ISSN 1853-709X

Fascículo 16

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Philippe Tondeur

Grupos de Lie y grupos de transformaciones

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 16

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **16**

cursos
y seminarios
de matemática

Philippe Tondeur

GRUPOS DE LIE Y GRUPOS DE TRANSFORMACIONES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES – DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

1965

PREFACIO

En estas notas hacemos énfasis sobre la relación existente entre grupos de Lie y grupos de transformaciones diferenciables. Sobre geometría diferencial suponemos conocidas las nociones de variedad, aplicación diferenciable y campo de vectores. Agregamos un apéndice sobre las nociones de categoría y funtor.

La redacción de los dos primeros capítulos ha sido influída por un trabajo de **R. Palais** sobre G-espacios [11] ; en § 5.2 y § 5.3 mucho se debe a **S.Kobayashi** and **K.Nomizu** [10] , y para el capítulo 7 S.Helgason [5] ha sido frecuentemente usado. Por supuesto, **C. Chevalley** [2] fué constantemente consultado. La bibliografía orienta sobre las diversas fuentes.

Finalmente, quiero agradecer al Sr. **J. C. Merlo** por su constante ayuda durante la redacción de estas notas.

PHILIPPE TONDEUR

Buenos Aires, junio de 1964.

INDICE

****

El asterisco (*) indica una sección cuya lectura no es necesaria para la asimilación del material desarrollado posteriormente.

* ***************** *
****
******
*

CAPITULO I. G - OBJETOS.

Los primeros dos parágrafos de este capítulo son esenciales para todo el desarrollo posterior, mientras que § 1.3 y § 1.4 sólo serán necesarios para la lectura de § 2.2. Para las nociones de categoría y funtor, ver el apéndice.

§ 1.1. DEFINICION Y EJEMPLOS.

Sea G un grupo y X un objeto de una categoría $\mathcal{K}$. Designamos con Aut X el grupo de las equivalencias en $[X, X]$

DEFINICION (1.1.1.)

Una operación de G sobre X es un homomorfismo $\mathcal{T} : G \to \text{Aut } X$.

Con tales condiciones, X se llama un G-objeto con respecto a $\mathcal{T}$

Diremos también que G opera sobre X mediante el homomorfismo $\mathcal{T}$.

Ejemplo (1.1.2):

Un G-objeto en la categoría Ens de los conjuntos es un conjunto X provisto con un homomorfismo $\mathcal{T} : G \to \text{Bij } X$, donde Bij X designa al grupo de las biyecciones de X. Tal homomorfismo puede definirse equivalentemente mediante una aplicación -que designamos con la misma letra $\mathcal{T}$ -

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g, x) & \rightsquigarrow & \mathcal{T}_g(x) \end{array}$$

que satisfaga:

a) $\mathcal{T}_{g_1 g_2}(x) = \mathcal{T}_{g_1}(\mathcal{T}_{g_2}(x))$, $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$

b) $\mathcal{T}_e(x) = X$, e identidad de G , $x \in X$.

La relación a) del ejemplo (1.1.2.) sugiere llamar operación a izquierda a una operación el el sentido de (1.1.1.). Una operación a derecha de G sobre X será en tonces un homomorfismo $\mathcal{T} : G^{\circ} \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$, donde G° es el grupo opuesto de G, es decir, aquél que tiene los mismos elementos que G, y cuya multiplicación es $(g_1 g_2)^{\circ} = g_2 g_1$. En tal caso, X se llama un G°-objeto. En lo sucesivo utilizaremos la palabra operación como sinónimo de operación a izquierda, salvo mención explícita en contrario.

Ejemplo (1.1.3.):

Si G es un grupo y a cada $g \in G$ le asignamos la correspondiente traslación a izquierda de G, designada con L_g y definida mediante $L_g(\gamma) = g\gamma$, $\gamma \in G$, obtenemos una operación (a izquierda) $L : g \rightsquigarrow L_g$ sobre el conjunto subyacente de G. Análogamente, las traslaciones a derecha R_g, definidas mediante $R_g(\gamma) = \gamma g$, determinan una operación a derecha sobre el conjunto subyacente de G.

Ejemplo (1.1.4.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. ρ determina una operación $\mathcal{T}$ de G sobre el conjunto subyacente de G', definida mediante $\mathcal{T}_g = L_{\rho(g)}$ $g \in G$. Y análogamente, se obtiene una operación a derecha σ mediante $\sigma_g = R_{\rho(g)}$.

Ejemplo (1.1.5.):

Sea G un grupo. A cada $g \in G$ le asignamos el automorfismo interior $\mathcal{J}_g$ inducido por g, a saber $\mathcal{J}_g(\gamma) = g\gamma g^{-1}$, $\gamma \in G$. Entonces $\mathcal{J} : g \rightsquigarrow \mathcal{J}_g$ es una operación de G sobre G.

Ejemplo (1.1.6.):

Si H es un subgrupo de un grupo G, la aplicación $G \times H \longrightarrow G$ definida como restricción de la multiplicación $G \times G \longrightarrow G$, define una operación a derecha $\mathcal{T}$ de H sobre el conjunto G, a saber, $\mathcal{T}_h : g \rightsquigarrow gh$, $h \in H$, $g \in G$.

Ejemplo (1.1.7.):

Supongamos que el grupo G actúa sobre el grupo G' mediante $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ G'$. En el conjunto $G' \times G$ la multiplicación

$$(g'_1, g_1)(g'_2, g_2) = (g'_1 \mathcal{T}_{g_1}(g'_2), g_1 g_2), \quad g'_i \in G', \quad g_i \in G, \quad (i = 1, 2),$$

define una estructura de grupo; tal grupo se llama **producto semidirecto,** y se designa con $G' \times_{\mathcal{T}} G$.

Consideremos los homomorfismos:

$$j : G' \longrightarrow G' \times_{\mathcal{T}} G \quad , \quad \text{con} \quad j(g') = (g', e) \; ;$$
$$p : G' \times_{\mathcal{T}} G \longrightarrow G \quad , \quad \text{con} \quad p(g', g) = g \; ;$$
$$s : G \longrightarrow G' \times_{\mathcal{T}} G \quad , \quad \text{con} \quad s(g) = (e', g) \; ;$$

donde $g, e \in G$, $g', e' \in G'$; e, e' identidades.

Llamando $G' \times_{\mathcal{T}} G = P$, es inmediato comprobar que la sucesión

$$(*) \qquad e \longrightarrow G' \xrightarrow{j} P \xrightarrow{p} G \longrightarrow o$$

es exacta (es decir, la imágen de cada homomorfismo coincide con el núcleo del siguiente) y además se cumple $p \circ s = 1_G$.

Recíprocamente, cada sucesión exacta del tipo (*) -ahora, con P dado a priori- y un homomorfismo $s : G \longrightarrow P$ que cumple $p \circ s = 1_G$ -tal s se llama una descomposición de la sucesión (*) - define una operación $\mathcal{T} : G \longrightarrow \text{Aut } G'$ de G en G', de la manera siguiente: si $\mathcal{T} : g \rightsquigarrow \mathcal{T}_g$, $\mathcal{T}_g$ es la restricción a G' del automorfismo interior de P determinado por $s(g)$.

En definitiva, concluimos que el conjunto de los G-grupos está en correspondencia biunívoca con las sucesiones exactas (*) que poseen una descomposición.

En este curso, consideraremos solamente categorías $\mathcal{K}$ cuyos objetos poseen un conjunto subyacente y cuyos morfismos son aplicaciones de los conjuntos subyacentes. En forma precisa, esto significa que existe un functor

$$V : \mathcal{K} \longrightarrow \text{Ens}$$

que puede pensarse como aquél que para cada objeto de $\mathcal{K}$ hace "olvidar" su estructura adicional y considera un morfismo como aplicación, considerándolo sólo como su conjunto subyacente.

Para evitar constantes repeticiones, haremos uso de la siguiente convención en lo sucesivo: (1.1.8.). Para cada objeto X de una categoría $\mathcal{K}$, designaremos también con X a su conjunto subyacente VX.

Una operación del grupo G sobre el objeto X define una operación sobre su conjunto subyacente. Más generalmente:

<u>PROPOSICION</u> (1.1.9.):

Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ un funtor covariante de la categoría $\mathcal{K}$ en la categoría $\mathcal{K}'$. Una operación del grupo G en $X \in \mathcal{K}$ induce una operación bien definida en $FX \in \mathcal{K}'$.

<u>Demostración:</u> F define un homomorfismo $\mathrm{Aut}\ X \longrightarrow \mathrm{Aut}\ FX$. Mediante composición con el homomorfismo dado $G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$ obtenemos un homomorfismo $G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ FX$, que es la operación buscada. ⊠

<u>Observación</u> (1.1.10.):

Si en una categoría $\mathcal{K}$ sólo consideramos como morfismo a las equivalencias, obtenemos una nueva categoría $\mathcal{K}_{iso}$. Evidentemente, la anterior proposición conserva su validez si damos solamente un funtor $F : \mathcal{K}_{iso} \longrightarrow \mathcal{K}'_{iso}$.

Si $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ es un funtor contravariante, una operación (a izquierda) de G sobre X induce una operación a derecha de G sobre FX, y una operación a derecha de G sobre X induce una operación (a izquierda) de G sobre FX.

<u>Ejemplo</u> (1.1.11.):

Consideremos el funtor $P : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ que hace corresponder a cada conjunto X el conjunto PX de sus subconjuntos, y a cada aplicación $X \longrightarrow X'$ la aplicación inducida $PX \longrightarrow PX'$ de subconjuntos. Sea X un G-conjunto; en tal caso, por (1.1.9.), PX es un G-conjunto.

El funtor P^{-1} : Ens $\longrightarrow$ Ens , que tiene el **mismo** efecto sobre los objetos que P, pero que a cada aplicación $\varphi : X \longrightarrow X'$ le asigna $\varphi^{-1}: PX' \longrightarrow PX$ (imágenes inversas de subconjuntos), transforma cada G-conjunto X en un G^o-conjunto PX.

Ejemplo (1.1.12.):

Sea R un objeto fijo de la categoría $\mathcal{K}$. El funtor contravariante $h^R : \mathcal{K} \longrightarrow$ Ens, definido por:

$$h^R(X) = [X, R] \quad , \quad X \in \mathcal{K}$$

$$h^R(\varphi)(f) = f \circ \varphi \quad , \quad f \in [X', R] \quad , \quad \varphi : X \longrightarrow X',$$

da para cada operación (a izquierda) de G sobre X, una operación a derecha de G sobre el conjunto $[X, R]$. Si $\tau : G \longrightarrow \text{Aut } X$ es la operación dada, designamos $\tau^* : G \longrightarrow \text{Bij } [X, R]$ a la inducida.

Ejemplo (1.1.13.):

Sea Λ un anillo y ${}_\Lambda\mathcal{M}$ la categoría de los Λ-módulos a izquierda. Un G-módulo X está definido por una operación de G sobre X por aplicaciones Λ-lineales, es decir, una representación de G sobre X en el sentido usual. En virtud de (1.1.9.), tal representación induce una operación de G sobre el conjunto de submódulos de X.

Teniendo en cuenta nuestra convención (1.1.8.), tiene sentido hablar de un elemento de un objeto X, a saber, un elemento del conjunto subyacente de X.

DEFINICION (1.1.14).

Un elemento x del G-objeto X se llama invariante (o G-invariante) cuando x es fijo bajo cualquier transformación τ_g, es decir, $\tau_g(x) = x$ para todo $g \in G$. Un subconjunto $M \subset X$ se llama **invariante** si es un elemento invariante de PX con la G-operación inducida (cf. Ej.(1.1.11.), es decir, si $\tau_g(M) \subset M$ para todo $g \in G$.

Ejercicio (1.1.15):

Sean X y X' G-objetos de $\mathcal{K}$ con respecto a $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$ y $\tau' : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X'$ respectivamente.

Entonces $\sigma_g(\varphi) = \tau'_g \circ \varphi \circ \tau_{g^{-1}}$, $g \in G$, $\varphi : X \longrightarrow X'$, define una operación $G \longrightarrow [X, X']$ ((1.1.12.) es un caso particular de esta situación, si consideramos la G-operación trivial sobre X'). Mostrar que existe un funtor que induce esta operación, según la proposición (1.1.9.).

****

§ 1.2. MORFISMOS EQUIVARIANTES.

Sean G y G' grupos y $\mathcal{K}$ una categoría. Sea X un G-objeto de $\mathcal{K}$ con respecto a $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$, y X' un G'-objeto de $\mathcal{K}$ con respecto a $\tau' : G' \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X'$.

DEFINICION (1.2.1.)

Un morfismo ρ-equivariante $\varphi : X \longrightarrow X'$ con respecto al homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$ es un morfismo $\varphi : X \longrightarrow X'$ de $\mathcal{K}$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ \tau_g \downarrow & & \downarrow \tau'_{\rho(g)} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & X' \end{array}$$

conmuta para todo $g \in G$. En particular, si $G = G'$ y $\rho = 1_G$, diremos simplemente que φ es equivariante.

Ejemplo (1.2.2.):

Sea X un G-conjunto y X' un G'-conjunto con las operaciones dadas en (1.1.2.). Entonces una aplicación $\varphi : X \longrightarrow X'$ es ρ-equivariante si y sólo si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\mathcal{T}} & X \\ \rho\times\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G' \times X' & \xrightarrow{\mathcal{T}'} & X' \end{array}$$

conmuta.

Ejemplo (1.2.3.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos. Si G y G' operan sobre sí mismos por traslaciones a izquierda (ef. (1.1.3.)), entonces la aplicación $\varphi : G \to G'$ es ρ-equivariante si y sólo si

$$\varphi(g_1 g_2) = \rho(g_1)\ \varphi(g_2).$$

En particular, ρ mismo, por ser un homomorfismo, es un ejemplo de una aplicación ρ-equivariante con respecto a traslaciones a izquierda.

Si en cambio consideramos las operaciones de G y G' en sí mismos dadas por automorfismos interiores (ef. (1.1.5.)), entonces para todo $g \in G$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & G' \\ \mathcal{I}_g \downarrow & & \downarrow \mathcal{I}_{\rho(g)} \\ G & \xrightarrow{\rho} & G' \end{array}$$

conmuta, es decir, ρ es ρ-equivariante.

Ejemplo (1.2.4.):

Consideremos la operación a derecha del subgrupo H de G, como en (1.1.6.). Entonces un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G$ tal que $\rho(H) \subset H$ es ρ/H-equivariante, donde ρ/H designa la restricción de ρ a H. En efecto,

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & G \\ R_h \downarrow & & \downarrow R_{\rho(h)} \\ G & \xrightarrow{\rho} & G \end{array}$$

conmuta, por ser $\rho(gh) = \rho(g)\ \rho(h)$, $g \in G$, $h \in H$.

Ejemplo (1.2.5.):

Toda traslación a derecha de un grupo G es una aplicación equivariante del G-conjunto G definido por las traslaciones a izquierda. Esto es precisamente la ley de asociatividad de G.

Ejemplo (1.2.6.):

Si $\mathcal{T} : G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ es una operación de G sobre X, entonces para cada $g \in G$, la aplicación $\mathcal{T}_g : X \longrightarrow X$ es $\mathcal{J}_g$ - equivariante. En efecto, el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathcal{T}_g"] \arrow[d, "\mathcal{T}_\gamma"'] & X \arrow[d, "\mathcal{T}_{\mathcal{J}_g(\gamma)}"] \\ X \arrow[r, "\mathcal{T}_g"] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, por ser $\mathcal{T}_g \mathcal{T}_\gamma = \mathcal{T}_{g\gamma g^{-1}} \mathcal{T}_g$

Ejemplo (1.2.7.):

Sea X un G-conjunto. Para cada elemento fijo $x_0 \in X$, $p(g) = \mathcal{T}_g(x_0)$ define una aplicación $p : G \longrightarrow X$. Si consideramos la operación de G sobre G definida por traslaciones a izquierda, entonces p es una aplicación equivariante.

Si X, X', X'' son G, G', G'' - objetos respectivamente, $\rho : G \longrightarrow G'$ y $\rho' : G' \longrightarrow G''$ homomorfismos, y $\varphi : X \longrightarrow X'$, $\varphi' : X' \longrightarrow X''$ morfismos ρ, ρ'-equivariantes respectivamente, entonces $\varphi' \circ \varphi$ es un morfismo $\rho' \circ \rho$ -equivariante.

En efecto el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{T}_g"'] & X' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\mathcal{T}'_{\rho(g)}"] & X'' \arrow[d, "\mathcal{T}''_{\rho'(\rho(g))}"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X' \arrow[r, "\varphi'"] & X'' \end{tikzcd}$$

conmuta por conmutar cada uno de los diagramas "cuadrados" que lo constituyen.

A consecuencia de estas consideraciones, la definición siguiente tiene sentido:

<u>DEFINICION</u> (1.2.8.).

Sea G un grupo y $\mathcal{K}$ una categoría. La categoría $\mathcal{K}^G$ es aquella cuyos objetos son los G-objetos de $\mathcal{K}$ y cuyos morfismos son los morfismos equivariantes de $\mathcal{K}$.

Como complemento de la proposición (1.1.9.), tenemos:

<u>PROPOSICION</u> (1.2.9.):

Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ un funtor covariante, sean X y X' G, G'-objetos de $\mathcal{K}$, respectivamente, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo, y $\varphi : X \longrightarrow X'$ un morfismo ρ-equivariante. Consideremos la operación natural inducida en FX y FX'. Entonces $F(\varphi) : FX \longrightarrow FX'$ es ρ-equivariante con respecto a esas operaciones. Para cada grupo G fijo, queda definido en particular una extensión de la aplicación de la proposición (1.1.9.), que transforma G-objetos de $\mathcal{K}$ en G-objetos de $\mathcal{K}'$, a un funtor $F^G : \mathcal{K}^G \longrightarrow \mathcal{K}'^G$.

<u>Demostración:</u> El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{T}_g"'] & X' \arrow[d, "\mathcal{T}'_{\rho(g)}"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & X' \end{tikzcd}$$

se transforma por F en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "F(\varphi)"] \arrow[d, "F(\mathcal{T}_g)"'] & FX' \arrow[d, "F(\mathcal{T}'_{\rho(g)})"] \\ F(\mathcal{T}_g) \arrow[r, "F(\varphi)"] & FX' \end{tikzcd}$$

lo cual prueba la ρ-equivariancia de $F(\varphi)$ con respecto a las operaciones inducidas sobre FX y FX'. El resto es obvio. ⊠

PROPOSICION (1.2.10):

Si un morfismo equivariante $\varphi : X \longrightarrow X'$ en $\mathcal{K}^G$ es una equivalencia en $\mathcal{K}$, entonces su inverso $\psi : X' \longrightarrow X$ es también equivariante. Es decir, $\varphi : X \to X'$ es una equivalencia en $\mathcal{K}^G$.

Demostración: Recordamos que el hecho que φ es una equivalencia en $\mathcal{K}$ significa que existe ψ tal que $\psi\varphi = 1_X$ y $\varphi\psi = 1_{X'}$.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\tau_g"'] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, phantom, "1"] & X' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tau'_g"] \arrow[dr, phantom, "2"] & X \arrow[d, "\tau_g"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend right, "1_X"'] & X' \arrow[r, "\psi"] & X
\end{tikzcd}$$

El diagrama 1 conmuta por hipótesis, y también conmuta, obviamente, el diagrama exterior. Estos hechos implican que

$$\tau_g \psi \varphi = \psi \tau'_g \varphi \quad ;$$

de lo cual, multiplicando por ψ a derecha se obtiene

$$\tau_g \psi = \psi \tau'_g \quad ,$$

relación que expresa la conmutatividad de 2.

∎

Existe un funtor canónico $V : \mathcal{K}^G \longrightarrow \mathcal{K}$ consistente en "olvidar" la estructura impuesta por la G-operación (análogo al funtor $V : \mathcal{K} \longrightarrow$ Ens considerado antes, pero ahora V sólo olvida la estructura de la G-operación, y no las posibles otras estructuras sobre objetos de $\mathcal{K}$). Por otra parte, podemos definir de manera natural un funtor ("inyección")

$$I : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}^G ,$$

considerando en cada objeto X de $\mathcal{K}$ la operación trivial $\tau : G \longrightarrow 1_X \in \operatorname{Aut} X$.

De tal manera, $\mathcal{K}$ puede considerarse como una subcategoría de $\mathcal{K}^G$.

En consecuencia tiene sentido hablar de morfismos equivariantes $\varphi : X \longrightarrow R$, donde X es un G-objeto de $\mathcal{K}$ y R un objeto arbitrario de $\mathcal{K}$. A una aplicación tal la llamaremos un morfismo invariante. Más precisamente:

DEFINICION (1.2.11.).

Sea X un G-objeto de $\mathcal{K}$ y R un objeto de $\mathcal{K}$. El morfismo $\varphi : X \longrightarrow R$ se llama **invariante** cuando para cada $g \in G$ el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\tau_g"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & R \end{tikzcd}$$

PROPOSICION (1.2.12.):

Sea X un G-conjunto, X' un G'-conjunto, y $\varphi : X \longrightarrow X'$ una aplicación ρ-equivariante con respecto al homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$. Si $x \in X$ es G-invariante, entonces $\varphi(x)$ es $\rho(G)$-invariante.

Demostración: Basta notar que $\tau'_{\rho(g)}(\varphi(x)) = \varphi(\tau_g(x)) = \varphi(x)$, en virtud de que $\tau_g(x) = x$.

$\boxtimes$

Como consecuencia, resulta que subconjuntos G-invariantes de X se transforman en subconjuntos $\rho(G)$-invariantes de X'.

Ejercicio (1.2.13):

$\mathcal{K}^G$ puede ser considerada como una categoría de funtores (interprétese G como una categoría consistente en un único objeto, y con morfismos g, para $g \in G$, definidos por la ley de composición natural). Entonces morfismos equivariantes son transformaciones naturales. El funtor F^G de (1.2.9.) es el funtor canónico inducido por F entre las correspondientes categorías de funtores.

Ejercicio (1. 2. 14.):

Si X y X' son G-objetos de $\mathcal{K}$, el conjunto de morfismos de X en X es, según (1. 1. 15.), un G-conjunto. Los elementos invariantes bajo tal operación son los morfismos equivariantes $X \longrightarrow X'$. En particular, los morfismo invariantes $X \to R$, donde R es un objeto de $\mathcal{K}$, son los elementos invariantes bajo la operación definida en (1. 1. 12.).

****

§1. 3. **ORBITAS.**

Para simplificar el tratamiento consideraremos solamente el caso de G-conjuntos, en vez del más general de G-objetos.

DEFINICION (1. 3. 1.).

Sea X un G-conjunto. La **órbita** (o **G-órbita**) $\Omega(x)$ de $x \in X$ es el conjunto $\Omega(x) = \{ \tau_g(x) \mid g \in G \}$.

LEMA (1. 3. 2.).

Las órbitas forman una partición de X.

Demostración: Es obvio que el conjunto de órbitas cubre a X. Solamente resta probar que si $x, x' \in X$ y $\Omega(x) \cap \Omega(x') \neq \emptyset$, entonces $\Omega(x) = \Omega(x')$.

En efecto, supongamos que $y \in \Omega(x) \cap \Omega(x')$; esto significa que existen $g, g' \in G$ tales que

$$\tau_g(x) = y = \tau_{g'}(x').$$

Sea $z \in \Omega(x)$; entonces para algún $g'' \in G$ será $z = \tau_{g''}(x) = \tau_{g''} \tau_{g^{-1}}(y) = \tau_{g''} \tau_{g^{-1}} \tau_{g'}(x') = \tau_{g''g^{-1}g'}(x')$, lo cual implica $z \in \Omega(x')$. Es decir $\Omega(x) \subset \Omega(x')$.

La simetría del razonamiento asegura la tesis.

⊠

Designaremos con X/G al <u>conjunto de las órbitas</u>, es decir, al conjunto cociente obtenido a partir de X identificando entre sí los puntos de cada órbita; sea además $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ la aplicación canónica.

LEMA (1.3.3.).

π_X es invariante.

Demostración: La tesis expresa que $\pi_X(\tau_g(x)) = \pi_X(x)$, y tal igualdad es cierta por constituir las órbitas una partición de X.

⊠

Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi_X"'] & \\ X/G \arrow[r, "\psi"'] & R \end{tikzcd}$$

donde R es un conjunto cualquiera y ψ una aplicación. La aplicación compuesta $\psi \circ \pi_X : X \longrightarrow R$ será también invariante. La recíproca de tal afirmación es también verdadera:

LEMA (1.3.4.).

Sea X un G-conjunto, R un conjunto arbitrario, y $\varphi : X \longrightarrow R$ una aplicación invariante. Entonces existe una única $\psi : X/G \longrightarrow R$ tal que $\varphi = \psi \circ \pi_X$.

Demostración: Que φ es invariante significa que para todo $g \in G$ es $\varphi \circ \tau_g = \varphi$, es decir $\varphi(\tau_g(x)) = \varphi(x)$, $x \in X$. Si fijamos x y variamos g, vemos que φ toma valor constante en cada órbita, por lo cual induce la aplicación ψ. Tal ψ es única, pues si existieran ψ_1, ψ_2 tales que $\psi_1 \circ \pi_X = \psi_2 \circ \pi_X$, el hecho que π_X es suryectivo implica $\psi_1 = \psi_2$.

⊠

En consecuencia, hemos probado:

PROPOSICION (1.3.5.):

Sea X un G-conjunto; $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ la aplicación natural en el conjunto de sus órbitas, y R un conjunto arbitrario. Entonces la aplicación

$$[X/G\,,\,R] \longrightarrow [X\,,\,R]_{inv}$$

que transforma cada aplicación $\psi : X/G \longrightarrow R$ en una aplicación invariante $\psi \circ \pi : X \longrightarrow R$, es biyectiva.

La propiedad enunciada en la proposición es una propiedad universal, en el sentido que caracteriza a X/G, salvo una biyección canónica.

En forma precisa:

PROPOSICION (1.3.6.):

Dados Y_i $(i = 1, 2)$ y $\pi_i : X \longrightarrow Y_i$, si las aplicaciones $[Y_i\,,\,R] \longrightarrow$ $\longrightarrow [X\,,\,R]$ definidas por composición con π_i son biyecciones, entonces existe una única biyección $\tau : Y_1 \longrightarrow Y_2$ tal que $\tau \circ \pi_1 = \pi_2$.

Demostración: Puesto que Y_1 e Y_2 cumplen ambos la propiedad universal, existen aplicaciones τ y σ tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Y_1 \arrow[rr, "\tau"'] & & Y_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ Y_2 \arrow[rr, "\sigma"'] & & Y_1 \end{tikzcd}$$

conmutan. Entonces, también es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\ Y_1 \arrow[rr, "\sigma \circ \tau"'] & & Y_1 \end{tikzcd}$$

En virtud de la unicidad, debe ser $\sigma \circ \tau = 1_{Y_1}$. Con un razonamiento análogo resulta $\tau \circ \sigma = 1_{Y_2}$, y en consecuencia τ es una biyección. ⊠

El hecho que (1.3.5.) es una propiedad universal de X/G permite definir X/G en cualquier categoría; claro está, previamente habría que demostrar la existencia de tal órbita-objeto.

PROPOSICION (1.3.7.):

Sea X un G-conjunto, X' un G'-conjunto, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo, y $\varphi : X \longrightarrow X'$ una aplicación ρ-equivariante. Entonces existe una única aplicación

$$\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G'$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X' \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{X'}} \\ X/G & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & X'/G' \end{array}$$

Demostración: Sólo hay que probar que $\pi_{X'} \circ \varphi$ es invariante, puesto que una vez establecido eso, la propiedad universal (1.3.6.) asegura la tesis.

Se tiene:

$$\begin{aligned} (\pi_{X'} \circ \varphi) \circ \tau_g &= \pi_{X'} \circ (\varphi \circ \tau_g) = \pi_{X'} \circ (\tau_{\rho(g)} \circ \varphi) = \\ &= (\pi_{X'} \circ \tau_{\rho(g)}) \circ \varphi = \pi_{X'} \circ \varphi \end{aligned} ,$$

donde la última igualdad está asegurada por el hecho de ser $\pi_{X'}$ invariante.

Entonces $\pi_{X'} \circ \varphi$ es invariante. $\tilde{\varphi}$ queda definido como la factorización de $\pi_{X'} \circ \varphi$ por X/G. ⊠

Esta proposición muestra que existe una correspondencia funtorial

$$/G : Ens^G \longrightarrow Ens$$

mediante

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "\varphi"'] & X/G \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi} = \varphi/G"] \\ X' \arrow[r, squiggly] & X'/G \end{tikzcd}$$

El funtor $/G$ se llama funtor división por G.

Ejemplo (1.3.8.):

Sea G un grupo y H un subgrupo que actúa sobre G por traslaciones a derecha (cf. (1.1.6)). En tal caso el conjunto de órbitas G/H es simplemente el conjunto cociente, cuyos elementos son las clases izquierdas módulo H.

Análogamente, sea H' un subgrupo de otro grupo G', y G'/H' el respectivo conjunto de órbitas.

Sea además $\varphi : G \longrightarrow G'$ una aplicación tal que $\varphi(H) \subset H'$ y $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$; $g \in G$, $h \in H$. Entonces φ es φ/H-equivariante.

Por consiguiente, según (1.3.7.), existe una única $\tilde{\varphi}$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_G"'] & G' \arrow[d, "\pi_{G'}"] \\ G/H \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & G'/H' \end{tikzcd}$$

En el caso particular en que φ sea un homomorfismo, y H y H' sean subgrupos normales, $\tilde{\varphi}$ resulta ser el homomorfismo inducido en los grupos cocientes.

Consideremos ahora un grupo fijo G. Cada aplicación equivariante $\varphi : X \longrightarrow X'$ induce una única aplicación $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G$, en virtud de (1.3.7.). Obtenemos así un funtor covariante $B : Ens^G \longrightarrow Ens$, definido mediante

$$B(X) = X/G \quad , \quad B(\varphi) = \tilde{\varphi} .$$

Una consecuencia inmediata es que una equivalencia $\varphi : X \longrightarrow X'$ en Ens^G induce una biyección $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G$ en Ens.

La definición de órbita de un punto de un G-conjunto X se extiende para cualquier parte $M \subset X$ mediante

$$\Omega(M) = \left\{ \mathcal{T}_g(x) \;\middle|\; g \in G \;,\; x \in M \right\}$$

es decir, la órbita de M es la unión de las órbitas que intersecan M.

Entonces queda definida una aplicación

$$\Omega : PX \longrightarrow PX$$

que, como se ve inmediatamente, es

$$\Omega = \pi_X^{-1} \circ \pi_X$$

En particular M es invariante si y sólo si $\Omega(M) = M$. Las órbitas de puntos son los conjuntos invariantes minimales.

Dedicaremos la última parte de este parágrafo a la noción de grupos de isotropía.

<u>DEFINICION</u> (1.3.9.).

Sea X un G-conjunto y $x \in X$. El conjunto $G_x = \left\{ g \in G \;\middle|\; \mathcal{T}_g(x) = x \right\}$ se llama <u>grupo de isotropía de x</u>.

Es sencillo comprobar que G_x es efectivamente un subgrupo de G.

La proposición siguiente describe como varía G_x al variar el elemento x.

<u>PROPOSICION</u> (1.3.10.):

$$G_{gx} = g\,G_x\,g^{-1} \;(= \mathcal{J}_g(G_x)) \;,\quad g \in G \;,\quad x \in X.$$

<u>Demostración</u>: Sea $h \in G_x$, es decir $hx = x$, donde para simplificar la notación escribimos h en lugar de $\mathcal{T}_h$. Entonces

$$(ghg^{-1})\,(gx) = ghx = gx \;,$$

lo cual implica

$$g\,G_x\,g^{-1} \subset G_{gx}$$

Además, como $g^{-1}(gx) = x$, el mismo argumento prueba que $g^{-1}G_{gx}\,g \subset G_x$.
$\boxtimes$

Entonces, si llamamos SG al conjunto de los subgrupos de G, hemos definido una aplicación

$$\varphi : X \longrightarrow SG \;,$$

definida por $\varphi(x) = G_x$, $x \in X$, la cual, por (1.3.10.) hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & SG \\ \tau_g \downarrow & & \downarrow \mathfrak{I}_g \\ X & \xrightarrow{\varphi} & SG \end{array}$$

es decir φ es equivariante. Por consiguiente, según (1.3.7.), φ induce una aplicación

$$\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow SG/G$$

que a cada órbita de x hace corresponder una clase de subgrupos conjugados de G ; si $\pi_X(x)$ es la órbita de x, entonces $\tilde{\varphi}(\pi_X(x))$ se llama el <u>tipo de órbita</u> de $\pi_X(x)$.

Veamos algunos casos particulares.

Sea $\{e\}$ la clase de subgrupos conjugados consistente en la identidad $e \in G$, y sea $\Omega(x_o)$ de tipo de órbita $\{e\}$. Entonces para cada $x \in \Omega(x_o)$ existe un único $g \in G$ tal que $gx_o = x$. Puesto que si existiera otro g' tal que $gx_o = g'x_o$, o sea $g'^{-1}g\,x_o = x_o$ esto implica $g'^{-1}g = e$, es decir $g' = g$.

Si en cambio $\Omega(x_o)$ es de tipo de órbita G y $x \in \Omega(x_o)$, entonces cada ele mento de G deja x fijo, es decir x es G-invariante, y por lo tanto $\Omega(x_o) = x_o$. En otras palabras, los puntos fijos son las órbitas de tipo de órbita G.

Ejemplo (1.3.11.):

Sea $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo lineal general ; sus elementos son matrices $n \times n$ con elementos reales y determinante no nulo.

Tal grupo opera sobre $\mathbb{R}^n$ con la multiplicación matricial ordinario. El origen $\{o\}$ y su complemento $\mathbb{R}^n - \{o\}$ son las órbitas.

El grupo de isotropía de $\{o\}$ es $GL(n, \mathbb{R})$.

Ejemplo (1.3.12.):

Sea $O(n, \mathbb{R})$ el subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ constituído por las matrices ortogonales.

Las $O(n, \mathbb{R})$-órbitas de $\mathbb{R}^n$ son las esferas de radio con centro en el origen. El grupo de isotropía de cada $x \neq 0$ es isomorfo a $O(n-1, \mathbb{R})$.

Ejemplo (1.3.13):

Sea $\mathbb{C} \vee \infty$ el plano complejo $\mathbb{C}$ con el punto del infinito adicionado, es decir, la esfera de Riemann.

El conjunto de transformaciones del tipo $z \rightsquigarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$ es un grupo que opera sobre $\mathbb{C} \vee \infty$.

Puesto que, según se puede probar, para cada par de puntos de $\mathbb{C} \vee \infty$ exista una transformación del tipo mencionado que transforma uno en el otro, resulta que hay una sóla órbita : la órbita de cada punto es la totalidad de la esfera de Riemann.

Ejemplo (1.3.14.):

Sea la operación de un grupo G sobre sí mismo por automorfismos interiores. Los puntos fijos son los elementos del centro CG. Hemos ya considerado la G-operación inducida en el conjunto SG de subgrupos de G. La órbita de cada subgrupo es su clase de subgrupos conjugados. Por consiguiente los puntos fijos de la operación son los subgrupos invariantes de G.

Por último, veamos cuál es el efecto de una aplicación equivariante en los grupos de isotropía:

<u>PROPOSICION</u> (1.3.15):

Sea X un G-conjunto, X' un G'-conjunto, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo, y $\varphi : X \longrightarrow X'$ una aplicación ρ-equivariante. Entonces $\rho(G_x) \subset G'_{\varphi(x)}$.

<u>Demostración:</u> Sea $g \in G_x$, es decir $gx = x$. Entonces $\rho(g)\,\varphi(x) = \varphi(gx) = \varphi(x)$, es decir $\rho(g) \in G'_{\varphi(x)}$. ⊠

<u>Ejercicio</u> (1.3.16):

Es sencillo comprobar que la aplicación $\Omega = \pi_X^{-1} \circ \pi_X : PX \longrightarrow PX$ definida más arriba satisface las siguientes relaciones:

a) $\Omega(\emptyset) = \emptyset$,

b) $M \subset \Omega(M)$,

c) $\Omega(\Omega(M)) = \Omega(M)$,

d) $\Omega(\bigcup_\lambda M_\lambda) = \bigcup_\lambda \Omega(M_\lambda)$.

Entonces Ω es un operador de Kuratovski en X que define una topología en X mediante la relación: $M \subset X$ es cerrado sí y sólo si $\Omega(M) = M$.

Esto sigue siendo cierto si consideramos cualquier relación de equivalencia R en X - no necesariamente definida por un grupo G - y la aplicación $\Omega = \pi_X^{-1} \circ \pi_X : PX \longrightarrow PX$, donde $\pi_X : X \longrightarrow X/R$ es la aplicación canónica.

Más generalmente, probar que si $R \subset X \times X$ es una relación en un conjunto X, el <u>**operador de saturación**</u> $\Omega : PX \longrightarrow PX$ definido por $\Omega(M) = \{ y \in X \mid (x, y) \in R$ para algún $x \in M \}$ satisface las propiedades a), b), c), d) si y sólo si R

es reflexiva y transitiva.

Ejercicio (1.3.17.):

Considérese la topología definida en el ejercicio anterior en un conjunto X por una relación de equivalencia R. Probar que

a) $M \subset X$ es cerrado si y sólo si M es una unión de clases de equivalencia;

b) $M \subset X$ es cerrado si y sólo si M es abierto.

Además, encontrar las condiciones a imponer sobre X/R de manera que para la topología en cuestión X satisfaga:

a) el segundo axioma de numerabilidad ;

b) sea compacto ;

c) sea conexo .

Ejercicio (1.3.18.):

Sea X un G-conjunto , R un conjunto y $\varphi : X \longrightarrow R$ una aplicación. Sea X provisto con la topología del ejercicio (1.3.16) y R con la topología discreta. Entonces φ es invariante si y sólo si φ es continua.

****

§ 1.4. PROPIEDADES PARTICULARES DE LOS G-CONJUNTOS.

Sea X un G-conjunto, definido mediante $\mathcal{T}: G \longrightarrow \text{Bij } X$. Sea e la identidad de G.

DEFINICION (1.4.1.).

La operación $\mathcal{T}$ se llama **efectiva** cuando $\mathcal{T}$ es inyectiva, es decir $\text{Ker } \mathcal{T} = \{e\}$.

Notemos que los elementos de $\text{Ker } \mathcal{T}$ son los contenidos en todos los grupos de isotropía, es decir,

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \bigcap_{x \in X} G_x \quad ,$$

Observemos también que si $\mathcal{T}$ no es efectiva, entonces existe una factorización $\tilde{\mathcal{T}}$ a través de $G/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[d] & \operatorname{Bij} X \\ G/\operatorname{Ker}\mathcal{T} \arrow[ur, "\tilde{\mathcal{T}}"'] & \end{tikzcd}$$

y $G/\operatorname{Ker} \mathcal{T}$ opera en forma efectiva sobre X mediante $\tilde{\mathcal{T}}$

<u>Ejemplo</u> (1.4.2.):

Si el grupo G opera sobre sí mismo por automorfismos interiores $\mathfrak{I}_g$, entonces $\operatorname{Ker} \mathfrak{I} = CG$, donde CG es el centro de G.

