecha. La importancia de este hecho para el tema concreto que tratamos en este parágrafo, reside en que ds nos permite identificar funciones con medidas, es decir considerar a los espacios funcionales como subespacios de los espacios de medidas anteriormente mencionados; y en esta forma queda automáticamente definida, a partir de (I. 2. 2) la convolución de una función con una medida, y de dos funciones. En efecto, sea f(s) localmente integrable, entonces es correcto identificarla a la medida $\mu_f$ que a cada $g \in \mathcal{K}(G)$ le asocia el número

$$\langle \mu_f , g \rangle = \int_G g(s)\, f(s)\, ds \qquad (A)$$

Observemos que esta aplicació n solo será biunívoca en ciertos espacios funcionales, ya que si h(s) es una función igual a f(s) salvo medida (de Haar) nula, entonces será $\mu_h = \mu_f$ . En adelante consideraremos a una función integrable $f$ indistintatmente, como función o como medida. Aplicando la invariancia de $ds$ y el teorema de Fubini resulta que

$$\langle g, f*\mu \rangle = \int_G \left[ \int_G g(tu)\, f(t)\, dt \right] d\mu(u) =$$

$$= \int_G \left[ \int_G g(s)\, f(su^{-1})\, ds \right] d\mu(u) = \int_G g(s) \left[ \int_G f(su^{-1}) d\mu(u) \right] ds$$

Lo que equivale a afirmar que la convolución de la función $f$ con la medida $\mu$ es una función dada por

$$(f * u)(t) = \int_G f(tu^{-1})\, d\mu(u) \qquad \text{(B)}$$

Análogamente será:

$$(\mu * f)(t) = \int_G f(u^{-1}t)\, d\mu(u) \qquad \text{(C)}$$

Es claro que solo podemos asegurar la existencia de las funciones definidas por (B) y (C) fijando adecuadas condiciones sobre $f$ y $\mu$. Sabemos que existirán si la función es localmente integrable y la medida tiene soporte compacto, o bien si $f \in L^1(G)$ y $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$. Luego estudiaremos este caso con más detalles. También podemos asegurar la existencia de $f * \mu$ y $\mu * f$ cualquiera sea $\mu$ si $f$ es integrable y con soporte compacto.

Finalmente, si consideramos que $\mu$ es también una medida con densidad $\mu_g$ es decir una función $g(s)$, resulta de (B) la clásica definición de la convolución de dos funciones, que por la invariancia de la medida de Haar $ds$ puede expresarse como

$$(f * g)(t) = \int_G f(ts^{-1})\, g(s)\, ds = \int_G f(s^{-1})\, g(t^{-1}s)\, ds = \int_G f(s)\, g(s^{-1}t)\, ds \qquad \text{(D)}$$

A continuación hemos agrupado algunos resultados muy necesarios referentes a la convolución de dos funciones o de una función con una medida.

## I.2.5.- LEMAS

A) Si $f, g \in L^1(G)$, entonces $f * g \in L^1(G) \cap \mathcal{C}(G)$ y además se verifica

$N_1(f * g) \leq N_1(f) \,.\, N_1(g)$ .

B) Si $f \in L^p(G)$ , $g \in L^q(G)$ con $p \geq 1$ , $q \geq 1$ , $p^{-1}+q^{-1} = 1$ entonces

$f * g \in L^{\infty}(G)$ y $N_{\infty}(f*g) \leq N_p(f) . N_q(g)$ .

C) Si $f, g \in L^2(G)$ , entonces $f * g \in L^2(G) \cap \mathscr{C}(G)$ .

D) Si $f \in L^p(G)$ , $g \in L^1(G)$ , entonces $f*g \in L^p(G)$ y además vale

$N_p(g*g) \leq N_p(f) . N_1(g)$ .

E) Si $f \in L^p(G)$ , $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ , entonces $f*\mu \in L^p(G)$ y además vale

$N_p(f*\mu) \leq N_p(f) . ||\mu||$ .

Omitiremos las demostraciones de A) , B) y C) que pueden consultarse en [6] o bien en [13]. Como veremos en la siguiente proposición, D) es un caso particular de E) . Solo nos resta entonces demostrar E) . Sea $h \in L^q(G)$ con $p^{-1}+q^{-1} = 1$ , entonces usando Fubini y Hölder, se verifica

$$\langle h , f*\mu \rangle = \int_G h(s)(f*\mu)(s)\, ds = \int_G h(s) \int_G f(st^{-1})\, d\mu(t) =$$

$$= \iint_{G\times G} h(s)f(st^{-1})d\mu(t)ds \leq ||\mu|| \iint_{G\times G} |h(s)f(st^{-1})|\, dsdt \leq ||\mu||\, N_q(h)\, N_p(f)$$

de donde se obtiene inmediatamente la tesis. ⊠

I. 2. 6. - PROPOSICION

$L^1(G)$ es un ideal bilátero en el álgebra $\mathcal{M}^1(G)$ .

Estrictamente, la demostración de esta proposición se reduce a reunir varias afirmaciones dispersas en el texto previo. Es conocido que $L^1(G)$ es un espacio de Banach con la norma $N_1$. Además si consideramos a cada función $f \in L^1(G)$ como medida, la norma de $\mathcal{M}^1(G)$ definida en I.2..3. coincide con la $N_1(f)$ . Mediante la identificación definida en I. 2. 4. (A) podemos considerar a $L^1(G)$ como subespacio del álgebra $\mathcal{M}^1(G)$ . Finalmente si observamos que la demostración de I. 2. 5. E. vale tanto para $f*\mu$ como para $\mu*f$ , haciendo $p = 1$ , resulta la tesis. ⊠

I. 2. 7. - LEMA

Sea $f \in \mathcal{K}(G)$ , entonces:

a) Si $\mu \in \mathcal{M}(G)$ , $f * \mu \in \mathcal{C}(G)$ .

b) Si $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ , $f * \mu \in \mathcal{C}(G) \cap L^1(G)$ .

c) Si $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ , $f * \mu \in \mathcal{K}(G)$ .

a) Sea sop $f = K$ compacto . Por la continuidad uniforme de $f$ , dado $\varepsilon > 0$ existe un entorno compacto $V$ del elemento neutro $e$ , tal que para todo $t \in G$ y cualquiera sea $s \in t.V = V'$ , vale $|f(t) - f(s)| \leq \varepsilon$ . Luego

$$|(f * \mu)(t) - (f * \mu)(s)| = \left| \int_G \left[ f(tu^{-1}) - f(su^{-1}) \right] d\mu(u) \right| \leq$$

$$\leq \int_G |f(tu^{-1}) - f(su^{-1})| \; d|\mu|(u) \leq \varepsilon \, |\mu|(K')$$

donde $K' = K^{-1}.V'$ es compacto. Luego $f * \mu$ es continua.

b) Resulta de a) , del hecho que $\mathcal{K}(G) \subset L^1(G)$ y de I. 2. 6.

c) Sea sop $f = K$ , sop $\mu = M$ , entonces resulta inmediatamente que sop $(f * \mu) \subset K.M$ compacto. ⊠

Observemos, que si bien en el lema precedente hemos demostrado los resultados para $f * \mu$ , los razonamientos pueden repetirse, mutatis mutandis, para $\mu * f$ .

I. 2. 8. -

En el espacio $\mathbb{C}^G$ de todas las funciones complejas definidas sobre $G$ , definimos los tres operadores

$$\bar{f}(s) = \overline{f(s)} \quad ; \quad \check{f}(s) = f(s^{-1}) \quad ; \quad \tilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})} \qquad \text{(A)}$$

Estos tres operadores son involutorios, y juntamente con la identidad $\iota$ forman grupo de acuerdo con la siguiente tabla:

| | $\iota$ | $-$ | $\vee$ | $\sim$ |
|---|---|---|---|---|
| $\iota$ | $\iota$ | $-$ | $\vee$ | $\sim$ |
| $-$ | $-$ | $\iota$ | $\sim$ | $\vee$ |
| $\vee$ | $\vee$ | $\sim$ | $\iota$ | $-$ |
| $\sim$ | $\sim$ | $\vee$ | $-$ | $\iota$ |

Ademas " $\vee$ " es lineal y los otros dos son antilineales, es decir

$$(\lambda f)^{-} = \bar{\lambda}\,\bar{f} \qquad \text{y} \qquad (\lambda f)^{\sim} = \bar{\lambda}\,\tilde{f}$$

Estos operadores tienen la importante propiedad de dejar invariantes a todos los espacios funcionales razonables. En particular, en $L^p(G)$ se verifica además que

$$N_p(f) = N_p(\check{f}) = N_p(\bar{f}) = N_p(\tilde{f}) \qquad \text{(C)}$$

Finalmente puede demostrarse muy fácilmente que cada vez que $f * g$ está bien definida se verifica

$$(f * g)^{-} = \bar{f} * \bar{g} \quad ; \quad (f * g)^{\vee} = \check{g} * \check{f} \quad ; \quad (f * g)^{\sim} = \tilde{g} * \tilde{f} \qquad \text{(D)}$$

I. 2. 9. -

La definición de estos operadores puede extenderse por dualidad a los espacios de medidas poniendo

$$\langle \bar{\mu}, f \rangle = \overline{\langle \mu, \bar{f} \rangle} = \int_G \overline{\bar{f}(s)\, d\mu(s)} \qquad \text{(A)}$$

$$\langle \check{\mu}, f \rangle = \langle \mu, \check{f} \rangle = \int_G \check{f}(s)\, d\mu(s) \qquad \text{(B)}$$

$$\langle \tilde{\mu}, f \rangle = \overline{\langle \mu, \tilde{f} \rangle} = \int_G \overline{\bar{f}(s^{-1})\, d\mu(s)} \qquad \text{(C)}$$

donde $\mu$ se toma en algún espacio de medidas, y $f$ recorre el espacio funcional cuyo dual topológico es dicho espacio de medidas. Estos operadores dejan invariantes también a los tres espacios de medidas considerados, es decir que si $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ entonces también $\check{\mu}, \bar{\mu}, \tilde{\mu} \in \mathcal{M}^c(G)$; análogamente para $\mathcal{M}^1(G)$ y $\mathcal{M}(G)$.

En particular, si $\mu \in \mathcal{M}^1(G)$ se verifica

$$\|\mu\| = \|\check{\mu}\| = \|\bar{\mu}\| = \|\tilde{\mu}\| \qquad \text{(D)}$$

Se prueba fácilmente que si $\mu_f$ es la medida con densidad asociada a $f$ por la identificación de I. 2. 4., entonces $\check{\mu}_f, \bar{\mu}_f, \tilde{\mu}_f$ serán las asociadas a $\check{f}$, $\bar{f}$, y $\tilde{f}$ respectivamente. En otras palabras, la definición de estos operadores en un espacio de medidas, dada por las fórmulas (A), (B) y (C), restringida a un espacio funcional por la mencionada identificación, coincide con la definición original de los mismos operadores para funciones dada por I. 2. 7. (A).

Finalmente, es posible probar, a partir de I. 2. 7. (D) que

$$(\mu * \nu)^{-} = \bar{\mu} * \bar{\nu} \quad ; \quad (\mu * \nu)^{\vee} = \check{\nu} * \check{\mu} \quad ; \quad (\mu * \nu)^{\sim} = \tilde{\nu} * \tilde{\mu} \tag{E}$$

I. 2. 10. -

Llamaremos $\mathcal{E}_s$ a la medida de Dirac concentrada en el punto $s$, definida por

$$\langle \mathcal{E}_s , f \rangle = \int_G f(t)\, d\,\mathcal{E}_s(t) = f(s) \tag{A}$$

Resulta inmediatamente

$$\langle \mathcal{E}_s * \mu , f \rangle = \iint_{G \times G} f(ut)\, d\,\mathcal{E}_s(u)\, d\mu(t) = \int_G f(st)\, d\mu(t) \tag{B}$$

$$\langle \mu * \mathcal{E}_s , f \rangle = \iint_{G \times G} f(ut)\, d\,\mathcal{E}_s(t)\, d\mu(u) = \int_G f(us)\, d\mu(u) \tag{C}$$

En particular será

$$\langle \mathcal{E}_s * \mathcal{E}_t , f \rangle = \int_G f(su)\, d\,\mathcal{E}_t(u) = f(st) = \langle \mathcal{E}_{st} , f \rangle$$

es decir que $\mathcal{E}_s * \mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{st}$ . De aquí resulta que si a cada $s$ asociamos el operador $T_s$ definido por

$$T_s \mu = \mathcal{E}_s * \mu \tag{D}$$

tendremos una representación de $G$ en cualquier espacio de medidas.

Convolucionando $\mathcal{E}_s$ con una función $f$ tendremos las funciones "trasladadas en $s$" de $f$ :

$$(\mathcal{E}_s * f)(t) = f(s^{-1}t) \quad ; \quad (f * \mathcal{E}_s)(t) = f(ts^{-1}) \tag{E}$$

Es inmediato demostrar que

$$\bar{\mathcal{E}}_s = \mathcal{E}_s \quad ; \quad \check{\mathcal{E}}_s = \mathcal{E}_{s^{-1}} \quad ; \quad \tilde{\mathcal{E}}_s = \mathcal{E}_{s^{-1}} \tag{F}$$

Por otra parte, si e es el elemento neutro de G ,resulta de inmediato que $\mathcal{E}_e$ es unidad para la convolución en cualquier espacio de medidas.

I.2.11.-

Estudiemos la relación entre el producto de convolución y el producto escalar de dualidad. Hemos visto en I.2.7. que si f es una función de $\mathcal{K}(G)$ y $\mu$ una medida acotada, $f*\mu$ es una función continua e integrable y en estas condiciones tiene sentido integrarla respecto de otra medida acotada $\nu$ , con lo que se obtiene

$$\langle f*\mu, \nu\rangle = \iint_{G\times G} f(st^{-1})d\mu(t)\, d\nu(s) = \iint_{G\times G} f(st)\, d\mu(t^{-1})\, d\nu(s) =$$

$$= \iint_{G\times G} f(st)\, d\check{\mu}(t)\, d\nu(s) = \langle f, \nu*\check{\mu}\rangle$$

Dicho brevemente, se verificará

$$\langle f*\mu, \nu\rangle = \langle f, \nu*\check{\mu}\rangle \quad ; \quad \langle \mu*f, \nu\rangle = \langle f, \check{\mu}*\nu\rangle \qquad \text{(A)}$$

Combinando este resultado con la última observación de I.1.9. resulta

$$\int_G f(t)\, d\mu(t) = \langle f, \mu\rangle = \langle f, \mathcal{E}_e*\mu\rangle = \langle f*\check{\mu}, \mathcal{E}_e\rangle = (f*\check{\mu})(e) \qquad \text{(B)}$$

interesante fórmula que expresa la integral de f respecto de $\mu$ como el valor en e de un producto de convolución. De (B) resulta la fórmula

$$(\check{\mu}*f)(e) = (\check{\mu}*f)^{\vee}(e) = (\check{f}*\mu)(e) = \langle \check{f}, \check{\mu}\rangle = \langle f, \mu\rangle \qquad \text{(C)}$$

De (B) ó (C) se concluye que, para toda $f\in L^2$ ,

$$\tilde{f}*f(e) = f*\tilde{f}(e) = (N_2(f))^2 \qquad \text{(D)}$$

I.2.12.- EJEMPLOS

A) Mediante el producto de convolución podemos estudiar más cómodamente las representaciones regulares de un grupo G y sus contragredientes, definidas en el párrafo anterior. Si G es finito o carece de topología, podemos considerar a las representaciones regulares como de G en $\mathbb{C}^G$ espacio vectorial de todas las funciones complejas sobre G , y quedarán definidas mediante

$$(R_s f)(t) = f(ts) = (f * \check{\mathcal{E}}_s)(t) = (f * \mathcal{E}_{s^{-1}})(t)$$

$$(R'_s f)(t) = f(s^{-1}t) = (\mathcal{E}_s * f)(t)$$

Existen dos representaciones contragredientes $\check{R}_s$ y $\check{R}'_s$ de G en $\mathcal{M}(G)$ que se pueden definir por

$$\check{R}_s \mu = \mu * \check{\mathcal{E}}_s = \mu * \mathcal{E}_{s^{-1}} \qquad ; \qquad \check{R}'_s \mu = \mathcal{E}_s * \mu$$

En efecto, por I. 2. 10 (A) tendremos

$$\langle \check{R}_s \mu, R_s f \rangle = \langle \mu * \check{\mathcal{E}}_s , f * \check{\mathcal{E}}_s \rangle = \langle \mu, f * \check{\mathcal{E}}_s * \mathcal{E}_s \rangle = \langle \mu, f \rangle$$

y análogamente para $R'_s$ y $\check{R}'_s$ .

B) Sea como antes G localmente compacto, y R su representación regular en el espacio $\mathcal{K}(G)$ , que ya hemos estudiado en I. 1. 15 C . Es inmediato verificar que la definición del ejercicio anterior coincide con la previa, si consideramos $f \in \mathcal{K}(G)$ . La contragrediente será una representación de G en el espacio $\mathcal{M}(G)$ y estará definida por

$$\check{R}_s \mu = \mu * \check{\mathcal{E}}_s = \mu * \mathcal{E}_{s^{-1}}$$

Ahora bien, sabemos que el soporte de $\mathcal{E}_{s^{-1}}$ es compacto (G es $T_1$ ), y como vimos en I. 2. 2. esa convolución está bien definida cualquiera sea $\mu$ y además es una medida, lo que asegura que la contragrediente está correctamente definida en esta forma.

C) Sea ahora G un grupo de Lie. Otro espacio funcional razonable es $\mathcal{E}(G)$ , espacio de las funciones indefinidamente diferenciables. Veamos que la aplicación $s \longrightarrow R_s$ definida como A) es la representación regular de G en $\mathcal{E}(G)$ . Por definición de grupo de Lie, la aplicación $h : t \longrightarrow ts$ del entorno V en el entorno $V' = V.s$ es indefinidamente diferenciable, y por lo tanto, si $f \in \mathcal{E}(V)$ entonces $R_s f = f.h \in \mathcal{E}(V')$ , como queríamos demostrar.

La contragrediente $\check{R}_s$ será una representación de G en $\mathcal{E}'(G)$ , espacio de las distribuciones con soporte compacto. Observemos que las igualdades I. 2. 10 (A) valen formalmente si

$f \in \mathcal{E}(G)$ , $\mu, \nu \in \mathcal{E}'(G)$ .

Es decir que si un miembro de dichas igualdades existe, entonces existe el otro y es igual al primero. Con estas hipótesis, la contragrediente, existiendo, estará definida como antes $\check{R}_s \alpha = \alpha * \varepsilon_{s^{-1}}$ .

En [11] se demuestra que $\mathcal{E}'(G)$ es cerrado para la convolución, y puesto que $\varepsilon_{s^{-1}} \in \mathcal{E}'(G)$ , la definición precedente es correcta.

Finalmente, como aplicación de I. 2. 11 (A) se obtiene un resultado que será de utilidad más adelante.

I. 2. 13. - LEMA

Si $\mu \in \mathcal{M}(G)$ es tal que $\mu * f \equiv 0$ cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$ , entonces $\mu$ es idénticamente nula.

Por I. 2. 7. a) sabemos que $\mu * f \in \mathcal{C}(G)$ . Entonces, si en I. 2. 11 (A) hacemos $\nu = \varepsilon_e$ , resulta $\langle \mu, f \rangle = 0$ para toda $f \in \mathcal{K}(G)$ .

--------

## § 3. - TOPOLOGIAS DE LOS ESPACIOS DE MEDIDAS

I. 3. 1. - NOTACION

En general mantendremos las hipótesis y notaciones del parágrafo anterior. Utilizaremos , sin mención expresa, la identificación de funciones y medidas estudiada en I. 2. 4. En otras palabras, consideraremos a los espacios funcionales como subespacios de los espacios de medidas . Llamaremos $\mathcal{Q}(G)$ al espacio de las medidas con soporte finito, esto es al espacio vectorial generado por las medidas $\{\varepsilon_s\}_{s \in G}$ de Dirac.

I. 3. 2. - DEFINICION

Llamaremos TOPOLOGIA VAGA de $\mathcal{M}(G)$ a $\sigma(\mathcal{M}(G), \mathcal{K}(G))$ .

En otras palabras, diremos que el filtro de medidas $\{\mu_\lambda\}$ converge en la topología vaga a la medida $\mu$ sii cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$, $\{\langle \mu_\lambda, f\rangle\}$ converge a $\langle \mu, f\rangle$. Por economía de lenguaje, diremos a menudo "límite vago", "clausura vaga", "vagamente denso", "converge vagamente", etc., con sentido obvio.

I. 3. 3. - TEOREMA

$\mathcal{Q}(G)$ es vagamente denso en $\mathcal{M}^c(G)$.

Observemos que el sentido del enunciado es que si $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$, entonces para toda $f \in \mathcal{K}(G)$ vale que.

$$\int_G f(s)d\mu(s) = \langle f, \mu\rangle = \lim \langle f, \sum_1^k c_i \mathcal{E}_{s_i}\rangle = \lim \sum_1^k c_i \langle f, \mathcal{E}_{s_i}\rangle = \lim \sum_1^k c_i f(s_i)$$

lo que en la recta R coincide con el concepto de "sumas de Cauchy" para definir la integral.

Observemos que una base de entornos de 0 en $\mathcal{M}^c(G)$ con la topología inducida por la vaga, está dada por los polares de los conjuntos finitos de $\mathcal{K}(G)$, es decir por los conjuntos de la forma

$$U_F = \{\mu \mid |\langle \mu, f\rangle| \leq 1 \quad \forall f \in F$$

donde F es un subconjunto finito arbitrario de $\mathcal{K}(G)$.

Para que se verifique la tesis es necesario y suficiente que cualquiera sea $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ y $F = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{K}(G)$ exista $\nu \in \mathcal{Q}(G)$ y tal que $\nu \in \mu + U_F$. Como F es una familia equicontinua (puesto que es finita), y $K = \operatorname{sop}\mu$ es compacto existe un cubrimiento finito de K, $\{W_i\}_{i=1,\ldots,k}$ tal que para toda $f_n \in F$ se verifique $\operatorname{OSC}_{W_i} f_n < 1/\|\mu\|_k$. Sea V un entorno compacto de K contenido en $W = \bigcup_i^k W_i$. Entonces, por la completa regularidad de G existe una función real $\varphi$ definida en G tal que:

a) $0 \leq \varphi \leq 1$ ;

b) $\varphi(K) = 1$ ;

c) $\varphi(\complement V) = 0$ .

Sea ahora $\{\psi_i\}$ una partición de la unidad (ver [1] Livre III, Ch. IX ) en G, subordinada al cubrimiento $\{W_1, \ldots, W_k, \complement V\}$ y llamemos $\varphi_i$ a las funciones $\varphi_i = \varphi . \psi_i$ .

Con estas hipótesis, si $s_i$ es un elemento arbitrario de $W_i$, como se cumple $\langle f_n, \mu \rangle =$ $= \sum_i \langle f_n \varphi_i, \mu \rangle$, sumando en $i$ resulta:

$$\left| \sum_1^k f_n(s_i) \langle \varphi_i, \mu \rangle - \langle f_n, \mu \rangle \right| \leq \left| \sum_1^k (\langle f_n(s_i) \varphi_i, \mu \rangle - \langle f_n \varphi_i, \mu \rangle ) \right|$$

$$\leq \sum_1^k \left| \langle (f_n(s_i) - f_n) \varphi_i, \mu \rangle \right| \leq \sum_1^k (\mathrm{osc}_{W_i} f_n) \langle \varphi_i, |\mu| \rangle \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|\mu\|} \sum_1^k \langle \varphi_i, |\mu| \rangle = \frac{1}{\|\mu\|} \langle \varphi, |\mu| \rangle \leq 1$$

y si llamamos $C_i = \langle \varphi_i, \mu \rangle$ y $\nu = \sum_1^k C_i \mathcal{E}_{s_i} \in \mathcal{Q}(G)$, hemos demostrado simplemente que $\left| \langle \nu - \mu, f_n \rangle \right| \leq 1$ cualquiera sea $f_n \in F$, es decir que $\nu \in \mu + U_F$. ⊠

I. 3. 4. - TEOREMA

Toda medida puntual $\mathcal{E}_{s_o}$ es límite vago de funciones de $\mathcal{K}(G)$ con soporte arbitrariamente próximo a $s_o$.

Es el clásico teorema de existencia de unidades aproximativas para la convolución. Solo daremos un esbozo de su demostración. La demostración rigurosa puede consultarse en [6] o bien en [11].

Sea $\{V_\lambda\}_{\lambda \in L}$ un filtro de entornos de $s_o$ que tiende a $\{s_o\}$. Podemos construir una familia de funciones $\{g_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de $\mathcal{K}(G)$ tales que verifiquen las siguientes condiciones

a) sop $g_\lambda \subset V_\lambda$

b) $g_\lambda(s) \geq 0 \quad \forall s \in G$

c) $\int_{V_\lambda} g_\lambda(s)\, ds = 1$ .

Es sencillo demostrar, con estas hipótesis que $\{g_\lambda\}$ tiende vagamente a $\mathcal{E}_{s_o}$. Es decir que, cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$ es

$$\langle f, g_\lambda \rangle = \int_G f(s)\, g_\lambda(s)\, ds \longrightarrow \langle f, \mathcal{E}_{s_o} \rangle = f(s_o) \quad .$$ ⊠

I. 3. 5. - COROLARIO

$\mathcal{K}(G)$ es vagamente denso en $\mathcal{M}^c(G)$ .

La demostración es inmediata a partir de I. 3. 3. y I. 3. 4. ⊠

En los tres lemas siguientes consideraremos a la convolución por una medida fija como una aplicación de un espacio de medidas o funciones en otro, y trataremos de dar condiciones para que esta aplicación sea continua. Por supuesto, en este tipo de consideraciones será esencial la topología que se atribuya al espacio funcional o de medidas en consideración. $\mathcal{M}(G)$ se estudiará munido de la topología vaga, mientras que $\mathcal{E}(G)$ tendrá la topología de la convergencia puntual y $\mathcal{K}(G)$ la topología límite inductivo de las topologías fuertes de los espacios de Banach $\mathcal{K}(G,A)$ de las funciones continuas con soporte contenido en un compacto fijo A (ver apéndice § 4. ).

I. 3. 6. - PROPOSICION

Sean $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{M}^c(G)$ . Entonces la aplicación de $\mathcal{M}(G)$ en sí mismo, $\mu \longrightarrow \nu_0 * \mu * \nu_1$ es vagamente continua.

Por I. 2. 10 (A) resulta que para cada $f \in \mathcal{K}(G)$ vale

$$\langle \nu_0 * \mu * \nu_1 , f \rangle = \langle \mu, \check{\nu}_0 * f * \check{\nu}_1 \rangle$$

y por I. 2. 7. c), $\check{\nu}_0 * f * \check{\nu}_1$ será una función de $\mathcal{K}(G)$ . ⊠

I. 3. 7. - PROPOSICION

Para toda $\mu \in \mathcal{M}(G)$ , la aplicación $f \longrightarrow f * \mu$ de $\mathcal{K}(G)$ en $\mathcal{E}(G)$ es continua.

Bastará que demostremos que para todo $s \in G$ , la aplicación $f \longrightarrow (f*\mu)(s)$ es continua en $\mathcal{K}(G)$ . Pero recordemos que

$$(f * \mu)(s) = \langle f * \mu , \varepsilon_s \rangle = \langle f , \check{\mu} * \varepsilon_s \rangle$$

Pero $\check{\mu} * \varepsilon_s$ es una medida, es decir una funcional lineal y continua. ⊠

I. 3. 8. - PROPOSICION

Para toda $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ la aplicación $f \longrightarrow f*\mu$ de $\mathcal{K}(G)$ en sí mismo es continua.

Bastará con que demostremos que para todo compacto $A \subset G$, la aplicación $f \longrightarrow f*\mu$ de $\mathcal{K}(G,A)$ en $\mathcal{K}(G)$ es continua. Ahora bien, como vimos en I. 2. 7., si $\text{sop}\,\mu = B$, entonces $f*\mu \in \mathcal{K}(G, A.B)$ donde $A.B$ es compacto. Además es fácil verificar que $\|f*\mu\| \leq \leq \|f\|\,.\|\mu\|$. ⊠

Observemos que estas dos proposiciones siguen valiendo si en lugar de considerar $f*\mu$ ponemos $\mu * f$. En particular, de I. 3. 8. resulta el siguiente corolario.

I. 3. 9. - COROLARIO

En el álgebra $\mathcal{K}(G)$, la convolución es separadamente continua. ⊠

Respecto a la continuidad de $f*g$ en ambas variables conjuntamente, no podemos afirmar nada sin imponer restricciones sobre $G$.

Hemos designado con $L^p(G)$ al espacio de las funciones complejas definidas en $G$ y que tienen su potencia $p$ integrable en la medida de Haar. Este espacio con la norma $N_p$ resulta ser un espacio de Banach. Trataremos de obtener un resultado análogo a I. 3. 4. que nos asegure la existencia de unidades aproximativas en $L^p(G)$. Previamente necesitamos el lema siguiente.

I. 3. 10. - LEMA

Para cada $f \in L^p(G)$ con $p \geq 1$, las aplicaciones de $G$ en $L^p(G)$, $s \longrightarrow \varepsilon_s * f$, $s \longrightarrow f*\varepsilon_s$ son continuas.

Por I. 2. 9. será suficiente con que demostremos la continuidad en el elemento neutro $e$ de $G$.

Sea primero $f \in \mathcal{K}(G)$. Entonces por la continuidad uniforme de $f$ resulta que para cada $\eta > 0$ existe un entorno $V$ de $e$ tal que

$$N_\infty(\varepsilon_s * f - f) < \eta \qquad \text{para todo } s \in V .$$

Pero $N_p \leq N_\infty$, luego también vale $N_p(\mathcal{E}_s * f - f) < \eta$ .

Sea ahora $f \in L^p(G)$ , existirá siempre $f' \in \mathcal{K}(G)$ tal que valga $N_p(f-f') < \eta$ . Si ahora recordamos que $N_p(\mathcal{E}_s * f) = N_p(f)$ para toda $f \in L^p(G)$ , entonces vale

$$N_p(\mathcal{E}_s * f - f) \leq N_p(\mathcal{E}_s * (f-f')) + N_p(\mathcal{E}_s * f' - f') + N_p(f-f') < 3\eta \qquad \boxtimes$$

I. 3. 11. - PROPOSICION

Sea $\mathcal{U} = \{U\}$ una familia fundamental de entornos compactos del elemento neutro de G . Existe una familia $\{h_u\}_{u \in \mathcal{U}}$ de funciones de $L^p(G)$ tales que para toda $f \in L^p(G)$ es $h_u * f \longrightarrow f$ en norma $N_p$ , según la base de filtro $\mathcal{U}$ .

Sea $\varphi_u$ la función característica de U , y $h_u = k(\varphi_u * \varphi_u)$ donde $k = N_1(\varphi_u * \varphi_u)^{-1}$

Resulta entonces que

a) $h_u \geq 0$ ;

b) $h_u$ es continua ;

c) sop $h_u \subset U^2$ ;

d) $N_1(h_u) = 1$ ;

e) $N_\infty(h_u) \leq 1$ .

Todos estos resultados se obtienen casi de inmediato. Sea $f \in L^p(G)$

$$N_p(h_u * f - f) = N_p\left[\int_G h_u(t)(\mathcal{E}_t * f)(s)\,dt - f(s)\right] =$$

$$N_p\left[\int_G h_u(t)(\mathcal{E}_t * f - f)(s)\,dt\right] = N_p\left(\int_{U^2} h_u(t)\left[(\mathcal{E}_t * f - f)(s)\right]dt\right) \leq$$

$$\leq \int_{U^2} N_\infty(h_u)\, N_p(\mathcal{E}_t * f - f)\,dt \leq \int_{U^2} N_p(\mathcal{E}_t * f - f)\,dt$$

Pero como $N_p(\mathcal{E}_t * f - f)$ es una función continua de t que se anula en e , puesto que $U^2$ es compacto (por serlo U ) resulta la tesis. $\boxtimes$

--------

## § 4.- APENDICE: INTEGRACION

Si $Y$ es un espacio topológico, llamamos, como ya se dijo $\mathscr{C}(Y)$ (resp.: $\bar{\mathscr{K}}(Y)$ ; $\mathscr{K}(Y)$) al espacio de las funciones complejas continuas (resp. continuas y nulas en el infinito - es decir, que tienden a $0$ según la base de filtro de los complementarios de compactos de $Y$ - ; nulas fuera de un compacto) definidas en $Y$ .

Si $A \subset Y$ , con $\mathscr{C}(Y,A)$ notaremos el sub-espacio de $\mathscr{C}(Y)$ de las funciones nulas fuera de $A$ .

Sea $X$ un espacio topológico localmente compacto.

1) Para cada compacto $K \subset X$ , $\mathscr{C}(X,K)$ admite una topología, $\mathscr{T}_K$ , como espacio de Banach con la norma $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} |f(x)|$ .

2) Sobre $\mathscr{K}(X)$ queda definida en forma natural una topología (localmente convexa para la estructura real subyacente), a saber el límite inductivo de las topologías $\mathscr{T}_K$

$$\mathscr{T}_L = \varinjlim \mathscr{T}_K$$

en la que $\mathscr{K}(X)$ es completo, si $X$ es numerable al infinito.

3) $\mathscr{K}(X)$ admite también una topología $\mathscr{T}_\infty$ de espacio vectorial normado: la inducida por la norma $N_\infty$ (convergencia uniforme).

4) $\mathscr{C}(X)$ admite una estructura de espacio vectorial localmente convexo con la topología $\mathscr{T}_c$ inducida por la familia de seminormas

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

donde $K$ es un compacto de $X$ (convergencia compacta).

Seguiremos llamando $\mathscr{T}_c$ a la topología inducida sobre el sub-espacio $\mathscr{K}(X)$ .

5) Los completados de $\mathscr{K}(X)$ con las topologías $\mathscr{T}_c$ y $\mathscr{T}_\infty$ son, como se comprueba fácilmente, canónicamente isomorfos a $\mathscr{C}(X)$ y $\bar{\mathscr{K}}(X)$ , el primero topologizado ($\mathscr{T}_c$) también mediante la misma familia $\{p_K\}$ de antes, y $\bar{\mathscr{K}}(X)$ (con una topología notada $\mathscr{T}_\infty$ ) mediante $N_\infty$ .

El primero es localmente convexo y el segundo un Banach.

6) Por definición, llamaremos MEDIDA sobre X a todo elemento del dual topológico de $\mathcal{K}(X)$ provisto de la topología $\mathcal{T}_L$ . Al espacio de las medidas: $(\mathcal{K}(X))'$ se lo nota generalmente $\mathcal{M}(X)$ . Si una medida es continua también para la topología $\mathcal{T}_\infty$ (resp. $\mathcal{T}_c$ ) se dice que es a cotada (resp. de soporte compacto ) y en ese caso se extiende, en forma única (y obvia) a una funcional $\mathcal{T}_\infty$-continua sobre $\overline{\mathcal{K}}(X)$ (resp. $\mathcal{T}_c$-continua sobre $\mathcal{C}(X)$ ).

De esta manera, el subespacio $\mathcal{M}^1(S)$ (resp. $\mathcal{M}^c(X)$ ) de las medidas acotadas (resp. de soporte compacto) es canónicamente isomorfo al dual topológico del espacio $\overline{\mathcal{K}}(X)$ (resp. $\mathcal{C}(X)$) con la topología $\mathcal{T}_\infty$ (resp. $\mathcal{T}_c$)

7) Si X es numerable al infinito ( [1] , Liv. III) (por ejemplo un grupo topológico con una cantidad numerable de componentes conexas), $\mathcal{C}(X)$ con $\mathcal{T}_c$ es localmente convexo, completo y metrizable, es decir un Frechet.

8) Como los espacios de medidas (cualesquiera, acotadas y de soporte compacto) son isomorfos a duales de espacios localmente conexos, pueden a su vez ser topologizados mediante las topologías fuertes del dual ( [1] , Liv. V, chap. IV). En particular $\mathcal{M}^1(X)$ es, con su topología fuerte, un Banach (de norma notada $\| \ \|_1$ ). Ya hemos usado esta topología frecuentemente (I. 2. 3. en adelante).

9) La noción intuitiva de soporte ("soporte de la masa de la medida") no es hostigada por nuestra audaz nomenclatura para $\mathcal{M}^c(X)$ , debido a que es válida la siguiente proposición:

I. 4. 1. - PROPOSICION

Una medida $\mu$ es de soporte compacto (es decir $\mu \in \mathcal{M}^c(X)$ ) si y solamente si existe $K \subset X$ , compacto, tal que $\mu$ se anula sobre $\mathcal{C}(X, X-K) \cap \mathcal{K}(X)$.

En efecto, si $\mu \in \mathcal{M}^c(X)$ , es continua en la topología $\mathcal{T}_c$ , lo que sólo ocurre si para algún compacto $J \subset X$ , vale:

$$|\langle f, \mu \rangle| \leq k\, p_J(f)$$

para algún k real y positivo y toda f .

Pero si K es un entorno compacto de J (que existe por ser X localmente compacto), como $p_J$ se anula en $\mathcal{C}(X, X-K)$ , también debe anularse $\mu$ .

La recíproca resulta de la existencia (que se puede demostrar con recursos elementales de topología general: completa regularidad de compactos y sistemas fundamentales de entornos de compactos en espacios localmente compactos) de una función $f \in (X)$ , a valores reales, tal que

$$o \leq f \leq 1$$

$$f = o \quad \text{en} \quad X - H$$

$$f = 1 \quad \text{en} \quad K$$

donde H es un entorno compacto de K . En efecto, si $h_a \longrightarrow 0$ en $\mathcal{T}_c$ , $h_a f \longrightarrow 0$ en $\mathcal{T}_L$ y por lo tanto

$$\langle h_a , \mu \rangle = \langle h_a f , \mu \rangle \longrightarrow 0$$

de manera que $\mu$ es continua en $\mathcal{T}_c$ . ⊠

--------------

# CAPITULO II

## ALGEBRAS GRUPALES

La estructura algebraica de un grupo no es lineal, y por lo tanto tampoco lo es el problema de sus representaciones. La experiencia matemática enseña que es más cómodo y fructífero trabajar con aplicaciones lineales. A lo largo de este capítulo intentaremos "linealizar" el problema de las representaciones de un grupo. Para lograr este objeto, sumergiremos el grupo G en un conjunto más amplio, munido, además de la estructura multiplicativa de G, de una estructura de espacio vectorial, más precisamente, en un álgebra, que designaremos como "algebra grupal de G". En los capítulos subsiguientes obtendremos importantes resultados referentes a las representaciones de G, a través de las representaciones del álgebra grupal. Observemos que no daremos métodos para asociar canónicamente a cualquier grupo G una determinada álgebra grupal, sino que en cada caso elegiremos, por definición, el álgebra grupal más conveniente, a fin de asegurar la relación más estrecha posible entre las representaciones del grupo y las del álgebra grupal. Así, en el parágrafo 1, definiremos como álgebra grupal de un grupo localmente compacto a un álgebra de medidas, mientras que en el segundo parágrafo, para el caso de grupos de Lie, elegiremos un álgebra de distribuciones.

## § 1.- ALGEBRA GRUPAL DE UN GRUPO LOCALMENTE COMPACTO

### II.1.1.- NOTACION

Designaremos con G a un grupo topológico localmente compacto y unimodular (si además G tiene una estructura diferenciable no se la considera aquí. En ese caso el camino que seguiremos para construir un álgebra grupal para G es otro y está expuesto en nuestro próximo parágrafo.) Mantendremos, en general, las definiciones y notaciones del capítulo anterior, en particular la identificación de funciones con medidas, estudiada en el segundo parágrafo del Capítulo I, que usaremos sin necesidad de expresa mención.

II. 1. 2. - DEFINICION

Sea A un álgebra con una topología compatible con su estructura de grupo aditivo, y E un espacio vectorial topológico, ambos sobre el cuerpo K . Llamaremos REPRESENTACION de A en E a todo homomorfismo algebraico T de A en el álgebra $\mathcal{End}(E)$ de los endomorfismos continuos de E . Dada una topología $\mathcal{C}$ de $\mathcal{End}(E)$ , diremos que T es $\mathcal{C}$-COMPATIBLE si es un homomorfismo continuo en $\mathcal{C}$ .

Es decir que T será una aplicación que a cada elemento $z \in A$ asocia un operador continuo $T_z$ en E de forma que se verifique:

$$T_{zz'} = T_z \circ T_{z'} \quad ; \quad T_{z+z'} = T_z + T_{z'} \quad ; \quad T_{\lambda z} = \lambda T_z \quad (\lambda \in K)$$

Aún cuando no estudiaremos especialmente la compatibilidad o no compatibilidad de las representaciones de álgebras, consideraremos, salvo mención expresa, a $\mathcal{End}(E)$ dotada de la topología puntual fuerte de operadores, definida en el capítulo anterior para $\mathcal{L}(E)$ .

La mayoría de los conceptos relacionados con representaciones de grupos, definidos en el Capítulo I, pueden aplicarse mutatis mutandis a las representaciones de álgebras, luego no se justifica que los volvamos a definir en este caso.

II. 1. 3. - DEFINICION

Llamaremos ALGEBRA GRUPAL de G al álgebra $\mathcal{M}^c(G)$ de las medidas sobre G con soporte compacto, con las operaciones de suma habitual y producto de convolución.

Evidentemente, cuando G sea compacto, el álgebra grupal será $\mathcal{M}(G)$ .

Observemos que no hemos especificado la topología del álgebra grupal. Generalmente la consideraremos dotada de la topología vaga restringida, que según I. 3. 9. induce en G la topología inicial.

II. 1. 4. - PROPOSICION

Sea $G$ un grupo finito. Entonces existe una correspondencia biunívoca entre las representaciones de $G$ y las de su álgebra grupal, que conserva el espacio de representación.

Es éste el caso clásico. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{C}[G]$ de las combinaciones lineales formales, con coeficientes complejos, de los elementos de $G$. Observemos que hay un isomorfismo de álgebras entre $\mathcal{M}(G)$ con la convolución, y $\mathbb{C}[G]$ con el producto formal. En efecto, asociando a cada $s$ la medida de Dirac $\mathcal{E}_s$, vemos que toda $\mu$ perteneciente a $\mathcal{M}(G)$ queda definida dados sus valores en cada $s \in G$. En otras palabras, podemos expresar

$$\mu = \sum_{s \in G} \mu(s)\ \mathcal{E}_s$$

La suma y producto por escalar se corresponden con las mismas operaciones en $\mathbb{C}[G]$, así como la convolución de dos elementos simples $\mathcal{E}_s$ y $\mathcal{E}_t$ (ver I. 2. 9.). Pero entonces por linealidad, la convolución se conserva para cualquier par de medidas, lo que significa que $\mathcal{M}(G)$ y $\mathbb{C}[G]$ son efectivamente isomorfos.

Dada una representación $s \longrightarrow T_s$ de $G$ en $E$, definimos la aplicación $T^{\#}$ que a cada $\mu \in \mathcal{M}(G)$ asocia el operador

$$T^{\#}_{\mu} = \sum_{s \in G} \mu(s)\ T_s$$

que será una combinación lineal de automorfismos continuos de $E$, es decir un endomorfismo continuo de $E$. Es inmediato verificar que $T^{\#}$ es una representación de $\mathcal{M}(G)$ en $E$.

Recíprocamente, dada una representación $U$ de $\mathcal{M}(G)$ en $E$, asociamos a cada $s$ $G$ el operador $U'_s = U_{\mathcal{E}_s}$. Para verificar que $s \longrightarrow U'_s$ es una representación de $G$ en $E$, basta comprobar que cualquiera sea $s \in G$, $U'_s$ es un automorfismo de $E$. Pero esto es inmediato ya que $(U'_s)^{-1} = U'_{s^{-1}}$. ∎

II. 1. 5. - PROPOSICION

Dada una representación $U$ del álgebra grupal $\mathcal{M}^c(G)$ en $E$, podemos asociarle canónicamente una representación $U'$ de $G$ en $E$.

Hemos quitado aquí la hipótesis adicional de finitud para $G$, manteniendo las hipótesis generales de local compacidad y unimodularidad. Sin embargo, la demostración coincide con la segunda parte de la proposición precedente. En efecto, basta asociar a cada $s$ $G$ el operador $U'_s = U_{\mathcal{E}_s}$ que como ya vimos es un automorfismo continuo de $E$. Además

$$U'_{st} = U_{\mathcal{E}_{st}} = U_{\mathcal{E}_s * \mathcal{E}_t} = U_{\mathcal{E}_s} \circ U_{\mathcal{E}_t} = U'_s \circ U'_t \qquad \blacksquare$$

Recíprocamente, dada una representación de $G$ en $E$, podremos construir canónicamente una representación de $\mathcal{M}^c(G)$ en $E$. Sin embargo esto no se obtiene tan inmediatamente como en el caso finito. Analizaremos primero el caso particular en que $E$ es de Banach, y luego estudiaremos un caso más general, imponiendole a $E$ algunas restricciones pero mucho más débiles.

II. 1. 6. - PROPOSICION

Sea $T$ una representación de $G$ en el espacio de Banach $E$, compatible con la topología puntual fuerte de $\mathcal{GL}(E)$. Entonces es posible construir una representación de $\mathcal{M}^c(G)$ en $E$, canónicamente asociada a $T$.

Dada $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$, y cualquiera sea $x$ $E$, definimos

$$T^{\#}_{\mu}\, x = \int_G (T_s\, x)\, d\mu(s) \qquad (')$$

Esta definición tiene sentido, ya que es la integral sobre $G$ de una función vectorial continua, respecto de una medida $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ (ver [1] Livre VI, Ch. III). Además, por la linealidad de la integral, es evidente que $T^{\#}$ respeta la estructura vectorial de $E$. Por otra parte, si $\mu, \nu \in \mathcal{M}^c(G)$, entonces

$$T^{\#}_{\nu}\,(T^{\#}_{\mu}\, x) = T^{\#}_{\nu}\left[\int_G (T_s\, x)\, d\mu(s)\right] = \int_G T_t\left[\int_G (T_s\, x)\, d\mu(s)\right] d\nu(t) =$$

$$= \iint_{G\times G} (T_{ts}\, x)\, d\nu(t)\, d\mu(s) = T^{\#}_{\nu * \mu}\, x$$

Bastará entonces que demostremos que $x \longrightarrow T^{\#}_{\mu} x$ es continuo cualquiera sea $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$, para que $T^{\#}$ sea una representación de $\mathcal{M}^c(G)$ en E . Sea sop $\mu = K$ , entonces se verifica que:

$$\| T^{\#}_{\mu} x \| = \| \int_G (T_s x) \, d\mu(s) \| \leq \int^{*}_G \| T_s x \| \, d|\mu|(s) \leq$$

$$\leq \|x\| \int^{*}_G \| T_s \| \, d|\mu|(s) \qquad ('')$$

Pero K es compacto, y por la compatibilidad de T , el conjunto $\{T_s\}_{s \in K}$ es compacto en $\mathcal{G}\mathcal{L}(E)$ luego puntualmente acótado, y por el teorema de Banach-Steinhaus es fuertemente acotado, es decir que existe una constante $C_K$ tal que valga $\|T_s\| \leq C_K$ cualquiera sea $s \in K$ , y sustituyendo en ('') resulta

$$\| T^{\#}_{\mu} x \| \leq C_K \, \|\mu\|_K \, \|x\| \qquad \boxtimes$$

II. 1. 7. - DEFINICION

Sea T una representación de un grupo localmente compacto G en un espacio vectorial topológico E . Diremos que T es PRACTICABLE si el espacio E es tonelado y además para cada $x \in E$ y cada compacto K de G , el conjunto de los elementos $T_s x$ , para $s \in K$ , está contenido en un compacto convexo de E .

Esta condición se satisface automáticamente para toda representación cuando E es tonelado y casi-completo. En lo que sigue se verá la naturalidad de esta definición.

II. 1. 8. - PROPOSICION

Sea T una representación de G en E , practicable y compatible con la topología puntual fuerte de $\mathcal{G}\mathcal{L}(E)$ . Podemos entonces construir una representación $T^{\#}$ de $\mathcal{M}^c(G)$ en E , asociada canónicamente a T , y que verifique $T^{\#}_{\varepsilon_s} = T_s$ , $\forall s \in G$ .

Es una generalización de II. 1. 6. Definimos $T^{\#}_{\mu} x$ como en (') de II. 1. 6. La primera parte de la demostración coincide exactamente con dicha proposición. Solo diferimos en la demostra - ción de la con tinuidad de la aplicción $x \longrightarrow T^{\#}_{\mu} x$ . La familia $\{T_s\}_{s \in K}$ es acotada puntual mente y la practicabilidad asegura que podemos seguir aplicando el teorema de Banach-Steinhaus. Entonces cualesquiera sean $x_0 \in E$ , K ( = soporte de $\mu$ ) compacto en G , $\mathcal{E}$ real positivo y p , seminorma continua sobre E , existe un entorno V de $x_0$ tal que

$$p\,(T_s x - T_s x_0) < \mathcal{E}$$

para todo $s \in K$ y todo $x \in V$ , de donde resulta

$$p\,\Big(\int_K (T_s x - T_s x_0)\, d\mu(s)\Big) \leq \int_K p(T_s x - T_s x_0)\, d|\mu|(s) \leq \mathcal{E}\, \|\mu\|$$

lo que implica la continuidad de $T^{\#}_{\mu}$ . ⊠

Dada una representación T de G en E , si podemos construir como en II. 1. 6. o bien II. 1. 8 la representación $T^{\#}$ de $\mathcal{M}^c(G)$ en E , y luego obtenemos según II. 1. 5. una representa - ción $(T^{\#})'$ de G en E , entonces es superfluo observar que $(T^{\#})'$ coincide con T .

Observemos que $\mathcal{K}(G)$ puede considerarse como subálgebra de $\mathcal{M}^c(G)$ . Tiene sentido en- tonces hablar de la restricción de $T^{\#}_f$ a $\mathcal{K}(G)$ que notaremos con $f \longrightarrow T^{\#}_f$ .

II. 1. 9. - PROPOSICION

Sea T una representación practicable de G en E , y F un subespacio ce- rrado de E . Entonces son equivalentes

a) F es invariante para T .

b) F es invariante para $T^{\#}$ .

c) F es invariante para $f \longrightarrow T^{\#}_f$ -

a) $\Longrightarrow$ b) : Sea $F^{\perp}$ el subespacio de E' ortogonal a F . Entonces si $x \in F$ , $x' \in F^{\perp}$ , cualquiera sea $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$ se verifica

$$\langle T^{\#}_{\mu} x, x' \rangle = \int_G \langle T_s x, x' \rangle\, d\mu(s) = 0$$

ya que $\langle T_s x, x' \rangle = 0$ cualquiera sea $s \in G$ puesto que por hipótesis $T_s x \in F$ . Entonces

$T^{\#}_{\mu} x \in (F^{\perp})^{\perp} = \bar{F} = F$ .

b) $\Longrightarrow$ c) : Inmediato.

c) $\Longrightarrow$ a) : Por el teorema I.1.4. , cualquiera sea $t \in G$ es $\mathcal{E}_t$ límite vago de $g_{\alpha} \in \mathcal{K}(G)$; y por lo tanto, si $x \in F$ , $x' \in F^{\perp}$ se verifica

$$\langle T_t x , x' \rangle = \langle T^{\#}_{\mathcal{E}_t} x , x' \rangle = \int_G \langle T_s x , x' \rangle \, d\,\mathcal{E}_t(s) =$$

$$= \lim_{\alpha} \int_G \langle T_s x , x' \rangle \, g_{\alpha}(s)\, ds = \lim_{\alpha} \langle T^{\#}_g x , x' \rangle = 0$$

es decir que $T^{\#}_{\mu} x \in (F^{\perp})^{\perp} = \bar{F} = F$ . ⊠

II.1.10.- COROLARIO

Una representación practicable T de G en E es topológicamente irreducible sii lo es $T^{\#}$ .

Es inmediato ya que por la proposición anterior los subespacios cerrados invariantes coinciden.

⊠

Supongamos que G sea compacto. Entonces el álgebra grupal será $\mathcal{M}(G)$ y todos los espacios funcionales "razonables" pueden considerarse como subrspacios de $\mathcal{M}(G)$ . En particular como veremos en el Capítulo IV , $L^2(G)$ será subálgebra de $\mathcal{M}(G)$ y tendrá sentido considerar la restricción de $\mu \longrightarrow T^{\#}_{\mu}$ a $L^2(G)$ . Como más adelante usaremos ampliamente esta subálgebra, designaremos con $f \longrightarrow T^{\#\#}_f$ a dicha restricción.

II.1.11.- PROPOSICION

Sea G compacto, T una representación practicable de G en E , $T^{\#}$ y $T^{\#\#}$ ya definidas. La irreducibilidad topológica de una cualquiera de estas representaciones implica la de las otras dos.

La proposición resulta inmediatamente de II.1.9. si recordamos que $\mathcal{K}(G) = \mathcal{C}(G)$ es denso en $L^2(G)$ .

II. 1. 12. - PROPOSICION

Sea $G$ un grupo compacto y $T$ y $U$ dos representaciones practicables de $G$ en $E$. La semejanza de cualquier par $T, U$; $T^{\#}, U^{\#}$; $T^{\#\#}, U^{\#\#}$ implica la de los otros dos pares.

La demostración, inmediata, queda a cargo del lector. ☒

II. 1. 13. - PROPOSICION

Sea $G$ un grupo compacto y $T$ una representación de $G$ en $E$ practicable y compatible con la topología puntual fuerte de $\mathrm{End}_C(E)$. Entonces la representación $T^{\#} : \mathcal{M}(G) \longrightarrow \mathrm{End}(E)$ es continua para la topología vaga en $\mathcal{M}(G)$ y puntual débil en $\mathrm{End}_C(E)$. En particular $T^{\#\#}$ es continua para la norma de $L^2(G)$ y topología puntual débil de $\mathrm{End}_C(E)$.

NOTA: En lo que sigue suprimiremos los símbolos $\#$ y $\#\#$ salvo cuando haya lugar a confusión.

