ISSN 1853-709X

Fascículo 19

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

L. A. Santaló

Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 19

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **19**

cursos
y seminarios
de matemática

L. A. Santaló

INTRODUCCION A LA GEOMETRIA DIFERENCIAL DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

1965

I. PRELIMINARES TOPOLOGICOS

1. ESPACIO TOPOLOGICO.

Definición I. 1. Se llama <u>espacio topológico</u> a un conjunto de puntos E en el cual se distinguen una familia de subconjuntos llamados <u>abiertos</u>, que cumplen los siguientes axiomas:

1. El conjunto vacío es un abierto.
2. La unión de cualquier número de abiertos es un abierto.
3. La intersección de dos abiertos es un abierto.
4. El conjunto total E es un abierto.

Para un mismo conjunto E las familias de abiertos pueden ser diferentes; los espacios topológicos correspondientes son entonces también diferentes. Al asignar a E una familia de abiertos, se dice que se le ha asignado una estructura de espacio topológico, o bien una topología.

Si sobre un mismo conjunto se tienen definidas dos topologias y ocurre que todo abierto de la primera es también un abierto de la segunda, pero no al revés, se dice que esta última topologia es más fina que la primera

<u>Ejemplos</u>.

1. Tomando como únicos abiertos el conjunto vacío ϕ y el espacio mismo E, se tiene definida una topologia. Es la menos fina de todas.

2. Tomando como abiertos todos los subconjuntos de E (incluídos ϕ y E) se

tiene otra topologia: se llama la topologia discreta de E. Ella es la más fina de todas las topologias posibles para el conjunto E.

3. Sea la recta real $-\infty < x < \infty$. La familia de abiertos $a < x < b$, junto con la unión de un número cualquiera de ellos define una topologia. Obsérvese que la condición 3 vale para cualquier número finito de abiertos, pero puede no valer para un número infinito. Por ejemplo, con la topologia mencionada, los abiertos $-1/n < x < 1/n$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ tienen por intersección el solo punto $x = 0$, que no es un abierto.

4. Sea un conjunto de puntos A contenido en el espacio topológico E. Tomando como abiertos de A las intersecciones $A \cap U$ (U = abierto de E) se tiene definida sobre A una topologia, puesto que

$$\bigcup (A \cap U_i) = A \cap \bigcup U_i, \quad (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2) = A \cap (U_1 \cap U_2).$$

Esta topologia se llama la <u>topologia inducida</u> en A por la topologia de E.

2. BASE DE UN ESPACIO TOPOLOGICO.

Definición I. 2. Se llama <u>base</u> de un espacio topologico E a toda familia de abiertos $\{U_\alpha\}$ de E tal que todo abierto de E es unión de U_α. El conjunto vacío se interpreta como unión de "ningún" abierto U.

Son importantes los espacios topologicos que admiten una base numerable. Se dice, a veces, que tales espacios satisfacen al segundo axioma de numerabilidad.

Sea E un conjunto y $\{U_\alpha\}$ una familia de subconjuntos. Interesa saber si $\{U_\alpha\}$ puede tomarse como base de una topologia de E. Para ello es necesario y suficiente que:

a) E sea unión de U_α;

b) la intersección de dos U_α cualesquiera sea también unión de U_α.

Con estas dos condiciones es claro que se cumplen las condiciones de definición de espacio topológico.

Dos bases que determinen la misma topologia, o sea la misma familia de abiertos de E, se llaman equivalentes.

3. EL ESPACIO NUMERICO R^n.

Definición I. 3. Se llama espacio numérico R^n al conjunto de todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales, dados en un cierto orden. Cada una de estas n-uplas se llama un punto del espacio y los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman las coordenadas del punto.

Tomemos en R^n la familia de abiertos formada por los puntos $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que

$$a_i < x_i < b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{I. 1}$$

siendo $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $b(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos puntos de R^n. Llamaremos a estos abiertos intervalos de R^n. Ellos definen una base en R^n, por cumplirse las condiciones a), b) del número anterior. La topologia correspondiente se llama la topologia natural de R^n. Siempre que se mencione R^n como espacio topológico se entenderá con la topologia anterior que tiene por abiertos a los intervalos y a los conjuntos formados por unión de los mismos.

Si en (I. 1) se suponen a_i y b_i racionales, los intervalos (I. 1) constituyen también una base de la misma topologia anterior, pues todo intervalo real es suma de intervalos racionales. Por tanto:

El espacio numérico R^n con la topologia natural definida por los intervalos (I. 1) admite una base numerable.

Se puede dar a R^n una estructura de espacio métrico definiendo la distancia entre dos puntos x, y por

$$d(x,y) = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(I. 2)}$$

la cual satisface a los postulados requeridos a toda definición de distancia. El espacio R^n con esta métrica se llama el espacio euclidiano de n dimensiones.

Una esfera abierta de R^n con la métrica anterior es el conjunto de puntos y tales que $d(x,y) < r$; x es el centro de la esfera y r el radio. La esfera se dice cerrada si se consideran también los puntos y tales que $d(x,y) = r$.

4. ESPACIOS SEPARADOS O DE HAUSDORFF.

Definición I. 4. Se llama entorno de un punto $x \in E$, a todo conjunto $U_x \subset E$ que contiene a un abierto que contiene a x .

Definición I. 5. Un espacio topológico E se dice que es separado o de Hausdorff, si cualesquiera que sean los puntos $x, y \in E$, existen entornos U_x , U_y sin punto común.

Nota. No debe confundirse "separado" con "separable", nombre éste último que se da a los espacios topológicos que contienen un subconjunto denso (ver Definición I. 10) y numerable.

Ejemplos.

1. Sea E compuesto de dos rectas con la parte $x < 0$ identificada y las partes $x \geqslant 0$ diferentes y en cada caso los abiertos sean los intervalos. Los puntos $x = 0$ de cada recta son dos puntos diferentes de E y sin embargo no tienen entorno sin punto común, o sea, E no es separado.

2. La recta real tomando como abiertos las semirectas a la derecha de todo punto $(a < x < \infty)$ es un espacio topológico no separado. Vemos así, que sobre la recta real, los abiertos $a < x < b$ y los $a < x < \infty$ definen topologias diferentes, pues la primera es separada y la segunda no. La primera topologia es más fina que la segunda.

5. OTRAS DEFINICIONES.

En las definiciones que siguen E representa siempre un espacio topológico

Definición I. 6. Se dice que un punto x es <u>interior</u> a un conjunto $A \subset E$, si A es un entorno de x. El conjunto de los puntos interiores de A se llama el <u>interior</u> de A.

Definición I. 7. Se dice que un punto x es <u>adherente</u> a un conjunto $A \subset E$ si todo entorno de x contiene por lo menos un punto de A. El conjunto de los puntos adherentes de A se llama la <u>adherencia</u> de A y se representa por $\bar{A}$.

Definición I. 8. Se llaman conjuntos <u>cerrados</u> de E a los complementarios de los abiertos de E, es decir, a los $E - U_\alpha$ siendo U_α un abierto de E. El conjunto vacío y el espacio entero E son, a la vez, abiertos y cerrados.

Definición I. 9. Un punto x se dice que es punto frontera de un conjunto A de E, si es a la vez punto adherente de A y de su complementario $E - A$. El conjunto de los puntos frontera de A se llama la <u>frontera</u>, o el <u>contorno</u>, o el <u>borde</u> de A.

Definición I. 10. Un conjunto A se dice que es <u>denso</u> en E si $\bar{A} = E$.

Definición I. 11. E se dice que es <u>conexo</u> si, siendo A y B abiertos de E no vacíos, la relación $A \cup B = E$ implica $A \cap B \neq \emptyset$.

6. COMPACIDAD.

Definición I. 12. Un espacio topológico E se dice que es compacto, si todo cubrimiento de E por abiertos contiene un cubrimiento finito.

Para probar la compacidad de un espacio topológico es a veces útil la siguiente

Definición I. 13. Una familia de conjuntos se dice que tiene la "propiedad de intersección finita" si toda subfamilia finita de la misma tiene intersección no vacía.

Se tiene entonces el siguiente teorema, que viene a ser la definición dual de compacidad:

Teorema I. 1.

E es compacto si y solamente si toda familia de conjuntos cerrados de E que tenga la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacia.

Demostración: a) Supongamos que E es compacto. Sea $\{C_\alpha\}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita; hay que demostrar que su intersección no es vacia. Si fuera vacia, los complementarios $\{E - C_\alpha\}$ serían abiertos que cubren E y por tanto un número finito de ellos también cubre E. La intersección de los C_α correspondientes a estos últimos sería vacia, contra la hipótesis de que $\{C_\alpha\}$ posee la propiedad de intersección finita.

b) Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema. Queremos demostrar que E es compacto. Sea $\{A_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos de E; los complementarios $\{E - A_\alpha\}$ tienen intersección vacia. Por tanto existe una familia finita de $\{E - A_\alpha\}$ con intersección vacia. Sus complementarios forman un cubrimiento finito de E por abiertos.

También facilita la demostración de la compacidad de ciertos espacios el siguiente

Teorema I. 2.

En la Definición I. 12 los cubrimientos de E pueden limitarse a cubrimientos por abiertos de una base determinada.

En efecto, sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos cualesquiera y B una base. Como cada U_α es unión de abiertos de B, se tiene también un cubrimiento $\{B_\alpha\}$ con $B_\alpha \in$ B. Si para todo cubrimiento $\{B_\alpha\}$ existe un cubrimiento finito formado por B_1, $B_2, \ldots, B_m$, como cada B_i pertenece a un cierto U_i de $\{U_\alpha\}$ también estos U_i formarán un cubrimiento de E. Es decir, con sólo suponer que la condición de la Definición I. 12 se cumple para abiertos de B, se deduce que se cumple para abiertos cualesquiera.

Sin dar la demostración, que puede verse por ejemplo en LEFSCHETZ, Algebraic Topology, pág. 20, enunciaremos el

Teorema I. 3.

Todo subconjunto cerrado y acotado del espacio numérico R^n es compacto.

Decir "acotado" significa que las coordenadas de sus puntos están acotadas.

7. ESPACIOS TOPOLOGICOS LOCALMENTE COMPACTOS, REGULARES, NORMALES Y PARACOMPACTOS.

Conviene tener presente las siguientes definiciones usuales. (Ellas pueden variar ligeramente de un autor a otro; aqui vamos a seguir esencialmente el libro de J. C. Kelley, Topologia General, traducción castellana, EUDEBA, 1962. A este libro remitiremos también para las demostraciones de los teoremas que se mencionan).

Definición I. 14. Un espacio topológico E se dice que es localmente compacto, si todo punto del mismo posee un entorno compacto.

Según el Teorema I. 13 resulta evidente que el espacio R^n es localmente compacto; aunque no compacto.

Definición I. 15. Un espacio topológico E se dice que es regular, si para cada punto x y cada entorno U de x, existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset U$.

Definición I. 16. Un espacio topológico se dice que es <u>normal</u>, si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos A y B, existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Definición I. 17. Dados dos cubrimientos $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ de un espacio topológico E, se dice que el segundo es <u>más fino</u> que el primero, o que es un <u>refinamiento</u> del primero, si para todo V_β existe un U_α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.

Definición I. 18. Un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de E se dice que es <u>localmente finito</u>, si para todo punto $x \in E$ existe un entorno de x que solamente tiene punto común con un número finito de conjuntos de $\{U_\alpha\}$. El cubrimiento $\{U_\alpha\}$ se dice que es de <u>tipo finito</u>, si todo conjunto U_α solamente tiene punto común con un número finito de conjuntos de $\{U_\alpha\}$.

Definición I. 19. Un espacio topológico E se dice que es <u>paracompacto</u> si es separado y todo cubrimiento por abiertos de E admite un refinamiento por abiertos localmente finito.

Los espacios topológicos que constituyen el sostén de las variedades diferenciables, que definiremos más adelante, son espacios separados de base numerable. Interesa, por tanto, que recopilemos algunos resultados de estos espacios y sus vinculaciones con los que acabamos de definir.

Teorema I. 4.

Todo espacio topológico de base numerable es separable (= contiene un subconjunto numerable denso en el espacio).

Basta tomar un punto de cada elemento de una base numerable (Kelley, p. 62).

Teorema I. 5. (LINDELÖF)

En un espacio topológico de base numerable, todo cubrimiento por abiertos de un subconjunto arbitrario, tiene un subcubrimiento numerable. (Kelley, p. 63).

En este enunciado, como en todos los demás, dentro de los "numerables" incluímos a los conjuntos "finitos".

Teorema I. 6.

Todo espacio topológico regular de base numerable es normal (Kelley, p. 135).

Teorema I. 7.

Todo espacio topológico separado y localmente compacto es regular. (Kelley, p. 169).

Teorema I. 8.

Todo espacio topológico localmente compacto, separado y de base numerable es paracompacto. (J. G. Hocking - G. S. Young, Topology, p. 79).

II. APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS.

Definición II. 1. Sean X, Y dos conjuntos. Una relación f que a cada $x \in X$ hace corresponder uno y un sólo $y = f(x) \in Y$ se dice que es una <u>aplicación</u> de X en Y o también una <u>función</u> definida en X con valores en Y. Se representa $f: X \longrightarrow Y$.

Definición II. 2. Una aplicación $f: X \longrightarrow Y$ se dice que es

a) <u>Sobreyectiva</u> o simplemente "sobre", si $f(X) = Y$, es decir, si las imagenes de los puntos de X cubren todo Y.

b) <u>Inyectiva</u> si $f(x) = f(x')$ implica $x = x'$, es decir, ningún punto de Y pue de ser imagen de más de un punto de X.

c) <u>Biyectiva</u>, si es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

Si $Y = X$, la aplicación que a cada x hace corresponder el mismos x se llama la <u>identidad o aplicación idéntica</u>. Si $X \subset Y$, la restricción de la identidad a X se llama la inyección natural de X en Y.

Para toda aplicación biyectiva $f: X \longrightarrow Y$, está definida la aplicación inversa $f^{-1}: Y \longrightarrow X$, tal que si $y = f(x)$, es $x = f^{-1}(y)$.

Si f no es biyectiva no existe la aplicación inversa. Sin embargo, si $A \subset Y$ se representa por $f^{-1}(A)$ al conjunto de puntos de X cuya imagen por f sea A.

2. COMPOSICION DE APLICACIONES.

Definición II. 3. Dados tres conjuntos X, Y, Z y dos aplicaciones $f: X \longrightarrow Y$,

$g : Y \longrightarrow Z$, la aplicación $X \longrightarrow Z$ definida por $z = g(f(x))$ se llama la aplicación compuesta o composición de f y g. Se representa por $g \circ f$.

Procediendo sucesivamente se define la composición de varias aplicaciones.

Por la misma definición, es siempre

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

y si f, g son biyectivas es también

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} .$$

3. APLICACIONES CONTINUAS.

Las definiciones anteriores valen para conjuntos cualesquiera. Sean ahora E, E' dos espacios topológicos.

Definición II.4. Una aplicación $f : E \longrightarrow E'$ se dice que es continua en un punto $x \in E$, si para todo abierto U' de E' que contiene a $f(x)$ existe un entorno de x cuya imagen está contenida en U'.

Definición II.5. Una aplicación $f : E \longrightarrow E'$ se dice que es continua en E si es continua en todo punto x de E.

Representando por $f^{-1}(U')$ al conjunto de puntos de E cuya imagen por f es $U' \subset E'$, se puede también decir que "$f : E \longrightarrow E'$ es continua si la imagen por f^{-1} de todo abierto de E' es un abierto de E".

Ejemplo.

Sea E el segmento $0 \leqslant t < 2\pi$ con la topologia de intervalos (intervalos abiertos, más los de la forma $0 \leqslant t < a$). Sea E' la circunferencia $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ con los intervalos correspondientes a $a < t < b$ como abiertos. La aplicación $f : E \longrightarrow E'$

definida por $t \longrightarrow (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es continua. En cambio no lo es la $f^{-1}: E' \longrightarrow E$, pues el abierto $0 \leqslant t < 1$ de E no es imagen de ningún abierto de E'.

Definición II. 6. Una aplicación $f: E \longrightarrow E'$ se dice que es una aplicación topológica o un homeomorfismo, si es biyectiva y bicontinua. Decir bicontinua significa que son continuas f y f^{-1}.

Por definición de continuidad, se deduce que los homeomorfismos y sus inversos transforman abiertos en abiertos, o sea, conservan las topologías de E y E'.

Otras consecuencias inmediatas de la definición son:

a) La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo;

b) Los homeomorfismos conservan la compacidad.

4. APLICACIONES DE R^n EN R^m.

Dado un abierto $X \subset R^n$ una aplicación $f: X \longrightarrow R^m$ está determinada por m aplicaciones $f_i: X \longrightarrow R^1$ de X en la recta real R^1, tales que

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) \qquad \text{(II. 1)}$$

para todo $x \in X$. Es decir, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las coordenadas de $x \in X$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ las de $y \in R^m$, la aplicación f define las m funciones reales

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad \text{(II. 2)}$$

Recíprocamente, m funciones reales del tipo (II. 2) definen una aplicación $f: X \longrightarrow R^m$.

Definición II. 7. Una función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se dice que es de clase C^r (r entero $\geqslant 0$) en el subconjunto X de R^n si existen y son continuas todas las derivadas parciales de F hasta el orden r inclusive, en todo punto de X.

Se dice también: a) Que es de clase C^0 si es continua en X; b) que es de clase C^∞ si admite en X y son continuas las derivadas parciales de cualquier orden; c) que es de clase C^ω o analítica, si en un entorno de cada punto de X admite un desarrollo en serie de potencias absolutamente convergente.

Definición II. 8. Una aplicación $f: X \longrightarrow R^m$ de un abierto X de R^n en R^m se dice que es de clase C^r (respectivamente de clase C^∞ o analítica), cuando son de clase C^r (respectivamente de clase C^∞ o analíticas) en X las aplicaciones $f_i : X \longrightarrow R^1$ definidas por f, o sea, las funciones (II. 2).

Para abreviar, diremos que una aplicación es diferenciable si es de clase C^1.

Definición II. 9. Se llama matriz jacobiana de una aplicación diferenciable $f: X \longrightarrow R^m$ (X = abierto de R^n) a la matriz de las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$. Si $n \leq m$ y la matriz jacobiana tiene característica n en todos los puntos de X, la aplicación se llama regular en X.

Definición II. 10. Sean dos abiertos $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación diferenciable. Si existe la inversa $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ y además ella es también diferenciable, se dice que f es un difeomorfismo de X en Y.

En muchos libros de Análisis (Apostol, Mathematical Analysis, p. 143-144; Rey Pastor - Pi Calleja - Trejo, vol. II, p. 163) puede verse la demostración del siguiente teorema sobre funciones inversas:

Teorema II. 1.

Sean X, Y dos abiertos de R^n. Si la aplicación $f: X \longrightarrow Y$ es diferenciable y el jacobiano de la misma no es nulo en el entorno de un punto $x_0 \in X$, existe entonces un entorno U de x_0 tal que la restricción $f: U \longrightarrow f(U)$ es un difeomorfismo.

Recordemos que el jacobiano es el determinante de las derivadas parciales $J(f) = (\partial f_i / \partial x_j)$ y recordemos también las relaciones

$$J(g \circ f) = J(g).J(f) \quad , \quad J(f^{-1}) = \left[J(f)\right]^{-1} \qquad \text{(II. 3)}$$

Es interesante observar que el teorema II. 1 asegura únicamente un difeomorfismo "local", en un entorno de cada punto para el cual sea $J(f) \neq 0$. Puede ocurrir que aun siendo $J(f) \neq 0$ en todo punto de X, la $f: X \longrightarrow Y$ no resulte biyectiva en todo X. Por ejemplo, sea $f: R^2 \longrightarrow R^2$ definida por

$$y_1 = e^{x_1} \cos x_2 \quad , \quad y_2 = e^{x_1} \operatorname{sen} x_2$$

Es $J(f) = e^{2x_1} \neq 0$. Sin embargo no es biyectiva, pues a los puntos $(x, x_2 + 2k\pi)$, k = entero, corresponde el mismo (y_1, y_2).

También vamos a utilizar el siguiente y clásico teorema de las funciones implícitas, cuya demostración puede verse en los mismos lugares citados:

Teorema II. 2.

Indiquemos con $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a los puntos de R^n y por $y(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ a los de R^m. Sea U_{n+m} un abierto de $R^n \times R^m$ y $f: U_{m+n} \longrightarrow R^m$ una aplicación de clase C^r $(r > 0)$. Sea $p(x^o, y^o) = p(x_1^o, x_2^o, \ldots$ $\ldots, x_n^o, y_1^o, y_2^o, \ldots, y_m^o)$ un punto de U_{n+m} para el cual sea $f(p) = 0$ y el determinante jacobiano $J(\partial f / \partial y)$ en p sea $\neq 0$. En estas condiciones, existe un entorno abierto V_n de x^o en R^n y una aplicación $g: V_n \longrightarrow R^m$, tales que:

a) g es de clase C^r;

b) $g(x^o) = y^o$;

c) $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in V_n$.

5. ESPACIOS PRODUCTO.

Sean E_1, E_2 dos espacios topológicos. Consideremos el conjunto cuyos elementos son los pares (x_1, x_2) con $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Este conjunto se llama el producto directo de los conjuntos que constituyen E_1 y E_2. Para introducir en el mismo una topologia se definen los abiertos de la siguiente manera. W será un abierto si cualquiera de sus puntos pertenece a un producto directo de abiertos de E_1 y E_2 respectivamente, el cual producto esté contenido integramente en W.

Estos abiertos, incluyendo el conjunto vacio, satisfacen a los axiomas de espacio topológico (N° 1). El espacio topológico así obtenido se representa por $E_1 \times E_2$ y se llama <u>producto</u> de E_1 y E_2.

Teorema II. 3.

<u>La aplicación</u> $p: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ <u>definida por</u> $p(x_1, x_2) = x_1$, <u>con</u> $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, <u>es continua</u>.

En efecto, si U es un abierto de E_1, su imagen inversa $p^{-1}(U)$ es el conjunto de pares (x_1, x_2) tales que $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, o sea $p^{-1}(U) = U \times E_2$ que, por definición, es un abierto de $E_1 \times E_2$.

Análogamente, también es continua la aplicación $q: E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$ definida por $q(x_1, x_2) = x_2$. Estas aplicaciones se llaman las <u>proyecciones</u> de $E_1 \times E_2$ sobre E_1 y E_2 respectivamente.

III. PRELIMINARES ALGEBRAICOS

1. CATEGORIAS.

Se utiliza la palabra "clase" para indicar un concepto más general que el de conjunto. Las operaciones con clases serán las mismas que para conjuntos, pero se podrán considerar otras más amplias; por ejemplo "la clase de todas las clases parciales de una clase". Desde luego, todo conjunto es una clase.

Definición III. 1. Categoría es una clase $\mathbb{C}$ de objetos $A, B, C, \ldots$ con los siguientes axiomas:

I. A todo par de objetos $A, B \in \mathbb{C}$ le está asignado un conjunto (que puede ser vacio) que se indica con $\mathrm{Hom}(A,B)$, cuyos elementos se llaman morfismos (u homomorfismos). Si $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, se escribe $f: A \longrightarrow B$.

II. Para toda terna A, B, C está definida la composición de morfismos $\mathrm{Hom}(A,B) \times \mathrm{Hom}(B,C) = \mathrm{Hom}(A,C)$, de manera que si existen $f \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}(B,C)$, existe también el morfismo compuesto $g \circ f \in \mathrm{Hom}(A,C)$, el cual satisface a los siguientes axiomas:

II_1. Dados los morfismos $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$, se verifica

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f .$$

II_2. Para todo $A \in \mathbb{C}$ existe un morfismo $e_A : A \longrightarrow A$ tal que $e_A \circ f = f$ para todo morfismo $f: X \longrightarrow A$ y $f \circ e_A = f$ para todo morfismo $f: A \longrightarrow X$.

El morfismo e_A se llama la identidad de A en A.

Si se tienen los morfismos f, g, f', g' que actuan como indica el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ B' \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd} \qquad \text{(III. 1)}$$

y se cumple que $g \circ f = g' \circ f'$, se dice que el diagrama (III. 1) es conmutativo.

Ejemplos.

1. Categoria de todos los conjuntos y aplicaciones cualesquiera. Objetos = conjuntos cualesquiera. Morfismos = aplicaciones cualesquiera entre dos conjuntos.

Si se consideran solamente aplicaciones biyectivas se tiene una subcategoría.

2. Categoria de los grupos. Objetos = grupos. Morfismos = homomorfismos entre grupos.

3. Categoria de los espacios topológicos. Objetos = espacios topológicos. Morfismos = aplicaciones continuas entre ellos. Si los morfismos son los homeomorfismos, se tiene una subcategoria.

4. Categoria de los abiertos de un espacio topologico. Objeto = abiertos de un espacio topológico dado E. Morfismos = $Hom(A,B)$ se compone de un solo elemento, que es la inyección natural $A \longrightarrow B$ si $A \subset B$ y es el conjunto vacio si A no está contenido en B.

5. Categoria de las funciones numéricas. Objetos = aplicaciones de un conjunto X en R^1. Dar un objeto significa dar el conjunto X; entonces el objeto A está constituido por todas las aplicaciones $X \longrightarrow R^1$. Pondremos $A\left\{X \longrightarrow R^1\right\}$.

Morfismos. Sean dos objetos $A\left\{X \longrightarrow R^1\right\}$, $B\left\{Y \longrightarrow R^1\right\}$. El conjunto $Hom(A,B)$ sólo está definido si $X \subset Y$ y entonces $Hom(A,B)$ consta de un solo elemento: la restricción a X de las aplicaciones $Y \longrightarrow R^1$.

De igual manera, si E es un espacio topológico y $X \subset E$, considerando solamente las aplicaciones $X \longrightarrow R^1$ nulas fuera de un compacto de E, con los mismos morfismos anteriores, se tiene la categoria de las funciones numéricas en E, nulas fuera de un compacto.

6. <u>Categoria de las funciones de clase C^r con valores reales</u>. Consideremos conjuntos $X, Y, \ldots$ de R^n. Objetos = las aplicaciones de clase C^r de un conjunto X en R^1. Dar un objeto A significa dar el conjunto X; el objeto $A\{X \longrightarrow R^1\}$ está constituido entonces por todas las aplicaciones $X \longrightarrow R^1$ de clase C^r.

Morfismos: Igual que en caso anterior, siendo $A\{X \longrightarrow R^1\}$, $B\{Y \longrightarrow R^1\}$, el conjunto $\mathrm{Hom}(A,B)$ solamente está definido si $X \subset Y$ y entonces $\mathrm{Hom}(A,B)$ consta de un único elemento, que es la restricción a X de las aplicaciones $Y \longrightarrow R^1$.

Para $r = 0$ se tiene la categoria de las funciones continuas con valores reales.

7. <u>Categoria de las aplicaciones continuas</u>. Objetos = las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos. Dar un objeto A equivale a dar un par (M, N) de espacios topológicos; el objeto $A(M, N)$ es entonces el conjunto de las aplicaciones continuas entre ellos.

Morfismos: Si $A(M, N)$, $B(M', N')$ son dos objetos, el conjunto $\mathrm{Hom}(A,B)$ solamente está definido si $M' \subset M$ y $N = N'$, en cuyo caso $\mathrm{Hom}(A,B)$ es la restricción a M' de las aplicaciones continuas $M \longrightarrow N$.

Si se sustituyen las aplicaciones continuas por aplicaciones biyectivas, se tiene la categoria de las aplicaciones biyectivas entre espacios topológicos.

2. FUNCTORES.

Definición III. 2. Un <u>functor covariante</u> de una categoria $\mathfrak{C}$ en una categoria $\mathfrak{C}'$, es una aplicación ϕ que a cada objeto $A \in \mathfrak{C}$ hace corresponder un objeto $\phi(A) \in \mathfrak{C}'$

y a cada morfismo $f: A \longrightarrow B$ de $\mathfrak{C}$ un morfismo

$$\Phi(f): \Phi(A) \longrightarrow \Phi(B) \qquad \text{(III. 2)}$$

de $\mathfrak{C}'$, con las siguientes condiciones:

1. $\Phi(e_A) = e_{\Phi(A)}$;
2. Si $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, entonces

$$\Phi(g \circ f) = \Phi(g) \circ \Phi(f) . \qquad \text{(III. 3)}$$

Si (III. 2) se sustituye por

$$\Phi(f): \Phi(B) \longrightarrow \Phi(A) \qquad \text{(III. 4)}$$

y (III. 3) por

$$\Phi(g \circ f) = \Phi(f) \circ \Phi(g) \qquad \text{(III. 5)}$$

se tiene la definición de functor contravariante.

Ejemplos.

1. Sea $\mathfrak{C}$ la categoria de las aplicaciones biyectivas y $\mathfrak{C}'$ la de las aplicaciones continuas entre espacios topológicos (Ejemplo 7 del N° 1). Un objeto de $\mathfrak{C}$ es el conjunto de aplicaciones biyectivas entre dos espacios topológicos M, N, sea $(M, N)_b$. Un objeto de $\mathfrak{C}'$ será $(M, N)_c$ = conjunto de aplicaciones continuas $M \longrightarrow N$. Definamos

$$\Phi((M, N)_b) = (M, N)_c .$$

Un morfismo $f: (M, N)_b \longrightarrow (M', N')_b$ solamente está definido si $M' \subset M$, $N' = N$ y entonces f es la restricción a (M', N) de las aplicaciones biyectivas entre M y N. Se define $\Phi(f)$ como la restricción a (M', N) de las aplicaciones continuas entre M y N. Es evidente que se trata de un functor covariante.

2. Sea $\mathbb{C}_E$ = categoria de los abiertos del espacio topológico E. (Ejemplo 4 del N° 1). Sea $\mathbb{C}_f$ = categoria de las funciones continuas de valores reales (Ejemplo 6 del N° 1).

Para todo abierto U de E definimos $\Phi(U)$ = conjunto de las funciones continuas $U \longrightarrow R^1$. Para el morfismo $f: U \longrightarrow V$ (solamente definido si $U \subset V$, en cuyo caso es la inyección natural $U \longrightarrow V$) se define $\Phi(f)$ = restricción a U de las funciones continuas sobre V, o sea, a cada función de $\Phi(V)$ corresponde su restricción a U, que es una función de $\Phi(U)$. Es decir, el orden de actuación es $\Phi(f): \Phi(V) \longrightarrow \Phi(U)$. Se trata por tanto de un functor contravariante.

3. **PRE - HACES.**

Sea $\mathbb{C}_E$ la categoria de los abiertos de un espacio topológico E (Ejemplo 4, N° 1).

Definición III. 3. Dada una categoria cualquiera $\mathbb{C}$ y un espacio topológico E, se llama pre-haz de base E y de valores en $\mathbb{C}$, a todo functor contravariante de $\mathbb{C}_E$ en $\mathbb{C}$.

Es decir, un pre-haz $\mathcal{F}^*$ hace corresponder a todo abierto $U \subset E$ un objeto $\mathcal{F}^*(U) \in \mathbb{C}$ y a todo par U, V tal que $U \subset V$, un morfismo

$$r_U^V : \mathcal{F}^*(V) \longrightarrow \mathcal{F}^*(U)$$

con las propiedades:

1. r_U^U = identidad, cualquiera que sea U.
2. Si $U \subset V \subset W$, es

$$r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$$

Se dice que r_U^V es la <u>restricción</u> de $\mathcal{F}^*(V)$ a $\mathcal{F}^*(U)$.