<u>DEFINICION</u> (1.4.3.).

La operación $\mathcal{T}$ se llama <u>**libre**</u> cuando $\mathcal{T}_g(x) = x$ para algún $x \in X$ implica $g = e$.

Evidentemente, toda operación libre es efectiva. La locución "libre" proviene del hecho que tal operación es "libre de puntos fijos" ; más exactamente, si $g \neq e$, entonces $\mathcal{T}_g$ no tiene puntos fijos. Para cada $x \in X$, el grupo de isotropía se reduce a la identidad : $G_x = \{e\}$. Cuando $\mathcal{T}$ es libre, el G-conjunto X se suele llamar un <u>**G-conjunto principal.**</u>

<u>Ejemplo</u> (1.4.4.):

La operación de G sobre G por traslaciones a izquierda, es libre. Si H es un subgrupo de G que opera sobre G por traslaciones a derecha, entonces la operación es también libre. Las órbitas constituyen el conjunto G/H.

DEFINICION (1.4.5.).

La operación $\mathcal{T}$ se llama **transitiva** cuando para cada par $x_1, x_2 \in X$ existe $g \in G$ tal que $\mathcal{T}_g(x_1) = x_2$. Si para cada par x_1, x_2 el elemento g que cumple tal condición es único, la operación se llama **simplemente transitiva.**

Toda operación simplemente transitiva es libre, puesto que $\mathcal{T}_g x = x$, teniendo en cuenta que $\mathcal{T}_e x = x$, implica $g = e$.

Recíprocamente, una operación libre es simplemente transitiva en cada órbita, puesto que si $g_1 x = g_2 x$, entonces $x = g_2^{-1} g_1 = e$, o sea $g_1 = g_2$.

La definición de operación transitiva puede expresarse también así: existe un $x_o \in X$ tal que $\Omega(x_o) = X$. En otras palabras, X es la órbita de cada uno de sus elementos. Entonces X/G es un punto. Esta propiedad permite definir transitividad de una G-operación en cualquier categoría, pero para eso es previo definir la noción de punto.

DEFINICION (1.4.6.).

Un G-conjunto X se llama **homogéneo** cuando G opera transitivamente sobre X.

Así, cada operación de G en X define una operación transitiva sobre cada G-órbita, convirtiéndola en un espacio homogéneo.

Por ejemplo, la superficie esférica unitaria S^{n-1} de $\mathbb{R}^n$ es un espacio homogéneo respecto de $O(n, \mathbb{R})$; y el disco unitario de $\mathbb{C}$ lo es también respecto a los holomorfismos.

Un ejemplo fundamental de G-conjunto homogéneo, fundamental en el sentido que el lema (1.4.7.) explicitará, es el siguiente:

Sea H un subgrupo de G, y G/H el conjunto cociente de la operación de H a la derecha. Definimos

$$\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Bij}\,(G/H)$$

mediante

$$\sigma_\gamma (gH) = \gamma g H \quad , \quad \gamma \in G .$$

Veamos que G/H es un G-conjunto homogéneo, es decir σ es transitiva. Hay que ver que para cada par gH, $g'H$ existe $\gamma \in G$ tal que $\sigma_\gamma (gH) = g'H$; para ello, basta elegir $\gamma = g' g^{-1}$

Veremos ahora que todo G-conjunto homogéneo X puede considerarse como un caso particular del últimamente descripto, es decir existe un subgrupo H de G y una biyección equivariante $\varphi : G/H \longrightarrow X$.

<u>PROPOSICION</u> (1.4.7.):

Sea X un G-conjunto homogéneo , $x_0 \in X$ un elemento fijo, y $H = G_{x_0}$. Sea $\varphi : G/H \longrightarrow X$ definida mediante $\varphi(gH) = g x_0$. Entonces φ es equivariante y biyectivo, es decir, una equivalencia.

<u>Demostración:</u>

a) El diagrama

$$\begin{tikzcd} G/H \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_\gamma"'] & X \arrow[d, "\tau_\gamma"] \\ G/H \arrow[r, "\varphi"] & X \end{tikzcd}$$

conmuta, porque

$$(\tau_\gamma \circ \varphi)(gH) = \tau_\gamma (g x_0) = (\tau_\gamma \tau_g)(x_0) \quad ,$$

$$(\varphi \circ \sigma_\gamma)(gH) = \varphi(\gamma g H) = \tau_{\gamma g}(x_0) \quad ,$$

y τ es un homomorfismo.

Entonces φ es equivariante.

b) Por ser X homogéneo, φ es suryectivo.

c) $\varphi(g_1 H) = \varphi(g_2 H)$ significa $g_1 x_0 = g_2 x_0$, es decir $g_2^{-1} g_1 \in H$, o sea $g_1 \in g$

lo cual implica $g_1 H \subset g_2 H$. Por tratarse de una partición, resulta $g_1 H =$ $= g_2 H$. En consecuencia, φ es inyectivo.

⊠

Estudiaremos ahora la efectividad de una operación sobre un conjunto homogéneo. En virtud de la proposición anterior, podemos suponer, sin perder generalidad, que tal conjunto es del tipo G/H , donde H es algún subgrupo de G.

Sea pues la operación transitiva ya definida

$$\sigma : G \longrightarrow \mathrm{Bij}\,(G/H)\,.$$

Su núcleo $K = \mathrm{Ker}\,\sigma$ es la intersección de todos los grupos de isotropía. El grupo de isotropía del elemento $gH \in G/H$ es por definición el conjunto de $\gamma \in G$ tales que $\sigma_\gamma(gH) = gH$, es decir $\gamma g H = gH$. Tales γ son precisamente los de la forma $\gamma = ghg^{-1}$, para $h \in H$. Entonces

$$K = \mathrm{Ker}\,\sigma = \bigcap_{g \in G} g H g^{-1}$$

Esto prueba, en particular, que la intersección que aparece en la fórmula es un subgrupo invariante de G, puesto que así lo es K por ser un núcleo. Indicaremos con $K \triangleleft G$ el hecho de ser K un subgrupo invariante de G. Se cumple además $K \subset H$; basta considerar $g = e$ en la última fórmula .

Sea ahora L un subgrupo cualquiera de G que cumple $L \triangleleft G$ y $L \subset H$. Puesto que para cada $g \in G$ se cumple

$$L = g L g^{-1} \subset g H g^{-1} ,$$

resulta $L \subset K$. En consecuencia, hemos probado:

<u>PROPOSICION</u> (1.4.8.):

Sea G un grupo, y H un subgrupo del mismo. Entonces existe el mayor subgrupo invariante de G contenido en H, a saber, el núcleo de la operación

$G \longrightarrow \mathrm{Bij}(G/H)$, y tal subgrupo invariante máximo coincide con $\bigcap_{g \in G} g H g^{-1}$.

CORCLARIO (1.4.9.):

G opera efectivamente sobre G/H sí y sólo si el único subgrupo invariante de G contenido en H es $\{e\}$.

Ejercicio (1.4.10.):

Estudiar el efecto de la elección del punto $x_0 \in X$ en la proposición (1.4.7.). Es decir, estudiar cuál es la relación entre las diferentes equivalencias obtenidas cuando se varía x_0 .

****
***
*

CAPITULO II G - ESPACIOS .

La lectura de este capítulo puede ser omitida sin que esto suponga perjuicio para la comprensión de los siguientes.

§ 2.1. DEFINICION Y EJEMPLOS.

DEFINICION (2. 1. 1.).

Un **grupo topológico** G es un grupo que es un espacio topológico tal que las aplicaciones

a) $G \times G \longrightarrow G$, definida mediante $(g_1, g_2) \rightsquigarrow g_1 g_2$, y

b) $G \longrightarrow G$, definida mediante $g \rightsquigarrow g^{-1}$, son contínuas.

DEFINICION (2. 1. 2.).

Sea G un grupo topológico. Un G-espacio X es un espacio topológico que es un G-conjunto, y además la aplicación $G \times X \longrightarrow X$ definida por la operación de G sobre X es contínua.

Un caso paticular de G-espacio que nos interesa especialmente es aquél en que X = G , y G opera por traslaciones a izquierda.

DEFINICION (2. 1. 3.).

Un **homomorfismo** $\rho : G \longrightarrow G'$ de grupos topológicos es un homomorfismo de grupos que además es contínuo.

Sea ahora X un G-espacio, X' un G'-espacio y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo.

DEFINICION (2. 1. 4.).

Una aplicación $\varphi : X \longrightarrow X'$ se llama **ρ-equivariante** cuando φ es ρ-equivariante entre los G-conjuntos X, X' , y además es contínua.

Observemos que si φ es ρ-equivariante, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle \rho \times \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ G' \times X' & \longrightarrow & X' \end{array}$$

es conmutativo, y $\rho \times \varphi$ resulta también contínua por la propiedad universal de la topología producto.

Ejercicio (2.1.5.):

Sea X un espacio topológico y G = Aut X el grupo de homeomorfismo de X en sí mismo.

Para dar sentido a la proposición "X es un G-espacio", es necesario dar una topología en G ; por ejemplo, la topología discreta en G convierte a X en un G-espacio.

Si X es localmente compacto, se prueba que la topología compacta-abierta en G es una solución del problema.

****

§ 2.2. ESPACIO DE ORBITAS.

Sea G un grupo topológico y X un G-espacio. La topología cociente en el conjunto de órbitas X/G es la más fina que hace a $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ contínua.

DEFINICION (2.2.1.).

El **espacio de órbitas** X/G es el conjunto de órbitas con la topología cociente.

PROPOSICION (2.2.2.):

La aplicación canónica $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ es abierta. La topología de X/G es la única que hace a π_X contínua y abierta.

Demostración:

a) Sea M un abierto de X. Como $\tau_g : X \longrightarrow X$ es un homeomorfismo (puesto que $(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}$ es contínua), $\tau_g(M)$ será abierto, y por lo tanto también lo es la unión

$$\bigcup_{g \in G} \tau_g(M) = \Omega(M) = (\pi_X^{-1} \circ \pi_X)\ (M).$$

Por la definición de la topología cociente esto implica que $\pi_X(M)$ es abierta. Esto prueba que π_X es abierta.

b) Sea X un espacio topológico, Y un conjunto, y $\pi : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Veremos que dos topologías T_1 y T_2 en Y tales que ambas hacen contínua y abierta a π, deben coincidir.

En efecto, si O es un T_1-abierto de Y, $\pi^{-1}(O)$ será abierto en X y $\pi(\pi^{-1}(O)) = O$ será T_2-abierto en Y.

$\boxtimes$

Ejemplo (2.2.3.):

Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G con la topología inducida. La operación de H sobre G por traslaciones a derecha convierte a G en un H-espacio. La aplicación canónica $\pi_G : G \longrightarrow G/H$ sobre el espacio de órbitas es contínua y abierta.

La proposición (2.2.2.) dá una caracterización de la topología de X/G. Otra caracterización puede darse por la siguiente propiedad:

Sea R un espacio topológico arbitrario. La aplicación $\varphi \rightsquigarrow \varphi \circ \pi$ que manda funciones contínuas $\varphi : X/G \longrightarrow R$ en funciones contínuas $X \longrightarrow R$, es inyectiva.

Entonces (1.3.5.) puede completarse con:

PROPOSICION (2.2.4.):

Sea G un grupo topológico, X un G-espacio, $\pi_X : X \longrightarrow X/G$ la aplicación canónica sobre el espacio de las órbitas, y R un espacio topológico. La correspondencia $\psi \longrightarrow \psi \circ \pi_X$ que transforma funciones contínuas de X/G en R, en funciones contínuas invariantes de X en R, es biyectiva.

Sean ahora G, G' grupos topológicos, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo, y X, X' sean G, G'-espacios, respectivamente. Entonces:

PROPOSICION (2.2.5.):

Una aplicación ρ-equivariante $\varphi : X \longrightarrow X'$ induce una y sólo una aplicación contínua $\tilde{\varphi} : X/G \longrightarrow X'/G'$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_X"'] & X' \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\ X/G \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & X'/G' \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración: En virtud de (1.3.7.), sólo hay que probar la continuidad de $\tilde{\varphi}$, la cual, según (2.2.4.), es una consecuencia de la continuidad de $\pi_{X'} \circ \varphi$. ⊠

Ejercicio (2.2.6.): (Sobre grupos topológicos).

Sea G un grupo topológico. Entonces:

a) Si H es un subgrupo de G y H es abierto, entonces H es cerrado (considerar la partición de G definida por los elementos de G/H);

b) La componente conexa G_o de la identidad de G es un subgrupo invariante cerrado;

c) Si G es conexo y $\mathcal{U}$ un entorno de la identidad e, entonces G es generado por $\mathcal{U}$, es decir, cada elemento de G es un producto finito de elementos de $\mathcal{U}$.

Para la parte c), pueden hacerse las siguientes consideraciones. El entorno $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{-1}$ satisface $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V}$. Considérese el conjunto $\mathcal{V}^n = \{g_1 \dots g_n \mid g_i \in \mathcal{V} , i = 1,\dots, n\}$. $\mathcal{V}^\infty = \bigcup_n \mathcal{V}^n$ es un grupo, el grupo generado por $\mathcal{V}$. e es interior a $\mathcal{V}^\infty$, pues $e \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\infty$. Entonces cualquier punto de $\mathcal{V}^\infty$ es interior, pues las traslaciones a izquierda son homeomorfismos que dejan $\mathcal{V}^\infty$ invariante. $\mathcal{V}^\infty$ es abierto en G y por lo tanto cerrado. Entonces, por ser G conexo, es $\mathcal{V}^\infty = G$.

<u>Ejercicio</u> (2.2.7.):

Sea X un G espacio sobre el cual G opera transitivamente. Sea $H = Gx_0$ el grupo de isotropía de $x_0 \in X$. La aplicación $\varphi : G/H \longrightarrow X$ definida en (1.4.7.) mediante $gH \rightsquigarrow gx_0$ es una equivalencia de G-conjuntos y además es contínua.

Sin embargo , no es necesariamente una equivalencia de G-espacios. La afirmativa significaría que φ^{-1} es contínua (y por lo tanto φ un homeomorfismo) , en otras palabras, que φ es abierta. El contraejemplo siguiente se debe a Bourbaki.

Sea $\mathbb{R}$ operando sobre el toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mediante

$$\tau_\lambda(x_1, x_2) = (x_1 + \alpha(\lambda) , x_2 + \alpha(\theta\lambda)) ,$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$, $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el homomorfismo canónico y θ el número irracional.

Para cada (x_1, x_2) fijo definimos $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2$ como en (1.4.7.), obteniendo una inyección contínua. Consideremos la imágen $X = \Omega(x_1, x_2)$ con la topología relativa. Veamos que $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ es una biyección contínua, pero no un homeomorfismo. En efecto, X es denso en $\mathbb{T}^2$ (lo que se puede probar) y no puede ser homeomorfo a $\mathbb{R}$.

****

CAPITULO III. G-VARIEDADES.

En este capítulo se introducen las nociones fundamentales de este curso. En los capítulos siguientes se hará un estudio más detallado de G-variedades y grupos de Lie.

§ 3.1. DEFINICION Y EJEMPLOS DE GRUPOS DE LIE.

En lo que sigue, toda variedad se supondrá de Hansdorff, pero no necesariamente conexa. El adjetivo diferenciable estará tomado en el sentido C^{∞}.

DEFINICION (3.1.1.).

Un **grupo de Lie** G es un grupo que es una variedad analítica tal que las aplicaciones:

a) $G \times G \longrightarrow G$, definida como $(g_1, g_2) \rightsquigarrow g_1 g_2$ (multiplicación) ; y

b) $G \longrightarrow G$, definida como $g \rightsquigarrow g^{-1}$ (inversión), sean analíticas.

Aclaramos que al decir que un grupo es una variedad analítica queremos significar que el conjunto subyacente del grupo tiene una estructura de variedad analítica.

Supondremos, salvo indicación contraria, que la variedad es real; en tal caso el grupo de Lie G se llama real, y se llamaría complejo si la variedad lo fuera.

Una primera observación sobre los grupos de Lie es que su dimensión (como variedad) es la misma en cada uno de sus puntos, lo cual es una consecuencia inmediata del siguiente hecho:

Dos componentes conexas G_1 y G_2 de un grupo de Lie son difeomorfas.

Para probar esta última afirmación, sean $g_i \in G_i$, $i = 1, 2$; la aplicación

$\varphi : G_1 \longrightarrow G_2$ definida mediante traslaciones a izquierda : $\varphi = L_{g_2} L_{g_1^{-1}}$ es un difeomorfismo.

A continuación damos algunos ejemplos de grupos de Lie.

Ejemplo (3.1.2.):

$\mathbb{R}^n$ con la estructura aditiva de grupo y la estructura ordinaria de variedad analítica. Su dimensión es n. Análogamente el grupo de Lie $\mathbb{C}^n$ tiene dimensión compleja n y real $2n$.

Ejemplo (3.1.3.):

$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, con las estructuras inducidas por $\mathbb{R}^n$. Su dimensión es n.

Ejemplo (3.1.4.):

$GL(n, \mathbb{R})$, con la estructura de variedad analítica inducida por $\mathbb{R}^{n^2}$ que lo contiene. El hecho de ser una variedad resulta por ser un abierto lo cual se prueba, observando que la función determinante $GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es contínua y $GL(n, \mathbb{R})$ es la imágen inversa de un abierto, a saber, el complemento de $\{0\}$. La dimensión es n^2.

Ejemplo (3.1.5.):

Sea X una variedad diferenciable, y TX la variedad de los vectores tangentes de X, que es un fibrado vectorial sobre X.

La correspondencia $T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ se puede extender a un funtor covariante entre la categoría de las variedades diferenciales y sí misma ; si $\varphi : X \longrightarrow X'$, entonces $T\varphi : TX \longrightarrow TX'$ es la aplicación inducida sobre los vectores tangentes. Además T posee la propiedad

$$T(X_1 \times X_2) \cong TX_1 \times TX_2 .$$

Sea ahora en particular $X = G$ un grupo de Lie. La multiplicación $G \times G \xrightarrow{m} G$ en G induce una multiplicación en TG :

$$TG \times TX = T(G \times G) \xrightarrow{T(m)} TG$$

Es inmediato que $T(m)$ es efectivamente un producto, por lo cual TG es un grupo, y más aún, un grupo de Lie, pues $T(m)$ resulta analítica, y análogamente para la inversión.

Por ejemplo, la asociatividad de $T(m)$ resulta de la conmutabilidad de

$$\begin{tikzcd} TG \times TG \times TG \arrow[r, "T(m) \times 1_{TG}"] \arrow[d, "1_{TG} \times T(m)"'] & TG \times TG \arrow[d, "T(m)"] \\ TG \times TG \arrow[r, "T(m)"] & TG \end{tikzcd}$$

lo cual es consecuencia del carácter funtorial de T y del hecho $TG \times TG = T(G \times G)$. Las demás propiedades de grupo se prueban análogamente.

Ejemplo (3.1.6.):

Si G_1 y G_2 son grupos de Lie, entonces $G_1 \times G_2$ (con las estructuras de grupo y variedad del producto cartesiano) también lo es.

DEFINICION (3.1.7.).

Sean G, G' grupos de Lie. Un **homomorfismo de grupos de Lie** $\rho : G \longrightarrow G'$ es un homomorfismo de grupos que además es analítico.

Hacemos notar que en la literatura sobre el tema, el término homomorfismo (de grupos de Lie) es reservado a veces para designar a un homomorfismo analítico de grupos de Lie tal que $\rho : G \longrightarrow \rho(G)$ es abierto.

Ejemplo (3.1.8.):

Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$. Cada base de V define un isomorfismo de grupos $GL(V) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, el cual permite definir en el grupo $GL(V)$ de automorfismos de V una estructura de grupo de Lie. Tal estructura es independiente de la base elegida, puesto que dos isomorfismos tales sólo difieren en un automorfismo (interior) de $GL(n, \mathbb{R})$.

Ejemplo (3.1.9.):

Sea G un grupo de Lie, TG el fibrado de los vectores tangentes (cf. (3.1.5)), y G_e el espacio tangente en la identidad e de G.

Dando a G_e la estructura de grupo de Lie definida por la adición, la inyección natural $j : G_e \longrightarrow TG$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Asimismo lo es la proyección natural $p : TG \longrightarrow G$, que a cada vector tangente le asigna su origen.

La sucesión

$$0 \longrightarrow G_e \xrightarrow{j} TG \xrightarrow{p} G \longrightarrow e$$

es exacta, y además p posee una sección, a saber, la inyección natural $s : G \longrightarrow TG$, que satisface la relación $p \circ s = 1_G$.

Ejercicio (3.1.10):

Sea G un grupo topológico localmente euclídeo, es decir, tal que posee un entorno de la identidad homeomorfo a un abierto del espacio euclídeo. Entonces la componente G_o de la identidad de G tiene base numerable. Por consiguiente, G es paracompacto.

Ejercicio (3.1.11.):

Todo grupo de Lie es localmente conexo.

Ejercicio (3.1.12):

La componente de la identidad de un grupo de Lie G es un subgrupo abierto de G. Puesto que en un espacio localmente conexo las componentes son abiertas, la propiedad enunciada es una consecuencia del ejercicio anterior.

****

§ 3.2. DEFINICION Y EJEMPLOS DE G-VARIEDADES.

En lo que sigue, G designará a un grupo de Lie, y X a una variedad diferenciable.

DEFINICION (3.2.1.):

Sea G un grupo de Lie. Una **G-variedad** X es una variedad diferenciable que es un G-conjunto con respecto a la aplicación $G \times X \longrightarrow X$, y además tal aplicación es diferenciable. El par (G, X) se llama un **grupo de Lie de transformaciones**.

Entonces, X es un G-objeto en la categoría $\mathcal{V}$ de variedades diferenciables; en la definición se exige además que la aplicación $G \times X \longrightarrow X$ sea diferenciable.

Sea ahora X una G-variedad, X' una G'-variedad, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie.

DEFINICION (3.2.2.).

Una aplicación $\varphi : X \longrightarrow X'$ se llama **ρ-equivariante** cuando es ρ-equivariante en el sentido de (1.2.1.) y además es diferenciable.

Ejemplo (3.2.3.):

$\mathbb{R}$-variedades son de fundamental importancia en la teoría de G-variedades, y reciben el nombre especial de **grupos a un parámetro de transformaciones**. Las estudiaremos en detalle en el capítulo V.

Ejemplo (3.2.4.):

La operación de un grupo de Lie G sobre su variedad subyacente por traslaciones a izquierda convierte a G en una G-variedad. Lo mismo ocurre con la operación de G sobre G definida por automorfismos interiores.

Ejemplo (3.2.5.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Entonces $GL(V)$ es un grupo de Lie. Sea G un grupo de Lie y $\mathcal{T}: G \longrightarrow GL(V)$ un homomorfismo. Llamaremos a $\mathcal{T}$ una **representación** de G en V, cuando la aplicación $G \times V \longrightarrow V$, es diferenciable.

Observación:

Como vimos al final de § 2.1., para un G-espacio X localmente compacto, la continuidad de la aplicación $G \times X \longrightarrow X$ puede expresarse por la continuidad del homomorfismo $G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ que define la operación, cuando $\operatorname{Aut} X$ está provisto con la topología compacta-abierta. Sería deseable describir de manera análoga la diferenciabilidad de $G \times X \longrightarrow X$ para un G-espacio X. Para ello, el grupo $\operatorname{Aut} X$ de difeomorfismos de X debería en primer lugar ser provisto de una estructura diferenciable, lo cual presenta serias dificultades. A pesar de ello, utilizaremos este punto de vista en consideraciones heurísticas.

Ejemplo (3.2.6.):

Sea X una G-variedad y T el funtor que asigna a cada variedad diferenciable su fibrado tangente. Puesto que T conserva productos directos, TX es una TG-variedad, y como además G es un subgrupo de TG (cf. (3.1.9.), TX es una G-variedad. Este hecho justifica muchas notaciones clásicas en la teoría de grupos de transformaciones que a primera vista aparecen como excesivamente abreviadas.

Ejemplo (3.2.7.):

Sean G y G' grupos de Lie y G' una G-variedad con respecto a una operación $\mathcal{T}: G \longrightarrow \operatorname{Aut} G'$. Entonces el producto semidirecto $G' \times_{\mathcal{T}} G$ definido en (1.1.7.) es un grupo de Lie. Esto generaliza el ejemplo (3.1.5), que corresponde a la operación trivial de G en G'.

Ejemplo (3.2.8.):

Sea G un grupo de Lie; consideremos la sucesión exacta

$$O \longrightarrow G_e \xrightarrow{j} TG \xrightarrow{p} G \longrightarrow e$$

de (3.1.9.).

La sección $s : G \longrightarrow TG$ de p definida mediante la inyección natural de G genera una operación de G sobre el grupo aditivo G_e definida como $\mathcal{T}_g = \mathcal{J}_{s(g)}\ G_e$ (cf. (1.1.7.)). Esta representación de G en G_e, llamada **representación adjunta**, posee una especial importancia en la teoría de grupos de Lie. TG es isomorfo al producto semidirecto $G_e \times_{\mathcal{T}} G$ con respecto a la operación $\mathcal{T}$.

****
***
*

CAPITULO IV. CAMPOS DE VECTORES.

Comenzamos aquí con la teoría de G-variedades y grupos de Lie, en detalle.

§ 4.1. FUNCIONES REALES.

De ahora en adelante omitiremos el adjetivo diferenciable; sobreentenderemos que todas las variedades y aplicaciones que aparezcan son diferenciables en el sentido C^∞.

Sea X una variedad. Designaremos CX al conjunto de las funciones definidas sobre X y con valores reales, es decir, el conjunto de los morfismos $X \longrightarrow \mathbb{R}$ de la categoría $\mathcal{V}$.

Con las definiciones usuales de suma y producto de funciones, CX es un anillo conmutativo con unidad. También se lo puede considerar como $\mathbb{R}$-álgebra, identificando el conjunto de las funciones constantes de CX con $\mathbb{R}$.

Sea X otra variedad y $\varphi : X \longrightarrow X'$ una aplicación. φ induce una aplicación $\varphi^* : CX' \longrightarrow CX$ definida como

$$\varphi^*(f') = f' \circ \varphi \quad , \quad f' \in CX'$$

No ofrece dificultades el probar que φ^* es un homomorfismo de anillos que además respeta las funciones constantes y la unidad.

En consecuencia, la correspondencia

$$X \rightsquigarrow CX \quad , \quad \varphi \rightsquigarrow \varphi^*$$

define un funtor contravariante

$$C : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{R}$$

entre las categorías de variedades $\mathcal{V}$ y la de anillos conmutativos con unidad $\mathcal{R}$.

Análogamente, si en CX consideramos la estructura de $\mathbb{R}$-álgebra, C es un funtor contravariante entre $\mathcal{V}$ y la categoría de $\mathbb{R}$-álgebras con unidad.

En particular, si X es una G-variedad, entonces CX es un G°-anillo.

Ejercicio (4.1.1.):

Sean X y X' variedades. Probar que cualquier homomorfismo de anillo $CX' \longrightarrow CX$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Ejercicio (4.1.2.):

Sean X, X' variedades y $\varphi_i : X \longrightarrow X'$ $(i = 1, 2)$ dos aplicaciones tales que $\varphi_1^* = \varphi_2^*$. Probar que $\varphi_1 = \varphi_2$.

Ejercicio (4.1.3.):

Sean X y X' variedades paracompactas y $\mu : CX' \longrightarrow CX$ un homomorfismo de anillos tal que $\mu(1_{CX'}) = 1_{CX}$. Entonces existe una única $\varphi : X \longrightarrow X'$ tal que $\varphi^* = \mu$. En otras palabras, la aplicación

$$[X, X'] \longrightarrow [CX', CX]$$

que transforma aplicaciones $\varphi : X \longrightarrow X'$ en homomorfismos de anillos $\varphi^* : CX' \longrightarrow CX$ es biyectiva. El ejercicio (4.1.2.) muestra que es inyectiva; para probar el resto, trátese de imitar la teoría de dualidad para Λ-módulos sobre un anillo Λ, considerando a CX como el dual de X; el estudio del doble dual dá el resultado querido. La propiedad expresada por este ejercicio permite en principio una algebrización de la teoría de variedades, puesto que cada propiedad de X es expresable como una propiedad de CX. El ejercicio siguiente es un ejemplo de esta situación.

Ejercicio (4.1.4.):

Una variedad X es conexa sí y sólo si el anillo CX no se puede descomponer en un producto directo no trivial de anillos.

§ 4.2. OPERADORES Y CAMPOS DE VECTORES.

Consideremos ahora al conjunto CX de funciones reales sobre una variedad X, como un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial.

DEFINICION (4.2.1.).

Un **operador sobre X** es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $A: CX \longrightarrow CX$.

Ejemplo (4.2.2.):

Un automorfismo de CX es un operador sobre X. Asimismo, un campo de vectores es un operador sobre X.

Designaremos con OX al conjunto de operadores sobre X, que, con las definiciones usuales, es una $\mathbb{R}$-álgebra.

DEFINICION (4.2.3.).

Sea $\varphi : X \longrightarrow X'$ un difeomorfismo entre variedades. La aplicación $\varphi_* : OX \longrightarrow OX'$ está definida mediante

$$\varphi_* A = \varphi^{*-1} \circ A \circ \varphi^* \quad , \qquad A \in OX .$$

Observemos que es necesario suponer que φ sea un difeomorfismo, y no una aplicación (diferenciable) cualquiera, pues en este último caso no se podría asegurar la existencia de φ^{*-1}. Para cada $A \in OX$, $\varphi_* A$ es precisamente la aplicación que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} CX & CX' \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ CX \arrow[u, "A"] & CX' \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "\varphi_* A"'] \end{tikzcd}$$

y es inmediato comprobar - por construcción - que φ_* es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

Es evidente que la correspondencia $X \rightsquigarrow OX$, $\varphi \rightsquigarrow \varphi_*$ define un funtor covariante

$$O : \mathcal{V}_{iso} \longrightarrow \mathcal{O}_{iso}$$

entre las categorías de variedades (con los difeomorfismos como morfismos) y la de $\mathbb{R}$-álgebras (con isomorfismos de álgebras como morfismos).

Sea ahora X una G-variedad con respecto a un homomorfismo $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$. Entonces, según (1.1.9.), OX es un G-objeto en la categoría de $\mathbb{R}$-álgebras. Además, se ve inmediatamente que los elementos invariantes bajo esta operación forman una $\mathbb{R}$-subálgebra de OX.

Consideremos ahora un anillo Λ , y una Λ-álgebra asociativa cualquiera O. En O se puede definir una nueva multiplicación, llamada corchete (bracket) o conmutador, $[\ ,\ ] : O \times O \longrightarrow O$, mediante

$$[A_1 , A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \quad , \quad A_1 , A_2 \in O .$$

Esta operación es bilineal y satisface (donde $A , A_1 , A_2 , A_3 \in O$):

a) $[A , A] = 0$

b) $[A_1 , [A_2 , A_3]] + [A_2 , [A_3 , A_1]] + [A_3 , [A_1 , A_2]] = 0$

La relación b) se llama identidad de Jacobi.

Tal multiplicación convierte a O en un álgebra de Lie, en el sentido siguiente:

DEFINICION (4.2.4.).

Un Λ-módulo O es un **álgebra de Lie** con respecto a una aplicación bilineal $[\ ,\ ] : O \times O \longrightarrow O$ cuando $[\ ,\ ]$ satisface las condiciones a) y b).

DEFINICION (4.2.5.).

Un **homomorfismo** $h : O \longrightarrow O'$ de álgebras de Lie O, O' sobre un anillo Λ es una aplicación $h : O \longrightarrow O'$ Λ-lineal que satisface

$$h\left[A_1, A_2\right] = \left[hA_1, hA_2\right] \quad , \quad A_1, A_2 \in O .$$

La construcción realizada más arriba hace corresponder a cada Λ-álgebra asociativa un álgebra de Lie. Asimismo, en virtud de la definición de $[\ ,\ ]$, cada homomorfismo $h : O \longrightarrow O'$ de Λ-álgebras asociativas es un homomorfismo de las correspondientes álgebras de Lie. Queda pués definido un functor covariante

$${}_\Lambda\mathcal{O}\!\mathcal{l}_{as} \longrightarrow {}_\Lambda\mathcal{L}\mathcal{O}\!\mathcal{l}$$

entre las categorías de ${}_\Lambda\mathcal{O}\!\mathcal{l}_{as}$ de Λ-álgebras asociativas y $\mathcal{L}\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ de Λ-álgebras de Lie.

Aplicando esto a la $\mathbb{R}$-álgebra de operadores sobre X, obtenemos:

PROPOSICION (4.2.6.):

Sea X una G-variedad con respecto a $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$, y $(\mathcal{T}_g)_* A =$
$= \mathcal{T}_g^{*-1} \circ A \circ \mathcal{T}_g^*$, $A \in OX$.

Esta operación convierte a OX en un G-conjunto, y conserva las estructuras de $\mathbb{R}$-álgebra y $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de OX. En particular, los elementos invariantes por la operación constituyen una $\mathbb{R}$-álgebra y $\mathbb{R}$-álgebra de Lie, respectivamente.

Como consecuencia de (1.1.10.), (1.2.9.) y (1.2.12.) resulta:

PROPOSICION (4.2.7.):

Sea X una G-variedad, X' una G' -variedad y φ: $X \longrightarrow X'$ un difeomorfismo ρ-equivariante con respecto a un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$. Entonces $\varphi_* : OX \longrightarrow OX'$ es ρ-equivariante con respecto a las operaciones definidas en (4.2.6.). Además, φ_* transforma operadores G-invariantes sobre X en operadores ρ(G)-invariantes sobre X'.

Ahora aplicaremos estos resultados a los campos de vectores. Si A es un campo de vectores. Si A es un campo de vectores, se tiene, para $f \in CX$:

$$(Af)(x) = A_x f = \frac{d}{dt} f(\gamma_t)\Big|_{t=0} ,$$

donde A_x es un vector tangente en $x \in X$ y γ_t la representación paramétrica de una curva $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow X$ que pasa por x y tiene la dirección de A_x.

Un campo de vectores $A : CX \longrightarrow CX$ cumple las siguientes propiedades que son características :

(i) $A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2$,

(ii) $A(f_1 f_2) = Af_1 . f_2 + f_1 . Af_2$,

(iii) $A(\lambda) = 0$,

donde $f_1, f_2 \in CX$ y $\lambda \in \mathbb{R} \subset CX$.

Como consecuencia resulta que

$$A(\lambda f) = \lambda A(f) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R} , \; f \in CX ,$$

de manera que A es lineal.

Llamaremos DX al conjunto de los campos de vectores sobre X. Es obvio que DX es un subespacio vectorial de OX, pero sin embargo no es una $\mathbb{R}$-subálgebra, puesto que $A_1, A_2 \in DX$ no implica que $A_1 . A_2 \in DX$.

Se cumple en cambio $[A_1 , A_2] = A_1 A_2 - A_2 A_1 \in DX$, es decir, DX es una subálgebra de. OX con respecto a la estructura de $\mathbb{R}$-álgebra de Lie. La veracidad de este hecho resulta fácilmente a partir de la definición de DX.

Sea ahora $\varphi : X \longrightarrow X'$ un difeomorfismo entre variedades. Como ya vimos, $\varphi_* : OX \longrightarrow OX'$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.

En particular, si $A \in DX$, no ofrece dificultad comprobar que $\varphi_* A = \varphi^{*-1} \circ A \circ \varphi^* \in DX'$, y por lo tanto

$$\varphi_* : DX \longrightarrow DX' \quad ,$$

es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} OX & \xrightarrow{\varphi_*} & OX' \\ \uparrow{\scriptstyle i} & & \uparrow{\scriptstyle i'} \\ DX & \xrightarrow{\varphi_*} & DX' \end{array}$$

conmuta, donde i, i' son las inyecciones naturales.

Entonces, como consecuencia de (4.2.6.) obtenemos :

<u>COROLARIO</u> (4.2.9.):

Si X es una G-variedad , DX es una G - $\mathbb{R}$-álgebra de Lie con respecto a la operación $\mathcal{T}$ definida por $(\mathcal{T}_g)_* A = \varphi^{*-1} \circ A \circ \varphi^*$. En particular, los elementos invariantes de DX constituyen una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie.

<u>COROLARIO</u> (4.2.10.):

Sean X, X' G, G'-variedades, respectivamente, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo y $\varphi : X \longrightarrow X'$ un difeomorfismo que es una ρ-equivariancia. Entonces $\varphi_* : DX \longrightarrow DX'$ es ρ-equivariante con respecto a las operaciones de (4.2.6.). En particular, los elementos invariantes constituyen una $\mathbb{R}$-subálgebra y una $\mathbb{R}$-subálgebra de Lie, respectivamente.

Daremos ahora una forma explícita del efecto producido por φ_* sobre los campos de vectores

LEMA (4.2.11.).

Sea $\varphi : X \longrightarrow X'$ un difeomorfismo, $x \in X$ y $f' \in CX'$. Entonces $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} f' = A_x(\varphi^* f')$. Además, si $\varphi_{*x} : T_x(X) \longrightarrow T_{\varphi(x)}(X')$ es la aplicación tangente inducida por φ, entonces $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} = \varphi_{*x} A_x$.

Demostración: $(\varphi_* A)_{\varphi(x)} f' = [(\varphi_* A) f'] [\varphi(x)] =$

$= [\varphi^*((\varphi_* A) f')] (x) = [(A \varphi^*) f'] (x) =$

$= [A(\varphi^* f')] (x) = A_x(\varphi^* f')$.

Para la segunda parte, recordamos que la aplicación tangente inducida por φ está definida mediante

$$(\varphi_{*x} A_x) f' = A_x(\varphi^* f')$$

Esta fórmula y la primera parte de la tesis dan el resultado querido. ⊠

****

§ 4.3. ALGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE LIE.

Sea G un grupo de Lie.

DEFINICION (4.3.1.).

El **álgebra de Lie LG del grupo de Lie G** es la $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de los campos de vectores invariantes con respecto a la operación de G sobre sí mismos por traslaciones a izquierda.

Sea pues $A \in DG$. Será $A \in LG$ cuando $(L_g)_* A = A$ para todo $g \in G$. Que LG es efectivamente un álgebra de Lie surge claramente de (4.2.9.).

El siguiente lema asegura que LG es suficientemente rico. Designamos con G_g al espacio tangente en $g \in G$, y con e a la identidad de G.

LEMA (4. 3. 2.):

Para cada $A_e \in G_e$ existe un único $\tilde{A} \in LG$ tal que $\tilde{A}_e = A_e$.