------------

§ 2. - ALGEBRA GRUPAL DE UN GRUPO DE LIE

II. 2. 1. - NOTACION

Sea ahora $G$ un grupo de Lie. Tiene sentido ahora definir el espacio $\mathcal{E}(G)$ de las funciones sobre $G$ indefinidamente diferenciables, con la topología de Schwartz (ver [11]). El espacio dual $\mathcal{E}'(G)$ es por definición el espacio de las distribuciones con soporte compacto. No corresponde que hagamos aquí la teoría de la convolución entre distribuciones. El lector interesado puede consultar [2] donde constatará que $\mathcal{E}'(G)$ es un álgebra con el producto de convolución. Usaremos frecuentemente la notación de Schwartz:

$$\int_G f(s)\, d\alpha(s) = \langle f, \alpha \rangle \qquad f \in \mathcal{E}(G) \; ; \; \alpha \in \mathcal{E}'(G)$$

No utilizaremos resultados referentes a distribuciones vectoriales. Es obvio que todos los sig nos de derivación que aparecen en este parágrafo son respecto de la variable en G . En caso de ambigüedad pondremos como subíndice la variable de derivación. Se utiliza en este parágrafo un teorema de aproximación análogo al I. 3. 4. cuyo enunciado es: "Toda medida puntual $\mathcal{E}_s$ es límite vago de medidas $\mu_{f_\lambda} = f_\lambda(s)\,ds$ con $f_\lambda \in \mathcal{D}(G)$ (espacio de las funciones de $\mathcal{E}(G)$ con soporte compacto)". La demostración de éste resultado para $G = R^n$ puede consultarse en [11], Ch. 1. La demostración general se reduce a este caso tomando un entorno de t en G suficientemente pequeño para que sea isomorfo a un abierto de $R^n$.

## II. 2. 2. - DEFINICION

Sea G un grupo de Lie. Llamaremos ALGEBRA GRUPAL de G al álgebra $\mathcal{E}'(G)$ de las distribuciones con soporte compacto, con las operaciones de suma habitual y producto de convolución.

Dada una representación T de G en E , debemos definir una representación $T^\#$ del álgebra grupal en E . Con el precedente del parágrafo anterior, podemos definir formalmente

$$T_\alpha x = T^\#_\alpha x = \int_G (T_s x)\, d\alpha(s)$$

pero esta definición no tiene sentido ya que $s \longrightarrow T_s x$ no es una función numérica sobre G sino vectorial. Esto puede subsanarse haciendo

$$\langle T_\alpha x , x' \rangle = \int_G \langle T_s x , x' \rangle \, d\alpha(s) \qquad x' \in E' \qquad (')$$

siempre que la función (numérica) $s \longrightarrow \langle T_s x , x' \rangle$ pertenezca a $\mathcal{E}(G)$ cualquiera sea $x \in E$ y $x' \in E'$ . Aún en este caso solo podríamos asegurar que T pertenece a Hom $(E, E'^*)$, es decir que en general no será una representación del álgebra grupal. Debemos entonces restringir el espacio de representación.

## II. 2. 3. - LEMA (GARDING)

Si T es una representación compatible de G en E , existe un subespacio denso $E^o$ , tal que si $x \in E^o$ , entonces la función vectorial $x \longrightarrow T_s x$ es indefinidamente diferenciable

Consideremos el siguiente subconjunto de $E$ :

$$H = \left\{ T_f x = \int_G (T_s x) f(s) ds \;\middle|\; x \in E \;,\; f \in \mathcal{D}(G) \right\}$$

Designaremos con $E^o$ al subespacio generado por $H$ . Veamos que los vectores de $E^o$ verifican la tesis. Bastará que lo verifiquemos para los vectores de $H$ , ya que por la linealidad de la representación y de la derivación, el resultado se extenderá a todo $E^o$ . Sea $b \in H$ . Entonces

$$T_t b = \int_G T_t (T_s x) f(s) ds = \int_G (T_{ts} x) f(s) ds = \int_G (T_s x) f(t^{-1}s) ds$$

Si $f$ tiene soporte contenido en el dominio de un mapa, puede ser considerada como definida en un abierto $U$ de $R^n$ . La medida $ds$ corresponde (mediante dicho mapa) a una medida sobre $U$ con densidad (llamemos $\phi$ , por ejemplo) indefinidamente diferenciable respecto de la de Lebesgue de $R^n$ (Chevalley, cap. V). Si $t$ varía también en el dominio de un mapa, la expresión (abuso de lenguaje: $s, t$ variables en $R^n$ ):

$$\int T_s x \;\; f(t^{-1}s) \; \phi (s) \; dR^n$$

es indefinidamente diferenciable con respecto al parámetro $t$ .

En el caso general (soporte de $f$ = compacto cualquiera ), una partición indefinidamente diferenciable de la unidad reduce el problema al que acabamos de tratar.

Veamos ahora que $E^o$ es denso en $E$ . Sea $x$ $E$ arbitrario. Siempre podemos escribir $x = T_{\mathcal{E}_e} x$ . Además, por el resultado mencionado en II. 2. 1. podemos expresar $\mathcal{E}_e$ como límite vago de $f_\lambda$ en $\mathcal{E}'(G)$ . Pero entonces $x_\lambda = T_{f_\lambda} x$ tiende a $T_{\mathcal{E}_e} x = x$ , y como todos los $x_\lambda$ pertenecen a $H$ resulta que $E = \overline{H} \subset \overline{E^o} \subset E$ .

<u>II. 3. 4. - LEMA</u>

<u>Sea $T$ una representación compatible de $G$ en $E$ completo. Entonces el subespacio de Garding $E^o$ correspondiente a $T$ es invariante para los operadores $T_\alpha$ con $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$ .</u>

Por el lema anterior la función numérica $s \longrightarrow \langle T_s x \,,\, x' \rangle$ pertenece a $\mathcal{E}(G)$ y por lo tanto la definición:

$$\langle T_\alpha x \,,\, x' \rangle = \int_G \langle T_s x \,,\, x' \rangle \, d\alpha(s)$$

tiene sentido y podemos asegurar que $T_\alpha \in \mathrm{Hom}\,(E, E'^*)$ .

Por la completitud de $E$ sabemos que la función $u : x' \longrightarrow \langle T_\alpha x \,,\, x' \rangle$ será de la forma $x' \longrightarrow \langle y, x' \rangle$ con $y \in E$ sii $u$ es débilmente continua sobre todo conjunto equicontinuo de $E'$ (ver [1] , Livre V, Ch. VI, § 3, Ex. 3-d ). Sea entonces $B$ un subconjunto equicontinuo de $E'$, y sea $x'_\lambda \in B$ y $x'_\lambda \longrightarrow x'$ débilmente. Sea $x \in E^o$ arbitrario. Entonces, por el lema anterior, para todo índice de derivación $\nu$ es $D^\nu T_s x$ una función continua y lineal en $x$ , luego vale

$$D^\nu \langle T_s x \,,\, x'_\lambda \rangle = \langle D^\nu T_s x \,,\, x'_\lambda \rangle \longrightarrow \langle D^\nu T_s x \,,\, x' \rangle = D^\nu \langle T_s x, x' \rangle \qquad (')$$

uniformemente en todo compacto contenido en una carta fija de $G$ .

En efecto, es inmediato que $D^\nu \langle T_s x \,,\, x' \rangle = \langle D^\nu T_s x \,,\, x' \rangle$ , y si $K = \mathrm{sop}\,\alpha$ será $\{ D^\nu T_s x \mid s \in K \}$ un compacto en $E$ , y por la equicontinuidad de $B$ se verifica (') . Pero según la topología de $\mathcal{E}(G)$ , esto implica que

$$\int_G \langle T_s x \,,\, x'_\lambda \rangle \, d\alpha(s) \longrightarrow \int_G \langle T_s x \,,\, x' \rangle \, d\alpha(s)$$

luego $T_\alpha x \in E$ , es decir que $T_\alpha \in \mathrm{Hom}\,(E^o, E)$ .

Demostremos finalmente la invariancia de $E^o$ . Por la linealidad de $T_\alpha$ será suficiente con que demostremos la invariancia de $H$ . Sea entonces $b = T_f\, a \in H$ , y calculemos

$$T_\alpha\, b = \int_G T_t \left[ \int_G (T_s\, a)\, f(s)\, ds \right] d\alpha(t) = \int_G \int_G (T_t (T_s\, a)) f(s) ds\, d\alpha(t) =$$

$$= \int_G \int_G (T_s a) f(t^{-1}s) ds\, d\alpha(t) = \int_G (T_s a) \left[ \int_G f(t^{-1}s) d\alpha(t) \right] ds = \int_G (T_s a) g(s) ds$$

donde $g(s) = (\alpha * f)(s) \in \mathcal{D}(G)$ (ver [11] , Ch. VI ) y por lo tanto

$$T_\alpha (T_f\, a) = T_g\,(a) \in H$$ ⊠

II. 2. 5. - TEOREMA

Dada una representación practicable $T$ de $G$ en $E$ completo, podemos

<u>construir una representación $\alpha \longrightarrow T_\alpha$ de $\mathcal{E}'(G)$ en el subespacio de Garding $E^o$ , asociada canónicamente a $T$ .</u>

En el lema anterior hemos visto que $T_\alpha \in \mathrm{End}(E^o)$ cualquiera sea la distribución $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$. Entonces solo nos falta verificar que la aplicación $\alpha \longrightarrow T_\alpha$ respeta la estructura algebraica de $\mathcal{E}'(G)$ . Que respeta la linealidad es inmediato por definición. Veamos entonces que se verifica $T_{\alpha*\beta} = T_\alpha \circ T_\beta$ . En efecto

$$\langle T_\alpha(T_\beta x), x'\rangle = \int_G\int_G \langle T_s(T_t x), x'\rangle \, d\alpha(s)d\beta(t) =$$

$$= \int_G\int_G \langle T_{st}x, x'\rangle \, d\alpha(s)\, d\beta(t) = \int_G \langle T_u x, x'\rangle \, d(\alpha*\beta)(u) = \langle T_{\alpha*\beta}x, x'\rangle$$

∎

<u>II.2.6. - EJEMPLO</u>

Analicemos un ejemplo en que $E^o$ es un subespacio propio de $E$ . Sea $G = U$ el grupo de Lie de los complejos de módulo 1 , con la operación de producto habitual. $U$ es compacto y abeliano. Sea $s \longrightarrow R_s$ la representación regular de $U$ en $\mathcal{E}(U)$ , definida como en I.2.11. El álgebra grupal será $\mathfrak{D}(U)$ , y el subespacio de Garding $E^o$ será el subespacio generado por el conjunto $H$ de las funciones $h$ de la forma:

$$h(t) = (R_g f)(t) = \int_U (R_s f)(t)\, g(s)\, ds = \int_U f(st)\, g(s)\, ds = (f * \check{g})(t)$$

con $g \in \mathcal{D}(U)$ , y por lo tanto $H \subset \mathcal{D}(U)$ , y también $E^o \subset \mathcal{D}(U)$ , luego es un subespacio propio de $\mathcal{E}(U)$ .

=============

========

## CAPITULO III

## MODULOS Y ANILLOS SIMPLES Y SEMI-SIMPLES

"Hasta cuándo, oh simples!
amaréis la simpleza?"
Prov. 1.22.

Este Capítulo es independiente del resto de la obra (salvo el parágrafo 1) y puede considerarse como una exposición detallada de los prerrequisitos algebraicos necesarios para su comprensión. Al comienzo de algunos parágrafos se mencionará en qué parte exactamente serán utilizados (por primera vez) los conceptos en ellos introducidos o estudiados .

Se supondrá conocida la teoría general de módulos sobre un anillo no conmutativo dual, producto tensorial) que se encuentra en [1], Liv. II. Chap II y Chap III . Salvo expresión en contrario, todas las álgebras que intervienen en este capítulo son álgebras sobre $\mathbb{C}$ . Desde el parágrafo 3 (inclusive) hasta el parágrafo 9, n° 2 (inclusive) se supondrá además que todos los anillos de operadores de un módulo poseen unidad. Salvo que se indique otra cosa, los sub-anillos de anillos con unidad se supondrá que contienen a esa unidad .

## § 1 RELACIONES ENTRE LA TEORIA DE REPRESENTACIONES Y LA TEORIA DE MODULOS

Veremos en este parágrafo que la noción de representación lineal de un álgebra y la de módulo son esencialmente la misma .

### III. 1. 1. - DEFINICION

Si $A$ es un álgebra, llamaremos $A$-módulo a todo espacio vectorial $E$ sobre $\mathbb{C}$ tal que sea un $A$-módulo para la estructura subyacente de anillo de $A$ y que además cumpla:

$$(\lambda a)x = a(\lambda x) = \lambda (ax)$$

cualesquiera sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $a \in A$, $x \in E$.

Naturalmente se pide a los homomorfismos y submódulos de módulos sobre álgebras que posean las propiedades de linealidad correspondientes .

Supongamos que A es un álgebra (no necesariamente con unidad) y que $\rho$ es una representación de A en un espacio vectorial E (sobre E ); es decir

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{C}(E)$$

y es un homomorfismo de álgebras . Podemos entonces definir a partir de $\rho$ una estructura de A-módulo sobre E mediante

$$(a, x) \longrightarrow a.x = \rho(a)x$$

si $a \in A$, $x \in E$ .

Esta ley externa evidentemente cumple las leyes distributivas respecto de las sumas de A y E y además si $a, b \in A$, $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, vale

$$(ab).x = \rho(ab)x = (\rho(a) \circ \rho(b))x = \rho(a)(\rho(b)x) = a.(b.x)$$

$$(\lambda a).x = \rho(\lambda a)x = (\lambda\rho(a))x = \lambda(a.x) = \rho(a)(\lambda x) = a.(\lambda x)$$

de manera que con ella E es efectivamente un A-módulo .

Si por el contrario suponemos que E tiene una estructura de A-módulo, puede definirse

$$\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{C}(E)$$

mediante $\rho(a)x = a.x$, y es inmediato que $\rho$ es una representación lineal de A en E .

Esto permite afirmar que hay una correspondencia biunívoca en las prepresentaciones lineales de un álgebra A en un espacio E y las estructuras de A-módulo de E . Diremos que los elementos de un tal par están "asociados" : "la estructura asociada a una representación" , y también "la representación asociada a una estructura de A-módulo" .

Veamos cómo se traducen las propiedades especiales de una a otra forma .

Según I. 1. 10 , dos representaciones $\rho$ y $\rho'$ de un álgebra A en espacios E, E' resp., son semejantes si y solamente si existe un isomorfismo vectorial de E en E' , $u : E \dashrightarrow E'$, tal que para cada $a \in A$, vale

$$\rho'(a) = u \circ \rho(a) \circ u^{-1}$$

Pero eso es equivalente a decir que E y E' con las estructuras de A-módulos asociadas son A-módulos isomorfos . En efecto, vale, para cada $a \in A$, $x \in E$,

$$u(a.x) = u(\rho(a)x) = (u \circ \rho(a))x = (\rho'(a) \circ u)x =$$

$$= \rho'(a)(u(x)) = a.u(x)$$

y como $u$ es además $\mathbb{C}$-lineal , es una isomorfismo de $A$-módulos .
La recíproca es inmediata .

Análogamente, podemos afirmar que el concepto de representación irreducible ( I. 1. 7 ) corresponde al de módulo simple , en el sentido de la definición siguiente:

III. 1. 2. - DEFINICION

Diremos que un módulo es SIMPLE si no es 0 y no tiene submódulos propios .

La equivalencia es inmediata. Decir que un $A$-módulo $E$ no es simple es lo mismo que decir que tiene un submódulo propio $F$ , que resultará, a fortiori, un subespacio de $E$ estable para la representación asociada, por lo que ésta será reducible, y recíprocamente .

Finalmente veamos el caso de representaciones regulares ( I. 1. 13 ) .
Es evidente que la estructura de $A$-módulo asociada a la representación regular (izquierda) de $A$ es la de $A_s$ , es decir la estructura de módulo a izquierda que tiene $A$ sobre sí mismo ( [1] , Liv. II , Chap. II , § 1 ; n° 1 , exemple 1 ) .

Podemos resumir estos resultados de la siguiente manera:

III. 1. 3. - DICCIONARIO

Si $A$ es un álgebra y $E, E'$ dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ , es válido el siguiente cuadro, donde las estructuras de módulos de la derecha son las asociadas de las representaciones de la izquierda:

| | |
|---|---|
| $\rho$ y $\rho'$ son representaciones semejantes de $A$ en $E$ y $E'$ . | $E$ y $E'$ son $A$-módulos isomorfos . |
| $\rho$ es una representación irreducible de $A$ en $E$ . | $E$ es un $A$-módulo simple. |
| $\rho$ es la representación regular de $A$ . | $A_s$. |

Según esto, la teoría de representaciones puede utilizar conceptos de álgebra lineal y recípro camente . Más adelante ( § 8 ) veremos un ejemplo de tal ne-

---------

## § 2.- ADJUNCION DE UNIDAD

Sea $A$ un álgebra de la que no se sabe si tiene o no unidad . Llamemos $\tilde{A} = \mathbb{C} \times A$ sobre $\mathbb{C}$ .

Si definimos en $\tilde{A}$ una operación producto por

$$(x, a) . (x' , a') = (xx' , xa' + x' a + a.a')$$

donde $x, x' \in \mathbb{C}$ , $a, a' \in A$ , ésta induce sobre $\tilde{A}$ una estructura de álgebra con unidad $(1, 0)$ . La comprobación de que se cumplen las leyes asociativa y distributivas es inmediata [1] . Liv. II, Chap. 8 , App. n° 1 . Ver también [6] , § 20 . C ) .

Es claro que la inyección

$$a \longrightarrow (0, a)$$

de $A$ en $\tilde{A}$ es un homomorfismo biunívoco de álgebras y que su imagen es un ideal bilátero de $\tilde{A}$ . Esto nos permitirá considerar a $A$ como un ideal de $\tilde{A}$ , o lo que es lo mismo, que $\tilde{A}$ es una ampliación de $A$ . Existen varias relaciones interesantes entre ideales de $A$ e ideales de $\tilde{A}$ y el lector podrá sin duda descubrir algunas . Aquí no necesitamos ningún resultado en ese sentido ( [1] , loc. cit. ) . Lo que nos interesará es considerar la posibilidad de extender mediante esta construcción el dominio de operadores de un módulo.

Si $E$ es un $A$-módulo , se trata de definir sobre $E$ una estructura de $\tilde{A}$ -módulo . . Es natural imponer la restriccion siguiente

$$(0, a). x = ax \quad \text{para todo } x \in E , a \in A$$

ya que los elementos de la forma $(0, a)$ forman una réplica de $A$ en $\tilde{A}$ . Pero si queremos que se verifique esa igualdad, para cada elemento $(z, a)$ de $A$ será

$$(z, a). x = ax \qquad \text{si } z = 0$$

$$(z, a). x = (1, z^{-1} a) (zx) \quad \text{si } z \neq 0$$

y por lo tanto la estructura quedará totalmente definida cuando se determine como operan los elementos $(1,a)$ , $a \in A$ .

Como se verifica de inmediato, si se define

$$f_a(x) = (1,a).x - ax$$

la ley externa que se quiere definir será una ley de módulo si

$$f_a \in \mathrm{End}_C(E), \text{ para cada } a \in A \text{ y además}$$

$$f_{a-b-ab} + a + b = aof + f_a ob + f_a of_b \quad .$$

para cada $a,b \in A$ , considerados como elementos de $\mathrm{End}_C(E)$ por la representación asociada.

Es evidente que es suficiente tomar para ello $f_a = \iota_E$ (aunque no necesario!) con lo que la ley externa resulta

$$(z,a).x = zx + ax .$$

Si $E$ es un $A$-módulo entonces, según lo anterior, también es un $\tilde{A}$-módulo con esa operación. Consideraremos en lo que sigue esa única estructura de $\tilde{A}$-módulo de cada $A$-módulo.

Veremos que las propiedades de $E$ con ambas estructuras son esencialmente las mismas.

III. 2. 1.- PROPOSICION

Sea $A$ un álgebra y $E$ un $A$-módulo . Los submódulos de $E$ como $A$-módulo y como $\tilde{A}$-módulo coinciden .

En efecto, si $F$ es un $A$-submódulo de $E$ , también es un $\tilde{A}$-submódulo puesto que si $a \in A$, $z \in \mathbb{C}$, $x \in F$

$$(z,a).x = zx + ax \in F$$

y todas las otras propiedades no dependen del anillo de operadores y por lo tanto se satisfacen automáticamente. La recíproca es inmediata .

De aquí resulta en particular que un $A$-módulo simple es también $\tilde{A}$-simple y viceversa .

III. 2. 2.- PROPOSICION

Si $E, E'$ son dos A-módulos, vale

$\mathrm{Hom}_A(E,E') = \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(E,E')$

En efecto, si $u: E \dashrightarrow E'$ es un A-homomorfismo, valdrá

$$u((z,a).x) = u(zx + ax) = zu(x) + au(x) = (z,a).u(x)$$

(los homomorfismos son C-lineales ! ) y por lo tanto $u \in \mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(E,E')$. La recíproca es inmediata .

Estas propiedades nos permitirán suponer siempre que los módulos a considerar lo son sobre álgebras con unidad, y todos los teoremas que se enuncien sobre submódulos u homomorfismos serán válidos sin restricción de generalidad .
Nota: En el caso general de un anillo en lugar de un álgebra, puede hacerse una construcción análoga mediante $Z \times A$ ($Z$ = enteros). Dejamos al cuidado del lector la repetición del proceso y la demostración de III. 2. 1.- y III. 2. 2.- para ese caso .

---------

§ 3.- MODULOS SIMPLES

Este parágrafo está destinado al estudio elemental de los módulos simples (def. en III, 1. 2.-)
Desde el comienzo, hasta el corolario III. 3. 6 (inclusive), A representará un anillo con unidad.
Desde III. 3. 7 en adelante, un álgebra (sobre $\mathbb{C}$, en virtud de la convención hecha a comienzo del capítulo) con unidad .
Todos los módulos que aparecen son módulos unitarios a izquierda .

III. 3. 1.- PROPOSICION

Todo A-módulo simple está generado por cada uno de sus elementos (diferente de 0).

En efecto, el submódulo generado en cualquier módulo por un elemento no nulo es no nulo, y si el módulo es simple, debe coincidir con el total.

Más aún, si $M$ es simple, $x \in M$ y $x \neq 0$, entonces $A.x = M$, ya que $A.x$ es el submódulo generado por $x$.

Sea $E$ un $A$-módulo simple. Para cada $x$ no nulo de $E$ podemos considerar la aplicación $f_x : A_s \dashrightarrow E$ definida por

$$f_x(a) = ax.$$

En virtud de lo anterior, $f_x$ es un epimorfismo de $A$-módulos. Su núcleo, que notaremos $\mathfrak{M}_x$, será un submódulo de $A_s$, es decir un ideal a izquierda de $A$, que se llama anulador de $x$ ([1], Liv. II, Chap. II, § 1, nº 9). Evidentemente vale

$$\mathfrak{M}_x = \{ a \in A ; \; ax = 0 \}$$

De esas observaciones resulta de inmediato :

III. 3. 2. - PROPOSICION

Todo $A$-módulo simple $E$ es isomorfo a todo módulo cociente $A_s / \mathfrak{M}_x$ donde $\mathfrak{M}_x$ es el anulador de un elemento $x$ no nulo cualquiera de $E$.

III. 3. 2. - COROLARIO

Para cada $x$ no nulo, $\mathfrak{M}_x$ es un ideal maximal a izquierda de $A$.

En efecto, $f_x^{-1}$ establece una correspondencia biunívoca entre los submódulos de $E$ y los ideales a izquierda de $A$ que contienen a $\mathfrak{M}_x$ ([1] Liv. II, Chap. 1, § 8, Th. 5). Pero como E es simple, se concluye que A no tiene ideales propios a izquierda que contengan a $\mathfrak{M}_x$ lo que equivale a decir que $\mathfrak{M}_x$ es maximal . $\otimes$

El mismo razonamiento del corolario anterior permite afirmar la recíproca, es decir:

## III. 3. 4. - COROLARIO

E es un A-módulo simple , si y solamente si es isomorfo a un A-módulo cociente $A_s/\mathfrak{M}$ donde $\mathfrak{M}$ es un ideal maximal a izquierda de A . $\otimes$

## III. 3. 5. - PROPOSICION ("Lema de Schur")

Si M, N son dos A-módulos y $u: M \dashrightarrow N$ es un homomorfismo no nulo, entonces

i) Si M es simple , u es inyectivo .

ii) Si N es simple , u es suryectivo .

iii) Si M y N son simples, u es biyectivo .

En efecto, la imagen de u es un submódulo no nulo de N y su núcleo un submódulo de M distinto de M . Haciendo las hipótesis de simplicidad de M o N resultan i) y ii) . De i) y ii) resulta iii) .

## III. 3. 6. - COROLARIO

El anillo de endomorfismos de un módulo simple es un cuerpo .

Si E es un módulo simple, todo endomorfismo no nulo de E es biyectivo por el lema de Schur y por lo tanto tiene inversa . $\otimes$

Veremos ahora que ese cuerpo está bien caracterizado en un caso particular que será muy importante para nosotros

III. 3. 7.- PROPOSICION

Si $E$ es un A-módulo simple (y $A$ un álgebra sobre $C$ según se convino a comienzo del parágrafo) de dimensión finita sobre $C$, el cuerpo $End_A(E)$ es isomorfo a $C$.

Sea $K = End_A(E)$. Si $\lambda \in C$, $\lambda$ opera sobre $E$ mediante

$$\lambda(x) = \lambda x$$

y si $u \in K$, vale

$$(\lambda \circ u)(x) = \lambda . u(x) = u(\lambda x) = (u \circ \lambda)(x)$$

de manera que $C$ es un subcuerpo central de $K$.

. Si $n$ es la dimensión de $E$ se cumple

$$C = K \subset End_A(E) \subset End_C(E) = M_n(E)$$

y entonces $K$ es un cuerpo que contiene a $C$ como subcuerpo central y es de dimensión finita $m$ sobre él. Pero eso no puede ocurrir a menos que $C = K$. En efecto, si $x \in K$, los elementos

$$1 = x^o, x, \ldots, x^m$$

son linealmente dependientes sobre $C$, y por lo tanto valdrá

$$\sum a_j x^j = 0$$

con $a_1, \ldots a_m$ números complejos no todos nulos. Pero puesto que $C$ es algêbraicamente cerrado, eso implica $x \in C$. ⊠

Veamos ahora una interpretación del lema de Schur en términos de representaciones. Sea $A$ un álgebra sobre $C$, $E$ y $E'$ dos espacios vectoriales sobre $C$ de dimensión finita ($n$ y $m$ resp.).

Si $\rho$ y $\rho'$ son dos representaciones de A en E y E' resp., fijando bases en E y E' se puede suponer que para cada $a \in A$, $\rho(a)$ y $\rho'(a)$ son matrices complejas (de $n \times n$ y $m \times m$ resp.). Si $u : E \longrightarrow E'$ es un homomorfismo de A-módulos para las estructuras asociadas, u se puede representar por una matriz P (de n columnas y m filas) que cumplirá

$$P\,\rho(a) = \rho'(a)\,P$$

para cada a de A. Si suponemos que $\rho$ y $\rho'$ son irreducibles, por el lema de Schur, P será 0 o biyectiva. En este último caso se podrá concluir que $\rho$ y $\rho'$ son semejantes (y por lo tanto en particular que $n = m$).

---------

## § 4 MODULOS SEMISIMPLES

Veremos en este parágrafo el importante concepto de módulo semisimple (III . 4 . 5 .). Convendremos que durante todo él, A representará un anillo con unidad y que todos los A-módulos son unitarios. En virtud de las observaciones del parágrafo 2, final, esto no constituye una restricción.

### III. 4. 1.- TEOREMA (Krull)

Sea M un A-módulo, $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de submódulos simples de M tal que $M = \sum N_\lambda$. Si F es un submódulo de M, existe $L \subset \Lambda$ tal que

$$M = F \oplus \bigoplus N_\lambda \quad (\lambda \in L).$$

Sea $\mathcal{M}$ la familia de todos los subconjuntos I de $\Lambda$ para los cuales la suma

$$F + \sum_{\lambda \in I} N$$

sea directa (ambas: + y $\sum$ ).

Como $\emptyset \in \mathcal{M}$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Además con el orden de inclusión, es inductivo, como se comprueba fácilmente, y entonces, por Zorn, existe $L \subset \Lambda$ maximal en $\mathcal{M}_0$ . Sea $N = F \oplus \bigoplus_{\lambda \in L} N_\lambda$ . Si demostramos que $N = M$ , el teorema estará probado. Para ello observemos que si $\lambda \in L$, $N_\lambda \subset N$ y si $\lambda \in \Lambda - L$ , la suma $N + N_\lambda$ no puede ser directa por la maximalidad de $L$ . Pero en ese caso $N \cap N_\lambda \neq 0$ y como $N_\lambda$ es simple, será también $N_\lambda \subset N$ . Entonces $N_\lambda \subset N$ para todo $\lambda \in \Lambda$ , de donde $M = \sum N_\lambda = N$ . ☒

Recordemos ( [1] Liv. II, Chap. II, § 1 , nº 4 , def. 4 ) que si $M$ es un A-módulo , dos submódulos $M_1$ y $M_2$ de $M$ se llaman <u>suplementarios</u> cuando $M = M_1 \oplus M_2$ y que $M$ se llama <u>monógeno</u> (loc. cit. nº 5 , def. 6 ) cuando está generado por un solo elemento.

<u>III. 4. 2.- LEMA</u>

<u>Todo A-módulo monógeno no nulo tal que cada sub-módulo suyo tiene suplementario, tiene un submódulo simple</u> .

Sea $E$ un tal A-módulo, $x \in E$ un generador . Como $E$ es unitario, será $Ax = E$ . Si $\mathfrak{a}$ es el anulador * de $x$ en $A$ (definido para un módulo cualquiera como se definió para simples en el parágrafo 3 ), por el lema de Zorn existe un ideal a izquierda maximal $\mathfrak{m}$ de $A$ tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ . Si $M_1 = {}^{\mathfrak{m}}s/\mathfrak{a}$ $M_1$ es un submódulo de $E$ ya que $M_1 = {}^{\mathfrak{m}}s/\mathfrak{a} \subset {}^{A}s/\mathfrak{a} = E$
Sea $M_2$ un suplementario en $E$ de $M_1$ . Entonces

$$M_2 = E / M_1 = {}^{A}s/\mathfrak{a} \Big/ {}^{\mathfrak{m}}s/\mathfrak{a} = {}^{A}s/\mathfrak{m}$$

y $M_2$ es simple por III. 3. 4.- ☒

<u>III. 4. 3.- TEOREMA</u>

<u>Las siguientes propiedades de un A-módulo M son equivalentes:</u>

* El anulador de un subconjunto cualquiera ( [1] Liv. II Chap. II, § 1. def. 11 ) H de un A-módulo M se notará a veces "$\mathrm{An}_A(H)$" .

a) M es suma de submódulos simples

b) M es suma directa de submódulos simples

c) Todo submódulo de M tiene suplementario .

$a \Rightarrow b$ resulta del Teorema III. 3. 1.- tomando $F = 0$

$b \Rightarrow c$ resulta también del Teorema III. 4. 1.- aplicado a cada submódulo de $M$ .

$c \Rightarrow a$ es la única parte no trivial del Teorema . Sea $P$ la suma de todos los submódulos simples de $M$ . Si $P \neq M$ , $P$ tiene un suplementario no nulo $P'$ . Sea $F$ cualquier submódulo monógeno (no nulo) de $M$ contenido en $P'$ . Evidentemente $F$ hereda de $M$ la propiedad de que cada uno de sus submódulos tiene suplementario . (Si $N \subset F$ tiene suplementario $Q$ en $M$ , $Q \cap F$ es suplementario de $N$ en $F$ ). Pero entonces del lema III. 4. 2.- se concluye que $F$ tiene un submódulo simple, que a posteriori resultará un submódulo simple de $M$ no contenido en $P$ , lo que contradice la definición de $P$ . ⊠

III. 4. 4.- DEFINICION

Diremos que un módulo es SEMISIMPLE cuando verifica cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema III. 4. 3.- .

Todo módulo simple es semisimple, todo espacio vectorial es un módulo semisimple, el módulo 0 es semisimple . Por el contrario el $Z$-módulo $Z$ no es semisimple . Déjamos a la buena voluntad del lector la verificación de estos enunciados .

III. 4. 5.- PROPOSICION

Sea $M$ un $A$-módulo semisimple, $M = \sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ una descomposición de $M$ en suma de submódulos simples . Para todo submódulo $N$ de $M$ , existe $L \subset \Lambda$ tal que $N$ es isomorfo a $\bigoplus_{\lambda \in L} N_\lambda$.

En efecto, por c) del Teorema anterior, existe un submódulo $P$ suplementario de $N$ . Si $L \subset \Lambda$ es tal que

$$M = P \oplus \bigoplus_{\lambda \in L} N_\lambda$$

(III. 4. 1.-) se tendrá

$$N \approx M / P \approx \bigoplus_{\lambda \in L} N_\lambda$$

como se quería . ⊠

III. 4. 6.- COROLARIO

Todo submódulo y todo cociente de un módulo semisimple son semisimples .

Si M es un A-módulo semisimple, de la proposición anterior resulta que todo submódulo de M , por ser isomorfo a un módulo semisimple es semisimple. Si N es un submódulo de M , como $M / N \approx P$ cualquiera sea el suplementario P de N en M y por la primera parte P es semisimple, también todo cociente M / N es semisimple . ⊠

III. 4. 7.- COROLARIO

Con las mismas hipótesis que en la proposición III. 4. 5.- , si N es un submódulo simple de M , existe $\lambda_o \in \Lambda$ tal que N y $N_{\lambda_o}$ son isomorfos .

En efecto, por III. 4. 5.- , N será isomorfo a una suma $\bigoplus_{\lambda \in L} N_\lambda$ y como es simple, L no podrá contener más de un elemento . ⊠

III. 4. 8.- PROPOSICION

Si $M_1$ . $M_2$ son A-módulos semisimples isomorfos , y

$$M_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i \quad , \quad M_2 = \bigoplus_{i=1}^{m} P_i$$

son dos descomposiciones de $M_1$ y $M_2$ en suma directa finita de submódulos simples, entonces $n = m$ y existe una permutación $f$ de $[1, n]$ tal que $N_i$ es isomorfo a $P_{f(i)}$.

Este resultado puede deducirse directamente del Teorema de Jordan-Hölder ([1], Liv. II, Chap. I, § 6, n° 14, Th. 8).

Sin embargo, podemos hacer una demostración particular (que por supuesto es una adaptación de la del teorema de J-H) de la siguiente manera. Supongamos que $n < m$. Por III. 4. 7.- existe $j$ tal que $N_n \approx P_j$. Entonces también

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} N_i \approx M_1 / N_n \approx M_2 / P_j \approx \bigoplus_{i \neq j} P_i$$

Procediendo de la misma manera $n-2$ veces más se obtiene

$$N_1 \approx \bigoplus_{i \in I} P_i$$

donde I tiene $m-n-1$ ($> 1$) elementos. Como $N_1$ es simple, esto no es posible. Luego $n \not< m$. Como el enunciado es simétrico, $n = m$. Además la permutación $f$ ha sido construída en esta demostración, de manera que la proposición es válida. ⊠

III. 4. 9.- DEFINICION

El invariante por isomorfismo $n$ se llama la LONGITUD del A-módulo $M_1$. Se nota $\ell_A(M_1)$.

Esta definición conduce a una teoría de módulos de "dimensión finita", que contiene como caso particular a la de los espacios vectoriales. La condición de finitud impuesta es aparente. El resultado sigue siendo válido y la demostración aplicable para cualquier cardinal (será suficiente para eso usar inducción). Este caso general puede verse en ([1]; Liv. II, Chap. 8, § 3, n° 5, Th. 2).

COMENTARIO:

Si D es un cuerpo cualquiera (no conmutativo), se puede demostrar fácilmente que el anillo

$End_D((D_s)^n)$ es isomorfo al anillo $M_n(D^o)$ de las matrices de $n \times n$ sobre el cuerpo $D^o$ opuesto al D . En este último, las n familias de matrices columnas son claramente ideales minimales a izquierda y su suma es directa . De allí se concluye que si D es un cuerpo cualquiera, el módulo $(End_D((D_s)^n)_s$ tiene longitud n .

Nos desviaremos ahora de la teoría general de módulos semisimples para dar las definiciones y algunas propiedades de los módulos isotípicos y las componentes isotípicas de un módulo .

III. 4. 10. - DEFINICION

Si F es un A-módulo, diremos que un A-módulo es ISOTIPICO DE TIPO F si es suma directa de submódulos isomorfos a F .

Todo módulo es isotípico de su propio tipo. Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es isotípico de tipo $K_s$ . Si es de dimensión infinita es isotípico de tipo $(K_s)^n$ para todo n . Este es un ejemplo típico de módulo isotípico . Cuando no interese de qué tipo es isotípico un módulo, se dirá solamente que es "isotípico" .

Si A es un anillo, todo A-módulo simple es isomorfo (III. 3. 4.-) a un módulo cociente $A_s/\mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{m}$ es un ideal a izquierda maximal de A . Si llamamos $\Upsilon(A)$ a la familia de tales cocientes, un A-módulo M será isotípico de tipo F , donde F es simple, si y solamente si es isotípico de tipo E para algún $E \in \Upsilon(A)$, como es evidente. Más aún, no solamente de un $E \in \Upsilon(A)$ determinado, sino de cualquiera de la clase en $\Upsilon(A)$ de los que le son isomorfos. Si notamos (como lo hemos venido haciendo hasta ahora) con "$\approx$" la relación en $\Upsilon(A)$: "E y E' son isomorfos" y con $\mathfrak{S}(A)$ al cociente

$$\mathfrak{S}(A) = \Upsilon(A)/\approx$$

por abuso de lenguaje diremos que un A-módulo M es isotípico de tipo $\lambda$ , para $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$, si existe $E \in \lambda$, tal que M es isotípico de tipo E . Este abuso es correcto por las observaciones anteriores y tiene la ventaja de suprimir las repeticiones innecesarias. También diremos que un módulo simple E es " de tipo $\lambda$ " ( $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$ ) cuando es isomorfo a algún módulo de $\lambda$ .

III. 4. 11.- DEFINICION

Si M es un A-módulo y $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$, al submódulo $M_\lambda$, suma de todos los submódulos de M de tipo $\lambda$, lo llamaremos COMPONENTE ISOTIPICA DE TIPO $\lambda$ de M .

Es decir, para cada módulo simple E, se consideran todos los submódulos de M isomorfos a E . A su suma se la llama componente isotípica de tipo E o tipo $\lambda$, con $E \approx E' \in \lambda$ de M .

Las componentes isotípicas de un módulo cualquiera son módulos semisimples isotípicos. La aplicación $\lambda \longrightarrow M_\lambda$ (de $\mathfrak{S}(A)$ en $\mathcal{R}(M)$) solamente identifica los $\lambda$ tales que $M_\lambda = 0$ Sobre los demás es biunívoca (III. 4. 7.-) . En un módulo isotípico solamente pueden ser componentes los submódulos impropios: 0 o el total . Ambos a veces, el primero solamente: si no es semisimple y el segundo solamente: por ejemplo en un espacio vectorial . En particular un módulo simple puede tener solamente a 0 y a sí mismo o a sí mismo como componentes isotípicas .

III. 4. 12.- DEFINICION

Si M es un A-módulo, N un A-módulo simple de tipo $\lambda$ y la componente de tipo $\lambda$ de M tiene longitud n , notaremos $[M:N] = n$ (o, si es necesario $[M:N]_A = n$ ).

III. 4. 13.- DEFINICION

Se llama ZOCALO de un módulo M , y se nota $\mathfrak{S}_M$, a la suma de las componentes isotípicas de M .

Por supuesto el zócalo de un módulo es un submódulo y coincide con la suma de todos sus submódulos simples .

III. 4. 14. PROPOSICION

El zócalo de todo módulo es un módulo semisimple. Un módulo es simisimple si y solamente si coincide con su zócalo. ■

Además puede afirmarse que el zócalo de un módulo es may or submódulo semisimple del módulo dado y por consiguiente el mayor elemento del álgebra de Boole ( completa) de sus submódulos semisimples.

III. 4. 15 PROPOSICION

Para todo A-módulo M, vale $\mathfrak{S}_M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{S}(A)} M$ .

Por definición $\mathfrak{S}_M = \sum M_\lambda$ . Veamos que esa suma es directa. Para un elemento $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$ fijo, llamemos $P_\lambda$ al submódulo de $M$

$$P_\lambda = M_\lambda \cap \sum_{\gamma \neq \lambda} M_\gamma$$

$P_\lambda$ es semisimple (III. 4. 6). Si $N \subset P_\lambda$ es un submódulo simple de $P_\lambda$ , será $N \subset M_\lambda$ y por lo tanto (III. 4. 7), $N$ será de tipo $\lambda$. Como además $N \subset \sum_{\gamma \neq \lambda} M_\gamma$ y $\sum_{\gamma \neq \lambda} M_\gamma = \sum N_i^\gamma$ , donde $\{N_i^\gamma\}_{i \in \Lambda_\gamma}$ es la familia de los submódulos de $M$ de tipo $\gamma$ , por III. 4. 7 será $N \approx N_{i_o}^{\gamma_o}$ , para algún $i_o$ , $\gamma_o$. Pero como $\gamma_o \neq \lambda$, eso es absurdo. Luego $P_\lambda$ no contiene ningún módulo simple, y como es semisimple, debe ser $0$ . Eso prueba que

$$\mathfrak{S}_M = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{S}(A)} M_\lambda$$

III. 4. 16 PROPOSICION

Sea $M$ un A-módulo. Las componentes isotípicas de un submódulo $N$ de $M$ son las intersecciones de las componente isotípicas de $M$ con el zócalo de $N$ . ■

Las dos últimas proposiciones toman una forma más simple cuando se trata de módulos semisimples. Las resumiremos en el siguiente

III. 4. 17 COROLARIO

Todo módulo semi-simple es suma directa de sus componentes isotípicas. Las componentes isotípicas de un submódulo suyo se obtienen por intersección de las componentes isotípicas del módulo total con el submódulo .

Las nociones de zócalo y componentes isotípicas tienen un sentido muy preciso en el caso de un módulo de la forma $A_s$ , como veremos en el próximo parágrafo.

---------

## § 5. - ZOCALO Y PIES DE UN ANILLO

Como en el parágrafo anterior, convendremos que la letra $A$ representará un anillo,aunque no necesariamente con unidad. Sin embargo, a fin de ser acordes con lo que se decidió al comienzo del capítulo, debemos considerar solamente módulos sobre anillos con unidad. En particular notaremos $A_s$ al $\tilde{A}$-módulo $A$, en lugar del $A$-módulo $A$ como es habitual.

Es inmediato que para un ideal a izquierda $\mathfrak{l}$ de $A$ es equivalente afirmar que es minimal ( es decir tal que no existe ningún ideal a izquierda estrictamente intermedio entre $0$ y $\mathfrak{l}$ ) o que el $\tilde{A}$-módulo $\mathfrak{l}$ es simple. Según eso, los submódulos simples de $A_s$ no son otros que los ideales minimales a izquierda de $A$ ( "imis" en adelante ) .

III. 5. 1 PROPOSICION

Si $\mathfrak{l}$ es un imi de $A$, $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}$ ó $\mathfrak{l}^2 = 0$ .

En el primer caso, existe $a \in \mathfrak{l}$ tal que $\mathfrak{l}a = Aa = \mathfrak{l}$ .

Como $\mathfrak{l}^2$ es un ideal a izquierda y $\mathfrak{l}^2 \subset \mathfrak{l}$ , por la minimalidad de $\mathfrak{l}$ será $\mathfrak{l}^2 =$ ó $\mathfrak{l}^2 = 0$

Para cada $a \in \mathfrak{l}$ , $\mathfrak{l}a$ es un ideal a izquierda y $\mathfrak{l}a \subset \mathfrak{l}$ de manera que ó $\mathfrak{l}a = \mathfrak{l}$ ó $\mathfrak{l}a = 0$. Si suponemos $\mathfrak{l}^2 = \mathfrak{l}$ , como $\mathfrak{l}^2 = \sum_{a \in \mathfrak{l}} \mathfrak{l}a$, existirá $a \in \mathfrak{l}$ , tal que $\mathfrak{l}a \neq 0$, es decir tal que $\mathfrak{l}a = \mathfrak{l}$ . ⊠

Diremos que un ideal $\mathfrak{m}$ ( resp. un elemento $a$) de $A$ es IDEMPOTENTE cuando $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ (resp. $a^2 = a$ ), y que es NILPOTENTE cuando $\mathfrak{m}^2 = 0$ ( resp. $a^2 = 0$ ).

III. 5. 2 PROPOSICION

Todo imi idempotente de $A$ tiene unidad a derecha ( y por lo tanto contiene un elemento idempotente )

Por la proposición anterior, si $\mathcal{I}$ es un imi idempotente, existe $a \in \mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} = \mathcal{I}a$. Sea $e \in \mathcal{I}$ tal que $a = ea$. Para cada $x \in \mathcal{I}$, será válido

(1) $(x - xe)a = xa - x(ea) = 0$

Pero si llamamos $\mathcal{M}$ al conjunto $\mathcal{M} = \{y \in \mathcal{I};\ ya = 0\}$, se comprueba inmediatamente que $\mathcal{M}$ es un ideal a izquierda, tal que $\mathcal{M} \subset \mathcal{I}$. Pero como $a \notin \mathcal{M}$, no puede ser $\mathcal{M} = \mathcal{I}$, y por lo tanto $\mathcal{M} = 0$. Es prueba que $y \in \mathcal{I}$, $ya = 0$, entonces $y = 0$. En particular de (1) se concluye $xe = x$ para $x \in \mathcal{I}$. ∎

Según esto, todo imi idempotente se puede suponer de la forma $Ae$ con $e$ idempotente (aunque no todo ideal de la forma $Ae$ con $e$ idempotente, ( $e \neq 1$ ) es un ideal imi : IV. 1. 8 ).

III. 5. 3 PROPOSICION

Sean $\mathcal{I} = Ae$, $\mathcal{I}' = Ae'$ dos imis idempotentes de $A$.

1) Todo homomorfismo $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}'$ de $\tilde{A}$-módulos es de la forma $f(x) = xa'$ para algún $a' \in \mathcal{I}'$.

2) $\mathcal{I}$ y $\mathcal{I}'$ son $\tilde{A}$-módulos isomorfos si y solamente $\mathcal{I}\mathcal{I}' = \mathcal{I}'$.

3) Si $\mathcal{I}\mathcal{I}' \neq \mathcal{I}'$, entonces $\mathcal{I}\mathcal{I}' = 0$.

4) Para todo $a \in A$, $\mathcal{I}a \approx \mathcal{I}$ o $\mathcal{I}a = 0$.

Veamos el punto 1). Como todo elemento de $\mathcal{I}$ es de la forma $xe$, con $x \in A$, si $f \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$, será

$$f(xe) = x\, f(e)$$

y por lo tanto $f(x) = f(xe) = xf(e)$ como se quería demostrar.

Obsérvese que además se puede asegurar $a' = f(e)$, o lo que es lo mismo, $f(e)$ determina a $f$ ( esa correspondencia es, por razones evidentes un isomorfismo entre los grupos $e\mathcal{I}'$ y $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$. (ver III. 5. 14 )

2). Si suponemos que $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}'$ son isomorfos, por la parte 1) existirá $a' \in \mathfrak{l}'$ tal que la correspondencia

$$x \longmapsto xa' , \qquad x \in \mathfrak{l}$$

es 1-1 y sobre. Pero entonces $\mathfrak{l}a' = \mathfrak{l}'$, y a posteriori $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = \mathfrak{l}'$. Veamos la recíproca Como $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}'$ son A-simples, por el lema de Schur (III. 3. 5), si $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}'$ no son isomorfos, todo homomorfismo de $\mathfrak{l}$ en $\mathfrak{l}'$ será nulo, y utilizando nuevamente la primera parte se concluye $\mathfrak{l}a' = 0$, para todo $a' \in \mathfrak{l}'$, de donde $\mathfrak{l}\mathfrak{l}' = 0 \neq \mathfrak{l}'$. Esto es también una demostración de 3).

4). Resulta de que $x \longrightarrow xa$ es un homomorfismo suryectivo de A-módulos entre $\mathfrak{l}$ y $\mathfrak{l}a$, de manera que si no es 0, por el lema de Schur, es biunívoco. Entonces es un isomorfismo. ⊠

III. 5. 4.- DEFINICION

Si A es un anillo, llamaremos ZOCALO IZQUIERDO (o solamente ZOCALO) de A, y notaremos con $\mathfrak{S}_A$, al zócalo del $\tilde{A}$-módulo $A_s$ (III. 4. 13.).

III. 5. 5.- DEFINICION

Si A es un anillo, llamaremos PIE IZQUIERDO (o solamente PIE) de A, a cada componente isotípica no nula del A-módulo A (III. 4. 11.). Diremos que un anillo es RENGO si tiene un solo pié.

Como caso particular de III. 4. 15. se tiene

III. 5. 6.- PROPOSICION

El zócalo de un anillo es suma directa de sus pies. ⊠

III. 5. 7.- PROPOSICION

Los pies de un anillo son ideales biláteros que se anulan mutuamente.

Sea A el anillo, $\mathfrak{a}$ un pié de A. Por definición será

$$\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in I} \mathfrak{l}_\alpha$$

donde $\{\mathfrak{l}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de imis de A.

Si a es un elemento cualquiera de A

$$\mathfrak{a}\, a = \sum \mathfrak{l}_\alpha\, a$$

y como $\mathfrak{l}_\alpha a$ es ó 0 ó isomorfo a $\mathfrak{l}_\alpha$ (III. 5. 3, 4)), en ambos casos $\mathfrak{l}_\alpha a \subset \mathfrak{a}$, ya que $\mathfrak{a}$ es la componente isotípica que contiene a $\mathfrak{l}_\alpha$ y por lo tanto a todos sus isomorfos.

Luego $\mathfrak{a}\, A \subset \mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}$ es un ideal a derecha de A; como también lo es a izquierda por ser suma de ideales a izquierda, es bilátero.

Veamos ahora la segunda parte de la proposición. Sean $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ dos pies distintos de A. Entonces

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}'$$

por ser ambos ideales biláteros. Pero por III. 4. 15, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' = 0$, y entonces $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' = 0$.

III. 5. 8.- COROLARIO

$\mathfrak{S}_A$ es un ideal bilátero de A.

Para un anillo cualquiera, se puede demostrar que las condiciones siguientes son equivalentes:

1) El anillo $\mathfrak{S}_A$ no tiene ideales biláteros nilpotentes.
2) Todo imi de A es idempotente.
3) Los pies de A son anillos fieles (un anillo B se llama fiel cuando el B-módulo $B_s$ es fiel (1, Liv II, Chap 2).

La equivalencia de estas propiedades se encuentra en [4]. Aquí demostraremos algunas propiedades de los anillos para los cuales algunas de las condiciones 1), 2) o 3) se satisface. Sin embargo, como no demostraremos la equivalencia de ellas, supondremos válida la 2). Esta categoría de anillos será la que nos permita unir la teoría puramente algebraíca con la teoría topológica de representaciones (Chap. IV, §§ 1, 2, 4). Por esa razón daremos la siguiente definición:

III. 5. 9.- DEFINICION

Diremos que un anillo es SATICO si todos sus imis son idempotentes.

Ejemplos no triviales de tales anillos aparecen en IV. 1. 6.

III. 5. 10.- PROPOSICION

Si A es un anillo sático, los pies de A son ideales biláteros minimales y ningún ideal bilátero $\mathfrak{b}$ de A tal que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{S}_A \neq 0$ es nilpotente.

Sea $\mathfrak{a}$ un pié de A, $\mathfrak{a}'$ un ideal bilátero de A tal que $0 \neq \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$. Por ser $\mathfrak{a}$ semisimple, existe un ideal a izquierda $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ tal que (III. 4. 3.).

$$\mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$$

y por lo tanto

(1) $$\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b} = 0$$

ya que $\mathfrak{a}'$ es ideal a derecha y $\mathfrak{b}$ a izquierda.

Como $\mathfrak{a}'$ y $\mathfrak{b}$ son submódulos a izquierda de $\mathfrak{a}$, son también módulos semisimples (III. 4. 6.) y por lo tanto sumas de submódulos simples, es decir de imis:

$$\mathfrak{a}' = \sum_{\alpha \in J} \mathfrak{l}_\alpha \quad , \quad \mathfrak{b} = \sum_{\beta \in K} \mathfrak{l}'_\beta \quad , \quad J \neq \emptyset$$

Pero entonces, si $K \neq \emptyset$, será

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b} \supset \mathfrak{l}_{\alpha_0} \mathfrak{l}'_{\beta_0} \approx \mathfrak{l}'_{\beta_0} \neq 0$$

(por III. 5. 3., 3)), lo que contradice (1). Luego $K = \emptyset$, $\mathfrak{b} = 0$ y por lo tanto $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}$.

Con esto queda demostrada la primera parte de la demostración. La segunda es inmediata. En efecto veamos que todo ideal a izquierda contenido en $\mathfrak{S}_A$ es idempotente. Sea $\breve{\imath}$ . Como $\mathfrak{S}_A$ es semisimple, y $\breve{\imath}$ es un submódulo, será también semisimple, es decir suma de imis:

$$\breve{\imath} = \sum_{\alpha \in M} \imath_\alpha$$

Pero entonces

$$\breve{\imath}^2 \supset \sum \imath_\alpha^2 = \sum \imath_\alpha = \breve{\imath} \supset \breve{\imath}^2$$

Evidentemente resulta la segunda parte de la proposición aplicando lo dicho al ideal $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{S}_A$ . ∎

Siguiendo a [1] (Liv. II, Chap. 1 , § 8, Nº 5 ; Exemple.3), recordemos que si H es un subconjunto cualquiera de un anillo A, se llama ANULADOR A IZQUIERDA (resp. DERECHA), $An_g(H)$ (resp. $An_d(H)$) al conjunto de los elementos $y \in A$ tales que $yH = 0$ (resp. $Hy = 0$). Todo anulador a un lado es ideal a ese mismo lado.