Un ejemplo de pre-haz es el ejemplo 2 del número anterior, el cual se llama el pre-haz de las funciones continuas sobre E .

4. HACES.

Definición III.4. Un pre-haz sobre el espacio topológico E se dice que es un <u>haz</u> $\mathcal{F}$ sobre E de valores en una categoria $\mathfrak{C}$, cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. Sea $\{U_i\}$ una familia cualquiera de abiertos de E, cuya unión sea el abierto U. Sean, s, t dos elementos de $\mathcal{F}(U)$. Si

$$r^U_{U_i}\ s = r^U_{U_i}\ t$$

para todos los U_i, entonces es $s = t$.

2. Con la misma notación anterior, si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ y para i, j cuales-quieras las restricciones de s_i, s_j a $U_i \cap U_j$ son iguales, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ cuya restricción a U_i es s_i para todo i.

Según 1 el elementos s es único.

<u>Ejemplos</u>.

1. El pre-haz de las funciones continuas sobre E es un haz.

2. Sea $E = R^n$ y $\mathfrak{C}$ la categoria de las aplicaciones $R^n \longrightarrow R^1$ de clase C^r (Ejemplo 6 N° 1). Para todo $U \subset R^n$ sea $\mathcal{F}(U)$ el conjunto de las funciones $U \longrightarrow R^1$ de clase C^r. Resulta que $\mathcal{F}$ es un haz, llamado el haz de las funciones de clase C^r sobre R^n.

3. Sea $\mathfrak{C}$ la categoria de las aplicaciones numéricas de E. Si a todo $U \subset E$ se le hace corresponder el conjunto $\mathcal{F}(U)$ de las aplicaciones numéricas $U \longrightarrow R^1$, se tiene el haz de las aplicaciones numéricas de E. Se llama también el haz de las funciones numéricas sobre E.

Imponiendo restricciones a las aplicaciones numéricas $U \longrightarrow R^1$, se tienen distintos haces de funciones numéricas sobre E.

4. Dada una aplicación continua $f: E \longrightarrow R^1$, se dice que tiene un máximo en el punto $x \in E$, si existe un entorno de x para cuyos puntos y valga $f(y) < f(x)$. A cada abierto $U \subset E$ hagamos corresponder el conjunto $\mathcal{F}_1(U)$ de las aplicaciones $U \longrightarrow R^1$ que tengan a lo sumo un máximo en U. Con la restricción usual r_U^V si $U \subset V$, estos conjuntos $\mathcal{F}_1(U)$ forman un pre-haz. Sin embargo no forman haz, pues puede no cumplirse la condición segunda.

5. Sea $\mathbb{C}$ la categoría de las funciones definidas en E, nulas fuera de un compacto de E (Ejemplo 5 N^o 1). A cada abierto $U \subset E$ se le hace corresponder el conjunto $\mathcal{F}_1(U)$ de las funciones de $\mathbb{C}$ definidas en U. Es un pre-haz, pero no un haz, pues tomando una familia $\{U_i\}$ que cubra E y para cada U_i la función característica (igual a 1 en U_i e igual a cero fuera de U_i), la única función cuya restricción a todos los U_i es dicha función característica es la constante 1, que no pertenece a $\mathbb{C}$.

IV. VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. VARIEDADES DIFERENCIABLES.

Definición IV. 1. Una variedad diferenciable de clase C^r $(r \geqslant 1)$ y dimensión n es un par $(E, \mathfrak{F})$ compuesto de un espacio topológico separado y de base numerable E y de un haz de funciones numéricas $\mathfrak{F}$ sobre E, sujetos al siguiente axioma:

"Para todo punto $p \in E$, existe un entorno abierto U de p y un homeomorfismo φ de U sobre un abierto D de R^n que transforma la restricción del haz $\mathfrak{F}$ a U sobre el haz de las funciones de clase C^r sobre D".

Por restricción de $\mathfrak{F}$ a U se entiende el haz de base U que a todo abierto U' de U asocia el conjunto $\mathfrak{F}(U')$. Entonces el axioma anterior significa que si $f \in \mathfrak{F}(U)$ es $f \circ \varphi^{-1} \in C^r$ y, recíprocamente, si $h \in C^r$ está definida sobre D, entonces es $h \circ \varphi \in \mathfrak{F}(U)$.

Cuando a un espacio topológico separado y de base numerable se le asigna un haz $\mathfrak{F}$ y una familia de homeomorfismos en las condiciones anteriores, se dice que se ha dado al espacio una estructura de variedad diferenciable.

Sin necesidad de repetirlo cada vez, supondremos siempre $r \geqslant 1$.

Los puntos de E se llaman también puntos de la variedad diferenciable $V(E, \mathfrak{F})$, de manera que en lo sucesivo será equivalente escribir $p \in E$ ó $p \in V$.

Definición IV. 2. Un par (U, φ) de un abierto y un homeomorfismo, en las condiciones que figuran en la definición de variedad diferenciable, se dice que constituye una carta de U.

Si (U_i, φ_i) es un conjunto de cartas que cubren toda la variedad diferenciable, se dice que constituyen un atlas de la misma.

Dada una carta (U, φ), cada punto $p \in U$ queda determinado por las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del punto $\varphi(p) \in R^n$. Cada una de estas coordenadas es una función de p. El conjunto de esas funciones constituye un sistema de coordenadas locales para U, o sea, para un entorno de p.

Sean (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) dos cartas cuyos abiertos U_1, U_2 no tengan intersección vacia; sea $p \in U_1 \cap U_2 = W$. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_n$ las coordenadas locales de p en la primera y segunda carta respectivamente. La función $y_i(y)$ que a cada punto $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ hace corresponder su i-ésima coordenada es de clase C^r (para cualquier r); por tanto $y_i \circ \varphi_2$ pertenece a $\mathcal{F}(W)$. En consecuencia $(y_i \circ \varphi_2) \circ \varphi_1^{-1}$ es de clase C^r sobre $\varphi_1(W)$. Estas funciones

$$y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (IV.1)$$

son las que definen el cambio de coordenadas $x \longrightarrow y$ de la primera carta en la segunda.

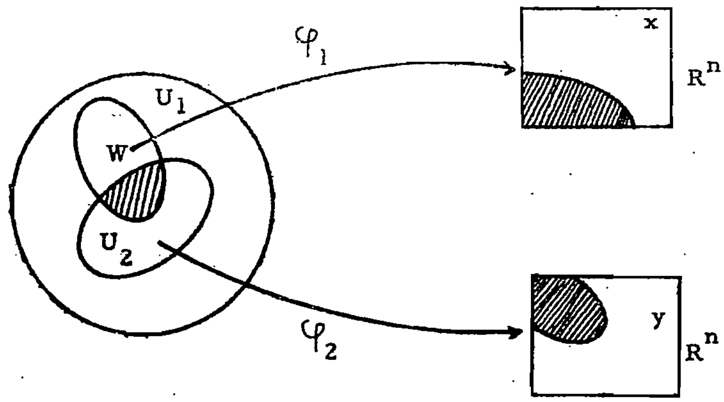
Analogamente, las funciones $(x_i \circ \varphi_1) \circ \varphi_2^{-1}$, o sea

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (IV.1)^*$$

que definen el cambio de coordenadas $y \longrightarrow x$ de la carta (U_2, φ_2) en la (U_1, φ_1) son también de clase C^r.

Siendo las funciones (IV.1) y (IV.1)* de clase C^r con $r \geqslant 1$, los determinantes jacobianos $J = \left| \partial y_i / \partial x_j \right|$, $J^{-1} = \left| \partial x_i / \partial y_j \right|$ existen en W y como además su producto debe ser igual a la unidad, ambos deben ser distintos de cero en W.

Reciprocamente, supuesto un espacio topológico E en la situación anterior, de manera que los cambios de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ sean siempre de clase C^r, asignando a cada U_i el conjunto de las funciones f tales que $f \circ \varphi_i^{-1}$ sea de clase C^r,



tendremos sobre E un haz cuyas restricciones a U_i son llevadas sobre los haces de funciones de clase C^r sobre $\varphi_i(U_i)$.

Esto permite dar otra definición de variedad diferenciable, equivalente a la Definición IV. 1., que muchas veces es útil, a saber:

Definición IV. 1^*. Una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión n es un espacio topológico separado y de base numerable E que admite un cubrimiento por abiertos $\{U_\alpha\}$ y una familia de homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow D_\alpha$ = abiertos de R^n, tales que si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, las coordenadas x_i del punto $x = \varphi_\alpha(p)$ y las y_i del punto $y = \varphi_\beta(p)$ están ligadas por funciones $y_i = y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de clase C^r $(r \geqslant 1)$ y determinante jacobiano distinto de cero. Es decir, las aplicaciones $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ en $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ son de clase C^r y jacobiano no nulo.

Naturalmente que por la simetría de la definición, también las funciones $x_i = x_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son de clase C^r y jacobiano no nulo.

Esta definición depende del atlas $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ definido sobre E. Para ser más precisos, hay que definir una equivalencia entre atlas y considerar como idénticas dos variedades con el mismo espacio base E y atlas equivalentes. Se procede completando la Definición IV. 1^* con las siguientes.

Dos atlas de clase C^r sobre E se dice que son equivalentes si su unión es también un atlas de clase C^r. Es decir, $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ es equivalente a $\{U'_\beta, \varphi'_\beta\}$ si para cada par de índices α, β la aplicación $\varphi'_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ es un difeomorfismo de clase C^r de $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U'_\beta)$ sobre $\varphi'_\beta(U_\alpha \cap U'_\beta)$.

Dos variedades diferenciables según la Definición IV. 1* sobre un mismo espacio topológico E cuyos atlas sean equivalentes se dice que son idénticas o que se trata de una misma variedad diferenciable.

2. VARIEDADES DIFERENCIABLES ISOMORFICAS.

Según la Definición IV. 1 un mismo espacio topológico E puede ser sostén de variedades diferenciables diferentes: basta cambiar el haz $\mathfrak{F}$.

De manera general, dada $(E, \mathfrak{F})$ basta transformarla por un homeomorfismo $\varphi : E \longrightarrow E$ que no sea un difeomorfismo, para tener una variedad diferenciable diferente. En este caso, el haz $\mathfrak{F}'$ es el que asigna, a cada abierto $\varphi(U)$, el conjunto de las funciones $f \circ \varphi^{-1}$, con $f \in \mathfrak{F}(U)$.

Sea, por ejemplo, $E = R^1$ y $\mathfrak{F}$ el haz de las funciones de clase C^r de la abscisa x de R^1. Sea $\varphi : x \longrightarrow x^3 = t$. Toda $f(x)$ queda convertida en $f(t^{1/3})$. Si $f(x)$ es de clase C^r, la función $f(t^{1/3})$, como función de t, puede que solamente sea de clase C^0 en todo abierto que contenga el origen. Luego $(R^1, \mathfrak{F})$ es una variedad diferenciable diferente de la $(R^1, \mathfrak{F}')$, siendo $\mathfrak{F}'$ = haz de las funciones de clase C^r de $t^{1/3}$, consideradas como funciones de t.

En este ejemplo, aún siendo las variedades $(R^1, \mathfrak{F})$ y $(R^1, \mathfrak{F}')$ diferentes, existe el homeomorfismo φ que transforma una en otra. Este hecho conduce a introducir la siguiente

Definición IV. 3. Dos variedades diferenciables $(E, \mathfrak{F})$ y $(E', \mathfrak{F}')$ se dice que son <u>isomórficas</u> o <u>equivalentes</u> (aunque pueden no ser iguales), si existe un homeomor fismos $\varphi : E \longrightarrow E'$ tal que, para toda $f \in \mathcal{F}(U)$, sea $f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{F}'(\varphi(U))$ y reciprocamente, para toda $f' \in \mathcal{F}'(U')$, sea $f' \circ \varphi \in \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U'))$.

Es dificial encontrar variedades diferenciables que tengan por base un mismo espacio topológico y que no sean isomorficas. El primer ejemplo fué dado por J. Milnor (Ann. of Math. 1956, 64, 399-405) al probar que la 7-esfera admite varias estructuras diferenciables no isomórficas entre si.

Se sabe poco acerca de las condiciones que debe cumplir un espacio topológico para que pueda ser base de variedades diferenciables no isomórficas. Ver: M. A. Kervaire, Amanifold which does not admit any differentiable structure, Comm. Math. Helvetici, 34, 1960, 257-270.

3. SUBVARIEDADES DIFERENCIABLES.

Sea V una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión n.

Definición IV.4. Una variedad diferenciable V_1 se dice que es una subvariedad de V, de clase C^s $(s \leq r)$ y de dimensión m, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) Para todo punto $p \in V_1$, existe un sistema de coordenadas locales $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definidas en un entorno abierto U de V, que contiene a p, respecto del cual $U \cap V_1$ esta representado por ecuaciones de la forma

$$x_{m+1} = f_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \quad x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (IV.2)$$

donde las funciones de los segundos miembros son todas de clase C^s.

b) Los abiertos de V_1 son las intersecciones $U \cap V_1$ (U = abiertos de V). Los homeomorfismos de estos abiertos en abiertos de R^m son los

$$\varphi : p \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in R^m$$

y el haz $\mathfrak{F}_1$ de V_1 es la restricción de $\mathfrak{F}$ a V_1.

La subvariedad V_1 es entonces de clase C^s, puesto que si $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^r$, resulta $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, f_{m+1}, \ldots, f_n) \in C^s$.

Si $m = n$, puede prescindirse de la condición a). En este caso hay que observar que a todo subconjunto abierto de V se le puede asignar una estructura de variedad diferenciable de la misma clase y dimensión que V; basta tomar los mismos homeomorfismos y el mismo haz que definen a V.

Ejemplos.

1. El plano R^2 con el haz de funciones analiticas sobre el mismo, es una variedad diferenciable analitica.

Para la curva $y^3 - x^4 = 0$, el sistema (IV.2) se reduce a $y = x^{4/3}$ que es de clase C^1 (pues en el origen $y'' = \infty$). Por tanto $y^3 - x^4 = 0$ es una subvariedad de R^2 de dimensión uno y clase C^1.

Obsérvese que la misma curva $y^3 - x^4 = 0$ por la aplicación $(x, y) \longrightarrow x$ (proyección sobre el eje x) es topológicamente equivalente a R^1. Por tanto, tomando sobre la curva la topologia y el haz de funciones analiticas de una variable de R^1 trasladados por ese homeomorfismo, resulta analitica. Vemos así que son dos cosas distintas considerar una variedad por si misma que como subvariedad de otra.

2. Sea $\Gamma : y = f(x)$ una curva, como la clásica de Weiertrass, que sea continua

pero sin tangente en ningún punto. Como subvariedad de R^2 no es diferenciable. En efecto, por una aplicación $\varphi : R^2 \longrightarrow R'^2$ la curva pasa a $\varphi(\Gamma): y' = F(x')$. Si φ es un cambio de coordenadas locales, φ^{-1} debe transformar las funciones de clase C^r en funciones de clase C^r; por tanto $y = f(x)$ deberia ser de clase C^r. En cambio, como conjunto de puntos, por ser Γ homeomorfa a R^1, por proyección sobre el eje x, puede asignársele una estructura de variedad diferenciable analitica.

4. PRODUCTO DE VARIEDADES DIFERENCIABLES.

Ya sabemos lo que es el producto $E_1 \times E_2$ de dos espacios topológicos, y lo que son las proyecciones $p : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_1$ y $q : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$ (§ 1, Nº 7). Dado un haz de funciones $\mathcal{F}_1$ sobre E_1, a cada función $f_1 \in \mathcal{F}_1(U_1)$, U_1 = abierto de E_1, corresponde una función $f_1 \circ p$ definida sobre el abierto $p^{-1}(U_1)$ de $E_1 \times E_2$. Esta correspondencia transforma el haz $\mathcal{F}_1$ sobre E_1, en un haz $p^{-1}\mathcal{F}_1$ sobre $E_1 \times E_2$. Analogamente, si $\mathcal{F}_2$ es un haz sobre E_2, a cada función $f_2 \in \mathcal{F}_2(U_2)$, U_2 = abierto de E_2, corresponde una función $f_2 \circ q$ sobre el abierto $q^{-1}(U_2)$ de $E_1 \times E_2$ y esta correspondencia transforma $\mathcal{F}_2$ en un haz $q^{-1}\mathcal{F}_2$ sobre $E_1 \times E_2$.

Definición IV.5. Dadas dos variedades diferenciables $(E_1, \mathcal{F}_1)$ y $(E_2, \mathcal{F}_2)$, se llama <u>variedad producto</u> a la que tiene por espacio topológico base el producto $E_1 \times E_2$ y por haz de funciones la unión de los $p^{-1}\mathcal{F}_1$ y $q^{-1}\mathcal{F}_2$ antes definidos.

Evidentemente la variedad producto es otra variedad diferenciable cuya dimensión es la suma de las dimensiones y cuya clase es igual a la menor de las clases de los espacios factores.

5. VARIEDADES DIFERENCIABLES CON BORDE.

Representemos por R_+^n a la parte de R^n para la cual es $x_n \geqslant 0$. Con la topologia inducida por la de R^n, se tiene definida en R_+^n una estructura de espacio topológico.

Si en la definición de variedad diferenciable se sustituye R^n por R_+^n, se tiene la definición de variedad diferenciable con borde.

El conjunto de puntos de una variedad diferenciable con borde V, para los cuales existe una carta que los representa en puntos con $x_n = 0$, constituyen el borde de V y se representa por ∂V.

Es inmediato comprobar que ∂V es una subvariedad diferenciable de V de dimensión $n-1$.

6. ORIENTABILIDAD.

Consideremos la definición IV. 1* de variedad diferenciable V. Supongamos que V sea conexa. Supuesta cubierta por un atlas $\{U_i, \varphi_i\}$ llamemos $\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ a las transformaciones de coordenadas entre cartas del atlas para las cuales sea $U_i \cap U_j \neq 0$. Ya observamos en § 4, N° 1 que los jacobianos de estas transformaciones son siempre distintos de cero.

Definición IV. 6. Si existe un atlas $\{U_i, \varphi_i\}$ tal que todas las ψ_{ij} tengan el jacobiano positivo, en los correspondientes abiertos $U_i \cap U_j$, la variedad V se llama orientable. En caso contrario se llama no - orientable.

Supongamos que V sea orientable y se $A = \{U_i, \varphi_i\}$ un atlas orientado. Sea (U, φ) una carta local cualquiera de V tal que U sea conexo y pueda cubrirse por un número finito de abiertos de A. Consideremos dos abiertos de A que tengan punto común con U; sean U_1 y U_α. Pongamos $U \cap U_1 = U_{o1} \neq 0$, $U \cap U_\alpha = U_{o\alpha} \neq$ $\neq 0$. Queremos demostrar que el jacobiano $J(\varphi_o \varphi_1^{-1})$ en cualquier punto $p \in U_{o1}$

tiene el mismo signo que el jacobiano $J(\varphi \circ \varphi_{\alpha}^{-1})$ en cualquier punto $q \in U_{o\alpha}$. Consideremos un camino $\Gamma : p = p(t)$ (= imagen homeomórfica del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$) contenido en U tal que $p(0) = p$, $p(1) = q$. Este camino Γ puede cubrirse con un número finito de abiertos de A (puesto que todo U lo puede ser); supongamos que sean $U_1, U_2, \ldots, U_m = U_{\alpha}$. Cambiando si es preciso la numeración de los índices, podemos suponer que sobre Γ existen los puntos $p_i \in U_i \cap U_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ tales que los arcos $P_i P_{i+1}$ de Γ esten contenidos en una misma componente conexa de $U \cap U_{i+1}$. El jacobiano $J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})$ tiene el mismo signo en p y en todos los puntos de la componente conexa de $U \cap U_1$ que lo contiene (puesto que no se anula en este abierto); en particular el mismo signo que en $p_1 \in U_1 \cap U_2$. En este punto p es $\varphi \circ \varphi_2^{-1} = (\varphi \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})$ y por tanto $J(\varphi \circ \varphi_2^{-1})_p = J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})_p \cdot J(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})_p$. Como $J(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}) > 0$, por suponer el atlas A orientado, resulta

$$\text{signo } J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})_{p_1} = \text{signo } J(\varphi \circ \varphi_2^{-1})_{p_1}$$
$$= \text{signo } J(\varphi \circ \varphi_2^{-1})_{p_2}$$

la última igualdad por pertenecer p_1 y p_2 a la misma componente conexa de $U \cap U_2$.

Analogamente, en el punto p_2 es $\varphi \circ \varphi_3^{-1} = (\varphi \circ \varphi_2^{-1}) \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1})$ y por tanto $J(\varphi \circ \varphi_3^{-1})_{p_2} = J(\varphi \circ \varphi_2^{-1})_{p_2} \cdot J(\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1})_{p_2}$. El jacobiano $J(\varphi_2 \circ \varphi_3^{-1})_{p_2}$ es positivo por suponer A orientado y por tanto

$$\text{signo } J(\varphi \circ \varphi_2^{-1})_{p_2} = \text{signo } J(\varphi \circ \varphi_3^{-1})_{p_2} = \text{signo } J(\varphi \circ \varphi_3^{-1})_{p_3},$$

la última igualdad por pertenecer p_2 y p_3 a la misma componente conexa de $U \cap U_3$. Prosiguiendo sucesivamente resulta el enunciado, o sea, $J(\varphi \circ \varphi_1^{-1})_p = J(\varphi \circ \varphi_{\alpha}^{-1})_q$.

Más generalmente, si $A' \{U'_i, \varphi'_i\}$ es otro atlas de V también orientado, queremos demostrar que los jacobianos $J(\varphi'_h \circ \varphi_i^{-1})$ de los cambios de coordenadas $\varphi'_h \circ \varphi_i^{-1}$ tienen todos el mismo signo, para todos los valores de h, i, en los pun tos en que están definidos, (o sea en los puntos para los cuales sea $U'_h \cap U_i \neq 0$). En efecto, dados dos puntos cualesquiera de V, sean, $p \in U'_1 \cap U_1$, $q \in U'_s \cap U_m$, se pueden unir por un camino Γ, el cual, por ser un conjunto compacto se puede cubrir por un número finito de abiertos de A'. Tomemos una sucesión de puntos $p = p_1$, $p_2, \ldots, p_h = q$ tales que $p_i \in U'_i \cap U'_{i+1}$, lo cual siempre es posible cambiando, si es preciso el nombre de los índices. Aplicando a cada U'_i y al atlas A el resultado anterior, resulta inmediatamente el enunciado.

Este hecho prueba que los atlas orientados de V se clasifican en dos clases, siendo de una misma clase los relacionados por cambios de coordenadas de jacobiano positivo y de distinta clase los relacionados por cambios de coordenadas de jacobiano negativo. Cada clase se dice que define una orientación de la variedad V.

De aquí se deduce un criterio que a veces es útil para decidir acerca de la no orientabilidad de una variedad diferenciable, a saber:

Teorema IV. 1.

Si una variedad diferenciable V tiene dos cartas locales (U, φ) y (U', φ') tales que $p \in U \cap U'$, $q \in U \cap U'$ y

$$\text{signo } J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_p \neq \text{signo } J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_q \qquad \text{(IV. 3)}$$

entonces V no es orientable.

Naturalmente que la hipótesis (IV. 3) solamente es posible si $U \cap U'$ no es conexo y p, q pertenecen a distinta componente conexa, puesto que el jacobiano de cualquier cambio de coordenadas locales es siempre distinto de cero.

Demostración. Supongamos que V fuera orientable y sea $\{U_i, \varphi_i\}$ un atlas orientado. Sean U_h, U_k abiertos del atlas tales que $p \in U_h$, $q \in U_k$. Puesto que p, q pertenecen a U', por el resultado demostrado ultimamente, es

$$\text{signo } J(\varphi' \circ \varphi_h^{-1})_p = \text{signo } J(\varphi' \circ \varphi_k^{-1})_q$$

y por pertenecer p, q a U, también

$$\text{signo } J(\varphi_h \circ \varphi^{-1})_p = \text{signo } J(\varphi_k \circ \varphi^{-1})_q .$$

Pero

$$J(\varphi' \circ \varphi_h^{-1})_p \cdot J(\varphi_h \circ \varphi^{-1})_p = J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_p$$

$$J(\varphi' \circ \varphi_k^{-1})_q \cdot J(\varphi_k \circ \varphi^{-1})_q = J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_q .$$

D estas igualdades y las dos anteriores se deduce signo $J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_p$ = signo $J(\varphi' \circ \varphi^{-1})_q$, contra lo supuesto.

Este criterio va a servir en el capítulo siguiente para demostrar que el espacio proyectivo real P_n no es orientable para n par.

Otra definición de orientabilidad. Otra manera, equivalente a la anterior de definir la orientabilidad de una variedad es la siguiente,basada en el concepto de pseudoescalar.

Definición IV.7. Se llama pseudoescalar sobre un variedad diferenciable V a todo elemento definido en cada carta local (U, φ) por una componente H, función de punto, tal que por un cambio de coordenadas $\varphi_1 \circ \varphi^{-1}$ se transforma según la ley

$$H_1 = \frac{J}{|J|} H \qquad \text{(IV.4)}$$

siendo $J = J(\varphi_1 \circ \varphi^{-1})$ el determinante jacobiano de la transformación de coordenadas.

Definición IV.8. Una variedad diferenciable V se dice que es orientable, si sobre ella existe un pseudoescalar ϵ tal que $\epsilon^2 = 1$.

Obsérvese que, como ϵ no puede anularse, por ser $\epsilon^2 = 1$, solamente pueden darse los casos $\epsilon = +1$, $\epsilon = -1$. Ambos casos corresponden a las dos orientaciones posibles de V.

Esta definición coincide con la anterior, pues si existe un atlas con todos los

$J > 0$, los pseudovectores son $+1$ o -1 (pues según (IV.4) esta definición es consistente para toda carta). Recíprocamente, si existe ϵ, tal que $\epsilon^2 = 1$, consideremos las cartas para las cuales es $\epsilon = +1$ (indiquemos sus bases con U_+) y aquellas para las cuales es $\epsilon = -1$ (indiquemos sus bases con U_-). En todas las U_- hagamos una permutación de coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_2, x_1, \ldots, x_n)$ con lo cual, en todas las cartas será $\epsilon = +1$. Este atlas es un atlas orientado según la Definición IV.6.

Ejemplos.

1. Atlas de la esfera S^2. Supongamos la esfera de radio unidad y utilicemos nomenclatura geográfica para mayor brevedad. Para representarla bastan dos cartas, a saber:

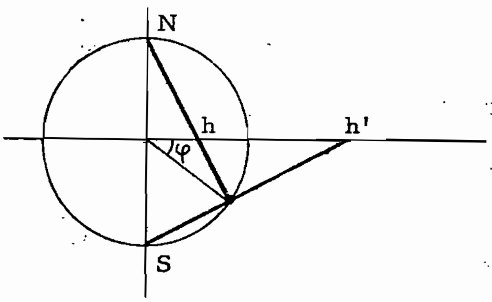
a) La proyección estereográfica sobre el plano del ecuador, desde el polo norte, de los puntos del hemisferio sur, más los del hemisferio norte de latitud $\varphi < 30^o$ N.

b) La proyección estereográfica sobre el plano del ecuador, desde el polo sur, de los puntos del hemisferio norte, más los del hemisferio sur de latitud $\varphi < 30^o$ S.

Las coordenadas x_1, x_2 de un punto $p(\theta, \varphi)$ por a) son

$$x_1 = h \cos \theta \quad , \quad x_2 = h \operatorname{sen} \theta$$

siendo h la distancia al centro del punto imagen de p.



Las coordenadas del mismo punto por b) son

$$y_1 = h' \cos \theta \quad , \quad y_2 = h' \operatorname{sen} \theta$$

Es fácil ver que $h\,h' = 1$. Por tanto, las fórmulas de transformación son

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \qquad\qquad y_1 = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

y por tanto el jacobiano vale

$$J = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

Vemos que tiene signo constante y por tanto que S^2 es orientable. Obsérvese que $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$, pues los únicos puntos en que es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ son los polos, que no pertenecen simultaneamente a las dos cartas.

2. La banda de Möbius. Se llama banda de Möbius al rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, con la relación de equivalencia

$$(0, y) \sim (a, b - y)$$

y la topologia inducida por la de R^2. Para fijar las ideas pongamos $a = 6$, $b = 2$ y consideremos los abiertos

$$U_1 : \quad 1 < x < 5 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \; ;$$

$$U_2 : \quad (0 \leqslant x < 2 \; , \; 0 \leqslant y \leqslant 2) \cup (4 < x \leqslant 6 \; , \; 0 \leqslant y \leqslant 2)$$

y las aplicaciones de ambos en $R^2(\xi, \eta)$

$$\varphi_1 : \text{ identidad }, \quad \xi = x \quad , \quad \eta = y \; ;$$

$$\varphi_2 : \quad \xi = 6 + x \quad , \quad \eta = 2 - y \quad \text{para} \quad (0 \leqslant x < 2, \; 0 \leqslant y \leqslant 2)$$

$$\xi = x \quad , \quad \eta = y \quad \text{para} \quad (4 < x \leqslant 6 \; , \; 0 \leqslant y \leqslant 2) .$$

Las dos cartas (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) cubren la banda. Consideremos el punto $A(x, y)$ con $1 < x < 2$ que pertenece a las dos cartas. Las coordenadas de $\varphi_1(A)$ son las mismas x, y y las de $\varphi_2(A)$ son $\xi = 6 + x$, $\eta = 2 - y$; por tanto

$$J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -1 .$$

Para el punto $B(x, y)$ con $4 < x < 5$, que también pertenece a las dos cartas, el cambio de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1$ es $\xi = x$, $\zeta = y$ y por tanto $J = 1$. En consecuencia, según el Teorema IV. 1 la banda de Möbius no es orientable.

La banda de Möbius es una superficie con borde. Si se considera el mismo rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ con las relaciones de equivalencia

$$(0, y) \sim (a, b - y) \qquad , \qquad (x, 0) \sim (x, b)$$

se tiene la llamada "botella de Klein", que es una superficie diferenciable sin borde. Hallar, como ejercicio, un atlas de la misma y probar que no es orientable.

7. ORIENTABILIDAD DE LAS VARIEDADES PRODUCTO.

Sean V_1 y V_2 dos variedades diferenciables y consideremos la variedad producto $V_1 \times V_2$. Si (x_i) es un sistema de coordenadas locales de V_1 en un entorno del punto p y (y_i) un sistema de coordenadas locales de V_2 en un entorno del punto q, el conjunto (x_i, y_i) es un sistema de coordenadas locales en un entorno de $(p, q) \in V_1 \times V_2$. Sea (x_i', y_i') otro sistema análogo de coordenadas locales. Es evidente la siguiente relación entre determinantes jacobianos:

$$\frac{\partial(x_1', x_2', \ldots, x_n', y_1', y_2', \ldots, y_m')}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \frac{\partial(x_1', \ldots, x_n')}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \frac{\partial(y_1', \ldots y_m')}{\partial(y_1, \ldots y_m)}$$

que escribiremos simbólicamente,

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \cdot \frac{\partial(y')}{\partial(y)} \qquad \text{(IV. 4)}$$

Supongamos que $V_1 \times V_2$ sea orientable. Entonces se puede elegir un atlas de

V_1 y uno de V_2 tales que el jacobiano (IV.4) sea siempre positivo. Fijando el punto q de coordenadas y_i, siempre se puede suponer que el jacobiano $\partial(y')/\partial(y)$ en q es positivo, pues en caso contrario se haria el cambio $y_1 \longrightarrow -y_1$, $x_1 \longrightarrow -x_1$, que cambia el signo de este jacobiano pero no el de (IV.4). Con esto, el primer factor $\partial(x')/\partial(x)$ debe ser siempre positivo, es decir, V_1 es orientable.