Demostración: Si existe tal $\tilde{A}$, deberá cumplirse

$$\tilde{A}_g = ((L_g)_* \tilde{A})_g = (L_g)_{*_e} A_e \quad ,$$

lo cual prueba la unicidad.

Para probar la existencia de $\tilde{A}$, definimos

$$\tilde{A}_g = (L_g)_{*_e} A_e \ .$$

Debemos probar la invarianca y la diferenciabilidad de $\tilde{A}$.

La invariancia de $\tilde{A}$ significa que

$$(L_\gamma)_* \tilde{A} = \tilde{A} \quad , \qquad \gamma \in G \ ,$$

lo cual está asegurada por la cadena de igualdades

$$((L_\gamma)_* \tilde{A})_{\gamma g} = (L_\gamma)_{*_g} \tilde{A}_g = (L_\gamma)_{*_g} (L_g)_{*_e} A_e = (L_\gamma \circ L_g)_{*_e} A_e =$$
$$= (L_{\gamma g})_{*e} A_e = \tilde{A}_{\gamma g} \quad ,$$

puesto que cualquier elemento de G puede escribirse de la manera γg, con g fijo.

La diferenciabilidad de $\tilde{A}$ significa que

$$\tilde{A} : CG \longrightarrow CG \ .$$

Para ver esto, notemos que, para $f \in CG$

$$(\tilde{A} f)(g) = \tilde{A}_g f = \left[(L_g)_{*_e} A_e\right] f = A_e (L_g^* f)$$

Si I es un intervalo de $\mathbb{R}$ que contiene el punto O y $\gamma : I \longrightarrow G$ una cur va diferenciable en G tal que $\frac{d}{dt}\gamma_t\Big|_{t=0} = A_e$, el último miembro coincide con

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(L_g^* f)(\gamma_t)\right]_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} f(g\,\gamma_t)\Big|_{t=0} ,$$

que depende diferenciablemente de g, por lo cual lo mismo ocurre con $\tilde{A}f$. Es decir , $\tilde{A}f \in CG$.

⊠

La correspondencia $A_e \rightsquigarrow \tilde{A}$ establecida por el lema define una aplicación $\mathbb{R}$-lineal

$$æ : G_e \longrightarrow LG$$

que es evidentementemente biyectiva, y por consiguiente un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. Es decir, hemos probado :

<u>TEOREMA</u> (4.3.3.).

La aplicación $æ : G_e \longrightarrow LG$ definida mediante $[æ(A_e)]_g =$ $= (Lg)_{*e} A_e$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

Esto permite definir sobre G_e una estructura de álgebra de Lie, con la cual G_e es frecuentemente denominado el álgebra de Lie de G.

Una consecuencia inmediata es el:

<u>COROLARIO</u> (4.3.4.):

La dimensión de LG como espacio vectorial coincide con la de G.

La fórmula $\tilde{A}g = (Lg)_{*e} A_e$ define pues un isomorfismo

$$(Lg)_* : G_e \longrightarrow Gg$$

para todo $g \in G$.

Más generalmente, también será un isomorfismo la aplicación

$$P(g_1, g_2) : Gg_1 \longrightarrow Gg_2 \quad ; \quad g_1, g_2 \in G ,$$

definida como

$$P(g_1 , g_2) = (Lg_2)_{*_e} \circ (Lg_1)_{*_e}^{-1} \quad ,$$

que posee además las siguientes propiedades :

1) $P(g_2 , g_3) \circ P(g_1 , g_2) = P(g_1 , g_3) \quad , \qquad g_1 , g_2 , g_3 \in G$;

2) $P(g , g) = 1_{G_g} \quad , \qquad g \in G$.

DEFINICION (4.3.5.).

Una variedad X que posee una familia de aplicaciones lineales $P(g_1 , g_2)$: : $Tg_1(X) \longrightarrow Tg_2(X)$, $g_1 , g_2 \in X$ que satisfacen las relaciones

1) $P(g_2 , g_3) \circ P(g_1 , g_2) = P(g_1 , g_3)$,

2) $P(g , g) = 1_{Tg}$,

se llama una **variedad paralelizable** (con respecto a P). P se llama **paralelismo** sobre X.

En vista de las consideraciones efectuadas, obtenemos:

COROLARIO (4.3.6.).

La variedad subyacente de un grupo de Lie G es paralelizable.

Sea X una variedad de dimensión n paralelizable y $e \in X$ un punto fijo. Sea A_{i_e} , $i = 1 , \ldots , n$, una base de $Te(X)$; tal base determina sobre X n campos de vectores $\tilde{A}_i$ definidos mediante

$$\tilde{A}_{i_g} = P(e , g)\, A_{i_e} \quad ,$$

y puesto que, según surge claramente de la definición, $P(g_1 , g_2)$ es un isomorfismo, resulta que para cada $g \in X$ los vectores $\tilde{A}_{i_g}$ constituyen una base de $Tg(X)$.

Ejemplo (4.3.7.):

Puesto que el espacio tangente al grupo de Lie $\mathbb{R}$ en la identidad es isomorfo a $\mathbb{R}$, de (4.3.3) obtenemos que $L\,\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Entonces la estructura de álgebra de Lie en $L\,\mathbb{R}$ está dada por la multiplicación trivial, puesto que ésta es la única posible en $\mathbb{R}$. Análogamente, si $\mathbb{T} = \mathbb{R}/Z$, resulta $L\mathbb{T} = \mathbb{R}$.

Consideremos ahora un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión n. Sea $G = GL(V)$ su grupo de automorfismos que, como sabemos, es isomorfo a $GL(n\,;\,\mathbb{R})$ y es un abierto del álgebra $\mathcal{L}(V)$ de endomorfismos de V. El espacio tangente G_g se identifica con $\mathcal{L}(V)$ para todo $g \in G$, y la multiplicación en $GL(V)$ es la restricción de la aplicación bilineal $\mathcal{L}(V) \times \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ que define la multiplicación en $\mathcal{L}(V)$. Esto muestra que $(Lg)_{*\gamma} A_\gamma = gA_\gamma$, para $g \in GL(V)$ y $A_\gamma \in G_\gamma$ identificando con $\mathcal{L}(V)$.

A base de esto, mostraremos:

<u>PROPOSICION</u> (4.3.8.):

Con la identificación canónica de $L(GL(V))$ con el espacio tangente en la identidad, se cumple $L(GL(V)) = \mathcal{L}(V)$, como álgebras de Lie.

<u>Demostración:</u> La tesis significa que el álgebra de Lie del álgebra asociativa $\mathcal{L}(V)$ coincide con el álgebra de Lie del grupo de Lie $GL(V)$.

Para ver esto, sea $A_1, A_2 \in L(GL(V))$, y consideremos

$$[A_1, A_2]_g = \left(\frac{d}{dg} A_{2g}\right)(g)\, A_{1g} - \left(\frac{d}{dg} A_{1g}\right)(g)\, A_{2g} \quad ,$$

fórmula que es válida en toda la carta globar dada por la inmersión $GL(V) \subset \mathcal{L}(V)$. Puesto que $A_{ig} = g A_{ie}$, obtenemos $\left(\frac{d}{dg} A_{ig}\right)(g)\, A_{jg} = A_{jg} A_{ig}$, lo cual prueba que

$$[A_1, A_2]_g = A_{1g} A_{2g} - A_{2g} A_{1g} = [A_{1g}, A_{2g}] \quad ,$$

que es, haciendo $g = e$, el resultado buscado, puesto que el miembro derecho es el conmutador en $\mathcal{L}(V)$.

Hemos definido el álgebra de Lie LG de un grupo de Lie G considerando la opera_ ción de G sobre sí mismo por traslaciones a izquierda. Si efectuamos la misma construcción con las traslaciones a derecha obtendremos otra álgebra de Lie RG, a saber, el álgebra de Lie de los campos de vectores invariantes a derecha. Tal como hicimos en (4.3.3.), podemos definir un isomorfismo $G_e \longrightarrow RG$ de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, obteniendo así que $LG \cong RG$, como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

En § 4.6. veremos que hay también un isomorfismo natural es de las estructuras de $\mathbb{R}$-álgebras de Lie.

Ejercicio (4.3.9.):

Sea G un grupo de Lie, CG el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las funciones reales sobre G, DG la $\mathbb{R}$-álgebra de Lie de todos los campos de vectores sobre G, y LG el álgebra de Lie de G. Probar que

$$DG = CG \otimes_{\mathbb{R}} LG .$$

****

§ 4.4. EFECTO DE APLICACIONES SOBRE OPERADORES Y CAMPOS DE VECTORES.

Hasta ahora hemos hecho corresponder a cada grupo de Lie un álgebra de Lie, es decir, hemos establecido una aplicación entre los objetos de las correspondientes categorias. Para extender tal aplicación a un funtor , es necesario definir también la correspondencia sobre los morfismos. Hasta el momento (en § 4.2.) hemos estudiado el efecto de difeomorfismos sobre operadores; ahora generalizaremos tales consideraciones a cualquier aplicación (es decir, diferenciable).

Sean X , X' variedades y A , A' operadores sobre X , X' , respectivamente. Sea $\varphi : X \longrightarrow X'$ una aplicación (diferenciable), pero no necesariamente un difeomorfismo.

DEFINICION (4.4.1.).
A y A' se llaman **φ-relacionados** cuando el diagrama siguiente

conmuta:

$$\begin{tikzcd} CX & CX' \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ CX \arrow[u, "A"] & CX' \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "A'"'] \end{tikzcd}$$

Observemos que, en particular, si φ es un difeomorfismo, entonces A y $\varphi_* A$ (definido en § 4.2.) son φ-relacionados. En el caso general φ^{*-1} no existe necesariamente y por consiguiente $\varphi_* A$ no está definido. Entonces, para un A dado, no podemos afirmar la existencia de algún A' que cumpla la definición, ni tampoco, en caso de existir, asegurar su unicidad.

LEMA (4.4.2.).

(i) Sean A_i y A'_i, $i = 1,2$ operadores φ-relacionados en X y X' respectivamente. Entonces los siguientes pares de operadores también están φ-relacionados:

$$\begin{array}{lcl} A_1 + A_2 & \text{y} & A'_1 + A'_2 \ , \\ A_1 A_2 & \text{y} & A'_1 A'_2 \ , \\ [A_1, A_2] & \text{y} & [A'_1, A'_2] \ ; \end{array}$$

(ii) Si A y A' son operadores φ-relacionados, entonces para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, λA y $\lambda A'$ están φ-relacionados.

Demostración: Sea $f' \in CX'$; entonces

$$\varphi^* [(A'_1 + A'_2) f'] = \varphi^* (A'_1 f' + A'_2 f') = \varphi^* (A'_1 f') + \varphi^* (A'_2 f') =$$
$$= A_1 (\varphi^* f') + A_2 (\varphi^* f') = (A_1 + A_2)(\varphi^* f') \quad ,$$

lo cual prueba que $A_1 + A_2$ y $A'_1 + A'_2$ están φ-relacionados.

Que $A_1 A_2$ y $A'_1 A'_2$ también lo están resulta inmediatamente de la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd} CX \arrow[r, "A_1"] & CX \arrow[r, "A_2"] & CX \\ CX' \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "A'_1"'] & CX' \arrow[u, "\varphi^*"] \arrow[r, "A'_2"'] & CX' \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

y que para los corchetes vale la misma afirmación, resulta de lo anterior y de (ii). Y (ii) se justifica mediante:

$$\varphi^* \left[(\lambda A')f'\right] = \varphi^* \left[\lambda (A'f')\right] = \varphi^*\lambda \, . \, \varphi^*(A'f') =$$
$$= \lambda . A(\varphi^* f') = (\lambda A)(\varphi^* f') .$$

⊠

El lema probado se aplica, en particular, a campos de vectores. En este caso, la noción de φ -relación puede explicitarse mediante la

PROPOSICION (4.4.3.):

A y A' son campos de vectores (en X y X' respectivamente) φ -relacionados, si y sólo si para cada $x \in X$ se cumple $\varphi_{*_x} A_x = A'_{\varphi(x)}$. (donde φ_* es la aplicación tangente definida por φ).

Observación: No debe pensarse que para cada A se puede definir a A' mediante $A'_{\varphi(x)} = \varphi_{*_x} A_x$ como campo de vectores, puesto que al no ser φ necesariamente inyectivo puede suceder que aparezcan dos diferentes valores de A' en un mismo punto, por lo cual A' no sería un campo de vectores. Nótese que en la proposición enunciada, A' es un campo de vectores por hipótesis.

Demostración: Sea $f' \in CX'$; entonces, por definición de φ_{*_x} :

$$(\varphi_{*_x} A_x) f' = A_x(\varphi^* f') = \left[A(\varphi^* f')\right] (x) ,$$

y por otra parte

$$A'_{\varphi(x)} f' = (A'f')(\varphi(x)) = \left[\varphi^*(A'f')\right](x).$$

⊠

§ 4.5. EL FUNTOR L.

A cada grupo de Lie G le hemos hecho corresponder su álgebra de Lie LG. Queremos ahora extender esta correspondencia a un functor entre las categorías respectivas.

LEMA (4.5.1.).

Sean G y G' grupos de Lie y $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces, para cada $A \in LG$ existe un único $A' \in LG'$ tal que A y A' son ρ-relacionados.

Demostración: Supongamos que, dado A, existe tal A'. En tal caso, por (4.4.3.) deberá cumplirse $A'_{e'} = \rho_{*_e} A_e$, donde e y e' son las identidades de G y G' respectivamente. Puesto que existe un único $\tilde{A}' \in LG'$ tal que $\tilde{A}'_{e'} = A'_e$, la unicidad de A' queda probada.

Definamos pues A' como al único elemento de LG' que satisface $A'_e = \rho_{*_e} A_e$. Resta probar que A y A' están ρ-relacionados, lo cual se obtiene de :

$$A'_{\rho(g)} = (L_{\rho(g)})_* A'_{e'} = (L_{\rho(g)})_{*_e} \rho_{*_e} A_e = (L_{\rho(g)} \circ \rho)_{*_e} A_e =$$

$$= (\rho \circ L g)_{*_e} A_e = \rho_{*_g} (L g)_{*_e} A_e = \rho_{*_g} A_g$$

⊠

Obsérvese que en la demostración efectuada sólo se utiliza la restricción de ρ a un entorno abierto de la identidad. Esta circunstancia sugiere dar la siguiente:

DEFINICION (4.5.2).

Sean G y G' grupo de Lie. Un **homomorfismo local** $G \longrightarrow G'$ definido en un entorno abierto U de la identidad e de G, es una aplicación $\rho: U \longrightarrow G'$ tal que, para todo par $g_1, g_2 \in U$ que cumple $g_1 g_2 \in U$, satisface la relación

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1)\ \rho(g_2).$$

Por ejemplo, la restricción de un homomorfismo $\rho: G \longrightarrow G'$ a un entorno abierto de e es un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$. Pero no todo homomorfismo local es la restricción de un homomorfismo.

Si identificamos cada aplicación con sus restricciones a los abiertos del dominio, podremos componer homomorfismos locales. De tal manera queda definida la categoría $\mathcal{LG}$ de grupos de Lie, cuyos objetos son los grupos de Lie y cuyos morfismos son los homomorfismos locales.

Una equivalencia en $\mathcal{LG}$ se llama un isomorfismo local de grupos de Lie; más explícitamente:

<u>DEFINICION</u> (4.5.3.).

Dos grupos de Lie G y G' son **<u>localmente isomorfos</u>** cuando existen dos abiertos U y U' tales que $e \in U \subset G$ y $e' \in U' \subset G'$ y un difeomorfismo $\rho : U \longrightarrow U'$ tal que ρ y su inverso $\rho^{-1} : U' \longrightarrow U$ son homomorfismos locales.

En virtud de la observación hecha de que la demostración de (4.5.1.) sólo utiliza la restricción de ρ a un entorno abierto de la identidad, obtenemos :

<u>TEOREMA</u> (4.5.4.).

Sean G y G' grupos de Lie, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local. Entonces la fórmula $(L(\rho)A)_{e'} = \rho_{*e} A_e$, para $A \in LG$, define un homomorfismo de álgebras de Lie $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_e \arrow[r, "\rho_{*e}"] \arrow[d, "æ"'] & G'_e \arrow[d, "æ"] \\ LG \arrow[r, "L(\rho)"] & LG' \end{tikzcd}$$

conmuta, donde æ es el isomorfismo definido en (4.3.3.). Además, los campos vectoriales $A \in LG$ y $L(\rho)A \in LG'$ son ρ-re lacionados.

Demostración: Ya todo ha sido probado en (4. 5. 1.), excepto el hecho que $L(\rho)$ es un homomorfismo, lo cual es una consecuencia de (4. 4. 2.).

⊠

Observemos que cada homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$ define de manera análoga un homomorfismo $R(\rho) : RG \longrightarrow RG'$ de las álgebras de Lie de campos vectoriales invariantes a derecha.

Como complemento de (4. 5. 4.) podemos enunciar:

PROPOSICION (4. 5. 5.):

Si $\rho : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo, entonces $L(\rho) = \rho_* \big| LG$, donde $\rho_* : DG \longrightarrow DG'$ es la aplicación definida en § 4.2..

Demostración: Hay que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "L(\rho)"] \arrow[d, "i"'] & LG' \arrow[d, "i"] \\ DG \arrow[r, "\rho_*"] & DG' \end{tikzcd}$$

donde i es la inyección natural, conmuta. En efecto, si $A \in LG$, se tiene :

$$(L(\rho)A)_{\rho(g)} = (L_{\rho(g)})_{*e} \; \rho_{*e} \; A_e = \rho_* (Lg)_{*e} A_e \quad ,$$

y por otra parte, según (4. 2.) :

$$(\rho_* A)_{\rho(g)} = \rho_{*g} A g$$

⊠

Conviene tal vez observar que en general no se puede definir $L(\rho)$ mediante ρ_*, pues ρ_* sólo tiene sentido cuando ρ es un difeomorfismo. Sin embargo, como hemos visto, $L(\rho)$ puede definirse para cualquier homomorfismo local ρ .

De (4. 5. 4.) resulta inmediatamente :

<u>TEOREMA</u> (4.5.6.).

La correspondencia $G \rightsquigarrow LG$, $\rho \rightsquigarrow L(\rho)$ define un funtor covariante $L : \mathcal{LG} \longrightarrow \mathcal{LO}$ entre la categoría de grupos de Lie y homomorfismos locales y la categoría de $\mathbb{R}$-álgebras de Lie y homomorfismos de álgebras de Lie.

También podemos considerar el funtor definido por la correspondencia $G \rightsquigarrow G_e$, $\rho \rightsquigarrow \rho_{*e}$. La conmutatividad del diagrama de (4.5.4.) expresa que $æ$ es una transformación natural de este funtor en L, más aún, una equivalencia natural.

Además, puesto que L transforma equivalencias en $\mathcal{LG}$ en equivalencias en $\mathcal{LO}$, resulta :

<u>COROLARIO</u> (4.5.7.):

Las álgebras de Lie de grupos de Lie localmente isomorfos, son isomorfas.

Aplicaremos este resultado a la inyección natural $G_0 \longrightarrow G$ de la componente conexa G_0 de la identidad de G, que es un isomorfismo local. Se tiene pues $LG_0 \cong LG$, lo cual muestra que el álgebra de Lie de G está determinada por G_0, más aún, por cualquier entorno de la identidad.

<u>Ejemplo</u> (4.5.8.):

El homomorfismo canónico $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es un isomorfismo local. En consecuencia, $L\,\mathbb{R} \cong L\,\mathbb{T}$, hecho que ya hemos apuntado.

El lema siguiente, junto con (4.5.8), muestra que un homomorfismo de álgebras de Lie no proviene necesariamente de un homomorfismo de los grupos de Lie (aunque, como más adelante probaremos, siempre proviene de un homomorfismo local).

<u>LEMA</u> (4.5.9.).

Si $\rho : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo, entonces $\rho = 0$.

Demostración: Puesto que $\rho(\mathbb{T})$ es compacto, está contenido en un intervalo $I \subset R$. Si fuera $\rho \neq 0$ existiría un $t \in \mathbb{T}$ tal que $\rho(t) \neq 0$, y por consiguiente, se cumpliría $n\rho(t) = \rho(nt) \notin I$ para un entero n suficientemente grande, lo cual es una contradicción.

⊠

Puesto que $\rho = 0$ no induce el homomorfismo identidad $L\mathbb{R} \cong L\mathbb{T}$, queda justificada la afirmación inmediata anterior a (4.5.9.).

Ejemplo (4.5.10.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\tau : G \longrightarrow GL(V)$ una representación del grupo de Lie G en V. Hemos probado en (4.3.8.) que $\mathcal{L}(V)$ es el álgebra de Lie de $GL(V)$. La aplicación τ es entonces, según puede probarse, diferenciable, y por consiguiente induce un homomorfismo $L(\tau) : LG \longrightarrow \mathcal{L}(V)$.

DEFINICION (4.5.11.).

Sea Λ un anillo, V un Λ-módulo y $\mathcal{L}(V)$ la Λ-álgebra de Lie de los Λ-endomorfismos de V. Si O es una Λ-álgebra de Lie, una **representación** de O en V es un homomorfismo $\sigma : O \longrightarrow \mathcal{L}(V)$. En tal caso V se llama un O-módulo con respecto a σ.

Entonces, según (4.5.10.), una representación de un grupo de Lie en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita V define una representación del álgebra de Lie LG en V.

Siguiendo el ejemplo (4.5.9.), una representación de un grupo de Lie G es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita define una representación del álgebra de Lie LG en V.

Consideremos ahora el homomorfismo $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, donde $\mathbb{R}^*$ es el grupo multiplicativo de los reales no nulos. El álgebra de Lie de $\mathbb{R}^*$ es $\mathbb{R}$. Probaremos que:

PROPOSICION (4. 5. 12.):

El homomorfismo $\mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ de álgebras de Lie inducido por el homomorfismo $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ es la aplicación traza.

Demostración: Sea $A \in \mathscr{L}(V)$, y α_t una curva en $GL(V)$, con $\alpha_0 = e$, $\dot{\alpha}_0 = A$. Entonces,

$$\det{}_{*e} A = \frac{d}{dt} \left\{ \det \alpha_t \right\} \Big|_{t=0}$$

Sea n la dimensión de V. Para cualquier n-forma ω sobre V no degenerada y cualquier n- upla de vectores $v_1, \ldots, v_n$ de V, se cumple

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) . \det \alpha_t = \omega(\alpha_t v_1, \ldots, \alpha_t v_n) ,$$

y por lo tanto

$$\omega(v_1, \ldots, v_n) . \det{}_{*e} A = \frac{d}{dt} \left\{ \omega(\alpha_t v_1, \ldots, \alpha_t v_n \right\} \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_i \omega(\alpha_t v_1, \ldots, \alpha_t v_{i-1}, \dot{\alpha}_t v_i, \alpha_t v_{i+1}, \ldots, \alpha_t v_n) \Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_i \omega(v_1, \ldots, A v_i, \ldots, v_n) = \omega(v_1, \ldots, v_n) . \operatorname{tr} A ,$$

lo cual prueba que $\det_{*e} A = \operatorname{tr} A$. En virtud de (4. 5. 4.), sigue la tesis. ⊠

COROLARIO (4. 5. 13.):

$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, si $A, B \in \mathscr{L}(V)$.

Demostración: Puesto que $\operatorname{tr} : \mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, se cumple, para $A, B \in \mathscr{L}(V)$:

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}[A, B] = [\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B] = 0$$

puesto que el último corchete es el trivial en $\mathbb{R}$. ⊠

Ejemplo (4. 5. 14.):

Sea G un grupo de Lie y

$$0 \longrightarrow G_e \longrightarrow TG \longrightarrow G \longrightarrow e$$

la sucesión exacta considerado en (3.1.9.) y (3.2.8.), que induce una sucesión (que según veremos en (7.5.6.) es exacta)

$$0 \longrightarrow L(G_e) \longrightarrow L(TG) \longrightarrow LG \longrightarrow 0$$

con homomorfismos de álgebras de Lie, y donde vale además $LG_e \cong G_e$ (ver (4.6.)). La inclusión $G \longrightarrow TG$ induce un homomorfismo $LG \longrightarrow L(TG)$.

****

§ 4.6. CONSECUENCIAS DEL CARACTER FUNCTORIAL DE L.

(4.6.1.) Algebra de Lie de un grupo producto : Sean G_1 y G_2 grupos de Lie y $G_1 \times G_2$ el grupo de Lie producto. Las proyecciones canónicas

$$p_i = G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i \quad , \quad i = 1, 2$$

son homomorfismos de grupos de Lie y por lo tanto inducen homomorfismos

$$L(p_i) : L(G_1 \times G_2) \longrightarrow LG_i \quad , \quad i = 1, 2$$

de álgebras de Lie.

Sean e_1 y e_2 las identidades de G_1 y G_2, respectivamente. En virtud de (4.5.4.), el siguiente diagrama, que expresa la naturalidad de $\ae$, conmuta :

$$\begin{tikzcd}
& G_1 \arrow[dd, "\ae_{G_1}"] & \\
(G_1 \times G_2)_{(e_1, e_2)} \arrow[ur, "p_{1*(e_1, e_2)}"] \arrow[rr, "p_{2*(e_1, e_2)}"] \arrow[dd, "\ae_{G_1 \times G_2}"'] & & G_2 \arrow[dd, "\ae_{G_2}"] \\
& LG_1 & \\
L(G_1 \times G_2) \arrow[ur, "L(p_1)"] \arrow[rr, "L(p_2)"] & & LG_2
\end{tikzcd}$$

En este diagrama, las flechas verticales son isomorfismos.

El isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal

$$(G_1 \times G_2)^{\cdot}_{(e_1, e_2)} \cong G_{1e_1} \times G_{2e_2}$$

implica pues el isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales

$$L(G_1 \times G_2) \cong LG_1 \times LG_2 .$$

Si designamos

$$q_i : LG_1 \times LG_2 \longrightarrow LG_i \quad , \quad i = 1, 2 ,$$

a las proyecciones naturales, tal isomorfismo está dado por el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
L(G_1 \times G_2) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "L(p_1)"'] \arrow[drr, "L(p_2)"] & & LG_1 \times LG_2 \arrow[dll, "q_1"'] \arrow[d, "q_2"] \\
LG_1 & & LG_2
\end{tikzcd}$$

Nuestro propósito es transportar a $LG_1 \times LG_2$ la estructura de álgebra de Lie de $L(G_1 \times G_2)$.

Para $A \in L(G_1 \times G_2)$, se tiene $\alpha(A) = (L(p_1)A , L(p_2)A) = (A_1 , A_2)$, con $A_i = L(p_i)A$, $i = 1, 2$, y análogamente, si $A' \in L(G_1 \times G_2)$:

$$\alpha(A') = (L(p_1)A' , L(p_2)A') = (A'_1 , A'_2) .$$

Entonces, puesto que $L(p_i)$, $i = 1, 2$, son homomorfismos de álgebras de Lie, se cumple :

$$\alpha [A , A'] = (L(p_1) [A, A'] , L(p_2) [A, A']) = ([A_1, A'_1] , [A_2, A'_2])$$

Definimos ahora :

$$\left[\alpha(A),\ \alpha(A')\right] = \alpha\left[A, A'\right] ,$$

lo cual significa

$$(*) \qquad \left[(A_1, A_2), (A'_1, A'_2)\right] = \left(\left[A_1, A'_1\right], \left[A_2, A'_2\right] \right), \quad A_i, A'_i \in LG_i \ (i=1,2)$$

Con tal definición, α es un isomorfismo.

Más generalmente, sea Λ un anillo y O_1, O_2 Λ-álgebras de Lie. Consideremos el módulo producto $O_1 \times O_2$ con la aplicación bilineal

$$[\ ,\ ] : (O_1 \times O_2) \times (O_1 \times O_2) \longrightarrow O_1 \times O_2$$

definida por (*). Entonces $O_1 \times O_2$ es una Λ-álgebra de Lie.

DEFINICION (4.6.2.).

El **producto directo** de dos Λ-álgebras de Lie O_1 y O_2 es el álgebra de Lie $O_1 \times O_2$ con la multiplicación definida mediante (*).

Concluímos entonces:

PROPOSICION (4.6.3.):

Sea $G_1 \times G_2$ el producto directo de los grupos de Lie G_1 y G_2. Entonces el álgebra de Lie $L(G_1 \times G_2)$ es canónicamente isomorfa al álgebra de Lie $L(G_1) \times L(G_2)$ producto directo de las álgebras de Lie LG_1 y LG_2.

Hacemos notar que conmutabilidad para la multiplicación en un álgebra de Lie significa que tal multiplicación es la trivial : $\left[A_1, A_2\right] = 0$ para todo par A_1, A_2, puesto que $\left[A_1, A_2\right] = -\left[A_2, A_1\right]$. Entonces resulta claro que el álgebra de Lie producto de dos álgebras de Lie conmutativas, es conmutativa.

Ejemplo (4.6.4.):

$L(\mathbb{R}^n) = L\mathbb{R} \times \ldots \times L\mathbb{R}$. Pero ya hemos visto que $L\mathbb{R} = \mathbb{R}$, con la estructura trivial de álgebra de Lie ; entonces $L(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, con la estructura trivial. Análogamente se prueba que $L(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n$.

(4.6.5.) <u>**Relación entre LG y RG.**</u> Sea G un grupo de Lie y G^o su opuesto. Definimos el isomorfismo

$$I : G \longrightarrow G^o$$

mediante

$$I(g) = g^{-1} \quad , \quad g \in G .$$

<u>LEMA</u> (4.6.6.).

$I_{*e} = - 1_{G_e}$.

<u>Demostración:</u> Consideremos la aplicación $\varphi : G \longrightarrow G$ definida por $\varphi(g) = g g^{-1} = e$. Puesto que φ es constante, se cumple $\varphi_{*g} = 0 : G_g \longrightarrow G_e$.

Pero por otra parte :

$$\varphi_{*g} = (R_{g^{-1}})_{*g} + (L_g)_{*g^{-1}} \, I_{*g} \quad ,$$

y por consiguiente

$$I_{*g} = -(L_g)^{-1}_{*g^{-1}} \circ (R_{g^{-1}})_{*g} = -(L_{g^{-1}})_{*e} \circ (R_{g^{-1}})_{*g}$$

Haciendo $g = e$ resulta la tesis.

⊠

Observemos que la fórmula

$$I_{*g} = -(L_{g^{-1}})_{*e} \circ (R_{g^{-1}})_{*g} \quad , \quad g \in G$$

que aparece en el curso de la demostración muestra que la aplicación tangente a $I : G \longrightarrow G$ está ya determinada en cada punto por las aplicaciones tangentes de las traslaciones. Este hecho puede ser usado para probar que la diferenciabilidad de la multiplicación $G \times G \longrightarrow G$ en un grupo que es una variedad implica la diferenciabilidad de $I : G \longrightarrow G$.

Sea ahora Λ un anillo y O una Λ-álgebra de Lie. El <u>**álgebra de Lie opuesta**</u> O^o es el Λ-módulo O con la estructura de álgebra de Lie definida mediante

$$\left[A_1, A_2\right]^{\circ} = \left[A_2, A_1\right] = -\left[A_1, A_2\right], \qquad A_1, A_2 \in O .$$

PROPOSICION (4.6.7.).

Sea G un grupo de Lie y G° su opuesto. Si se identifica LG con G_e y $L(G^{\circ})$ con G_e° mediante el isomorfismo canónico æ de (4.3.), entonces se cumple $L(G^{\circ}) = (LG)^{\circ}$, donde $(LG)^{\circ}$ es el álgebra de Lie opuesta de LG.

Demostración: En virtud de la identificación mencionada resulta $L(I) = I_{*_e}$ para el isomorfismo $I : G \longrightarrow G^{\circ}$. A $A_i \in LG$, $i = 1, 2$, le corresponde $I_{*_e} A_i = - A_i \in L(G^{\circ})$. A $\left[A_1, A_2\right] \in LG$ le corresponde por una parte $\left[- A_1, A_2\right]_{LG}$ y por otra $\left[-A_1, -A_2\right]_{L(G^{\circ})}$, puesto que I es un isomorfismo.

En consecuencia,

$$\left[A_1, A_2\right]_{L(G^{\circ})} = - \left[A_1, A_2\right]_{LG} = \left[A_1, A_2\right]_{(LG)^{\circ}} \qquad \boxtimes$$

COROLARIO (4.6.8.):

Sea G un grupo de Lie, LG el álgebra de Lie de los campos vectoriales invariantes a izquierda y RG la de los invariantes a derecha. Si se identifica LG y RG con G_e mediante el isomorfismo canónico æ, entonces $RG = (LG)^{\circ}$.

Demostración: Observemos que cada traslación a izquierda de G es una traslación a derecha de G°, y recíprocamente, de manera que $LG = R(G^{\circ})$ y $RG = L(G^{\circ})$.

En virtud de la identificación mencionada y de (4.6.7.), resulta la tesis.

$\boxtimes$

Esto prueba pues la existencia de un isomorfismo natural $RG \cong LG$.

Otra consecuencia inmediata es el

COROLARIO (4.6.9.):

Si un grupo de Lie G es conmutativo, entonces LG es conmutativa.

Demostración: La conmutatividad de G implica $RG = LG$. Pero $RG = (LG)^{\circ}$ y por lo tanto $LG = (LG)^{\circ}$.

⊠

Veremos en la sección § 6.2. que la proposición recíproca de (4.6.9.) es también verdadera si G es conexo.

****

§ 4.7. REPRESENTACION ADJUNTA DE UN GRUPO DE LIE.

Consideremos la operación de G sobre G -siendo G un grupo de Lie- dada por los automorfismo interiores $J: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ G$ (ef. (1.1.5.)). De acuerdo con (1.1.9.), el functor L transforma el G-grupo en una G-álgebra de Lie LG ; tal operación es la composición de los homomorfismos del diagrama

$$G \xrightarrow{J} \mathrm{Aut}\ G \xrightarrow{L} \mathrm{Aut}\ LG$$

DEFINICION (4.7.1.).

La representación adjunta de un grupo de Lie G es la representación de G en LG inducida por la operación de G sobre G dada por los automorfismos interiores. En símbolos, $\mathrm{Ad}\ g = L(J_g)$.

PROPOSICION (4.7.2.):

Sean G y G' grupos de Lie, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo. Entonces $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es una ρ-equivariancia con respecto a la representaciones adjuntas de G y G'.

Demostración: La tesis afirma que el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "L(\rho)"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}\ g"'] & LG' \arrow[d, "\mathrm{Ad}\ \rho(g)"] \\ LG \arrow[r, "L(\rho)"] & LG' \end{tikzcd}$$

Para ver esto basta notar que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "J_g"'] & G' \arrow[d, "J_{\rho(g)}"] \\ G \arrow[r] & G' \end{tikzcd}$$

conmuta (ef. (1.2.3.)) y tener en cuenta el carácter functorial de L. ⊠

Consideremos el isomorfismo canónico $\mathfrak{æ} : G_e \longrightarrow LG$ de (4.3.3.), que permite considerar a G_e como el álgebra de Lie de G. De (4.5.5.) resulta que el efecto de $Ad\, g : LG \longrightarrow LG$ sobre G_e está dado por la aplicación $(J_g)_{*e} : G_e \longrightarrow G_e$. Esto prueba que la operación de G sobre G_e definida en (3.2.8) es precisamente la representación adjunta, si consideramos a G_e identificado con LG.

Otra descripción de la representación adjunta está dada por la siguiente

PROPOSICION (4.7.3.):

Sea G un grupo de Lie y $Ad : G \longrightarrow Aut\; LG$ la representación adjunta. Entonces. $A \in LG$ implica $Ad\; g\; A = (R_{g^{-1}})_* A$.

Demostración: En virtud de (4.5.) se cumple

$$Ad\; g\; A = L(J_g)\, A = (J_g)_*\, A \quad ;$$

y por otra parte, si $A \in LG$,

$$(J_g)_* A = (R_{g^{-1}})_* (L_g)_* A = (R_{g^{-1}})_* A$$

⊠

Esto muestra que la operación de G sobre G por traslaciones a derecha defínde una operación a derecha de G sobre LG, y la representación adjunta describe precisamente el efecto de tal operación.

****
****
*

CAPITULO V . CAMPOS DE VECTORES Y GRUPOS A UN PARAMETRO DE TRANSFORMACIONES .

El álgebra de Lie de un grupo de Lie proporciona una detallada información sobre el grupo mismo. La clave para la comprensión de este hecho está dada por la relación existente entre campos de vectores y ecuaciones diferenciales ordinarias, el estudio de lo cual es el objeto de este capítulo.

§ 5.1. GRUPOS A UN PARAMETRO DE TRANSFORMACIONES.

DEFINICION (5.1.1.).

Una $\mathbb{R}$-variedad X se llama un grupo a un parámetro de transformaciones (abreviadamente, g. 1-p.t.).

Sea X una variedad y $\gamma : I \longrightarrow X$, $t \rightsquigarrow \gamma_t$, -donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al punto O- una curva en X. Si designamos $\dot{\gamma}_t = \frac{d}{dt}\gamma_t$ al vector tangente a γ en el punto γ_t, se cumple

$$\dot{\gamma}_t f = \frac{d}{dt} f(\gamma_t) \quad , \qquad f \in CX \; ,$$

fórmula que caracteriza a $\dot{\gamma}_t$.

Sea pues $\varphi : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, $(t, x) \rightsquigarrow \varphi_t(x)$ un grupo a un parámetro de transformaciones. Si para cada $x \in X$ definimos el vector

$$A_x = \frac{d}{dt}\varphi_t(x)\Big|_{t=0} = \dot{\varphi}_t(x)\Big|_{t=0}$$

(es decir $A_x f = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(x))\Big|_{t=0}$, $f \in CX$), entonces $A = \{A_x\}_{x \in X}$ es un campo de vectores sobre X.

Notemos que para definir A no hemos hecho uso del hecho que φ está globalmente definido, sino solamente de que está definido para t en un entorno de $O \in \mathbb{R}$. Esta consideración sugiere la siguiente

DEFINICION (5.1.2.).

Un **grupo local a un parámetro de transformaciones locales** (abreviadamente, gl. 1-p tl.) definido en un abierto U de X, es una aplicación $\varphi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$, $(t, x) \rightsquigarrow \varphi_t(x)$, donde I_ε es un intervalo abierto $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tal que :

a) para cada $t \in I_\varepsilon$, $\varphi_t : U \longrightarrow \varphi_t(U)$ es un difeomorfismo, y

b) si $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ y $\varphi_s(x) \in U$, entonces $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$.

Entonces, análogamente que en el caso global, la ecuación

$$A_x = \frac{d}{dt} \varphi_t(x)\Big|_{t=0} = \mathring{\varphi}_t(x)\Big|_{t=0}$$

tiene sentido para $x \in U$ y define un campo de vectores A sobre U, llamado el campo de vectores **inducido** por el gl. 1-p tl. φ.