III. 5. 11.- COROLARIO

Si A es un anillo sático, para todo pié $\mathfrak{a}$ de A y todo imi $\imath$ contenido en $\mathfrak{a}$ se cumple: $An_g(\imath) \cap \mathfrak{a} = An_d(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a} = 0.$

En efecto, como el anulador a izquierda o derecha de un ideal bilátero es también un ideal bilátero, $\mathfrak{a} \cap An_d(\mathfrak{a})$ será un ideal bilátero. Pero entonces, en virtud de III. 5. 10.

$$\mathfrak{a} \cap An_d(\mathfrak{a}) = 0 \qquad \text{ó} \qquad \mathfrak{a} \cap An_d(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$$

Si $\mathfrak{a} \cap An_d(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, será $\mathfrak{a} \subset An_d(\mathfrak{a})$ y por lo tanto $\mathfrak{a}^2 = 0$, lo que contradice la segunda parte de III. 5. 10. Luego $\mathfrak{a} \cap An_d(\mathfrak{a}) = 0$. Veamos que también $An_g(\imath) \cap \mathfrak{a} = 0$. Como $\imath$ es un ideal a izquierda, $An_g(\imath)$ es un ideal bilátero. Pero entonces, de la misma manera que antes, también deberá ser $An_g(\imath) \cap \mathfrak{a} = 0$ o $An_g(\imath) \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ . En el segundo caso, será válido $\mathfrak{a} \subset An_g(\imath)$ y por lo tanto $\mathfrak{a}\,\imath = 0$, es decir en particular $\imath^2 = 0$, lo que no puede ocurrir si A es un anillo sático. Luego $An_g(\imath) \cap \mathfrak{a} = 0$. ∎

(Obsérvese que la propiedad $An_d(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a} = 0$ es válida para cualquier ideal bilátero minimal idempotente $\mathfrak{a}$ de un anillo cualquiera).

De este corolario se deduce inmediatamente que la condición 2) implica a la 3):

### III. 5. 12. - COROLARIO

Los pies de un anillo sático son anillos fieles.

Evidentemente la propiedad de ser fiel equivale en este caso a $\mathrm{An}_g(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{a} = 0$. ∎

La segunda parte de la Proposición III. 5. 10 permite afirmar que también la condición 2) implica a la 1). Estas equivalencias no nos interesan y el lector tampoco debe prestarles atención.

Los enunciados anteriores han puesto en evidencia algunas de las relaciones existentes entre un pié de un anillo sático y el anillo total. Ahora veremos otros que se refieren a la estructura interna de cada pié, y que tienden a la demostración del importante teorema III. 6. 6. que obtendremos en el próximo parágrafo. Como cada pié de un anillo es también un anillo, es natural estudiar a su vez sus imis, pies y zócalo. Afortunadamente la teoría es trivial para anillos sáticos, como lo afirman las cuatro proposiciones que siguen.

### III. 5. 13. - PROPOSICION

Sea A un anillo sático. Si $\mathfrak{a}$ es un pie de A, los imis de A contenidos en $\mathfrak{a}$ coinciden con los imis del anillo $\mathfrak{a}$.

Sea $\mathfrak{l}$ un imi de A contenido en $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{l}'$ es un ideal à izquierda en $\mathfrak{a}$ tal que $0 \neq \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$, el ideal en A $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{l}'$ cumple:

$$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$$

Como por III. 5. 11., además vale $\mathfrak{m} \neq 0$, de la minimalidad de $\mathfrak{l}$ (en A) se deduce

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{l}' = \mathfrak{l}$$

Luego $\mathfrak{l}$ es minimal en $\mathfrak{a}$.

Reciprocamente, si $\mathfrak{l}'$ es un imi de $\mathfrak{a}$, el ideal $\mathfrak{m}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{l}'$ de A cumple

$$\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{l}'$$

y además, nuevamente por III. 5. 11., $\mathfrak{m}' \neq 0$. Pero entonces de la minimalidad de $\mathfrak{l}'$ en $\mathfrak{a}$ resulta $\mathfrak{m}' = \mathfrak{l}'$ y por lo tanto que $\mathfrak{l}'$ es un ideal en A. Evidentemente es entonces minimal

Esta proposición permite afirmar que los pies de un anillo sático no tienen imis "propios" y por lo tanto se concluye que también son sáticos y rengos.

En virtud de III. 3. 6., se concluye que si $\mathfrak{l}$ es un imi de A (sático, como hasta ahora) contenido en el pié $\mathfrak{a}$, el anillo $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$ es un cuerpo. Para futuros usos, veremos un lema referente a ese cuerpo, (del que ya se adelantó algo en la demostración de III. 5. 3.), que afirma que tiene una réplica en $\mathfrak{l}$.

<u>III. 5. 14.- LEMA</u>

<u>Si A es un anillo sático, $\mathfrak{l} = Ae$ un imi de A (e un idempotente unidad a derecha para $\mathfrak{l}$) contenido en un pié $\mathfrak{a}$, el subanillo $e\mathfrak{l} = e\mathfrak{l}e = e\mathfrak{a}e = eAe$ de A (que está contenido en $\mathfrak{l}$) es un cuerpo antiisomorfo a $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$.</u>

Recuérdese III. 5. 3. Es claro que todo endomorfismo f de $\mathfrak{l}$ como $\mathfrak{a}$ módulo queda individualizado por el elemento $f(e)$. Si entonces se define la correspondencia

$$f \xrightarrow{F} f(e)$$

es inmediato comprobar que es un antiisomorfismo entre $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$ y $eAe$. En efecto, si $f \in \mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$, $ef(e)e = ef(e) = f(e.e) = f(e)$, y por lo tanto es claro que F toma valores en $eAe$. Su biunicidad es inmediata.

Aunque no hemos adelantado nada, el resultado III. 5. 13. no es el más fino en ese sentido, y el que ahora sigue (basado en III. 5. 13.) es mucho más potente: los pies no tienen ideales a izquierda de ninguna clase, que no lo sean de A.

III. 5. 15. - PROPOSICION

Si A es un anillo sático, los ideales a izquierda de A contenidos en un pié de A coinciden con los ideales a izquierda de ese pié considerado como anillo.

Es claro que todo ideal a izquierda de A contenido en un pié $\mathfrak{a}$ de A es un ideal a izquierda del anillo $\mathfrak{a}$. Veamos que también vale la recíproca. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal a izquierda del anillo $\mathfrak{a}$. Entonces, como $\mathfrak{a}$ es un $\tilde{\mathfrak{a}}$-módulo semisimple (III. 5. 13.) también lo es $\mathfrak{m}$, de manera que $\mathfrak{m}$ será suma de imis de $\mathfrak{a}$

$$\mathfrak{m} = \sum_{\alpha} \tilde{\mathfrak{l}}_{\alpha}$$

Pero como por III. 5. 13., los imis de $\mathfrak{a}$ son imis de A, $\mathfrak{m}$ es un ideal de A. ⊠

Veamos finalmente lo que ocurre con los ideales biláteros.

III. 5. 16. - PROPOSICION

Los pies de un anillo sático son anillos sin ideales biláteros no triviales (es decir anillos "casi-simples" ([1], Liv. II, Chap. 8, § 5, Ej. 5) que no tienen necesariamente unidad; (en realidad son "simples" : v. III. 8. 1.).

Sea A un anillo sático, $\mathfrak{a}$ un pié de A. Si $\mathfrak{b}$ es un ideal bilátero no nulo del anillo $\mathfrak{a}$, será en particular un submódulo semisimple de $\mathfrak{a}_s$ y por lo tanto suma de una familia no vacía de imis

$$\mathfrak{b} = \sum_{\alpha \in J} \mathfrak{l}_{\alpha} \qquad J \neq \emptyset$$

Pero entonces

(1) $$\mathfrak{b}\mathfrak{a} = \left(\sum_{\alpha \in J} \mathfrak{l}_{\alpha}\right)\left(\sum_{\beta \in I} \mathfrak{l}_{\beta}\right) = \sum_{(\alpha,\beta) \in J \times I} \mathfrak{l}_{\alpha}\mathfrak{l}_{\beta} = \sum_{\alpha \in I} \mathfrak{l}_{\alpha} = \mathfrak{a}$$

por III. 5. 3., 3). Como además $\mathfrak{b}$ es un ideal a derecha en

(2) $$\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$$

y entonces de (1) y (2) se concluye $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. ∎

Con estas propiedades damos por terminada la teoría general de zócalo y pies de anillos. Usaremos estos conceptos en IV. 1 y IV. 2 para el caso de álgebras Hilbertianas, y en particular en IV. 3 para el caso $L^2(G)$, donde G es un grupo compacto, si bién todo el capítulo IV está construído en base al lenguaje de pies y zócalos.

El lector interesado en aplicaciones de propiedades (teoremas de representación, propiedades de linealidad) de estos conceptos a la teoría general de anillos podrá consultar, además de [4], los ejercicios 9 y 10, de § 5, Chap. 8, Liv II, de [1] .

---------

## § 6.- UN TEOREMA DE WEDDERBURN

Los resultados de este parágrafo se utilizarán por primera vez en IV. 1. 13.

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo D, no necesariamente conmutativo, H un hiperplano de E y $B = \mathrm{End}_D(E)$ el anillo de endomorfismos de E.

Sea $\mathfrak{l}_H$ el conjunto de los elementos u de B tales que $u(H) = 0$. Es claro que si $u \in \mathfrak{l}_H$ y $v \in B$, $vu(H) = v(o) = o$, de manera que $\mathfrak{l}_H$ es un ideal a izquierda de B (la Z-linealidad de $\mathfrak{l}_H$ es inmediata).

Como H es un hiperplano, si $u \in \mathfrak{l}_H$ y $u \neq 0$, valdrá $u^{-1}(o) = H$. En esta situación es válido el siguiente

### III. 6. 1.- LEMA

$\mathfrak{l}_H$ es un imi de B.

Será suficiente probar que $\mathfrak{l}_H$ es tal que todo $u_o \neq 0$ de $\mathfrak{l}_H$ es un B-generador. Supongamos elegido $u_o$. Si $u \in \mathfrak{l}_H$, y $x_o \notin H$, sean $z_o = u_o(x_o)$, $z = u(x_o)$. Como $u_o^{-1}(0) = H$, $z_o$ no es nulo. Sea entonces $v \notin B$ tal que $v(z_o) = z$. En estas condiciones se cumple

i) $vu_o(H) = 0 = u(H)$

ii) $vu_o(x_o) = v(z_o) = z = u(x_o)$

y como $E = H \oplus Dx_o$, se concluye que $vu_o = u$. ⊠

La situación anterior se nos presentará naturalmente en la teoría general. Sea A un anillo sático (sin necesariamente unidad), $\mathfrak{A}$ un pié de A, $\mathfrak{l}$ un imi contenido en $\mathfrak{A}$ y D el anillo de sus endomorfismos como $\mathfrak{A}$-módulo: $D = \mathrm{End}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{l})$.

De manera evidente, $\mathfrak{l}$ es un D-módulo (más aun, un $\mathfrak{A}$ - D - bimódulo en el sentido de Cartan-Eilenberg) y como D es un cuerpo (Lema de Schur; III. 5. 13; III. 5. 14.) podemos considerar la representación

$$T^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}} : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{End}_D(\mathfrak{l})$$

del anillo $\mathfrak{A}$ en el D-espacio vectorial $\mathfrak{l}$, definida por

$$T_x^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}}(y) = xy \qquad (x \in \mathfrak{A},\ y \in \mathfrak{l})$$

(comparar con la definición), para la que se puede afirmar:

<u>III. 6. 2.- LEMA</u>

<u>La representación $T^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}}$ es fiel.</u>

Si $T_x^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}} = 0$, será $xy = 0$ para todo $y \in \mathfrak{l}$ y por III. 5. 11, $x = 0$. ⊠

Mediante $T^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}}$ es posible asociar a cada elemento de $\mathfrak{A}$ un subespacio del D-espacio vectorial $\mathfrak{l}$. Será suficiente definir

$$\Phi(x) = (T_x^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}})^{-1}(0) \qquad (x \in \mathfrak{A}).$$

Con esa notación:

<u>III. 6. 3.- LEMA</u>

<u>$\Phi$ es constante en $\mathfrak{l}_\alpha^*$ $(= \mathfrak{l}_\alpha - \{0\})$, para cada imi $\mathfrak{l}_\alpha$ contenido en $\mathfrak{A}$.</u>

Sean $x, y \in \mathfrak{I}_\alpha$, $x, y \neq 0$. Queremos probar que $\phi(x) = \phi(y)$. Como por III. 5. 13.- $\mathfrak{I}_\alpha$ es un imi del anillo $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{A}x \subset \mathfrak{I}_\alpha$ será $\mathfrak{A}x = 0$ o $\mathfrak{A}x = \mathfrak{I}_\alpha$. La primera posibilidad contradice a III. 5. 11.-, de manera que $\mathfrak{A}x = \mathfrak{I}_\alpha$. Análogamente se puede afirmar $\mathfrak{A}y = \mathfrak{I}_\alpha$. Pero entonces existen $z, t \in \mathfrak{A}$ tales que $y = zx$, $x = ty$. Si ahora $b \in \phi(x)$, será $T_x^{\mathfrak{A},\mathfrak{I}} b = xb = 0$, de manera que $yb = (zx)b = z(xb) = 0$ y por lo tanto también $b \in \phi(y)$, es decir $\phi(x) \subset \phi(y)$. La inclusión contraria se demuestra de la misma manera. ⊠

Al subespacio $\phi(x)$, con $x \in \mathfrak{I}_\alpha$, $x \neq 0$ lo llamaremos $H_\alpha$, ya que según el lema anterior no depende de $x$ sino de $\alpha$

III. 6. 4.- LEMA

<u>Sea $\{\mathfrak{I}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la familia de todos los imis contenidos en el pie $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{I}$, como antes, un imi destacado de $\mathfrak{A}$. Para cada $\alpha \in I$, $H_\alpha$ es un hiperplano del espacio vectorial $\mathfrak{I}$ (sobre D).</u>

Sea $\alpha \in I$ fijo, $e_\alpha$ un idempotente perteneciente a $\mathfrak{I}_\alpha$ y unidad a derecha de $\mathfrak{I}_\alpha$. En virtud del lema anterior, $H_\alpha = \phi(e_\alpha)$. Supongamos que $H_\alpha$ no sea un hiperplano de $\mathfrak{I}$. Existirán entonces $a, b \in \mathfrak{I}$ tales que la suma $H + Da + Db$ sea directa.

Sean Q $a_1 = T_{e_\alpha}^{\mathfrak{A},\mathfrak{I}}(a)$, $b_1 = T_{e_\alpha}^{\mathfrak{A},\mathfrak{I}}(b)$. Si $a, b$ fueran linealmente dependientes existiría $\lambda \in D$ tal que $a_1 = \lambda b_1$, y entonces

$$T_{e_\alpha}^{\mathfrak{A},\mathfrak{I}}(a - \lambda b) = a_1 - \lambda b_1 = 0$$

de manera que $a - \lambda b$ pertenecería a $-H_\alpha$, lo que no ocurre.

Entonces $a_1 = e_\alpha a$, $b_1 = e_\alpha b$ son linealmente independientes y en particular no nulos En esas condiciones, $An_{\mathfrak{A}}(a_1) \neq An_{\mathfrak{A}}(b_1)$ ( pié de página 67 ). En efecto si suponemos $An_{\mathfrak{A}}(a_1) \neq An_{\mathfrak{A}}(b_1)$, la aplicación

$$\lambda : ta_1 \longrightarrow tb_1 \qquad t \in \mathfrak{A}$$

está bien definida ( $ta_1 = t'a_1 \Longrightarrow t - t' \in An_{\mathfrak{A}}(a_1) \Longrightarrow t - t' \in An_{\mathfrak{A}}(b_1) \Rightarrow tb_1 = t'b_1$)

y evidentemente pertenece a $D = End_{\mathfrak{O}}(\mathfrak{t})$.

Pero como $\lambda(a_1) = \lambda(e_\alpha\ a_1) = e_\alpha b_1 = b_1$, $a_1$ y $b_1$ resultan linealmente dependientes sobre D, lo que ya se probó no ocurre.

Entonces $An_{\mathfrak{O}}(a_1) \neq An_{\mathfrak{O}}(b_1)$.

Podemos suponer por lo tanto que exite $y \in \mathfrak{O}$, tal que $ya_1 = 0$, $yb_1 \neq 0$. Si llamamos z al elemento $ye_\alpha$, se cumplirá

$$za = ye_\alpha\ a = ya_1 = 0$$

$$zb = ye_\alpha\ b = yb_1 \neq 0$$

de manera que $z \neq 0$ y $a \in \phi(z)$, y como por construcción, $a \notin \phi(e_\alpha)$, tendremos $\phi(z) \neq \phi(e_\alpha)$ en contradicción con III. 6. 3.- Luego $H_\alpha$ es un hiperplano. ∎

Mediante una aplicación del lema III. 6. 1.- construiremos ahora una familia de imis de $B = End_D(\mathfrak{t})$ a partir de los imis de $\mathfrak{O}$.

Si $\{\mathfrak{t}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es como antes la familia de todos los imis de $\mathfrak{O}$, llamaremos $\mathcal{M}_\alpha$ a los subconjuntos de B :

$$\mathcal{M}_\alpha = T_{\mathfrak{t}_\alpha}^{\mathfrak{O},\mathfrak{t}}$$

Es claro que para cada $\alpha \in I$, $\mathcal{M}_\alpha$ es un ideal en el anillo $T_{\mathfrak{O}}^{\mathfrak{O},\mathfrak{t}}$. Veremos sin embargo que son ideales en todo B, y, más aún, minimales.

III. 6. 5.- LEMA

Para cada $\alpha \in I$, $\mathcal{M}_\alpha$ es un imi de B. Si la suma $\sum_{\beta \in J} \mathfrak{t}_\beta$ es directa, también la suma $\sum_{\beta \in J} \mathcal{M}_\beta$ es directa.

Sea $H_\alpha$ como antes. Sabemos por III. 6. 4.- que $H_\alpha$ es un hiperplano de $\mathfrak{t}$ (como E. V. sobre D), de manera que por III. 6. 1.-,

$$\mathcal{M}_\alpha = \{u \in B;\ u(H_\alpha) = 0\}$$

es un imi de B.

Si $u \in \mathcal{M}_\alpha$, será $u = T_t^{\mathfrak{O},\mathfrak{t}}$ para algún $t \in \mathfrak{t}_\alpha$ y entonces como $H_\alpha \subset (T_t^{\mathfrak{O},\mathfrak{t}})^{-1}(0)$ por definición de $H_\alpha$, será $u(H_\alpha) = 0$, o lo que es lo mismo $u \in \mathfrak{M}_\alpha$. Hemos probado entonces que $\mathfrak{N}_\alpha \subset \mathfrak{M}_\alpha$. Veamos que también vale la inclusión inversa. Elijamos $a \in \mathfrak{l}$ tal que $a \notin H_\alpha$. Los endomorfismos u pertenecientes a $\mathfrak{M}_\alpha$ quedan caracterizados (por ser $H_\alpha$ un hiperplano) por sus valores $u(a)$. Esto equivale a decir que para que dos elementos de $\mathfrak{M}_\alpha$ sean coincidentes es suficiente que tomen el mismo valor en a. Por el mismo argumento de minimalidad de siempre, debe ser $\mathfrak{l}_\alpha a = 0$ o $\mathfrak{l}_\alpha a = \mathfrak{l}$. Pero $\mathfrak{l}_\alpha a = 0$ equivale a $a \in H_\alpha$, lo que no ocurre por elección de a. Entonces $\mathfrak{l}_\alpha a = \mathfrak{l}$. En particular existe $v \in \mathfrak{l}_\alpha$ tal que $va = u(a)$. Pero entonces $T_v^{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}$ y u son dos elementos de $\mathfrak{M}_\alpha$ que coinciden en a, de lo que se deduce que son el mismo, y en consecuencia puede afirmarse que todo $u \in \mathfrak{M}_\alpha$ es de la forma $T_v^{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}$ para algún $v \in \mathfrak{l}_\alpha$, y por lo tanto que u pertenece a $\mathfrak{N}_\alpha$. Habiendo probado $\mathfrak{N}_\alpha \subset \mathfrak{M}_\alpha$ y $\mathfrak{M}_\alpha \subset \mathfrak{N}_\alpha$ se termina el lema. La segunda parte es evidente, puesto que la aplicación $T^{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}$ es fiel (III. 6. 2.- )

III. 6. 6.- TEOREMA (Wedderburn)

Si A es un anillo sático, $\mathfrak{S}_A$ su zócalo y $\mathfrak{a}$ uno de sus pies, las propiedades siguientes son equivalentes :

1) El A-módulo $\mathfrak{a}$ tiene longitud finita n.
2) Si $\mathfrak{l}$ es un imi cualquiera contenido en $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ y $M_n(D)$ son anillos isomorfos, donde D es el cuerpo opuesto al cuerpo $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$.
3) El anillo $\mathfrak{a}$ tiene unidad.
4) $\mathfrak{a}$ contiene un elemento no nulo del centro de $\mathfrak{S}_A$.

$1 \Longrightarrow 2$

Sea $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}_1 \oplus \mathfrak{l}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{l}_n$ una descomposición de $\mathfrak{a}$ en suma directa (finita por hipótesis) de imis, T la representación $T^{\mathfrak{a},\mathfrak{l}_1}$, D el cuerpo $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l}_1)$ y B el anillo $\mathrm{End}_D(\mathfrak{l}_1)$. Por III. 6. 5.-, B contiene a la suma directa de los n imis $\mathfrak{N}_i$, imágenes por T de los $\mathfrak{l}_i$. Pero entonces la dimensión m de $\mathfrak{l}_1$ como D-espacio vectorial debe ser mayor o igual que n. Esto es claro a partir del comentario de la página 70. Por otra parte si $H_i$ ($i = 1, \dots n$) son los hiperplanos de $\mathfrak{l}_1$ correspondientes a los $\mathfrak{l}_i$ construídos como en los lemas anteriores ($H_i = \phi(x_i)$ , $0 \neq x_i \in \mathfrak{l}_i$ ) y $b \in \bigcap_i H_i$ , será $x_i b = 0$ para todo $x_i \in \mathfrak{l}_i$ ($i = 1, \ldots n$) de manera que $\mathfrak{A}.b = 0$ . En consecuencia $\bigcap_i H_i = 0$ (III. 5. 11.) Pero en un espacio de dimensión $m > n$ , $n$ hiperplanos tienen una intersección de dimensión $\geqslant m-n$ , de donde $m = n$ . Pero entonces $B = \oplus \mathfrak{u}_i$ y $T$ es un isomorfismo (de anillos) entre $\mathfrak{A}$ y $B$ , y por lo tanto $\mathfrak{A} \approx B \approx \mathrm{End}_D((D_s)^n) \approx M_n(D^o)$ (ver nuevamente el comentario citado más arriba) .

$2 \Longrightarrow 3$

Es evidente ya que todo anillo de la forma End tiene unidad .

$3 \Longrightarrow 4$

Demostraremos que si $\mathfrak{A}$ tiene unidad, ésta pertenece al centro de $\mathfrak{S}_A$ . Sea $e$ dicha unidad. Es claro que $e$ conmuta con todo elemento de $\mathfrak{A}$ . Por otra parte, si $\mathfrak{A}'$ es otro pié de $A$ , $e\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}' e = 0$ (III. 5. 7.- ) . Pero entonces $e$ conmuta con todo elemento de todo pié y por lo tanto con todo elemento de $\mathfrak{S}_A$ ya que $\mathfrak{S}_A = \bigoplus_\alpha \mathfrak{A}_\alpha$ (III. 5. 6.-) .

$4 \Longrightarrow 1$

Supongamos que $c$ sea un elemento no nulo de $\mathfrak{A}$ , central en $\mathfrak{S}_A$ . Sea $\mathfrak{A} = \bigoplus \mathfrak{l}_\alpha$ una descomposición de $\mathfrak{A}$ en suma directa de imis. Como $c \in \mathfrak{A}$ , será $c = \sum_{\alpha \in J} c_\alpha$ con $c_\alpha \in \mathfrak{l}_\alpha$ y $J \subset I$ , $J$ finito. Por ser $\mathfrak{A}$ un ideal bilátero $c\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}_A c \subset \mathfrak{A}$ Pero además $c\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}_A c$ es un ideal bilátero y como $c\mathfrak{S}_A \supset c\mathfrak{A} \neq 0$ (III. 5. 11) y $\mathfrak{A}$ es minimal (III. 5. 10.-) debe verificarse $c\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}_A c = \mathfrak{A}$ , de donde se deduce

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_A c = \sum_{\alpha \in J} \mathfrak{S}_A c_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in J} \mathfrak{l}_\alpha$$

de manera que $\mathfrak{A}$ tiene longitud finita .

Nota: la condición 4) puede debilitarse, como se ve en la demostración, a la exigencia de un elemento de $\mathfrak{A}$ , no nulo, en el "normalizador" de $\mathfrak{S}_A$ en lugar de su centro. ⊠

## § 7 . - ANILLOS SEMISIMPLES

Nos ocupamos en este parágrafo de un caso particular de módulos semisimples: los de la forma $A_s$ donde A es un anillo (recuérdese que $A_s$ es un $\tilde{A}$-módulo). Ese será el significado de A cuando no se indique otra cosa .

### III. 7. 1. - DEFINICION

Un anillo A se llamará SEMISIMPLE si el módulo $A_s$ es semisimple .

### III. 7. 2. - PROPOSICION

Un anillo es semisimple sii coincide con su zócalo. Todo pie de todo anillo y el zócalo de todo anillo son anillos semisimples . ∎

Obsérvese sin embargo que un ideal a izquierda de un anillo semi-simple ( o aun simple: § 8) puede no ser semisimple (columnas en $M_n$ (C)) .

Pese a la aparente generalidad con que comenzamos el parágrafo y que conservamos en la definición dada, continuaremos con el caso interesante de los anillos con unidad . Para tales anillos, $A_s$ será solamente un A-módulo , (puesto que es innecesario poner lo que ya está!)

### III. 7. 3. - PROPOSICION

Un anillo con unidad es semisimple si y solamente si todo módulo sobre él es semisimple .

Sea A un anillo con unidad .

Evidentemente si todo A-módulo es semisimple , lo es en particular $A_s$ y por lo tanto A es semisimple. Veamos la recíproca. Sea M un A-módulo y supongamos que A es semisimple. Si $\mathfrak{l}$ es un imi de A ( submódulo simple de $A_s$ ), para cada elemento $a \in M$, la aplicación $f : \mathfrak{l} \longrightarrow M$ definida por

$$f(x) = xa$$

es un homomorfismo de A-módulos y entonces por el lema de Schur (III. 3. 5.-), $\mathfrak{l}a = 0$ ó $\mathfrak{l}a$ es un submódulo simple de M.

Consideremos el submódulo de M

$$N = \sum \mathfrak{l}a$$

con $\mathfrak{l}$ recorriendo la familia de los imis de A y a recorriendo M. Es claro que N es semisimple y además se cumple

$$N = \sum \mathfrak{l}a \supset \left(\sum \mathfrak{l}\right) M$$

y ya que $\sum \mathfrak{l} = A$, por ser A semisimple, $N \supset AM = M$.

Eso prueba que M es semisimple. ⊠

III. 7. 4.- PROPOSICION

Si A es un anillo con unidad semisimple, todo A-módulo simple es A-isomorfo a un imi de A.

Resulta inmediatamente de III. 3. 4.- y III. 4. 3.- c ) observando que un suplementario de un ideal maximal a izquierda es necesariamente un imi. ⊠

Veamos ahora una propiedad de los ideales de un anillo semisimple con unidad:

III. 7. 5.- PROPOSICION

Si A es un anillo con unidad semisimple, todo ideal a izquierda de A tiene unidad a derecha.

En efecto, si $\mathfrak{l}$ es un ideal a izquierda, por III. 4. 3.- , c) existe un ideal a izquierda $\mathfrak{l}'$ tal que

$$A = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{l}'$$

Pero entonces existen $e \in \mathfrak{l}$, $e' \in \mathfrak{l}'$ tales que $1 = e + e'$ (1 es la unidad de A ) y si $x \in A$, será

$$x = xe + xe'$$

y como $xe \in \mathfrak{l}$, $xe' \in \mathfrak{l}'$, las aplicaciones $x \longrightarrow xe$, $x \longrightarrow xe'$ son las proyecciones de la suma directa. Pero entonces si $x \in \mathfrak{l}$, $x = xe$. ⊠

III. 7. 6.- COROLARIO

Todo ideal a izquierda de todo anillo semisimple con unidad es idempotente . ⊠

III. 7. 7.- COROLARIO

Todo anillo semisimple con unidad es un anillo sático. ⊠

En virtud de este último corolario, podemos afirmar que es válida la primera conclusión de la proposición III. 5. 10. - para anillos semisimples con unidad, pero en este caso también vale la recíproca:

III. 7. 8.- PROPOSICION

Si A es un anillo semisimple con unidad y $\mathfrak{a}$ es un ideal bilátero de A , son equivalentes:

1) $\mathfrak{a}$ es un pie .

2) $\mathfrak{a}$ es minimal .

Todo pié es minimal por III. 5. 10.- . Sea $\mathfrak{a}$ un ideal bilátero minimal de A . Por III. 4. 17.- será

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{G}(A)} \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_\lambda$$

donde $\mathfrak{a}_\lambda$ es el pié de tipo $\lambda$ de A . Pero entonces por minimalidad de $\mathfrak{a}$ , será $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$ para algún $\lambda$ ⊠

III. 7. 9.- PROPOSICION

Si A es un anillo semisimple con unidad, $A_s$ es de longitud finita .

Sea $A = \bigoplus_{\alpha \in I} I_\alpha$ una descomposición de A en suma directa de imis de A . Como $1 = \sum_{\alpha \in J} a_\alpha$ con J finito , será

$$a = \sum_{\alpha \in J} a\, a_\alpha$$

para cada $a \in A$ y por lo tanto $A = \bigoplus_{\alpha \in J} I_\alpha$ ⊠

El último resultado de este parágrafo es muy importante y será utilizado más adelante en el caso topológico .

III. 7. 10.- COROLARIO

Si A es un anillo semisimple con unidad, los ideales biláteros minimales (= pies) de A son, en cuanto a anillos, isomorfos a anillos de matrices sobre un cuerpo no necesariamente conmutativo (el descripto en III. 5. 14.- ) . ⊠

(use III. 6. 6.-)

-----------

## § 8 . - ANILLOS SIMPLES

Todos los anillos y álgebras que aparecen en este parágrafo a partir de III. 8. 2.- tienen unidad .

### III. 8. 1.- DEFINICION

Se dice que un anillo es SIMPLE si coincide con uno de sus pies .

Todo anillo simple es rengo y semisimple .Todo pie de todo anillo es simple (III. 5. 13.-) . Si $A$ es un anillo simple el $\tilde{A}$-módulo $A_s$ es isotípico .

Obsérvese que la definición dada coincide con "anillo sin ideales biláteros propios" si se ha supuesto semisimplicidad (III. 5. 15.-), es decir: simple $\doteq$ semisimple + casi simple .

De III. 7. 4.- podemos concluir:

### III. 8. 2.- PROPOSICION

Si $A$ es simple, todos los $A$-módulos simples son isomorfos y todos los $A$-módulos isotípicos y del mismo tipo .

En efecto, por III. 7. 4.- , los $A$-módulos simples son isomorfos a imis de $A$ , los que a su vez son isomorfos entre sí por ser $A$ simple. La segunda parte resulta de la primera . ⊠

De la misma manera, de III. 7. 10.- , III. 5. 14.- y III. 3. 7.- se concluye:

### III. 8. 3.- PROPOSICION

Un álgebra $A$ es simple de dimensión finita sobre $C$ sii es isomorfa a un álgebra $M_n(C)$ de matrices . ⊠

III. 8. 4.- COROLARIO

Toda álgebra simple y de dimensión finita sobre C es de dimensión $n^2$ para algún $n \in N$.

Como en $M_n(C)$ se comprueba inmediatamente (ver comentario pag. 70 ) que las familias de matrices columnas

$$P = \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1i} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & a_{ni} & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$$

son imis, teniendo en cuenta III. 8. 3, se concluye

III. 8. 5.- COROLARIO

Para un álgebra simple (sobre C) son equivalentes:

1) tiene dimensión $n^2$.

2) tiene longitud n como módulo sobre sí misma).

3) sus imis tienen dimensión n.

⊠

III. 8. 6.- COROLARIO

Si A es un álgebra simple de dimensión finita y $\mathcal{I}$ uno de sus imis, la representación

$$T^{A,\mathcal{I}} : A \longrightarrow End_C(\mathcal{I})$$

(ver pág. 84 ) es un isomorfismo de C-álgebras.

⊠

III. 8. 7.- PROPOSICION

Si A es un álgebra sobre C simple y de dimensión finita, para que dos A-módulos de dimensión finita sean A-isomor

<u>morfos es necesario y suficiente que sean C-isomorfos (o lo que es lo mismo que tengan la misma dimensión).</u>

Si A es simple (y con unidad como se ha supuesto desde III. 8.2.), todo módulo sobre A es semisimple (III. 7. 3.) y hay una sóla clase de módulos simples. Sean M , N dos A-módulos tales que $\dim_C N = \dim_C M < +\infty$.

Sean entonces

$$N = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i \qquad\qquad M = \bigoplus_{i=1}^{m} M_i$$

descomposiciónes de N y M en suma directa de submódulos simples (finitas por ser ambos de $\dim_C$ finita). Como $n \dim_C N_i = \dim_C N = \dim_C M = \dim_C M_i$ y $\dim_C N_i = \dim_C M_i$ será $n = m$.

Si además $\{\varphi_i\}$ son n isomorfismos

$$\varphi_i : N_i \longrightarrow M_i$$

de A-módulos, y se define $f : N \longrightarrow M$ para cada $x = \sum x_i$ , $x_i \in N_i$ por

$$f(x) = f(\sum x_i) = \sum \varphi_i(x_i)$$

es inmediato que f es un isomorfismo de A-módulos entre N y M. Esto prueba la suficiencia de la condición. La necesidad es inmediata.

$\boxtimes$

Este mismo enunciado puede traducirse a la afirmación de que la dimensión es un invariante característico en la categoría de los módulos de dimensión finita sobre un álgebra simple ( con unidad). Como vale

$$\ell_A(M) \cdot \ell_A(A) = \dim_C(M)$$

también lo es la longitud (en la misma categoría).

---------

## § 9.- EXTENSION DEL DOMINIO DE OPERADORES

### Nº 1 : EXTENSION

Usaremos la notación (Cartan-Eilenberg: Homological Algebra) que explicita el anillo de operadores de un módulo y el lado al que opera mediante subíndices : ${}_A M = M$ es un A-módulo a izquierda, $M_A = M$ es un A-módulo a derecha.

Sean A , B dos álgebras sobre C y supongamos que B tenga unidad y que A sea un B-bimódulo (i.e., B opera a izquierda y a derecha sobre A y vale $b(ab') = (ba)b'$) . No supondremos que A tenga unidad.

Nos proponemos el problema de asociar a cada B-módulo a derecha E un A-módulo a izquierda (tecnicamente : un $\tilde{A}$-módulo. Ningún problema en ese sentido).

Una manera natural de proceder es la siguiente : se sabe que se puede proveer al espacio vectorial sobre C

$$I = \mathrm{Hom}_B(E_B , A_B)$$

de una tal estructura designando por $a.f$ al homomorfismo $x \longrightarrow af(x)$ de $E_B$ en $A_B$. Es suficiente asociar al B-módulo E el A-módulo I.

### Nº 2 : UN TEOREMA DE FROBENIUS

Supongamos que A es un álgebra sática (III. 5. 9.) y que a es un pié de A de dimensión finita sobre C con unidad $u_a$ central en A (según III. 6. 6. $u_a$ es central en $\mathfrak{S}_A$. Aquí necesitamos algo más). Entonces la aplicación $p_a : A \longrightarrow a$ que manda x en $u_a x = x u_a$ es un proyector de A sobre a que induce una descomposición de A como suma directa $A = a \oplus a'$ donde a' ( el núcleo de $p_a$ ) es también un ideal bilátero. Notaremos $p_{a'}$ el proyector de A sobre a'.

Supondremos como en el nº anterior que A es un B-bimódulo y que tanto a como a' son B-submódulos y , más aún, que todos los ideales izquierdos y derechos de a son, respectivamente, submódulos para las estructuras izquierda y derecha de A como B-módulo.

Como es conocido la descomposición $A = a \oplus a'$ induce una descomposición de I en suma directa $I_a \oplus I_{a'}$ de dos A-módulos izquierdos $I_a = \mathrm{Hom}_B(E_B , a_B)$ y

$I_{a'} = \mathrm{Hom}_B(E_B\,,\ a'_B)$ y el proyector sobre $I_a$ está dado por $f \longrightarrow p_a \circ f = u_a f$. Como además $p_a p_{a'} = 0$, $a'$ opera trivialmente sobre $I_a$ de manera que la estructura de $I_a$ como A-módulo está determinada por la estructura de $I_a$ como a-módulo.

III. 9. 1.- TEOREMA (Frobenius)

Supongamos que E es un B-módulo simple (a derecha) y que todos los ideales minimales a izquierda y derecha de a son B-semisimples. En ese caso si $\mathcal{W}$ es un ideal minimal a derecha y $\mathfrak{l}$ un imi de a, vale

$$_A\left[I_a\,,\ \mathfrak{l}\right] = {}_a\left[I_a\,,\ \mathfrak{l}\right] = \left[\mathcal{W}\,,\ E\right]$$

donde $\mathcal{W}$ y E se consideran como B-módulos derechos.

Demostración.

La primera igualdad es evidente ya que, como dijimos, A opera sobre $I_a$ solamente por a.

Como a es de dimensión finita, será (III. 8. 3.) $a = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} r_i$ suma directa de ideales minimales derechos $r_i$ y además (III. 8. 5.) $\dim_C a = n^2$, $\dim_C r_i = n$.

Como por hipótesis cada $r_i$ es B-semisimple, existirán descomposiciones $r_i = \bigoplus\limits_{j=1}^{n_i} \mathcal{W}_{i,j}$ de cada $r_i$ como suma directa de (un número finito de) B-submódulos simples.

Pero entonces:

(1) $$I_a = \mathrm{Hom}_B(E\,,\ a) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_B(E\,,\ r_i) = \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_B(E\,,\ \mathcal{W}_{i,j})$$

y en virtud del lema de Schur (III. 3. 5.), si $\mathrm{Hom}_B(E\,,\ \mathcal{W}_{i,j}) \neq 0$, será $\mathrm{Hom}_B(E\,,\ \mathcal{W}_{i,j}) = \mathrm{End}_B(E) = C$ (III. 3. 7.).

De (1) resulta entonces

(2) $$I_a = C^m$$

donde $m = \sum \left[r_i\,,\ E\right]$ y como todos los $r_i$ son B-isomorfos (por ser A-isomorfos ya que a es un pié), se concluye:

(3) $$m = n\left[r_i\,,\ E\right] = n\left[\mathcal{W},\ E\right].$$

donde $r$ es cualquier ideal minimal a derecha de $a$.

Por otra parte (III. 8. 2.) como $a$ es simple, $I_a$ es semisimple isotípico de tipo $\mathfrak{l}$ donde $\mathfrak{l}$ es cualquier imi de $a$, de manera que existirá una descomposición $I_a = \bigoplus_{i=i}^{p} M_i$ donde cada $M_i$ es $a$-isomorfo a $\mathfrak{l}$, y donde $p = {}_a[I_a, \mathfrak{l}]$.

Pero entonces

(4) $$\dim_C I_a = p \cdot n = n \;{}_a[I_a, \mathfrak{l}]$$

y de (2), (3) y (4) se concluye

$$ {}_a[I_a, \mathfrak{l}] = p = \frac{1}{n} \dim_C I_a = \frac{m}{n} = [r, E] \qquad \boxtimes$$

III. 9. 1. 1.- NOTA

Volvamos a la situación del N° 1, pero supongamos que además $A$ es un ideal izquierdo del anillo $\Lambda$. Entonces es claro que se puede dar a $I$ una estructura de $\Lambda$-módulo a izquierda (y no sólo de $A$-módulo como hemos hecho hasta ahora) con definición análoga:

Si $f \in I$, $\lambda \in \Lambda$, designaremos con $\lambda f$ el homomorfismo $x \longrightarrow \lambda f(x)$. Puesto que $\Lambda$ no interviene en III. 9. 1., el enunciado no es afectado por esta generalización de la noción de extensión.

III. 9. 1. 2.- NOTA

Si se parte de dos $B$-módulos $E$ y $E'$ isomorfos, los $\Lambda$-módulos $I$ y $I'$ son $\Lambda$-isomorfos. Es una verificación inmediata.

## N° 3 : UN TEOREMA DE BURNSIDE

Sea $A$ un álgebra simple con unidad y de dimensión finita sobre $C$, es decir un álgebra $M_n(C)$ y $B$ una subálgebra no nula de $A$, pero que no tiene necesariamente unidad. Supondremos a $A$ identificada con $M_n(C)$ (lo que no se puede hacer canónicamente) y también con $\mathrm{End}_C(C^n)$.

III. 9. 2.- LEMA

$C^n$ es un $B$-módulo fiel.

Esto es inmediato ya que $B \subset A = \mathrm{End}_C(C^n)$.

⊠

III. 9. 3.- LEMA

Si $C^n$ es un B-módulo simple, B es transitivo sobre $C^n$.

Si $E = \{x \in C^n \; ; \; Bx = 0\}$ es claro que E es un B-submódulo de $C^n$. Como $C^n$ es B-simple, $E = 0$ o $E = C^n$. Pero no puede ser $E = C^n$ en virtud del lema III. 9. 2., a menos que $B = 0$, y hemos supuesto lo contrario. Luego $E = 0$. Si $x \neq 0$, $x \in C^n$, entonces $Bx \neq 0$ y como es un B-submódulo de $C^n$, que es simple, será $Bx = C^n$. Luego B es transitivo.

⊠

Nota: este resultado ya fué obtenido para anillos con unidad (III. 3. 1.) y puede también deducirse de allí con poco trabajo.

III. 9. 4.- LEMA

Si $C^n$ es un B-módulo simple, B es un anillo semisimple.

Sea $\mathcal{M} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}} \mathfrak{m}$ donde $\mathfrak{M}$ es la familia de todos los ideales a izquierda maximales de $\tilde{B}$ (§ 2). $\mathcal{M} \subset B$, puesto que $B \in \mathfrak{M}$ (la ampliación se ha hecho mediante C!). Si $a \in \mathcal{M}$, será $a \in \mathrm{An}_B(x)$ para todo $x \in C^n$ (III. 3. 3.), de manera que $ax = 0$, para todo $x \in C^n$, lo que sólo puede ocurrir si $a = 0$, en virtud del lema III. 9. 2.

Según eso, $\mathcal{M} = 0$. Como B es de dimensión finita, existe una subfamilia $\mathfrak{M}_0$ de $\mathfrak{M}$ tal que también $\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0} \mathfrak{m} = 0$, $\mathfrak{M}_0$, finita.
Sea

$$F = \prod_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0} \tilde{B} / \mathfrak{m}$$

Como cada $\tilde{B}/\mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0$ es un $\tilde{B}$-módulo simple (III. 3. 4.), F (que es suma finita de réplicas de cocientes de ese tipo) es un B-módulo semisimple. Sea $f : B \longrightarrow F$ definida por

$$f(a) = (a\,\mathfrak{m})_{\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0}$$

donde $a_{\mathfrak{m}}$ es la imagen de $a$ por el isomorfismo canónico $\tilde{B} \to \tilde{B}/\mathfrak{m}$.

$f$ es un $\tilde{B}$-homorfismo. Si $f(a) = 0$, será $a_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0$ lo que sólo ocurre si $a \in \mathfrak{m}$, para todo $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}_0$, es decir si $a = 0$. Eso prueba que $f$ es inyectiva. Pero entonces $B$ es un $\tilde{B}$-submódulo de $F$ y como $F$ es semisimple, también lo es $B$ (III. 4. 6. ). Luego $B$ es un anillo semisimple. ⊠

III. 9. 5.- LEMA

Si $C^n$ es un $B$-módulo simple, $B$ es un anillo simple.

Sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ piés de $B$; $a \in \mathfrak{a}$, $a' \in \mathfrak{a}'$, $x, x' \in C^n$ tales que $ax \neq 0$, $a'x' \neq 0$ (lema III. 9. 2). Si $y \in C^n$, existen $b, b' \in C^n$ tales que

$$bax = y$$

$$b'a'x' = y$$

por el lema III. 9. 3.

Pero entonces, por ser $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ ideales a izquierda, y ser $C^n$ $B$-simple,

$$\mathfrak{a}\, x = C^n \qquad \mathfrak{a}'x' = C^n$$

De allí se concluye $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}'\,C^n = \mathfrak{a}\,C^n = C^n$, de manera que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' \neq 0$. Luego $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$ (III. 5. 7) y $B$ es rengo. Como también es semisimple (III. 9. 4), es simple. ⊠

III. 9. 6.- TEOREMA (BURNSIDE)

Si $B$ es una subálgebra (no necesariamente con unidad) de $A = \mathrm{End}_C(C^n)$ tal que $C^n$ es un $B$-módulo simple, entonces $B = A$.

Según los lemas anteriores, $B$ es un álgebra simple. Pero entonces como es de dimensión finita, es de longitud finita y por lo tanto tiene unidad (teorema de Wedderburn III. 6. 6). Por III. 7. 4 $B$ tiene un imi isomorfo a $C^n$ y por lo tanto de dimensión $n$. Pero entonces de III. 8. 4 y III. 8. 5 se concluye que $B$ tiene dimensión $n^2$ y por lo tanto $B = A$.

## § 10.- SIMPLICIDAD Y PRODUCTO TENSORIAL

Todas las álgebras que aparecen en éste parágrafo tienen unidad.

Veremos ahora algunas relaciones entre las propiedades de simplicidad y los productos $\otimes$.

### III. 10. 1.- LEMA

Sea $B$ un álgebra simple de dimensión finita sobre $C$, $A$ un álgebra sobre $C$. Cada ideal bilátero de $B \otimes_C A$ es de la forma $B \otimes_C \mathfrak{A}$ donde $\mathfrak{A}$ es un ideal bilátero de $A$.

En virtud de III. 7. 3 , podemos suponer que $B$ tiene una base $e_{ij}$ $i, j = 1, \dots n$ tal que

$$e_{ij} e_{hk} = \delta_{jh} e_{ik}$$

Todo elemento de $B \otimes_C A$ será entonces de la forma

$$\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}.$$

con $a_{ij} \in A$.

Supongamos que $\mathfrak{b}$ es un ideal bilátero de $B \otimes_C A$. Sea

$$z = \sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}$$

un elemento de $\mathfrak{b}$.

Si llamamos $u_{hk}$ al elemento de :

$$u_{hk} = (e_{hh} \otimes 1) \otimes z \otimes (e_{kk} \otimes 1)$$

se cumple

$$u_{hk} = \sum_{i,j} e_{hh} e_{ij} e_{kk} \quad a_{ij}$$

y como

$$e_{hh} e_{ij} e_{kk} = \delta_{hi} \delta_{jk} e_{hk}$$

será

$$u_{hk} = e_{hk} \otimes a_{hk}$$

Si $c, d$ son dos elementos cualesquiera de $B$, será

$$ce_{hk}d \otimes a_{hk} = (c \otimes 1) \otimes u_{hk} \otimes (d \otimes 1) \in \mathfrak{b}$$

y como B es simple, todo elemento de la forma

$$x \otimes a_{hk} \qquad ,h, k = 1, 2, \dots n.$$

con $x \in B$ está en $\mathfrak{b}$.

Si $\mathfrak{a}$ es el ideal bilátero engendrado por los elementos $a_{ij}$ que aparecen en la descomposición de algún $z \in \mathfrak{b}$ (se entiende que el sentido es "z recorriendo $\mathfrak{b}$"), es claro que

$$\mathfrak{b} = B \otimes_C \mathfrak{a} \qquad \boxtimes$$

De ésta proposición resulta un lema que usaremos en III. 10. 3.

III. 10. 2.- LEMA

Sea B un álgebra simple sobre C, de dimensión finita. Las álgebras $End_C(B)$ y $B \otimes_C B^o$ ($B^o$ = opuesta de B) son canónicamente isomorfas.

$B \otimes_C B^o$ es simple por aplicación reiterada de III. 10. 1, ya que si B es simple, también $B^o$ es simple.

Sea $u: B \times B^o \longrightarrow End_C(B)$ definida por

$$u_{b,b^o}(z) = bzb^o \qquad (z \in B).$$

Es claro que, puesto que u es C-bilineal, queda definida una aplicación C-lineal de $B \otimes_C B^o$ en $End_C(B)$, que llamaremos también u. Como se cumple

$$u_{(b_1 \otimes b_1^o) \otimes (b_2 \otimes b_2^o)} = u_{(b_1 b_2 \otimes b_1^o \; b_2^o)} = u_{b_1 b_2 \otimes b_2^o b_1^o}.$$

será

$$u_{(b_1 \otimes b_1^o) \otimes (b_2 \otimes b_2^o)}(z) = b_1 \, b_2 \, z b_2^o \, b_1^o = (u_{b_1 \otimes b_1} \circ u_{b_2 \otimes b_2^o})(z)$$

y por lo tanto u es también un homomorfismo de álgebras, no nulo ($u_{1 \otimes 1}$ = id.). Se concluye que u es inyectiva (puesto que $B \otimes_C B^o$ es simple) y como

$$\dim_C(B \otimes_C B^o) = (\dim_C(B))^2 = \dim_C(\mathrm{End}_C(B))$$

es claro que también es suryectiva, es decir un isomorfismo. ⊠

Recordemos que si A es un anillo, se llama CONMUTANTE ( o centralizador ) de una parte $M \subset A$ al conjunto $M' = \{ x;\ xm = mx\ \forall\ m \in M \}$.

Veremos ahora una proposición que se refiere a la disjunción lineal de una parte con su conmutante, en condiciones especiales.

III. 10. 3.- PROPOSICION (WEDDERBURN)

Sea A un álgebra sobre C, B una subálgebra simple de dimensión finita de A. Si B' es la subálgebra conmutante de B, el homomorfismo C-lineal canónico de $B \otimes_C B'$ en A es un isomorfismo de anillos.

El isomorfismo canónico de $B \otimes_C B'$ en A es el que completa el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \times B' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & A \\ B \otimes_C B' \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

donde g es la aplicación bilineal $g(x, y) = xy$. Llamémoslo f. De f sabemos que es C-lineal. Veamos primero que es multiplicativo. Será suficiente probar que

$$f((b_1 \otimes b_1') \otimes (b_2 \otimes b_2')) = f(b_1 \otimes b_1').f(b_2 \otimes b_2')$$

pero

$$f((b_1 \otimes b_1') \otimes (b_2 \otimes b_2')) = f(b_1 b_2 \otimes b_1' b_2') = b_1 b_2 b_1' b_2'$$

y

$$f(b_1 \otimes b_1')\ f(b_2 \otimes b_2') = b_1 b_1' b_2 b_2'$$

que evidentemente coinciden ya que $b_1' b_2 = b_2 b_1'$ por ser B' el conmutante de B.

Probaremos ahora que f es inyectivo.

Si $\mathcal{U}$ es el núcleo de f, es un ideal bilátero de $B \otimes_C B'$ y por el lema III. 10. 1, de la forma

$$\mathcal{M} = B \otimes_C \mathcal{M}'$$

donde $\mathcal{M}'$ es un ideal bilátero de $B'$. Según eso, para todo $y \in \mathcal{M}'$ será $1 \otimes y \in \mathcal{M}$ y por lo tanto

$$y = f(1 \otimes y) = 0$$

de manera que $\mathcal{M}' = 0$ y entonces $\mathcal{M} = B \otimes 0 = 0$.

Además es suryectivo.

Para demostrarlo consideraremos a $A$ como módulo sobre un nuevo anillo.

Si $\Lambda = B \otimes_C B^0$, $A$ tiene una estructura de $\Lambda$-módulo:

$$(b \otimes b^0, z) \longrightarrow bzb^0 \qquad (z \in A)$$

y, puesto que $\Lambda$ es simple (III. 10. 2), $A$ es $\Lambda$-semisimple (III. 7. 3):

$$A = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$$

donde cada $M_\alpha$ es un $\Lambda$-submódulo simple de $A$.

Ahora bien, $B$ es un $\Lambda$-submódulo de $A$ con estructura naturalmente equivalente a la de $\mathrm{End}_C(B)$-módulo (gracias a III. 10. 2. y a la definición del $\Lambda$-módulo $A$), y en particular, $\Lambda$-simple.

Pero eso obliga a que cada $M_\alpha$ sea $\Lambda$-isomorfo a $B$ (III. 8. 2) mediante, digamos $\Psi_\alpha : B \longrightarrow M_\alpha$. Si llamamos $m_\alpha$ a los elementos $\Psi_\alpha(1)$, vale $\Psi_\alpha(b) = \Psi_\alpha(b.1.1) = (b \otimes 1)\ \Psi_\alpha(1) = bm_\alpha 1 = bm_\alpha$ y también $\Psi_\alpha(b) = \Psi_\alpha(1.1.b) = (1 \otimes b)\ \Psi_\alpha(1) = 1m_\alpha b = m_\alpha b$, lo que prueba que $m_\alpha \in B'$ cualquiera sea $\alpha$.

Como $M_\alpha = \Lambda m_\alpha$, para cada $\alpha$, si $a \in A$ es un elemento cualquiera, debido a que

$$A = \bigoplus M_\alpha$$

será

$$a = \sum (b_\alpha \otimes b_\alpha^0)\, m_\alpha = \sum b_\alpha m_\alpha b_\alpha^0 = \sum b_\alpha b_\alpha^0 m_\alpha = \sum f(b_\alpha b_\alpha^0 \otimes m_\alpha)$$

de manera que $a \in f(B \otimes_C B')$, y por lo tanto $f$ es sobre. $\boxtimes$

## § 11. - IDEALES REGULARES

Recordamos que los anillos (o álgebras) de este parágrafo no tienen necesariamente unidad, como se convino al comienzo del capítulo .

### III. 11. 1. - DEFINICION

Un ideal $\mathfrak{a}$ a izquierda de un anillo A se llamará REGULAR si es propio y existe $u \in A$ , tal que para todo $x \in A$ se cumple $x - xu \in \mathfrak{a}$ . A los elementos u para los cuales se satisfaga lo anterior se los llamará UNIDADES para $\mathfrak{a}$.