Análogamente, fijando p, resulta que el factor $\partial(y')/\partial(y)$ deberá ser siempre del mismo signo que $\partial(x')/\partial(x)$ (tomado en p) y por tanto V_2 es también orientable. Se tiene así el siguiente

Teorema IV.2.

Si la variedad diferenciable producto de otras dos es orientable, también lo son estas dos variedades.

Corolario. Si una variedad V_1 no es orientable, ninguna variedad producto $V_1 \times V_2$ es orientable.

V. EJEMPLOS DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. EL ESPACIO NUMERICO R^n.

El espacio R^n (§ 1, N° 3) es una variedad diferenciable analítica y, por tanto, de cualquier clase C^r. Basta tomar como homeomorfismos φ la identidad y como haz el de las funciones analíticas (o de clase C^r para cualquier r) sobre R^n.

Esta variedad diferenciable puede tener diferentes interpretaciones. Por ejemplo, el conjunto de las matrices de tipo $n \times m$ (n filas y m columnas) con elementos a_{ij} reales, puede identificarse con R^{nm} poniendo $a_{ij} = x_{m(i-1)+j}$. Se tiene así una topologia en el conjunto de dichas matrices y en base a ella una estructura de variedad diferenciable analitica.

Todo espacio vectorial de dimensión $\underline{n}$ sobre los reales, puede también considerarse como una variedad diferenciable de dimensión $\underline{n}$, con la identificación natural: vector de componentes x_i = punto de coordenadas x_i.

2. VARIEDADES REGULARES m-DIMENSIONALES EN R^n.

Sea M un conjunto de puntos de R^n con la topologia inducida por la de R^n. Supongamos que cada punto $x \in M$ tenga un entorno abierto $U(x) = U_n \cap M$ (U_n = abierto de R^n) que sea imagen de un abierto U_m de R^m ($m < n$) por una aplicación

$$f : U_m \longrightarrow U(x) \tag{V.1}$$

regular de clase C^r. Recordemos que "regular" significa que la matriz jacobiana de f tiene característica m.

En estas condiciones se dice que M es una variedad regular de dimensión m y clase C^r contenida en R^n.

Si $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son los puntos de R^n y $u(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ son los de R^m, las ecuaciones de f serán de la forma

$$x_i = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(V.2)}$$

y se llaman las ecuaciones de M en el entorno $U(x)$.

Por ser f una aplicación regular, el teorema II.1 de las funciones inversas nos dice que para cada par u^o, $f(u^o) = x^o$ existe un entorno de u^o en el cual se pueden despejar las u_i como funciones de m de las x_i. Suponiendo que estas sean las m primeras se tendrá, por tanto,

$$u_i = f_i^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad \text{(V.3)}$$

las cuales serán también funciones de clase C^r. Cada punto de M tiene por tanto un entorno difemorfo a un abierto de R^m. Asignando a M el haz de funciones de clase C^r sobre R^m inducido por (V.2) y (V.3), resulta asignada a M una estructura de variedad diferenciable de clase C^r.

Sustituyendo (V.3) en (V.2) resulta que las ecuaciones de M en el entorno $M \cap U_m$ son de la forma

$$x_{m+1} = \varphi_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad \text{(V.4)}$$

siendo las φ_h de clase C^r. Según la definición IV.4 se tiene así que M es una subvariedad diferenciable de R^n.

Consideremos ahora el conjunto de puntos de R^n cuyas coordenadas satisfacen a un sistema de ecuaciones de la forma

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad (m < n) \qquad \text{(V.5)}$$

tales que la matriz $(\partial F_i / \partial x_j)$ tenga caracteristica m.

Según Teorema II. 2 de las funciones implícitas, en un entorno de cada punto x^o que satisfaga (V.5), se podrán despejar m de las variables, sean $x_n, x_{n-1}, \ldots$ $\ldots, x_{n-m+1}$ en la forma

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-m}), \quad i = n-m+1, \ldots, n \qquad (V.6)$$

y por tanto se estará en la situación de las ecuaciones (V.4).

Se tiene así el siguiente

Teorema V. 1.

El conjunto de puntos de R^n cuyas coordenadas satisfacen a un sistema de ecuaciones de la forma (V.5), tal que la característica de la matriz $(\partial F_i / \partial x_j)$ sea m, constituye una subvariedad diferenciable de R^n de dimensión $n-m$.

La clase de esta subvariedad diferenciable, según el teorema II. 2, es la misma de las funciones F_i.

3. VARIEDADES DE LOS GRUPOS CLASICOS.

a) Grupo lineal general $GL(n, R)$. Es el grupo de las matrices $n \times n$ con elementos reales y determinante no nulo. A cada matriz (a_{ij}) corresponde un punto de R^{n^2} por la correspondencia $a_{ij} = x_{n(i-1)+j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, excluídos los puntos que satisfacen a la ecuación $\det(a_{ij}) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_{n^2}) = 0$

Por tanto, la variedad de $GL(n, R)$ es un subconjunto abierto de R^{n^2}. Por consiguiente, según lo dicho en § 4, N° 3, se le puede asignar una estructura de variedad diferenciable analitica, inducida por la de R^{n^2}. Diremos, más brevemente, que la variedad de $GL(n, R)$ es una subvariedad analitica de dimensión n^2 de R^{n^2}.

b) Grupo lineal especial $SL(n, R)$. Es el formado por las matrices $n \times n$ de elementos reales cuyo determinante es igual a la unidad. Su variedad es el conjunto de puntos de R^{n^2} cuyas coordenadas satisfacen la ecuación

$$\det(a_{ij}) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_{n^2}) = 1 \qquad \text{(V.7)}$$

No todas las derivadas parciales $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n^2)$ pueden ser nulas. En efecto, la función f es homogénea de grado n y por tanto, según la relación de Euler, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n^2} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n^2 f = n^2$$

lo que obliga a que algunas de las $\partial f/\partial x_i$, en todo punto de $f = 1$, sea distinta de cero. Por tanto, según el Teorema V.1, la variedad del grupo $SL(n, R)$ es una subvariedad diferenciable analitica de dimensión $n^2 - 1$ de R^{n^2}.

Los elementos a_{ij} de una matriz de $SL(n, R)$, aún cumpliendo la condición de que su determinante vale uno, no están acotados; es decir, la variedad $SL(n, R)$ no es compacta.

3) <u>El grupo ortogonal $0(n)$</u>. Es el grupo de las matrices $n \times n$ ortogonales, o sea, las matrices que cumplen

$$A\,A^t = E \qquad \text{(V.8)}$$

siendo A^t = matriz transpuesta de A y E = matriz unidad.

Las relaciones que deben cumplir los elementos de una matriz $A(a_{ij})$ para que sea ortogonal son

$$\sum_{h=1}^{h} a_{ih}\, a_{jh} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(V.9)}$$

siendo δ_{ij} los símbolos de Kronecker. Estas relaciones (V.9) son independientes. En efecto, para ver que pueden cumplirse todas menos una, consideremos: a) Caso $i = j = i_o$. Basta tomar la matriz que difiere solamente de E por tener el elemento diagonal de lugar i_o igual a $k \neq 1$; para esta matriz se cumplen todas las relaciones

(V.9) menos la correspondiente a $i = j = i_o$. b) Caso $i_o \neq j_o$. Consideremos la matriz

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccc} 1 \ddots 1 & & 0 & & 0 \\ \cdots & \text{sen}\,\alpha & \cdots & \cos\alpha & \cdots \\ 0 & & 1 \ddots 1 & & 0 \\ \cdots & \text{sen}\,\beta & \cdots & \cos\beta & \cdots \\ 0 & & 0 & & 1 \ddots 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ i_o \\ \\ j_o \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & i_o & & j_o & \end{array} & \end{array}$$

Para esta matriz, el producto $A\,A^t$ difiere de E únicamente en los elementos $e_{i_o j_o} = e_{j_o i_o} = \text{sen}\,(\alpha + \beta)$. Es decir, se cumplen todas las condiciones (V.9) excepto la correspondiente a los valores $i = i_o$, $j = j_o$.

El número de relaciones (V.9) es $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ y puesto que son idependientes resulta: <u>la variedad de $0(n)$ es una subvariedad analítica de dimensión $\frac{1}{2}n(n-1)$ de R^{n^2}</u> (según el Teorema V.1).

De las relaciones (V.9) se deduce que $\sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, a_{ih} = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y por tanto $a_{ih}^2 < 1$; es decir, la variedad de $0(n)$ es acotada. Por otra parte, el límite de matrices ortogonales es una matriz ortogonal (pues $\lim A_n . \lim A_n^t = \lim (A_n A_n^t) = \lim E = E$). Por consiguiente, según el Teorema I.3, <u>la variedad de $0(n)$ es compacta</u>.

De (V.8) se deduce $|A\,A^t| = |A|^2 = 1$; es decir, $|A| = \pm 1$. La variedad $0(n)$ se descompone así en la correspondiente a las matrices ortogonales de determinante $+1$, que constituyen el subgrupo $0^+(n)$ llamado de las <u>rotaciones</u>, y la correspondiente a las matrices de determinante -1, las cuales no forman grupo. Ambas partes son abiertos de $0(n)$ y no tienen elemento común. Por tanto: <u>la variedad $0(n)$ no es conexa</u>.

A cada $A \in 0(n)$ corresponde una transformación lineal $x' = A\,x$ de R^n sobre si mismo que deja invariante el origen de coordenadas. De estas transformaciones, aquellas que dejan invariante el vector $e(0, 0, \dots, 1)$ corresponden a matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 0 \\ B & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ 0\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

con $B B^t = E$, o sea, $B \in 0(n-1)$. Recíprocamente a toda matriz $B \in 0(n-1)$ corresponde la matriz A anterior tal que $x' = Ax$ deja invariante e. Como cualquier vector de módulo unidad, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ puede deducirse de e por una transformación A, resulta que entre estos vectores, o sea, entre los puntos de la esfera $(n-1)$-dimensional S^{n-1} y los puntos del espacio homogéneo $0(n)/0(n-1)$ hay un homeomorfismo. Es decir: para $n \geqslant 2$, el espacio homogeneo $0(n)/0(n-1)$ es homeomorfo a la esfera S^{n-1}.

El mismo razonamiento vale para el grupo $0^+(n)$ de las rotaciones, o sea, se tiene también: para $n \geqslant 2$, el espacio homogéneo $0^+(n)/0^+(n-1)$ es homeomorfo a S^{n-1}.

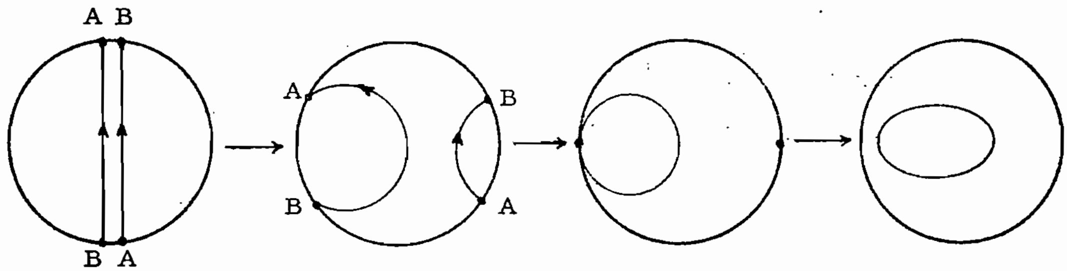
Para $n = 2$, $0^+(1)$ es la circunferencia S^1. Por inducción resulta que la variedad $0^+(n)$ es el producto $S^{n-1} \times S^{n-2} \dots \dots \times S^1$. Como producto de variedades conexas, la variedad $0^+(n)$ es ella misma conexa.

Sin embargo $0^+(n)$, para $n \geqslant 2$, no es "simplemente conexo", en el sentido de que no todas las curvas cerradas contenidas en la variedad $0^+(n)$ pueden reducirse a un punto por deformación continua dentro de la misma. Para $n = 2$, como $0^+(2)$ es la circunferencia S^1, el resultado es evidente. Consideremos el caso $n = 3$, o sea el grupo $0^+(3)$ de las rotaciones alrededor de un punto del espacio ordinario de 3 dimensiones. Cada una de estas rotaciones puede representarse por un vector cuya dirección es el eje de rotación y cuyo módulo es la amplitud de la rotación con $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Para $-\pi \leqslant \varphi \leqslant 0$ tomaremos el vector en el sentido opuesto. De esta manera $0^+(3)$ queda representado por los puntos interiores de una esfera del espacio ordinario de radio π

mas los puntos de la superficie, con el convenio de identificar los puntos de la superficie que son diametralmente opuestos, ya que las rotaciones alrededor de un mismo eje de amplitudes π y $-\pi$ coinciden.

En esta variedad las curvas cerradas representadas por un diámetro de la esfera no pueden reducirse a un punto por deformación continua, puesto que los puntos de la esfera diametralmente opuestos nunca pueden llevarse a coincidir.

En cambio, un diámetro recorrido dos veces si puede reducirse a un punto, como se ve intuitivamente en la sucesión de figuras adjunta.



Se puede ver que toda curva cerrada Γ de $0^+(3)$ o bien es deformable a un punto ($\Gamma \sim 0$), o bien es deformable a un punto cuando se considera recorrida dos veces ($2\Gamma \sim 0$). Para la variedad general $0^+(n)$ la situación es la misma que para $n = 3$.

Para más detalles ver por ejemplo H. BOERNER, Darstellungen von Gruppen, Berlin, 1955, p. 190-197.

4) El grupo unitario U(n). Sean ahora x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ variables complejas. Representando por $\bar{x}_i$ al complejo conjugado, por x a la matriz columna de las x_i y por x^t a la transpuesta o matriz fila de las mismas variables, las transformaciones lineales $x' = U\,x$ que dejan invariante a la forma

$$\Phi = \bar{x}^t x$$

forman el grupo unitario. Para ello debe ser $\bar{x}'^t x' = \bar{x}^t\,\bar{U}^t\,U\,x = x^t\,x$ y por tanto

$$\overline{U}^t U = E . \qquad (V.10)$$

Esta es la condición que caracteriza a las matrices complejas $n \times n$ del grupo unitario. Poniendo $U = (u_{ij})$, la condición (V.10) equivale a las

$$\sum_{h=1}^{n} \overline{u}_{ih} u_{jh} = \delta_{ij} . \qquad (V.11)$$

Igual que para el caso real se prueba que estas relaciones son independientes. Para $i \neq j$ cada relación (V.11), equivale a dos (hay que igualar a cero la parte real y la imaginaria); para $i = j$ es una sola. Por tanto el número de relaciones es $n + 2(1 + 2 + \ldots (n-1)) = n^2$. Como cada matriz compleja de $U(n)$ es un punto de R^{2n^2}, resulta que <u>la variedad de $U(n)$ es de dimensión n^2</u>.

Igual que para $0(n)$ se ve que <u>la variedad de $U(n)$ es compacta</u>. En cambio, al contrario de $0(n)$, la variedad de $U(n)$ es conexa, por serlo el plano complejo excluído el origen.

5) <u>Los grupos simplécticos</u>. Consideremos el espacio numérico complejo de $2n$ dimensiones, equivalente a R^{4n}. Representemos un punto por la matriz columna formada por sus coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$. Introduzcamos la matriz

$$J = \left(\begin{array}{c|c} 0 & E \\ \hline -E & 0 \end{array}\right) \qquad (V.12)$$

siendo E la matriz unidad de orden n y consideremos la forma

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+n} - x_{i+n} y_i) = x^t J y \qquad (V.13)$$

Las transformaciones lineales $x' = S x$ que dejan invariante a Φ cumplen la condición

$$S^t J S = J . \qquad (V.14)$$

Estas transformaciones, o las matrices S correspondientes, forman un grupo, llamado el grupo simpléctico complejo $Sp(n, C)$.

Para calcular la dimensión de $Sp(n, C)$ es útil la siguiente observación. Si $U(E)$ es un entorno de la identidad E, a cada punto S podemos asignar el entorno $U(S) = S\,U(E)$, es decir, $U(S)$ es el conjunto de los puntos $x' = S\,x$, para $x \in U(E)$. La aplicación $x \longrightarrow x'$ tiene inversa $x = S^{-1}x'$ y es continua; es decir, es un homeomorfismo. Por tanto basta calcular la dimensión de un entorno $U(E)$ para tener la dimensión de la variedad. En un tal entorno se puede poner $S = E + \varepsilon H$ (ε suficientemente pequeño) y la condición (V.14) se escribe $(E + \varepsilon H^t)\,J\,(E + \varepsilon H) = J$, o sea, $H^tJ + J\,H + \varepsilon H^tJ\,H = 0$, y para $\varepsilon = 0$ resulta

$$H^t J + J\,H = 0 \qquad \text{(V.15)}$$

Poniendo

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ H_3 & H_4 \end{pmatrix}$$

la condición (V.15) da

$$H_4 = -H_1^t \quad , \quad H_3 = H_3^t \quad , \quad H_2 = H_2^t \quad . \qquad \text{(V.16)}$$

La primera ecuación implica n^2 condiciones entre números complejos, o sea, $2n^2$ entre reales. Las otras dos, cada una implica $n^2 - n$ condiciones entre números reales. Como las matrices H se representan por puntos de R^{8n^2}, resulta que la variedad de $Sp(n, C)$ tiene $2(2n^2 + n)$ dimensiones.

Si solamente se consideran las matrices unitarias de tipo $2n \times 2n$ que cumplan (V.14) se tiene el llamado grupo simpléctico lineal $Sp(n)$ (nomenclatura de Chevalley, Lie Groups, Cap. I, § VIII). En este caso la matriz $S = E + \varepsilon H$ debe cumplir la condición $\bar{S}^t S = E$, o sea, $H + \bar{H}^t + \varepsilon \bar{H}^t H = 0$, y para $\varepsilon = 0$ resulta $H + \bar{H}^t = 0$ que equivale a $H^t + \bar{H} = 0$.

Esto nos dice que a las condiciones (V.16) hay que agregar las

$$H_1^t = -\overline{H}_1 \quad , \quad H_3^t = -\overline{H}_2 \quad . \qquad \text{(V.17)}$$

La primera ecuación implica n^2 condiciones (reales); la segunda, siendo H_2 y H_3 simétricas según (V.16), implica $n(n+1)$ condiciones (reales). En total son $2n^2 + n$, que restadas de las del grupo $Sp(n,C)$ dan $2n^2 + n$. En resumen:

Las variedades de $Sp(n,C)$ y de $Sp(n)$ son subvariedades analíticas de R^{8n^2} de dimensiones $2(2n^2 + n)$ y $2n^2 + n$ respectivamente.

Por ser $Sp(n) \subset U(n)$, la variedad $Sp(n)$ es acotada, y como también es cerrada (pues si $S_n^t J S_n = J$ y $S_n \longrightarrow S$, también $S^t J S = J$) resulta que la variedad de $Sp(n)$ es compacta.

En el capítulo siguiente (§ 6, Nº 7) veremos que todas las variedades de grupo son orientables.

4. VARIEDADES DE STIEFEL.

Sea el espacio euclidiano real R^{r+n}. Al conjunto de r vectores por el origen de módulo unidad y ortogonales entre si $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ se llama una r-referencia (en francés repère; en ingles frame). El conjunto de todas las r-referencias, con la topologia que vamos a mencionar, se llama la variedad de Stiefel S_{rn}.

En primer lugar veamos la dimensión de S_{rn}. Determinar un vector e_1 es equivalente a determinar un punto en la esfera S^{r+n-1} (punto extremo del vector). Una vez determinado e_1, para determinar e_2 hay que dar un punto en una S^{r+n-2}, sección de S^{r+n-1} por el hiperplano por el origen ortogonal a e_1. Procediendo sucesivamente resulta que $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ depende de

$$(r+n-1) + (r+n-2) + \ldots + n = \frac{r(r+2n-1)}{2}$$

parámetros. Esta es la dimensión de S_{rn}.

Esta misma manera de fijar una r-referencia permite dar una carta local para cada una de ellas; basta tomar por coordenadas de $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ las $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+n-1}; \beta_1, \ldots, \beta_{r+n-2}; \ldots)$ de los extremos de los vectores $e_1, e_2, \ldots e_r$ sobre las esferas respectivas. Siendo estas esferas variedades analiticas, también lo será S_{rn}.

Obsérvese que S_{ro} es la variedad del grupo ortogonal $0(r)$. Más generalmente, puesto que el subgrupo de $0(r+n)$ que deja invariante una r-referencia $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ es precisamente $0(n)$, resulta que S_{rn} se puede identificar con el espacio cociente $0(r+n)/0(n)$.

Ejercicio.

Probar: a) $S_{1n} = S^n$; b) S_{2n} = variedad formada por todos los vectores tangentes a S^{n+1}.

5. GRASSMANIANAS.

Definición V.1. Se llama grassmaniana G_{rn} al conjunto de r-planos (= subespacios lineales de dimensión r) que pasan por el origen en el espacio euclidiano real R^{r+n} con la topologia y estructura de variedad diferenciable analitica que veremos a continuación.

Un r-plano de R^{r+n} por el origen está determinado por r puntos independientes de R^{r+n}, distintos del origen. Poniendo las coordenadas de estos puntos en filas sucesivas, resulta una matriz de tipo $r \times (r+n)$; el hecho de que los puntos sean independientes se traduce en que esta matriz debe ser de caracteristica r.

Representemos por $M = M(r \times (r+n); r)$ al conjunto de estas matrices. Si $X \in M$ y A es una matriz no singular de tipo $r \times r$, la matriz AX representa el mismo r-plano, puesto que sus filas corresponden a puntos que son combinación lineal de las de X y por tanto son puntos que también pertenecen al r-plano correspondiente a X. Reciprocamente, si X y X' son matrices que representan el mismo r-plano ,puesto que los puntos que determinan X' deben ser combinación lineal de los que determinan X; existe una matriz $r \times r$ no singular A tal que $X' = AX$.

En particular, si $A = \alpha(X)$ es una submatriz $r \times r$ no singular de X (formada por las columnas de lugares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$) el r-plano correspondiente a X puede representarse por $\alpha(X)^{-1}X$, que es una matriz $r \times (r+n)$ que contiene una submatriz unidad $r \times r$. Haciendo esta normalización para todas las X cuya $\alpha(X)$ no sea singular ($\alpha(X)$ = submatriz de X formada por las columnas de lugar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$), resultan libres los elementos de una matriz $r \times n$, representable por un punto de R^{rn}. Resulta así que cada punto de la grassmaniana G_{rn} tiene un entorno abierto representable en R^{rn} por la aplicación $\alpha(X)^{-1}X \longrightarrow R^{rn}$, la cual constituye una carta local de G_{rn} en R^{rn}. Para los r-planos con $|\alpha(X)| = 0$, hay que tomar otras r columnas (sean las de lugares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$ tales que la matriz $\beta(X)$ correspondiente no sea singular) y tomar la carta $\beta(X)^{-1}X \longrightarrow R^{rn}$.

Hay que ver que con la topologia inducida por la representación anterior, es espacio G_{rn} resulta separado. Sean X, Y dos puntos de G_{rn}; si ellos pertenecen a una misma carta local, la separabilidad es evidente, pues ella equivale a la separabilidad de R^{rn}. Supongamos que pertenecen a cartas distintas; sean $\alpha(X)$, $\beta(Y)$ las matrices $r \times r$ no singulares que definen estas cartas. Por hipótesis es $|\alpha(X)| \neq 0$ y $|\alpha(Y)| = 0$. Si hubiera una sucesión de r-planos Z que tendieran al mismo tiempo a X y a Y (lo que seria posible si G_{rn} no fuera separado), resultaría que $|\alpha(Z)|$ tendería al mismo tiempo a cero y a un valor distinto de cero, lo que no es posible dada la separabilidad de R^1.

Para ver que G_{rn} es una variedad diferenciable analitica falta unicamente ver que se pasa de una carta local a otra por funciones analiticas. En efecto, para pasar de $\alpha(X)^{-1}X$ a $\beta(X)^{-1}X$ basta multiplicar la primera por $\beta(X)^{-1}\alpha(X)$; es decir, las operaciones son de producto e inversión de matrices no singulares. Ello se traduce en ecuaciones analíticas entre los elementos de las matrices.

La variedad G_{rn} es compacta. En efecto, para determinar un r-plano se pueden tomar r puntos ortogonales dos a dos y de módulo unidad(*). Entonces la matriz X correspondiente tendrá sus elementos acotados (por satisfacer a las condiciones de ortogonalidad $\sum_{i=1}^{n} a_{ih} a_{ik} = \delta_{hk}$, $h, k = 1, 2, \ldots, r$). Por tanto estas matrices forman un conjunto compacto de $R^{r(r+n)}$; su proyección sobre R^{rn} lo será también.

En consecuencia:

Las grassmanianas G_{rn} son variedades diferenciables analíticas, compactas, de dimensión rn.

A cada G_{rn} corresponde una variedad dual G_{nr}, asignando a cada r-plano por el origen de R^{r+n} su n-plano ortogonal. La correspondencia es biyectiva. Además, si X, Y son dos matrices de elementos correspondientes, la condición de ortogonalidad es $X Y^t = 0$; por tanto los elementos de X e Y están relacionados por funciones diferenciables. Es decir: la correspondencia $G_{rn} \longrightarrow G_{nr}$ es un difeomorfismo.

6. EL ESPACIO PROYECTIVO DE n DIMENSIONES.

La grassmaniana G_{1n}, o sea, el conjunto de las rectas que pasan por el origen en R^{n+1}, se llama el espacio proyectivo de n dimensiones P^n.

Según lo ya visto P^n es una variedad diferenciable analítica compacta de dimensión n. Cortando las rectas que pasan por el origen por la esfera S^n de centro el mismo origen, a cada recta corresponden dos punto diametralmente opuestos. Ello hace que P^n pueda también definirse como la esfera S^n en la cual se consideren identifi-

(*) Se entiende por ello que son ortogonales entre sí y de módulo unidad los vectores que unen el origen con los puntos.

cados los puntos diametralmente opuestos.

Según el método general del número anterior, cada punto de P^n da lugar a una matriz $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, con las condiciones:

a) No todos los x_i son nulos a la vez;

b) Las matrices X y aX, siendo a un número real distinto de cero, representan el mismo punto.

Con estas condiciones, las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ se llaman las <u>coordenadas homogéneas</u> de los puntos de P^n.

Para formar un atlas de P^n basta tomar las $n+1$ cartas (U_i, φ_i) formadas por los abiertos U_i correspondientes a los puntos para los cuales es $x_i \neq 0$ y los homeomorfismos

$$\varphi_i : \xi^1 = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \xi_i^{n+1-i} = \frac{x_{n+1}}{x_i}, \qquad \xi_i^{n+2-i} = \tag{V.18}$$
$$= -\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \xi_i^n = -\frac{x_{i-1}}{x_i}$$

Las ξ_i^h, para $h = 1, 2, \ldots, n$ son las coordenadas no-homogéneas del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ en el abierto U_i. Los signos menos a partir de ξ_i^{n+2-i} no son aquí necesarios, pero con convenientes por lo que veremos enseguida.

Consideremos las dos cartas $i = 1, 2$. Por comodidad de escritura llamamos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ a las coordenadas no homogéneas de la primera carta y $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ a las de la segunda, o sea,

$$\varphi_1 : \xi_1 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \xi_2 = \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \xi_n = \frac{x_{n+1}}{x_1}$$

$$\varphi_2 : \eta_1 = \frac{x_3}{x_2}, \quad \eta_2 = \frac{x_4}{x_2}, \ldots, \eta_{n-1} = \frac{x_{n+1}}{x_2},$$

$$\eta_n = -\frac{x_1}{x_2}$$

De aquí

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \eta_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \eta_{n-1} = \frac{\xi_n}{\xi_1}, \eta_n = -\frac{1}{\xi_1}$$

y el determinante jacobiano resulta

$$J_{21} = J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) = (-1)^{n-1} \frac{1}{\xi_1^{n+1}}$$

Los puntos $p(1, 1, \ldots, 1)$, $q(-1, 1, 1, \ldots 1)$ pertenecen a las dos cartas a la vez y en ellos, si n es par, el jacobiano tiene signos opuestos. Por tanto, según el Teorema IV. 1, el espacio proyectivo real no es orientable si n es par.

Para n impar debemos formar los jacobianos $J_{ji} = J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$. Supongamos $j > i$. Es

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \xi_j^1 = \frac{\xi_i^{j-i+1}}{\xi_i^{j-i}}, \quad \xi_j^2 = \frac{\xi_i^{j-i+2}}{\xi_i^{j-i}}, \ldots, \xi_j^{n+1-j} = \frac{\xi_i^{n+1-i}}{\xi_i^{j-i}},$$

$$\xi_j^{n+2-j} = \frac{\xi_i^{n+2-i}}{\xi_i^{j-i}}, \ldots\ldots, \xi_j^{n-j+i} = \frac{\xi_i^n}{\xi_i^{j-i}}, \quad \xi_j^{n-j+i+1} = \frac{-1}{\xi_i^{j-i}}, \ldots$$

$$\ldots, \xi_j^n = -\frac{\xi_i^{j-i-1}}{\xi_i^{j-i}}$$

y J_{ji} resulta de la forma

$$J_{ji} = \left| \begin{array}{ccccccc} \overbrace{}^{j-i} & p_1 & b & & & & \\ 0 & p_2 & & b & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ & \vdots & & & & b & \\ \cdots\cdots & a & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & p_{j-i+1} & & 0 & & & \\ \ddots & \vdots & & & & & \\ -b & p_n & & & & & \end{array} \right| \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-(j-i)-1$$

donde

$$a = \frac{1}{(\xi_i^{j-i})^2}\ , \quad b = \frac{1}{\xi_i^{j-i}}$$ y los p_i son **expresiones simples** cuya forma explicitada no interesa. El desarrollo de J_{ji} es **inmediato y resulta**

$$J_{ji} = J(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \frac{1}{(\xi_i^{j-i})^{n+1}}$$

y por tanto, siendo $n+1$ par, resulta $J_{ji} > 0$ para todos los **cambios de coordenadas** $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Es decir, la variedad es orientable. En resumen:

Teorema V. 2.