Observemos que la propiedad b) que expresa el hecho que φ_t es un $\mathbb{R}$-grupo local no es necesaria para la definición del campo de vectores inducido. Sin embargo es esencial en la demostración de la proposición siguiente, la cual se puede expresar intuitivamente diciendo que el flujo provocado por φ en U es estacionario, es decir, independiente de t (piénsese t como el tiempo y $\varphi_t(x)$ la posición del punto x en el instante t).

PROPOSICION (5.1.3.):

Si A es el campo de vectores inducido por el gl. 1-p tl. $\varphi = I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$, entonces φ_t satisface la ecuación diferencial

$$\mathring{\varphi}_t(x) = A_{\varphi_t(x)} \quad , \quad t \in I_\varepsilon \ , \quad x \in U \ ,$$

y la condición inicial

$$\varphi_0(x) = x \ .$$

Demostración: Sea $f \in CX$; entonces, para cada $x \in U$ fijo, es

$$\dot{\varphi}_t(x) f = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) = \lim_{s \to 0} \cdot \frac{1}{s} \left[f(\varphi_{t+s}(x)) - f(\varphi_t(x)) \right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\frac{1}{s} f(\varphi_s(\varphi_t(x))) - f(\varphi_t(x)) \right] = \frac{d}{ds} f(\varphi_s(\varphi_t(x))) \Big|_{s=0} =$$

$$= A_{\varphi_t(x)} f .$$

⊠

COROLARIO (5.1.4.):

Sean $\varphi, \psi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ dos gl. 1-p tl. definidas en U. Si φ y ψ inducen los mismos campos de vectores, entonces coinciden.

La tesis no hace más que expresar que la solución de la ecuación diferencial $\dot{\varphi}_t(x) =$ $= A\varphi_t(x)$ con la condición inicial $\varphi_o(x) = x$, es única, lo cual es un resultado de la teoria de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ahora, aplicando el teorema de existencia de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, probaremos que:

PROPOSICION (5.1.5.):

Sea A un campo de vectores sobre X. Para cada $x \in X$ existe un $\varepsilon > 0$, un entorno U abierto de x , y un gl. 1-p tl. $\varphi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow X$ que induce el campo de vectores A sobre U .

Demostración: En virtud del teorema de existencia, la ecuación diferencial $\dot{\varphi}_t(x) = A\varphi_t(x)$ con la condición inicial $\varphi_o(x) = x$, tiene solución ; sea ésta $\varphi_t(x)$.

Veremos ahora que φ satisface la condición b) de la definición (5.1.2.) , es decir ,

$$\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$$

cuando ambos miembros están definidos. Si designamos $\alpha_1(t)$ al primero y $\alpha_2(t)$ al segundo (para cada $x \in U$ y $s \in I_\varepsilon$ fijos) se cumple

$$\dot{\alpha}_1(t) = \dot{\varphi}_t(\varphi_s(x)) = A\varphi_t(\varphi_s(x)) = A\alpha_1(t) ,$$

$$\dot{\alpha}_2(t) = \dot{\varphi}_{t+s}(x) = A\varphi_{t+s}(x) = A\alpha_2(t) .$$

Es decir α_1 y α_2 satisfacen la misma ecuación diferencial. Además $\alpha_1(o) = \alpha_2(o) = \varphi_s(x)$, de manera que el teorema de unicidad de ecuaciones diferenciales asegura que $\alpha_1 = \alpha_2$.

Resta ver que φ satisface la condición a) de la definición de gl. 1-p tl. Sabemos que $\varphi_t(x)$ depende diferenciablemente de X -puesto que la solución de la ecuación diferencial depende diferenciablemente de las condiciones indiciales- y además φ_o es la transformación identidad. Entonces

$$\varphi_t(\varphi_{-t}(x)) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_o(x) = x$$

prueba que φ_t es invertible, y por lo tanto un difeomorfismo.

⊠

Hemos visto pues que cada campo de vectores es inducido por un gl. 1-p tl , que no es necesariamente un g. 1-p t .

<u>DEFINICION</u> (5.1.6).

Un campo de vectores A en X es <u>completo</u> cuando es inducido por un g. 1-p t .

Por ejemplo el campo A definido en $\mathbb{R}$ consistente en los vectores que en cada punto tienen longitud uno y están orientados positivamente, es completo y está inducido por las traslaciones. La restricción de tal campo a la subvariedad $(0,1) \subset \mathbb{R}$ no es en cambio completo, pues las traslaciones no transforman $(0,1)$ en $(0,1)$.

Un criterio de completidad de campos de vectores está dado por el

<u>LEMA</u> (5.1.7.).

Sea A un campo de vectores en X tal que existe un $\varepsilon > 0$ y un gl. 1-p tl. $\varphi : I_\varepsilon \times X \longrightarrow X$ que induce a A (Observación: ε es independiente de cada $x \in X$). Entonces φ posee una extensión a un g. 1-p t. que induce a A, y por consiguiente A es completo.

<u>Demostración:</u> φ_t es un difeomorfismo para $|t| < 0$. Lo extenderemos para todo $t \in \mathbb{R}$. Para ello, escribamos

$$t = K\frac{\varepsilon}{2} + r \quad , \quad K \text{ entero} \quad , \quad |r| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y definamos

$$\varphi_t = \begin{cases} (\varphi_{\frac{\varepsilon}{2}})^K \circ \varphi_r & , \quad K > 0 \\ (\varphi_{-\frac{\varepsilon}{2}})^{-K} \circ \varphi_r & , \quad K < 0 \end{cases} .$$

Tal φ_t satisface las condiciones exigidas.

⊠

<u>Ejemplo</u> (5.1.8.):

Todo campo de vectores A sobre una variedad compacta X es completo.

Para concluir este párrafo, observemos que la relación existente entre campos de vectores y gl. 1-p tl. descripta arriba, es el origen de la denominación de transformación infinitesimal dada a los campos de vectores.

****

§ 5.2. <u>GRUPOS A UN PARAMETRO DE TRANSFORMACIONES Y APLICACIONES EQUIVARIANTES.</u>

Comenzaremos estableciendo la siguiente convención en la notación : dado un grupo local a un parámetro de transformaciones locales sobre X , lo designaremos con ψ_t , y hablaremos del campo de vectores A inducido sobre X , sin mencionar explícitamente su dominio de definición. Además, dado un campo de vectores A sobre X, escribiremos simplemente ψ_t para significar un g l 1 - p t l que induce a A en algún subconjunto de X.

Deberá sobreentenderse que las fórmulas que aparezcan serán válidas sólo cuando tengan sentido. Por ejemplo, ellas tendrán sentido cuando sólo aparece un g. 1 - p t.

Hasta ahora hemos considerado pares (X , A) -o bien (X, ψ_t) - donde X es una variedad y A un campo de vectores inducido por ψ_t. El sentido de este párrafo se rá estudiar los morfismo entre tales pares.

Sean ψ_t y ψ'_t g l 1 - p t l sobre X y X' respectivamente, y A y A' sus correspondientes campos de vectores inducidos. Entonces :

<u>PROPOSICION</u> (5. 2. 1.):

Si $\varphi : X \to X'$ es una aplicación tal que $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$ para todo t, entonces A y A' son φ -relacionados.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in X$ fijo y consideremos la curva en X' definida por $\varphi(\psi_t(x))$, t variable . Por diferenciación obtenemos

$$\varphi_{*\psi_t(x)} \, \dot{\psi}_t(x) = \varphi_{*\psi_t(x)} \, A_{\psi_t(x)}$$

Por otra parte, si consideramos la curva $\psi'_t(\varphi(x))$, resulta

$$\dot{\psi}'_t(\varphi(x)) = A'_{\psi'_t(\varphi(x))}$$

Puesto que $\varphi(\psi_t(x)) = \psi'_t(\varphi(x))$ por hipótesis, concluímos que

$$\varphi_{*\psi_t(x)} A_{\psi_t(x)} = A'_{\varphi(\psi_t(x))} ,$$

lo cual muestra que A y A' son φ -relacionados, en virtud de (4. 4. 3.). ⊠

Es conveniente llamar a una aplicación $\varphi : X \longrightarrow X'$ que satisface $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$, una equivariancia con respecto a los gl. 1-p tl. dados ψ_t y ψ'_t. (5.2.1.) asegura que los correspondientes campos de vectores A y A' son φ-relacionados. Esto es característico para aplicaciones equivariantes ; más precisamente, se cumple :

<u>PROPOSICION</u> (5.2.2.):

Sean A y A' campos de vectores en X y X' respectivamente, y ψ_t y ψ'_t los correspondientes gl. 1-p tl. Si $\varphi : X \longrightarrow X'$ es una aplicación tal que A y A' son φ-relacionados, entonces se cumple $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$.

<u>Demostración:</u> Para $x \in X$, sea $\alpha_1(t) = \varphi(\psi_t(x))$, $\alpha_2(t) = \psi'_t(\varphi(x))$. Entonces $\alpha_1(o) = \alpha_2(o) = \varphi(x)$. Probaremos que $\alpha_1 = \alpha_2$ mostrando que ambos satisfacen la misma ecuación diferencial. En efecto ,

$$\dot{\alpha}_1(t) = \varphi_{*\psi_t(x)} A_{\psi_t(x)} = A'_{\alpha_1(t)} ,$$

en virtud de (4.4.3.), puesto que A y A' son φ-relacionados. Y además ,

$$\dot{\alpha}_2(t) = A'_{\alpha_2(t)}$$

⊠

<u>COROLARIO</u> (5.2.3.):

Sea $\varphi : X \longrightarrow$ un difeomorfismo y A un campo de vectores sobre X que genera el gl. 1-p tl. ψ_t . Entonces el campo de vectores $\varphi_* A$ sobre X' genera el gl. 1-p tl. $\varphi \circ \psi_t \circ \varphi^{-1}$.

<u>Demostración:</u> Basta observar que A y $\varphi_* A$ son φ-relacionados.

⊠

Aplicando esto a automorfismos, obtenemos :

<u>COROLARIO</u> (5.2.4.):

Sea $\varphi : X \longrightarrow X$ un difeomorfismo y A un campo de vectores sobre X que genera el gl. 1-p tl ψ_t. Entonces $\varphi_* A = A$ si y sólo si $\varphi \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi$

para todo t.

Observemos que este corolario conserva su validez cuando φ es un automorfismo local, es decir $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$, U abierto de X, y difeomorfismo. Entonces $\varphi_* A$ debe interpretarse como un campo de vectores en $\varphi(U)$, y puede ser definido con la fórmula de lema (4.2.8.).

Consideremos en particular ψ_s, que es un automorfismo local de X en el sentido aquí expuesto. Como se cumple $\psi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \psi_s$ para todo t, entonces (5.2.4.) asegura que $(\psi_s)_* A = A$. Esto significa que el campo de velocidades A del flujo ψ_t es invariante por el flujo, propiedad que caracteriza a los flujos estacionarios.

Obtendremos ahora algunas consecuencias en el caso en que la variedad X considerada sea un grupo de Lie G. El lema siguiente es inmediato a partir de (5.2.4.) :

<u>LEMA</u> (5.2.5.).

Sea $A \in LG$ y ψ_t el gl. 1-p tl. generado por A. Entonces

$$L_g \circ \psi_t = \psi_t \circ L_g \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad g \in G .$$

<u>PROPOSICION</u> (5.2.6.):

Todo campo de vectores sobre G invariante a izquierda es completo.

<u>Demostración:</u> Sea $A \in LG$ y ψ_t el gl. 1-p tl. generado por A. Veremos que existe un $\varepsilon > 0$ y una extensión de ψ_t a un gl. 1-p tl. $\tilde{\psi} : I_\varepsilon \times G \longrightarrow G$, de modo que la tesis resulta ser una consecuencia de (5.1.7).

Sea pues $\psi : I_\varepsilon \times U \longrightarrow G$, con $\varepsilon > 0$ y U un entorno de la unidad $e \in G$. Una condición necesaria para la existencia de $\tilde{\psi}$ es (usando (5.2.5.)) :

$$\tilde{\psi}_t(g) = (\tilde{\psi}_t \circ L_g)(e) = (L_g \circ \tilde{\psi}_t)(e) = L_g(\psi_t(e)) .$$

Definimos pues $\tilde{\psi}$ por esta fórmula ; es inmediato que cumple la propiedad exigi da. ⊠

PROPOSICION (5.2.7.):

Sea $A \in LG$ y ψ_t el g. 1-p.t. generado por A. Entonces $\psi_t = R_{\psi_t(e)}$.

En virtud de (5.2.5.), la proposición enunciada es un caso particular de la siguiente:

PROPOSICION (5.2.8.):

Sea G un grupo (algebraico). La aplicación $\psi : G \longrightarrow G$ es una traslación a derecha (y por consiguiente $R_{\psi(e)} = \psi$) si y sólo si ψ conmuta con las traslaciones a izquierda.

Demostración: La asociatividad muestra que la condición es necesaria. Recíprocamente, sea $L_g \circ \psi = \psi \circ L_g$ para todo $g \in G$. Si $\gamma \in G$, entonces $g\psi(\gamma) = \psi(g\gamma)$, y en particular $g\psi(e) = \psi(g)$, es decir, $\psi(g) = R_{\psi(e)}\, g$. ⊠

****

§ 5.3. CORCHETE DE CAMPOS VECTORIALES.

Daremos una interpretación geométrica del corchete de dos campos de vectores, tomada de K.Nomizu and S. Kobayashi, [10], p. 15.

PROPOSICION (5.3.1.):

Sean A y B dos campos de vectores en la variedad X, y φ_t el gl. 1-p tl. generado por A. Entonces, si $x \in X$,

$$[A, B]_x = \lim_{t \to 0} \left[\frac{1}{t} \quad B_x - ((\varphi_t)_* B)_x \right]$$

Haremos la demostración basándonos en dos lemas.

LEMA (5.3.2.).

Sea $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ y $f : I_\varepsilon \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ con

$f(o, x) = 0$, $x \in X$. Entonces existe $g: I_\varepsilon \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t, x) = t g(t, x)$. Además, $g(o, x) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(o, x)$.

En efecto, basta definir $g(t, x) = \displaystyle\int_o^1 \frac{\partial f}{\partial t}(ts, x)\, ds$.

LEMA (5.3.3.).

Sea φ_t generado por A. Para cada $f \in CX$ existe $g_t \in CX$ tal que $f \circ \varphi_t = f + t g_t$ y $g_o = Af$. La función $g(t, x) = g_t(x)$ está definida, para cada $x \in X$, en un intervalo $|t| < \varepsilon$, con algún $\varepsilon > 0$.

Demostración: Si aplicamos el lema anterior a la función $F(t, x) = f(\varphi_t(x)) - f(x)$ obtenemos $f \circ \varphi_t = f + t g_t$. Y además,

$$(Af)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(\varphi_t(x)) - f(x) \right] = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} f(t, x) =$$

$$= \lim_{t \to 0} g(t, x) = g_o(x) .$$

⊠

Demostración de (5.3.1.): Sea $f \in CX$, y consideremos la correspondiente $g_t \in CX$ definida en (5.3.3.). Pongamos además $x_t = \varphi_t^{-1}(x)$. Entonces

$$((\varphi_t)_* B)_x f = (B(f \circ \varphi_t))(x_t) = (Bf)(x_t) + t\,(B g_t)(x_t) ,$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[B_x - ((\varphi_t)_* B)_x \right] f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[(Bf)(x) - (Bf)(x_t) \right] -$$

$$- \lim_{t \to 0} (B g_t)(x_t) = A_x(Bf) - B_x g_o = A_x(Bf) - B_x(Af) = [A, B]_x f.$$

⊠

COROLARIO (5.3.4.):

Sean A y B campos vectoriales en X y φ_t el g1. 1-p t1. generado por A. Entonces, si $s \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, se cumple

$$((\varphi_s)_* [A,B])_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_{t+s})_* B)_x \right].$$

Demostración: Puesto que, según la observación al final de § 5.2., se cumple $(\varphi_s)_* A = A$, entonces

$$(\varphi_s)_* [A,B] = \left[(\varphi_s)_* A, (\varphi_s)_* B \right] = \left[A, (\varphi_s)_* B \right].$$

Aplicando (5.3.1.) obtenemos :

$$\left[A, (\varphi_s)_* B \right]_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_t)_* (\varphi_s)_* B)_x \right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[((\varphi_s)_* B)_x - ((\varphi_{t+s})_* B)_x \right].$$

⊠

PROPOSICION (5.3.5.):

Sean A y B campos vectoriales en X, que generan respectivamente los gl. 1-p tl. φ_t y ψ_t. Entonces $[A,B] = 0$ si y sólo si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para todo s y t.

Demostración:

Si $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \quad \varphi_t$ para todo s y t, entonces por (5.2.) es $(\varphi_t)_* B = B$, lo cual implica $[A, B] = 0$ en virtud de (5.3.1.).

Recíprocamente, si $[A, B] = 0$, de (5.3.4.) resulta $\frac{d}{dt}((\varphi_t)_* B)_x = 0$ para todo t. Entonces $(\varphi_t)_* B = B$ para todo t, por lo cual, según (5.2.4.), φ_t conmuta con todo ψ_s.

⊠

PROPOSICION (5.3.6.):

Sean A y B campos de vectores en X, que generan los gl. 1-p tl. φ_t y ψ_t respectivamente. Si $[A, B] = 0$, entonces $X_t = \varphi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_t$ es un gl. 1-p tl. y es generado por $A + B$.

Demostración: La proposición (5.3.5.) prueba que X_t es un gl. 1-p tl. Ade más,

$$X_t(x) = \dot{\varphi}_t(\psi_t(x)) + (\varphi_t)_{*\psi_t(x)}\, \dot{\psi}_t(x) =$$

$$= A_{X_t(x)} + (\varphi_t)_{*\psi_t(x)}\, B_{\psi_t(x)} .$$

Pero $(\varphi_t)_* B = B$ en virtud de (5.3.5) y (5.2.4.). Entonces,

$$(\varphi_t)_{*\psi_t(x)}\, B_{\psi_t(x)} = B_{\varphi_t(\psi_t(x))} = B_{X_t(x)} \quad , \quad y$$

$$\dot{X}_t(x) = (A+B)_{X_t(x)} .$$

⊠

****

§ 5.4. SUBGRUPOS A UN PARAMETRO DE UN GRUPO DE LIE.

DEFINICION (5.4.1.).

Un **subgrupo a un parámetro** de una grupo de Lie G es un homomorfismo (de grupos de Lie) $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$.

Observación: Sea X una variedad y φ_t un g. 1-p t. de X. Podría pensarse en considerar $t \rightsquigarrow \varphi_t$ como un subgrupo a un parámetro $\mathbb{R} \longrightarrow \text{Aut } X$ de Aut X. Sin embargo, no tiene sentido hablar de diferenciabilidad de tal aplicación. Sobre esto, téngase en cuenta la observación hecha a continuación de (3.2.5.).

Por ejemplo, el homomorfismo trivial $O : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un subgrupo a un parámetro de G. No es cierto que un subgrupo a un parámetro no trivial $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ sea necesariamente una inyección, como lo muestra el siguiente:

Ejemplo (5.4.2.):

El homomorfismo canónico $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$ es un subgrupo a un parámetro de $\mathbb{T}$.

Sea A un campo vectorial completo sobre G y φ_t el g. 1-p t. generado por

A. Si definimos

$$\alpha_t = \varphi_t(e) \quad , \quad e \text{ unidad de } G \, ,$$

entonces $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ y $\alpha_o = \varphi_o(e) = e$, pero α no es necesariamente un subgrupo a un parámetro de G. En cambio si lo es si A es invariante a izquierda, como lo muestra la

<u>PROPOSICION</u> (5.4.3.).

Sea G un grupo de Lie, $A \in LG$, φ_t el g. 1-p t. generado por A, y $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ la aplicación definida mediante $\alpha_t = \varphi_t(e)$. Entonces es un subgrupo a un parámetro de G. Además $\varphi_t = R_{\alpha_t}$, y φ_t está completamente determinado por α.

<u>Demostración:</u> En virtud de (5.2.5.), tenemos

$$\alpha_{t_1+t_2} = \varphi_{t_1+t_2}(e) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(e)) = (\varphi_{t_1} \circ L_{\varphi_{t_2}(e)})(e) =$$

$$= (L_{\varphi_{t_2}(e)} \circ \varphi_{t_1})(e) = \varphi_{t_2}(e)\, \varphi_{t_1}(e) = \alpha_{t_2}\, \alpha_{t_1} \quad .$$

Además, $\varphi_t = R_{\alpha_t}$ resulta de (5.2.7.).

⊠

Se suele a veces explicitar la relación $\varphi_t = R_{\alpha_t}$ con la frase siguiente : "la transformación infinitesimal generada por un campo vectorial invariante a izquierda, es una traslación a derecha".

Designaremos con $\mathfrak{L}G$ el conjunto de los subgrupos a un parámetro de G. La última proposición define mediante $\alpha_t = \varphi_t(e)$ una aplicación

$$\phi : LG \longrightarrow \mathfrak{L}G$$

<u>LEMA</u> (5.4.4.).

Sea $A \in LG$, $\alpha = \phi(A) \in \mathfrak{L}G$. Entonces α es la solución de la ecuación diferencial $\dot{\alpha}_t = A\alpha_t$ con la condición inicial $\alpha_o = e$.

Demostración:

$$\dot{\alpha}_t = \dot{\varphi}_t(e) = A_{\varphi_t(e)} = A_{\alpha_t}\,, \quad \text{por (5.1.3.), y además}$$

$\alpha_o = \varphi_o(e) = e$.

⊠

Este lema describe la aplicación $\phi : LG \longrightarrow \mathcal{L}o\,G$ y muestra que es inyectiva. Para probar que es biyectiva, comenzaremos con el

LEMA (5.4.5.).

Sea $\alpha \in \mathcal{L}o\,G$. Entonces $\dot{\alpha}_t = (L_{\alpha_t})_{*e}\,\dot{\alpha}_o = (R_{\alpha_t})_{*e}\,\dot{\alpha}_o$.

Demostración: De $\alpha_{t+s} = \alpha_t\,\alpha_s = \alpha_s\,\alpha_t$, diferenciando con respecto a s resulta

$$\dot{\alpha}_{t+s} = (L_{\alpha_t})_{*\alpha_s}\,\dot{\alpha}_s = (R_{\alpha_t})_{*\alpha_s}\,\dot{\alpha}_s\,,$$

y haciendo $s = 0$ se obtiene la tesis.

⊠

TEOREMA (5.4.6.).

Sea G un grupo de Lie. Para cada $A \in LG$ definimos $\phi(A) = \alpha \in \mathcal{L}o\,G$ como la solución de $\dot{\alpha}_t = A_{\alpha_t}$ con condición inicial $\alpha_o = e$. Entonces $\phi : LG \longrightarrow \mathcal{L}o\,G$ es biyectivo.

Demostración: Sea $\alpha \in \mathcal{L}o\,G$. Si $\alpha = \phi(A)$ para $A \in LG$, entonces se cumple necesariamente $A_e = \dot{\alpha}_o$, lo cual prueba la inyectividad de ϕ .

Si $\alpha \in \mathcal{L}o\,G$, definimos $A \in LG$ como el campo vectorial tal que $A_e = \dot{\alpha}_o$. Entonces, por (5.4.5.) resulta $A_{\alpha_t} = (L_{\alpha_t})_*\,\dot{\alpha}_o = \dot{\alpha}_t$, lo cual prueba que ϕ es suryectivo.

⊠

El lema (5.4.5.) muestra que con la misma definición se obtiene una biyección $RG \longrightarrow \mathcal{L}o\,G$. De hecho, los vectores tangentes de la curva $t \rightsquigarrow \alpha_t$ pertenecen tanto al campo vectorial invariante a derecha que define α , como al invariante a izquierda.

La situación está descripta por la siguiente :

PROPOSICION (5.4.7.):

Sea $A \in LG$, $\alpha = \phi(A) \in \mathcal{L}_0 G$ y $g \in G$. Entonces $A_g = \overline{(g\,\alpha_t)}^{\bullet}_{t=0}$.

Demostración: Sea φ_t el g. 1-p t. generado por A. Entonces $\dot{\varphi}_t(g) = A\varphi_t(g)$, $g \in G$.

Por (5.4.3.) resulta

$$\varphi_t(g) = R_{\alpha_t}(g) = g\,\alpha_t \quad , \quad y$$

$$\dot{\varphi}_t(g) = \overline{(g\,\alpha_t)}^{\bullet} .$$

Haciendo $t = 0$ se obtiene $A\varphi_0(g) = A_g = \overline{(g\,\alpha_t)}^{\bullet}_{t=0}$

⊠

Una consecuencia de (5.4.6.) es :

PROPOSICION (5.4.8.):

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene a O y $\alpha : I \longrightarrow G$ un homomorfismo local de grupos de Lie. Entonces existe un único subgrupo a un parámetro $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \longrightarrow G$ de G tal que $\tilde{\alpha}\,|\,I = \alpha$.

Demostración: Definimos $A \in LG$ mediante $\dot{\alpha}_0 = A_e$, y $\tilde{\alpha} = \phi(A)$. El lema (5.4.5.) se aplica a α y muestra que $\dot{\alpha}_t = (L_{\alpha_t})_{*e}\, \dot{\alpha}_0$ y por lo tanto $A_{\alpha_t} = (L_{\alpha_t})_{*e}\, \dot{\alpha}_0 = \dot{\alpha}_t$. Pero $\tilde{\alpha}$ es también una solución de tal ecuación diferencial, y además $\alpha_0 = \tilde{\alpha}_0 = e$. Esto prueba que $\tilde{\alpha}$ es una extensión de α. La unicidad surge del hecho que existe un único subgrupo a un parámetro con $\dot{\alpha}_0$ dado.

⊠

Como muestra el ejemplo del isomorfismo local $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$, no existe necesariamente una extensión de un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ de grupos de Lie, a un homomorfismo (global). De la teoría de grupos topológicos resulta que una tal extensión existe, si G es simplemente conexo (ver 7.2.5.). La proposición (5.4.8.) es un caso particularmente simple de esta situación.

LEMA (5.4.9.).

Sea G un grupo de Lie, $A, B \in LG$, α y β los correspondientes elementos de $\mathcal{L}G$, y φ_t y ψ_t los correspondientes g. 1-p t. generados por A y B. Entonces $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ para todo t y s si y sólo si $\alpha_t \beta_s = \beta_s \alpha_t$ para todo t y s.

Demostración : Sea $g \in G$; entonces, por (5.2.7.) y (5.2.8.), es

$$(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = (\varphi_t \circ \psi_s \circ L_g)(e) = (L_g \circ \varphi_t \circ \psi_s)(e) =$$

$$= (L_g \circ \varphi_t)(\beta_s) = (L_g \circ \varphi_t \circ L_{\beta_s})(e) = (L_g \circ L_{\beta_s} \circ \varphi_t)(e) ,$$

lo cual muestra que

$$(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = g\, \beta_s\, \alpha_t \; .$$

Análogamente ,

$$(\psi_s \circ \varphi_t)(g) = g\, \alpha_t\, \beta_s \; .$$

De las últimas dos igualdades resulta la tesis . ⊠

Consideremos la expresión

$$(\varphi_t \circ \psi_s)(g) = g\, \beta_s\, \alpha_t \; ,$$

que aparece en el curso de la demostración .

En particular ,

$$(\varphi_t \circ \psi_t)(e) = \beta_t\, \alpha_t \; .$$

Si $[A, B] = 0$, entonces, por (5.3.6.) ,

$$X_t = \varphi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_t$$

es un g. 1-p t. ;

$$X_t(e) = \beta_t \, \alpha_t = \alpha_t \, \beta_t$$

es un subgrupo a un parámetro, y $A + B$ el correspondiente campo de vectores. En consecuencia

PROPOSICION (5.4.10.):

Sea $A, B \in LG$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{L}\, G$ los correspondientes subgrupos a un parámetro. Si $[A, B] = 0$, entonces $\alpha_t \, \beta_t = \beta_t \, \alpha_t = \gamma_t$ define un subgrupo a un parámetro, y $A+B$ es el correspondiente campo de vectores invariante a izquierda.

De (5.4.9.), aplicando (5.3.5.), obtenemos :

PROPOSICION (5.4.11.):

Sean $A, B \in LG$, φ_t y ψ_t los g. 1-p t. generados por A y B, y α y β los correspondientes subgrupos a un parámetro de G. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $[A, B] = 0$;

b) $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$, para todo t y s ;

c) $\alpha_t \, \beta_s = \beta_s \, \alpha_t$, para todo t y s .

En el capítulo VI veremos que la condición c) es equivalente a $\alpha_t \beta_t = \beta_t \alpha_t$ para todo t (Ver 6.4.3.).

Consideremos ahora un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$ de grupos de Lie. Cada $\alpha \in \mathcal{L}\, G$ determina por composición con ρ un elemento $\rho \circ \alpha \in \mathcal{L}\, G'$. La aplicación $\mathcal{L}(\rho) : \mathcal{L}\, G \longrightarrow \mathcal{L}\, G'$ así definida es compatible con la aplicación ϕ de (5.4.6.). Más precisamente :

PROPOSICION (5.4.12.):

Sean G y G' grupos de Lie, y $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo. Entonces el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "L(\rho)"] \arrow[d, "\phi_G"'] & LG' \arrow[d, "\phi_{G'}"] \\ G \arrow[r, "\mathcal{L}(\rho)"] & G' \end{tikzcd},$$

donde $\mathcal{L}(\rho)$ es la composición con ρ , y ϕ_G y $\phi_{G'}$ las aplicaciones de (5.4.6.).

Demostración: Si $\alpha \in \mathcal{L}G$, entonces $\dot{\overline{(\rho \circ \alpha)}}_t \big|_{t=0} = \rho_{*e}\, \dot{\alpha}_0$. Esto significa que el diagrama siguiente, sin la línea horizontal media, conmuta :

$$\begin{tikzcd} G_e \arrow[r, "\rho_{*e}"] \arrow[d, "æ_G"'] & G'_e \arrow[d, "æ_{G'}"] \\ LG \arrow[r, "L(\rho)"] \arrow[d, "\phi_G"'] & LG' \arrow[d, "\phi_{G'}"] \\ \mathcal{L}G \arrow[r, "\mathcal{L}(\rho)"] & \mathcal{L}G' \end{tikzcd}$$

Además, el diagrama superior conmuta, por definición de $L(\rho)$. Puesto que $æ_G$ es suryectiva (de hecho, biyectiva), el inferior también conmuta.

⊠

Consideremos el funtor de olvido $V : \mathcal{L}\mathfrak{A} \longrightarrow$ **Ens**, que asigna a cada álgebra de Lie su conjunto subyacente, y a cada homomorfismo de álgebras de Lie la correspondiente aplicación de los conjuntos subyacentes. La proposición (5.4.12.) asegura que $\phi : V \circ L \longrightarrow \mathcal{L}$ es una transformación natural, más aún, una equivalencia natural.

****

§ 5.5. CAMPOS DE VECTORES DE KILLING .

En esta sección se estudia la relación entre subgrupos a un parámetro de un grupo de Lie G y grupos a un parámetro de transformaciones de una G-variedad X.

Sea X una G-variedad con respecto al homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \text{Aut}\ X$, y $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ un subgrupo a un parámetro de G. La composición de homomorfismos

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\tau} \text{Aut}\ X$$

define un grupo a un parámetro de transformaciones φ_t de X, puesto que la aplicación

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \times X & \longrightarrow & G \times X & \longrightarrow & X \\ (t\,,\, x) & \rightsquigarrow & (\alpha_t, x) & \rightsquigarrow & \tau_{\alpha_t}(x) = \varphi_t(x) \end{array}$$

es diferenciable.

DEFINICION (5.5.1.).

El **campo de vectores de Killing** A^* sobre X definido por $\alpha \in \mathcal{L}G$, es el campo de vectores inducido por el g. 1-p t. φ_t.

Observación: Como ya hicimos notar en § 5.4., sería deseable considerar a φ_t como un subgrupo a un parámetro $\mathbb{R} \longrightarrow \text{Aut}\ X$ de aut X ; entonces φ_t definiría un campo de vectores sobre Aut X, en la forma explicada en § 5.4.. Puesto que esta forma de encarar la cuestión presenta dificultades, lo hemos hecho en cambio de la manera indicada más arriba. La ecuación diferencial $\dot{\varphi}_t(x) = A^*_{\varphi_t(x)}$ que describe la relación entre φ_t y A^* puede ser (heurísticamente) escrita como $\dot{\varphi}_t = A^*_{\varphi_t}$, interpretando ahora a A^* como a un campo de vectores en Aut X. Esto describe A^* sólo en la curva $t \rightsquigarrow \varphi_t$ de Aut X.

Ejemplo (5.5.2.):

Si $\tau : \mathbb{R} \longrightarrow \text{Aut}\ X$ define un g. 1-p t. τ_t de X, entonces el campo de vectores de Killing A^* definido por $1_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es justamente el campo de vectores inducido por τ_t.

PROPOSICION (5.5.3.):

Sea G operando sobre G por traslaciones a izquierda. El campo de vectores de Killing sobre G definido por $\alpha \in \mathcal{L}G$ es el campo $B \in RG$ (invariante a derecha) caracterizado por $\dot{\alpha}_o = B_e$.

Demostración: El g. 1-p t. $\varphi_t = L_{\alpha_t}$ sobre G induce, en virtud de (5.4.3.) y (5.4.6.) un campo de vectores B invariante a derecha sobre G, caracterizado por $B_e = \dot{\alpha}_o$.

⊠

Ejemplo (5.5.4.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo y $\tau : G \longrightarrow \text{Bij } G'$ la operación de G sobre G' definida por $\tau_g = L_{\rho(g)}$.

Sea $\alpha \in \mathcal{L}G$, y $\varphi_t = L_{\rho(\alpha_t)} = L_{(\rho \circ \alpha)_t}$ el g. 1-p t. de G' inducido por α. φ_t induce el campo de vectores invariante a derecha B' en G', caracterizado por $B'_{e'} = \overset{\bullet}{\overline{(\rho \circ \alpha)}}(t)\Big|_{t=0} = \rho_{*e}\, \dot{\alpha}_o$.

Si componemos la correspondencia $\alpha \rightsquigarrow B'$ con la aplicación canónica $RG \to \mathcal{L}G$, se obtiene, de manera obvia, el homomorfismo $R(\rho) : RG \longrightarrow RG'$ definido por $\rho : G \longrightarrow G'$.

Ejemplo (5.5.5.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita ; consideremos la representación natural de $GL(V)$ en V.

Sea α un subgrupo a un parámetro de $GL(V)$ y $v \in V$. Entonces el campo de vectores de Killing A^* sobre V definido por α satisface $A^*_v = \dot{v}_o$, donde $v_t = \alpha_t v$. Pero $\dot{v}_t = \dot{\alpha}_t v = \dot{\alpha}_o\, \alpha_t\, v$, por (5.4.5.). Entonces A^* satisface $A^*_v = \dot{\alpha}_o v$, es decir, A^* es el campo de vectores canónicamente definido por el endomorfismo $\dot{\alpha}_o \in \mathcal{L}(V)$.

Aplicaremos ahora los resultados de § 5.3. a los campos de vectores de Killing.

PROPOSICION (5.5.6.):

Sea X una G-variedad con respecto al homomorfismo $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$, α un subgrupo a un parámetro de G, y A^* el campo de vectores de Killing sobre X definido por α. Entonces, si C es un campo de vectores sobre X, se cumple, para $x \in X$:

$$\left[A^*, C\right]_x = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[C_x - ((\tau_t)_* C)_x\right]$$

Demostración: $(\tau \circ \alpha)_t$ es el g. 1-p t. de X generado por A^*. Entonces la fórmula se obtiene como caso particular de (5.3.1.).

⊠

COROLARIO (5.5.7.):

Sea G un grupo de Lie, $\alpha \in \mathcal{L}G$ y $B \in RG$ el correspondiente campo de vectores invariante a derecha. Entonces, si C es un campo de vectores sobre G, se cumple, para $g \in G$:

$$\left[B, C\right]_g = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[C_g - ((L_{\alpha_t})_* C)_g\right].$$

Demostración: G opera sobre G por traslaciones a izquierda. Por (5.5.3.), B es el campo de vecotres de Killing definido por $\alpha \in \mathcal{L}G$ con respecto a tal operación. Basta pues aplicar (5.5.6.).

⊠

Observemos que en particular, si $C \in RG$, la fórmula obtenida expresa el corchete en RG mediante L_{α_t}. Evidentemente, hay una fórmula análoga para campos de vectores invariantes a izquierda.

PROPOSICION (5.5.8.):

Sea G un grupo de Lie y $A, C \in LG$. Si $\alpha \in \mathcal{L}G$ es el subgrupo a un parámetro definido por A, entonces se cumple, para $g \in G$:

$$\left[A, C\right] = \frac{d}{dt} \left\{\mathrm{Ad}(\alpha_t)\right\}\Big|_{t=0} C$$

donde $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, LG$ es la representación adjunta de G.

Demostración : Análogamente que en (5.5.7.), se cumple

$$\left[A, C\right]_g = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[C_g - ((R_{\alpha_t})_* C)_g\right] .$$

Ahora, como $C \in LG$, es $(L_{\alpha_t^{-1}})_* C = C$, es decir $(R_{\alpha_t})_* C =$ $= Ad(\alpha_t^{-1})\, C$, lo cual muestra que

$$\left[A , C\right]_g = - \frac{d}{dt} \left\{ Ad\ (\alpha_t^{-1})\ C_g \right\} \Big|_{t=0} ,$$

que puede escribirse

$$\left[- A, C\right]_g = \frac{d}{dt} \left\{ Ad\ (\alpha_t^{-1})\ C_g \right\} \Big|_{t=0} .$$

Puesto que al subgrupo $t \rightsquigarrow \alpha_t^{-1} = \alpha_{-t}$ le corresponde el campo de vectores $- A \in LG$, se obtiene el resultado querido.

⊠

Hemos supuesto que $Ad : G \longrightarrow Aut\ LG$ es un homomorfismo de grupos de Lie. Esto sigue de la continuidad de Ad (cf. § 6.3.).

****

§ 5.6. EL HOMOMORFISMO $\sigma : RG \longrightarrow DX$ PARA UNA G-VARIEDAD X .

El conocimiento de esta sección y de la siguiente no es necesario para la comprensión del desarrollo que sigue.

Mostraremos que la operación $\tau : G \longrightarrow Aut\ X$ define un homomorfismo $\sigma : RG \longrightarrow DX$ de álgebras de Lie. En primer lugar, veremos que

LEMA (5.6.1.).

Sea X una G-variedad, X' una G'-variedad, $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo, y $\varphi : X \longrightarrow X'$ una ρ-equivariancia. Sea $\alpha \in \mathcal{L}G$, $\alpha' = \rho \circ \alpha \in$ $\in \mathcal{L}G'$, y A^* y A'^* los campos de vectores de Killing definidos por α y α'. Entonces A^* y A'^* son φ-relacionados.