Un mismo ideal regular puede tener muchas unidades (que evidentemente no están contenidas en él) . Si $\mathfrak{a}$ es un ideal regular y u es una unidad para $\mathfrak{a}$ , todo ideal a izquierda $\mathfrak{b}$ , tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ , $u \notin \mathfrak{b}$ es regular y u es una unidad para él .

### III. 11. 2. - PROPOSICION

Cada ideal regular de un anillo A está contenido en un ideal regular que es maximal en la familia de todos los ideales propios .

Es una aplicación standard del teorema de Zorn . ⊠

### III. 11. 3. - PROPOSICION

Si $\mathfrak{m}$ es un ideal a izquierda regular y maximal de un anillo A la representación T de A en $A_s / \mathfrak{m}$ definida por

$$T_x \overline{y} = \overline{xy}$$

(donde $\overline{x}$ es la clase de x en $A_s / \mathfrak{m}$ ) es irreducible . Toda representación irreducible de A es semejante a una tal representación .

La primera parte es evidente (ver III. 4. 3. -) .

Supongamos que $M$ es un $A$-módulo simple . Si llamamos $N$ al conjunto $N = \{ x; Ax = 0 \}$, se comprueba inmediatamente que $N$ es un submódulo. Pero entonces ó $N = M$ ó $N = 0$ por la simplicidad de $M$ , y como $N = M$ implica $AM = 0$ , lo que no ocurre por definición de representación, será $N = 0$ .

Sea $x \neq 0$ . Como $Ax$ es un submódulo de $M$ y no es $0$ por lo anterior, se concluye $Ax = M$. Sea $u \in A$ tal que $ux = x$ . Entonces $M \cong A_s / An_A(x)$ y si $a \in A$ ,

$$(au - a)\, x = a\,(ux - x) = 0$$

de manera que $An_A(x)$ es regular de unidad $u$ .

Como $A_s / An_A(x)$ es simple, $An_A(x)$ es maximal . ⊠

Veremos ahora un resultado sobre ampliación de ideales regulares maximales .

III. 11. 4. - PROPOSICION

Sea $A$ un álgebra , $e \in A$ un idempotente. $B = eAe$ . Si $\mathfrak{n}$ es un ideal regular y maximal (a izquierda) de $B$ , el conjunto

$$\mathfrak{m} = \{ x \in A \; ; \; eyxe \in \mathfrak{n} \; , \; \forall \; y \in A \}$$

es un ideal regular y maximal (a izquierda) de $A$ tal que $\mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}$

$\mathfrak{m}$ es evidentemente un ideal a izquierda de $A$ . Sea $v \in B$ una unidad para $\mathfrak{n}$ . Si $x, y \in A$, se cumple

$$ey\,(xv - x)\,e = eyxve - eyxe = (eyxe)\,v - (eyxe) \in \mathfrak{n}$$

(recuérdese que $ev = ve = v$) , de manera que $xv - x \in \mathfrak{m}$ .

Luego $v$ es una unidad para $\mathfrak{m}$ . Veremos que $\mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}$ .

Supongamos que $z \in \mathfrak{n}$ . Entonces $eyze = eyez \in \mathfrak{n}$ cualquiera sea $y \in A$, y por lo tanto $z \in \mathfrak{m}$ . Luego $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{m} \cap B$ .

Como $\mathfrak{m} \cap B$ es también un ideal en $B$ que contiene a $\mathfrak{n}$ , por la maximalidad de éste, para probar $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap B$ , será suficiente mostrar que $\mathfrak{m} \cap B$ no es todo $B$ , o lo que es lo mismo, que vale $B \not\subset \mathfrak{m}$

Pero si ocurriera $B \not\subset \mathfrak{m}$, sería $v \in \mathfrak{m}$ ($v$ = unidad para $\mathfrak{n}$), y por lo tanto $eyve \in \mathfrak{n}$ para todo $y \in A$. Como también

$$eyev - eye = eyve - eye \in \mathfrak{n}$$

se concluye $eye \in \mathfrak{n}$ para todo $y \in A$, es decir $\mathfrak{n} = B$ lo que es absurdo. Luego $\mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{n}$.

Veamos finalmente que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal (a izquierda). Para ello demostraremos antes que $e$ es una unidad para $\mathfrak{m}$.

En efecto, como

$$ey(xe - x)e = eyxe - eyxe = 0$$

para todo $y \in A$, resulta $xe - x \in \mathfrak{m}$, cualquiera sea $x \in A$. . Ahora demostraremos que es maximal. Supongamos que $\mathfrak{m}'$ es un ideal a izquierda tal que $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}' \neq A$. Como $e$ es una unidad para $\mathfrak{m}'$ hemos visto que $e \notin \mathfrak{m}'$, y que $\mathfrak{m}'$ es regular de unidad $e$. En particular (como $e \in B$) es claro que $B \not\subset \mathfrak{m}'$. Pero entonces $\mathfrak{m}' \cap B = \mathfrak{n}$, atendiendo a la maximalidad de $\mathfrak{n}$. Sea $x \in \mathfrak{m}'$. Entonces $xe - x \in \mathfrak{m}'$ y por lo tanto $xe \in \mathfrak{m}'$. Pero de allí, $eyxe \in \mathfrak{m}' \cap B$ para todo $y \in A$, de manera que $x \in \mathfrak{m}$. Eso prueba que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$ y por lo tanto que $\mathfrak{m}$ es maximal. ⊠

CAPITULO IV

## REPRESENTACIONES DE GUPOS COMPACTOS

Podemos detallar el contenido de este Capítulo . En el primer parágrafo damos algunas propiedades de las álgebras hilbertianas (completas), que coinciden con los "Hilbert Rings" de [9] y con las "H* - álgebras" de Ambrose, según [6] . El estudio tradicional de los ideales minimales biláteros de una tál álgebra ( [6] , [9] ) se hará a través de la teoría de zócalo y pies (Cap. III) . Dos casos particulares ocupan los parágrafos 2 y 3 : las álgebras hilbertianas rengas y las álgebras $L^2(G)$, donde G es un grupo compacto . Con ese material damos en los últimos tres parágrafos (caracteres, representaciones irreducibles y coordenadas de reducibilidad) los resultados generales de la teoría de representaciones de grupos compactos (falta el caso de grupo de Lie, que puede verse en Chevalley, "Theory of Lie Groups" (Princeton, 1946), aunque estos grupos aparecen también en nuestro Capítulo VII) .

### § 1 .- ALGEBRAS HILBERTIANAS COMPLETAS

Sea A un álgebra sobre C . Diremos que una aplicación $x \longrightarrow \tilde{x}$ de A en sí misma es una INVOLUCION si y solamente si verifica las propiedades

$$
\begin{array}{lrcl}
I_1 & \tilde{\tilde{x}} & = & x \\
I_2 & (x+y)^{\sim} & = & \tilde{x}+\tilde{y} \\
I_3 & (\lambda x)^{\sim} & = & \bar{\lambda}\,\tilde{x} \\
I_4 & (xy)^{\sim} & = & \tilde{y}\,\tilde{x}
\end{array}
$$

para todo $x, y \in A$, $\lambda \in C$.

Llamaremos ALGEBRA HILBERTIANA COMPLETA a todo espacio de Hilbert (complejo) que sea un álgebra de Banach (*) con la misma norma en el que esté definida una involución que satisfaga

$$
\begin{array}{ll}
AH_1 & \|x\| = \|\tilde{x}\| \\
AH_2 & \text{Si } x \neq 0,\ \tilde{x}x \neq 0 \\
AH_3 & (xy|z) = (y|\tilde{x}z)\,.
\end{array}
$$

(*) Por álgebra de Banach entendemos un álgebra normada, completa y tal que verifique la desigualdad $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Aparentemente el axioma $AH_3$ es asimétrico respecto del producto algebraico. Veamos sin embargo que no es así.

De $AH_1$ resulta $(z|z) = (\tilde{z}|\tilde{z})$, y si hacemos

$$z = \lambda x + \mu y$$

será

$$(z|z) = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \lambda\bar{\mu}(x|y) + \bar{\lambda}\mu\,(y|x) + |\mu|^2\|y\|^2$$
$$(\tilde{z}|\tilde{z}) = |\lambda|^2 \|\tilde{x}\|^2 + \lambda\bar{\mu}(x|y) + \bar{\lambda}\mu\,(\tilde{y}|\tilde{x}) + |\mu|^2\|y\|^2$$

e igualando término a término se obtiene

$$AH_4 \qquad (x|y) = (\tilde{y}|\tilde{x}) \;.$$

Finalmente de $AH_4$ y $AH_3$ (teniendo en cuenta $I_4$) resulta

$$(xy|z) = (\tilde{z}|\tilde{y}\tilde{x}) = (y\tilde{z}|\tilde{x}) = (x|z\tilde{y}) \,,$$

es decir

$$AH_5 \qquad (xy|z) = (x|z\tilde{y})$$

que es la propiedad simétrica de la $AH_3$ .

Los números complejos, con la conjugación, forman un álgebra hilbertiana completa (abeliana) En el parágrafo 3 veremos una importante categoría de ejemplos .

Si $M$ es un subconjunto de un álgebra hilbertiana , designaremos con $M$ al subespacio ortogonal de $M$ : $M^{\perp} = \{ x;\ (x|y) = 0 \,,\ \forall\ y \in M \}$ .

IV. 1. 1.- PROPOSICION

<u>Si $\mathcal{I}$ es un ideal a izquierda (derecha) de un álgebra hilbertiana , $\mathcal{I}^{\perp}$ es también un ideal a izquierda (derecha)</u> .

Si $y \in \mathcal{I}^{\perp}$, $(zy|x) = (y|\tilde{z}x) = 0$ para todo $z \in A$ , $x \in \mathcal{I}$ , de manera que $A\mathcal{I}^{\perp} \subset \mathcal{I}^{\perp}$ (análogo a derecha) . ☒

Veamos ahora algunas propiedades de los elementos idempotentes (III. 5) de un álgebra hilbertiana.

IV. 1. 2. - PROPOSICION

Si $A$ es un álgebra hilbertiana, $e$ un elemento no nulo idempotente de $A$, entonces

1) $\|e\| \geq 1$

2) $\tilde{e}$ es idempotente.

3) Los ideales $Ae$ y $eA$ son cerrados.

La propiedad 1) resulta de la desigualdad $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ de las álgebras de Banach:

$$1 = \frac{\|e\|}{\|e\|} = \frac{\|ee\|}{\|e\|} \leq \frac{\|e\| \, \|e\|}{\|e\|} = \|e\|$$

2) es evidente y para demostrar 3) observemos que $e$ es unidad a derecha para $Ae$. En efecto, si $x \in Ae$, será $x = ze$ para algún $z \in A$, y entonces $xe = zee = ze = x$. Si $y$ es ahora un elemento de $A$ tal que $y = \lim x_n$, $x_n \in Ae$, se cumplirá, por continuidad del producto

$$x_n = x_n e \longrightarrow ye$$

de manera que $y = ye$ y entonces $y \in Ae$. Análogo para $eA$. ⊠

Diremos que un elemento $x$ de un álgebra con involución es AUTOADJUNTO si y solamente si $\tilde{x} = x$. Si $x$ es autoadjunto, $x^n$ lo es también para todo $n \in N$. Si $x, y$ son autoadjuntos, $x-y$ también lo es; si $x, y$ además conmutan, $xy$ también lo es y finalmente $\tilde{x}x$ es autoadjunto cualesquiera sea $x$.

IV. 1. 3. - PROPOSICION

Si $e_1$, $e_2$ son dos idempotentes autoadjuntos de un álgebra hilbertiana $A$, las propiedades siguientes son equivalentes:

1) $(e_1 | e_2) = 0$

2) $\underline{e_1 e_2 = 0}$

3) $\underline{e_2 e_1 = 0}$

Veamos que 1) implica 2). Si $(e_1 | e_2) = 0$, entonces

$$0 = (e_1 e_1 \mid e_2 e_2) = (e_1 e_2 \mid e_1 e_2) = \| e_1 e_2 \|^2$$

y por lo tanto $e_1 e_2 = 0$.

Es claro que 2) implica 3), puesto que

$$\| e_1 e_2 \| = \| (e_1 e_2)^{\sim} \| = \| e_2 e_1 \| .$$

y entonces $e_1 e_2 = 0 \Longrightarrow e_2 e_1 = 0$.

Finalmente supongamos que $e_2 e_1 = 0$. Entonces

$$( e_1 \mid e_2 ) = (e_1 e_1 \mid e_2) = (e_1 \mid e_2 e_1) = 0$$

y eso prueba que 3) implica 1). La demostración está completa. ⊠

Si $\mathcal{b}$ es un ideal a izquierda cerrado de un álgebra hilbertiana A, será en particular un espacio de Hilbert, y si consideramos la representación $T^{A,\mathcal{b}}$ definida en los operadores $T_x^A$ tienen algunas propiedades que describimos en el siguiente:

**IV. 1. 4.- LEMA**

Si $\| S \|_{\mathcal{b}}$ es la norma como operador de un operador S acotado $End_C(\mathcal{b})$ (es decir un elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{b})$), se tiene

1) $\| T_x^{A,\mathcal{b}} \|_{\mathcal{b}} \leq \| x \|$

2) $(T_x^{A,\mathcal{b}})^* = T_{\tilde{x}}^{A,\mathcal{b}}$

3) $\| T_{\tilde{x}x}^{A,\mathcal{b}} \|_{\mathcal{b}} = \| T_x^{A,\mathcal{b}} \|_{\mathcal{b}}^2 = \| T_x^{A,\mathcal{b}} \|_{\mathcal{b}}^2$

donde con $S^*$ notamos el operador adjunto de S.

La desigualdad 1) resulta inmediatamente. Por otra parte de $AH_3$ se concluye

$$( T_x^{A,\mathcal{b}} y \mid z ) = ( y \mid T_{\tilde{x}}^{A,\mathcal{b}} z )$$

lo que equivale a la afirmación 2). Finalmente la propiedad 3) resulta de que

$$T^{A,\mathcal{I}}_{\tilde{x}x} = T^{A,\mathcal{I}}_{\tilde{x}} \; T^{A,\mathcal{I}}_{x} = (T^{A,\mathcal{I}}_{x})^{*} \quad T^{A,}_{x}$$

y por lo tanto (ya que $\| SS^{*} \| = \| S \|^{2} = \| S^{*} \|^{2}$) resulta

$$\| T^{A,\mathcal{I}}_{\tilde{x}x} \| = \| T^{A,\mathcal{I}}_{x} \|^{2} = \| T^{A,\mathcal{I}}_{\tilde{x}} \|^{2} .$$

Luego el lema está probado.

⊠

IV. 1. 5.- TEOREMA (Ambrose)

Todo ideal a izquierda (derecha) no nulo de un álgebra hilbertiana contiene un elemento idempotente autoadjunto no nulo ( y, en consecuencia, toda álgebra hilbertiana es sática.)

Sea A un álgebra hilbertiana, $\mathcal{I}$ un ideal a izquierda no nulo de A, x un elemento no nulo de $\mathcal{I}$

Llamemos z al elemento $\tilde{x}x$. $z \in \mathcal{I}$ y es autoadjunto. Veremos que a partir de z puede encontarse en $\mathcal{I}$ un elemento que sea además idempotente. Puede elegirse $x \in \mathcal{I}$ de tal manera que el operador $T^{A,A}_{z}$ (que en adelante llamamos $R_z$) sea tal que $\| R_z \|$ $(= \| T^{A,A} \|_{A}) = 1$, para lo cual es suficiente corregir el x inicial mediante un escalar adecuado.

Mediante 2) y 3) del lema IV. 1. 4. se concluye $\| R_{(z^2)} \| = \| R_z \|^{2} = 1$, e iterando,

$$\| R_{(z^{2^n})} \| = 1$$

cualquiera sea $n \in N$.

Por otra parte

$$\| R_{z^{n+1}} \| = \| R_z R_{z^n} \| \leq \| R_z \| \; \| R_{z^n} \| = \| R_{z^n} \|$$

de manera que $\{ \| R_{z^n} \| \}$ es una sucesión no creciente y como para valores de n de la forma $2^j$ es idéntica a 1, será identica a 1 en todos sus términos.

Entonces por 1) del lema IV. 1. 4. también vale $\| z^n \| \geq 1$ para todo $n \in N$. Sean ahora $m = n + p$, $m$, $n$, $p$ naturales. Entonces

$$|(z^{2m} \mid z^{2n})| = |(z^{2p} \; z^{2n} \mid z^{2n})| = |(R_{z^{2p}} \; z^{2n} \mid z^{2n}) \leq$$

$$\leq \| R_{z^{2p}} \| \; (z^{2n} \mid z^{2n}) = (z^{2n} \mid z^{2n})$$

y además

$$(z^{2m} \mid z^{2m}) = (R_{z^p} \; z^{2n+p} \mid R_{z^p} \; z^{2n+p}) \leq$$

$$\leq \| R_{z^p} \|^2 \; (z^{2n+p} \mid z^{2n+p}) = (z^{2m} \mid z^{2n})$$

es decir que

$$1 \leq (z^{2m} \mid z^{2m}) \leq (z^{2m} \; z^{2n}) \leq (z^{2n} \mid z^{2n})$$

lo que prueba que la sucesión $\{ (z^{2n} \mid z^{2n}) \}_n$ es no creciente y acotada inferiormente por 1. Entonces existe $a \geq 1$ tal que $a = \lim\limits_n (z^{2n} \mid z^{2n})$.

Veamos que esto implica que la sucesión $\{ z^{2n} \}$ es de Cauchy. En efecto

$$\| z^{2m} - z^{2n} \|^2 = (z^{2m} \mid z^{2m}) - 2 (z^{2m} \mid z^{2n}) +$$

$$+ (z^{2n} \mid z^{2n}) \leq 2( (z^{2k} \mid z^{2k}) - a)$$

si $k = \min(m, n)$.

Sea $e = \lim z^{2n}$.

Entonces $e^2 = \lim z^{4n} = e$, y por lo tanto $e$ es idempotente. Además $\tilde{e} = \lim (z^{2n})^{\sim} =$ $= \lim z^{2n} = e$, de manera que también es autoadjunto. Finalmente, como $ez^2 = \lim z^{2n+2} = e$ se puede afirmar que $e \in \mathcal{U}$. Como además $\| e \| \geq 1$, $e$ es solución del problema que nos habíamos propuesto.

⊠

Diremos que un elemento $x$ de un anillo es REDUCIBLE POR IDEMPOTENTES si y solamente si existen dos idempotentes $e_1$ y $e_2$ en el anillo, no nulos tales que $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$, $x = e_1 + e_2$. Todo elemento reducible por idempotentes es idempotente.

Consideremos el caso de un álgebra hilbertiana. Si un elemento es autoadjunto, reservaremos la denominación REDUCIBLE para reducible por idempotentes autoadjuntos. Si $e$ es reducible y autoadjunto y $e = e_1 + e_2$ es una reducción de $e$, vale $\|e\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$, ya que $(e_1 \mid e_2) = 0$ por IV. 1. 3..

Diremos que un elemento es IRREDUCIBLE si y solamente si no es reducible (por idempotentes cualesquiera si no es autoadjunto y por idempotentes autoadjuntos si lo es).
De lo anterior y utilizando IV. 1. 2. 1.), resulta:

IV. 1. 6.- LEMA

Todo elemento autoadjunto no nulo de un álgebra hilbertiana de norma menor a $\sqrt{2}$ es irreducible.

IV. 1. 7. PROPOSICION

Todo ideal a izquierda no nulo de un álgebra hilbertiana contiene un idempotente autoadjunto irreducible no nulo.

Sea $\mathfrak{I}$ un ideal a izquierda no nulo de un álgebra hilbertiana A. Por el teorema IV. 1. 5. sabemos que existe un idempotente autoadjunto $e \in \mathfrak{I}$, $e \neq 0$.

Si $e$ es reducible existirán $e_1$ $e_2$ idempotentes autoadjuntos ortogonales no nulos tales que $e = e_1 + e_2$ y valdrá

$$\|e\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 .$$

Como $e_i = e_i e$, $i = 1, 2$, ambos $e_i$ pertenecen a $\mathfrak{I}$. Utilizando ahora la proposición IV. 1. 2. 1.) se puede concluir

$$\|e_i\|^2 + 1 \leqslant \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 = \|e\|^2$$

Pero entonces, dado un idempotente autoadjunto reducible $e$ de $\mathfrak{I}$, siempre es posible encontrar un idempotente autoadjunto $e'$ también es $\mathfrak{I}$ tal que

$$\|e'\|^2 \leqslant \|e\|^2 - 1 .$$

Teniendo en cuenta el lema anterior, no es posible que el proceso continúe indefinidamente, de manera que en algún paso se encontrará un idempotente autoadjunto irreducible, como se quería. ☒

Veamos ahora una caracterización de los imis de un álgebra hilbertiana.

IV. 1. 8. PROPOSICION

Un ideal a izquierda $\mathfrak{l}$ de un álgebra hilbertiana $A$ es minimal si y solamente si $\mathfrak{l} = Ae$, donde $e$ es un elemento idempotente autoadjunto irreducible de $A$.

Sea $\mathfrak{l}$ un imi. Por IV. 1. 7., existe $e \in \mathfrak{l}$, idempotente autoadjunto irreducible no nulo. Pero entonces $\mathfrak{l} = Ae$ por la minimalidad de $\mathfrak{l}$. Recíprocamente, supongamos $\mathfrak{l} = Ae$ donde $e$ es idempotente y autoadjunto. Probaremos que si $\mathfrak{l}$ no es minimal, $e$ es reducible. Si $\mathfrak{l}'$ es un ideal a izquierda de $A$ tal que $0 \neq \mathfrak{l}' \neq \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}' \subset \mathfrak{l}$ y $e'$ es un idempotente autoadjunto de $\mathfrak{l}'$, veremos que

$$e = (e - ee') + ee'$$

es una reducción de $e$, es decir que $e$ es reducible mediante

$$e = e_1 + e_2$$

donde $e_1 = e - ee'$, $e_2 = ee'$. En efecto, como $e$ es unidad a derecha de $\mathfrak{l}$, y ambos $e$ y $e'$ son idempotentes autoadjuntos, vale

1) $e_1^2 = (e - ee')^2 = e - ee' - ee'e + ee'ee' = e - ee' - ee' + ee' = e - ee' = e_1$

2) $e_2^2 = ee'ee' = ee'e' = ee' = e_2$

3) $\tilde{e}_1 = \tilde{e} - \widetilde{ee'} = e - \widetilde{ee'e} = e - ee'e = e - ee' = e_1$

4) $\tilde{e}_2 = \widetilde{ee'} = \widetilde{ee'e} = ee'e = ee' = e_2$

5) $e_1 e_2 = (e - ee')ee' = ee' - ee'ee' = ee' - ee' = 0$

6) $e_2 e_1 = 0$ (de lo anterior y IV. 1. 3.)

Sólo nos falta probar para que sea una reducción que $e_1 \neq 0 \neq e_2$. Pero si $e_1 = 0$, entonces $e = e_2 = ee' \in \mathfrak{l}$ de donde $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}'$, contradicción. Entonces $e_1 \neq 0$. Como además $e'e_2 = e'ee' = e'e' = e'$, también $e_2 \neq 0$.

⊠

Esta proposición permite calcular todos los imis de un álgebra hilbertiana en el sentido siguiente: se puede afirmar que los imis son los ideales imágen por la aplicación

$$x \xrightarrow{f} Ax$$

del conjunto B de los idempotentes autoadjuntos irreducibles no nulos. La imágen de dos de ellos, $e$, $e'$ es la misma sii $ee' = e$, $e'e = e'$. En particular $f$ es biunívoca en $B \cap C$, si $C$ es el conmutante de $B$ en $A$.

## IV. 1. 9.- COROLARIO

Todo ideal a izquierda de un álgebra hilbertiana contiene un imi.

⊠

## IV. 1. 10.- PROPOSICION

Si $A$ es un álgebra hilbertiana y $\mathfrak{l}$ un imi de $A$, contenido en un pié $\mathfrak{A}$, el cuerpo $\mathrm{End}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{l})$ es isomorfo a $C$.

Sea $e$ un idempotente de $A$ tal que $\mathfrak{l} = Ae$. Sabemos por el lema III. 5. 14. que el subanillo $eAe$ de $A$ es antiisomorfo a $\mathrm{End}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{l})$. Pero $eAe$ es entonces un cuerpo normado completo (con la norma inducida por $A$) en virtud de IV. 1. 2. 3.) que es un álgebra sobre $C$, y entonces por el teorema de Guelfand - Mazur (Fascículo 6 de esta Colección, I. 6) debe ser isomorfo a $C$. Luego la proposición está demostrada.

⊠

## IV. 1. 11.- COROLARIO

Si $A$ es un álgebra hilbertiana, $\mathfrak{A}$ un pié de $A$ y $e$, $e'$ dos idempotentes autoadjuntos irreducibles de $A$ contenidos en $\mathfrak{A}$, el espacio vectorial $\mathrm{Hom}_A(Ae, Ae')$ es de dimensión 1 sobre $C$.

Sea $u : Ae \longrightarrow Ae'$ un homomorfismo no nulo, entonces, por el lema de Schur es un isomorfismo. Todo otro homomorfismo de $Ae$ en $Ae'$ es de la forma $u_o v$ donde $v$ es un endomorfismo de $Ae$, y por lo tanto $v \in eAe$, que por IV. 1. 10. es de dimensión 1 sobre C ⊠

## IV. 1. 12.- COROLARIO

Sea $\mathfrak{l}$ un imi contenido en un pié $\mathfrak{a}$ de un álgebra hilbertiana A. En esas condiciones existe un homomorfismo de anillos $f$ (= $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{l}}$) del conmutante $Z_{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$ en A (que es un subanillo de A) en C, $f : Z_{\mathfrak{a}} \longrightarrow C$, tal que

$$cx = f(c)x$$

para todo $c \in Z_{\mathfrak{a}}$ y todo $x \in \mathfrak{l}$.

En efecto, por la proposición IV. 1. 10., si $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$, existe $a \in C$ tal que

$$\alpha(x) = ax$$

para todo $x \in \mathfrak{l}$.

Supongamos que $c \in Z_{\mathfrak{a}}$. Entonces la aplicación

$$x \longrightarrow \alpha(x) = cx$$

es un elemento de $\mathrm{End}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{l})$, y por lo anterior existe $a \in C$ tal que

$$cx = ax, \qquad x \in \mathfrak{l}.$$

Evidentemente $a$ es único y la aplicación

$$c \longrightarrow a$$

es claramente un homomorfismo, que responde a lo enunciado.

⊠

La proposición IV. 1. 10. es de mucha importancia, pues juntamente con el teorema de Wedderburn (III. 6. 6.) nos permite obtener el siguiente, que a su vez no será de gran utilidad en el parágrafo 3:

**IV. 1. 13 TEOREMA**

Si $\mathfrak{l}$ en un imi contenido en un pié $\mathfrak{a}$ de un álgebra hilbertiana A, las propiedades siguientes son equivalentes:

1) $\mathfrak{a}$ tiene longitud finita ( es decir $l_A(\mathfrak{a}) < \infty$ )

2) $\mathfrak{a}$ tiene dimensión finita sobre C.

3) $\mathfrak{l}$ tiene dimensión finita sobre C.

En efecto, si $\mathfrak{a}$ tiene longitud finita n, por III. 6. 6 es isomorfo al anillo $M_n(C)$ (IV. 1. 10), de manera que $\dim_C \mathfrak{a} = n^2$. Eso prueba que 1) implica 2). Por supuesto 2) implica 3) y, finalmente, si suponemos 3), como la representación canónica de $\mathfrak{a}$ en $\mathfrak{l}$ es siempre inyectiva (III. 6. 2), se puede afirmar que $\mathfrak{a}$ es una subálgebra de $M_n(C)$. Pero entonces tiene la longitud finita ( y a posteriori es todo $M_n(C)$), de manera que también de 3) se concluye 1), y el teorema está demostrado. ⊠

Por supuesto si vale alguna de estas afirmaciones equivalentes, el pié resulta cerrado en A y con unidad, hechos fundamentales sobre los que volveremos más tarde.

**IV. 1. 14 PROPOSICION**

El zócalo de un álgebra hilbertiana es denso en ella y sus pies son ortogonales respecto del producto escalar.

Sea $\mathfrak{S}$ el zócalo de un álgebra hilbertiana A. Supongamos que el ideal bilátero $\mathfrak{b} = \mathrm{adh}(\mathfrak{S})$ no coincide con A .

Entonces $\mathfrak{b}^{\perp}$ es también un ideal bilátero (IV. 1. 1), y no nulo. Pero entonces por IV. 1. 9, $\mathfrak{b}^{\perp}$ contendrá un imi que no estará contenido en $\mathfrak{S}$, en contradicción con la definición de zócalo.

Veamos la segunda parte de la demostración. Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ son dos pies distintos de A y $x \in \mathfrak{a}$, $y \in \mathfrak{a}'$, será

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \; e_i$$

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i \; e'_i$$

donde $x_i$, $y_i \in A$, $e_i$, $e'_i$ son idempotentes autoadjuntos irreducibles de $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{a}'$ respectivamente.

Sabemos que en esas condiciones $e'_i \, e_j = 0$ para todo sistema $i, j$ (III. 5. 7), de manera que

$$(x \mid y) = \sum_{i,j} (x_i e_i \mid y_j e'_j) = \sum_{i,j} (\tilde{y}_j x_i \mid e'_j e_i) = 0 .$$

Eso significa que $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{a}'$. ⊠

IV. 1. 15 PROPOSICION

Toda álgebra hilbertiana es suma hilbertiana de las clausuras de sus pies.

Esta proposición es evidente, si se tiene en cuenta que las clausuras de dos subespacios ortogonales de un espacio de hilbert son también subespacios ortogonales. Después es suficiente observar la proposición anterior. ⊠

La proposición demostrada puede generalizarse de la siguiente manera :

IV. 1. 16 PROPOSICION

Todo ideal bilátero de un álgebra hilbertiana es suma hilbertiana de las clausuras de los pies de A contenidos en él .

Sea $\mathfrak{b}$ un tal ideal. Es claro que por la minimalidad de los pies (III. 5. 10 y IV. 1. 5) si $\mathfrak{a}$ es un pié, ó $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ó $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0$. Si $\mathfrak{A}$ es la familia de todos los pies de A, dividamos $\mathfrak{A}$ en dos subconjuntos L y M, $L \cup M = \mathfrak{A}$, $L \cap M = \emptyset$, mediante :

$$L = \{ \mathfrak{a} \in \mathfrak{A} \; ; \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \}$$
$$M = \{ \mathfrak{a} \in \mathfrak{A} \; ; \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = 0 \} .$$

Es claro que $\mathfrak{b} \supset \bigoplus_{\mathfrak{a} \in L} \overline{\mathfrak{a}}$

Si $\check{\mathfrak{i}} = \mathfrak{b} \cap \bigoplus_{\mathfrak{a} \in M} \overline{\mathfrak{a}} \neq 0$, por el corolario IV. 1. 9 existe un imi $\mathfrak{l}$ tal que $\mathfrak{l} \subset \check{\mathfrak{i}}$, y entonces de $\mathfrak{l} \cap \bigoplus_{\mathfrak{a} \in L} \overline{\mathfrak{a}} = 0$ ( evidente a partir de IV. 1. 15 ) se concluye $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{a}$, para algún $\mathfrak{a} \in M$, absurdo ya que de allí se concluye $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = 0$.

Entonces

$$\bigoplus_{\mathfrak{a} \in L} \overline{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{b} \,, \qquad \mathfrak{b} \cap \bigoplus_{\mathfrak{a} \in M} \overline{\mathfrak{a}} = 0$$

y por lo tanto $A = \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\mathfrak{a} \in M} \overline{\mathfrak{a}}$ de donde $\mathfrak{b} = \bigoplus_{\mathfrak{a} \in L} \overline{\mathfrak{a}}$ como queríamos demostrar. ⊠

IV. 1. 17 PROPOSICION

Los pies de un álgebra hilbertiana son invariantes respecto de la involución. Sus clausuras ( con la estructura inducida ) son álgebras hilbertianas ( completas ) rengas .

Sean A y $\mathfrak{a}$ como de costumbre. Si $\mathfrak{l} = Ae$ ( e = idempotente autoadjunto irreducible) es un imi contenido en $\mathfrak{a}$, se cumple

$$\tilde{\mathfrak{l}} = \tilde{e}A = eA \subset \mathfrak{a}$$

puesto que $\mathfrak{a}$ es un ideal bilátero. Pero entonces

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\sum_{\mathfrak{l} \subset \mathfrak{a}} \mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{l} \subset \mathfrak{a}} \tilde{\mathfrak{l}} \subset \mathfrak{a}$$

de donde se concluye $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ por la simetría de $\sim$ .

Según eso, la estructura de A induce por restricción una estructura de álgebra hilbertiana completa en la clausura de cada pié ( recuérdese que $\sim$ es una isometría ). Es claro que $\mathfrak{a}$ es un pié de $\overline{\mathfrak{a}}$ ya que es un pié de sí mismo. Además, si $\overline{\mathfrak{a}}$ tuviera otro pié, sería suma hilbertiana de sí misma y de la clausura de este pié, absurdo.

Luego $\overline{\mathfrak{a}}$ es un álgebra renga . ⊠

Utilizando el concepto de " suma hilbertiana externa" veremos ahora una propiedad constructiva de las álgebras hilbertianas.

La suma hilbertiana externa $A \,(A = \overset{E}{\bigoplus}_{i\in I} A_i)$ de una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de álgebras hilbertianas ( completas ) de normas $\| \ \|_i$ es, por definición, el álgebra de Hilbert completada ( como anillo ) del álgebra $G$ suma directa de las álgebras $A_i$ :

$$G = \bigoplus_i A_i$$

con las operaciones inducidas por el álgebra con involución $\prod_i A_i$ y la norma

$$\|x\| = N_2\,(\{\|x_i\|_i\})\ .$$

Que $G$ es un álgebra normada resulta del hecho siguiente :

$$\|xy\| = \|\{x_i\}\{y_i\}\| = \|\{x_i y_i\}\| = N_2(\{\|x_i y_i\|_i\}) \leq$$

$$\leq N_2\,(\{\|x_i\|_i \ \|y_i\|_i\}) \leq N_4(\{\|x_i\|_i\})\,N_4\,(\{\|y_i\|_i\}) \leq$$

$$\leq N_2\,(\{\|x_i\|_i\})\ N_2\,(\{\|y_i\|_i\}) = \|x\| \ \|y\|$$

( Cauchy- Schwarz! ).

El principio de prolongación de identidades ( [1] Li. III, chap. 1, 3ᵉ éd. § 8, nº 1, cor. 1 de la prop. 2) permite afirmar que $A$ es efectivamente un álgebra hilbertiana. Además si $A$ es un álgebra hilbertiana dada y

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum x_{\mathfrak{a}} \\ y &= \sum y_{\mathfrak{a}} \end{aligned}\right\} \quad \mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$$

donde $\mathfrak{A}$ es la familia de los pies de $A$ , entonces la igualdad

$$xy = \sum x_{\mathfrak{a}}\, y_{\mathfrak{a}}$$

que resulta de III. 5. 7 y del Théor. 1 de [1] , Li. V. § 2. nº 2 , permite afirmar que $A$ es isomorfa a la suma hilbertiana externa de las clausuras de sus pies.

Podemos enunciar entonces:

IV. 1. 19.- PROPOSICION

Toda álgebra hilbertiana es (isomorfa a una) suma hilbertiana externa de álgebras hilbertianas rengas .

$\boxtimes$

Se concluye que la forma más general de álgebra hilbertiana es

$$\overset{E}{\bigoplus} A_i$$

donde $\{A_i\}$ es una familia de álgebras rengas, y por lo tanto será suficiente estudiar las estructuras de las álgebras rengas para conocer la de todas las álgebras .

Volviendo a la proposición IV. 1. 15.- , podemos observar que a cada pié $\mathfrak{a}$ (de un álgebra hilbertiana dada) se puede asociar un proyector ortogonal $E(\mathfrak{a})$ de $A$ : el que está asociado a Adh ( $\mathfrak{a}$ ) en la descomposición

$$A = \bigoplus \mathrm{Adh}\,(\mathfrak{a}) .$$

Es claro que esos proyectores son ortogonales dos a dos y que vale

$$\iota_A = \sum E(\mathfrak{a})$$

en la topología puntual fuerte (Cap. I) . Además dichos proyectores se pueden calcular muy fácilmente para los piés de longitud finita. En efecto, si $\mathfrak{a}$ es un pié de longitud finita, por III. 6. 6.- tiene unidad $u_{\mathfrak{a}}$ . Como además

$$x\tilde{u}_{\mathfrak{a}} = (u_{\mathfrak{a}}\tilde{x})^{\sim} = x$$

es claro que $\tilde{u}_{\mathfrak{a}} = u_{\mathfrak{a}}$(téngase en cuenta IV. 1. 17.-) .

Sea ahora $F$ el proyector

$$Fx = xu_{\mathfrak{a}}$$

(= $u_{\mathfrak{a}}$ x por III. 6. 6.-, última parte de la demostración) , evidentemente contiguo y de rango $\mathfrak{a}$ ( = Adh ( $\mathfrak{a}$ ) , por IV. 1. 13.-) . Como además vale

$$(x - Fx \mid y) = (x \mid y) - (xu_{\mathfrak{A}} \mid y) = (x \mid y) - (x \mid yu_{\mathfrak{A}}) = (x \mid y) - (x \mid y) = 0$$

para todo $x \in A$, $y \in \mathfrak{A}$, se concluye que $F$ es el proyector ortogonal sobre $\mathfrak{A}$, es decir que coincide con $E(\mathfrak{A})$. En resumen:

IV. 1. 20.- PROPOSICION

Los proyectores $E(\mathfrak{A})$ forman una familia ortogonal y completa de proyectores de A. Para aquellos $\mathfrak{A}$ que tengan unidad $u_{\mathfrak{A}}$ (o lo que es lo mismo que satisfagan cualquiera de los enunciados equivalentes de IV. 1. 13.), vale además :

$$E(\mathfrak{A}) = T^{A,\mathfrak{A}}_{u_{\mathfrak{A}}}$$

Es decir

$$E(\mathfrak{A})f = u_{\mathfrak{A}} * f.$$

---------

## § 2.- PROYECTORES EN ALGEBRAS RENGAS

En todo este parágrafo supondremos que A es un álgebra hilbertiana (completa), y a partir de IV. 2. 2., que además es renga, de pié $\mathfrak{A}$.

Se ha visto un teorema de reconstrucción de A a partir de sus pies (IV. 1. 15, IV. 1. 19.). Por otra parte, cada pié es suma directa de imis. Si se combinan ambas propiedades puede dar se un teorema de descomposición de A mediante sus imis, aunque, contrariamente a lo que ocurre con los pies, se podrá desechar una cantidad considerable de ellos. Concretamente, podemos enunciar:

IV. 2. 1. PROPOSICION

Para todo conjunto $E \subset A$ de idempotentes irreducibles autoadjuntos ortogonales dos a dos (IV. 1. 3.), maximal res -

pecto de esa propiedad, se cumple: $A = \bigoplus_{e \in E} Ae.$

(La existencia de tales conjuntos está garantizada por el lema de Zorn).

Por IV. 1. 2. y IV. 1. 8., cada $Ae$ es un imi-de $A$, y es cerrado. De la ortogonalidad de los elementos de $E$ resulta inmediatamente la ortogonalidad de los subespacios $Ae$. Pero $\mathcal{b} = \bigoplus_{e \in E} Ae$ debe ser todo $A$, pues de otra manera el ortogonal $\mathcal{b}^{\perp}$ de $\mathcal{b}$ (que es un ideal a izquierda) contendría un idempotente autoadjunto irreducible (IV. 1. 7.), lo que contradice la maximalidad de $E$.

⊠

Tales familias maximales nos serán muy útiles en todo este (breve) parágrafo. Por esa razón elegiremos una determinada, de aquí en adelante, que supondremos subindicada ( en forma fiel) por un conjunto $\Lambda$ con un punto distinguido $\lambda$ : $\{e_i\}_{i \in \Lambda}$ .

Llamaremos $\mathcal{l}_i$ al imi $Ae_i$, si $i \neq \lambda$, $\mathcal{l}$ al imi $Ae_{\lambda}$, y $P_i$ a los operadores $T^{A,\mathcal{l}}_{e_i}$ es decir los definidos por

$$P_i\, x = e_i x \quad (x \in \mathcal{l}).$$

De esta manera obtenemos una familia $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$ de elementos de $End_C(\mathcal{l})$, también indicada por $\Lambda$ .

IV. 2. 2. LEMA

Para cada $i \in \Lambda$, $P_i$ es un proyector continuo ortogonal autoadjunto de rango 1. La familia $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$ es ortogonal (en el sentido algebraico).

La idempotencia de $P_i$ es inmediata, a partir de la misma propiedad de $e_i$. Como además

$$P_i^* = (T^{A,\mathcal{l}}_{e_i})^* = T^{A,\mathcal{l}}_{e_i} = P_i \quad \text{(IV. 1. 4.)}$$

también son autoadjuntos. Por otra parte, puesto que $Im(P_i) = e_i \mathcal{l} = e_i Ae$, de IV. 1. 11., se concluye que

$$dim_C(Im(P_i)) = 1.$$

Finalmente, como

$$(x - e_i x \mid e_i y e) = (x \mid e_i y e) - (e_i x \mid e_i y e) = (x \mid e_i y e) - (x \mid \tilde{e}_i e_i y e) = 0$$

también son ortogonales, y es claro que $P_i P_j = 0$, si $i \neq j$.

⊠

Según el lema anterior, para cada $i$ puede señalarse (Zermelo) un elemento $a_i$ en $\mathrm{Im}(P_i)) \subset \mathfrak{h}$ tal que $\|a_i\| = 1$ y para el cual valga $\mathrm{Im}(P_i)) = \mathbb{C} a_i$.

La familia $P_i$ es completa en el siguiente sentido:

## IV. 2. 3.- LEMA

La familia $\{a_i\}_{i \in \Lambda}$ es ortonormal y completa en $\mathfrak{h}$, o lo que es lo mismo, $\mathfrak{h} = \bigoplus \mathrm{Im}(P_i)$.

Se ve claramente la equivalencia a que se alude en el enunciado. Sea $\mathcal{H} = \bigoplus \mathrm{Im}(P_i)$. Si $y$ es un elemento de $\mathfrak{h}$ ortogonal a $\mathcal{H}$, en particular lo será a todos los subespacios $\mathrm{Im}(P_i)$.

Pero como cada $P_i$ es un proyector ortogonal, eso solo puede ocurrir si $P_i(y) = 0$ para todo $i \in \Lambda$. El lema IV. 2. 1. permite concluir de allí que $y = 0$, puesto que

$$Ay = \left(\bigoplus A e_i\right) y \subset \sum A e_i y = \sum A P_i(y) = 0$$

y en particular $y$ es un elemento de $\mathfrak{A} \cap \mathrm{An}_d(\mathfrak{A})$, que es el ideal nulo por III. 5. 11..

⊠

Como la correspondencia $i \longrightarrow P_i$ es fiel, ya que $\mathfrak{h}$ no tiene anulador (como $\mathfrak{A}$- módulo: III. 5. 11.), podemos concluir:

## IV. 2. 4.- COROLARIO

Todas las familias maximales de idempotentes autoadjuntos irreducibles ortogonales dos a dos de $A$ son equipotentes. Su cardinal es la dimensión de cualquier imi de $A$ (como espacio de Hilbert).

Recordemos (ver J. Dixmier, Les algebres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Cahiers Sci. XXV, Gauthier-Villars, Paris, 1957) que si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert cualquiera, en el álgebra de Banach $B(\mathcal{H})$ de los elementos continuos de $End_C(\mathcal{H})$, los elementos $u$ tales que para toda base ortonormal $\{x_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{H}$ cumplen:

$$\sum_I (u(x_i) \mid u(x_i)) < \infty$$

forman un ideal bilátero $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ (contenido en el ideal bilátero de los operadores compactos y que con cada operador contiene a su adjunto). A tales operadores se los llama OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT de $\mathcal{H}$.

IV. 2. 5. PROPOSICION

Para cada $x \in A$, $T_x^{A,\mathfrak{t}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt de $\mathfrak{t}$.

En efecto, será $x = \sum_I xe_i$ y como $xa_i = xe_i a_i$, se tendrá

$$\| xa_i \| \leq \| xe_i \|$$

de donde

$$\sum_I \| T_x^{A,\mathfrak{t}} a_i \|^2 = \sum_I \| xa_i \|^2 \leq \sum_I \| xe_i \|^2 = \| x \|^2$$

es decir

(1) $$\sum \| T_x^{A,\mathfrak{t}} a_i \|^2 \leq \| x \|^2$$ ⊠

Nota 1: Se puede (en el caso general, $\mathcal{H}$ = espacio de Hilbert cualquiera, $u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) demostrar que el número

$$||| u ||| = \sum_I \| ux_i \|^2$$

si es finito para una sola base ortonormal, lo es para toda otra y permanece invariante, y, además, que la asignación

$$\longrightarrow ||| \quad |||$$

es una norma que provee a $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ de una estructura de espacio de Hilbert. De esta manera, la fórmula (1) de más arriba, se escribe

$$|||\, T_x^{A'} \,||| \leq \| x \|$$

o lo que es lo mismo, la aplicación $x \longrightarrow T_x^{A'}$ de A en $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ es acotada y su norma (como operador) es menor o igual a 1.

Nota 2 : El hecho de ser A renga no se utilizó en forma insustituible salvo en IV. 2. 3., que es un resultado intrascendente. Sin embargo de esta manera queda uniformizado el lenguaje (por ejemplo en $\dim_C(\mathrm{Im}(P_i))$, en la elección de $a_i$ ) y como no se usará en formas más generales ninguno de estos resultados, hemos preferido prefijar esta restricción.

---------

## § 3. CASO $L^2(G)$

### IV. 3. 1.- NOTACION

Durante todo este parágrafo, G representará un grupo compacto.

Sabemos que el espacio $L^2(G)$ de las "funciones" de cuadrado integrable en la medida de Haar ds de G (que se supondrá normalizada) con el producto escalar

$$(f \mid g) = \langle f , \bar{g} \rangle = \int_G f(s)\overline{g(s)}\, ds$$

es un espacio de Hilbert.

Como permiten demostrar inmediatamente 1. 2. 5. C y D es también un álgebra de Banach con el producto de convolución. Podemos además definir en $L^2(G)$ una involución $f \longrightarrow \tilde{f}$ mediante

$$\tilde{f}(s) = \overline{f(s^{-1})}.$$

Hemos visto en I. 2. 7. que esta aplicación satisface los axiomas $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$ y $AH_1$ del parágrafo 1 de este capítulo y se satisface también

$AH_3$ $\qquad (f * g \mid h) = \langle f * g, \bar{h} \rangle = \langle g, \check{f} * \bar{h} \rangle = (g \mid \tilde{f} * h)$

y $AH_4$ $\qquad (f \mid g) = \langle f, \bar{g} \rangle = \langle \check{g}, \check{f} \rangle = \langle \tilde{g}, \bar{\tilde{f}} \rangle = (\tilde{g} \mid \tilde{f})$.

Además si $f \neq 0$ (en $L^2(G)$), vale $(\tilde{f} * f)(e) = (N_2(f))^2$ por I. 2. 10. D., y por lo tanto $\tilde{f} * f \neq 0$ (en $L^2(G)$: puesto que $\tilde{f} * f$ es continua como se demuestra facilmente). Eso prueba $AH_2$.

Podemos afirmar entonces que $L^2(G)$ con su norma, el producto de convolución y la involución ya definida es un álgebra hilbertiana (completa). En particular podremos aplicar a este caso los resultados del parágrafo 1 de este capítulo y (en virtud de IV. 1. 5.) los del capítulo III sobre anillos séticos (III. 5. 9.).

Como es obvio mediante identificaciones naturales (ver I. 2. 4., I. 3. 9.) si G es compacto se puede suponer

$$\mathcal{C}(G) \subset L^2(G) \subset L^1(G) \subset \mathcal{M}(G) \supset G$$

(aquí $\mathcal{M}^c = \mathcal{M}^1 = \mathcal{M}$ y la topología será la de la norma $\| \ \|_1$), y además vale

$$N_\infty(f) \geqslant N_2(f) \geqslant N_1(f) = \| f\,ds \|_1$$

visto lo cual:

a) $L^1(G)$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{M}(G)$ (I. 2. 6.); su topología es la inducida por la de $\mathcal{M}(G)$.

b) $L^1(G)$ es la clausura de $L^2(G)$ en $\mathcal{M}(G)$.

IV. 3. 2.- TEOREMA

Si $\mathfrak{b} \subset L^2(G)$ es un subespacio cerrado de $L^2(G)$, son equivalentes:

1) $\mathfrak{b}$ es un ideal a izquierda en $L^2(G)$ (resp. der.)

2) $\mathfrak{b}$ es un submódulo de $L^2(G)$ como $Q(G)$-módulo a izquierda, ($Q(G)$ = espacio vectorial de las medidas

de soporte finito : ver I, 3, 1 ), la operación exterior: $q, f \longrightarrow q*f$

( resp. derecha, la operación : $f, q \longrightarrow f*q$ ).

Sea $h_U$ como en I. 3. 11. Entonces si $f \in \mathfrak{b}$, $h_U * \mathcal{E}_s * f \longrightarrow \mathcal{E}_s * f$ en $L^2(G)$, y como $h_U * \mathcal{E}_s \in \mathcal{C}(G) \subset L^2(G)$, es claro, por ser $\mathfrak{b}$ cerrado, que $\mathcal{E}_s * f \in \mathfrak{b}$. Luego $Q(G) * \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$. (obsérvese que esta demostración es válida para todo $p \geq 1$ ).

Eso prueba que 1) implica 2).

Como $\mathfrak{b}$ es cerrado por hipótesis, será $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\perp\perp}$ ( la ortogonalidad entendida para la estructura de espacio de Hilbert de $L^2(G)$ ). Como se muestra inmediatamente, si $\mathfrak{b}$ es $Q(G)$ estable a izquierda, también lo es $\mathfrak{b}^{\perp}$.

Si se calcula $\mathfrak{b}^{\perp\perp}$ resulta :

$$g \in \mathfrak{b}^{\perp\perp} \quad \text{sii} \quad (f \mid g) = 0, \quad \forall f \in \mathfrak{b}^{\perp}$$

y como $\mathfrak{b}^{\perp}$ es $Q(G)$-estable, será

$$(\mathcal{E}_s * f \mid g) = 0 \qquad \forall\, s \in G,\ f \in \mathfrak{b}^{\perp}$$

o sea

$$\langle f * \tilde{g}, \mathcal{E}_s \rangle = 0$$

o lo que es lo mismo, $f * \tilde{g} = 0$, de manera que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^{\perp\perp}$ coincide con la imagen por $\sim$ del anulador a derecha, $\breve{i}$ de $\mathfrak{b}^{\perp}$ como subconjunto del anillo $L^2(G)$. Pero es claro que $\breve{i}$ es un ideal a derecha y por lo tanto $\mathfrak{b} = \tilde{\breve{i}}$ es un ideal a izquierda. ☒

Veremos ahora dos lemas ( muy conocidos ) válidos en $L^2(G)$ y que permitirán estudiar este caso particular en detalle.

IV. 3. 3 LEMA

Una función $h$ de $\mathcal{C}(G)$ es central en $L^2(G)$ si y solamente si cumple $h(xy) = h(yx)$ para todo par $x, y \in G$.

Por definición, una función $h$ está en el centro de $L^2(G)$ sii

$$h * f = f * h$$

para toda $f \in L^2(G)$, es decir, sii

$$\int_G h(st) f(t^{-1}) dt = \int_G f(st) h(t^{-1}) dt$$

Pero

$$\int_G f(st) h(t^{-1}) dt = \int_G f(st^{-1}) h(t) dt = \int_G f(t^{-1}) h(ts) dt$$

y por lo tanto $h$ será central sii

$$\int_G f(t^{-1}) (h(st) - h(ts)) dt = 0$$

para toda $f \in L^2(G)$, lo que solo puede ocurrir si $h(st) = h(ts)$ p. p., es decir, supuesta $h$ continua, $h(st) = h(ts)$, $\forall\ s, t \in G$.

Luego el lema está probado. ⊠

IV. 3. 4 COROLARIO

Toda función continua central en $L^2(G)$ es central en $\mathcal{M}(G)$.

(I. 2. 4. B y C) ⊠

Teniendo en cuenta la completa regularidad de todo grupo topológico ( [1] Liv. III, Chap II resulta también :

IV. 3. 5 COROLARIO

$G$ es abeliano si y solamente si $L^2(G)$ es abeliano .

⊠

IV. 3. 6 LEMA

Cada ideal bilátero cerrado no nulo de $L^2(G)$ contiene un elemento no nulo del centro de $L^2(G)$.

Sea $\mathfrak{b}$ un ideal bilátero, no nulo, cerrado de $L^2(G)$. Si $g \in \mathfrak{b}$ , $g \neq 0$, llamemos f al elemento de $\mathfrak{b}$ :

$$f = g * \tilde{g}.$$

Sabemos que f es continua y que $f(e) = (N_2(g))^2 \neq 0$ (I. 2. 10. B ).

Como $\varepsilon_s * f$ y $f * \varepsilon_s$ también pertenecen a $\mathfrak{b}$ (IV. 3. 3), será

$$h(t) = \int_G f(sts^{-1})\, ds = \lim \sum \check{\varepsilon}_{s_i} * f * \varepsilon_{s_i}$$

una función de $\mathfrak{b}$ y también continua ( $\mathfrak{b}$ es cerrado!)

Pero $h(e) = f(e) \neq 0$ y además

$$h(tu) = \int_G f(stus^{-1})\, ds = \int_G f((su)tu(su)^{-1})\, ds = \int_G f(suts^{-1})\, ds = h(ut)$$

de manera que por el lema IV. 3. 4 se puede afirmar que h es un elemento no nulo del centro de $L^2(G)$. Luego el lema está probado. ⊠

Si $\mathfrak{a}$ es un pié de $L^2(G)$, podemos considerar el ideal bilátero Adh( $\mathfrak{a}$ ) de $L^2(G)$. Adh( $\mathfrak{a}$ ) es un álgebra renga, (IV. 1. 17), de centro no nulo por el lema anterior.

Supongamos elegida en Adh( $\mathfrak{a}$ ) una familia de elementos $\{e_i\}_{i \in \Lambda}$ como en el parágrafo 2 de éste capítulo. ( $\mathfrak{l}$ es el imi destacado).