<u>El espacio proyectivo real P^n es orientable si n es **impar y no orientable si** n es par.</u>

<u>Ejemplos</u>.

a) Para $n = 2$ (plano proyectivo real) se tienen las **tres cartas**

$$\varphi_1 : \xi_1 = \frac{x_2}{x_1}\ , \quad \xi_2 = \frac{x_3}{x_1}$$

$$\varphi_2 : \eta_1 = \frac{x_3}{x_2}\ , \quad \eta_2 = -\frac{x_1}{x_2}$$

$$\varphi_3 : \zeta_1 = -\frac{x_1}{x_3}\ , \quad \zeta_2 = -\frac{x_2}{x_3}$$

correspondientes a los abiertos $U_1(x_1 \neq 0)$, $U_2(x_2 \neq 0)$, $U_3(x_3 \neq 0)$. **Las ecuaciones** de los cambios de coordenadas $\xi \longrightarrow \eta$, $\eta \longrightarrow \zeta$, $\zeta \longrightarrow \xi$ son respectivamente:

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \eta_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\ , \quad \eta_2 = \frac{-1}{\xi_1}\ \therefore \quad J_{21} = -\frac{1}{\xi_1^3}$$

$$\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} : \zeta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\ , \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\eta_1}\ , \quad J_{32} = -\frac{1}{\eta_1^3}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_3^{-1} : \xi_1 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1}\ , \quad \xi_2 = -\frac{1}{\zeta_1}\ , \quad J_{13} = -\frac{1}{\zeta_1^3}$$

b) Para $n = 3$, espacio proyectivo real de tres dimensiones, se tienen las cartas

$$\varphi_1 : \xi_1 = \frac{x_2}{x_1}\ , \quad \xi_2 = \frac{x_3}{x_1}\ , \quad \xi_3 = \frac{x_4}{x_1}$$

$$\varphi_2 : \eta_1 = \frac{x_3}{x_2}\ , \quad \eta_2 = \frac{x_4}{x_2}\ , \quad \eta_3 = -\frac{x_1}{x_2}$$

$$\varphi_3 : \zeta_1 = \frac{x_4}{x_3}\ , \quad \zeta_2 = -\frac{x_1}{x_3}\ , \quad \zeta_3 = -\frac{x_2}{x_3}$$

$$\varphi_4 : \tau_1 = -\frac{x_1}{x_4}\ , \quad \tau_2 = -\frac{x_2}{x_4}\ , \quad \tau_3 = -\frac{x_3}{x_4}$$

y los siguientes cambios de coordenadas entre ellas

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \eta_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1}\ , \quad \eta_2 = \frac{\xi_3}{\xi_1}\ , \quad \eta_3 = -\frac{1}{\xi_1}\ , \quad J_{21} = \frac{1}{\xi_1^4}$$

$$\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} : \zeta_1 = \frac{\xi_3}{\xi_2}\ , \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\xi_2}\ , \quad \zeta_3 = -\frac{\xi_1}{\xi_2}\ , \quad J_{31} = \frac{1}{\xi_2^4}$$

$$\varphi_4 \circ \varphi_1^{-1} : \tau_1 = -\frac{1}{\xi_3}\ , \quad \tau_2 = -\frac{\xi_1}{\xi_3}\ , \quad \tau_3 = -\frac{\xi_2}{\xi_3}\ , \quad J_{41} = \frac{1}{\xi_3^4}$$

$$\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} : \zeta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1}\ , \quad \zeta_2 = \frac{\eta_3}{\eta_1}\ , \quad \zeta_3 = -\frac{1}{\eta_1}\ , \quad J_{32} = \frac{1}{\eta_1^4}$$

$$\varphi_4 \circ \varphi_2^{-1} : \tau_1 = \frac{\eta_3}{\eta_2}\ , \quad \tau_2 = -\frac{1}{\eta_2}\ , \quad \tau_3 = -\frac{\eta_1}{\eta_2}\ , \quad J_{42} = \frac{1}{\eta_2^4}$$

$$\varphi_4 \circ \varphi_3^{-1} : \zeta_1 = \frac{\eta_2}{\eta_1} \ , \quad \zeta_2 = \frac{\eta_3}{\eta_1} \ , \quad \zeta_3 = -\frac{1}{\eta_1} \ , \quad J_{43} = \frac{1}{\eta_1^4} \ .$$

7. OTROS EJEMPLOS DE GRASSMANIANAS.

1. G_{22} . Es el conjunto de los planos (2 dimensiones) que pasan por el origen en R^4 .

Para dar uno de estos planos hay que dar dos puntos $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ no alineados con el origen, es decir, tales que la matriz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(V.18)}$$

tenga característica 2 .

Una carta de G_{22} abarcará los planos con

$$|\alpha(X)| = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

para los cuales es

$$\alpha(X)^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & t \end{pmatrix}$$

Las coordenadas del plano correspondiente a X en esta carta son x, y, z, t . Otra carta abarcará, por ejemplo, los planos con

$$|\beta(X)| = \begin{vmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

para los cuales es

$$\beta \cdot (X)^{-1} \cdot X = \begin{pmatrix} x' & 1 & y' & 0 \\ z' & 0 & t' & 1 \end{pmatrix} .$$

Las coordenadas del plano correspondiente a X en esta carta son x', y', z', t'. Para hallar las fórmulas de transformación tenemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_4 \\ y_2 & y_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & 1 & y' & 0 \\ z' & 0 & t' & 1 \end{pmatrix}$$

que permite calcular x', y', z', t' en función de x, y, z, t.

En efecto, poniendo

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{pmatrix}$$

es $\beta = \alpha_{24}$. De aquí

$$\alpha_{24}^{-1}\, \alpha_{12} = \begin{pmatrix} \dfrac{y_4}{|\alpha_{24}|} & -\dfrac{x_4}{|\alpha_{24}|} \\ -\dfrac{y_2}{|\alpha_{24}|} & \dfrac{x_2}{|\alpha_{24}|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\alpha_{14}|}{|\alpha_{24}|} & 1 \\ -\dfrac{|\alpha_{12}|}{|\alpha_{24}|} & 0 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\alpha_{24}^{-1}\, \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\alpha_{14}|}{|\alpha_{24}|} & 1 & \dfrac{x|\alpha_{14}|}{|\alpha_{24}|} + z & \dfrac{y|\alpha_{14}|}{|\alpha_{24}|} + t \\ -\dfrac{|\alpha_{12}|}{|\alpha_{24}|} & 0 & -\dfrac{x|\alpha_{12}|}{|\alpha_{24}|} & -\dfrac{y|\alpha_{12}|}{|\alpha_{24}|} \end{pmatrix}$$

La última columna da

$$y = -\frac{|\alpha_{24}|}{|\alpha_{12}|} , \qquad \frac{|\alpha_{14}|}{|\alpha_{24}|} = -\frac{t}{y}$$

y finalmente

$$x' = -\frac{t}{y} \ , \quad y' = -\frac{tx}{y} + z \ , \quad z' = -\frac{1}{y} \ , \quad t' = \frac{x}{y} \ .$$

Para cubrir G_{22} bastan 6 cartas, correspondientes a los 6 menores de orden 2 de la matriz X .

2. <u>Coordenadas plückerianas de recta</u>: <u>la cuádrica de Klein</u>. La grassmaniana G_{22} puede tener otra inerpretación interesante.

Sabemos que el espacio proyectivo P^3 es el conjunto de las rectas de R^4 que pasan por el origen. Cada plano de R^4 que pasa por el origen es una recta de P^3 . Es decir, G_{22} es la variedad representativa de las rectas del espacio proyectivo detres dimensiones.

Como ya observamos, en la matriz (V.18) correspondiente a una recta de P^3 , las filas constituyen las coordenadas homogéneas de dos puntos de P^3 ; representemos por x , y a estos puntos. Los determinantes

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} \quad , \qquad p_{ij} = -p_{ji}$$

se llaman las <u>coordenadas plückerianas</u> de la recta determinada por los puntos x , y .

Estas coordenadas tienen las siguientes propiedades:

a) No son nulas. Si así fuera, las y_i serían proporcionales a las x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) y como son coordenadas homogéneas, corresponderían a un mismo punto de P^3.

b) Si se eligen otros dos puntos x' , y' para determinar la misma recta, será

$$x'_i = \lambda x_i + \mu y_i \ , \qquad y'_i = \lambda_1 x_i + \mu_1 y_i$$

y por tanto

$$p'_{ij} = x'_i y'_j - x'_j y_i \quad (\lambda \mu_1 - \mu \lambda_1) p_{ij}$$

con $\lambda \mu_i - \mu \lambda_1 \neq 0$ si los puntos x' , y' son distintos.

Es decir: las coordenadas plückerianas correspondientes a una misma recta, difieren en un factor constante.

c) Las coordenadas plückerianas no son independientes. En efecto, se tiene la identidad

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = 2\,(p_{12}\,p_{34} + p_{31}\,p_{24} + p_{14}\,p_{23})$$

obtenida desarrollando el determinante por la regla de Laplace.

Como el determinante es nulo, resulta la identidad

$$p_{12}\,p_{34} + p_{31}\,p_{24} + p_{14}\,p_{23} = 0\,. \qquad \text{(V.19)}$$

d) Dadas las p_{ij}, no todas nulas, con la condición (V.19) ellas determinan una recta única de P^3. En efecto, suponiendo por ejemplo $p_{12} \neq 0$, la recta determinada por los puntos

$$x(0,\ p_{12},\ p_{13},\ p_{14}) \quad , \quad y(-1,\ 0,\ p_{23}/p_{12},\ p_{24}/p_{12}) \qquad \text{(V.20)}$$

tiene las coordenadas p_{ij} (teniendo en cuenta (V.19)).

Esta recta es única, pues el punto en que corta al plano $x_1 = 0$ está bien determinado por las relaciones

$$\frac{x_2}{p_{12}} = \frac{x_3}{p_{13}} = \frac{x_4}{p_{14}}$$

y analogamente está determinado el punto en que corta al plano $x_2 = 0$.

Obsérvese que según (V.20) las coordenadas p_{ij} y $\alpha\,p_{ij}$ (α = constante no nula) definen la misma recta. De aquí y de a) y b) resulta: las coordenadas plückerianas son coordenadas homogéneas. Considerándolas como coordenadas homogéneas de los puntos de P^5, la ecuación de segundo grado (V.19) representa una cuádrica de P^5, llamada la cuádrica de Klein. Es decir:

<u>Las rectas de P^3 se representan biunivocamente por los puntos de una cuádrica de P^5, llamada cuádrica de Klein.</u>

Veamos la condición para que dos rectas p_{ij}, p'_{ij} tengan punto común. En tal caso los pares de puntos (x, y), (x', y') que las determinan están en un mismo plano y por tanto se tiene

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \end{vmatrix} = p_{12}\, p'_{34} + p_{31}\, p'_{24} + p_{14}\, p'_{23} + p_{34}\, p'_{12} + p_{24}\, p'_{31} + p_{23}\, p'_{14} = 0 .$$

Reciprocamente, si esta condición se cumple, las rectas están en un mismo plano y por tanto se cortan.

Si representamos por a tanto a la recta de coordenadas p_{ij} como a su punto correspondiente en P^5 y analogamente por b a la de coordenadas p'_{ij} y a su punto correspondiente, escribiremos

$$(a, b) = p_{12}\, p'_{34} + p_{31}\, p'_{24} + p_{14}\, p'_{23} + p_{34}\, p'_{12} + p_{24}\, p'_{31} + p_{23}\, p'_{14} .$$

Si a, b, c son tres puntos de P^5, los puntos del plano que ellos determinan son de la forma $d = \lambda a + \mu b + \nu c$ $(\lambda, \mu, \nu$ = números reales no todos nulos). Si a, b, c son rectas que se cortan dos a dos, será

$$(a, a) = (b, b) = (c, c) = (a, b) = (a, c) = (b, c) = 0$$

De aquí se deduce que cualesquiera que sean λ, μ, ν se verifica

$$(\lambda a + \mu b + \nu c, \lambda a + \mu b + \nu c) = 0$$

o sea, el punto d representa una recta; es decir, es un punto de la cuádrica de Klein. Por consiguiente:

Los planos determinados por tres puntos de la cuádrica de Klein, correspondientes a rectas que se corten entre si dos a dos, están contenidos en la cuádrica.

Esto prueba que la cuádrica de Klein contiene dos familias de planos, a saber:

1. Planos correspondientes a todas las rectas de P^3 que pasan por un mismo punto;

2. Planos correspondientes a todas las rectas de P^3 contenidas en un mismo plano.

De aquí, de manera evidente: dos planos de la misma familia tienen un punto común. Dos planos de familias distintas o no tienen punto común o tienen una recta de puntos comunes.

VI. ESPACIOS VECTORIALES TANGENTES

1. UN LEMA SOBRE EXISTENCIA DE CIERTAS FUNCIONES.

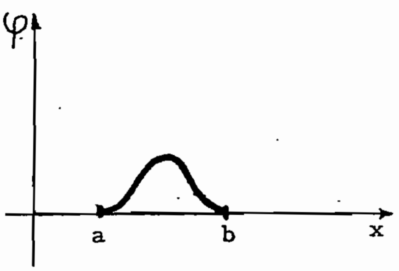
Para varios propósitos es interesante el siguiente

LEMA. Dadas en el espacio euclidiano R^n dos esferas concéntricas de radios a y b respectivamente $(a < b)$, existe una función $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de clase C^∞ que vale cero en el interior y en el contorno de la primera esfera y vale uno en el exterior y en el contorno de la segunda. Entre ambas esferas es $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Para construir θ empecemos por el caso de una sola variable x. Dados dos intervalos cerrados $[-a, +a]$, $[-b, +b]$ $0 < a < b$ del eje x, vamos a construir una función $\psi(x) \in C^\infty$ tal que sea nula en $[-a, +a]$ y valga 1 fuera de $[-b, +b]$.

Pongamos

$$\varphi(x) = \exp\left(- \frac{1}{(x-a)(b-x)} \right)$$



para $a \leqslant x \leqslant b$, y

$\varphi(x) = 0$ fuera de $[a, b]$.

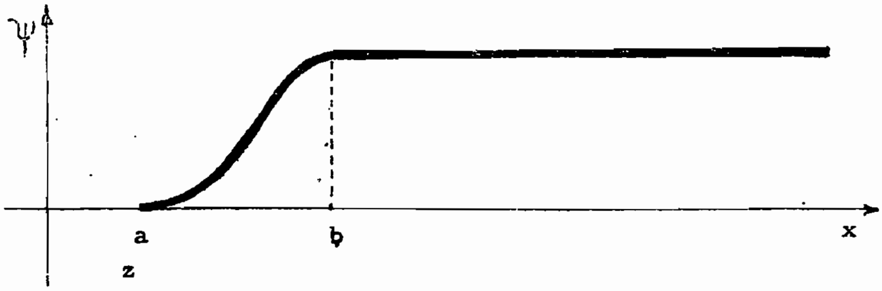
Pongamos también

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = A, \quad \psi(x) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt .$$

Es claro que

$$\psi(x) = 0 \quad \text{para} \quad -\infty \leqslant x \leqslant a$$

$$\psi(x) = 1 \quad \text{para} \quad x > b .$$



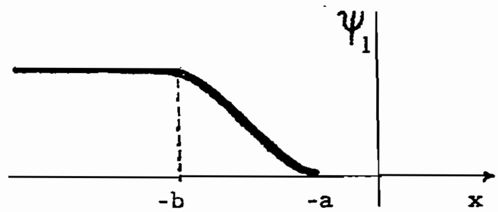
Analogamente, pongamos

$$\varphi_1(x) = \exp \frac{1}{(x+a)(x+b)} \qquad \text{para} \qquad -b \leqslant x \leqslant -a$$

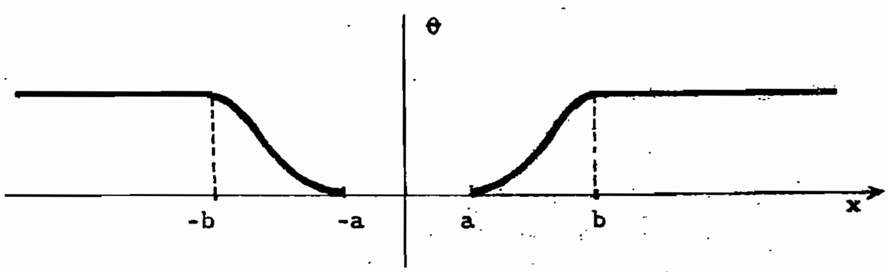
$$\varphi_1(x) = 0 \;, \qquad \text{fuera de} \qquad -b \leqslant x \leqslant -a$$

y luego

$$\int_{-b}^{-a} \varphi_1(x)\,dx = A_1 \qquad\qquad \psi_1(x) = \frac{1}{A_1}\int_x^{\infty} \varphi_1(t)\,dt$$



La función $\theta(x) = \psi(x) + \psi_1(x)$ es nula en $[-a\,,\, +a]$ y vale 1 fuera de $[-b\,,\, +b]$. Además $\varphi,\ \varphi_1,\ \psi,\ \psi_1$ y por tanto θ son de clase C^{∞}.



Para pasar al caso de n dimensiones, basta suponer que el centro de las dos esferas es el origen de coordenadas y poner $r = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$; entonces la función $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(r)$ cumple las condiciones del lema.

En vez de dos esferas de radios cualesquiera a, b $(a < b)$, se pueden tomar dos cubos concéntricos de lados paralelos e iguales respectivamente a 2ε y $2n\varepsilon$. El lema vale entonces igualmente, pues basta tomar una esfera circunscripta al primer cubo y otra inscripta en el segundo, que resultan de radios $a = \sqrt{n}\,\varepsilon$, $b = n\varepsilon$, con lo cual el lema es aplicable a ellas y resulta satisfecho para los cubos.

Sea ahora A un conjunto compacto de R^n y B un abierto que lo contiene. Tomemos ε suficientemente pequeño para que todos los cubos de lado $2n\varepsilon$ que tienen punto comun con A queden interiores a B. Siendo A compacto, se puede cubrir con un número finito de cubos de arista 2ε; sea N este número y sean θ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ las funciones θ anteriormente definidas correspondientes a cada uno de ellos y a sus concéntricos de lados $2n\varepsilon$. La función

$$h = 1 - \prod_{1}^{N} \theta_i$$

es de clase C^∞, vale 1 en A, está comprendida entre 0 y 1 y vale 0 fuera de B. Se tiene así demostrado el siguiente:

LEMA II. Si A es un conjunto compacto de R^n y B un abierto que lo contiene, existe una función de clase C^∞, siempre comprendida entre 0 y 1, que vale 1 sobre A y es nula fuera de B.

2. PARTICION DE LA UNIDAD.

Puesto que toda variedad diferenciable V es un espacio topológico localmente homeomorfo a R^n (= cada punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de R^n) y R^n es localmente compacto (§ 1, N° 7), resulta que toda variedad diferenciable es localmente compacta.

De aqui y de los teoremas I. 7 y I. 8 se deduce:

Teorema VI. 1.

Toda variedad diferenciable es regular.

Teorema VI. 2.

Toda variedad diferenciable es paracompacta.

Estos resultados y los lemas del número anterior son útiles para demostrar el siguiente

Teorema VI. 3. (Partición de la unidad, Dieudonné, C.R. 205, 1937, p. 593-595).

Dado un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}$ de la variedad diferenciable V, existe un conjunto numerable de funciones g_i tales que:

a) $g_i \geqslant 0$, $\sum g_i = 1$;

b) $g_i \in C^{\infty}$ y tiene soporte compacto contenido en U_i ;

c) cada punto de V tiene un entorno que solamente tiene punto común con un número finito de soportes de las g_i .

Recordemos que se llama soporte de una función continua al menor conjunto fuera del cual la función es nula.

Demostración. Siendo V regular, cada punto tiene un entorno U' cuya adherencia $\overline{U'}$ pertenece a algún U_i y al dominio de una carta local que contiene al punto. Por otra parte (Teorema I. 5.) el cubrimiento por estos U' posee un subcubrimiento numerable; sea $\{U_i'\}$. Por ser V paracompacta, el cubrimiento $\{U_i'\}$ admite un refinamiento por abiertos, sea $\{U_i''\}$, que es localmente finito. Todavía, este cubrimiento admite un refinamiento $\{A_i\}$ tal que $\overline{A_i} \subset U_i''$. En virtud del Lema II del número anterior, para cada para A_i , U_i'' tenemos una función h_i de clase C^{∞} , de soporte en U_i'' que vale 1 en A_i . Las funciones

$$g_i = \frac{h_i}{\sum h_i}$$

tienen las propiedades del enunciado como es inmediato constatar. Obsérvese que la suma del denominador es finita.

Corolario. Si A es un compacto de V y B un abierto que lo contiene, existe siempre una función de clase C^∞ cuyo soporte está contenido en B, comprendida entre 0 y 1 e igual a 1 sobre A.

En efecto, basta considerar la partición de la unidad $\sum g_i = 1$ subordinada al cubrimiento $\{B, V-A\}$. La suma de las funciones g_i cuyo soporte tiene punto común con A es una función que tiene las propiedades del enunciado. Este corolario coincide con el Lema II del número anterior para $V = R^n$.

3. VECTOR TANGENTE.

Sea $V(E, \mathfrak{F})$ una variedad diferenciable de clase C^r $(r \geqslant 1)$. Dado un punto p de V, representemos por $\mathfrak{F}(p)$ al conjunto de las funciones que pertenecen a $\mathfrak{F}(U_p)$ para algún entorno U_p de p.

Definición VI. 1. Se llama vector tangente contravariante, o simplemente vector tangente a V en el punto p, a toda aplicación $h : \mathfrak{F}(p) \longrightarrow R^1$ tal que:

a) Sea lineal, es decir,

$$h(\lambda f + \mu g) = \lambda h(f) + \mu h(g)$$

para todos $\lambda, \mu \in R^1$, $f, g \in \mathfrak{F}(p)$.

b) Sea una diferenciación, o sea,

$$h(f g) = h(f) g(p) + f(p) h(g).$$

De esta definición se deducen las siguientes

CONSECUENCIAS.

1. Si $f = k =$ constante, es $h(k) = 0$.

En efecto, para cualquier función g es

$$h(kg) \begin{cases} = k\,h(g)\,, & \text{según a)} \\ = h(k)\,g(p) + k\,h(g)\,, & \text{según b)} \end{cases}$$

Igualanda y simplificando resulta $h(k)\,g(p) = 0$ para cualquier $g(p)$; por tanto $h(k) =$ $= 0$.

2. Si f es nula en un entorno de p, es $h(f) = 0$.

En efecto, tomemos un entorno abierto U_p de p contenido en el entorno dado y perteneciente a una carta de V, sea (U_p, φ). Sean $E_1 \subset E_2$ dos esferas de R^n concéntricas y contenidas en $\varphi(U_p)$. Según el Lema I, existe $g \in C^\infty$, nula en E_1 e igual a 1 en $R^n - E_2$. Poniendo $g_1 = g \circ \varphi$, será $f = f g_1$. De aquí, aplicando b)

$$h(f) = h(f\,g_1) = h(f).0 + 0.h(g_1) = 0\,,$$

lo que prueba el enunciado.

3. Si dos funciones f_1, f_2 coinciden en un entorno de p, es $h(f_1) = h(f_2)$.

En efecto, $f_1 - f_2$ cumple las condiciones de la consecuencia anterior y por tanto $h(f_1 - f_2) = h(f_1) - h(f_2) = 0$.

De 1 y 3 se deduce:

4. Si f es constante en un entorno de p, es $h(p) = 0$.

4. ESPACIO VECTORIAL TANGENTE.

Definiendo $(h' + h'')f = h'(f) + h''(f)$. $(\lambda h)f = \lambda h(f)$

para $\lambda \in R^1$, resulta que los vectores tangentes en un punto $p \in V$ forman un espacio vectorial sobre los números reales. Se llama el espacio vectorial tangente a V en el punto p y se representa por T_p.

Queremos ver la dimensión de T_p. Consideremos un sistema de coordenadas locales x_i definido por la carta (U_p, φ) que contiene a p. Toda función $f \in \mathcal{F}(p)$, definida sobre U_p, puede considerarse como una función de clase C^r de las variables x_i definida sobre $\varphi(U_p) \in R^n$. Para no complicar la escritura pondremos $f(x)$ para indicar esta función (en realidad seria $f \circ \varphi^{-1}$). Pondremos también $f(p)$ para indicar el valor de la función para las coordenadas $x_i(p)$ de p. Utilizaremos, además, la notación

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Siempre se puede escribir

$$f(x) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} f_i(p)(x_i - x_i(p)) + g(x) \qquad \text{(VI. 1)}$$

donde la función $g(x)$, definida en un entorno de p, cumple las condiciones

$$g(p) = 0 \quad , \quad g_i(p) = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(VI. 2)}$$

De la relación

$$\frac{d}{dt} g(t(x_1 - x_1(p)) + x_1(p) \quad , \quad t(x_2 - x_2(p)) + x_2(p), \ldots) =$$

$$= \sum_{i}^{n} g_i\,(t(x_1 - x_1(p)) + x_1(p), \ldots,)\ (x_i - x_i(p)),$$

y de (VI. 1) se deduce la identidad

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1}^{n} (x - x_i(p)) \int_0^1 g_i(t(x_1 - x_1(p)) + x_1(p), \ldots)dt$$

Aplicando la propiedad de ser h una derivación y que la integral anterior es nula en el punto p, resulta

$$h(g) = 0 \, .$$

De aquí, aplicando h a (VI.1),

$$h(f) = \sum_{i}^{n} f_i(p) h(x_i) \, . \qquad \text{(VI.3)}$$

Esto nos dice:

a) Todo vector $h \in T_p$ se expresa como combinación lineal de los vectores

$$h_i : f \longrightarrow f_i(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p \qquad \text{(VI.4)}$$

Es claro que estas aplicaciones son lineales y son diferenciaciones; por tanto son vectores tangentes. Además, son independientes, por serlo las derivadas parciales de las funciones.

Es decir: los vectores h_i constituyen una <u>base</u> de T_p. Se llama la base asociada al sistema de coordenadas locales x_i. La dimensión de este espacio es, en consecuencia, igual a n.

b) Todo vector es de la forma

$$h : \quad f \longrightarrow \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_p \lambda^i \qquad \text{(VI.5)}$$

donde las $\lambda^i = h(x_i)$ son las <u>componentes</u> de h, en la base anterior.

c) Por un cambio de coordenadas $x_i \longrightarrow x'_i$, siendo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x'_m} \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \qquad \text{(VI.6)}$$

resulta

$$h : f \longrightarrow \sum_{m, i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x'_m} \right)_p \left(\frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \right)_p \lambda^i \qquad \text{(VI.7)}$$

y por tanto, las componentes λ'^i de h en el nuevo sistema de base $(\partial f/\partial x'_m)_p$, resultan ser

$$\lambda'^m = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_m}{\partial x_i}\right)_p \lambda^i \qquad \text{(VI. 8)}$$

Esta es la ley de transformación de las componentes de los vectores contravariantes por el cambio de coordenadas $x_i \longrightarrow$.

En el cálculo tensorial clásico, la relación (VI. 8) se toma como definición de vector contravariante.

En forma de matrices, si $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ es una base de T_p y $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$ son las componentes del vector h, será $h = \lambda e$. Por un cambio de base $e' = Ae$ (A = matriz $n \times n$ no singular), debe ser $h = \lambda e = \lambda' e'$ y por tanto $\lambda e = \lambda' A e$, de donde

$$\lambda' = \lambda A^{-1}$$

que es la ley de transformación de los vectores contravariantes por el cambio de base $e' = Ae$.

5. VECTOR TANGENTE A UNA CURVA.

Sea un punto p de una curva Γ de clase C^1 (= imagen del segmento real $0 < t < 1$ en la variedad diferenciable V por un difeomorfismo). En un sistema de coordenadas locales y en un entorno de p las ecuaciones de Γ serán de la forma $x_i = x_i(t)$ con las $x_i(t) \in C^1$. El vector

$$h : f \longrightarrow \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p x'_i(p)$$

pertenece a T_p y se llama el vector tangente a Γ en p. El espacio vectorial tangente T_p está formado por todos los vectores tangentes en p a las curvas de la variedad que pasan por p. Los vectores tangentes a las curvas $(x_1 = t, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0), (x_1 = 0, x_2 = t, x_3 = 0, \ldots, x_n = 0), \ldots, (x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = t)$ forman la base asociada al sistema de coordenadas locales x_i.

6. COVECTORES Y ESPACIO VECTORIAL DE LOS MISMOS.

El espacio dual T_p^* de T_p (o sea, el conjunto de las aplicaciones lineales $T_p \longrightarrow R^1$), es otro espacio vectorial, también de dimensión n, cuyos elementos se llaman <u>covectores</u>. Se llama el espacio vectorial tangente dual de la variedad V en el punto p.

Para hallar una base de T_p^* se sigue el método general.

Consideremos la base

$$h_i : f \longrightarrow (f_i)_p \qquad \text{(VI. 9)}$$

de T_p y los covectores $\varphi_i \in T_p^*$ definidos por

$$\varphi_i(h_j) = \delta_{ij} \qquad \text{(VI. 10)}$$

Estas condiciones y la de ser φ_i lineales, permiten definir $\varphi_i(h)$ para cualquier h. En efecto, siendo la expresión general de los vectores de T_p,

$$h = \sum_1^h h_i \lambda^i$$

será

$$\varphi_i(h) = \lambda^i \qquad \text{(VI. 11)}$$

y por tanto

$$\varphi(h) = \sum_1^n \varphi(h_i)\varphi_i(h) \qquad \text{(VI. 12)}$$

Es decir, toda φ es combinación lineal de las φ_i con ciertos coeficientes

$\varphi(h_i)$ que dependen de la φ considerada. Por tanto, las φ_i forman una base y las $\varphi(h_i)$ son las componentes de φ respecto de la misma.

Para dar un covector φ hay que dar las componentes

$$\mu_i = \varphi(h_i) \tag{VI. 13}$$

y luego φ es la aplicación lineal que a cada $h \in T_p$ hace corresponder el número real $\sum \mu_i \varphi_i(h)$, o sea

$$\varphi : h \longrightarrow \sum_1^n \mu_i \varphi_i(h) \tag{VI. 14}$$

se puede escribirse

$$\varphi^* = \sum_1^n \mu_i \varphi_i^* \tag{VI. 15}$$

donde, en cada caso, $*$ debe sustituirse por el vector al cual quiere aplicarse φ.

De aquí se deduce la ley de transformación de las componentes μ_i por un cambio de coordenadas $x_i \longrightarrow x_i'$. En efecto, la ecuación (VI. 8), permutando el papel de las x_i, x_i' se puede escribir

$$\lambda^m = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i'}\right)_p \lambda'^i$$

o sea, según (VI. 11)

$$\varphi_m = \sum_1^n \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i'}\right)_p \varphi_i' \tag{VI. 16}$$

Por tanto

$$\varphi * = \sum_{m=1}^n \mu_m \varphi_m^* = \sum_{i,m=1}^n \mu_m \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i'}\right)_p \varphi_i'*$$

de donde

$$\mu_i' = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial x_m}{\partial x_i'}\right)_p \mu_m \tag{VI. 17}$$

Esta es la ley de transformación de las componentes de los vectores covariantes. En cálculo tensorial clásico esta ley se toma como definición de los vectores covariantes.

En notación matricial, si $\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n)$ es una base de T_p^* y $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ son las componentes de un covector φ, será $\varphi = \theta\mu$. Por un cambio de base $\theta' = \theta A$ (A = matriz $n \times n$ no singular) debe ser $\varphi = \theta\mu = \theta'\mu' = \theta A \mu'$ de donde

$$\mu' = A^{-1}\mu$$

que es la ley de transformación de las componentes de los covectores por el cambio de base $\theta' = \theta A$.

Si $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$ es una base de T_p, la base asociada θ de T_p^* se define por las relaciones (VI. 10), o sea $\theta^i(e_j) = \delta^i_j$. Por un cambio de base $e' = Ae$, la base asociada sufrirá un cambio $\theta' = \theta B$; queremos ver la relación entre A y B. Si para simplificar la escritura convenimos en que los índices repetidos indican que van sumados de 1 a n, de acuerdo con el criterio usual en cálculo tensorial clásico, de la relación $\theta'^i(e_j) = \delta^i_j$, se deduce

$$\theta'^i (a_{jm} e_m) = a_{jm}\, \theta'^i (e_m) = a_{jm}\, b_{si}\, \theta^s (e_m) = a_{jm}\, b_{si}\, \delta^s_m = a_{jm}\, b_{mi} = \delta_{ij}$$

lo que significa que es $AB = E$, o sea, $B = A^{-1}$.