<u>Demostración:</u> Sean ψ_t , ψ'_t los grupos a un parámetro de transformaciones de X , X' , definidos por α , α', es decir, $\psi_t = \tau_{\alpha_t}$, $\psi'_t = \tau'_{\alpha'_t}$. Basta probar, en virtud de (5.2.1.), que se cumple

$$\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi \quad .$$

La ρ-equivariancia de φ significa la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho \times \varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ G' \times X' \arrow[r, "\tau'"] & X' \end{tikzcd} \quad .$$

Puesto que $\alpha' = \rho \circ \alpha$, el siguiente diagrama es también conmutativo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times X \arrow[r, "\alpha \times 1_X"] \arrow[d, "1_{\mathbb{R}} \times \varphi"'] & G \times X \arrow[d, "\rho \times \varphi"] \\ \mathbb{R} \times X' \arrow[r, "\alpha' \times 1'_X"] & G' \times X' \end{tikzcd}$$

Componiendo ambos diagramas, obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \times X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "1_{\mathbb{R}} \times \varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R} \times X' \arrow[r, "\psi'"] & X' \end{tikzcd}$$

que prueba $\varphi \circ \psi_t = \psi'_t \circ \varphi$.

⊠

Podemos ahora probar el fundamental

<u>TEOREMA</u> (5.6.2.).

Sea G un grupo de Lie, X una variedad , RG el álgebra de Lie de los campos de vectores sobre G invariantes a derecha, y DX el álgebra de Lie de los campos de vectores sobre X. Una operación $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$ que define a X como una G-variedad induce un homomor fismo.

$$\sigma : RG \longrightarrow DX$$

Si $B \in RG$ y $\alpha \in \mathcal{L}G$ es el subgrupo a un parámetro definido por $\dot{\alpha}_t = B_{\alpha_t}$, entonces $\sigma(B)$ es el campo de vectores de Killing sobre X definido por α.

Demostración: Sea $B \in RG$, $\sigma(B) \in DX$. Veremos que B y $\sigma(B)$ son p-relacionados, con un $p : G \longrightarrow X$, por lo cual el teorema será una consecuencia de (4.4.2.).

Sea $x_0 \in X$; definimos $p : G \longrightarrow X$ mediante

$$p(g) = \tau_g(x).$$

Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "Lg"] \arrow[d, "p"'] & G \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\tau g"] & X \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Considerando la operación de G sobre G por traslaciones a izquierda, esto significa que p es una equivariancia. Sea $\alpha \in \mathcal{L}G$. Los correspondientes campos de vectores de Killing sobre G y X son p-relacionados en virtud de (5.6.1.). El campo de vectores de Killing sobre G definido por α es, por (5.5.3.), el elemento $B \in RG$. Pero el eampo de vectores de Killing sobre X definido por α es justamente $\sigma(B)$, de manera que B y $\sigma(B)$ son p-relacionados.

$\boxtimes$

Designamos con KX el conjunto de campos de vectores de Killing sobre la G-variedad X. Entonces $KX = \mathfrak{Im}\ \sigma$, y por (5.6.2.), KX es un álgebra de Lie.

Ejemplo (5.6.3.):

Sea G operando sobre G por traslaciones a izquierda. Por (5.5.3.), el álgebra de Lie de campos de vectores de Killing es RG, y el homomorfismo $\sigma: RG \longrightarrow RG$ es la identidad 1_{RG}.

Ejemplo (5.6.4.):

Sea $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo y $\tau: G \longrightarrow \mathrm{Bij}\ G'$ la operación de G sobre G' definida por $\tau_g = L_{\rho(g)}$. Por el ejemplo (5.5.4.), sabemos que el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing es una subálgebra de RG' y el homomorfismo $R(\rho): RG \longrightarrow RG'$ es el homomorfismo σ de (5.6.2.).

Ejemplo (5.6.5.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita; consideremos la representación natural de $G = GL(V)$ en V.

Identificamos RG y LG con G_e mediante los isomorfismos canónicos. Entonces por (4.3.8.) sabemos que $LG = \mathcal{L}(V)$. Tenemos también, por (4.6.8.), que $RG = (LG)^o$. Entonces $RG = (\mathcal{L}(V))^o$.

Usando (5.5.5.), vemos que el homomorfismo $\sigma: RG \longrightarrow KV$ es en este caso la aplicación canónica $(\mathcal{L}(V))^o \longrightarrow DV$, que a cada endomorfismo $A \in \mathcal{L}(V)$ le asigna el campo de vectores $A^*_v = A_v$. Que esta aplicación conserva el corchete, se ve de la manera siguiente.

Sea $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(V)$; su corchete en $(\mathcal{L}(V))^o$ es $A_2 A_1 - A_1 A_2$. Por otra parte, tal como en (4.3.8.),

$$\left[A_1^*, A_2^*\right]_v = \left(\frac{d}{dv} A^*_{2_v}\right)(v)\, A^*_{1_v} - \left(\frac{d}{dv} A^*_{1_v}\right)(v)\, A^*_{2_v} .$$

Pero

$$\left(\frac{d}{dv} A^*_{2_v}\right)(v)\, A^*_{1_v} = A^*_{2_v} A^*_{1_v} = A_2 A_1 v ,$$

y por lo tanto

$$\left[A_1^*, A_2^*\right]_v = (A_2 A_1 - A_1 A_2)_v ,$$

tal como queríamos probar.

Más generalmente, consideremos una representación del grupo de Lie G en V. El homomorfismo $\mathcal{T}: G \longrightarrow GL(V)$ induce un homomorfismo $R(\mathcal{T}): RG \longrightarrow R(GL(V)) = (\mathcal{L}(V))^{o}$, y el homomorfismo inducido $\sigma: RG \longrightarrow DV$ es justamente la composición de tal homomorfismo con el homomorfismo $(\mathcal{L}(V))^{o} \longrightarrow DV$ descripto anteriormente.

Observamos que la situación general para una G-variedad X es en algún sentido similar a la del ejemplo (5.6.5.). La operación $\mathcal{T}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$ induce por composición con el homomorfismo natural -que es un isomorfismo- una representación $G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ CX$ de G en CX. Existe sin embargo la dificultad que CX es demasiado grande y no podemos hablar de diferenciabilidad de la aplicación. Pero si no tenemos en cuenta esto, podemos considerar el homomorfismo inducido $RG \longrightarrow DX \hookrightarrow OX$ en el álgebra de operadores sobre X como la representación de RG en CX inducida por la representación de G en CX, exactamente como en (5.6.5.).

El álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing sobre una G-variedad es por definición un álgebra de Lie de campos de vectores completos. Es natural preguntarse si cada álgebra de Lie de dimensión finita de campos de vectores completos sobre una variedad X puede ser interpretada como el álgebra de Lie de campos de vectores de Killing correspondiente a la operación de algún grupo de Lie G sobre X. Discutiremos la situación en el caso particular de un álgebra de Lie conmutativa; para el caso general, puede consultarse R. Palais, [12] ; la respuesta es positiva.

Sea G un grupo de Lie conmutativo que opera sobre X. Puesto que $\sigma: RG \longrightarrow KX$ es suryectivo por definición, el álgebra de Lie KX es conmutativa. Recíprocamente :

<u>PROPOSICION</u> (5.6.6.):

Sea K un álgebra de Lie conmutativa y de dimensión finita, de campos de vectores completos sobre X. Existe entonces una operación del grupo aditivo de K sobre X tal que el álgebra de Lie K es el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing de dicha operación.

<u>Demostración:</u> Consideremos en K la estructura aditiva, que lo convierte en un grupo de Lie con álgebra de Lie K. Definimos una operación de K sobre X de la manera siguiente. Sea $A \in K$ y φ_t el g. 1-p t. de X generado por A. Si ponemos $\mathcal{C}_A = \varphi_1$, esto define una aplicación $\mathcal{C} : K \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$. Veremos que $\mathcal{C}$ es un homomorfismo.

Sea $A, B \in K$ y φ_t, ψ_t los g. 1-p t. generados. Por (5.3.6.), $X_t = \varphi_t \circ \psi_t$ es el grupo a un parámetro de transformaciones generado por $A + B$. Entonces $\mathcal{C}_{A+B} = X_1 = \varphi_1 \circ \psi_1 = \mathcal{C}_A \circ \mathcal{C}_B$, tal como queríamos probar.

Observemos que $\mathcal{C}_{tA} = \varphi_t$. El subgrupo a un parámetro de K correspondiente a A es $t \rightsquigarrow tA$, y por consiguiente el correspondiente campo de vectores de Killing A^* sobre X satisface

$$A^*_x = \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{C}_{tA}(x) \right\} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi_t(x) \Big|_{t=0} = A_x .$$

Esto prueba que el homomorfismo del teorema (5.6.2.) es en este caso la identidad, lo cual concluye la demostración.

$\boxtimes$

El homomorfismo $\Gamma : RG \longrightarrow DX$ definido en (5.6.2.) expresa propiedades de la operación $\mathcal{C} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$; por ejemplo :

<u>PROPOSICION</u> (5.6.7.):

Sea $\mathcal{C} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$ y $\Gamma : RG \longrightarrow DX$ el homomorfismo inducido. Entonces :

i) Si $\mathcal{C}$ es inyectivo (es decir, una operación efectiva) entonces Γ es inyectivo ;

ii) Si $\mathcal{C}$ es una operación libre, entonces todo campo de vectores de Killing es o bien idénticamente nulo o bien no nulo en todo punto.

Demostración: Sea $B \in RG$ y $\alpha \in \mathcal{L}G$ el correspondiente subgrupo a un parámetro. Entonces $(\sigma B)_{\varphi_t(x)} = \dot{\varphi}_t(x)$, donde $\varphi_t = \tau_{\alpha_t}$.

i) Sea $\sigma B = 0$. Entonces $\dot{\varphi}_t(x) = 0$ y $\varphi_t(x) = x$ para todo x y t. Por ser τ inyectiva, $\tau_{\alpha_t} = 1_X$ implica $\alpha_t = e$, y $B_e = \dot{\alpha}_o = 0$, es decir, $B = 0$.

ii) Sea $(\sigma B)_x = 0$ para algún $x \in X$. Entonces $\dot{\varphi}_o(x) = 0$ y $\varphi_t(x) = x$ para todo t, con x fijo, en virtud de la unicidad de solución de $\dot{\varphi}_t(x) = (\sigma B)_{\varphi_t(x)}$ con $\varphi_o(x) = X$. Puesto que τ es libre, $\varphi_t(x) = \tau_{\alpha_t}(x) = x$ para algún x implica $\alpha_t = e$; entonces, de la misma manera que antes resulta que $B = 0$ y $\sigma B = 0$. (Recuérdese que toda operación libre es inyectiva; entonces en virtud de (i) $B = 0$ y $\sigma B = 0$ son afirmaciones equivalentes).

Obsérvese que la inyectividad de $\sigma : RG \longrightarrow DX$ no implica la inyectividad de $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$.

Ejemplo (5.6.8.):

Un homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$ induce una operación $\tau : L \circ \rho$ de G sobre G' (ver (5.6.4.)) y el homomorfismo inducido σ es $R(\rho) : RG \longrightarrow RG'$.

$R(\rho)$ puede ser inyectivo sin que $\tau = L \circ \rho$ lo sea. Es suficiente mostrar un $\rho : G \longrightarrow G'$ no inyectivo con $\rho_{*e} : G_e \longrightarrow G'_e$ inyectivo. Esto sucede para el homomomorfismo canónico $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$.

Observación: Discutiremos los resultados de esta sección desde el punto de vista heurístico varias veces mencionado, que considera a $\mathrm{Aut}\ X$ como un grupo de Lie. Es esta una operación efectiva sobre X y por consiguiente define, según (5.6.7.), una inyección $R(\mathrm{Aut}\ X) \xrightarrow{\tilde{\sigma}} DX$. Es natural pensar que la imágen es el conjunto de todos los campos de vectores completos sobre X. Sin embargo, este conjunto no es un álgebra de Lie, lo cual destruye muchas esperanzas. De lo contrario, hubiéramos considerado esa álgebra como R(Aut X). (En el caso en que X es compacto no hay problema, pues todo campo de vectores es completo).

Cualquier operación $\mathcal{T}: G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ puede ser pensada en forma que define un homomorfismo $R(\mathcal{T}): RG \longrightarrow R(\operatorname{Aut} X)$. Entonces el homomorfismo $\sigma: RG \longrightarrow DX$ de (5.6.2.) es justamente la composición $\sigma = \tilde{\sigma} \circ R(\mathcal{T})$.

<u>Ejercicio</u> (5.6.9.):

Sea G un grupo conmutativo que opera sobre una variedad X, y KX el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing sobre X. Probar que todo elemento de KX es invariante con respecto a la acción de G sobre KX.

****

§ 5.7. CAMPOS DE VECTORES DE KILLING Y APLICACIONES EQUIVARIANTES.

Estudiaremos aquí la compatibilidad con aplicaciones equivariantes del homomorfismo $\sigma: RG \longrightarrow DX$ definido en § 5.6., para una operación a izquierda. Es claro que consideramos una operación a derecha de G sobre X, obtenemos un homomorfismo $\sigma: LG \longrightarrow DX$.

En primer lugar, probaremos el

<u>LEMA</u> (5.7.1.).

Sean X y X' variedades, $\varphi: X \longrightarrow X'$ una aplicación, y A, A'_1 A, A'_2 pares de campos de vectores φ-relacionados en X, X'. Si φ es suryectiva, entonces $A'_1 = A'_2$.

<u>Demostración:</u> φ^* es inyectiva, puesto que $\varphi^* f_1 = \varphi^* f_2$, o sea $f_1 \circ \varphi = f_2 \circ \varphi$, implica $f_1 = f_2$ cuando φ es suryectiva. Pero por definición de φ-relación, el diagrama siguiente conmuta (para $i = 1, 2$):

$$\begin{tikzcd} CX & CX' \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ CX \arrow[u, "A"] & CX' \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[u, "A'_1"'] \end{tikzcd}$$

La inyectividad de φ^* implica $A'_1 = A'_2$. ⊠

<u>PROPOSICION</u> (5.7.2.):

Sea X una G^o-variedad con respecto a una operación a derecha $\mathcal{T}: G^o \rightarrow \operatorname{Aut} X$, X' una G^o-variedad con respecto a una operación a derecha $\mathcal{T}': G'^o \rightarrow \operatorname{Aut} X'$, $\rho: G \rightarrow G'$ un homomorfismo, y $\varphi: X \rightarrow X'$ una aplicación ρ-equivariante. Sean $\sigma: LG \rightarrow KX \hookrightarrow DX$ y $\sigma': LG' \rightarrow KX' \hookrightarrow DX'$ los homomorfismos inducidos del teorema (5.6.2.). Si o bien G opera efectivamente sobre X o bien φ es suryectiva, entonces existe una única aplicación γ : $XK \rightarrow KX'$ que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "L(\rho)"'] & KX \arrow[d, "\gamma"] \\ LG' \arrow[r, "\sigma'"] & KX' \end{tikzcd}$$

y además γ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

<u>Demostración</u>: Sea $A \in LG$. Por (5.6.1.), los campos de vectores $A^* = \sigma(A)$ y $\sigma'(L(\rho)A)$ son φ-relacionados.

Supongamos en primer lugar que G opera efectivamente sobre X, es decir, que $\mathcal{T}: G^o \rightarrow \operatorname{Aut} X$ es inyectiva. Entonces, por (5.6.7.), σ es también inyectiva. Por lo tanto, para $A^* \in KX$ existe un único $A \in LG$ con $\sigma(A) = A^*$. Definimos $\gamma(A^*) = \sigma'(L(\rho)A)$.

Supongamos ahora que φ es suryectiva, y sea $A \in LG$. Puesto que $A^* = \sigma(A)$ y $\sigma'(L(\rho)A)$ son φ-relacionados, por (5.7.1.) $\sigma'(L(\rho)A)$ está unívocamente definido por A^*. Podemos entonces definir γ como antes.

La unicidad de γ sigue de la suryectividad de $\sigma: LG \longrightarrow KX$, y γ es un homomorfismo, en virtud de (4.4.2.).

⊠

COROLARIO (5.7.3.):

En el mismo estado de cosas que en (5.7.2.), si $\varphi: X \longrightarrow X'$ es un difeomorfismo φ-equivariante, entonces el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{array}{ccccc} LG & \longrightarrow & KX & \hookrightarrow & DX \\ \downarrow{\scriptstyle L(\rho)} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} \\ LG' & \longrightarrow & KX' & \hookrightarrow & DX' \end{array}$$

Demostración: Si $C \in DX$, entonces C y $\varphi_* C$ son φ-relacionados.

Entonces $\varphi_* \big| KX = \gamma$.

⊠

Aplicaremos ahora el resultado obtenido al difeomorfismo $\mathcal{T}_{g^{-1}}: X \longrightarrow X$ definido por una operación a derecha $\mathcal{T}: G^o \longrightarrow \operatorname{Aut} X$. Notamos en primer lugar que:

LEMA (5.7.4.):

$\mathcal{T}_{g^{-1}} : X \longrightarrow X$ es $\mathfrak{I}_g$-equivariante.

Demostración: El diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mathcal{T}_{g^{-1}}} & X \\ \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}_\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}_{\mathfrak{I}_g(\gamma)}} \\ X & \xrightarrow{\mathcal{T}_{g^{-1}}} & X \end{array}$$

conmuta para $\gamma \in G$:

$$\mathcal{T}_{\mathfrak{I}_g(\gamma)} \circ \mathcal{T}_{g^{-1}} = \mathcal{T}_{g\gamma g^{-1}} \circ \mathcal{T}_{g^{-1}} = \mathcal{T}_{\gamma g^{-1}} = \mathcal{T}_{g^{-1}} \circ \mathcal{T}_\gamma \ .$$

⊠

Entonces, aplicando (5.7.3.) obtenemos :

PROPOSICION (5.7.5.):

Sea $\mathcal{T}: G^o \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ una operación a derecha y $\sigma: LG \longrightarrow KX \hookrightarrow DX$

el homomorfismo inducido del teorema (5. 6. 2.). Entonces el diagrama siguiente conmuta :

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, no head, "Ad\, g"'] & KX \arrow[r, hook] & DX \arrow[d, no head, "(\tau_{g^{-1}})_*"] \\ LG \arrow[r, "\sigma"] & KX \arrow[r, hook] & DX \end{tikzcd}$$

Recordamos que $Ad\, g = L(\mathcal{J}g)$. Es evidente además que $(\tau_{g^{-1}})_* = \alpha_g$ define DX como G-álgebra de Lie, puesto que τ es una operación a derecha. Por consiguiente :

TEOREMA (5. 7. 6).

Sea X una G^o-variedad con respecto al homomorfismo $\tau : G^o \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$. Consideremos la representación adjunta de G en LG y la operación de G sobre DX definida por $\alpha_g = (\tau_{g-1})_*$. Entonces el homomorfismo inducido $\sigma : LG \longrightarrow DX$ es una equivariancia.

Para $A \in LG$ y el correspondiente $A^* = \sigma(A)$ se cumple

$$(\tau_{g-1})_* A^* = \sigma(Ad\, g\ A)$$

Esto muestra en particular que τ_g transforma campos de vectores de Killing en campos de vectores de Killing.

Ejemplo (5. 7. 7.) :

Sea G operando sobre G por traslaciones a derecha. La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} LG \arrow[r, hook] \arrow[d, "Ad\, g"'] & DG \arrow[d, "(R_{g-1})_*"] \\ LG \arrow[r, hook] & DG \end{tikzcd}$$

expresada en el teorema, es precisamente la proposición (4. 7. 3.).

Para operaciones efectivas, σ es una inyección, en virtud de (5.6.7.). El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} LG & \xrightarrow{\sigma} & DX \\ {\scriptstyle Ad\,g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_g} \\ LG & \xrightarrow{\sigma} & DX \end{array}$$

muestra que $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ DX$ puede interpretarse como una extensión de la representación adjunta de G.

LEMA (5.7.8.).

El homomorfismo $\mathcal{T} : G^{o} \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$ es inyectivo si y sólo si el homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ DX$ definido por $\alpha_g = (\mathcal{T}_{g^{-1}})_*$ es inyectivo.

Demostración: α es la composición

$$G \xrightarrow{I} G \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathrm{Aut}\ X \xrightarrow{*} \mathrm{Aut}\ DX$$

$$g \rightsquigarrow g^{-1} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{g^{-1}} \rightsquigarrow (\mathcal{T}_{g^{-1}})_* .$$

I es biyectivo, y $*$ es inyectivo puesto que $\varphi \in \mathrm{Aut}\ X$ con $\varphi_* = 1_{DX}$ implica $\varphi_{*x} = 1_{T_x(X)}$ y $\varphi = 1_X$.

Entonces α es inyectivo si y sólo si $\mathcal{T}$ es inyectivo. ☒

Observación: Para una operación a izquierda $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$, se tiene análogamente el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} RG & \xrightarrow{\sigma} & DX \\ {\scriptstyle R(\mathcal{I}g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \delta_g} \\ RG & \xrightarrow{\sigma} & DX \end{array}$$

donde $\delta_g = (\mathcal{T}_g)_*$, y σ es por lo tanto una equivariancia con respecto a la opera ción (a izquierda) de G sobre RG y DX. Tomaremos otra vez el punto de vista heurístico de considerar a Aut X como a un grupo de Lie. Aut X opera naturalmente sóbre X a izquierda, definiendo un homomorfismo $\tilde{\tau} : R\,(\mathrm{Aut}\ X) \longrightarrow DX$ (ver la observación al final de § 5.6.).

Para cada $\varphi \in$ Aut X, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R\,(\mathrm{Aut}\ X) \arrow[r, "\tilde{\tau}"] \arrow[d, "R(\mathfrak{I}\varphi)"'] & DX \arrow[d, "\varphi_*"] \\
R\,(\mathrm{Aut}\ X) \arrow[r, "\tilde{\tau}"] & DX
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Por ser $\tilde{\tau}$ una inyección, $\varphi_* : DX \longrightarrow DX$ es una extensión de $R(\mathfrak{I}\varphi)$, que es la representación adjunta de Aut X en R (Aut X). Usando el argumento de la demostración de (5.7.8.), vemos que $\mathrm{Aut}\ X \xrightarrow{*} \mathrm{Aut}\ DX$ que transforma φ en φ_*, es inyectivo. Siendo $\tilde{\tau}$ una inyección, esto concuerda con (5.7.8.).

****
****
*

CAPITULO VI. LA APLICACION EXPONENCIAL DE UN GRUPO DE LIE.

La relación entre subgrupos a un parámetro de un grupo de Lie G y campos de vectores invariantes sobre G, estudiada en § 5.4., se utiliza para definir una aplicación $\exp : G_e \longrightarrow G$, que posee importantes propiedades.

§ 6.1. DEFINICION Y NATURALIDAD DE exp.

En lo que sigue convendrá identificar (y así lo hacemos) LG con G_e por medio del isomorfismo æ de (4.3.3.). Designaremos con $A \in G_e$ a un vector tangente en la identidad e del grupo de Lie G.

Recordamos que, según (5.4.6.), cada $A \in G_e = LG$ define un subgrupo α a un parámetro de G, tal que $A = \dot{\alpha}_0$.

DEFINICION (6.1.1.).

La **aplicación exponencial** $\exp : G_e \longrightarrow G$ es la aplicación definida mediante

$$\exp A = \alpha_1 \quad , \quad A \in G_e \, ,$$

donde α es el subgrupo a un parámetro de G definido por A.

Si $\alpha \in \mathcal{L}G$ es un subgrupo a un parámetro de G, y para $t \in \mathbb{R}$ fijo definimos $\beta_s = \alpha_{st}$, entonces evidentemente es también $\beta \in \mathcal{L}G$; además se cumple:

LEMA (6.1.2.).

$\dot{\beta}_0 = t\,\dot{\alpha}_0$.

Demostración: Sea $f \in CG$; entonces

$$\dot{\beta}_0 f = \frac{d}{ds} f(\beta_s)\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} f(\alpha_{st})\Big|_{s=0} = t\,\dot{\alpha}_0 f \qquad \boxtimes$$

Este lema muestra que $\exp(tA) = \alpha_t$, puesto que tA define β y $\beta_1 = \alpha_t$.

Además α es un homomorfismo : $\alpha_{t1+t2} = \alpha_{t1} \cdot \alpha_{t2}$, de manera que obtenemos inmediatamente

PROPOSICION (6.1.3.):

$\exp((t_1 + t_2)A) = \exp(t_1 A) \exp(t_2 A)$.

La proposición (5.4.10.) muestra que si $A, B \in G_e$, con $\alpha, \beta \in \mathcal{L}G$ los correspondientes subgrupos, y $[A, B] = 0$, entonces $\gamma_t = \alpha_t \beta_t$ es un subgrupo a un parámetro, y por consiguiente

$$\exp(t(A+B)) = \exp(tA) \exp(tB) ,$$

que para $t = 1$ se convierte en

$$\exp(A+B) = \exp A \,.\, \exp B ,$$

lo cual prueba en particular:

PROPOSICION (6.1.4.):

Si el álgebra de Lie LG de G es conmutativa, entonces $\exp : G_e \longrightarrow G$ es un homomorfismo del grupo aditivo de G_e en el grupo G.

La consideración siguiente servirá para justificar la notación $\exp$.

Ejemplo (6.1.5):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y $G = GL(V)$. En (4.3.8.) vimos que después de la identificación de LG con G_e tenemos $LG = \mathcal{L}(V)$.

Sea $A \in \mathcal{L}(V)$, y $\alpha \in \mathcal{L}G$ el correspondiente subgrupo a un parámetro. Veamos que

$$\exp(tA) = \alpha_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n .$$

En efecto, si definimos

$$\beta_t = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n ,$$

resulta

$$\beta_0 = 1_V \quad , \quad y$$

$$\dot{\beta}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} (tA)^{n-1} A = \beta_t A .$$

Por otra parte, también se cumple

$$\alpha_0 = 1_V \quad , \quad \dot{\alpha}_t = \alpha_t \, \dot{\alpha}_0 = \alpha_t A ,$$

de manera que α y β satisfacen la misma ecuación diferencial con la misma condición inicial, lo cual implica $\alpha = \beta$.

En particular, sea $V = \mathbb{R}$. Entonces $GL(V) = \mathbb{R}^*$, donde $\mathbb{R}^*$ es el grupo multiplicativo de los números reales no nulos. El álgebra de Lie de $\mathbb{R}^*$ es $\mathbb{R}$, con la (única posible) multiplicación trivial. La aplicación $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ es precisamente la función exponencial ordinaria.

Mostraremos ahora la naturalidad de $\exp$, es decir:

<u>PROPOSICION</u> (6.1.6.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local. Entonces el diagrama siguiente tomado en el sentido de aplicaciones locales, conmuta:

$$\begin{tikzcd}
G_e \arrow[r, "\rho_{*e}"] \arrow[d, "\exp"'] & G'_{e'} \arrow[d, "\exp"] \\
G \arrow[r, "\rho"] & G'
\end{tikzcd}$$

<u>Demostración:</u> Sea $A \in G_e$. Si $\alpha_t = \exp(tA)$ es el correspondiente subgrupo a un parámetro de G, entonces

$$\overline{(\rho \circ \alpha)}^{\bullet}(t)\Big|_{t=0} = \rho_{*e} \, \dot{\alpha}_0 = \rho_{*e} A .$$

Por lo tanto ,

$$\exp(t\, \rho_{*_e} A) = \rho \exp(tA) ,$$

y para $t = 1$:

$$\exp(\rho_{*_e} A) = \rho \exp A .$$

⊠

Como aplicación, resulta :

COROLARIO (6.1.7.):

Si $g \in G$ y $A \in LG$, entonces

$$\exp(\mathrm{ad}\, g\ A) = g(\exp A)\, g^{-1}$$

Para probar esto, basta señalar que $\mathrm{ad}\, g = L(\mathfrak{I} g)$, por definición. Obsérvese que en virtud de la identificación $LG = G_e$, la representación adjunta opera en G_e .

Otra aplicación de (6.1.6.) es la siguiente. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. El álgebra de Lie de $GL(V)$ es, según (4.3.8.), $\mathcal{L}(V)$. El homomorfismo $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ induce, según (4.5.11.), el homomorfismo $\mathrm{tr} : \mathcal{L}(V) \to \mathbb{R}$ de álgebras de Lie. La naturalidad de exp implica que

COROLARIO (6.1.8.):

Si $A \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\det \exp A = \exp \mathrm{tr}\, A$.

La imágen de la aplicación $\exp : G_e \longrightarrow G$ está contenida, evidentemente, en la componente conexa G_o de la identidad de G. El ejemplo siguiente muestra que exp no es necesariamente suryectiva, aún en el caso en que G sea conexo.

Ejemplo (6.1.9.):

Sea $SL(2, \mathbb{R})$ el grupo de matrices cuadradas 2×2 con determinante $= 1$. $SL(2, \mathbb{R})$ es conexo. Mostraremos en primer lugar que existen en este grupo elementos que no son cuadrados.

Sea $g \in SL(2, \mathbb{R})$, y

$$\det(\lambda I - g) = \lambda^2 - \lambda \, \mathrm{tr}\, g + \det g$$

su polinomio característico (I = matriz unidad ; $\mathrm{tr}\, g$ = traza de g). En virtud de un teorema de álgebra lineal, se cumple

$$g^2 - \mathrm{tr}\, g \,.\, g + \det g = 0$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\det g = 1$ y el operador tr es el lineal:

$$0 = \mathrm{tr}\,(g^2 - \mathrm{tr}\, g \,.\, g + \det g) = \mathrm{tr}\, g^2 - (\mathrm{tr}\, g)^2 + 2 \,,$$

de manera que

$$\mathrm{tr}\, g^2 = (\mathrm{tr}\, g)^2 - 2 \geqslant -2$$

Por lo tanto, todo elemento $1 \in SL(2, \mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}\, 1 < -2$ (por ejemplo, $1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$) no puede ser un cuadrado, es decir, no existe ningún $g \in SL(2; \mathbb{R})$ tal que $g^2 = 1$.

Veamos ahora que $\exp$ no es suryectiva, siendo $G = SL(2; \mathbb{R})$. En efecto, si lo fuera, para cada $1 \in G$ existiría $A \in G_e$ tal que $\exp A = 1$. Si α es el subgrupo a un parámetro definido por A, entonces $\alpha_1 = 1$. Además, $1 = \alpha_1 = \alpha_{\frac{1}{2}} \, \alpha_{\frac{1}{2}} = (\alpha_{\frac{1}{2}})^2$, es decir, 1 es un cuadrado.

Observación: Sea X una variedad y φ_t y g. 1-p t. de X generado por un campo de vectores A^* sobre X. Si consideramos a φ_t como un subgrupo a un parámetro de $\mathrm{Aut}\, X$, sugiere escribir

$$\varphi_t = \exp\, t A^*$$

Sea $\mathcal{T}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$ una operación, $\alpha \in \mathcal{L}G$ un subgrupo a un parámetro, y A^* el campo de vectores de Killing definido por α. Entonces, por definición, se cumple:

$$\mathcal{T}_{\alpha_t} = \exp t A^* ,$$

o también, si $A \in G_e$ con $\alpha_t = \exp t A$:

$$\mathcal{T}_{\exp t A^*} = \exp t A^*$$

Esta igualdad expresa la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} G_e \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\exp"'] & K X \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "\mathcal{T}"] & \mathrm{Aut}\, X \end{tikzcd}$$

donde $\sigma : G_e \longrightarrow K X \hookrightarrow D X$ es el homomorfismo inducido por la operación $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$. En el vértice superior derecho del diagrama no se puede colocar $D X$ en lugar de $K X$, puesto que solamente a campos de vectores completos le es aplicable exp . Entonces, exp es aún en este caso una transformación natural (de funtores convenientemente definidos).

§ 6.2. exp COMO DIFEOMORFISMO LOCAL EN LA IDENTIDAD

PROPOSICION (6. 2. 1.):

La aplicación lineal tangente $\exp_{*o} : G_e \longrightarrow G_e$ inducida por $\exp : G_e \longrightarrow G$ es la aplicación identidad.

Demostración: Para cada $A \in G_e$ se cumple

$$\exp_{*o} A = \exp_{*tA} A \Big|_{t=0} = \left\{ \exp_{*tA} \frac{d}{dt} (t A) \right\}\Big|_{t=0} =$$

$$= \frac{d}{dt} \exp (t A) \Big|_{t=0} = A \qquad \boxtimes$$

En consecuencia, aplicando el teorema de existencia de funciones implícitas, resulta :

TEOREMA (6. 2. 2.).

Existen un entorno abierto N_o de O en G_e y un entorno abierto N_e de e en G, tales que $\exp : N_o \longrightarrow N_e$ es un difeomorfismo analítico.

Llamaremos $\log : N_e \longrightarrow N_o$ a la aplicación inversa de $\exp$, que define pues una carta en un entorno de e.

DEFINICION (6.2.3.).

Una carta canónica de G en e es un par $(N_e, \log)$ formado por un entorno abierto N_e de e en G y un difeomorfismo

$$\log : N_e \longrightarrow \log N_e = N_o \hookrightarrow G_e$$

que es la aplicación inversa de $\exp | N_o$.

Una aplicación inmediata de (6.2.2.) es la siguiente :

PROPOSICION (6.2.4.) :

La componente conexa de la identidad G_o de un grupo de Lie G es conmutativa si $L\,G$ es conmutativa.

Demostración: La imagen de $\exp$ contiene un entorno abierto U de e en G. Puesto que, según (6.1.4.), $\exp : G_e \longrightarrow G$ es un homomorfismo, resulta que el producto conmuta en U. Pero U genera G_o, de manera que G_o es conmutativo.

⊠

Esta proposición, junto con (4.6.9.), implica:

TEOREMA (6.2.5.)

Sea G un grupo de Lie conexo. Entonces G es conmutativo si y sólo si LG es conmutativo.

LEMA (6.2.6.)

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ en homomorfismo. Entonces $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es inyectivo (suryectivo) si y sólo si ρ_{*g} es inyectivo (suryectivo) para cada $g \in G$.

Demostración: $\rho(g\gamma) = \rho(g)\rho(\gamma)$ implica, para $\gamma = e$,

$$\rho_{*g} \circ (L_g)_{*e} = (L_{\rho(g)})_{*e'} \circ \rho_{*e} \quad , \quad y$$

$$\rho_{*g} = (L_{\rho(g)})_{*e'} \circ \rho_{*e} \circ (L_g)_{*e}^{-1}$$

⊠

PROPOSICION (6.2.7.).

Si G es un grupo de Lie conmutativo y conexo, entonces $\exp : LG \longrightarrow G$ es suryectiva.

Demostración: Vimos en (6.1.4.) que si LG es conmutativo, entonces $\exp : LG \longrightarrow G$ es un homomorfismo. Sea G' su imagen. $\exp_{*0}$ es la aplicación identidad y por (6.2.6.) $\exp_{*A}$ es un isomorfismo para cada $A \in LG$. Por consiguiente G' es un subgrupo abierto (y cerrado) de G , es decir $G' = G$.

⊠

Sea ahora $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local, y $(N_e, \log)$ una carta canónica en e . La naturalidad de exp ((6.1.6.)) implica que para cada $g \in N_e$ se cumple

$$(*) \qquad \rho(g) = \exp(L(\rho)\log g) .$$

Es decir, $\rho | N_e$ queda determinado por $L(\rho)$. La siguiente es una aplicación de este hecho.

PROPOSICION (6.2.8.)

Sean $\rho_i : G \longrightarrow G'$, $(i = 1, 2)$, homomorfismos locales. Si $L(\rho_i) : LG \longrightarrow LG'$ $(i = 1, 2)$ coinciden, entonces existe un abierto U de e en G en el cual es $\rho_1 = \rho_2$.

Demostración: Sea $U = N_e$ el dominio de una carta canónica. Entonces (*) dice que $\rho_1(g) = \rho_2(g)$ para todo $g \in U$. ⊠

En virtud de que si G es conexo, cada entorno de e genera a G, resulta como consecuencia:

COROLARIO (6.2.9.)

Sea G conexo y $\rho_i : G \longrightarrow G'$, $i = 1, 2$, homomorfismos. $L(\rho_1) = L(\rho_2)$ implica $\rho_1 = \rho_2$.

Este corolario puede expresarse diciendo que el funtor $L : \mathcal{L}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathcal{L}\mathfrak{A}$ es fiel en la subcategoría de grupo de Lie conexos y homomorfismos globales.

Una aplicación del resultado obtenido es la siguiente:

PROPOSICION (6.2.10.)

Si G es conexo, entonces $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ad} = ZG$, donde ZG designa al centro de G.

Demostración: Por definición, $\mathrm{ad} = L \circ J$. Pero, según vimos, $L(\mathfrak{I}_g) = 1_{LG}$ implica $\mathfrak{I}_g = 1_G$, y por lo tanto $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ad} = \mathrm{Ker}\ \mathfrak{I} = ZG$ ⊠

Consideremos el problema de construir un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ que induzca un homomorfismo dado $L\,G \longrightarrow L\,G$ de álgebras de Lie. No podemos esperar que $G \longrightarrow G'$ sea un homomorfismo global en general, como lo muestra el ejemplo, ya analizado anteriormente, del isomorfismo $L\,\mathbb{T} \longrightarrow L\,\mathbb{R}$; que no es inducido por ningún homomorfismo $\mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>PROPOSICION</u> (6.2.11.)

Sea $h : L\,G \longrightarrow L\,G'$ un homomorfismo de las álgebras de Lie de los grupos de Lie G, G', y (N_e, log) una carta canónica en e de G.
La restricción a N_e de todo homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ que induce h es necesariamente de la forma $\rho = \exp \circ h \circ \log : N_e \longrightarrow G'$. Recíprocamente, si $L\,G$ y $L\,G'$ son conmutativos, entonces la aplicación $\rho : N_e \longrightarrow G'$ definida por la fórmula mencionada es un homomorfismo local que induce h.

<u>Demostración:</u> Hemos visto ya que la restricción de un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ a N_e es necesariamente de esa forma.
Por (6.1.4.), si $L\,G$ es conmutativa, exp es un homomorfismo $G_e \longrightarrow G$, de manera que también log es un homomorfismo (local) $G \longrightarrow G_e$. Entonces ρ es un homomorfismo.
Si $L(\rho) : L\,G \longrightarrow L\,G'$ es el homomorfismo inducido, es evidente que $\rho_{*e} : G_e \longrightarrow G'_{e'}$ es justamente h, lo cual prueba que $L(\rho) = h$

⊠

La aplicación $\rho : N_e \longrightarrow G'$ definida por un homomorfismo de álgebras de Lie $h : L\,G \longrightarrow L\,G'$ es un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ que induce h aún en el caso en que $L\,G$ y $L\,G'$ no sean conmutativas.