Aplicaremos los enunciados de ese parágrafo, con la misma notación, a este caso.

IV. 3. 7 PROPOSICION

Los piés de $L^2(G)$ son de dimensión compleja finita y por lo tanto cerrados.

Si f es un elemento central no nulo de Adh( $\mathfrak{a}$ ), por el corolario IV. 1. 12, para algún $k \in \mathbb{C}$ se cumplirá $f * g = k . g$ cualquiera sea $g \in \mathfrak{l}$ . Además $k \neq 0$ ya que en caso contrario $f$ pertenecería al anulador a izquierda de $\mathfrak{l}$ en $Adh(\mathfrak{a})$ que es un ideal bilátero cerrado, y por ser $f$ central, dicho anulador coincidiría con $Adh(\mathfrak{a})$, absurdo.

Pero entonces (IV.2.5, (1))

$$\sum_i (N_2(T_f^{Adh(\mathfrak{a}),\mathfrak{l}} a_i))^2 = \sum_i |k|^2 (N_2(a_i))^2 = \sum_i |k|^2 \leq (N_2(f))^2$$

lo que no puede ocurrir salvo en el caso en que la familia $\{e_i\}$ sea finita. Pero en ese caso (IV.2.1):

$$Adh(\mathfrak{a}) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{l}_i = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{l}_i = \mathfrak{a} \, ,$$

y en consecuencia $\mathfrak{a}$ es de longitud finita y por lo tanto (IV.1.13), de dimensión finita, como se quería probar.

IV. 3. 8 COROLARIO (Teorema de Peter-Weyl)

Si $G$ es un grupo compacto:

a) los piés de $L^2(G)$ son subálgebras hilbertianas de $L^2(G)$ (y en particular estables con respecto a la involución) de dimensión finita y con unidad (la que es autoadjunta). El proyector $E(a)$ de $L^2(G)$ en un pié $a$ está dado por

$$E(a)\, f = f * u_a = u_a * f$$

donde $u_a$ es la unidad de $a$.
La dimensión de cada pié es igual al cuadrado de su longitud. Además cada uno de ellos es (no canonicamente) isomorfo a un anillo del tipo $M_n(C)$, donde $n$ es igual a la longitud del pié.
Hay coincidencia entre la noción de pié y la de ideal bilátero minimal.

b) Los piés están formados por funciones continuas.

c) Los piés e imis de $L^2(G)$ son respectivamente ídea-
les biláteros minimales de $M(G)$ e imis de $M(G)$.

Demostración.

a) IV. 3. 7, IV. 1. 17, III. 6. 6, III. 8. 5, IV. 1. 20, IV. 1. 13.

b) En efecto, si $f \in a$, será $f = f * u_a$, y por lo tanto continua en virtud de I. 2. 5. a

c) I. 3. 5, I. 3. 6. ⊠

Con esto damos por terminado el estudio en general de los piés de $L^2(G)$, $G$ compacto. En el parágrafo siguiente usaremos continuamente los resultados del último corolario.

Utilizaremos más adelante el siguiente :

IV. 3. 9 LEMA

Las propiedades siguientes son equivalentes :

a) $G$ es abeliano.

b) Los piés de $L^2(G)$ son de dimensión compleja 1.

Demostración.

Si $G$ es abeliano, $L^2(G)$ es abeliano (IV. 3. 6) y en consecuencia cada pié de $L^2(G)$ es abeliano. Pero entonces, puesto que los piés son isomorfos a anillos $M_n(C)$, será $n=1$, y por lo tanto $\dim_C a = 1$. La recíproca es inmediata, ya que si los piés son de dimensión 1, son abelianos y a) resulta de IV. 1. 14 y IV. 3. 6. ⊠

ALGUNAS PROPIEDADES ESTRUCTURALES DE LOS PIES DE $L^2(G)$.

IV. 3. 10 PIE TRIVIAL.

En un álgebra del tipo $L^2(G)$ (G compacto como hasta ahora) puede demostrarse fácilmente que el espacio vectorial de las funciones constantes es un ideal bilátero. Además su dimensión compleja es igual a 1, de manera que es evidentemente cerrado y minimal, o sea (IV. 3. 9) un pié. Lo llamaremos el PIE TRIVIAL de $L^2(G)$. La unidad de ese pié es, como se comprueba fácilmente, la función constante $u(s) = 1$.

Más adelante daremos algunas propiedades del pié trivial.

## IV. 3. 11 UNIDADES MATRICIALES.

Sea $\mathfrak{A}$ un pié de $L^2(G)$ (G compacto como hasta ahora). Por IV. 3. 8 será

$$\mathrm{Adh}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{l} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{A} e_i$$

donde para cada $i$, $e_i$ es un idempotente autoadjunto irreducible y $\mathfrak{l}_i$ es un imi tal que $e_i \in \mathfrak{l}_i$ (IV. 1. 8). Cada $\mathfrak{l}_i$ tiene dimensión compleja n (III. 8. 5 y IV. 1. 10). Si llamamos $P_i = T_{e_i}^{\mathfrak{A},\mathfrak{l}_1}$, como $\{P_i\}$ es una familia de proyectores ortogonales dos a dos de rango 1 (IV. 2. 2) existirá una base ortonormal $a_1, \dots a_n$ en $\mathfrak{l}_1$ tal que $P_i(\mathfrak{l}_1) = Ca_i$.

Como

$$\mathfrak{l}_i\, a_i = \mathfrak{l}_i (Ca_i) = \mathfrak{l}_i P(\mathfrak{l}_1) = \mathfrak{l}_i (e_i\, \mathfrak{l}_1) = \mathfrak{l}_i\, \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_1$$

para cada par $a_i$, $a_j$ de elementos de $\{a_i\}$ existirá un elemento $e_{ji} \in \mathfrak{l}_i$ tal que $e_{ji} a_i = a_j$.

Ahora bien, la representación $T^{\mathfrak{A}\mathfrak{l}_1}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathrm{End}_C(\mathfrak{l}_i)$ (III. 8. 6), de manera que proveyendo a $\mathfrak{l}_1$ de la base $\{a_i\}$, induce un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $M_n(C)$. De allí se deduce que los elementos $e_{ji}$ son (después de elegidos los $a_i$) únicos, y que se corresponden con las matrices.

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \quad \\ 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

de donde a su vez se concluye que $e_{ij} * a_k = \delta_{jk}\, a_i$.

Para cada $s \in G$ notaremos $M_a(s)$ la matriz

$$\text{(IV. 3. 12. 1)} \qquad M_a(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} e_{11}(s) & \frac{1}{n} e_{1n}(s) \\ \frac{1}{n} e_{n1}(s) & \frac{1}{n} e_{nn}(s) \end{pmatrix}$$

Por supuesto $M_a(s)$ depende de la elección de los elementos $e_i$, $a_i$ (veremos mas adelante ( IV. 5. 3 ) que las matrices así construídas son semejantes para dos elecciones distintas :

$AM_a(s)\ A^{-1} = M'_a(s)$, A independiente de s).

## IV. 3. 12 LEMA

La familia $e_{ij}$ y la matriz $M_a(s)$ cumplen:

1) $e_{ij} = \tilde{e}_{ji}$

2) $e_{ij} * e_{kh} = \delta_{jk} \cdot \delta_{ih} \cdot e_{kh}$

3) Para cada i, j, $a * e_{ij} = \mathcal{I}_j$.

4) $N_2(e_{ij}) = (n)^{\frac{1}{2}}$

5) $e_{ij}(e) = n$ (e=unidad de G)

6) $\sum_{i=1}^{n} e_{ii} = u$ es la unidad de a.

7) Para todo par s, t de elementos de G, vale:

$$\frac{1}{n}\, e_{ij}(st) = \sum_h \left(\frac{1}{n}\, e_{ih}(s)\right)\left(\frac{1}{n}\, e_{hj}(t)\right)$$

8) La aplicación $s \longrightarrow M_a(s)$ es una representación de G en $C^n$.

9) Para cada i, la familia $\{e_{ji}\}$ $j = 1, \ldots, n$ es una base algebraica de $\mathcal{I}_i$.

1) En efecto,

$$(a_k \mid \tilde{e}_{ji} * a_h) = (e_{ji}\ \ a_k \mid a_h) = \delta_{ik}\,(a_j \mid a_h) = \delta_{ik}\ \ \delta_{jh} = (a_k \mid e_{ij} * a_h),$$

de manera que

$$T^{\mathfrak{a}, \mathcal{I}_1}_{\tilde{e}_{ij}} = T^{\mathfrak{a}, \mathcal{I}_1}_{e_{ji}}$$

y por lo tanto (III. 6. 2)

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ji}$$

2) y 3) resultan del isomorfismo con $M_n(C)$.

4) Es inmediato que todos los $e_{ij}$ tienen la misma norma:

$$(N_2(e_{ij}))^2 = (e_{ij} \mid e_{ij}) = (e_{i1} * e_{1j} \mid e_{i1} * e_{1j}) = (\tilde{e}_{i1} * e_{i1} \mid e_{1j} * \tilde{e}_{1j}) =$$

$$= (e_{1i} * e_{i1} \mid e_{1j} * e_{j1}) = (e_{11} \mid e_{11}) = (N_2(e_{11}))^2 .$$

Sin embargo, para obtener ese valor es necesario un pequeño cálculo. Llamemos $\mathcal{V}_k$ a $\mathcal{O}\!\iota * e_{kk}$ (ver c). Sabemos (IV. 3. 2 ó IV. 3. 8), que los $\mathcal{V}_k$ son invariantes por traslaciones a izquierda:

$$f(t) \in \mathcal{V}_k \qquad \Longrightarrow \qquad f(st) \in \mathcal{V}_k$$

Como para cada $j$, $e_{jk} * e_{kk} = e_{jk}$, los elementos $e_{jk}$, $j = 1, 2, \ldots n$ forman una base de $\mathcal{V}_k$. Pero entonces, para cada $s \in G$, existen nos complejos $c_{ij}(s)$ tales que

$$(1) \qquad e_{ik}(st) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(s) \; e_{jk}(t).$$

Como además

$$e_{jk}(t) = (e_{j1} * e_{1k})(t) = (e_{j1} \; \tilde{e}_{k1})(t) = \int_G e_{j1}(ts) \, \overline{e_{k1}(s)} \; ds$$

si se reemplaza en (1) este valor de $e_{jk}(t)$ y se hace después $t = e$ (unidad de G), se obtiene:

$$(2) \qquad e_{ik}(s) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(s) \; (e_{j1} \mid e_{k1}) = c_{ik}(s) \; (e_{k1} \mid e_{k1}) = c_{ik}(s) \; (N_2(e_{11}))^2 .$$

Finalmente haciendo $s = t^{-1}$ y $i = k = 1$ en (1), resulta

$$e_{11}(e) = \sum_j c_{1j}(s) \; e_{j1}(s^{-1}) = \sum_j c_{1j}(s) \; \overline{e_{1j}}(s)$$

y si se observa que $(N_2(e_1))^2 = e_1(e)$ (I. 2. 10. B), se tendrá

$$(N_2(e_{11}))^4 = (N_2(e_1))^2 \; e_1(e) = (N_2(e_1))^2 \sum c_{1j}(s) \; \overline{e_{1j}}(s) = \sum e_{1j}(s) \; \overline{e_{1j}}(s)$$

en virtud de (2), de manera que

$$(N_2(e_{11}))^4 = \int_G (N_2(e_{11}))^4 \, ds = \sum_j \int_G e_{1j}(s) \; e_{1j}(s) \, ds = \sum_j N_2(e_{1j})^2 =$$

$$= n \, (N_2(e_{11}))^2$$

o lo que es lo mismo

(3) $$N_2(e_{11}) = (n)^{\frac{1}{2}}.$$

5) De 2) resulta $e_{ji} * e_{ij} = e_{ij}$ y de 1): $\tilde{e}_{ij} * e_{ij} = e_{ij}$.

En consecuencia, por I.2.10.D y 4):

$$n = (N_2(e_{ij}))^2 = \tilde{e}_{ij} * e_{ij}(e) = e_{ij}(e).$$

6) Resulta del isomorfismo con $M_n(C)$.

7) Es inmediato también si se tiene en cuenta las igualdades (1), (2) y (3) de la demostración del punto 4) aquí arriba.

En efecto será

$$e_{ik}(st) = \sum (n)^{-1} e_{ij}(s))(n^{-1} e_{jk}(t))$$

$$e_{ik}(st) = \sum_j c_{ij}(s) \quad e_{jk}(t)$$

por (1), y, utilizando (2) se puede reemplazar $c_{ij}$ por $e_{ij}/(N_2(e_{11}))^2$ que por (3), es lo mismo que $e_{ij}/n$:

$$e_{ik}(st) = \sum_j (n)^{-1} \quad e_{ij}(s) \quad e_{jk}(t)$$

y dividiendo por n:

$$(n)^{-1} \quad e_{ik}(st) = \sum_j (n^{-1} \quad e_{ij}(s))(n^{-1} \quad e_{jk}(t))$$

8) Evidente a partir de 7):

$$M_a(st) = M_a(s) \quad M_a(t).$$

9) Resulta del isomorfismo con $M_n(C)$. ∎

IV. 3. 13 COROLARIO

Si $a$ es un pié de $L^2(G)$ de unidad $u$ y longitud $n$, vale $N_2(u) = n$ y $u(e) = n^2$.

Demostración.

De $u = \sum e_{ii}$ y $e_{ii} \perp e_{jj}$, $i \neq j$, resulta $(N_2(u))^2 = \sum (N_2(e_{ii}))^2 = n^2$. Por otra parte $u(e) = n^2$ en virtud de 5) y 6) de IV.3.13

## § 4 CARACTERES

Veremos ahora la noción de carácter de un grupo compacto. Durante todo el parágrafo, G representará un grupo compacto. Las propiedades fundamentales de los caracteres están descriptas en el teorema IV. 4. 2, cuya demostración se basa en el lema IV. 3. 12. Después de dicho teorema, consideramos dos casos particulares (clásicos): $1^o$ grupo compacto abeliano, $2^o$ grupo finito. Con respecto a este último caso, remitimos al lector a (12) y a Van der Werden, Moderne Algebra, donde se encuentran ejemplos y detalles, aunque los resultados fundamentales están contenidos en nuestro IV. 4. 4.

Recordemos que dos elementos $s, t$ de un grupo G se llaman conjugados si existe $v \in G$ tal que $vsv^{-1} = t$. La relación "s y t son conjugados" es una relación de equivalencia. Sus clases de equivalencia se llaman "clases de conjugados".

### IV. 4. 1 DEFINICION

Si G es un grupo compacto y a es un pié de $L^2(G)$ de unidad $u_a$ y longitud $n_a$, llamaremos CARACTER de G asociado a a, a la función $\chi_a = \frac{u_a}{n_a}$.

### IV. 4. 2 TEOREMA

1) Los caracteres son funciones continuas autoadjuntas, centrales en $M(G)$:

a) $\chi_a = \tilde{\chi}_a$

b) $\chi_a * \mu = \mu * \chi_a$, $\mu \in M(G)$.

y además vale :

c) $\chi_a * \chi_a = \frac{1}{n_a} \chi_a$

2) Vale, cualesquiera sean a, s, t:

$$\chi_a(sts^{-1}) = \chi_a(t)$$

(es decir, los caracteres son constantes sobre clases de conjugados).

3) La familia $\{\chi_a\}$ de caracteres es ortonormal:

$$\int \chi_a(s) \, \overline{\chi_{a'}(s)} \, ds = 0 \qquad a \neq a'$$

$$\int |\chi_a(s)|^2 \, ds = 1$$

y además si $a_o$ es el pié trívial,

$$\int \chi_a(s) \, ds = 0 \qquad a \neq a_o$$

4) Si $M_a(s)$ es una representación de $G$ construída como en IV. 3. 11, vale:

$$\chi_a(s) = Tr(M_a(s))$$

y en particular:

$$\chi_a(e) = \text{long } a = \text{dim de la representación } s \to M_a(s).$$

5) Fórmula integral. Para cualquier carácter $\chi$, vale:

$$\chi(e) \int \chi(usu^{-1}t) \, du = \chi(s) \, . \, \chi(t).$$

6) Toda función céntral $f \in L^2(G)$ se puede desarrollar en serie de caracteres

$$f = \sum \lambda_a \, . \, \chi_a$$

donde $\lambda_a = (f, \chi_a)$ (o lo que es lo mismo, la familia de caracteres es ortonormal y completa en el centro de $L^2(G)$).

1) Resulta de la definición de carácter y de IV. 3. 9 y IV. 3. 5.

2) IV. 3. 9 y IV. 3. 4.

3) IV. 1. 14 y IV. 3. 13.

4) IV. 3. 12. 6

5) Según la definición, si $e_{ij}$ es una familia como en IV. 3. 11, será (IV. 3. 12. 6):

$$\chi(s) = \frac{1}{n} \sum_{i} e_{ii}(s)$$

y entonces

$$\chi(usu^{-1}t) = \frac{1}{n} \sum_{i} e_{ii}(usu^{-1}t).$$

Pero entonces, por IV. 3. 12. 7 (aplicado tres veces) se concluye:

$$\begin{aligned} \chi(usu^{-1}t) &= \frac{1}{n^4} \sum_{i,j,h,k} e_{ij}(u)\; e_{jh}(s)\; e_{hk}(u^{-1})\; e_{ki}(t) \\ &= \frac{1}{n^4} \sum (e_{ij}(u)\; e_{hk}(u^{-1}))\; e_{jh}(s)\; e_{ki}(t) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\int \chi(usu^{-1}t)\, du = \frac{1}{n^4} \sum \left( \int e_{ij}(u) \cdot e_{hk}(u^{-1})\, du \right) e_{jh}(s)\; e_{ki}(t)$$

y teniendo en cuenta IV. 3. 12. 2 resulta:

$$\begin{aligned} \int \chi(usu^{-1}t)\, du &= \frac{1}{n^4} \sum \delta_{jh}\; \delta_{ik}\; e_{hk}(e)\; e_{jh}(s)\; e_{ki}(t) \\ &= \frac{1}{n^4} \sum e_{ji}(e)\; e_{jj}(s)\; e_{ii}(t) \end{aligned}$$

y como $e_{ji}(e) = n$ (IV. 3. 12. 5), obtenemos finalmente:

$$\int \chi(usu^{-1}t)\, du = \frac{1}{n}\; \chi(s)\, .\, \chi(t)$$

de donde, por IV. 4. 2. 4 resulta IV. 4. 2. 5

6) Es claro que toda función del tipo $f = \sum \lambda_a . \chi_a$ es central (IV. 4. 2. 1). Recíprocamente si $f$ es central, será $f = \sum f_a$ donde $f_a$ es la proyección $f_a = E(a) f = u_a * f$ de $f$ sobre $a$ (IV. 1. 15, IV. 3. 9). Pero entonces si $f$ es central, como $u$ también es central, será $f_a$ central en $L^2(G)$ y en particular en $a$. Ahora bien, el centro de $a$ es $Cu_a = C\chi_a$ en virtud del isomorfismo con $M_n(C)$ (es fácil demostrar que el centro de $M_n(C)$ es CI, I = identidad), de manera que tendremos $f_a = \lambda_a \chi_a$ y entonces $f = \sum \lambda_a . \chi_a$, como queríamos probar. ⊠

IV. 4. 3.- CASO PARTICULAR: G ES ABELIANO

Si G es un grupo compacto abeliano, los piés de $L^2(G)$ son de dimensión 1 (IV. 3. 10. -) y entonces la fórmula integral IV. 4. 2. 5 se transforma en

$$\chi(s)\ \chi(t) = \int \chi(usu^{-1}t)\ du = \int \chi(st)\ du = \chi(st)\ .$$

Esto prueba que los caracteres son funciones multiplicativas. Como $\tilde{\chi} = \chi$ (IV. 4. 2. 1), será

$$^{*}\chi(t) = \tilde{\chi}(t) = \overline{\chi(t^{-1})} = (\overline{\chi(t)})^{-1}$$

de manera que

$$|\chi(t)|^2 = \chi(t)\ \overline{\chi(t)} = 1\ .$$

Si recíprocamente $f:G \longrightarrow C$ cumple $|f| = 1$ y $f(st) = f(s).f(t)$, entonces

$$\tilde{f}(t) = \overline{f(t^{-1})} = \left(\overline{f(t)}\right)^{-1} = f(t)$$

y además

$$f * g(t) = \int f(ts^{-1})\, g(s)\ ds = f(t) \int f(s^{-1})\, g(s)\ ds = \lambda f(t)$$

lo que prueba que el subespacio $Cf$ es un ideal bilátero, evidentemente cerrado y minimal, es decir un pié. Como además $f * f = f$, se concluye què $f$ es la unidad y el caracter de ese pié. Resumiendo, hemos probado que:

IV. 4. 3. 1.- PROPOSICION

Si G es un grupo compacto abeliano, los caracteres de G coinciden con los homomorfismos continuos de G en el grupo multiplicativo de los números complejos de módulo 1

Teniendo en cuenta IV. 3. 6. - y IV. 4. 2. 6. - se tiene también:

IV. 4. 3. 2.- PROPOSICION

Si $G$ es un grupo compacto abeliano, los caracteres de $G$ forman una base ortonormal de $L^2(G)$.

Esta última proposición se reduce, cuando $G$ es el toro de dimensión $1$, $G = T^1$ a la afirmación de que el sistema trigonométrico es completo en $L^2(T^1)$.

IV. 4. 4.- CASO PARTICULAR: G ES FINITO

En el caso en que $G$ es un grupo finito de $g$ elementos, la integral de una función $f : G \longrightarrow C$ se reduce, como ya dijimos muchas veces, a

$$\int f(s)\, ds = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} f(s)$$

y es claro que aquí $L^2(G) = C^G = C\,[G]$ (ver Cap. II).

Para este caso entonces el teorema IV. 4. 2.- se transforma en el siguiente:

IV. 4. 4. 1.- TEOREMA

Si $G$ es un grupo finito:

1. Los caracteres de $G$ son funciones centrales de su álgebra de grupo:

$$\sum_s \chi(ts^{-1})\, f(s) = \sum_s \chi(t^{-1} s)\, f(s^{-1})$$

2. Cualesquiera sean $s$, $t$ y el carácter $\chi$, vale:

$$\chi(sts^{-1}) = \chi(t)$$

o lo que es lo mismo, los caracteres son constantes sobre las clases de conjugados.

3. -Ortogonalidad:

$$\sum_{s} \chi_a(s)\ \overline{\chi_{a'}(s)} = 0 \quad , \text{ si } a \neq a' .$$

$$\sum_{s} \left| \chi_a(s) \right|^2 = g$$

y si $a_o$ es el pie trivial, vale:

$$\sum_{s} \chi_a(s) = 0 \quad , \quad a \neq a_o$$

4. Vale

$$\sum_{a} \text{long}(a)\ \chi_a(s) = \begin{cases} 0, & s \neq e \\ g, & s = e \end{cases}$$

y en particular

$$\sum_{a} (\text{long}(a))^2 = g$$

5. Fórmula integral

$$\chi(e) \sum_{v} \chi(vsv^{-1}t) = g\ \chi(s)\ \chi(t)$$

6. Una función $f : G \longrightarrow C$ es central en $C[G]$ sii es combinación lineal de caracteres .

7. El número de caracteres es el mismo que el de clases de elementos conjugados .

8. Si $s$ , $t$ no son conjugados:

$$\sum_{a} \chi_a(s)\ \chi_a(t^{-1}) = 0$$

Es claro que 1, 2, 3, 5 resultan de IV. 4. 2.- También 6 resulta de IV. 4. 2.- teniendo en cuenta que el número de caracteres es finito . Según IV. 3. 4. - una función es central en $C[G]$ sii es constante sobre las clases de conjugados. En consecuencia el subespacio de las funciones centrales tiene dimensión igual al número de tales clases y como los caracteres forman una base de dicho subespacio, resulta 7 . Finalmente 4 resulta de lo siguiente:

si $f: G \longrightarrow C$ es la función que vale $g$ en $e$ y $0$ en $s \neq e$, es claro que $f$ es central en $C[G]$ (más aún, es la unidad de $C[G]$) y por lo tanto será

$$f = \sum \lambda_a \chi_a$$

donde $\lambda_a \chi_a = u_a * f = \text{long}(a) \chi_a * f = \text{long}(a) \chi_a$ y entonces

$$f = \sum_a \text{long}(a) \chi_a$$

de donde resulta 4 (IV. 4. 2. 4).

Finalmente veamos la demostración de 8. Por 5, vale

$$\sum_a \chi_a(s) \chi_a(t^{-1}) = \frac{1}{g} \sum_{a,v} \chi_a(e) \chi_a(vsv^{-1}t^{-1}) = \frac{1}{g} \sum_v \Big(\sum_a \chi_a(e) \chi_a(vsv^{-1}t^{-1})\Big)$$

y si $s$ y $t$ no son conjugados, $vsv^{-1}t^{-1} \neq e$ para todo $v$, de manera que cada suma $\sum_a \chi_a(e) \chi_a(vsv^{-1}t^{-1})$ es nula por 4, y por lo tanto hemos demostrado 8.

---------

## § 5.- REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES Y REDUCIBILIDAD

### IV. 5. 1.- NOTACION

Durante este parágrafo, $G$ será un grupo compacto, $ds$ su medida de Haar; $L^2(G)$ su álgebra de grupo, es decir lo que hemos estado estudiando ; $\mathfrak{A}$ el conjunto de los piés de $L^2(G)$; si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $u_{\mathfrak{a}}$, $n_{\mathfrak{a}}$, $\chi_{\mathfrak{a}}$ y $E(\mathfrak{a})$ serán respectivamente su unidad, su longitud, su carácter y el proyector $L^2(G) \longrightarrow \mathfrak{a}$. (Ver IV. 3. 9.); $\mathfrak{A}_o$ será el pié trivial y $\chi_o$ su carácter, llamado a veces el carácter trivial. Con $\mathcal{L}$ designaremos una categoría de (objetos) espacios vectoriales topológicos a la que pertenezcan todas las subálgebras de $\mathcal{M}(G)$ y cerrada respecto de subespacios (los morfismos de $\mathcal{L}$ son, como es natural, las transformaciones lineales continuas). Supondremos además que las dimensiones sobre $C$ de todos los objetos de $\mathcal{L}$ están acotadas por un cardinal $\alpha$. $\mathcal{L}$ determina una nueva categoría (de monoides semitopológicos*), que se notará $\mathcal{V}$, cuyos objetos son los submonoides de los monoides $\text{Hom}(H, H)$ (operación composición y topologizados mediante la convergencia puntual

* Monoide semitopológico = espacio topológico + operación asociativa separadamente continua.

débil de operadores) donde H es un objeto de $\mathcal{H}$, los subgrupos de G y las subálgebras de $\mathcal{M}(G)$ (con su estructura multiplicativa y la topología vaga) y cuyos morfismos son homomorfismos de monoide, continuos, (respetando las unidades, cuando las hay) tales que si parten de un subgrupo de G, son representaciones practicables (II. 1. 7.) continuas para la topología puntual fuerte de operadores. En adelante diremos <u>representación</u> solamente cuando se trate de representaciones que son morfismos de $\mathcal{V}$, o, lo que es lo mismo, cuando el espacio de representación es un objeto de $\mathcal{H}$ y ella es practicable. A cada representación queda asociada la familia de las que le son semejantes. De esta manera la familia de las representaciones de G (resp. $L^2(G)$, $\mathcal{M}(G)$) - que es una subfamilia de la familia de los morfismos de $\mathcal{V}$ - queda dividida en clases disjuntas. Por abuso de lenguaje diremos que una tal clase es unitaria, de dimensión finita, de dimensión n, irreducible, etc. si sus elementos son representaciones que tienen esas propiedades, respectivamente. Cuando digamos "una clase de representaciones" se entenderá que se trata de una clase según esa partición.

Notaremos $\triangle(G)$ (= $\triangle(G, \mathcal{H})$) la familia de las clases irreducibles de G y P(G) (= $P(G, \mathcal{H})$) la de todas las clases. Análogo para un subgrupo de G. Como la traza de una representación de dimensión finita es invariante por semejanza, si $\mathfrak{F} \in P(G)$ y $\mathfrak{F}$ es de dimensión finita, notaremos $Tr(\mathfrak{F})$ la función $Tr(T)$ donde T es cualquier representación en $\mathfrak{F}$.

En los capítulos que siguen (más exactamente en los próximos dos) supondremos siempre que la convención "G es un grupo compacto" induce todas las notaciones hasta aquí descriptas, de manera que las usaremos sin previo aviso.

-----

Veremos en este parágrafo una parte importante (y clásica: ver [10], [13]) de la teoría de representaciones de grupos compactos que utilizaremos posteriormente en el tratamiento de las funciones esféricas sobre grupos compactos (caps. V y VI).

Comenzaremos el estudio de la descomposición de representaciones como suma de representaciones irreducibles por el caso más importante: las representaciones regulares.

Recordemos que llamamos $R_s$ y $R'_s$ a las representaciones regulares de G:

$$R_s \; f = f * \check{\mathcal{E}}_s$$

$$(f \in L^2(G).)$$

$$R'_s \; f = \mathcal{E}_s * f$$

Sea $\mathfrak{l}$ un imi de $L^2(G)$. En virtud de IV. 3. 3., $\mathfrak{l}$ es estable para la representación $R'_s$ . En consecuencia también lo es para las representaciones $R'_f$ y $R'_\mu$ , $f \in L^2(G)$, $\mu \in M(G)$. Recordemos que $R'_f$ y $R'_\mu$ se definen por:

$$R'_f \; g = \int R'_s \; g \, . \, f(s) \; ds = f * g$$

$$R'_\mu \; g = \int R'_s \; g \; d \mu(s) = \mu * g.$$

Llamaremos T a la representación que se obtiene mediante contracción (I. 1. 8.) de $R'$ a $\mathfrak{l}$ .

Si a es el pié que contiene a $\mathfrak{l}$ , se puede expresar a a como

$$a = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{l}_i$$

donde cada $\mathfrak{l}_i$ es un imi y $\mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}$ .

Si se construye ahora una familia $e_{ij}$ como en IV. 3. 11., en $\mathfrak{l}$ queda determinada una base: $\{e_{i1}\}$ (i = 1, . . . n) (IV. 3. 12. 9.) y por lo tanto la representación T tendrá en términos de la base $e_{i1}$ , una representación matricial:

$$T_s = M(s).$$

<u>IV. 5. 2.- LEMA</u>

1) <u>La representación T es irreducible.</u>

2) <u>La matriz $M(s)$ coincide con la matriz contragrediente (inversa de la traspuesta) de la $M_a(s)$ definida en IV. 3. 11.: $M(s) = {}^tM_a^{-1}(s)$.</u>

3) <u>Vale: $Tr(T_s) = \chi_{\bar{a}}(s) = \chi_a(s)$.</u>

1). Es inmediato a partir de II. 1. 11. y de la minimalidad de $\mathfrak{l}$ .

2). Para cada i ,

$$(T_s \frac{1}{n} e_{i1})(t) = \frac{1}{n} e_{i1}(s^{-1}t) = \sum_j \frac{1}{n} e_{ij}(s^{-1}) \frac{1}{n} e_{j1}(t)$$

de manera que

$$M(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} e_{11}(s^{-1}) & \dots & \frac{1}{n} e_{n1}(s^{-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} e_{1n}(s^{-1}) & \dots & \frac{1}{n} e_{nn}(s^{-1}) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $M(s) = {}^tM_a^{-1}(s)$.

3). Es claro que $\bar{a}$ es también un pié y que la familia $\bar{e}_{ij}$ se comporta con respecto a $\bar{a}$ como la $e_{ij}$ con respecto a $a$. Como además $\overline{e_{ii}} = \check{e}_{ii}$ (IV. 3. 12.1.), vale:

$$Tr(T_s) = Tr(M(s)) = Tr({}^tM_a^{-1}(s)) = Tr(M_a^{-1}(s)) = Tr(M_{\bar{a}}(s)) = \chi_{\bar{a}}(s) = \overline{\chi_a(s)}.$$

Evidentemente 2) significa que, si $x \in \mathfrak{l}$ , entonces vale:

$${}^tM_a^{-1}(s) \, . \, x = {}^tM_a(s^{-1}) \, . \, x = \mathcal{E}_s * x$$

de donde, pasando a $M(G)$ resulta:

$$M(\mu) \, . \, x = {}^tM_a(\check{\mu}) \, . \, x = \mu * x \qquad (\mu \in M(G).)$$

donde ${}^tM_a(\check{\mu})$ está dada por

$${}^tM_a(\check{\mu}) = \int {}^tM_a^{-1}(s) \, d\mu(s).$$

Obsérvese también que mediante T solamente opera sobre $\mathfrak{l}$ el pié $a$ y los demás piés $a' \neq a$ operan trivialmente mediante la transformación nula.

IV. 5. 3.- DEFINICION

Notaremos mediante $c(a)$ la clase de todas las representaciones de G semejantes a la T del lema anterior.

Es claro que dicha clase no depende del imi que se elija en $a$ para definir T ya que dos tales imis son $M(G)$ - isomorfos y por lo tanto las representaciones sobre ellos resultan semejantes.

La parte 1) del lema IV. 5. 2. nos permite concluir el importante:

IV. 5. 4.- TEOREMA

Para todo grupo compacto $G$, la representación regular $R'$ de $G$ en $L^2(G)$ es completamente reducible (análogo para $R$).

En efecto, $L^2(G)$ es suma directa topológica de imis (IV. 1. 15., IV. 3. 8.) y las contracciones de la representación regular a éstos son irreducibles por IV. 5. 2. 1..

Nota: En este caso se puede afirmar más que lo que la definición de completa reducibilidad (I. 1. 9.) exige: a saber que se descompone el espacio en suma directa topológica de subespacios cerrados invariantes minimales. En general (ver IV. 5. 7.) no se podrá afirmar tanto.

La representación regular ha sido entonces descompuesta. Veremos en lo que sigue que cualquier representación también puede serlo y que las componentes se obtienen de la misma manera. En efecto, para la representación regular se obtuvo $L^2(G) = \bigoplus a$, donde $a$ recorre la familia de los pies de $L^2(G)$. Pero cada pié $a$ de $L^2(G)$ es la imágen de $L^2(G)$ por el operador $R'_{u_a}$ y estos operadores pueden señalarse en cualquier representación: $T_{u_a}$.

IV. 5. 5.- PROPOSICION

Sea $T$ una representación de $G$ de espacio $H$.

1) Para cada pié $a$ de $L^2(G)$, el operador $T_{u_a}$ (que abreviaremos $T_a$) es un proyector continuo de $H$.

2) Las imágenes $T_a(H)$ son subespacios cerrados de $H$, estables para los operadores $T_\mu$, $\mu \in M(G)$.

3) Los proyectores $T_a$ son ortogonales entre sí: $T_a T_{a'} = 0$, si $a \neq a'$ y vale: $H = \bigoplus T_a(H)$.

Además sobre $T_a(H)$ solamente opera el pié $a$: todo otro pié $a'$ opera trivialmente mediante la transformación nula.

4) Sea $\imath$ un imi de $L^2(G)$ contenido en el pié $a$. Consideremos a $\imath$ como $L^2(G)$-módulo simple. Entonces el subespacio $T_a(H)$ es la componente isotípica de tipo $\imath$ del $L^2(G)$-módulo $H$.

1) Resulta de la idempotencia de $u_a$ : $u_a * u_a = u_a$.

2) La imágen de un proyector contínuo es siempre cerrada. Si $\mu \in M(G)$ y $x \in H$, $T_\mu\ (T_a x) = T_\mu\ T_{u_a}\ x = T_{\mu * u_a}\ x \in T_a(H)$ ya que $a$ es un $M(G)$-ideal (IV. 3. 9. c.).

3) Es claro que si $a \neq a'$, $T_a\ T_{a'} = T_{u_a * u_{a'}} = 0$ en virtud de III. 5. 7..

De allí se concluye que $T_a(H) \subset \ker T_{a'}$ si $a \neq a'$ y en consecuencia, por ser $\ker T_{a'}$ cerrado, vale

$$\overline{\bigoplus_{a \neq a'} T_a(H)} \subset \ker T_{a'}$$

De donde se concluye

$$\overline{\bigoplus_{a \neq a'} T_a(H)} \cap T_{a'}(H) = 0.$$

Llamemos $B = \bigoplus_a T_a(H)$. Para concluir que $H = \overline{\bigoplus_a} T_a(H)$ será suficiente (Notaciones, 10), pag. 10) probar que $B$ es denso en $H$.

Ahora bien, si $f_i$ es una familia en $L^2(G)$ que converge vagamente a la medida $\varepsilon_e$ (I. 3. 4.), será $T_{f_i} \longrightarrow T_{\varepsilon_e} = I$ (identidad de $H$), verificándose la convergencia en la topología débil de $H$ (II. 1. 12.).

Pero entonces para todo $x \in H$, será

$$(1) \qquad T_{f_i}\ x \longrightarrow x$$

débilmente en $H$ (en decir en la topología $\sigma(H, H')$, $H'$ = dual de $H$. Ver notaciones, 8), pág. 7 ) Como además $f_i = \sum_a f_i * u_a$ será

$$(2) \qquad T_{f_i} = \sum_a T_a \, T_{f_i} \, ,$$

la suma también en la convergencia puntual débil de H ( ver. II. 1. 12 ), y por lo tanto de (1) y (2) se concluye que $x$ es límite débil de elementos de $B = \bigoplus T_a(H)$.
En consecuencia B es débilmente denso y, siendo un subespacio, es también fuertemente denso( [I] , Liv. V, Chap. IV, 2, Prop. 4(Cor. 2) ) como queríamos demostrar.

La última afirmación es consecuencia trivial de que si $a \neq a'$, $T_a \, T_{a'} = 0$.

4) Como $T_a(H)$ es un a-módulo, y a es simple, es claro que $T_a(H)$ es a-semi-simple e isotípico (III. 8. 2 ). Como además sobre $T_a(H)$ solamente opera a , lo mismo vale para $L^2(G)$. Luego $T_a(H)$ está contenido en la componente isotípica de tipo $\ell$ de H. Recíprocamente, sea $E \subset H$ un $L^2(G)$-submódulo simple $L^2(G)$-isomorfo a $\ell$ ,y sea $U : E \longrightarrow \ell$ un tal isomorfismo. Entonces, si $x \in E$ se verifica

$$U x = u_a * U x = U \, T_a \, x \quad \text{y por lo tanto} \quad x = T_a \, x$$

de donde $E \subset T_a(H)$. En consecuencia la componente isotípica de tipo $\ell$ ( suma de tales E ) está contenida en $T_a(H)$. ∎

IV. 5. 6 LEMA

Sean T, T' dos representaciones de G en espacios H, H' y supongamos que para un pié de $L^2(G)$, H y H' son a-módulos isomorfos mediante T y T' ( en particular se tendrá $T_a$ = identidad de H, $T'_a$ = identidad de H' ). Entonces H y H' son M(G)- isomorfos y en particular T y T' son semejantes.

Si $U : H \longrightarrow H'$ es un a-isomorfismo, para cada $\mu \in M(G)$ se tendrá

$$(1) \qquad U T_\mu \, x = U T_\mu \, T_a \, x = U \; T_{\mu * u_a} \; x$$

y como $\mu * u_a \in$ a, será

$$(2) \qquad U T_{\mu * u_a} x = T'_{\mu * u_a} U x = T'_{\mu} T'_a U x = T'_{\mu} U x.$$

De (1) y (2) resulta que $H$ y $H'$ son $M(G)$- isomorfos y de allí es evidente que $T$ y $T'$ son semejantes. ⊠

IV. 5. 7 TEOREMA

Toda representación (practicable y compatible con la topología puntual fuerte de operadores) de un grupo compacto es completamente reducible.

Sea $T : G \longrightarrow \mathrm{End}_C(H)$ una tal representación. Por IV. 5. 5 se puede descomponer a $H$ como:

$$H = \overline{\bigoplus_a} \; T_a(H)$$

y a cada $T_a(H)$ es $M(G)$-estable. Como además $T_a(H)$ es un a-módulo y a es simple, $T_a(H)$ es a-semi simple isotípico ( III. 8. 2, III. 7. 3 ).

Pero entonces existen descomposiciones

$$T_a(H) = \bigoplus_i H_{a,i}$$

donde cada $H_{a,i}$ es a-simple y a-isomorfo a un imi $\mathfrak{l}$ de a (III. 8. 2 ). En particular de dimensión finita y por lo tanto cerrado en H. Como además sobre $T_a(H)$ sólo opera a y cada $H_{a,i}$ es a-estable, resulta que cada $H_{a,i}$ es también $M(G)$-estable.

En consecuencia (IV. 5. 6) la contracción de la representación $T$ a $H_{a,i}$ es semejante a la contracción de la representación regular de $\mathfrak{l}$ y por lo tanto (IV. 5. 2. 1 ) irreducible. En consecuencia $H$ queda descompuesto mediante

$$H = \overline{\bigoplus_{a,i}} \; H_{a,i}$$

y $T$ es completamente reducible (I. 1. 9 ) ⊠

Nota: Obsérvese que la suma $H = \overline{\bigoplus} H_{a,i}$ no es en general una suma directa topológica como ocurre en el caso en que $T$ es la representación regular. Eso se debe a que, cuando $T$ es la representación regular, cada $T_a(H)$, siendo un pié, es de dimensión finita. Esta sola condición asegura que la suma es directa topológica.

Abandonamos ahora el problema de la descomposición de representaciones para volver a las representaciones irreducibles. Como hemos visto a cada pié $a$ se asigna una clase $c(a)$ de representaciones irreducibles: la de las representaciones semejantes a la contracción a un imi de $a$ de la representación regular de $G$.

IV. 5. 8 PROPOSICION

*Si $a \neq a'$, entonces $c(a) \neq c(a')$. Toda representación irreducible de $G$ está en alguna clase $c(a)$.*

Si $a \neq a'$ y $\imath \subset a$, $\imath' \subset a'$ son imis, las contracciones a $\imath$ y $\imath'$ de la representación regular de $G$ no pueden ser semejantes porque sino $\imath$ y $\imath'$ serían $M(G)$-isomorfos (II. 1. 13) lo que contradice a $a \neq a'$.

Sea ahora $T$ una representación irreducible de espacio $H$. Según IV. 5. 7, se puede descomponer a $H$ como :

$$H = \overline{\bigoplus_{a,i} H_{a,i}}$$

donde cada $H_{a,i}$ es $M(G)$-estable y cerrado en H. Pero siendo $T$ irreducible, debe verificarse

$$H = H_{a,i}$$

para algún $H_{a,i}$. Como cada $H_{a,i}$ es $M(G)$-isomorfo a un imi $\imath$ de $a$, está demostrado que $T$ pertenece a alguna clase $c(a)$. $\boxtimes$

Según esta proposición, la función $c: \mathcal{A} \longrightarrow \Delta$ es biunívoca y sobre, y una descripción sencilla de $c(a)$ a partir $a$ es la provista por IV. 5. 3. Recíprocamente, veamos cómo se caracteriza $a$ dada la clase $c(a)$. Sea entonces $D$ una clase de representaciones irreducibles de $G$. Es claro que si $D = c(a)$ y $\chi_a$ es el caracter de $a$, se ten drá (IV. 5. 2. 3): $Tr(D) = \overline{\chi_a}$, y en consecuencia $a = L^2(G) * \overline{Tr(D)}$.

Resumiendo:

IV. 5. 9 PROPOSICION

Si $D \in \Delta(G)$, y $a = L^2(G) * Tr.(D)$, entonces $a$ es un pié de $L^2(G)$ y se cumple $c(a) = D$. Notaremos $J_D$ a dicho pié.

IV. 5. 9. 1. NOTA

En virtud de la correspondencia biunívoca entre pies y clases irreducibles, utilizaremos a menudo las notaciones $\chi_D$, $u_D$, $n_D$ para designar el caracter, la unidad y la longitud del pié $J_D$ con $D \in \Delta(G)$.

Además es inmediato que son válidas las siguientes relaciones:

$$\chi_D = \overline{Tr.(D)} \quad ; \quad n_D = \dim_C D \quad ; \quad u_D = n_D \cdot \chi_D$$

$$J_D = L^2(G) * \chi_D = \chi_D * L^2(G)$$

IV. 5. 10.- PROPOSICION

Si $T$ es una representación (practicable y compatible) del grupo compacto $G$ en $H$, existe una descomposición de $H$ como suma directa topológica $H = \bigoplus H_D$, $D \in \Delta(G)$, donde $H_D = T_{u_D}(H)$ y además cada $H_D$ es suma directa (algebraica) de subespacios $M(G)$-estables, de dimensión finita e igual a la dimensión de $D$, de manera tal que las contracciones de $T$ a estos subespacios pertenecen a $D$. Sobre $H_D$ sobre $H_D$ solamente opera el pié $J_D$; todo pié opera trivialmente mediante la aplicación nula.

Es evidente que esta proposición es solo un enunciado más explícito y completo(gracias a la notación introducida en la proposición anterior)del teorema IV. 5 7 -, luego no hay nada que demostrar . ⊠

IV. 5. 10. 1. - NOTA

Vale aquí la misma observación que se hizo al final de IV. 5. 7. -. Si cada $H_D$ es de dimensión finita, la suma $H = \overline{\bigoplus_{D,i} H_{D,i}}$ es directa topológica .

----------------

§ 6. - COORDENADAS DE REDUCIBILIDAD

Veremos en este parágrafo que a cada clase de representaciones semejantes de G puede asociarse una familia de números cardinales subindicada por $\Delta(G)$, que en ciertas condiciones (dimensión finita, por ejemplo) la caracterizan .

IV. 6. 1. - NOTACION

Conservaremos las notaciones e hipótesis del parágrafo anterior. Conviene tener presentes los resultados referentes a longitud de un módulo obtenidos en el parágrafo III. 4. .

IV. 6. 2. - DEFINICION

Sea T una representación de G en H, $D \in \Delta(G)$ y $a = J_D$. Diremos que D está contenida en T ($D \subset T$) sii el subespacio $T_a(H)$ no es nulo ( o sea, si el proyector $T_a$ no es nulo . Diremos que está contenida p veces sii $p = \ell_a(T_a(H))$, es decir sii p es la longitud del a-módulo $T_a(H)$. Notaremos este hecho $p = (T:D)$.

Es evidente que $T \not\supset D$ sii $(T : D) = 0$ .

Teniendo en cuenta IV. 5. 5. 4. - , si $\ell$ es un imi de $L^2(G)$ contenido en el pie $J_D$, $(T:D)$ no es otra cosa que la longitud de la componente isotípica de tipo $\ell$ del $L^2(G)$-módulo $H$ .

IV. 6. 3. - LEMA

El cardinal $(T : D)$ es invariante por semejanza en $T$ .

Obvio a partir de la observación anterior, ya que las componentes isotípicas y sus longitudes se conservan por isomorfismo . ☒

El lema anterior permite extender la definición de $(\ :\ )$ a clases de representaciones semejantes poniendo

$$(\mathfrak{T} : D) = (T : D) \qquad \text{si } T \in \mathfrak{T}$$

Si $\alpha$ es un cardinal que acota las dimensiones (sobre $\mathbb{C}$) de todos los objetos de la categoría $\mathfrak{L}$ (IV. 5. 1. -) , es claro que $(\mathfrak{T} : D) \leq \alpha$ cualquiera sea $\mathfrak{T} \in P(G)$ , y $D \in \Delta(G)$.

Sea $A = [0, \alpha]$ el intervalo de cardinales menores o iguales a $\alpha$ .

Para cada $\mathfrak{T} \in P(G)$ , es claro que la aplicación

$$\gamma : \mathfrak{T} \longrightarrow \{(\mathfrak{T} : D)\}_{D \in \Delta(G)}$$

de $P(G)$ en $A^{\Delta(G)}$ está bien definida.

IV. 6. 4. - DEFINICION

Llamaremos COORDENADAS DE REDUCIBILIDAD de la clase de representaciones $\mathfrak{T}$ de $G$ , a la imagen de $\mathfrak{T}$ por la función $\gamma$ es decir, a la familia de cardinales $(\mathfrak{T} : D)$ donde $D$ recorre $\Delta(G)$ .

El lector podrá sin duda demostrar sin esfuerzo el siguiente lema.

IV. 6. 5. - LEMA

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los cardinales finitos, y sea además

$B = \gamma^{-1}(N^{\Delta(G)} \cap A^{\Delta(G)})$. Entonces $\gamma$ es biunívoca sobre $B$.
En particular, si $\mathcal{Z}$ y $\mathcal{S}$ son de dimensión finita, y además $\gamma(\mathcal{Z}) = \gamma(\mathcal{S})$, entonces $\mathcal{Z} = \mathcal{S}$.

Es decir que si las coordenadas de reducibilidad de $\mathcal{Z}$ son finitas, $\gamma(\mathcal{Z})$ caracteriza a $\mathcal{Z}$. Usaremos en ese caso la notación $\mathcal{Z} = \bigoplus_{D \subset \mathcal{Z}} (\mathcal{Z} : D)\ D$.

NOTA: Si todos los objetos de la categoría $\mathcal{L}_y$ fueran espacios vectoriales topológicos completos, la aplicación $\gamma$ sería biunívoca sobre todo $P(G)$.

Como dijimos ya en IV. 5. 1.- , si $\mathcal{Z}$ es una clase de representaciones de dimensión finita de $G$, notaremos $Tr(\mathcal{Z})$ la función (sobre $G$) $Tr(T_s)$, donde $T$ es cualquier representación perteneciente a la clase $\mathcal{Z}$. Veremos ahora algunas relaciones entre las trazas, las coordenadas de reducibilidad y los caracteres.

IV. 5. 6.- PROPOSICION

Para cada clase de representaciones $\mathcal{Z}$ de dimensión finita de $G$ vale:

$$Tr(\mathcal{Z}) = \sum_{D \in \Delta(G)} (\mathcal{Z} : D)\ \overline{\chi_D}$$

Sea $T : G \longrightarrow End_C(H)$ tal que $T \in \mathcal{Z}$. Puesto que $T$ es de dimensión finita, la descomposición IV. 5. 10. 1.- de $H$ será de la forma

$$H = \bigoplus_D H_D$$

Donde hay solamente un número finito de subespacios $H_D$ y cada uno de ellos es de dimensión finita. Además (nuevamente por IV. 5. 10.-) cada $H_D$ se descompone como:

$$H_D = \bigoplus_{i=1}^{n_D} H_{D,i}$$

de tal manera que las contracciones a $H_{D,i}$ de $T$ pertenecen a $D$. Pero entonces las trazas de esas contracciones con $\overline{\chi_D}$ en virtud de IV. 5. 3.- y IV. 5. 2. 3.- y es claro además que (IV. 6. 2.- III. 4. 9.-) $n_D = (\mathcal{Z} : D)$. Teniendo en cuenta que la traza de una suma de representaciones es la suma de las trazas de las componentes (I. 1. 6. -), resulta $\mathrm{Tr}(\mathfrak{Z}) = \sum (\mathfrak{Z} : D)\, \overline{\chi_D}$ ∎

IV. 6. 7. - COROLARIO

Si $\mathfrak{Z}$ es de dimensión finita, $(\mathfrak{Z} : D) = (\mathrm{Tr}(\mathfrak{Z}) \mid \overline{\chi_D})$.

Evidentemente, ya que los caracteres forman un sistema ortonormal. ∎

IV. 6. 8. - COROLARIO

Si $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{S}$ son clases de dimensión finita y $\mathrm{Tr}(\mathfrak{Z}) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{S})$, entonces $\mathfrak{Z}$ y $\mathfrak{S}$ coinciden : $\mathfrak{Z} = \mathfrak{S}$.

En efecto, en ese caso $(\mathfrak{Z} : D) = (\mathfrak{S} : D)$ para toda $D$. ∎

## CAPITULO V

## REPRESENTACIONES INDUCIDAS

### § 1.- RESTRICCION DE REPRESENTACIONES

Si $K$ es un subgrupo compacto del grupo topológico $G$, toda la maquinaria del capítulo anterior se puede utilizar para estudiar las representaciones de $K$, y en particular las restricciones a $K$ de las representaciones de $G$, definidas en (I. 1. 8.-). Estudiaremos en este parágrafo las propiedades de tales restricciones, suponiendo que $G$ es también compacto. En el capítulo VII levantaremos esta hipótesis suponiendo solo que $G$ es localmente compacto, aunque esta generalización nos interesará a su vez en el caso particular de las representaciones de dimensión finita.

### V. 1. 1.- NOTACION

Sea $G$ un grupo topológico compacto, y $K$ un subgrupo compacto de $G$. Notaremos con $ds$ a la medida de Haar normalizada de $G$, y con $d\sigma$ a la medida de Haar normalizada de $K$. Existe una inyección natural $\nu \longrightarrow \nu^*$ de $\mathcal{M}(K)$ en $\mathcal{M}(G)$ dada por

$$\langle f, \nu^* \rangle = \langle f/_K, \nu \rangle \qquad f \in \mathcal{K}(G)$$

Es inmediato que se trata efectivamente de una inyección. A través de ella, también $L^2(K)$ puede considerarse como subespacio de $\mathcal{M}(G)$ ya que, según vimos en (I. 2. 4.-) es $L^2(K) \subset \mathcal{M}(K)$ Análogamente para $L^p(K)$ con $p \geq 1$. Observemos que no es posible inyectar a los elementos de $L^2(K)$ como funciones en $L^2(G)$, ya que a priori las medidas $ds$ y $d\sigma$ no están relacionadas. Más exactamente, si $f \in L^2(K)$ y la extendemos a todo $G$ considerándola nula fuera de $K$, la medida (en $G$) que se le asocia será $f(s)\,ds$, mientras que procediendo como hemos dicho antes, la medida asociada sería $f(\sigma)\,d\sigma$, que no tienen por qué coincidir. En efecto, si $K$ tiene medida $ds$ nula, $L^2(K)$ se aplicaría, como funciones, en el $0$ de $L^2(G)$, lo que no ocurre con la inyección propuesta.