7. PRODUCTO ESCALAR.

Definición VI. 2. Dado un vector contravariante $h : f \longrightarrow \sum f_i \lambda^i$ y uno covariante $\varphi : h \longrightarrow \sum \mu_i \varphi_i$, se llama <u>producto escalar</u> de los mismos, al número real

$$\langle \varphi, h \rangle = \varphi(h) = \sum_1^n \mu_i \lambda^i \qquad \text{(VI. 18)}$$

Puesto que el primer miembro no depende del sistema de coordenadas, resulta que debe ser

$$\sum_{1}^{n} \mu_i \lambda^i = \sum_{1}^{n} \mu'_i \lambda'^i$$

para cualquier sistema de coordenadas, como puede comprobarse directamente a partir de las fórmulas de transformación (VI. 8) y (VI. 17).

8. DIFERENCIAL DE UNA FUNCION.

Dada una función $f \in \mathcal{F}(p)$, queda definido un covector $(df)_p$ por la relación

$$(df)_p h = h(f) \qquad \text{(VI. 19)}$$

que a cada vector $h \in T_p$ hace corresponder $h(f) \in R^1$. En efecto, se tiene

$$(df)_p(\lambda h_1 + \mu h_2) = (\lambda h_1 + \mu h_2)f = \lambda h_1(f) + \mu h_2(f) = \lambda (df)_p h_1 + \\ + \mu (df)_p h_2$$

y por tanto $(df)_p$ es una aplicación lineal de T_p en R^1.

Definición VI. 3. El covector $(df)_p$ definido por (VI. 19) se llama el diferencial de f en el punto p.

En particular, fijando un sistema local de coordenadas que contenga el punto p, para $f = x_i$, es

$$(dx_i)_p h = h(x_i)$$

y teniendo en cuenta (VI. 5) y (VI. 11) resulta

$$(dx_i)_p h = \lambda^i = \varphi_i(h) \qquad \text{(VI. 20)}$$

y por tanto para cualquier covector φ, según (VI. 15), es

$$\varphi^* = \sum_{1}^{n} \mu_i \, (dx_i)_p^*$$

es decir, <u>las diferenciales</u> $(dx_i)_p$ <u>forman una base de</u> T_p^* .

También, juntando (VI. 19) con (VI. 5) resulta

$$(df)_p \; h = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p \; h \qquad \text{(VI. 21)}$$

que es la fórmula clásica del diferencial de una función.

Resumiendo: supuesto definido en un entorno de p un sistema local de coordenadas x_i , el diferencial de una función f es la aplicación lineal que a todo vector contravariante de componentes λ^i , hace corresponder el número real

$$(df)_p \; h = \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \lambda^i \qquad \text{(VI. 22)}$$

En particular, el diferencial de x_i es la aplicación que a todo vector h de componentes λ^i, hace corresponder la componente λ^i .

De aquí se deduce, teniendo en cuenta (VI. 8), que por un cambio de coordenadas $x_i \longrightarrow x_i'$, debe ser

$$(dx_i')_p = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_m}\right)_p (dx_m)_p \, . \qquad \text{(VI. 23)}$$

9. ESPACIO DE LOS VECTORES TANGENTES.

Sea V una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión n .

Definición VI. 4. Se llama <u>espacio de los vectores tangentes</u> a V al conjunto.

$$T(V) = \bigcup_{p \in V} T_p \qquad \text{(VI. 24)}$$

unión de los espacios vectoriales tangentes a V en todos sus puntos p .

Teorema VI.4.

<u>$T(V)$ es una variedad diferenciable de clase C^{r-1} y dimensión $2n$</u>.

Demostración. Un punto de $T(V)$ es un par (p, h) con $p \in V$, $h \in T_p$. Para todo p existe un sistema de coordenadas locales x_i y una base asociada h_i de T_p, respecto de la cual es $h = \sum h_i \lambda^i$; recordar (VI.4). La aplicación

$$(p, h) \longrightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n) \qquad \text{(VI.25)}$$

representa en R^{2n} a los puntos de $T(V)$ correspondientes al abierto de V para el cual valen las coordenadas locales x_i. La correspondencia (VI.25) es localmente biyectiva y por tanto permite inducir a $T(V)$ la topologia natural de R^{2n}. Respecto de esta topologia $T(V)$ resulta un espacio separado; en efecto, sean (p, h), (p', h') dos puntos distintos de $T(V)$; si $p = p'$, las coordenadas x_i son las mismas y basta tomar entornos distintos de h, h' en $T_p = T_{p'}$ para tener entornos disjuntos en $T(V)$. Si $p \neq p'$, basta tomar entornos disjuntos de p y p' en V.

Para ver que $T(V)$ es una variedad diferenciable, se observa que si en otra carta distinta de la (VI.25) es

$$(p, h) \longrightarrow (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; \lambda'^1, \lambda'^2, \ldots, \lambda'^n) \qquad \text{(VI.26)}$$

las fórmulas de transformación entre las coordenadas de un mismo punto de $T(V)$ son las correspondientes a las aplicaciones (recordar (VI.8))

$$x_i \longrightarrow x'_i \quad , \quad \lambda^i \rightarrow \lambda'^i = \sum_1^n \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_m}\right)_p \lambda^m \quad . \qquad \text{(VI.27)}$$

La aplicación $x_i \longrightarrow x'_i$ es de clase C^r por ser V de clase C^r, con lo cual la aplicación (VI,27) resulta de clase C^{r-1}. Queda así probado el teorema.

Definición VI.5. Se llama <u>espacio de los covectores tangentes</u>, al conjunto

$$T^*(V) = \bigcup_{p \in V} T_p^* \qquad \text{(VI.28)}$$

unión de los espacios covectoriales tangentes a V en todos sus puntos p.

Igual que antes se demuestra que $T^*(V)$ es una variedad diferenciable de clase C^{r-1} y dimensión $2n$.

Teorema VI. 5.

<u>La variedad $T(V)$ es orientable.</u>

Demostración. Según (VI. 27) el jacobiano del cambio de coordenadas $(x, \lambda) \rightarrow$ $\longrightarrow (x', \lambda')$ vale

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x')}{\partial(x)} & 0 \\ * & \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x')}{\partial(x)} \right|^2 > 0 \qquad \text{(VI. 29)}$$

donde $\partial(x')/\partial(x)$ representa el jacobiano de la transformación $x \longrightarrow x'$. Según la Definición IV. 6, la desigualdad anterior prueba el teorema.

Corolario de este teorema y del teorema IV. 1 es que para las variedades V no orientables, los espacios $T(V)$ no son nunca los productos $V \times T_p$.

Conviene considerar con detalle la diferencia entre $T(V)$, definida por (VI. 24) y el producto $V \times T_p$ (p un punto fijo de V). Naturalmente que aquí, como en todo lo precedente, el espacio vectorial T_p se considera como una variedad diferenciable equivalente a R^n, con la identificación natural: vector de componentes λ^i = punto de coordenadas λ^i.

Para la variedad producto $V \times T_p$, el espacio vectorial T_p es siempre el mismo y los cambios de coordenadas $x \longrightarrow x'$ en V no influyen en T_p. Por otra parte, un cambio de coordenadas en T_p conduce a ecuaciones de la forma $\lambda'^i = \sum_m a_{im} \lambda^m$ con los coeficientes a_{im} independientes de x. Por tanto el jacobiano de un cambio de coordenadas en $V \times T_p$ es de la forma $\left| \partial(x')/\partial(x) \right| \left| a_{im} \right|$, expresión que ya no es un cuadrado, como en (VI. 29) y en consecuencia $V \times T_p$ puede o no ser orientable. Como $T_p \simeq R^n$ es orientable, el producto $V \times T_p$ será orientable o no según lo sea V.

Si V es orientable, puede ocurrir que sea $T(V) = V \times T_p$; en este caso se dice que V es una variedad paralelizable. Si en cambio $T(V) \neq V \times T_p$, la variedad V se llama no paralelizable.

Para las variedades paralelizables, fijada una base h_i de T_p, se tienen en cada punto de V, bien determinados, los n vectores tangentes h_i. Cada uno de estos vectores es un punto de $V \times T_p = T(V)$ y por tanto ellos varían con continuidad sobre V Recíprocamente, si V es tal que admite en cada punto n vectores tangentes h_i, independientes entre si, que varian con continuidad sobre V, se pueden tomar en cada punto estos vectores como base del espacio vectorial tangente correspondiente y por tanto $T(V) = V \times T_p$.

De aquí se deduce:

Teorema VI. 6.

Las variedades de grupo son siempre paralelizables. En efecto, basta tomar en un entorno de la identidad los n vectores tangentes h_i y tomar luego en todo otro punto los trasladados por la operación correspondiente del grupo.

De aquí se deduce, según el teorema VI. 5 y el corolario del teorema IV. 1, que:

Teorema VI. 7.

Las variedades de grupo son orientables.

Ejemplos.

1. El toro T^2 es una superficie paralelizable. Basta tomar en cada punto los dos vectores tangentes al meridiano y al paralelo correspondientes para tener dos vectores tangentes en cada punto de la superficie que varian con continuidad. Más generalmen-

te, es inmediato ver que el producto de variedades paralelizables es paralelizable. En consecuencia, el toro n dimensional $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ (n factores) es paralelizable, por serlo la circunferencia S^1.

2. La esfera ordinaria S^2 no es paralelizable. En efecto, más adelante demostraremos (§ 9 N° 6) que sobre ella no existe un campo continuo de vectores tangentes (y por tanto tampoco un campo de pares de vectores tangentes). En consecuencia: la S^2 no es variedad de grupo.

3. Recordemos que la norma de un cuaternión $\alpha = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ es $N(\alpha) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$. Por tanto, los cuaterniones de norma unidad están representados por puntos de S^3. De aquí y de la relación $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta)$ se deduce que S^3 es una variedad de grupo (es la variedad del grupo $\ddot{O}^+(3)$, § 5, N° 3). Se puede demostrar que S^1 y S^3 son las únicas esferas que son variedades de grupo. (H. Samelson, Comm. Math. Helvetici, 13, 1940, 144-155).

4. La esfera S^7 es paralelizable, pero no es variedad de grupo. (Ver Steenrod, Topology of Fiber Bundles, Princeton 1951).

5. Sobre S^{2m-1} existe siempre un campo continuo de vectores tangentes. En efecto, sea el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{2m})$ de la esfera $\sum x_i^2 = 1$ (que es la S^{2m-1}). En este punto, el vector $(-x_{m+1}, -x_{m+2}, \ldots, -x_{2m}, x_1, \ldots \ldots, x_m)$ es perpendicular al radio y por tanto es tangente a S^{2m-1}, siendo evidente que varia con continuidad sobre esta variedad.

10. CAMPOS DE VECTORES.

Sea $V(E, \mathfrak{F})$ una variedad diferenciable de clase C^∞ Un campo de vectores sobre V es una aplicación X tal que a cada punto $p \in V$ hace corresponder un vec tor X_p de T_p.

Indicando con Xf a la función que a cada punto p hace corresponder el número real $X_p f$, resulta que un campo de vectores X puede también definirse como una aplicación $f \longrightarrow Xf$ de $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ que sea lineal y una diferenciación, es decir, que cumpla

$$X(af_1 + bf_2) = a\, Xf_1 + b\, Xf_2\,, \quad X(fg) = g\, Xf + f\, Xg \tag{VI. 30}$$

con $a, b \in R^1$, $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$.

Dados dos campos de vectores X, Y sobre V, se indica con XY a la aplicación $\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$ resultante de componer la Y con la X. Esta aplicación no es un campo vectorial puesto que no es una diferenciación. En efecto, se tiene

$$XY(fg) = X(g\, Yf + f\, Yg) = Yf\, Xg + g\, XYf + Yg\, Xf + f\, XYg$$

y para que fuera una diferenciación no deberían estar los sumandos primero y tercero.

En cambio la combinación $\left[XY\right] = XY - YX$ sí es una diferenciación, como es inmediato comprobar, y como además es lineal, resulta un campo de vectores.

Al operador $\mathcal{L}(X)$ que al campo de vectores Y le hace corresponder el campo $\left[XY\right]$ se llama la <u>derivada de Lie de</u> Y con respecto del campo X, o sea, por definición

$$\mathcal{L}(X)\, Y = \left[XY\right].$$

Como ejercicio se pueden comprobar fácilmente las relaciones

a) $\left[XY\right] = -\left[YX\right]$

b) $\left[X(YZ)\right] + \left[Y(XZ)\right] + \left[Z(XY)\right] = 0$ (identidad de Jacobi).

<u>Expresión mediante coordenadas</u>. Dado un sistema de coordenadas locales x_i, un campo de vectores A está dado por

$$A = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

con $a^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^\infty$. Si $B = \sum_j b^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ es otro campo de vectores, resulta

$$AB = \sum_{i,j} a^i b^j_{,i} \frac{\partial}{\partial x_j} + a^i b^j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\left[A\,B\right] = AB - BA = \sum_{i,j} (a^i b^j_{,i} - b^i a^j_{,i}) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde con una coma se ha indicado la derivada parcial ordinaria. La última expresión es también la derivada de Lie de B respecto de A. En notación clásica, la derivada de Lie del vector b^i respecto del campo a^i es

$$L^j b = \sum_i (a^i b^j_{,i} - b^i a^j_{,i}).$$

11. APLICACIONES ENTRE VARIEDADES DIFERENCIABLES. DIFERENCIAL DE UNA APLICACION.

Ya sabemos lo que es una aplicación diferenciable de un abierto de R^n en R^m (Definición II. 8).

Sean ahora dos variedades diferenciables $V(E, \mathfrak{F})$ y $V'(E', \mathfrak{F}')$ de clase C^r y dimensiones n y m respectivamente.

Definición VI. 6. Una aplicación $\Phi : E \longrightarrow E'$ se dice que es una aplicación diferenciable de clase C^r de V en V' (y se escribe también $\Phi : V \longrightarrow V'$), si para todas las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de V y $(U'_\beta, \varphi'_\beta)$ de V' tales que $\Phi(U_\alpha) \subset \subset U'_\beta$, las aplicaciones

$$\varphi'_\beta \circ \Phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \varphi'_\beta(\Phi(U_\alpha)) \qquad \text{(VI. 30)}$$

son de clase C^r.

Obsérvese que las aplicaciones (VI. 30) son aplicaciones de abiertos de R^n en

R^m .

Analogamente a la Definición II. 9 , una aplicación Φ de un abierto de V en un abierto de V' se dice que es un difeomorfismo; si lo es la aplicación (VI. 30) .

Sean $p, p' = \Phi(p)$ un par de puntos correspondientes. La aplicación Φ, supuesta de clase C^r $(r \geqslant 1)$, subordina una aplicación

$$\Phi_* : T_p \longrightarrow T_{p'} \tag{VI. 31}$$

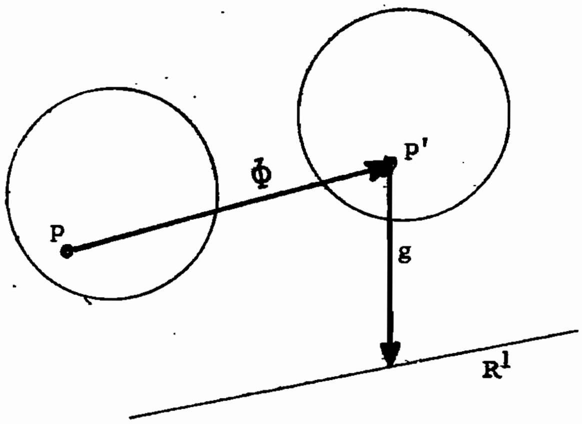
definida por

$$\Phi_*(h)(g) = h(g \circ \Phi) \tag{VI. 32}$$

para todo $h \in T_p$ y toda función $g \in \mathcal{F}'(p')$. Esto significa que el vector de $T_{p'}$ correspondiente al h es la aplicación que a toda función $g \in \mathcal{F}'(p')$ hace corresponder el número real $h(g \circ \Phi)$.

Para ver que $\Phi_*(h)(g)$ es efectivamente un vector de $T_{p'}$ hay que demostrar que es lineal y que es una derivación:

a) Es lineal. Teniendo en cuenta (VI. 32) y la linealidad de h es



$$\Phi_*(h)(\lambda g + \mu g_1) = h((\lambda g + \mu g_1) \circ \Phi) = \lambda h(g \circ \Phi) + \mu h(g_1 \circ \Phi) = \lambda \Phi_*(h) g + \mu \Phi_*(h) g_1 .$$

b) Es una derivación. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_*(h)(g\, g_1) &= h(g\, g_1 \circ \Phi) = h((g \circ \Phi)(g_1 \circ \Phi)) = \\ &= h(g \circ \Phi) \cdot (g_1 \circ \Phi)_p + (g \circ \Phi)_p\, h(g_1 \circ \Phi) \\ &= \Phi_*(h) g \cdot g_1(p') + \Phi_*(h) g_1 \cdot g(p') . \end{aligned}$$

Definición VI. 7. La aplicación Φ_* definida por (VI. 32) se llama la diferencial de la aplicación Φ.

Si en entornos de p, p' se suponen sendos sistemas de coordenadas locales x_i, y_α $(i = 1, 2, \ldots, n; \alpha = 1, 2, \ldots, m)$ y $y_\alpha = y_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las ecuaciones de Φ, al vector

$$h : f \longrightarrow \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \lambda^i$$

de componentes λ^i, corresponde el vector

$$\Phi_*(h) : g \longrightarrow \sum_{\alpha, i} \frac{\partial g}{\partial y_\alpha} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \lambda^i$$

de componentes

$$\lambda'^\alpha = \sum_i \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \lambda^i. \tag{VI. 33}$$

En estas fórmulas y en las siguientes las derivadas parciales se entienden tomadas en el punto p.

La aplicación Φ_*, junto con la Φ, define una aplicación $T(V) \longrightarrow T(V')$ que en coordenadas locales se expresa

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n) \longrightarrow (y_1, \ldots, y_m; \sum \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \lambda^i, \ldots \ldots, \sum \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \lambda^i)$$

Por tanto Φ_* queda determinada por la matriz $(\partial y_\alpha / \partial x_i)$ de tipo $m \times n$.

Para que la correspondencia $T_p \longrightarrow T_{p'}$ sea inyectiva, o sea, para que en (VI. 33) todo vector λ'^α sea homólogo de un solo λ^i, debe ser $m \geqslant n$ y valer n la característica de la matriz $(\partial y_\alpha / \partial x_i)$. En efecto, si fuera

$$\lambda'^\alpha = \sum_1^n \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \lambda^i = \sum \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \lambda^i_1$$

sería

$$\sum_1^n \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} (\lambda^i - \lambda^i_1) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

y para que de esta relación se pueda deducir que $\lambda_1^i = \lambda^i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ es necesario y suficiente que sea $m \geqslant n$ y que la característica de $(\partial y_\alpha / \partial x_i)$ sea n.

Definición VI. 8. Una aplicación $\Phi : V \longrightarrow V'$ se dice que es <u>regular</u> en el punto p, si su diferencial $\Phi_* : T_p \longrightarrow T_{p'}$ es inyectiva en p.

Se dice que es regular en V si lo es en todo punto $p \in V$.

Para $V = R^n$, $V' = R^m$, esta definición coincide con la Definición II. 9.

OBSERVACION. En el caso de ser $V' = R^1$, la aplicación $\Phi : V \longrightarrow R^1$ es una función numérica sobre V y Φ_* es la diferencial de Φ del Nº 7. En efecto, en este caso la única y_α es $y(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi$ y según (VI. 33) es la aplicación que al vector de componentes λ^i hace corresponder el número real

$$\lambda' = \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \lambda^i$$

con las derivadas parciales tomadas en p; por tanto, según (VI. 23), es

$$\Phi_* = d\Phi .$$

12. APLICACION ADJUNTA.

Veamos si la aplicación Φ determina también una aplicación lineal entre T_p^* y $T_{p'}^*$.

La manera natural de definir una aplicación $T_p^* \longrightarrow T_{p'}^*$ sería hacer corresponder a cada covector φ, que a h hace corresponder $\varphi(h) \in R^1$, el covector φ' que al vector h' hace corresponder el mismo número real $\varphi(h)$, o sea, $\varphi(h') = \varphi(h)$, siendo $h' = \Phi_*(h)$. Sin embargo esto no es posible en general, pues puede haber vectores $h' \in T_{p'}$ que no sean homólogos de ningún h y para ellos no se sabría que valor dar a $\varphi'(h')$.

En cambio se puede definir la aplicación $\Phi^* : T^*_{p'} \longrightarrow T_p$ que al covector φ' hace corresponder el covector φ que a h hace corresponder $\varphi(h) = \varphi'(h') \in$ $\in R^1$, siendo $h' = \Phi_*(h)$.

Definición VI. 9. Se llama aplicación adjunta de Φ_* y se representa por Φ^*, a la aplicación $T^*_{p'} \longrightarrow T^*_p$ definida por $\varphi' \longrightarrow \varphi$ tal que

$$\varphi(h) = \varphi'(h') \qquad \text{(VI. 24)}$$

siendo $h' = \Phi_*(h)$.

En coordenadas locales, si $h = (\lambda^i)$, $\varphi = (\mu_i)$, $h' = (\lambda'^{\alpha})$, $\varphi' = (\mu'_\alpha)$ donde se indican entre paréntesis a las componentes del vector o covector respectivo, según (VI. 8) es

$$\varphi(h) = \sum \mu_i \lambda^i , \quad \varphi'(h') = \sum \mu'_\alpha \lambda'^{\alpha} = \sum_{\alpha,\, i} \mu'_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \lambda^i$$

y por tanto de la condición (VI. 24) se deduce

$$\Phi^* : \mu_i = \sum_\alpha \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_i} \mu'_\alpha \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n . \qquad \text{(VI. 25)}$$

Es decir, la aplicación adjunta Φ^* hace corresponder al covector de componentes μ'_α de $T^*_{p'}$ el covector de componentes μ_i de T^*_p dadas por (VI. 25).

NOTA. Así como Φ_*, junto con Φ, da una aplicación $T(V) \longrightarrow T(V')$, Nº 9, la aplicación Φ^* no puede, en general completarse a $T^*(V') \longrightarrow T^*(V)$, pues si Φ no es inyectiva, no todo $p' \in V'$ tiene correspondiente único $p \in V$.

13. TENSORES EN UN PUNTO.

Definidos T_p y T^*_p, se establece la siguiente

Definición VI.10. Se llama <u>tensor</u> r veces contravariante y m veces covariante de la variedad diferenciable V en el punto p (diremos que es un tensor de tipo (r,m)), a todo elemento del espacio vectorial producto tensorial

$$T_p \otimes \overbrace{\ldots}^{r} \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes \overbrace{\ldots\ldots}^{m} \otimes T_p^* \qquad \text{(VI.26)}$$

con r factores T_p y m factores T_p^*.

Este espacio producto se representa por $T_m^r(p)$. En particular es $T_o^1(p) = T_p$, $T_1^o(p) = T_p^*$.

Dada una base de $T_m^r(p)$ todo tensor de tipo (r,m) tendrá n^{r+m} componentes. Interesa ver como se transforman estas componentes por un cambio de coordenadas $x_i \longrightarrow x_i'$.

Para fijar las ideas tomemos un caso particular, por ejemplo el T_2^1. Sean a_{jk}^i las componentes de un tensor en el sistema de coordenadas x_i. No ponemos de manifiesto el punto p para simplificar la notación, pero debe entenderse que nos referimos siempre a un punto fijo p de V. La ley de transformación de las a_{jk}^i debe ser la misma que la del producto $\lambda^i \mu_j \nu_k$ de un vector contravariante y dos vectores covariantes. Por tanto, según (VI.8) y (VI.17) será

$$a'^i_{jk} = \sum_{h,l,s=1}^{n} \frac{\partial x_i'}{\partial x_h} \frac{\partial x_l}{\partial x_j'} \frac{\partial x_s}{\partial x_k'} a_{ls}^h \qquad \text{(VI.27)}$$

La regla es completamente general, es decir:

Las componentes de un tensor de tipo (r,m) se transforman por un cambio de coordenadas lo mismo que el producto de r vectores contravariantes y m vectores covariantes.

Naturalmente que esto no quiere decir que todo tensor de tipo (r,m) sea el producto de r vectores contravariantes y m covariantes, lo cual no es cierto, como es evidente de la misma definición de tensor, o bien como se deduce de la observación de que un tensor de tipo (r, m) tiene n^{r+m} componentes independientes, mientras que las componentes del producto de $m+r$ vectores se deducen todas de las $n(m+r)$ componentes de estos vectores.

El cálculo tensorial clásico define los tensores como conjuntos de componentes sujetas a la ley de transformación anterior por un cambio de coordenadas. Esta definición es útil para el estudio del álgebra tensorial. Puede verse, por ejemplo:

A. LICHNEROWICZ, Elements de Calcul Tensoriel, 1951;

L. A. SANTALO, Vectores y Tensores, EUDEBA, 1961 (Cap. X).

Campos de tensores. Si en cada punto $p \in V$ se tiene un tensor de tipo determinado, cuyas componentes respecto de los sistemas de coordenadas x_i, x'_i de dos cartas que contienen un mismo punto, se transforman según la ley de los tensores (la (VI. 27) para el caso de tensores de tipo $(1,2)$), se dice que se tiene un campo de tensores o, simplemente, un tensor sobre V.

En este caso, si V es de clase C^r y las componentes del tensor son de clase C^s, con $s \leqslant r-1$, se dice que el tensor o el campo de tensores son de clase C^s. Obsérvese que, siendo $s \leqslant r-1$, la clase C^s es independiente del sistema de coordenadas.

VII. FORMAS DIFERENCIALES EXTERIORES

1. EL SIMBOLO $\epsilon^{j_1, j_2, \ldots, j_q}_{i_1, i_2, \ldots, i_q}$.

Sean i, j índices que pueden tomar los valores $1, 2, \ldots, q$. Las dos permutaciones $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$, $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$ de los números $1, 2, \ldots, q$ se dice que son de la misma paridad si se puede pasar de una a otra por un número par de trasposiciones (permutación de dos índices entre sí); en caso contrario se dice que son de distinta paridad.

Muchas veces es útil el siguiente símbolo

$$\epsilon^{j_1, j_2, \ldots, j_q}_{i_1, i_2, \ldots, i_q} \begin{cases} = +1 & \text{si } (j_1, j_2, \ldots, j_q), (i_1, i_2, \ldots, i_q) \\ & \text{son de la misma paridad,} \\ = -1 & \text{si son de distinta paridad,} \\ = 0 & \text{si en una de las permutaciones hay algún} \\ & \text{índice repetido.} \end{cases} \tag{VII. 1}$$

En particular se suele también poner

$$\epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_q} = \epsilon^{1\, 2 \ldots\ldots q}_{i_1 i_2 \ldots\ldots i_q}. \tag{VII. 2}$$

Este símbolo sirve, por ejemplo, para expresar en forma de suma el desarrollo de un determinante. En efecto es

$$|u| = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots\dots & u_1^q \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots\dots & u_2^q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_q^1 & u_q^2 & \dots\dots & u_q^q \end{vmatrix} = \sum_{i_1,\dots,i_q} \epsilon_{i_1\dots i_q} \; u_1^{i_1} \dots u_q^{i_q} \qquad \text{(VII. 3)}$$

donde la suma está extendida a todas las q permutaciones de los índices.

Más generalmente vale

$$|u| \; \epsilon_{j_1\dots\dots j_q} = \sum_{i_1,\dots,i_q} \epsilon_{i_1\dots i_q} \; u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_q^{i_q} \qquad \text{(VII. 4)}$$

y también

$$|u| = \sum_{i_1,\dots i_q} \epsilon_{i_1\dots\dots i_q}^{j_1\dots\dots j_q} \; u_{j_1}^{i_1} \, u_{j_2}^{i_2} \dots u_{j_q}^{i_q}$$

donde se suman los índices i pero no los j .

2. FORMAS ALTERNADAS.

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita n sobre los reales R^1 . Indicaremos por E^q al espacio producto $E \times E \times E \times \dots \times E$ de q factores iguales.

Definición VII. 1. Una aplicación $f : E \longrightarrow R^1$ se dice que es lineal, si se cumple

$$f(\alpha\, X + \beta\, Y) = \alpha\, f(X) + \beta\, f(Y) \qquad \text{(VII. 5)}$$

para todos $X, Y \in E$, α , $\beta \in R$.

Definición VII. 2. Una aplicación $f : E^q \longrightarrow R^1$ se dice que es q-lineal si es lineal para cada uno de los factores, es decir, si se cumple

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, \alpha X_i + \beta X_i', X_{i+1}, \ldots, X_q) = \tag{VII. 6}$$
$$\alpha f(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_q) + \beta f(X_1, \ldots, X_i', \ldots, X_q)$$

cualesquiera que sean $i = 1, 2, \ldots, q$, $X_i \in E$, $\alpha, \beta \in R$.

Las aplicaciones q-lineales se llaman también formas q-lineales sobre E^q. Para $q = 2$ se llaman formas o aplicaciones <u>bilineales</u>. En este caso obsérvese la identidad

$$f(X+Y, X+Y) = f(X,X) + f(X,Y) + f(Y,X) + f(Y,Y). \tag{VII. 7}$$

Definición VII. 3. Una forma q-lineal f se dice que es <u>alternada</u> si se anula cada vez que dos variables toman el mismo valor.

Para abreviar se las llama también formas q-alternadas.

Si $f(X, Y)$ es alternada, de (VII. 7) se deduce

$$f(X, Y) = -f(Y,X). \tag{VII. 8}$$

En general, para el caso de más variables, escribiendo (VII. 7) para dos cualesquiera de ellas, resulta que las formas alternadas cambian de signo al permutar entre si dos cualesquiera de sus variables. Se puede por tanto escribir

$$f(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_q}) = \epsilon_{i_1 \ldots i_q} f(X_1, X_2, \ldots, X_q) \tag{VII. 9}$$

que se reduce a (VII. 8) para $q = 2$.

Sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una base de E. Será

$$X_i = \sum_{h=1} x_h^i E_h \tag{VII. 10}$$

y por tanto, para toda forma q-lineal vale el desarrollo

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_q) = \sum_{h_1, \ldots, h_q} a_{h_1 h_2 \ldots h_q} x_{h_1}^1 x_{h_2}^2 \ldots x_{h_q}^q \tag{VII. 11}$$

donde se ha puesto

$$a_{h_1 h_2 \ldots h_q} = f(E_{h_1}, E_{h_2}, \ldots, E_{h_q}) . \qquad \text{(VII. 12)}$$

Si f es alternada y $q > n$, en (VII. 12) alguno de los E_h se debe repetir y por tanto los coeficientes $a_{h_1 \ldots h_q}$ son todos nulos. De aquí: si el espacio vectorial E tiene dimensión n, todas las formas q-alternadas con $q > n$ son nulas.

Supongamos $q \leqslant n$. La fórmula (VII. 11) se puede escribir

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_q) = \sum_{h_1 < h_2 < \cdots < h_q} a_{h_1 \ldots h_q} \sum_{j_1 \ldots j_q} \epsilon^{h_1 \ldots h_q}_{j_1 \ldots j_q} x^1_{j_1} \ldots x^q_{j_q}$$

o bien, poniendo

$$\Delta(h_1, h_2, \ldots, h_q) = \begin{vmatrix} x^1_{h_1} & x^1_{h_2} & \ldots & x^1_{h_q} \\ x^2_{h_1} & x^2_{h_2} & \ldots & x^2_{h_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^q_{h_1} & x^q_{h_2} & \ldots & x^q_{h_q} \end{vmatrix} \qquad \text{(VII. 13)}$$

y teniendo en cuenta (VII. 4),

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_q) = \sum_{h_1 < \ldots < h_q} a_{h_1 \ldots h_q} \Delta(h_1, \ldots, h_q) \qquad \text{(VII. 14)}$$

Es decir: las formas q-alternadas $E^q \longrightarrow R^1$ son combinaciones lineales de los determinantes de orden q tomados de la matriz de tipo $q \times n$ formada por las componentes de los q vectores variables de E.

Como el número de estos determinantes es $\binom{n}{q}$, resulta que las formas q-alternadas sobre un espacio vectorial de dimensión n, forman otro espacio vectorial de dimensión $\binom{n}{q}$.

PRODUCTO EXTERIOR.

Sea f una forma q-alternada sobre E^q y g una forma p-alternada sobre E^p.

El producto ordinario fg no es en general una forma alternada; por ejemplo, $f(X,Y)g(X,Z)$ no es en general nulo a pesar de tener dos variables iguales.

Vamos a definir un producto, llamado producto exterior o de Grassmann y notado $\wedge$, que da por resultado una forma (q+p)-alternada sobre E^{q+p}. Se define por la fórmula

$$f \wedge g (X_1, \ldots, X_{q+p}) = \sum \epsilon_{i_1 \ldots i_q \ldots i_{q+p}} f(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_q})\, g(X_{i_{q+1}}, \ldots, X_{i_{q+p}}) \tag{VII. 15}$$

donde la suma está extendida a todos los valores $1, 2, \ldots, q+p$ de los índices con las condiciones

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_q \quad , \quad i_{q+1} < \ldots < i_{q+p} . \tag{VII. 15*}$$

Esta forma es alternada. Para verlo observemos primero que, siendo alternadas , g las condiciones (VII. 15)* pueden suprimirse con sólo agregar en el segundo miembro el factor $(p!\, q!)^{-1}$. En estas condiciones, si dos vectores son coincidentes $X_i = X_j$, en la suma del segundo miembro son nulos los sumandos en que los dos vectores pertenecen a una misma forma f ó g; para los sumandos en que pertenecen a distinta forma, el producto $f(\ldots X_i \ldots)g(\ldots X_j \ldots)$ es factor común de la suma $\epsilon_{\ldots i \ldots j \ldots} + \epsilon_{\ldots j \ldots i \ldots}$ que también es nula. Por consiguiente siempre que sea $X_i = X_j$ es $f \wedge g (\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots) = 0$, lo que prueba que $f \wedge g$ es un (q+p)-forma alternada.

El producto exterior tiene las siguientes propiedades:

I. Asociativa: $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$;

II. Distributiva: $f \wedge (g+h) = f \wedge g + f \wedge h$

III. Anticonmutativa:

$$f \wedge g = (-1)^{qp}\, g \wedge f \tag{VII. 16}$$

Las dos primeras son inmediatas y la última resulta al observar que si en $\epsilon_{i_q \ldots i_{q+p}}$ se quieren poner los p últimos índices a que sean los primeros, cada uno de ellos debe adelantarse q lugares, lo que significa q cambios de signo; luego en total hay qp cambios de signo.

Por la propiedad III el producto exterior de dos formas iguales de grado impar es nulo.

Este producto exterior permite escribir de otra manera, muy útil, la expresión general (VII. 14) de una forma q-alternada. Consideremos las formas lineales

$$f^h : X \longrightarrow x_h \,, \quad \text{o sea} \quad f^h(X) = x_h \qquad \text{(VII. 17)}$$

es decir, las formas que a un vector X hacen corresponder su componente x_h ($h = 1, 2, \ldots, n$).

Según (VII. 15), es

$$f^h \wedge f^k = \sum_{h,k} \epsilon_{hk}\, x_h\, x_k = \Delta(h,k)$$

y, en general,

$$f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_q} = \Delta(i_1, i_2, \ldots, i_q)$$

Por tanto se puede escribir

$$f = \sum_{i_1 < \cdot\cdot < i_q} a_{i_1 \ldots i_q}\; f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots\ldots \wedge f^{i_q} .$$

Análogamente será

$$g = \sum_{j_1 < \cdot\cdot < j_p} b_{j_1 \ldots j_p}\; f^{j_1} \wedge f^{j_2} \wedge \ldots\ldots \wedge f^{j_p} .$$

y el producto exterior se expresa entonces, simplemente (por la propiedad distributiva)

$$f \wedge g = \sum_{\substack{i_1 < \cdot\cdot < i_q \\ j_1 < \cdot\cdot < j_p}} a_{i_1 \ldots i_q}\, b_{j_1 \ldots j_p}\, f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_p} . \qquad \text{(VII. 18)}$$

4. FORMAS DIFERENCIALES.

Definición VII.4. Se llama forma diferencial exterior de grado q en un punto p de una variedad diferenciable V, a toda forma q-alternada sobre el espacio T_p^q $T = T_p \times T_p \times \ldots\ldots \times T_p$ (potencia q del espacio vectorial tangente T_p).(*)

Supuesto un sistema local de coordenadas, la diferencial $(dx_i)_p$ es precisamente la aplicación que a todo X hace corresponder su componente x_i (§ 6 Nº 7). Por tanto toda forma diferencial exterior de grado q se escribe en la forma

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_q} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \tag{VII.19}$$

donde hemos prescindido de indicar el punto p en las diferenciales para no complicar la notación.

La forma φ puede estar definida en un dominio D de V; entonces los coeficientes $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ son funciones de p: se llaman componentes de φ en el sistema de coordenadas x_i.

Las formas diferenciales exteriores de grado uno se llaman formas de Pfaff. Según § 6 (21) un ejemplo de forma de Pfaff lo constituyen las diferenciales de las funciones diferenciables,

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i . \tag{VII.20}$$

Naturalmente que no toda forma de Pfaff es la diferencial de una función.

Definición VII.5. Una forma diferencial φ de grado q se llama descomponible si es el producto exterior de q formas diferenciales df_i, o sea,

$$\varphi = df_1 \wedge df_2 \wedge \ldots\ldots \wedge df_q \tag{VII.21}$$

siendo f_i funciones diferenciables.

(*) Para $q = 1$, la condición de alternada no tiene sentido; basta que la forma sea lineal. Además, no confundir esta notación de T_p^q con la de § 6 Nº 11; allí se trataba de un producto tensorial y aquí de un producto cartesiano de espacios.

5. CAMBIOS DE COORDENADAS EN LAS FORMAS DIFERENCIALES.

Si en la forma (VII. 19) se hace el cambio de coordenadas

$$x_i = x_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(VII. 22)}$$

es, según (VI. 23),

$$dx_i = \sum_{h=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x'_h} dx'_h$$

con las derivadas parciales tomadas siempre en el punto p. De aquí, por la propiedad distributiva del producto exterior

$$\varphi = \sum_{i_1 < \ldots < i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_q} \sum_{h_1, \ldots, h_q} \frac{\partial (x_{i_1} \ldots x_{i_q})}{\partial (x'_{h_1} \ldots x'_{h_q})} dx'_{h_1} \wedge \ldots \wedge dx'_{h_q} \qquad \text{(VII. 23)}$$

La aparición de los jacobianos en la segunda suma nos dice que por cambios de coordenadas las formas diferenciales exteriores se transforman como las expresiones que aparecen bajo el signo de integral múltiple en el analisis clásico.

Es decir, en los integrandos de las integrales múltiples, del analisis clásico, el producto de diferenciales es un producto exterior.

Poniendo $\varphi = \sum_{h_1 < \ldots < h_q} a'_{h_1 h_2 \ldots h_q} dx'_{h_1} \wedge \ldots \wedge dx'_{h_q}$ y comparando con (VII. 23), teniendo en cuenta la antisimetría de los coeficientes $a_{i_1 i_2 \ldots i_q}$, según (VII. 12) resulta

$$a'_{h_1 h_2 \ldots h_q} = \sum_{i_1, \ldots, i_q} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{h_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_q}}{\partial x'_{h_q}} a_{i_1 i_2 \ldots i_q} \qquad \text{(VII. 24)}$$

o sea, según § 6, N° 11 : <u>los coeficientes de una q-forma diferencial exterior son componentes de un tensor q veces covariante antisimétrico</u>.

De aquí que las formas diferenciales exteriores de grado q puedan también definirse como las aplicaciones lineales del espacio producto tensorial $T_p \otimes \ldots \otimes T_p$ (q factores) en los números reales. Fijando un sistema local de coordenadas, el número real que la forma diferencial φ (VII. 19) hace corresponder al tensor de componentes $\lambda^{i_1 \dots i_q}$ es $\sum a_{i_1 \dots i_q} \lambda^{i_1 \dots i_q}$ con todos los índices sumados de 1 a n.

Supongamos que la variedad diferenciable V sea de clase C^r. Entonces se dice que una forma diferencial exterior φ es de clase C^s, $s \leq r-1$, si sus coeficientes son de clase C^s. Según la ley de transformación (VII. 24) esta definición es intrínseca (no depende del sistema de coordenadas).

6. DIFERENCIACION EXTERIOR.

Definición VII. 6. Se llama diferenciación exterior a una operación d que a toda forma diferencial φ de grado q hace corresponder otra forma $d\varphi$ de grado q+1, con las siguientes propiedades:

1. $d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2$.
2. Si f es una función diferenciable (0-forma), es

$$d(f\varphi) = df \wedge \varphi + f\, d\varphi \tag{VII. 25}$$

donde df representa el diferencial ordinario de f.

3. Si φ es descomponible, es $d\varphi = 0$.

Esta definición es intrínseca. Vamos a ver como se expresa d en un sistema de coordenadas locales. Sea

$$\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} a_{i_1 i_2 \dots i_q}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}. \tag{VII. 26}$$

Aplicando 1), 2), 3), observando que $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}$ es descomponible, resulta

$$d\varphi = \sum_{i_1 < \dots < i_q} da_{i_1 i_2 \dots i_q} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_q}. \tag{VII. 27}$$

Recíprocamente, vamos a demostrar que esta operación (VII. 27) satisface a las condiciones 1), 2), 3).

Las 1), 2) son inmediatas. Para la 3) debemos observar primero la fórmula

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^q \varphi \wedge d\psi \qquad \text{(VII. 28)}$$

siendo q el grado de φ y ψ otra forma diferencial exterior cualquiera.

En efecto, si es

$$\varphi = \sum a_{i_1 \ldots i_q} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q}, \quad \psi = \sum b_{j_1 \ldots j_s} dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

será

$$\varphi \wedge \psi = \sum a_{i_1 \ldots i_q} b_{j_1 \ldots j_s} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

y según (VII. 25)

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + \sum a_{i_1 \ldots i_q} db_{j_1 \ldots j_s} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s} =$$

$$= d\varphi \wedge \psi + (-1)^q \sum a_{i_1 \ldots i_q} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_q} \wedge db_{j_1 \ldots j_s} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_s}$$

$$= d\varphi \wedge \psi + (-1)^q \varphi \wedge d\psi .$$

Sentada la fórmula (VII. 28), para probar que la operación (VII. 26) satisface a 3), se procede por inducción. Para una 1-forma descomponible es

$$\varphi = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

$$d\varphi = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i} \right) dx_j \wedge dx_i = 0 \qquad \text{(VII. 29)}$$

Para una q-forma descomponible es $\varphi = \varphi_1 \wedge df$ y si se supone que la condición 3) se cumple para formas de grado $q-1$, de (VII. 28) y (VII. 29) resulta que también se satisface para formas de grado q.

En particular, siendo según (VII.27) $d\varphi$ una suma de formas descomponibles, es

$$d\,d\varphi = 0 \qquad \text{(VII.30)}$$

cualquiera que sea φ. Esta propiedad de ser nilpotente de indice 2 el operador de diferenciación exterior, se conoce con el nombre de teorema de Poincaré.

7. ESPACIO DE DE RHAM DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE.

Sea V una variedad diferenciable.

Definición VII.7. Las formas diferenciales exteriores α sobre V tales que $d\alpha = 0$, se llaman cerradas. Las formas diferenciales exteriores α sobre V tales que $\alpha = d\beta$, siendo β otra forma diferencial exterior cualquiera, se llaman exactas.

El conjunto de las formas diferenciales de grado q sobre V, con las operaciones ordinarias de suma y producto por un escalar, forma un espacio vectorial F^q sobre los reales. Las q-formas cerradas forman un subespacio F_c^q del anterior y las exactas otro subespacio de este último, que representaremos por F_e^q. Evidentemente es

$$F^q \supset F_c^q \supset F_e^q$$

Definición VII.8. El espacio cociente F_c^q/F_e^q se llama el espacio de de Rham de la variedad diferenciable V.

Si se consideran F^q, F_c^q y F_e^q como grupos abelianos, con la misma operación de suma anterior, el grupo cociente F_c^q/F_e^q se llama el grupo de de Rham de V.

NOTA. El recíproco del teorema de Poincaré, a saber "si para una forma diferencial α es $d\alpha = 0$, existe una forma diferencial β tal que $\alpha = d\beta$ " es cierto localmente; se trata de un clásico teorema de existencia de ecuaciones diferen c les.

En cambio no es cierto globalmente. Sea, por ejemplo, V la esfera bidimensional de radio unidad y consideremos una forma diferencial de orden 2 cuya integral sobre V no sea nula (por ejemplo $\alpha = \operatorname{sen}\theta \; d\theta \wedge d\varphi$ = elemento de área de V). Si fuera $\alpha = d\beta$ y uniforme sobre V, por el teorema de Stokes que veremos en el capítulo siguiente, tomando una circunferencia máxima Γ, la integral a lo largo de ella de β sería igual a la integral de α sobre la semiesfera que queda a su izquierda. La integral de β sobre Γ en sentido opuesto sería la integral de α sobre la otra semiesfera. La suma de ambas integrales sería la integral de α sobre toda la esfera y por tanto $\neq 0$. En cambio la suma de las dos integrales curvilineas, por estar extendidas sobre un mismo camino recorrido en sentidos opuestos, debe ser cero.

8. LA FORMULA DE STOKES

1. SIMPLE q-DIMENSIONAL EN R^n.

Definición VIII. 1. En R^n, se dice que $q+1$ puntos $A_o, A_1, \ldots, A_q$ son <u>independientes</u>, si la matriz de tipo $(q+1)\times(n+1)$ formada por las ordenadas de los puntos más una columna de elementos iguales a 1, tiene característica $q+1$. Condición necesaria para ello es que $q \leqslant n$.

Definición VIII. 2. Dados $q+1$ puntos independientes A_i de R^n, se llama <u>q-simple euclidiano</u> o simple de dimensión q, al conjunto de puntos de la forma

$$X = \lambda_o A_o + \lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_q A_q$$

con $\lambda_i > 0$, $\lambda_o + \lambda_1 + \ldots + \lambda_q = 1$. Se representa por $s_q = (A_o, A_1, \ldots, A_q)$. Los puntos A_i se llaman los <u>vértices</u> del simple. Un 0-simple es un punto de R^n.

Si se reemplaza $\lambda_i > 0$ por $\lambda_i \geqslant 0$ se obtiene la clausura $\bar{s}_q$ de s_q. La diferencia $\bar{s}_q - s_q$ es el <u>contorno</u> del simple. Este contorno está formado por las <u>caras</u> del simple. Se llaman <u>h-caras</u> del simple o caras de dimensión h a los h-simples cuyos vértices son también vértices de s_q; su número es $\binom{q+1}{h+1}$. Las 0-caras son los <u>vértices</u> y las 1-caras las <u>aristas</u> de s_q. Obsérvese que las caras no pertenecen al simple.

En la definición anterior el simple es el mismo cualquiera que sea la ordenación de los vértices. A veces conviene tener en cuenta esta ordenación, llamando simples de la misma "orientación" a los que tienen los vértices ordenados de manera que los índices forman permutaciones de igual paridad y de distinta orientación en caso contrario. Es decir:

Definición VIII. 3. Un q-simple euclidiano se dice <u>orientado</u> cuando se tiene en cuenta la ordenación de sus vértices; se representa por $(A_{i_o}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_q})$. Dos q-simples orientados $(A_{i_o}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_q})$ y $(A_{j_o}, A_{j_1}, \ldots, A_{j_q})$ se dice que tienen igual orientación si las permutaciones de los índices son de igual paridad y de distinta orientación en caso contrario. Los q-simples de la misma orientación que $(A_o, A_1, \ldots, A_q)$ se llaman positivos y los restantes negativos. Se escribe

$$(A_{i_o}, A_{i_1}, \ldots, A_{i_q}) = -(A_{j_o}, A_{j_1}, \ldots, A_{j_q})$$

si las permutaciones $(i_o, i_1, \ldots, i_q)$, $(j_o, j_1, \ldots, j_q)$ son de distinta paridad.

2. SIMPLES, COMPLEJOS Y CADENAS DE UNA VARIEDAD DIFERENCIABLE.

Sea dada una variedad diferenciable V de clase C^r.

Definición VIII. 4. Se llama q-simple de V al resultado de aplicar en V un simple euclidiano s_q por un difeomorfismo f. Lo indicaremos por $\sigma_q = f\, s_q$.

Los vértices de σ_q serán los puntos $A_i' = f A_i$. Las caras de σ_q son las imágenes por f de las caras de s_q. La orientación de σ_q es la del s_q correspondiente.

Definición VIII. 5. Un conjunto finito de simples de V de dimensiones $q = 0, 1, \ldots, n$ se dice que forman un <u>complejo</u> K si se cumplen las condiciones: a) Dos simples del conjunto no tienen punto común; b) Todo simple que es cara de otro simple del complejo, pertenece al complejo.

Si todos los simples de K están orientados, el complejo se llama orientado.

Definición VIII. 6. Se llama q-cadena (de coeficientes reales) de un complejo

K de V a toda combinación lineal finita $c_q = \sum \lambda_i \sigma_q^i$ con coeficientes reales de q-simples de K.

En particular $(-1)\sigma_q$ indica $-\sigma_q$, o sea, el simple con la orientación opuesta.

Con la ley de adición $\sum \lambda_i \sigma_q^i + \sum \mu_i \sigma_q^i = \sum (\lambda_i + \mu_i)\sigma_q^i$ y la $\lambda(\sum \lambda_i \sigma_q^i) = \sum (\lambda \lambda_i)\sigma_q^i$ para el producto por un escalar, el conjunto de las q-cadenas de K forma un espacio vectorial, que representaremos por $C_q(K)$. El elemento cero es la q-cadena con todos los coeficientes nulos y el opuesto de $\sum \lambda_i \sigma_q^i$ es $\sum \lambda_i(-\sigma_q^i)$.

Sea $\sigma_q = (A_0', A_1', \ldots, A_q')$ un q-simple de V. Indicaremos por

$$\sigma_{q-1}^i = (A_0', A_1', \ldots, \widehat{A_i'}, \ldots, A_q')$$

al (q-1)-simple del controno de σ_q que resulta al suprimir el vértice A_i'. Es claro que de σ_q se deducen $q+1$ simples σ_{q-1}^i, correspondientes a $i = 0, 1, \ldots, q$.

Definición VIII. 7. Se llama <u>borde</u> del simple orientado σ_q y se indica por $\partial\sigma_q$ a la (q-1)-cadena

$$\partial\sigma_q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{q-1}^i \qquad \text{(VIII. 1)}$$

El borde de una q-cadena se define por la condición de linealidad

$$\partial c_q = \sum \lambda_i \partial \sigma_q^i$$

Teorema 1.

<u>El borde del borde de una cadena es nulo, o sea</u>

$$\partial\partial c_q = 0 . \qquad \text{(VIII. 2)}$$

Bastará demostrarlo para un simple. Es

$$\partial\partial\sigma_q = \partial\sum(-1)^i(A'_o, A'_1, \ldots, \widehat{A'_i}, \ldots, A'_q) =$$

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\left[\sum_{h=0}^{i}(-1)^h(A'_o, \ldots, \widehat{A'_h}, \ldots, \widehat{A'_i}, \ldots, A'_q) + \sum_{h=i}^{q}(-1)^{h-1}(A'_o, \ldots, \widehat{A'_i}, \ldots, \widehat{A'_h}, \ldots, A'_q)\right] = 0$$

puesto que cada $(q-2)$-simple aparece dos veces con el signo cambiado: en la primera suma con signo $(-1)^{i+h}$ y en la segunda $(-1)^{i+h-1}$.

3. LA FORMULA DE STOKES.

Sea (U,φ) una carta de la variedad diferenciable V y x_i las coordenadas locales correspondientes. Dada una q-forma diferencial exterior θ definida en U y un dominio σ de una subvariedad diferenciable V' de dimensión q contenido en U, la integral de θ extendida a σ se define como la integral de Riemann, en el sentido clásico, de la expresión de θ en las coordenadas x_i, extendida a $s = \varphi\sigma$. Dada la ley de transformación de las formas diferenciales exteriores por un cambio de coordenadas (§ 7, Nº 5), esta definición es intrínseca.

Consideremos, en particular la $(q-1)$-forma

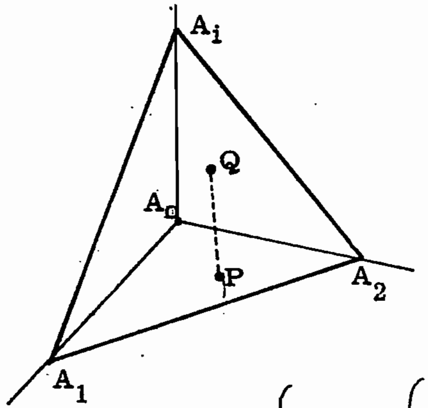
$$\omega = a\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_q$$

donde dx_i está excluído, definida en U. Sea σ_q un q-simple contenido en U. Queremos calcular la integral de ω sobre $\partial\sigma_q$.

Si f es el difeomorfismo tal que $\sigma_q = f s_q$, siendo s_q un simple euclidiano, podemos hacer el cambio $\varphi\sigma_q \dashrightarrow s_q$, con lo cual la integración sobre el contorno de $\varphi\sigma_q$ se reduce a la integración sobre el contorno de s_q. Supongamos ya hecho este cambio y, para no complicar la notación, sigamos representando las coordenadas del espacio que contiene s_q por x_i. Todavía se puede suponer, sin restricción de generalidad, que s_q es el q-simple de vértices

$$A_o(1, 0, \ldots, 0), \quad A_1(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, A_q(0, \ldots, \overset{q}{1}, 0, \ldots, 0)$$

Con esto, la forma ω solamente es distinta de cero sobre las caras



$(A_1, A_2, \ldots, A_q)$ y $(A_o, \ldots, \widehat{A}_i, \ldots, A_q)$. En las restantes caras, de ecuación $x_h = 0$ $(h \neq i)$, es $\omega = 0$.

Siendo $\partial s_q = \sum (-1)^i (A_o, \ldots, \widehat{A}_i, \ldots, A_q)$, será

$$\int_{\partial \sigma_q} \omega = \int_{(A_1 \ldots A_q)} \omega + (-1)^i \int_{(A_o \ldots \widehat{A}_i \ldots A_q)} \omega \qquad \text{(VIII. 3)}$$

Por otra parte, la diferencial exterior de ω es

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_q + \sum_{h=q+1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x_h} dx_h \wedge \ldots \wedge dx_q ,$$

y su integral sobre σ_q vale (puesto que para σ_q es $x_{q+1} = x_{q+2} = \ldots = x_n = 0$),

$$\int_{\sigma_q} \omega = (-1)^{i-1} \int_{(A_o \ldots A_i \ldots A_q)} (a(Q) - a(P))\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots dx_q \qquad \text{(VIII. 4)}$$

siendo $a(Q)$ y $a(P)$ los valores de a en los puntos extremos Q y P en que s_q es cortado por las rectas en que solo varia x_i (Ver la figura).

La segunda integral de (VIII. 4) coincide con la segunda de (VIII. 3). La primera de (VIII. 3) se puede reducir a una integral sobre la proyección de $(A_1, A_2, \ldots, A_q)$ en $(A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_q)$; por esta proyección es

$$(A_0, \ldots, A_i, \ldots, A_q) \dashrightarrow (A_1, \ldots, A_0, \ldots, A_q) =$$

$$= (-1)^{i-1}(A_0, \ldots, \widehat{A_i}, \ldots, A_q)$$

y por tanto, la primera integral de (VIII. 4) es también igual a la primera de (VIII. 3). Resulta así

$$\int_{\partial \sigma_q} \omega = \int_{\sigma_q} d\omega \qquad \text{(VIII. 5)}$$

Por la linealidad de la integral esta fórmula vale igualmente si σ_q es una (q-1)-forma diferencial exterior cualquiera, no necesariamente monomia.

Sea ahora c_q una q-cadena de la variedad V tal que cada q-simple σ_q^i esté contenido en una carta (U_i, φ_i). Para cada simple vale la fórmula (VIII. 5). Por consiguiente, dada la propiedad aditiva de la integral, resulta la importante <u>fórmula de Stokes</u>

$$\int_{\partial c_q} \omega = \int_{c_q} d\omega \qquad \text{(VIII. 6)}$$

Esta fórmula puede demostrarse para dominios más generales. Una discusión precisa de las condiciones mínimas de validez puede verse en H. WHITNEY, <u>Geometric Integration Theory</u>, Cap. III, Princeton, 1957.

Para dominios más generales D, una vez definido el contorno ∂D, hay que dar sentido a las integrales de ambos miembros de (VIII. 6), en el caso en que ambos dominios de integración no estén contenidos en una sola carta local. Para ello si $\{U_i\}$ es un cubrimiento localmente finito por abiertos de la variedad, se toma una partición de la unidad g_i respecto del mismo (Cap. 6, N° 2) y se considera la integral de $g_i\omega$ sobre cada $U_i \cap D$; la suma de estas integrales (suma finita) es la integral deseada.

4. HOMOLOGIA.

Definición VIII. 8. Se llama q-ciclo de un complejo K a toda q-cadena de borde nulo.

Los q-ciclos forman un subespacio vectorial Z_q del espacio vectorial C_q de las q-cadenas de K (N° 2).

Según (VIII. 2) toda q-cadena de la forma ∂c_{q+1} es un q-ciclo. Por tanto se puede establecer la siguiente

Definición VIII. 9. Los q-ciclos de la forma ∂c_{q+1} se llaman q-bordes.

Los q-bordes de K forman un subespacio vectorial B_q de Z_q. Se tiene así

$$C_q \supset Z_q \supset B_q$$

Definición VIII. 10. El espacio cociente $H_q = Z_q/B_q$ se llama el q-ésimo espacio de homología de K.

Recordemos que el espacio Z_q/B_q (que algunos autores indican más propiamente por $Z_q - B_q$) es el espacio vectorial que resulta al dividir Z_q en clases de equivalencia considerando dos q-ciclos como equivalentes (se dicen homólogos) cuando su diferencia es un q-borde.

Definición VIII. 11. La dimensión de H_q se llama el q-ésimo número de Betty del complejo K.

Cabe preguntarse por las propiedades del espacio C_q/Z_q. Probar, como ejercicio, que es isomorfo a B_{q-1} (isomorfismo dado por $c_q \dashrightarrow \partial c_q$).

5. COHOMOLOGIA.

Vamos a estudiar el espacio vectorial dual C^q del C_q de las q-cadenas de un complejo K .

Definición VIII. 12. Se llaman q-cocadenas a las aplicaciones lineales de C_q en los reales.

Indicaremos una q-cocadena por

$$f^q : c_q \dashrightarrow f^q(c_q) \in R^1 . \qquad \text{(VIII. 8)}$$

Por ser lineal debe ser $f^q(0) = 0$. El conjunto de las q-cocadenas del complejo K forma el espacio vectorial C^q dual de C_q.

Definición VIII. 13. Se llama coborde de una q-cocadena f^q a la (q+1)-cocadena

$$\delta f^q : c_{q+1} \dashrightarrow f^q(\partial c_{q+1}) . \qquad \text{(VIII. 9)}$$

Teorema VIII. 2.

Cualquiera que sea f^q es

$$\delta \delta f^q = 0 .$$

En efecto, es

$$\delta \delta f^q : c_{q+2} \dashrightarrow \delta f^q(\partial c_{q+2}) = f^q(\partial \partial c_{q+2}) = 0 .$$

Definición VIII. 14. Se llaman cociclos a las cocadenas de coborde nulo.

Los q-cociclos forman un subespacio vectorial de C^q que se representa por

Z^q.

Definición VIII. 15. Un cociclo f^q se dice que es un coboorde, si existe f^{q-1} tal que $f^q = \delta f^{q-1}$.

Los cobordes forman un subespacio vectorial B^q de Z^q. Resultan así tres espacios vectoriales C^q, Z^q, B^q con la relación evidente

$$C^q \supset Z^q \supset B^q . \qquad \text{(VIII. 10)}$$

Definición VIII. 16. El espacio vectorial cociente $Z^q/B^q = H^q$ se llama es q-ésimo espacio de cohomología de K.

Por tratarse de espacios de dimensión finita, la dimensión de H^q es la misma de H_q.

6. LAS FORMAS DIFERENCIALES COMO COCICLOS.

Sea V una variedad diferenciable. A toda forma diferencial exterior α^q de grado q se le puede asociar la q-cocadena $J\alpha^q$ definida por la relación

$$J\alpha^q \; : \; c_q \dashrightarrow \int_{C_q} \alpha^q . \qquad \text{(VIII. 11)}$$

De aquí, según la definición de coborde

$$\delta\,(J\alpha^q) \; : \; c_{q+1} \dashrightarrow \int_{\partial c_{q+1}} \alpha^q \qquad \text{(VIII. 12)}$$

y según la fórmula de Stokes

$$\delta\,(J\alpha^q) \; : \; c_{q+1} \dashrightarrow \int_{c_{q+1}} d\alpha^q \qquad \text{(VIII. 13)}$$

o sea

$$\delta (J\alpha^q) = J(d\alpha^q). \qquad \text{(VIII. 14)}$$

De (VIII. 13) y (VIII. 14) se deduce que la aplicación $\alpha^q \dashrightarrow J\alpha^q$ hace corresponder

a) A toda forma diferencial cerrada un cociclo;

b) A toda forma diferencial exacta un coborde.

Por tanto:

Teorema VIII. 3.

La aplicación $\alpha^q \dashrightarrow J\alpha^q$ define un homomorfismo entre el espacio de de Rham R^q y el espacio de cohomología H^q de un complejo K de una variedad diferenciable V.

El llamado Teorema de de Rham, más difícil de probar, establece que ese homomorfismo es un isomorfismo.

IX. INMERSIONES Y SUMERSIONES DE VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. APLICACIONES ENTRE VARIEDADES DIFERENCIABLES.

En § 6, Nº 9 se dieron las definiciones fundamentales para el estudio de las aplicaciones de una variedad diferenciable V_n (de dimensión n) en otra V_m (de dimensión m). Sabemos lo que es una aplicación diferenciable y lo que es una aplicación regular. Observemos que la Definición VI. 8 de aplicación regular es equivalente a cualquiera de las dos siguientes:

a) La diferencial de la aplicación aplica vectores tangentes independientes en vectores tangentes independientes;

b) La diferencial de la aplicación aplica todo vector no nulo en un vector no nulo.

Es importante el siguiente:

Teorema IX. 1.

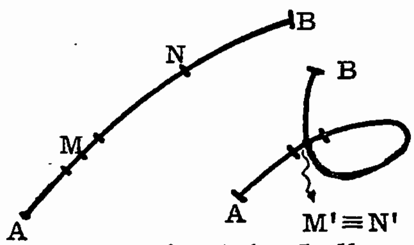
<u>Toda aplicación regular f es "localmente biyectiva", es decir, todo punto</u> $p \in V_n$ <u>tiene un entorno</u> $U_p \subset V_n$ <u>tal que la restricción</u> $f : U_p \dashrightarrow f(U_p)$ <u>es biyectiva.</u>

Demostración. Basta hacer la demostración suponiendo que f actua entre abiertos de espacios euclidianos R^n y R^m, pues U_p y $f(U_p)$ son homeomorfos a entornos de estos espacios.

Observemos que en R^n el espacio vectorial tangente T_p en cualquiera de sus puntos se aplica biyectivamente sobre R^n (a cada vector de T_p corresponde un punto de R^n y recíprocamente). Por suponer f regular, la aplicación diferencial f_* (§ 6, Nº 9) aplica T_p biyectivamente sobre $f_*(T_p)$ que por ser f_* lineal es un subespacio vectorial de $T_{p'}$, al que corresponde un subespacio lineal de R^m que contiene $p' = f(p)$.

Podemos suponer que p' es el origen de R^m y que el subespacio R'^n correspondiente a $f_*(T_p)$ tiene por ecuaciones $y_{n+1} = y_{n+2} = \ldots = y_m = 0$. En este caso la matriz jacobiana $(\partial y_\alpha / \partial x_i)$ se reduce a las primeras n filas; las restantes son nulas, puesto que deben ser nulas las componentes
$\lambda'^\alpha = \sum (\partial y_\alpha / \partial x_i)_p \lambda^i$ para $\alpha = n+1, \ldots, m$, cualesquiera que sean las λ^i. Sea $\Pi_{p'}$ la proyección de R^m sobre R'^n y pongamos $g(p) = \Pi_{p'}(f(p))$. Esta aplicación g es regular (por tener la misma matriz jacobiana que f). Por tanto, según el teorema de las funciones inversas (Teorema II. 1), existe un entorno de p y su correspondiente por g, entre los cuales g es biyectiva. Por tanto también lo será f entre los entornos correspondientes, pues si $f(p) = f(p_1)$, con $p \neq p_1$, sería $g(p) \neq g(p_1)$ y de aquí $\Pi_{p'}^{-1} g(p) \neq \Pi_{p'}^{-1} g(p_1)$, o sea, $f(p) \neq f(p_1)$. Queda así demostrado el teorema.

En cambio una aplicación regular puede no ser biyectiva en grande. Por ejemplo la aplicación entre los arcos s, s' de la figura, definida por isometría, es regular, a pesar del punto doble $M' \equiv N'$, pues en un entorno de M que no contenga a N la correspondencia entre U_M y $f(U_M)$ es biyectiva. Lo mismo para un entorno de N que no contenga a M.



Definición IX. 1. Se llama <u>conjunto límite</u> L_f de una aplicación $f : V_n \dashrightarrow V_m$ al conjunto de puntos $q \in V_m$ tales que existe una sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots \in V_n$ que no tiene punto límite en V_n y sin embargo $f(p_k) \dashrightarrow q$.

Si V_n es compacta, L_f es vacío para cualquier f, pues toda sucesión infinita p_k tiene punto limite en V_n .

Ejemplos.

1. V_n = segmento abierto $-1 < x < +1$; V_m = recta real $-\infty < y < +\infty$. Aplicación $f : x \dashrightarrow y = x$.

Los puntos $y = -1$, $y = 1$ constituyen L_f .

2. V_n = semirecta abierta $0 < x < \infty$. V_m = plano euclidiano. Aplicación $f : x \dashrightarrow (x, \operatorname{sen}(1/x))$.

El conjunto límite L_f es el segmento $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Definición IX. 2. Una aplicación diferenciable $f : V_n \dashrightarrow V_m$ se dice que es:

a) Propia, si $L_f \cap f(V_n) = 0$;

b) una inmersión, si es regular y propia;

c) una sumersión, si es regular, propia e inyectiva.

La definición de sumersión equivale a la siguiente: sumersión de V_n en V_m es toda aplicación diferenciable tal que V_n y $f(V_n)$ resultan homeomorfas según la topología subordinada a $f(V_n)$ por la topología de V_m .

En efecto, por subordinar entre V_n y $f(V_n)$ un homeomorfismo diferenciable, es regular e inyectiva. Por otra parte, si no fuera propia existiría una sucesión $\{p_k\}$, sin punto limite en V_n y tal que $q = \lim f(p_k) \in V_m$; todo entorno de q contendría puntos $f(p_k)$ y por tanto cualquier entorno de $f^{-1}(q)$ contendría puntos de la sucesión $\{p_k\}$, o sea p_k contendría una sucesión tendiente a $f^{-1}(q) \in V_n$ contra la hipótesis.

Ejemplos.

1. V_n = segmento semiabierto $0 \leqslant x < 2\pi$; V_m = plano euclidiano;

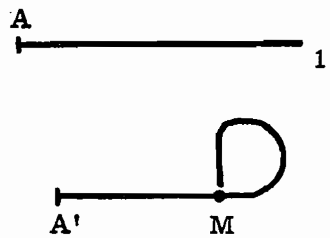
$f : x \dashrightarrow (\operatorname{sen} x, \cos x)$.

Es regular, pero no propia, pues la sucesión $x_k = 2\pi - 1/k$ $(k = 1, 2, \dots)$ no tiene limite en el segmento y si en la imagen, pues $f(x_k) \dashrightarrow (0,1) \in f(V_n)$.

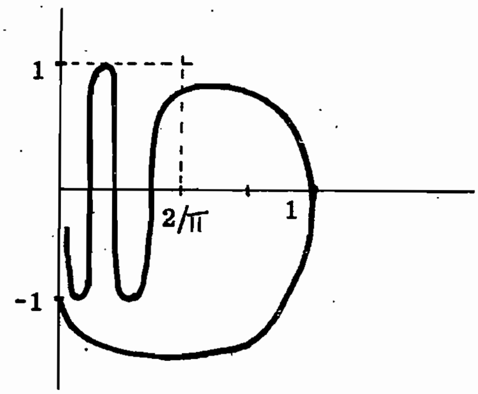
2. La aplicación entre los arcos de la figura última es una inmersión, pero no una sumersión del primer arco en el plano euclidiano, por no ser inyectiva.

3. V_n = semirecta abierta $0 < x < \infty$; v_m = plano euclidiano; $f : x \dashrightarrow (x, \operatorname{sen}(1/x))$. Es una sumersión de la semirecta abierta en el plano euclidiano.

4. La aplicación del segmento $0 \leq x < 1$ en el arco de la figura adjunta, con el extremo abierto tendiendo al punto M no es propia, pues $M = L_f$ pertenece a la imagen del segmento.



5. V_n = semirecta $0 < x < \infty$; V_n = plano euclidiano. Aplicación f definida por



a) $f(x) = (x, \operatorname{sen}(1/x))$ para $0 < x < 2/\pi$,

b) $f(x)$ = cualquier arco de curva que une el punto $(2/\pi, 1)$ con $B(0, -1)$ empalmando con tangente continua en los extremos, para $2/\pi \leq x \leq 1$:

c) $f(x) = (0, x-2)$ para $1 \leq x < \infty$.

Se trata de una aplicación no propia, pues L_f = segmento $(0, -1 \leq y \leq 1) \in f(V_n)$.

2. SUMERSION DEL PLANO PROYECTIVO REAL EN R^4: (Hilbert Cohn Vossen, Geometry and imagination, pág. 340, N. York 1956).

El plano proyectivo P^2 es el conjunto de puntos de la esfera unidad

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{IX.1}$$

de R^3, con la relación de equivalencia

$$(u, v, w) \sim (-u, -v, -w). \tag{IX.2}$$

Sean x, y, z, t las coordenadas de R^4. La aplicación f definida por

$$x = u^2 - v^2, \quad y = u v, \quad z = u w, \quad t = v w$$

es una sumersión de P^2 en R^4.

Demostración. La aplicación es regular. En efecto, las dos primeras filas de la matriz jacobiana forman el determinante

$$\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2)$$

el cual solamente es nulo para el punto $(0, 0, 1)$. Para este punto el determinante formado por las dos últimas filas de la matriz jacobiana (teniendo en cuenta que en ese punto es $\partial w / \partial u = \partial w / \partial v = 0$), vale 1; luego la carracterística de dicha matriz es siempre 2 y f es regular.

También es propia, por ser P^2 compacto.

Falta ver que es inyectiva, es decir, que si dos ternas (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) cumplen (IX.1) y dan un mismo punto de R^4, o sea,

$$u_1^2 - v_1^2 = u_2^2 - v_2^2, \quad u_1 v_1 = u_2 v_2, \quad u_1 w_1 = u_2 w_2, \quad v_1 w_1 = v_2 w_2 \tag{IX.3}$$

ellos corresponden a un mismo punto de P^2. Consideremos los siguientes casos:

a) u_1, v_1, w_1 son diferentes de cero. De (IX.3) se deduce

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$$

y por tanto los puntos de R^3 de coordenadas (u_1, v_1, w_1) y (u_2, v_2, w_2) están en una misma recta por el origen; en consecuencia si pertenecen a la esfera (IX.1), son puntos diametralmente opuestos y por la relación de equivalencia (IX.2) son un mismo punto de P^2.

b) $u_1 = 0$. Según (IX.3) será $u_2 v_2 = 0$, $u_2 w_2 = 0$; caben dos posibilidades: si $u_2 = 0$, resulta de (IX.3) $v_1 = \pm v_2$, $w_1 = \pm w_2$ y se tiene un solo punto de P^2; si $v_2 = 0$, $w_2 = 0$, resulta $u_2^2 = -v_1^2$, de donde $v_1 = u_2 = 0$ y de aquí $u_2 = v_2 = w_2 = 0$ y no se cumple (IX.1).

Análogamente se discuten los casos $v_1 = 0$, $w_1 = 0$. Resulta así probado que la aplicación es inyectiva y por tanto una sumersión, de acuerdo con el enunciado.

3. SUMERSION DEL ESPACIO PROYECTIVO COMPLEJO $P^n(C)$ EN EL ESPACIO EUCLIDIANO DE $(n + 1)^2$ DIMENSIONES.

El espacio proyectivo complejo de n dimensiones, que se representa por $P^n(C)$, es el conjunto de $(n+1)$-uplas $(z_o, z_1, \ldots, z_n)$ de n números complejos, no todos nulos, con la relación de equivalencia

$$(z_o, z_1, \ldots, z_n) \sim (\lambda z_o, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \qquad \text{(IX.4)}$$

para todo número complejo λ no nulo.

En virtud de esta relación de equivalencia se pueden normalizar las coordenadas de manera que se cumpla la relación

$$z_o \bar{z}_o + z_1 \bar{z}_1 + \ldots + z_n \bar{z}_n = 1 \qquad \text{(IX.5)}$$

donde una barra indica el complejo conjugado. Con esta condición los z_h quedan determinados salvo una substitución

$$z_h \dashrightarrow e^{i\theta} z_h . \qquad \text{(IX. 6)}$$

Según (IX. 4) en un entorno de los puntos con $z_o \neq 0$ pueden tomarse las coordenadas $z'_h = z_h/z_o = x_h + i\, x_{h+n}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ y por tanto $P^n(C)$, como variedad real, es de dimensión $2n$ (las coordenadas locales son $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{2n}$). Si $z_o = 0$ se elige una variable $z_m \neq 0$ y procediendo analogamente la dimensión resulta siempre $2n$.

Consideremos la siguiente aplicación f de $P^n(C)$ en el espacio euclidiano de $(n+1)^2$ dimensiones:

$$X_h = \sqrt{2}\; z_h \overline{z}_h$$

$$X_{hk} = X_{kh} = z_h \overline{z}_k + z_k \overline{z}_h \qquad \text{(IX. 7)}$$

$$Y_{hk} = - Y_{kh} = i(z_h \overline{z}_k - z_k \overline{z}_h)$$

para $h, k = 0, 1, 2, \ldots, n$ y $h \neq k$. Se tiene así efectivamente

$$(n + 1) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2$$

coordenadas reales X_h, X_{hk}, Y_{hk} $(h \neq k)$ del espacio euclidiano de dimensión $(n+1)^2$. Queremos demostrar que las ecuaciones (IX. 7) definen una sumersión f de $P^n(C)$ en $R^{(n+1)^2}$.

a) A cada $p \in P^n(C)$ corresponde un punto de $R^{(n+1)^2}$, pues la substitución (IX. 6) deja invariantes los primeros miembros de (IX. 7). Además, de (IX. 7) se deduce

$$\frac{X_{hk} - i\, Y_{hk}}{2\, X_k} = \frac{z_h}{z_k}$$

y por tanto si z, z' tienen un mismo correspondiente en $R^{(n+1)^2}$ es $z_h/z_k =$ $= z'_h/z'_k$ y según (IX.4) se trata de un mismo punto. Esto nos dice que f es inyectiva.

b) Vamos a ver que es regular. Pongamos

$$z_0 = (1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$z_h = x_h + i\, x_{n+h} \qquad (h = 1, 2, \dots, n)$$

con lo cual se cumple (IX.5). Observemos que z_0 resulta real, lo que siempre es posible por una substitución (IX.6).

La matriz formada por las filas de la matriz jacobiana correspondientes a las derivadas $\partial X_{0k}/\partial x_h$, $\partial Y_{0k}/\partial x_h$ para $k = 1, 2, \dots, n$; $h = 1, 2, \dots, 2n$, resulta ser (puesto que $z_0 = \bar{z}_0$),

$$D = \begin{pmatrix} 2z_0 & & & 0 \\ & 2z_0 & & \\ & & 2z_0 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

y por tanto $|D| = (2z_0)^{2n}$. Si $z_0 \neq 0$, es $|D| \neq 0$ y f resulta regular. En los entornos de los puntos con $z_0 = 0$, se elige un $z_m \neq 0$ y se procede de manera análoga.

c) Como $P^n(C)$ es compacto, f es propia.

Queda así probado el enunciado.

La dimensión $(n+1)^2$ puede disminuirse. Por ejemplo, para $n = 1$ se tiene la recta compleja, equivalente al plano de Gauss y este a la esfera de dos dimensiones, sumergible de manera obvia en R^3. Según el teorema de Whitney que enunciaremos a continuación, $P^n(C)$ puede sumergirse en el espacio euclidiano de dimensión

$4n+1$.

4. TEOREMA DE WHITNEY.

Whitney ha demostrado que toda variedad diferenciable de dimensión n puede sumergirse en el espacio euclidiano de dimensión $2n+1$ (Ann. of Math. 37, 1936, p. 645-680). Aquí vamos a demostrar una forma mucho más restringida de este teorema, pero que sin embargo es útil en muchos casos.

Teorema IX. 2.

Toda variedad diferenciable compacta puede sumergirse en un espacio euclidiano de un número suficientemente grande de dimensiones.

Demostración. Sea V_n la variedad, supuesta de dimensión n. Sea p un punto de ella y U_p un entorno que por un homeomorfismo φ sea aplicable sobre un abierto $\varphi(U_p)$ de R^n. Tomemos una esfera de centro $\varphi(p)$ contenida en $\varphi(U_p)$. Es claro que existe un homeomorfismo φ_1 (de clase C^r, para cualquier r) de esta esfera sobre la esfera $O(3)$ de centro el origen de R^n y radio 3, tal que el origen sea $\varphi_1(\varphi(p))$. Consideremos las esferas análogas $O(2)$ y $O(1)$ de radios 2 y 1 y centro el origen. Pongamos $\psi = \varphi_1 \circ \varphi$ y

$$U_3 = \psi^{-1}(O(3)), \quad U_2 = \psi^{-1}(O(2)), \quad U_1 = \psi^{-1}(O(1)).$$

Haciendo esta operación para cada $p \in V_n$ tendremos a esta variedad cubierta por los abiertos U_1. Siendo compacta por hipótesis, se podrá tomar un número finito de ellos, sea N, que la cubran totalmente; sean U_1^i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Sabemos (§ 6, N° 1), que existe en R^n una función positiva y analítica $\Phi(x)$ tal que

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } \overline{O}(1) \\ <1 & \text{en } O(2) - \overline{O}(1) \\ 0 & \text{en } R^n - O(2) \end{cases}$$

Pongamos, para $i = 1, 2, \ldots, N$; $h = 1, 2, \ldots, n$

$$f_{oi}(p) = \Phi(x) \ , \quad f_{hi}(p) = x_h \Phi(x) \ , \quad x = \Psi_i(p) \tag{IX.8}$$

para $p \in U_3^i$ y $f_{oi}(p) = f_{hi}(p) = 0$ si p no pertenece a U_3^i .

Sea f la aplicación de V_n en $R^{N(n+1)}$ definida por

$$y_{oi} = f_{oi}(p) \ , \quad y_{hi} = f_{hi}(p) \tag{IX.9}$$

para $i = 1, 2, \ldots, N$; $h = 1, 2, \ldots, n$.

Esta aplicación es de la misma clase que V_n . Hay que ver que es una sumersión.

En la matriz jacobiana, las filas correspondientes a las derivadas de las funciones $f_{1i}, f_{2i}, \ldots, f_{ni}$ forman una matriz unidad de tipo $n \times n$, para el índice i tal que $p \in U_1^i$. Luego f es regular.

Falta ver que es inyectiva. En efecto si dos puntos p , p' de V_n pertenecen a un mismo abierto U_1^i , no tienen las coordenadas x_h iguales y según (IX.8) tampoco las f_{hi} serán todas iguales. Si pertenecen a abiertos U_1^i , U_1^j distintos, según (IX.8) las primeras coordenadas f_{oi} son diferentes. En ningún caso, por tanto, puntos diferentes de V_n pueden tener la misma imagen.

5. EN TODA VARIEDAD COMPACTA DE CLASE C^r PUEDE DEFINIRSE UNA METRICA DE RIEMANN DE CLASE C^{r-1} .

Vamos a hacer una aplicación importante del teorema de Whitney anterior. En el espacio euclidiano $R^{N(n+1)}$, llamando ahora $y_1, y_2, \ldots, y_{N(n+1)}$ a sus coordenadas, tenemos la métrica euclidiana

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_{N(n+1)}^2$$

Teniendo en cuenta (IX.9) y llamando x_h a las coordenadas de $\varphi(p)$ en

R^n , esta métrica subordina sobre V_n la métrica

$$ds^2 = \sum_{m=1}^{N(n+1)} \left(\sum_{h=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_h} dx_h \right)^2 \qquad \text{(IX. 10)}$$

Poniendo

$$g_{hk} = \sum_{m=1}^{N(n+1)} \frac{\partial y_m}{\partial x_h} \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \qquad \text{(IX. 11)}$$

resulta que la métrica euclidiana de $R^{N(n+1)}$ subordina sobre V_n la métrica

$$ds^2 = \sum_{h,k=1}^{n} g_{hk} \, dx_h \, dx_k$$

Una métrica de este tipo, con el segundo miembro siempre positivo (según (IX. 10)) excepto para puntos coincidentes, se llama una <u>métrica de Riemann</u>. Según (IX. 11) si las y_m son de clase C^r , los coeficientes g_{hk} son de clase C^{r-1} . Queda así probado el siguiente

Teorema IX. 3.

<u>En toda variedad diferenciable compacta de clase C^r puede definirse una métrica de Riemann de clase C^{r-1}</u>.

El teorema es válido aun sin la condición de compacidad.

<u>Ejercicios</u>.

1. Calcular la métrica de Riemann del plano proyectivo subordinada por la sumersión en R^4 definida en el N° 2 .

2. La "botella de Klein" es la variedad compacta de dos dimensiones definida por los puntos del rectángulo

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad , \quad a > b$$

con la relación de equivalencia

$$(x, 0) \sim (x, b) \quad , \quad (0, y) \sim (a, b-y)$$

y la topología natural de R^2. Hallar la sumersión de esta variedad en R^4.

El teorema (IX. 3) anterior es evidente "localmente". Es decir, en el abierto de toda carta se puede definir la métrica de Riemann deducida de la euclidiana del espacio sobre el cual el abierto se representa. Más generalmente, sobre el abierto de una carta se puede tomar una métrica cualquiera de la forma $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\, dx_i\, dx_j$, eligiendo las funciones h_{ij} de manera arbitraria en el sistema de coordenadas x_i y conviniendo en que deben transformarse como componentes de un tensor covariante de segundo orden por cambios de coordenadas, para que ds se mantenga invariante. La dificultad aparece al querer definir la métrica para toda la variedad. Como ejemplo para poner de manifiesto esta dificultad vamos a demostrar el siguiente teorema (Ehresmann, C.R. 216, p. 628, 1943):

Teorema IX. 4.

Para que en una variedad diferenciable V_n se pueda definir una métrica de la forma $ds^2 = \sum h_{ij}\, dx_i\, dx_j$ tal que el segundo miembro sea una forma cuadrática de signatura $+ + . . . + -$ en todo punto, es necesario y suficiente que sobre V_n exista un campo continuo de vectores tangentes.

Demostración. Por el teorema (IX. 3) existe siempre sobre V_n una métrica definida y positiva (métrica de Riemann) $ds^2 = \sum g_{ij}\, dx_i\, dx_j$. Supongamos que exista también la métrica $ds^2 = \sum h_{ij}\, dx_i\, dx_j$ de signatura $+ + . . . + -$. Observemos que g_{ij} y h_{ij} se pueden suponer simétricas; en caso contrario bastaría poner $g'_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$, $h'_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ con lo cual los nuevos coeficientes ya serían simétricos.

Llamemos G a la matriz (g_{ij}) y H a la (h_{ij}). Consideremos las formas cuadráticas

$$g = u^t G u \qquad , \qquad h = u^t H u$$

que aplican los vectores u del espacio vectorial tangente de V_n en un punto p, en los números reales.

Dos vectores u, u_o se llaman conjugados respecto de g si $u^t G u_o = 0$ y respecto de h si $u^t H u_o = 0$. Queremos determinar los vectores u_o cuyos conjugados son los mismos respecto de g y respecto de h. Es decir, las dos ecuaciones anteriores en la incógnita u deben ser equivalentes, y por tanto

$$(H - \lambda G) u_o = 0 \qquad \text{(IX. 12)}$$

para algún λ. Para que esta ecuación matricial tenga solución debe ser

$$|H - \lambda G| = 0 \qquad \text{(IX. 13)}$$

que es la ecuación característica para λ. Las raíces de esta ecuación son todas reales, pues si hubiera dos imaginarias conjugadas λ, $\overline{\lambda}$ los vectores u_o determinados por (IX. 12) serían u_o, $\overline{u}_o$ y entonces

$$(H - \lambda G) u_o = 0 \ , \qquad (H - \overline{\lambda} G) \overline{u}_o = 0$$

de donde

$$\overline{u}_o^t (H - \lambda G) u_o = 0 \ , \qquad u_o^t (H - \overline{\lambda} G) \overline{u}_o = 0$$

y puesto que H y G son simétricas, restando resulta

$$(\overline{\lambda} - \lambda) \, \overline{u}_o^t G u_o = 0$$

Si $\lambda \neq \overline{\lambda}$ es $\overline{u}_o^t G u_o = 0$, lo que no puede ser por haber supuesto que g era definida positiva.

Siendo las raices de (IX. 13) reales, también lo serán los vectores u_o calculados por el sistema (IX. 12) (vectores propios). Tomando las direcciones de estos vectores como direcciones coordenadas, h debe reducirse, por hipótesis, a la forma $h = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \ldots - \lambda_n u_n^2$, es decir, hay un solo vector propio según el cual es $h < 0$. Queda así determinado sobre V_n un campo continuo de vec tores tangentes, de acuerdo con el enunciado.

Recíprocamente, supongamos que existe un campo de vectores tangentes continuo sobre V_n; sea $u = u(p)$ este campo. Sea g_{ij} una métrica de Riemann sobre V_n. Eligiendo, para cada carta, las coordenadas de manera que u tenga las componentes $(0, 0, \ldots, 1)$ será

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\, dx_i\, dx_j + dx_n^2$$

La métrica

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}\, dx_i\, dx_j - dx_n^2$$

es del tipo deseado.

6. NOTAS Y BIBLIOGRAFIA.

1. Más difícil que el problema de la sumersión es el de la <u>sumersión isométrica</u>. Supuesto dada en V_n una métrica (en general de Riemann) se trata de ver las condiciones para que sea sumergible en un espacio euclidiano de manera que la métrica subordinada por este último sea la métrica dada.

En este sentido hay el resultado "local" de E. Cartan según el cual todo espacio de Riemann "en el entorno de cada punto" puede sumergirse isométricamente en un espacio euclidiano de $\binom{n+1}{2}$ dimensiones. (Ann. Soc. Polonaise de Math. 6, 1927, p. 1-7).

Resultados más recientes sobre sumersiones isométricas en grande se encuentran en J. NASH, Ann. of Math. 60, 1954 (383-396); N. H. KUIPER, Proc. Konikl. Akad. Wet. Amsterdam, Serie A, 58, 1955 (págs. 545-556 y 683-689).

2. El Teorema IX.4 es caso particular de otro más general, a saber: Una

variedad diferenciable compacta admite una métrica de signatura k, si y solamente si admite un campo continuo de k-planos tangentes. Ver STEENROD, The Theory of Fiber Bundles, Princeton 1951, pág. 207.

3. La esfera bidimensional no admite un campo continuo de vectores tangentes. En muchos casos es útil la propiedad de que la esfera de dos dimensiones no admite un campo de tangentes sin singularidades. Vamos a dar una demostración elemental y directa de este resultado (Fenchel, Matem. Tids, B, 1932).

Sea C un círculo máximo de la esfera. Fijemos en cada punto de la esfera una orientación, por ejemplo la que gira en sentido contrario al de las agujas del reloj mirando desde el exterior. Fijemos también un sentido de recorrido cualquiera a C, con lo cual en cada punto quedará bien determinado el versor tangente a C. En cada punto P de C tendremos así el versor tangente y el vector del campo; sea φ el ángulo entre estos dos vectores, medido según la orientación fijada. Cuando P describe C, al volver al punto de partida, el ángulo habrá variado en un múltiplo de 2π, o sea

$$\int_C d\varphi = 2k\pi$$

siendo k un número entero, positivo, nulo o negativo.

Tomemos dos puntos diametralmente opuestos sobre C y hagamos girar con continuidad este círculo alrededor de ellos. Como el campo es continuo, el número k obtenido por la misma operación anterior deberá también variar con continuidad, y como es entero, permanecerá constante. Al volver a superponer C sobre si mismo, después de girar 180°, el sentido de recorrido de C aparece invertido; el ángulo de la tangente a C con el vector del campo es ahora $\psi = \pi + \varphi$. Por tanto $d\psi = d\varphi$ y la variación total de ψ será

$$\int_{-C} d\psi = -\int_C d\psi = -2k\pi .$$

Como este valor debe ser el mismo anterior, resulta $k = -k$ y por tanto $k = 0$.

Por otra parte consideremos la familia de círculos menores paralelos a C, que van desde C hasta el polo O del mismo. Haciendo en cada uno de ellos la operación anterior, por la continuidad del campo, también k deberá permanecer constante. Al reducirse C al punto O, como en este punto hay un solo vector, el ángulo φ varía en $\pm 2\pi$ (el signo depende del sentido de recorrido), puesto que el vector del campo es fijo y el versor tangente varía en $\pm 2\pi$. En consecuencia resulta $k = \pm 1$.

Este resultado es contradictorio con el resultado $k = 0$, lo cual prueba que la hipótesis de la existencia de un campo continuo de vectores tangentes no es admisible.

X. VARIEDADES CON UNA CONEXION AFIN

1. FORMAS DIFERENCIALES LINEALES VECTORIALES.

Sean T_x el espacio de los vectores tangentes en el punto x de la variedad diferenciable V y T_x^* el espacio de los covectores (§ 6, N° 3, 5) o espacio de las formas diferenciales lineales en el mismo punto. En lo que sigue supondremos que el punto x puede variar en un abierto de V. Para abreviar, pondremos

$$T^1 = T_x \quad , \quad T_1 = T_x^* \quad , \quad T_1^1 = T_x \otimes T_x^* \quad , \quad T_{11} = T_x^* \otimes T_x^*$$

Definición X. 1. Se llama <u>forma diferencial lineal vectorial</u> o <u>forma de Pfaff vectorial</u> o, simplemente, <u>forma diferencial vectorial</u> en el punto x de una variedad diferenciable V, a todo elemento de T_1^1.

Fijada una base e_i de T^1 y una θ^i de T_1, toda forma de Pfaff vectorial se escribe $\sum_{i,j} a_j^i \theta^j \otimes e_i$ y puede interpretarse de dos maneras distintas, a saber: a) Como un vector cuyas componentes son formas diferenciales lineales; es decir, como la aplicación que a la función diferenciable f hace corresponder el covector $\sum_{i,j} a_j^i e_i(f)\theta^j$; b) Como una forma diferencial lineal con valores en T^1 ; es decir, como la aplicación $T^1 \dashrightarrow T^1$ que al vector $h \in T^1$ hace corresponder el vector $\sum_{i,j} a_j^i \theta^j(h) e_i$. Esta diversidad de interpretación conduce a cierta imprecisión en la nomenclatura, haciendo que a veces se les llame "vectores" y otras veces "formas diferenciales", cuando en realidad son una combinación de los dos.

No habiendo posibilidad de confusión, se suele suprimir el símbolo de producto tensorial, escribiendo simplemente $\sum_{i,j} a_j^i \theta^j e_i$.

Si θ^i es la base dual de la e_i, o sea, $\theta^j(e_i) = \delta^j_i$ la forma de Pfaff vectorial

$$dx = \sum_i \theta^i e_i \qquad (X.1)$$

se llama el vector desplazamiento correspondiente al punto x. La aplicación $T^1 \dashrightarrow T^1$ que le corresponde es la siguiente: al vector $h = \sum_m \overset{m}{\lambda} e_m \in T^1$ le corresponde $dx(h) = \sum_{i,m} \overset{m}{\lambda} \theta^i(e_m) e_i = \sum_i \overset{i}{\lambda} e_i = h$, o sea, la aplicación dx es la identidad, condición que caracteriza al vector desplazamiento.

2. DIFERENCIAL COVARIANTE DE VECTORES Y CONEXION AFIN.

Hemos definido en § 6, N° 7 la diferencial de una función: es un covector. Pero hasta ahora no hemos definido la diferencial de un vector. Una primera idea sería, para $h = \sum_m \overset{m}{\lambda} e_m$, definir $dh = \sum_m (d\overset{m}{\lambda}) e_m$; esta es la llamada diferencial ordinaria del vector h. Tiene el inconveniente de no tener caracter intrínseco, es decir, su valor depende de la base e_i. Para verlo es cómodo utilizar notación matricial, poniendo

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \quad \lambda = (\overset{1}{\lambda}, \overset{2}{\lambda}, \ldots, \overset{n}{\lambda}), \quad A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^n_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a^1_n & a^2_n & \cdots & a^n_n \end{pmatrix}$$

con lo cual es $dh = d\lambda \cdot e$. Un cambio de base es $e' = A e$. Por este cambio, como el vector h no depende de la base, debe ser $\lambda' e' = \lambda e$, o sea, $\lambda' A e = \lambda e$ y por tanto $\lambda' = \lambda A^{-1}$. Por otra parte, de $A A^{-1} = E$ se deduce $dA . A^{-1} + A . dA^{-1} = 0$, de donde

$$dA^{-1} = - A^{-1} dA\, A^{-1}. \qquad (X.2)$$

Por tanto

$$d\lambda' = d\lambda . A^{-1} - \lambda A^{-1} dA\, A^{-1} .$$

Para que $dh = d\lambda . e$ fuera intrínseca, debería ser $d\lambda' . e' = d\lambda . e$; en cambio es

$$d\lambda' . e' = d\lambda . e - \lambda A^{-1} dA\, e$$

es decir, la diferencial ordinaria de un vector, depende en general de la base del espacio T^1.

Se trata de ver si puede obtenerse una diferencial intrínseca; ello se consigue con la siguiente

Definición X. 2. Se llama <u>diferencial covariante</u> en el punto x de la variedad diferenciable V, a toda aplicación $D : T^1 \dashrightarrow T^1_1$ que cumpla las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} D(h + h') &= D(h) + D(h') \\ D(\alpha h) &= d\alpha . h + \alpha D(h) \end{aligned} \qquad (X.3)$$

para todo $h, h' \in T^1$ y toda función $\alpha \in C^1$.

Obsérvese que $d\alpha . h$ es una notación abreviada de $d\alpha \otimes h$.

Aplicando (X.3) a cualquier vector $h = \sum_m \lambda^m e_m$ resulta

$$D(h) = Dh = \sum_m (d\lambda^m . e_m + \lambda^m De_m) \qquad (X.4)$$

y por tanto Dh estará bien determinada para cualquier vector si se conocen las diferenciales covariantes De_m de los vectores base. Se quiere, según la definición, que sea $De_m \in T^1_1$; por tanto hay que dar

$$De_m = \sum_i \omega^i_m e_i , \quad m = 1, 2, . . , n, (X.5)$$

siendo ω^i_m formas de Pfaff. Estas n^2 formas diferenciales lineales, que pueden escribirse en forma de matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \dots & \omega_1^n \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \dots & \omega_2^n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \omega_n^1 & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^n \end{pmatrix} \qquad (X.6)$$

deben cumplir la única condición de que la diferencial covariante sea intrínseca, o sea, que por cambios de base $e' = Ae$, su expresión quede invariante. En forma matricial, la diferencial covariante (X.4) se escribe

$$Dh = (d\lambda + \lambda\Omega)e \qquad (X.7)$$

y para que sea intrínseca debe ser

$$(d\lambda + \lambda\Omega)e = (d\lambda' + \lambda'\Omega')e' .$$

Para $e' = Ae$, $\lambda' = \lambda A^{-1}$ esta condición se escribe, según (X.2),

$$(d\lambda + \lambda\Omega)e = (d\lambda - \lambda A^{-1} dA + \lambda A^{-1}\Omega' A)e$$

de donde

$$\Omega' = dA \,.\, A^{-1} + A\Omega A^{-1} \qquad (X.8)$$

Se llega así a la siguiente

Definición X.3. Se llama <u>conexión afín</u> sobre una variedad diferenciable V de dimensión n, a toda matriz Ω de tipo $n \times n$ de formas diferenciales lineales, tal que por un cambio $e' = Ae$ de la base de T^1, se transforme según la ley (X.8).

Obsérvese que de (X.5) se deduce que la suma de dos conexiones no es una conexión.

Dada una conexión afin - Ω , la diferencial covariante repecto de ella del vector h está dada por (X.7). Esta expresión se suele interpretar de dos maneras:

a) Como vector cuyas componentes son formas diferenciales lineales. Si se indica por $D\lambda$ a la matriz de estas componentes relativas al vector h , se tiene

$$D\lambda = d\lambda + \lambda\,\Omega \tag{X.9}$$

En este caso $D\lambda$ se llama propiamente la diferencial covariante del vector cuyas componentes forman la matriz λ .

b) Como un elemento de T_1^1 . Desde este punto de vista, Dh es un tensor mixto de segundo orden. Como tal tensor, Dh se llama la <u>derivada covariante</u> de h .

Para ver las componentes en ambos casos, supongamos elegido un sistema de coordenadas x_i . Las formas de la conexión se escribirán

$$\omega_m^i = \sum_j \Gamma_{mj}^i \, dx_j \tag{X.10}$$

siendo $\Gamma_{mj}^i(x)$ funciones de x que se llaman los <u>coeficientes</u> de la conexión.

Las componentes de la diferencial covariante (X.9) serán

$$D\lambda^i = d\lambda^i + \sum_{m,j} \Gamma_{mj}^i \lambda^m dx_j \, , \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, n . \tag{X.11}$$

Como elemento de T_1^1 , (X.7) se escribe

$$Dh = \sum_{i,m,j} \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial x_j} + \lambda^m \Gamma_{mj}^i \right) dx_j \otimes e_i$$

y por tanto las componentes del tensor derivada covariante del vector de componentes λ^i son

$$\lambda^i_{\ ;j} = \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_j} + \sum_m \Gamma^i_{mj} \lambda^m . \qquad (X.12)$$

La notación del primer miembro, para indicar estas componentes es la usual en cálculo tensorial clásico.

3. DIFERENCIACION Y DERIVACION COVARIANTE DE COVECTORES.

Si μ_i son las componentes de un covector respecto de la base θ^i, para utilizar la notación matricial pondremos

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_n \end{pmatrix} , \quad \theta = (\theta^1\ \theta^2 \ldots \theta^n) \qquad (X.13)$$

con lo cual el covector $\sum_i \mu_i\ \theta^i$ se escribe simplemente $\theta\mu$.

Igual que para los vectores, la diferencial ordinaria de un covector $\theta\mu$ se define por $\theta\, d\mu$, pero no tiene caracter invariante, depende de la base elegida en T^1 y por tanto tiene poco interés. Para conseguir una expresión invariante, en el caso de los covectores hay dos caminos, a saber:

a) La diferenciación exterior. Representando por T^*_{11} el espacio vectorial de las formas diferenciales exteriores de segundo orden, la aplicación $T_1 \dashrightarrow T^*_{11}$ que a cada covector $\theta\mu$ hace corresponder su diferencial exterior $d\theta.\mu - \theta\wedge d\mu$ tiene caracter intrínseco. En efecto, por un cambio de base $\theta' = \theta B$, es $\mu' = B^{-1}\mu$ y por tanto

$$(d\theta')\mu' - \theta'\wedge d\mu' = (d\theta.B - \theta\wedge dB)B^{-1}\mu + (\theta\wedge dB)B^{-1}\mu - \theta\wedge d\mu =$$

$$= d\theta.\mu - \theta\wedge d\mu .$$

La diferencial exterior de un covector φ se llama el rotor de φ y se representa $\mathrm{rot}\,\varphi$. Elegido un sistema de coordenadas x_i y la base $\theta^i = dx_i$, se rá $\varphi = \sum_i \mu_i \, dx_i$ y por tanto

$$\operatorname{rot} \varphi = \sum_i d\mu_i \wedge dx_i = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mu_k}{\partial x_i} \right) dx_k \wedge dx_i$$

Las componentes del rotor son, por consiguiente

$$\mu_{ik} = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mu_k}{\partial x_i} \tag{X. 14}$$

Se trata, por tanto, de un tensor covariante antisimétrico.

b) La diferencial covariante. Análogamente al caso de los vectores, se define una diferencial covariante para covectores como una aplicación $D : T_1 \dashrightarrow T_{11}$ que cumple las condiciones

$$D(\varphi + \varphi') = D(\varphi) + D(\varphi')$$
$$D(a\varphi) = da\,\varphi + a D\varphi$$

para todos $\varphi, \varphi' \in T_1$ y toda función $a \in C^1$.

Obsérvese que en la segunda igualdad debe entenderse $da . \varphi = da \otimes \varphi$.

Igual que para los vectores, la diferencial covariante estará definida siempre que se disponga, como dato, de una matriz

$$\Omega = \begin{pmatrix} \bar{\omega}_1^1 & \bar{\omega}_1^2 & \dots & \bar{\omega}_1^n \\ \bar{\omega}_2^1 & \bar{\omega}_2^2 & \dots & \bar{\omega}_2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{\omega}_n^1 & \bar{\omega}_n^2 & \dots & \bar{\omega}_n^n \end{pmatrix} \tag{X. 15}$$

de formas diferenciales, dadas en una determinada base θ^i, que definan $D\theta = \theta\bar{\Omega}$.

Con esto, para todo covector $\varphi = \theta\mu$ será

$$D\varphi = \theta(d\mu + \bar{\Omega}\mu). \tag{X. 16}$$

La única condición que debe cumplir $\bar{\Omega}$ es que $D\varphi$ sea intrínseca, o sea, conserve la forma por cambios de base $\theta' = \theta B$, $\mu' = B^{-1}\mu$. Para ello debe ser

$$\theta'(d\mu' + \overline{\Omega}'\mu') = \theta(d\mu + \overline{\Omega}\mu) \qquad (X.17)$$

El primer miembro vale

$$\theta B(-B^{-1}\, dB\, B^{-1}\mu + B^{-1}\, d\mu + \overline{\Omega}'\, B^{-1}\mu) =$$

$$= \theta(-dB\, B^{-1}\mu + d\mu + B\,\overline{\Omega}'\, B^{-1}\mu)$$

y para que se cumpla (X.17) debe ser

$$\overline{\Omega}' = B^{-1}\, dB + B^{-1}\,\overline{\Omega}\, B\,. \qquad (X.18)$$

Para comparar esta ley de transformación con la (X.8), supongamos que el cambio de base $\theta' = \theta B$ sea el inducido por el cambio $e' = Ae$ de base de T^1. Ello significa que $B = A^{-1}$ y por tanto

$$\overline{\Omega}' = -dA\,.\,A^{-1} + A\,.\,\overline{\Omega}\,.\,A^{-1} \qquad (X.19)$$

Cualquier matriz $\overline{\Omega}$ de formas diferenciales lineales, que por un cambio de base $e' = Ae$ se transforme según la ley (X.19) puede servir para definir la diferencial covariante de covectores.

Se tiene así la posibilidad de construir una geometría sobre la variedad diferenciable V a partir de dos conexiones afines Ω, $\overline{\Omega}$, una para la diferencial covariante de vectores y otra para covectores. Por simplicidad, aunque no por necesidad, se ha procurado ver si la matriz $\overline{\Omega}$ puede deducirse de manera simple de la Ω, de manera que baste dar una sola conexión Ω para tener también la $\overline{\Omega}$. Para ello se observa que es suficiente tomar

$$\overline{\Omega} = -\Omega \qquad (X.20)$$

con lo cual la ley (X. 19) resulta equivalente a la (X. 8). Esto es lo que se hace comunmente, estableciéndose el siguiente convenio, justificado por las consideraciones precedentes:

Dada una conexión afin (Definición X. 3), la diferencial covariante de un covector $\varphi = \theta\mu$ está dada por la expresión (X. 16), teniendo en cuenta la (X. 20), o sea

$$D\varphi = \theta(d\mu - \Omega\mu) \qquad (X.21)$$

y puede interpretarse de dos maneras:

a) Como un covector cuyas componentes están dadas por la matriz

$$D\mu = d\mu - \Omega\mu \qquad (X.22)$$

En este caso, $D\mu$ se llama, propiamente, la diferencial covariante del covector de componentes μ.

b) Como un elemento de T_{11}, o sea, como un tensor dos veces covariante. En este caso recibe el nombre de derivada covariante.

Una vez fijado un sistema de coordenadas x_i, las componentes en ambos casos, teniendo en cuenta (X. 10), resultan

$$D\mu_m = d\mu_m - \sum_{i,j} \Gamma^i_{mj}\, \mu_i\, dx_j \;, \quad m = 1, 2, \ldots, n \,. \qquad (X.23)$$

para la diferencial covariante, y

$$\mu_{m;j} = \frac{\partial \mu_m}{\partial x_j} - \sum_i \Gamma^i_{mj}\, \mu_i \qquad (X.24)$$

para la derivada covariante. La notación del primer miembro es la usual en el cálculo tensorial clásico.

4. DIFERENCIACION COVARIANTE DE TENSORES.

Conocidas las diferenciales covariantes de vectores y covectores, respecto de una conexión afin dada, la diferencial covariante de cualquier tensor se define inmediatamente, aceptando el siguiente

<u>Convenio</u>: La diferencial covariante de un producto tensorial de vectores y covectores, se calcula por las mismas reglas de la diferencial ordinaria y la diferencial covariante de las funciones (escalares) coincide con la diferencial ordinaria de las mismas.

Veamos unos ejemplos. Sea $\mathcal{T} = \sum_{i,j} t_j^i \, \theta^j \otimes e_i$ un tensor mixto de segundo orden. Si representamos por t a la matriz (t_j^i) y por θ, e a las matrices fila y columna respectivamente de θ^i, e_i, se puede escribir $\mathcal{T} = \theta \, t \, e$, donde en los productos $\theta^i e_j$ se entiende $\theta^i \otimes e_j$.

De aquí

$$D\mathcal{T} = D\theta \, . \, t \, . \, e + \theta \, dt \, . \, e + \theta \, . \, t \, . \, De \qquad \text{(X.25)}$$

o bien, siendo $D\theta = -\theta\Omega$, $De = \Omega e$, resulta

$$D\mathcal{T} = \theta(dt + t\Omega - \Omega t)e \qquad \text{(X.26)}$$

Es decir, la matriz de las componentes del tensor $D\mathcal{T}$ es

$$Dt = dt + t\Omega - \Omega t \, . \qquad \text{(X.27)}$$

De manera análoga, para un tensor dos veces contravariante $\mathcal{T} = e^t \, t \, e$ (e^t = matriz transpuesta de e), resulta $D\mathcal{T} = e^t(\Omega^t \, t \, e + dt + t\Omega)e$ y por tanto sus componentes son

$$Dt = dt + t\Omega + \Omega^t \, t \, . \qquad \text{(X.28)}$$

Para un tensor dos veces covariante $\mathcal{T} = \theta\, t\, \theta^t$ resulta $D\mathcal{T} = \theta(-\Omega t + dt - t\Omega^t)\,\theta^t$ y por tanto sus componentes son

$$Dt = dt - \Omega\, t - t\,\Omega^t . \qquad (X.29)$$

Una vez elegido un particular sistema de coordenadas x_i, respecto del mismo las componentes anteriores (X.27), (X.28) y (X.29) se escriben, respectivamente

$$
\begin{aligned}
t^i_{j;k} &= \frac{\partial t^i_j}{\partial x_k} + \sum_m \Gamma^i_{mk}\, t^m_j - \sum_m \Gamma^m_{jk}\, t^i_m \\
t^{ij}_{;k} &= \frac{\partial t^{ij}}{\partial x_k} + \sum_m \Gamma^i_{mk}\, t^{mj} + \sum_m \Gamma^j_{mk}\, t^{im} \qquad (X.30)\\
t_{ij;k} &= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} - \sum_m \Gamma^m_{ik}\, t_{mj} - \sum_m \Gamma^m_{jk}\, t_{im} .
\end{aligned}
$$

Para tensores de orden superior al segundo ya no es práctico el uso de matrices, pero la diferencial covariante de un tensor cualquiera se obtiene siempre aplicando el convenio mencionado de que la diferencial covariante de un producto tensorial se calcula por la misma regla de la diferencial ordinaria y que la diferencial covariante de escalares es la diferencial ordinaria de los mismos. Por ejemplo, para un tensor del tipo T^1_2, o sea $\mathcal{T} = \sum_{i,j,k} t^k_{ij}\ \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_k$, la diferencial covariante es

$$D\mathcal{T} = \sum_{i,j,k} (dt^k_{ij} \otimes \theta^i \otimes \theta^j \otimes e_k + t^k_{ij}\, D\theta^i \otimes \theta^j \otimes e_k + t^k_{ij}\, \theta^i \otimes D\theta^j \otimes e_k + t^k_{ij}\, \theta^i \otimes \theta^j \otimes De_k)$$

y conociendo las expresiones $De_j = \sum_i \omega^i_j\, e_i$, $D\theta^i = -\sum_j \omega^i_j\, \theta^j$ en términos de la conexión afin dada, se obtienen las componentes de $D\mathcal{T}$. Respecto de un sistema de coordenadas x_i, sustituyendo valores (X.10) resulta, para la derivada covariante,

$$t^k_{ij;s} = \frac{\partial t^k_{ij}}{\partial x_s} + \sum_m \Gamma^k_{ms}\, t^m_{ij} - \sum_m \Gamma^m_{is}\, t^k_{mj} - \sum_m \Gamma^m_{js}\, t^k_{im}$$

La derivada covariante es siempre una aplicación de T^r_m en T^r_{m+1}, o sea, da como resultado un tensor con un índice más de covariancia.

Observación. Para aceptar el convenio anterior hay que demostrar que el mismo tiene caracter intrínseco, es decir, que es invariante por cambios de coordenadas. Vamos a probarlo para el caso particular de un tensor mixto de segundo orden. Sea el cambio de base

$$e' = A e, \quad \theta' = \theta A^{-1}, \quad t' = A t A^{-1}, \quad \Omega' = dA A^{-1} + A \Omega A^{-1}; \tag{X.31}$$

una simple sustitución en (X.26), teniendo en cuenta (X.2) permite comprobar

$$D\mathcal{T}' = \theta'(dt' + t'\Omega' - \Omega' t')e' = \theta(dt + t\Omega - \Omega t)e = D\mathcal{T}$$

lo que prueba lo afirmado.

Para el caso general, la comprobación de la invariancia es más larga, pero no supone complicación.

5. LA DIFERENCIAL EXTERIOR DE TENSORES.

Sea $T^*_m = T_1 \wedge T_1 \wedge \overset{m}{\overbrace{\cdots}} \wedge T_1$ el espacio vectorial de las m-formas diferenciales exteriores en un punto x de la variedad diferenciable V. Sea $T^r = T^1 \otimes T^1 \otimes \overset{r}{\overbrace{\cdots}} \otimes T^1$ el espacio vectorial de los tensores contravariantes de grado r. Pongamos $T^{*r}_m = T^*_m \otimes T^r$, Si $m \geqslant 1$, además de la derivación covariante hay otra aplicación lineal $T^{*r}_m \dashrightarrow T^{*r}_{m+1}$ importante, que vamos a definir.

Poniendo $\theta^{i_1 \dots i_m} = \theta^{i_1} \wedge \dots \wedge \theta^{i_m}$, $e_{j_1 j_2 \dots j_r} = e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r}$, cada elemento de T^{*r}_m es de la forma

$$\mathcal{T} = \sum t^{j_1 \dots j_r}_{i_1 \dots i_m} \theta^{i_1 \dots i_m} \otimes e_{j_1 \dots j_r} \tag{X.32}$$

Pondremos

$$d\mathcal{T} = \sum \left(d\,t^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_m} \wedge \theta^{i_1\cdots i_m} \otimes e_{j_1\cdots j_r} + \right. \tag{X.33}$$

$$\left. + \, t^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_m}\, d\,\theta^{i_1\cdots i_m} \otimes e_{j_1\cdots j_r} + (-1)^m\, t^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_m}\; \theta^{i_1\cdots i_m} \wedge De_{j_1\cdots j_r} \right)$$

donde, en el segundo miembro d indica "diferenciación exterior" (para el escalar $t^{j_1\cdots j_r}_{i_1\cdots i_m}$ coincide con la ordinaria) y D indica "diferenciación covariante". En el primer miembro, con la misma d indicamos a la nueva operación que llamaremos "diferenciación exterior" de tensores; ella queda definida por la igualdad (X.33). Obsérvese que sólo es aplicable a los tensores $\mathcal{T} \in T^{*r}_m$, no a un tensor general de T^r_m.

Está operación tiene caracter intrínseco. Vamos a verlo para el caso particular $m = 1$, $r = 1$. En notación matricial es $\mathcal{T} = \theta t e \in T^{*1}_1 = T^1_1$ y la diferencial exterior resulta

$$d\mathcal{T} = d\theta t e - \theta \wedge dt\, e - \theta t \wedge De .$$

El primer signo menos es consecuencia de la notación matricial, que no permite poner $dt \wedge \theta$ y obliga a poner en su lugar $-\theta \wedge dt$. Por el cambio de base (X.31) resulta

$$d\mathcal{T}' = d\theta' t' e' - \theta' \wedge dt' e' - \theta' t' \wedge De' = d\theta t e - \theta \wedge dt\, e - \theta t \wedge De = d\mathcal{T}$$

lo que prueba el enunciado. Para el caso general, la demostración se reduce a una comprobación, no difícil en cada caso particular, pero engorroso de escribir en general.

Para un sistema de coordenadas dado x_i, es $\theta^i = dx_i$ y si las componentes de $\mathcal{T}$ son t^i_j, será

$$d\mathcal{T} = \sum_{i,j,k} \left(\frac{\partial t^i_j}{\partial x_k}\, dx_k \wedge dx_j\, e_i - t^i_j \Gamma^s_{ik}\, dx_j \wedge dx_k\, e_s \right).$$

Por tanto, la diferencial exterior es el tensor, elemento de T_2^* cuyas componentes son

$$d_k t_j^i = \frac{\partial t_j^i}{\partial x_k} - \frac{\partial t_k^i}{\partial x_j} + \Gamma_{sk}^i t_j^s - \Gamma_{sj}^i t_k^s .$$

6. DESPLAZAMIENTO PARALELO.

Sea V una variedad diferenciable con una conexión afin Ω . Sea $C = C(t)$ una curva diferenciable en V (= aplicación regular de un intervalo de R^1 en V).

Definición X.4. Un campo de vectores $h(x)$ se dice que forma un campo de vectores paralelos a lo largo de C, o que los vectores han sufrido un desplazamiento paralelo a lo largo de C, cuando $Dh = 0$ en todos los puntos de C.

Elegido un sistema de coordenadas x_i, si λ^i son las componentes de h y $x_i = x_i(t)$ las ecuaciones de C, las ecuaciones del paralelismo, según (X.11), son

$$\sum_k \frac{\partial \lambda^i}{\partial x_k} \dot{x}_k + \sum_{m,k} \Gamma_{mk}^i \lambda^m \dot{x}_k = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{(X.34)}$$

donde los puntos indican derivadas respecto del parámetro t. Este sistema de ecuaciones en derivadas parciales permiten calcular λ^i en cada punto de C a partir de una posición inicial $\lambda^i(p)$. En general el traslado por paralelismo depende del camino, es decir, al pasar del punto p al punto q, el vector que resulta en q depende del camino según el cual se ha realizado el desplazamiento.

Para covectores las ecuaciones del paralelismo son también $D\varphi = 0$. Según (X.23) si el covector φ tiene las componentes μ_i (en el sistema de coordenadas x_i), las ecuaciones del paralelismo son

$$\sum_k \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} \dot{x}_k - \sum_{m,k} \Gamma^m_{ik} \mu_m \dot{x}_k = 0 \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (X.35)$$

Definición X. 5. Una curva se dice que es <u>autoparalela</u> (a veces se dice también <u>geodésica</u>) si sus vectores tangentes son paralelos a lo largo de la curva.

Como los vectores tangentes son los de componentes $\dot{x}_i$, las curvas autoparalelas serán las integrales del sistema

$$\ddot{x}_i + \sum_{m,k} \Gamma^i_{mk} \dot{x}_m \dot{x}_k = 0 \quad (1 = 1, 2, \ldots, n) \qquad (X.36)$$

Las curvas autoparalelas dependen del parámetro $\underline{t}$; sólo son invariantes por cambios lineales $t \dashrightarrow a\,t + b$.

7. FORMAS DE TORSION Y DE CURVATURA.

Dada una variedad diferenciable V, se tienen en cada punto x las n formas diferenciales lineales θ^i que constituyen la base del espacio de los covectores; ellas forman la matriz $\theta = (\theta^1\, \theta^2\, .\,.\,.\, \theta^n)$.

Si en V está dada una conexión afin, se tienen, además las n^2 formas diferenciales lineales ω^j_i que constituyen la matriz Ω ; también ellas están definidas en cada punto x de V .

A partir de las formas θ , Ω se trata de ver si pueden obtenerse otras formas diferenciales que sean intrínsecas a V y a su conexión, es decir, que no dependan de la base elegida. Para ello disponemos de la diferencial covariante y de la diferencial exterior que hemos estudiado.

Consideremos primero el vector desplazamiento (X. 1) , o sea,

$$dx = \theta\, e\,. \qquad (X.37)$$

Se trata de un elemento de T^1_1 y por tanto, aplicando la diferencial exterior

(Nº 5), resulta el elemento de T_2^{*1}

$$d(dx) = (d\theta - \theta\wedge\Omega)e$$

que se llama el tensor de torsión. Obsérvese que dx es una notación, no una diferencial exterior, y por tanto no puede aplicarse la propiedad de ser nilpotente de índice dos el operador d.

Las n formas diferenciales de 2º orden, elementos de la matriz

$$\mathcal{T} = d\theta - \theta\wedge\Omega \qquad \text{(X.38)}$$

se llaman formas de torsión de la variedad, relativas a la conexión Ω.

Diferenciando exteriormente el tensor de torsión $\mathcal{T} \in T_2^{*1}$ se obtiene el elemento $\text{æ} \in T_3^{*1}$ siguiente

$$\text{æ} = \theta\wedge(d\Omega - \Omega\wedge\Omega)e \qquad \text{(X.39)}$$

que es el llamado tensor de curvatura. Las n^2 formas diferenciales de segundo grado

$$\text{Ⓗ} = d\Omega - \Omega\wedge\Omega \qquad \text{(X.40)}$$

se llaman las formas de curvatura de la variedad, relativas a la conexión Ω. Por diferenciación exterior de las mismas, resulta

$$d\,\text{Ⓗ} = -\,\text{Ⓗ}\wedge\Omega + \Omega\wedge\text{Ⓗ} \qquad \text{(X.41)}$$

que son las llamadas identidades de Bianchi.

Fórmulas explícitas en coordenadas locales. Supongamos un sistema de coordenadas locales x_i. Para simplificar la escritura vamos a suprimir los signos de sumación, sobreentendiendo que siempre que aparezcan dos índices repetidos en una misma expresión monomia, se trata de una suma de 1 a n. Supongamos que sea

$$\theta^i = dx_i \quad , \quad \omega_i^h = \Gamma_{im}^h \, dx_m \tag{X.42}$$

con lo cual resulta

$$\mathcal{T} = -\theta \wedge \Omega = -\Gamma_{im}^h \, dx_i \wedge dx_m = -\tfrac{1}{2}(\Gamma_{im}^h - \Gamma_{mi}^h) dx_i \wedge dx_m$$

Las componentes del tensor de torsión son, por tanto

$$T_{im}^h = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{im}^h - \Gamma_{mi}^h) . \tag{X.43}$$

Un espacio será de torsión nula si

$$\Gamma_{im}^h = \Gamma_{mi}^h$$

se dice también que la <u>conexión afin es simétrica.</u>

Por otra parte, indicando con una coma a la derivación parcial ordinaria, será

$$d\omega_i^h = \Gamma_{im,k}^h \, dx_k \wedge dx_m$$

$$\Omega \wedge \Omega = (\omega_i^j \wedge \omega_j^h) = (\Gamma_{im}^j \, \Gamma_{jk}^h \, dx_m \wedge dx_k)$$

con lo cual queda

$$H = \tfrac{1}{2}(\Gamma_{im,k}^h - \Gamma_{ik,m}^h + \Gamma_{im}^j \, \Gamma_{jk}^h - \Gamma_{ik}^j \, \Gamma_{jm}^h) dx_m \wedge dx_k .$$

Las componentes del tensor de curvatura se expresan (prescindiendo por costumbre del factor $\frac{1}{2}$),

$$R_{ikm}^h = \Gamma_{im,k}^h - \Gamma_{ik,m}^h + \Gamma_{im}^j \, \Gamma_{jk}^h - \Gamma_{ik}^j \, \Gamma_{jm}^h \tag{X.44}$$

observándose la antisimetría

$$R_{ikm}^h = - R_{imk}^h \tag{X.45}$$

Se tiene por tanto

$$\textcircled{H} = \tfrac{1}{2} R^h_{ikm}\, dx_m \wedge dx_k ,$$

de donde

$$\textcircled{H} \wedge \Omega = \tfrac{1}{2} R^s_{ikm} \Gamma^h_{sp}\, dx_m \wedge dx_k \wedge dx_p$$

$$\Omega \wedge \textcircled{H} = \tfrac{1}{2} \Gamma^s_{ip} R^h_{skm}\, dx_p \wedge dx_m \wedge dx_k$$

$$d\,\textcircled{H} = \tfrac{1}{2} R^h_{ikm,q}\, dx_q \wedge dx_m \wedge dx_k$$

con lo cual las identidades de Bianchi (X.41) se escriben

$$\left[R^h_{ikm,q} + \Gamma^h_{sq} R^s_{ikm} - \Gamma^s_{iq} R^h_{skm} \right] dx_q \wedge dx_m \wedge dx_k = 0$$

Sacando factor común los productos $dx_q \wedge dx_m \wedge dx_k$ para $q < m < k$, sus coeficientes deben ser nulos y teniendo en cuenta la propiedad de antisimetría (X.45) resulta

$$\begin{aligned} & R^h_{ikm,q} + \Gamma^h_{sq} R^s_{ikm} - \Gamma^s_{iq} R^h_{skm} + \\ & + R^h_{imq,k} + \Gamma^h_{sk} R^s_{imq} - \Gamma^s_{ik} R^h_{smq} + \\ & + R^h_{iqk,m} + \Gamma^h_{sm} R^s_{iqk} - \Gamma^s_{im} R^h_{sqk} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(X.46)}$$

Por otra parte, según la regla de derivación covariante es

$$R^h_{ikm;q} = R^h_{ikm,q} + \Gamma^h_{sq} R^s_{ikm} - \Gamma^s_{iq} R^h_{skm} - \Gamma^s_{kq} R^h_{ism} - \Gamma^s_{mq} R^h_{iks} .$$

Si la conexión afin es simétrica se observa que el primer miembro de (X.46) equivale a $R^h_{ikm;q} + R^h_{imq;k} + R^h_{iqk;m}$. Por tanto, para espacios de conexión afin simétrica, las identidades de Bianchi (X.41) se escriben en la forma clásica

$$R^h_{ikm;q} + R^h_{imq;k} + R^h_{iqk;m} = 0 . \qquad \text{(X.47)}$$

BIBLIOGRAFIA

1 L. AUSLANDER - R. E. MACKENZIE, Introduction to Differentiable Manifolds, Mc Graw Hill, N. York, 1963.

2 S. S. CHERN, Differentiable Manifolds, notas mimeografiadas, Universidad de Chicago, 1959.

3 G. De RHAM, Variétés différentiables, Hermann, Paris 1955.

4 H. FLANDERS, Development of an extended differential calculus, Transactions of the Am Math. Soc. 75, 311-326, 1953.

5 R. GODEMENT, Variétés Différentiables, Textos de Matemática, Instituto de Física y Matemática, Universidade do Recife, 1959.

6 S. I. GOLBERG, Curvature and Homology, Academic Press, N. York, 1962.

7 H. GUGGENHEIMER, Differential Geometry, Mc Graw Hill, N. York, 1963.

8 S. HELGASON, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, N. York, 1962.

9 E. LAGES LIMA, Introduçao as Variedades Diferenciáveis, Instituto de Matemática, Universidade do Rio Grande Do Sul, Porto Alegre, 1960.

10 J. LELONG - FERRAND, Géómétrie Différentielle, Masson, Paris, 1963.

11 A. LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'Holonomie, Edizioni Cremonese, Roma, 1955

12 K. NOMIZU, Lie groups and differential geometry, The Mathematical Society of Japan, 1956.

13 T. J. WILMORE, An introduction to Differential Geometry, Oxford, Clarendon Press, 1959.

INDICE

* * *

Este libro fué realizado en "URGE", Viamonte 2296 - Bs. As.
terminándose de imprimir el 26 de Marzo de 1965 -