Sin embargo, una prueba directa de este hecho requeriría un análisis más profundo de la situación

C f. los comentarios hechos a continuación de la proposición (6.4.2.).

En el capítulo VII construiremos con un método diferente un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ que induce un $\dot{h} : LG \longrightarrow LG'$ dado (ver (7.2.3.). Entonces, la unicidad probará que el $\rho : N_e \longrightarrow G'$ definido en (6.2.11.) es un homomorfismo local.

<u>Ejercicio</u> (6.2.12.):

Sea G un grupo de Lie que opera efectivamente en una variedad X, con respecto a $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ X$, y sea KX el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing sobre X. Probar que $g \in G$ satisface $(\tau_g)_* A = A$ para todo $A \in KX$ si y sólo si g está en el centralizador de la componente G_0 de la identidad de G.

****

§ 6.3. <u>UNICIDAD DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO DE LIE</u>.

Comenzaremos probando la importante

<u>PROPOSICION</u> (6.3.1.):

Sea G un grupo de Lie y $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ un homomorfismo en el sentido algebraico que es continuo. Entonces existe un $A \in LG$ tal que $\alpha_t = \exp tA$, y por consiguiente α es analítico, es decir, un subgrupo a un parámetro de G.

<u>Demostración</u>: Sea $(U, \log)$ una carta canónica de G, y V un entorno de e en G tal que $VV \subset U$.

Si $g \in V$, entonces $g^2 \in VV \subset U$ y $\log g$ y $\log g^2$ están definidos. Consideremos el subgrupo a un parámetro de G definido por $t \rightsquigarrow \exp(t \log g)$; en particular, si $t = 1$, $\exp \log g = g$. El elemento g^2 está en este subgrupo a un parámetro y $g^2 = \exp 2 \log g$. Por otra parte, $g^2 = \exp \log g^2$, por ser $g^2 \in U$. Entonces $\log g^2 = 2 \log g$, o sea $g = \exp(\frac{1}{2} \log g^2)$, lo cual significa que g está unívocamente determinado por g^2.

Consideremos ahora el homomorfismo continuo $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$. Existe un $\varepsilon > 0$

tal que $\alpha_t \in V$ para todo t que cumple $|t| \leqslant \varepsilon$. Podemos suponer $\varepsilon = 1$ (de lo contrario se cambia el parámetro t por λt de manera que el nuevo parámetro esté definido para todos los valores cuyo módulo es $\leqslant 1$).

Definimos $\alpha_1 = g \in V$; $\exp(\frac{1}{2} \log g)$ es una raíz cuadrado de g en V, y es única, por las consideraciones anteriores. Esto muestra que $\alpha_{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2} \log g)$, o sea $\log \alpha_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} A$, con $\log \alpha_1 = A$.

Procediendo por iteración resulta $\log \alpha_{(\frac{1}{2^n})} = \frac{1}{2^n} A$, y por adición $\log \alpha_{(\frac{p}{2^n})} = \frac{p}{2^n} A$ para $0 \leqslant p \leqslant 2$, $p \in N^*$.

Esto muestra que $\log \alpha_r = r A$ para todo racional diádico r tal que $0 \leqslant r \leqslant 1$. Entonces, por continuidad $\log \alpha_t = tA$, es decir $\alpha_t = \exp tA$.

⊠

Para generalizar (6.3.1.) a homomorfismos arbitrarios, haremos uso del

LEMA (6.3.2.).

Sea G un grupo de Lie, y G_e un producto directo $M \times N$ de espacios vectoriales. Entonces la aplicación $\phi : M \times N \longrightarrow G$ definida mediante $\phi(A, B) = \exp A \exp B$, para $A \in M$, $B \in N$, es un difeomorfismo local en O.

Demostración: En virtud del teorema de funciones inversas, sólo hay que probar que $\phi_{*_O} : M \times N \longrightarrow G_e$ es un isomorfismo.

Se cumple $\phi = m \circ (\exp M \times \exp N)$, donde m es la multiplicación $m : G \times G \longrightarrow G$. Entonces, si $(X, Y) \in M \times N$, se tiene

$$\phi_{*_O}(X, Y) = m_{*(e,e)}(\exp_{*_O} X , \exp_{*_O} Y) =$$

$$= \exp_{*_O} X + \exp_{*_O} Y = X + Y \quad ,$$

por ser $\exp_{*_O}$ = identidad , según (6.2.1.). Entonces ϕ_{*_O} es la identidad.

⊠

Observación: El lema se generaliza sin dificultad para una descomposición $G_e = M_1 \times \ldots \times M_n$ en un número finito de subespacios vectoriales $M_i \subset G_e$.

LEMA (6.3.3.).

Sean G y G' grupos de Lie y $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo algebraico. Si ρ es diferenciable (analítico) en e, entonces es diferenciable (analítico) en todo punto.

Demostración: Basta notar que $\rho \circ L_g = L_{\rho(g)} \circ \rho$ ⊠

Estamos ahora en condiciones de probar el

TEOREMA (6.3.4.)

Sean G y G' grupos de Lie y $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo algebraico, que es continuo. Entonces ρ es analítico, es decir, es un homomorfismo de grupos de Lie.

Demostración: Sea $A \in G_e$. La correspondencia $t \rightsquigarrow \rho(\exp tA)$ es un homomorfismo continuo $\mathbb{R} \longrightarrow G$, y por lo tanto existe $A' \in G'_e$ tal que $\rho(\exp tA) = \exp tA'$.

Sea A_i $(i = 1, \ldots, n$; $n = \dim G)$ una base de G_e, y A'_i el vector de G'_e con $\rho(\exp tA_i) = \exp tA'_i$. Entonces $\rho(\prod_{i=1}^{n} \exp t_i A_i) = \prod_{i=1}^{n} \exp t_i A'_i$.

La aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow G$ definida por $\phi(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \exp t_i A_i$ es un difeomorfismo local en O, por la observación a continuación de (6.3.2.). Existe entonces un entorno V de e en G tal que todo $g \in V$ puede expresarse en la forma $g = \prod_{i=1}^{n} \exp t_i A_i$, donde t_i depende analíticamente de g.

La fórmula $\rho(\prod_{i=1}^{n} \exp t_i A_i) = \prod_{i=1}^{n} \exp t_i A'_i$ muestra que ρ es analítico en la identidad, y entonces, por (6.3.3.), ρ es analítico en todo G. ⊠

Observación: La aplicación $\rho_{*e} : G_e \longrightarrow G'_e$ está dada por $\rho_{*e} A_i = A'_i$,

$i = 1, \ldots, n$.

COROLARIO (6.3.5.):

Sean G y G' grupos de Lie. Si $G = G'$ como grupos topológicos, entonces $G = G'$ como grupos de Lie.

Demostración: Si la igualdad $G = G'$ se cumple en el sentido de grupos topológicos, la aplicación identidad es un homeomorfismo, y por lo tanto, según (6.3.4.), un difeomorfismo.

⊠

Esto muestra que el álgebra de Lie de un grupo de Lie es de hecho una propiedad del grupo topológico subyacente.

Esto sugiere el problema de saber que grupos topológicos son grupos de Lie, es decir, cuándo se los puede proveer de una estructura analítica compatible con la estructura de grupo, y tal que la correspondiente topología coincide con la dada. A. M. Gleason (Ann. of Math. 56, (1952), p. 193 - 212) ha probado que todo grupo topológico localmente compacto, localmente conexo, metrizable y de dimensión finita, es un grupo de Lie.

****

§ 6.4. APLICACION A PUNTOS FIJOS DE G-VARIEDADES.

Como aplicación, daremos en esta sección una caracterización de los puntos fijos en una G-variedad por el álgebra de Lie de campos de vectores de Killing.

LEMA (6.4.1.).

Sea X una variedad, A un campo de vectores y φ_t el gl. 1-p tl. generado por A. Un punto $x \in X$ es un punto fijo de toda transformación φ_t si y sólo si $A_x = 0$.

Demostración: $\varphi_t(x) = X$ para todo t implica $\dot{\varphi}_t(x)\big|_{t=0} = 0$ y por lo tanto $A_x = 0$.

Recíprocamente, sea $A_x = 0$. Entonces la ecuación diferencial $\dot{\varphi}_t(x) = A_{\varphi_t(x)}$ tiene solución $\varphi_t(x) = x$ para todo t, y tal solución es única. ⊠

<u>Ejemplo</u> (6.4.2.):

En la esfera S^2 de dos dimensiones todo campo de vectores tiene un cero. Por consiguiente, todo grupo de un parámetro de transformaciones tiene un punto fijo.

Más generalmente, sea X una variedad compacta. La anulación de la característica $\chi(X)$ de Euler-Poincaré es una condición necesaria y suficiente para la existencia de un campo de vectores sin ceros (Recuérdese que campo de vectores significa campo de vectores diferenciable). En consecuencia, todo g. 1-p.t. de una variedad compacta X con $\chi(X) \neq 0$ tiene un punto fijo.

<u>PROPOSICION</u> (6.4.3.):

Sea G un grupo de Lie conexo que opera sobre X mediante $\tau: G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$, y sea KX el álgebra de Lie de campos de vectores de Killing sobre X. Un punto $x \in X$ es G-invariante si y sólo si $A^*_x = 0$ para todo $A^* \in KX$.

<u>Demostración:</u> Sea x G-invariante. Para cada $\alpha \in \mathcal{L}G$ se cumple $\tau_t(x) = x$, y por lo tanto $A^*_x = 0$ para el correspondiente campo de vectores de Killing sobre X.

Recíprocamente, sea $A^*_x = 0$ para todo $A^* \in KX$. En virtud de (6.4.1.), para todo $\alpha \in \mathcal{L}G$ se cumple $\tau_{\alpha_t}(x) = x$ para $g \in U$. Puesto que G es conexo, U genera G y entonces $g(x) = x$ para todo $g \in G$. ⊠

En particular, sea $\tau: G \longrightarrow GL(V)$ una representación de un grupo de Lie conexo G en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita. Un punto $v \in V$ es G-invariante si y sólo si $A^*_v = 0$ para todo $A^* \in KV$. Como hemos visto en (5.5.5.), el campo de vectores de Killing A^* correspondiente a $\alpha \in \mathcal{L}G$ está definido mediante $A^*_v = \tau_{*e}\, \dot{\alpha}_0\, v$. Entonces $v \in V$ es G-invariante si y sólo si $(\tau_{*_e} A)v = 0$ para todo $A \in Ge$. Si consideramos la representación inducida $L(\tau) : LG \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ de LG en V, vemos que $v \in V$ es G-invariante si y sólo si $(L(\tau)A)v = 0$ para todo $A \in LG$.

Esto motiva la siguiente :

<u>DEFINICION</u> (6.4.4.).

Sea Λ un campo, M una Λ-álgebra de Lie, V un Λ-espacio vectorial, y $\sigma : M \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ una representación de M en V. Un elemento $v \in V$ se llama <u>invariante</u>, o <u>M-invariante</u>, cuando $\sigma(A)V = 0$ para todo $A \in M$.

Se cumple entonces:

<u>PROPOSICION</u> (6.4.5.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, G un grupo de Lie conexo, $\tau : G \longrightarrow GL(V)$ una representación de G en V y $L(\tau) : LG \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ la representación inducida de LG en V. Un elemento $v \in V$ es G-invariante si y sólo si es LG-invariante.

Aplicaremos ahora (6.4.3.) al caso de un grupo de Lie G conmutativo.

<u>PROPOSICION</u> (6.4.6.) :

Sea X una variedad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

a) Para cada grupo de Lie G conexo, conmutativo, n-dimensional, y cada operación $\tau : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$, existe un punto $x \in X$ que es G-invariante ;

b) Toda operación del grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ sobre X tiene un punto fijo ;

c) Para cada n-upla $A_1, \ldots, A_n$ de campos de vectores completos que cumple $[A_i, A_j] = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, existe un punto $x \in X$ tal que $A_{i_x} = 0$, para $i = 1, \ldots, n$.

<u>Demostración</u>: a) implica b) es claro.

b) implica c). En efecto, sean $A_1, \dots, A_n$ campos de vectores completos sobre X con $[A_i, A_j] = 0$, $i,j = 1, \dots, n$, y consideremos el grupo aditivo K generado por $A_1, \dots, A_n$. En virtud de (5.6.6.), existe una operación de K sobre X tal que el álgebra de Lie conmutativa K es el álgebra de los campos de vectores de Killing de tal operación. K es isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{R}^k$, para algún $k \leqslant n$. La operación de K sobre X induce entonces una operación del grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ sobre X, que por hipótesis posee un punto fijo x. En virtud de (6.4.3.), x es un cero para cada $A \in K$; en particular $A_{i_x} = 0$, $i = 1, \dots, n$.

c) implica a). En efecto. Sea G un grupo de Lie conexo, conmutativo, n-dimensional; $\mathcal{T}: G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ una operación de G sobre X, y KX el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing. Se cumple $\dim KX \leqslant n$. Sea $A_1, \dots, A_n$ un sistema de generadores de KX. Entonces $[A_i, A_j] = 0$. para $i,j = 1, \dots, n$. Por hipótesis, existe un cero común $x \in X$ de esos campos de vectores de Killing y, por (6.4.3.), es G-invariante.

⊠

Si alguna de las afirmaciones a), b), c) de (6.4.6.) (y por consiguiente todas) se cumple para un cierto n natural, entonces también se cumple para todo $m \leqslant n$.

La variedad subyacente de un grupo de Lie G conmutativo, de dimensión n, no satisface, evidentemente, ninguna de las tres afirmaciones. La operación de G_o sobre G por traslaciones a izquierda no tiene puntos fijos, y cada n-upla de campos de vectores invariantes $A_1, \dots, A_n$ satisface $[A_i, A_j] = 0$ sin que ninguno de tales campos de vectores tenga ceros.

Ejemplo (6.4.7.):

Para la esfera de dos dimensiones S^2, la afirmación c) de (6.4.6.) dice, en el caso $n = 1$, que todo campo de vectores sobre S^2 tiene un cero, lo cual es verdadero, y es una consecuencia de $\chi(S^2) \neq 0$. Para $n = 2$, la veracidad de la afirmación b) fué probada por E.L. Lima (Proc. AMS, Vol 15 (1964), p. 138-141).

§ 6.5. FORMULA DE TAYLOR.

Aquí haremos uso esencial de la analiticidad de G. Además, supondremos LG identificado con G_e .

PROPOSICION (6.5.1.):

Sea $f \in CG$ una función analítica en $g \in G$, y $A \in LG$. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $|t| < \varepsilon$ se cumple

$$f(g \exp tA) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left[A^n f\right] (g)$$

Demostración: En virtud de la analiticidad de f, basta probar que

$$\left[A^n f\right] (g) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(g \exp tA)\right]_{t=0} ,$$

lo cual haremos por inducción, y será válido para todo t.

El caso $n = 1$ resulta de (5.4.7.).

Si suponemos válida la igualdad para algún n, entonces

$$\left[A^{n+1} f\right] (g) = \left[A^n (Af)\right] (g) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n (Af) (g \exp tA)\right]_{t=0} =$$

$$= \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n \frac{d}{du} f(g \exp tA \exp uA)\right]_{\substack{t=0 \\ u=0}} = \left[\left(\frac{d}{dv}\right)^n \frac{d}{dv} f(g \exp vA)\right]_{v=0},$$

donde hicimos $t + u = v$.

⊠

Designaremos con $O(t^n)$ (n natural) un vector (no necesariamente el mismo en cada expresión en que aparece) en LG tal que existe $\varepsilon > 0$ de manera que para $0 < |t| < \varepsilon$, $\frac{1}{t^n} O(t^n)$ es acotado y analítico.

PROPOSICION (6.5.2.):

Para cada $A, B \in LG$ y t suficientemente pequeño, se cumple :

(i) $\exp tA \exp tB = \exp \left\{ t(A+B) + \frac{t^2}{2} [A, B] + O(t^3) \right\}$;

(ii) $\exp(-tB)\exp tA \ \exp tB = \exp\{tA + t^2[A,B] + O(t^3)\}$; y

(iii) $\exp(-tA)\exp(-tB)\exp tA \ \exp tB = \exp\{t^2[A,B] + O(t^3)\}$.

<u>Demostración</u>: Sea f analítica en e ; (6.4.1.) asegura que

$$[A^n f](e) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(\exp tA)\right]_{t=0} ,$$

y entonces

$$[A^n B^m f](e) = \left[\left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{d}{ds}\right)^m f(\exp tA \ \exp sB)\right]_{\substack{t=0\\ s=0}}$$

Entonces la serie de Taylor para $f(\exp tA \ \exp sB)$ es

$$f(\exp tA \ \exp sB) = \sum_{n,m \quad 0} \frac{t^n}{n!} \ \frac{s^m}{m!} \ [A^n B^n f](e) ,$$

y en particular ,

$$f(\exp tA \ \exp tB) = \sum_{n,m \geqslant 0} \frac{t^{n+m}}{n! \ m!} [A^n B^m f](e) ,$$

en donde puede observarse:

coeficiente de t = $[Af](e) + [Bf](e)$;

coeficiente de t^2 = $\frac{1}{2}[A^2 f](e) + [AB f](e) + \frac{1}{2}[B^2 f](e)$

Por otra parte, (6.2.2.) asegura que se cumple

$$\exp tA \ \exp tB = \exp Z(t) ;$$

donde $Z : I \longrightarrow G_e$, I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que contiene 0 , Z es analítica en 0 y $Z(0) = 0$.

Entonces

$$Z(t) = tZ_1 + t^2 . Z_2 + O(t^3)$$

para algún Z_1 , $Z_2 \in G_e$.

Sea f cualquier función lineal en una carta canónica en e ; en particular f es analítica y

$$f(\exp tA \ \exp tB) = f(\exp\{tZ_1 + t^2 Z_2 + O(t^3)\}) =$$

$$= f(\exp\{tZ_1 + t^2 Z_2\}) + O'(t^3) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(tZ_1 + t^2 Z_2)^n f\right] (e) + O'(t^3) ,$$

donde $O'(t^3)$ es ahora un número real con las mismas propiedades de analiticidad y acotación definidas antes para vectores. Obsérvese que tal $O'(t^3)$ tiene esas propiedades por ser f lineal.

De la última expresión obtenida, resulta :

$$\text{coeficiente de } t = \left[Z_1 f\right] (e)$$

$$\text{coeficiente de } t^2 = \left[Z_2 f\right](e) + \tfrac{1}{2}\left[Z_1^2 f\right] (e)$$

La comparación de coeficientes con los del desarrollo anterior da

$$\left[Z_1 f\right] (e) = \left\{(A+B) f\right\} (e) ,$$

$$\left[Z_2 f\right] (e) = \left\{\tfrac{1}{2}\left[A, B\right] f\right\} (e) ,$$

y puesto que estas igualdades se verifican para cualquier función lineal f en una carta canónica en e, resulta :

$$Z_1 = A+B ,$$

$$Z_2 = \tfrac{1}{2}\left[A, B\right] ,$$

lo cual prueba (i).

Para probar (ii), aplicamos (i) dos veces:

$$\exp(-tB) \exp tA \ \exp tB = \exp\left(t(-B) \exp(t\{(A+B) + \frac{t}{2}\left[A,B\right] + O(t^2)\}\right) =$$

$$\exp\left\{t\ (-B + \{A+B+\frac{t}{2}\left[A, B\right] + O(t^2)\}\right) +$$

$$+ \frac{t^2}{2} \left[-B, \left\{ A+B+\frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) \right\} \right] + O(t^3) \Big\} =$$

$$= \exp \left\{ t \left(A + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2)\right) + \frac{t^2}{2} \left(-[B,A] + O(t)\right) + O(t^3) \right\} =$$

$$= \exp \left\{ tA + t^2 [A,B] + O(t^3) \right\} .$$

La demostración de **(iii) es análoga :**

$$\exp(-tA) \exp(-tB) \exp tA \exp tB =$$

$$= \exp \left(t \left\{ -(A+B) + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) \right\}\right) \exp\left(t \left\{ A+B+\frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) \right\}\right) =$$

$$= \exp \left(t\left(-(A+B) + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) + A + B + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2)\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{t^2}{2} \left[-(A+B) + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) + A + B + \frac{t}{2} [A,B] + O(t^2) \right] + O(t^3)\right) =$$

$$= \exp\left(t^2 [A,B] + O(t^3)\right) .$$

⊠

<u>Observación</u>: Sea N_O un entorno abierto de O en G_e, tal que la restricción $\exp | N_O$: : $N_O \longrightarrow N_e$ es un difeomorfismo. Entonces, si $A, B \in N_O$ y además $\exp A . \exp B \in$ $\in N_e$, podemos definir :

$$A \circ B = \log (\exp A \ . \ \exp B)$$

Esta fórmula define una ley de composición (parcial) en N_O y tal que O es una identidad. Además, exp es un isomorfismo de N_O sobre N_e provisto con la composición ahora definida.

Entonces la fórmula (i) de (6.4.2.) puede escribirse, para $A, B \in LG$ y t suficientemente pequeño:

$$tA \circ tB = tA + tB + \tfrac{1}{2} [tA, tB] + O(t^3) .$$

Puede probarse además (cosa que no haremos aquí) el hecho fundamental que para t suficientemente pequeño $O(t^3)$ es expresable mediante operaciones sobre A, B en

LG. Esto significa que la ley de multiplicación del grupo G está completamente determinada en un entorno N_e de e en G por el álgebra de Lie LG. La fórmula (i) de (6.4.2.) dá precisamente los primeros dos términos del desarrollo.

Además se puede probar (lo cual tampoco haremos) que cada homomorfismo $h : LG \to LG'$ de álgebras de Lie es un homomorfismo con respecto a la composición $\circ$ en N_0. Esto muestra en particular, que la aplicación $\rho : N_e \longrightarrow G'$ determinada por $h : LG \longrightarrow LG'$ según (6.2.9.) es un homomorfismo local $G \longrightarrow G'$ que induce h.

Aplicaremos ahora (6.5.2.) para probar la

PROPOSICION (6.5.3.):

Sea $A, B \in LG$. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes :

(i) $[A, B] = 0$;

(ii) $\exp sA \exp tB = \exp tB \exp sA$, para todo s, t .

(iii) $\exp tA \exp tB = \exp tB \exp tA$, para todo t .

Demostración: Que (i) implica (ii), resulta de (5.4.11.), y que (ii) implica (iii) es trivial. Para ver que (iii) implica (i), obsérvese que, por (6.4.2.), (iii) implica

$$\exp\left\{ t(A+B) + \frac{t^2}{2}[A,B] + O(t^3) \right\} = \exp\left\{ t(B+A) + \frac{t^2}{2}[B,A] + O(t^3) \right\}$$

para t suficientemente pequeño. Entonces $[A,B] = [B,A]$, es decir $[A, B] = 0$.

⊠

La fórmulas (i) y (iii) de (6.4.2.) implican también el siguiente

COROLARIO (6.5.4.):

En las mismas condiciones que en (6.4.2.), se cumple :

(i) $\exp t(A+B) = \exp tA \exp tB \exp\left\{ \frac{t^2}{2} [A,B] + O(t^3) \right\} =$

$$= \exp tA \ \exp tB \ . \ \exp O(t^2) \quad ;$$

(ii) $$\exp\{t^2 [A, B]\} = \exp(-tA)\exp(-tB)\exp tA \ \exp tB \ \exp O(t^3).$$

Demostración:

$$\exp(-tA)\exp(-tB)\exp t(A+B) =$$

$$= \exp(t\{-(A+B) + \frac{t}{2}[A, B] + O(t^2)\})\exp t(A+B) =$$

$$= \exp(t(\{\ \} + (A+B)) + \frac{t^2}{2}[\{\ \}, A+B] + O(t^3)) =$$

$$= \exp(\frac{t^2}{2}[A, B] + O(t^3)) \ .$$

Además,

$$\exp(-tB)\exp(-tB)\exp(-tA)\exp tB \ \exp tA \ \exp(t^2 [A, B]) =$$

$$= \exp\{t^2 [B, A] + O(t^3)\}\exp\{t^2 [A, B]\} = \exp O(t^3). \quad \boxtimes$$

La fórmula (i) de este corolario muestra que la curva $t \rightsquigarrow \exp tA \exp tB$ tiene el mismo vector tangente en e que el subgrupo a un parámetro $t \rightsquigarrow \exp t(A+B)$. Además, de (5.4.10) se deduce que el término $O(t^3)$ se anula si $[A, B] = 0$.

La fórmula (ii) describe a $[A, B]$ como el vector tangente en e a la curva

$$t \rightsquigarrow \exp(-\sqrt{t}\, A)\exp(-\sqrt{t}\, B)\exp\sqrt{t}\, A \ \exp\sqrt{t}\, B \ .$$

Otra consecuencia de (6.4.2.), que será útil posteriormente, es la siguiente :

COROLARIO (6.5.5.) :

Sea $A, B \in LG$. Para cada $t \in \mathbb{R}$ se cumple :

(i) $$\exp t(A+B) = \lim_{n\to\infty}(\exp\frac{t}{n}A \ \exp\frac{t}{n}B)^n \ ;$$

(ii) $$\exp\{t^2 [A, B]\} = \lim_{n\to\infty}\{\exp(-\frac{t}{n}A)\exp(-\frac{t}{n}B)\exp\frac{t}{n}A \ \exp\frac{t}{n}B\}^{n^2}$$

<u>Demostración</u> : Sea $t \in \mathbb{R}$ fijo y n suficientemente grande. En virtud de (6.4.2.) se cumple

$$\exp \frac{t}{n} A \exp \frac{t}{n} B = \exp \left\{ \frac{t}{n} (A+B) + \frac{t^2}{2n^2} [A, B] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\},$$

y por consiguiente

$$\left\{ \exp \frac{t}{n} A \exp \frac{t}{n} B \right\}^n = \exp \left\{ t (A+B) + \frac{t^2}{2n} [A, B] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\},$$

de donde (i) surge inmediatamente. Para mostrar (ii), basta observar que por (6.4.2.) es

$$\left\{ \exp \left(-\frac{t}{n} A\right) \exp \left(-\frac{t}{n} B\right) \exp \frac{t}{n} A \exp \frac{t}{n} B \right\}^{n^2} =$$

$$= \left\{ \exp \left\{ \frac{t^2}{n^2} [A, B] + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right\} \right\}^{n^2} = \exp \left\{ t^2 [A, B] + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} \boxtimes$$

****
****
****
*

CAPITULO VII SUBGRUPOS Y SUBALGEBRAS.

§ 7.1. SUBGRUPOS DE LIE.

Antes de definir la noción de subgrupo de Lie, probaremos el siguiente

LEMA (7.1.1.).

Sean H y G grupos de Lie, y $\iota : H \longrightarrow G$ un homomorfismo inyectivo. Entonces el homomorfismo inducido $L(\iota) : LH \longrightarrow LG$ es inyectivo.

Demostración: Sean $\alpha_i \in \mathcal{L}H$ $(i = 1, 2)$ subgrupos a un parámetro de H tales que $\iota \circ \alpha_1 = \iota \circ \alpha_2$. Por ser ι inyectivo, es $\alpha_1 = \alpha_2$. Entonces la aplicación $\mathcal{L}(\iota) : \mathcal{L}H \longrightarrow \mathcal{L}G$ inducida por ι es inyectiva, lo cual muestra (cf. (5.4.12.)) la inyectividad de $L(\iota)$.

⊠

Obsérvese que, en virtud de (6.2.6.), toda aplicación lineal tangente ι_{*h} : $: H_h \longrightarrow G_{\iota(h)}$ es inyectiva.

DEFINICION (7.1.2.).

Un subgrupo H de un grupo de Lie G es un **subgrupo de Lie** de G cuando:

(i) H es un grupo de Lie; y

(ii) la inyección $\iota : H \hookrightarrow G$ es analítica.

Si H es un subgrupo de Lie de G, (7.1.1.) y la observación que le sigue aseguran que el par (H, ι) es una subvariedad de G, de acuerdo a la

DEFINICION (7.1.3.).

Un subconjunto H de una variedad G es una **subvariedad** de G cuando:

(i) H es una variedad ; y

(ii) la inyección $\iota : H \hookrightarrow G$ es una **inmersión**, es decir, ι es diferenciable y $\iota_{*h} : H_h \longrightarrow G_{\iota(h)}$ inyectivo para todo $h \in H$.

Si H es un subfrupo de G y también una subvariedad de G, entonces la estructura analítica de H es localmente inducida por la de G, y por lo tanto las operaciones de grupo de H son analíticas. En consecuencia, H es un subgrupo de Lie de G.

Obsérvese que un subgrupo a un parámetro $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow G$ es un subgrupo de Lie de G si y sólo si α es inyectivo.

Si H es un subgrupo de Lie de G, por (7.1.1.) la inyección $\iota : H \longrightarrow G$ induce una aplicación inyectiva $L(\iota) : LH \longrightarrow LG$, de manera que podemos identificar LH con una subálgebra de LG, y escribir $L(\iota) : LH \hookrightarrow LG$.

LEMA (7.1.4.).

Si H es un subgrupo de Lie de G, la aplicación $\exp : H_e \longrightarrow H$ es la restricción de $\exp : G_e \longrightarrow G$.

Demostración: Después de la identificación canónica, el lema expresa la naturalidad (6.1.6.) de la aplicación exponencial.

⊠

PROPOSICION (7.1.5.):

Sean H_i $(i = 1,2)$ subgrupos de Lie conexos del grupo de Lie G. Si $LH_1 = LH_2$, entonces $H_1 = H_2$.

Demostración: Existe un entorno abierto de e en H_1 que también es un entorno abierto de e en H_2 (tómese una carta canónica en e y úsese (7.1.4.)).

⊠

Usaremos, sin demostrarlo, el siguiente

LEMA (7.1.6.).

Sean X e Y variedades, S una subvariedad de Y, y $\varphi : X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable tal que $\varphi(X) \subset S$. Si la aplicación inducida $\varphi : X \longrightarrow S$ es continua, entonces es diferenciable.

LEMA (7.1.7.).

Sea H un subgrupo de Lie del grupo de Lie G. Entonces LH es el conjunto de elementos $A \in LG$ tales que $t \rightsquigarrow \exp tA$ es una aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow H$.

Demostración: $A \in LH$ implica que $t \rightsquigarrow \exp tA$ es una aplicación diferenciable $\mathbb{R} \longrightarrow H$.

Recíprocamente, si $A \in LG$ y $t \rightsquigarrow \exp tA$ es una aplicación continua $\mathbb{R} \longrightarrow H$, por (7.1.6.) es también diferenciable, y por consiguiente $A \in LH$. ⊠

PROPOSICION (7.1.8.):

Si dos subgrupos de Lie H_1 y H_2 de G coinciden como grupos topológicos, entonces también coinciden como grupos de Lie.

Demostración: (7.1.7.) caracteriza el álgebra de Lie utilizando solamente la estructura topológica. Por (7.1.5.) es $H_{1_o} = H_{2_o}$, y por lo tanto la aplicación identidad $H_1 \longrightarrow H_2$ es un isomorfismo (ver 7.2.6.). ⊠

Esta proposición es evidentemente una consecuencia de (6.3.5.), pero hemos preferido dar una demostración directa.

Podemos ahora enunciar el

TEOREMA (7.1.9.).

Si H es un subgrupo de Lie del grupo de Lie G, entonces LH es una subálgebra de LG. Cada subálgebra de LG es el álgebra de Lie de un único subgrupo de Lie conexo de G.

Demostración: En vista de las consideraciones precedentes, sólo resta probar que para cada subálgebra $\mathfrak{h}$ de LG existe un subgrupo de Lie H conexo de G tal que $LH = \mathfrak{h}$.

Si tal subgrupo de Lie H existe, entonces debe cumplirse $\exp \mathfrak{h} \subset H$, y además $\exp \mathfrak{h}$ contiene un entorno abierto de e en H, de manera que genera a H.

Esta observación permite definir a H como el subgrupo generado por $\exp \mathfrak{h}$. El problema es ahora probar que tal H (con la inyección correspondiente) es una subvariedad de G. No efectuaremos tal demostración aquí; en cambio, esbozaremos una demostración de tipo diferente (ef. Chevalley [2], pág 109, th. 1), que hace uso del teorema de existencia de variedades integrales de un campo involutivo de espacios vectoriales sobre una variedad.

Sea H un subgrupo de Lie de G. Entonces los coconjuntos (cosets) a izquierda de G módulo H son las variedades integrales maximales del campo W de espacios vectoriales sobre G definido por los espacios tangentes de los coconjuntos.

Recíprocamente, dada una subálgebra $\mathfrak{h} \subset LG$; es posible reconstruir el campo W de espacios vectoriales. W_g es precisamente el espacio vectorial $\{ A_g \mid A \in \mathfrak{h} \}$.

Por ser $\mathfrak{h}$ una subálgebra, W es involutivo. Sea H la variedad integral maximal de W que contiene a e. Para ver que H es un subgrupo de G, obsérvese en primer lugar que el campo W de espacios vectoriales es invariante por traslaciones a izquierda. Por lo tanto, las variedades integrales maximales sólo permitan entre sí por traslaciones a izquierda.

Si $h \in H$, entonces $L_{h^{-1}} h = e$, de manera que $L_{h^{-1}} H = H$. Recíprocamente, si $L_{g^{-1}} H = H$, con $g \in G$, entonces $g \in H$. En consecuencia $H = \{ g \mid L_{g^{-1}} H = H \}$ y H es un subgrupo de G. Y como además es una subvariedad de G, resulta que H es un subgrupo de Lie de G.

⊠

Ejercicio (7.1.10.):

Sea X una G-variedad y H un subgrupo de Lie de G. Entonces X es una H-variedad. Sea $\mathcal{T} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\, X$ una operación efectiva de G sobre X, y S una subálgebra del álgebra de Lie KX de los campos de vectores de Killing. Existe entonces un único subgrupo de Lie conexo H de G tal que la restricción de $\mathcal{T}$ a H define una operación sobre X de manera que S sea el álgebra de Lie de los campos de vectores de Killing.

****

§ 7.2. EXISTENCIA DE HOMOMORFISMOS LOCALES.

LEMA (7.2.1.).

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local de grupos de Lie. Si $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es un isomorfismo, entonces ρ es un isomorfismo local.

Demostración: Por ser $L(\rho)$ un isomorfismo, existe en un entorno abierto de e' en G' una aplicación u, inversa local de $\rho: G \longrightarrow G'$, y como ρ es un homomorfismo local u también lo es. Entonces ρ es un isomorfismo local. ⊠

Ejemplo (7.2.2.):

Si G es conmutativo, entonces, por (6.1.4.); $\exp : LG \longrightarrow G$ es un homomorfismo. Pero $L(\exp) = 1_{LG} : LG \longrightarrow LG$, y por lo tanto exp es un isomorfismo local. Si G es conexo, exp es además suryectiva, por (6.2.7.). Esto es suficiente para determinar la estructura de grupos de Lie conmutativos y conexos (cf. § 7.3.).

Hemos probado en (6.2.11.) la existencia de un homomorfismo local $\rho: G \longrightarrow G'$ que induce un homomorfismo $h : LG \longrightarrow LG'$ dado, para grupos conmutativos.

Ahora probaremos este hecho en el caso general.

TEOREMA (7.2.3.).

Sean G y G' grupos de Lie y $h : LG \longrightarrow LG'$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Entonces existe un homomorfismo local $\rho :$ $: G \longrightarrow G'$ tal que $L(\rho) = h$.

Nótese que por (6.2.11.), en el dominio de una carta canónica ρ debe coincidir necesariamente con $\exp \circ h \circ \log$.

Demostración: Sea $\mathfrak{k} = \{ (A, h(A)) \mid A \in LG \}$; $\mathfrak{k}$ es una subálgebra de $LG \times LG'$ provista con la estructura de álgebra de Lie dada en (4.6.2.).

Sea K el subgrupo de Lie conexo de $G \times G'$ cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{k}$.

Sea $p : G \times G' \longrightarrow G$ la proyección natural, y $\lambda = p \mid K : K \longrightarrow G$. $L(\lambda) : \mathfrak{k} \longrightarrow LG$ es la aplicación dada por $L(\lambda)(A, h(A)) = A$, y por lo tanto es un isomorfismo. Por (7.2.1.), λ es un isomorfismo local con inversa local $\mu : G \longrightarrow K$. Además, $L(\mu) A = (A, h(A))$ para $A \in LG$.

La composición de μ con la proyección p es un homomorfismo local $\rho :$ $: G \longrightarrow G'$. Por construcción es $L(\rho)(A) = h(A)$ para $A \in LG$, es decir $L(\rho) = h$.

⊠

Este teorema, junto con la propiedad (6.2.8.) de unicidad, expresa que L es un funtor completamente fiel sobre grupos de Lie y homomorfismos locales, en álgebras de Lie y homomorfismos de álgebras de Lie.

Para poder hablar de unicidad en sentido estricto habría que considerar gérmenes de homomorfismos locales, es decir, habría que identificar homomorfismos que coinciden en algún entorno de la identidad.

Hemos visto en (4.5.6.) que un isomorfismo local de grupos de Lie induce un homomorfismo de álgebras de Lie, lo cual es una consecuencia trivial del carácter funtorial de

L. Ahora estamos en condiciones de probar :

TEOREMA (7.2.4.).

Dos grupos de Lie G y G' son localmente isomorfos si y sólo si sus álgebras de Lie LG y LG' son isomorfas.

Demostración: Si $h : LG \longrightarrow LG'$ es un isomorfismo, existe por (7.2.3.) un homomorfismo local $\rho : G \longrightarrow G'$ que induce h, y por (7.2.1.) ρ es un isomorfismo local.

⊠

Este teorema expresa el hecho más importante que hemos probado hasta el momento. Nos dice exactamente que tipo de información sobre un grupo de Lie podemos obtener de su álgebra de Lie. Nótese, por ejemplo, que (6.2.5.) es una sencilla consecuencia de (7.2.4.).

Para completar el estudio, habría que saber si toda álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ y de dimensión finita es el álgebra de Lie de algún grupo de Lie. Esto es efectivamente así, pero no lo probaremos aquí. Una posible demostración se obtiene usando el siguiente teorema debido a Ado :

Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita es isomorfa a una subálgebra del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de $GL(n, \mathbb{R})$, para algún n. El subgrupo conexo de $GL(n, \mathbb{R})$ correspondiente a esta subálgebra es un grupo de Lie cuya álgebra de Lie es isomorfa a $\mathfrak{g}$.

Esto muestra también que todo grupo de Lie es localmente isomorfo a un subgrupo del grupo $GL(n, \mathbb{R})$, para algún n.

Otra cuestión a precisar es la relación entre homomorfismos locales y homomorfismos (globales). Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local. Si G es conexo, sabemos ((6.2.9.)) que existe a los umo una extensión a un homomorfismo global $G \longrightarrow G'$. Haremos uso del siguiente lema sobre grupos topológicos :

LEMA (7.2.5.).