Si $f \in \mathcal{K}(G)$ y $\nu \in \mathcal{M}(K)$, por identidad de expresión resulta

$$f/_K * \nu = (f * \nu^*)/_K$$

donde la convolución en el primer miembro se extiende en $\mathcal{M}(K)$ y la del segundo en $\mathcal{M}(G)$ (vé ase I. 2. 2. - en adelante, en especial I. 2. 4. B ). Pero entonces si $\mu$ es otra medida de $\mathcal{M}(K)$ será

$$\langle f, (\nu \underset{K}{*} \mu)^* \rangle = \langle f/_K, \nu \underset{K}{*} \mu \rangle = \langle f/_K \underset{K}{*} \tilde{\mu}, \nu \rangle =$$

$$(f \underset{G}{*} \tilde{\mu}^*)/_K, \nu \rangle = \langle f \underset{G}{*} (\tilde{\mu})^*, \nu^* \rangle = \langle f, \nu^* \underset{G}{*} u^* \rangle$$

(se ha supuesto que $(\tilde{\mu})^* = (\mu^*)^\sim$ lo que se demuestra sin dificultad). Esto permite afirmar que la inyección $\nu \longrightarrow \nu^*$ respecta el producto de convolución de $\mathcal{M}(K)$, es decir, es un monomorfismo de álgebras. Se comprueba fácilmente que también respeta las topologías: es un isomorfismo topológico (isométrico) entre $\mathcal{M}(K)$ y su imagen, topologizada ésta con la norma de $\mathcal{M}(G)$ (ver I. 3 y I. 4). A partir de este momento consideraremos identificada $\mathcal{M}(K)$ a una subálgebra de $\mathcal{M}(G)$ : su imagen por $*$.

Notaremos con d los elementos de $\Delta(K)$ (familia de las clases de representaciones irreducibles de K , de acuerdo con las notaciones e hipótesis introducidas en IV. 5. 1. - , y que usaremos en lo que sigue sin aclaración previa), con $J_d$ y $u_d$ el pie y la unidad correspondiente, respectivamente, etc.

A cada d se puede asignar dos transformaciones de $\mathcal{M}(G)$ en sí mismo, definidas por

$$\pi_d(\mu) = \mu_d * \mu * \mu_d$$

$$p_d(\mu) = \mu_d * \mu$$

Obsérvese que $p_d$ es una extensión a $\mathcal{M}(G)$ del proyector E(d) (III. 3. 9. a) de $L^2(K)$ en $J_d$

V. 1. 2.- LEMA

Para cada $d \in \Delta(K)$, los operadores $\pi_d$ y $p_d$ son proyectores ortogonales de $L^2(G)$ .

La idempotencia y la simetría de ambos resultan inmediatamente de las correspondientes propiedades de $u_d$ . Todo operador idempotente y autoadjunto es ortogonal . ■

Por restricción, cada clase irreducible D de representaciones de G induce una clase de representaciones (de dimensión finita por IV. 5) de K . Por supuesto, tales representaciones no son necesariamente irreducibles, pero pueden descomponerse en suma de irreducibles según IV. 5. 12. - .

La expresión (D : d) (IV. 6. 2. -) representará por lo tanto un número natural (hemos conserva-do el nombre de D para la clase que contiene a las restricciones, y a priori no sólo a ellas, y lo seguiremos haciendo durante todo el parágrafo).

Usaremos los operadores estudiados en V. 1. 2. - en las proposiciones siguientes, pero antes obtendremos el siguiente resultado, fácil y muy útil:

V. 1. 3. - PROPOSICION

$$(D : d) = \int_K \overline{\chi_D(\sigma)} \quad \chi_d(\sigma)\, d\sigma$$

Evidente a partir de IV. 6. 7. - y IV. 5. 2. 3. - .

V. 1. 4. - PROPOSICION

Si $d \in \Delta(K)$ y $D \in \Delta(G)$ son equivalentes:

a) $d \not\subset D$

b) $\bar{\chi}_D * \chi_d(e) = 0$

c) $\chi_d * \bar{\chi}_D(e) = 0$

d) $\exists \mathfrak{l} = \text{imi};\ \mathfrak{l} \subset J_D$ tal que $u_d * \mathfrak{l} = 0$

e) $\forall \mathfrak{l} = \text{imi};\ \mathfrak{l} \subset J_D$ vale $u_d * \mathfrak{l} = 0$

f) $u_d * J_D = 0$

g) $u_d * u_D = 0$

h) $J_d * J_D = 0$

i) $E(J_D) \cdot p_d = 0$

j) $p_d \cdot E(J_D) = 0$

la convolución entendida en $\mathcal{M}(G)$ en todos los casos.

(a $\Longleftrightarrow$ b):

Inmediato ya que $(D : d) = \int_K \bar{\chi}_D(\sigma)\, \chi_D(\sigma)\, d\sigma = \bar{\chi}_D * \chi_d(e)$

(b $\Longleftrightarrow$ c):

Evidente ya que $\bar{\chi}_D$ es central en $\mathcal{M}(G)$ por IV. 4. 5. -

( a $\Longleftrightarrow$ d ) :

Sea $T$ la contracción a $\iota$ de la representación regular de $G$. Es claro (IV. 5. 2) que $T \in D$, y por lo tanto $d \not\subset D$ sii $T_{u_d}(\iota) = u_d * \iota = 0$.

( a $\Longleftrightarrow$ e ):

Es válida la misma demostración de la equivalencia anterior, considerando todos los posibles imis de $J_D$ y recordando que todas las representaciones de la forma $s \longrightarrow T_s = \mathcal{E}_s * f$ pertenecen a $D$.

( e $\Longleftrightarrow$ f ):

Evidente ya que :
$$J_D = \sum_{\iota \subset J_D} \iota$$

( f $\Longleftrightarrow$ g ):

Es claro que $f \Longrightarrow g$. Supongamos que $u_d * u_D = 0$.

Entonces vale $u_d * J_D = u_d * u_D * J_D = 0$.

( f $\Longleftrightarrow$ h ):

Es claro que $h \Longrightarrow f$. Si suponemos que $u_d * J_D = 0$ entonces se verificará
$$J_d * J_D = J_d * u_d * J_D = 0 .$$

( f $\Longleftrightarrow$ i ):

Recordemos que $E(J_D)$ es el proyector de $L^2(G)$ sobre $J_D$ (IV. 5. 1, IV. 3. 9).

Se verifica
$$p_d \cdot E(J_D)(L^2(G)) = u_d * u_D * L^2(G) = u_d * J_D$$
entonces
$$p_d \cdot E(J_D) \equiv 0 \quad \text{sii} \quad u_d * J_D = 0 .$$

( i $\Longleftrightarrow$ j ):

En efecto, los proyectores $p_d$ y $E(J_D)$ conmutan, ya que $u_D$ es central en $\mathcal{M}(G)$ como se vió en IV. 4. 5 ⊠

V. 1. 5 PROPOSICION

Para cada $d \in \Delta(K)$ existe una $D \in \Delta(G)$ tal que $d \subset D$.

Supongamos que $\forall D \in \Delta(G)$ se verifique que $d \not\subset D$. Entonces, en virtud de V. 1. 4. f se verificará

$$p_d(L^2(G)) = p_d(\bigoplus J_D) \subset \text{Adh}(\sum p_d(J_D)) = 0$$

ya que $p_d(J_D) = u_d * J_D$

Eso equivale a afirmar que el operador $p_d$ es nulo, o, lo que es lo mismo por I. 2. 12, que $u_d$ es la medida nula, lo que es absurdo. ⊠

Gracias a la proposición V. 1. 3 el número $(D : d)$ puede calcularse mediante una integral. Volviendo a la definición de dicho número, se puede dar otras maneras de calcularlo, que detallamos en la siguiente proposición:

V. 1. 6.- PROPOSICION

Si $d \in \Delta(K)$, $D \in \Delta(G)$, todos los números siguientes coinciden con $(D : d)$:

$n_1$ = longitud de $J_d * \mathfrak{h}_D$ (con $\mathfrak{h}_D$ cualquier imi de $L^2(G)$ contenido en $J_D$), como $J_D$-módulo (donde la operación "*" se entiende en $\mathcal{M}(G)^*$).

$n_2$ = longitud de $(u_d * \mathfrak{h}_D)$ como $J_D$-módulo.

$n_3$ = cociente de las longitudes de $J_d * J_D$ como $J_d$-módulo, y la de $J_D$ como módulo sobre sí mismo.

$n_4$ = cociente entre $\dim_C(J_d * J_D)$ y $\{(\dim_C(J_d))^{\frac{1}{2}} \cdot (\dim_C(J_D))^{\frac{1}{2}}\}$

$n_5$ = cociente entre $\dim_C(J_d * \mathfrak{h}_D)$ y $\{(\dim_C(J_d))^{\frac{1}{2}}\}$, con $\mathfrak{h}_D$ como en $n_1$.

Veamos que $n_1 = (D : d)$. La contracción $T$ de la representación regular de $G$ en $\mathfrak{h}_D$ pertenece a la clase $D$. Pero entonces será $T_{u_d}(\mathfrak{h}_D) = u_d * \mathfrak{h}_D = J_d * \mathfrak{h}_D$ y según la definición de $(D : d)$ dada en IV. 6. 2 (y IV. 6. 3.) resulta

$$(D : d) = \text{long}_{J_d}(J_d * \mathfrak{h}_D) = n_1$$

Puesto que $u_d * \mathcal{I}_D = J_d * \mathcal{I}_D$ es inmediato que $n_2 = n_1$.

Es claro que $J_D$ se puede expresar como suma de imis. $J_D = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathcal{I}_D^{i}$ en la que $p = \text{long } J_D$. Valdrá entonces

$$n_3 (\text{long } J_D) = \text{long}_{J_d} (J_d * J_D) =$$

$$= \sum_i \text{long}_{J_d} (J_d * \mathcal{I}_D^{i}) = n_1 . (\text{long } J_D)$$

luego $n_3 = n_1$

Según IV. 3. 9 vale que $\text{long } J_D = (\dim_C (J_D))^{\frac{1}{2}}$ de donde resulta

$$-n_4 = (\dim (J_d * J_{D'})) / \cdot ((\dim J_d)^{\frac{1}{2}}, \text{long } J_D)$$

pero como además vale

$$\dim (J_d * J_D) = \text{long}_{J_d} (J_d * J_D) . \quad (\dim (J_d))^{\frac{1}{2}}$$

resulta finalmente que $n_4 = n_1$.

El caso de $n_5$ se trata exactamente igual que el precedente . ⊠

Mediante los teoremas generales de descomposición del capítulo IV, podemos dar más propiedades de las restricciones que estamos estudiando.

V. 1. 7.- PROPOSICION

Si $\mathcal{I}$ es un imi contenido en $J_D$, la familia de las restricciones a $\mathcal{I}$ de los proyectores $p_d$, con $d \subset D$, forman una familia finita completa de proyectores de $\mathcal{I}$ .

Sea T la contracción a $\mathcal{I}$ de la representación regular de G . Ya sabemos que $T \in D$. Entonces por IV. 5. 13.- se verificará

$$\mathcal{I} = \bigoplus_d T_{u_d}(\mathcal{I}) = \bigoplus_d p_d(\mathcal{I})$$

y además, para cada $f \in \mathcal{I}$ valdrá

$$f = \sum_d T_{u_d}(f) = \sum_d u_d * f = \sum_d p_d(f)$$

Ahora bien, $T_{u_d} = p_d$ será no nulo en $\mathcal{H}$ sii $d \subset D$ (por definición IV. 6. 2. -), de manera que podemos expresar las sumas anteriores

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{d \subset D} T_{u_d}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{d \subset D} p_d(\mathcal{H})$$

$$f = \sum_{d \subset D} p_d(f)$$

y esta última expresión es válida cualquiera sea $f \in \mathcal{H}$ . ⊠

--------------------

## § 2. - INDUCCION DE REPRESENTACIONES

Nos proponemos ahora el problema recíproco del que tratamos en el párrafo anterior: el de la extensión a $G$ de las representaciones de $K$ .

V. 2. 1. -

Sea $T$ una representación de $K$ en el espacio $H$ . Es claro que $T$ provee a $H$ de dos estructuras de $\mathcal{M}(K)$-módulo: una a izquierda mediante $(\mu, x) \longrightarrow T_\mu x$ y otra a derecha mediante $(\mu, x) \longrightarrow T_{\check{\mu}} x$ .

Ahora bien, $L^2(G)$ es un ideal bilátero en $\mathcal{M}(G)$ (I. 2. 5. -) y como $\mathcal{M}(K)$ es una subálgebra de $\mathcal{M}(G)$ (V. 1. 1. -), $L^2(G)$ es en particular un $\mathcal{M}(K)$-bimódulo. Pero entonces estamos en la situación descripta en III. 9. 1. - y III. 9. 1. 1. - con $\Lambda = \mathcal{M}(G)$, $A = L^2(G)$, $B = \mathcal{M}(K)$ y $E = H$, y entonces, por III. 9. 1. 1. -, al $\mathcal{M}(K)$-módulo derecho $H$ se puede asignar un $\mathcal{M}(G)$-módulo izquierdo $I$ y este último induce una representación $T^G$ de $G$ en el espacio $I$ . En consecuencia hemos descripto un procedimiento que permite asociar a toda representación de $K$ una representación de $G$ . Pero puesto que el espacio $I$ se define (III. 9. n°1) como el espacio vectorial de los homomorfismos <u>algebraicos</u> del módulo $H$ en el módulo $L^2(G)$, las topologías se han desperdiciado y la representación de $G$ que se construye no está relacionada de ninguna manera con la topología inicial de $G$. Este hecho obliga a abandonar el procedimiento en condiciones tan generales. Sin embargo es muy adecuado para el caso de representaciones de dimensión finita. Esto constituye, por supuesto, una restricción, pero en las aplicaciones sólo nos interesará poder extender a $G$ representaciones irreducibles de $K$ y como sabemos (IV. 5. 8. -) éstas son de dimensión finita.

Supongamos entonces que $T$ es de dimensión finita.

En ese caso los $\mathcal{M}(K)$-homomorfismos de $H$ en $L^2(G)$ serán continuos y sobre $I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(K)}(H, L^2(G))$ queda definida en forma natural la topología de la convergencia uniforme, que coincide en este caso con la uniforme debido a la local compacidad de $H$.

## V. 2. 2.- DEFINICION

Si $T$ es una representación de $K$ de dimensión finita, llamaremos REPRESENTACION INDUCIDA por $T$ a la representación $T^G$ de espacio $I$ descripta más arriba.

Según las convenciones de IV. 5. 1. -, para que $T^G$ pueda ser llamada realmente una representación será necesario mostrar que es continua de $G$ en $\mathrm{End}_C(I)$ con la topología puntual fuerte y que es practicable. La practicabilidad es obvia ya que $I$ es un espacio de Banach y la continuidad resulta de que si $x \in H$, $v \in I$, $s \in G$, entonces $(T^G_s v)x = \mathcal{E}_s * v(x)$ y de allí, si $s \longrightarrow s_o$, se concluye $\mathcal{E}_s * v(x) \longrightarrow \mathcal{E}_{s_o} * v(x)$ en $L^2(G)$ (I. 1. 14. -).

Supongamos ahora que $D$ es una clase de representaciones irreducibles de $G$ y que $T$ es una representación irreducible de $K$. Nos proponemos calcular $(T^G : D)$. Para ello será suficiente conocer el $L^2(G)$-módulo $T^G_a(I)$ donde $a$ es el pie $a = J_D$.

Según vimos en III. 9. nº1, $T^G_a(I) = T^G_{u_a}(I)$ coincide con $I_a = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(K)}(H, a)$ y como $(T^G : D)$ es (IV. 6. 2. -) la longitud de $I_a$ como $L^2(G)$-módulo, será

$$(1) \qquad (T^G : D) = \left[ I_a : \mathfrak{l} \right]$$

donde $\mathfrak{l}$ es cualquier imi de $L^2(G)$ contenido en $a$.

Por otra parte, la restricción de $D$ a $K$ contiene a $T$ $(D:T)$ veces y se verifica

$(D:T) = \underset{\mathcal{M}(K)}{}\left[\mathfrak{l} : H\right]$. Si consideramos a T como una representación a derecha $\mu \longrightarrow T_{\check{\mu}}x$ y llamamos r al ideal minimal a derecha $\check{\mathfrak{l}}$, es claro que también valdrá

$$(2) \qquad (D:T) = \left[\mathfrak{l} : H\right] = \left[\check{\mathfrak{l}} : H\right] = \left[r : H\right]$$

y entonces de (1) y (2) se concluye $(T^G:D) = (D:T)$. Hemos probado por lo tanto el siguiente teorema:

V. 2. 3. - TEOREMA

Si T es una representación irreducible de K, $T^G$ la representación inducida por T y D una representación irreducible de G , vale $(T^G:D) = (D:T)$.

---

Teniendo en cuenta III. 9. 12. - se puede afirmar que si $T_1$, $T_2$ son dos representaciones semejantes de K, $T_1^G$, $T_2^G$ son también semejantes. Pero entonces es posible trasladar la noción de representación inducida a clases:

V. 2. 4. - DEFINICION

Si $\mathfrak{T}$ es una clase de representaciones de dimensión finita de K , llamaremos CLASE INDUCIDA por $\mathfrak{T}$ a la clase $\mathfrak{T}^G$ que contiene a las representaciones $T^G$, $T \in \mathfrak{T}$.

De esta manera, V. 2. 3. - puede presentarse como

V. 2. 5. - PROPOSICION

Para toda d , $(T^d : D) = (D : d)$.

---

Para terminar este párrafo mostraremos que el espacio I de la representación $T^G$ puede iden tificarse a un subespacio de un espacio más concreto: $(L^2(G))^n$ .

V. 2. 6 .-

Sea n un número natural. Es claro que $F = (L^2(G))^n$ con la topología producto es un espacio de Hilbert. Notaremos $V(s)$ los vectores de $F$: son n-uplas de funciones $f_i$ de $L^2(G)$.

Si $\mu \in \mathcal{M}(G)$, definimos $\mu * V$ , $V * \mu$ como las n-uplas $\mu * f_i$ , $f_i * \mu$ . Según I. 2. 5.- esa definición provee a $F$ de una estructura de $\mathcal{M}(G)$-bimódulo (III. 9. n°1) y (I. 2. 5.-) $\mathcal{M}$ (G) opera continuamente sobre $F$ .

Supongamos que n sea la dimensión de la representación $T$ de $K$ en el espacio $H$ . Es claro que cada base de $H$ induce un C-isomorfismo (cuya definición es evidente: $v \longrightarrow v(b_i)$, si $b_i$ es la base ) :

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}_C(H, L^2(G)) = F .$$

Por supuesto en $\mathrm{Hom}_C(H, L^2(G))$ podemos considerar una estructura de módulo a izquierda sobre $\mathcal{M}(G)$ deducida de la $L^2(G)$ y el isomorfismo (1) es un $\mathcal{M}(G)$ - isomorfismo. Más aún, si topologizamos a $\mathrm{Hom}_C(H, L^2(G))$ mediante la convergencia puentual fuerte (o uniforme, es lo mismo) el isomorfismo es también topológico. En consecuencia podemos identificar $\mathrm{Hom}_C(H,L^2(G))$ con $F$ . Pero entonces el espacio $I = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(K)}(H, L^2(G))$ de la representación $T^G$ queda identificado un subespacio cerrado ya que es cerrado en $\mathrm{Hom}_C(H, L^2(G))$- de $F$ . Se trata entonces de decidir cuáles son los vectores $V(s)$ que lo forman. Como se ha elegido una base en $H$ , la representación $T$ se expresa matricialmente: $T_\sigma = M(\sigma)$ . Ahora es claro (dejamos al lector la verificación inmediata) que el asignar a dicha base el vector $V(s)$ conduce a un $\mathcal{M}(K)$-homomorfismo si y solamente si se verifica la relación

$$(2) \qquad M(\check{\mu}) . V = V * \mu \qquad (u \in \mathcal{M}(K).)$$

Teniendo en cuenta la continuidad de $T$ , para que se verifique (2) es necesario y suficiente que eso ocurra para medidas puntuales, es decir:

$$(3) \qquad M(\sigma) . V(t) = V(t) * \check{\varepsilon}_\sigma = V(t\sigma) ,$$

condición que es entonces una caracterización de los vectores $V$ de $I$ . En consecuencia podemos definir $T^G$ de manera un poco más concreta como la representación regular

$$T_s^G \; V(t) = V(s^{-1}t)$$

sobre el espacio de los vectores $V$ que satisfacen (3).

-------------

Veremos ahora el caso particular en que la representación $T$ es la trivial de $K$: $T \in d_o$, es decir la inducida por el pie trivial.

Para dar una buena descripción de $d_o^G$ nos será útil obtener antes una propiedad de los espacios homogéneos.

V. 2. 7.- LEMA

Sea $G/K = \{sK, s \in G\}$ el espacio topológico cociente de las clases a izquierda módulo $K$, $\pi$ la proyección canónica de $G$ en $G/K$. Entonces la funcional $m$ sobre $\mathcal{C}(G/K)$ definida por $m(f) = \int_G f \circ \pi(s)\, ds$ es una medida normalizada y positiva sobre $G/K$, invariante respecto de todos los homeomorfismos $\pi(t) \longrightarrow \pi(st) = s \,.\, \pi(t)$ de $G/K$ en sí mismo. La llamaremos la MEDIDA COCIENTE de $G$ módulo $K$: $m = ds/K$.

Es evidente la $\mathbb{C}$-linealidad de $m$, así como su invariancia. Además se verifica:

$$|m(f)| = \left| \int_G f \circ \pi(s)\, ds \right| \leq \sup_{s \in G} |f \circ \pi(s)| = \sup_{S \in G/K} |f(S)| \leq N_\infty(f)$$

lo que prueba que $m$ es una medida.

V. 2. 8.- PROPOSICION

Sea $H = L^2(G/K)$ (para la medida cociente $ds/K$). La aplicación $U: G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$ definida por $U_s f(\pi(t)) = f(\pi(s^{-1}t))$ es una representación de $G$ que pertenece a la clase inducida por la clase de representaciones de $K$ que contiene a la trivial $d_o$.

Es inmediato que se trata de una representación. Como dim $d_o = 1$, será además $I \subset L^2(G)$ y $f \in I$ sii $f(t) = f(t\sigma)$ ((3) de más arriba) ya que la representación $d_o$ tiene por expresión matricial $M(\sigma) = 1$. Pero entonces $I$ es isomorfo a $L^2(G/K)$ y la representación $U$ es semejante a la contracción a $I$ de la representación regular de $L^2(G)$, lo que prueba que $U \in d_o^G$, como queríamos. ⊠

V. 2. 9.- NOTA

Evidentemente las mismas conclusiones son válidas si se consideran clases a derecha módulo $K$, representación regular a derecha, etc.

CAPITULO VI

## FUNCIONES ESFERICAS SOBRE GRUPOS COMPACTOS

### § 1.- DEFINICION Y PRIMERAS PROPIEDADES

Definiremos y estudiaremos en este parágrafo a las funciones esféricas definidas sobre un grupo compacto.

### VI. 1. 1.- NOTACION

G será un grupo compacto y K un subgrupo compacto de G. Los elementos de $\Delta(G)$ (ver IV. 5. 1.) los notaremos $D$, $D'$, ... y los de $\Delta(K)$ $d$, $d'$, ... Para cada $d$, $p_d$ tendrá el mismo significado que en V. 1. 1.: $p_d(u) = u_d * u$ con $u \in \mathcal{M}(G)$.

Sea $\mathfrak{f}$ un imi de $L^2(G)$ contenido en el pié $J_D$, $T$ la contracción a $\mathfrak{f}$ de la representación regular $R'$ de G. Según V. 1. 7., las restricciones a $\mathfrak{f}$ de los proyectores $p_d$ con $d \subset D$ forman una familia completa. Pero entonces para cada $s \in G$ valdrá la igualdad:

$$T_s = \sum_{d \subset D} p_d T_s \tag{1}$$

de la que a su vez resulta

$$Tr.(T_s) = \sum_{d \subset D} Tr.(p_d\ T_s) \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $Tr.(T_s) = \overline{\chi}_D(s)$ (ver IV. 5. 2. 3.) la fórmula (2) puede escribirse

$$\overline{\chi}_D(s) = \sum_{d \subset D} Tr.(p_d\ T_s)$$

o lo que es lo mismo :

$$\chi_D(s) = \sum_{d \subset D} \overline{Tr.(T_{u_d}\ T_s)} \tag{3}$$

Se observa entonces que cada $d \subset D$ determina una función sobre $G : s \longrightarrow \overline{Tr.(T_{u_d}\ T_s)}$ que se puede considerar como un "pedazo" del carácter $\chi_D$. Es decir, se puede recuperar

$\chi_D$ a partir de sus pedazos, basta para ello sumarlos. A tales pedazos de carácter los llamaremos funciones esféricas sobre G (bien entendido, ellas dependen de G, K, D y d). Por supuesto, como las trazas sólo dependen de las clases de representaciones semejantes (es inmediato que la traza de una representación es invariante por semejanza), es claro que en (3) la representación T puede ser reemplazada por cualquiera semejante, es decir por cualquier otro representante de la clase D.

Resumiendo, podemos proponer la siguiente:

VI. 1. 2.- DEFINICION

Si T es una representación de G en el espacio H perteneciente a la clase D, llamaremos FUNCION ESFERICA asociada a d, D a la función

$$\phi_{d,D}(s) = Tr(T_{u_d} * \varepsilon_s) = Tr(T_{u_d}\ T_s).$$

Damos a continuación una serie de propiedades de las funciones esféricas.

VI. 1. 3.- TEOREMA

1. Toda función esférica es continua.
2. Si $d \not\subset D$, la función esférica $\phi_{d,D}$ es idénticamente nula.
3. Para cada D, vale $\overline{\chi_D} = \sum_{d \subset D} \phi_{d,D}$
4. Cualquiera sea la función esférica $\phi_{d,D}$, vale

$$\phi_{d,D}(\sigma s) = \phi_{d,D}(s\sigma) \quad , \quad s \in G, \ \sigma \in K.$$

Elijamos $\mathfrak{f} \subset J_D$ y sea T, como antes, la contracción a $\mathfrak{f}$ de la representación regular R'.

1. Es evidente ya que Tr y T son funciones continuas de sus variables.
2. Si $d \not\subset D$, será (IV. 6. 2.) $T_{u_d} = 0$ y por lo tanto $\phi_{d,D}(s) = Tr(T_{u_d}\ Ts) = 0$.

3. Se trata simplemente de la fórmula (3) de principio del parágrafo.

4. Como $u_d$ es central en $\mathcal{M}(K)$, $p_d$ conmuta con $T_\sigma$, $\sigma \in K$, y utilizando entonces la propiedad $Tr(MN) = Tr(NM)$, se tiene:

$$\phi_{d,D}(\sigma s) = Tr(p_d T_\sigma T_s) = Tr(T_s p_d T_\sigma) = Tr(T_s T_\sigma p_d) =$$

$$= Tr(p_d T_s T_\sigma) = \phi_{d,D}(s\sigma).$$

⊠

Como se ha visto, las funciones esféricas tienen un comportamiento análogo al de los caracteres (IV. 4. 2.).

Veremos ahora una propiedad especial que tienen las funciones esféricas del tipo $\phi_{d_o,D}$ donde $d_o$ es la clase de la representación trivial (es decir la clase trivial) de K.

### VI. 1. 4.- PROPOSICION

<u>Las funciones esféricas de la forma $\phi_{d_o,D}$ verifican</u>
<u>$\phi_{d_o,D}(\sigma s) = \phi_{d_o,D}(s\sigma) = \phi_{d_o,D}(s)$, $s \in G$, $\sigma \in K$,</u>
<u>y por lo tanto están definidas sobre los cocientes $G/K$,</u>
<u>$G \setminus K$, de las clases laterales a izquierda y derecha.</u>

Sea $T$ como en el teorema anterior. Puesto que $u_{d_o}$ es la función constante $u_{d_o}(s) = 1$ se verificará $u_{d_o} * \mathcal{E}_\sigma = \mathcal{E}_\sigma * u_{d_o} = u_{d_o}$, de manera que

$$\phi_{d_o,D}(\sigma s) = Tr(T_{u_{d_o} * \mathcal{E}_{os}}) = Tr(T_{u_{d_o} * \mathcal{E}_\sigma} T_s) = Tr(T_{u_{d_o}} \cdot T_s) = \phi_{d_o,D}(s)$$

y de VI. 1. 3. 4. resulta la proposición.

⊠

## § 2.- POLINOMIOS ESFERICOS (1)

Nos proponemos ilustrar mediante ejemplos concretos las generalidades de los capítulos precedentes, estudiando en especial las relaciones entre las representaciones de $SO(n+1, R)$ y las de su subgrupo $SO(n, R)$. En particular calcularemos (VI. 3. 11.) algunas funciones esféricas

(1) En la redacción de este parágrafo y del siguiente ha colaborado el Lic. Ricardo Nirenberg.

correspondientes a esa situación. A fin de realizar tal estudio necesitamos conocer algunas propiedades de las funciones que son restricción de un polinomio sobre una esfera y en especial cuando el polinomio es armónico.

VI. 2. 1.- NOTACION

Sea $G = SO(n+1, R)$, $K = SO(n, R)$ $(n \geq 2)$. $K$ se puede considerar como un subgrupo de $G$ si se lo identifica con el subgrupo de las rotaciones de $R^{n+1}$ que dejan fijo un punto $P$ de la esfera unitaria $S_n$. Notaremos $s$ los elementos de $G$ y $\sigma$ los de $K$. Supondremos que $R^{n+1}$ tiene coordenadas $(X_1, \ldots X_n, z)$ y que $P = (0, \ldots 0, 1)$.

Consideremos la representación $T$ de $G$ en el espacio $L^2(S_n)$ definida por $T_s f(x) = f(s^{-1}. x)$. (Es claro que la representación $T$ puede considerarse definida sobre todo $\mathcal{K}(R^{n+1})$ puesto que si $s \in G$, $x \in R^{n+1}$, $s . x$ siempre está definido.). Como es obvio, esta representación es unitaria.

VI. 2. 2.- LEMA

Si $E$ es un subespacio no nulo $T$-estable de dimensión finita de $\mathcal{K}(S_n)$ (= funciones continuas sobre $S_n$), existe una única función $f$ en $E$ tal que

1) $f(P) = 1$.
2) Si $g \in E$ y $g(P) = 0$, entonces $(g | f) = 0$, el producto escalar entendido en $L^2(S_n)$.

Sean $f_o \in E$, $x_o \in S_n$ tales que $f_o(x_o) \neq 0$. Tal función y tal punto existen por ser $E \neq 0$.

Como $G$ es transitivo sobre $S_n$, existe $s_o \in G$ tal que $T_{s_o} f_o(P) = f_o(x_o) \neq 0$. Esto prueba que el subespacio $F = \{ g \in E, g(P) = 0 \}$ es propio.

Como $E$ es de dimensión finita, es un espacio de Hilbert con el producto escalar inducido por $L^2(S_n)$, y entonces existe $f \in E$, $f \neq 0$ tal que $f \perp F$. Mediante una homotecia adecuada $f$ satisfará 1) y la parte de existencia está demostrada.

Veamos que tal función es única. Eso resultará de mostrar que el espacio ortogonal de $F$ es de dimensión 1 (es decir que $F$ es un hiperplano). Pero esto es obvio puesto que $F$ es el núcleo de la funcional lineal $g \longrightarrow g(P)$, que por ser $E$ de dimensión finita es continua. ⊠

VI. 2. 3.- LEMA

Todo subespacio $E$ no nulo de $\mathcal{K}(S_n)$ de dimensión finita y $T$ - estable contiene una función $f$ tal que

1) $f(P) = 1.$

2) para todo $\sigma \in K$, $T_\sigma f = f.$

Veremos que una función $f$ que satisfaga 1) y 2) del lema anterior satisface también 1) y 2) de éste. En efecto, si $\sigma \in K$, la función $T_\sigma f$ cumple $T_\sigma f(P) = f(\sigma^{-1}. P) = f(P) = 1$, y además, si $g(P) = 0$, se tendrá

$$(T_\sigma f | g) = (T_\sigma f \mid T_\sigma (T_{\sigma^{-1}} g)) = (f \mid T_{\sigma^{-1}} g) = 0$$

(recuérdese que $T$ es unitaria). Pero entonces, como según el lema anterior, $f$ es única, será $f = T_\sigma f$ cualquiera sea $\sigma \in K$. ⊠

VI. 2. 4.- DEFINICION

Diremos que una función continua sobre $S_n$ es ZONAL si cumple las condiciones 1) y 2) del lema anterior.

VI. 2. 5.- LEMA

Si un subespacio de dimensión finita no nulo y $T$-estable de funciones continuas contiene una sola función zonal, entonces es $T$-irreducible.

En efecto, si $E$ es un tal subespacio y $E = F \oplus F'$ con $F$, $F'$ también $T$-estables, $F, F'$ contendrán cada uno una función zonal, y entonces $E$ contendrá dos funciones zonales distintas. ⊠

Llamemos $P(n)$ al espacio vectorial de los polinomios de $n$ variables a coeficientes complejos ($P(n) = C[X_1, \dots X_n]$), $P_m(n)$ al subespacio de $P(n)$ de los polinomios homogéneos de grado $m$; se cumple evidentemente $P(n) = \bigoplus_m P_m(n)$.

La restricción de los elementos de $P(n)$ considerados como funciones sobre $R^n$ a $S_{n-1}$ induce una aplicación $f \longrightarrow f^o$ de $P(n)$ en $\mathcal{K}(S_{n-1})$. Es inmediato que vale:

VI. 2. 6.- LEMA

La correspondencia $f \longrightarrow f^o$ es lineal e inyectiva.

En consecuencia los espacios $P_m(n)$ y $P^o_m(n)$ son isomorfos.

Notaremos $H_m(n)$ es subespacio de $P_m(n)$ de los polinomios armónicos: $f \in H_m(n)$ sii $\Delta f = 0$ ( $\Delta = \sum \frac{\partial^2}{(\partial x_i)^2}$ ). Por VI. 2. 6., $H_m(n)$ y $H^o_m(n)$ son también isomorfos.

VI. 2. 7.- LEMA

Los subespacios $P^o_m(n)$ y $H^o_m(n)$ son invariantes para la representación $T$, cualquiera sea $m$.

El caso de $P^o_m(n)$ es inmediato. La invariancia de $H^o_m(n)$ resulta de I. 1. 20. 1.. ⊠

VI. 2. 8.- Recordemos que a las variables en $R^{n+1}$ las llamamos $x = (X_1, \dots X_n, z)$.

Si abreviamos $y = (X_1, \dots X_n)$, toda función sobre $R^{n+1}$ puede considerarse como función de las variables $y, z$. En particular, si $f$ es un polinomio de $P_m(n+1)$, existirá una única descomposición de $f$:

$$f(x) = f(y, z) = \sum_{k=0}^{m} z^k Q_k(y) \qquad \text{(VI. 2. 8. 1.)}$$

donde $Q_k \in P_{m-k}(n)$.

Si se define $w(f) = \sum Q_k$, es claro que $w$ es un isomorfismo (de espacios vectoriales) entre $P_m(n+1)$ y $\bigoplus_{k=0}^{m} P_k(n)$. Llamemos $w'$ a la transformación lineal

$$w': P_m(n+1) \longrightarrow P_{m-1}(n) \bigoplus P_m(n)$$

definida por $w'(f) = Q_1 + Q_o$ .

Entonces se tiene:

VI. 2. 9.- LEMA

$w'$ es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $H_m(n+1)$ y $P_m(n) \oplus P_{m-1}(n)$.

Sea $f \in H_m(n+1)$. Entonces si $f(x) = \sum z^k Q_k(y)$ es la descomposición canónica, será

$$\Delta f(x) = \sum k(k-1) z^{k-2} Q_k(y) + z^k \Delta Q_k(y)$$

y como $\Delta f = 0$, valdrá

$$k(k-1) Q_k + \Delta Q_{k-2} = 0$$

para todo $k$ .

Pero entonces

$$\text{(VI. 2. 9. 1)} \qquad Q_k \begin{cases} = (-1)^{\frac{1}{2}k} \dfrac{1}{k!} \Delta^{\frac{1}{2}k} Q_o \ , \text{ si } k \text{ es par} \\[2ex] = (-1)^{(k-1)/2} \dfrac{1}{k!} \Delta^{(k-1)/2} Q_1 \ , \text{ si } k \text{ es impar} . \end{cases}$$

de manera que $Q_o$ y $Q_1$ determinan a $f$ y por lo tanto $Q_o + Q_1$ determina a $f$ . Según eso, $w'$ es injectiva como aplicación de $H_m(n+1)$ en $P_m(n) \oplus P_{m-1}(n)$ . Evidentemente es también sobre a partir de las relaciones (VI. 2. 9. 1) que dan un método para calcular explícitamente $f$:

$$\text{(VI. 2. 9. 2)} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{\left[\frac{1}{2}k\right]} \frac{z^k}{k!} \Delta^{\left[\frac{1}{2}k\right]} Q_{(1-(-1)^k)}(y) .$$

( $[t]$ = parte entera de $t$ ).

VI. 2. 10.- COROLARIO

$$\dim_{\mathbb{C}} H_m(n+1) = \binom{n+m-1}{n-1} + \binom{n+m-2}{n-1}$$

Evidente a partir de $\dim_C P_m(n) = \binom{n+m-1}{m}$ . ⊠

VI. 2. 11.- LEMA

$H^o_m$ (n + 1) contiene una sola función zonal. (1)

En efecto, si $f(x) = \sum z^k Q_k(y)$ es una función zonal de $H^o_m(n+1)$, será $T f = f$, $\sigma \in K$ y por lo tanto

$$f(x) = \sum z^k Q_k(\sigma^{-1}. y) \quad , \quad \sigma \in K ,$$

de donde se concluye $Q_k(y) = Q_k(\sigma . y)$, $\sigma \in K$. Teniendo en cuenta que K es transitivo sobre $S_{n-1}$ (téngase en cuenta que $n \geq 2$), eso sólo puede ocurrir si todos los $Q^o_k$ son constantes, es decir si los $Q_k$ son de la forma

$$Q_k(y) = A_k(\sum x_i^2)^{h(k)}$$

donde $2h(k) = m-k$.

Si m es par (resp. impar), para k impar (resp. par) $A_k$ será necesariamente nulo y en particular $Q_1 = 0$, $Q_o(y) = A_o |y|^m$ (resp. $Q_1(y) = A_1 |y|^{m-1}$, $Q_o = 0$).

Pero entonces en virtud de VI. 2. 9. 2., f está determinada a menos de un factor constante, que queda determinado por normalización $f(P) = 1$. ⊠

VI. 2. 12.- LEMA

$H^o_m$ (n + 1) es T-irreducible ($n \geq 2$).

Evidente a partir de VI. 2. 5 y VI. 2. 11. ⊠

Si $E \subset P(n+1)$ es un subespacio, notaremos $r^2E$ al subespacio $\{r^2f, f \in E\}$, donde $r^2 = \sum X_i^2 + z^2$. Es claro que si $E \subset P_m(n+1)$, entonces $r^2E \subset P_{m+2}(n+1)$.

VI. 2. 13.- LEMA

Si $n \geq 2$, $H_m(n+1) \cap r^2P_{m-2}(n+1) = 0$.

(1) Recuérdese que en todo este § , $n \geq 2$ según VI. 2. 1.-

Es claro que $E = H_m(n+1) \cap r^2 P_{m-2}(n+1)$ es un subespacio T-estable de $H_m(n+1)$. En virtud de VI.2.12.-, si $E \neq 0$, será $E = H_m(n+1)$. Pero eso no ocurre ya que si $f \in H_m(n+1)$ es tal que $w'(f) = Q_o + Q_1$ con $Q_o(y) = X_1^m$, $Q_1 = 0$, de VI.2.9.2 resulta que $f$ no depende de $X_2, \dots X_n$ y por lo tanto (como $n \geqslant 2$) no es de la forma $f = r^2 g$. Luego $E = 0$ como queríamos demostrar. ⊠

VI. 2. 14.- PROPOSICION

$$\text{Si } n \geqslant 2, \quad P_m(n+1) = \bigoplus_{m-2k \geqslant 0} H_{m-2k}(n+1)\, r^{2k}$$

Los casos $m = 0$, $m = 1$ son triviales.

Si $m \geqslant 2$, por VI.2.13.-, la suma $H_m(n+1) + r^2 P_{m-2}(n+1)$ es directa.

Si se supone (inducción)

$$P_{m-2}(n+1) = H_{m-2}(n+1) \oplus r^2 H_{m-4}(n+1) \oplus \dots$$

se concluye

$$P_m(n+1) \supset H_m(n+1) \oplus r^2 H_{m-2}(n+1) \oplus \dots$$

Como $\dim_C H_m(n+1) = \binom{m+n-1}{n-1} + \binom{m+n-2}{n-1}$, se tendrá

$$\dim_C \left( \bigoplus_{m-2k \geqslant 0} r^{2k} H_{m-2k}(n+1) \right) =$$

$$\sum_{m-2k \geqslant 0} \binom{m-2k+n-1}{n-1} + \binom{m-2k+n-2}{n-1} = \sum_{k=0} \binom{m-k+n-1}{n-1} = \binom{m+n}{n}$$

de manera que $\bigoplus H_{m-2k}(n+1)$ tiene la misma dimensión que $P_m(n+1)$, y entonces ambos coinciden. ⊠

VI. 2. 15.- COROLARIO

$$\text{Si } n \geqslant 2 \quad , \quad P^{o}_{m}(n+1) = \bigoplus_{m-2k \geqslant 0} H^{o}_{m-2k}(n+1)$$

--------------

VI. 2. 16.-

Si llamamos $S_{m,p}$ , $m \geqslant p \geqslant 0$ al subespacio de $P(2)$ generado por el polinomio $(X_1 + iX_2)^p (X_1 - iX_2)^{m-p}$ es claro que la suma $S = \bigoplus_p S_{m,p}$ es directa y vale $S \subset P_m(2)$. Pero como $S$ y $P_m(2)$ tienen la misma dimensión $m+1$ , se concluye

$$P_m(2) = \bigoplus_{p=0}^{m} S_{m,p}$$

y en consecuencia, de VI. 2. 9.- , se concluye , finalmente:

(VI. 2. 16. 1) $$H_m(3) = \bigoplus_{0 \leqslant p \leqslant m} S_{m,p} \oplus \bigoplus_{0 \leqslant p \leqslant m-1} S_{m-1,p} .$$

VI. 2. 17.-

Obsérvese que los subespacios $S_{m,p}$ son invariantes para la representación $T_\sigma$ ( K es en este caso $SO(2,R)$ ya que las rotaciones $\sigma$ del plano de variable compleja $u = X_1 + iX_2$ actúan mediante

$$\sigma . u = e^{it} u \qquad (t \text{ real})$$

y entonces, si $f(X_1, X_2) = (X_1 + iX_2)^{m-p}$ , se tendrá

$$T_\sigma f(u) = f(\sigma^{-1} . u) = u^p u^{-m-p} e^{it(m-2p)}$$

y por lo tanto $T_\sigma f \in S_{m,p}$ . Luego $S_{m,p}$ es $T_\sigma$ -estable . Como además los $S_{m,p}$ son de dimensión 1 , se puede afirmar que son subespacios $T_\sigma$ -irreducibles.

En consecuencia, la fórmula VI. 2. 16. 1 da una descomposición de $H_m(3)$ como suma directa de subespacios $T_\sigma$ -irreducibles .

--------------

Terminamos el parágrafo con una descomposición de $L^2(S_n)$ como suma hilbertiana de los subespacios $H^o_m(n+1)$ .

VI. 2. 18.- PROPOSICION

Los subespacios $H^o_m(n+1)$ son ortogonales en $L^2(S_n)$ y vale
$L^2(S_n) = \bigoplus_{m \geq 0} H^o_m(n+1)$ .

La representación $T$ es unitaria y cada $H^o_m(n+1)$ es un subespacio irreducible . Además si $m \neq p$ , las contracciones de $T$ a $H^o_m(n+1)$ y $H^o_p(n+1)$ no son semejantes ya que en ese caso $\dim(H^o_m(n+1)) \neq \dim(H^o_p(n+1))$ (ver VI. 2. 10.-) . Pero entonces IV. 5. se aplica aquí y se concluye $H^o_m(n+1) \perp H^o_p(n+1)$ $(m \neq p)$ .

En cuanto a la segunda parte, como se puede afirmar que $p^o(n+1)$ es denso en $L^2(S_n)$ (teorema de Weierstrass sobre aproximación uniforme de funciones continuas mediante polinomios y después densidad de las continuas) y además $p^o(n+1) = \bigoplus_{m \geq 0} p^o_m(n+1) = \bigoplus_{m \geq 0} H^o_m(n+1)$ (VI. 2. 15.-) , se concluye que vale $L^2(S_n) = \overline{\bigoplus H^o_m(n+1)}$ . Luego $L^2(S_n) = \bigoplus_{m \geq 0} H^o_m(n+1)$ . ⊠

Obsérvese que la descomposición del enunciado es la que corresponde según la teoría general (ver IV. 5. 10.-) . Aquí se tiene $H_D = H^o_m(n+1)$ cuando $D$ es la clase correspondiente y $H_D = 0$ para las otras .

En particular resulta: $(T : D) = 1$ ó $(T : D) = 0$ según sea el caso .

## § 3.- FUNCIONES ESFERICAS CLASICAS

Como prometimos en el párrafo anterior, estudiaremos ahora algunas funciones esféricas del grupo $SO(n, R)$ . Estas funciones, aunque definidas en $SO(n, R)$ , podrán considerarse como armónicos esféricos. En particular obtendremos los polinomios de Legendre (que reconoceremos por su ecuación diferencial : § 4.- ) .

A fin de unificar la nomenclatura y poder considerar simultáneamente una sucesión de espacios de dimensión finita contenidos unos en otros (y en consecuencia una sucesión $SO(n,R)$ donde cada grupo es subgrupo de los de índice $n$ mayor) procederemos, como es frecuente, fijando subespacios de $l^2$.

## VI. 3. 1.- NOTACION

Sea $l^2$ el espacio de Hilbert de las sucesiones (reales) $a = \{a_n\}$ tales que $\sum a_n^2 < \infty$ con la norma $\|a\| = (\sum a_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Notaremos $( \ , \ )$ el producto escalar en $l^2$. Con $e_i$ designaremos la sucesión cuyas componentes valen $0$, salvo la de índice $i$ que vale $1$. La familia $e_1$, $e_2$, ... es ortonormal y completa en $l^2$. Designaremos con $E^n$ el subespacio de $l^2$ generado por los elementos $e_1, \ldots, e_n$. Estos elementos inducen un isomorfismo $E^n = R^n$.

Sea $A$ el grupo de los automorfismos (unitarios) de $l^2$, es decir $w \in A$ si $w: l^2 \longrightarrow l^2$, $w$ es lineal y $\|x\| = \|w(x)\|$ para todo $x \in l^2$. Con $A_n$ notaremos el subgrupo de $A$ de los autómorfismos $w \in A$ tales que $w(e_i) = e_i$, si $i > n$.

En virtud del isomorfismo $E^n = R^n$, podemos considerar identificados a $E^n$ con $R^n$ y por lo tanto a $A_n$ con $O(n,R)$. Esta identificación permite señalar el subgrupo $G_n = SO(n,R)$ de $A_n$, y en virtud de ella, los elementos de $G_n$ son entonces matrices ortogonales (especiales).

Llamaremos $S$ a la esfera unitaria de $l^2$: $S = \{x \in l^2, \|x\| = 1\}$ y $S_n$ a la esfera de $E^{n+1}$: $S_n = S \cap E^{n+1}$

Es claro que se cumple:

a) $G_n$ es el subgrupo de $G_{n+1}$ de los automorfismos $w \in G_{n+1}$ tales que $w(e_{n+1}) = e_{n+1}$.

b) Si $\pi_n$ es la proyección de $G_{n+1}$ sobre el espacio homogéneo $G_{n+1}/G_n = \{G_n s, \ s \in G_{n+1}\}$; $\pi_n$ es continua y abierta.

c) Llamemos $p_n$ a la aplicación $p_n: G_{n+1} \longrightarrow S_n$ definida por $p_n(s) = s^{-1} \cdot e_{n+1}$. $p_n$ es continua y se factoriza $p_n = w_n \circ \pi_n$ donde $w_n$ es el homeomorfismo de $G_{n+1}/G_n$ en $S_n$ definida por $w_n(G_n s) = s^{-1} \cdot e_{n+1}$.

d) Notaremos $\mu_n$ la medida sobre $S_n$ que resulta de trasladar por $w_n$ la medida co ciente (V. 2. 7.) $ds / G_n$ de $G_{n+1} / G_n$.

$\mu_n$ es invariante por la acción de $G_{n+1}$ sobre $S_n$. Como hay una sola medida normalizada sobre $S_n$ invariante respecto de $G_{n+1}$ (*) $\mu_n$ es la medida ordinaria de $S_n$ como subvariedad de $E^{n+1} = R^{n+1}$ Notaremos $L^2(S_n)$ el espacio de Hilbert $L^2(S_n, u_n)$.

e) La identificación de $E^n$ con $R^n$ nos permitirá hablar de "polinomios sobre $E^n$", "variables $X_1, \ldots X_n$ de $E^n$", etc. y trasladar todos los enunciados del parágrafo anterior.

f) Con $T^n$ designaremos la representación $T^n : G_n \longrightarrow L^2(S_{n-1})$ definida por $(T^n_s f)(x) = f(s^{-1}. x)$. Según se vió (VI. 2.) los subespacios $H^o_m(n)$ y $P^o_m(n)$ son $T^n$-estables. Notemos $T^{n,m}$ y $V^{n,m}$ resp. las contracciones de $T^n$ a estos subespacios. En virtud de VI. 2. 12. $T^{n,m}$ es irreducible $(n \geqslant 2)$. Llamaremos $D^{n,m}$ a la clase de representaciones irreducibles de $G_n$ que contiene a $T^{n,m}$. Para cada $n \geqslant 2$, la clase $D^{n,0}$ es la trivial de $G_n$, puesto que $T^{n,0}$ significa un cambio de variable en $H^o_0(n)$, espacio (de dimensión uno) en el que sólo aparecen funciones constantes.

g) Con $Z_{n,m}$ designaremos la (única según VI. 2. 11.) función zonal de $H^o_m(n)$

---------

Reformularemos con la actual notación algunos resultados de parágrafo anterior. Es inmediato que el isomorfismo $w'$ de VI. 2. 9. conmuta con la representación $T^n$. En consecuencia, de VI. 2. 9.* resulta

VI. 3. 2.- LEMA

La restricción a $G_n$ de la representación $T^{n+1,m}$ es semejante a la representación $V^{n,m} \oplus V^{n,m-1}$.

De la misma manera, de VI. 2. 15., resulta

.........................................................................

(*) El lector podrá demostrar que una medida $SO(n,R)$ - invariante es $O(n,R)$ - invariante. La unicidad para el caso $O(n,R)$ está demostrada, por ejemplo, en [8].

VI. 3. 3.- LEMA

Si $n \geq 3$, las representaciones $V^{n,m}$ y $\bigoplus_{m-2k \geq 0} T^{n,m-2k}$ son semejantes.

y combinando ambos lemas:

VI. 3. 4.- LEMA

Si $n \geq 3$, la representación $\bigoplus_{p=0}^{m} T^{n,p}$ es semejante a la a la restricción a $G_n$ de la representación $T^{n+1,m}$.

VI. 3. 5.- Supongamos que $T$ es una representación de un grupo compacto cualquiera $G$ en el espacio de Hilbert $H$, y que $H = \bigoplus_{i \in I} H_i$ donde cada $H_i$ es $T$-estable y la contracción de $T$ a $H_i$ es irreducible de clase $D_i$ (con $i \neq j \Longrightarrow D_i \neq D_j$). Entonces $H_i = T_{J_{D_i}}(H)$ y además $D \subset T$ sii $D = D_i$ para algún $i$. Por otra parte $(T : D_i) = 1$. Todos estos hechos son evidentes a partir de las definiciones (IV. 6. 2.).

VI. 3. 6.- LEMA

Sean $D \in \Delta(G_n)$ y $\mathcal{T}$ la clase que contiene a la restricción de $T^{n+1,m}$ a $G_n$. Entonces, si $n \geq 3$, las propiedades

$\alpha$) $D = D^{n,p}$ para algún $p$, $0 \leq p \leq m$.

$\beta$) $D \subset \mathcal{T}$

son equivalentes e implican:

$\gamma$) $(\mathcal{T} : D) = 1$.

Si, en cambio, $n = 2$, se tendrá $D \subset \mathcal{T}$ sólo cuando $D$ sea la clase de la alguna de las representaciones de $G_2$ $(=SO(2,R))$ en los subespacios $S_{m,p}$, $0 \leq p \leq m$ ó $S_{m-1,p}$, $0 \leq p \leq m-1$ (ver : VI. 2. 16.) y en ese caso vale también $(\mathcal{T} : D) = 1$.

La primera parte $(n \geqslant 3)$ es consecuencia directa de aplicar lo dicho en VI. 3. 5. al lema VI. 3. 4.. El caso excepcional $n = 2$ resulta de observar que de VI. 2. 16. se concluye que la restricción a $G_2$ de $T^{3,m}$ es semejante a la suma de las $2m+1$ representaciones (digamos $S^{m,i}$, $0 \leqslant i \leqslant 2m$) correspondientes a los subespacios $S_{m,p}$, $S_{m-1,p}$. Pero entonces también a este caso se puede aplicar lo dicho en VI. 3. 5.

VI. 3. 7.- Si notamos mediante $D^{n+1,m}\big|_{G_n}$ la clase $\mathcal{C}$, el enunciado anterior se puede formular también por ($\mathcal{S}^{m,i}$ = clase de $S^{m,i}$):

Si $n \geqslant 3$,
$$D^{n+1,m}\Big|_{G_n} = D^{n,0} \oplus \cdots\cdots\cdots \oplus D^{n,m}$$
$$D^{3,m}\Big|_{G_2} = \mathcal{S}^{m,0} \oplus \cdots\cdots\cdots \oplus \mathcal{S}^{m,2m}$$

Obsérvese que $\mathcal{S}^{0,0} = D^{2,0}$ y que ésta es la única clase irreducible de la forma $D^{2,m}$ ya que, según (I. 1. 18), por ser $G_2 = SO(2,R)$ abeliano, toda representación suya irreducible es de dimensión 1 y es fácil ver que si $m \neq 0$, $\dim(D^{2,m}) \neq 1$ (¡ atención: VI. 2. 10. no se aplica aquí ! ).

VI. 3. 8.- Como vimos en VI. 3. 1. c, $G_{n+1} / G_n$ puede identificarse a $S_n$ mediante el homeomorfismo $w_n$ (la demostración de que $w_n$ es en efecto un homeomorfismo es muy sencilla. Podría consultarse también Chevalley, "Theory of Lie Groups", Ch. II, 2 a, ó [1], Liv. III, Chap. 3 (3eme. éd.), § 4, Prop. 4). Pero entonces se puede definir una representación $U^{n+1}$ de $G_{n+1}$ en $L^2(S_n)$ de la misma manera que en V. 2. 8. (en rigor, son clases al otro lado. Ver V. 2. 9.):

$$U_s^{n+1} f(G_n t) = f(G_n ts)$$

y como vimos en V. 2. 8., $U^{n+1}$ pertenece a la clase inducida por la representación trivial de $G_n$. Ahora bien, la representación $U^{n+1}$ coincide con $T^{n+1}$ ya que si $f \in L^2(S_n)$, $x \in S_n$, $w_n^{-1}(x) = G_n t$, se tendrá:

$$U_s^{n+1} f(x) = U_s^{n+1} f(G_n t) = f(G_n ts) = f(s^{-1} t^{-1}. e_{n+1}) =$$
$$= f(s^{-1}. x) = T_s^{n+1} f(x).$$

Pero entonces podemos afirmar:

VI. 3. 9.- PROPOSICION

1) $T^{n+1}$ pertenece a la clase inducida por la representación trivial de $G_n$.

2) Las coordenadas de reducibilidad de $T^{n+1}$ son:

$(T^{n+1} : D) = 0$, si $D \neq D^{n+1,m}$ para todo $m$

$(T^{n+1} : D^{n+1,m}) = 1$, para todo $m$.

o sea: $T^{n+1} = \bigoplus_{m \geq 0} D^{n+1,m}$.

3) Si $D \in \Delta(G_{n+1})$ y $D^{n,0} \subset D$, entonces $D = D^{n+1,m}$ para algún $m$ y a posteriori $(D : D^{n,0}) = 1$.

Demostración:

1) Resulta de VI. 3. 8.

2) Resulta de VI. 2. 18. y VI. 3. 5.

3) Según V. 2. 3. se tiene $(T^{n+1} : D) = (D : D^{n,0})$.

Pero entonces utilizando 2) y VI. 3. 6. (o VI. 3. 7., si $n = 2$) resulta 3). ⊠

---------

VI. 3. 10.- Ubiquémonos en el caso $K = SO(n,R)$, $G = SO(n+1, R)$ y consideremos ahora las funciones esféricas $\phi_{d,D}$ cuando $d = d_o = D^{n,0}$ es la representación trivial. Según VI. 1. 3. 2. y VI. 3. 9. 3., las funciones $\phi_{d_o,D}$ serán nulas si $D$ no es de la forma $D^{n+1,m}$. A las funciones esféricas $\phi_{d_o, D^{n+1,m}}$ las notaremos $\phi_{n+1,m}$. Para ellas vale la proposición siguiente, que es el resultado principal del párrafo:

VI. 3. 11.- PROPOSICION

Para todo par $n \geq 3$, $m$, vale: $\phi_{n,m} = Z_{n,m} \circ p_{n-1}$.

Demostración:

Recordemos (VI. 2. 11, VI. 3. 1. g) que $Z_{n,m}$ es la única función zonal contenida en $H_n^o(m)$. Llamemos $W$ al operador $W = T^{n,m}_{u(D^{n-1,0})}$ de $H^o_m(n)$ en sí mismo. Como $(D^{n,m} : D^{n-1,0}) = 1$ (VI. 3.6., VI. 3. 7.), el $J_{(D^{n-1,0})}$ - módulo $M = WH^o_m(n)$ tiene longi tud 1 (IV. 6. 2.) y como $J_{(D^{n-1,0})}$ tiene dimensión compleja 1, también M tendrá dimensión compleja 1. Sea ahora $(b_i)$ una base para $H^{\circ}_{m}(n)$ tal que

$$b_1 = Z_{n,m}$$
$$\text{si} \quad i \neq 1 \quad , \quad Wb_i = 0 \, ,$$

(tal base existe por razones obvias) y notemos con $(a^j_i(s))$ la matriz que representa a $T^{n,m}_s$ en la base $(b_i)$ y con $A = (a^j_i)$ la matriz qu representa a W. Como $Wb_1 = b_1$, es claro que A es la matriz: $a^1_1 = 1$, $a^j_i = 0$ en los otros casos. Pero entonces

$$(1) \qquad \phi_{n,m}(s) = Tr(WT^{n,m}_s) = Tr(A\,.\,(a^j_i(s)) = a^1_1(s)$$

y como además

$$(2) \qquad a^1_1(s) = a^1_1(s)\,.\,Z_{n,m}(e_n) = (T^{n,m}_s \; Z_{n,m})(e_n) = Z_{n,m}(s^{-1}\,.\,e_n)\,,$$

de (1) y (2) podemos concluir

$$(3) \qquad \phi_{n,m}(s) = Z_{n,m}(s^{-1}\,.\,e_n).$$

Pero (3) es el enunciado de la proposición, que queda por lo tanto demostrada. ⊠

De esta manera hemos caracterizado todas las funciones esféricas $\phi_{n,m}$.

El caso n = 2 es trivial puesto que SO(1, R) se reduce a la unidad y por lo tanto se tendrá $\phi_{d,D} = \overline{\chi}_D$, de manera quelas funciones esféricas en esa dimensión coinciden con los caracteres de SO(2, R), o lo que es lo mismo, con los caracteres del toro unidimensional $T^1$, es decir las exponenciales $e^{int}$, $n \in Z$.

## § 4. ECUACION DIFERENCIAL DE LAS FUNCIONES ESFERICAS $\phi_{n,m}$.

Veremos ahora una ecuación diferencial cuyas soluciones son las funciones zonales $Z_{n,m}$ y por lo tanto (VI. 3. 11.) las funciones esféricas $\phi_{n,m}$.

Sabemos que $Z_{n+1,m}$ es invariante por SO(n, R) y por lo tanto de la forma

$$Z_{n+1,m}(X_1, \ldots\ldots X_n, z) = f(z, \sum X_i^2)$$

donde $f(z, z')$ es un polinomio en dos variables.

Como en $S_n$ vale $\sum X_i^2 = 1 - z^2$, el polinomio $f$ será tal que el polinomio $g$ de una variable definido por $g(t) = f(t, 1-t^2)$ satisface $Z_{n+1,m}(X_1, \dots X_n, z) = g(z)$. Como $Z_{n+1,m}$ pertenece a $H_m^o(n+2)$, $f$ será un polinomio homogéneo de grado $m$ en las variables $X_i$, $z$ y por lo tanto valdrá $f(\lambda z, \lambda^2 z') = f(\lambda z, \sum(\lambda^2 X_i^2)) = \lambda^m f(z, \sum X_i^2) = \lambda^m f(z, z')$, y entonces:

$$(1) \qquad \lambda^m g(t) = f(\lambda t, \lambda^2(1-t^2)).$$

De allí, derivando respecto de $\lambda$ sucesivamente y haciendo después $\lambda = 1$, se obtiene

$$(2) \qquad mg(t) = t \frac{\partial f}{\partial z}(t, 1-t^2) + 2(1-t^2)\frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2)$$

$$(2') \qquad m(m-1)\, g(t) = t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, 1-t^2) + 4t(1-t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'}(t, 1-t^2) +$$
$$+ 4(1-t^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}(t, 1-t^2) + 2(1-t^2)\frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2)$$

Por otra parte, de la definición de $g$ se concluye, derivando directamente,

$$(3) \qquad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, 1-t^2) - 2t\frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2)$$

$$(3') \qquad g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, 1-t^2) - 4t\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'}(t, 1-t^2) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}(t, 1-t^2) -$$
$$- 2\frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2)$$

y entonces de (2) y (3) se obtiene

$$(4) \qquad mg(t) - tg'(t) = 2\frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2)$$

y de (2') y (3'):

$$(5) \qquad m(m-1)\, g(t) + (1-t^2)\, g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, 1-t^2) + 4(1-t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}(t, 1-t^2)$$

Finalmente, como $Z_{n+1,m}$ es una función <u>armónica</u>, se tendrá

$$0 = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \sum \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2n \frac{\partial f}{\partial z'} + 4z' \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}$$

y en particular

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, 1-t^2) + 2n \frac{\partial f}{\partial z'}(t, 1-t^2) + 4(1-t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}(t, 1-t^2) = 0.$$

Como sumando (5) á (4) multiplicado por $n$ se obtiene en el segundo miembro cero (por (6)), se concluye

$$(7) \qquad (1-t^2)g''(t) - ntg'(t) + m(n+m-1)g(t) = 0$$

que es la ecuación prometida.

Esta ecuación, cuando $n = 2$, es la clásica de Legendre, lo que prueba que si $P_n$ son los polinomios de Legendre ordinarios[1], vale

$$Z_{3,m}(X_1, \dots X_n, z) = P_m(z)$$

y por lo tanto, si $s = (s_{ij})$ es una matriz de $SO(3, R)$ de inversa $s^{-1} = (u_{ij})$, se tiene

$$\rho_{3,m}(s) = P_m(u_{33}) = P_m\left(\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}\right)$$

---

(1) En rigor, son proporcionales a los de Legendre, y tales que $P_n(1) = 1$.

# CAPITULO VII

## TEORIA GENERAL DE FUNCIONES ESFERICAS

### § 1.- DOS OPERADORES

#### VII. 1. 1.- NOTACION

$G$ será un grupo topológico localmente compacto y unimodular y $K$ un subgrupo compacto de $G$. Notaremos con $D : s \longrightarrow T_s$ una representación practicable y topológicamente irreducible de $G$ en el espacio vectorial $H$. En general $H$ será de dimensión infinita.
Consideremos la restricción de $D$ a $K$. De acuerdo con lo visto en el parágrafo IV. 5 vemos que para cada clase $d \in \Delta$ (K) existen una unidad $u_d$ y un proyector $T_d$ (definido en IV. 5. 5. -). Designaremos con $H(d)$ al su espacio cerrado $T_d(H)$. En general no podemos asegurar que $H(d)$ sea de dimensión finita. En efecto, sabemos que $H(d) = \bigoplus_{\alpha} M_\alpha$ donde $M_\alpha \cong \ell$ imis de $J_d$, y además $\dim \ell_\alpha = \dim d = k < \infty$ pero no sabemos si hay un número finito de $M_\alpha$'s. Para la validez de la teoría que desarrollaremos en este capítulo es esencial agregar la hipótesis adicional de que $H(d)$ es de dimensión finita.

Consideremos el álgebra $\mathcal{K}$ (G) de las funciones continuas nulas fuera de un compacto, con la topología usual límite inductivo de las topologías de los espacios de Banach $\mathcal{K}(G, A)$ (funciones continuas nulas fuera de un compacto fijo A) (ver Apéndice I. 4). Definiremos sobre esta álgebra dos operadores con propiedades muy similares.

#### VII. 1. 2.- DEFINICION

Llamaremos OPERADOR BECUADRO al operador definido por

$$\natural : f(s) \longrightarrow f^{\natural}(s) = \int_K f(\sigma s \sigma^{-1}) \, d\sigma .$$

#### VII. 1. 3.- DEFINICION

Llamaremos OPERADOR PI al operador definido por

$$\underline{\pi_d : f \longrightarrow \pi_d(f) = u_d * f * u_d} .$$

Observemos que $\natural$ depende solamente del subgrupo K, mientras que $\pi_d$ está determinado por una representación irreducible $d \in \Delta(K)$.

Si K es un subgrupo central de G, $\natural$ es el operador identidad. En particular lo será si G es abeliano o si $K = \{e\}$. Si $d_o$ es la representación trivial de K, $\pi_{d_o}(f)$ es constan te sobre K.

Podemos extender $\natural$ a $\mathcal{M}(G)$ por dualidad definiendo $\langle f, \mu^{\natural} \rangle = \langle f^{\natural}, \mu \rangle$. Como

$$\langle f^{\natural}, g \rangle = \int_G f^{\natural}(s)\, g(s)\, ds = \int_G ds \int_H d\sigma\, f(\sigma s \sigma^{-1})\, g(s) =$$

$$= \int_H d\sigma \int_G f(\sigma s \sigma^{-1})\, g(s)\, ds = \int_H d\sigma \int_G f(s)\, g(\sigma s \sigma^{-1})\, ds$$

$$= \int_G ds\, f(s) \int_H g(\sigma s \sigma^{-1})\, d\sigma = \int_G f(s)\, g^{\natural}(s)\, ds =$$

$$= \langle f, g^{\natural} \rangle$$

esta definición es correcta ya que restringiéndola a $\mathcal{K}(G)$ resulta la definición original.

VII. 1. 4.- PROPOSICION

$\pi_d$ es un proyector continuo en $\mathcal{K}(G)$.

La linealidad de este operador es trivial, y su idempotencia resulta de la idempotencia de $u_d$ (IV. 3. 9.-). Finalmente, la continuidad se obtiene de la proposición I. 3. 8.-. A la imagen de $\mathcal{K}(G)$ por $\pi_d$ la notaremos con $\mathcal{K}(d)$. ⊠

VII. 1. 5.- PROPOSICION

$\natural$ es un proyector continuo en $\mathcal{K}(G)$.

a) $\natural$ es lineal: Es inmediato ya que por cálculo directo se obtiene

$$(\lambda f + \mu g)^{\natural}(s) = \lambda f^{\natural}(s) + \mu g^{\natural}(s)$$

b) $\natural$ es idempotente: Por la invariancia de la medida de Haar vale

$$(') \quad f^{\natural}(\tau s \tau^{-1}) = \int_K f(\sigma\tau s \tau^{-1}\sigma^{-1})\,d\sigma = \int_K f(\sigma\tau)s(\sigma\tau)^{-1})\,d\sigma = f^{\natural}(s)$$

e integrando nuevamente respecto de $\tau$ en la medida de Haar de K (normalizada! ) obtenemos $(f^{\natural})^{\natural}(s) = f^{\natural}(s)$ cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$.

c) $\natural$ es continuo: Es inmediato que si $f \in \mathcal{K}(G)$ entonces $f^{\natural} \in \mathcal{K}(G)$ ya que $\operatorname{sop} f = M$ (compacto) implica $\operatorname{sop} f^{\natural} \subset KMK = M'$ (compacto).

Si $f \in \mathcal{K}(G, M)$, y como vimos $f^{\natural} \in \mathcal{K}(G, M')$ ambos espacios de Banach con la norma de la convergencia uniforme, tendremos entonces:

$$\|f^{\natural}\| = \sup_{s \in M'} |f^{\natural}(s)| = \sup_{s \in M'} \left|\int_K f(\sigma s \sigma^{-1})\,d\sigma\right| \leq$$

$$\leq \int_K \sup_{s \in M'} |f(\sigma s \sigma^{-1})|\,d\sigma = \sup_{\sigma s \sigma^{-1} \in M} |f(\sigma s \sigma^{-1})| = \|f\|$$

Luego la aplicación $f \longrightarrow f^{\natural}$ es continua en las respectivas normas, pero esto sucede cual quiera sea el compacto $M \subset G$, así que la aplicación mencionada es continua en la topología límite inductivo de $\mathcal{K}(G)$. La imagen de $\mathcal{K}(G)$ por esta aplicación la notaremos $\mathcal{K}^{\natural}(G)$ ∎

Los operadores que estamos estudiando no son endomorfismos de álgebra topológica, dado que no respetan la estructura multiplicativa del producto de convolución. Sin embargo cumplen otra propiedad levemente más débil, por la que merecen ser denominados "operadores de Reynolds", cuya demostración veremos en las proposiciones siguientes .

## VII. 1. 6.- PROPOSICION

$$\underline{\Pi_d(\Pi_d(f) * g) = \Pi_d(f) * \Pi_d(g)}$$

En efecto: $\quad \Pi_d(\Pi_d(f) * g) = u_d * ((u_d * f * u_d) * g) * u_d =$

$$(u_d * f * u_d) * (u_d * g * u_d) = \pi_d(f) * \pi_d(g)$$ ∎

VII. 1. 7.- PROPOSICION

$$(f^{\natural} * g)^{\natural} = f^{\natural} * g^{\natural}$$

De la fórmula (') de VII. 1. 5.- resulta $f^{\natural}(\sigma s) = f^{\natural}(s\sigma)$ para todo $\sigma \in K$.

Entonces

$$(f^{\natural} * g)^{\natural}(s) = \int_K (f^{\natural} * g)(\sigma s \sigma^{-1})\, d\sigma =$$

$$= \int_K d\sigma \int_G f^{\natural}(t^{-1}\sigma s \sigma^{-1})\, g(t)\, dt = \int_K d\sigma \int_G f^{\natural}(\sigma^{-1} t^{-1} \sigma s)\, g(t)\, dt =$$

$$= \int_K d\sigma \int_G f^{\natural}(t^{-1} s)\, g(\sigma t \sigma^{-1})\, dt = \int_G f^{\natural}(t^{-1}s)\, dt \int_K g(\sigma t \sigma^{-1})\, d\sigma$$

$$= (f^{\natural} * g^{\natural})(s)$$ ∎

VII. 1. 8.- COROLARIO

$\mathcal{H}(d)$ y $\mathcal{H}^{\natural}(G)$ son subálgebras cerradas de $\mathcal{H}(G)$.

De VII. 1. 4.- y VII. 1. 5.- se deduce inmediatamente que son subespacios cerrados. Por VII. 1. 6.- resulta que si $f, g \in \mathcal{H}(d)$ entonces $f * g \in \mathcal{H}(d)$. Análogamente, a partir de VII. 1. 7.- se obtiene que $f, g \in \mathcal{H}^{\natural}(G)$ implica que $f * g \in \mathcal{H}^{\natural}(G)$. ∎

VII. 1. 9.- PROPOSICION

Si $f \in \mathcal{H}(G)$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $f \in \mathcal{H}^{\natural}(G)$.

b) $f * \nu = \nu * f \quad \forall\, \nu \in \mathcal{M}(K)$

a) $\Longrightarrow$ b): $f = f^{\natural}$ y por la fórmula (') de VII. 1. 5.- resulta

$f * \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma * f$ para todo $\sigma \in K$, y por los teoremas I. 3. 3.- y I. 3. 8.-

resulta b) .

b) $\Longrightarrow$ a) : En particular será para todo $\sigma \in K$, $\mathcal{E}_\sigma * f = f * \mathcal{E}_\sigma$ y multiplicando ambos miembros por $\mathcal{E}_{\sigma^{-1}}$ tenemos que

$$f(s) = (\mathcal{E}_{\sigma^{-1}} * f\ \mathcal{E}_\sigma)(s) = f(\sigma\ s\ \sigma^{-1})$$

e integrando respecto de $\sigma$ en la medida de Haar de K resulta a) ∎

VII. 1. 10.- COROLARIO

$\mathcal{M}^\natural(G)$ es el conmutante en $\mathcal{M}(G)$ de $\mathcal{M}(K)$.

Sea Q tal conmutante, es decir el conjunto de medidas $\mu \in \mathcal{M}(G)$ tales que para toda $\nu \in \mathcal{M}(K)$ vale $\mu * \nu = \nu * \mu$. Veamos primero que $\mathcal{M}^\natural(G) \subset Q$. Sea $\mu \in \mathcal{M}^\natural(G)$, entonces para toda $f \in \mathcal{K}(G)$

$$\langle f, \mu \rangle = \langle f, \mu^\natural \rangle = \langle f^\natural, \mu \rangle = \langle \mathcal{E}_{\sigma^{-1}} * f^\natural * \mathcal{E}_\sigma , \mu \rangle$$

$$= \langle (\mathcal{E}_{\sigma^{-1}} * f * \mathcal{E}_\sigma)^\natural , \mu \rangle = \langle \mathcal{E}_{\sigma^{-1}} * f * \mathcal{E}_\sigma , \mu \rangle =$$

$$= \langle f, \mathcal{E}_\sigma * \mu * \mathcal{E}_{\sigma^{-1}} \rangle$$

Luego $\mu = \mathcal{E}_\sigma * \mu * \mathcal{E}_{\sigma^{-1}}$ y razonando como en VII. 1. 9.- , por I. 3. 6.- resulta $\mu \in Q$.

Veamos ahora que $Q \subset \mathcal{M}^\natural(G)$. Sea $\mu \in Q$, entonces $\mu = \mathcal{E}_\sigma * \mu * \mathcal{E}_{\sigma^{-1}}$ y por lo tanto

$$\langle f, \mu \rangle = \langle f, \mathcal{E}_\sigma * \mu * \mathcal{E}_{\sigma^{-1}} \rangle = \langle \mathcal{E}_{\sigma^{-1}} * f * \mathcal{E}_\sigma , \mu \rangle$$

$$= \int_G f(\sigma\ s\ \sigma^{-1})\, d\mu(s)$$

e integrando respecto de $\sigma$ ambos miembros en la medida de Haar de K tendremos

$$\langle f, \mu \rangle = \int_G d\mu(s) \int_K f(\sigma\ s\ \sigma^{-1})\, d\sigma = \int_G f^\natural(s)\, d\mu(s) =$$

$$= \langle f^\natural, \mu \rangle = \langle f, \mu^\natural \rangle$$

cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$, luego $\mu \in \mathcal{M}^\natural(G)$. ∎

VII. 1. 11.- COROLARIO

Los operadores pi y becuadro conmutan .

Sabemos que $u_d \in L^2(K) \subset \mathcal{M}(K) \subset \mathcal{M}(G)$ y por IV.3.5.- y IV.3.9.- $u_d$ es central en $\mathcal{M}(K)$ . Entonces, por el resultado anterior, $u_d^{\natural} = u_d$ y si aplicamos VII.1.7.- resultará finalmente

$$\Pi_d(f^{\natural}) = u_d * f^{\natural} * u_d = (u_d * f * u_d)^{\natural} = (\Pi_d(f))^{\natural} \qquad \blacksquare$$

De acuerdo con la hipótesis adicional hecha en VII.1.1.- , $H(d)$ tiene dimensión finita $n$ , y por lo tanto el anillo $A = \mathrm{End}_C(H(d))$ resulta ser (para una base prefijada de $H(d)$) isomorfo a $M_n(C)$ .

Sea $\mu \in \mathcal{M}(G)$ tal que el operador $T_\mu$ deje invariante a $H(d)$ , entonces notaremos con $T_\mu^d$ a la restricción de $T_\mu$ a $H(d)$ . De acuerdo con eso, $T_\mu^d \in A$ y por lo que dijimos se puede suponer que es una matriz de nxn . Nos interesará determinar el conjunto más amplio posible de medidas de G tales que sus operadores asociados dejen invariante a $H(d)$ y por lo tanto sean susceptibles de tal restricción .

VII. 1. 12.- PROPOSICION

Si $\mu$ pertenece al subespacio $\mathcal{M}(K) + u_d * \mathcal{M}^c(G)$ de $\mathcal{M}^c(G)$ , entonces $H(d)$ es invariante respecto del operador $T_\mu$ .

Sea $\mu = \nu + u_d * \rho$ con $\nu \in \mathcal{M}(K)$, $\rho \in \mathcal{M}^c(G)$ , entonces, recordando que $T_{u_d} = T_d$ , será

$$T_\mu(H(d)) = (T_\nu + T_{u_d * \rho})(H(d)) \subset$$

$$\subset T_\nu(H(d)) + T_{u_d}(T_\rho(H(d))) = T_\nu T_{u_d}(H) + T_{u_d}(T_\rho(H(d)))$$

y como $u_d$ es central en $\mathcal{M}(K)$ (IV.3.5.- y IV.3.9.-) será $u_d * \nu = \nu * u_d$ de don de resulta que $T_{\mu}(H(d)) \subset H(d)$.  ⊠

Esto permite afirmar, en particular, que $H(d)$ es un $\mathcal{M}(K)$-módulo.
Más precisamente, $\mathcal{M}(K)$ opera sobre $H(d)$ como lo hace $J_d$, como veremos en la proposición siguiente. En adelante designaremos con $p_d$ al proyector de $\mathcal{M}(K)$ en $J_d$ definido por $p_d(\mu) = \mu * u_d$.

VII. 1. 13.- PROPOSICION

Para toda $\nu \in \mathcal{M}(K)$ vale $T^d_{\nu} = T^d_{p_d(\nu)}$

En efecto, como $T^d_{u_d}$ es el operador identidad en $H(d)$, tendremos para cada $\nu \in \mathcal{M}(K)$

$$T^d_{\nu} = T^d_{\nu} \cdot T^d_{u_d} = T^d_{\nu * u_d} = T^d_{p_d(\nu)}$$ ⊠

Esta proposición presenta varios corolarios interesantes.

VII. 1. 14.- COROLARIO

H(d) puede descomponerse como $H(d) = \bigoplus_i H_i$ donde los $H_i$ son $\mathcal{M}(K)$-simples, y también $J_d$-simples. En particular H(d) es semisimple isotípico y su longitud como $\mathcal{M}(K)$-módulo y como $J_d$-módulo coinciden.

En efecto, si $H(d) = \bigoplus_i H_i$ es una descomposición en $J_d$-módulos simples, como $T^d_{\nu}(H_i) = T^d_{p_d(\nu)}(H_i) \subset H_i$ ya que, por IV.5.10.-, los $J_{d'}$, con $d' \neq d$ operan por la aplicación nula en H(d), entonces cada $H_i$ es también un $\mathcal{M}(K)$-submódulo, evidentemente simple ya que $J_d \subset \mathcal{M}(K)$.  ⊠

VII. 1. 15.- COROLARIO

$J_d$ verifica las siguientes propiedades:

a) $\underline{p_d(J_d) \subset J_d}$ -

b) La aplicación $T^d : J_d \longrightarrow A$ ( = $\mathrm{End}_C(H(d))$) es inyectiva.

c) $\{T^d_f \mid f \in J_d\} = \{T^d_\vartheta \mid \vartheta \in \mathcal{M}(K)\}$

Además tales propiedades son características de $J_d$ -.

Veamos que $J_d$ satisface esas propiedades. a) es trivial. Como $J_d$ es simple, y es trivial que todo módulo distinto de 0 sobre un anillo simple con unidad es fiel, $T^d$ será inyectiva, lo que prueba b). Finalmente, c) resulta de VII.1.13.-

Sea $\vartheta \in S$, entonces $T^d_\vartheta = T^d_{p_d(\vartheta)}$ y como por a) $p_d(\vartheta) \in S$, y por b) $T^d$ es biunívoca en $S$, $\vartheta = p_d(\vartheta)$, y por lo tanto $S \subset J_d$.

Sea por el contrario, $f \in J_d$, por c) existirá $\vartheta \in S$ tal que $T^d_f = T^d_\vartheta$, pero puesto que $T^d$ es biunívoca en $J_d$ será $f = \vartheta$, es decir que $J_d \subset S$. Luego $S = J_d$. ■

VII. 1.16.- COROLARIO

Sea $B = \{T^d_\vartheta \mid \vartheta \in \mathcal{M}(K)\}$, y sea $k = \dim \dot{d}$, entonces los anillos $B$, $J_d$, y $M_k(C)$ son simples e isomorfos.

El primer isomorfismo se deduce de VII.1.13.- y VII.1.15.-b). El segundo resulta del teoream de Peter-Weyl (IV.3.9.-). ■

Trataremos a continuación de describir más detenidamente el anillo B mediante la ya mencionada identificación con matrices de n x n.

Con este objeto repasaremos dos notaciones habituales del cálculo matricial:

a) Notaremos con $I_p$ a la matriz unidad de dimensión $p$, es decir la matriz de $p \times p$ con 1 en la diagonal principal y los restantes elementos nulos.

b) Si M y N son dos matrices : $M = (a_{ij})$, $N = (b_{ij})$ notaremos con $M \otimes N$ a la matriz

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} a_{11}N & a_{12}N & \cdots & a_{1k}N \\ \\ a_{k1}N & a_{k2}N & \cdots & a_{kk}N \end{pmatrix}$$

A esta última notación la consideramos como una simple abreviatura.

VII. 1. 17. - PROPOSICION

Para una base adecuada de $H(d)$, el anillo $B$ puede ser identificado con el subanillo de $M_n(C)$ formado por las matrices de la forma $I_p \boxtimes M$, donde $M$ recorre el anillo $M_k(C)$ con $k = \dim d$ y $p = \operatorname{long}_{\mathcal{M}(K)}(H(d)) = (D : d)$.

Procediendo como en VII. 1. 14. podemos descomponer a $H(d) = \bigoplus_{i=1}^{p} H_i$ donde cada $H_i$ es $\mathcal{M}(K)$ - simple y $J_d$ - simple. Entonces resulta que

$$\dim H_i = \operatorname{long} J_d = \dim d = k \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, p.$$

Eligiendo en $H(d)$ una base cuyas primeras $k$ componentes pertenezcan a $H_1$, las siguientes $k$ a $H_2$, etc., identificando $\operatorname{End}_C(H(d))$ con $M_n(C)$ mediante esa base, y recordando que la matriz que represente a $T_f^d$ con $f \in J_d$ deberá tener a cada $H_i$ como subespacio invariante, se concluye que deberá ser de la forma

$$T_f^d = \begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & & \\ & \boxed{M_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{M_p} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, como cada $H_i$ es $J_d$ - simple y son todos $J_d$-isomorfos entre sí, esos bloques deberán ser matrices semejantes, de manera que cambiando la base propuesta por otra adecuada, será $M_1 = M_2 = \ldots = M_p$ y la matriz total será de la forma $I_p \boxtimes M$.

$\boxtimes$

Es inmediato comprobar que el conmutante en $M_n(C)$ del subanillo $I_p \boxtimes M_k(C)$ es el subanillo $M_p(C) \boxtimes I_k$, es decir el subanillo formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}I & a_{12}I & \cdots & a_{1p}I \\ a_{21}I & a_{22}I & \cdots & a_{2p}I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1}I & a_{p2}I & \cdots & a_{pp}I \end{pmatrix} \qquad \text{con } I = I_k$$

y según el teorema de Wedderburn (III. 10. 2.) vale

$$M_n(C) = M_{pk}(C) = (I_p \otimes M_k(C)) \otimes_C (M_p(C) \otimes I_k)$$

Hemos visto que B es isomorfo a $I_p \otimes M_k(C)$, pero en adelante nos resultará mucho más útil considerar también a A y al conmutante $M_p(C) \otimes I_k$ de $I_p \otimes M_k(C)$ como imágenes por $T^d$ de anillos adecuados (no necesariamente contenidos en $\mathcal{M}(K)$), lo que obtendremos en las siguientes proposiciones.

Llamaremos $\mathcal{K}^{\natural}(d) = \mathcal{K}(d) \cap \mathcal{K}^{\natural}(G)$. Entonces es obvio que $\mathcal{K}^{\natural}(d) \subset \mathcal{K}(d) \subset u_d * * \mathcal{M}^c(G)$, y por VII. 1. 12., H(d) será invariante para los operadores $T_f^d$ con $f \in \mathcal{K}(d)$ o, en particular, $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$. Por lo tanto $\{T_f^d \mid f \in \mathcal{K}(d)\}$ y $\{T_f^d \mid f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)\}$ son subanillos de $A = M_n(C)$.

## VII. 1. 18.- PROPOSICION

La aplicación $T^d$ de $\mathcal{K}(d)$ en A es suryectiva.

Como la representación T de $\mathcal{M}(G)$ en H es topológicamente irreducible, dado $x \in H$ (no nulo), el conjunto $\{T_\mu(x) \mid \mu \in \mathcal{M}(G)\}$ es denso en H. Análogamente, $\{T_g(x) \mid g \in \mathcal{K}(G)\}$ será denso en el conjunto anterior y por lo tanto denso en H. Por la continuidad de $T_d$ resulta que el conjunto $\{T_d T_g(y) = T_d T_g T_d(x) = T_{u_d * g * u_d}(x) = T_f^d(x)$
continuidad de $T_d$ resulta que el conjunto $\{T_d T_g(y) \mid g \in \mathcal{K}(G); y = T_d(x)\}$ es denso en $T_d(H) = H(d)$.
Pero además $T_d T_g(y) = T_d T_g T_d(x) = T_{u_d * g * u_d}(x) = T_f^d(x)$ con $f = \Pi_d(g) \in \mathcal{K}(d)$. Es decir que el conjunto $\{T_f^d(x) \mid f \in \mathcal{K}(d)\}$ es denso en H(d), y por lo tanto la restricción de $T^d$ a $\mathcal{K}(d)$ es una representación topológicamente irreducible, y puesto que H(d) es de dimensión finita será algebraicamente irreducible. Finalmente, por el teorema de Burnside resulta la proposición. $\blacksquare$

La imágen de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$ por la aplicación $T^d$ es el conmutante B' en A del subanillo B.

Sea $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$, entonces por VII. 1. 9. f conmuta con toda $\nu \in \mathcal{M}(K)$, y por lo tanto $T_f^d T_\nu^d = T_\nu^d T_f^d$ luego la imágen de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$ está contenida en B'. Veamos la inclusión inversa. Sea $U \in B'$, entonces por VII. 1. 18. será $U = T_f^d$ con $f \in \mathcal{K}(d)$ y además se verificará

$$T_f^d = T_\sigma^d T_f^d T_{\sigma^{-1}}^d = \int_K T_\sigma^d T_f^d T_{\sigma^{-1}}^d \, d\sigma = \left(\int_K T_\sigma T_f T_\sigma \, d\sigma\right)^d$$

$$= \left(\int_K d\sigma \int_G T_{\sigma s \sigma^{-1}} f(s) \, ds\right)^d = \left(\int_K d\sigma \int_G T_s f(\sigma^{-1} s \sigma) \, ds\right)^d$$

$$= \left(\int_G T_s \, ds \int_K f(\sigma^{-1} s \sigma)\right)^d = \left(\int_G T_s f^\natural(s) \, ds\right)^d = T_{f^\natural}^d$$

Es decir que $U = T_f^d$ con $f = f^\natural \in \mathcal{K}^\natural(d)$. $\boxtimes$

Supongamos elegida en $H(d)$ una base adecuada como la construída en VII. 1. 17., y sea como antes $n = \dim H(d)$, $k = \dim d$, $p = \operatorname{long}_{\mathcal{R}(K)} (H(d))$ y por lo ya visto $n = p \cdot k$. Entonces vale el siguiente:

<u>VII. 1. 20.- COROLARIO</u>

<u>Para cada $f \in \mathcal{K}^\natural(d)$ existe una y sólo una matriz $U_f$ de $p \times p$, tal que $T_f^d = U_f \otimes I_k$. Además la correspondencia $f \longrightarrow U_f$ es una representación irreducible de $\mathcal{K}^\natural(d)$ en $C^p$.</u>

La existencia de tal matriz resulta de las proposiciones anteriores teniendo en cuenta las relaciones enunciadas anteriormente sobre A, B, su conmutante B' y sus representaciones matriciales. Puesto que $M \otimes I_k = N \otimes I_k$ implica que $M = N$, la unicidad es inmediata. Por otra parte, como vimos que $B'$ = conmutante de $B = M_p(C) \otimes I_k$, todas las matrices de $p \times p$ se obtienen de esta manera. Esto demuestra que si $f \longrightarrow U_f$ es una representación (en $C^p$), es irreducible. Pero el hecho de ser una representación resulta inmediatamente de

$$(M \otimes I_k) \cdot (N \otimes I_k) = MN \otimes I_k$$

$\boxtimes$

## § 2.- FUNCIONES ESFERICAS EN GRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS

### VII. 2. 1.- NOTACION

En este parágrafo usaremos la notación, hipótesis y resultados del § 1, y muy especialmente la hipótesis adicional de que $H(d)$ es de dimensión finita $n$. Además supondremos prefijada una base de $H(d)$ que cumpla las hipótesis de la Proposición VII. 1. 17. y que, por lo tanto, garantice que se cumple VII. 1. 20.. Bajo tales hipótesis, para cada $s \in G$, $(T_d T_s)^d$ será una matriz de $n \times n$.

Estamos entonces en condiciones similares al capítulo VI, y podemos adaptar la definición VI. 1. 2. a nuestro cargo:

### VII. 2. 2.- DEFINICION

Llamaremos FUNCION ESFERICA de tipo $(D, d)$ y altura $p = (D : d)$ a la función $\phi(s) = \phi_{D,d}(s) = \mathrm{Tr.}\,(T_d T_s)^d$.

Es inmediato que $\phi \in \mathcal{C}(G)$. Ahora bien, si $D$ es de dimensión finita y $d = d_0$ representación trivial de $K$, entonces $\phi = \chi_D$. De este ejemplo se deduce que el soporte de $\phi$ no es necesariamente compacto.

Si $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$, definimos:

$$\phi(\mu) = \mathrm{Tr.}(T_d T_\mu)^d = \mathrm{Tr.}\,(T_d \int_G T_s \, d\mu(s))^d =$$

$$= \int_G \mathrm{Tr.}\,(T_d T_s)^d \, d\mu(s) = \int_G \phi(s) \, d\mu(s) = \langle \phi, u \rangle$$

Análogamente, si $g \in \mathcal{K}(G)$, pondremos

$$\phi(g) = \mathrm{Tr.}(T_d T_g)^d = \langle \phi, g \rangle$$

En lo que sigue utilizaremos a menudo, y sin mención previa, dos resultados elementales del cálculo matricial: Si $M$, $N$, $X$ y $P$ son matrices de $n \times n$, entonces:

a) $\mathrm{Tr.}(MN) = \mathrm{Tr.}\,(NM)$

b) $\quad Tr.(XP) = 0 \quad$ para toda $\quad X \Longrightarrow \quad P = 0$

VII. 2. 3.- LEMA

$\phi = \phi^{\natural}.$

En efecto, para toda $f \in \mathcal{K}(G)$ se verifica

$$\langle \phi , f^{\natural} \rangle = \int_G \phi(s)\; f^{\natural}(s)\, ds = \int_G Tr.(T_d T_s)^d ds \int_K f(\sigma s \sigma^{-1})\, d\sigma$$

$$= Tr.\left(\int_G \int_K T_d T_s \; f(\sigma s \sigma^{-1})\, d\sigma\; ds\right)^d =$$

$$= Tr.\left(\int_G \int_K T_d T_{\sigma^{-1} s \sigma}\; f(s)\, d\sigma\; ds\right)^d =$$

$$= Tr.\left(\int_K T_d T_{\sigma^{-1}} \left(\int_G T_s f(s)\, ds\right) T_\sigma\, d\sigma\right)^d =$$

$$= \int_K Tr.(T_d T_{\sigma^{-1}} T_f T_\sigma)^d\, d\sigma = \int_K Tr.(T_\sigma T_d T_{\sigma^{-1}} T_f)^d\, d\sigma =$$

$$= Tr.(T_d T_f)^d = \langle \phi , g \rangle$$

∎

VII. 2. 4.- LEMA

$\Pi_{\check{d}}(\phi) = \phi.$

Cualquiera sea $f \in \mathcal{K}(G)$ se verifica

$$\langle \Pi_{\check{d}}(\phi), f \rangle = \langle \bar{u}_d * \phi * \bar{u}_d , f \rangle = \langle \phi , u_d * f * u_d \rangle = Tr.(T_d T_{u_d * f * u_d})^d =$$

$$= Tr.(T_{u_d} T_{u_d} T_f T_{u_d} T_{u_d}) = Tr.(T_d T_f)^d = \langle \phi , f \rangle$$

∎

VII. 2. 5.- LEMA

Si $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ entonces $\langle \phi , f \rangle = k Tr.(U_f)$ donde $f \longrightarrow U_f$ es una representación irreducible de dimensión $p$ de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$.

En efecto, ya que por VII. 1. 20. se verificará

$$\langle \phi , f \rangle = \mathrm{Tr.}\,(T_f^d) = \mathrm{Tr.}\,(U_f \otimes I_k) = k\ \mathrm{Tr.}\,(U_f)$$ ■

Veremos en seguida que las tres propiedades dadas por estos lemas caracterizan a las funciones esféricas correspondientes a d. Pero antes demostremos dos lemas auxiliares.

VII. 2. 6.- LEMA

Sea $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$, entonces son equivalentes las afirmaciones

1) $\check{f} * \phi = \phi * \check{f}$

2) $\langle f * g , \phi \rangle = \langle g * f , \phi \rangle$ cualquiera sea $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$.

1) $\Longrightarrow$ 2) : $\langle f * g , \phi \rangle = \langle g , \check{f} * \phi \rangle = \langle g , \phi * \check{f} \rangle = \langle g * f , \phi \rangle$

2) $\Longrightarrow$ 1) : Procediendo en forma inversa a la primera parte obtenemos que para toda $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ se verifica $\langle g , \check{f} * \phi \rangle = \langle g , \phi * \check{f} \rangle$. Claro que esto no basta para demostrar 1). Sin embargo, haciendo uso de los resultados del parágrafo anterior y de los lemas precedentes extenderemos este resultado para toda $g \in \mathcal{K}(G)$.

$$\langle g , \check{f} * \phi \rangle = \langle f * g , \phi \rangle = \langle f * u_d * g , \phi * \bar{u}_d \rangle =$$

$$= \langle f * (u_d * g * u_d) , \phi \rangle = \langle f * (u_d * g * u_d) , \phi^{\natural} \rangle =$$

$$= \langle (f * (u_d * g * u_d))^{\natural} , \phi \rangle = \langle f * (u_d * g * u_d)^{\natural} , \phi \rangle =$$

$$= \langle (u_d * g * u_d)^{\natural} * f , \phi \rangle = \langle g * f , \phi \rangle = \langle g , \phi * \check{f} \rangle$$ ■

VII. 2. 7.- LEMA

Con la notación de (VII. 2. 5.), si $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$, son equivalentes las afirmaciones : a) $\check{f} * \phi = 0$ b) $U_f = 0$.

a) $\Longrightarrow$ b) : En efecto, para toda $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ se verifica

$$k\ \mathrm{Tr.}\,(U_f \cdot U_g) = k\ \mathrm{Tr.}\,(U_{f*g}) = \langle \phi , f * g \rangle = \langle \check{f} * \phi , g \rangle = 0$$

Pero, de acuerdo con lo que vimos en VII. 2. 5., $U_g$ recorre todo el anillo de matrices $M_p(C)$, por lo tanto debe verificarse b).

b) $\Longrightarrow$ a) : Razonando a la inversa, resulta que para toda $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$

$$\langle f * \phi , g \rangle = \langle \phi , f * g \rangle = k \, \mathrm{Tr.} (U_f \, U_g) = 0$$

y procediendo como en el lema anterior, extendémos este resultado a toda $g \in \mathcal{K}(G)$, lo que demuestra a).

⊠

VII. 2. 8.- TEOREMA (Godement)

Para que $\phi \in \mathcal{M}(G)$ sea una función esférica de altura $p$ correspondiente a la representación irreducible $d$ de $K$, es necesario y suficiente que satisfaga:

a) $\phi = \phi^{\natural}$

b) $\pi_{\check{d}}(\phi) = \phi$

c) Existe una representación irreducible $f \longrightarrow U_f$ de dimensión $p$ del álgebra $\mathcal{K}^{\natural}(d)$ tal que si $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ se verifica $\langle \phi , f \rangle = k \, \mathrm{Tr.}(U_f)$ con $k = \dim d$.

La necesidad resulta de VII. 2. 3., VII. 2. 4. y VII. 2. 5.. Debemos probar entonces la suficiencia. Jugará un papel importante en esta demostración el álgebra $\mathcal{K}^{\natural}(d)$, pero un inconveniente serio residirá en el hecho de que esta álgebra carece de unidad y por lo tanto no se le pueden aplicar algunos de los importantes resultados del capítulo III. Para salvar este inconveniente definimos

$$\mathcal{M}(d) = J_d + \mathcal{K}(d)$$

donde la suma no será necesariamente directa. Es inmediato que $\mathcal{M}(d)$ es una subálgebra de $\mathcal{M}^c(G)$. Además $u_d$ es unidad de $\mathcal{M}(d)$. En efecto $u_d$ es, por definición, unidad de $J_d$, y por VII. 1. 4. vale que

$$f * u_d = u_d * f = f \qquad \text{cualquiera sea } f \in \mathcal{K}(d)$$

$J_d$ es subálgebra simple de $\mathcal{M}(d)$ con la misma unidad, y por III. 10. 2. será

$$\mathcal{M}(d) = J_d \otimes_C \text{conmut. de } J_d$$

Ahora bien, el conmutante de $J_d$ en $\mathcal{K}(d)$ será igual a su centro más el conmutante de $J_d$ en $\mathcal{K}(d)$ que por VII. 1. 9. es $\mathcal{K}^\natural(d)$. Entonces

(1) $$\mathcal{M}(d) = J_d \otimes_C (C \cdot u_d + \mathcal{K}^\natural(d))$$

De la proposición I. 3. 11. resulta que el conjunto $\{ \mathcal{E}_\sigma * u_d \mid \sigma \in K \}$ es total en $J_d$ y como $J_d$ es de dimensión finita $n^2$ existirá un conjunto finito $\{\sigma_i\}_{i=1,2,\dots,n^2} \subset K$ tal que $J_d = \bigoplus_{i=i^2}^{n^2} C(\mathcal{E}_{\sigma_i} * U_d)$ y sustituyendo en (1) tendremos

(2) $$\mathcal{M}(d) = \bigoplus_{i=1}^{n^2} \mathcal{E}_{\sigma_i} * (C \cdot u_d + \mathcal{K}^\natural(d))$$

Además, si $f, g \in \mathcal{K}^\natural(d)$ se verificará

$$\langle f * g, \phi \rangle = k\,\mathrm{Tr.}(U_{f*g}) = k\,\mathrm{Tr.}(U_f U_g) = k\,\mathrm{Tr.}(U_g U_f) = \langle g * f, \phi \rangle$$

y por VII. 2. 6. será $\phi * \check{f} = \check{f} * \phi$ cualquiera sea $f \in \mathcal{K}^\natural(d)$. Por otra parte, de a) y b) resulta

$$\mathcal{E}_\sigma * \phi = \phi * \mathcal{E}_\sigma \qquad \text{y} \qquad \bar{u}_d * \phi = \phi * \bar{u}_d$$

Reuniendo estos tres últimos resultados con (2) resulta que

(3) $$\check{\mu} * \phi = \phi * \check{\mu} \qquad \text{cualquiera sea } \mu \in \mathcal{M}(d).$$

Definimos el conjunto $P = \{ \mu \in \mathcal{M}(d) \mid \check{\mu} * \phi = 0 \}$ . Por definición $P$ es un ideal a izquierda, pero por (3) resulta ser bilátero.

De VII. 2. 7. resulta inmediatamente que $P \cap \mathcal{K}^\natural(d)$ es el núcleo de la representación $f \longrightarrow U_f$.

Por el teorema de Burnside, existe $v \in \mathcal{K}^\natural(d)$ tal que $U_v = I_p$ y por lo tanto, para toda $f \in \mathcal{K}^\natural(d)$ se verificará

$$\langle \phi, v * f \rangle = k\,\mathrm{Tr.}(U_v U_f) = k\,\mathrm{Tr.}(U_f) = \langle \phi, f \rangle = \langle \phi, f * v \rangle$$

Entonces, de VII. 2. 6. y razonando como en VII. 2. 4. tendremos que

$$\phi * \check{v} = \check{v} * \phi = \phi$$

Por definición de $P$ resulta que $v$ es unidad de $\mathcal{M}(d)/P$, luego $P$ es regular (III. 11. 1 ).

Por otra parte, sabemos $u_d \notin P$, entonces de (2) resulta

$$(4) \qquad P \supset \bigoplus_{i=1}^{n^2} \mathcal{E}_{\sigma_i} * ( P \cap \mathcal{K}^{\natural}(d) )$$

Puesto que la imagen de $f \longrightarrow U_f$ es de dimensión finita $p$, $P \cap \mathcal{K}^{\natural}(d)$ tiene codimensión finita en $\mathcal{K}^{\natural}(d)$ y por ende $P$ tiene codimensión finita en $\mathcal{M}(d)$.

Una vez determinadas estas propiedades de $P$ podemos prescindir del álgebra $\mathcal{M}(d)$.

En efecto, si llamamos $P' = P \cap \mathcal{K}(d)$, se verifica de inmediato que $P'$ es ideal bilátero, regular y de codimensión finita en $\mathcal{K}(d)$. Observemos que por I. 3. 7, la aplicación $f \longrightarrow \check{f} * \phi$ es continua en $\mathcal{K}(d)$, y como $P'$ es imagen inversa de $0$ por esta aplicación, $P'$ es <u>cerrado</u> en $\mathcal{K}(d)$.

Sabemos por III. 11. 2 que existe en $\mathcal{K}(d)$ un ideal a izquierda, maximal y regular $A$ tal que $P \subset A$. Evidentemente $A$ tiene codimensión finita en $\mathcal{K}(d)$, entonces ( [1] , Livre V, Ch. I, § 2, N° 4, Prop. 3 ) si $N$ es suplementario algebraico, será suplementario topológico, y si llamamos $\varphi$ al proyector continuo de $\mathcal{K}(d)$ en $\mathcal{K}(d)/N$ será $A = \varphi^{-1}(0)$ luego cerrado en $\mathcal{K}(d)$. Pero $\mathcal{K}(d)$ es cerrada en $\mathcal{K}(G)$ ( por VII. 1. 4 ) luego $A$ es cerrado en $\mathcal{K}(G)$.

Definimos $\qquad M = \{ f \in \mathcal{K}(G) \mid \Pi_d (g * f) \in A \quad \forall g \in \mathcal{K}(G) \}$

Por III. 11. 4 sabemos que $M$ es ideal a izquierda maximal y regular en $\mathcal{K}(G)$ y además que $A = M \cap \mathcal{K}(d)$.

Por I. 3. 9 la aplicación $R_g : f \longrightarrow g * f$ es continua en $\mathcal{K}(G)$. Además en VIII. 1. 4 vimos que $\Pi_d$ era continuo. Por lo tanto

$$M = \bigcap_{g \in \mathcal{K}(G)} R_g^{-1} ( \Pi_d^{-1} (A) ) \qquad \text{resulta ser cerrado.}$$

Si llamamos $H = \mathcal{K}(G)/M$ podemos asegurar que $H$ es una espacio vectorial topológico, de Hausdorff ( [1] , Livre V, Ch. I, § 1, N° 6 ) y tonelado ( Idem, Ch. III, § 1, N° 2, Cor. 1 ), pero no podemos asegurar que sea cuasi-completo (Idem, Ch. IV, § 4, Exerc. 10-b ).

Designaremos con $\theta$ a la aplicación canónica de $\mathcal{K}(G)$ en H, y como siempre $R_s$ indicará la representación regular de G en $\mathcal{K}(G)$.

Definimos la representación $s \longrightarrow T_s$ de G en H mediante

$$T_s(\theta(f)) = \theta(R_s f)$$

Sea S un compacto de G y $f \in \mathcal{K}(G)$, $F = \text{sop } f$ también compacto. Entonces para todo $s \in S$ el soporte de $R_s f$ está contenido en el compacto $S' = S \cdot F$. La aplicación ( lineal y continua ) $s \longrightarrow R_s f$ será de S en $\mathcal{K}(G, S')$ que, como ya vimos, es un espacio de Banach.

Entonces, la cápsula cónvexa cerrada (en $\mathcal{K}(G,S')$ ) del conjunto $\{ R_s f \mid s \in S \}$ será un compacto $L \subset \mathcal{K}(G, S')$, y también compacto en $\mathcal{K}(G)$ con la topología límite inductiva. Finalmente será

$$\{ T_s(\theta(f)) = \theta(R_s f) \mid s \in S \} \subset \theta(L)$$

donde $\theta(L)$ es un convexo compacto en H. Luego la representación $T_s$ es practicable, y es posible (II. 1. 8) extenderla a $\mathcal{M}^c(G)$.

En particular, la restricción de esta representación a $\mathcal{K}(G)$ será algebraica y topológicamente irreducible por III. 11. 3. Llamaremos D a la clase de representaciones equivalentes a ésta.

Por lo vista anteriormente sabemos además que

$$H(d) = T_d(H) = \mathcal{K}(d)/M \cap \mathcal{K}(d) = \mathcal{K}(d)/A$$

es de dimensión finita. Entonces (ver VII. 2. 1) es posible definir la función esférica $\phi_d(s)$, de tipo (D, d) y altura $q = (D:d)$. Ahora bien, sea $g \longrightarrow T'_g$ la restricción a $\mathcal{K}^\natural(d)$ de $f \longrightarrow T_f$. Esta representación actuará en $\mathcal{K}^\natural(d)/M \cap \mathcal{K}^\natural(d) = \mathcal{K}^\natural(d)/A \cap \mathcal{K}^\natural(d)$.

Por otra parte, puesto que $f \longrightarrow U_f$ es una representación irreducible, el álgebra $\mathcal{K}^\natural(d)/(P \cap \mathcal{K}^\natural(d))$ es simple por el teorema de Burnside, y como $A \cap \mathcal{K}^\natural(d) = M \cap \mathcal{K}^\natural(d)$ es un ideal bilátero que contiene a $P \cap \mathcal{K}^\natural(d)$ y que no contiene a la unidad, entonces $A \cap \mathcal{K}^\natural(d) = P \cap \mathcal{K}^\natural(d)$, y por lo tanto $U_g = 0$ implica $T'_g = 0$.

Por VII. 2. 5 existe una representación irreducible de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$, de dimensión $(D:d) = q$, $f \longrightarrow W_f$ tal que para toda $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ vale

$$\langle \phi_d, f \rangle = (\dim d) \ \mathrm{Tr.}\ (W_g) = k \ \mathrm{Tr.}\ (W_g)$$

Recordemos además que para toda $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ es $\mathrm{Tr.}\ (T'_g) = \langle \phi_d, g \rangle$

Sea entonces $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ y $U_f = 0$. Por lo tanto será $T'_f = 0$ y además

$$\mathrm{Tr.}\ (W_g W_f) = k^{-1} \langle \phi_d, g * f \rangle = k^{-1} \ \mathrm{Tr.}\ (T'_g T'_f) = 0$$

cualquiera sea $g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$, es decir que $W_f = 0$.