Sea G un grupo topológico conexo, localmente conexo y simplemente conexo, G' un grupo topológico arbitrario, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local (de grupos topológicos). Existe entonces una única extensión de ρ a un homomorfismo $\tilde{\rho} : G \longrightarrow G'$.

Demostración : La unicidad es clara. Para probar la existencia, consideremos la siguiente topología en $G \times G'$:

Sea $V \subset G$ un entorno conexo de e en el cual ρ está definido. Si $(g, g') \in G \times G'$, un sistema fundamental de entornos está definido por $N(g, g', W) = \{ (x, x') \mid x = wg \ , \ x' = \rho(w) g' \ , \ w \in W \}$, donde W es un entorno abierto de e en G tal que $W \subset V$.

Probaremos que la proyección $p : G \times G' \longrightarrow G$ es un revestimiento de G. La aplicación $w \rightsquigarrow (wg \ , \ \rho(w) g')$, es un homeomorfismo $W \longrightarrow N(g, g', W)$.

Si W es conexo, entonces $N(g, g', W)$ es conexo y $p \mid N(g, g', W)$ es un homeomorfismo $N(g, g', W) \longrightarrow W_g$.

$p^{-1}(W_g)$ es la unión disjunta de los $N(g, g', W)$ con $g' \in G'$; y $N(g, g', W)$ son subconjuntos abiertos y conexos de esa unión. Entonces $G \times G'$ es localmente conexo y p un revestimiento.

Sea $\tilde{G}$ la componente conexa de (e, e') en $G \times G'$. Entonces $(\tilde{G}, p \mid \tilde{G})$ es un espacio revestidor de G y $p \mid \tilde{G}$ un homeomorfismo, siendo G simplemente conexo. Sea μ el inverso y $\tilde{\rho} = q \circ \mu$, donde $q : G \times G' \longrightarrow G'$ es la proyección canónica. Si $v \in V$, entonces $\tilde{\rho}(v) = \rho(v)$, y $\tilde{\rho}$ es una extensión de ρ.

Resta probar que $\tilde{\rho}$ es un homomorfismo. Por definición, si $v \in V$ y $g \in G$, se cumple $\tilde{\rho}(vg) = \rho(v) \tilde{\rho}(g) = \tilde{\rho}(v) \tilde{\rho}(g)$. Si $v_i \in V$, por induc -

ción resulta $\tilde{\rho}((\prod_i v_i)g) = (\prod_i \tilde{\rho}(v_i))\,\tilde{\rho}(g)$, y en particular $\tilde{\rho}(\prod_i v_i) = \prod_i \tilde{\rho}(v_i)$. Entonces $\tilde{\rho}((\prod_i v_i)g) = \tilde{\rho}(\prod_i v_i)\,\tilde{\rho}(g)$. Puesto que V genera G, $\tilde{\rho}$ resulta ser un homomorfismo.

⊠

PROPOSICION (7.2.6.):

Sea G un grupo de Lie conexo y simplemente conexo, G' un grupo de Lie arbitrario y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local. Entonces existe una única extensión de ρ a un homomorfismo $\tilde{\rho} : G \longrightarrow G'$.

Nótese que en (5.4.8.) probamos un caso particular de esta proposición.

COROLARIO (7.2.7.):

Sean G y G' grupos de Lie y $h : LG \longrightarrow LG'$ un homomorfismo de álgebras de Lie. Si G es conexo y simplemente conexo, entonces existe un único homomorfismo $\rho : G \longrightarrow G'$ tal que $L(\rho) = h$. Si G' es además conexo y simplemente conexo y h es un isomorfismo, entonces ρ es un isomorfismo.

Demostración: Para cada homomorfismo $h : LG \longrightarrow LG'$ existe por (7.2.3.) un homomorfismo local $\rho : G \longrightarrow G'$ que induce h. Si G es conexo y simplemente conexo, por (7.2.7.) ρ puede extenderse unívocamente a un homomorfismo.

Sea G' es conexo y simplemente conexo. Si h es un isomorfismo, su inverso K es inducido por un homomorfismo $\lambda : G' \longrightarrow G$. Como $L(\lambda \circ \rho) = 1_{LG}$, por la unicidad resulta $\lambda \circ \rho = 1_G$. Análogamente $\rho \circ \lambda = 1_{G'}$; entonces ρ es un isomorfismo.

⊠

Como aplicación, consideremos un grupo de Lie G conmutativo. Por (6.1.4.), $\exp : LG \longrightarrow G$ es un homomorfismo, y es el inducido por el homomorfismo $1_{LG} : LG \longrightarrow LG$ de álgebra de Lie. Entonces (7.2.7.) asegura :

PROPOSICION (7.2.8.):

Si G es un grupo de Lie conmutativo, conexo y simplemente conexo, entonces $\exp : LG \longrightarrow G$ es un isomorfismo.

Observación: Mencionaremos aquí sin demostración la existencia de un grupo revestidor universal para cualquier grupo de Lie conexo. Más precisamente, sea G un grupo de Lie conexo. Entonces existe un grupo de Lie $\tilde{G}$ conexo y simplemente conexo y un homomorfismo $\varphi : \tilde{G} \longrightarrow G$ que es un isomorfismo local, tales que $(\tilde{G}, \varphi)$ es una variedad revestidora de G.

$(\tilde{G}, \varphi)$ posee la siguiente propiedad universal : Para cualquier grupo de Lie H conexo y simplemente conexo y cualquier homomorfismo $\rho : H \longrightarrow G$, existe un único homomorfismo $\tilde{\rho} : H \longrightarrow \tilde{G}$ tal que $\varphi \circ \tilde{\rho} = \rho$.

Si G es un grupo de Lie conmutativo y conexo, el par $(LG, \exp)$ ès el grupo revestidor universal de G.

Sea ahora G un grupo de Lie conexo, G' un grupo de Lie arbitrario, y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo local. Sea $(\tilde{G}, \varphi)$ el grupo revestidor universal de G. Entonces el homomorfismo local $\rho \circ \varphi : \tilde{G} \longrightarrow G'$ posee, en virtud de (7.2.7.), una única extensión a un homomorfismo $\psi : \tilde{G} \longrightarrow G'$. Si G' es conexo y $(\tilde{G}', \varphi')$ el grupo revestidor universal de G', existe un único homomorfismo $\tilde{\psi} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}'$ tal que $\varphi' \circ \tilde{\psi} = \psi$.

Supongamos en particular que $\rho : G \longrightarrow G'$ es un isomorfismo local de grupos de Lie conexos. Lo anterior muestra que $\tilde{\psi} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}'$ es un isomorfismo local. Y por (7.2.7.), $\tilde{\psi}$ es un isomorfismo.

Entonces, un isomorfismo local de grupos de Lie conexos induce un isomorfismo de los grupos revestidores universales. Esto significa que a cada clase de grupos de Lie localmente isomorfos le corresponde, salvo isomorfismo, un único grupo de Lie, que es el grupo revestidor universal de todos los miembros de la clase. Cada miembro de la clase se obtiene del grupo revestidor universal dividiéndolo por un subgrupo normal discreto (cf. § 7.3.).

En virtud de (7.2.4.), existe una aplicación inyectiva de las clases de grupos de Lie localmente isomorfos en las clases de $\mathbb{R}$-álgebras de Lie isomorfas, y por el teorema de Ado mencionado más arriba, esa aplicación es biyectiva.

El problema de clasificar todos los posibles grupos de Lie conexos se descompone pues en dos etapas. En primer lugar, encontrar todas las $\mathbb{R}$-álgebras de Lie; y luego, hallar todos los subgrupos normales discretos de un grupo de Lie simplemente conexo.

En particular, consideremos el problema más restringido de clasificar todos los posibles grupos de Lie conmutativos y conexos. Cada álgebra de Lie conmutativa está caracterizada por su dimensión. El problema se reduce pues a encontrar todos los subgrupos discretos de un grupo de Lie simplemente conexo conmutativo. En virtud de (7.2.8.), éste es justamente el problema de hallar los subgrupos discretos de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Esto es lo que haremos en la próxima sección.

****

§ 7.3. <u>SUBGRUPOS DISCRETOS</u>.

Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo del mismo. Examinaremos ahora la posibilidad de definir a H como subgrupo de Lie de G.

Dada una topología sobre H - no necesariamente la relativa inducida por G- con la cual H sea un grupo topológico, existe a lo sumo una estructura de grupo de Lie que convierte a H en un subgrupo de Lie de G. Este hecho está asegurado por (7.1.8.).

El ejemplo de los racionales $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ muestra que con la topología relativa sobre H, no existe necesariamente sobre H una estructura de grupo de Lie que induzca tal topología y convierta a H en un subgrupo de Lie de G.

Por otra parte, H puede siempre considerarse como una variedad 0-dimensional, con la topología discreta, resultando H un subgrupo de Lie de G. El álgebra de Lie de un grupo de Lie 0-dimensional es 0, y por lo tanto es 0 la subálgebra de LG correspondiente a un subgrupo 0-dimensional de G. El ejemplo $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ también muestra que exceptuando esta manera trivial, en general no es posible convertir H en un subgrupo de Lie de G.

<u>DEFINICION</u> (7.3.1.).

Sea G un grupo topológico. Un <u>subgrupo discreto</u> H de G es un subgrupo que es un subespacio discreto de G.

Cuando G es un grupo de Lie, es natural considerar un subgrupo discreto H como un subgrupo de Lie 0-dimensional. Observemos que un subgrupo discreto de un grupo de Lie G es un subgrupo cerrado (G es un espacio de Hausdorff).

<u>Ejemplo</u> (7.3.2.):

Sea $0 \leqslant p \leqslant n$. $\mathbb{Z}^p$ es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^n$.

<u>PROPOSICION</u> (7.3.3.):

Sean G y G' grupos topológicos y $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo que es además un isomorfismo local. Entonces el núcleo de ρ es un subgrupo normal discreto de G.

<u>Demostración:</u> Existen entornos abiertos N, N' de e, e' en G, G' respectivamente, tales que $\rho|N : N \longrightarrow N'$ es un homeomorfismo. Entonces $\mathrm{Ker}\,\rho \cap N = \{e\}$ y e es un punto aislado de $\mathrm{Ker}\,\rho$. Puesto que las traslaciones son homeomorfismos, todo punto de $\mathrm{Ker}\,\rho$ es aislado y $\mathrm{Ker}\,\rho$ es discreto.

$\boxtimes$

<u>COROLARIO</u> (7.3.4.):

Si G es un grupo de Lie conmutativo, el núcleo del homomorfismo $\exp : LG$ —

$\longrightarrow$ G es un subgrupo discreto del grupo aditivo de LG.

Demostración: Basta notar que, según (7.2.2.), el homomorfismo exp es un isomorfismo local.

⊠

Se presenta pues en forma natural el problema de hallar todos los subgrupos discretos del grupo aditivo de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V de dimensión finita. Todo subgrupo tal es isomorfo a $\mathbb{Z}^p$, donde p no supera a la dimensión de V ; más precisamente :

LEMA (7.3.5.).

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial n-dimensional, y D un subgrupo discreto del grupo aditivo de V. Sea $p \leq n$ la dimensión del subespacio generado por D. Entonces existen p vectores $v_1, \ldots, v_p$ en V linealmente independientes que generan D.

Demostración: Supondremos conocido el resultado en el caso $p = 1$, y probaremos el caso general por inducción.

Supongamos pues que el lema es verdadero para todo $k < p$, y sea D un subgrupo discreto que genera un subespacio U p-dimensional de V.

Existe un subespacio A $(p-1)$-dimensional de U generado por elementos de D. Sean $v_1, \ldots, v_{p-1}$ vectores linealmente independientes en V que generan $D \cap A$.

Se cumple $D + A / A \cong D / D \cap A$; este isomorfismo algebraico es también un isomorfismo topológico, lo cual resulta del hecho que esos grupos son localmente compacto y además $D + A$ tiene base numerable (una demostración se deduce de S. Helgason [5], p. 111, corollary 3.3.).

Por consiguiente $D + A / A$ es discreto, y como se trata de un subgrupo del espacio 1-dimensional U/A, está generado por un elemento $v_p + A$. Entonces $v_1, \ldots, v_p$ son linealmente independientes y generan D.

⊠

Ahora estamos en condiciones de determinar la estructura de los grupos de Lie conmutativos y conexos.

TEOREMA (7. 3. 6.):

Sea G un grupo de Lie conmutativo y conexo, de dimensión n. Existe entonces un entero p, $0 \leqslant p \leqslant n$, tal que $G \cong \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{T}^p$.

Demostración: Por (6. 2. 7.), el homomorfismo $\exp : LG \longrightarrow G$ es suryectivo. Entonces $LG/\operatorname{Ker} \exp$ es isomorfo a G en sentido algebraico, y no ofrece dificultad ver directamente que es un isomorfismo de grupos de Lie. Por el momento admitimos este hecho (en (7. 7. 6.) probaremos una afirmación más general).

Pero $\operatorname{Ker} \exp \cong \mathbb{Z}^p$ para algún p tal que $0 \leqslant p \leqslant n$, por (7. 3. 5.). Entonces $G \cong \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^p$.

⊠

COROLARIO (7. 3. 7.):

Si G es un grupo de Lie compacto, conmutativo y conexo de dimensión n, entonces $G \cong \mathbb{T}^n$.

Como mencionamos al final de § 7. 2. , un paso en la resolución del problema de clasificación de grupos de Lie consiste en encontrar todos los subgrupos normales discretos de un grupo de Lie simplemente conexo. Esto se simplifica considerablemente usando la siguiente

PROPOSICION (7. 3. 8.):

Sea H un subgrupo normal discreto del grupo topológico conexo G. Entonces H está contenido en el centro de G.

Demostración: Sea $h \in H$. La aplicación $G \longrightarrow H$ definida por $g \rightsquigarrow g h g^{-1}$ es contínua. Como la imágen es conexa, debe reducirse a un punto y por lo tanto coincidir con h.

⊠

****

§ 7.4. SUBGRUPOS ABIERTOS ; CONEXION.

Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo que es un abierto de G. H es una subvariedad y por lo tanto un subgrupo de Lie de G. Como la inyección es un isomorfismo local, el álgebra de Lie de H es LG. Puesto que $LG = LG$ implica $H_0 = G_0$, todo subgrupo abierto H de G contiene a G_0.

Recuérdese que todo subgrupo abierto es necesariamente cerrado. (ef.(2.2.6.)a)).

Ejemplo (7.4.1.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$ el homomorfismo determinante. Puesto que $\mathbb{R}^*$ no es conexo, $GL(V)$ tampoco lo es. Por otra parte, cada par de bases de V con la misma orientación (habiéndose elegido una orientación en V) pueden transformarse la una en la otra en forma contínua por automorfismos de V. Esto muestra que $\det^{-1}(\mathbb{R}^+)$ es la componente conexa de la identidad en $GL(V)$, donde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}^* | \ x > 0\}$.

Sea H un subgrupo abierto de G, y G/H el conjunto de los coconjuntos a izquierda módulo H. Como tales coconjuntos a izquierda son abiertos en G, la topología cociente es discreta y G/H puede considerarse como una variedad O-dimensional. En particular, si H es normal, G/H puede considerarse como un grupo de Lie O-dimensional. Esto se aplica en particular a la componente conexa de la identidad, de manera que $\gamma = G/G_0$ es un grupo de Lie O-dimensional.

Ejemplo (7.4.2.):

Sea $G = GL_{\mathbb{R}}(V)$ el grupo de automorfismos de un espacio vectorial V de dimen sión finita. Entonces, por (7.4.1.), es $\gamma = \mathbb{Z}_2$.

Como toda componente conexa de G es difeomorfa a G_o, la variedad G es difeomorfa a G_o, la variedad G es difeomorfa a $G_o \times \gamma$.

No existe sin embargo un difeomorfismo canónico. Una descomposición $s: \gamma \to G$ de la sucesión exacta

$$e \longrightarrow G_o \longrightarrow G \longrightarrow \gamma \longrightarrow e$$

origina un isomorfismo de G con el producto semidirecto $G_o \times_{\tau} \gamma$, donde τ : : $\gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}\ G_o$ es el homomorfismo definido por $\tau_\gamma = \mathcal{J}_{s(\gamma)} \big| G_o$, para $\gamma \in \gamma$. Tal sección existe en numerosos casos particulares.

Ejemplo (7.4.3.):

Consideremos $G = GL(V)$, donde V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión impar. La reflexión en el origen de V junto con la identidad de V constituye una imágen isomorfa de $\mathbb{Z}_2 = G / G_o$ en G.

En el caso de un grupo conmutativo G, una descomposición $s : \gamma \longrightarrow G$ de la sucesión exacta $e \longrightarrow G_o \longrightarrow G \longrightarrow \gamma \longrightarrow 0$ define un isomorfismo de G con $G_o \times \gamma$.

Ejemplo (7.4.4.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. Sea U un subespacio vectorial de V, y $a \in V$, $a \notin U$. La unión de U y sus trasladados por múltiplos enteros de a es un grupo de Lie G con la topología relativa de V. U es la componente conexa de la identidad de G, y el grupo de componentes conexas es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

La sucesión exacta $0 \longrightarrow U \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ tiene una evidente descomposición $s : \mathbb{Z} \longrightarrow G$, y $G \cong U \times \mathbb{Z}$.

****

§ 7.5. SUBGRUPOS CERRADOS .

Hemos visto que los subgrupos discretos y los subgrupos aibertos de un grupo de Lie G son subgrupos de Lie. Ambos tipos de subgrupos son cerrados en G; más generalmente :

TEOREMA (7.5.1.).

Sea H un subgrupo de un grupo de Lie G. Si H es un conjunto cerrado en G, existe una única estructura de grupo de Lie en H tal que su correspondiente topología es la topología inducida por G, y tal que H es un subgrupo de Lie de G.

La unicidad es una consecuencia de (7.1.8.).

Sea H un subgrupo cerrado de G , y $\mathfrak{h} \subset LG$ definido mediante

$$\mathfrak{h} = \{ A \in LG \mid \exp tA \in H \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \} .$$

En primer lugar veremos que $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de LG. $A \in \mathfrak{h}$ implica $tA \in \mathfrak{h}$ por definición de $\mathfrak{h}$. Si $A , B \in \mathfrak{h}$, entonces (6.5.5.), (i) asegura que para todo t es $\exp t(A + B) \in H$, pues H es cerrado. Entonces $A+B \in \mathfrak{h}$. Análogamente, (6.5.5.), (ii) asegura que $\exp t^2 [A , B] \in H$, lo cual prueba que $[A , B] \in \mathfrak{h}$. Entonces, $\mathfrak{h}$ es efectivamente una subálgebra de LG.

Sea H^* el subgrupo de Lie conexo de G tal que $LH^* = \mathfrak{h}$. Por definición de $\mathfrak{h}$ se cumple $\exp \mathfrak{h} \subset H$, y por lo tanto $H^* \subset H$, por ser H^* generado por $\exp \mathfrak{h}$.

Consideremos en H la topología relativa de G. Veremos que cada entorno V de e en H^* es un entorno de e en H. Esto mostrará que H^* es un subgrupo topológico de H (usando el hecho que $H^* \hookrightarrow H$ es continua), y además, tomando $V = H^*$, que H^* es abierto en H (pues e es un punto interior de H^* en H). Y por lo tanto ,

$H^* = H_o$ como grupos topológicos. H_o es pues un subgrupo de Lie de G, y puede convertirse en una subvariedad de G con ayuda de las traslaciones. Entonces la multiplicación $H \times H \longrightarrow H$ es diferenciable, y H es un subgrupo de Lie de G.

Resta ver pues que cada entorno V de e en H^* es un entorno de e en H. Supongamos que esto último no fuese verdadero ; veremos que esto conduce a una contradicción.

Existe una sucesión $c_1, \ldots, c_k, \ldots$ en $H - V$ tal que $\lim_{k \to \infty} c_k = e$. Sea M un subespacio complementario de $\mathfrak{h}$ en LG. Por (6.3.2.), existen entornos abiertos, conexos y acotados U_1 y U_2 de O en M y $\mathfrak{h}$ respectivamente, tales que $\phi : (A, B) \rightsquigarrow \exp A \exp B$ para $A \in M$, $B \in \mathfrak{h}$ es un difeomorfismo de $U_1 \times U_2$ sobre un entorno abierto de e en G. Podemos suponer pues que $c_k = \exp A_k \exp B_k$ con $A_k \in U_1$, $B_k \in U_2$ y $\exp B_k \in V$. Entonces $A_k \neq 0$ y $\lim A_k = 0$.

Puesto que $A_k \neq 0$, existe un entero $r_k > 0$ tal que $r_k A_k \in U_1$ y $(r_k + 1) A_k \notin U_1$. Como U_1 es acotado, podemos suponer, considerando una subsucesión de r_k, que $r_k A_k$ converge hacia cierto $A \in U_1$. Como $(r_k + 1) A_k \notin U_1$ y $A_k \longrightarrow 0$, A está en la frontera de U_1, y en particular $A \neq 0$.

Sean p y q enteros, y $q > 0$. Podemos escribir $p r_k = q s_k + t_k$, donde s_k y t_k son enteros y $0 \leqslant t_k \leqslant q$. Entonces $\lim \frac{t_k}{q} A_k = 0$, de manera que

$$\exp \frac{p}{q} A = \lim_k \exp \frac{p r_k}{q} A_k = \lim_k (\exp A_k)^{s_k} \in H .$$

Por continuidad resulta $\exp tA \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $A \in \mathfrak{h}$, lo cual contradice el hecho que $A \in U_1 \subset M$ y $A \neq 0$.

$\boxtimes$

Los casos particulares de (7.5.1.) considerados anteriormente, donde H es discreto o bien abierto, corresponden respectivamente a los casos en que $\mathfrak{h}$ es 0 o bien

LG.

COROLARIO (7.5.2.):

Sea H un subgrupo cerrado del grupo de Lie G, LH el álgebra de Lie de H con respecto a la única estructura de grupo de Lie definida en (7.5.1.). Entonces $LH = \{A \in LG \mid \exp tA \in H \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Efectivamente LH fué definida en la demostración de (7.5.1.) en la forma indicada en el corolario.

Observación: (7.5.2.) mantiene su validez para cualquier subgrupo de Lie H de G que tiene un número numerable de componentes (ef. S. Helgason [5], p. 108).

Una clase importante de subgrupos de un grupo de Lie son los núcleos de homomorfismos.

PROPOSICION (7.5.3.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Entonces $\mathrm{Ker}\,\rho$ es un subgrupo de Lie de G y $L(\mathrm{Ker}\,\rho) = \mathrm{Ker}\, L(\rho)$, donde $L(\rho) :$ $: LG \longrightarrow LG'$ es el homomorfismo inducido de álgebras de Lie.

Demostración: $\mathrm{Ker}\,\rho$ es un subgrupo cerrado de G y por lo tanto un subgrupo de Lie de G. Por (7.5.2.), es $L(\mathrm{Ker}\,\rho) = \{A \in LG \mid \rho(\exp tA) = e' ,$ $\forall\, t \in \mathbb{R}\}$, donde e' es la identidad de G'.

Por la naturalidad (6.1.6.) de exp ,

$$\rho(\exp\ tA) = e' \quad , \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R}$$

es equivalente a

$$(\exp\,(L(\rho)\ tA) = e', \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R} ,$$

lo cual es a su vez equivalente a la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que $L(\rho)tA =$ $= 0$ para todo $|t| < \varepsilon$. Esto significa que $L(\rho)A = 0$. Por lo tanto ,

$L(\mathrm{Ker}\,\rho) = \mathrm{Ker}\, L(\rho)$.

⊠

Esto muestra en particular que el núcleo del homomorfismo $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es un álgebra de Lie. Esto, claro está, es verdadero para el núcleo de cualquier homo - morfismo de álgebras de Lie.

En lo que respecta a imágenes de homomorfismos, se cumple :

<u>PROPOSICION</u> (7.5.4.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie, y sea G conexo. Entonces $\mathrm{im}\rho$ es un subgrupo de Lie de G' y $L(\mathrm{im}\rho) = \mathrm{im}\, L(\rho)$, donde $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es el homomorfismo inducido de álgebras de Lie.

<u>Demostración:</u> Sea H el subgrupo de Lie conexo de G' tal que $LH = \mathrm{im}\, L(\rho)$; H es generado por los elementos $\exp(L(\rho)A)$ con $A \in LG$.

$\rho(G)$ es generado por los elementos $\rho(\exp A)$ con $A \in LG$. Pero por (6. 1.6.), $\rho(\exp A) = \exp(L(\rho)A)$. Entonces $\rho(G) = H$, por se conexos ambos grupos.

⊠

<u>Observación:</u> Se presenta la cuestión de saber si la aplicación inducida $\hat{\rho} : G \longrightarrow \rho(G)$ es un homomorfismo, es decir, analítico. La respuesta es afirmativa (ef. (7.7.6.)).

Consideremos ahora la sucesión de homomorfismos de grupos de Lie.

$$(\gamma) \qquad G' \xrightarrow{\rho'} G \xrightarrow{\rho''} G''$$

y la sucesión inducida de homomorfismo de álgebras de Lie

$$(\alpha) \qquad LG' \xrightarrow{L(\rho')} LG \xrightarrow{L(\rho'')} LG''$$

<u>PROPOSICION</u> (7.5.5.):

Sea G' conexo. Entonces la exactitud de (γ) implica la exactitud de (α).

Demostración: Si im $\rho' = \text{Ker}\,\rho''$, entonces, por (7.5.3.) y (7.5.4.) es im $L(\rho') = L(\text{im}\,\rho') = L(\text{Ker}\,\rho'') = \text{Ker}\ L(\rho'')$.

⊠

Ejemplo (7.5.6.):

Sea G un grupo de Lie conexo. La sucesión exacta $0 \longrightarrow G_e \longrightarrow TG \longrightarrow G \longrightarrow e$ de grupos de Lie induce una sucesión exacta $0 \longrightarrow G_e \longrightarrow L(TG) \longrightarrow LG \longrightarrow 0$ de álgebras de Lie. Notemos que la descomposición natural $G \hookrightarrow TG$ de la primera sucesión define una descomposición $LG \longrightarrow L(TG)$ de la segunda.

Obsérvese que la afirmación recíproca de (7.5.5.) no es verdadera, aún cuando todos los grupos sean conexos.

Ejemplo (7.5.7.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo que es a la vez un isomorfismo local. Entonces $0 \longrightarrow LG \xrightarrow{L(\rho)} LG' \longrightarrow 0$ es exacta. En cambio, $e \longrightarrow G \longrightarrow G' \longrightarrow e'$ no es necesariamente exacta, es decir, G y G' no son necesariamente isomorfos .

El resultado parcial siguiente es a veces útil.

PROPOSICION (7.5.8.):

Sea $\rho: G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie ; sean G y G' conexos. Entonces ρ es suryectivo si y sólo si $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$ es suryectivo.

Demostración: Si ρ es suryectivo, las álgebras de Lie $L(\rho)\,LG$ y LG', de $\rho(G)$ y G' respectivamente, deben coincidir, lo cual prueba la suryectividad de $L(\rho)$.

Recíprocamente, sea $L(\rho)$ suryectivo. Entonces $\rho_{*g} : G_g \longrightarrow G'_{\rho(g)}$ es suryectivo para todo $g \in G$, según (6.2.6.). Pero esta propiedad para una aplicación diferenciable implica su suryectividad. ⊠

La condición de que G' sea conexo no puede ser omitida, como lo muestra el ejemplo de la inclusión de la componente conexa de la identidad en un grupo de Lie no conexo, que induce un isomorfismo de álgebras de Lie.

La afirmación análoga para inyecciones no es verdadera. Vimos en (7.1.1.) que una inyección $\rho : G \longrightarrow G'$ induce una inyección $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$. Pero la inyectividad de $L(\rho)$ no implica la inyectividad de ρ, tal como muestra el ejemplo del homomorfismo canónico $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}$.

****

§ 7.6. SUBGRUPOS CERRADOS DEL GRUPO LINEAL GENERAL.

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $GL(V)$ el grupo de automorfismos lineales de V; estudiaremos ahora algunos subgrupos cerrados de $GL(V)$.

Sea

$$\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

una forma bilineal no degenerada sobre V, y H el subgrupo de $GL(V)$ que deja ϕ invariante, es decir :

$$H = \{ g \in GL(V) \mid \phi(gv, gw) = \phi(v, w) \ , \ \forall v, w \in V \}$$

Para cada par $v, w \in V$, consideremos la aplicación

$$GL(V) \longrightarrow GL(V) \times GL(V) \longrightarrow V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g \rightsquigarrow (g, g) \rightsquigarrow (gv, gw) \rightsquigarrow \phi(gv, gw) ,$$

que es continua, por serlo ϕ. Entonces

$$S(v, w) = \{ g \in GL(V) \mid \phi(gv, gw) = \phi(v, w) \}$$

es cerrado en $GL(V)$, lo cual prueba que H es un subgrupo cerrado de $GL(V)$, puesto que

$$H = \bigcap_{v,w \in V} S(v,w) .$$

Identificando el álgebra de Lie de $GL(V)$ con $\mathcal{L}(V)$ (según (4.3.8.)) obtenemos la siguiente caracterización de LH :

<u>PROPOSICION</u> (7.6.1.):

$$LH = \{ A \in \mathcal{L}(V) \mid \phi(Av, w) + \phi(v, Aw) = 0 , \ \forall v, w \in V \}$$

<u>Demostración:</u> Sea $A \in LH$; entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ es $\exp tA \in H$ y

$$\phi(\exp(tA)v , \exp(tA)w) = \phi(v, w)$$

para $v, w \in V$. Diferenciando con respecto a t y haciendo $t = 0$ resulta

$$\phi(Av, w) + \phi(v, Aw) = 0 .$$

Recíprocamente, supongamos que $A \in \mathcal{L}(V)$ satisface esta condición. Sea A^* la aplicación lineal adjunta de A con respecto a ϕ , caracterizada por

$$\phi(Av, w) - \phi(v, A^*w) = 0 .$$

La hipótesis se expresa pues mediante $A^* = - A$.

Entonces, en virtud de la expresión

$$\exp tA = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

dada en (6.1.5.), resulta

$$(\exp tA)^* = (\exp tA)^{-1}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual significa que $\exp tA \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $A \in LH$.

⊠

Si además la aplicación ϕ es simétrica, el grupo H se llama <u>grupo ortogonal</u>

de V con respecto a ϕ, y se simboliza con $O(V, \phi)$. Su álgebra de Lie consiste de los operadores de V que son antiantoadjuntos con respecto a ϕ.

Ejemplo (7.6.2.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de 3 dimensiones y ϕ una métrica euclídea, y e_1, e_2, e_3 una base ortonormal de V con orientación positiva. V se convierte en un álgebra de Lie mediante la definición $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$.

Como ya dijimos, identificamos $\mathcal{L}(V)$ con el álgebra de Lie de $GL(V)$.

Para $a \in V$, definimos $A \in \mathcal{L}(V)$ mediante

$$Av = [a, v] \quad , \quad v \in V .$$

Entonces $\phi(Av, w) + \phi(v, Aw) = \phi([a, v], w) + \phi(v, [a, w]) = 0$,

como resulta inmediatamente de la interpretación de $([a, v], w)$ como volumen orientado del paralelepípedo definido por a, v y w. Entonces A está contenido en el álgebra de Lie $LO(V, \phi)$ del grupo ortogonal $O(V, \phi)$ con respecto a ϕ.

La aplicación $J : V \longrightarrow LO(V, \phi)$ es lineal. Como $[a, v] = 0$ para todo $v \in V$ implica $a = 0$ para la particular estructura de álgebra de Lie que hemos definido sobre V, resulta entonces J inyectiva. Y como tanto V como $LO(V, \phi)$ tienen dimensión 3, J es un isomorfismo lineal. Además $J : V \longrightarrow LO(V, \phi)$ es un dimorfismo de álgebras de Lie, puesto que si $A_i v = [a_i, v]$, $v \in V$, $i = 1, 2$, entonces

$$[A_1, A_2]\, v = A_1 A_2 v - A_2 A_1 v = [a_1, [a_2, v]] - [a_2, [a_1, v]] =$$

$$= [[a_1, a_2], v] \quad ,$$

en virtud de la identidad de Jacobi.

Vemos así que V es isomorfo al álgebra de Lie del grupo $O(V, \phi)$, y el isomorfismo está realizado por la aplicación $\mathcal{J} : V \longrightarrow LO(V, \phi)$, definida mediante $a \rightsquigarrow A$, donde $Av = [a, v]$, $v \in V$.

Para ver el significado geométrico de la correspondencia $a \rightsquigarrow A$, consideremos el subgrupo a un parámetro α de $O(V, \phi)$ definido por A, el cual satisface $\dot{\alpha}_t = A\,\alpha_t$, por (5.4.5.). Si $v \in V$ y $v_t = \alpha_t v$, entonces

$$\dot{v}_t = \dot{\alpha}_t v = A\,\alpha_t v = A v_t = [a, v_t] \quad .$$

La fórmula $\dot{v}_t = [a, v_t]$ muestra que el subgrupo a un parámetro α de $O(V, \phi)$ definido por A es el subgrupo a un parámetro de las rotaciones de V con eje a.

$O(V, \phi)$ opera en V por automorfismos de la estructura de álgebra de Lie definida en V. Entonces el isomorfismo $\mathcal{J} : V \longrightarrow LO(V, \phi)$ define una representación de $O(V, \phi)$ en $LO(V, \phi)$. Si designamos con $\sigma : O(V, \phi) \longrightarrow \mathrm{Aut}\, LO(V, \phi)$ a esa representación, σ está definida por

$$(\sigma_g A)(v) = [ga, v] \quad , \quad g \in O(V, \phi) \; , \; a \in V \; , \; A = \mathcal{J}(a) \; ,$$

para todo $v \in V$. Esta representación es justamente la representación adjunta de $O(V, \phi)$, puesto que para todo $v \in V$ se cumple

$$(\sigma_g A)(v) = [ga, v] = g\,[a, g^{-1}v] = g(A(g^{-1}v)) = (gAg^{-1})(v) \; ,$$

y por lo tanto

$$\sigma_g A = gAg^{-1} \; .$$

Sea ahora nuevamente V de dimensión finita arbitrario, y ϕ una forma bilineal no degenerada y simétrica sobre V. Supongamos además que ϕ es positiva definida. Utilizando el mismo argumento que para $GL(V)$ (ef. (7.4.1.), se prueba que la componente conexa de la identidad es el núcleo del homomorfismo $\det : O(V, \phi) \longrightarrow \mathbb{R}^*$; tal grupo se simboliza con $SO(V, \phi)$.

PROPOSICION (7.6.3.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, ϕ una forma bilineal, simétrica y positivo definida sobre V, $O(V, \phi)$ el grupo ortogonal de V con respecto a ϕ, y $SO(V, \phi)$ el grupo de operadores ortogonales con determinante igual a uno. Entonces $O(V, \phi)$ y $SO(V, \phi)$ son compactos.

Demostración: $SO(V, \phi)$ es un subgrupo abierto de $O(V, \phi)$, y por lo tanto cerrado. Por consiguiente, sólo es necesario probar que $O(V, \phi)$ es compacto.

$O(V, \phi)$ es un subgrupo cerrado de $GL(V)$, el cual es un subconjunto abierto de $\mathcal{L}(V)$; entonces $O(V, \phi)$ es cerrado en $\mathcal{L}(V)$. Basta probar pues que $O(V, \phi)$ es acotado en $\mathcal{L}(V)$.

Sea $| \ | : \mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$ la norma en $\mathcal{L}(V)$ con respecto a ϕ, definida mediante

$$|A| = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\phi(Av, Av)^{\frac{1}{2}}}{\phi(v, v)^{\frac{1}{2}}}$$

Todo $g \in O(V, \phi)$ satisface $|g| = 1$, lo cual prueba la propiedad de acotación de $O(V, \phi)$.

⊠

Sea ahora $\phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, no degenerada y antisimétrica sobre V, siendo V de dimensión par. El subgrupo de $GL(V)$ que deja ϕ invariante se llama grupo simpléctico de V con respecto a ϕ, y se designa con $Sp(V, \phi)$. Puesto que esencialmente existe una única ϕ con las propiedades indicadas, resulta que todos los grupos simplécticos sobre V son isomorfos entre sí. El álgebra de Lie de $Sp(V, \phi)$ consiste, según (7.6.1.), en los operadores de V que son antiautoadjuntos con respecto a ϕ.

Consideremos ahora el homomorfismo $\det : GL(V) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, cuyo núcleo se designa con $SL(V)$.

PROPOSICION (7.6.4.):

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita. El conjunto de operadores con traza igual a cero es una álgebra de Lie, y es el álgebra de Lie de $SL(V)$.

Demostración: En virtud de (4.5.11.) se cumple $L(\det) = \mathrm{tr}$; y (7.5.3.) asegura que

$$L(\operatorname{Ker} \det) = L(SL(V)) = \operatorname{Ker} \mathrm{tr} .$$

⊠

****

§ 7.7. ESPACIOS DE COCONJUNTOS Y GRUPOS COCIENTES.

TEOREMA (7.7.1.).

Sea G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado y G/H el espacio de órbitas de la operación de H sobre G por traslaciones a derecha (cf. (2.2.3.)). Consideremos la operación natural de G sobre G/H (cf. § 1.4.). Entonces existe una única estructura de variedad analítica sobre G/H que induce la topología cociente y convierte a G/H en una G-variedad.

Sea H provisto con la estructura de grupo de Lie de (7.5.1.). Sea M un subespacio vectorial de LG tal que $LG = M \oplus LH$, y $p : G \longrightarrow G/H$ la proyección canónica. El teorema (7.7.1.) se basa en el lema siguiente, cuya demostración omitimos (cf. S. Helgason, [5], p. 113):

LEMA (7.7.2.).

Existe un entorno U de O en M tal que $\exp| U : U \longrightarrow \exp(U)$ es un homeomorfismo y $p| \exp(U) : \exp(U) \longrightarrow p(\exp U)$ es un homeomorfismo sobre un entorno de $p(e)$ en G/H.

La estructura de variedad analítica en G/H es entonces definida como sigue. Si N_0 es el interior de $p(\exp U)$ y $\mathring{U}$ el interior de U, entonces

$$(\exp|\mathring{U})^{-1} \circ (p|\exp(\mathring{U}))^{-1} : N_0 \longrightarrow \mathring{U} \subset M$$

es una carta en $p(e) \in G/H$.

G opera por homeomorfismos sobre G/H, lo cual define una carta en cada punto de G/H. Para probar que tales cartas definen una estructura analítica en G/H hay que ver que son compatibles.

Por construcción, G opera por aplicaciones analíticas sobre G/H. Obsérvese que por definición de la estructura de variedad sobre G/H, p es una aplicación analítica.