Tenemos entonces dos representaciones irreducibles de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$, $f \longrightarrow U_f$ y $f \longrightarrow W_f$, tales que el núcleo de la primera contiene al núcleo de la segunda. Puesto que se trata de representaciones de dimensión finita, resultan ser semejantes. Entonces $p = q$ y cualquiera sea $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ se verifica

$$\langle \phi, f \rangle = k \ \mathrm{Tr.}\ (U_f) = k \ \mathrm{Tr.}\ (W_f) = \langle \phi_d, f \rangle$$

Pero entonces, procediendo como en la segunda parte del Lema VII. 2. 6 resulta que el resultado previo se extiende para toda $g \in \mathcal{K}(G)$ o lo que es lo mismo, $\phi = \phi_d$. ⊠

## VII. 2. 9 PROPOSICION

$$\int_K \phi(s\sigma t)\, u_d(\sigma)\, d\sigma = \int_K \phi(t\sigma s)\, u_d(\sigma)\, d\sigma \quad \text{con} \quad s, t \in G.$$

La demostración se basa en el resultado a) mencionado antes de VII. 2. 3 .

En efecto, si $s, t \in G$, entonces tendremos

$$\int_K \phi(s\sigma t)\, u_d(\sigma)\, d\sigma = \int_K \mathrm{Tr.}\ (T_d\, T_{s\sigma t})^d\, u_d(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \mathrm{Tr.}\ (T_d T_s ( \int_K T_\sigma u_d(\sigma)\, d\sigma )\, T_t)^d = \mathrm{Tr.}\ (T_d\, T_s\, T_{u_d}\, T_t)^d =$$

$$= \mathrm{Tr.}\ (T_d\, T_s\, T_d\, T_t)^d = \mathrm{Tr.}\ (T_d\, T_t\, T_d\, T_s)^d = \int_K \phi(t\sigma s) u_d(\sigma)\, d\sigma \qquad ⊠$$

VII. 2. 10 PROPOSICION

$$\int_K \phi(\sigma s \sigma^{-1} t)\, d\sigma = \int_K \phi(\sigma t \sigma^{-1} s)\, d\sigma \quad \text{para todo } s, t \in G.$$

Definimos $T_s^{\natural} = \int_K T_{\sigma s \sigma^{-1}}\, d\sigma$ . Entonces, para todo $\tau \in K$ vale

$$T_\tau T_s = \int_K T_{\tau \sigma s \sigma^{-1}}\, d\sigma = \int_K T_{\tau \sigma s \sigma^{-1} \tau^{-1}}\, T_\tau\, d\sigma =$$

$$= \int_K T_{(\tau\sigma) s (\tau\sigma)^{-1}}\, T_\tau\, d\sigma = T_s^{\natural}\, T_\tau$$

Usando este resultado tendremos

$$\int_K \phi(\sigma s \sigma^{-1} t)\, d\sigma = \operatorname{Tr.}(T_d T_s^{\natural} T_t)^d = \operatorname{Tr.}(T_\tau T_d T_s^{\natural} T_t T_{\tau^{-1}})^d =$$

$$= \int_K \operatorname{Tr.}(T_d T_s^{\natural} T_{\tau t \tau^{-1}})^d\, d\tau = \operatorname{Tr.}(T_d T_s^{\natural} T_t^{\natural})^d =$$

$$= \operatorname{Tr.}(T_d T_s^{\natural} T_d T_t^{\natural})^d = \operatorname{Tr.}(T_d T_t^{\natural} T_d T_s^{\natural})^d = \int_K \phi(\sigma t \sigma^{-1} s)\, d\sigma \quad \boxtimes$$

Para concluir el parágrafo veremos un importante teorema de caracterización de las funciones esféricas de altura 1 por medio de una ecuación funcional. Este teorema fué demostrado en un caso particular por Gelfand, siendo posteriormente generalizado con la demostración que damos aquí ( esencialmente basada en el Teorema VII. 2. 8 ) por R. Godement, en [5]

VII. 2. 11 TEOREMA (GELFAND - GODEMENT)

Sea $\phi(s) \in \mathcal{C}(G)$ y no idénticamente nula en $K$.

Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $\phi$ es una función esférica de altura 1 .

b) $\phi(s)\,\phi(t) = \int_K \phi(\sigma s \sigma^{-1} t)\, d\sigma$ para todo par $s, t \in G$.

a) $\Longrightarrow$ b) : Si $\phi$ es función esférica de altura 1 , entonces es un carácter del álgebra $\mathcal{K}^{\natural}(d)$ ya que si $f \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ entonces se verifica

$$\langle \phi , f \rangle = \text{Tr.}\ (U_f) = U_f = \lambda_f$$

puesto que $U_f$ es una matriz de $1 \times 1$, es decir un número complejo.

Entonces para toda $f, g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$

$$\langle \phi , f * g \rangle = \lambda_{f * g} = \lambda_f \ \lambda_g = \langle \phi , f \rangle \langle \phi , g \rangle$$

Sean ahora $f, g \in \mathcal{K}(G)$, entonces tendremos

$$\langle \phi , f^{\natural} * g \rangle = \langle \phi^{\natural} , f^{\natural} * g \rangle = \langle \phi , (f^{\natural} * g)^{\natural} \rangle =$$

$$= \langle \phi , f^{\natural} * g^{\natural} = \langle \overline{u}_d * \phi * \overline{u}_d , f^{\natural} * g^{\natural} \rangle =$$

$$= \langle \phi , u_d * f^{\natural} * g^{\natural} * u_d \rangle = \langle \phi , (u_d * f^{\natural}) * (u_d * g^{\natural}) \rangle =$$

$$= \langle \phi , u_d * f^{\natural} \rangle \langle \phi , u_d * g^{\natural} \rangle = \langle \phi , f \rangle \langle \phi , g \rangle$$

Usando I. 3. 5 resulta que para todo par $\alpha , \beta \in \mathcal{M}^c(G)$ se verifica

$$\langle \phi , \alpha^{\natural} * \beta \rangle = \langle \phi , \alpha \rangle \langle \phi , \beta \rangle$$

En particular, si ponemos $\alpha = \mathcal{E}_s$, $\beta = \mathcal{E}_t$ será $\alpha^{\natural} = \int_K \mathcal{E}_{\sigma s \sigma^{-1}} \, d\sigma$ y tendremos

$$\phi(s) \ \phi(t) = \langle \phi , \mathcal{E}_s \rangle \langle \phi , \mathcal{E}_t \rangle = \langle \phi , \alpha^{\natural} * \mathcal{E}_t \rangle =$$

$$= \int_G \int_G \phi(rr') \ d\alpha^{\natural}(r) \ d\mathcal{E}_t(r') = \int_G \phi(rt) \ d\alpha^{\natural}(r) =$$

$$= \int_K d\sigma \int_G \phi(rt) \ d\mathcal{E}_{\sigma s \sigma^{-1}}(r) = \int_K \phi(\sigma s \sigma^{-1} t) \ d\sigma$$

b) $\Longrightarrow$ a): Razonando en forma inversa a la que lo hicimos en la primera parte, podemos deducir a partir de b) que

(1) $$\langle \phi , \alpha^{\natural} * \beta \rangle = \langle \phi , \alpha \rangle \langle \phi , \beta \rangle$$

para todo par $\alpha , \beta$ de medidas de soporte finito, y por I. 3. 3 y I. 3. 6 se pue de extender este resultado a todo $\mathcal{M}^c(G)$.

De b) se obtiene inmediatamente $\langle \phi , \mathcal{E}_e \rangle = \phi(e) = 1$ y haciendo $\beta = \mathcal{E}_e$

$$\langle \phi, \alpha \rangle = \langle \phi, \alpha^{\natural} * \varepsilon_e \rangle = \langle \phi, \alpha^{\natural} \rangle = \langle \phi^{\natural}, \alpha \rangle$$

para toda $\alpha \in \mathcal{M}^c(G)$, o lo que es lo mismo

(2) $$\phi = \phi^{\natural}$$

Existe $d \in \Delta(K)$ tal que $\bar{u}_d * \phi \neq 0$. En efecto, si para toda $d \in \Delta(K)$ y para toda $f \in \mathcal{K}(K)$ fuera $f * \bar{u}_d * \phi = 0$ sería $f * \phi = 0$ por el teorema de Weyl, y por I. 2. 13 sería $\phi$ idénticamente nula en $K$ en contradicción con la hipótesis.

Por VII. 1. 11 resulta $u_d^{\natural} = u_d$.

Entonces
$$\langle \phi, u_d \rangle \langle \phi, \mu \rangle = \langle \phi, u_d * \mu \rangle = \langle \bar{u}_d * \phi, \mu \rangle$$

cualquiera sea $\mu \in \mathcal{M}^c(G)$. Puesto que $\bar{u}_d * \phi \neq 0$, de I. 2. 11 B resulta $\langle \phi, u_d \rangle \neq 0$, y si hacemos $\mu = \varepsilon_s$ y $m = (\langle \phi, u_d \rangle)^{-1}$

$$\phi = m.(\bar{u}_d * \phi)$$

y reiterando el procedimiento será

$$\phi = m^2.(\bar{u}_d * \bar{u}_d * \phi)$$

y por la idempotencia de $\bar{u}_d$ será $m = 1$ ya que $m = m^2$ y $m \neq 0$.

Si en el razonamiento anterior permutamos la ubicación de $\mu$ y $u_d$ resulta $\phi = \phi * u_d$

Entonces tenemos

(3) $$\phi = \bar{u}_d * \phi = \phi * \bar{u}_d = \pi_{\check{d}}(\phi)$$

Además de (1) resulta en particular, que para todo par $f, g \in \mathcal{K}(G)$

$$\langle \phi, f \rangle \langle \phi, g \rangle = \langle \phi, f^{\natural} * g \rangle$$

Y si $f, g \in \mathcal{K}^{\natural}(d)$ y ponemos $\langle \phi, f \rangle = \lambda_f$ tendremos

$$\lambda_f \cdot \lambda_g = \lambda_{f * g}$$

y la aplicación $f \longrightarrow \lambda_f$ será una representación ( irreducible ! ) de dimensión 1 de $\mathcal{K}^{\natural}(d)$

Observemos que la aplicación $f \longrightarrow \lambda_f$ no puede ser idénticamente nula en $\mathcal{K}^{\natural}(d)$, ya que en ese caso, por (2) y (3) resultaría $\langle \phi , f \rangle = 0$ para toda $f \in \mathcal{K}(K)$ y por I. 2. 13 esto implicaría $\phi \equiv 0$, contrariando la hipótesis. Este resultado, juntamente con (2) y (3) completan las hipótesis del teorema VII. 2. 8 de Godement. ⊠

------------------

## § 3. FUNCIONES ESFERICAS EN GRUPOS DE LIE.

### VII. 3. 1 NOTACION

Sean G un grupo de Lie real y conexo, y K un subgrupo compacto ( luego de Lie ) de G. Designaremos con $\varphi$ a una carta arbitraria, es decir un homeomorfismo de un entorno $U_o$ de 0 en $R^n$ sobre un entorno U de e (elemento identidad ) de G.

Como antes, será $\mathcal{E}(G)$ el álgebra de las funciones indefinidamente derivables, definidas en G, y $\mathcal{E}'(G)$ el álgebra de las distribuciones con soporte compacto. Utilizaremos frecuentemente la subálgebra $\mathcal{U}(G)$ formada por las distribuciones con soporte en el elemento neutro e de G.

Designaremos con $\mathcal{A}(G)$ al espacio vectorial formado por las funciones analíticas en G.

Podemos definir las funciones esféricas en forma absolutamente análoga al parágrafo anterior. Sin embargo, ahora tenemos instrumentos más potentes, puesto que podemos trabajar con funciones derivables o analíticas y con distribuciones. Con estos medios nos proponemos dar un teorema de caracterización de las funciones esféricas, análogo al teorema VII. 2. 8 , pero con condiciones considerablemente más débiles.

Si $\alpha \in \mathcal{U}(G)$, se demuestra ( [11] Ch. III, § 10, Theoreme XXXV ) que elegido un sistema de coordenadas locales de un entorno de e, es $\alpha = \sum_{i=1}^{k} c_i D^i \mathcal{E}_e$ con las $c_i$ constantes. Podemos definir el operador $X_\alpha$ que actúa en $\mathcal{E}(G)$, mediante

$$X_\alpha (f) = \alpha * f = \sum_{i=1}^{k} c_i D^i f(e).$$

VII. 3. 2 LEMA

Si $X$ es un operador continuo definido en $\mathcal{E}(G)$, son equivalentes:

a) $X \cdot R'_t = R'_t \cdot X \quad \forall t \in G.$

b) $X = X_\alpha$ con $\alpha \in {}'\mathcal{U}(G).$

b) $\Longrightarrow$ a): En efecto, es

$$(X_\alpha (f))(s) = (\alpha * f)(s) = \int_G f(t^{-1}s) \, d\alpha(t) =$$

$$= \langle (R'_s f)^\vee, \alpha \rangle = \langle R'_s f, \check{\alpha} \rangle$$

Entonces vale

$$R'_t (X_\alpha (f))(s) = (X_\alpha (f))(ts) = \langle (R'_{ts} f)^\vee, \alpha \rangle =$$

$$= \langle R'_s (R'_t f), \check{\alpha} \rangle = (X_\alpha (R'_t f))(s)$$

a) $\Longrightarrow$ b): Definimos la aplicación lineal continua de $\mathcal{E}(G)$ en $C$ $\alpha : f \longmapsto (X\check{f})(e)$.

Es inmediato verificar que $\alpha \in \mathcal{U}(G)$. Entonces

$$(X(f))(s) = (R'_s X(f))(e) = \langle (R'_s f)^\vee, \alpha \rangle =$$

$$= \langle (R'_s f), \check{\alpha} \rangle = (\alpha * f)(s) = (X_\alpha (f))(s) \qquad \boxtimes$$

VII. 3. 3 DEFINICION

Diremos que la distribución $\alpha \in \mathcal{U}(G)$ es ELIPTICA si para un sistema de coordenadas locales de un entorno de $e$ es de la forma $\alpha = a\, \mathcal{E}_e + \sum_i a_i D_i \mathcal{E}_e + \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j \mathcal{E}_e$ donde la forma cuadrática $\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j$ es positiva no degenerada.

Diremos que el operador $X_\alpha$ es ELIPTICO si $\alpha$ es elíptica.

VII. 3. 4 PROPOSICION

Si una distribución $\alpha \in \mathcal{U}(G)$ es elíptica para un sistema de coordenadas locales, lo es para cualquier otro sistema .

Sea $U_o$ un entorno de 0 en $R^n$, U un entorno de e en G y $\varphi$ una carta de $U_o$ en U. Para cada $f \in \mathcal{E}(G)$ llamaremos $f^o = f \circ \varphi$ . Análogamente, si $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$ será $\alpha^o \in \mathcal{E}'(R^n)$ tal que $\langle \alpha^o , f^o \rangle = \langle \alpha , f \rangle$ .

Supongamos que para esta carta sea $\alpha$ elíptica y que

$$\alpha = a\, \mathcal{E}_e + \sum_i a_i D_i\, \mathcal{E}_e + \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j\, \mathcal{E}_e$$

Entonces será

(1) $$\langle \alpha , f \rangle = \langle \alpha^o , f^o \rangle = a f^o(0) + \sum_i a_i D_i f^o(0) + \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j f^o(0)$$

Sea ahora $U_1$ otro entorno de 0 en $R^n$ y sea $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ un homeomorfismo dos veces diferenciable de $U_o$ sobre $U_1$, tal que manda 0 en 0. Si ahora ponemos $f^o = f^{oo} \circ \psi$ se verificará

(2)
$$D_i f^o = \sum_k ((D_k f^{oo}) \circ \psi)\, D_i \psi_k$$
$$D_i D_j f^o = \sum_{h,k} ((D_h D_k f^{oo}) \circ \psi)\, D_i \psi_h\, D_j \psi_k + \sum_k ((D_k f^{oo}) \circ \psi) D_i D_j \psi_k$$

Entonces, sustituyendo en (1) será:

$$\langle \alpha , f \rangle = a' f^{oo}(0) + \sum_i a'_i D_i f^{oo}(0) + \sum_{ij} a'_{ij} D_i D_j f^{oo}(0)$$

con

$$a'_{ij} = \sum_{h,k} a_{hk} \lambda_{ih} \lambda_{jk}$$

donde el determinante $J = ((\lambda_{ij}))$ es el Jacobiano de $\psi$ en el origen, es decir que $\lambda_{ij} = D_i \psi_j(0)$ . Puesto que $\psi$ es un homeomorfismo será $J \neq 0$ . Pero además es:

(3) $$\sum_{ij} a'_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_{hk} a_{hk} \eta_h \eta_k$$

con $\eta_h = \sum_i \lambda_{ih} \xi_i$ y por lo tanto la forma cuadrática (3) es positiva no degenerada, es decir que

$\alpha$ será elíptica también en el sistema de coordenadas locales $\varphi' = \varphi \circ \psi^{-1}$ pero como $\psi$ era arbitrario, hemos demostrado que la elipticidad de $\alpha$ es intrínseca, es decir no depende del sistema de coordenadas locales elegido. ■

Necesitaremos ahora un resultado clásico demostrado por S. Bernstein en 1904, que sólo enunciaremos, y cuya demostración generalizada puede consultarse en [11], Chap. V, § 6 .

VII. 3. 5. TEOREMA:

Sea $f \in \mathcal{E}'(G)$, $g \in \mathcal{A}(G)$ y $X_\alpha$ elíptico. Entonces, si $X_\alpha(f) = \lambda f + g$ implica que $f \in \mathcal{A}(G)$ .

VII. 3. 6. COROLARIO

Sea $f \in \mathcal{E}'(G)$, $h \in \mathcal{A}(G)$ y $X_\alpha$ elíptico. Entonces $(X_\alpha - \lambda)^n f = h$ implica que $f \in \mathcal{A}(G)$ .

Resulta del teorema anterior por inducción. En efecto, para $n = 1$ es el teorema anterior . Supongamos que se verifica para $n-1$ . Sea $g = (X_\alpha - \lambda)f$ . Entonces $g \in \mathcal{A}(G)$ , ya que $(X_\alpha - \lambda)^{n-1} g = h$ , pero como $f$ verifica $X_\alpha f = \lambda f + g$ , también $f \in \mathcal{A}(G)$. ■

Podemos demostrar sencillamente que si $\alpha \in \mathcal{U}(G)$ es elíptica, también $\check{\alpha}$ lo es. No obstante, nos será útil más adelante el siguiente resultado, considerablemente más fuerte.

VII. 3. 7. LEMA :

Sea $\alpha = a\,\mathcal{E}_e + \sum_i a_i D_i\, \mathcal{E}_e + \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j\, \mathcal{E}_e$ entonces será $\check{\alpha} = b\, \mathcal{E}_e + \sum_i b_i D_i\, \mathcal{E}_e + \sum_{ij} a_{ij} D_i D_j\, \mathcal{E}_e$ donde los coeficientes de los términos cuadráticos coinciden.

Sea, como antes, $\varphi$ una carta arbitraria y $f^o = f \circ \varphi$ . Entonces será $f^o(x) = f^o(\theta(x))$ donde $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ es tal que:

$$\theta_i(x) = -x_i + w_i(x) \quad \text{con} \quad D_j w_i(0) = 0 \quad \text{para todo } i, j \ .$$

Por lo tanto será:

$$D_j\, \theta_i(0) = - \delta_{ij} \quad \text{(delta de Kronecker)}$$

y aplicando las fórmulas (2) de VII. 3. 4. para cambio de variables con $\varphi = \theta$ , tendremos

$$\langle \check{\alpha}, f \rangle = \langle \alpha, \check{f} \rangle = \langle \alpha^o, \check{f}^o \rangle =$$

$$= b\, f^o(0) + \sum_i b_i\, D_i\, f^o(0) + \sum_{ij} a_{ij}\, D_i\, D_j\, f^o(0)$$

es decir que $\check{\alpha}$ será de la forma enunciada. ⊠

Podemos definir el operador "becuadro" en $\mathcal{E}$ (G) conservando las propiedades demostradas en el § 1. Podemos extender este operador a $\mathcal{E}'$(G) y à $\mathcal{U}$(G) definiéndolo por dualidad $\langle \alpha^{\natural}, f \rangle = \langle \alpha, f^{\natural} \rangle$.

Las correspondientes subálgebras serán $\mathcal{E}^{\natural}$(G), $\mathcal{E}'^{\natural}$(G) y $\mathcal{U}^{\natural}$(G). También podemos restingirlo a $\mathcal{A}$(G) obteniendo el subespacio $\mathcal{A}^{\natural}$(G) de las funciones analíticas tales que $f = f^{\natural}$ .

VII. 3. 8.- DEFINICION

Llamaremos TOPOLOGIA $\sigma$ de $\mathcal{E}'^{\natural}$(G) a la topología débil de la dualidad ( $\mathcal{E}'^{\natural}$(G) ; $\mathcal{A}^{\natural}$(G)).

VII. 3. 9.- LEMA

$\mathcal{U}^{\natural}$(G) es densa en $\mathcal{E}'^{\natural}$(G) con la topología $\sigma$ .

Esto equivale a demostrar que si $f \in \mathcal{A}^{\natural}$(G), entonces $f \equiv 0$ es equivalente a $\langle f, \alpha \rangle = 0$ para toda $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}$(G). En efecto, puesto que f es analítica y G es conexo, $\langle f, \alpha \rangle = 0$ para toda $\alpha \in \mathcal{U}$ (G) implica que $f \equiv 0$ por el principio de prolongación analítica, ya que (elegido un mapa) todas las derivadas de f en el origen son nulas, luego f es nula en un entorno del origen, ; pero además es $f = f^{\natural}$ , luego $\langle f, \alpha \rangle = \langle f, \alpha^{\natural} \rangle$ y basta con que $\langle f, \alpha \rangle = 0$ para toda $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}$(G). ⊠

Deseamos probar que el operador "becuadro" conserva la elipticidad al actuar en $\mathcal{U}$(G), para lo que necesitamos el siguiente resultado previo.

VII. 3. 10.- LEMA

Sea $U$ un entorno de $e$ en $G$. Existe un entorno $W$ contenido en $U$ y tal que $\sigma . W . \sigma^{-1} \subset U$ para todo $\sigma \in K$.

Sea $V$ un entorno simétrico de $e$ tal que $V^3 \subset U$. Para cada $\sigma \in K$ fijo existe un entorno $W_\sigma$ de $e$, contenido en $V$ y tal que $\sigma . W_\sigma . \sigma^{-1} \subset V$. Ahora bien, para todo $\tau \in V . \sigma \cap K$ se verifica

$$\tau . W_\sigma . \tau^{-1} \subset V . \sigma . W_\sigma . (V . \sigma)^{-1} = V . \sigma . W_\sigma . \sigma^{-1} . V \subset V^3 \subset U$$

Como $K$ es compacto lo podemos cubrir con un número finito $n$ de entornos de la forma $V . \sigma_i$ . Sea $W = \bigcap_{i=i}^{n} W_{\sigma_i}$ . Es fácil verificar que $W$ cumple la condición del lema. ∎

VII. 3. 11.- PROPOSICION

El operador "becuadro" conserva la elipticidad al actuar en $\mathcal{U}(G)$.

Sea $\alpha \in \mathcal{U}(G)$ y sean $U$, $U_0$ y $\varphi$ como en VII. 3. 4. Sea $W$ el entorno de $e$ que verifica el lema anterior y sea $W_0 = \varphi^{-1}(W)$. Entonces está bien definida la aplicación

$$u(\sigma , x) = \varphi^{-1}(\sigma , \varphi(x) . \sigma^{-1})$$

de $K \times W_0$ en $U_0$ , y además es indefinidamente diferenciable en ambas variables. Finalmente, sin notamos $g(\sigma , x) = f^0(u(\sigma , x))$ tendremos

$$(f^\natural)^0(x) = \int_K g(\sigma , x)\, d\sigma$$

y por la fórmula de derivación de Leibniz resulta

(') $$D^\lambda (f^\natural)^0(x) = \int_K D^\lambda g(\sigma , x)\, d\sigma$$

donde el operador de derivación se entiende respecto de las componentes de $x$.

Si consideramos a $g(\sigma, x)$ como función de $x$ solamente, aplicando la primera de las fórmulas (2) de VII. 3. 4., convenientemente iterada, obtenemos que

$$('') \qquad D^{\lambda} g(\sigma, x) = \sum_{\mu}{}' (D^{\mu} f^{o}(u(\sigma, x))\,.\, \prod_{\nu, k} C_{\mu\nu k} D^{\nu} u_k(\sigma, x))$$

Ahora bien, observemos que $u(\sigma, 0) = 0$ cualquiera sea $\sigma \in K$. Entonces de (') y ('') resulta que

$$(''') \qquad \langle f, \alpha^{\natural} \rangle = \langle f^{\natural}, \alpha \rangle = \sum_{\lambda} c_{\lambda} D^{\lambda} (f^{\natural})^{o}(0) = \sum b_{\mu} D^{\mu} f^{o}(0)$$

donde los coeficientes son

$$b_{\mu} = c_{\mu} \int_K \prod_{\nu, k} D^{\nu} u_k(\sigma, 0)\, d\sigma \qquad (c_{\mu} \text{ constante})$$

Utilicemos ahora la hipótesis básica, es decir la elipticidad de $\alpha$. Sea $\alpha$ elíptica de la forma dada en VII. 3. 4.. Entonces, de acuerdo con la segunda de las fórmulas (2) de VII. 3. tendremos que en ('') los términos con derivadas de segundo orden serán de la forma

$$\sum_{ij} a_{ij} \sum_{hk} \left[ D_h D_k f^{o}(u(\sigma, x))\, D_i u_h(\sigma, x)\, D_j u_k(\sigma, x) \right]$$

Si ponemos ahora $v_{hi}(\sigma) = D_i u_h(\sigma, 0)$ y además hacemos

$$b_{ij} = \sum_{hk} a_{hk} \int_K v_{hi}(\sigma)\, v_{kj}(\sigma)\, d\sigma$$

los términos cuadráticos de (''') tendrán la forma

$$\sum_{ij} b_{ij} D_i D_j f^{o}(0)$$

Sea $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ un vector no nulo cualquiera. Sabemos que la forma cuadrática $\sum a_{ij} \xi_i \xi_j$ es positiva no degenerada, y por el teorema clásico de descomposición existen $n$ formas lineales $F_i$ independientes y tales que

$$\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j = \sum_i (F_i(\xi))^2$$

Definimos la matriz $V(\sigma) = ((v_{hi}(\sigma)))$. De la teoría elemental de grupos de Lie (ver "Theory of Lie Groups", Chevalley) resulta

$$v_{hi}(e) = D_i u_h(e, 0) = \delta_{hi}$$

es decir que $V(e) = I_n$ (matriz identidad).

Finalmente tendremos:

$$\sum_{ij} b_{ij}\ \xi_i\ \xi_h = \int_K \left[\sum a_{hk}\, v_{hi}(\sigma)\ \xi_i v_{kj}(\sigma)\ \xi_j\right] d\sigma =$$

$$= \int_K \sum (F_i (V(\sigma)\ .\ \xi))^2\ d\sigma > 0$$

puesto que el integrando es una función continua y estrictamente positiva para $\sigma = e$. Entonces $\alpha^{\natural}$ es elíptica.

⊠

VII. 3. 12.- LEMA

Existe $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$ tal que $\check{\alpha} = \alpha$ y que para toda $f \in \mathcal{E}(G)$, $(X_\alpha - \lambda)^n f = 0$ implique $f \in \mathcal{A}(G)$.

Sea $\gamma \in \mathcal{U}(G)$ y elíptica. Llamemos $\beta = \gamma^{\natural}$. Por VII. 3. 11. $\beta$ es elíptica, y por VII. 3. 7. también $\check{\beta}$ lo es. Además se verifica que $(\check{\beta})^{\natural} = (\beta^{\natural})^{\vee} = \check{\beta}$. Si ponemos $\alpha = \beta + \check{\beta}$ observamos que

a) $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$ ; b) $\alpha = \check{\alpha}$ ; c) $\alpha$ es elíptica.

De esta última observación y del Corolario VII. 3. 6. resulta la última parte de la tesis.

⊠

Una vez terminados estos preliminares pasemos al problema en sí. Sea $s \longrightarrow T_s$ una representación topológicamente irreducible, practicable y compatible de $G$ en $H$ completo, perteneciente a la clase $D \in \Delta(G)$. Definiremos el subespacio de Gårding $H_\infty$ como el subespacio generado por el conjunto

$$\{a \in H \mid a = T_f x\ ;\ x \in H\ ;\ f \in \mathcal{D}(G)\}$$

Recordemos (II. 2. 3.) que $H_\infty$ es denso en $H$ y que si $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$ entonces $T_\alpha$ está definida en $H_\infty$ y además $H_\infty$ es estable para los $T_\alpha$.

Sea $d$ una clase de representaciones topológicamente irreducibles de $K$. Para que podamos definir la función esférica de tipo $(D, d)$ exigiremos como en el parágrafo anterior, que $H(d) = T_d(H) = T_{u_d}(H)$ sea de dimensión finita. Bajo esta hipótesis resulta el lema siguiente.

VII. 3. 13.- LEMA

La función $T : s \longrightarrow \langle T_s a, b \rangle$ con $a \in H(d)$ y $b \in H$ es analítica.

Puesto que $H_\infty$ es denso en H, $T_d(H_\infty)$ será denso en H(d), luego igual a H(d) ya que éste es de dimensión finita. Por otra parte, $H_\infty$ es estable para los operadores $T_\alpha$ con $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$, así que tendremos

$$H(d) = T_d(H) = T_d(H_\infty) = T_{u_d}(H_\infty) \subset H_\infty$$

Es decir que $T_\alpha$ a está definido para toda $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$ y toda $a \in H(d)$. Si designamos, como en el parágrafo anterior, con $T_\alpha^d$ a la restricción de $T_\alpha$ a H(d), será $T_\alpha^d$ un endomorfismo de H(d).

Sea $\alpha \in \mathcal{U}^\natural(G)$ que satisface las condiciones del lema VII. 3. 12.. Puesto que H(d) es de dimensión finita n, existe una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y una n-upla $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ y un multi-índice $m = \{m_1, \ldots, m_n\}$ tales que

(1) $$(T_\alpha - \lambda_i)^{m_i} e_i = 0$$

Sea $b \in H$, fijo. Definimos la función $\theta(s) : G \longrightarrow R^n$ mediante

(2) $$\theta_i(s) = \langle T_s e_i, b \rangle$$

Veamos que la función $\check{\theta}(s)$ es autofunción del operador $(X_\alpha - \lambda)^m$. En efecto, para cada i de 1 a n se verifica

$$(X_\alpha - \lambda)^m \theta_i(s) = \left[ (\alpha - \lambda_i \, \varepsilon_i)^{*m_i} * \check{\theta}_i \right](s) = (\beta * \check{\theta}_i)(s) =$$

$$= \beta * \langle T_{s^{-1}} e_i, b \rangle = \int_G \langle T_{s^{-1}t} e_i, b \rangle \, d\beta(t) =$$

$$= \int_G \langle T_{s^{-1}} T_t \, e_i, b \rangle \, d\beta(t) = \langle T_{s^{-1}} T_\beta \, e_i, b \rangle$$

Pero por (1) es $T_\beta \, e_i = 0$ para todo i de 1 a n, así que vale

$$(X_\alpha - \lambda)^m \check{\theta}(s) = 0$$

y por VII. 3. 6. es $\check{\theta}(s)$ analítica, y por ende también lo será $\theta(s)$ y cada una de sus componentes $\theta_i(s)$. Pero de la definición (2) de las $\theta_i(s)$ y del hecho de que los $e_i$ son base de $H(d)$, resulta que la función $F(s)$ es combinación lineal de las $\theta_i(s)$, luego analítica. ⊠

VII. 3. 14.- TEOREMA

Toda función esférica sobre $G$ es analítica.

Para cierta base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $H(d)$, el operador $(T_d T_s)^d$ es una matriz de $n \times n$, cuyos elementos están dados por $c_{ij} = \langle T_s \; a_i , a_j \rangle$ . La función esférica $\phi_{D,d}(s) = \phi(s)$ será la traza de esa matriz

$$\phi(s) = \mathrm{Tr}\,.\,(T_d \, T_s)^d = \sum_i c_{ii}(s) = \sum_i \langle T_s \; a_i \, , \, a_i \rangle$$

pero por el lema VII. 3. 13. cada uno de estos sumandos es una función analítica de $s$. ⊠

Daremos a continuación el teorema de caracterización de las funciones esféricas en grupos de Lie, análogo al teorema VII. 2. 8..

VII. 3. 15.- TEOREMA (Godement)

Para que $\phi(s)$ sea una función esférica de altura $p$ es necesario y suficiente que:

a) $\phi(s) \in \mathcal{A}(G)$.

b) Exista una representación irreducible $\alpha \longrightarrow U_\alpha$ de dimensión $p$ del álgebra $\mathcal{U}^\natural(G)$ tal que para todo $\alpha \in \mathcal{U}^\natural(G)$ $\langle \phi , \alpha \rangle = k\,.\,\mathrm{Tr}\,.\,(U_\alpha)$ con $k$ no nulo.

Necesidad: La necesidad de a) surge de VII. 2. 3. y VII. 3. 14.. Veamos la necesidad de b). Supongamos que $\phi$ sea de tipo $(D, d)$. Entonces será $H(d)$ de dimensión finita $n$, y como vimos en VII. 3. 13. si $\alpha \in \mathcal{E}'(G)$ estará bien definido el operador $T_\alpha^d$ en $H(d)$. Designaremos con

$$A = \mathrm{End}\,(H(d)) = M_n(C)$$

$$B' = \left\{ T_f^d \;\middle|\; f \in \mathcal{K}^{\natural}(d) \right\}$$

$$B'_o = \left\{ T_\alpha^d \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{E}'^{\natural}(G) \right\}$$

$$B'_1 = \left\{ T_\alpha^d \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G) \right\}$$

Se verifican las siguientes inclusiones

(') $$A \supset B'_o \quad ; \quad B'_o \supset B' \quad ; \quad B'_o \supset B'_1$$

Pero si $\alpha \in \mathcal{E}'^{\natural}(G)$, es $\alpha * \varepsilon_\sigma = \varepsilon_\sigma * \alpha$ para toda $\sigma \in K$, (la demostración es totalmente análoga a la de VII. 1. 10.), y por lo tanto todo elemento de $B'_o$ conmuta con los $T_\sigma$, es decir (VII. 1. 19.) que $B' = B'_o$.

Veamos que la aplicación $\alpha \longrightarrow T_\alpha^d$ de $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ en $B'_o$ es continua en la topología $\sigma$ y la topología puntual débil de operadores (que aquí es simplemente la topología usual de matrices) respectivamente. Es decir que, cualquiera sea $a, b \in H(d)$, $\alpha \longrightarrow \langle T_\alpha^d\, a, b \rangle$ de $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ en $C$ es continua. Si llamamos $\theta(s) = \langle T_s\, a\,, b \rangle$ tendremos, por el lema VII. 3. 13. que $\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$ donde cada $\theta_i$ es autofunción de un operador $X_\beta$ con $\beta$ elíptico y $\beta = \beta^{\natural}$. Tendremos entonces

$$X_\beta (\theta_i^{\natural}) = \beta * \theta_i^{\natural} = (\beta * \theta_i)^{\natural} = \lambda\, \theta_i^{\natural}$$

Es decir que las $\theta_i^{\natural}$ también son autofunciones de $X_\beta$ y por ende $\theta^{\natural}$ es analítica. Entonces

$$\alpha \longrightarrow \langle T_\alpha^d\, a, b \rangle = \langle \theta, \alpha \rangle = \langle \theta, \alpha^{\natural} \rangle = \langle \theta^{\natural}, \alpha \rangle$$

es continua respecto de la topología $\sigma$ de $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ como queríamos probar. Pero este resultado junto con el lema VII. 3. 9. nos dicen que $B'_1$ es denso en $B'_o = B'$ y por ser de dimensión finita será

$$B'_1 = B'_o = B'$$

Por fin, del lema VII. 2. 5. resulta la necesidad de b).

<u>Suficiencia:</u>

A) Demostremos primero un resultado análogo al VII. 2. 7. $U_\alpha = 0$ es equivalente a

$\phi * \check{\alpha} = 0$ con $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$. Sea $U_{\alpha} = 0$, entonces

$$\langle \phi * \check{\alpha} , \beta \rangle = \langle \phi , \beta * \alpha \rangle = k \operatorname{Tr.} (U_{\beta} U_{\alpha}) = 0$$

cualquiera sea $\beta \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$. Pero $\check{\alpha}$ es un operador diferencial con coefeicientes analíticos, luego $\phi * \check{\alpha}$ es analítica y además

$$(\phi * \check{\alpha})^{\natural} = \phi * \check{\alpha}^{\natural} = \phi * \check{\alpha}$$

luego $\phi * \check{\alpha} \in \mathcal{A}^{\natural}(G)$ y por VII. 3. 9. es $\phi * \check{\alpha} = 0$.

Recíprocamente, sea $\phi * \check{\alpha} = 0$, entonces

$$\operatorname{Tr.} (U_{\beta} U_{\alpha}) = \operatorname{Tr.} (U_{\beta * \alpha}) = k^{-1} \langle \phi , \beta * \alpha \rangle = k^{-1} \langle \phi * \check{\alpha} , \beta \rangle = 0$$

cualquiera sea $\beta \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$, pero por el teorema de Burnside es

$$\left\{ U_{\beta} \mid \beta \in \mathcal{U}^{\natural}(G) \right\} \cong M_p(C)$$

luego será $U_{\alpha} = 0$.

B) Definimos $V = \left\{ \alpha * \phi \mid \alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G) \right\}$. De A) y del hecho de que $\mathcal{U}^{\natural}(G)$ es invariante por la aplicación $\alpha \longrightarrow \check{\alpha}$ resulta inmediatamente que $\dim V = p^2$, por el teorema de Burnside, ya que la aplicación $\alpha \longrightarrow \alpha * \phi$ es lineal y tiene el mismo núcleo que el de $\alpha \longrightarrow U_{\alpha}$, que, como vimos recién, tiene codimensión $p^2$.

C) Si $\beta \in \mathcal{E}'(G)$, entonces $\phi * \beta \in \mathcal{A}(G)$ y $\beta * \phi \in \mathcal{A}(G)$.

En efecto, si elegimos $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$ tal que satisfaga VII. 3. 12., razonando como en VII. 3. 13., existirá una base $\{a_1, \dots, a_{p^2}\}$ de V, tal que $(X_{\alpha} - \lambda_i)^{m_i} a_i = 0$ para toda i de 1 a $p^2$. Pero $\phi \in V$, luego será $\phi = \sum_{i=1}^{p^2} \phi_i$ tales que

$$(X_{\alpha} - \lambda_i)^{m_i} \phi_i = (\alpha - \lambda_i \, \mathcal{E}_e)^{* m_i} * \phi_i = 0 \qquad i = 1, \dots, p^2$$

Recordemos que la convolución de k distribuciones es asociativa siempre que esté definida, por ejemplo si los soportes de $k - 1$ son compactos. Este es nuestro caso, así que

$$(X_{\alpha} - \lambda_i)^{m_i} (\phi_i * \beta) = (\alpha - \lambda_i \, \mathcal{E}_e)^{* m_i} * (\phi_i * \beta) =$$

$$= \left[ (\alpha - \lambda_i \, \mathcal{E}_e)^{* m_i} * \phi_i \right] * \beta = 0$$

Luego, por VII. 3. 12. todas las $\phi_i * \beta$ serán analíticas, y por lo tanto también lo será $\phi * \beta = \sum_{i=1}^{p^2} \phi_i * \beta$ . Análogamente para $\beta * \phi$.

D) Designaremos con

$$V^o = \{\alpha * \phi \quad \alpha \in \mathcal{E}'^{\natural}(G)\} \; ; \quad V' = \{ f * \phi \cdot f \in \mathcal{K}^{\natural}(G)\}$$

Consideremos la aplicación $\alpha \longrightarrow \alpha * \phi$ de $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ (con la topología $\sigma$ ) en $V^o$ (con la topología de la convergencia puntual). Demostraremos que dicha aplicación es contínua. En efecto, sea $s \in G$, fijo :

$$(\alpha * \phi)(s) = \langle \alpha * \phi, \mathcal{E}_s \rangle = \langle \alpha, \mathcal{E}_s * \check{\phi} \rangle =$$

$$= \langle \alpha^{\natural}, \mathcal{E}_s * \check{\phi} \rangle = \langle \alpha, (\mathcal{E}_s * \check{\phi})^{\natural} \rangle = \langle \alpha, \mathcal{E}_s^{\natural} * \check{\phi} \rangle =$$

$$= \langle \alpha, (\phi * \mathcal{E}_s^{\natural})^{\vee} \rangle$$

Pero por C) es $(\phi * \mathcal{E}_s^{\natural})^{\vee}$ analítica, y obviamente pertenece a $\mathcal{A}^{\natural}(G)$. Luego $\alpha \longrightarrow \alpha * \phi$ es continua.

E) De VII. 3. 9. y D) resulta que $V$ es denso en $V^o$. Pero $V$ es de dimensión finita, luego cerrado, es decir que $V = V^o$. Por otra parte, $\mathcal{K}^{\natural}(G)$ es denso en $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ con la topología $\sigma$ . En efecto, si $f \in \mathcal{A}^{\natural}(G)$ y $\langle g , f \rangle = 0$ para toda $f \in \mathcal{K}^{\natural}(G)$, entonces cualquiera sea $h \in \mathcal{K}(G)$

$$\langle h , f \rangle = \langle h, f^{\natural} \rangle = \langle h^{\natural} , f \rangle = 0$$

Tomando el soporte de $h$ bastante pequeño, y una carta, nos reducimos al caso $G = \mathbf{R}^n$, y entonces $\int f(t)\, h(t)\, dt = 0$ para toda $h \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, luego será $f = 0$. Luego $\mathcal{K}^{\natural}(G)$ es denso en $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$ y razonando como antes será $V'$ denso en $V^o$. Finalmente

$$V = V' = V^o$$

F) $\phi$ conmuta con todos los elementos de $\mathcal{E}'^{\natural}(G)$. Sea $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$, fija. Entonces, cualquiera sea $\beta \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$ será

$$\langle \alpha * \phi, \beta \rangle = \langle \phi, \check{\alpha} * \beta \rangle = k\, \mathrm{Tr.}(U_{\check{\alpha}}\, U_\beta) =$$

$$= k\,\mathrm{Tr}\,.\,(U_\beta\, U_{\check{\alpha}}) = \langle \phi\,,\, \beta * \check{\alpha} \rangle = \langle \phi * \alpha\,,\, \beta \rangle$$

Es decir que para toda $\alpha \in \mathcal{U}^\natural(G)$ es $\phi * \alpha = \alpha * \phi$ . Y por VII. 1. 9. y D) extendemos esta igualdad a $\mathcal{E}'^\natural(G)$.

G) Existe $d \in \Delta(K)$ tal que $\bar{u}_d * \phi = \phi$ . En efecto, vale

$$\phi(e) = \langle \phi\,,\, \varepsilon_e \rangle = k\,\mathrm{Tr}.\,(U_e) = k\,.\,p \neq 0$$

Luego $\phi$ no es idénticamente nula en K, y por el teorema de Peter-Weyl existe $d \in \Delta(K)$ tal que $\bar{u}_d * \phi \neq 0$ . Por VII. 1. 11. es $\bar{u}_d = \bar{u}_d^{\,\natural}$ , luego $\bar{u}_d \in \mathcal{E}'^\natural(G)$. Por lo visto en E) existe $\alpha \in \mathcal{U}^\natural(G)$ tal que $\bar{u}_d * \phi = \alpha * \phi$ .

Sea $\beta \in \mathcal{U}^\natural(G)$ arbitraria, entonces, por VII. 1. 10. será

$$\beta * \alpha * \phi = \beta * \bar{u}_d * \phi = \bar{u}_d * \beta * \phi = \alpha * \beta * \phi$$

Y por A) será

$$U_{\check{\alpha}}\, U_{\check{\beta}} = U_{\check{\alpha} * \check{\beta}} = U_{\check{\beta} * \check{\alpha}} = U_{\check{\beta}}\, U_{\check{\alpha}}$$

Pero las $U_{\check{\beta}}$ son todas las posibles matrices de $p \times p$, luego $U_{\check{\alpha}} = m\, I_p$ o, lo que es lo mismo, $\bar{u}_d * \phi = m\, \phi$ , y por la idempotencia de $\bar{u}_d$ será

$$m\, \phi = \bar{u}_d * \phi = \bar{u}_d * \bar{u}_d * \phi = m^2\, \phi$$

luego $m = 1$ y $\bar{u}_d * \phi = \phi$ .

H) Para todo $f \in \mathcal{K}^\natural(G)$ se verifica

$$\check{f} * \phi = \check{f} * \bar{u}_d * \phi = (\bar{u}_d * f)^\vee * \phi = \check{g} * \phi \quad \text{con} \quad g \in \mathcal{K}^\natural(d)$$

Entonces V será la imágen de $\mathcal{K}^\natural(d)$ por la aplicación $f \longrightarrow \check{f} * \phi$ .

Para cada $f \in \mathcal{K}^\natural(d)$ definimos $W_f = U_\alpha$ con $\alpha \in \mathcal{U}^\natural(G)$ tal que $\check{f} * \phi = \check{\alpha} * \phi$ . Por E) esta definición es coherente. Además la aplicación $f \longrightarrow W_f$ es suryectiva sobre $M_p(C)$. Ahora bien, sean $\alpha$ y $f$ como recién y sean $g \in \mathcal{K}^\natural(d)$ y $\beta \in \mathcal{U}^\natural(G)$ tales que $\check{g} * \phi = \check{\beta} * \phi$ entonces

$$\check{f} * \check{g} * \phi = \check{f} * \phi * \check{g} = \check{\alpha} * \phi * \check{g} = \check{\alpha} * \check{g} * \phi = \check{\alpha} * \check{\beta} * \phi$$

luego

$$W_{f * g} = U_{\alpha * \beta} = U_{\alpha} U_{\beta} = W_f W_g$$

luego la correspondencia $f \longrightarrow W_f$ es una representación irreducible de dimensión $p$ de $\mathcal{K}^q(d)$. Además se verifica

$$\langle \beta , f \rangle = (\check{f} * \beta)(e) = (\check{\alpha} * \beta)(e) = \langle \beta , \alpha \rangle =$$

$$= k \operatorname{Tr.} (U_{\alpha}) = k \operatorname{Tr.} (W_f)$$

Este último resultado, juntamente con G) y a) completan las hipótesis del primer teorema de Godement VII. 2. 8..

$\boxtimes$

Deseamos ahora caracterizar las funciones esféricas de altura 1 en grupos de Lie. Para eso necesitamos el siguiente resultado previo:

VII. 3. 16 LEMA

Sea $f \in \mathcal{A}(G)$ y $t \in G$, llamemos $F_f(s) = \int_K f(\sigma s \sigma^{-1} t) d\sigma$

La aplicación $f \longrightarrow F_f$ es continua en $\mathcal{E}(G)$.

Debemos demostrar que para todo $s_o \in G$ y todo índice múltiple $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ $D_x^{\lambda} F_f(\varphi(x) . s_o)$ tiende a cero uniformemente en $U_o$ cuando $f$ tiende a cero en $\mathcal{E}(G)$. Eligiendo el entorno $U_o$ suficientemente pequeño podemos dar un cubrimiento finito $\{U_j\}_{j=1,\dots,k}$ del compacto $K$ tal que si $\sigma \in U_j$ y $x \in U_o$, podamos expresar los puntos

(') $$\sigma x \sigma^{-1} t = \varphi(w(x, \sigma)) s_j$$

con $s_j$ fijo y $w(x, \sigma)$ analítica de $U_o \times U_j$ en $U_o$.

Sea ahora $\{r_j\}_{j=1,\dots,k}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_j\}$. Si ponemos $f^j(y) = f(\varphi(y) s_j)$ podemos escribir

$$F_f(\varphi(x) s_o) = \sum_{j=1}^{k} \int_K r_j(\sigma) f^j(w(x, \sigma)) d\sigma$$

Ahora resulta inmediatamente que $D_x^{\lambda} F_f(\varphi(x) s_o)$ es una combinación lineal de términos de la forma

$$\int_K r_j(\sigma)\, D^{\mu} f^j(w(x,\sigma)) \left[ \prod_{\nu, k} D^{\nu} w_k(x,\sigma) \right] d\sigma$$

Ahora bien, si $f$ tiende a 0 en la topología de $\mathcal{E}$ (G), por definición cada una de las funciones $y \longrightarrow D^u f^j(y)$ tiende uniformemente a 0 en $U_0$ y por lo tanto también $y \longrightarrow D^u f^j(w(x,\sigma))$ tiende uniformemente a cero en $U_0 \times U_j$, de donde resulta lo que queríamos demostrar. ⊠

VII. 3. 17. TEOREMA

Sea $Y \in \mathcal{E}'^{\natural}(G)$. Son equivalentes las afirmaciones:

a) $Y$ es proporcional a una función esférica de altura 1.

b) $Y$ es autovector de todo $X_\alpha$ con $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}(G)$.

a) $\Longrightarrow$ b) : Si en B) del teorema VII. 3. 15. hacemos $p = 1$ será $\dim V = 1$ y por lo tanto, cualquiera sea $\alpha \in \mathcal{U}^{\natural}$ (G) valdrá

$$X_\alpha(Y) = \alpha * Y = \lambda_\alpha Y$$

b) $\Longrightarrow$ a) : Por el teorema de Bernstein-Schwartz (VII. 3. 5.) $Y \in \mathcal{A}^{\natural}(G)$. Podemos definir entonces $F_Y(s)$ como en el lema anterior. Por VII. 3. 16. la aplicación $Y \longrightarrow F_Y$ es continua en $\mathcal{E}$ (G) y podemos usar la fórmula de Leibniz de derivación bajo la integral, es decir si $\alpha \in \mathcal{U}$ (G)

$$(\alpha * F_Y)(s) = \int_K (\alpha * Y)(\sigma s \sigma^{-1} t)\, d\sigma =$$

$$= \lambda_\alpha \int_K Y(\sigma s \sigma^{-1} t)\, d\sigma = \lambda_\alpha F_Y(s)$$

Además tendremos que

$$F_Y^{\natural}(s) = \int_K F_Y(\tau s \tau^{-1})\, d\tau = \iint_{K\times K} Y(\sigma \tau s \tau^{-1} \sigma^{-1} t) d\tau\, d\sigma =$$

$$= \int_K d\tau \int_K Y((\sigma\tau) s (\sigma\tau)^{-1} t)\, d\sigma = F_Y(s)$$

Por fin será, para toda $\alpha \in \mathcal{U}$ (G)

$$\langle F_Y, \alpha \rangle = \langle F_Y^{\natural}, \alpha \rangle = \langle F_Y, \alpha^{\natural} \rangle = (\check{\alpha}^{\natural} * F_Y)(e) =$$

$$= \lambda_{\check{\alpha}^{\natural}} \cdot F_Y(e)$$

y análogamente

$$\langle Y , \alpha \rangle = \langle Y^{\natural}, \alpha \rangle = \langle Y , \alpha^{\natural} \rangle = ( \check{\alpha}^{\natural} * Y)(e) =$$

$$= \lambda_{\check{\alpha}^{\natural}} \; Y(e)$$

Es decir que $F_Y$ y $Y$ son dos funciones analíticas que tienen proporcionales todas sus derivadas en el origen, luego son proporcionales. Es inmediato que $F_Y(e) = Y(t)$ y por lo tanto

$$F_Y(s) = \frac{Y(s) \cdot Y(t)}{Y(e)} = \int_K Y(\sigma \; s \; \sigma^{-1} t) \; d\sigma$$

y si ponemos $\phi(s) = Y(s)/Y(e)$ será

$$\phi(s) \; \phi(t) = \int_K \phi(\sigma \; s \; \sigma^{-1} t) \; d\sigma$$

y por VII. 2. 11 $\phi$ es función esférica de altura 1.

⊠

VII. 3. 18.- COROLARIO

Sea $G$ un grupo de Lie compacto y conexo, y sea $g(s)$ una función central de $G$. Entonces, para que $g$ sea carácter es necesario y suficiente que sea autovector de todo operador $X_\alpha$ con $\alpha$ en el centro de $\mathcal{U}(G)$.

Si ponemos $K = G$ y veamos que es un caso particular del teorema anterior. En efecto, decir que $g$ es central equivale por IV. 3. 4. a que $g(s \cdot t) = g(t \cdot s)$ cualesquiera sean $s, t \in G$ y por VII. 1. 9. esto equivale a $g = g^{\natural}$. Por otra parte, y con la misma demostración que en VII. 1. 10. resulta que el centro de $\mathcal{U}(G)$ es $\mathcal{U}^{\natural}(G)$

⊠

*************
*******
***
*

# INDICE ALFABETICO

NOTA: En este índice figuran solamente las notaciones, definiciones y resultados más importantes que surgen en el desarrollo del curso no así aquellos que se suponen conocidos previamente, para los cuales el lector deberá consultar las secciones "Prerrequisitos" y "Notaciones". -

# BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N. "Elements de Mathematiques", Hermann, Paris (1939 en adelante).

[2] BRUHAT, F. "Lectures on Lie Groups and representations of locally compact groups", Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1958).

[3] "Algebres de Lie et Groupes de Lie" (resumen de lecciones). Instituto de Física e Matemática. Universidade do Recife (1961).

[4] DIEUDONNE, J. "Socle des anneaux simples infinis", Bulletin Soc. Math. de France, 70 (1942).

[5] GODEMENT, R. "A theory of spherical functions - I", Trans. Am. Math. Soc., 73, p. 496-556 (1952).

[6] LOOMIS, L. "Abstract Harmonic Analysis", Van Nostrand, New York (1953).

[7] MACKEY, G. "On induced representations of Groups" Am. J. Math. 73, p. 576-592 (1951).

[8] NACHBIN, L. "Integral de Haar", Instituto de Fisica e Matemática, Universidade do Recife (1960).

[9] NAIMARK, M. "Normed Rings", P. Nordhoff N.V., Groningen (1959).

[10] PONTRJAGIN, L. "Topologische Gruppen", B.G. Teubner, Leipzig (1958).

[11] SCHWARTZ, L "Theorie des Distributions", Hermann, Paris, (1950 - 1953).

[12] SPEISER, A. "Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung", J. Springer, Berlin (1927).

[13] WEIL, A. "L'integration dans les groupes topologiques", Hermann, Paris (1940)

# INDICE

***********************************
********************
**********

Este libro fué realizado en IMPRENTA "URGE"
Viamonte 2296 - Buenos Aires - Argentina