La unicidad de la estructura analítica en G/H, tal como se enunció en (7.7.1.), resulta de la última afirmación de la

PROPOSICION (7.7.3.):

Sea X un G-variedad con respecto a una operación transitiva $\mathcal{C} : G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$. Sea H el grupo de isotropía de $x_0 \in X$, y $\varphi: G/H \longrightarrow X$ la aplicación definida mediante $\varphi(gH) = \mathcal{C}_g(x_0)$. Supongamos G/H provisto de la estructura de variedad analítica arriba definida. Entonces φ es diferenciable. Además, si φ es un homeomorfismo, φ es un difeomorfismo.

Demostración: Usaremos los símbolos N_0 y $\mathring{U}$ con el mismo significado que antes, y $B = \exp(\mathring{U})$. El homeomorfismo $p|B : B \longrightarrow N_0$ permite definir a B como subvariedad de G, y converte a la inyección $\iota : B \hookrightarrow G$ en diferenciable. Si $\psi : G \longrightarrow X$ es la aplicación definida como $\psi(g) = \mathcal{C}_g(x)$, se cumple $\varphi|N_0 = \psi \circ \iota \circ (p|B)^{-1}$, y φ es por consiguiente diferenciable.

Supongamos ahora que φ es un homeomorfismo (ef. la observación más abajo).

Si la aplicación lineal tangente de φ es un isomorfismo en cada punto, φ será un homeomorfismo. Por ser φ una equivariancia (cf. (1.4.10.)), basta probar eso en el punto x_o. La descomposición $\varphi|N_o = \psi \circ \iota \circ (p|B)^{-1}$ muestra que sólo es necesario probar que $\psi_{*e} : G_e \longrightarrow T_{x_o}(X)$ es suryectiva.

Veremos que $\operatorname{Ker} \psi_{*e} = H_e$, por lo cual

$$\text{rango } \psi_{*e} = \dim G - \dim \operatorname{Ker} \psi_{*e} = \dim G - \dim H = \dim G/H = \dim X$$

(la última igualdad por ser α un homeomorfismo), y esto concluirá la demostración.

Resta ver pues que $\operatorname{Ker} \psi_{*e} = H_e$. Por ser H el grupo de isotropía de x_o, se cumple $H_e \subset \operatorname{Ker} \psi_{*e}$. Recíprocamente, sea $A_e \in \operatorname{Ker} \psi_{*e}$. Sea A^* el campo de vectores de Killing sobre X definido por A_e, y $A^* = \sigma(A)$ para $A \in RG$, con la notación de (5.6.2.). Entonces A y A^* son ψ-relacionados (cf. la demostración de (5.6.2.)), lo cual prueba que $\psi_{*e} A_e = A^*_{x_o} = 0$.

Entonces, por (6.3.1.), $\exp tA_e \in H$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, según (7.5.3.), $A_e \in H_e$.

⊠

<u>Observación</u>: La aplicación $\varphi : G/H \longrightarrow X$ definida en (7.7.3.) es un homeomorfismo, si G tiene un número numerable de componentes. Con esta condición, el argumento expuesto prueba, para cualquier G-variedad X (con una operación no necesariamente transitiva) y $x_o \in X$, que $\varphi : G/H \longrightarrow X$ es un difeomorfismo sobre la órbita de x_o.

Antes de considerar el caso en el cual H es un subgrupo normal de G, damos la siguiente

<u>DEFINICION</u> (7.7.4.):

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre un anillo Λ. Un <u>**ideal**</u> $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ que satisface $[A, B] \in \mathfrak{h}$ para todo $A \in \mathfrak{g}$ y $B \in \mathfrak{h}$.

Si $\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ está canónicamente provisto de una estructura de álgebra de Lie, y $\mathfrak{h}$ es el núcleo del homomorfismo canónico $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Recíprocamente, el núcleo $\mathfrak{h}$ del homomorfismo de álgebras de Lie con dominio $\mathfrak{g}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$, y el isomorfismo de espacio vectorial de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ con su imágen es un isomorfismo de álgebras de Lie.

PROPOSICION (7.7.5.):

Sea H un subgrupo normal cerrado del grupo de Lie G. El grupo cociente G/H con las estructuras de variedad definida en (7.7.1.) es un grupo de Lie. El homomorfismo canónico $p : G \longrightarrow G/H$ induce $L(p) : LG \longrightarrow L(G/H)$, con núcleo LH, de manera que $LG/LH \cong L(G/H)$.

Demostración: El grupo cociente G/H es un grupo topológico con respecto a la topología cociente. Consideremos la única estructura de variedad de (7.7.1.) sobre G/H tal que la aplicación $G \times G/H \longrightarrow G/H$ dada por $(g, xH) \rightsquigarrow g\,x\,H$ es analítica.

Resta probar que las operaciones de grupo en G/H son analíticas, lo cual es inmediato. Por construcción de la estructura de variedad sobre G/H, $p : G \longrightarrow G/H$ es analítico, y por consiguiente un homomorfismo de grupos de Lie.

Consideremos $L(p) : LG \longrightarrow L(G/H)$. Por (7.5.3.) es $\operatorname{Ker} L(p) = L(\operatorname{Ker} p) = LH$. Entonces $L(p)$ induce un isomorfismo $LG/LH \cong L(G/H)$. ⊠

Observemos que si H es un subgrupo normal no cerrado de G, entonces el grupo cociente no es un espacio de Hausdorff.

Una consecuencia es la

PROPOSICION (7.7.6.):

Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie, y G conexo. Sea $\tilde{\rho} : G/\mathrm{Ker}\,\rho \longrightarrow \rho(G)$ la aplicación canónica inducida por ρ. Entonces $\tilde{\rho}$ es un isomorfismo de grupos de Lie, siendo $G/\mathrm{Ker}\,\rho$ provisto con la estructura de grupo de Lie de (7.7.5.) y $\rho(G)$ con la de (7.5.4.). En particular, la aplicación $\hat{\rho} : G \longrightarrow \rho(G)$ inducida por ρ es analítica.

Demostración: Consideremos el diagrama conmutativo :

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dd, "p"] \arrow[ddrr, "\rho"] & & \\
LG \arrow[urr, "exp"] \arrow[drr, dash] \arrow[dd, "L(\rho)"'] & & & & \\
 & & G/\mathrm{Ker}\,\rho \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[drr, "L(\rho)"] & \rho(G) \arrow[r, hook] & G' \\
L(G/\mathrm{Ker}\,\rho) \cong LG/L(\mathrm{Ker}\,\rho) \arrow[urr, "exp"] & & & L(\rho(G)) \cong L(\rho)\,LG \arrow[u, "exp"] \arrow[r, hook] & LG' \arrow[u, "exp"']
\end{tikzcd}$$

Existe a lo sumo una aplicación $\gamma : L(G/\mathrm{Ker}\,\rho) \longrightarrow L(\rho(G))$, que hace conmutativo al diagrama, por ser $L(p)$ suryectiva y $L(\rho(G)) \hookrightarrow LG'$ inyectiva.

Consideremos el isomorfismo canónico $\gamma : LG/L(\mathrm{Ker}\,\rho) \longrightarrow L(\rho)LG$ inducido por $L(\rho) : LG \longrightarrow LG'$; γ respeta la conmutatividad del diagrama. Esto prueba que $\tilde{\rho}$ es analítica en e, por ser justamente γ en una carta canónica.

Entonces $\tilde{\rho}$ es analítico en todo punto. Además $L(\tilde{\rho}) = \gamma$ es un isomorfismo y por lo tanto $\tilde{\rho}$ es un isomorfismo de grupos de Lie.

La aplicación $\hat{\rho} : G \longrightarrow \rho(G)$ es la composición $\tilde{\rho} \circ p$ de homomorfismos analíticos, y por consiguiente es analítico.

$\boxtimes$

CAPITULO VIII GRUPOS DE AUTOMORFISMOS.

§ 8.1. EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE UN ALGEBRA.

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión finita, es decir, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con una aplicación bilineal $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$.

$GL(\mathfrak{A})$ es el grupo de automorfismos del espacio vectorial subyacente, y Aut $\mathfrak{A}$ el grupo de automorfismos del álgebra $\mathfrak{A}$ Entonces, Aut $\mathfrak{A} \subset GL(\mathfrak{A})$.

Ejemplo (8.1.1.):

Cualquier $\mathbb{R}$-álgebra de Lie $\mathfrak{A}$.

LEMA (8.1.2.).

Aut $\mathfrak{A}$ es un subgrupo cerrado de $GL(\mathfrak{A})$.

Demostración: Para cada $A, B \in \mathfrak{A}$, consideremos la aplicación

$$GL(\mathfrak{A}) \longrightarrow GL(\mathfrak{A}) \times GL(\mathfrak{A}) \longrightarrow \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

definida mediante

$$\varphi \rightsquigarrow (\varphi, \varphi) \rightsquigarrow (\varphi A, \varphi B) \rightsquigarrow \varphi A . \varphi B .$$

Por ser contínua la multiplicación $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ tiene dimensión finita), esa aplicación es continua.

El conjunto

$$S(A, B) = \{ \varphi \in GL(\mathfrak{A}) \mid \varphi A . \varphi B = \varphi(A.B) \}$$

es la imágen inversa de $\varphi(A.B)$ con respecto a tal aplicación, y por lo tanto es cerrado en $GL(\mathfrak{A})$. Y puesto que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}) = \bigcap_{A,B \in \mathfrak{A}} S(A,B)$, resulta también $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$ cerrado en $GL(\mathfrak{A})$.

$\boxtimes$

Usando entonces (7.5.2.), obtenemos:

PROPOSICION (8.1.3.):

Sea $\mathfrak{A}$ una $\mathbb{R}$-álgebra de dimensión finita. Entonces Aut $\mathfrak{A}$ **es un grupo** de Lie cerrado de $GL(\mathfrak{A})$, y su álgebra de Lie $\partial(\mathfrak{A})$ está **caracterizada** por

$$\partial(\mathfrak{A}) = \{D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}) \mid \exp tD \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{A}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

Designamos $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ el álgebra de Lie de endomorfismos del espacio vectorial subyacente de $\mathfrak{A}$.

DEFINICION (8.1.4.):

Una **derivación** D de $\mathfrak{A}$ es un elemento $D \in \mathcal{L}(\mathfrak{A})$ que satisface, para todo par $A, B \in \mathfrak{A}$,

$$D(A.B) = DA.B + A.DB$$

PROPOSICION (8.1.5.):

El álgebra de Lie $\partial(\mathfrak{A})$ es el conjunto de derivaciones de $\mathfrak{A}$.

Demostración: Sea $D \in \partial(\mathfrak{A})$. Si $A, B \in \mathfrak{A}$ y $t \in \mathbb{R}$, por (8.1.3.) se cumple

$$\exp tD\,(A.B) = (\exp tD\,.\,A).(\exp tD\,.\,B) .$$

Diferenciando con respecto a t y haciendo $t = 0$, resulta

$$D(A.B) = DA.B + A.DB ,$$

lo cual muestra que D es una derivación de $\mathfrak{A}$.

Recíprocamente, sea D una derivación de $\mathfrak{A}$. Por inducción se obtiene

$$D^n(A.B) = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!\ j!} D^iA\,.\,D^jB , \qquad i, j \geq 0 .$$

(Si $n = 0$, la igualdad mantiene su validez, siendo D^0 la identidad).

En virtud de (6.1.5.) se cumple

$$\exp tD = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!} \quad ,$$

y por lo tanto

$$\exp tD(A.B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!} (A.B) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tD)^i A}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tD)^j B}{j!}\right) =$$

$$= (\exp tD.A).(\exp tD.B) \quad ,$$

y $\exp tD \in \operatorname{Aut} \mathfrak{A}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto muestra, por (8.1.3.), que $D \in \partial(\mathfrak{A})$.

⊠

<u>Observación</u>: El hecho que el conjunto de derivaciones de $\mathfrak{A}$ es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ resulta también en forma directa, y sin ninguna restricción sobre la dimensión de $\mathfrak{A}$. La proposición (8.1.5.) sugiere considerar heurísticamente el álgebra de Lie de derivaciones como el álgebra de Lie del grupo de automorfismos de $\mathfrak{A}$.

En particular, sea X una variedad y CX la $\mathbb{R}$-álgebra de funciones $X \longrightarrow \mathbb{R}$. El álgebra de Lie DX de campos de vectores sobre X es el álgebra de Lie de derivaciones de CX. Por (4.1.3.), $\operatorname{Aut} X$ puede identificarse con $\operatorname{Aut} CX$. De manera que puede considerarse a DX como el álgebra de Lie de $\operatorname{Aut} X$, hecho que anteriormente hemos señalado en forma repetida.

Si X es una G-variedad con respecto a la operación $\mathcal{T} : G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$, $\mathcal{T}$ induce una operación $\mathcal{T}^* : G \longrightarrow \operatorname{Aut} CX$. Si $\sigma : RG \longrightarrow DX$ es el homomorfismo definido en (5.6.2.), σ puede considerarse como el homomorfismo de álgebras de Lie inducido por el homomorfismo $\mathcal{T}^*$.

****

§ 8.2. LA REPRESENTACION ADJUNTA DE UN ALGEBRA DE LIE.

Comenzaremos con algunas observaciones sobre un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre un anillo Λ .

Todo elemento $A \in \mathfrak{g}$ origina una aplicación lineal $\operatorname{ad} A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ definida mediante

$$(\operatorname{ad} A)\, B = [A , B] \quad .$$

LEMA (8.2.1.).

ad A es una derivación de $\mathfrak{g}$.

Demostración: La identidad de Jacobi, expresada en la forma

$$[A , [B_1 , B_2]] = [[A , B_1] , B_2] + [B_1 , [A , B_2]] \quad ,$$

da el resultado querido.

⊠

DEFINICION (8.2.2.):

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La **derivación interior** de $\mathfrak{g}$ definida por $A \in \mathfrak{g}$ es la aplicación $\operatorname{ad} A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Consideremos la aplicación $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ en el álgebra de Lie de endomorfismos de $\mathfrak{g}$.

LEMA (8.2.3.).

$\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

Demostración: Se trata nuevamente de una consecuencia de la identidad de Jacobi, a saber

$$(\operatorname{ad} [A_1 , A_2])\, B = [[A_1 , A_2] , B] = [A_1 , [A_2 , B]] - [A_2 , [A_2 , B]] =$$

$$= (\operatorname{ad} A_1 \circ \operatorname{ad} A_2) B - (\operatorname{ad} A_2 \circ \operatorname{ad} A_1) B = [\operatorname{ad} A_1 , \operatorname{ad} A_2]\, B \; .$$

⊠

Hemos visto anteriormente que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subset \partial(\mathfrak{g})$, donde $\partial(\mathfrak{g})$ es el álgebra de Lie de derivaciones de $\mathfrak{g}$, que es una subálgebra del álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. También designaremos $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \partial(\mathfrak{g})$ al homomorfismo inducido por $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$.

<u>DEFINICION</u> (8.2.4.):

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, el homomorfismo $\mathrm{ad}: \mathfrak{g} \longrightarrow \partial(\mathfrak{g})$ se llama la <u>representación adjunta de $\mathfrak{g}$</u>, y es una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$.

La imágen de tal homomorfismo es el conjunto de derivaciones interiores de $\mathfrak{g}$, que constituye un álgebra de Lie.

El núcleo $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de este homomorfismo es un ideal de $\mathfrak{g}$, llamado el **<u>centro</u>** de $\mathfrak{g}$; $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ está caracterizado por $A \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ si y sólo si $[A, B] = 0$ para todo $B \in \mathfrak{g}$.

Consideremos ahora un grupo de Lie G, Aut LG es un grupo de Lie, por (8.1.3.), y su álgebra de Lie es, según (8.1.4.), el conjunto de derivaciones $\partial(LG)$ de LG.

La representación adjunta $\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ LG$, según lo visto anteriormente, induce un homomorfismo $L(\mathrm{Ad}): LG \longrightarrow \partial(LG)$.

<u>TEOREMA</u> (8.2.5.).

$L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$.

<u>Demostración</u>: Sea $A \in LG$. Entonces $L(\mathrm{Ad})A = \frac{d}{dt}\left\{\mathrm{Ad}\ \exp\ tA\right\}_{t=0}$ por definición de $L(\mathrm{Ad})$. Pero por (5.5.8.), el segundo miembro es precisamente $\mathrm{ad}\ A$.

⊠

COROLARIO (8.2.6.):

Si G es un grupo de Lie conexo, entonces $L(\mathrm{Ad}\, G) = \mathrm{ad}\,(LG)$.

Demostración: Por (7.5.), se cumple

$$L(\mathrm{Ad}\, G) = L(\mathrm{im}\ \mathrm{Ad}) = \mathrm{im}\ L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{im}\ \mathrm{ad} = \mathrm{ad}\ LG.$$

⊠

COROLARIO (8.2.7.):

Si G es un grupo de Lie conexo, su centro ZG es un subgrupo de Lie de G, cuya álgebra de Lie es el centro de LG.

Demostración: (6.2.10) asegura que $ZG = \mathrm{Ker}\ \mathrm{Ad}$, y entonces, por (7.5.3.) ZG es un subgrupo de Lie cerrado de G, con álgebra de Lie $L(ZG) = L(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ker}\ L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{Ker}\ \mathrm{ad}$. Pero $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ad}$ es el centro de LG.

⊠

Observemos que $\mathrm{Ad}: G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ LG$ induce un isomorfismo $G/ZG \cong \mathrm{Ad}\, G$ de grupos de Lie.

COROLARIO (8.2.8.):

Si $A \in LG$, entonces $\exp\ \mathrm{ad}\, A = \mathrm{Ad}\ \exp\ A$.

Demostración: Basta tener en cuenta la naturalidad de exp.

⊠

Haremos uso del siguiente

LEMA (8.2.9.).

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, G un grupo de Lie conexo, $\mathcal{C}: G \longrightarrow GL(V)$ una representación de G en V y $L(\mathcal{C}): LG \longrightarrow \mathcal{L}(V)$ la representación inducida de LG en V. Un subespacio vectorial $W \subset V$ es $\mathcal{C}(G)$-invariante si y sólo si es $L(\mathcal{C})LG$-invariante. En forma más precisa: $\mathcal{C}_g W \subset W$ para todo $g \in G$ si y sólo si $(L(\mathcal{C})A)W \subset W$ para todo $A \in LG$.

Demostración: Sea $W \subset V$ G-invariante, $A \in LG$ y $w \in W$.

Se cumple

$$(L(\mathcal{T})A)w = \frac{d}{dt}\left\{\mathcal{T}_{\exp tA}\right\}\Big|_{t=0} w = \frac{d}{dt}\left\{\mathcal{T}_{\exp tA}\, W\right\}\Big|_{t=0}$$

que es el vector tangente de la curva $t \rightsquigarrow \mathcal{T}_{\exp tA} W$ en W para $t = 0$, y por lo tanto $(L(\mathcal{T})A)w \in W$.

Recíprocamente, sea $W \subset V$ LG-invariante, es decir, $(L(\mathcal{T})A)\, W \subset W$ para todo $A \in LG$. De (6.1.5.) resulta inmediatamente que $(\exp L(\mathcal{T})A)\, W \subset W$. Por la naturalidad (6.1.6.) de exp esto es equivalente a $\mathcal{T}_{\exp A}\, W \subset W$ para todo $A \in LG$.

Sea $\tilde{G} = \{g \in G \mid \mathcal{T}_g W \subset W\}$. Entonces $\tilde{G}$ es un subgrupo de G. Por lo anterior, $\tilde{G}$ contiene un entorno de e en G y por consiguiente $\tilde{G} = G$. ⊠

<u>LEMA</u> (8.2.10.).

Sean G y G' grupos de Lie y H y H' subgrupos de Lie conexos de G y G' respectivamente. Sea $\rho : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo. Entonces $\rho(H) \subset H'$ si y sólo si $L(\rho)LH \subset LH'$.

La validez surge claramente de (7.5.4.).

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. La definición (7.7.4.) de un ideal de $\mathfrak{g}$ puede expresarse también de la manera siguiente: un subespacio vectorial $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ es un ideal si y sólo si $\mathfrak{h}$ es ad $\mathfrak{g}$-invariante.

Sea G un grupo de Lie. Vimos en (7.7.5.) que el álgebra de Lie de todo subgrupo normal de G es un ideal de G. Podemos ahora enunciar :

<u>PROPOSICION</u> (8.2.11.)

Sea H un subgrupo de Lie conexo de un grupo de Lie conexo G. Entonces H es un subgrupo normal de G si y sólo si LH es un ideal de LG.

<u>Demostración:</u> LH es un ideal de LG si y sólo si LH es ad LG-invariante.

En vista de $L(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ y de (8.2.9.), esto es equivalente a la Ad G-invariancia de LH, es decir, $\mathrm{Ad}\, g\, LH \subset LH$ para todo $g \in G$. Pero $\mathrm{Ad}\, g = L(\mathfrak{J}_g)$ por definición, y usando (8.2.10) resulta $\mathrm{Ad}\, g\, LH \subset LH$ si y sólo si $\mathfrak{J}_g(H) \subset H$. Entonces, LH es un ideal de LG si y sólo si $\mathfrak{J}_g(H) \subset H$ para todo $g \in G$. ⊠

<u>COROLARIO</u> (8.2.12.):

Si G es un grupo de Lie conexo, Ad G es un subgrupo de Lie normal de $(\mathrm{Aut}\ LG)_0$.

<u>Demostración:</u> Ad G es conexo, y por lo tanto contenido en $(\mathrm{Aut}\ LG)_0$. Por (8.2.6.), es $L(\mathrm{Ad}\, G) = \mathrm{ad}\, LG$.

En vista de (8.2.11.), sólo hay que probar que ad LG es un ideal de $L(\mathrm{Aut}\ LG) = \partial(LG)$. Este hecho es válido para cualquier álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

En efecto, sea $D \in \partial(\mathfrak{g})$ y $A \in \mathfrak{g}$. Hay que demostrar que $[D, \mathrm{ad}\, A] \in \mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$. Si $B \in \mathfrak{g}$, se cumple

$$[D, \mathrm{ad}\, A]\, B = D\, [A, B] - [A, DB] = [DA, B] = (\mathrm{ad}\, DA)\, B,$$

es decir, $[D, \mathrm{ad}\, A] = \mathrm{ad}\, DA$.

⊠

<u>Observación</u>: El grupo Ad G es necesariamente cerrado en Aut LG.

****

§ 8.3. EL GRUPO DE AUTOMORFISMOS DE UN GRUPO DE LIE.

Sea G un grupo de Lie y Aut G su grupo de automorfismos (de la estructura de grupo de Lie; recuérdese sin embargo (6.3.4.)).

El funtor L define un homomorfismo $L : \mathrm{Aut}\ G \longrightarrow \mathrm{Aut}\ LG$ en el grupo de automorfismos de LG. Si G es conexo, (6.2.9.) prueba que ese homomorfismo es inyec tivo.

Ejemplo (8.3.1.):

Consideremos el grupo de Lie $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Aut $\mathbb{T} \longrightarrow$ Aut $(L\,\mathbb{T}) = $
$= GL(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$ es inyectivo. Se cumple Aut $\mathbb{T} = \{1_{\mathbb{T}}, -1_{\mathbb{T}}\}$, donde
$-1_{\mathbb{T}}$ es la aplicación inducida sobre $\mathbb{T}$ por $-1_{\mathbb{R}}$ (ef. (8.3.4.)).

Si G es conexo y simplemente conexo, el homomorfismo $L : \text{Aut } G \longrightarrow \text{Aut } LG$ es, por (7.2.7.), un isomorfismo.

Ejemplo (8.3.2.):

$G = R$. Entonces Aut $\mathbb{R} = \mathbb{R}^*$.

Más generalmente, sea G un grupo de Lie conmutativo, conexo y simplemente conexo. Entonces, por (7.2.8.), $\exp : LG \longrightarrow G$ es un isomorfismo. Aut $G \longrightarrow$ Aut $LG = GL(LG)$ es un isomorfismo.

Sea G un grupo de Lie conmutativo y conexo. Un automorfismo φ de G define un automorfismo $L(\varphi)$ de LG. Consideremos el homomorfismo $\exp : LG \longrightarrow G$. Entonces, por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} LG & \xrightarrow{L(\varphi)} & LG \\ {\scriptstyle \exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ G & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

resulta $L(\varphi)$ Ker exp $\subset$ Ker exp.

Hemos probado así parte de la

PROPOSICION (8.3.3.):

Sea G un grupo de Lie conmutativo y conexo. Entonces la imágen del homomorfismo $L : \text{Aut } G \longrightarrow GL(LG)$ consiste de los automorfismos $\tilde{\varphi}$ de LG tales que $\tilde{\varphi}$ Ker exp $\subset$ Ker exp.

Demostración: Tenemos que probar que dado $\tilde{\varphi} \in GL(LG)$ tal que $\tilde{\varphi}\,\mathrm{Ker}\,\exp \subset \mathrm{Ker}\,\exp$, existe $\varphi \in \mathrm{Aut}\,G$ tal que $L(\varphi) = \tilde{\varphi}$.

La igualdad $(\exp \circ \tilde{\varphi})\,\mathrm{Ker}\,\exp = e$ implica que existe una factorización: $\varphi : G \longrightarrow G$ de $\exp \circ \tilde{\varphi}$ a través de exp, y evidentemente $L(\varphi) = \tilde{\varphi}$. ⊠

Observación: Existe una caracterización similar de Aut G para cualquier grupo de Lie conexo. Sólo hay que considerar el grupo revestidor universal $\tilde{G}$ y el homomorfismo revestidor $\tilde{G} \longrightarrow G$.

La proposición (8.3.3.) permite determinar Aut G, mediante $G \cong LG/\mathrm{Ker}\,\exp$. A base de esto, probaremos :

PROPOSICION (8.3.4.):

Si $G = \mathbb{T}^n$, entonces $\mathrm{Aut}\,G \cong \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}^n$.

Demostración: Se cumple $\mathbb{T}^n \cong LG/\mathbb{Z}^n$, designando $\mathbb{Z}^n$ a un subgrupo de LG isomorfo a $\mathbb{Z}^n$. Entonces $\mathrm{Aut}\,\mathbb{T}^n = \{\psi \in GL(LG) \mid \psi(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n\}$, es decir, $\mathrm{Aut}\,\mathbb{T}^n \cong \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}^n$. ⊠

****
****
****
*

APENDICE - NOCION DE CATEGORIA Y FUNTOR

DEFINICION .

Una **categoría** $\mathcal{K}$ está constituída por :

(i) Una clase de objetos , A , C , ... ;

(ii) Para cada par de objetos, (A , B), un conjunto $[A,B]$ cuyos elementos se llaman **morfismos** , tales que $(A,B) \neq (A',B')$ implica $[A,B] \cap [A',B'] = \emptyset$;

(iii) Para cada terna de objetos, (A, B, C) , una aplicación $[A,B] \times [B,C] \longrightarrow [A,C]$, llamada **composición de morfismos** , simbolizada con $(\alpha, \beta) \rightsquigarrow \beta\alpha$ si $\alpha \in [A,B]$ y $\beta \in [B,C]$; y

(iv) para cada objeto A, un elemento **identidad** $1_A \in [A, A]$;

y de manera que los entes introducidos satisfacen los siguientes dos axiomas :

1) $\alpha \in [A,B]$, $\beta \in [B,C]$, $\gamma \in [C,D]$, implica $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ (asociatividad) ; y

2) $\alpha \in [A,B]$ implica $\alpha 1_A =$ y $1_B\alpha = \alpha$.

Como ejemplos de categorías, pueden mencionarse :

a) la categoría Ens de los conjuntos, cuyos objetos son los conjuntos y los morfismos son las aplicaciones entre conjuntos ;

b) la categoría $\mathcal{G}$ de los grupos, cuyos objetos son los grupos y los morfismos son los homomorfismos de grupo ;

c) la categoría $\mathcal{T}$ de los espacios topológicos, cuyos objetos son los espacios topológicos y los morfismos son las aplicaciones continuas entre tales espacios.

Conviene hacer notar que la notación $\alpha \in [A,B]$ es frecuentemente reemplazada por la más familiar notación "funcional" $\alpha : A \longrightarrow B$ ó $A \xrightarrow{\alpha} B$.

DEFINICION .

Un morfismo $\alpha \in [A, B]$ de la categoría $\mathcal{K}$ se llama una **equivalencia** cuando existe $\beta \in [B, A]$ tal que $\beta\alpha = 1_A$ y $\alpha\beta = 1_B$.

Para cada objeto A de $\mathcal{K}$, el conjunto de las equivalencias pertenecientes a $[A, A]$ forma grupo, el cual se designa con Aut A ("automorfismos" de A).

DEFINICION .

Un **funtor covariante** $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ entre dos categorías $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ es una correspondencia tal que :

i) a cada objeto A de $\mathcal{K}$ corresponde un objeto de $\mathcal{K}'$, designado con FA ;

ii) a cada morfismo $\alpha \in [A, B]$ en $\mathcal{K}$ corresponde un morfismo de $[FA, FB]$ en $\mathcal{K}'$, designado con $F\alpha$;

de manera que se satisfacen las condiciones siguientes :

1) $F(\beta\alpha) = F(\beta)\ F(\alpha)$;

2) $F(1_A) = 1_{FA}$.

Si en la definición dada se remplaza la condición 1) por la siguiente:

1') $F(\beta\alpha) = F(\alpha)\ F(\beta)$,

entonces el ente F así definido se llama **funtor contravariante**.

Como ejemplos de funtores, podemos mencionar :

a) $P : \text{Ens} \longrightarrow \text{Ens}$, definido mediante :

Si X es un conjunto, entonces PX es el conjunto de las partes de X, y si $\varphi : X \longrightarrow X'$ y $M \subset X$, entonces $P(\varphi)M = \{\varphi(x) \mid x \in M\} = \varphi(M)$, P es covariante.

b) $P^{-1} : \text{Ens} \longrightarrow \text{Ens}$, definiendo $P^{-1}X$ igual que en a), y $P^{-1}(\varphi)M = \varphi^{-1}(M)$. P^{-1} es contravariante.

c) $h^R : \mathcal{K} \longrightarrow$ Ens, donde R es un objeto fijo de la categoría $\mathcal{K}$, definido como sigue:

Si X es un objeto de $\mathcal{K}$, $h^R(X) = [X, R]$, y si $\varphi : X \longrightarrow X'$, $h^R(\varphi)(f') = f \circ \varphi$, donde $f' : X' \longrightarrow R$. h^R es contravariante.

d) Funtor de olvido $V : \mathcal{K} \longrightarrow$ Ens., donde $\mathcal{K}$ es una categoria en la cual cada objeto posee un conjunto subyacente y cuyos morfismos inducen aplicaciones de tales conjuntos. Si X es un objeto de $\mathcal{K}$, VX - frecuentemente designado con X, para evitar pedantería en la notación - es su conjunto subyacente, y si $\varphi : X \longrightarrow X'$ es un morfismo de $\mathcal{K}$, $F(\varphi)$ és la aplicación inducida por φ entre los correspondientes conjuntos subyacentes.

Este ejemplo puede generalizarse en el sentido siguiente : si $\mathcal{K}$ es una categoría cuyos objetos son los de la categoría $\mathcal{K}'$ con una estructura adicional, el functor de olvido $V : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ será el que suprime la estructura adicional de los objetos de $\mathcal{K}$.

Sea ahora $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ dos categorías, y F, G funtores de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}'$.

DEFINICION.

Una transformación natural $\phi : F \longrightarrow G$ es una correspondencia que a cada objeto X de $\mathcal{K}$ le asigna un morfismo $\phi_X : FX \rightarrow GX$ de $\mathcal{K}'$, de manera que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & GX \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ FY \arrow[r, "\phi_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

conmuta para todo morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{K}$.

Ejemplo :

Sea K un campo conmutativo, ${}_K\mathcal{M}$ la categoría de los K-espacios vectoriales, $D : {}_K\mathcal{M} \longrightarrow {}_K\mathcal{M}$ el functor definido por la dualidad, y $D^2 : {}_K\mathcal{M} \longrightarrow {}_K\mathcal{M}$

el functor que a cada K-espacio vectorial le asigna su doble dual. La relación

$$E_X(x)(x') = \langle x', x \rangle \quad , \quad x \in X \, , \quad x' \in X' \, ,$$

define una transformación natural $E : \text{Ident.} \longrightarrow D^2$.

La composición de transformaciones naturales se efectúa de manera obvia.

DEFINICION .

Una transformación natural $\phi : F \longrightarrow G$ se llama una equivalencia natural cuando existe una transformación natural $\psi : G \longrightarrow F$ tal que $\psi \circ \phi = 1_F$ y $\phi \circ \psi = 1_G$, donde 1_F y 1_G son las transformaciones naturales idénticas $F \longrightarrow F$ y $G \longrightarrow G$, respectivamente.

PRODUCTOS.

Sea $\mathcal{K}$ una categoría. Un objeto T de $\mathcal{K}$ se llama terminal cuando para cada objeto K existe uno y sólo un morfismo $K \longrightarrow T$. Entonces el único morfismo $T \longrightarrow T$ es 1_T, y dos objetos terminales cualesquiera de $\mathcal{K}$ son equivalentes.

Sea J un conjunto de índices y $\{K_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos de $\mathcal{K}$. Sea $\mathcal{P}\{K_j\}$ la categoría cuyos objetos son familias $\{q_j : Q \longrightarrow K_j \mid j \in J\}$ de morfismos $(q_j) \longrightarrow (q'_j)$ en $\mathcal{P}(K_j)$ es un $\alpha : Q \longrightarrow Q'$ tal que $q'_j \alpha = q_j$, $j \in J$. Un objeto terminal en esta categoría es un producto de K_j. Entonces

DEFINICION.

Un producto de $\{K_j\}_{j \in J}$ es un objeto P de $\mathcal{K}$ con los morfismos $p_j : P \longrightarrow K_j$, $j \in J$, tal que cada familia de morfismos $q_j : Q \longrightarrow K_j$ puede expresarse mediante $q_j = p_j \alpha$, con un único $\alpha : Q \longrightarrow P$.

El producto, así como cualquier objeto terminal, es único salvo equivalencia en $\mathcal{P}\{K_j\}$; en particular el objeto-producto P is único salvo equivalencia en $\mathcal{K}$.

SUMAS.

Sea $\mathcal{K}$ una categoría. Un objeto S de $\mathcal{K}$ se llama **inicial** cuando para cada objeto K existe un único morfismo $S \longrightarrow K$. Entonces el único morfismo $S \longrightarrow S$ es 1_S , y dos objetos iniciales cualesquiera son equivalentes.

Sea $\{K_j\}_{j \in J}$ una familia de objetos de $\mathcal{K}$, J un conjunto de índices. Sea $\mathcal{R}(K_j)$ la categoría cuyos objetos son familias $\{\rho_j : K_j \longrightarrow R \mid h \in J\}$ de morfismos de $\mathcal{K}$ con rango común R , y cada morfismo $(\rho_j) \longrightarrow (\rho'_j)$ en $\mathcal{R}(K_j)$ es un $\alpha : R \longrightarrow R'$ tal que $\alpha \rho_j = \rho'_j$, $j \in J$. Un objeto inicial en esta categoría es una suma de K_j , es decir,

DEFINICION.

Una **suma** de $\{K_j\}_{j \in J}$ es un objeto S de $\mathcal{K}$ con los morfismos $\sigma_j : K_j \longrightarrow S$, $j \in J$, tal que cada familia de morfismos $\sigma_j : K_j \longrightarrow R$ puede expresarse mediante $\alpha \sigma_j = \rho_j$ con un único $\alpha : S \longrightarrow R$.

La suma es única salvo equivalencia en $\mathcal{R}(K_j)$; en particular, el objeto-suma es único, salvo equivalencia en $\mathcal{K}$.

****
****
*

BIBLIOGRAFIA .

[1] Bruhat , F. : Lectures on Lie Groups and representation of locally compact groups (Tata Institute of fundamental research , Bombay, 1958).

[2] Chevalley , C. : Theory of Lie Groups, Vol. I (Princenton Univ. Press , Princeton, New Jersey (1946)).

[3] Cohn , P. M. : Lie groups (Cambridge Univ. Press, Cambridge (1957)).

[4] Graeub , W. : Liesche Gruppen und affine zusammenhängende Mannigfaltigkeiten (Acta Math. 106 (1961), p. 65 - 111).

[5] Helgason , S. : Differential geometry and symmetric spaces (Academic Press (1962)).

[6] Keszul , J. L. : Exposés sur les espaces homogénes symétriques (Soc. Math São Paulo (1959)).

[7] Lichnerovicz , A. : Géométric des groupes de transformations (Dunvol , Paris (1958)).

[8] Maissen , B. : Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume (Acta Math. 108 (1962), p. 229 - 269).

[9] Mac Lane, S. : Homology (Springer, Grundlehren Math. Wiss. 114 , Berlin (1963)).

[10] Nomizu, K. and Kobayashi, S. : Foundations of differential geometry , Vol I (Interscience , New York (1963)).

[11] Palais , R. : The classification of G-spaces (Memoirs AMS , Vol 2 (19)).

[12] Palais , R. : A global formulation of the Lie theory of transformation groups (Memoirs AMS , Vol. (195)).

[13] Pontrjagin , L. S. : Topologische Gruppen , Vol. II (Teubner, Leipzig (1958)).

[14] Hofmann , K. H. : Einführung in die Theorie der Liegruppen , Teil I (Vorlesungsausarbeitung , Math. Inst. Universität Tubingen, 1963.).

****

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 1.	Matemática y física cuántica	Laurent Schwartz
Fascículo 2.	Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert ...	Mischa Cotlar
Fascículo 3.	Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por ...	Alberto P. Calderón
Fascículo 4.	Propiedades en el contorno de funciones analíticas	Alberto González Domínguez
Fascículo 5.	Teoría constructiva de funciones ...	Jean Pierre Kahane
Fascículo 6.	Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables .	Jean Pierre Kahane
Fascículo 7.	Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones	Juan Carlos Merlo
Fascículo 8.	Introducción al estudio del problema de Dirichlet	Esteban Vági
Fascículo 9.	Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP	Guido Weiss
Fascículo 10.	Probabilidades y estadítsica	Roque Carranza
Fascículo 11.	Introducción a la teoría de la representación de grupos	Mischa Cotlar
Fascículo 12.	Algebra lineal	Jean Dieudonné
Fascículo 13.	Una introducción de la integral sin la noción de medida	Jan Mikusinski
Fascículo 14.	Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas	Jean Dieudonné
Fascículo 15.	Equipación con espacios de Hilbert .	Mischa Cotlar
Fascículo 16.	Grupos de Lie y grupos de transformaciones	Philippe Tondeur
Fascículo 17.	Tres teoremas sobre variedades diferenciales	Juan Carlos Merlo
Fascículo 18.	Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos	S. Lojasiewicz
Fascículo 19.	Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables ...	L. A. Santaló
Fascículo 20.	Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz	Evelio T. Oklander
Fascículo 21.	Categorías y Functores	Philippe Tondeur
Fascículo 22.	Notas de Algebra	Enzo R. Gentile

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina