

Fascículo **1b**

Cursos y seminarios de
matemática

Serie A

Laurent Schwartz

Matemática y física
cuántica

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 1b

Comité Editorial:

Carlos Cabrelli (Director)
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: cabrelli@dm.uba.ar

Gabriela Jerónimo
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: jeronimo@dm.uba.ar

Claudia Lederman
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: clerderma@dm.uba.ar

Auxiliar editorial:

Leandro Vendramin
Departamento de Matemática, FCEyN, Universidad de Buenos Aires.
E-mail: lvendramin@dm.uba.ar

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Derechos reservados
© 2011 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
<http://www.dm.uba.ar>
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO

1

1 cursos
y seminarios
de matemática

~~ECE y N BIBLIOTECA~~

BIBLIOTECA
MATEMÁTICA 403-
FÍSICA
METEOROLOGÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

Laurent Schwartz

MATEMÁTICA
Y FÍSICA CUÁNTICA

295917
ej. 8

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1958

514.8

S399m

6j-8

... ..
... ..
... ..

... ..

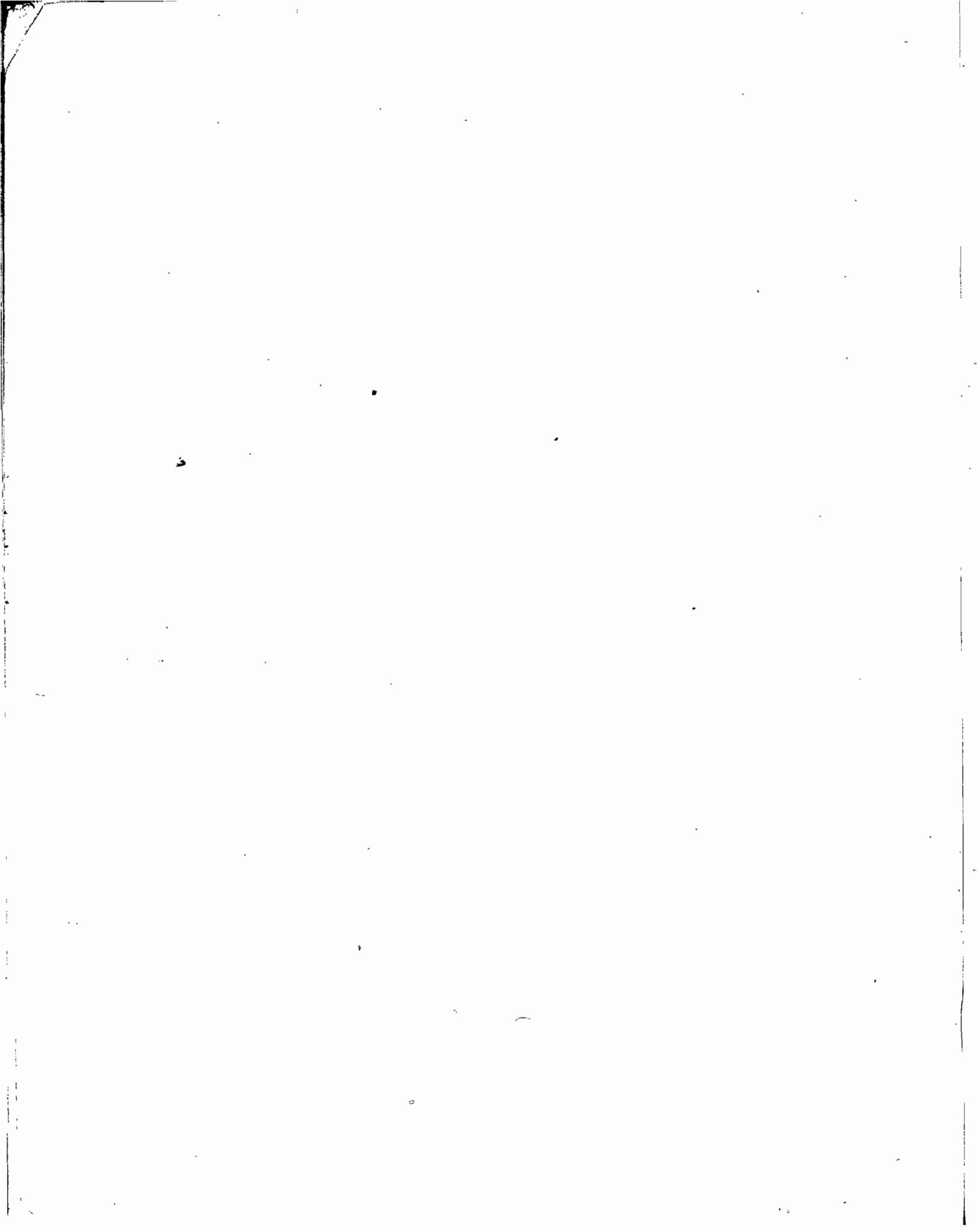
... ..

... ..

... ..
... ..

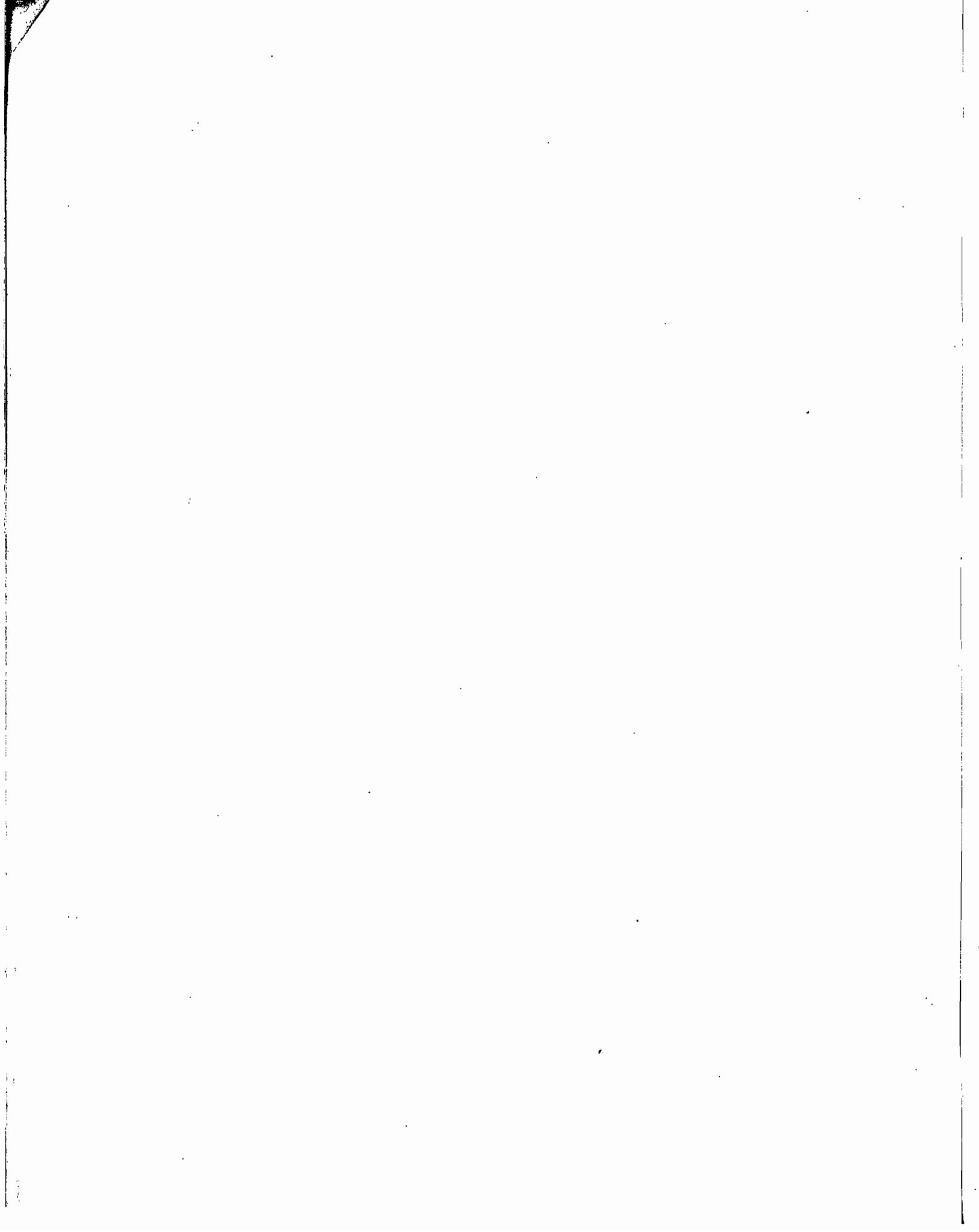
... ..

Notas tomadas en el curso dictado con el
auspicio de la UNESCO, durante los meses de
julio a octubre de 1958.



I N D I C E

	Página
Introducción	1
1. El espacio afín E_n	15
2. Las distribuciones sobre E_n	18
3. Conjugada de una distribución	22
4. Los núcleos $K_{x,y}$	23
5. Conjugado y simétrico de un núcleo K	30
6. Los espacios de Hilbert \mathcal{H} contenidos en \mathcal{D}'	32
7. Núcleo asociado al espacio \mathcal{H}	35
8. Los núcleos de tipo positivo	42
9. Correspondencia entre \mathcal{H} y los núcleos de tipo positivo.	51
10. Caracterización de los elementos de \mathcal{H}	54
11. Correspondencia recíproca entre los núcleos de tipo po- sitivo y \mathcal{H}	58
12. Algunas propiedades de los núcleos de tipo positivo y los subespacios de Hilbert correspondientes	68
13. Transporte de estructura por un isomorfismo	81
14. Núcleos invariantes por traslación	89
15. Distribución y núcleos de tipo positivo	103
16. La convolución sobre los espacios vectoriales y afines..	106
17. Subespacio \mathcal{H} invariante por traslación y distribución H de tipo positivo asociada	110
18. La transformación de Fourier en un espacio vectorial....	115
19. Algunas propiedades del subespacio \mathcal{H} invariante por traslación	120
20. El espacio $\mathcal{F}\mathcal{H}$ transformado de Fourier de \mathcal{H}	123
21. El grupo afín	129
22. Clasificación de los subespacios \mathcal{H}	133
23. Transporte de estructura y transformación de Fourier ...	137
24. La noción de partícula	142
25. Un teorema sobre medidas positivas extremales	164
26. El espacio afín E_n y el grupo ortogonal relativo a una forma cuadrática	166
27. Caso particular: E_4 con forma cuadrática de signatura (3;1)	174
28. Las distribuciones invariantes por el grupo de Lorentz..	175
29. Las medidas minimales en el caso del grupo de Lorentz...	181
30. Casos de algunos subgrupos importantes del grupo de Lorentz	191
31. Las medidas positivas invariantes por el grupo de Lorentz propio	197
32. La ecuación de Klein-Gordon	201
33. La noción de distribución a valores vectoriales	205
34. Las distribuciones H_M y Ψ_M como distribuciones regu- lares de x_0	215
35. El espacio de Hilbert de los estados	240
36. La densidad de probabilidad de presencia en el espacio de los estados	243
37. Descomposición espectral de la posición en el espacio de los movimientos	246
38. Medición de otras magnitudes	255
39. El problema de la energía positiva	261



INTRODUCCION

En lo que sigue haremos una exposición general de las ideas en las que se basará el presente curso.

No habrá por tanto demostraciones, sino solamente una presentación del panorama general, planteándose las cuestiones que serán demostradas en los capítulos siguientes.

I.- Mecánica cuántica no relativista

Supondremos aquí que un punto material que se mueve en el espacio de tres dimensiones, no tiene una posición determinada en cada instante, pero su "estado" está fijado por una función de ondas Ψ .

No precisaremos ahora la función de ondas; admitiremos solamente, como queda dicho, que el estado de un punto queda fijado por la función $\Psi(x,y,z)$.

Más exactamente: el espacio en que vivimos es un espacio afín de tres dimensiones que designaremos con E_3 . Por tanto, en lugar de escribir $\Psi(x,y,z)$, pondremos $\Psi(x)$, donde x indica un punto de E_3 . Con ello evitamos la notación $\Psi(x,y,z)$ que sugiere la existencia de un sistema de coordenadas, sistema que no viene dado directamente por la naturaleza.

En el espacio E_3 hay además una noción de medida de longitud, que puede precisarse observando que en el espacio vectorial asociado a E_3 puede introducirse la noción de producto escalar, o bien una forma cuadrática positiva, mediante la cual quedan definidas las longitudes.

Observemos, de paso, que lo que existe en la naturaleza es la noción de comparación de longitudes, no así la de unidad; pero puede suponerse que hemos elegido una unidad de longitud una vez por todas.

E_3 es por tanto un espacio euclideo afín.

$\Psi(x)$ es una función definida en E_3 , con valores complejos. Es, además, de cuadrado sumable. Se tiene además:

$$I.1 \quad \int_{E_3} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

El significado de esta integral es claro, dado que si en E_3 está definida una longitud, existe una noción de volumen; y hemos indicado con dx el elemento de volumen.

Por otra parte, $\Psi(x)$ puede interpretarse como una densidad de probabilidad de presencia en el siguiente sentido:

Si Ω es un subconjunto de E_3 , y si además un punto tiene a $\Psi(x)$ como función de ondas, entonces la probabilidad de que una medición de la posición del punto dé un resultado en Ω es:

$$\int_{\Omega} |\Psi(x)|^2 dx.$$

Si Ω es todo el espacio E_3 la probabilidad es, desde luego, igual a uno.

Ahora bien; si un punto tiene en un cierto instante una función de ondas Ψ , y el punto se mueve al variar el tiempo t , supondremos que en cada instante tiene una función de ondas determinada.

Pondremos $\Psi(x,t)$, que da para cada t la función Ψ que corresponde al punto.

El movimiento del punto está dado, pues, por una función de cuatro variables. Es decir, $\Psi(x,t)$ está definida sobre el espacio $E_3 \times E_1$, producto del espacio E_3 y el espacio E_1 . Digamos que E_1 es un espacio afín, dado que no hay un origen de los tiempos fijado por la naturaleza; pero de la misma manera que antes, podemos fijar en E_1 un sentido y una unidad.

Observemos que $\Psi(x,t)$ no es, por cierto, una función arbitraria. Veremos en seguida cuáles son las condiciones que le impondremos.

Por lo pronto, Ψ es para cada t una función de ondas; y además es sabido que satisface a una ecuación diferencial, la ecuación de Schrödinger, que suponemos conocida para el caso de una partícula libre.

Tendremos así:

$$I.2 \quad \int_{E_3} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1,$$

$$I.3 \quad i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi,$$

donde: $\hbar =$ constante de Planck reducida, es decir $\frac{h}{2\pi}$, } *es h reducida*

$m =$ masa de la partícula,

$\Delta =$ laplaciano, el cual tiene un sentido intrínseco, pues en E_3 está definida una forma cuadrática.

En todo esto no tenemos en cuenta la Relatividad

Hagamos notar que la ecuación I.3 debe ser considerada en el sentido de las distribuciones, pues en virtud de I.2 $\Psi \in L_2$, para cada t , siendo L_2 el espacio de las funciones de cuadrado sumable; por tanto, en general, no tendrá derivada en el sentido usual.

Se puede demostrar una propiedad de la integral que figura en I.2, a saber:

Si Ψ es una función medible, si la integral $\int_{E_3} |\Psi(x,t)|^2 dx$ es finita para casi todo t , y si Ψ satisface a la ecuación de Schrödinger en el sentido de las distribuciones, entonces la integral anterior tiene el mismo valor para casi todo t .

Por tanto, si es igual a uno para un cierto t , y si es finita para todo t , es igual a una ⁰ para casi todo t .

Se puede ver que las relaciones que figuran en I.2 y I.3 no son invariantes para el grupo de Lorentz. No pueden ser, por tanto, las ecuaciones de una partícula en la teoría de la Relatividad.

Trataremos ahora de encontrar las ecuaciones de las partículas relativistas.

II.- Mecánica cuántica relativista

El descubrimiento de las ecuaciones de las partículas relativistas fue, en cierta forma, curioso. Cuando se vio que la ecuación de Schrödinger no era relativísticamente invariante, se buscaron las ecuaciones de primer orden en t que fueran relativísticamente invariantes, lo cual se vio que no era posible. Las solas ecuaciones invariantes, son del tipo de la ecuación de Klein-Gordon que son de segundo orden en t .

Dirac halló otra que es de primer orden pero, para ello fue necesario suponer que Ψ es una función vectorial de cuatro componentes. Con ello se introdujeron en la física los espinores. Partiendo pues de una idea falsa, como era pretender que las ecuaciones eran de primer orden respecto de t , Dirac encontró las ecuaciones del electrón. Para el momento tenemos ya la ecuación de Klein-Gordon, de segundo orden respecto del tiempo.

Nosotros vamos a proceder en una dirección completamente diferente. No haremos hipótesis sobre el orden de la ecuación a que debe satisfacer la partícula, sino que trataremos de encontrar la naturaleza de las funciones de ondas, haciendo el mínimo de hipótesis.

Nos basaremos en cuatro principios generales.

1º — Hay que comenzar por cambiar la noción de espacio.

Tomaremos el espacio E_4 , universo de la relatividad, espacio afin sobre el cual existe una forma cuadrática, la forma cuadrática de Lorentz, que proviene de un producto escalar. Indicaremos con (x,y) el producto escalar de dos vectores de E_4 , es decir, de dos elementos del es-

pacio vectorial E_4 asociado a E_4 .

La forma cuadrática de Lorentz se obtiene tomando el producto escalar de un vector por sí mismo, esto es: (x,x) , y la signatura se toma igual a $3;1$.

Es decir, si se toma un sistema de referencia de Lorentz se tendrá:

$$\text{II.1} \quad (\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$$

Esta última expresión no está inmediatamente dada, pues no hay un sistema de coordenadas privilegiado. Sólo se da la forma y la signatura. Los sistemas referenciales de Lorentz son precisamente aquéllos en los que dicha forma se escribe como en II.1.

Hay otras cuestiones sobre el sentido del tiempo y la orientación del espacio. Se puede considerar, teniendo presentes los resultados de la teoría de las ecuaciones de evolución en la física, por una parte, y las recientes investigaciones de Yang-Lee, por otra, que posiblemente estén dados en la naturaleza el sentido del tiempo y la orientación del espacio.

Si estudiamos un punto material que se mueve, no es ya posible distinguir su función de ondas en un instante t . Sólo se puede considerar

$\Psi(x)$ con $x \in E_4$. De cualquier manera, si se toma un sistema de coordenadas de Lorentz, será posible tener $\Psi(x)$ para cada t , con lo cual se define una función de ondas sobre E_3 .

Veamos cuáles serán las propiedades de la función de ondas. Esta función no es de ninguna manera arbitraria, dado que hemos visto en el caso no relativista que por una parte satisface a una ecuación diferencial y por otra hay una condición de normación que expresa que ciertas integrales son finitas.

Haremos las siguientes hipótesis: Siendo una función de 4 variables no será mucho suponer que es localmente sumable y que en particular es una distribución; la indicaremos poniendo: $\Psi_x \in \mathcal{D}'(E_4)$, donde $\mathcal{D}'(E_4)$ indica el espacio de las distribuciones definidas sobre E_4 . Veremos más adelante que en realidad Ψ es propiamente una función, pero no hacemos ahora esta hipótesis.

Además, para una partícula supondremos que las funciones de ondas forman un subespacio \mathcal{H} de $\mathcal{D}'(E_4)$. \mathcal{H} será, pues, el espacio funcional de la partícula.

Si tenemos en cuenta I.2, vemos que estamos en presencia de un espacio de Hilbert, que puede ser descrito de la siguiente manera:

\mathcal{H} es el espacio de las distribuciones $\Psi(x,t) \in \mathcal{D}'(E_3 \times E_1)$, que verifican la ecuación de Schrödinger en el sentido de las distribuciones, que en particular son funciones y tales que para casi todo t la integral $\int_{E_3} |\Psi(x,t)|^2 dx$ es finita.

Por otra parte, esta integral es la misma para casi todo t .

El producto escalar en este espacio será:

$$\text{II.2} \quad (\Psi_1 | \Psi_2) = \int_{E_3} \Psi_1(x,t) \overline{\Psi_2(x,t)} dx ,$$

que también tiene el mismo valor para casi todo t . Nótese que la integral está tomada sobre E_3 .

Para el caso presente sólo se sabe que $\mathcal{H} \in \mathcal{D}'(E_4)$.

Tampoco se supone que las Ψ son funciones; pero de todas maneras \mathcal{H} tiene una estructura de espacio de Hilbert que está definido por un producto escalar: $(\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}}$. Es decir, que tenemos una norma para la cual \mathcal{H} es completo.

Agreguemos algo más. Sabiendo que en todo subespacio natural de \mathcal{D}' la topología es más fina que la inducida por \mathcal{D}' , tendremos que en

\mathcal{H} la topología es más fina que en \mathcal{D}' . Es decir, si una sucesión converge en el sentido de la norma, converge también en el sentido de las distribuciones

Una última condición: pondremos para $\psi_x \in \mathcal{H}$, $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$.

Resumiendo lo dicho en este punto podremos poner:

E_4 : espacio afin con sentido de t y orientación fijados; con producto escalar (x,y) ; con signatura $[3;1]$;

$\mathcal{H} \in \mathcal{D}'(E_4)$ espacio de Hilbert más fino;

$\psi \in \mathcal{H}$; $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$

Planteemos ahora la siguiente cuestión: conocido el tipo de partícula determinar \mathcal{H} ; es decir, determinar el conjunto de las ψ que lo definen y su producto escalar.

Supondremos que la determinación completa de \mathcal{H} es un proceso intrínseco a partir del espacio E_4 munido del producto escalar (\vec{x}, \vec{y}) , con sentido de t y orientación fijados.

Veamos qué significa precisamente este enunciado. Sea el espacio E_4 y consideremos otro ejemplar F_4 . Sean \mathcal{H} y \mathcal{K} los espacios de Hilbert correspondientes determinados por el mismo proceso.

Si hay entre E_4 y F_4 un isomorfismo

$$\text{II.3} \quad E_4 \longleftrightarrow F_4 ,$$

correspondencia biunívoca que conserva el producto escalar y las orientaciones, este isomorfismo debe inducir una correspondencia biunívoca entre \mathcal{H} y \mathcal{K} .

Por lo pronto, el isomorfismo $E_4 \longleftrightarrow F_4$ induce una correspondencia

$$\text{II.4} \quad \mathcal{D}'(E_4) \longleftrightarrow \mathcal{D}'(F_4)$$

por transporte de estructura y como queremos que la determinación de \mathcal{H} y \mathcal{K} sea intrínseca, ese isomorfismo deberá transformar toda distribución perteneciente a \mathcal{H} en una distribución perteneciente a \mathcal{K} ; se tendrá por tanto una correspondencia entre \mathcal{H} y \mathcal{K} que deberá ser un isomorfismo.

Es decir: cada vez que se tengan dos ejemplares del espacio afín de signatura dada, queda definido un isomorfismo entre ellos; este isomorfismo define un isomorfismo entre los espacios de distribuciones definidas sobre ellos, el cual a su vez induce un isomorfismo entre \mathcal{H} y \mathcal{K} .

Esta es la expresión rigurosa, equivalente a decir que la determinación de \mathcal{H} a partir de E_4 se hace por un proceso intrínseco.

2º _____ Podemos tomar ahora en lugar de F_4 el mismo E_4 . La correspondencia $E_4 \longleftrightarrow E_4$ sea en este caso una correspondencia de Lorentz propia o, por abuso de lenguaje, de Lorentz; es decir, una correspondencia que conserve la forma cuadrática, la orientación del tiempo y del espacio. Supondremos una transformación de Lorentz inhomogénea, pues E_4 es un espacio afín y no vectorial.

Sea Λ una particular transformación de Lorentz; ella define un automorfismo de E_4 , el cual define a su vez un automorfismo del espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(E_4)$, y esta operación sobre las distribuciones debe dejar el subespacio \mathcal{H} invariante, conservando el producto escalar definido en él.

Es decir, Λ , que opera sobre $\mathcal{D}'(E_4)$, induce sobre \mathcal{H} un operador unitario.

¿Cuál es ahora nuestro problema?

Dado E_4 afín, con su forma cuadrática, hallar todos los subes-

pacios \mathcal{H} pertenecientes a \mathcal{D}' que son invariantes Lorentz.

Si logramos conocer todos esos subespacios, conoceremos por tan to todas las partículas.

Existe un método general para determinar todos los subespacios buscados.

Es el siguiente. Consideremos una función sobre $E_4 \times E_4$, es decir, un núcleo $K(x, \xi)$. Diremos que $K(x, \xi)$ es de tipo positivo si para todo sistema de n puntos

$$x_1; x_2; \dots; x_n \in E_4,$$

y para todo sistema de n números complejos

$$z_1; z_2; \dots; z_n \in \mathbb{C},$$

se tiene

$$\text{II.5} \quad \sum_{i,j} K(x_i; x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Lo indicaremos escribiendo $K \succ 0$.

Esta condición puede ser enunciada de distinta manera:

Dados n puntos arbitrarios x_1 , la matriz

$$\text{II.6} \quad \begin{pmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \dots & K(x_n, x_n) \end{pmatrix}$$

es hermítica positiva, es decir, todos sus autovalores son reales y positivos.

Esta propiedad queda definida así para núcleos-funciones.

Si consideramos ahora un núcleo distribución, es decir, una distribución $K_{x, \xi}$ definida sobre $E_4 \times E_4$, se puede definir la propiedad anterior también para estos núcleos.

Ahora bien: es posible demostrar que hay correspondencia biunívoca entre los subespacios de Hilbert de \mathcal{D}' con topología más fina que la inducida por \mathcal{D}' y los núcleos de tipo positivo, $K_{x,\xi} > 0$.

Es decir: todo núcleo $K_{x,\xi} > 0$ define un subespacio de \mathcal{D}' con estructura de espacio de Hilbert de topología más fina que la inducida por \mathcal{D}' , y recíprocamente.

Hay que buscar, entonces, los $K_{x,\xi} > 0$, núcleos-distribuciones que son invariantes para todas las transformaciones de Lorentz.

Ahora bien: las más sencillas de estas transformaciones son las traslaciones. K será entonces invariante por traslación.

En el caso de que K fuera una función, esta condición se expresa poniendo

$$\text{II.7} \quad K(x, \xi) = K(x-\vec{a}; \xi-\vec{a}) \text{ para todo } \vec{a},$$

de lo cual resulta que K es función de la diferencia $x-\xi$, dado que si se fija un origen 0 , en cuyo caso el espacio será vectorial, se obtiene

$$K(x, \xi) = K(x-\xi; 0),$$

que depende sólo de $x-\xi$.

En el caso en que K sea una distribución invariante por traslación, se puede ver que es posible encontrar una distribución $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_4)$ tal que

$$\text{II.8} \quad K_{x,\xi} = H_{x-\xi}.$$

El hecho de ser $K > 0$ se expresa ahora formalmente de la misma manera:

$$\text{II.9} \quad \sum_{i,j} H(x_i-x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0.$$

Las distribuciones de tipo positivo aparecen, por otra parte, en la teoría de las distribuciones sobre grupos conmutativos; y puede verse que mediante ello es posible caracterizar las distribuciones de tipo

positivo sobre \vec{E}_4 .

Con este fin recordaremos el teorema de Bochner:⁽¹⁾

Condición necesaria y suficiente para que una distribución sea de tipo positivo es que sea temperada y que su transformada de Fourier sea una medida temperada positiva.

De acuerdo con esto, nuestro problema es encontrar las medidas positivas que son invariantes con respecto al grupo de Lorentz. Es decir, hay que buscar en E_4 , donde suponemos ya elegido un origen, todas las medidas μ temperadas positivas e invariantes con respecto al grupo homogéneo de Lorentz.

Para ello es necesario recordar los resultados obtenidos por P. D. Methée⁽²⁾ en su tesis.

Por lo pronto, busquemos cuál ha de ser el soporte de μ . Por ser invariantes Lorentz, su soporte estará formado por órbitas del grupo de Lorentz, las cuales pueden clasificarse de la siguiente manera.

Considerando el cono de luz con vértice en el origen, tendremos una primera especie de órbita, que será el hiperboloide de una napa en el exterior del cono. La indicaremos con $\textcircled{1}$. Consideremos ahora los hiperboloides de dos napas. Puesto que el grupo de Lorentz conserva el sentido de t , cada napa es una órbita. Tendremos dos especies de órbitas que llamaremos $\textcircled{2}$ y $\textcircled{3}$.

Una cuarta especie será la napa del cono de luz del mismo lado del tiempo que $\textcircled{2}$; la llamaremos $\textcircled{4}$. Una quinta especie será la otra

(1) L. Schwartz, Théorie des distributions, París, Hermann et Cie. 1950-1951; vol. II, pag. 132.

En lo que sigue, al referirnos a esta obra, lo haremos con las letras T.D. seguidas por la indicación del volumen y la página correspondiente.

(2) P.D. Methée, Sur les distributions invariantes dans le groupe de Lorentz. Tesis. Comm. Math. Helv., vol. 28, fasc. 3, 1954.

napa del cono de luz, que denominaremos con (5). Una sexta especie será el origen, que indicaremos con (6).

Ahora bien: si una medida μ de tipo positivo es invariante Lorentz, su soporte debe ser una colección de órbitas, y mediante los resultados obtenidos por Methée se pueden determinar todas esas μ .

3º _____ Haremos una nueva hipótesis, que llamaremos hipótesis de la energía positiva; Supondremos que existen sólo partículas de energía positiva. Desde el momento que hemos fijado un sentido del tiempo, distinguiremos entre el cono de luz positivo y el negativo. Decir que la partícula tiene energía positiva significa, como veremos, que el soporte de μ no puede contener puntos fuera del cono de luz positivo. Es decir, como tipos de órbitas sólo deben admitirse los indicados por (2), (4) y (6).

4º _____ Definiremos, por último, qué entendemos por partícula elemental. Es necesario para ello recordar lo dicho en el principio 1º de II donde se estableció que para una partícula existe un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Supongamos que exista otra partícula cuyo espacio es \mathcal{K} tal que $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$; diremos entonces que la segunda partícula es más elemental que la primera. Es decir, la partícula es tanto más elemental cuanto más pequeño es su espacio de Hilbert correspondiente.

Si $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$, el espacio \mathcal{H} podría ser descompuesto en dos espacios $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ tales que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 ,$$

y por tanto la partícula se descompondría en dos, cada vez que su espacio se descompone en la suma directa de dos espacios.

Elemental querría decir que \mathcal{H} no puede descomponerse en una

suma directa de dos espacios de Hilbert.

El planteamiento parece así absurdo, pues en general \mathcal{H} puede descomponerse en la suma de dos espacios; pero no hay que olvidar que existe otra condición, que es la invariancia Lorentz.

Diremos entonces que la partícula es elemental si \mathcal{H} no contiene subespacio propio que sea invariante Lorentz.

Veamos ahora qué significa esta propiedad para los núcleos. Por lo pronto, si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ los respectivos núcleos cumplirán la relación $K = K_1 + K_2$.

Por tanto K es un núcleo correspondiente a una partícula elemental, si no es posible expresarlo como la suma de otros dos núcleos K_1 y K_2 , excepto sólo si K_1 y K_2 son proporcionales a K .

Para la correspondiente medida μ , esta propiedad se traduce diciendo que μ no es una suma de medidas semejantes, excepto si son proporcionales. Ello equivale a decir que el soporte de μ está contenido en la adherencia de una sola órbita, pues si estuviera contenido en la unión de dos órbitas cerradas, μ se descompondría entonces en la suma de dos medidas.

Hay entonces tres tipos de medidas positivas elementales invariantes Lorentz que son, a menos de un factor:

μ_m^+ : cuyo soporte se encuentra en el hiperboloide positivo de constante m .

μ_0^+ : cuyo soporte se encuentra en la superficie del cono positivo.

δ : cuyo soporte es el origen.

Estos tres tipos de medidas definirán las partículas elementales.

les.

Sus transformadas de Fourier, llamados propagadores e indicados en la Física Cuántica por los símbolos

$$\Delta_m^+ ; \Delta_0^+ ; 1 ;$$

son, como funciones de la diferencia $x - \xi$, los núcleos K buscados.

Más tarde habrá que determinar los operadores hermiticos que corresponden a la medición de magnitudes físicas. En realidad, es preferible ver cuáles son los tipos de operaciones invariantes Lorentz y de qué manera es aceptable definir estos operadores como las magnitudes respectivas.

Hemos obtenido en lo que precede las partículas escalares: ~~me-~~sones de masa m y 0 respectivamente y, además, el vacío.

Pero hay otras, como los fotones y electrones. Para obtenerlas hay que partir de otros axiomas, aceptando distribuciones no ya escalares sino vectoriales, para lo cual es necesario introducir el espín. Las partículas se clasifican entonces por su espín s .



1. El espacio afín E_n .

Recordemos que: un espacio vectorial \vec{E}_n es un espacio cuyos elementos se llaman vectores \vec{x}, \vec{y}, \dots ; en el que existe una noción de adición $\vec{x} + \vec{y}$ entre dos elementos; un elemento $\vec{0}$, llamado origen; y una multiplicación por los escalares λ , de modo que $\lambda \vec{x}$ es un vector del espacio. Los axiomas de la adición y de la multiplicación son bien conocidos y no los repetiremos aquí; sólo diremos que, con respecto a la adición, \vec{E}_n es un grupo y que hay ciertas relaciones de la multiplicación con la adición. Existen además en \vec{E}_n bases, y si estas bases tienen dimensión n , se dice que el espacio es de dimensión n .

Pasemos ahora a ocuparnos del espacio afín, enunciando los axiomas que lo caracterizan.

Llamamos espacio afín de dimensión n , a un conjunto E_n y a un espacio vectorial asociado \vec{E}_n , con ciertas relaciones especiales entre ambos, que estableceremos a continuación.

- I) Los elementos de E_n son los puntos del espacio afín y los elementos de \vec{E}_n son, por abuso de lenguaje, los vectores de E_n .
- II) Si $a \in E_n$, $\vec{u} \in \vec{E}_n$, entonces $a + \vec{u} \in E_n$; es decir, la suma de un punto y un vector es un punto. Esta operación es tal que al par constituido por un elemento de E_n y un elemento de \vec{E}_n le hace corresponder un elemento de E_n , satisfaciéndose los siguientes axiomas.

$$1.1 \quad a + \vec{0} = a ;$$

$$1.2 \quad (a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v}) .$$

En realidad, este último axioma es consecuencia de otros, pero nada impide adelantarlos desde ahora.

En la relación

$$1.3 \quad (a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v})$$

en el primer miembro, $a + \vec{u}$ es un punto de E_n y al sumarle \vec{v} se obtiene un punto de E_n . En el segundo miembro $\vec{u} + \vec{v}$ es un vector y al sumarle a este vector un punto, se obtiene un punto. Esto parece evidente, pero lo es sólo porque hemos escrito la ley de composición entre E_n y \vec{E}_n con el signo $+$; pero esta notación se justifica precisamente en la anterior relación de asociatividad. Sería conveniente, pues, escribir la ley de composición con otro signo, y después de analizar la relación mencionada, concluir que se la puede escribir con el signo $+$.

El axioma 1.1 podría deducirse de 1.2 y 1.3.

III) Cualquiera que sea a . fijado, la correspondencia

$$1.4 \quad \vec{u} \rightarrow a + \vec{u}$$

es una correspondencia entre el espacio vectorial y el espacio afín. Cuando \vec{u} recorre el espacio vectorial, $a + \vec{u}$ recorre el espacio afín, una vez exactamente.

Es posible adoptar otra notación interesante.

Sean a, b , puntos de E_n . Hay un vector y sólo uno tal que $a + \vec{u} = b$ (en virtud de III) ;

se puede entonces escribir

$$\vec{u} = a - b ,$$

y decir que la diferencia de dos puntos es un vector.

También se puede escribir

$$\vec{u} = \vec{ab} .$$

En este caso tenemos la famosa relación de Chasles

$$1.5 \quad \vec{ab} + \vec{bc} + \vec{ca} = \vec{0} ,$$

que se puede escribir como sigue, con la notación de la diferencia :

$$1.6 \quad (b - a) + (c - b) + (a - c) = \vec{0} ;$$

lo cual parece evidente, pero lo es sólo si hemos ya adoptado la notación de la diferencia. Pero la justificación de la notación de la diferencia implica precisamente la relación de Chasles.

Veamos cómo 1.6 se deduce a partir de 1.5 .

Pongamos:

$$\vec{u} = b - a , \quad \vec{v} = c - b ;$$

o bien:

$$b = a + \vec{u} , \quad c = b + \vec{v} ;$$

reemplazando obtenemos

$$c = (a + \vec{u}) + \vec{v} = a + (\vec{u} + \vec{v}) .$$

Es decir,

$$c - a = \vec{u} + \vec{v} .$$

Por tanto, en 1.6 los dos primeros términos tienen como suma $c - a$, que es el opuesto de $a - c$, y por consiguiente la suma

es cero. (1)

En adelante se entenderá como elemento de \vec{E}_n , un elemento del espacio vectorial asociado a E_n , y el espacio afín E_n será definido sobre el cuerpo de los números reales R .

E_n posee varias estructuras, en particular, una estructura-topológica, una estructura diferenciable, etc., que se introducen de la manera siguiente.

Si fijamos en E_n un origen O , con respecto a este origen E_n se convierte en un espacio vectorial; con ello significamos que dado O , la correspondencia $\vec{u} \rightarrow O + \vec{u}$, es una correspondencia biunívoca entre el espacio afín y el espacio vectorial, lo cual permite transportar la estructura vectorial del espacio vectorial asociado, sobre E_n mismo.

Se pueden introducir así en E_n las mismas estructuras, topológica y diferenciable, que las del espacio vectorial asociado.

La estructura vectorial introducida en esta forma en E_n depende de la elección de O , pero las estructuras topológicas y diferenciables son independientes de O .

2. Las distribuciones sobre E_n .

Vamos a definir ahora las distribuciones sobre el espacio

(1) Lo dicho hasta este momento constituiría una introducción correcta de la geometría elemental. A saber: se introducirían primero los cuerpos: real, racional y complejo. Después los espacios vectoriales sobre un cuerpo, y, por último, la noción básica de la geometría elemental, que es la noción de espacio afín con un espacio vectorial asociado.

E_n , espacio afín respecto del cuerpo de los números reales. Sabemos como se definen las distribuciones en R^n , es decir, en un espacio vectorial con base dada. Previamente necesitamos conocer el espacio de las funciones φ .

a) El espacio \mathcal{D} sobre E_n .- Comencemos por definir las funciones $\varphi(x)$ indefinidamente diferenciables y con soporte compacto en E_n . En R^n estas funciones son, directamente, funciones de n variables. Pero en E_n no tenemos ahora ni origen ni base dados. En primer lugar definiremos el soporte de $\varphi(x)$ con la definición usual. En segundo lugar, la propiedad de ser indefinidamente diferenciable la precisaremos de la siguiente manera.

En E_n , $\varphi(x)$ es función no ya de n variables, sino de un punto variable.

Tomaremos un sistema de referencia, es decir, un origen y una base del espacio vectorial asociado:

$$2.1 \quad 0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n.$$

De esta manera cada punto $x \in E_n$ tendrá ahora n coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n , así que podrá ponerse:

$$2.2 \quad x = 0 + \sum_i x_i \vec{e}_i.$$

Estará entonces definida una correspondencia biunívoca entre E_n y R^n , y podremos decir:

Una función $\varphi(x)$ sobre E_n es indefinidamente diferenciable, si en la anterior representación $\varphi(x)$ se convierte en una función de n variables x_1, x_2, \dots, x_n que es indefinidamente diferenciable.

Esta propiedad no depende de la elección particular del origen 0 ni de la base, pues por una transformación de coordenadas se ve inmediatamente que una función $\varphi(x)$ indefinidamente diferenciable en una base, lo es también en otra.

La topología de \mathcal{D} es la misma que en el caso de \mathbb{R}^n . Hay que definir primero la topología del espacio \mathcal{D}_M , topología de la convergencia uniforme del subespacio de \mathcal{D} , formado por las funciones de \mathcal{D}_M , que tienen su soporte en un compacto fijo M (convergencia uniforme de las funciones $\varphi(x)$ y de sus derivadas parciales). Cuando decimos derivadas, suponemos que hemos elegido una base; pero se ve que si un sistema de funciones converge a cero en una base, converge a cero en otra base distinta.

El espacio \mathcal{D} es, entonces, el límite inductivo de los espacios \mathcal{D}_M .

b) El espacio \mathcal{D}' , sobre E_n . \mathcal{D}' será el dual topológico del espacio \mathcal{D} , munido de la topología fuerte de espacio dual, como se hace usualmente.

Tenemos ahora \mathcal{D} y \mathcal{D}' . Las propiedades de \mathcal{D} y \mathcal{D}' que se demuestran en \mathbb{R}^n son exactamente las mismas en este caso, pues eligiendo un sistema de referencia, los espacios \mathcal{D} y \mathcal{D}' relativos a E_n se convierten en los espacios \mathcal{D} y \mathcal{D}' relativos a \mathbb{R}^n . En particular, son espacios de Montel, tonelados, reflexivos, etc.

Observación. Una función $f(x)$, localmente sumable, no es ahora una distribución particular.

Recordemos que en el espacio \mathbb{R}^n una función $f(x)$ localmente sumable es la distribución definida por

$$2.3 \quad \varphi \longrightarrow \int_{R^n} f(x) \varphi(x) dx .$$

Pero en este caso la integral no existe, dado que no hay, en E_n , ningún elemento de volumen particular dx , siendo por lo tanto imposible integrar.

Podríamos introducir en E_n la noción de función $f(x)$ localmente sumable, diciendo que para una base dada, $f(x)$ se convierte en una función de n variables, localmente sumable, y viendo que resulta localmente sumable para toda otra base. En esta base tendríamos un elemento de volumen dx , pero este elemento no sería invariante por un cambio de base.

Las distribuciones que hemos definido en lo que precede son, en realidad, las corrientes sobre una variedad indefinidamente diferenciable, de grado n y especie impar. De grado n , pues \mathcal{D}' es el dual de un espacio \mathcal{D} de funciones ordinarias, y de especie impar, pues \mathcal{D} es el espacio de las funciones ordinarias; o, si se quiere, \mathcal{D} es el espacio de las formas diferenciables de especie par.

No es necesario, por otra parte, seguir considerando las corrientes. Recordemos solamente que \mathcal{D} y \mathcal{D}' no estaban definidos hasta ahora más que en R^n y ahora los hemos definido en E_n , y que una función $f(x)$ no es una distribución particular.

Además, no hay en E_n noción de derivada, y hemos visto que solamente con la introducción de una base podemos hablar de derivadas.

Más adelante esta dificultad no subsistirá, pues en el espacio afín de Lorentz, que consideraremos, existe un elemento de volumen especial:

$$dx = dx_1 dx_2 dx_3 dx_0 ,$$

que es un elemento de volumen privilegiado. Entonces una función $f(x)$ definirá una distribución particular, por la relación 2.3 .

Una medida de Radon μ , es, en cambio, una distribución particular, pues está definida como funcional por la relación

$$2.4 \quad \varphi \rightarrow \mu(\varphi) ,$$

para φ continua con soporte compacto.

3. Conjugada de una distribución.

Sea T una distribución. Definiremos \bar{T} por la siguiente relación:

$$3.1 \quad \bar{T}(\varphi) = \overline{T(\bar{\varphi})} .$$

El segundo miembro de 3.1 tiene sentido, pues siendo $\varphi \in \mathcal{D}$, es $\bar{\varphi} \in \mathcal{D}$ y $T(\bar{\varphi})$ es la distribución T aplicada a $\bar{\varphi}$. Pero \bar{T} debe ser una forma ~~de~~ lineal sobre φ , y $T(\bar{\varphi})$ es antilineal. Por esta razón debemos tomar el conjugado de $T(\bar{\varphi})$, lo que justifica 3.1.

Se puede también escribir 3.1 de la siguiente manera:

$$3.2 \quad \bar{T}(\bar{\varphi}) = \overline{T(\varphi)} ,$$

cambiando φ por $\bar{\varphi}$.

De esta manera, aparece como la prolongación de la relación usual de la conjugada de una función f , pues \bar{f} verifica 3.2 en una base dada.

En particular si φ es real, es decir, si $\varphi = \overline{\varphi}$; se obtiene

$$\overline{T(\varphi)} = T(\overline{\varphi}) .$$

Diremos que una distribución es real, si es igual a su conjugada, o sea, si es

$$3.3 \quad T(\varphi) = \overline{T(\overline{\varphi})} .$$

Si φ es real, esto significa que

$$3.4 \quad T(\varphi) = \overline{T(\varphi)} ;$$

es decir, el valor $T(\varphi)$ es real. Podemos decir, en virtud de 3.4, que T es real si toma valores reales para φ real y también que la conjugada \overline{T} de una distribución T, toma valores simétricos de los valores que toma T para φ imaginaria.

Digamos, por último, que toda distribución T se puede escribir de la siguiente manera:

$$T = U + iV ,$$

en que U y V son reales.

4. Los núcleos $K_{x,y}$.

Sean X_m , Y_n dos espacios afines de dimensión ~~de~~ m y n respectivamente. Podemos formar el espacio afín producto $X_m \times Y_n$, cuyos elementos son los pares de elementos que pertenecen a X_m e Y_n , respectivamente.

El espacio vectorial asociado es el producto de los espacios vectoriales asociados, existiendo la siguiente relación entre ambos:

$$4.1 \quad (a, b) + (\vec{u}, \vec{v}) = (a + \vec{u}, b + \vec{v}) .$$

Definición.- Se llama núcleo, a una distribución $K_{x,y}$ sobre $X_m \times Y_n$.

En particular si los espacios son R^m y R^n , una función de dos variables $K(x,y)$ define un núcleo particular; pero en el caso de tratarse de espacios afines una función no define ningún núcleo.

Siendo $K_{x,y}$ una distribución, define una funcional lineal y continua

$$4.2 \quad \varphi(x,y) \rightarrow K(\varphi) ,$$

siendo $K(\varphi)$ un número complejo.

Sea ahora $\varphi(y)$ una función de \mathcal{D}_y sobre Y_n . Con $K_{x,y}$ y φ se puede definir una distribución T_x sobre X_m . La indicaremos poniendo

$$4.3 \quad K_{x,y} \cdot \varphi(y) \in \mathcal{D}'_x .$$

Debemos ver que obtenemos una funcional sobre $\Psi \in \mathcal{D}_x$, que será conocida si conocemos su valor sobre toda Ψ , es decir, si conocemos:

$$T_x (\Psi(x)) .$$

Tomaremos como definición la siguiente:

$$4.4 \quad K_{x,y} (\Psi(x) \varphi(y)) = T_x (\Psi(x)) .$$

El primer miembro de esta expresión tiene un sentido claro, dado que $K_{x,y}$ es una distribución respecto a x,y , y $\Psi(x) \varphi(y)$

es una función que pertenece a $\mathcal{D}'_{x,y}$ (recordemos que $K_{x,y}$ y $\varphi(y)$ son fijos).

Por tanto para cada Ψ dada, siendo φ fija, el primer miembro de 4.4 da por resultado un número complejo.

Démostremos ahora que la correspondencia

$$4.5 \quad \Psi(x) \rightarrow K_{x,y}(\Psi(x) \varphi(y))$$

es lineal y continua.

Es lineal. En efecto: si se pone $\Psi_1 + \Psi_2$ en lugar de Ψ , se tendrá

$$4.6 \quad K_{x,y}((\Psi_1 + \Psi_2) \varphi) = K_{x,y}(\Psi_1 \varphi + \Psi_2 \varphi) = \\ = K_{x,y}(\Psi_1 \varphi) + K_{x,y}(\Psi_2 \varphi)$$

por la linealidad de $K_{x,y}$.

Es continua. En efecto, si $\Psi_j \rightarrow 0$ en \mathcal{D}'_x , si Ψ_j tiene su soporte contenido en su compacto fijo, y toda derivada de Ψ_j tiende a cero uniformemente en una base dada, los productos $\Psi_j \varphi$ tienden a cero y tienen sus soportes en un compacto fijo de $X \times Y$. Por otra parte, como φ es fija, las derivadas parciales de $\Psi_j \varphi$ tienden a cero uniformemente puesto que las Ψ_j cumplen esta condición. Por tanto los números complejos $K_{x,y}(\Psi_j \varphi)$ tienden a cero, y en consecuencia la correspondencia 4.5 define una distribución. Es decir:

$$K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'_x.$$

Vamos a resumir lo dicho. Sea $K_{x,y}$ un núcleo, $K_{x,y} \in \mathcal{D}'_{x,y}$, y sea $\varphi(y) \in \mathcal{D}'_y$.

$$\text{Se tiene } K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'_x,$$

con la definición:

$$4.7 \quad (K \cdot \varphi)_x (\Psi(x)) = K_{x,y} (\Psi(x) \varphi(y)) .$$

Caso particular.

Si se toma una base, se tienen los espacios R^m y R^n ; es entonces posible definir un elemento de volumen. En tal caso una función $K(x,y)$ localmente sumable, de dos variables, define una distribución; y la transformación 4.3 se escribe

$$4.8 \quad K \cdot \varphi = \int K(x,y) \varphi(y) dy ,$$

que define una función sobre R^n .

Veamos el significado de T_x en este caso. Tendremos

$$\begin{aligned} 4.9 \quad T_x (\Psi(x)) &= K_{x,y} (\Psi(x) \varphi(y)) = \\ &= \iint K(x,y) \Psi(x) \varphi(y) dx dy = \\ &= \int \Psi(x) dx \int K(x,y) \varphi(y) dy ; \end{aligned}$$

lo cual muestra que T_x es una función, dado que su valor sobre $\Psi(x)$ se calcula por una integral, siendo tal función la integral que figura en 4.8 .

Hemos visto que para cada $K_{x,y}$ fijo y cada $\varphi(y)$ fija, $K \cdot \varphi$ define una distribución, elemento de \mathcal{D}'_x .

Supongamos ahora $\varphi(y)$ variable; entonces para cada $\varphi(y) \in \mathcal{D}_y$ el núcleo $K_{x,y}$ define un elemento $K \cdot \varphi$ de \mathcal{D}'_x .

Es decir: $K_{x,y}$ define una aplicación

$$4.10 \quad \varphi \longrightarrow K \cdot \varphi$$

de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x .

Veamos cuáles son las propiedades de esta aplicación.

Es lineal. En efecto

$$4.11 \quad K.(\varphi_1 + \varphi_2) = K.\varphi_1 + K.\varphi_2 \quad ,$$

pues para toda Ψ el primer miembro da

$$\begin{aligned} (K.(\varphi_1 + \varphi_2))(\Psi) &= K.((\varphi_1 + \varphi_2)\Psi) = \\ &= K.(\varphi_1\Psi + \varphi_2\Psi) = K_{x,y}(\Psi(x)\varphi_1(y)) + K_{x,y}(\Psi(x)\varphi_2(y)); \end{aligned}$$

el segundo miembro da

$$\begin{aligned} (K.\varphi_1 + K.\varphi_2)(\Psi) &= (K.\varphi_1)(\Psi) + (K.\varphi_2)(\Psi) = \\ &= K_{x,y}(\Psi(x)\varphi_1(y)) + K_{x,y}(\Psi(x)\varphi_2(y)) \quad , \end{aligned}$$

lo cual prueba 4.11 .

Es continua. Se tiene una aplicación de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x , espacios vectoriales topológicos. Sabemos que el espacio \mathcal{D} es límite inductivo de los subespacios \mathcal{D}_M , y es conocido que para que una aplicación lineal de un límite inductivo de los subespacios \mathcal{D}_M en un espacio vectorial sea continua, es necesario y suficiente que la restricción a cada \mathcal{D}_M sea continua.

Demostremos entonces que la aplicación $(\mathcal{D}_M)_y \rightarrow \mathcal{D}'_x$ es continua. Supongamos que $\varphi_j \in (\mathcal{D}_M)_y$ y que $\varphi_j \rightarrow 0$ en $(\mathcal{D}_M)_y$; es decir, φ_j y todas sus derivadas convergen a cero, uniformemente, conservando su soporte en un compacto fijo M .

Consideremos los valores de $K.\varphi_j$ sobre Ψ cuando Ψ recorre un conjunto acotado de \mathcal{D}_x . Se tiene por definición

$$(K.\varphi_j)(\Psi) = K_{x,y}(\Psi(x)\varphi_j(y)) \quad .$$

Comprobemos que estos números complejos tienden a cero. En efecto, si $\varphi_j \rightarrow 0$ y Ψ permanece acotada, $\Psi(x) \varphi_j(y) \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}_{x,y}$, pues un conjunto acotado de \mathcal{D} está formado por funciones que tienen su soporte en un compacto fijo (1); y como las φ_j tienen sus soportes en un compacto fijo, los soportes de $\Psi(x) \varphi_j(y)$ están contenidos en un compacto fijo de $X \times Y$. - Por otra parte toda derivada de φ_j converge uniformemente a cero; pero Ψ es acotada y es sabido que un conjunto acotado de \mathcal{D} está formado por funciones cuyas derivadas de todo orden están uniformemente acotadas (2).

Entonces si toda derivada de φ_j tiende a cero uniformemente y toda derivada de Ψ queda uniformemente acotada, toda derivada del producto converge uniformemente a cero. Ahora bien, como $K_{x,y}$ es una distribución, los números complejos $K_{x,y}(\Psi(x) \varphi_j(y))$ tienden a cero.

En conclusión: hemos demostrado que si K es un núcleo, define una transformación lineal y continua de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x .

Recíprocamente. Sea L una transformación lineal y continua $\mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{D}'_x$. Si L se puede definir por un núcleo K , este núcleo es único. Veamos ante todo que si K existe, está determinado.

En efecto: conocida φ , conocemos $K \cdot \varphi$ y por consiguiente $(K \cdot \varphi)(\Psi)$. Luego se conoce este valor para toda Ψ ; es decir, se conoce el valor de la distribución K sobre toda función definida en $X \times Y$ que tenga la forma de un producto. Por linealidad es conocido su valor para todas las funciones de \mathcal{D} que tengan la forma

$$4.12 \quad \varphi_1 \Psi_1 + \varphi_2 \Psi_2 + \dots + \varphi_l \Psi_l$$

(1) T.D. I, pág. 69, Théorème IV.

(2) T.D. ibid.

También lo será para todos los límites de funciones de esta forma, convergentes en \mathcal{D}_{xy} y es conocido ⁽¹⁾ que:

toda función $\theta(x,y) \in \mathcal{D}_{x,y}$ es límite, en el sentido de \mathcal{D} , de sumas finitas del tipo 4.12 .-

Por tanto K es una distribución bien conocida. Es decir: si la transformación L está definida por un núcleo K , este núcleo es único.

Queda pendiente la cuestión de si la transformación L está siempre definida por un núcleo.

La respuesta es afirmativa, teniendo presente el teorema de los núcleos ⁽²⁾ :

Toda aplicación lineal y continua $\mathcal{D}_y \rightarrow \mathcal{D}'_x$ se puede definir por un núcleo $K_{x,y}$.

Observemos que siendo $\mathcal{D}'_{x,y}$ el espacio de las distribuciones sobre el espacio afín producto de X e Y , y $\mathcal{L}(\mathcal{D}_y; \mathcal{D}'_x)$ el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x , el teorema de los núcleos demuestra que estos espacios son los mismos; es decir,

$$4.13 \quad \mathcal{D}'_{x,y} = \mathcal{L}(\mathcal{D}_y; \mathcal{D}'_x) .$$

Esto dice por lo pronto que, como conjuntos, son idénticos. Pero hay una cuestión topológica.

En $\mathcal{D}'_{x,y}$ hay una topología, que es la topología fuerte del dual. En \mathcal{L} hay varias topologías importantes, y la más utilizada es la

(1) T.D. I, pág. 108, Théorème III .

(2) L.Schwartz, Théorie des noyaux; Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Cambridge, Mass., 1950, Vol. I, pp 220-30; especialmente Théorème III, p. 223.

topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados, topología que se indica escribiendo $L_b(\mathcal{D}_y; \mathcal{D}'_x)$.

A priori, estas dos topologías son diferentes; pero se puede demostrar que son las mismas. El citado teorema de los núcleos contiene también esta demostración.

En conclusión. Existe un isomorfismo entre los espacios $\mathcal{D}'_{x,y}$ y $L(\mathcal{D}_y; \mathcal{D}'_x)$, y si se toman las topologías anteriormente mencionadas, este isomorfismo es también un isomorfismo topológico.

5. Conjugado y simétrico de un núcleo K.

Hemos ya definido el conjugado complejo de un núcleo K.

$$5.1 \quad \overline{K}(\theta(x,y)) = \overline{K(\overline{\theta}(x,y))},$$

de acuerdo con 3.1, dado que K es una distribución en $X \times Y$.

En particular, si $\theta(x,y)$ tiene la forma $\Psi(x)\varphi(y)$, obtenemos

$$5.2 \quad \overline{K}(\Psi(x)\varphi(y)) = \overline{K(\overline{\Psi}(x)\overline{\varphi}(y))}.$$

Pero de acuerdo con la definición 4.7 de núcleo, esta relación se puede escribir en la forma

$$5.3 \quad (\overline{K} \cdot \varphi)(\Psi) = \overline{(K \cdot \overline{\varphi})(\overline{\Psi})},$$

puesto que si se pone $K \cdot \overline{\varphi} = T$, en el segundo miembro de 5.3 tenemos $\overline{T(\overline{\Psi})}$; pero en virtud de 3.1

$$5.4 \quad \overline{T(\overline{\Psi})} = \overline{T(\Psi)},$$

y en el primer miembro de 5.3 tenemos $(\overline{K} \cdot \varphi) (\psi)$, es decir

$$\overline{K} \cdot \varphi = \overline{T} ;$$

lo cual prueba que la fórmula de la conjugada, válida para una distribución, es también válida para un núcleo; pues de lo dicho anteriormente resulta

$$5.5 \quad \overline{K} \cdot \varphi = \overline{K \cdot \overline{\varphi}} .$$

Definamos ahora el simétrico de un núcleo K.

Consideremos el caso de tener el producto de dos espacios confundidos, $E_n \times E_n$. En este caso escribiremos $K_{x, \xi}$.

Si $\varphi \in \mathcal{D}$, se tiene $K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'$, y es válida la relación

$$(K \cdot \varphi) (\psi) = K_{x, \xi} (\psi(x) \varphi(\xi)) ,$$

donde $K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'$; $\psi \in \mathcal{D}$; $K_{x, \xi} \in \mathcal{D}'_{x, \xi}$; $\psi(x) \varphi(\xi) \in \mathcal{D}_{x, \xi}$.

Si K es una función $K(x, \xi)$, el simétrico es ${}^s K = K(\xi, x)$.

Para una distribución pondremos

$$5.6 \quad ({}^s K) (\varphi) = K ({}^s \varphi) ,$$

donde φ es una función de dos variables $\varphi(x, \xi)$ y hemos escrito

$${}^s \varphi = \varphi(\xi, x) .$$

Pero nos interesa conocer ${}^s K \cdot \varphi$ para ${}^s K \in \mathcal{D}'(E_n \times E_n)$; $\varphi \in \mathcal{D}(E_n)$, ${}^s K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'(E_n)$.

Podemos poner

$$5.7 \quad ({}^s K \cdot \varphi) (\psi) = {}^s K (\psi(x) \varphi(\xi)) .$$

Pero, en virtud de esto,

$${}^s K (\Psi(x) \varphi(\xi)) = K (\varphi(x) \Psi(\xi)) ,$$

y el segundo miembro de esta igualdad es igual a $(K.\Psi) (\varphi)$.

Será entonces

$$5.8 \quad ({}^s K.\varphi) (\Psi) = (K.\Psi) (\varphi) .$$

En particular el núcleo se llama simétrico si

$${}^s K = K ,$$

y antisimétrico si

$${}^s K = -K .$$

6. Los espacios de Hilbert \mathcal{H} , contenidos en \mathcal{D}' .

Hemos dicho en la introducción que si se busca una teoría conveniente de las partículas elementales, es necesario buscar los espacios de Hilbert que son subespacios del espacio de las distribuciones sobre E_n , y que hay una correspondencia biunívoca entre estos subespacios y los núcleos de tipo positivo. Esto equivale a decir que el espacio de las distribuciones de ondas en E_n para una partícula debe ser un espacio de Hilbert que cumple la relación

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'_{(E_n)} .$$

Prácticamente los espacios de Hilbert que conocemos, para las partículas usuales, son espacios de funciones; pero buscaremos los espacios de Hilbert de distribuciones con métodos muy generales; más adelante veremos que son en realidad espacios de funciones. Pero por

ahora no hacemos esta hipótesis.

Consideremos el espacio $\mathcal{D}'(E_n)$, y sea \mathcal{H} un subespacio que tiene estructura de espacio de Hilbert. Hay entonces un producto escalar que denotaremos así:

$$6.1 \quad (\Psi_1 | \Psi_2)_{\mathcal{H}} .$$

Esta expresión es una forma lineal con respecto a Ψ_1 , y antilineal con respecto a Ψ_2 . Define entonces un producto escalar. Además es una forma cuadrática positiva, en el sentido de que es $(\Psi | \Psi) > 0$ para $\Psi \neq 0$.

Esto significa que \mathcal{H} es un espacio prehilbertiano. Pero un espacio de Hilbert tiene una propiedad más: es completo con respecto a la norma definida por el producto escalar.

Nuestra primera hipótesis será, pues, que \mathcal{H} es un espacio de Hilbert.

No hacemos, en cambio, ninguna hipótesis sobre el producto escalar, que no tendrá ninguna relación con los productos escalares usuales.

Es decir que, si bien estamos habituados a trabajar con el producto escalar en L_2 , a saber: $\int \Psi_1 \Psi_2 dx$, no supondremos relación de ningún tipo entre este producto escalar y el definido en 6.1.

Ejemplo. El más simple de los espacios \mathcal{H} sería el espacio reducido a 0. Consideremos un espacio también simple, aunque no trivial como el antedicho. Sea un espacio de dimensión igual a uno, contenido en $\mathcal{D}'(E_n)$, formado tomando una distribución $\theta \in \mathcal{D}'(E_n)$ y todas las que le son proporcionales. Introducimos una estructura de espacio de Hilbert, definiendo el producto escalar de la siguiente manera:

$$6.2 \quad (\alpha \theta | \beta \theta)_{\mathcal{H}} = \alpha \bar{\beta},$$

donde α y β son números complejos. Se puede también poner en el segundo miembro $c \alpha \bar{\beta}$ con $c > 0$, lo cual daría otro producto escalar. Evidentemente 6.2 no tiene ninguna relación con la expresión

$$6.3 \quad \int \alpha \theta \cdot \bar{\beta} \bar{\theta} \, dx,$$

dado que la integral no tiene sentido, puesto que θ y $\bar{\theta}$ no son necesariamente funciones.

Hay otra hipótesis razonable a introducir. Es sabido que todas las veces que tenemos dos espacios funcionales, uno de ellos contenido en el otro, la topología es más fina que la inducida por el segundo.

Por ejemplo: si consideramos sobre el segmento $(0,1)$ el espacio C de las funciones continuas y los espacios L^p y L^q con $p \geq q \geq 1$, se tiene

$$C \subset L^p \subset L^q \subset L^1; \quad \frac{1}{x} \in C \not\subset L^2$$

y la topología de C es más fina que la inducida por L^p , más fina a su vez que la inducida por L^q , y más fina que la inducida por L^1 .

Nuestra segunda hipótesis será pues la siguiente: la topología de \mathcal{H} es más fina que la inducida por \mathcal{D}' .

En otros términos, si Ψ_ν tiende a cero en el sentido de \mathcal{H} , tiende a cero en el sentido de \mathcal{D}' . Esto lo escribiremos así:

$$\Psi_\nu \xrightarrow{\mathcal{H}} 0 \implies \Psi_\nu \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$$

7.a. Vamos a mostrar ahora, que a \mathcal{H} se le puede asociar un núcleo

$$K_{x,\xi} \in \mathcal{D}'_{x,\xi} .$$

$K_{x,\xi}$ será un elemento del espacio de las distribuciones de finidas sobre $E_n \times E_n$. Para mostrarlo consideremos la función $\varphi \in \mathcal{D}$. Esta función define una forma lineal y continua sobre \mathcal{D}' ; hay entonces en \mathcal{D}' una forma lineal y continua

$$T \longrightarrow T(\varphi) , \quad \varphi \text{ fija}$$

o bien una forma antilineal y continua

$$T \longrightarrow \overline{T}(\varphi) ,$$

(Recordemos que se puede poner: $\overline{T}(\varphi) = \overline{T(\overline{\varphi})}$).

Ahora bien: si es antilineal y continua sobre \mathcal{D}' lo es a fortiori sobre \mathcal{H} , pues \mathcal{H} es más pequeño y con topología más fina que la inducida.

En efecto: si esta forma antilineal está definida para todo T de \mathcal{D}' , estará definida para todo T de \mathcal{H} , puesto que \mathcal{H} es un subespacio de \mathcal{D}' . Además si $T \rightarrow 0$ en \mathcal{H} , en virtud de la segunda hipótesis (topología de \mathcal{H} más fina), $T \rightarrow 0$ en \mathcal{D}' , y por lo tanto $\overline{T} \rightarrow 0$ en \mathcal{D}' . Como \overline{T} es continua en \mathcal{D}' , los números $\overline{T}(\varphi)$ tienden a cero, lo que muestra que la forma $\overline{T}(\varphi)$ es continua en \mathcal{H} .

Tenemos entonces una forma antilineal y continua sobre \mathcal{H} ; pero \mathcal{H} es un espacio de Hilbert y es sabido que las formas antilineales y continuas sobre los espacios de Hilbert completos, se pueden definir por un producto escalar con un elemento fijo de \mathcal{H} . Existe entonces un $\phi \in \mathcal{H}$ tal que

$$7.a.1 \quad T_{\mathcal{H}} \longrightarrow \overline{T}(\varphi) = \overline{T(\overline{\varphi})} = (\phi | T)_{\mathcal{H}} .$$

Es decir: para $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, $\exists \phi \in \mathcal{H}_0$ tal que se cumple 7.a.1.
Además ϕ es único.

Hay entonces una aplicación de los elementos de \mathcal{D} en los de \mathcal{H} . Esta aplicación es lineal pues, $T(\varphi)$ es lineal en φ y $(\phi | T)$ es lineal en ϕ .

Veamos que es continua. Si $\varphi_\nu \rightarrow 0$ en \mathcal{D} hay que ver que $\phi_\nu \rightarrow 0$ en \mathcal{H} . En efecto: como \mathcal{D} es dual topológico de \mathcal{D}' , la convergencia a cero en \mathcal{D} significa que $T(\varphi_\nu) \rightarrow 0$ uniformemente si T recorre un conjunto acotado de \mathcal{D}' .

Pero como $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$, con topología más fina que la inducida, un conjunto acotado en \mathcal{H} es a fortiori un conjunto acotado en \mathcal{D}' . Por consiguiente, si es cierto que $T(\varphi_\nu) \rightarrow 0$ cada vez que T recorre un conjunto acotado en \mathcal{D}' , ello es cierto a fortiori si T recorre un conjunto acotado de \mathcal{H} .

En conclusión: $(\phi | T) \rightarrow 0$ uniformemente si T queda acotado en \mathcal{H} .

Ahora bien: se sabe exactamente cual es la topología de \mathcal{H} : es equivalente decir que elementos de \mathcal{H} tienden a cero en el sentido de la topología fuerte de \mathcal{H} a decir que el producto escalar con la bola unidad converge uniformemente a cero, o bien que el producto escalar con elementos acotados de \mathcal{H} , converge uniformemente a cero.

Por lo tanto, el que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ en \mathcal{D} implica que $\|\phi_\nu\| \rightarrow 0$, en virtud del enunciado anterior.

Hemos demostrado pues que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \longrightarrow & \phi \\ (\mathcal{D}) & & (\mathcal{D}') \end{array}$$

es lineal y continua.

A fortiori: siendo ϕ elemento de \mathcal{H} , es elemento de \mathcal{D}' , y si esta aplicación $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ es continua, también es continua la aplicación $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$, puesto que si $\varphi_n \rightarrow 0$ en \mathcal{D} , hemos visto que $\|\phi_n\| \rightarrow 0$ en \mathcal{H} , y por consiguiente en \mathcal{D}' , pues \mathcal{H} tiene una topología más fina que la inducida por \mathcal{D}' .

Hemos construído, pues, una aplicación lineal y continua:

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \longrightarrow & \phi \\ (\mathcal{D}) & & (\mathcal{D}') \end{array} .$$

Pero el teorema de los núcleos nos dice que a toda aplicación lineal y continua $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ podemos atribuirle un núcleo.

En resumen, $\varphi \in \mathcal{D}$ define una forma antilineal, continua sobre \mathcal{D}' y a fortiori, sobre $\mathcal{H} : \mathbb{T} \rightarrow \overline{\mathbb{T}}(\varphi)$. Por un teorema fundamental de la teoría del espacio de Hilbert, toda forma antilineal continua sobre \mathcal{H} se puede definir con un elemento fijo ϕ de \mathcal{H} , que es único. Se tiene así una aplicación $\varphi \in \mathcal{D} \rightarrow \phi \in \mathcal{H}$, lineal y continua.

A fortiori, se tiene una aplicación lineal y continua $\varphi \in \mathcal{D} \rightarrow \phi \in \mathcal{D}'$, y en virtud del teorema de los núcleos obtenemos el núcleo $K_{x, \xi}$, que es único.

Estudiemos ahora el núcleo $K_{x, \xi}$. Suponemos \mathcal{D} y \mathcal{D}' definidos sobre un mismo E_n .

$K_{x, \xi}$ verifica la propiedad que lo caracteriza:

$$\phi = K \cdot \varphi ;$$

es decir para $\forall T \in \mathcal{H}$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, se tiene:

$$7.a.2 \quad \overline{\mathbb{T}}(\varphi) = (\phi | T)_{\mathcal{H}} = (K \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}} .$$

Recíprocamente: si un núcleo verifica esta propiedad, es el

núcleo asociado al espacio de Hilbert por el método precedente y de manera única.

Podemos decir que al espacio de Hilbert \mathcal{H} está asociado el único núcleo, tal que para cualquier T de \mathcal{H} y cualquier φ de \mathcal{D} , se verifica la igualdad 7.a.2. Pero si es fácil comprobar que un núcleo que cumple esta propiedad, es único, no se puede ver que existe, excepto por aplicación del teorema de los núcleos.

Como consecuencia de 7.a.2, resulta, si se toma en lugar de T la distribución $K.\psi$, que es un elemento de \mathcal{H}

$$\bar{T}(\varphi) = (\overline{K.\psi})(\varphi) = (\overline{K}.\bar{\psi})(\varphi) = \overline{K}_{x,\xi}(\varphi(x)\bar{\psi}(\xi))$$

y por tanto para $\forall \psi \in \mathcal{D}; \forall \varphi \in \mathcal{D}$

$$(\overline{K}.\bar{\psi})(\varphi) = \overline{K}_{x,\xi}(\varphi(x)\bar{\psi}(\xi)) = (K.\varphi | K.\psi)_{\mathcal{H}}.$$

Es decir, como propiedad particular de K , resulta que cualesquiera que sean φ y ψ de \mathcal{D} , $K.\varphi$ y $K.\psi$ son elementos de \mathcal{H} y su producto escalar en \mathcal{H} es igual al valor de la distribución \bar{K} sobre el producto $\varphi(x)\bar{\psi}(\xi)$.

7.b. Obtención de \mathcal{H} , a partir de $K_{x,\xi}$, sabiendo que \mathcal{H} existe.

En lo que sigue nos plantearemos la cuestión de ver de qué manera se puede obtener \mathcal{H} , si se conoce el núcleo de K y se sabe que \mathcal{H} existe, aunque este último no es conocido a priori.

Ello tiene un interés puramente heurístico, pero el método de obtención será utilizado más adelante.

En este sentido, el asunto será más sencillo que en 7.a,

desde el punto de vista de los teoremas utilizados, aunque la demostración será más larga. Allí los resultados se han obtenido fácilmente, pero se ha debido recurrir, en cambio, a la parte no trivial del teorema de los núcleos.

En primer lugar, si conocemos K , conocemos $K.\varphi$ para $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. Conocemos por lo tanto ciertos elementos de \mathcal{H} , a saber: todos los $K.\varphi$. Estos elementos forman un subespacio de \mathcal{K} de \mathcal{H} que podemos indicar así:

$$\mathcal{K} = K.\mathcal{D} \subset \mathcal{H},$$

donde hemos indicado con $K.\mathcal{D}$ el transformado del espacio \mathcal{D} por el núcleo K .

No conocemos \mathcal{H} , sino solamente un subespacio \mathcal{K} .

Pero conocemos, además, el producto escalar en \mathcal{K} , pues si $K.\varphi$, $K.\psi$ son dos elementos de \mathcal{K} , su producto escalar se puede calcular de la siguiente manera:

$$7.b.1 \quad (K.\varphi | K.\psi) = \overline{\int_{x,\xi} (\varphi(x) \overline{\psi(\xi)})},$$

dado que si $K.\varphi$, $K.\psi$ son dos elementos de \mathcal{K} , su producto escalar es el valor de la distribución $\overline{\int_{x,\xi}}$ sobre la función $\varphi(x) \overline{\psi(\xi)}$

Se ve inmediatamente que \mathcal{K} es un subespacio denso en \mathcal{H} en el sentido de su producto escalar.

En efecto. Recordemos que: condición necesaria y suficiente para que un subespacio de un espacio de Hilbert sea denso, es que no exista ningún elemento distinto de cero del espacio que sea ortogonal a este subespacio.

Ello equivale a decir que: si $T \in \mathcal{H}$, tal que $T \perp K.\varphi$,

para $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ entonces: $T = 0$.

Pero el producto escalar de T con $K \cdot \varphi$ en el espacio de Hilbert es $\overline{T}(\varphi)$.

Por lo tanto: $(K \cdot \varphi | \overline{T})_{\mathcal{H}} = 0$ para $\forall \varphi$ significa $\overline{T}(\varphi) = 0$ cualquiera sea φ , es decir: $\overline{T} = 0$, o bien $T = 0$.

Ahora bien: \mathcal{H} sería entonces la completación de \mathcal{K} .

Hay una pequeña dificultad. Se tendría por lo pronto

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}'.$$

Sabemos que \mathcal{K} es denso; \mathcal{H} no lo conocemos y decimos que es la completación de \mathcal{K} . Pero la completación es un espacio abstracto. Se puede construir, por ejemplo, como el espacio de los filtros de Cauchy con una relación de equivalencia, pero es abstracto. Si se construye $\widehat{\mathcal{K}}$, completado de \mathcal{K} , no estará en general inmerso en \mathcal{D}' , y por tanto, $\widehat{\mathcal{K}}$ no permite obtener inmediatamente \mathcal{H} .

Pero observemos que \mathcal{K} es denso; que $\mathcal{K} \subset \widehat{\mathcal{K}}$, y también que: $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Habrá que encontrar la correspondencia entre $\widehat{\mathcal{K}}$ y \mathcal{H} .

Hemos supuesto que \mathcal{H} existe pero que no es conocido, de manera que no podemos conocer, de inmediato, esta correspondencia.

Ahora bien: hay una inyección natural de \mathcal{K} en \mathcal{D}' , que es una aplicación lineal y continua de \mathcal{K} en \mathcal{D}' . Es decir, conocemos la aplicación lineal y continua: $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}'$, siendo \mathcal{D}' completo. Y es sabido que una aplicación lineal y continua de un espacio incompleto E en un espacio completo F se continúa canónicamente de una manera única en una aplicación lineal y continua del completado \widehat{E} de E , en F .

Por tanto, la aplicación $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}'$ se puede continuar de manera única en una aplicación $\widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$, de manera que la primera sea

la aplicación compuesta de la inyección canónica de \mathcal{K} en su completado $\widehat{\mathcal{K}}$ y de la segunda.

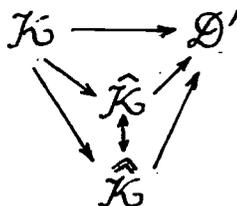
Es decir, se tendrá:

$$\mathcal{K} \rightarrow \widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$$

La aplicación $\widehat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$ es la única aplicación continua que sobre \mathcal{K} coincide con la inyección natural. Observemos que siendo abstracto el completado de \mathcal{K} , hay diversas maneras de elegirlo.

Tomando entonces un segundo ejemplar del completado de \mathcal{K} , que llamaremos $\widehat{\widehat{\mathcal{K}}}$, hay por lo pronto una correspondencia canónica entre $\widehat{\mathcal{K}}$ y $\widehat{\widehat{\mathcal{K}}}$; además tenemos una inyección canónica $\mathcal{K} \rightarrow \widehat{\widehat{\mathcal{K}}}$; y la inyección natural antedicha $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}'$ se continúa de manera única en la aplicación $\widehat{\widehat{\mathcal{K}}} \rightarrow \mathcal{D}'$.

Podemos entonces construir el siguiente diagrama conmutativo

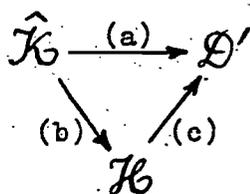


(Cualquier camino entre las flechas del diagrama da el mismo resultado).

Tomemos ahora como $\widehat{\mathcal{K}}$, el mismo \mathcal{H} .

Quiere decir que la aplicación $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}'$ es la única aplicación continua que, sobre \mathcal{K} , coincide con la inyección natural. Pero la inyección natural de \mathcal{H} en \mathcal{D}' tiene esta propiedad; entonces, es la misma que la anterior.

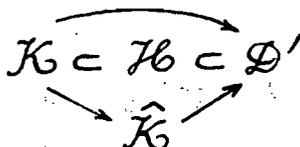
Podemos dibujar el siguiente diagrama:



- (a) prolongación de $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}'$
- (b) isomorfismo canónico
- (c) inyección natural

El espacio $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ es la imagen de $\hat{\mathcal{K}}$ por la aplicación prolongada $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$.

Podemos, además, consignar el siguiente diagrama



Si tenemos un elemento en $\hat{\mathcal{K}}$, este elemento tiene una imagen en \mathcal{D}' que se conoce, precisamente, por la prolongación de la aplicación $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$; los elementos de \mathcal{H} serán entonces estas imágenes, lo cual nos da el isomorfismo entre $\hat{\mathcal{K}}$ y \mathcal{H} .

En conclusión: Los elementos de \mathcal{H} los conocemos simplemente como las imágenes en \mathcal{D}' de los elementos de $\hat{\mathcal{K}}$, abstracto. Conocemos entonces el isomorfismo $\hat{\mathcal{K}} \leftrightarrow \mathcal{H}$, y por lo tanto conocemos también el producto escalar en \mathcal{H} , dado que lo conocemos en $\hat{\mathcal{K}}$.

En 7.a y 7.b hemos visto, en resumen, que a todo subespacio \mathcal{H} en \mathcal{D}' , con estructura de espacio de Hilbert le corresponde un núcleo K , y que el conocimiento de K determina este subespacio.

La recíproca no es la misma cosa. Hay que hacer la construcción de 7.b sin suponer que \mathcal{H} existe. No nos es posible hacerlo ahora; necesitamos antes enunciar una propiedad del núcleo K .

8. Los núcleos de tipo positivo.

En la literatura matemática se introduce la noción de núcleo de tipo positivo, para los núcleos funciones, de la siguiente manera.

Sea $K(x, \xi)$ una función sobre el producto $X \times X$ del espacio X localmente compacto, arbitrario, por sí mismo.

Definición 1ª: Se dice que K es un núcleo positivo, (en símbolos $K \succ 0$), si para todo sistema en número finito de puntos $x_1, x_2, \dots, x_\ell \in X$ y para todo sistema del mismo número de números complejos $z_1, z_2, \dots, z_\ell \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$8.1 \quad \sum_{i,j} K(x_i, x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

En particular: si X es el espacio discreto de n puntos, los valores de $K(x, \xi)$ forman una matriz cuadrada hermítica de tipo positivo. La noción coincide con la enunciada en la definición 1ª, pues 8.1 significa que para todo sistema de ℓ elementos x_1, \dots, x_ℓ de X , la matriz de los valores $K(x_i, x_j)$, que es una $\ell \times \ell$ matriz, es hermítica de tipo positivo. (cfr. Introd. II)

Propiedades:

I) $K(x, x)$ es siempre real y positivo.

En efecto: aplicando la definición para un sólo punto se tiene:

$$K(x, x) z \bar{z} \geq 0, \text{ pero } z \bar{z} \geq 0, \text{ y por tanto } K(x, x) \geq 0.$$

II) $K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$: simetría hermítica.

En efecto: basta tomar un sistema de dos puntos; se tiene entonces que la suma:

$$K(x, x) u \bar{u} + K(\xi, \xi) v \bar{v} + K(x, \xi) u \bar{v} + K(\xi, x) \bar{u} v$$

será real positiva.

Pero $K(x, x)$, $K(\xi, \xi)$ son reales y positivos en virtud de I) ; si se elige $u = 1$, siendo $v \bar{v}$ real y positivo, se dedu

que $K(x, \xi) \bar{v} + K(\xi, x) v$ es real y positivo cualquiera que sea v ; de lo cual resulta que $K(x, \xi)$ y $K(\xi, x)$ son complejos conjugados.

Vamos a introducir ahora otra noción de núcleo de tipo positivo más adaptada a la teoría moderna de la medida.

Supongamos que K es una función continua de dos variables. Sea μ una medida de Radon sobre X , con soporte compacto, y consideremos la integral

$$8.2 \quad \iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu(x) d\bar{\mu}(\xi),$$

que es un número que depende de μ . La integral de 8.2 tiene sentido, dado que μ tiene soporte compacto y no importa entonces el crecimiento de K en el infinito.

Definición 2ª: Se dice que un núcleo-función K , es de tipo positivo en el sentido de Radon, $(K \succcurlyeq_{(R)} 0)$, si para cada medida de Radon en X , con soporte compacto se tiene

$$8.3 \quad \iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu(x) d\bar{\mu}(\xi) \geq 0$$

Se ve inmediatamente que la definición 1ª es un caso particular de la 2ª, cuando se toma como medida μ una masa discreta, es decir:

$$\mu = \sum_i z_i \delta_{x_i}$$

donde δ_{x_i} es la medida de Dirac en x_i .

En efecto, la integral 8.3 dará:

$$\iint_{X \times X} K(x, \xi) d\left(\sum_i z_i \delta_{x_i}\right) d\left(\sum_j \bar{z}_j \delta_{x_j}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \iint_{X \times X} K(x, \xi) \sum_{i,j} z_i \bar{z}_j d(\delta_{x_i}) d(\delta_{x_j}) = \\
 &= \sum_{i,j} z_i \bar{z}_j \iint_{X \times X} K(x, \xi) d(\delta_{x_i}) d(\delta_{x_j}) = \\
 &= \sum z_i \bar{z}_j K(x_i, x_j) .
 \end{aligned}$$

que coinciden con la expresión 8.1 .

Parece, así, que la noción enunciada en la definición 2ª es más rica que la contenida en la 1ª .

Vamos a ver que es la misma. Es decir, si un núcleo es de tipo positivo en el sentido de la definición 1ª, lo es en el sentido de Radon.

Hay varias demostraciones. Una de ellas consiste en calcular la integral 8.3 con las sumas de Riemann, que son expresiones del tipo 8.1 , y observar que si estas últimas son positivas, su límite también lo será.

Preferimos dar otra demostración más general. Para ello recordemos la definición y los dos teoremas siguientes: (1)

Definición: Se dice que las medidas μ_j , (sucesión o filtro, esto úl-

(1) N. Bourbaki. Integration ch.III , § 5 , N° 3 , prop. 4. Esta referencia muestra que si $\mu_j \rightarrow \mu$ vagamente, estando acotadas, entonces $\mu_j \otimes \mu_j \rightarrow \mu \otimes \mu$ vagamente. Entonces para cada función $H(x, \xi)$ continua con soporte compacto, se tiene

$$\lim \iint H(x, \xi) d\mu_j(x) d\mu_j(\xi) = \iint H(x, \xi) d\mu(x) d\mu(\xi) .$$

Pero aquí suponemos, además, que las μ_j tienen sus soportes en un compacto fijo M . Si se toma una función continua α con soporte compacto e igual a uno en M , las integrales con $K(x, \xi)$ son las mismas que las integrales con $H(x, \xi) = \alpha(x)\alpha(\xi)K(x, \xi)$ que tienen soporte compacto.

timo en caso que el espacio X no tenga base numerable de entornos), con soportes compactos, convergen vagamente a la medida μ , si para toda función continua φ con soporte compacto se tiene:

$$\mu_j(\varphi) \longrightarrow \mu(\varphi).$$

Teorema: Si los soportes de μ_j están contenidos en un compacto fijo; si las normas de μ_j están mayoradas por una constante fija, es decir,

si: $\|\mu_j\| = \int |d\mu_j| \leq M$; y si $\mu_j \rightarrow \mu$ vagamente⁽¹⁾, se tiene

$$\iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu_j(x) d\mu_j(\xi) \longrightarrow \iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu(x) d\mu(\xi)$$

El principio de la demostración de este teorema es el siguiente.

Considerados los productos tensoriales $\mu(x) \otimes \mu(\xi)$ como medidas en el espacio producto, estas medidas tienen sus soportes contenidos en un compacto fijo y sus normas están acotadas, pues los factores tienen sus soportes en compactos fijos, y la norma del producto tensorial es el producto de las normas. Constituyen, pues, una sucesión o filtro de formas lineales sobre el espacio de las funciones continuas. Por otra parte, son formas equicontinuas sobre el espacio de las funciones continuas, y se sabe que si formas lineales equicontinuas convergen simplemente sobre un conjunto denso, convergen simplemente sobre todo el espacio. Pero en nuestro caso estas formas lineales convergen sobre el conjunto de las funciones $K(x, \xi)$ que son del tipo $\varphi(x)\psi(\xi)$; y estas últimas forman un conjunto denso, lo cual demuestra el teorema.

(1) Con el agregado de estas dos condiciones, diremos que la convergencia es fuertemente vaga.

Teorema: ⁽¹⁾ Toda medida de soporte compacto se puede aproximar, en el sentido de la convergencia fuertemente vaga, por medidas que son sumas finitas de medidas puntuales.

Sea ahora \mathcal{M} el conjunto de las medidas μ de soporte compacto y \mathcal{M}_1 un subconjunto de \mathcal{M} .

Diremos que \mathcal{M}_1 es denso en \mathcal{M} en el sentido de la convergencia fuertemente vaga, si cada μ de \mathcal{M} se puede aproximar por una sucesión o filtro, fuertemente vago de \mathcal{M}_1 .

Supongamos además que la integral

$$\iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu(x) d\bar{\mu}(\xi)$$

es positiva para toda $\mu \in \mathcal{M}_1$. El primero de los teoremas enunciados precedentemente nos permite concluir que esta integral será positiva para cada $\mu \in \mathcal{M}$.

Haremos dos aplicaciones de este resultado.

1ª Aplicación. Será para demostrar la afirmación hecha en la pag. 45, a saber: si un núcleo es de tipo positivo en el sentido de la definición 1ª, lo es en sentido de Radon.

En efecto: sea

$$\sum_{i,j} K(x_i, x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

para cada sistema x_1, \dots, x_ℓ de puntos y cada sistema z_1, \dots, z_ℓ de números complejos.

En virtud de los dos teoremas antes enunciados se deduce que $K(x, \xi)$ es de tipo positivo Radon.

(1) N. Bourbaki. Integration ch. III. Conviene aclarar que para demostrar este teorema se hace uso de las sumas de Riemann.

Antes de hacer la segunda aplicación, veamos la demostración directa de esto mismo, utilizando las sumas de Riemann, como habíamos anunciado.

Para ello, consideremos la misma integral

$$\iint_{X \times X} K(x, \xi) d\mu(x) d\bar{\mu}(\xi) ,$$

y formemos las correspondientes sumas de Riemann, como si fuéramos a calcularla a partir de su definición. Dividamos el soporte de μ en una suma finita de subconjuntos:

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_\ell .$$

El soporte del producto de las medidas queda entonces dividido en una suma finita de subconjuntos de la forma $\Omega_i \times \Omega_j$.

Si se toman puntos x_1, x_2, \dots, x_ℓ en cada uno de los subconjuntos Ω_i y puntos (x_i, x_j) del espacio producto para los respectivos productos $\Omega_i \times \Omega_j$, las sumas de Riemann serán

$$8.4 \quad \sum_{i,j} K(x_i, x_j) \mu(\Omega_i) \mu(\Omega_j) .$$

Si se pone simplemente $Z_i = \mu(\Omega_i)$, la suma 8.4 resulta real y positiva por hipótesis. Todas las sumas de Riemann de la integral considerada son, pues, reales y positivas; y como la integral es límite de estas sumas, será también real y positiva.

2ª Aplicación. Supongamos $X = \mathbb{R}^n$, con su base y su elemento de volumen. Entonces las funciones localmente sumables son medidas particulares, dado que son ahora distribuciones particulares.

Entre las medidas de soporte compacto, podemos considerar las medidas

$$8.5 \quad \int \varphi(x) dx, \text{ con } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Es posible, así, considerar como subespacio \mathcal{M}_1 al subespacio definido por \mathcal{D} . En este caso la integral anterior se escribe

$$8.6 \quad \iint_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} K(x, \xi) \varphi(x) \overline{\varphi(\xi)} dx d\xi.$$

Podemos entonces enunciar la siguiente

Definición 3ª. Se dice que un núcleo K es de tipo positivo, si la integral 8.6 es positiva para toda $\varphi \in \mathcal{D}$.

Demostremos ahora que \mathcal{D} es denso en \mathcal{M} para la topología fuertemente vaga.

En efecto. Si μ es una medida de soporte compacto, se puede regularizar por una función $\rho \in \mathcal{D}$, obteniéndose $\rho * \mu \in \mathcal{D}$. Si hacemos que ρ tienda a la medida δ de Dirac, para lo cual tomamos las ρ_j positivas, con integrales iguales a uno y con soportes que tiendan a cero uniformemente para $j \rightarrow \infty$, vemos que las regularizadas de una medida convergen vagamente hacia esta medida. En efecto,

$$\mu * \rho_j(\varphi) = \iint \varphi(x+y) \rho_j(y) d\mu(x);$$

y como ρ_j converge fuertemente vagamente a δ , y μ es fija, por el teorema general anterior tendremos

$$\iint \varphi(x+y) \rho_j(y) d\mu(x) \rightarrow \int \varphi(x) d\mu(x) = \mu(\varphi).$$

Pero además las medidas $\mu * \rho_j$ tienen sus soportes contenidos en un compacto fijo, que es, por ejemplo, un entorno del soporte de μ , y están mayoradas en norma, puesto que

$$\|\mu * \rho_j\| \leq \|\mu\| \cdot \int |\rho_j| dx;$$

y como $\rho_j \geq 0$ y $\int \rho_j dx = 1$, resulta

$$\|\mu * \rho_j\| \leq \|\mu\|$$

En conclusión: las regularizadas de una medida convergen fuertemente vagamente hacia esta medida. Es decir, el espacio \mathcal{D} es denso en el espacio de las medidas con soporte compacto. Por lo tanto, si K es de tipo positivo según la definición 3ª, es de tipo positivo Radon.

Tenemos ahora tres definiciones de núcleo de tipo positivo. En las dos primeras se utiliza un espacio general X ; en la tercera, en cambio, se utiliza el espacio \mathbb{R}^n .

Esta última puede ser extendida a un núcleo-distribución, de la manera siguiente.

Definición 4ª. Se dice que el núcleo $K_{x,\xi}$ definido sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, es de tipo positivo, -en símbolos $K_{x,\xi} > 0$ -, si para $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ se verifica

$$8.7 \quad K_{x,\xi} (\varphi(x) \overline{\varphi(\xi)}) \geq 0.$$

Esta definición es admisible, pues en el caso de que K sea una función continua, la nueva definición coincide con la definición 3ª.

En general operaremos en el espacio E_n , y el núcleo estará definido sobre el producto $E_n \times E_n$, a causa de lo cual no se podrán comparar las nociones de núcleo-función de tipo positivo y la de núcleo-distribución de tipo positivo; pues, en este caso, una función no es una distribución particular. Pero nos interesan los núcleos, cuya existencia conocemos, pues conocemos las distribuciones sobre $E_n \times E_n$ y los definimos directamente como de tipo positivo por la relación 8.7.

No se podrá decir, pues, que si K es una función se tendrán estas mismas propiedades. Pero si en E_n se considera una base, pueden identificarse las funciones con distribuciones particulares; y, en este caso, la relación 8.7 es precisamente la definición usual para el núcleo función.

Observemos, para terminar, que hemos necesitado no sólo el caso de las medidas puntuales de la definición 1ª, sino también el caso de las medidas $\varphi(x) dx$, con $\varphi \in \mathcal{D}$, para lo cual hemos necesitado aplicar los teoremas generales sobre límites de medidas.

9. Correspondencia entre \mathcal{H} y los núcleos K de tipo positivo.

Hemos visto en 7 que si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert, subespacio de \mathcal{D}' con topología más fina que la inducida, le corresponde un núcleo K caracterizado por la siguiente relación:

$$9.1 \quad \forall T \in \mathcal{H}, \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad (K.\varphi | T) = \overline{T}(\varphi).$$

Decimos caracterizado, pues hay un sólo núcleo que cumpla la relación 9.1.

Si ponemos $T = K.\Psi$, la relación 9.1 se escribe así:

$$\forall \Psi \in \mathcal{D}, \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

• se tiene

$$9.2 \quad (K.\varphi | K.\Psi)_{\mathcal{H}} = \overline{K}_{x,\xi} (\varphi(x) \overline{\Psi}(\xi)).$$

Ahora bien, este núcleo K debe ser de tipo positivo, como se comprueba fácilmente, dado que si en 9.2 hacemos $\varphi = \Psi$, el se-

gundo miembro de la igualdad de $\overline{K}_{x,\xi}(\varphi(x)\overline{\varphi}(\xi))$, que es el producto escalar de $K \cdot \varphi$ por sí mismo en el espacio de Hilbert \mathcal{H} ; y este producto escalar es positivo. De acuerdo con la definición 4ª, resulta pues que $\overline{K} > 0$.

Pero

$$9.3 \quad \overline{K}(\varphi(x)\overline{\varphi}(\xi)) = \overline{K(\overline{\varphi}(x)\varphi(\xi))}.$$

Como el primer miembro es real y positivo, también lo será el segundo y por consiguiente $K(\overline{\varphi}(x)\varphi(\xi)) \geq 0$. Cambiando φ por $\overline{\varphi}$ se obtiene: $K(\varphi(x)\overline{\varphi}(\xi)) \geq 0$, lo cual prueba que $K > 0$.

A partir de este resultado y sabiendo que

$$9.4 \quad K(\varphi(x)\overline{\varphi}(\xi)) = {}^s K(\overline{\varphi}(x)\varphi(\xi)),$$

se obtiene, procediendo de análoga manera, ${}^s K > 0$, y por consiguiente $\overline{{}^s K} > 0$.

Es decir: los cuatro núcleos:

$$9.5 \quad K, {}^s K, \overline{K}, \overline{{}^s K}$$

son tales, que si uno es de tipo positivo, los demás también lo son.

Por otra parte, habíamos visto en 8, Prop. II) que si un núcleo-función $K(x, \xi)$ es de tipo positivo, tiene simetría hermitica, es decir

$$K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}.$$

Vamos a demostrar que en el caso de un núcleo-distribución, $K > 0$, también se cumple esta propiedad, que en este caso se escribe

$$K = \overline{{}^s K}.$$

Se tiene en efecto, por definición de núcleo conjugado y núcleo simétrico

$$9.6 \quad \overline{K(\theta(x, \xi))} = \overline{K(\overline{\theta(x, \xi)})} = \overline{K(\overline{\theta(\xi, x)})}.$$

Hay que demostrar que, si $K \succ 0$, se verifica la relación

$$\overline{K(\theta(x, \xi))} = K(\theta(x, \xi));$$

o bien, en virtud de 9.6, habrá que demostrar que

$$9.7 \quad K(\theta(x, \xi)) = \overline{K(\overline{\theta(\xi, x)})}.$$

Es suficiente tomar $\theta(x, \xi) = g(x) h(\xi)$ siendo g y $h \in \mathcal{D}$, pues estos productos son densos en $\mathcal{D}_{x, \xi}$.

En lugar de 9.7 habrá que demostrar pues que:

$$K(g h) = \overline{K(h(x) g(\xi))}.$$

Pero, por ser $K \succ 0$, se tiene

$$K_{x, \xi}(\varphi(x) \overline{\varphi(\xi)}) \geq 0.$$

Tomemos $\varphi = g + \lambda h$, siendo λ un número complejo.

Se tiene:

$$9.8 \quad K_{x, \xi}((g + \lambda h)(\overline{g + \lambda h})) \geq 0.$$

El desarrollo de esta expresión nos conduce a la desigualdad

$$9.9 \quad K(g \overline{g}) + \lambda \overline{\lambda} K(h \overline{h}) + \lambda K(h \overline{g}) + \lambda K(g \overline{h}) \geq 0.$$

Los dos primeros sumandos $K(g \overline{g})$ y $|\lambda|^2 K(h \overline{h})$ son reales y positivos, pues se sabe que $K(\varphi \overline{\varphi})$ es real y positivo. Pero si

toda la expresión 9.9 es real y positiva, la suma

$$\lambda K_{x,\xi}(h(x) \overline{g(\xi)}) + \overline{\lambda} K_{x,\xi}(g(x) \overline{h(\xi)})$$

debe ser real cualquiera sea λ . Pero una suma del tipo $\alpha \lambda + \beta \overline{\lambda}$ sólo puede ser real para cualquier λ , si α y β son complejos conjugados.

Por lo tanto las cantidades

$$K_{x,\xi}(h(x) \overline{g(\xi)}) \quad \text{y} \quad K_{x,\xi}(g(x) \overline{h(\xi)}) \quad \text{de lo mismo}$$

son complejas conjugadas, lo que prueba que

$$9.10 \quad K = \overline{s_K}.$$

Es decir, un núcleo de tipo positivo tiene la propiedad de la simetría hermítica.

Por consiguiente, si K es de tipo positivo, los núcleos s_K , \overline{K} , $\overline{s_K}$ son de tipo positivo, y se tiene además

$$K = \overline{s_K}, \quad s_K = \overline{K}.$$

10. Caracterización de los elementos de \mathcal{H} .

Sabemos ahora que si se tiene un espacio de Hilbert \mathcal{H} contenido en \mathcal{D}' , con topología más fina que la inducida, se puede encontrar un núcleo $K_{x,\xi} > 0$ que cumple la relación característica 9.2.

Hemos visto, también, cómo se caracterizan los elementos de \mathcal{H} a partir de K . Son todos los elementos $K \cdot \varphi$. Ellos forman un subespacio denso, y podemos decir que \mathcal{H} es la completación de los ele-

mentos $K \cdot \varphi$ que forman un subespacio para la topología inducida.

Pero este enunciado no es adecuado como caracterización de \mathcal{H} .

Sería mejor tener, directamente a partir del núcleo K , una caracterización de los elementos de \mathcal{H} . Para ello enunciaremos el siguiente

Teorema. Si $T \in \mathcal{D}'$, para que $T \in \mathcal{H}$ es necesario y suficiente que exista una constante $c \geq 0$ tal que

$$10.1 \quad |\bar{T}(\varphi)| \leq c (K_{x,\xi}(\varphi(x)\bar{\varphi}(\xi)))^{\frac{1}{2}} \quad \text{para } \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La condición es necesaria. Si $T \in \mathcal{H}$, se tiene la igualdad

$$\bar{T}(\varphi) = (K \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}}$$

en virtud de 9.1; y por lo tanto, teniendo en cuenta la desigualdad de Schwarz

$$10.2 \quad |\bar{T}(\varphi)| = |(K \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}}| \leq \|K \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|T\|_{\mathcal{H}};$$

pero

$$\|K \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}} = (K \cdot \varphi | K \cdot \varphi)_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}} = (K_{x,\xi}(\varphi(x)\bar{\varphi}(\xi)))^{\frac{1}{2}}.$$

La relación 10.2 nos da

$$|\bar{T}(\varphi)| \leq \|T\|_{\mathcal{H}} \cdot (K_{x,\xi}(\varphi(x)\bar{\varphi}(\xi)))^{\frac{1}{2}}.$$

La desigualdad 10.1 vale entonces con $c = \|T\|_{\mathcal{H}}$.

Vemos además que el extremo inferior de los valores de c que satisfacen a 10.1 es la norma de T en \mathcal{H} , puesto que la norma de un elemento T es el extremo inferior de los números $(S|T)_{\mathcal{H}}/\|S\|$ cuando S recorre un conjunto denso. Es decir, el criterio nos permite

no sólo verificar si $T \in \mathcal{H}$, sino que da, además, una manera de encontrar su norma.

La condición es suficiente. Supongamos que se cumple 10.1 ; hay que mostrar que $T \in \mathcal{H}$.

Consideremos la forma lineal

$$10.3 \quad K.\varphi \longrightarrow \bar{T}(\varphi).$$

Observemos que no es evidente que 10.3 sea una forma lineal, pues $\bar{T}(\varphi)$ depende de φ y no de $K.\varphi$, y el conocimiento de $K.\varphi$ no permite en general determinar a φ . Hay que mostrar entonces que si se conoce $K.\varphi$, $\bar{T}(\varphi)$ queda determinado, (aunque quizá φ no lo quede).

Por diferencia de dos elementos, hay que mostrar que $K.\varphi = 0$ implica, no necesariamente $\varphi = 0$, pero sí $\bar{T}(\varphi) = 0$. Pero esto resulta, trivialmente, de la mayoración 10.1, pues el segundo miembro es la norma de $K.\varphi$, y si este es cero, lo será su norma y por tanto $\bar{T}(\varphi) = 0$. Podemos escribir además 10.1 en la siguiente forma:

$$10.4 \quad |\bar{T}(\varphi)| \leq c \|K.\varphi\|_{\mathcal{H}}$$

Entonces la forma

$$K.\varphi \longrightarrow \bar{T}(\varphi)$$

no sólo está definida sobre $K.\mathcal{D}$ ($K.\mathcal{D}$ son los elementos $K.\varphi$ con $\varphi \in \mathcal{D}$), sino que es una forma lineal y continua, pues está mayorada por el producto de una constante por la norma de $K.\varphi$. Pero entonces tenemos una forma lineal y continua sobre un subespacio denso y mayorada por c . Por lo tanto se puede definir por continuidad sobre

todo el espacio, con la norma mayorada por c . Como conocemos todas las formas lineales y continuas sobre un espacio de Hilbert, tendremos un elemento S de \mathcal{H} tal que

$$10.5 \quad \overline{T}(\varphi) = (K.\varphi | S)_{\mathcal{H}}$$

Pero podemos escribir el segundo miembro de 10.5 de la siguiente manera:

$$(K.\varphi | S)_{\mathcal{H}} = \overline{S}(\varphi) ;$$

y en consecuencia $\overline{S} = \overline{T}$ para $\forall \varphi \in \mathcal{D}$; por lo tanto

$$T \in \mathcal{H}$$

Hemos así demostrado completamente el teorema directo, que afirma que a cada \mathcal{H} le corresponde un núcleo $K \succ 0$.

Resumamos los resultados.

$\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ con topología más fina que la inducida, determina un núcleo $K_{x,\xi} \in \mathcal{D}'_{x,\xi}$ y se tiene $K_{x,\xi} \succ 0$.

K es una aplicación lineal y continua de \mathcal{D} en \mathcal{H} .

Conocemos, además, la relación que caracteriza a K :

$$\forall T \in \mathcal{H}, \forall \varphi \in \mathcal{D} ; K.\varphi \in \mathcal{H}, \quad (K.\varphi | T)_{\mathcal{H}} = \overline{T}(\varphi),$$

y por lo tanto

$$\forall \varphi, \forall \psi \in \mathcal{D}; (K.\varphi | K.\psi)_{\mathcal{H}} = \overline{K_{x,\xi}} (\varphi(x) \overline{\psi(\xi)}) .$$

Además, siendo $K.\mathcal{D}$ el conjunto de los elementos $K.\varphi$ se tiene que $K.\mathcal{D} \in \mathcal{H}$, y es denso en \mathcal{H} .

Por último, conocemos una condición necesaria y suficiente

para que $T \in \mathcal{H}$ a saber: debe existir c tal que

$$|\overline{T}(\varphi)| \leq c \|K \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}} = c \overline{K}_{x, \xi} (\varphi(x) \overline{\Psi}(\xi))^{1/2}.$$

11. Recíprocamente, dado $K_{x, \xi} > 0$ existe un \mathcal{H} y uno solo, tal que $K_{x, \xi}$ sea su núcleo asociado.

La cuestión será ahora más "elemental" en principio, que la proposición directa del 7.a, pues no se utiliza el teorema de los núcleos; pero la demostración resultará más complicada en los detalles.

El núcleo K está dado. Buscamos \mathcal{H} . Sólo sabemos por 7.b que si \mathcal{H} existe podemos encontrarlo a partir de K .

Comencemos entonces por formar \mathcal{K} como si existiera. Para ello, si $\varphi \in \mathcal{D}$, consideremos los elementos $K \cdot \varphi$; que tienen sentido, pues K es un núcleo. Son distribuciones, y al conjunto de estas distribuciones le llamaremos \mathcal{K} . Se tiene $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}'$. \mathcal{K} es un subespacio vectorial, puesto que el núcleo K es una aplicación lineal; y, por tanto, la suma de dos elementos $K \cdot \varphi$ es un elemento del mismo tipo.

Analícemos la topología. Sobre \mathcal{K} conocemos la topología inducida por \mathcal{D}' , pero la que interesa es la topología del producto escalar. El proceso normal será pues introducir en \mathcal{K} un producto escalar, y parece natural tomar para ello la siguiente relación:

$$11.1 \quad (K \cdot \varphi | K \cdot \psi)_{\mathcal{K}} = \overline{K}_{x, \xi} (\varphi(x) \overline{\Psi}(\xi)).$$

Pero esto es ilusorio, pues $K \cdot \varphi$ ó $K \cdot \psi$ en general, no determinan a φ ó ψ respectivamente. Hay tal vez varias maneras de re-

presentar un elemento de \mathcal{K} en la forma $K.\varphi$, pues la correspondencia $\varphi \rightarrow K.\varphi$ no es biunívoca.

Es decir, para estar seguros de que 11.1 define realmente un producto escalar en \mathcal{K} , habrá que mostrar que 11.1 no depende de la representación elegida. Pero el segundo miembro depende de φ y ψ . Entonces, para poder afirmar que 11.1 define un producto escalar sobre \mathcal{K} , habrá que ver que sólo depende de $K.\varphi$ y $K.\psi$ y no de φ y de ψ .

Dicho de otra manera: hay que ver que si $K.\varphi_1 = K.\varphi_2$ y $K.\psi_1 = K.\psi_2$, se verifica también

$$11.2 \quad \overline{K}(\varphi_1 \overline{\psi_1}) = \overline{K}(\varphi_2 \overline{\psi_2}).$$

Es decir

$$11.3 \quad \overline{K}(\varphi_1 \overline{\psi_1}) - \overline{K}(\varphi_2 \overline{\psi_2}) = 0.$$

Sumando y restando $\overline{K}(\varphi_2 \overline{\psi_1})$ al primer miembro resulta

$$\overline{K}((\varphi_1 - \varphi_2) \overline{\psi_1}) + \overline{K}(\varphi_2 (\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2})) = 0.$$

Hay que ver que ambos sumandos son nulos. Mejor dicho, hay que ver que

$$K.(\varphi_1 - \varphi_2) = 0 \implies \overline{K}((\varphi_1 - \varphi_2) \overline{\psi_1}) = 0$$

cualquiera sea ψ_1 , y análogamente para el segundo sumando.

Poniendo φ en lugar de $\varphi_1 - \varphi_2$ y ψ en lugar de ψ_1 , hay que ver que

$$K.\varphi = 0 \implies \overline{K}(\varphi \overline{\psi}) = 0 \quad \text{cualquiera sea } \psi$$

Pero, por la definición de núcleo (cfr.4) resulta

$$\overline{K}(\varphi\overline{\Psi}) = (\overline{K}\cdot\overline{\Psi})(\varphi) ;$$

además, por 5.8 y 9.10 se puede poner

$$(\overline{K}\cdot\overline{\Psi})(\varphi) = (\overline{K}\cdot\varphi)(\overline{\Psi}) = (K\cdot\varphi)(\overline{\Psi}) ,$$

de lo cual resulta

$$\overline{K}(\varphi\overline{\Psi}) = (K\cdot\varphi)(\overline{\Psi}) .$$

Entonces, si $K\cdot\varphi = 0$, el segundo miembro es nulo para todo Ψ y por consiguiente $\overline{K}(\varphi\overline{\Psi}) = 0$.

Para el segundo sumando se tiene

$$\overline{K}(\varphi\overline{\Psi}) = (\overline{K}\cdot\overline{\Psi})(\varphi) ,$$

y como $K\cdot\Psi = 0$ resulta $\overline{K}(\varphi\overline{\Psi}) = 0$.

Por otra parte, el segundo miembro de 11.1 es positivo, puesto que K es de tipo positivo; por lo tanto, reemplazando Ψ por φ resulta

$$(K\cdot\varphi | K\cdot\varphi) = \overline{K}(\varphi\overline{\varphi}) \geq 0 .$$

En definitiva resulta que 11.1 es un producto escalar prehilbertiano.

\mathcal{K} es pues un espacio prehilbertiano, no necesariamente separado ni completo.

Para que \mathcal{K} tenga estructura de espacio de Hilbert hay que mostrar entonces en primer lugar que la expresión $(K\cdot\varphi | K\cdot\varphi)_{\mathcal{K}}$ es una norma y no una seminorma; y en segundo lugar que es completo.

Lo primero equivale a mostrar que

$$(K.\varphi | K.\varphi)_{\mathcal{K}} = 0 \implies K.\varphi = 0 \quad (\text{pero n\acute{o } } \varphi = 0, \text{ en general}).$$

En otros t\u00e9rminos, dado que el primer t\u00e9rmino de esta implicaci\u00f3n es igual a $\overline{K}(\varphi\overline{\varphi})$, hay que mostrar que

$$\overline{K}(\varphi\overline{\varphi}) = 0 \implies K.\varphi = 0.$$

En efecto, de la desigualdad de Schwarz

$$K_{x,\xi}(\varphi(x)\overline{\psi(\xi)}) \leq (K_{x,\xi}(\varphi(x)\overline{\varphi(\xi)}))^{\frac{1}{2}}(K_{x,\xi}(\psi(x)\overline{\psi(\xi)}))^{\frac{1}{2}}$$

se deduce que si $K(\varphi\overline{\varphi}) = 0$ resulta $K(\varphi\overline{\psi}) = 0$; o bien, $\overline{K}(\psi\overline{\varphi}) = 0$ para todo ψ :

Pero

$$\overline{K}(\psi\overline{\varphi}) = (\overline{K.\varphi})(\psi);$$

por lo tanto

$$(\overline{K.\varphi})(\psi) = 0$$

para todo ψ , es decir $\overline{K.\varphi} = 0$, y tambi\u00e9n $K.\varphi = 0$, que es lo que se quer\u00eda demostrar.

Tenemos ahora el espacio vectorial \mathcal{K} , con norma hilbertiana. Hay que completarlo. Se presenta la misma dificultad que en 7.b

Sabemos que $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}'$. Podemos completar \mathcal{K} pero en general el completado no estar\u00e1 ya en \mathcal{D}' .

Comencemos por ver que la topolog\u00eda de \mathcal{K} , ser\u00e1 m\u00e1s fina que la inducida por \mathcal{D}' .

Dividiremos la demostración en dos partes.

- a) Mostraremos que la aplicación $\varphi \rightarrow K.\varphi$ de \mathcal{D} en \mathcal{K} , es lineal y continua.

En otros términos, $\varphi \rightarrow K.\varphi$, transforma un conjunto acotado de \mathcal{D} en un conjunto acotado de \mathcal{K} . Pero es sabido que \mathcal{D} es bornológico, y que si un espacio es bornológico, la aplicación que transforma un conjunto acotado en un conjunto acotado es continua.

No es necesario, como veremos, recurrir a este enunciado. Podemos ver directamente que si φ recorre un conjunto acotado de \mathcal{D} , los elementos $K.\varphi$ permanecen acotados en \mathcal{K} , es decir, su norma permanece acotada.

En efecto, se tiene

$$\|K.\varphi\|_{\mathcal{K}}^2 = \overline{K(\varphi\bar{\varphi})}.$$

Si $\varphi(x)$ permanece acotada en \mathcal{D} , y por tanto también $\bar{\varphi}(\xi)$, se tendrá que $\varphi(x)\bar{\varphi}(\xi)$ permanece acotado en $\mathcal{D}_{x,\xi}$; y, puesto que K es una distribución, $\overline{K(\varphi\bar{\varphi})}$ permanece acotado, y ello implica que $K.\varphi$ recorre un conjunto acotado de \mathcal{K} .

La convergencia es evidente, razonando de la misma manera.

Si $\varphi \rightarrow 0$ en \mathcal{D}_M , con soporte contenido en un compacto fijo M , $\varphi\bar{\varphi} \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}_{x,\xi}$; y como K es una distribución, resulta $K(\varphi\bar{\varphi}) \rightarrow 0$.

- b) Mostraremos ahora que la topología de \mathcal{K} es más fina que la inducida.

En otros términos:

$$\text{si } K \cdot \varphi \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{K} \implies K \cdot \varphi \rightarrow 0 \text{ en } \mathcal{D}' .$$

Pero la convergencia en \mathcal{D}' es la convergencia uniforme en todo conjunto acotado de \mathcal{D} .

Habrá que ver entonces que:

Si $K \cdot \varphi \rightarrow 0$ en \mathcal{K} , y si ψ queda acotada en \mathcal{D} (lo cual equivale a decir que $\bar{\psi}$ queda acotada en \mathcal{D}) , se tiene

$$(K \cdot \varphi)(\bar{\psi}) \rightarrow 0$$

uniformemente.

Pero si ψ queda acotada en \mathcal{D} , hemos visto en a) que $K \cdot \psi$ queda acotada en \mathcal{K} ; por consiguiente en el producto escalar $(K \cdot \varphi | K \cdot \psi)$, uno de los elementos tiende a cero en el espacio \mathcal{K} , y el otro permanece acotado en el mismo.

Se tiene entonces

$$(K \cdot \varphi | K \cdot \psi) = \bar{K}(\varphi \bar{\psi}) \rightarrow 0$$

uniformemente, o lo que es lo mismo,

$$(\bar{K} \cdot \varphi)(\bar{\psi}) \rightarrow 0 ;$$

y como $K = \bar{K}$, se tiene que

$$(K \cdot \varphi)(\bar{\psi}) \rightarrow 0$$

uniformemente.

Volvamos ahora al problema de completar \mathcal{K} .

Sabemos que la completación \hat{K} es abstracta; K es un espacio de Hilbert contenido en \mathcal{D}' , con topología más fina que la inducida.

Además, la inyección natural $K \rightarrow \mathcal{D}'$ es continua, pues la topología de K es más fina que la inducida. Esta aplicación continua se puede prolongar entonces a su completado \hat{K} , de manera que la aplicación $K \rightarrow \mathcal{D}'$ se pueda factorizar de la siguiente manera:

$$11.5 \quad \begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \mathcal{D}' \\ & \searrow & \nearrow \\ & \hat{K} & \end{array} ;$$

es decir, la inyección natural $K \rightarrow \mathcal{D}'$, que es continua, se prolonga de manera única en el producto de la aplicación canónica $K \rightarrow \hat{K}$ y de una aplicación continua del completado abstracto \hat{K} en \mathcal{D}' .

Ahora es necesario mostrar una cosa esencial, a saber: la aplicación $\hat{K} \rightarrow \mathcal{D}'$ es biunívoca.

Si no fuera biunívoca no se podría representar \hat{K} como subespacio de \mathcal{D}' . En cambio cuando una aplicación de un espacio en otro es biunívoca, se puede siempre identificar ese espacio con su imagen en el otro.

Llamemos \mathcal{H} a la imagen de \hat{K} en \mathcal{D}' . Tendremos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} K & \longrightarrow & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{D}' \\ & \searrow & \nearrow & & \\ & \hat{K} & & & \end{array} .$$

Hay por lo pronto una correspondencia biunívoca entre el espacio \hat{K} y el espacio \mathcal{H} , que es un subespacio de \mathcal{D}' .

Además, será siempre posible munir a \mathcal{H} de la topología transportada de \hat{K} , puesto que la aplicación $\hat{K} \rightarrow \mathcal{H}$ es biunívoca.

En consecuencia, la aplicación $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}'$ es continua, y también lo es la aplicación $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$. Ello significa que la topología de \mathcal{H} es más fina que la inducida.

En definitiva: \mathcal{H} es un subespacio de \mathcal{D}' con estructura de espacio de Hilbert, con topología más fina que la inducida por \mathcal{D}' , y es un completado concreto de \mathcal{K} .

Hay que mostrar, además, que el núcleo de \mathcal{H} es precisamente el núcleo K de partida, lo cual es trivial. El único espacio que puede satisfacer a nuestra exigencia es la imagen en \mathcal{D}' de un completado de \mathcal{K} , por la aplicación de $\hat{\mathcal{K}}$ en \mathcal{D}' .

Por lo tanto, la sola cosa a comprobar es que la aplicación $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$ es biunívoca.

La cuestión no es de ninguna manera trivial, pues si se tiene un subespacio \mathcal{K} del espacio \mathcal{D}' , con topología más fina que la inducida, el segundo completo, y el primero nó; si tomamos el completado abstracto $\hat{\mathcal{K}}$, se tiene el diagrama 11.5 y no es cierto que la aplicación $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$ sea en general biunívoca. En la práctica será siempre biunívoca. Pero esta reflexión hace ver, de cualquier manera, la necesidad de demostrar la biunivocidad.

Tratemos de caracterizar la aplicación

Sea $T \in \mathcal{K}$. Se tiene $(K. \varphi | T)_{\mathcal{K}} = \overline{T}(\varphi)$.

Sea $\tau \in \hat{\mathcal{K}}$. τ tiene una imagen canónica en \mathcal{D}' que llamaremos T .

Queremos ver que T se determina a partir de τ por la relación

11.6 $(K. \varphi | \tau)_{\hat{\mathcal{K}}} = \overline{T}(\varphi);$

la cual será efectivamente una determinación de la imagen T a partir de τ , pues en el primer miembro de 11.6 si τ es conocido, conoceremos los productos escalares con $K \cdot \varphi$ en $\hat{\mathcal{K}}$ y por tanto T será conocida como distribución.

La demostración es la siguiente.

$\tau \in \hat{\mathcal{K}}$ se puede aproximar por una sucesión de elementos $\tau_n \in \mathcal{K}$. Es decir: $\tau_n \xrightarrow{\hat{\mathcal{K}}} \tau$.

Llamemos T_n las imágenes de τ_n . Será $T_n = \tau_n$ puesto que \mathcal{K} está inmerso en \mathcal{D}' . Pero dado que la aplicación $\hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathcal{D}'$ es continua, si los elementos de $\hat{\mathcal{K}}$ convergen, sus imágenes en \mathcal{D}' también convergen. Tendremos entonces, si se escribe 11.6 para τ_n :

$$11.7 \quad (K \cdot \varphi | \tau_n)_{\hat{\mathcal{K}}} = \bar{T}_n(\varphi) ;$$

al hacer $n \rightarrow \infty$, los productos escalares del primer miembro convergen, puesto que τ_n converge en $\hat{\mathcal{K}}$. En el segundo miembro T_n converge a T en \mathcal{D}' . Por consiguiente $T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$, obteniéndose de esta manera la relación 11.6.

Ahora es fácil probar la biunivocidad ya mencionada.

Ello equivale a probar que si τ es tal que $T = 0$, entonces: $\tau = 0$.

En efecto, si $T = 0$, cualquiera sea φ se tiene por 11.6 $\bar{T}(\varphi) = 0$; luego en \mathcal{K} , τ es ortogonal a todos los $K \cdot \varphi$. Pero los elementos $K \cdot \varphi$ forman el espacio \mathcal{K} denso en su completado. τ es pues ortogonal a un subespacio denso y por consiguiente $\tau = 0$.

En conclusión: $\hat{\mathcal{K}}$ puede ser reemplazado por su imagen, bien determinada en \mathcal{D}' ; se tendrá así un subespacio de Hilbert con topología más fina que la inducida. En este caso τ se identifica con T .

Además, la relación $(K, \varphi | T)_{\mathcal{K}} = \overline{T}(\varphi)$ es la relación que caracteriza el núcleo asociado a \mathcal{H} , lo que prueba que el subespacio de Hilbert \mathcal{H} que hemos obtenido tiene K como núcleo asociado.

La recíproca enunciada en 11 queda así demostrada.

Observación. Hasta ahora hemos visto que hay una correspondencia biunívoca entre los subespacios de \mathcal{D}' que tienen estructura de espacios de Hilbert y topología más fina que la inducida, y los núcleos de tipo positivo sobre $E_n \times E_n$.

Es conveniente destacar que decimos espacio "de Hilbert" y no espacio "prehilbertiano". Pues si tenemos un subespacio de \mathcal{D}' , con es estructura prehilbertiana, es decir, con una forma hermitica positiva y con topología más fina que la inducida, pero no necesariamente completo, no existirá el núcleo correspondiente. En efecto, en la definición misma de núcleo ha intervenido esta circunstancia, cuando dijimos que una forma lineal continua en ese espacio se puede definir mediante el producto escalar con un elemento fijo del espacio. Por otra parte, si tenemos un subespacio de \mathcal{D}' con topología más fina que la inducida y no completo, se puede completar. Si el completado se puede identificar con un subespacio, es decir, si la aplicación canónica de la completa ción en \mathcal{L}' es biunívoca, entonces el completado se puede identificar a un subespacio, y en este caso hay un núcleo que corresponde al completado. Además, todos los subespacios que tienen el mismo completado tienen el mismo núcleo.

Pero si el completado no es un subespacio de \mathcal{D}' , es decir, si la aplicación canónica del completado en \mathcal{D}' no es biunívoca, no existirá el núcleo correspondiente.

12. Algunas propiedades de los núcleos de tipo positivo y los subespacios de Hilbert correspondientes.

a) Estructura de orden entre los núcleos $K \succ 0$.

Definición. Se dice que $K_1 \prec K_2$, si $K_2 - K_1 \succ 0$.

Esta relación de orden es, evidentemente, transitiva y reflexiva.

Proposición. Si $K_1 \prec K_2$ y $K_2 \prec K_1$, se tiene: $K_1 = K_2$.

En efecto: la primera parte de la hipótesis significa $K_2 - K_1 \succ 0$; por lo tanto, en virtud de la 3ª definición de 8 será

$$12.1 \quad (K_2 - K_1)(\varphi \bar{\varphi}) \geq 0.$$

La segunda parte de la hipótesis da, análogamente,

$$12.2 \quad (K_1 - K_2)(\varphi \bar{\varphi}) \geq 0.$$

Las relaciones 12.1 y 12.2 prueban que se tiene siempre

$$(K_2 - K_1)(\varphi \bar{\varphi}) = 0$$

Pero se conoce la igualdad que da el valor de una forma hermitica sobre $\varphi \bar{\psi}$ mediante una combinación lineal de cuatro valores, puesto que si H es lineal y antilineal se tiene:

$$12.3 \quad H(\varphi \bar{\psi}) = \frac{1}{4} (H(\varphi + \psi)(\overline{\varphi + \psi}) - H(\varphi - \psi)(\overline{\varphi - \psi}) + \\ + iH(\varphi + i\psi)(\overline{\varphi + i\psi}) - iH(\varphi - i\psi)(\overline{\varphi - i\psi})).$$

Entonces si una forma es nula para todas las expresiones del tipo $\varphi \bar{\psi}$, los cuatro términos de 12.3 son nulos y por tanto $H(\varphi \bar{\psi})=0$,

o bien $H(\varphi \Psi) = 0$.

Ello prueba que $K_2 - K_1$ es nulo sobre todos los productos $\varphi \Psi$ y por tanto es nula como distribución sobre el producto tensorial $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, y por densidad será nula sobre todas las funciones φ ; $\varphi = \varphi(x, y)$.
por consiguiente, $K_2 - K_1 = 0$.

b) Estructura de orden entre los subespacios de Hilbert \mathcal{H} .

Definición. Se dice que $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2$ si $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ y la norma de \mathcal{H}_2 es mayorada por la norma de \mathcal{H}_1 .

Es decir, si $T \in \mathcal{H}_1$, la norma de T como elemento de \mathcal{H}_1 es mayor que la norma de T como elemento de \mathcal{H}_2 , o sea $\|T\|_2 \leq \|T\|_1$.

La definición implica que la topología de \mathcal{H}_1 es más fina que la topología de \mathcal{H}_2 . Implica también una relación de orden entre los subespacios, transitiva y reflexiva.

Proposición. Si $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_2 < \mathcal{H}_1$ se tiene $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y las normas coinciden.

En este caso la demostración es evidente.

Ejemplo. Tomemos $\mathcal{H}_2 = L^2$; $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_{L^2}^1$

\mathcal{H}_2 : espacio de las funciones de cuadrado sumable.

\mathcal{H}_1 : espacio de Beppo Levi o sea espacio de las funciones que son de L^2 y cuyas derivadas de orden uno en el sentido de las distribuciones son de L^2 .

Se tiene: $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$.

En \mathcal{H}_2 se tiene la norma: $\|f\|_{L^2}^2 = \int f \bar{f} dx$;

en \mathcal{H}_1 se tiene la norma: $\|f\|_{\mathcal{D}_{L^2}}^2 = \int (f \bar{f} + k \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}) dx$.

\mathcal{H}_1 está contenido en \mathcal{H}_2 , no sólo con topología más fina, sino con norma más grande.

c) Relación entre la estructura de orden de los espacios \mathcal{H} y la estructura de orden de los correspondientes núcleos K .

Sean K_1 y K_2 los núcleos asociados a los espacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 .

Proposición. Si $K_1 < K_2$ se tiene: $\mathcal{H}_1 < \mathcal{H}_2$ y recíprocamente.

En efecto: $K_1 < K_2$ significa que

$$12.4 \quad \bar{K}_1(\varphi \bar{\varphi}) \leq \bar{K}_2(\varphi \bar{\varphi}) \quad \text{para } \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Aclaremos que si quisiéramos obtener la inclusión $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, considerando los elementos $K_1 \cdot \varphi$ y $K_2 \cdot \varphi$, sería difícil verlo, pues son elementos distintos.

Por esta razón usaremos la caracterización de los elementos de \mathcal{H} dada en 10.

Si $T \in \mathcal{H}_1$ se tiene

$$12.5 \quad \bar{T}(\varphi) \leq c(\bar{K}_1(\varphi \bar{\varphi}))^{\frac{1}{2}},$$

y el extremo inferior de las constantes c es $\|T\|_1$.

Pero teniendo en cuenta 12.4 se tiene

$$\bar{T}(\varphi) \leq c(\bar{K}_2(\varphi \bar{\varphi}))^{\frac{1}{2}}$$

y por consiguiente, en virtud de la mencionada caracterización, resulta $T \in \mathcal{H}_2$.

Por otra parte, como la desigualdad se verifica con $c = \|T\|_1$, y el extremo inferior de estas constantes es la norma de T en \mathcal{H}_2 se concluye que $\|T\|_2$ está mayorada por c . Es decir, $\|T\|_2 \leq \|T\|_1$.

Recíprocamente. Supongamos $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$, con norma más grande. Sea $T \in \mathcal{H}_1$. Tendremos

$$12.6 \quad \overline{T}(\varphi) = (K_1 \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}_1} = (K_2 \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}_2},$$

puesto que si $T \in \mathcal{H}_1$ se tiene $T \in \mathcal{H}_2$ por ser $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$.

Escribamos 12.6 para $T = K_1 \cdot \varphi$; se verifica entonces

$$12.7 \quad (K_1 \cdot \varphi | K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_1} = (K_2 \cdot \varphi | K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2}.$$

Pero

$$(K_1 \cdot \varphi | K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_1} = \overline{K_1}(\varphi \overline{\varphi}),$$

y

$$(K_2 \cdot \varphi | K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2} \leq \|K_2 \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}_2} \cdot \|K_1 \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}_2},$$

en virtud de la desigualdad de Schwarz.. Pero por hipótesis, la norma de un elemento de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_1 es mayor que la norma en \mathcal{H}_2 . Por lo tanto se puede poner

$$12.8 \quad (K_2 \cdot \varphi | K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2} \leq \|K_2 \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}_2} \cdot \|K_1 \cdot \varphi\|_{\mathcal{H}_1} = \\ = (\overline{K_2}(\varphi \overline{\varphi}))^{\frac{1}{2}} \cdot (\overline{K_1}(\varphi \overline{\varphi}))^{\frac{1}{2}}$$

De lo dicho se deduce

$$\overline{K_1}(\varphi \overline{\varphi}) \leq (\overline{K_2}(\varphi \overline{\varphi}))^{\frac{1}{2}} (\overline{K_1}(\varphi \overline{\varphi}))^{\frac{1}{2}};$$

y dividiendo por $(\overline{K_1}(\varphi \overline{\varphi}))^{\frac{1}{2}}$ se obtiene

$$(\bar{K}_1(\varphi\bar{\varphi}))^{\frac{1}{2}} \leq (\bar{K}_2(\varphi\bar{\varphi}))^{\frac{1}{2}} ;$$

o bien, elevando al cuadrado

$$\bar{K}_1(\varphi\bar{\varphi}) \leq \bar{K}_2(\varphi\bar{\varphi}) ;$$

es decir

$$\bar{K}_1 < \bar{K}_2 \quad \text{y también} \quad K_1 < K_2 .$$

d) Condición para que dos subespacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 de \mathcal{D}' tengan intersección nula.

Definición. Se dice que dos núcleos K_1 y K_2 son extranjeros si no tienen minorante común, excepto cero.

Proposición. Para que dos subespacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 de \mathcal{D}' tengan intersección nula, es necesario y suficiente que los núcleos asociados K_1 y K_2 sean extranjeros.

Comencemos por ver que si tienen intersección no nula, hay un núcleo minorante común de los núcleos asociados.

En efecto. Sea $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq 0$. Si logramos munir a \mathcal{H}_0 de una estructura de espacio de Hilbert, mayorada por las de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , habremos probado la aserción, pues el núcleo K_0 estará mayorado por K_1 y K_2 , en virtud de la relación de las estructuras, y por consiguiente K_1 y K_2 no serán extranjeros.

Vamos a munir a \mathcal{H}_0 de la estructura dada por la norma

$$12.9 \quad \|T\|_0^2 = \|T\|_1^2 + \|T\|_2^2 .$$

Es sabido que con la norma 12.9 existe un producto esca-

lar en \mathcal{H}_0 ; para definirlo basta tomar la suma de los productos escalares dados por las normas de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 .

Probemos que con la estructura definida por 12.9, \mathcal{H}_0 es completo.

Consideraremos una sucesión de Cauchy T_ν en \mathcal{H}_0 , en el sentido de la norma 12.9. Puesto que se tiene $\|T\|_1 \leq \|T\|_0$, es a fortiori una sucesión de Cauchy en \mathcal{H}_1 y como este espacio es completo, $T_\nu \rightarrow T_1$ en \mathcal{H}_1 . Un razonamiento análogo nos permite concluir que $T_\nu \rightarrow T_2$ en \mathcal{H}_2 .

Si $T_1 = T_2$, la cuestión está terminada, pues el elemento $T_1 = T_2$ es un elemento T_0 de \mathcal{H}_0 , por serlo simultáneamente de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 . Además si $T_\nu \rightarrow T_0$ con la norma de \mathcal{H}_1 y la de \mathcal{H}_2 , converge con la norma suma de las dos. \mathcal{H}_0 es, por tanto, completo.

Hay que ver entonces que se tiene siempre $T_1 = T_2$. En efecto $T_\nu \rightarrow T_1$ en la topología de \mathcal{H}_1 y por consiguiente en la topología de \mathcal{D}' , pues \mathcal{H}_1 tiene topología más fina que \mathcal{D}' ; y, por idéntica razón, $T_\nu \rightarrow T_2$ en \mathcal{D}' . Luego las distribuciones T_1 y T_2 son las mismas en \mathcal{D}' .

Teniendo en cuenta la reflexión anterior se deduce que los núcleos K_1 y K_2 no son extranjeros.

Recíprocamente. Si K_1 y K_2 no son extranjeros se tiene $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq 0$.

En efecto, si K_1 y K_2 no son extranjeros, existe un núcleo $K \neq 0$ mayorado por K_1 y por K_2 . Luego su espacio de Hilbert no se reduce a cero y está contenido en \mathcal{H}_1 y en \mathcal{H}_2 ; es decir, la intersección no se reduce a cero.

Repitiendo, vemos que si $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq 0$, existe un núcleo

K_0 minorante común de K_1 y K_2 y recíprocamente. Vale entonces la negativa, es decir, que K_1 y K_2 son extranjeros si y sólo si

$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \neq 0$, que es el contenido de la proposición enunciada.

e) Suma directa de dos subespacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 en el caso de intersección nula.

Podemos en este caso construir, a partir de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , un nuevo espacio de Hilbert, suma directa de los dos dados:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 .$$

Como espacio vectorial es la suma directa algebraica de los elementos de ambos espacios, y como estructura de espacio de Hilbert usaremos la única estructura natural para este caso, poniendo, para $T = T_1 + T_2$

$$\|T\|_{\mathcal{H}}^2 = \|T_1\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \|T_2\|_{\mathcal{H}_2}^2 .$$

Se tiene así un espacio prehilbertiano que es completo, pues si se toma una sucesión de Cauchy en \mathcal{H} , las primeras componentes forman una sucesión en \mathcal{H}_1 , las segundas en \mathcal{H}_2 y tenemos dos elementos límites cuya suma será el elemento límite de \mathcal{H} .

Veamos ahora que este espacio, suma directa de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 , tiene, como núcleo asociado, la suma de los núcleos K_1 y K_2 .

En efecto, sea $T_1 \in \mathcal{H}_1$; se tiene

$$12.10 \quad \overline{T_1}(\varphi) = (K_1 \cdot \varphi | T_1)_{\mathcal{H}_1} = (K_1 \cdot \varphi | T_1)_{\mathcal{H}} ,$$

puesto que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, $T_1 \in \mathcal{H}_1$ significa $T_1 \in \mathcal{H}$.

Pero el espacio \mathcal{H} tiene un núcleo asociado K . Se tiene

entonces

$$12.11 \quad (K_1 \cdot \varphi \mid T_1)_{\mathcal{H}} = (K \cdot \varphi \mid T_1)_{\mathcal{H}} \quad .$$

Esto muestra que para $K \cdot \varphi \in \mathcal{H}$ y $K_1 \cdot \varphi \in \mathcal{H}_1$ los productos escalares de estos elementos con cada elemento T_1 de \mathcal{H}_1 son los mismos.

En otros términos: $K_1 \cdot \varphi$ es la proyección de $K \cdot \varphi$ sobre \mathcal{H}_1 , o sea la diferencia $K \cdot \varphi - K_1 \cdot \varphi$ es ortogonal a \mathcal{H}_1 . Esto equivale a decir que $K \cdot \varphi$ tiene como proyección ortogonal en \mathcal{H}_1 a $K_1 \cdot \varphi$; y, por un razonamiento análogo, que $K \cdot \varphi$ tiene como proyección ortogonal en \mathcal{H}_2 a $K_2 \cdot \varphi$. Por tanto $K \cdot \varphi$ es la suma de sus dos proyecciones:

$$K \cdot \varphi = K_1 \cdot \varphi + K_2 \cdot \varphi \quad ,$$

y por consiguiente

$$K = K_1 + K_2 \quad .$$

f) Caso de intersección no nula.

Supongamos ahora que \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 tienen intersección no reducida a cero.

Vamos a definir la suma $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Algebráicamente será la suma de los espacios, es decir, el conjunto de todas las sumas formadas por un elemento de \mathcal{H}_1 y otro de \mathcal{H}_2 . Para definir la norma procederemos como sigue.

Si $T \in \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$, podremos representar a T como la suma de un elemento de \mathcal{H}_1 y otro de \mathcal{H}_2 , es decir $T = T_1 + T_2$. Pero T tendrá una infinidad de estas representaciones, dado que la intersección no es nula.

Pondremos entonces

$$12.12 \quad \left\| T \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \inf_{T=T_1+T_2} \left(\left\| T_1 \right\|_{\mathcal{H}_1}^2 + \left\| T_2 \right\|_{\mathcal{H}_2}^2 \right).$$

La indicación $T = T_1 + T_2$ significa que hay que tomar el inf. para todas las representaciones de T de la forma $T_1 + T_2$.

Utilizando las propiedades generales de los espacios de Hilbert, se puede ver que la expresión 12.12 define una norma. Es una norma prehilbertiana y el espacio es completo. Se tendrá entonces un espacio de Hilbert.

La idea de la demostración es la siguiente. Se considera la suma directa hilbertiana abstracta. Se puede aplicar naturalmente en \mathcal{D}' y la imagen del par $(T_1; T_2)$ es precisamente $T = T_1 + T_2$. Pero este espacio es un cociente del espacio suma directa abstracta, por el subespacio cerrado formado por los pares de distribuciones cuya suma es cero; y en este caso, justamente, la norma cociente se define por el infimum. Además, cuando se tiene el cociente de un espacio de Hilbert por un subespacio cerrado, es sabido que dicho cociente tiene la estructura de espacio de Hilbert. (El cociente de un espacio de Hilbert por un subespacio cerrado es un espacio de Hilbert). Se puede ver, por último, que el núcleo K asociado a este espacio es la suma $K_1 + K_2$.

g) Generalización para un número finito de espacios.

Dados k espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \dots, \mathcal{H}_k$, se puede preguntar en qué condiciones la intersección de estos espacios se reduce a cero. Es posible ver que ello es así si los núcleos asociados son globalmente extranjeros; es decir, si y sólo si no hay minorante común, excepto cero.

Pero la cuestión más interesante es ver cuando los K -espacios dados son algebraicamente independientes.

Definición. Un número finito de espacios de Hilbert son llamados independientes, si cada uno tiene intersección reducida a cero con la suma de los restantes.

Se puede ver que un número finito de espacios de Hilbert son independientes si y sólo si cada núcleo no tiene minorante común, excepto cero, con la suma de los demás.

Esta propiedad no la utilizaremos en lo que sigue.

h) Expresión del núcleo K asociado a \mathcal{H} , mediante una base ortonormal de \mathcal{H} .

Sea $T_1, T_2, \dots, T_\nu, \dots$ una base ortonormal de \mathcal{H} .

El conocimiento de esta base determina completamente a \mathcal{H} , pues los elementos de \mathcal{H} se forman a partir de las combinaciones lineales finitas de la forma $\sum_{\nu} c_{\nu} T_{\nu}$. Estas forman un subespacio denso y en este subespacio conocemos el producto escalar y por tanto la topología. Completándolo, se tiene una completación abstracta; su imagen en \mathcal{D}' nos da \mathcal{H} . Conocido \mathcal{H} debe ser conocido el núcleo asociado K .

Proposición. El núcleo K está dado por la siguiente serie, siempre convergente en \mathcal{D}' :

$$12.13 \quad K_{x, \xi} = \sum_{\nu} (T_{\nu})_x \otimes (T_{\nu})_{\xi} .$$

La fórmula 12.13 suministra una expresión muy concreta del núcleo.

En efecto. Consideremos el elemento $K. \varphi \in \mathcal{H}$. (Puntualice-

mos que K no es conocido y tratamos de hallarlo).

$K \cdot \varphi$ tiene una descomposición, en la base ortonormal, de la siguiente forma:

$$12.14 \quad K \cdot \varphi = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} T_{\nu} .$$

La serie que figura en 12.14 es convergente en \mathcal{H} y a fortiori en \mathcal{D}' . Los coeficientes α_{ν} tienen por expresión

$$\alpha_{\nu} = (K \cdot \varphi | T_{\nu})_{\mathcal{H}} .$$

Pero de la fórmula fundamental 7.a.1 resulta

$$(K \cdot \varphi | T_{\nu})_{\mathcal{H}} = \bar{T}_{\nu}(\varphi) .$$

Volviendo a 12.14 podemos poner

$$K \cdot \varphi = \sum_{\nu} \bar{T}_{\nu}(\varphi) T_{\nu} ,$$

serie convergente en \mathcal{D}' .

Pero se puede escribir

$$12.15 \quad \bar{T}_{\nu}(\varphi) T_{\nu} = (T_{\nu})_x \otimes (\bar{T}_{\nu})_{\xi} \cdot \varphi ,$$

pues el segundo miembro tiene, en virtud de la definición de la operación "punto", y la de producto tensorial, la siguiente expresión:

$$12.16 \quad \begin{aligned} ((T_{\nu})_x \otimes (\bar{T}_{\nu})_{\xi} \cdot \varphi)(\psi) &= (T_{\nu})_x \otimes (\bar{T}_{\nu})_{\xi} (\psi(x) \varphi(\xi)) = \\ &= T_{\nu}(\psi) \bar{T}_{\nu}(\varphi) . \end{aligned}$$

Si se observa que el primer miembro de 12.15 es una distribución cuyo valor sobre ψ es

$$(\bar{T}_\nu(\varphi) T_\nu)(\psi) ,$$

se obtiene

$$\bar{T}_\nu(\varphi) T_\nu = (T_\nu)_x \otimes (\bar{T}_\nu)_\xi \cdot \varphi .$$

Por consiguiente

$$12.17 \quad K \cdot \varphi = \sum_\nu \bar{T}_\nu(\varphi) T_\nu = \sum_\nu (T_\nu)_x \otimes (\bar{T}_\nu)_\xi \cdot \varphi ,$$

que es una serie convergente en \mathcal{D}' .

Consideremos ahora la serie

$$12.18 \quad \sum_\nu (T_\nu)_x \otimes (T_\nu)_\xi ,$$

que es una serie de núcleos o bien una serie de distribuciones.

Hemos visto que el valor de 12.18 para cada φ converge en \mathcal{D}' hacia el valor del núcleo K .

Se tiene entonces una serie de núcleos, serie de aplicaciones lineales de \mathcal{D} en \mathcal{D}' . Es decir, se tiene una serie del conjunto de las aplicaciones $L_s(\mathcal{D}; \mathcal{D}')$ tales que para cada $\varphi \in \mathcal{D}$, la serie de las imágenes es convergente.

Pero una sucesión convergente es acotada y por tanto equicontinua, puesto que \mathcal{D} es tonelado. La serie precedente converge pues, uniformemente sobre cada conjunto relativamente compacto de \mathcal{D} . Pero \mathcal{D} es un espacio de Montel, y por consiguiente cada conjunto acotado de \mathcal{D} es relativamente compacto. La serie precedente converge entonces en $L_b(\mathcal{D}; \mathcal{D}')$, y hemos aceptado con el teorema de los núcleos que la topología de las aplicaciones $L_b(\mathcal{D}; \mathcal{D}')$ coincide con la topología de $\mathcal{D}_{x, \xi}$.

Recíprocamente. Supongamos que un núcleo $K_{x, \xi}$ esté expresa-

do por la suma

$$12.19 \quad K_{x, \xi} = \sum_{\nu} (K_{\nu})_x \otimes (K_{\nu})_{\xi}$$

convergente en \mathcal{D}' . Es posible deducir que los K forman una base ortonormal del espacio \mathcal{H} ?

En general esto es falso, como se ve con el siguiente contraejemplo.

Si se toma

$$K_{x, \xi} = T_x \bar{T}_{\xi} + T_x \bar{T}_{\xi} \quad ,$$

no es posible que, en \mathcal{H} , sea T_x ortogonal a sí misma. Luego no es posible responder afirmativamente a la pregunta.

Hay por lo pronto una condición de independencia de los K_{ν} . Es necesario que el sistema de los K_{ν} sea libre, es decir, que los K_{ν} sean independientes.

Libre significa algebraicamente libre, es decir, que no existe una combinación finita $\sum_{\nu} c_{\nu} T_{\nu} = 0$ excepto si todos los c_{ν} son cero.

Se adivina que no es suficiente. Enunciaremos la siguiente

Definición. Se dice que un sistema de elementos de un espacio vectorial topológico (en nuestro caso \mathcal{D}') es hilbertianamente libre si la relación

$$\sum_{\nu} c_{\nu} T_{\nu} = 0 \quad (\text{con suma infinita, convergente en el espacio dado}), \text{ y la mayoración } \sum_{\nu} |c_{\nu}|^2 < \infty \text{ implican } c_{\nu} = 0 .$$

Proposición. Condición necesaria y suficiente para que de 12.19 se deduzca que los K_{ν} forman una base ortonormal, es que el sistema de los K_{ν} sea hilbertianamente libre.

13. Transporte de estructura por un isomorfismo.

En lo que precede hemos considerado el espacio afín E_n , pero no ha intervenido, hasta ahora, su estructura.

La única propiedad que ha intervenido es que se trata de una variedad indefinidamente diferenciable de dimensión n , numerable en el infinito; lo cual permite definir las funciones indefinidamente diferenciables sobre E_n que constituyen el espacio $\mathcal{D}(E_n)$, de las distribuciones sobre E_n que constituyen el espacio $\mathcal{D}'(E_n)$, dual de $\mathcal{D}(E_n)$, y los núcleos o distribuciones sobre $E_n \times E_n$.

Sean ahora E_n y F_n dos variedades indefinidamente diferenciables de la misma dimensión n .

Sea una aplicación σ , de E_n sobre F_n , biunívoca, indefinidamente diferenciable y tal que su inversa σ^{-1} sea también indefinidamente diferenciable. σ es entonces un isomorfismo de la estructura de variedad indefinidamente diferenciable.

Todo ente que se puede definir sobre la estructura de E_n se puede transportar sobre la estructura de F_n .

Si φ es una función definida sobre E_n , se puede transportar, obteniendo una función definida sobre F_n que denotamos con $\sigma\varphi$, que está determinada por la relación

$$13.1 \quad \sigma\varphi(\sigma x) = \varphi(x).$$

Esta relación significa que la transportada de una función toma, en el transportado de un punto, el valor de la función en el punto inicial.

Pero 13.1 no puede servir como definición, pues para conocer $\sigma\varphi$ sobre F_n habría que conocer su valor en un punto arbitra-

rio y de F_n , es decir, habría que conocer $\sigma \varphi(y)$. Ahora bien, todo y se puede escribir $y = \sigma x$; y puesto que σ es un isomorfismo será $x = \sigma^{-1}y$, con lo cual obtenemos como definición:

$$13.2 \quad \sigma \varphi(y) = \varphi(\sigma^{-1}y) ,$$

con la cual queda determinada efectivamente una función.

Si φ es indefinidamente diferenciable, también lo será $\sigma \varphi$, pues se trata de un transporte de la estructura indefinidamente diferenciable; es decir, si $\varphi \in \mathcal{D}(E_n)$, también será $\sigma \varphi \in \mathcal{D}(E_n^m)$

Partamos ahora de una distribución T sobre E_n . Esta distribución se puede transportar, obteniéndose una distribución sobre F_n . Para ello pondremos, teniendo en cuenta 13.1

$$13.3 \quad \sigma T(\sigma \varphi) = T(\varphi) .$$

Es ésta una propiedad característica de la transportada de una distribución, pero no sirve como definición, puesto que la definición de transportada debe dar el valor de σT sobre una función arbitraria de $\mathcal{D}(F_n)$.

Pondremos como definición

$$13.4 \quad \sigma T(\psi) = T(\sigma^{-1}\psi) = T_x(\psi(\sigma(x))) .$$

Se puede ver que si una distribución tiene ciertas propiedades de orden la imagen tendrá las mismas propiedades, pues se trata de un transporte isomórfico.

Analícemos el caso de los núcleos. Sean σ y τ dos isomorfismos indefinidamente diferenciables

$$E_n \xrightarrow{\sigma} F_n,$$

$$G_n \xrightarrow{\tau} H_n.$$

El par (σ, τ) da el isomorfismo del producto de los primeros espacios sobre el producto de los segundos

$$E_n \times G_n \xrightarrow{(\sigma, \tau)} F_n \times H_n;$$

de tal manera que toda distribución definida en el espacio que figura en el primer miembro (que por definición es un núcleo) es transportada a una distribución definida en el espacio que figura en el segundo miembro (que también es un núcleo). Se tiene pues, si K es un núcleo

$$13.5 \quad (\sigma, \tau) K ((\sigma, \tau) \varphi) = K(\varphi),$$

donde con $(\sigma, \tau) \varphi$ indicamos la imagen de $\varphi(x, \xi)$ por los isomorfismos σ y τ que actúan sobre x y ξ respectivamente. En particular para una función $\varphi(x, \xi)$ de la forma $\varphi(x) \psi(\xi)$ se tiene

$$13.6 \quad (\sigma, \tau) K_{x, \xi} (\sigma \varphi \tau \psi) = K(\varphi \psi);$$

pero según la definición 4.7 de núcleo, el primer miembro de esta igualdad es $((\sigma, \tau) K. \tau \psi)(\sigma \varphi)$ y el segundo es $(K. \psi)(\varphi)$.

Se tiene por lo tanto

$$13.7 \quad ((\sigma, \tau) K. \tau \psi)(\sigma \varphi) = (K. \psi)(\varphi),$$

donde: $(\sigma, \tau) K$ es un núcleo sobre $\overset{m\sigma}{E_n} \times \overset{m\tau}{F_n}$; $\tau \psi$ es una función sobre H_n ; $(\sigma, \tau) K. \tau \psi$ es una distribución sobre F_n ; $\sigma \varphi$ es una función sobre F_n ; $K. \psi$ es una distribución sobre E_n y φ es una función sobre E_n .

Por otra parte sabemos que el valor de la distribución $K.\psi$ sobre φ es el mismo que el valor de la distribución transportada $\sigma(K.\psi)$ sobre la función transportada $\sigma\varphi$.

Se tiene pues

$$13.8 \quad ((\sigma, \tau) K. \tau \psi)(\sigma \varphi) = (\sigma(K.\psi))(\sigma \varphi) ;$$

y como ambos miembros son iguales para todo $\sigma\varphi$, es decir, para toda función sobre F_n , resulta que las distribuciones de ambos miembros son iguales.

Se tiene así

$$13.9 \quad (\sigma, \tau) K. \tau \psi = \sigma(K.\psi) .$$

Observemos que es imposible equivocarse en la aplicación de las transformaciones que figuran en 13.9, puesto que sobre K no hay otra transformación natural como no sea (σ, τ) , dado que K está definido en $E_n \times G_n$. Sobre ψ no hay otra transformación natural como no sea τ , pues ψ es una función definida en G_n . Sobre $K.\psi$ no hay otra transformación natural como no sea σ , pues $K.\psi$ es una distribución sobre E_n .

El significado de la relación 13.9 puede sintetizarse diciendo que el transformado del "punto" es el "punto" de los transformados para las transformaciones que son posibles.

Más adelante nos ocuparemos del caso en que

$$G_n = E_n \quad \text{y} \quad H_n = F_n ;$$

tendremos entonces distribuciones de E_n que se transportan a distribuciones de F_n y núcleos de $E_n \times E_n$ que se transportan a distribu-

ciones de $F_n \times F_n$.

En este caso 13.9 se escribe de la siguiente manera:

$$13.10 \quad (\sigma, \sigma) K. \sigma \psi = \sigma (K. \psi) .$$

Si convenimos en escribir σ en lugar de (σ, σ) tendremos

$$13.11 \quad \sigma K. \sigma \psi = \sigma (K. \psi) .$$

En la Física se encuentran siempre fórmulas de este tipo, cuando se quiere expresar que ciertos entes son invariantes respecto de una transformación de Lorentz, aunque aparecen no claramente escritas.

La cuestión es sencilla: desde el momento en que se tiene un transporte de estructura de E_n a F_n , se debe transportar todo, y la única manera de hacerlo correctamente, es escribir en un miembro el σ -transformado de él mismo y en el otro miembro los σ -transformados de todos los elementos.

Hay otra complicación que tiene su origen en el hecho de que $F_n = E_n$ y σ es un automorfismo de Lorentz del espacio afín E_n , que transporta funciones, distribuciones, núcleos u operadores definidos en un espacio de Hilbert de E_n , sobre funciones, distribuciones, núcleos u operadores definidos en un espacio de Hilbert de F_n .

Para escribir correctamente la fórmula que expresa la invariancia debe tenerse en cuenta que en un miembro debe figurar el σ -transformado de todo ese miembro y en el otro los σ -transformados de todos los elementos.

Observemos por otra parte que la fórmula 13.3, que dice

$$\sigma T(\sigma \varphi) = T(\varphi) ,$$

parece de naturaleza distinta, pues de acuerdo con el criterio expresado debiera escribirse

$$13.12 \quad \sigma T(\sigma \varphi) = \sigma (T(\varphi)) ,$$

pero en este caso $T(\varphi)$ es un número complejo y el σ del segundo miembro indica al automorfismo idéntico de los números complejos, puesto que los automorfismos de las variedades no actúan sobre los números. Por tal razón σ puede suprimirse en la escritura.

Conviene recalcar que esto no sería cierto si se tuvieran distribuciones de valores vectoriales, en cuyo caso el σ -transformado del segundo miembro puede ser de distinta naturaleza y habrá que escribir entonces $\sigma (T(\varphi))$.

Supongamos ahora que se tenga la transformación $E_n \xrightarrow{\sigma} F_n$, que sobre E_n se tenga un espacio de Hilbert \mathcal{H} con topología más fina que la inducida, y que se quiera estudiar el transporte del espacio \mathcal{H} por medio de σ . Se tendrá

$$13.12 \quad \mathcal{H} \xrightarrow{\sigma} \sigma \mathcal{H} ,$$

donde $\sigma \mathcal{H}$ será un espacio de distribuciones sobre F_n con topología más fina que la inducida, transportado de \mathcal{H} . Esto significa que se transporta el espacio y también la topología. Un elemento del segundo espacio es una distribución σ -transformada de una distribución del primer espacio. Como el producto escalar es un número complejo que no es transformado por σ , habrá conservación de los productos escalares; podremos poner pues

$$13.13 \quad (\sigma S | \sigma T)_{\mathcal{H}} = (S | T)_{\mathcal{H}}$$

Para obtener una fórmula de tipo completamente general habría que escribir σ delante del segundo miembro, pero por lo dicho más arriba, siendo el segundo miembro un número complejo, no cambia con σ .

La relación 13.13 permite decir que se ha establecido en el espacio transformado una estructura de espacio de Hilbert con una topología más fina que la inducida, y de esta manera todo queda conservado.

Planteémonos ahora la cuestión de saber cuál será el núcleo correspondiente a $\sigma \mathcal{H}$. Para ello enunciemos la siguiente:

Proposición. Si a \mathcal{H} está asociado K , a $\sigma \mathcal{H}$ está asociado σK .

En efecto: sea $\varphi \in \mathcal{D}$ y $T \in \mathcal{H}$. Se tiene

$$(K \cdot \varphi | T)_{\mathcal{H}} = \overline{T(\varphi)}.$$

Aplicando la transformación σ se tendrá:

$$13.14 \quad (\sigma K \cdot \sigma \varphi | \sigma T)_{\sigma \mathcal{H}} = \overline{T(\varphi)}$$

puesto que hay conservación del producto escalar.

Pero

$$13.15 \quad \overline{T(\varphi)} = \overline{\sigma T(\sigma \varphi)}.$$

Llamemos K' al núcleo correspondiente a $\sigma \mathcal{H}$. Por definición tendremos, siendo $\sigma \varphi$, σT elementos arbitrarios de $\sigma \mathcal{D}$ y $\sigma \mathcal{H}$ respectivamente:

$$13.16 \quad (K'. \sigma \varphi | \sigma T)_{\sigma \mathcal{H}} = \overline{\sigma T}(\sigma \varphi) ;$$

Teniendo en cuenta 13.14 y 13.15 debe verificarse para cada σT elemento de $\sigma \mathcal{H}$

$$(\sigma K. \sigma \varphi | \sigma T)_{\sigma \mathcal{H}} = (K'. \sigma \varphi | \sigma T)_{\sigma \mathcal{H}}$$

de donde

$$\sigma K. \sigma \varphi = K'. \sigma \varphi ;$$

y siendo $\sigma \varphi$ un elemento arbitrario de $\sigma \mathcal{D}$ se tiene

$$\sigma K = K' .$$

En conclusión: el núcleo del transformado del espacio de Hilbert asociado es el transformado del núcleo.

Consideremos en particular el caso en que σ es un automorfismo de E_n en sí mismo. \mathcal{H} será llamado entonces, invariante con respecto a σ si es invariante como espacio de Hilbert; es decir, si para $\forall T \in \mathcal{H}$ se tiene $\sigma T \in \mathcal{H}$ y, además, $\|\sigma T\| = \|T\|$.

En otros términos: $\sigma \mathcal{H}$ es idéntico a \mathcal{H} , lo cual significa que el conjunto de los elementos es el mismo y la norma es la misma, o bien, que σ opera unitariamente sobre \mathcal{H} .

Podemos enunciar el siguiente:

Teorema: La condición necesaria y suficiente para que \mathcal{H} sea σ -invariante, es decir $\sigma \mathcal{H} = \mathcal{H}$, con conservación de la estructura de espacio de Hilbert, es que el núcleo asociado sea σ -invariante, esto es $\sigma K = K$

Esto último es equivalente a decir:

para $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \psi \in \mathcal{D}$ debe ser: $\overline{K}(\sigma \varphi \sigma \overline{\psi}) = \overline{K}(\varphi \overline{\psi})$.

14. Núcleos invariantes por traslación.

De acuerdo con el teorema enunciado al final del párrafo 13, cuando se quieran tener los espacios de Hilbert definidos sobre un espacio afín, que sean Lorentz-invariantes, es decir, tales que cada transformación de Lorentz los deje invariantes como espacios vectoriales y opere unitariamente sobre ellos (conservando la norma), se deberán buscar los núcleos Lorentz-invariantes.

Hagamos notar que si se quiere estudiar una partícula elemental de tipo determinado, es natural postular que su espacio de Hilbert sea Lorentz-invariante, como más adelante veremos.

Esta cuestión de la invariancia del espacio de Hilbert frente a un grupo dado es de gran importancia, pues es la clave para elucidar completamente qué debe entenderse por partícula elemental.

Por ejemplo: en el espacio clásico de la mecánica de Newton sería posible buscar también las correspondientes partículas elementales. El grupo sería distinto del grupo de Lorentz, y las partículas serían desde luego diferentes; no serían ya fotones, electrones, etc. Es posible ver, que en tal caso una partícula elemental debe tener una velocidad bien determinada.

Esta cuestión la consideraremos después del estudio del grupo de Lorentz, cuando nos ocupemos de la influencia de otros grupos sobre las partículas que se obtienen.

Es importante recalcar que tales partículas dependen en gran manera de la elección del grupo. Así en dependencia de que en el grupo de Lorentz se considere la posibilidad de cambiar el sentido del tiempo o nó, se obtienen partículas completamente distintas.

Nosotros nos propondremos, por ahora, una cuestión puramente matemática. La interpretación física vendrá más tarde cuando analicemos ciertas propiedades de los resultados obtenidos.

El problema será el siguiente. Se tiene una variedad E_n y un grupo G de transformaciones sobre E_n y se quiere un método para determinar todos los subespacios de Hilbert de \mathcal{D}' invariantes con respecto a este grupo o lo que es equivalente, todos los núcleos invariantes con respecto a este grupo.

Comenzaremos por un caso particular. E_n será el espacio afín y G será un subgrupo sencillo de Lorentz, el grupo de las traslaciones.

Estamos aquí en presencia de un caso particular del problema, pues si hay invariancia con respecto al grupo de Lorentz, habrá también invariancia por traslación.

E_n espacio afín tiene asociado un espacio vectorial \vec{E}_n . Hemos visto en 1 que los puntos de E_n y los vectores de \vec{E}_n están ligados por la operación

$$x + \vec{a} \in E_n .$$

Sea G el grupo de las traslaciones. Una traslación está definida precisamente por un vector de \vec{E}_n , llamémoslo \vec{a} con la operación

$$x \longrightarrow x + \vec{a} ,$$

que escribiremos $\tau_{\vec{a}}$; traslación del espacio afín E_n definida por

un elemento \vec{a} de E_n .

El conjunto de las traslaciones constituye un grupo de operadores cuya ley de composición coincide con la ley de adición del espacio vectorial

$$14.1 \quad \tau_{\vec{a}} \circ \tau_{\vec{b}} = \tau_{\vec{a} + \vec{b}}$$

El elemento $\tau_{\vec{0}}$ es la operación idéntica y el inverso de $\tau_{\vec{a}}$ es $\tau_{-\vec{a}}$.

Nuestro problema es hallar los subespacios $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'(E_n)$ invariantes por todas las traslaciones (lo cual no quiere decir que todo elemento de \mathcal{H} sea invariante).

Más precisamente: cualquiera que sea $\vec{a} \in E_n$, la correspondiente traslación $\tau_{\vec{a}}$ debe conservar el espacio \mathcal{H} y sobre él debe operar unitariamente.

Esto equivale a decir que cada traslación define sobre una operación unitaria que lo deja invariante.

Pero sabemos que esto es lo mismo que decir que el núcleo K es invariante con respecto a todas las traslaciones, es decir,

$$14.2 \quad \tau_{\vec{a}} K = K ;$$

donde con $\tau_{\vec{a}}$ indicamos el par $(\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{a}})$.

Si K es una función, la relación 14.2 se escribe

$$14.3 \quad K(x - \vec{a}, \xi - \vec{a}) = K(x, \xi) ,$$

que es la definición de invariancia por traslación para una función.

Supongamos, por otra parte, fijado un origen 0 en E_n . De esta manera queda definida una correspondencia biunívoca entre E_n y E_n

pues a cada $\vec{x} \in E_n$ se le hace corresponder $0 + \vec{x} \in E_n$.

Esta correspondencia permite transportar la estructura del espacio vectorial sobre el espacio afín y hacer de este último un espacio vectorial; es cierto que la estructura vectorial obtenida depende del origen elegido, pero ello es cómodo para ciertas demostraciones.

Por lo tanto, si la relación 14.3 es cierta para cada \vec{a} , no será necesario poner la flecha, pues de acuerdo con lo dicho hemos identificado los espacios E_n y \vec{E}_n .

Tendremos pues

$$14.4 \quad K(x - a, \xi - a) = K(x, \xi).$$

Si en particular se toma $a = \xi$, se obtiene

$$14.5 \quad K(x - a, \xi - a) = K(x - \xi, 0) = K(x, \xi).$$

Pero $K(x - \xi, 0)$ es una función $H(x - \xi)$, función de una sola variable definida en E_n , de la diferencia $x - \xi$.

En conclusión. Si un núcleo-función es invariante por traslación es simplemente una función de una variable tomada como función de la diferencia $x - \xi$.

Recíprocamente: si tomamos una función de una variable y se reemplaza ésta por $x - \xi$, se tiene una función de dos variables, núcleo-función que será invariante por traslación, pues se hace siempre la misma traslación para las dos variables x, ξ y por tanto se obtiene el mismo valor de la diferencia $x - \xi$.

Si K es una distribución la cuestión es más complicada. Hemos visto, en efecto, en el caso anterior, que era esencial poner $a = \xi$ para que una de las variables de K tomara el valor cero (14.5).

Ello no tiene sentido para una distribución, pues no tiene sentido hablar del valor de una distribución en un punto.

Sea E_n el espacio afín: G el grupo de las traslaciones y $K_{x, \xi} \in \mathcal{D}'(E_n \times E_n)$.

Suponemos que $K_{x, \xi}$ es invariante por traslación, es decir, que cualquiera que sea $\vec{a} \in \vec{E}_n$ se verifica la relación

$$14.6 \quad \tau_{\vec{a}} K_{x, \xi} = K_{x, \xi} .$$

Veremos que la condición 14.6 es equivalente a afirmar que existe una distribución $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ tal que

$$K_{x, \xi} = H_{x-\xi} .$$

Obsérvese que hemos dicho $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ y no que $H \in \mathcal{D}'(E_n)$, puesto que $x - \xi$ es la diferencia de dos puntos y por tanto es un elemento del espacio vectorial asociado \vec{E}_n .

Pero debemos definir la significación de una distribución $H_{x-\xi}$ como distribución sobre el producto $E_n \times E_n$, para poder interpretarla como núcleo.

Se presenta pues un problema de definición, que consistirá en hallar una correspondencia natural de la forma

$$14.7 \quad H_{\vec{u}} \in \mathcal{D}'(E_n) \implies K_{x, \xi} = H_{\vec{x-\xi}} \in \mathcal{D}'(E_n \times E_n) .$$

Para las funciones es evidente, pues se tiene

$$14.8 \quad K(x, \xi) = H(\vec{x-\xi}) .$$

Para las distribuciones esta correspondencia es imposible si no se agrega otra hipótesis. Recordemos aquí que una función no es

una distribución particular si no existe elemento de volumen. Además el problema no queda resuelto si no hacemos hipótesis sobre el elemento de volumen.

Supongamos que sobre \vec{E}_n se fije un elemento de volumen $d\vec{u}$ (medida de Haar o de Lebesgue, invariante por traslación). Sobre E_n existirá también un elemento de volumen que llamaremos dx y sobre el producto $E_n \times E_n$ se tendrá el elemento $dx d\xi$ invariante por traslación; este elemento de volumen nos permitirá considerar una función como una distribución y esta identificación se conservará por traslación.

Si el elemento de volumen no fuera invariante por traslación tal identificación no subsistiría y todo dejaría de valer.

Ahora bien, sobre \vec{E}_n hay una infinidad de medidas de Haar o de Lebesgue que son proporcionales entre sí, pero no hay ninguna privilegiada.

Podemos suponer elegida en \vec{E}_n una medida particular entre todas las medidas de Lebesgue proporcionales. Al mismo tiempo quedará definida una medida en E_n y en el producto $E_n \times E_n$.

Una función sobre \vec{E}_n definirá entonces una distribución particular y análogamente una función sobre $E_n \times E_n$ definirá una distribución. Por otra parte esta correspondencia entre función y distribución particular se conserva por traslación.

Volviendo ahora a 14.7 y 14.8, trataremos de averiguar la significación de $H_{x-\xi}$, como distribución en $E_n \times E_n$.

Esta significación es clara, en virtud de 14.8, cuando H es una función. Para definir $H_{x-\xi}$, cuando H es una distribución, lo que ocurre es generalizar en forma natural la fórmula 14.8, inter-

pretándola en forma funcional y pasando mediante una extensión por continuidad al caso de una distribución.

Más precisamente: diremos que una operación que es conocida para las funciones de \mathcal{D} , tiene una buena generalización para las distribuciones, si es una aplicación continua que, para dichas funciones, es la operación dada y si es la sola aplicación que tenga esta propiedad.

En esto consiste el método para generalizar en forma natural otras operaciones como las de derivación, multiplicación, transformación de Fourier, etc.

En nuestro caso, diremos que una transformación que a cada H_u le hace corresponder un núcleo, es una transformación razonable si tiene las dos propiedades siguientes:

I) si H es función continua la transformación es la definida por 14.8 :

$$K(x, \xi) = H(\overline{x - \xi}) ;$$

II) es una transformación continua de $\mathcal{D}'(E_n)$ en $\mathcal{D}'(E_n \times E_n)$.

Si existe una transformación semejante, hay sólo una, pues es continua y es conocida sobre un subespacio denso.

Para encontrarla, utilizaremos un método particular; pero si se cumplen las dos propiedades enunciadas más arriba, la transformación será la misma que la obtenida por cualquier otro método.

Para ello calculemos la integral

$$\iint K(x, \xi) \varphi(x, \xi) dx d\xi .$$

Con la definición 14.8 obtenemos

$$14.9 \quad \iint K(x, \xi) \varphi(x, \xi) dx d\xi = \\ = \iint H(\overrightarrow{x - \xi}) \varphi(x, \xi) dx d\xi .$$

Hagamos un cambio de variables, poniendo $\vec{u} = \overrightarrow{x - \xi}$, tomando x, \vec{u} como nuevas variables; el Jacobiano J cumple la relación: $|J| = 1$ y por lo tanto: $dx d\xi = dx d\vec{u}$.

Se tiene entonces:

$$14.10 \quad \iint H(\overrightarrow{x - \xi}) \varphi(x, \xi) dx d\xi = \\ = \iint H(\vec{u}) \varphi(x, x - \vec{u}) dx d\vec{u} .$$

El primer miembro de 14.9 se puede escribir

$$K_{x, \xi} (\varphi(x, \xi))$$

y el segundo miembro de 14.10 se puede escribir

$$(H_{\vec{u}} \otimes 1_x) (\varphi(x, x - \vec{u})) .$$

Es decir, la definición de $H_{\overrightarrow{x - \xi}}$ como núcleo sería:

$$14.11 \quad H_{\overrightarrow{x - \xi}} (\varphi(x, \xi)) = (H_{\vec{u}} \otimes 1_x) (\varphi(x, x - \vec{u})) .$$

Nos proponemos ahora verificar que 14.11 establece una correspondencia que tiene las propiedades I) y II).

Ante todo observemos que 1_x es una función, pero como tenemos el elemento de volumen dx , 1_x define una distribución que es precisamente la medida dx . Esto muestra porqué es indispensable haber elegido el elemento de volumen, a causa de la intervención de 1_x como distribución.

Veamos ahora que, en virtud de 14.11 hemos definido una distribución, cuando H es una distribución.

Es evidente que es una funcional lineal sobre \mathcal{D} . Además es continua. En efecto, supongamos que $\varphi_\nu \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}_{x, \xi}$, manteniendo sus soportes en un compacto fijo de tal manera que sus derivadas convergen uniformemente a cero.

Poniendo $\varphi_\nu(x, x-\vec{u}) = \psi_\nu(x, \vec{u})$ se ve que los soportes de ψ_ν quedan contenidos en un compacto fijo, puesto que si x, ξ quedan acotados también quedan acotados $x, x-\xi$; y como cada derivada parcial de ψ con respecto a x ó \vec{u} se escribe por las fórmulas del cálculo diferencial a partir de las derivadas parciales de φ con respecto a x, ξ , si estas convergen uniformemente a cero, también lo harán las primeras. Es decir, si $\varphi(x, \xi) \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}_{x, \xi}$, $\psi(x, \vec{u}) \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}_{x, \vec{u}}$.

Por consiguiente, como $H_{\vec{u}}$ es una distribución, $H_{\vec{u}} \otimes l_x$ es una distribución en \vec{u}, x y si $\varphi_\nu(x, x-\vec{u}) = \psi_\nu(x, \vec{u})$ convergen a cero en $\mathcal{D}_{x, \vec{u}}$, el segundo miembro de 14.11 converge a cero.

Tenemos pues una correspondencia que a cada distribución sobre \vec{E}_n hace corresponder una distribución sobre $E_n \times E_n$. Esta correspondencia es evidentemente lineal; para las funciones continuas da el resultado que buscamos pues lo hemos visto más arriba al generalizar 14.10.

Sólo resta, por tanto, por demostrar que es continua, de acuerdo con el enunciado de pág. 95. Para ello, supongamos que $H_{\vec{u}} \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(E_n)$; hay que ver que $H_{x-\xi} \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'_{x, \xi}$; o lo que es lo mismo, hay que ver que $H_{x-\xi}(\varphi(x, \xi)) \rightarrow 0$ uniformemente si φ queda acotada en $\mathcal{D}_{x, \xi}$. Pero si φ queda acotada en $\mathcal{D}_{x, \xi}$, $\psi(x, \vec{u})$ queda acotada en $\mathcal{D}_{x, \vec{u}}$.

Como $H_{\vec{u}} \rightarrow 0$ y l_x es fija, el producto tensorial de ambas tiende a cero, esto es $H_{\vec{u}} \otimes l_x \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'_{x, \vec{u}}$, en virtud de la continuidad bien conocida del producto tensorial.

Se tiene entonces un conjunto acotado en $\mathcal{D}'_{x, \vec{u}}$ y una distribución que converge a cero; converge, por tanto, uniformemente a cero y la aplicación resulta continua.

Es conveniente expresar el resultado de otra manera.

Tenemos ahora establecida una correspondencia lineal y continua que a cada elemento de $\mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ hace corresponder un elemento de $\mathcal{D}'(E_n \times E_n)$ y tal que para las funciones, tiene las propiedades exigidas.

Observemos que para transformar la integral 14.9 hemos hecho un cambio de variables que analizaremos con más cuidado.

Hemos puesto allí: $dx \, d\xi = dx \, d\vec{u}$.

En el primer miembro de esta igualdad x, ξ recorre el espacio $E_n \times E_n$; en el segundo miembro x, \vec{u} recorre el espacio $E_n \times \vec{E}_n$. El cambio de variables que establece el pasaje de x, ξ a x, \vec{u} es un isomorfismo indefinidamente diferenciable de $E_n \times E_n$ sobre $E_n \times \vec{E}_n$ definido por:

$$x, \xi \longrightarrow x, \vec{x-\xi},$$

transformación de $E_n \times E_n$ sobre $E_n \times \vec{E}_n$; y su inversa

$$x, \vec{x-\vec{u}} \longleftarrow x, \vec{u}$$

es una transformación de $E_n \times \vec{E}_n$ sobre $E_n \times E_n$.

Tenemos pues dos variedades indefinidamente diferenciables de dimensión $2n$: $E_n \times E_n$ y $E_n \times \vec{E}_n$ y una transformación indefini-

damente diferenciable de la primera variedad sobre la segunda y la transformación inversa.

Según lo que hemos visto más arriba hay siempre una transformación que a cada $K_{x, \xi}$, núcleo sobre $E_n \times E_n$, atribuye un núcleo $H_{x, \vec{u}}$ sobre $E_n \times \vec{E}_n$; y hemos visto también que la correspondencia que a partir de K define H está dada por

$$14.12 \quad H_{x, \vec{u}}(\Psi(x, \vec{u})) = K_{x, \xi}(\Psi(x, x - \vec{\xi})) ,$$

que interpretamos diciendo que el valor de $H_{x, \vec{u}}$ sobre la función arbitraria $\Psi(x, \vec{u})$ es el valor de $K_{x, \xi}$ sobre la imagen de Ψ en el primer espacio, $\Psi(x, x - \vec{\xi})$, obtenida por la transformación inversa de $x \rightarrow x - \vec{\xi}$.

Inversamente, a partir de H el núcleo K está dado por:

$$14.13 \quad K_{x, \xi}(\varphi(x, \xi)) = H_{x, \vec{u}}(\varphi(x, x - \vec{u})) .$$

Tenemos así una transformación bien definida entre distribuciones sobre $E_n \times E_n$ y distribuciones sobre $E_n \times \vec{E}_n$, la cual consiste en el cambio de variables para el caso particular estudiado.

En esencia se trata de un transporte de estructura por un isomorfismo y evidentemente es un isomorfismo entre ambos espacios de distribuciones. Estamos entonces seguros que si $K \rightarrow 0$ se tiene $H \rightarrow 0$ y recíprocamente.

Pero en virtud de 14.13 y 14.11, en la correspondencia general entre las distribuciones de x, ξ y las de x, \vec{u} , la distribución llamada $H_{x - \vec{\xi}}$ es simplemente la imagen de $H_{x, \vec{u}}$ la cual es a su vez la distribución $H_{\vec{u}} \otimes 1_x$.

En otros términos: existe una correspondencia que a cada K

hace corresponder un H y a cada H un K . En el caso particular en el cual, como distribución de dos variables $H_{x,u}$ tomamos un producto tensorial de una distribución de una variable H_u y la distribución 1_x , la distribución que se obtiene en x, ξ es la que hemos indicado con

$$H_{x-\xi}$$

Resumiendo: en lugar de definir simplemente $H_{x-\xi}$, hemos considerado un proceso más general, a saber, una correspondencia entre distribuciones de x, ξ sobre $E_n \times E_n$ y distribuciones de x, u sobre $E_n \times E_n$.

Entre estas últimas hay ciertas distribuciones particulares que dependen de una sola variable y ellas son de la forma $H_u \otimes 1_x$; la distribución que le corresponde en x, ξ es la que hemos llamado

$$H_{x-\xi}$$

Se ve así que la correspondencia es continua, pues es la restricción de una operación continua sobre un espacio particular.

Hemos obtenido, pues, la correspondencia entre distribuciones sobre E_n y distribuciones sobre $E_n \times E_n$, como caso particular de la correspondencia entre distribuciones sobre $E_n \times E_n$ y distribuciones sobre $E_n \times E_n$, a partir del producto tensorial.

Con esto hemos terminado el primer problema: la definición de $H_{x-\xi}$.

El segundo problema que tenemos es el de la equivalencia, que enunciamos así: es lo mismo decir que K es invariante por traslación o decir que K tiene la forma $H_{x-\xi}$, donde H es una distribución sobre el espacio vectorial asociado.

Para verlo, consideraremos el núcleo $K_{x,\xi}$ y sea $H_{x,u}$ el núcleo obtenido por cambio de variables. Sea $\vec{a} \in E_n$. Se tiene el nú-

cleo transportado $(\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{a}}) K_{\vec{x}, \vec{\xi}}$ y se quiere el núcleo asociado en \vec{x}, \vec{u} . Llamémosle $H'_{\vec{x}, \vec{u}}$.

En virtud de 14.12 se puede poner:

$$14.14 \quad H'_{\vec{x}, \vec{u}} (\Psi(\vec{x}, \vec{u})) = ((\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{a}}) K_{\vec{x}, \vec{\xi}}) (\Psi(\vec{x}, \vec{x} - \vec{\xi})) ;$$

pero teniendo en cuenta la definición de trasladado 13.4, el segundo miembro de 14.14 es igual a

$$14.15 \quad K_{\vec{x}, \vec{\xi}} (\Psi(\vec{x} + \vec{a}, \vec{x} - \vec{\xi})) ,$$

puesto que hay que reemplazar \vec{x} por $\vec{x} + \vec{a}$ y $\vec{\xi}$ por $\vec{\xi} + \vec{a}$, en cuyo caso $\vec{x} - \vec{\xi}$ no varía, pues la traslación \vec{a} se aplica a ambos términos de la diferencia. A su vez 14.15, en virtud de la definición de K a partir de H (14.13), se puede poner

$$14.16 \quad H_{\vec{x}, \vec{u}} (\Psi(\vec{x} + \vec{a}, \vec{u})) ,$$

que por la definición de trasladado será

$$14.17 \quad (\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{0}}) H_{\vec{x}, \vec{u}} (\Psi(\vec{x}, \vec{u})) .$$

Comparando este último con el primer miembro de 14.14 se tiene

$$14.18 \quad H'_{\vec{x}, \vec{u}} = (\tau_{\vec{a}}, \tau_{\vec{0}}) H_{\vec{x}, \vec{u}} = (\tau_{\vec{a}}, I) H_{\vec{x}, \vec{u}} ,$$

donde hemos puesto $\tau_{\vec{0}} = I =$ la identidad.

Es decir, que efectuar en la correspondencia entre $K_{\vec{x}, \vec{\xi}}$ y $H_{\vec{x}, \vec{u}}$, una misma traslación sobre las dos variables de K , es lo mismo que efectuar la misma traslación sobre la primera variable de $H_{\vec{x}, \vec{u}}$.

Se puede enunciar pues el siguiente

Teorema. Condición necesaria y suficiente para que K sea invariante por las traslaciones (τ_a^+, τ_a^-) es que, en la correspondencia general, H sea invariante para las traslaciones que actúan sobre la primera variable.

Pero es sabido ⁽¹⁾ que si una distribución de dos variables es invariante por traslación de una variable, es independiente de esa variable; y en este caso se ve que para que una distribución de dos variables x, \vec{u} sea independiente de la variable x , es necesario y suficiente que sea el producto tensorial de una distribución de la variable \vec{u} por la distribución 1 de la variable x . Es decir, $H_{x, \vec{u}}$ tiene la forma $H_{\vec{u}} \otimes 1_x$.

Pero en este caso $K_{x, \xi}$ se llama $H_{x-\xi}$ según nuestra definición anterior.

Hemos demostrado pues el

Teorema: Para que el núcleo K sea invariante por traslación, es necesario y suficiente que sea de la forma $H_{x-\xi}$, donde H es una distribución sobre \vec{E}_n .

Podemos decir pues, que las distribuciones $H_{x-\xi}$ asociadas a las distribuciones H definidas sobre el espacio vectorial \vec{E}_n , determinan la categoría completa de los núcleos invariantes por traslación.

De lo que precede se deduce, en conclusión, que para que un subespacio \mathcal{H} de $\mathcal{D}'(E_n)$, con topología más fina que la inducida sea invariante por traslación, es necesario y suficiente que su núcleo esté definido por $H_{x-\xi}$, donde $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ es de tipo positivo.

(1) T.D.I. ch. IV § 5.

En este enunciado decimos que H es de "tipo positivo", siendo H una distribución de una variable sobre el espacio vectorial \vec{E}_n .

Hasta ahora hemos usado la locución de "tipo positivo" para calificar a un núcleo $K_{x, \xi}$ definido sobre la variedad indefinidamente diferenciable $E_n \times E_n$.

Las nociones no son en principio las mismas, puesto que, repetámoslo, la definición de distribución de tipo positivo vale para distribuciones cuya variable recorre un grupo, y la de núcleo de tipo positivo vale sólo para distribuciones cuya variable recorre un producto de variedades.

Aclararemos esta diferencia en el siguiente párrafo.

15. Distribuciones y núcleos de tipo positivo.

Comencemos tratando el caso de una función.

Sea $K(x, \xi)$ un núcleo-función.

Hemos dado en 8 (Definición 1ª) la definición de núcleo-función de tipo positivo, que repetimos aquí:

$$K(x, \xi) > 0 ,$$

si para $\forall x_1, \dots, x_e ; \forall z_1, \dots, z_e ;$ se tiene

$$15.1 \quad \sum K(x_i, x_j) z_i \bar{z}_j \geq 0 .$$

Se ve que esta definición es válida para funciones de dos variables que recorren el mismo conjunto arbitrario.

Sea ahora $H(u)$ una función de una variable que recorre un grupo abeliano.

Definición. Se dice que $H(u)$ es de tipo positivo si para $\forall u_1, \dots, u_e;$
 $\forall z_1, \dots, z_e$; se tiene:

$$15.2 \quad \sum H(u_i - u_j) z_i z_j \geq 0 .$$

Si H es de tipo positivo según esta última definición, lo notaremos poniendo: $H \gg 0$.

Observemos que esta última definición es una particularización de la definición 15.1 .

En efecto: una función $H(u)$ sobre un grupo es de tipo positivo en el sentido de la teoría de los grupos si el núcleo $H(x - \xi)$ es de tipo positivo en el sentido de la teoría de los núcleos.

Pasemos al caso de una distribución.

Hemos dado en 8 (Definición 3ª) la definición de núcleo-distribución sobre una variedad indefinidamente diferenciable $E_n \times E_n$, de tipo positivo, a saber:

$$K_{x, \xi} > 0 ,$$

si para $\forall \varphi \in \mathcal{D}(E_n)$, se tiene:

$$15.3 \quad K_{x, \xi} (\varphi(x) \overline{\varphi(\xi)}) \geq 0 .$$

Sea ahora H_u una distribución sobre el espacio vectorial \vec{E}_n . La noción de distribución de tipo positivo, generalización de la de función de tipo positivo es la siguiente.

Definición⁽¹⁾. La distribución H_u sobre el espacio vectorial \vec{E}_n es

(1) T.D. II § 9 .

de tipo positivo si para $\forall \theta(x) \in \mathcal{D}(E_n)$ se tiene:

$$15.4 \quad H(\theta * \tilde{\theta}) \geq 0 ,$$

donde $\tilde{\theta} = \check{\theta}$ y $\check{\theta}(x) = \theta(-x)$.

Recordemos que esta definición se obtiene a partir de la correspondiente a la de una función, con el mismo procedimiento que la 3ª Definición de 8 se obtiene a partir de la 1ª Definición de 8, por aproximación de las medidas y la noción de convergencia fuertemente vaga.

En particular, si H es una función, la definición 15.4 coincide con la 15.2.

Veamos ahora que para que $H_{x-\xi} \rightarrow$ sea de tipo positivo en el sentido 15.3 de los núcleos es necesario y suficiente que $H_u \rightarrow$ sea de tipo positivo en el sentido de 15.4.

Para el caso de una función la cosa es evidente, como ya lo hemos hecho notar.

Para una distribución no es tan evidente. Elijamos un origen particular, es decir, un punto distinguido, de manera de poder identificar el espacio afín y el espacio vectorial asociado.

Sea θ una función sobre el espacio vectorial y φ una función sobre el espacio afín, y calculemos la expresión

$$15.5 \quad H_{x-\xi}(\varphi(x) \overline{\varphi}(\xi)) .$$

De acuerdo con la definición general 14.11 se tiene

$$\begin{aligned} 15.6 \quad H_{x-\xi}(\varphi(x) \overline{\varphi}(\xi)) &= (1_x \otimes H_u)(\varphi(x) \overline{\varphi}(x-u)) = \\ &= H_u(1_x(\varphi(x) \overline{\varphi}(x-u))) = H_u\left(\int \varphi(x) \overline{\varphi}(x-u) dx\right) = \\ &= H_u\left(\int \varphi(x) \check{\varphi}(u-x) dx\right) = H_u\left(\int \varphi(x) \tilde{\varphi}(u-x) dx\right) = \end{aligned}$$

$$= H_u((\varphi * \tilde{\varphi})u) = H(\varphi * \tilde{\varphi}).$$

Hemos escrito u en lugar de \vec{u} , después de haber identificado el espacio afín E_n con el espacio vectorial \vec{E}_n , pues en tal caso no es necesario utilizar las flechas.

Como se ve, es necesario elegir un origen, pues de otra manera, siendo φ una función sobre el espacio afín, no existiría la convolución y no tendría tampoco sentido hablar de $\tilde{\varphi}$ desde el momento en que no hay origen respecto del cual definir la simétrica de una función.

Considerando el primero y último miembro de 15.6 vemos que si uno es positivo, el otro también lo es, lo cual significa que la definición 15.4 de una distribución H de tipo positivo sobre \vec{E}_n considerado como grupo o espacio vectorial, coincide con la definición 15.3 para $H_{x-\xi}$ considerada como núcleo sobre la variedad $E_n \times E_n$.

Ello no es sorprendente; en efecto, la definición 15.4 de una distribución de tipo positivo en el sentido de los grupos, se obtiene a partir de la definición 15.2, de la misma manera que la definición 15.3 de núcleo-distribución de tipo positivo se obtiene a partir de 15.1; y hemos visto al comienzo del presente párrafo que 15.1 es equivalente a 15.2.

16. La convolución sobre los espacios vectoriales y afines.

En las cuestiones que hemos tratado aparecen en general un espacio afín y su espacio vectorial asociado. Es posible definir dos tipos de convolución de la siguiente manera.

a) Sean las distribuciones: $S, T \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$. La convolución se define como usualmente sobre el espacio vectorial \vec{E}_n :

$$16.1 \quad (S * T) \varphi = (S_{\vec{\xi}} \otimes T_{\vec{\eta}})(\varphi(\vec{\xi} + \vec{\eta})).$$

b) Sean las dos distribuciones $S \in \mathcal{D}'(E_n)$, $T \in \mathcal{D}'(E_n)$.

La convolución se define sobre el espacio afín E_n :

$$16.2 \quad (S * T) \varphi = (S_{\xi} \otimes T_{\vec{\eta}})(\varphi(\xi + \vec{\eta})).$$

En esta expresión el producto tensorial del segundo miembro define una distribución sobre $x \vec{E}_n$; y como $\varphi(\xi + \vec{\eta})$ es una función sobre E_n , pues $\xi + \vec{\eta}$ es un punto de E_n , la convolución resulta definida sobre E_n .

Si se elige un origen sobre el espacio afín E_n y se identifican E_n y \vec{E}_n , obtenemos la misma fórmula 16.2.

En otros términos: si elegimos un punto O arbitrario de E_n como origen, el espacio afín se convierte en espacio vectorial y las distribuciones S, T serán distribuciones sobre el espacio vectorial; tienen un producto de convolución que es una distribución sobre el espacio vectorial, es decir, sobre el espacio afín inicial, que es el mismo, y el resultado no depende de la elección del origen puesto que b) hace ver que se puede obtener directamente.

Observación. Es fácil ver que no existe la convolución sobre E_n . Se podría pensar en elegir un origen O en E_n y a partir de ello definir una convolución; pero es evidente que ésta definición dependería del origen elegido.

Veámoslo con un ejemplo. Sean las distribuciones

$$\delta_a, \delta_b, \text{ con } a, b \in E_n$$

Si tratamos de dar sentido a la expresión

$$\delta_a * \delta_b$$

vemos que ello no es posible, desde el momento en que no existe ninguna operación definida entre \underline{a} y \underline{b} .

Elijamos un origen O . Tenemos entonces un espacio vectorial \vec{E}_n . A cada \underline{a} le corresponde el vector $\vec{a-O}$ y a cada \underline{b} el vector $\vec{b-O}$. En tal caso δ_a y δ_b son masas puntuales sobre \vec{E}_n y se puede poner, como es sabido

$$\delta_{\vec{a-O}} * \delta_{\vec{b-O}} = \delta_{\vec{a-O} + \vec{b-O}}.$$

El segundo miembro de esta expresión designa la masa puntual sobre el punto que corresponde al vector

$$O + \vec{a-O} + \vec{b-O},$$

pero este punto de E_n depende evidentemente de O .

Podemos decir que así como la adición de los puntos definida por la elección de un origen O , depende de O , la convolución también depende de O .

En otros términos: existe la convolución de dos distribuciones definidas sobre el espacio vectorial, de la misma manera que hay adición entre los vectores.

Hay convolución entre una distribución definida sobre el espacio vectorial y una distribución definida sobre el espacio afín de la misma manera que hay adición de un vector y un punto.

En cambio, no hay convolución sobre el espacio afín, pues no

hay adición entre los puntos del espacio afín.

Definida la convolución, podemos definir ahora la regularización.

Se presentan tres casos.

a) Sea la distribución $T \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ y la función indefinidamente diferenciable a soporte compacto $\alpha \in \mathcal{D}(\vec{E}_n)$. La regularizada $T * \alpha$ define una función indefinidamente diferenciable sobre \vec{E}_n cuyo valor en \vec{x} es

$$(T * \alpha)(\vec{x}) = T_{\vec{\xi}}(\alpha(\vec{x} - \vec{\xi})).$$

b) Sea la distribución $T \in \mathcal{D}'(E_n)$ y la función indefinidamente diferenciable de soporte compacto $\alpha \in \mathcal{D}(E_n)$. La regularizada $T * \alpha$ define una función indefinidamente diferenciable sobre E_n cuyo valor en x es

$$(T * \alpha)(x) = T_{\xi}(\alpha(x - \xi)).$$

c) Sea la distribución $T \in \mathcal{D}'(E_n)$ y la función indefinidamente diferenciable de soporte compacto $\alpha \in \mathcal{D}(\vec{E}_n)$. La regularizada $T * \alpha$ define una función indefinidamente diferenciable sobre E_n cuyo valor en x es

$$(T * \alpha)(x) = T_{\xi}(\alpha(x - \vec{\xi})).$$

17. Subespacio \mathcal{H} invariante por traslación y distribución H de tipo positivo asociada.

Recordemos la relación entre los subespacios de Hilbert \mathcal{H} de $\mathcal{D}'(E_n)$ con topología más fina que la inducida y su núcleo asociado. Podemos distinguir dos casos.

Caso general. $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'(E_n)$; $K_{x,\xi}$ núcleo asociado, definido en $E_n \times E_n$; $K \succ 0$ en el sentido de los núcleos, lo que significa que para $\forall \varphi \in \mathcal{D}(E_n)$ se tiene

$$K_{x,\xi}(\varphi(x) \bar{\varphi}(\xi)) \geq 0 .$$

Para obtener \mathcal{H} tomamos los elementos $K \cdot \varphi$ y ponemos

$$(K \cdot \varphi | K \cdot \psi)_{\mathcal{H}} = \bar{K}(\varphi \bar{\psi})$$

\mathcal{H} es la completación del conjunto de los K .

Caso de invariancia por traslación. Se supone elegida una medida de Lebesgue particular, elemento de volumen dx . Al subespacio \mathcal{H} le corresponde una distribución $H \in \mathcal{D}'(\bar{E}_n)$ de manera que

$$K_{x,\xi} = H \xrightarrow{x-\xi} ,$$

con $H \succ 0$ en el sentido de los grupos, lo que significa que para $\forall \theta \in \mathcal{D}(\bar{E}_n)$ se tiene

$$H(\theta * \bar{\theta}) \geq 0 .$$

¿Cuáles son los elementos correspondientes a $K \cdot \varphi$ en este caso? Vamos a demostrar que, en lugar de $K \cdot \varphi$ tendremos ahora $H * \varphi$, expresión que define una función indefinidamente diferenciable sobre E_n .

de acuerdo con 16.2 , puesto que $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(E_n)$.

Comencemos por elegir un origen en E_n , en cuyo caso estaremos sobre un espacio vectorial. El resultado será independiente del origen elegido.

Observemos que son dos cosas distintas el elegir un origen para hacer la demostración y el obtener una fórmula en la que el origen no interviene; de este recurso se hace uso a menudo. Por ejemplo, en un espacio vectorial se acostumbra elegir una base para hacer una demostración, obteniéndose un resultado que es independiente de la base elegida. En nuestro caso conviene elegir un origen en el espacio afín E_n con lo cual este espacio se convierte en vectorial, pero el resultado es independiente del origen.

Tenemos que ver entonces que

$$17.1 \quad H_{x-\xi} \cdot \varphi = H * \varphi .$$

Se tiene por definición de núcleo (la operación "punto" ha sido definida en 4.7) :

$$17.2 \quad (H_{x-\xi} \cdot \varphi)(\psi) = H_{x-\xi}(\psi(x) \varphi(\xi)) .$$

Pero por definición de $H_{x-\xi}$, distribución invariante por traslación (cfr.15.6), el primer miembro es:

$$\begin{aligned} 17.3 \quad (1_x \otimes H_{\vec{u}})(\psi(x) \varphi(x-\vec{u})) &= H_{\vec{u}}(1_x(\psi(x) \varphi(x-\vec{u}))) = \\ &= H_{\vec{u}}\left(\int \psi(x) \varphi(x-\vec{u}) dx\right) = H_{\vec{u}}\left(\int \psi(x) \check{\varphi}(\vec{u}-x) dx\right) = \\ &= H(\psi * \check{\varphi}) = (H * \varphi)(\psi) . \end{aligned}$$

Notemos que para pasar del tercero al cuarto miembro de esta

série de igualdades ha sido necesario elegir un origen en E_n , a fin de poder escribir la función simétrica $\check{\varphi}$ de la función φ . En cuanto al pasaje del quinto al sexto miembro, se justifica teniendo en cuenta la siguiente regla práctica.

En un producto escalar en el que los factores son convoluciones de varias distribuciones, con la condición de que uno de ellos sea una función indefinidamente diferenciable (para que el producto escalar tenga sentido)

$$17.4 \quad (A * B * C) \cdot (D * E * F * G) ,$$

se puede pasar de un factor al otro varias de las distribuciones con tal de escribir sus simétricas; es decir, 17.4 resulta igual a

$$(A * \check{D} * \check{F}) \cdot (\check{B} * \check{C} * E * G) .$$

En estas dos expresiones hemos indicado con un punto el producto escalar.

Volviendo ahora a 17.3 y teniendo en cuenta 17.2 obtenemos

$$17.5 \quad H_{x-\xi} \cdot \varphi = H * \varphi$$

Observemos por último que en la demostración 17.3 hemos utilizado un origen, pero que el resultado es independiente del origen.

El producto escalar de dos elementos $H * \varphi$ es ahora, en virtud de 15.5

$$17.6 \quad (H * \varphi | H * \psi)_{\%} = H(\varphi * \psi)$$

En esta fórmula se sobrentiende que se ha elegido un origen

en E_n , puesto que de otra manera no podría hablarse de la convolución $\varphi * \tilde{\psi}$, que no tiene sentido en un espacio afín.

Por otra parte podemos escribir

$$17.7 \quad \begin{aligned} \bar{H}(\varphi * \tilde{\psi}) &= (\delta * \bar{H}) \cdot (\varphi * \tilde{\psi}) = (\delta) \cdot (\check{H} * \varphi * \tilde{\psi}) = \\ &= (\delta) \cdot (\tilde{H} * \varphi * \tilde{\psi}) . \end{aligned}$$

donde se indica con un punto el producto escalar.

En efecto, hemos puesto $\bar{H} = \delta * \bar{H}$ y hemos tenido en cuenta la regla práctica antes enunciada para pasar \bar{H} de un factor a otro escribiendo su simétrica. $\check{H} = \tilde{H}$

Pero el último miembro de 17.7 es el valor en el origen de la función indefinidamente diferenciable $\tilde{H} * \varphi * \tilde{\psi}$.

Podemos introducir el concepto de traza de una función continua, con lo cual se tiene

$$17.8 \quad \begin{aligned} (\delta) \cdot (\tilde{H} * \varphi * \tilde{\psi}) &= \text{Tr}(\tilde{H} * \varphi * \tilde{\psi}) = \\ &= \text{Tr}(H * \varphi * \tilde{\psi}) , \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la simetría hermitica de H que nos da $\tilde{H} = \check{H}$ y suponiendo que hemos elegido un origen.

Se obtiene así finalmente

$$(H * \varphi | H * \psi)_{\mathcal{H}} = \text{Tr}(H * \varphi * \tilde{\psi}) ,$$

si se ha fijado un origen; y

$$(H * \varphi | H * \psi)_{\mathcal{H}} = (H * \varphi)(\bar{\psi}) = \overline{(H * \psi)}(\varphi) ,$$

si no se ha fijado un origen.

En resumen. Si \mathcal{H} es un espacio de Hilbert de distribuciones sobre E_n , invariante por traslación, se lo puede definir de manera única como sigue.

A \mathcal{H} se le asocia una distribución H sobre el espacio vectorial asociado \vec{E}_n , de tipo positivo en el sentido de las distribuciones sobre un grupo.

Para todo $\varphi \in \mathcal{D}(E_n)$, se consideran los elementos $H * \varphi$, convolución que tiene sentido pues H está definida sobre el espacio vectorial y φ sobre el espacio afín; $H * \varphi$ da una función sobre el espacio afín.

Como producto escalar de dos elementos $H * \varphi$, $H * \psi$ tomamos

$$(H * \varphi | H * \psi)_{\mathcal{H}} = (H * \varphi)(\overline{\psi}) = \overline{(H * \psi)}(\varphi),$$

en forma intrínseca (sin elección de origen) o bien

$$(H * \varphi | H * \psi)_{\mathcal{H}} = \mathcal{L}(H * \varphi * \tilde{\psi}),$$

con elección de origen y el correspondiente transporte de estructura de \vec{E}_n sobre E_n .

A partir de la norma definida por este producto escalar se toma la completación del conjunto de los $H * \varphi$, y se obtiene \mathcal{H} .

Tenemos así la descripción completa de cómo se obtiene el espacio de Hilbert a partir de una distribución de tipo positivo sobre \vec{E}_n : todo espacio de Hilbert invariante por traslación se puede así obtener de manera única.

Se presenta ahora la cuestión siguiente. Para determinar todos los espacios de Hilbert \mathcal{H} , invariantes por traslación, hay que

determinar las distribuciones de tipo positivo sobre \vec{E}_n .

Para ello será necesario utilizar el teorema de Bochner, que permite considerar las medidas temperadas de tipo positivo sobre el espacio dual, lo cual hace necesario la utilización de la transformada de Fourier sobre un espacio vectorial, que estudiamos a continuación.

18. La transformación de Fourier en un espacio vectorial.

Sea \vec{E}_n un espacio vectorial de dimensión n ; sea $f(x)$ una función definida sobre \vec{E}_n .

Tratemos de definir la transformada de Fourier de $f(x)$.

Se conoce la transformada de Fourier en R^n (1), pero aquí no se trata de la misma cosa dado que en general en \vec{E}_n no tendremos dada ninguna base.

La cuestión es por un lado más difícil y por otro más fácil, puesto que siendo la estructura del espacio menos rica, es posible ver mejor lo que pasa.

Ante todo, veamos que si se escribe

$$g(p) = \int_{\vec{E}_n} f(x) e^{-2i\pi \langle x, p \rangle} dx ,$$

esta expresión no tiene sentido pues no existe elemento de volumen dx . No hay, por lo tanto, definición de transformada de Fourier de una función $f(x)$ que dé por resultado otra función $g(p)$.

Si en lugar de $f(x)$ se tiene una medida $\mu(x)$ sobre E_n

(1) T.D. II § 2 .

su transformada de Fourier está definida y es una función $g(p)$:

$$g(p) = \int_{\vec{E}_n} e^{-2i\pi \langle x, p \rangle} d\mu(x) ,$$

donde $g(p)$ es una función definida sobre el espacio dual de \vec{E}_n , que indicaremos con \overleftarrow{E}_n ; $\langle x, p \rangle$ es el producto escalar del vector \vec{x} y el corrector \overleftarrow{p} . Para hacer notar esta circunstancia escribiremos

$$g(\overleftarrow{p}) = \int_{\vec{E}_n} e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle} d\mu(\vec{x}) .$$

Si se tienen dos bases duales en \vec{E}_n y \overleftarrow{E}_n se puede poner

$$\langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n .$$

Desde el punto de vista algebraico se puede decir que la transformada de Fourier de una cosa definida en el espacio vectorial dado es otra cosa definida en el dual.

En particular, la transformada de una medida en \vec{E}_n es una función en \overleftarrow{E}_n .

Desde el punto de vista de la teoría de las corrientes, la medida μ es una corriente de grado n y especie impar, y la función es una corriente de grado cero y especie par.

No será necesario, en lo que sigue, considerar las corrientes, pues elegiremos en \vec{E}_n una medida de Lebesgue invariante dx , que permitirá identificar las funciones con las distribuciones.

Por otra parte se sabe que si existe una medida de Lebesgue $d\vec{x}$ en \vec{E}_n , existe otra medida $d\overleftarrow{p}$ sobre el dual \overleftarrow{E}_n .

Recordemos, en efecto, que hay dualidad entre las álgebras exteriores de \vec{E}_n y \overleftarrow{E}_n ; si se consideran los elementos de volumen de grado n , la definición de $d\vec{x}$ corresponde a la elección de una

unidad particular entre los elementos de volumen de grado \underline{n} , que forman un espacio vectorial de dimensión uno en \vec{E}_n ; y la definición de \overleftarrow{dp} corresponde a la elección de una unidad particular entre los elementos de volumen en el dual \overleftarrow{E}_n ; y puesto que los espacios vectoriales de los elementos de grado \underline{n} en \vec{E}_n y \overleftarrow{E}_n están en dualidad y tienen la dimensión uno, resulta que la elección de una unidad en un espacio determina una unidad en el dual.

En virtud de esta elección habrá identificación entre las funciones y las medidas y se podrá hablar de distribuciones sobre \vec{E}_n y \overleftarrow{E}_n .

Se sabe, además, que la transformada de Fourier puede ser definida para distribuciones temperadas.

Una distribución sobre \vec{E}_n es temperada si con la elección de una base en \vec{E}_n se convierte en una distribución temperada en R^n .

Es necesario demostrar que en tal caso, la propiedad de ser temperada es independiente de la base elegida.

Por razones de brevedad no damos esta demostración aquí.

Pasemos ahora a la definición y propiedades de la transformación de Fourier de una distribución.

Sea: $\varphi \in \mathcal{J}(\vec{E}_n)$, donde $\mathcal{J}(\vec{E}_n)$ es el espacio de las funciones de decrecimiento rápido, con sus derivadas, sobre \vec{E}_n ; $T \in \mathcal{J}'(\vec{E}_n)$, donde $\mathcal{J}'(\vec{E}_n)$ es el espacio de las distribuciones temperadas sobre \vec{E}_n .

Pondremos, indicando con \mathcal{F} la transformada de Fourier:

$$18.1 \quad \mathcal{F} T(\varphi) = T(\mathcal{F} \varphi) .$$

En el primer miembro T es una distribución sobre el espacio vectorial, $\mathcal{F} T$ es una distribución sobre el espacio covectorial.

dual, y φ una función también sobre el covectorial; por lo tanto el primer miembro tiene sentido. En el segundo $\mathcal{F}\varphi$ es una función sobre el espacio vectorial, T una distribución también sobre el vectorial, y por tanto el segundo miembro tiene sentido.

La transformación recíproca la indicaremos con $\overline{\mathcal{F}}$, y se obtiene de \mathcal{F} , poniendo $e^{+2i\pi}$ en lugar de $e^{-2i\pi}$.

Se tiene

$$18.2 \quad \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} = \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} = I .$$

Fórmula de Parseval. Sean f, g funciones de L^2 con respecto a la medida de Lebesgue elegida. Sus transformadas de Fourier: F, G son funciones de L^2 y se tiene

$$18.3 \quad \int f \overline{g} \, d\vec{x} = \int F \overline{G} \, d\vec{p} .$$

Podemos también consignar las siguientes fórmulas

$$18.4 \quad \mathcal{F} \delta = 1 , \quad \mathcal{F} 1 = \delta ,$$

$$18.5 \quad \mathcal{F} \frac{\partial \delta}{\partial x_j} = 2i\pi p_j , \quad \mathcal{F}(-2i\pi x_j) = \frac{\partial \delta}{\partial p_j} .$$

Esta última fórmula tiene sentido sólo si se supone elegida una base en el espacio, pues la derivada parcial se puede definir solamente respecto de una base; para poder escribir p_j , consideramos la base dual en el espacio dual del espacio dado.

Supondremos conocidos los espacios $\mathcal{O}_M, \mathcal{O}'_C$ y el pasaje de la multiplicación a la convolución ⁽¹⁾. Recordemos que \mathcal{O}_M es el espacio de las funciones de crecimiento lento conjuntamente con sus deri-

(1) T.D. II, ch. 5 y 8.

vadas; \mathcal{O}'_C es el espacio de las distribuciones de decrecimiento rápido.

La transformada de Fourier transforma el espacio \mathcal{O}_M en \mathcal{O}'_C y recíprocamente.

Además, \mathcal{O}_M es el espacio de los multiplicadores de \mathcal{F}' y \mathcal{O}'_C el espacio de los convolutores; \mathcal{F} transforma la multiplicación en convolución y viceversa.

Todo esto es conocido sobre el espacio R^n ; pero se ve que se extiende al caso en que el espacio es \vec{E}_n .

Observación. En la Física se usa la transformada de Fourier con la exponencial

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle},$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida.

La razón de tal uso proviene de los axiomas de la Mecánica cuántica, en particular de la introducción del operador hermitico que define la velocidad. Es por ello que las fórmulas ligadas a \mathcal{F}' , aparecen allí con factores π y \hbar

La armonía puede restablecerse eligiendo las unidades de manera que la constante de Planck no reducida sea igual a uno, en cuyo caso $\hbar = \frac{1}{2\pi}$. En la exponencial tendríamos entonces: $e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle}$; las fórmulas en las que intervienen \mathcal{F} y $\overline{\mathcal{F}}$ coinciden así con las que hemos dado antes.

Como hemos dicho antes, utilizaremos el siguiente:

Teorema de Bochner (1). Para que una distribución $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$ sea $\gg 0$

(1) T.D. II, ch. VII, § 9, Théorème XVIII.

es necesario y suficiente que H sea temperada; es decir, $H \in \mathcal{S}'(\vec{E}_n)$, y que su transformada de Fourier sea una medida $\mu \geq 0$, temperada.

Este teorema nos permite lograr considerables simplificaciones, puesto que en lugar de la distribución H , podremos utilizar la medida μ que es un objeto más simple; esta medida está definida sobre el espacio \vec{E}_n .

19. Algunas propiedades del subespacio \mathcal{H} invariante por traslación.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$, y $H \in \mathcal{S}'$, se tiene entonces $H * \varphi \in \mathcal{H}$; además, $H * \varphi \in \mathcal{S}'$ y también $H * \varphi \in \mathcal{O}_M \subset \mathcal{S}'$.

En efecto. Por ser $H * \varphi$ la regularizada de una distribución temperada por una función de \mathcal{D} , será una función indefinidamente diferenciable de decrecimiento lento, así como todas sus derivadas, lo que equivale a decir que $H * \varphi$ es un elemento de \mathcal{O}_M y por consiguiente de \mathcal{S}' .

Tenemos así un subespacio particular de \mathcal{H} , invariante por traslación, cuya adherencia es precisamente \mathcal{H} , cuyos elementos son distribuciones temperadas.

Vamos a ver que todas las distribuciones de \mathcal{H} son temperadas. Es decir, no sólo los elementos $H * \varphi$ son temperados sino que también todos los elementos de \mathcal{H} (obtenido por completación de los $H * \varphi$) son temperados.

Además no sólo se verifica que $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'$ con topología más fina que la inducida por \mathcal{D}' , sino también $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$ con topología más fina que la inducida por \mathcal{S}' .

Antes de demostrar esto, examinemos la aplicación

$$19.1 \quad \varphi \longrightarrow H * \varphi \quad .$$

Sabemos que es una aplicación continua de \mathcal{D} en \mathcal{H} . Pero se ve fácilmente que es continua de \mathcal{D} en \mathcal{H} con la topología inducida por \mathcal{I} .

En otros términos. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ tiende a cero, no con la topología de \mathcal{D} sino con la topología de \mathcal{I} (lo cual es menos restrictivo), entonces $H * \varphi \longrightarrow 0$ en \mathcal{H} .

En efecto, si fijamos un origen, se tiene

$$19.2 \quad \|H * \varphi\| = (\overline{H}(\varphi * \tilde{\varphi}))^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Si $\varphi \longrightarrow 0$ en \mathcal{I} , $\tilde{\varphi}$ y $\varphi * \tilde{\varphi}$ convergerán también a cero y como H es temperada, se concluye que $H(\varphi * \tilde{\varphi}) \longrightarrow 0$.

Por lo tanto el carácter temperado de H implica que si $\varphi \longrightarrow 0$ en \mathcal{D} con la topología inducida por \mathcal{I} , también será $H * \varphi \longrightarrow 0$ en \mathcal{H} .

Entonces la aplicación 19.1 se puede prolongar por continuidad, obteniéndose una aplicación lineal y continua de \mathcal{I} en \mathcal{H} , puesto que \mathcal{D} es denso en \mathcal{I} .

De la misma manera la aplicación 19.1 es continua de \mathcal{D} en \mathcal{D}' con la topología inducida por \mathcal{I} ; se puede también prolongar y esta prolongación debe ser la misma que la anterior; pero esta última prolongación es la convolución, ya conocida como aplicación continua de \mathcal{I} en \mathcal{D}' . Obtenemos pues el siguiente diagrama

$$\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}' \quad .$$

Hemos así demostrado que no sólo para $\varphi \in \mathcal{D}$ se puede considerar este elemento de \mathcal{H} , sino que también para $\varphi \in \mathcal{S}$, el elemento $H * \varphi$ pertenece al espacio de Hilbert y la aplicación $\varphi \rightarrow H * \varphi$ es una aplicación continua de \mathcal{S} en el espacio de Hilbert.

En particular, si φ recorre un conjunto acotado de \mathcal{S} , $H * \varphi$ recorre un conjunto acotado de \mathcal{H} .

Podemos ahora demostrar la afirmación precedente a saber:
 \mathcal{H} está contenido en \mathcal{S}' , con topología más fina que la inducida.

Sea $T \in \mathcal{H}$. Se tiene, en virtud de 10.2 y 19.2

$$19.3 \quad |\bar{T}(\varphi)| \leq \|T\|_{\mathcal{H}} \cdot \|H * \varphi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ tiende a cero en \mathcal{S} , la expresión 19.3 converge a cero. Entonces: $\bar{T}(\varphi) \rightarrow 0$ y por tanto, si $\varphi \in \mathcal{D}$ converge a cero con la topología inducida por \mathcal{S} , resulta $\bar{T}(\varphi) \rightarrow 0$, lo que prueba que \bar{T} es temperada y por consiguiente T es temperada.

En conclusión: cada distribución de \mathcal{H} es temperada y la fórmula 19.3 es verdadera no sólo para $\varphi \in \mathcal{D}$, sino también para $\varphi \in \mathcal{S}$, por continuidad.

Comprobemos ahora que la topología de \mathcal{H} es más fina que la inducida. Ello equivale a mostrar que si $T \rightarrow 0$ en $\mathcal{H} \implies T \rightarrow 0$ en \mathcal{S}' ; o lo que es equivalente: si φ queda acotada en \mathcal{S} , $\bar{T}(\varphi) \rightarrow 0$ uniformemente.

Pero observemos que si φ queda acotada en \mathcal{S} , la expresión $\|H * \varphi\|_{\mathcal{H}}^{\frac{1}{2}}$ queda acotada, y si $T \rightarrow 0$ en \mathcal{H} , $\|T\|_{\mathcal{H}}$ converge a cero. Entonces $\bar{T}(\varphi) \rightarrow 0$ uniformemente, si $T \rightarrow 0$ en \mathcal{H} y si φ queda acotada en \mathcal{S} ; lo cual significa que si $T \rightarrow 0$ en \mathcal{H} , $T \rightarrow 0$ en \mathcal{S}' , y por tanto la topología es más fina que la inducida.

Es notable observar que hemos comenzado con un subespacio vectorial de \mathcal{D}' con topología más fina que la inducida, y que el sólo hecho de que este subespacio sea invariante por traslación con su estructura de espacio de Hilbert, implica que está contenido en \mathcal{S}' con topología más fina que la inducida.

20. El espacio $\mathcal{F}\mathcal{H}$, transformado de Fourier de \mathcal{H} .

Ahora, a partir de la invariancia por traslación el problema es más sencillo y es natural hacer uso de la transformación de Fourier.

Veamos qué significado tiene $\mathcal{F}\mathcal{H}$, transformado de Fourier del subespacio \mathcal{H} .

Desde luego, si no tenemos un origen en E_n , $\mathcal{F}\mathcal{H}$ no tiene sentido. Elegiremos pues un origen en E_n , de manera que E_n se convierta en un espacio vectorial.

Consideremos la transformada de Fourier de cada distribución elemento de \mathcal{H} , formando así un nuevo espacio $\mathcal{F}\mathcal{H}$, sobre el cual transportaremos por medio de \mathcal{F} la topología de \mathcal{H} .

Examinemos el espacio $\mathcal{F}\mathcal{H}$ más detenidamente.

Sobre \overleftarrow{E}_n existe una medida $\mu \geq 0$, temperada; nos proponemos mostrar que el espacio $\mathcal{F}\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert construido a partir de la medida $\mu \geq 0$. Dividiremos la cuestión en varias partes.

a) El espacio de Hilbert L^2_μ asociado a $\mu \geq 0$.

Un elemento de L^2_μ no es una función f , sino una clase de funciones equivalentes f^* ; dos funciones de una clase son iguales, en

casi todos los puntos, respecto a μ . Es decir

$$f^* \in L^2_\mu ; f^* \text{ es una clase.}$$

$$g, h \in f^* , \text{ si } g = h, \mu\text{-p.p. .}$$

Adelantemos que en la Física la medida μ estará concentrada sobre un hiperboloide; en tal caso la expresión μ -p.p. tiene una significación especial dado que en todo el resto del espacio la medida es nula.

En general, μ -p.p. tiene en cuenta solamente lo que pasa en el soporte de la medida μ .

El espacio L^2_μ es pues, un espacio de clases de funciones; y una clase de funciones pertenece a L^2_μ si todas las funciones de esa clase son de cuadrado sumable respecto de μ . En el espacio L^2_μ introducimos el producto escalar

$$20.1 \quad (f^* | g^*)_{L^2_\mu} = \int f \bar{g} d\mu ,$$

siendo f y g dos funciones cualesquiera de las clases f^* y g^* respectivamente.

Este espacio de Hilbert L^2_μ no puede ser $\mathcal{F}\mathcal{H}$, pues un elemento de este último es una distribución sobre E_n y un elemento del primero es una clase de funciones respecto de μ .

Para establecer una relación entre ambos introduciremos otro espacio de Hilbert.

b) El espacio de Hilbert Λ^2_μ .

Un elemento de Λ^2_μ será una distribución T que tenga la forma $T = f \cdot \mu$, siendo $f \in f^*$ y $f^* \in L^2_\mu$.

Para cada f de la clase f^* , el producto $f \cdot \mu$ tiene sentido como distribución poniendo

$$20.2 \quad f \mu(\varphi) = \int f \varphi \, d\mu .$$

Es la definición clásica. Si $\mu \geq 0$ y f es localmente sumable respecto de μ , se puede definir una nueva medida $f \mu$, es decir, una distribución.

Observemos que esta distribución no depende de la elección de f dentro de su clase f^* , sino solamente de dicha clase.

En efecto, si dos funciones son μ -p.p. iguales, la medida $f \mu$ es la misma; y, recíprocamente, para que $f \mu$ y $g \mu$ sean las mismas medidas, es necesario y suficiente que f y g sean iguales μ -p.p.

Consideremos pues el espacio de las distribuciones o medidas del tipo $f \mu$, munido del producto escalar

$$20.3 \quad (f \mu | g \mu)_{\Lambda_{\mu}^2} = \int f \bar{g} \, d\mu ;$$

el cual tiene sentido, pues f y g pertenecen a L_{μ}^2 ; y es además independiente de la elección de f y g en sus clases respectivas f^* y g^* .

Este espacio Λ_{μ}^2 es canónicamente isomorfo al espacio L_{μ}^2 . Hay una correspondencia biunívoca entre una clase de funciones f^* elemento de L_{μ}^2 , y una distribución bien determinada del tipo $f \mu$; todos los productos de μ por las funciones que pertenecen a una misma clase dan la misma $f \mu$; y, recíprocamente, dos funciones que dan la misma distribución al multiplicarlas por μ pertenecen a la misma clase de L_{μ}^2 . Es decir, hay un isomorfismo completo entre Λ_{μ}^2 y L_{μ}^2 lo que prueba que Λ_{μ}^2 es también un espacio de Hilbert desde el mo-

mento en que L^2_μ lo es.

Por otra parte el espacio Λ^2_μ es más conveniente que el L^2_μ pues el primero es un espacio de medidas; y nó de clases, como lo es el segundo.

Demostremos ahora que: $\Lambda^2_\mu \subset \mathcal{D}'(\mathbb{E}_n)$ y también $\Lambda^2_\mu \subset \mathcal{S}'(\mathbb{E}_n)$ con topología más fina que la inducida.

Hay que mostrar que: $f \mu \in \mathcal{S}'$.

Consideremos la relación

$$20.4 \quad f \mu(\varphi) = \int \varphi f \, d\mu,$$

y veamos que se puede extender para $\varphi \in \mathcal{S}$ como forma lineal continua.

En efecto. Si $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene la mayoración

$$20.5 \quad \left| \int \varphi f \, d\mu \right| \leq \left(\int |\varphi|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |f|^2 \, d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}$, y μ es temperada, entonces φ es de cuadrado sumable respecto de μ ; el primer factor del segundo miembro está acotado, y el segundo factor también lo está por ser $f \in L^2_\mu$. Por lo tanto el primer miembro está acotado; es decir, φf es sumable y la integral tiene sentido.

Además, si $\varphi \rightarrow 0$ en \mathcal{S} , el segundo miembro de 20.4 converge a cero, lo que prueba que $f \mu$ es temperada.

Sería fácil mostrar también que la topología es más fina que la inducida.

c) Veamos ahora que Λ^2_μ es exactamente $\mathcal{F}\mathcal{H}$.

Recordemos cómo se construye \mathcal{H} en este caso. Se toman las funciones $H * \varphi$ con $\varphi \in \mathcal{S}$, y se introduce el producto escalar:

$$20.6 \quad (H * \varphi \mid H * \psi) = \text{Tr}(H * \varphi * \bar{\psi}) .$$

No todos los elementos de \mathcal{H} son de la forma $H * \varphi$, pues hay que tomar la completación de los $H * \varphi$ para obtener \mathcal{H} .

Si $\varphi \in \mathcal{S}$, $H * \varphi \in \mathcal{H}$ y el producto escalar tiene la forma 20.6; el espacio de los $H * \varphi$ con este producto escalar es denso en el espacio de Hilbert \mathcal{H} .

Era ya denso si $\varphi \in \mathcal{D}$. Tenemos así un subespacio denso con la topología inducida por \mathcal{H} ; \mathcal{H} se puede caracterizar pues, de la manera siguiente: es el único espacio de Hilbert contenido en \mathcal{S}' con topología más fina que la inducida y tal que sobre el subespacio anterior induzca la norma dada por 20.6 de manera que este subespacio sea denso.

Decimos que está caracterizado pues \mathcal{H} es la completación como ya lo hemos visto.

Efectuemos ahora la transformación de Fourier. Podremos decir que $\mathcal{F}\mathcal{H}$ es el único subespacio de Hilbert con topología más fina que la de \mathcal{S}' , que contiene los elementos $\phi \mu$, siendo $\phi \in \mathcal{S}$, con la norma

$$20.7 \quad (\phi \mu \mid \psi \mu)_{\mathcal{F}\mathcal{H}} = \phi \bar{\psi} \mu(1) ,$$

donde: $\phi = \mathcal{F}\varphi$; $\psi = \mathcal{F}\psi$; $\mu = \mathcal{F}H$.

El segundo miembro proviene del hecho de que hay que tomar la traza, que se calcula por la transformada de Fourier sobre la función 1.

Pero como μ es temperada y ϕ y ψ son funciones de \mathcal{S} , $\phi \psi \mu$ es una medida rápidamente decreciente; el valor de esta medida sobre 1 será pues: $\int \phi \bar{\psi} d\mu$.

¿Qué es exactamente $\mathcal{F}\mathcal{H}$?

Es el único espacio de Hilbert contenido en \mathcal{J}' que contiene como subespacio denso el espacio de los $\phi\mu$ con $\phi \in \mathcal{J}$, munido de la norma dada por 20.7 .

Pero justamente el espacio Λ_{μ}^2 tiene estas propiedades. En efecto, es un espacio de Hilbert contenido en \mathcal{J}' , que contiene el espacio de los $\phi\mu$, con μ temperada, con la norma dada por 20.7; y este último es denso en Λ_{μ}^2 , pues es sabido que en el espacio de Hilbert las funciones continuas de soporte compacto son densas, y por tanto es denso en Λ_{μ}^2 el espacio de las $\phi\mu$ siendo las ϕ funciones continuas de soporte compacto.

Pero cada función continua de soporte compacto es también límite, en el sentido de este espacio o en el sentido de \mathcal{D} , de la convergencia uniforme, etc., de funciones indefinidamente diferenciables de soporte compacto, por regularización.

Por lo tanto, el espacio de los $\phi\mu$, con $\phi \in \mathcal{D}$ es denso y a fortiori, es denso si $\phi \in \mathcal{J}$.

En conclusión: $\mathcal{F}\mathcal{H}$, único espacio de Hilbert que contiene el espacio de los $\phi\mu$ como subespacio denso, es exactamente el espacio Λ_{μ}^2 .

En resumen. Hemos determinado todos los subespacios \mathcal{H} que tienen la propiedad de ser invariantes por traslación.

Para determinar uno de ellos hay que elegir una medida $\mu \geq 0$, temperada sobre \overline{E}_n ; y hay que formar el espacio de Hilbert Λ_{μ}^2 correspondiente a μ , cuyos elementos son todas las medidas o distribuciones de la forma $\phi\mu$ donde ϕ es una función de la clase $\phi \in \mathcal{L}_{\mu}^2$, munido del producto escalar:

$$(\phi \mu | \psi \mu)_{\mathcal{F}\mathcal{H}} = \int \phi \bar{\psi} d\mu .$$

Mediante la transformada de Fourier obtenemos un espacio de Hilbert sobre \vec{E}_n . Habiendo elegido un origen 0 en E_n se identifica \vec{E}_n con E_n y por transporte de estructura obtenemos un espacio de Hilbert sobre E_n .

21. El grupo afín.

Estudiaremos ahora un grupo más amplio que el grupo de las traslaciones.

Sea E_n el espacio afín, y G un grupo que contiene al grupo de las traslaciones (por ejemplo, el grupo de Lorentz inhomogéneo).

G será un subgrupo del grupo afín.

Antes de definir el grupo afín, comencemos por definir un operador afín sobre el espacio afín E_n .

Un operador afín es un operador σ sobre E_n que conserva la estructura afín.

Ello significa que un operador afín es un operador σ sobre E_n tal que existe otro operador $\vec{\sigma}$ (operador "flecha") sobre el espacio vectorial asociado \vec{E}_n que goza de las dos propiedades siguientes:

a) $\vec{\sigma}$ es un operador lineal de \vec{E}_n (que conserva la estructura vectorial) ;

b) Existe una relación entre σ y $\vec{\sigma}$ dada por

$$21.1 \quad \vec{\sigma}(b) - \vec{\sigma}(a) = \vec{\sigma}(\vec{b} - \vec{a}) .$$

Es decir, la diferencia entre los σ -transformados de dos puntos, diferencia que es un vector, es el $\vec{\sigma}$ -transformado de la diferencia de los dos puntos.

El operador $\vec{\sigma}$ es único, en virtud de 21.1.

También se puede definir un operador afín de un espacio afín en otro, con la misma definición anterior.

Un operador afín puede ser o no inversible; lo que entendemos por grupo afín es el grupo de los operadores afines inversibles.

Se ve inmediatamente que si un operador afín σ es inversible, su inverso es también un operador afín de tal manera que el inverso de σ tiene como operador "flecha" el inverso de $\vec{\sigma}$.

Además, para que un operador afín σ sea inversible es necesario y suficiente que $\vec{\sigma}$ sea inversible, o bien que el determinante de $\vec{\sigma}$ sea diferente de cero.

Entre los operadores afines existen ciertos operadores notables inversibles, que son las traslaciones.

Si $\vec{a} \in E_n$ podemos considerar la traslación $\tau_{\vec{a}}$, que es un operador afín; y el operador "flecha" asociado a él es la identidad, pues si τ es una traslación, se verifica que

$$\overrightarrow{\tau(b) - \tau(a)} = \overrightarrow{b - a} ;$$

y por lo tanto el operador "flecha" asociado es la identidad en virtud de 21.1.

Recíprocamente: para que un operador afín σ sea una traslación es necesario y suficiente que el operador "flecha" asociado sea el operador idéntico.

se verifica que

$$\overrightarrow{\sigma}(b) - \overrightarrow{\sigma}(a) = \overrightarrow{b - a} ,$$

o bien $\overrightarrow{\sigma}(b) - b = \overrightarrow{\sigma}(a) - a ;$

lo cual muestra que el operador es una traslación.

En otros términos: las traslaciones son los operadores afines asociados a la identidad en el espacio vectorial asociado.

El conjunto de las traslaciones es un subgrupo del grupo afín.

Se ve inmediatamente que si σ y τ son dos operadores afines, el compuesto $\sigma \circ \tau$ es un operador afín y el operador "flecha" asociado es el compuesto de los correspondientes operadores "flecha" de los dados, es decir

$$21.2 \quad \overrightarrow{\sigma \circ \tau} = \overrightarrow{\sigma} \circ \overrightarrow{\tau}$$

También se ve que el grupo de las traslaciones es un subgrupo invariante (o distinguido, o normal), del grupo afín, lo cual significa que si $\tau_{\vec{a}}$ es una traslación y σ un operador afín cualquiera, el operador $\sigma \circ \tau_{\vec{a}} \circ \sigma^{-1}$ es una traslación.

En efecto, el operador "flecha" asociado se obtiene, en virtud de 21.2, poniendo flechas sobre cada uno de los tres factores.

Pero $\overrightarrow{\tau}_{\vec{a}} = 1$; obtenemos pues $\overrightarrow{\sigma} \circ \overrightarrow{\sigma}^{-1}$ o sea la identidad, que corresponde en este caso a la traslación: $\tau_{\overrightarrow{\sigma}(\vec{a})}$.

Observación. Lo que se entiende por grupo de Lorentz homogéneo es el grupo de Lorentz sobre el espacio vectorial.

El grupo de Lorentz inhomogéneo es el grupo de todos los operadores afines cuyo operador "flecha" asociado pertenece al grupo de Lo-

rentz homogéneo.

Descomposición del grupo afín. Si elegimos un origen O en E_n , este se puede identificar con el espacio vectorial \vec{E}_n . Entonces si $\vec{\sigma}$ es un operador lineal sobre \vec{E}_n , queda definido un operador afín sobre E_n , que llamamos $(\vec{\sigma})_O(x)$, verificándose

$$21.3 \quad (\vec{\sigma})_O(x) = O + \vec{\sigma}(\vec{x} - \vec{O}) .$$

Este operador afín depende de O .

Ahora bien; elegido O , todo operador afín σ se puede escribir de manera única como el compuesto de una traslación y un operador asociado a través de O a un operador lineal, de acuerdo con 21.3, es decir

$$21.4 \quad \sigma = \tau_{\vec{a}} \circ (\vec{\sigma})_O .$$

El segundo factor es el operador asociado a $\vec{\sigma}$ por la relación 21.3, y el vector \vec{a} es igual $\vec{\sigma}(O) - O$.

Esto es evidente, pues el operador σ^{-1} y el operador $(\vec{\sigma})_O$ tienen el mismo operador "flecha" asociado $\vec{\sigma}$, lo cual significa que σ se obtiene por la composición de $(\vec{\sigma})_O$ y una transformación cuyo operador "flecha" asociado es la identidad, es decir, una traslación.

Podemos escribir por lo tanto

$$\tau \circ (\vec{\sigma})_O .$$

Para determinar la traslación hay que encontrar el transformado de O . Pero el transformado de O por $(\vec{\sigma})_O$ es O (en virtud de 21.3) y por la traslación es $O + \vec{a}$; el resultado debe ser $\sigma(O)$, con lo cual se obtiene 21.4.

Esta descomposición es muy usada en Física.

En efecto, es frecuente descomponer en Física el grupo de Lorentz inhomogéneo diciendo que cada transformación de Lorentz inhomogénea se compone de una transformación de Lorentz homogénea y una traslación.

Pero conviene advertir que esto es imposible sin la previa elección de un origen O en E_n ; con lo cual cada operador afín, resulta ser el compuesto de un operador canónicamente definido con el subíndice O (de acuerdo con 21.3) a partir de un operador homogéneo, que es el operador lineal sobre el espacio vectorial, y una traslación.

22. Clasificación de los subespacios \mathcal{H} que son G -invariantes.

Consideremos el espacio afín E_n y un subgrupo G del grupo afín que contenga al subgrupo de las traslaciones, por ejemplo, el grupo inhomogéneo de Lorentz, y que conserve los volúmenes.

Hacemos la hipótesis de que G contiene el subgrupo de las traslaciones. Tal hipótesis puede parecer innecesaria, pero notemos que si tal hipótesis se cumple, el núcleo K deberá ser invariante por traslación, y que en ese caso conocemos ya su forma. Es una razón de simplicidad.

Es necesario suponer también que G conserva las medidas de Lebesgue, pues de otra manera el resultado sería más complicado; por otra parte, el hecho de que las traslaciones conservan las medidas, no implica que un grupo más amplio también las conserve.

Nos proponemos pues, el siguiente problema.

Buscar todos los subespacios $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'(E_n)$ con topología

más fina que la inducida y G-invariantes.

Ello es equivalente a buscar los núcleos $K_{x,\xi} \gg 0$ y G-invariantes.

Pero K es ya invariante por traslación y por lo tanto sabemos que tiene la forma $H \xrightarrow{x-\xi}$ si se supone elegida de una vez por todas una medida de Lebesgue. Además $H \in \mathcal{D}'(E_n)$ y $H \gg 0$.

¿Cómo se expresa ahora que K es invariante por un grupo G y no sólo por las traslaciones?

Sabemos que K, por el hecho de ser invariante por traslación, tiene la forma $H \xrightarrow{x-\xi}$, donde H es una distribución de tipo positivo sobre el espacio vectorial asociado.

Podemos pues preguntar: ¿Qué propiedades adicionales debe tener H para que el núcleo K sea invariante por G?

Evidentemente debe tratarse de una condición en la que las traslaciones \mathcal{T} no intervengan y en la que intervenga únicamente el cociente G/\mathcal{T} del grupo G por el subgrupo \mathcal{T} de las traslaciones.

Pero este cociente es exactamente el grupo de los operadores asociados a $\overrightarrow{\mathcal{T}}$, que llamaremos $\overrightarrow{\mathcal{O}}$. En efecto, G contiene a \mathcal{T} , y todos los operadores de G que son de la misma clase respecto de \mathcal{T} tienen exactamente el mismo operador "flecha" asociado.

En otros términos, \overrightarrow{G} es isomorfo a G/\mathcal{T} .

Ahora bien, \overrightarrow{G} opera sobre $\overrightarrow{E_n}$; en consecuencia es muy probable que H sea una distribución de tipo positivo \overrightarrow{G} -invariante.

Demostremos antes una relación más general. Si H es una distribución sobre $\overrightarrow{E_n}$, se puede definir $H \xrightarrow{x-\xi}$, que es un núcleo.

Sea $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ un operador afín. ¿Qué significará $\overrightarrow{\mathcal{O}}(H \xrightarrow{x-\xi})$, transformado del núcleo por medio de $\overrightarrow{\mathcal{O}}$? Vamos a ver que se cumple la relación

$$22.1 \quad \sigma (H_{\vec{x}-\vec{\xi}}) = (\vec{\sigma} H)_{\vec{x}-\vec{\xi}} ;$$

en la cual $\vec{\sigma} H$ es la transformada de la distribución H por el operador "flecha" asociado a σ , aplicando después $\vec{x}-\vec{\xi}$, que es la operación mediante la cual a la distribución H se le hace corresponder un núcleo.

Para demostrar 22.1 calculemos el valor del primer miembro aplicado a la función $\varphi(x, \xi)$.

Se tiene

$$\begin{aligned} 22.2 \quad \sigma (H_{\vec{x}-\vec{\xi}})(\varphi(x, \xi)) &= H_{\vec{x}-\vec{\xi}}(\vec{\sigma}^{-1}(\varphi(x, \xi))) = \\ &= H_{\vec{x}-\vec{\xi}}(\varphi(\sigma x, \sigma \xi)) = (1_x \otimes H_u) \varphi(\sigma x, \sigma(x-\vec{u})) = \\ &= 1_x \otimes H_u(\varphi(\sigma x, \sigma x - \vec{\sigma} \vec{u})) , \end{aligned}$$

donde hemos puesto $\sigma(x-\vec{u}) = \sigma x - \vec{\sigma} \vec{u}$ por definición de operador "flecha" asociado al operador σ . (21.1) .

Tenemos en el último miembro una distribución en x, \vec{u} aplicada a una función de $\sigma x, \vec{\sigma} \vec{u}$. Según la definición de transformada de una distribución se tendrá el valor sobre la función de x, \vec{u} de la transformada de la distribución por σ respecto de x , y por $\vec{\sigma}$ respecto a \vec{u} . Es decir,

$$\begin{aligned} 22.3 \quad (\sigma(1_x) \otimes \vec{\sigma} H_u) \varphi(x, x-\vec{u}) &= \\ &= (1_x \otimes \vec{\sigma} H_u)(\varphi(x, x-\vec{u})) , \end{aligned}$$

puesto que hemos supuesto que σ conserva los volúmenes. (Será $\sigma 1 = 1$ interpretando a 1 como función; como distribución 1 es la medida de Lebesgue y $\sigma 1 = 1$ como distribución significa entonces que σ con-

serva los volúmenes, es decir, conserva la asociación entre función y distribución).

El último miembro de 22.3 es igual a

$$(\vec{\sigma} H)_{\vec{x}-\vec{\xi}}(\varphi(x, \xi)) ,$$

y comparando con el primer miembro de 22.2 se obtiene 22.1 .

El resultado es válido para todo operador afín $\vec{\sigma}$ que conserve los volúmenes.

Ello es evidente por transporte de estructura, puesto que la correspondencia entre H y $H_{\vec{x}-\vec{\xi}}$ está definida si está definido el volumen.

Por lo tanto, para todo operador que conserve el volumen será cierto que esta correspondencia se conservará.

En conclusión. Decir que el núcleo $H_{\vec{x}-\vec{\xi}}$ es invariante por los $\vec{\sigma}$ de \vec{G} es equivalente a decir que H , como distribución sobre \vec{E}_n , es invariante por los $\vec{\sigma}$ de \vec{G} .

Vamos a buscar, pues, todas las distribuciones $H \gg 0$ sobre \vec{E}_n , invariantes con respecto a un subgrupo \vec{G} del grupo lineal que conserve los volúmenes.

Este problema es equivalente al siguiente.

Sea \vec{E}_n el espacio vectorial y \vec{G} un subgrupo del grupo lineal que conserva los volúmenes; supongamos que hemos fijado de una vez por todas una medida de Lebesgue dx . .

Se pide encontrar en estas condiciones todas las distribuciones $H \in \mathcal{D}'(\vec{E}_n)$; $H \gg 0$, que son \vec{G} -invariantes . .

Para resolverlo vamos a aplicar la transformación de Fourier. Sabemos que $\mathcal{F} H = \mu$ con $\mu \gg 0$ temperada, y recíprocamente.

Pero H es invariante por G ; ¿Qué propiedades de invariancia tendrá μ ?

Por lo pronto μ está definida sobre el dual de \vec{E}_n .

Habrá que pasar de un grupo sobre un espacio a un grupo sobre el dual del espacio dado. Se trata de un transporte de estructura. De ello vamos a ocuparnos en el parágrafo siguiente.

23. Transporte de estructura y transformación de Fourier.

Sea $\vec{\sigma}$ un isomorfismo de \vec{E}_n en sí mismo o en otro espacio; $\vec{\sigma}$ transporta todo lo que se construye en \vec{E}_n y en particular transporta su dual \overleftarrow{E}_n . Es decir, cada $\vec{\sigma}$ define, por transporte de estructura, un isomorfismo $\overleftarrow{\sigma}$ del dual \overleftarrow{E}_n .

Para definir $\overleftarrow{\sigma}$ tengamos en cuenta dicho transporte de estructura, lo cual significa que si $\vec{x} \in \vec{E}_n$; $\overleftarrow{p} \in \overleftarrow{E}_n$ se tiene

$$23.1 \quad \langle \overleftarrow{\sigma} \vec{x}, \overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p} \rangle = \langle \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle .$$

En rigor, deberíamos anteponer $\overleftarrow{\sigma}$ al segundo miembro, pues ya hemos dicho que el $\overleftarrow{\sigma}$ de un miembro es el miembro construido con todos los $\overleftarrow{\sigma}$; pero debe recordarse que $\overleftarrow{\sigma}$ no opera sobre los escalares.

La relación 23.1 no es exactamente una definición, pues para conocer $\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p}$ hay que conocerlo no para $\overleftarrow{\sigma} \vec{x}$, sino para los elementos \vec{x} .

La definición sería:

$$23.2 \quad \langle \vec{x}, \overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p} \rangle = \langle \overleftarrow{\sigma}^{-1} \vec{x}, \overleftarrow{p} \rangle ,$$

$\overleftarrow{\sigma}$ se denomina el contragradiente de $\overrightarrow{\sigma}$, pues el segundo miembro de 23.2 se puede poner de la siguiente manera:

$$23.3 \quad \langle \overrightarrow{x}, {}^t\overleftarrow{\sigma}^{-1} \overleftarrow{p} \rangle,$$

por definición de transposición. Comparando 23.2 y 23.3 resulta

$$\overleftarrow{\sigma} = {}^t\overleftarrow{\sigma}^{-1};$$

es decir, $\overleftarrow{\sigma}$, contragradiente de $\overrightarrow{\sigma}$, es el transpuesto del inverso, o bien el inverso del transpuesto.

Hay pues, una correspondencia entre un operador $\overrightarrow{\sigma}$ sobre \overrightarrow{E}_n y un operador sobre el dual \overleftarrow{E}_n que es el contragradiente de $\overrightarrow{\sigma}$.

Por otra parte

$$23.4 \quad \overleftarrow{\sigma \circ \tau} = \overleftarrow{\sigma} \circ \overleftarrow{\tau}.$$

Hay en 23.4 conservación del orden, pues por tratarse de un transporte de estructura, se conserva el orden del producto de dos operadores.

Hay además cambio del orden por el inverso y el transpuesto y por consiguiente hay conservación del orden por el inverso del transpuesto, con lo cual resulta de nuevo, conservación de orden en 23.4.

Si volvemos a la pregunta formulada al fin del párrafo 22, podemos afirmar ahora que: decir que una distribución temperada es invariante por un operador $\overrightarrow{\sigma}$ es equivalente a decir que su transformada de Fourier es invariante por el operador "coflecha".

Tenemos ahora \overrightarrow{E}_n y \overleftarrow{E}_n y los espacios $\mathcal{S}'(\overrightarrow{E}_n)$ y $\mathcal{S}'(\overleftarrow{E}_n)$. Entre estos dos se construye canónicamente la transformada de Fourier \mathcal{F} a partir no más que de \overrightarrow{E}_n y de una medida de Lebesgue.

Entonces si se tiene un operador $\vec{\sigma}$ de \vec{E}_n sobre otro espacio, que puede ser el mismo, se transporta todo y en particular la transformación de Fourier \mathcal{F} construida sobre \vec{E}_n . Es decir: si $T \in \mathcal{J}'(\vec{E}_n)$; $\mathcal{F}T \in \mathcal{J}'(\vec{E}_n)$; si se calcula $\vec{\sigma}$ de $\mathcal{F}T$ el resultado debe ser el mismo que si se calcula $\vec{\sigma}$ de T y después \mathcal{F} de esta última.

Tendremos así

$$23.5 \quad \vec{\sigma} \mathcal{F} T = \mathcal{F} (\vec{\sigma} T) ,$$

que puede interpretarse diciendo que hay conmutación entre \mathcal{F} y el isomorfismo.

En otros términos

$$\vec{\sigma} \mathcal{F} = \mathcal{F} \vec{\sigma} ,$$

o bien

$$\vec{\sigma} \mathcal{F} \vec{\sigma}^{-1} = \mathcal{F} .$$

Observación. Hemos supuesto que $\vec{\sigma}$ conserva los volúmenes. Hay que ver que $\vec{\sigma}$ conserva los volúmenes del dual, como es conocido en la teoría de los operadores.

Recordemos que si un operador conserva los volúmenes, su determinante es igual a uno.

Además, el determinante del contragradiante es igual al determinante inverso del determinante del operador dado, puesto que el operador transpuesto tiene el mismo determinante que el operador dado y el operador inverso el determinante inverso, y por tanto también es igual a uno; de lo cual se deduce que el operador contragradiente conserva los volúmenes.

Demostremos ahora 23.5 .

Se podría demostrar partiendo del siguiente principio general: si una operación está definida canónicamente a partir de una estructura, debe conservarse por todo transporte de estructura. Pero, ¿qué significa que la operación está definida canónicamente ?

Significa que cada paso de la demostración es invariante por los automorfismos del espacio. El que más tarde debamos hacer demostraciones de invariancia proviene del hecho de que nos acordamos de la invariancia sólo al final.

Esto nos dice que en realidad sería necesario verificar la invariancia, o sea el carácter intrínseco, cada vez que definimos algo.

Por ejemplo, al definir la transformada de Fourier \mathcal{F} no hemos analizado si esa definición es intrínseca, y esto nos trae complicaciones más tarde.

Volvamos a la demostración de 23.5 . Se tiene

$$23.6 \quad (\overleftarrow{\sigma} \mathcal{F} T_x)(\varphi_p) = (\mathcal{F} T)(\varphi(\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p})) ,$$

en virtud de la definición del valor de $\overleftarrow{\sigma}$ de una distribución sobre una función. Pero por definición de \mathcal{F} , el segundo miembro de 23.6 es igual a

$$23.7 \quad T(\mathcal{F} \varphi(\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p})) = T\left(\int e^{-2i\pi \langle \overleftarrow{x}, \overleftarrow{p} \rangle} \varphi(\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p}) d\overleftarrow{p} \right) .$$

Hagamos un cambio de variables poniendo:

$$\overleftarrow{\sigma} \overleftarrow{p} = \overleftarrow{q}$$

Como $\overleftarrow{\sigma}$ conserva los volúmenes, el Jacobiano es igual a uno.

El segundo miembro de 23.7 vale por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 23.8 \quad & \mathbb{T} \left(\int e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \overleftarrow{\sigma}^{-1} \vec{q} \rangle} \varphi(\vec{q}) \, d\vec{q} \right) = \\
 & = \mathbb{T} \left(\int e^{-2i\pi \langle \overleftarrow{\sigma}^{-1} \vec{x}, \vec{q} \rangle} \varphi(\vec{q}) \, d\vec{q} \right) = \\
 & = \mathbb{T} \left(\int e^{-2i\pi \langle \overleftarrow{\sigma} \vec{x}, \vec{q} \rangle} \varphi(\vec{q}) \, d\vec{q} \right) = \\
 & = \mathbb{T}(\mathcal{F} \varphi, \overleftarrow{\sigma} \vec{x}) .
 \end{aligned}$$

Pero por definición de $\overleftarrow{\sigma} \mathbb{T}$, este último miembro será igual a

$$23.9 \quad (\overleftarrow{\sigma} \mathbb{T})(\mathcal{F} \varphi) = (\mathcal{F} \overleftarrow{\sigma} \mathbb{T})(\varphi) ;$$

y comparando con 23.6 resulta

$$\overleftarrow{\sigma} \mathcal{F} \mathbb{T} = \mathcal{F} \overleftarrow{\sigma} \mathbb{T} .$$

Podemos afirmar en definitiva, que es equivalente decir que $H \gg 0$ es \overleftarrow{G} -invariante, y decir que $\mu \gg 0$ es \overleftarrow{G} -invariante.

Ello significa que para hallar todos los subespacios de Hilbert sobre el espacio afín que son \overleftarrow{G} -invariantes, con las hipótesis hechas sobre \overleftarrow{G} (subgrupo del grupo afín que contiene las traslaciones) hay que hallar, sobre el dual \overleftarrow{E}_n , todas las medidas $\mu \gg 0$ temperadas y \overleftarrow{G} -invariantes; y hay que construir después el espacio de Hilbert de la manera como lo hemos hecho en lo que antecede.

Es decir, conocemos todos los espacios de Hilbert que son invariantes por un subgrupo, si conocemos las medidas que son invariantes por un cierto grupo.

No resolveremos el problema de encontrar todas las medidas invariantes por un grupo más general. Observemos solamente que si una medida μ es invariante por un grupo G , su soporte será también invariante por G , pues el soporte de la transformada de una medida por

una operación, es el transformado del soporte de dicha medida.

Se concluye entonces que el soporte de la medida debe ser un conjunto invariante.

Pero los conjuntos invariantes llamados conjuntos saturados respecto de un grupo, son las uniones de órbitas.

Una órbita o trayectoria respecto de un grupo, es la unión de los transformados de un punto.

En consecuencia, si tenemos un grupo que actúa sobre un espacio, éste se puede descomponer en órbitas, es decir, en clases de equivalencia respecto de los movimientos del grupo.

Vemos así que si una medida es invariante respecto de un grupo, su soporte debe ser necesariamente una reunión de órbitas.

24. La noción de partícula.

La cuestión que abordamos en este párrafo no tiene quizás mucho interés físico, pero es esencial desde el punto de vista matemático.

Tenemos un universo que es una variedad indefinidamente diferenciable E_n , con una estructura suplementaria.

Sea G el grupo de estructura, grupo de todos los isomorfismos de la variedad que conservan su estructura.

Por ejemplo: el universo puede ser E_4 con una forma cuadrática de Lorentz y G el grupo de Lorentz, grupo de los operadores que conservan la estructura afín y la forma cuadrática.

En lo que sigue daremos una serie de definiciones generales, a saber:

a) Partícula escalar. Una partícula escalar sobre el universo es un espacio de Hilbert $\mathcal{H} \subset \mathcal{D}'(E_n)$ con topología más fina que la inducida.

b) Movimiento de la partícula. Es un elemento $\psi \in \mathcal{H}$ con la condición $\|\psi\| = 1$. En la Física se acostumbra a llamarlo estado, pero es preferible decir movimiento, pues significa todo el movimiento de la partícula en el tiempo.

c) Partícula de tipo universal. Una partícula se dice de tipo universal, si todos los observadores la observan como del mismo tipo, es decir, si \mathcal{H} es G-invariante, o bien, si los operadores del grupo G operan unitariamente sobre \mathcal{H} .

Hay partículas que son de tipo universal y otras no. Por ejemplo, en la Teoría de la Relatividad, un mesón escalar es una partícula de tipo universal; pero sería posible construir un subespacio que sería un espacio de mesones de masa m y velocidad de módulo $|\vec{v}|$ respecto a un referencial u observador dado: se tendría así una partícula de tipo no universal pues otro observador no la vería con el mismo valor de $|\vec{v}|$.

Hasta el presente se han clasificado todas las partículas de tipo universal sólo en el caso de E_4 con el grupo de Lorentz, pues son las que más interesan en realidad.

d) Magnitud física relativa a una partícula. Son conocidas en la Física, distintas magnitudes relativas a una partícula a saber, el módulo de la velocidad en un instante dado respecto a un referencial,

la masa en un instante dado, la masa en reposo, la carga eléctrica y otras.

Pero es necesario dar una definición matemática. En general en los tratados de física se dice que una magnitud física es un número real que resulta dado por un operador autoadjunto A sobre \mathcal{H} ; el carácter autoadjunto de A está además justificado por el hecho de que el valor de la magnitud es un número real.

Pero se debe hacer notar que esta justificación no es completa desde el momento que intervienen allí operadores no acotados, cuyas complicaciones hacen siempre delicada la definición de operador autoadjunto.

Será más interesante para nosotros reemplazar esta noción de magnitud por otra que no hace intervenir a los operadores no acotados.

Por otra parte, no es cierta la afirmación que una magnitud física es siempre real.

Por ejemplo: si ℓ es la longitud (que es un número real), $i\ell$ es imaginario. Una fase γ puede ser real pero la exponencial $e^{i\gamma}$ es un número complejo.

Tomemos la experiencia de los orificios de Young: un haz paralelo de fotones incide sobre una pantalla con dos orificios a y b y en otra pantalla paralela a la primera se reciben los fotones provenientes de la difracción en los orificios.

Supongamos que se quiera saber cuáles de los fotones recogidos en la segunda pantalla provienen del orificio a ó b .

Hay una probabilidad para que un fotón haya pasado por uno de ellos, y el resultado de una medición no será un número, sino la afirmación: este orificio o este otro. Se podría replicar que numerando

Los orificios obtenemos como resultado el número asignado al orificio; pero no hay porqué numerarlos desde el momento que es un conjunto de dos elementos solamente.

En este caso, como se ve, la magnitud física toma valores, no sobre la recta real, sino sobre un conjunto de dos elementos.

Daremos entonces la siguiente:

Definición. Magnitud física observable, relativa a una partícula, que toma sus valores en un conjunto general, es una descomposición espectral de \mathcal{H} respecto a un espacio X , localmente compacto.

Veremos en lo que sigue, que por ser una descomposición espectral se tiene en realidad un sistema de proyectores, los cuales son operadores acotados; se salva así la dificultad que presentan los operadores no acotados que aparecen usualmente en la Física.

Se entiende por descomposición espectral de \mathcal{H} respecto a X , una correspondencia que a cada subconjunto boreliano F de X atribuye una variedad \mathcal{H}_F de \mathcal{H} ; de acuerdo a axiomas que veremos en seguida.

Se tiene la correspondencia:

a cada conjunto boreliano $F \longrightarrow \mathcal{H}_F$ subespacio vectorial cerrado de \mathcal{H} ; con las siguientes propiedades:

- I) $F = \emptyset \implies \mathcal{H}_\emptyset = 0$
 $F = X \implies \mathcal{H}_X = \mathcal{H}$
- II) Si $F = F_1 \cap F_2 \quad \mathcal{H}_{F_1} \perp \mathcal{H}_{F_2}$
- III) Si $F = \bigcup_n F_n \quad \mathcal{H}_F = \bigoplus_n \mathcal{H}_{F_n}$

\bigcup_n significa unión numerable de F_n disjuntos, y \bigoplus_n es la suma directa hilbertiana (cfr.12.e)

$$IV) \mathcal{H}_F = \bigcap_{\mathcal{O}} \mathcal{H}_{\mathcal{O}}$$

donde \mathcal{O} recorre el conjunto de los abiertos que contienen a F . Si X es metrizable, IV es consecuencia de los anteriores, pues F es igual a la intersección de un conjunto numerable de abiertos.

e) Medición de una magnitud física. Sea una magnitud física dada por una descomposición espectral. Qué significa una medición o bien una tentativa de medición de dicha magnitud ?

En la Mecánica Cuántica es sabido que una medición nunca da un valor cierto sino solamente una probabilidad de obtener diversos valores.

Por lo tanto, si ψ es el movimiento particular considerado, sólo existen probabilidades de encontrar diversos valores de la magnitud física para este movimiento.

Tratemos de ver cómo viene dada esta ley de probabilidad. Como la magnitud física tiene sus valores en X , es necesario dar una ley de probabilidades sobre X de manera que para cada subconjunto de X conozcamos la probabilidad para que una medición de la magnitud nos dé un resultado en dicho subconjunto.

Para ello hay que dar una medida positiva de masa total igual a uno sobre X .

Para cada F boreliano, subconjunto de X , y para cada ψ , tomaremos como probabilidad para que la medición de la magnitud dé un

real
dicho
Medición siempre
da un valor
cierto, pero
este valor no
se repite siempre
que se vuelve
a medir en las
mismas condicio-
nes

resultado en F el número $\|\Psi_F\|^2$ cuadrado de la norma de la proyección Ψ_F de Ψ sobre la variedad \mathcal{H}_F .

Se debe verificar que de esta manera se tiene una medida positiva de masa total igual a uno, lo que equivale a decir que se tiene una ley de probabilidad.

Pero recordemos los axiomas que definen tal medida: en primer lugar la medida del vacío es cero y la medida de todo el espacio es uno; vemos que estos axiomas se cumplen con los valores de $\|\Psi_F\|^2$, puesto que la proyección de Ψ sobre 0 es cero y la proyección sobre \mathcal{H} es Ψ cuya norma es uno.

Además, si un conjunto F es una unión numerable de conjuntos disjuntos F_n , la probabilidad de F debe ser la suma de las probabilidades de los F_n . Pero en virtud de III), \mathcal{H}_F será la suma directa hilbertiana de subespacios ortogonales, y por consiguiente el cuadrado de la norma de la proyección de Ψ sobre \mathcal{H}_F es exactamente la suma de los cuadrados de las normas de las proyecciones sobre \mathcal{H}_{F_n} .

Por último, la medida de un conjunto F debe ser la cota inferior de las medidas de los abiertos que lo contienen, lo cual se cumplirá en virtud de IV).

Tenemos así una definición correcta de la medición de una magnitud. Conocida la descomposición espectral y el movimiento de la partícula, podemos conocer la distribución de probabilidad de la medición de la magnitud.

Ejemplo. En la experiencia de los orificios de Young se tiene $X = (a, b)$. La descomposición espectral está dada por \mathcal{H}_a y \mathcal{H}_b , subespacios ortogonales cerrados y suplementarios y por los subespacios correspondientes al subconjunto vacío de X y a X mismo, que

son 0 y \mathcal{H} respectivamente.

Dado el movimiento Ψ , sean Ψ_a , Ψ_b las proyecciones de Ψ sobre \mathcal{H}_a y \mathcal{H}_b ; se tiene

$$\Psi = \Psi_a + \Psi_b, \quad \text{con} \quad \|\Psi\|^2 = 1.$$

Entonces la probabilidad para que una medición nos haga saber que el fotón ha pasado por a es $\|\Psi_a\|^2$ y la probabilidad para que dicha medición nos haga saber que un fotón ha pasado por b es $\|\Psi_b\|^2$.

Digamos por último que podría darse una definición más general de la medición de una magnitud utilizando una noción más moderna de la descomposición espectral, que hace intervenir la definición de medida, no como medida de subconjuntos, sino como funcional sobre las funciones continuas. De todas maneras, la definición que hemos dado más arriba es correcta.

f) Soporte de una magnitud física. Es el soporte de la descomposición espectral, el cual se define como el más pequeño subconjunto cerrado de X cuya variedad correspondiente sea \mathcal{H} mismo.

En otros términos, el complementario del soporte es el más grande subconjunto abierto de X cuya variedad correspondiente es cero.

Si $X_0 \subset X$ es el soporte de la descomposición espectral, ello significa que para cada medida de una magnitud relativa a cada movimiento Ψ , se encuentran valores en X_0 con probabilidad igual a uno.

El resto de X no tiene importancia, es decir, en toda medición de la magnitud la probabilidad de encontrar un resultado fuera de X_0 es igual a cero.

g) Magnitud física de tipo universal. Una magnitud física se dirá de tipo universal si "todos los observadores la ven de la misma manera".

Esto significa que si un observador encuentra una distribución de probabilidad para un movimiento determinado de la partícula, otro observador cualquiera encontrará la misma distribución de probabilidad.

Observemos que no se dice que encuentren el mismo resultado, lo cual es incorrecto desde el momento que se trata de una probabilidad. Además la definición tiene sentido sólo en partículas de tipo universal: si la partícula no es universal la magnitud física respectiva no puede ser universal.

Precisemos lo dicho. Consideremos una magnitud física, que llamaremos Z , dada, como se sabe, por una descomposición espectral. Sea $\sigma \in G$ un elemento del grupo estructural G . (σ^{-1} da la transformación para pasar de un observador a otro).

Se tiene por lo pronto $\sigma \mathcal{H} = \mathcal{H}$; además σ opera unitariamente sobre \mathcal{H} , pues hemos supuesto una partícula de tipo universal.

Podemos transformar la descomposición espectral por σ , obteniéndose así una nueva descomposición espectral que queda definida de la siguiente manera: a $F \subset X$ le atribuimos $\sigma \mathcal{H}_F$, transformada de la variedad \mathcal{H}_F por σ .

Diremos que esta nueva descomposición espectral, transformada de la dada por σ , corresponde a una nueva magnitud física σZ transformada de Z por σ .

Todo esto puede ser expresado usando la noción de probabili-

dad de la manera siguiente: para una magnitud Z , un movimiento Ψ y un subconjunto F , se tiene la probabilidad $\|\Psi \mathcal{H}_F\|^2$; para la magnitud σZ , el movimiento $\sigma \Psi$ y el subconjunto F , se tiene la probabilidad $\|\sigma \Psi \sigma \mathcal{H}_F\|^2$; y debe ser

$$\|\Psi \mathcal{H}_F\|^2 = \|\sigma \Psi \sigma \mathcal{H}_F\|^2,$$

pues la proyección de $\sigma \Psi$ sobre $\sigma \mathcal{H}_F$, es la transformada por σ de la proyección de Ψ sobre \mathcal{H}_F y por lo tanto ambas tienen la misma norma en virtud de que σ es unitaria.

Pero en general, si la magnitud física Z no es de tipo universal, su transformada σZ no es la misma.

Ejemplos. Tomemos como magnitud física Z , el módulo de velocidad respecto a un referencial. Si hacemos una transformación de Lorentz no obtendremos los mismos resultados, es decir, σZ no será igual a Z .

La masa de una partícula no es tampoco de tipo universal, pues depende de la velocidad en cada referencial, y distintos observadores no observan la misma masa. En cambio, la masa en reposo es de tipo universal.

Para terminar, puede decirse brevemente que una magnitud física es de tipo universal si es G -invariante; o bien, para cada $\sigma \in G$, la transformación de la magnitud por σ es la identidad, es decir, la magnitud σZ coincide con la magnitud Z .

h) Magnitud cierta. Diremos que una magnitud es cierta si el soporte de la magnitud física universal se reduce a un punto.

Podría decirse que es la descomposición espectral de Dirac relativa a un punto.

En efecto, si el soporte de la magnitud es un punto, la variedad correspondiente es el espacio \mathcal{H} entero, y para él resto es cero.

En este caso para todos los movimientos de la partícula la medida de esta magnitud da siempre el mismo resultado.

Ejemplos. Para un electrón libre la carga eléctrica es una magnitud cierta; si se hace una medida de la carga eléctrica se encuentra siempre el mismo resultado.

Si se toman los electrones con velocidad de módulo dado respecto a un referencial particular, le corresponde un espacio de Hilbert para el cual el módulo de la velocidad con respecto a este referencial es una magnitud cierta.

Pero en general, para un electrón, el módulo de la velocidad no es una magnitud cierta.

1) Partícula elemental. Se dirá que una partícula es elemental si es de tipo universal y si cada magnitud física de tipo universal es cierta.

De acuerdo a esta definición, será evidentemente difícil verificar cuándo una partícula es elemental, pues será necesario verificar que todas las magnitudes universales son ciertas, y para las partículas conocidas sólo hemos verificado que las magnitudes que conocemos son ciertas; pero podría haber además otras magnitudes no conocidas aún y la partícula dejaría de ser elemental.

Quando decimos, por ejemplo, que un electrón ⁽¹⁾ es una par-

(1) Tomamos este ejemplo aún cuando el electrón no es una partícula esca
(lar.

tícula elemental entendemos que la masa en reposo y la carga eléctrica que son magnitudes universales son a la vez magnitudes ciertas.

En cambio el módulo de la velocidad respecto a un referencial dado y la masa en movimiento no, desde el momento que no son magnitudes universales.

Pero si nos referimos a la Mecánica Clásica los cambios de un observador a otro no son los mismos, pues hay un espacio absoluto y el módulo de la velocidad respecto a este absoluto es una magnitud de tipo universal, y en este caso el electrón dejaría de ser una partícula elemental, pues no tiene un módulo de la velocidad que sea una magnitud cierta.

La partícula elemental correspondiente sería un electrón de velocidad de módulo dado.

Esta observación revela que la noción de partícula elemental depende del grupo considerado.

Si E_n tiene, por ejemplo, una estructura muy rica (de tal manera que el grupo se reduce a la identidad) cada partícula elemental tendría un espacio de Hilbert de una dimensión.

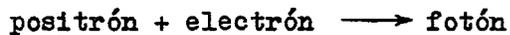
Hemos dicho que en la Mecánica Clásica una partícula elemental de tipo dado tiene una velocidad de módulo dado, cuando la partícula es libre. Pero si existe un campo exterior que actúa sobre la partícula, la velocidad cambia, lo que implica que dicha partícula dejará de ser elemental de un tipo dado y pasará a ser una partícula elemental de otro tipo.

En este caso la velocidad cambia continuamente por acción del campo, y por consiguiente habrá un cambio continuo en el tiempo del tipo de partícula elemental.

En la Mecánica Cuántica, en cambio, hay otras caracterizaciones de la partícula que no son, como en el caso anterior, caracterizaciones continuas,

Por ejemplo, el hecho de ser electrón o positrón es una caracterización discontinua de la partícula.

Se puede entonces pensar, por analogía con el caso anterior, que la acción de un campo en la Mecánica Cuántica hará cambiar el tipo de partícula elemental haciendo posible pasar, en forma discontinua, de la creación a la aniquilación de partículas como en el caso de la reacción



Para aclarar aún más el concepto de partícula elemental, planteemos la cuestión de definir una partícula no elemental.

Físicamente, un fotón, un electrón, por ejemplo, son partículas elementales; pero una partícula no elemental no es un sistema de dos partículas elementales. No se podría decir, por ejemplo, que el sistema de un electrón y un fotón es una partícula no elemental y que un protón solo es una partícula elemental. No se trata de ello.

Un sistema de dos partículas no es una partícula no elemental, es un conjunto de dos partículas elementales, lo cual no es lo mismo. Una partícula elemental o no elemental es siempre una partícula.

En efecto, para el sistema de dos partículas el universo E_n no es el mismo, pues en este caso la función de ondas correspondiente es el producto tensorial de las funciones de ondas de cada partícula y está definida entonces sobre el producto $E_n \times E_n$ de los universos respectivos.

Para tres partículas tendríamos como universo el producto $E_n \times E_n \times E_n$.

En conclusión, un sistema de varias partículas no tiene nada que ver con una partícula no elemental. Una partícula no elemental será siempre una partícula.

¿Qué significa entonces el ser no elemental?

Simplemente, que el espacio de Hilbert respectivo \mathcal{H} , contiene por lo menos dos subespacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 ortogonales, invariantes por el grupo estructural.

Puesto que hay por lo menos una magnitud X que tiene dos valores, esta magnitud se puede dividir en la unión $X_1 + X_2$ de dos conjuntos extranjeros a los que les corresponden variedades propias \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 .

Cada uno de los subespacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 puede definir o no una partícula elemental, pero define al menos una partícula más elemental que la definida por \mathcal{H} y no se puede decir que la partícula no elemental de tipo definido por \mathcal{H} está compuesta por dos partículas de los tipos definidos por \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 pues es falso.

Pero la partícula definida por \mathcal{H} tiene la probabilidad de ser de tipo definido por \mathcal{H}_1 ó \mathcal{H}_2 después de una medición.

Por ejemplo, consideremos los espacios de Hilbert del protón y del electrón. Son subespacios extranjeros, y por tanto su intersección es nula. Sería posible tomar la suma directa de estos espacios de Hilbert e introducir la norma correspondiente a la suma directa.

Tendríamos un espacio de Hilbert y la partícula correspondiente sería la partícula electrón o protón, de manera que si se hace una medición, para un movimiento, hay una probabilidad de encontrar que sea

un protón y una probabilidad, complementaria de la anterior, de encontrar que sea un electrón.

Un ejemplo tomado de la Física, sería el caso del nucleón, que puede ser protón o neutrón.

Una partícula no elemental es entonces, una partícula para la cual pueda encontrarse una división de la misma en partículas de tipos más elementales, de manera que para cada una de estas hay para un movimiento dado, una probabilidad de ser de un tipo u otro.

En el caso analizado más arriba, de la partícula definida por \mathcal{H} , la función Ψ tiene proyecciones Ψ_1 y Ψ_2 sobre \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 .

La probabilidad para que una medición dé, para un movimiento dado, un resultado de tipo \mathcal{H}_1 , es $\|\Psi_1\|^2$ y la probabilidad para que dé un resultado de tipo \mathcal{H}_2 , es $\|\Psi_2\|^2$.

Esto se ve muy bien en el caso de un electrón considerado en el marco de la Mecánica Clásica. Allí un electrón no es una partícula elemental, pues no tiene velocidad cierta respecto al espacio absoluto; hay, en cambio, para un movimiento dado, una repartición de probabilidad de las velocidades, siendo posibles todos los valores reales positivos. Hay, por lo tanto, una probabilidad para que el electrón sea del tipo correspondiente a tal velocidad o a tal otra, y esta descomposición de la probabilidad de que esta partícula elemental sea de un tipo aún más elemental.

En resumen: una partícula no elemental no es el sistema de varias partículas, es una partícula que tiene varias probabilidades de ser, para cada movimiento, de tipos más elementales.

Después de estas consideraciones, tratemos de ver de que manera se traduce matemáticamente, el hecho que la partícula sea elemental.

Tomemos para ello el subespacio de Hilbert \mathcal{H} correspondiente a una partícula y el grupo estructural G , y sea una representación unitaria de G en \mathcal{H} , es decir, sea una correspondencia que a cada elemento de G asigna un operador unitario de \mathcal{H} , de tal manera que al producto de los elementos de G le corresponda el producto de los operadores, al inverso el inverso, y al elemento unidad el operador unidad.

Recordemos que una representación unitaria de un grupo G en un espacio de Hilbert se dice irreducible si no existe subespacio cerrado propio invariante.

Ahora bien, decir que la partícula es elemental es equivalente a decir que la representación de G en \mathcal{H} es irreducible.

En efecto, si la representación es reducible, significa que hay un subespacio invariante. Pero si un subespacio es invariante por un grupo unitario, el subespacio ortogonal es también invariante.

Existe entonces un sistema de dos subespacios cerrados ortogonales, ambos invariantes y por lo tanto hay una descomposición espectral que al primer valor le hace corresponder un subespacio, y al segundo valor el segundo subespacio.

Por consiguiente hay una magnitud física de tipo universal que no es cierta, pues tiene entonces dos valores. Tal magnitud es de tipo universal, pues cada uno de los subespacios es invariante por el grupo, pero no puede ser cierta pues precisamente tiene dos valores.

Entonces, si la representación del grupo es reducible, hay por lo menos una magnitud física de tipo universal que no es cierta y por consiguiente la partícula no es elemental.

Recíprocamente, si la partícula no es elemental y hay por lo

tanto una verdadera descomposición espectral (cuyo soporte no es un punto), es posible encontrar dos subconjuntos F_1 y F_2 de X , complementarios, tales que les correspondan subvariedades propias de \mathcal{H} que son invariantes.

La representación del grupo será por lo tanto reducible.

Podemos afirmar que hay equivalencia entre decir que la representación de G en \mathcal{H} es irreducible, y decir que cada magnitud física de tipo universal tiene valor cierto.

En relación a esta idea, y con alcance más general, demostraremos el siguiente

Teorema. Hay equivalencia entre decir que una partícula, cuyo correspondiente subespacio invariante es \mathcal{H} , es elemental, y decir que para cada partícula "más elemental", cuyo correspondiente subespacio invariante es \mathcal{H}_1 (cada elemento $\sigma \in G$ opera unitariamente en \mathcal{H}_1 , siendo además $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$), se deba tener $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ con norma proporcional.

Observemos que siempre existirán subespacios menores que \mathcal{H} , que serán los obtenidos multiplicando la norma de \mathcal{H} por una constante mayor que la unidad, pero serán los únicos, en el caso que nos ocupa.

Notemos también que el grupo opera unitariamente sobre los subespacios, es decir, se trata de partículas de tipo universal.

El teorema dice entonces que, cada vez que \mathcal{H}_1 es un espacio de Hilbert contenido en \mathcal{H} con norma más grande y también G -invariante (es decir, el grupo G opera unitariamente en \mathcal{H}_1) se tiene $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ con norma más grande.

de la Teoría de los Caracteres o de la Teoría de los Convexos.

Demostremos ahora el teorema enunciado.

I) Supongamos una partícula no elemental, la representación del grupo G no es entonces irreducible, pues hay por lo menos un subespacio propio que es G -invariante.

Por consiguiente, no sólo hay un subespacio invariante con una norma más grande, sino también un subespacio de Hilbert invariante y por lo tanto un subespacio invariante con la misma norma. A fortiori, \mathcal{H} no es extremal.

Conclusión: si la partícula no es elemental \mathcal{H} no es extremal.

II) Supongamos que la partícula es elemental. En virtud de la definición de partícula elemental, no habrá subespacio propio cerrado con la misma norma que sea invariante, pero podría haber un subespacio de Hilbert con norma más grande que sea invariante.

Supongamos entonces que la partícula es elemental y que sea $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$.

Vamos a mostrar que \mathcal{H}_1 es el mismo que \mathcal{H} con norma proporcional.

Es evidente en el caso en que \mathcal{H}_1 no es denso en \mathcal{H} , pues su adherencia también será invariante, y será por tanto un subespacio propio invariante.

Pero si \mathcal{H}_1 es denso, este razonamiento no es válido. Consideraremos entonces el operador J definido por la aplicación idéntica de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H} .

Este operador es continuo de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H} pues la topología

de \mathcal{H}_1 es más fina que la de \mathcal{H} .

Sea J^* el adjunto, operador continuo de \mathcal{H} en \mathcal{H}_1 , definido por la relación

$$24.1 \quad \langle J^* \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \phi, J \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}},$$

para $\forall \phi \in \mathcal{H}; \forall \psi_1 \in \mathcal{H}_1$.

El segundo miembro de esta igualdad es igual a $\langle \phi, \psi_1 \rangle$ pues J es la inyección idéntica. Se tiene entonces

$$\langle J^* \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}},$$

que constituye la caracterización de J^* . Pero, puesto que \mathcal{H}_1 está contenido en \mathcal{H} con norma más grande, un operador de \mathcal{H} en \mathcal{H}_1 define un operador de \mathcal{H} en sí mismo, que es simplemente el operador $B = J J^*$ obtenido por el producto de la aplicación de \mathcal{H} en \mathcal{H}_1 y la inyección canónica de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H} .

El operador B está definido de la manera siguiente:

$$\forall \phi \in \mathcal{H}, B \phi \in \mathcal{H}_1.;$$

$$\forall \phi \in \mathcal{H} \text{ y } \forall \psi_1 \in \mathcal{H}_1,$$

se tiene

$$24.2 \quad \langle B \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Se puede entonces decir que cada vez que tenemos un subespacio \mathcal{H}_1 de \mathcal{H} con topología más fina, tenemos un operador de \mathcal{H} en \mathcal{H} que tiene la propiedad 24.2.

Además, si \mathcal{H}_1 es también invariante, significa que B es invariante, lo cual puede ser escrito de la siguiente manera:

$$\forall \sigma \in G \quad \sigma B \sigma^{-1} = B ,$$

lo cual es casi intuitivo pues σ deja invariante las configuraciones de \mathcal{H} y \mathcal{H}_1 , pues opera unitariamente sobre ambos, y por lo tanto deja invariante el operador que se deduce de estas configuraciones.

Veamos esto mismo en detalle. Consideremos la expresión

$$24.3 \quad \langle \sigma B \sigma^{-1} \phi | \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} ;$$

tiene sentido, pues si $\phi \in \mathcal{H}$, es $\sigma^{-1} \phi \in \mathcal{H}$; la imagen de este último por B está en \mathcal{H}_1 ; pero σ deja \mathcal{H}_1 invariante, es decir, $\sigma B \sigma^{-1} \phi \in \mathcal{H}_1$. El producto escalar 24.3 tiene así un sentido preciso.

Pero 24.3 se puede escribir de otra manera pasando σ del primer elemento al segundo, teniendo en cuenta que σ es unitario en \mathcal{H}_1 y la definición de B

$$24.4 \quad \langle B \sigma^{-1} \phi | \sigma^{-1} \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \sigma^{-1} \phi , \sigma^{-1} \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}}$$

Pero como σ^{-1} es unitario en \mathcal{H} , se tiene que 24.4 es igual a

$$24.5 \quad \langle \phi , \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \langle B \phi , \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} ,$$

nuevamente en virtud de la definición de B .

Comparando 24.3 con el segundo miembro de 24.5 vemos que $\sigma B \sigma^{-1} \phi$ es un elemento que tiene para cada ψ_1 de \mathcal{H}_1 el mismo producto escalar que $B \phi$, lo cual prueba que ambos elementos son iguales, y por consiguiente

$$\sigma B \sigma^{-1} = B$$

Si tenemos entonces un espacio $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$ en el sentido enunciado más arriba, tenemos en consecuencia un operador continuo de \mathcal{H} en sí mismo que conmuta con los operadores de G .

Pero es conocido el siguiente teorema de las representaciones irreducibles.

teorema. En una representación unitaria irreducible de un grupo G en un espacio de Hilbert, todo operador que conmuta con los elementos del grupo es proporcional a la identidad, es decir, es una homotecia.

Es evidente, pues si el operador es hermitiano, tiene una descomposición espectral. Si es además invariante por G su descomposición espectral es también invariante; pero no hay subvariedad invariante excepto cero y el espacio entero pues la representación es irreducible.

No hay, por lo tanto, otras variedades espectrales que cero y el espacio entero y por consiguiente el operador es un escalar.

En otros términos, todo operador hermitiano que conmuta con el grupo es un escalar.

Si el operador no es hermitiano tiene en cambio una descomposición canónica de la forma $M + iN$, donde M y N son hermitianos y si el operador conmuta con el grupo también conmutan M y N y en virtud del razonamiento anterior, ambos son escalares.

En conclusión, el operador es un escalar.

Volviendo ahora al operador B podemos escribir

$$B = \lambda I ,$$

donde λ es un escalar e I el operador identidad. Como consecuencia obtenemos que los elementos $B \phi$ son de la forma $\lambda \phi$ y pertenecen a

\mathcal{H}_1 , y por lo tanto \mathcal{H}_1 es el espacio \mathcal{H} entero.

Volviendo a 24.5, podemos escribir

$$24.6 \quad \lambda \langle \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle \phi, \psi_1 \rangle_{\mathcal{H}} ;$$

esta relación prueba que el producto escalar en \mathcal{H}_1 es proporcional al producto escalar en \mathcal{H} .

Ahora bien, conocemos la manera de pasar de los espacios de Hilbert a los núcleos, lo cual nos permite enunciar esta última propiedad de la manera siguiente.

La condición necesaria y suficiente para que una partícula sea elemental es que su núcleo asociado $K_{x, \xi}$ sea G-elemental.

Definamos qué se entiende por núcleo G-elemental.

Un núcleo $K_{x, \xi}$ será G-elemental si para cada núcleo K_1 también invariante por el grupo G y que satisface la condición $K_1 \prec K_{x, \xi}$, se tiene que K_1 es proporcional a $K_{x, \xi}$.

Una partícula es entonces elemental si y sólo si su núcleo asociado es extremal, entendiendo por ello el hecho que todo otro núcleo mayorado por el primero, en el sentido de la estructura de orden y que es invariante por el grupo, es proporcional al primero.

Supongamos ahora que E_n sea un espacio afín y G un subgrupo del grupo afín que contenga las traslaciones y que conserve los volúmenes.

Sabemos que el núcleo $K_{x, \xi}$ se puede representar entonces por una distribución $H_{x-\xi}$ definida en el espacio vectorial asociado \vec{E}_n , de tipo positivo e invariante por el grupo G.

Una partícula será entonces elemental si y sólo si la distribución de tipo positivo H definida en \vec{E}_n es extremal, entendiendo

por ello el hecho que toda distribución de tipo positivo en \vec{E}_n mayorada por H , en el sentido de la definición de tipo positivo y G -invariante, es proporcional a H .

Podemos aplicar ahora la transformación de Fourier y obtenemos finalmente, teniendo en cuenta lo visto anteriormente, el siguiente resultado:

a cada partícula elemental escalar está asociada, de manera única, una medida μ positiva, temperada definida en \overleftarrow{E}_n , G -invariante y que es extremal en el siguiente sentido: para cada μ_1 mayorada por μ , en el sentido de las medidas positivas y G -invariante se tiene:

$$\mu_1 = c_1 \cdot \mu .$$

Ejemplo. Si G es el grupo de las traslaciones, \overleftarrow{G} es entonces la identidad y las medidas extremales son las medidas de Dirac definidas en \overleftarrow{E}_n .

En este caso las distribuciones de tipo positivo elementales en \vec{E}_n , son los caracteres, es decir, las exponenciales.

Los espacios de Hilbert \mathcal{H} correspondientes, son espacios de una dimensión que representan partículas de velocidad constante.

Nuestro problema será ahora el siguiente. Sea \overleftarrow{E}_n un espacio vectorial (en particular el espacio dual del espacio \vec{E}_n asociado a \vec{E}_n). Sea \overleftarrow{G} un subgrupo del grupo lineal de \overleftarrow{E}_n que conserva los volúmenes. Encontrar todas las medidas $\mu \geq 0$ temperadas sobre \overleftarrow{E}_n que son \overleftarrow{G} -extremales, es decir, tales que toda medida μ_1 positiva \overleftarrow{G} -invariante y mayorada por μ sea proporcional a μ .

25. Un teorema sobre las medidas positivas extremales.

Mostraremos ahora el siguiente

Teorema. Sea X un espacio localmente compacto con una base numerable de abiertos ⁽¹⁾. Sea G un grupo de homeomorfismos de X ; entonces, si la medida $\mu \geq 0$ es extremal, tiene su soporte en la adherencia de una sola órbita.

Observemos que no puede decirse en general que μ tiene su soporte en una sola órbita.

Por ejemplo, en el caso E_4 con el grupo de Lorentz, el cono de luz sin el origen es una órbita, pero una medida no puede tener como soporte el cono sin origen; tendrá que tener como soporte el cono con el origen, es decir, la adherencia de la órbita mencionada.

Demostración. Sea M el soporte de μ y sea un punto $a \in M$. Razone-
remos sólo sobre M como si X no existiera, es decir, haremos $X = M$,
dado que M debe ser una unión de órbitas, pues μ es invariante; G
opera sobre M y podemos entonces restringirnos a M .

Sea V una vecindad de a sobre M . Como a pertenece al soporte ello significa que cada vecindad de a tiene respecto a μ una medida estrictamente positiva.

Tomemos el saturado \widehat{V} de V , unión de todas las órbitas que contienen puntos de V ; será un conjunto abierto de M dado que es una unión de abiertos.

(1) Recordemos que una base de abiertos es un sistema de conjuntos abiertos tales que cada abierto del espacio es una unión de conjuntos de la base. Tal es el caso de los espacios usuales y en particular E_n ; basta tomar en tal caso las bolas de radio racional con centros en los puntos de coordenadas racionales.

Veamos que \widehat{V} contiene casi toda la medida μ , o lo que es equivalente, su complemento tiene medida nula respecto a μ . Si no fuera así sería posible dividir a M en la unión de dos conjuntos: \widehat{V} y su complemento; cada uno de ellos es G -invariante y de medida diferente de cero; por lo tanto la medida obtenida por restricción de μ a uno de estos conjuntos sería una medida mayorada por μ y no proporcional a μ , lo cual es imposible, pues μ es extremal.

Por consiguiente, \widehat{V} contiene casi toda la medida μ .

Esto es verdadero para cada V , pero si hay una base numerable de abiertos el punto \underline{a} tiene una base numerable de vecindades $V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$ cuyos saturados $\widehat{V}_1, \widehat{V}_2, \dots, \widehat{V}_n, \dots$ son tales que sus respectivos complementarios tienen medida nula, y como una unión numerable de conjuntos de medida nula es de medida nula, la unión de los complementarios de \widehat{V}_n tiene medida nula.

En otros términos, la intersección de todos los \widehat{V}_n es casi todo M . Se puede poner que casi todos los puntos $x \in M$ pertenecen a $\bigcap_n \widehat{V}_n$. Pero el hecho que $x \in \widehat{V}_n$, significa que la órbita que pasa por \underline{x} contiene puntos en V_n , es decir, contiene puntos en todas las vecindades de \underline{a} ; dicho de otro modo: para casi todo \underline{x} la órbita que pasa por \underline{x} es adherente a \underline{a} . (Observar que el conjunto excepcional de medida nula depende de \underline{a}). Esta propiedad es verdadera para cada \underline{a} , pero como hay una base numerable de abiertos, existe en X un conjunto numerable y denso $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ para obtener el cual es suficiente tomar un punto en cada elemento de la base de abiertos.

De esta manera, para casi todo x la órbita que pasa por él es adherente a a_1 ; para casi todo \underline{x} la órbita que pasa por él es adhe-

rente a a_2 y así sucesivamente hasta a_n , etc.

Ello equivale a la existencia de una infinidad numerable de condiciones y por lo tanto puede decirse que para casi todo \underline{x} , la órbita que pasa por \underline{x} es adherente a todos los a_n lo cual significa que para casi todos los puntos \underline{x} la órbita que pasa por \underline{x} es densa.

Tomaremos una propiedad más débil, a saber, existe un \underline{x} de M tal que la órbita que pasa por \underline{x} es densa.

En otros términos, el soporte de M está contenido en la adherencia de una órbita, q.e.d.

Es posible encontrar una órbita cuya adherencia es exactamente el soporte de la medida.

En conclusión. Podemos decir que cada vez que X contiene una base numerable de abiertos, una medida G -invariante es extremal sólo si su soporte está contenido en la adherencia de una sólo órbita.

26. El espacio afín E_n y el grupo ortogonal relativo a una forma cuadrática.

Al espacio afín E_n le asignaremos ahora una forma cuadrática fundamental, es decir, una forma bilineal simétrica obtenida con el producto escalar de dos elementos \vec{x} , \vec{y} del espacio vectorial asociado.

Esta forma la notaremos con

$$26.1 \quad (\vec{x} | \vec{y}) \dots$$

Para abreviar reemplazaremos la expresión $(\vec{x} | \vec{x})$ por \vec{x}^2 .

Ahora bien, es sabido que una forma bilineal no degenerada define un isomorfismo γ del espacio \vec{E}_n sobre \overleftarrow{E}_n ; y recíprocamente, todo isomorfismo de \vec{E}_n sobre su dual \overleftarrow{E}_n , define canónicamente una forma bilineal no degenerada sobre el espacio vectorial \vec{E}_n , en virtud de la siguiente relación

$$26.2 \quad \langle \gamma \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x} | \vec{y}) ;$$

en el segundo miembro se tiene la forma bilineal sobre \vec{E}_n , en el primero $\gamma \vec{x}$ es un elemento del espacio dual \overleftarrow{E}_n y se tiene el producto escalar de dualidad entre un elemento del espacio \vec{E}_n y un elemento de su dual.

Esta expresión define $\gamma \vec{x}$, elemento del espacio dual, y por consiguiente define una aplicación γ de \vec{E}_n sobre \overleftarrow{E}_n que es un isomorfismo si la forma bilineal dada no es degenerada.

La expresión 26.2 puede ser escrita, si la forma es simétrica, de la siguiente manera: $\langle \gamma \vec{y}, \vec{x} \rangle$.

Pero si γ es un isomorfismo del espacio vectorial sobre su dual, transporta toda la estructura de \vec{E}_n a una estructura de \overleftarrow{E}_n y en particular transporta la forma cuadrática. Hay entonces, otra forma cuadrática sobre el dual definida por transporte de estructura que se llama la forma cuadrática adjunta de la dada.

Su definición es la siguiente. Si $\overleftarrow{p}, \overleftarrow{q} \in \overleftarrow{E}_n$, se tiene

$$26.3 \quad (\overleftarrow{p} | \overleftarrow{q}) = (\gamma^{-1} \overleftarrow{p} | \gamma^{-1} \overleftarrow{q}) ,$$

escalar en \vec{E}_n .

Por definición de γ , el segundo miembro de 26.3 puede ponerse

$$26.4 \quad \langle \gamma^{-1} \vec{p}, \vec{q} \rangle = \langle \vec{p}, \gamma^{-1} \vec{q} \rangle \quad (1)$$

Las igualdades 26.3 y 26.4 pueden escribirse, con otras letras, de la siguiente manera

$$(\vec{a} | \vec{b}) = (\vec{a} | \vec{b}) = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle .$$

Esta fórmula se interpreta en física diciendo que en el tercero y cuarto miembro se tiene un producto escalar de dualidad que es una expresión del tipo $\sum_j a_j b_j$ con todos los signos +; en los dos primeros miembros hay en cambio una suma con signos - y + que dependen de la signatura.

Sea ahora G el grupo ortogonal relativo a la forma cuadrática en E_n .

Un operador de \vec{E}_n se llama ortogonal si conserva la forma cuadrática. Un operador afín sobre E_n se llama ortogonal afín, si el operador asociado en el espacio vectorial \vec{E}_n conserva la forma cuadrática. En el caso particular de E_4 con una forma de signatura (3;1),

(1) Conviene poner, para cada $\vec{x} \in \vec{E}_n$, $\overleftarrow{x} = \gamma \vec{x} \in \overleftarrow{E}_n$. Es decir, con la misma letra y una "flecha" o una "coflecha" designaremos dos elementos: uno del espacio y otro del dual en correspondencia por γ . Es lo que en Física se llaman las coordenadas covariantes y contravariantes de un vector. El nuestro es otro lenguaje; es mejor decir que un vector en un espacio tiene coordenadas respecto a una base, que coinciden con las coordenadas contravariantes de la Física, y el mismo vector tiene una imagen en el dual cuyas coordenadas, respecto a una base dual coinciden con las coordenadas covariantes de la Física.

el grupo mencionado es el grupo de Lorentz.

Sean \vec{G} y \overleftarrow{G} el grupo asociado a G y su contragrediente.

Aclaremos desde ya una posible ambigüedad. Si tomamos $\vec{O} \in \vec{G}$ hay para $\overleftarrow{O} \in \overleftarrow{G}$ dos interpretaciones posibles. Primera: la definición ya dada en 23.3 a saber, $\overleftarrow{O} = {}^t \vec{O}^{-1}$, es decir, el contragrediente de \vec{O} . Segunda: como tenemos una forma cuadrática que transporta toda estructura de \vec{E}_n sobre su dual \overleftarrow{E}_n , \overleftarrow{O} podría significar el transformado de \vec{O} por el isomorfismo γ definido por la forma cuadrática, es decir, $\overleftarrow{O} = \gamma \vec{O} \gamma^{-1}$.

En general ambos son diferentes. Pero si \vec{O} es un operador ortogonal, los dos operadores recién mencionados son iguales

En efecto, Se tiene para el primero:

$$26.5 \quad \langle {}^t \vec{O}^{-1} \overleftarrow{p}, \vec{O} \overrightarrow{x} \rangle = \langle \overleftarrow{p}, \overrightarrow{x} \rangle ;$$

pero si \vec{O} es ortogonal, conserva la forma cuadrática; hay que transportar por γ y el primer miembro de 26.5 da

$$26.6 \quad (\gamma^{-1} {}^t \vec{O}^{-1} \overleftarrow{p} \mid \vec{O} \overrightarrow{x}) = (\vec{O}^{-1} \gamma^{-1} {}^t \vec{O}^{-1} \overleftarrow{p} \mid \overrightarrow{x}) ,$$

pues el primer miembro es el producto escalar definido por la forma cuadrática y en el segundo se ha pasado \vec{O} al primer elemento, puesto que \vec{O} conserva la forma cuadrática.

El segundo miembro de 26.5 se puede poner, transportando por γ

$$26.7 \quad (\gamma^{-1} \overleftarrow{p} \mid \overrightarrow{x}) .$$

Comparando 26.6 y 26.7 resulta que los productos escalares son iguales para cada \overrightarrow{x} . Los primeros elementos son iguales para

cada \overleftarrow{p} y por lo tanto se obtiene

$$26.8 \quad \overleftarrow{\sigma}^{-1} \gamma^{-1} {}^t \overleftarrow{\sigma}^{-1} = \gamma^{-1} ,$$

o bien

$$\gamma^{-1} {}^t \overleftarrow{\sigma}^{-1} = \overleftarrow{\sigma} \gamma^{-1}$$

$${}^t \overleftarrow{\sigma}^{-1} = \gamma \overleftarrow{\sigma} \gamma^{-1} \quad \text{q.e.d.}$$

Veamos ahora que si $\overrightarrow{\sigma} \in \overrightarrow{G}$ es ortogonal, $\overleftarrow{\sigma} \in \overleftarrow{G}$ es ortogonal respecto a la forma cuadrática adjunta.

Ello es evidente pues la forma cuadrática adjunta se obtiene de la forma cuadrática dada mediante el transporte de estructura debido a γ , y hemos visto que precisamente $\overleftarrow{\sigma}$ se obtiene de $\overrightarrow{\sigma}$ por el transporte de estructura debido a γ . Es decir, γ transporta todo, la forma cuadrática y un operador que la conserva, los cuales se convierten en una forma cuadrática y un operador que la conserva, respectivamente.

Por consiguiente, el transformado del grupo ortogonal está contenido en el grupo ortogonal de la transformada; ello significa que si \overrightarrow{G} es el grupo ortogonal de la forma cuadrática, \overleftarrow{G} es el grupo ortogonal de la forma cuadrática adjunta.

a) Introducción de coordenadas. Tomemos en \overrightarrow{E}_n una base ortonormal con respecto a la forma cuadrática dada.

Si los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ tienen como coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n e y_1, y_2, \dots, y_n respectivamente, el producto escalar de dichos vectores se escribe:

$$26.9 \quad (\vec{x} | \vec{y}) = \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j y_j$$

donde $\epsilon_j = \pm 1$. El número de los $+1$ y -1 da la signatura de la forma cuadrática.

En la base dual el producto escalar de dos vectores \vec{p} , \vec{q} se escribe en forma análoga

$$26.10 \quad (\vec{p} | \vec{q}) = \sum_{j=1}^n \epsilon_j p_j q_j$$

Pero observemos que: x_j son las coordenadas del vector \vec{x} respecto a la base inicial del espacio \vec{E}_n ; la imagen de \vec{x} por γ es \vec{x} , y sus coordenadas son $\epsilon_j x_j$ en la base dual de la base inicial y no en la base transportada por γ , pues el transportado del vector, \vec{x} , tiene en la base transportada, exactamente las mismas coordenadas x_j que el vector inicial \vec{x} .

Es lo que se acostumbra a hacer en Física donde se consideran las coordenadas contravariantes y covariantes de un vector que son en realidad, las coordenadas de un vector en la base del espacio \vec{E}_n y las coordenadas de su imagen en el espacio dual \vec{E}_n en la base dual de la inicial, respectivamente.

Lo tomaremos entonces, como regla general. Es decir, tomaremos siempre la base dual en el espacio dual y no la transportada. No sería conveniente tomar en el espacio dual la base dual en el caso de un espacio vectorial, como se hace en general, y la base transportada en el caso en que se tiene una forma cuadrática, pues de esta manera las fórmulas generales de los espacios vectoriales no seguirían siendo las mismas, en el caso particular de tener una forma cuadrática.

b) La transformada de Fourier.

En 18 hemos visto que la transformada de Fourier se define como

$$26.11 \quad g(\vec{p}) = \int e^{-2i\pi \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

que tiene sentido si existe un elemento de volumen. Pero en este caso esta condición se cumple pues hay una forma cuadrática que permite definir dicho elemento de volumen.

La expresión $\langle \vec{x}, \vec{p} \rangle$ en la exponencial significa el producto escalar de dualidad. Si se toma una base en \vec{E}_n y la base dual en el dual \overleftarrow{E}_n se tiene

$$26.12 \quad \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Observación. Los físicos escriben la transformada de Fourier \mathcal{F} , en el caso particular del grupo de Lorentz, con un signo menos en el último término de la expresión 26.12, lo cual constituye una verdadera transgresión a las reglas generales que conviene observar en los cálculos.

En efecto, el signo menos significa que en lugar de considerar a \mathcal{F} como una transformación entre una distribución en \vec{E}_n y una distribución en el dual \overleftarrow{E}_n , se regresa al espacio \vec{E}_n por el isomorfismo γ^{-1} y se considera que $\mathcal{F} f(\vec{x})$ es una función $g(\vec{y})$ en el mismo espacio, definida por

$$26.13 \quad g(\vec{y}) = \int e^{-2i\pi (\vec{x} | \vec{y})} f(\vec{x}) d\vec{x},$$

relación en la que figura la forma cuadrática $(\vec{x} | \vec{y})$ en la exponencial, y por consiguiente hay que hacer aparecer la signatura, que en el

caso de Lorentz contiene un solo signo menos.

La consecuencia inmediata de tal procedimiento es que todas las fórmulas que sirven en el caso general en que no se tiene forma cuadrática, no sirven para este caso particular y hay que rehacerlas.

Además ello está en contradicción con la distinción que se hace en la Física entre el espacio de configuración y el de los impulsos, pues \vec{x} e \vec{y} pertenecen al mismo espacio; pero se considera que \vec{x} pertenece al espacio de configuración e \vec{y} al espacio de los impulsos, lo cual significa que en realidad se tiene en cuenta el punto de vista general pero, sin decirlo, se identifica el espacio de los impulsos al de configuración, introduciendo así la forma cuadrática.

Nosotros usaremos la transformada de Fourier en la forma dada para el caso general, pero digamos, para terminar, que hay en realidad algunos casos particulares en los cuales está permitido y es aún indispensable identificar los dos espacios.

Por ejemplo, si tomamos \mathcal{F} sobre el mismo espacio con la forma cuadrática, \mathcal{F} se convierte en un operador unitario en L^2 que tiene variedades espectrales; o bien, si se buscan las distribuciones o funciones que son iguales a su transformada de Fourier, es claro que conviene que ambas estén en el mismo espacio. Pero son casos muy particulares.

c) El elemento de volumen dp .

Si hay un elemento de volumen $d\vec{x}$ sobre \vec{E}_n hemos visto que hay también un elemento de volumen $d\vec{p}$ sobre \vec{E}_n .

Este último se puede calcular de tres maneras distintas que dan el mismo resultado, a saber:

- I) $\vec{d}p$ está asociado a $\vec{d}x$ en general sin intervención de ninguna forma cuadrática, como lo hemos visto en 18 .
- II) $\vec{d}p$ es el transportado de $\vec{d}x$ por el isomorfismo γ que depende de la forma cuadrática.
- II) Siendo $\vec{d}x$ el elemento de volumen asociado a la forma cuadrática sobre \vec{E}_n , $\vec{d}p$ no es otro que el elemento de volumen asociado a la forma cuadrática adjunta sobre \overleftarrow{E}_n .

27. Caso particular: E_4 con forma cuadrática de signatura (3;1).

En una base ortogonal de \vec{E}_4 el producto escalar de un vector por sí mismo se escribe

$$x^2 = (\vec{x} | \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 \quad ; \quad x_0 = ct \quad ; \quad t = \text{tiempo}$$

Una base ortogonal de este tipo es lo que se llama un referencial de Lorentz.

En el espacio dual \overleftarrow{E}_4 : tendremos

$$p^2 = (\overleftarrow{p} | \overleftarrow{p}) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 .$$

G es ahora el grupo de Lorentz inhomogéneo, es decir, el grupo de los operadores afines que conservan la forma cuadrática.

Formamos después \overrightarrow{G} y \overleftarrow{G} ; \overrightarrow{G} es el grupo de operadores lineales que conservan la forma cuadrática, y \overleftarrow{G} el grupo de los operadores contragredientes.

Nuestro problema general es buscar sobre \overleftarrow{E}_4 las medidas

$\mu \geq 0$. \overleftarrow{G} -invariantes y extremales.

Hemos visto que el soporte de una medida μ de tal naturaleza, está contenido en la adherencia de una sola órbita.

Analícemos, en primer lugar, las órbitas en el caso del grupo de Lorentz.

Es conocido que hay cuatro categorías de órbitas en \overleftarrow{E}_4 , a saber:

1ª Categoría. Está dada por los hiperboloides de dos napas. La ecuación de estos hiperboloides es

$$p^2 = -M^2$$

Si se considera el grupo de Lorentz entero, una órbita está compuesta por las dos napas del hiperboloide.

2ª Categoría. Está dada por los hiperboloides de una napa de ecuación

$$p^2 = k^2$$

3ª Categoría. El cono de luz entero, sin el origen

$$p^2 = 0$$

4ª Categoría. El origen, que constituye una órbita singular.

28. Las distribuciones invariantes por el grupo de Lorentz.

Methée (1) ha encontrado una expresión de las distribuciones

(1) Loc. cit.

invariantes por el grupo de Lorentz entero.

En este párrafo recordaremos esos resultados. Hagamos

$$28.1 \quad v = p^2 = (\overleftarrow{p} | \overleftarrow{p}) = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2 - p_n^2 ,$$

en una base ortonormal.

Si consideramos ahora una función $f(v)$ de la variable real v , y reemplazamos v por p^2 obtenemos una función de p , $f(p^2)$ que es Lorentz-invariante, pues lo es p^2 .

Tratemos ahora de generalizar el pasaje de $f(v)$ a $f(p^2)$ para una distribución.

Sea T_v una distribución definida sobre la recta real R . Queremos ver si al reemplazar v por p^2 obtenemos una distribución T_{p^2} definida en \overleftarrow{E}_n .

Ello no es posible sin algunas restricciones. Si T_v está definida sobre toda la recta R , es decir, si $T_v \in \mathcal{D}'(R)$, sólo es posible definir T_{p^2} en el complementario del origen 0 de \overleftarrow{E}_n , es decir, $T_{p^2} \in \mathcal{D}'(\overleftarrow{E}_n - 0)$ pues hay una complicación en el origen 0 .

Para obtener tal definición utilizaremos el mismo principio utilizado en el caso de la definición de $H_{x-\xi}$ en 14.

Razonaremos de la siguiente manera. Si hay una aplicación

$$\mathcal{D}'(R) \longrightarrow \mathcal{D}'(\overleftarrow{E}_n - 0)$$

que sea continua con la topología de las distribuciones, y tal que para cada función continua $f(v)$ se obtenga $f(p^2)$, esta aplicación es única. Pues, en efecto, basta conocerla en un subespacio denso de $\mathcal{D}'(R)$ y las funciones continuas de una variable real forman tal subespacio denso.

Se podrá obtener entonces por un proceso particular cualquiera y será independiente de este proceso. (cf. 14, I y II).

Para efectuarlo tomemos una base en \overleftarrow{E}_n . Sea $\underline{a} \in \overleftarrow{E}_n$ un punto de CO , complemento del origen. Hay una vecindad de \underline{a} suficientemente pequeña tal que en ella se pueden tomar como coordenadas universales locales $(n - 1)$ de los p_y y la coordenada v ; es decir, tomaremos de lugar de las coordenadas

$$p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n,$$

las nuevas coordenadas

$$p_{y_1}, p_{y_2}, \dots, p_{y_{n-1}}, v,$$

Podemos ahora reordenar las segundas de manera de tener las mismas que las primeras excepto v que corresponderá a una cierta p_{y_n} . Se tiene entonces el Jacobiano de las nuevas variables respecto a las primeras

$$28.2 \quad \frac{\partial (p_{y_1}, p_{y_2}, \dots, p_{y_{n-1}}, v)}{\partial (p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v}{\partial p_1} & \frac{\partial v}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial v}{\partial p_{y_n}} & \dots & \frac{\partial v}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= + \frac{\partial v}{\partial p_{y_n}} = + 2 p_{y_n},$$

que muestra que se podía hacer tal cambio de coordenadas si hay una vecindad de \underline{a} donde una por lo menos de las derivadas parciales respec-

to de v es diferente de cero.

Pero las derivadas parciales de v respecto de las primeras coordenadas son nulas sólo en el origen 0 ; por consiguiente, fuera del origen hay puntos en los cuales una de tales derivadas parciales no es nula, de lo que se deduce que hay una vecindad donde podrán introducirse las coordenadas locales arriba mencionadas.

Veamos ahora como se escribe el valor de la función $f(p^2)$ sobre un elemento $\varphi \in \mathcal{D}(E_n)$. Será

$$28.3 \quad f(p^2)(\varphi) = \int \dots \int f(p^2) \varphi(p_1, p_2, \dots, p_n) dp_1 dp_2 \dots dp_n.$$

Como cada punto a tiene una vecindad del tipo introducido más arriba, es posible hacer un recubrimiento de $C0$ por un conjunto numerable de abiertos Ω_i de manera que cada Ω_i tenga las mismas propiedades que la vecindad de cada a ; se podrá tomar además una partición de la unidad α_i , subordinada a este recubrimiento, con lo cual 28.3 puede ponerse:

$$28.4 \quad \sum_i \int \dots \int \alpha_i(p) f(p^2) \varphi(p) dp,$$

donde en lugar de p_1, p_2, \dots, p_n se ha puesto p y dp en lugar de dp_1, dp_2, \dots, dp_n . La suma 28.4 es finita pues φ tiene un soporte compacto en $C0$ y sólo un número finito de los α_i son en consecuencia diferentes de cero sobre el soporte de φ .

Tomemos en cada Ω_i las nuevas coordenadas

$$p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_{n-1}}, v;$$

se tendrá para 28.4 :

$$28.5 \quad \sum_i \int \dots \int \alpha_i(p) f(v) \varphi(p) \frac{dp_{v_1} dp_{v_2} \dots dp_{v_{n-1}} dv}{2 |p_{v_n}|}$$

pues, en virtud de 28.2

$$\begin{aligned} dp &= dp_1 dp_2 \dots dp_n = \left| \frac{\partial(p_1, p_2, \dots, p_n)}{\partial(p_{v_1}, p_{v_2}, \dots, p_{v_{n-1}}, v)} \right| dp_{v_1} dp_{v_2} \dots dp_{v_{n-1}} dv = \\ &= \frac{1}{2 |p_{v_n}|} dp_{v_1} dp_{v_2} \dots dp_{v_{n-1}} dv . \end{aligned}$$

La expresión 28.5 se puede escribir entonces

$$\begin{aligned} 28.6 \quad \sum_i \int f(v) dv \int \dots \int \alpha_i(p) \varphi(p) \frac{dp_{v_1} \dots dp_{v_{n-1}}}{2 |p_{v_n}|} = \\ = \sum_i \int f(v) \phi_i(v) dv . \end{aligned}$$

Además p se puede expresar mediante las coordenadas $p_{v_1}, \dots, p_{v_{n-1}}, v$, de manera que la integral múltiple que figura en 28.6 es la integral $(n-1)$ -uple que hemos llamado $\phi_i(v)$.

Las funciones $\phi_i(v)$ son indefinidamente diferenciables con soporte compacto, pues lo son las funciones $\alpha_i(p) \varphi(p)$; si se integra respecto de todas las variables excepto v , se obtienen funciones de v , indefinidamente diferenciable con soporte compacto.

El razonamiento es análogo al caso del producto tensorial de distribuciones (1).

Pasemos ahora a la generalización correspondiente al caso de una distribución.

Si T_v es una distribución sobre R_v , definiremos el valor

(1) T.D. I § 5 .

de T_{p^2} sobre una función $\varphi(p)$, cuyo soporte no contenga el origen, de la siguiente manera:

$$28.7 \quad T_{p^2}(\varphi(p)) = \sum_i T_v \left(\int \dots \int \alpha_i(p) \varphi(p) \frac{dp_{y_1} \dots dp_{y_{n-1}}}{2|p_{y_n}|} \right) = \\ = \sum_i T_v(\phi_i(v))$$

La relación 28.7 muestra que la distribución T_{p^2} está bien definida. Además, se puede ver que si $T_v \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $T_{p^2} \rightarrow 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n - 0)$.

En efecto, supongamos que $\varphi(p)$ queda acotada en $\mathcal{D}(\mathbb{E}_n)$. Entonces la función $\phi_i(v)$, elemento de \mathcal{D}_v , definida por la integral sobre la superficie del hiperboloide queda también acotada, y como $T_v \rightarrow 0$, los números $T_v(\phi_i(v))$ tienden a cero uniformemente, y también su suma \sum_i ; por consiguiente: $T_{p^2}(\varphi(p)) \rightarrow 0$ uniformemente, para $\varphi(p)$ acotada en $\mathcal{D}(\mathbb{E}_n)$; en definitiva $T_{p^2} \rightarrow 0$.

El proceso particular que hemos desarrollado para definir T_{p^2} no aparece como un proceso intrínseco, pues aparentemente depende de la elección de la base del recubrimiento en \mathbb{CO} y de la partición de la unidad.

Pero observemos que consiste en una aplicación continua de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n - 0)$ tal, que se verifica para las funciones continuas.

Por consiguiente, cualquier otro proceso que se emplee para definirla llevará al mismo resultado de acuerdo a lo que hemos dicho más arriba.

Hay otra dificultad: no se ve de inmediato que el resultado así obtenido sea Lorentz-invariante, pues si se hace una transformación de Lorentz, se transforma completamente todo el proceso de definición.

Pero se ve razonando por continuidad. Pues si T_v es una distribución en R , se puede expresar por un límite, en el sentido de las distribuciones, de funciones continuas o indefinidamente diferenciables $f(v)$, en virtud de la regularización de T_v .

Pero en virtud de la continuidad, T_{p^2} será el límite de $f_n(p^2)$, en el sentido de las distribuciones, y como las funciones $f_n(p^2)$ son Lorentz invariantes, también lo será T_{p^2} .

Se puede ver también de la siguiente manera. Si hacemos una transformación de Lorentz obtenemos una nueva correspondencia

$$\mathcal{D}'(R) \longrightarrow \mathcal{D}'(E_n - 0)$$

que es también continua y que para las funciones continuas coincide con la operación definida; por consiguiente obtenemos la misma operación, lo cual significa que cada T_{p^2} es Lorentz-invariante.

Methée ha demostrado que de esta manera se obtienen todas las distribuciones Lorentz-invariantes en \mathcal{CO} .

29. Las medidas minimales en el caso del grupo de Lorentz.

Consideremos el grupo de Lorentz entero.

a) Orbita de 1ª categoría. Hiperboloide de dos napas de ecuación $p^2 = -M^2$. (cfr. 27).

Busquemos la forma de la medida $\mu \geq 0$ con soporte en este hiperboloide y Lorentz-invariante.

Sabemos que fuera del origen 0 , debe tener la forma T_{p^2} ; pero, por otra parte, T_{p^2} corresponde a una distribución sobre R con

soporte en el punto $v = -M^2$, y son conocidas todas las distribuciones con soporte puntual en R ; tales distribuciones son combinaciones lineales de la medida de Dirac y sus derivadas.

Pero buscamos justamente una medida y no una distribución cualquiera; T_v debe ser entonces una medida puntual positiva y, a menos de un factor, hay una sola medida positiva que tenga como soporte el punto $v = -M^2$.

Tal medida es la medida de Dirac en dicho punto que notaremos con el símbolo δ_{v+M^2} , y que está definida por

$$29.1 \quad \delta_{v+M^2}(\varphi(v)) = \varphi(-M^2).$$

En definitiva, la única medida positiva que tiene su soporte en el hiperboloide considerado es, a menos de un factor, $\delta_{p^2+M^2}$ definida en C^0 . Pero si $M \neq 0$, no hay, como hemos dicho, dificultad en el origen 0 .

En efecto, se podrá definir esta distribución por "acoplamiento de partes" (1), teniendo en cuenta que la distribución definida por $\delta_{p^2+M^2}$ en C^0 y la distribución igual a cero en el complementario del hiperboloide coinciden en la intersección de ambos abiertos; queda así definida una distribución en todo el espacio.

Conclusión. Toda medida $\mu \geq 0$, cuyo soporte está contenido en el hiperboloide $p^2 = -M^2$ tiene la forma $c \delta_{p^2+M^2}$, donde c es una constante positiva.

Hay un enunciado recíproco general, que no hemos probado, a

(1) T.D.I. ch. I pag.26. Principe de "recollement des morceaux".

saber: si una medida $\mu \geq 0$ tiene su soporte en una sola órbita es necesariamente extremal. Para el caso particular que nos ocupa la medida es necesariamente minimal.

b) Orbita de 2ª categoría. Hiperboloide de una napa de ecuación $p^2 = k^2$.

En este caso la medida μ tiene por expresión

$$\int_{p^2 = k^2} .$$

Pero este caso no tiene, como lo veremos, interés en Física.

c) Orbita de 3ª categoría. Cono de luz de ecuación $p^2 = 0$.

Hay una dificultad, pues tendríamos $\mu = \int_{p^2} .$ que proviene de \int con soporte en $v = 0$, y a esta última le corresponde una distribución definida en \mathbb{C}^0 de \vec{E}_n , de acuerdo al resultado de Methée, pero que no está definida a priori en el origen mismo, y que no se puede prolongar inmediatamente.

Siguiendo a Methée, consideremos las distribuciones sobre los hiperboloides $p^2 = \pm \varepsilon$, definidas en el espacio entero.

Tomemos la distribución $\int_{p^2 \pm \varepsilon} .$ y veamos si existe límite de ésta cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Se demuestra que este límite existe y se llama por definición $\int_{p^2} .$ definida en el espacio entero.

Este límite es además Lorentz-invariante pues lo es $\int_{p^2 \pm \varepsilon} .$; tiene su soporte en el cono de luz y es minimal; pues si hay otra medida positiva que sea mayorada por ella, debe ser mayorada también fuera del origen, debe ser entonces proporcional a $\int_{p^2} .$ fuera del origen y

por lo tanto es proporcional a \int_{p^2} en el espacio entero con el agregado, tal vez, de una masa puntual en el origen; pero como el límite no tiene ninguna masa en el origen, una masa mayorada por aquella no puede tener masa alguna en el origen.

Por consiguiente, es proporcional a la masa \int_{p^2} siendo también extremal. Si hubiera otra medida positiva que tuviera su soporte en el cono de luz sería una combinación lineal de aquella y de la delta del origen, es decir, sería de la forma

$$\alpha \int_{p^2} + \beta \delta ,$$

pues de esta forma son todas las medidas que tienen su soporte en el cono de luz; si es minimal debe ser de la forma $\alpha \int_{p^2}$ o bien $\beta \delta$, pero esta última no tiene como soporte el cono, sino solamente el origen.

d) Orbita de 4ª categoría. Origen 0. La medida en este caso es la delta del origen δ .

Estudiemos ahora con más detalle las medidas obtenidas en cada caso.

Comencemos por el caso a), en el espacio \overleftarrow{E}_4 .

Para definir $\int_{p^2+M^2}(\varphi(p))$ hay que tomar el recubrimiento de $C0$. Sobre cada napa del hiperboloide $p^2 = -M^2$ se puede tomar siempre un mismo sistema de coordenadas posibles a saber:

$$p_1, p_2, p_3, v = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 ,$$

pues $J = \frac{\partial v}{\partial p_0} = -2p_0 \neq 0$ en cada napa del hiperboloide considerado.

El recubrimiento se forma en este caso de un sólo abierto que es el complementario del origen 00 , la suma \sum_i se reduce entonces a un sólo término.

Se tiene así

$$29.2 \quad \phi(v) = \int_{p^2=v} \varphi(p) \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{2|p_0|},$$

y por consiguiente el valor de $\int_{p^2+M^2}$ sobre $\varphi(p)$ será el valor de $\phi(v)$, para $v = -M^2$, pues en este caso es $T_v = \int_{v+M^2}$, lo cual da por resultado

$$29.3 \quad \int_{p^2+M^2} (\varphi(p)) = \int_{p^2=-M^2} \varphi(p) \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{2|p_0|}.$$

Mostremos ahora que $\int_{p^2+M^2}$ es temperada. Es evidente: pues podemos tomar para φ no sólo una función de \mathcal{D} sino de \mathcal{S} en cuyo caso la integral de 29.3 es aún convergente, pues siendo φ rápidamente decreciente en el infinito, dividiéndola por $|p_0|$ que crece indefinidamente, dicha integral es convergente y por consiguiente 29.3 define una forma lineal y continua sobre \mathcal{S} ; en otros términos $\int_{p^2+M^2}$ es temperada.

Se le puede aplicar entonces la transformada de Fourier \mathcal{F} . Esta transformada ha sido calculada por Methée (1) para el caso \overleftarrow{E}_n , pero la definición de \mathcal{F} dada por Methée es distinta de la introducida en este curso.

No daremos los detalles del cálculo para obtener la transfor-

(1) P.D.Methée. Transformées de Fourier de Distributions invariantes liées a la résolution de l'équation des ondes. Colloques Internationaux du C.N.R.S. Nancy, Avril 1956, pág.145.

mada de Fourier en este caso.

Notemos que la medida está definida en \overleftarrow{E}_4 , de manera que aplicaremos \overleftarrow{F} para obtener el núcleo correspondiente que será una distribución H en \overrightarrow{E}_4 dada por:

$$29.4 \quad H = \overleftarrow{F}(\delta_{p^2+M^2}) = \text{vp}(M\pi) \frac{N_1(2\pi M\sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}} Y(-x^2) + 2M \frac{K_1(2\pi M\sqrt{x^2})}{\sqrt{x^2}} Y(x^2)$$

donde: vp = valor principal de Cauchy,

N_1 = función de Neumann,

K_1 = " " Kelvin,

Y = " " Heaviside,

$x^2 = (\overrightarrow{x} | \overrightarrow{x})$.

Como x^2 es negativo en el interior del cono de luz y positivo en el exterior la expresión $\sqrt{-x^2}$ que figura en el primer sumando de 29.4 tiene sentido solamente en el interior del cono; por esta razón aparece el factor $Y(-x^2)$ cuyo valor es uno en el interior y cero en el exterior de dicho cono.

Análogamente, en el segundo sumando, aparece el factor $Y(x^2)$ que anula al segundo sumando dentro del cono donde no tiene sentido $\sqrt{x^2}$.

En definitiva, se toma una función de Neumann N_1 en el interior y una función de Kelvin K_1 en el exterior del cono. La suma define una función en todo el espacio y hay que tomar por último el v.p. (valor principal), entendido aquí en la misma forma que la definida por Methée, a saber:

Tomemos una función o distribución de la variable v y hagamos el cambio de variables $v = x^2$ en el sentido en que lo hemos hecho más arriba para el espacio dual \overleftarrow{E}_n .

Tenemos que encontrar primero la correspondiente distribución

en \mathbb{R} . De acuerdo al desarrollo asintótico de $N_1(v)$ y $K_1(v)$ en el origen $v = 0$ dados por

$$N_1(v) \sim -\frac{2}{\pi} \frac{1}{v},$$

$$K_1(v) \sim \frac{1}{v},$$

vemos que la singularidad se encuentra en dicho origen.

Si se tiene en cuenta 29.4 se ve que en la vecindad de $v = 0$ se tiene una expresión de tipo $\frac{2M}{v}$ para $v \gg 0$. En este caso se puede definir la distribución valor principal de Cauchy.

Se tiene entonces bien definida en \mathbb{R} tal distribución; basta tomar la imagen por el cambio de variables $v = x^2$ en el sentido de Methée para obtener la definición en todo el espacio \vec{E}_4 . Pero así no queda definida inmediatamente en todo el espacio, pues existe una dificultad en el origen 0 de \vec{E}_4 .

Methée ha desarrollado cálculos especiales con las partes finitas que aparecen en este problema, que muestran que la imagen referida tiene sentido en todo el espacio y que este sentido coincide con lo que nosotros deseamos.

La idea es la siguiente: para calcular el valor de tal distribución sobre una función φ en \vec{E}_4 , se calcula primero sobre las regiones $p^2 \leq -\varepsilon^2$; $p^2 \geq \varepsilon^2$.

Se obtiene así un resultado que depende de ε y se calcula por último el límite para $\varepsilon \rightarrow 0$.

Digamos que en Física la distribución H se llama propagador y se escribe con el símbolo Δ obteniéndose

$$H = 2\pi \Delta_{2\pi M}(\vec{x})$$

Δ es una de las llamadas "funciones singulares" de la Electrodinámica Cuántica.

Observación. El método que hemos utilizado desde el comienzo, consiste, como se ha visto, en una serie de desarrollos teóricos que llevan a $\int_{p^2+M^2}$.

Podría decirse que todos esos desarrollos han sido simples, pues no han existido en realidad grandes complicaciones de cálculo. En cambio, el último paso hecho para obtener H consiste en un cálculo muy complicado que no hemos dado aquí.

Pero digamos que no hubiera sido posible predecir en forma inmediata que una distribución Lorentz-invariante de tipo positivo y minimal tuviera la forma que hemos dado en 29.4 .

Finalmente veamos para este caso a) cuál es el espacio \mathcal{H} correspondiente. Recordemos que hemos dicho más arriba (conclusión de a)) que la medida $\int_{p^2+M^2}$ aparece multiplicada por una constante positiva.

El núcleo correspondiente tendrá entonces la misma constante. Pero los espacios de Hilbert correspondientes a todos los núcleos proporcionales son los mismos espacios con norma más grande que el correspondiente al núcleo dado.

Se puede decir entonces que definen la misma partícula elemental, pues para ésta, los movimientos son solamente los elementos de norma igual a la unidad.

Para formar \mathcal{H} una vez conocida H recordemos que hay que tomar los elementos de la forma $H * \varphi$. Como producto escalar tomamos:

$$(H * \varphi | H * \psi)_{\mathcal{H}} = \text{Tr}(H * \varphi * \tilde{\psi}) ,$$

después de elegir un origen en el espacio afín E_4 para que tenga sentido el segundo miembro de esta expresión.

Se obtiene así un espacio prehilbertiano y por último habrá que tomar la completación. En esta forma obtenemos la descripción completa de un primer tipo de partícula elemental.

Tomemos el caso b). Se tiene un hiperboloide de una napa. Hay dificultad pues el cambio de coordenadas del caso anterior no es adecuado, pues p_0 se anula en la intersección del hiperboloide con el plano $p_0 = 0$.

Hay que tomar un recubrimiento. Además no hay en C_0 un sólo sistema de coordenadas, y por otra parte la transformada \overline{F} es muy difícil.

No consideraremos este caso pues como lo hemos adelantado y veremos luego, no interesa en Física.

Tomemos el caso c). Se puede utilizar el resultado 29.3 del caso a) calculando la integral sobre el cóno en lugar del hiperboloide. Pero se tiene un cociente por $|p_0|$ que en este caso se anula en el origen. Pero $\frac{1}{2|p_0|}$ es localmente sumable en el origen. En efecto, se tiene

$$|p_0| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \quad ;$$

Si designamos con q_i las coordenadas p_1, p_2, p_3 (coordenadas de espacio) y con p_0 la misma p_0 (coordenada de tiempo), tendremos:

$$\int \varphi(p) \frac{dq_1 dq_2 dq_3}{2|q|} = \iiint \varphi(q_1, q_2, q_3, \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}) \frac{dq_1 dq_2 dq_3}{2\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}$$

teniendo en cuenta que en el cono se verifica $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_0^2 = 0$,
y por consiguiente

$$|p_0| = |q| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} .$$

Pero en el espacio de tres dimensiones una potencia de exponente estrictamente inferior a 3 de $\frac{1}{q}$ define, como es sabido, una función localmente sumable; define por tanto una distribución que es temperada por las mismas razones que en el caso a), pues la singularidad en el origen no cambia su carácter de temperada.

La expresión de H es la siguiente:

$$29.5 \quad H = \overline{F'}(S_{p^2}) = \pi \frac{1}{2\pi x^2} ,$$

que de acuerdo con Methée se obtiene como límite de 29.4, en el sentido de las distribuciones temperadas, para $M \rightarrow 0$.

La "función singular" correspondiente de la Electrodinámica Cuántica es llamada $D(x)$ y se tiene, en este caso

$$H = 2\pi D(\vec{x}) .$$

La partícula física correspondiente es una partícula escalar de masa cero; podría llamarse fotón escalar, pues el fotón es de masa cero pero de espín uno.

Analizemos el caso d). La medida correspondiente en E_4 es la S del origen. Por consiguiente

$$H = \overline{F'}(S) = 1 .$$

Para ver a qué partícula corresponde, observemos que será $K_{x,5} = 1$ y por lo tanto \mathcal{H}_0 es el espacio de las funciones constantes;

el espacio de las funciones complejas constantes es un espacio vectorial en el cual puede introducirse el producto escalar

$$(\alpha | \beta)_{\mathcal{H}} = \alpha \overline{\beta} ,$$

con lo cual se obtiene un espacio de Hilbert de dimensión igual a la unidad. En este caso, hay un sólo movimiento posible. Los operadores de masa y velocidad, para esta partícula, son cero. Podemos admitir que tal partícula representa el vacío.

30. Casos de algunos subgrupos importantes del grupo de Lorentz.

Hemos dicho ya, que el grupo de Lorentz inhomogéneo es el subgrupo del grupo afín que conserva una forma cuadrática de signatura (3;1).

En este párrafo nos plantearemos el problema de la determinación de las partículas elementales en el caso de algunos subgrupos del grupo de Lorentz inhomogéneo, a saber:

a) Grupo de Lorentz de orientación. Es el subgrupo del grupo de Lorentz inhomogéneo, formado por los operadores que conservan la orientación del espacio E_4 .

Es un subgrupo distinguido de índice igual a dos, lo cual significa que el grupo total tiene, respecto a este subgrupo, dos clases: la clase formada por el subgrupo mismo, clase de los operadores que conservan la orientación de E_4 y la clase de los operadores que la invierten; los determinantes de tales operadores tienen como valor

± 1 respectivamente.

Se trata de un grupo más pequeño que el grupo total, pero como contiene también las traslaciones y deja invariantes los volúmenes, puede plantearse todo el problema de la partícula elemental desde su comienzo.

Pero observemos que no habrá en este caso ninguna diferencia con respecto al caso general, pues las órbitas en \overleftarrow{E}_4 son las mismas, las medidas positivas son las mismas y por consiguiente los espacios de Hilbert correspondientes son los mismos.

En consecuencia, las partículas elementales con respecto al grupo de Lorentz entero o con respecto al subgrupo de Lorentz de orientación, son las mismas.

b) Grupo de Lorentz ortocrono. Es el grupo de los operadores de Lorentz que conserva el sentido del tiempo.

Se puede estudiar más fácilmente sobre el espacio \overrightarrow{E}_4 asociado: sabiendo que el cono de luz tiene dos hojas, se ve que un operador puede conservar las hojas del cono o intercambiarlas.

Llamaremos ortocrono a un operador de Lorentz que conserva las hojas del cono, lo que equivale a decir que conserva el sentido del tiempo; y llamaremos operador anticrono a un operador que lo invierte.

Existe, pues, un subgrupo distinguido de índice igual a dos que es el subgrupo ortocrono; el grupo de Lorentz inhomogéneo tiene dos clases respecto a él: la clase de los operadores ortocronos y la de los anticronos.

El problema de las partículas elementales para el caso del subgrupo ortocrono es diferente del caso general, pues las órbitas en

E_4 son diferentes en uno u otro caso.

En efecto, salvo los hiperboloides de una napa que son los mismos, pero que no interesan en Física, en los hiperboloides de dos napas, cada napa constituye una órbita.

Las órbitas resultan, por tanto, más pequeñas que en el caso general. Análogamente para el cono de luz.

Por consiguiente, las medidas positivas son más pequeñas y los espacios de Hilbert son también diferentes, como lo veremos en el caso siguiente.

c) Grupo de Lorentz propio. Hay una intersección de los grupos de los casos a) y b) que es el grupo de los operadores que conservan el sentido del tiempo y la orientación de E_4 .

Esta intersección constituye un subgrupo de índice cuatro. Hay, con respecto a dicho subgrupo, cuatro clases de operadores en el grupo de Lorentz entero: la clase de los operadores que conservan la orientación y el sentido del tiempo; la clase de los operadores que conservan el sentido del tiempo e invierten la orientación; la clase de los que invierten el sentido del tiempo y conservan la orientación; y la clase de los que invierten ambas cosas a la vez.

Se puede mostrar que estas cuatro clases son las cuatro componentes conexas del Grupo de Lorentz.

Observemos ahora que para el Grupo de Lorentz propio las órbitas son las mismas que para el grupo ortocrono, pues el cambio de la orientación no cambia las órbitas.

Por consiguiente, las partículas elementales respecto al subgrupo de Lorentz propio son las mismas que las obtenidas respecto al gru-

po de Lorentz ortocrono. Habrá que examinar, entonces, cualquiera de los dos casos.

En primer lugar veremos cuáles son las medidas invariantes con las nuevas órbitas que aparecen ahora.

Para ello es necesario introducir una nueva idea que se encuentra también en la Tesis ya citada de Methée, idea que resumimos a continuación.

Hemos visto que si T_v es una distribución en la recta R se puede definir la distribución T_{p2} en $\overleftarrow{E}_4 - 0$, y las distribuciones de este tipo son las únicas Lorentz-invariantes en el complemento del origen 0 de \overleftarrow{E}_4 .

Sean ahora, de acuerdo con Methée, S_v y T_v dos distribuciones en R que coinciden en el abierto $v > 0$, lo cual tiene sentido, pues es siempre posible escribir que dos distribuciones son iguales en un conjunto abierto.

Consideremos en CO de \overleftarrow{E}_4 , la distribución que es igual a S_{p2} en el abierto definido por el complemento del cono de luz negativo.

S_{p2} está definida en todo el espacio, pero sólo la consideraremos en el abierto mencionado.

De análoga manera consideraremos T_{p2} en el abierto definido por el complemento del cono de luz positivo.

Tenemos así dos distribuciones, cada una de las cuales está definida en un conjunto abierto en CO de \overleftarrow{E}_4 .

Estas dos distribuciones coinciden en la intersección de ta-

definido analíticamente por la expresión $p^2 > 0$.

Tenemos, en definitiva, un recubrimiento de \mathbb{C}^0 formado por dos conjuntos abiertos, los complementos de los conos positivos y negativos.

En cada abierto hay una distribución S_{p^2} y T_{p^2} que coinciden en la intersección $p^2 > 0$; se tiene así una situación bien conocida en la teoría de las distribuciones, a saber: se tiene dos distribuciones U_1, U_2 definidas en dos conjuntos abiertos Ω_1 y Ω_2 respectivamente, y tales que U_1 coincide con U_2 en la intersección $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Por el principio de "acoplamiento de partes" ⁽¹⁾ estas dos distribuciones definen una distribución U en la unión de los abiertos, de la manera que sigue.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}$, con soporte en la unión de los abiertos, y tratemos de calcular el valor $U(\varphi)$. Tomemos una partición de la unidad α_1, α_2 , respecto de dichos abiertos, siendo, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{D}$; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Se tiene

$$U(\varphi) = U_1(\alpha_1 \varphi) + U_2(\alpha_2 \varphi),$$

y este valor es independiente de α_1 y α_2 .

Para nuestro caso S_{p^2}, T_{p^2} definen entonces en \mathbb{C}^0 una distribución que llamaremos también U , de tal manera que $U = S_{p^2}$ en el complemento del cono negativo y $U = T_{p^2}$ en el complemento del cono positivo.

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ con soporte en \mathbb{C}^0 , el valor $U(\varphi)$ se cal-

(1) Principe du recollement des morceaux (loc.cit.).

cula, después de tomar una partición de la unidad respecto a los complementos de los conos, por la siguiente relación:

$$U(\varphi) = S_{p^2}(\alpha_1 \varphi) + T_{p^2}(\alpha_2 \varphi) \quad ,$$

siendo este valor independiente de α_1 y α_2 .

Se obtiene así una distribución en C^0 de \overleftarrow{E}_4 , definida por un par de distribuciones S_v, T_v sobre R , que coinciden para $v > 0$.

Esta distribución U definida por el par $(S_v; T_v)$ es invariante por el grupo de Lorentz propio, pero no por el grupo de Lorentz entero, pues si tomamos un operador \bar{O} del grupo de Lorentz propio, \bar{O} deja invariantes a S_{p^2} y T_{p^2} definidas en C^0 de \overleftarrow{E}_4 y también deja invariantes a los complementos de los conos, y por lo tanto deja invariante al sistema formado por S_{p^2} en el complemento del cono negativo y T_{p^2} en el complemento del cono positivo.

En conclusión, la distribución formada por el par $(S_{p^2}; T_{p^2})$ queda invariante frente al grupo de Lorentz propio. Pero se ve que no es invariante por un operador anticrono, por ejemplo; pues si \bar{O} es un tal operador, \bar{O} deja invariante a S_{p^2} , como todo operador de Lorentz deja también invariante a T_{p^2} pero intercambia los conos, y por tanto sus complementos y por consiguiente el par $(S_{p^2}; T_{p^2})$ se transforma en el par $(T_{p^2}; S_{p^2})$ que es una nueva distribución.

Se obtienen así por el método expuesto distribuciones que son invariantes por el grupo de Lorentz ortocrono pero no por el grupo de Lorentz entero y Methée ha demostrado que en esta forma se obtienen todas las distribuciones invariantes por el grupo de Lorentz propio en C^0 de \overleftarrow{E}_4 .

31. Las medidas positivas invariantes por el grupo de Lorentz propio.

Consideremos las órbitas correspondientes a este grupo.

Tomemos en primer lugar una órbita definida por un hiperboloide de una napa.

Una medida positiva con soporte en esta órbita e invariante por el grupo de Lorentz propio, debe tener su soporte en dicho hiperboloide; su conocimiento en el C_0 es suficiente para conocerla en todo el espacio, pues dicho hiperboloide no contiene el origen O . Para definirla se debe usar el principio de acoplamiento de partes.

Debe ser una distribución definida por un par de distribuciones de R con soportes en un punto de R que cumpla la condición $v > 0$. Se tiene entonces:

$$S_v = T_v = \int_{v-k} ,$$

que definen la distribución ya considerada en el caso del grupo de Lorentz entero, a saber: \int_{p^2-k} .

Por consiguiente, para esta órbita la invariancia para el grupo de Lorentz ortocrono, para el grupo entero, o para el de orientación es siempre la misma obteniéndose en definitiva el mismo espacio de Hilbert que en el caso anteriormente tratado.

Veamos, en segundo lugar, la órbita definida por una hoja de un hiperboloide de dos napas contenida en el cono de luz positivo.

La medida buscada estará definida de la siguiente manera: en el abierto complementario del cono de luz negativo: la distribución \int_{v+M^2} , es decir, \int con soporte en un punto de R para $v < 0$; y en el abierto complementario del cono de luz positivo: la distribución

igual a cero.

Obtenemos en definitiva la distribución que corresponde al

par

$$(\delta_{v^2+M^2}; 0)$$

par que define una distribución distinta de $\delta_{p^2+M^2}$.

Además, como el soporte de la distribución así definida no contiene al origen, se puede prolongar a una distribución en el espacio entero sin ninguna dificultad.

Se puede hacer un razonamiento análogo, considerando la hoja del hiperboloide de dos napas contenida en el cono de luz negativo.

En conclusión, obtenemos dos distribuciones definidas por los pares:

$$31.1 \quad (\delta_{p^2+M^2}; 0) \quad \text{y} \quad (0; \delta_{p^2+M^2});$$

cuya suma daría la distribución

$$\delta_{p^2+M^2},$$

que hemos encontrado anteriormente.

En Física se acostumbra escribir 31.1 con la notación

$$31.2 \quad \delta_{p^2+M^2} Y(p) \quad \text{y} \quad \delta_{p^2+M^2} Y(-p)$$

respectivamente, pues si tomamos la medida $\delta_{p^2+M^2}$ que tiene como soporte las dos hojas del hiperboloide y se la multiplica por la "función de Heaviside del cono" $Y(p)$ ó $Y(-p)$, se obtienen las medidas que tienen como soporte cada hoja por separado.

Pero esta notación tiene el inconveniente que hace aparecer

un producto multiplicativo de distribuciones que siempre trae cuestiones delicadas, no así el par dado por cualquiera de las 31.1 .

Solamente desde el punto de vista simbólico pueden ser utilizadas sin peligro.

Veamos por último las órbitas definidas por las hojas del cono de luz y el origen.

Obtenemos, con un razonamiento análogo al anterior

$$(\delta_{p^2} ; 0) \quad \text{y} \quad (0 ; \delta_{p^2})$$

por una parte, y la medida de Dirac δ del origen, por otra.

La dificultad en el origen 0 se salva en la forma que hemos visto anteriormente.

Siguiendo con el método que hemos analizado más arriba, obtenidas estas nuevas medidas positivas, se deben tomar sus transformadas de Fourier inversas $\overline{\mathcal{F}}$, para obtener las distribuciones H de tipo positivo correspondientes, llamadas en Física propagadores.

Para hacerlo observemos que habíamos visto la siguiente relación

$$31.3 \quad \overline{\mathcal{F}}(\delta_{p^2+M^2}) = 2\pi \Delta_{2\pi M} ,$$

pero podemos admitir que la medida $\delta_{p^2+M^2}$ puede ser considerada como el par $(\delta_{p^2+M^2} ; \delta_{p^2+M^2})$ de acuerdo a lo visto en este párrafo.

Es decir

$$31.4 \quad \overline{\mathcal{F}}(\delta_{p^2+M^2} ; \delta_{p^2+M^2}) = 2\pi \Delta_{2\pi M} .$$

En virtud de cálculos análogos a los de 31.1 , que no con-

signamos aquí se puede ver que la transformada \overline{F} del par

$$(\delta_{p^2+M^2}; -\delta_{p^2+M^2})$$

es la siguiente:

$$31.5 \quad \overline{F}(\delta_{p^2+M^2}; -\delta_{p^2+M^2}) = i(-M\pi) \frac{J_1(2\pi M \sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}} Y(-x^2) \mathcal{E}(x) + \delta_{x^2} \mathcal{E}(x)$$

donde: J_1 = función de Bessel,

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} +1 & \text{en el cono positivo} \\ -1 & \text{en el cono negativo} \end{cases}$$

$$\delta_{x^2} = \text{delta del cono.}$$

Obsérvese que no aparece el símbolo νp pues la función

$$\frac{J_1(2\pi M \sqrt{-x^2})}{\sqrt{-x^2}}$$

es una función entera.

En Física se acostumbra a designar con el símbolo $2i\pi(\Delta_1)_{2\pi M}$ a la distribución dada por 31.5.

Por semisuma y semidiferencia de 31.4 y 31.5 obtenemos las transformadas \overline{F} que interesan en nuestro caso, a saber:

$$31.6 \quad \overline{F}(\delta_{p^2+M^2}; 0) = 2\pi \frac{\Delta^+ + i\Delta_1}{2} = 2\pi \Delta^-_{2\pi M} ;$$

$$31.7 \quad \overline{F}(0; \delta_{p^2+M^2}) = 2\pi \frac{\Delta^- - i\Delta_1}{2} = 2\pi \Delta^+_{2\pi M} ,$$

que corresponden en Física a las llamadas "funciones singulares" $\Delta^-_{2\pi M}$ y $\Delta^+_{2\pi M}$.

La transformada de Fourier de la primera tiene su soporte en el cono positivo, y la transformada de Fourier de la segunda, en el cono negativo, en contraposición a lo que se hace en Física a causa de que

allí se usa la transformada de Fourier con signo menos en la variable tiempo.

Por razones que veremos luego, sólo $\Delta_{2\pi M}^+$ tiene interés físico.

32. La ecuación de Klein-Gordon.

Vamos a mostrar ahora una propiedad de la distribución H asociada a la medida μ , y una propiedad de la distribución de ondas Ψ .

Supongamos una partícula correspondiente al valor $M^{(1)}$; consideremos el hiperboloide de dos napas, si se trata del grupo de Lorentz entero, o cada una de hojas de dicho hiperboloide si se trata del grupo de Lorentz ortocrono; en particular puede tomarse el caso $M = 0$ en el que consideraremos los conos respectivos.

Teorema. La distribución H que corresponde a cada M , satisface a la ecuación de Klein-Gordon:

$$32.1 \quad (\square - 4\pi^2 M^2) H = 0 ,$$

en el sentido de las distribuciones. Además cada distribución de ondas

$\Psi \in \mathcal{H}_M$, donde \mathcal{H}_M es el espacio de Hilbert de la partícula correspondiente a M , satisface también a la ecuación de Klein-Gordon

$$32.2 \quad (\square - 4\pi^2 M^2) \Psi = 0 .$$

En estas fórmulas \square es el D'Alembertiano.

(1) Diremos, en tal caso, partícula de parámetro M .

Es conocido que existe un operador invariante Lorentz que en cada referencial tiene como expresión

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} .$$

En Matemática este operador es usado con signo cambiado.

Demostración del Teorema. Veamos primero 32.1 . La distribución H está definida en \vec{E}_4 . Transformando por Fourier el primer miembro obtenemos:

$$- 4\pi^2 M^2 (p^2 + M^2) \mu ,$$

pues

$$\mathcal{F} \square = - 4\pi^2 M^2 p^2 ; \text{ (cfr. 18.5)}$$

μ es la medida asociada a H .

Pero esta medida tiene su soporte en el hiperboloide $p^2 + M^2 = 0$ o en una de sus hojas. El producto $(p^2 + M^2) \mu$ es entonces nulo pues

$$((p^2 + M^2) \mu)(\varphi) = \mu((p^2 + M^2)(\varphi)) = \int_{p^2 + M^2 = 0} (p^2 + M^2) \varphi d\mu = 0$$

en virtud de la definición de la multiplicación de una medida por una función indefinidamente diferenciable: $p^2 + M^2$. Pero el segundo miembro es la integral de la función $(p^2 + M^2) \varphi$ sobre el hiperboloide respecto a la medida μ y esta función es nula sobre el hiperboloide; la integral es por lo tanto nula.

En cuanto a 32.2 , tomemos un origen O en el espacio afín E_4 , de manera de considerarlo como el espacio vectorial \vec{E}_4 .

Hemos visto más arriba , (20.5) , que el transformado del es-

espacio de Hilbert \mathcal{H} por \mathcal{F} es otro espacio de Hilbert, es decir, si $\Psi \in \mathcal{H}_M$, $\mathcal{F}\Psi$ tiene la forma $\Psi\mu$, donde $\Psi \in L^2_\mu$.

Efectuando la transformación de Fourier del primer miembro de 32.2, obtenemos

$$- 4\pi^2 M^2 (p^2 + M^2)(\Psi\mu) .$$

Pero, de la misma manera que en el caso anterior,

$$((p^2 + M^2)(\Psi\mu))(\varphi) = \int_{p^2 + M^2 = 0} (p^2 + M^2) \varphi \Psi d\mu = 0 ,$$

pues la función $(p^2 + M^2)\varphi\Psi$ que figura en la integral es nula en el soporte $p^2 + M^2 = 0$ de μ .

En lo que precede hemos hablado de partícula de parámetro M .

En lo que sigue veremos el significado físico de este parámetro.

Se sabe en Física Cuántica Clásica que, para una partícula, la cantidad de movimiento mv_j en la dirección x_j es un valor propio del operador $\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

De la misma manera la energía $E = mc^2$ es un valor propio del operador $-\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial t}$, o bien la magnitud $\frac{E}{c} = mc$ es un valor propio del operador $-\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial ct} = -\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$.

Por consiguiente el valor de $m^2(v^2 - c^2)$ es definido por el operador $-\frac{h^2}{4\pi^2} \square$; en otros términos, el operador D'Alembertiano

\square corresponde a la magnitud

$$+ \frac{4}{h^2} m^2 (v^2 - c^2) .$$

Peró $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, donde m_0 es la masa en reposo; reem-

plazando este último valor en el anterior se obtiene

$$+ \frac{4\pi^2}{h^2} m_0^2 \frac{v^2 - c^2}{c^2 - v^2} c^2 = \frac{-4\pi^2 c^2}{h^2} m_0^2 ,$$

siendo m_0 la masa en reposo.

En definitiva, el operador \square tiene como valor propio la magnitud $\frac{4\pi^2 c^2}{h^2} m_0^2$.

Pero 32.2 significa que $\square \Psi = 4\pi^2 M^2 \Psi$, es decir, el valor $4\pi^2 M^2$ es un valor propio del operador \square para la función propia Ψ , y por lo tanto

$$\frac{4\pi^2 c^2}{h^2} m_0^2 = 4\pi^2 M^2 ,$$

o bien

$$M = \frac{m_0 c}{h} ,$$

es decir, M es proporcional a la masa en reposo de la partícula.

Observación. En estas consideraciones se han aceptado muchas cosas, en contraposición a toda la teoría anterior en que no se ha supuesto nada relacionado a la correspondencia entre la medición de la velocidad y el operador $-\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$, o de la energía y el operador $-\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial t}$, etc.

Hasta ahora con la sola hipótesis que la partícula es elemental hemos obtenido la ecuación de Klein-Gordon.

Para establecer la correspondencia antedicha necesitamos hacer hipótesis suplementarias que no haremos aquí.

En conclusión, en la ecuación de Klein-Gordon no intervienen otros principios de la Mecánica Cuántica que no sean los que suponen que la partícula es elemental.

Para terminar digamos que, entre las partículas aceptables, cada partícula se puede caracterizar por una constante M positiva o nula, su parámetro, si se trata del grupo de Lorentz entero, y de una constante y un signo (signo de la hoja del hiperboloide), si se trata del grupo de Lorentz propio.

33. La noción de distribución a valores vectoriales. (1)

Recordemos como se define una distribución escalar sobre la variedad indefinidamente diferenciable E_n de dimensión n .

Una distribución escalar T , elemento de $\mathcal{D}'(E_n)$ es una forma lineal y continua sobre $\mathcal{D}(E_n)$, es decir, una aplicación lineal y continua $\mathcal{D}(E_n) \rightarrow \mathbb{C}$ (\mathbb{C} cuerpo de los escalares).

Sea ahora F un espacio vectorial topológico, localmente convexo y completo.

Tratemos de definir una distribución vectorial sobre E_n , es decir, una distribución con valores en F .

Por analogía con el caso escalar diremos: una distribución vectorial \vec{T} , elemento de $\mathcal{D}'(E_n; F)$ es una aplicación lineal y continua $\mathcal{D}(E_n) \rightarrow F$.

Si \vec{T} es una distribución vectorial, entonces $\vec{T}(\varphi) \in F$. Además, si $\varphi \rightarrow 0$ en \mathcal{D} , por ejemplo si φ y sus derivadas parciales convergen uniformemente a cero, y conservan sus soportes en un compacto fijo, $\vec{T}(\varphi) \rightarrow 0$ en F .

La definición del soporte de una distribución vectorial no

(1) L.Schwartz. Théorie des distributions a valeurs vectorielles. Ann. Inst.Fourier 1958.

tiene dificultad.

Correspondencia entre funciones y distribuciones con valores en F . Para poder hablar de tal correspondencia es necesario ante todo fijar un elemento de volumen dx en la variedad E_n , lo mismo que en el caso escalar.

Sea \vec{f} una función continua definida en E_n con valores en F ; \vec{f} define una distribución de acuerdo a la relación

$$33.1 \quad \vec{f}(\varphi) = \int_{E_n} \vec{f}(x) \varphi(x) dx .$$

La integral que aparece aquí es una integral con valores vectoriales, pero si \vec{f} es continua. φ es continua con soporte compacto, el producto es continuo con soporte compacto, entonces la integral existe si F es completo. (Si F no es completo, el valor de la integral puede hallarse en la completación de F).

Por otra parte, si se introducen coordenadas en E_n , se pueden definir las derivadas parciales de una distribución vectorial \vec{T} , de acuerdo con la relación

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial x_j}(\varphi) = - \vec{T} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) .$$

Análogamente se definen otras propiedades usuales en las distribuciones escalares.

Veamos ahora la siguiente propiedad, que será de utilidad más adelante.

Sea \vec{T} una distribución con valores en F . Sea u una aplicación lineal y continua de F en otro espacio vectorial topológico G .

La imagen de \vec{T} respecto a u , que se notará con $u\vec{T}$, es

una distribución con valores en G definida por:

$$33.2 \quad u\vec{T}(\varphi) = u(\vec{T}(\varphi)) \quad ;$$

en el segundo miembro $\vec{T}(\varphi)$ es un elemento de F y su imagen por u es un elemento de G .

En particular, podemos tomar como u un elemento \overleftarrow{f}' del dual de F que es una aplicación lineal y continua de F en el cuerpo escalar C .

La imagen de \vec{T} por \overleftarrow{f}' es una distribución escalar, pues en virtud de 33.2 el segundo miembro será un elemento de C , es decir, un número complejo.

Dicha imagen será escrita con la notación

$$33.3 \quad \langle \vec{T}, \overleftarrow{f}' \rangle ,$$

y su valor sobre φ será por definición y en virtud de 33.2

$$33.4 \quad \langle \vec{T}, \overleftarrow{f}' \rangle (\varphi) = \langle \vec{T}(\varphi), \overleftarrow{f}' \rangle$$

pues en lugar de u ponemos ahora el producto escalar de dualidad 33.3.

Veamos ahora el siguiente

Teorema. Sea E_n un espacio afín y supongamos fijada en E_n una medida de Lebesgue. Si una distribución \vec{T} está definida por una función continua $\vec{f}(x)$, esta función es única.

En el caso escalar es conocido, pues si una distribución está definida por una función-localmente sumable, esta función es conocida p.p., pero si es además continua, una función continua conocida p.p. es conocida en todo el conjunto de definición.

En el caso vectorial es algo más difícil. Si T es una dis-

tribución definida por una función \vec{f} de acuerdo a 33.4 la distribución escalar $\langle \vec{T}, \vec{f}' \rangle$ está definida por $\langle \vec{f}, \vec{f}' \rangle$ que es una función escalar continua y está bien definida para todos los valores de x

Por consiguiente, la función $\vec{f}(x)$ que define la distribución \vec{T} es tal que para cada elemento \vec{f}' del dual de F , el producto escalar $\langle \vec{f}(x), \vec{f}' \rangle$ es bien conocido.

Entonces $\vec{f}(x)$, para x fijado, es un elemento de F cuyo producto escalar con todos los elementos del dual es bien conocido, es decir, él mismo es bien conocido.

El teorema sería falso si reemplazamos función continua por función localmente sumable, pues para cada elemento del dual habría un conjunto de medida nula que podría variar con dicho elemento.

Supongamos ahora que el espacio afín E_n sea considerado como producto $E_k \times E_m$ de dos espacios afines de dimensiones k y m respectivamente. Indicaremos con x e y puntos de cada uno de estos espacios.

Se tendrá: $n = k + m$.

Además, el espacio vectorial \vec{E}_n asociado a E_n es el producto, dado por la suma directa de los espacios vectoriales asociados a E_k y E_m , respectivamente.

El espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(E_n)$ será escrito en este caso con la notación $\mathcal{D}'_{x,y}$.

El Teorema de los Núcleos nos permite escribir canónicamente la relación

$$33.5 \quad \mathcal{D}'_{x,y} \sim \mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y) \sim \mathcal{D}'_y(\mathcal{D}'_x) ,$$

relación que interpretaremos diciendo que hay una correspondencia biuní-

voca entre las distribuciones de dos variables independientes, elementos de $\mathcal{D}'_{x,y}$, y las aplicaciones lineales y continuas de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x ; pero estas aplicaciones forman precisamente el espacio de las distribuciones de la variable y con valores en el espacio vectorial topológico de las distribuciones de la variable x .

También puede enunciarse esto mismo intercambiando x por y como lo indica el tercer término de la relación 33.5.

Tomemos ahora el núcleo $K_{x,y}$, considerado como distribución en x,y ; su valor sobre $\varphi(x,y)$ se define por medio de la expresión

$$K_{x,y}(\varphi(x,y)) .$$

Si consideramos a K como aplicación de \mathcal{D}_y en \mathcal{D}'_x , podemos decir que es la distribución que a cada $\varphi \in \mathcal{D}_y$ hace corresponder $K.\varphi$ elemento del espacio vectorial topológico \mathcal{D}'_x . Es decir, como distribución vectorial de la variable y con valores en \mathcal{D}'_x , es la distribución que a cada φ le hace corresponder lo que hemos llamado $K.\varphi$.

Considerada, en cambio, como distribución de x con valores en \mathcal{D}'_y es la distribución que a cada $\psi \in \mathcal{D}_x$ le hace corresponder lo que hemos llamado ${}^s K.\psi$.

El Teorema de los Núcleos nos muestra pues, que el espacio de las distribuciones con valores en otro espacio de distribuciones, es idéntico al espacio de las distribuciones definidas sobre el producto de los espacios de las variables.

Pero el Teorema de los Núcleos es un caso particular de teoremas más generales que se pueden aplicar a otros espacios distintos de \mathcal{D}'_x y \mathcal{D}'_y . Haremos una aplicación al caso de las distribuciones tem-

peradas con valores vectoriales.

Una distribución vectorial temperada, elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n; F)$ es una aplicación lineal y continua $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n) \rightarrow F$. Esta es una generalización natural de la definición de una distribución escalar temperada elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n)$ que es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{D}'(\mathbb{E}_n) \rightarrow C$, (C es el cuerpo escalar).

En forma análoga a 33.5 se muestra que

$$33.6 \quad \mathcal{D}'_{x,y} \sim \mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y) \sim \mathcal{D}'_y(\mathcal{D}'_x),$$

es decir, una distribución temperada de $\underline{x}, \underline{y}$ se puede considerar como distribución temperada de \underline{y} con valores en el espacio de las distribuciones temperadas de \underline{x} ; análogamente cambiando \underline{y} por \underline{x} .

Sea ahora $T_{x,y}$ una distribución definida en el producto de dos espacios afines en los que se ha fijado medida de Lebesgue.

Trataremos de ver si tiene algún significado decir que se puede fijar un valor particular a una variable para obtener una distribución de la otra.

A priori, no lo tiene, pues tratándose de una distribución, no tiene sentido fijar el valor de la variable.

Pero consideraremos a $T_{x,y}$ como elemento de \mathcal{D}'_x con valores en \mathcal{D}'_y , o sea como elemento de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y)$, y supongamos que como distribución vectorial sea una función continua vectorial; es decir, suponemos que $T_{x,y}$ es una función continua de \underline{x} con valores en \mathcal{D}'_y .

Hemos visto más arriba que si una distribución con valores vectoriales es una función continua, esta función está bien determinada. Entonces, se podrá fijar un valor cualquiera de \underline{x} , y obtendremos

una distribución de \underline{y} .

En este caso, y sólo en este caso, diremos que T es una distribución para la cual se puede fijar un valor de \underline{x} .

Más precisamente. Diremos que una distribución $T_{x,y}$ es una función continua de \underline{x} , si considerada como distribución de \underline{x} con valores en \mathcal{D}'_y es una función continua.

En este caso esta función continua está bien determinada y para cada valor de \underline{x} da una distribución de \underline{y} .

Es decir, para cada \underline{x} se tiene

$$\vec{f}(x) \in \mathcal{D}'_y,$$

y en este caso escribimos

$$T_{x,y} = f_y(x),$$

que significa que para cada \underline{x} , que puede ser fijado, obtenemos una distribución de \underline{y} .

La notación $f_y(x)$ indica justamente que se puede fijar \underline{x} obteniéndose una distribución de \underline{y} .

Veamos en este caso que significa ${}^S T. \Psi(y)$. Se tiene:

$$33.7 \quad {}^S T. \Psi(y) = f_y(x)(\Psi(y)),$$

pues hemos visto que interpretada ${}^S T$ como núcleo, elemento de $\mathcal{D}'_x(\mathcal{D}'_y)$, existe un elemento ${}^S T. \Psi(y)$; y en este caso, si es una función, debe ser una función continua de \underline{x} .

Pero en el segundo miembro de 33.7 se tiene que para cada \underline{x} , f_y es una distribución cuyo valor sobre $\varphi(y)$ da un número que depende de \underline{x} , es decir, una función de \underline{x} .

Por otra parte veamos qué significa $T. \varphi(x)$. Se tiene:

$$T. \varphi(x) = \int f_y(x) \varphi(x) dx ,$$

pues hemos visto (33.1) que si una distribución con valores vectoriales está definida por una función, su valor sobre $\varphi(x)$ se calcula por la integral del segundo miembro.

Por último, el valor de $T_{x,y}$ sobre una función $\varphi(x,y)$ se calculará de la siguiente manera:

$$T_{x,y}(\varphi(x,y)) = \int dx (f_y(x) \varphi(x,y)) ,$$

es decir, fijamos \underline{x} , obtenemos para $f_y(x)$ una distribución de \underline{y} y en $\varphi(x,y)$ una función φ de \underline{y} indefinidamente diferenciable a soporte compacto; tomamos el valor de la distribución $f_y(x)$ sobre esta función φ de \underline{y} , se obtiene un número complejo que depende de \underline{x} ; este número complejo es una función continua de \underline{x} con soporte compacto cuya integral da un número complejo, que es el valor de $T_{x,y}$ sobre $\varphi(x,y)$.

Habrá que mostrar que de tal manera queda definida una distribución; ello se hace por medio de un razonamiento de continuidad.

Además hay que mostrar que esta distribución definida por el proceso anterior coincide con T .

Pero efectivamente coincide para las funciones del tipo $\varphi(x,y) = \alpha(x) \beta(y)$ como se puede ver utilizando las fórmulas precedentes; y si dos distribuciones coinciden para las funciones formadas por los productos de funciones de una variable, coinciden para todas las funciones.

En resumen. Sabemos qué significa decir que $T_{x,y}$ es una

función continua de \underline{x} y que se puede fijar el valor de \underline{x} . Análogamente para \underline{y} . Pero en general no se podrá fijar \underline{x} e \underline{y} simultáneamente.

Es decir, puede suceder que $T_{x,y}$ como distribución de \underline{x} con valores en \mathcal{D}'_y sea una función continua o aun indefinidamente diferenciable, o bien como distribución de \underline{y} con valores en \mathcal{D}'_x sea una función continua o indefinidamente diferenciable, pero que, aun así, no se pueda fijar simultáneamente \underline{x} e \underline{y} .

Ejemplo. Tomemos los espacios afines E_k y E_m iguales. Las letras \underline{x} e \underline{y} son entonces nombres diferentes de la misma variable, las llamaremos $\underline{x}, \underline{\xi}$.

Tomemos la distribución

$$T_{x,\xi} = \delta_{x-\xi},$$

con la definición

$$\delta_{x-\xi}(\varphi(x,\xi)) = \int \varphi(x,x) dx,$$

como hemos visto ya, en el caso de la definición de $H_{x-\xi}^0$. (cfr. 14.11).

En la distribución $\delta_{x-\xi}$ se puede fijar ξ pues se trata de una función continua de ξ con valores en el espacio de las distribuciones de \underline{x} y el valor en ξ es precisamente $\delta_{x-\xi}$ considerada como la masa unidad respecto a \underline{x} con soporte en el punto $x = \xi$.

Es además una función indefinidamente diferenciable de ξ con valores en \mathcal{D}'_x .

En virtud de la paridad de δ , podemos escribir $\delta_{\xi-x}$ en lugar de $\delta_{x-\xi}$.

El razonamiento anterior nos muestra que puede ser fijado \underline{x}

obteniéndose una distribución de la variable ξ que es la masa unidad con soporte en el punto $\xi = x$; se tendría en este caso una función indefinidamente de ξ con valores en \mathcal{D}'_x .

Pero no se puede fijar simultáneamente x, ξ pues $\delta_{x-\xi}$ no es una función de x, ξ sino una distribución.

En general, se pueden repetir los argumentos tomando la distribución $H_{x-\xi}$ y obtendríamos que $H_{x-\xi}$ es una función indefinidamente diferenciable de ξ con valores en \mathcal{D}'_x ; su valor, para ξ dado, es la distribución de x que llamamos H y que sometemos a la traslación τ_ξ , es decir, $\tau_\xi H$.

Se puede también fijar x , pues es una función indefinidamente diferenciable de x con valores en \mathcal{D}'_ξ que se obtiene tomando \check{H} y tomando después la trasladada $\tau_x \check{H}$.

Pero evidentemente en $H_{x-\xi}$ no se puede fijar simultáneamente x, ξ pues es una distribución de ambas variables.

Podría decirse, usando un lenguaje físico, que se está en presencia de un principio de incertidumbre, desde el momento que es posible fijar una cualquiera de las dos variables, pero no las dos simultáneamente.

Estas consideraciones nos permiten ahora presentar una propiedad de las distribuciones de ondas.

Sea $\psi \in \mathcal{H}_M$, distribución de ondas elemento del espacio de Hilbert de una partícula elemental de parámetro M respecto del grupo entero o del grupo propio de Lorentz. Los físicos la escriben $\psi(x_0; x_1; x_2; x_3)$ suponiendo que se han tomado coordenadas. Pero es en realidad una distribución y no tiene entonces sentido indicar el valor de ψ para valores particulares de las variables. Se podrá definir el

valor de Ψ sobre $\varphi \in \mathcal{D}$; es decir. $\Psi(\varphi)$ pero no $\Psi(x)$ para un valor particular de x .

Veremos, sin embargo, una propiedad interesante que es la siguiente.

Las distribuciones de ondas $\Psi \in \mathcal{H}_M$ son distribuciones especiales en las cuales se puede fijar un valor particular del tiempo, o bien, de x_0 , obteniéndose una distribución de las variables de espacio x_1, x_2, x_3 .

Esta distribución tiene una significación física muy precisa. Recordemos que Ψ describe el movimiento; pues bien, si se fija x_0 la distribución obtenida será el estado de la partícula en el tiempo fijado.

Definición. Una distribución $T_{x,y}$ se llama semiregular en x si considerada como distribución de x es una función indefinidamente diferenciable con valores en \mathcal{D}'_y .

La definición supone que se ha fijado un elemento de volumen dx , con respecto a la variable x .

Semiregular significa que es parcialmente regular respecto a una de las variables. Puede ser a la vez semiregular en x y en y lo cual no implica que sea una función de x,y , como lo hemos visto en el ejemplo δ_{x-y} .

34. Las distribuciones \mathcal{H}_M y Ψ_M como distribuciones regulares de x_0 .

Sea ahora \mathcal{H}_M el espacio de Hilbert de la partícula elemental escalar de parámetro M . Hemos analizado ya dicho espacio: sabemos que queda determinado por un propagador H_M cuya transformada de

Fourier es $\delta_{p^2+M^2}$, si se considera el grupo de Lorentz entero, o bien los pares $(\delta_{p^2+M^2}; 0), (0; \delta_{p^2+M^2})$ en el sentido de Methée, si se considera el grupo de Lorentz propio.

Mostraremos que el propagador H_M y cada $\Psi_M \in \mathcal{H}_M$, distribuciones definidas en E_4 , son semiregulares respecto al tiempo, es decir, respecto a x_0 .

Para ello es necesario comenzar expresando el espacio E_4 como un producto $E_1 \times E_3$, lo cual es posible tomando coordenadas especiales.

Será necesario fijar también un valor del tiempo, por lo cual se debe abandonar el punto de vista invariante de la Teoría de la Relatividad.

A tal efecto, fijemos una dirección del tiempo. Tomemos una recta arbitraria en \vec{E}_4 contenida en el cono de luz.

La dirección perpendicular, en el sentido de Lorentz, será la dirección del espacio de tres dimensiones; pero no será necesario fijar coordenadas en el espacio de tres dimensiones. Llamemos E_1 a una recta arbitraria a la recta introducida más arriba. E_1 es un espacio afín de una dimensión en el cual existe una unidad, dada por la forma cuadrática de Lorentz; por consiguiente en E_1 hay una medida de Lebesgue dx_0 .

Como consecuencia resulta que se pueden identificar las funciones y las distribuciones de la variable tiempo.

Fijemos ahora una vez por todas un hiperplano perpendicular a E_1 y llamémosle E_3 . Este hiperplano es en realidad un espacio euclídeo con tres dimensiones, es decir, un espacio afín con una forma cuadrática positiva que es la forma inducida sobre dicho hiperplano por

la forma de Lorentz.

Se tiene así que E_4 es isomorfo como espacio afín al producto $E_1 \times E_3$, pues cada punto de E_4 está contenido en un hiperplano paralelo a E_3 , que corta a E_1 en un punto bien determinado, y la recta paralela a E_1 corta a E_3 en un punto bien determinado.

De esta manera, todo punto del espacio se puede representar en forma única mediante un punto del espacio E_1 y un punto del espacio E_3 .

Se ve así que E_4 con su estructura de espacio afín es el producto de los espacios afines E_1 y E_3 . Además la forma cuadrática de Lorentz en E_4 es igual a la suma directa de la forma cuadrática de E_3 más la forma cuadrática de E_1 . (Obsérvese que la forma cuadrática de E_3 es positiva y la de E_1 es negativa).

Llamemos \underline{x}_0 e \underline{y} las variables en E_1 y E_3 respectivamente. Cada punto \underline{x} de E_4 se podrá indicar en la forma $\underline{x} = (\underline{x}_0, \underline{y})$. En general \underline{x}_0 es un punto del eje de los tiempos, pero no necesariamente un número si no se ha elegido en E_1 un origen y un sentido.

Veremos ahora que las distribuciones $H_{\underline{x}_0, \underline{y}}$ y $\Psi_{\underline{x}_0, \underline{y}}$ son funciones continuas de \underline{x}_0 con valores en $\mathcal{D}'_{\underline{y}}$ siendo además indefinidamente diferenciable de \underline{x}_0 con valores en $\mathcal{D}'_{\underline{y}}$, en otros términos veremos que son semiregulares.

Podremos poner:

$$H_{\underline{x}_0, \underline{y}} = H_{\underline{y}}(\underline{x}_0)$$

$$\Psi_{\underline{x}_0, \underline{y}} = \Psi_{\underline{y}}(\underline{x}_0) .$$

La demostración la haremos de dos maneras. La primera, utili-

zando el hecho de que tanto H como ψ son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon y demostrando que toda distribución T solución de la ecuación de Klein-Gordon posee esta propiedad.

Más precisamente: toda distribución $T_{x_0, y}$ solución de la ecuación $(\square - 4\pi^2 M^2)T = 0$ es una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y .

La segunda demostración la haremos utilizando la transformación de Fourier. En un cierto sentido la primera demostración es más general que la segunda pues una solución de la ecuación de Klein-Gordon no es en general temperada como es necesario suponer para aplicar la transformada de Fourier, y en cambio la propiedad mencionada se verifica en un gran número de ecuaciones en derivadas parciales.

En otro sentido, la segunda es más general que la primera pues puede extenderse a ciertas partículas no elementales que no verifican la ecuación de Klein-Gordon.

Para verlo consideremos una ecuación diferencial ordinaria (de una variable t) homogénea con coeficientes constantes de la forma

$$34.1 \quad T^{(m)} + \alpha_{m-1} T^{(m-1)} + \dots + \alpha_1 T' + \alpha_0 T = 0 \dots$$

Es conocido ⁽¹⁾ que toda distribución T_t solución usual de 34.1 es una función indefinidamente diferenciable en sentido usual. Pero no es lo mismo en el caso vectorial sin alguna hipótesis suplementaria.

Sea F un espacio vectorial topológico, localmente convexo

(1) T.D. I ch. V Théorème IX.

y completo y consideremos una distribución vectorial \vec{T}_t de una variable t , solución de la ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes

$$34.2 \quad \vec{T}^{(m)} + \alpha_{m-1} \vec{T}^{(m-1)} + \dots + \alpha_1 \vec{T}' + \alpha_0 \vec{T} = 0 ,$$

que tiene sentido pues se conoce ya el significado de las derivadas de una distribución vectorial. Los α_i son en este caso aplicaciones lineales y continuas de F en sí mismo, es decir, cada $\alpha_i \in \mathcal{L}(F;F)$ queda definido por la relación ya considerada

$$\alpha \vec{T}(\varphi) = \alpha(\vec{T}(\varphi)) .$$

Se podría preguntar ahora si la distribución \vec{T} solución de 34.2 es también una función indefinidamente diferenciable de t con valores vectoriales.

En general, es falso. Hay que agregar una hipótesis, necesaria en el caso vectorial y que se verifica automáticamente en el caso escalar, a saber, que la distribución sea localmente de orden finito, es decir, que en cada intervalo acotado la distribución sea una derivada de orden finito de una función continua.

Ello no es en general verdadero para las distribuciones con valores vectoriales, pues existen distribuciones de este tipo que en un intervalo tan pequeño como se quiera son de orden infinito.

Entonces, haremos la hipótesis que \vec{T} es localmente de orden finito.

En tales condiciones una solución \vec{T} de 34.2 es una función indefinidamente diferenciable, es decir, regular.

Demostración. Se hace por recurrencia. Supongamos un intervalo finito

y supongamos que \vec{T} es allí una derivada de orden k de una función continua \vec{f} .

$$\vec{T} = D^k \vec{f} .$$

La ecuación 34.2 puede escribirse

$$34.3 \quad D^{k+m} \vec{f} = -\alpha_{m-1} D^{k+m-1} \vec{f} - \dots - \alpha_0 D^k \vec{f} .$$

Como los operadores α_i no dependen de t , conmutan con la derivada, de manera que en el segundo miembro de 34.3 se tiene en definitiva una suma de derivadas de órdenes $k, k+1, \dots, k+m-1$.

Pero cada derivada de un cierto orden de una función continua es a fortiori una derivada de orden superior de otra función continua a saber, la primitiva de la precedente, de manera que las derivadas del segundo miembro se pueden reunir en una sola derivada de una función continua, obteniéndose

$$34.4 \quad D^{(k+m)} \vec{f} = D^{(k+m-1)} \vec{g} ,$$

de la cual se obtiene

$$34.5 \quad D \vec{f} = \vec{g} + \text{Polinomio} ,$$

pues sería \vec{g} más una distribución cuya derivada de orden $k+m-1$ es nula; y se puede demostrar, lo mismo que en el caso escalar, que una distribución cuya derivada de un cierto orden es nula es un polinomio. (Basta para ello reducir el caso vectorial al caso escalar efectuando el producto escalar con un elemento del dual F').

El segundo miembro de 34.5 es una función continua por serlo \vec{g} y el polinomio; en consecuencia $D \vec{f}$ es una función continua.

Pero hemos supuesto que \vec{T} era una derivada de orden k de la función continua \vec{f} , y la primera derivada de esta última es también una función continua, lo cual muestra que \vec{T} es una derivada de orden $k-1$ de una función continua para $k \geq 1$.

Si se repite el razonamiento k veces se deduce que \vec{T} es una función continua \vec{f} . Es decir, del hecho que \vec{T} es localmente de orden finito se deduce que \vec{T} es una función continua \vec{f} .

Veamos ahora que es indefinidamente diferenciable.

Supongamos que \vec{f} es h veces continuamente diferenciable, es decir $\vec{f} \in C^h$, y veremos que es $h+1$ veces continuamente diferenciable, es decir, es un elemento de C^{h+1} .

Por un razonamiento análogo al anterior obtenemos de 34.2 reemplazando \vec{T} por \vec{f} ,

$$34.6 \quad D^{(m)} \vec{f} = -\alpha_{m-1} \vec{f}^{(m-1)} - \alpha_{m-2} \vec{f}^{(m-2)} - \dots - \alpha_0 \vec{f},$$

o bien de acuerdo a 34.4

$$34.7 \quad D^{(m)} \vec{f} = D^{(m-1)} \vec{g},$$

donde también $\vec{g} \in C^h$.

De 34.7 resulta que

$$D \vec{f} = \vec{g} + \text{Polinomio},$$

de lo cual se deduce que $D \vec{f}$ es h veces continuamente diferenciable pues el polinomio es también h veces continuamente diferenciable.

En conclusión: si \vec{f} es h veces continuamente diferenciable, su derivada lo es también, lo cual prueba que \vec{f} es $h+1$ veces continuamente diferenciable. Pero para $h = 0$, \vec{f} es continua. Se de-

duce entonces que \vec{f} es indefinidamente diferenciable q.e.d.

Volvamos ahora a la ecuación de Klein-Gordon, podemos escribir .

$$34.8 \quad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} T - (\Delta + 4\pi^2 M^2) T = 0 ,$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

es el Laplaciano.

Consideremos a T como distribución de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y . La ecuación 34.8 nos dice que T satisface a una ecuación diferencial de segundo orden lineal, homogénea con coeficientes constantes.

Tenemos en el primer término la derivada de segundo orden de T respecto a x_0 , y en el segundo término el operador $\Delta + 4\pi^2 M^2$ que es un operador lineal y continuo sobre \mathcal{D}'_y pues la derivada es una operación lineal y continua sobre \mathcal{D}'_y y el Laplaciano se compone de una suma de derivadas; se tiene, además, la multiplicación por la constante $4\pi^2 M^2$, que también tiene esta propiedad.

La ecuación 34.8 puede ser considerada entonces una ecuación diferencial vectorial del tipo 34.2 en que $m = 2$, $\alpha_0 = \Delta + 4\pi^2 M^2$ siendo nulos los α restantes.

Entonces si T es de orden localmente finito será una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y .

Pero T no es de orden finito, pues decir que es de orden finito en un intervalo finito de x_0 equivale a afirmar que si se toma un intervalo finito del eje del tiempo E_1 , en toda la hiperbanda formada por los hiperplanos E_3 perpendiculares a E_1 que pasan por los ex-

tremos de dicho intervalo, T sería una derivada de orden finito de una función continua del tiempo con valores en \mathcal{D}'_y , lo cual es falso.

Pero si consideramos la restricción de T a un cilindro de espesor finito, con eje paralelo a E_1 y limitado por los dos hiperplanos E_3 mencionados y consideramos en este cilindro la ecuación diferencial 34.8 resulta que T es de orden localmente finito en dicho cilindro, pues éste es un conjunto acotado del espacio $E_4 = E_1 \times E_3$; pero sabemos que en un conjunto acotado de E_4 la distribución T se puede escribir como la derivada de orden finito de una función continua $f(x_0, y)$, es decir

$$T_{x,y} = D_{x_0}^{(p)} D_y^{(q)} f(x_0, y) ,$$

que puede ponerse

$$T_{x,y} = D_{x_0}^{(p)} (D_y^{(q)} f(x_0, y)) ,$$

que muestra que T es una derivada de orden finito, en el sentido de las distribuciones, de la expresión contenida en el paréntesis, la cual puede ser considerada como función continua de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y .

Pero ello prueba que T es una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y en toda la hiperbanda, pues si es cierto en cada cilindro acotado, es decir, en cada abierto, lo será en toda la hiperbanda.

Observación. La ecuación de Klein-Gordon no es la única que posee esta propiedad.

Se puede demostrar que toda distribución, solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales con coeficientes constantes tal que contenga un término con una derivada de orden máximo con coefi-

ciente unidad, es decir, toda solución de una ecuación del tipo

$$\frac{\partial^k T}{\partial x_0^k} + \sum_{h=k-1}^{h=0} \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^h D_y^h T = 0 ,$$

es semiregular.

En el caso de la ecuación de Klein-Gordon la misma demostración prueba que T es también semiregular respecto a x_1, x_2 ó x_3 separadamente.

Para el caso de las distribuciones H y Ψ que estamos estudiando, sabemos que estas son elementos de $\mathcal{S}'_{x_0, y}$. Podemos poner entonces

$$T \in \mathcal{S}'_{x_0, y} \sim \mathcal{S}'_{x_0}(\mathcal{S}'_y) \sim \mathcal{S}'_{x_0}(\mathcal{S}'_y) ,$$

es decir, T puede ser, considerada como distribución de x_0 no sólo en \mathcal{D}'_y sino también en \mathcal{S}'_y .

Por consiguiente, podemos tomar $F = \mathcal{S}'$ y repetir todos los argumentos, pero ahora T es, no sólo localmente, sino globalmente de orden finito, pues se sabe que toda distribución temperada es globalmente de orden finito.

Se puede entonces escribir:

$$T = D_{x_0}^{(p)} D_y^{(q)} (P(x_0) Q(y) f(x_0, y)) ;$$

dentro del paréntesis figura el producto de polinomios de las variables x_0 e y por una función acotada. Esta expresión puede ser escrita también de la siguiente manera:

$$T = D_{x_0}^{(p)} (D_y^{(q)} (P(x_0) Q(y) f(x_0, y))) .$$

Pero la expresión $D_y^{(q)}(P(x_0) Q(y) f(x_0, y))$ es un elemento de \mathcal{S}'_y ; se deduce entonces que T puede considerarse como una derivada de orden finito en x_0 de una función continua con valores en \mathcal{S}'_y .

En conclusión: para cada x_0 la sección de T que obtenemos es una distribución temperada de y ; en otros términos, es una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valores en \mathcal{S}'_y .

Consideremos ahora la distribución de ondas $\Psi_{x_0, y}$. Hemos fijado ya una dirección del tiempo E_1 y una dirección del espacio E_3 y hemos identificado el espacio afín E_4 con el producto $E_1 \times E_3$.

Sabemos ahora que para cada x_0 en E_1 tenemos en E_3 una distribución temperada que llamaremos la sección de la distribución de ondas Ψ para el tiempo x_0 .

La distribución de ondas Ψ describe el movimiento de la partícula y la sección de Ψ para x_0 describe el estado de la partícula en el tiempo x_0 , de manera que Ψ se descompone en el conjunto de todas las secciones obtenidas para cada x_0 .

En otros términos, la distribución Ψ describe la evolución de la partícula y en cada instante se puede determinar una distribución que describe el estado de la partícula.

Más adelante estudiaremos el conjunto de todos los estados para un tiempo determinado x_0 . Para hacerlo formaremos un espacio de Hilbert contenido en $\mathcal{D}'(E_3)$ con topología más fina que la inducida.

Este espacio resultará tomando para cada x_0 las trazas en E_3 de las distribuciones de ondas Ψ . Estas trazas forman un espacio de Hilbert que será unido con la misma norma de Ψ , tomando como norma de cada sección o traza la misma norma de Ψ .

contenido en $\mathcal{D}'(E_3)$ con topología más fina que la inducida y también invariante por el grupo ortogonal.

Veamos ahora la segunda manera de demostrar que $H_{x_0, y}$ y

$\Psi_{x_0, y}$ son distribuciones semiregulares de x_0 .

Utilizaremos como hemos dicho la transformada de Fourier. Comencemos por tratar el caso de H . En este caso tenemos un origen fijado en el espacio, pues H está definida en el espacio vectorial \vec{E}_4 y supondremos que hemos hecho $\vec{E}_4 = \vec{E}_1 \times \vec{E}_3$.

Consideremos la distribución $H_{x_0, y} = H_y(x_0)$; para cada x_0 fijado resulta una distribución de la variable y cuya expresión queremos hallar.

Aplicando la transformada de Fourier a H obtenemos

$$34.9 \quad \mathcal{F}H = \delta_{p^2+M^2} Y(-p).$$

Recordemos que hay tres tipos de distribuciones H , correspondientes al hiperboloide de dos napas y a cada una de las napas por separado; aquí hemos considerado la correspondiente a la hoja inferior asociada a la energía positiva.

Queremos hallar la expresión de H para un valor particular a_0 de x_0 .

Ahora bien, si una distribución es una función $\vec{f}(x_0)$ continua con valores vectoriales de la variable x_0 , para obtener su valor en un punto $x_0 = a_0$ procederemos de la siguiente manera: tomaremos el valor de $\vec{f}(x_0)$ como distribución sobre un conjunto de funciones $\varphi(x_0) \in \mathcal{D}$ que cumplan las siguientes condiciones:

$$\varphi \geq 0 \quad ; \quad \int \varphi(x_0) dx_0 = 1 \quad ;$$

y el soporte de φ tiende uniformemente al punto a_0 , es decir, se tendrá $\varphi \rightarrow \delta_{x_0-a_0}$.

En estas condiciones debemos tener

$$34.10 \quad \bar{f}(a_0) = \lim_{\varphi \rightarrow \delta_{x_0-a_0}} \bar{f}(\varphi)$$

Para el caso de $H_y(x_0)$ tendremos:

$$H_y(a_0) = \lim_{\varphi \rightarrow \delta_{x_0-a_0}} H_y(\varphi(x_0)) ;$$

este límite como distribución de y implica el límite del valor de esta distribución sobre cada función $\theta(y) \in \mathcal{D}_y$; por otra parte es posible tomar $\theta(y) \in \mathcal{J}_y$ pues sabemos que H es una función indefinidamente diferenciable con valores en \mathcal{J}'_y .

Se tiene entonces

$$34.11 \quad H_y(a_0)(\theta(y)) = \lim_{\varphi \rightarrow \delta_{x_0-a_0}} H_{x_0,y}(\varphi(x_0)\theta(y)) ;$$

en el segundo miembro de esta expresión se calcula primero el valor de la distribución $H_{x_0,y}$ sobre la función $\varphi(x_0)\theta(y)$ y después se calcula el límite indicado, límite cuya existencia conocemos.

Pero en virtud de 34.9, H es una transformada de Fourier:

$$H = \mathcal{F}^p \int_{p^2+M^2} Y(-p) ,$$

y por consiguiente el valor de la distribución $H_{x_0,y}$ sobre la función $\varphi(x_0)\theta(y)$ será dado, teniendo en cuenta la definición de la transfor-

mada de Fourier de una distribución o de la transformada inversa, a saber,

$$(\overline{\mathcal{F}}^H)(\varphi) = H(\overline{\mathcal{F}}\varphi) ,$$

por la relación

$$34.12 \quad H_{x_0, y}(\varphi(x_0)\theta(y)) = \int_{p^2+M^2} Y(-p)(\overline{\mathcal{F}}\varphi(x_0)\overline{\mathcal{F}}(\theta(y))) ,$$

pues la función de x_0, y es, en este caso, el producto $\varphi(x_0)\theta(y)$ y su transformada $\overline{\mathcal{F}}$ se descompone en el producto de la transformada de cada una de ellas.

Hagamos

$$\phi(p_0) = \overline{\mathcal{F}}\varphi(x_0) \quad ; \quad \Theta(q) = \overline{\mathcal{F}}\theta(y) ;$$

hemos puesto $p = (p_0, q)$ pues si el espacio está expresado como producto del espacio de la variable x_0 y el espacio de la variable y , su dual también es un producto, es decir, cada punto p del dual se expresa por el par p_0, q de una variable de una dimensión y una variable de tres dimensiones.

La relación 34.12 puede escribirse entonces

$$H_{x_0, y}(\varphi(x_0)\theta(y)) = \int_{p^2+M^2} Y(-p)(\phi(p_0)\Theta(q)) ;$$

pero conocemos el valor de $\int_{p^2+M^2} Y(-p)$ sobre $\phi(p_0)\Theta(q)$ (cfr. 29.3) a saber:

$$34.13 \quad \int_{p^2+M^2} Y(-p)(\phi(p_0)\Theta(q)) = \int_{\sigma_M} \frac{\phi(p_0)\Theta(q)}{2|p_0|} dq$$

donde σ_M indica la hoja negativa del hiperboloide de parámetro M . Teniendo en cuenta que en dicho hiperboloide es:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = p_0^2 - q^2 = M^2$$

y en la hoja negativa

$$p_0 = - \sqrt{q^2 + M^2} ,$$

se puede llevar este valor al segundo miembro de 34.13 obteniéndose:

$$34.14 \quad H_{x_0, y}(\varphi(x_0)\theta(y)) = \iiint_{\tilde{E}_3} \frac{\phi(-\sqrt{q^2 + M^2}) \Theta(q)}{2\sqrt{q^2 + M^2}} dq .$$

Hay que tomar ahora el límite de esta expresión para $\varphi \rightarrow \delta_{x_0 - a_0}$; pero los términos $\Theta(q)$ y $2\sqrt{q^2 + M^2}$ no cambian; ϕ que es la transformada de Fourier de φ , converge simplemente a $e^{2i\pi a_0 p_0}$ en todo p_0 pues

$$\phi = \int \varphi(x_0) e^{2i\pi x_0 p_0} dx_0 ,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \delta_{x_0 - a_0}} \phi = \lim \int \varphi(x_0) e^{2i\pi x_0 p_0} dx_0 = e^{2i\pi a_0 p_0} ,$$

y además

$$|\phi| = \left| \int \varphi(x_0) e^{2i\pi x_0 p_0} dx_0 \right| \leq \int \varphi(x_0) dx_0 = 1 ,$$

es decir, ϕ converge simplemente a $e^{2i\pi a_0 p_0}$ y está acotada por 1; por lo tanto ϕ converge a $e^{2i\pi a_0 p_0} = e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}$ y está acotada por 1; por el teorema de Lebesgue, si una función converge simplemente a un límite quedando acotada por una función sumable su integral converge; por consiguiente la integral del segundo miembro de 34.14 converge a un límite, obteniéndose:

$$34.15 \quad H_y(a_0)(\theta(y)) = \iiint_{\tilde{E}_3} \frac{e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}} \Theta(q)}{2\sqrt{q^2 + M^2}} dq .$$

Pero hemos puesto $\Theta = \overline{\mathcal{F}} \theta$; en Θ la variable es q y en θ es y .

Si en 34.15 reemplazamos $\theta = \overline{\mathcal{F}} \Theta$, se ve que el valor de H_y sobre $\overline{\mathcal{F}} \Theta$ es el valor de $\overline{\mathcal{F}} H$ sobre Θ , lo cual significa que

$$H_y(a_0) = \frac{e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{2 \sqrt{q^2 + M^2}} ;$$

y finalmente

$$34.16 \quad H_y(a_0) = \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{2 \sqrt{q^2 + M^2}} \right)$$

donde se sobreentiende que $\overline{\mathcal{F}}$ es una transformada de Fourier en el espacio de tres dimensiones, pues $H_y(a_0)$, una vez fijado a_0 , es una distribución sobre \overrightarrow{E}_3 .

Se puede mostrar que la expresión contenida entre paréntesis en 34.16 ; es temperada de manera que tiene sentido tomar su transformada de Fourier, es decir, $H_y(a_0)$ está bien determinada.

Con ello hemos obtenido lo que buscábamos. Tratábamos de hallar $H_y(a_0)$ sin conocerlo y hemos encontrado la expresión 34.16 , y habría que mostrar que si la consideramos como función de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y es justamente lo que buscábamos.

Tenemos la expresión explícita de una función de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y o bien en \mathcal{S}'_y y se verifica fácilmente que esta expresión es una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valores en \mathcal{S}'_y ó \mathcal{S}'_y .

Queda por ver que la distribución definida por esta función es la distribución inicial $H_y(x_0)$, lo cual no es difícil.

En particular para $a_0 = 0$ se obtiene:

$$34.17 \quad H_y(0) = \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{2\sqrt{q^2+M^2}} \right) .$$

Para calcular esta transformada inversa de Fourier recordaremos la siguiente fórmula: (1)

$$34.18 \quad Q_r = \mathcal{F} \text{ ó } \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{q^2+M^2} \right)^{\frac{r}{2}} = \text{Pf.} M^{\frac{3-r}{2}} \frac{2\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma(\frac{r}{2})} |y|^{\frac{r-3}{2}} \cdot K_{\frac{3-r}{2}}(2\pi M|y|)$$

excepto para $r = -2k$, en cuyo caso

$$Q_{-2k} = \left(-\frac{\Delta}{4\pi^2} + M^2 \right) \delta .$$

Se tiene entonces:

$$34.19 \quad H_y(0) = \frac{1}{2} Q_1 = M \frac{K_1(2\pi M|y|)}{|y|} ,$$

que es precisamente lo que obtendríamos si en la expresión de H dada por 31.4 y sgs. se hace $x_0 = 0$.

En el caso de la partícula de parámetro $M = 0$ se obtiene

$$34.20 \quad H_y(0) = \frac{1}{2\pi |y|^2} .$$

Las expresiones 34.19 y 34.20 muestran que $H_y(0)$ es una función, pues no aparece el símbolo Pf; en la primera, $M \neq 0$, se tiene una función de Kelvin K_1 , cuyo comportamiento en el origen es del tipo $\frac{1}{|y|}$, de manera que $H_y(0)$ se comporta como $\frac{1}{|y|^2}$; pero en el espacio de tres dimensiones $\frac{1}{|y|^2}$ es localmente sumable. En el infinito K_1 decrece exponencialmente. Podemos afirmar entonces que

$$H_y(0) \in L^1 .$$

(1) T.D. I pág. 48; II pág. 116. Fórmulas II 3; 20 y VII 7; 23.

Análogamente en el caso $M = 0$.

Observación. En 31.4 y sgs. se había obtenido la expresión de $H_{x_0, y}$ para varios casos y en particular para el caso en que se tomaba la hoja negativa del hiperboloide.

De allí podrían deducirse las expresiones 34.16, 34.17 y 34.19 dando a x_0 el valor a_0 y 0 respectivamente, lo cual es lícito, pues se tiene una distribución dada por un ν_p , es decir, una pseudo-función en la que es posible fijar el valor de la variable.

Se obtendría así un ν_p respecto de la esfera sección del cono de luz con el hiperplano $x_0 = a_0$; hay también una δ cuya expresión, al hacer tal sección, se puede hallar sin dificultad.

Pero habría que verificar después, que la expresión obtenida define una función indefinidamente diferenciable de x_0 con valor en \mathcal{D}'_y , que coincide con $H_{x_0, y}$.

Hay otra manera que consiste en probar que al hacer $x_0 = a_0$ se obtiene una distribución y mostrar que esta distribución en y depende de a_0 , de manera indefinidamente diferenciable, y que así se obtiene la distribución H total.

En otros términos: habría que tomar a priori la sección en a_0 y mostrar que da H pues si ello se muestra sabemos que si una distribución se puede expresar como función continua de x_0 con valores en \mathcal{D}'_y , esta función es única.

Se obtendría así el mismo resultado que en el presente párrafo, afirmación que no verificamos aquí.

Puede haber dificultad en el caso $x_0 = 0$, es decir, cuando la esfera coincide con el origen, y en particular no es seguro a priori que para obtener $H_y(a_0)$ se pueda hacer $x_0 = a_0$; hay que hacer un pa-

saje al límite como función continua.

Estas consideraciones podrían servir al mismo tiempo para obtener explícitamente la transformada de Fourier indicada en 34.16.

De la misma manera se pueden estudiar $\Psi_y(a_0)$; pero en este caso no hay origen fijado para el tiempo x_0 . Sabemos que Ψ es una distribución de ondas en el espacio afín, mientras que en el caso de H se tenía ya un origen, desde el momento que estaba definida en el espacio vectorial; se obtenía por ello una expresión de $H_y(0)$ más simple que la de $H_y(a_0)$.

En el caso de Ψ podemos decir que todos los valores de $\Psi_y(a_0)$ deben tener el mismo carácter en cuanto a su simplicidad.

Podría fijarse un origen del tiempo pero si se hace no es posible que $\Psi_y(0)$ sea más simple que los otros. Esto mismo nos dice que es suficiente fijar un origen del tiempo y estudiar $\Psi_y(0)$ pues para conocer $\Psi_y(a_0)$ bastará fijar el origen en otro punto cualquiera.

El método para obtener $\Psi_y(a_0)$ será aquí el mismo que hemos usado para obtener $H_y(a_0)$: hacer una transformación de Fourier y pasar al límite para $\varphi \rightarrow \delta_{x_0 - a_0}$. Se obtiene, después de fijar un origen

$$34.21 \quad \Psi_y(a_0) = \overline{\mathcal{F}}^p \left(\frac{\Psi(q) e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{2\sqrt{q^2 + M^2}} \right) ;$$

la transformada de Fourier se efectúa en el espacio de tres dimensiones \overline{E}_3 . Repitamos que $\overline{\mathcal{F}}^p \Psi$, elemento de, $\overline{\mathcal{F}}^p \mathcal{H}_0$, tiene la forma $\Psi \mu$ donde $\Psi \in L^2_\mu$, (supuesto elegido un origen).

Pero si $\Psi \in L^2_\mu$, se puede considerar el soporte de μ y tomar allí las coordenadas tridimensionales q , pues cada punto de la hoja negativa del hiperboloide queda definido por su proyección sobre \overline{E}_3 por la paralela a la dirección de E_1 .

Podemos escribir entonces todo elemento de \overline{FH} en la forma $\Psi\mu$ donde Ψ es ahora una función de q solamente. Es decir, supondremos aquí que la transformada de Fourier de Ψ está definida por el producto de la función Ψ de la variable q , multiplicada por la medida μ que, en el caso presente, es: $\delta_{p^2+M^2} Y(-p)$.

Veamos ahora las principales propiedades de $\Psi_y(a_0)$.

1) Para $M \neq 0$, $\Psi_y(a_0) \in L_y^2$.

En efecto, es $\Psi(q) \in L_\mu^2$ y por lo tanto, en virtud de 34.21 se obtiene

$$34.22 \quad \int \frac{|\Psi(q)|^2}{2\sqrt{q^2+M^2}} dq < \infty,$$

lo cual prueba que

$$\frac{\Psi(q)}{\sqrt{2\sqrt{q^2+M^2}}} \in L_q^2,$$

y a fortiori

$$\frac{\Psi(q)}{2\sqrt{q^2+M^2}} \in L_q^2.$$

Entonces la función

$$34.23 \quad \frac{\Psi(q) e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2+M^2}}}{\sqrt{q^2+M^2}},$$

es una función de L_q^2 ; en virtud del teorema de Plancherel, su transformada de Fourier \overline{F} es una función de L^c . En conclusión:

$$\Psi_y \in L_y^2$$

para cada a_0 .

Además en L_y^2 , Ψ_y depende continuamente de a_0 . En otros

términos la aplicación

$$x_0 \longrightarrow \Psi_y(x_0)$$

$$E_1 \longrightarrow L_y^2$$

es una aplicación continua. Para demostrarlo hay que ver que si $x_0 \rightarrow a_0$,

$\Psi_y(x_0) \in L_y^2$, converge a $\Psi_y(a_0)$.

Aplicando la transformación de Fourier, es suficiente verlo para la función 34.23. Pero si en esta función (donde se ha reemplazado a_0 por x_0) se hace $x_0 \rightarrow a_0$, se tiene el caso de una función que converge simplemente a un límite y que está acotada por una función de cuadrado sumable (pues la exponencial tiene módulo igual a uno); por el teorema de Lebesgue se ve que converge en L_q^2 .

En definitiva. Para cada valor del tiempo x_0 , fijado, la sección del movimiento Ψ por el hiperplano $x_0 = a_0$ es una función de L_y^2 y depende continuamente del parámetro x_0 en L_y^2 .

En cambio, no se puede fijar además la variable de espacio q pues las funciones de cuadrado sumable no tienen valor determinado para todo q .

II) Caso $M = 0$.

Es más complicado. Se tiene haciendo $M = 0$ en 34.22 :

$$\int \frac{\Psi(q)^2}{2|q|} dq < \infty ,$$

y por consiguiente

$$\frac{\Psi(q)}{\sqrt{2|q|}} \in L_q^2 ;$$

pero de aquí no puede deducirse ahora que $\frac{\Psi(q)}{2|q|}$ es una función de L_q^2

pues $q = 0$ en el origen.

Pero podemos descomponer esta última función en dos secciones tales que en la primera sea $|q| \leq 1$ y en la segunda $|q| > 1$.

Para $|q| > 1$; si $\frac{\psi(q)}{\sqrt{2|q|}} \in L^2_q$, también $\frac{\psi(q)}{2|q|} \in L^2_q$.

Para $|q| \leq 1$ podemos poner

$$\frac{\psi(q)}{2|q|} = \frac{\psi(q)}{\sqrt{2|q|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2|q|}},$$

donde se ve que el primer factor es de L^2_q y el segundo es de L^α_q con $\alpha < 6$ y por consiguiente es de L^2 .

El producto es entonces una función de L^1 . Es decir, la función $\frac{\psi(q)}{2|q|}$ ha sido separada en dos partes: una pertenece a L^2 y la otra a L^1 .

Haciendo una transformación de Fourier, se deduce que la función $\Psi_y(x_0)$ es la suma de dos funciones: una de L^2 y la otra de L^∞ . Se deduce de ello que $\Psi_y(x_0)$ es localmente de cuadrado sumable que indicamos poniendo:

$$\Psi_y(x_0) \in L^2_{loc.}$$

Además se puede definir una aplicación continua

$$x_0 \longrightarrow \Psi_y(x_0)$$

$$E_1 \longrightarrow L^2_{loc.}$$

III) Ψ es una función.

De acuerdo a I), Ψ es una función continua de x_0 con valores en L^2_y , pero de ello no se desprende inmediatamente que Ψ sea una función de (x_0, y) .

Recordemos,⁽¹⁾ sin embargo que, si se razona en forma local tomando un conjunto acotado de (x_0, y) , el espacio de las funciones de $L^2_{x_0}$ con valores en L^2_y es isomorfo al espacio $L^2_{x_0, y}$, es decir,

$$34.24 \quad L^2_{x_0}(L^2_y) \sim L^2_{x_0, y} .$$

Pero siendo Ψ una función continua de x_0 con valores en L^2_y , es también una función de cuadrado sumable de x_0 con valores en L^2_y . Se deduce entonces, en virtud de 34.24 que Ψ es una función localmente de cuadrado sumable de las variables (x_0, y) .

IV) Si $\Psi_y(a_0)$ es conocido, es conocido $\Psi_y(x_0)$ para todo valor x_0 .

Es un problema de valores iniciales. Esta propiedad depende esencialmente del hecho que tengamos una sola hoja del hiperboloide de dos napas (hoja negativa), pues si hubiéramos tomado las dos hojas $\Psi(q)$ no podría haberse expresado como función de q , pues para cada punto del espacio habría dos proyecciones, una sobre cada hoja del hiperboloide, y por lo tanto no podría usarse q como coordenada en el hiperboloide.

Supongamos que hemos tomado un origen y fijado un valor a_0 . La expresión 34.21 nos permite calcular entonces la función $\Psi(q)$. Pero si $\Psi(q)$ es conocida, toda la distribución de ondas es conocida.

Hay entonces una descripción por un valor inicial. Podríamos decir que este ha sido el origen de un error que llevó en Física al descubrimiento de la ecuación del electrón. Dirac consideró esencial que la partícula satisficiera a una ecuación diferencial en derivadas parciales de primer orden, de manera que el valor inicial determinará los

(1) Seminaire L. Schwartz 1953. Paris. Notes polycopiées.

otros valores de la función de ondas.

Pero es conveniente señalar que para ello no es necesario que la ecuación sea de primer orden en todas las variables; podría ser una ecuación de evolución de primer orden en el tiempo y de un tipo muy general, de convolución por ejemplo, en las demás variables.

Dirac encontró así la ecuación del electrón, pero no podía haber encontrado la del mesón, pues esta última es la ecuación de Klein-Gordon que es definitivamente de segundo orden respecto al tiempo.

Pero en virtud del carácter del soporte de la medida que se encuentra en una sola hoja del hiperboloide de dos napas, el conocimiento de los valores iniciales permite obtener los otros valores.

Busquemos entonces la ecuación de evolución satisfecha por la función de ondas. Queremos obtener el valor $\Psi_y(b_0)$ a partir de $\Psi_y(a_0)$.

Teniendo en cuenta la expresión 34.21 vemos que habrá que multiplicar dentro del paréntesis por:

$$e^{-(b_0-a_0)\sqrt{q^2+M^2}}$$

Hagamos

$$G_y(b_0 - a_0) = \mathcal{F} e^{-(b_0-a_0)\sqrt{q^2+M^2}}$$

Se puede poner entonces

$$\Psi_y(b_0) = \Psi_y(a_0) *_{(y)} G_y(b_0 - a_0),$$

es decir, $\Psi_y(b_0)$ está dada a partir de $\Psi_y(a_0)$ haciendo la convolución con $G_y(b_0 - a_0)$.

Señalemos que a_0 y b_0 son dos puntos del espacio afín de

una dimensión E_1 , eje de los tiempos; $b_0 - a_0$ es entonces un punto del espacio vectorial \vec{E}_1 asociado a E_1 .

La variable que aparece como subíndice de G_y es evidentemente la del espacio vectorial \vec{E}_3 , de manera que tenemos una convolución de una distribución del espacio afín E_3 y una del espacio vectorial \vec{E}_3 .

Para hallar la ecuación de evolución, observemos que en 34.21 la derivación del primer miembro respecto a x_0 (habiendo reemplazado a_0 por x_0) equivale a multiplicar dentro del paréntesis por

$$-2i\pi p_0 = -2i\pi \sqrt{q^2 + M^2},$$

y esta multiplicación es equivalente a convolucionar con $\overline{\mathcal{F}}(-2i\pi \sqrt{q^2 + M^2})$.

Se obtiene así:

$$34.25 \quad \frac{\partial}{\partial x_0} \Psi_y(x_0) = \Psi_y(x_0) *_{(y)} (-2i\pi Q_{-1}) = (-2i\pi Q_{-1}) *_{(y)} \Psi_y(x_0),$$

en virtud de la definición de Q_r dada en 34.18. Iterando y teniendo en cuenta el caso $r = -2k$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \Psi_y(x_0) &= (-4\pi^2 Q_{-2}) *_{(y)} \Psi_y(x_0) = -4\pi^2 (M^2 - \frac{\Delta}{4\pi^2}) \delta *_{(y)} \Psi_y(x_0) \\ &= (\Delta - 4\pi^2 M^2) \Psi_y(x_0), \end{aligned}$$

o bien

$$(\square - 4\pi^2 M^2) \Psi_y(x_0) = 0,$$

que es la ecuación de Klein-Gordon.

35. El espacio de Hilbert $\mathcal{H}_M(x_0)$, espacio de los estados para el tiempo x_0 y para la partícula de parámetro M .

Un elemento de $\mathcal{H}_M(x_0)$ es una sección del espacio de Hilbert \mathcal{H}_M , correspondiente a la partícula de parámetro M , para el valor x_0 del tiempo.

Es, en virtud de lo visto más arriba, una distribución temperada en E_3 . Puede concebirse, en realidad, como distribución definida sobre el espacio de tres dimensiones ortogonal a E_1 en x_0 , o bien como la proyección sobre el hiperplano de tres dimensiones E_3 perpendicular a E_1 , hiperplano que hemos introducido para definir el espacio E_4 como producto $E_1 \times E_3$.

Estudiemos este espacio $\mathcal{H}_M(x_0)$ con más cuidado. En primer lugar definámoslo como espacio de Hilbert sobre E_3 ; sus elementos son distribuciones temperadas y es necesario introducir un producto escalar.

Pondremos como producto escalar de dos secciones para el tiempo x_0 el producto escalar de las distribuciones de ondas correspondientes, a saber:

$$35.1 \quad ((\Psi_y)_1(x_0) | (\Psi_y)_2(x_0))_{\mathcal{H}(x_0)} = (\Psi_1 | \Psi_2) ,$$

que está bien definido pues la sección en un instante particular determina completamente como hemos visto, la distribución de ondas. Es decir, si conocemos dos secciones, conocemos bien las distribuciones de ondas y por consiguiente su producto escalar.

Tenemos así un espacio vectorial con un producto escalar que es isomorfo a \mathcal{H}_M y por consiguiente es un espacio de Hilbert.

Mostremos que la topología de $\mathcal{H}_M(x_0)$ es más fina que $\mathcal{D}'_y(E_3)$ ó más fina aun que $\mathcal{S}'_y(E_3)$.

Ello equivale a decir que, si un estado converge a cero con la topología introducida por el producto escalar 35.1, converge también a cero como distribución temperada.

En efecto. Si Ψ converge a cero como estado, es decir, en $\mathcal{H}_M(x_0)$, converge también a cero la distribución de ondas correspondiente, es decir, en \mathcal{H}_M ; habrá que ver entonces que si la distribución de ondas converge a cero en \mathcal{H}_M , su sección converge a cero en $\mathcal{S}'_y(E_3)$, pues de la misma manera que hemos visto que la sección de Ψ para x_0 pertenece a L^2_y , en el caso $M \neq 0$, se ve inmediatamente que si $\Psi \rightarrow 0$ en \mathcal{H}_M , $\Psi_y(x_0) \rightarrow 0$ en L^2_y .

Esto prueba que si un elemento $\Psi_y(x_0)$ converge en el espacio sección $\mathcal{H}_M(x_0)$, o lo que es lo mismo en \mathcal{H}_M , converge a cero en L^2_y y a fortiori en \mathcal{S}'_y .

Para el caso $M = 0$, hay que separar la función en dos partes, como lo hemos hecho más arriba; se ve entonces que si la distribución de ondas Ψ converge a cero en \mathcal{H}_0 la sección $\Psi_y(x_0)$ es la suma de dos funciones, una que converge a cero en L^2_y y la otra que converge a cero en L^∞_y lo cual significa que la suma converge a cero en $\mathcal{S}'_y(E_3)$.

En otros términos, tenemos un espacio de Hilbert de distribuciones temperadas sobre E_3 , con topología más fina que la inducida por $\mathcal{S}'_y(E_3)$.

Preguntémosnos ahora, cuál será el grupo de invariancia de $\mathcal{H}_M(x_0)$. Será evidentemente el grupo ortogonal inhomogéneo de E_3 , pues si tomamos un operador ortogonal de E_3 y no cambiamos el tiempo, obtenemos un operador de Lorentz de E_4 que debe operar unitariamente sobre el espacio de Hilbert \mathcal{H} y como la sección conserva el producto

escalar debe operar unitariamente sobre el espacio de las secciones

$\mathcal{H}(x_0)$.

En definitiva. Tenemos un espacio de Hilbert sobre E_3 con topología más fina que la inducida por $\mathcal{L}'_y(E_3)$ e invariante por el grupo ortogonal.

Toda la teoría hecha sobre los espacios \mathcal{H} puede hacerse ahora con $\mathcal{H}(x_0)$ utilizando el grupo ortogonal de E_3 en lugar del grupo de Lorentz de E_4 , con la diferencia que $\mathcal{H}_M(x_0)$ no es ya elemental en el sentido que no es extremal.

Señalemos que el hecho que \mathcal{H}_M es extremal respecto al grupo de Lorentz no demuestra que el espacio sección $\mathcal{H}(x_0)$ sea extremal por el grupo ortogonal, debido a que el grupo ortogonal corresponde a un subgrupo muy reducido del grupo de Lorentz: el subgrupo formado por las transformaciones de Lorentz que conservan el eje del tiempo, lo cual muestra que $\mathcal{H}_M(x_0)$ podría no ser extremal, pues siendo más pequeño, el grupo podría ser reducible.

Tratemos de ver ahora cuál será el propagador H y la medida μ correspondientes a $\mathcal{H}_M(x_0)$.

Adelantemos que el propagador H será el valor $H_y(0)$ correspondiente a \mathcal{H}_M , calculado en el párrafo anterior.

Observación. El espacio de Hilbert de las secciones $\mathcal{H}_M(x_0)$ debe ser el mismo para todos los valores de x_0 .

Para un movimiento determinado obtenemos diferentes secciones para diferentes x_0 , pero los espacios de Hilbert correspondientes son los mismos, pues se pasa de un valor de x_0 a otro por una traslación paralela al eje E_1 , y esta traslación es un operador de Lorentz.

El propagador de $\mathcal{H}_M(a_0)$ será entonces independiente de a_0 ,

y como lo veremos en seguida, es $H_y(0)$.

Hemos visto, que por transformación de Fourier el espacio \mathcal{H}_M se convierte en el espacio de las funciones $\Psi(q)$ tales que

$$\int \frac{|\Psi(q)|^2 dq}{2\sqrt{q^2+M^2}} < \infty ,$$

siendo el cuadrado de la norma de $\Psi(q)$, exactamente esta integral.

Pero en virtud de lo visto en el párrafo 20 c. se deduce que la medida μ , que define a $\mathcal{H}_M(x_0)$, es

$$\mu = \frac{dq}{2\sqrt{q^2+M^2}} ;$$

por consiguiente el propagador $H = \overline{\mathcal{F}} \mu$ es, en este caso,

$$\overline{\mathcal{F}} \left(\frac{dq}{2\sqrt{q^2+M^2}} \right) = H_y(0) ,$$

como habíamos obtenido en 34.18 .

36. La densidad de probabilidad de presencia en el espacio de los estados.

Recordemos que en los principios de la Mecánica Cuántica Clásica se considera, en la representación de Schrödinger, un espacio de Hilbert \mathcal{K}_0 , espacio de los estados en cada instante.

Un movimiento está dado por un elemento $\Psi(t)$, tal que para cada t pertenece al espacio de Hilbert \mathcal{K}_0 siendo su norma igual a uno.

Para medir la abcisa \underline{x} de una partícula (suponiendo que se está sobre la recta con un origen elegido), se toma el operador multiplicación por \underline{x} y la descomposición espectral que corresponde a este ope-

rador es la descomposición espectral de la medición de la abscisa.

En este caso el espacio \mathcal{H} es el espacio L^2_x .

Se puede demostrar que el operador multiplicación por x es autoadjunto y que tiene una descomposición espectral.

Pero nosotros hablaremos sólo de descomposición espectral sin referirnos al operador, como lo hemos hecho al definir una magnitud física por una descomposición espectral.

Tenemos entonces dos cosas.

Primero, una descomposición espectral en general, es decir, un espacio X y una correspondencia $F \rightarrow \mathcal{H}_F$.

Segundo, la descomposición espectral de un operador hermitico A , que es una descomposición espectral en que X es la recta R y donde el operador A se puede escribir como

$$A = \int x d E(x) ,$$

respecto de esta descomposición espectral.

La conexión entre ambas nociones se hace fácilmente y en definitiva se ve que en lugar de considerar el operador autoadjunto multiplicación por x , lo cual es delicado, es mejor considerar lo que sigue.

Sea la descomposición espectral en que $X = R$; $\mathcal{H} = L^2_R$ y la correspondencia que a cada conjunto boreliano F de la recta atribuye al subespacio de L^2_R formado por las funciones que son nulas fuera de F .

Se tiene así una descomposición espectral (en particular, si F_1 y F_2 son disjuntos resulta inmediatamente que las dos variedades correspondientes son ortogonales).

Este enunciado no supone la definición de operador autoadjunto.

Resumiendo: el espacio de los estados es ahora L^2_x ; una función de ondas es para cada t un elemento $\Psi(t) \in L^2_x$ y la medición de x corresponde a la descomposición espectral que hemos dicho.

Pero para medir, para un movimiento $\Psi(t)$, la magnitud dada por la posición en el instante $t = t_0$, se debe tener una ley de probabilidad, es decir, una correspondencia que a cada conjunto boreliano F , asigne un número positivo.

Este número será la probabilidad para que una medición dé un valor en F . Esta probabilidad es, de acuerdo a lo visto en 24 e., el cuadrado de la norma de la proyección de $\Psi(t_0)$, elemento de L^2 , sobre la variedad formada por las funciones nulas fuera de F ; obtendríamos así para la probabilidad el valor

$$\int_F |\Psi_x(t_0)|^2 dx ;$$

en efecto, la proyección ortogonal de $\Psi(t_0)$ sobre dicha variedad es la función igual a $\Psi(t_0)$ en el conjunto F e igual a cero fuera de F y el cuadrado de la norma de esta proyección en el espacio de Hilbert, es el cuadrado de su integral que es simplemente el cuadrado de la integral sobre F .

De acuerdo a esto para definir la posición de la partícula para $t = t_0$ se toma como espacio de Hilbert el espacio de los estados L^2 y no el espacio de los movimientos.

En este caso un movimiento se describe por una trayectoria en el espacio de Hilbert de los estados.

37. Descomposición espectral de la posición en el espacio de los movimientos.

Vamos a tratar de generalizar lo dicho en el párrafo anterior.

Tenemos el espacio de Hilbert \mathcal{H} de la partícula elemental de parámetro M .

Ensayemos medir la magnitud física definida por la posición en el instante x_0 ; decimos la posición en el instante x_0 y no sólo la posición, pues para un movimiento dado no es lo mismo en un instante o en otro.

En el caso anterior podíamos decir sólo la posición y tomar después Ψ en el instante t_0 , pues se trataba del espacio de los estados. Ahora, en cambio, es el espacio de los movimientos; la magnitud es la posición en el instante x_0 , siendo x_0 un punto del espacio afín E_1 .

Además los valores de la posición no serán ya números, sino valores del espacio E_3 . (serían puntos del hiperplano perpendicular a E_1 trazado por x_0 , pero por medio de una proyección paralela a E_1 podemos tomar puntos de E_3).

El espacio X de los valores de la magnitud física es ahora E_3 . Hay que definir entonces una descomposición espectral que a cada conjunto boreliano F de X atribuye un subespacio \mathcal{H}_F de \mathcal{H} de tal manera que cumpla los axiomas respectivos y que pueda servir para medir la magnitud física: posición en el instante x_0 .

Analizaremos varias posibilidades.

I) Generalización inmediata. Tratemos de definirla en forma natural.

y veamos que no resulta satisfactorio. Podríamos proceder en la misma forma que en 36 : para cada F tomaríamos como variedad \mathcal{H}_F la obtenida de la manera siguiente: consideremos el espacio sección $\mathcal{H}(x_0)$ y sobre él construyamos la variedad $\mathcal{H}(x_0)_F$ en el instante x_0 formado por las secciones $\Psi(x_0)$ nulas fuera de F .

Ellas tienen sentido pues para cada instante las $\Psi(x_0)$ son funciones de cuadrado sumable o localmente de cuadrado sumable, como lo hemos visto en 34, y decir que son nulas fuera de F para F medible, tiene entonces una significación clara.

Podríamos ahora pasar de $\mathcal{H}(x_0)$ a \mathcal{H} por el isomorfismo existente entre ambos espacios.

Finalmente \mathcal{H}_F quedaría determinado de la siguiente manera: si se define sobre el espacio de las secciones, es el subconjunto de secciones que son nulas fuera de F ; si se define sobre el espacio global, es el conjunto de las distribuciones de ondas cuyas secciones para x_0 son nulas fuera de F .

Pero conviene señalar que \mathcal{H}_F depende entonces de x_0 : es decir, la descomposición espectral depende de x_0 , lo cual es evidente pues la posición de la partícula varía con el tiempo.

Pero es fácil ver que de ésta manera no se obtiene una descomposición espectral, pues no tiene las propiedades que hemos exigido oportunamente, y en particular se ve que si F_1 y F_2 son disjuntos las variedades correspondientes \mathcal{H}_{F_1} y \mathcal{H}_{F_2} no son ortogonales.

Se concluye entonces, que la multiplicación por x_j no es un operador autoadjunto ni aun simétrico en \mathcal{H} . Ello es debido a que no estamos ahora en el espacio L^2 , sino sobre un espacio de Hilbert completamente diferente, lo cual es sabido desde la introducción del espa-

cio \mathcal{H} .

Por consiguiente no habrá en esta forma, una medición posible de la magnitud del tipo que estamos considerando.

II) Procedimiento frecuente en Física. En algunos tratados de Física se introduce una forma de medir la magnitud x_j que consiste en lo siguiente.

Sabemos que la distribución de ondas Ψ tiene como transformada de Fourier en E_4 la expresión

$$37.1 \quad \Psi_\mu,$$

y en consecuencia $\partial_0 \Psi$ (∂_0 indica la derivación con respecto a x_0 si se ha formado un sistema de coordenadas) tiene como transformada de Fourier

$$37.2 \quad 2i\pi p_0 \Psi_\mu$$

Tomemos ahora las secciones en el instante x_0 . Hemos visto que $\Psi_y(x_0)$ tiene como transformada de Fourier

$$37.3 \quad \frac{\int \Psi(q) e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{2\sqrt{q^2 + M^2}},$$

que se determina a partir de 37.1.

La sección correspondiente a $\partial_0 \Psi$ es $(\partial_0 \Psi)_y(x_0)$, y tiene entonces por transformada de Fourier la expresión

$$37.4 \quad i\pi \int \Psi(q) e^{-2i\pi x_0 \sqrt{q^2 + M^2}}$$

que se obtiene multiplicando 37.3 por $2i\pi \sqrt{q^2 + M^2}$.

En definitiva tenemos dos expresiones $\Psi_y(x_0)$; $(\partial_0 \Psi)_y(x_0)$

cuyas transformadas de Fourier en E_3 son 37.3 y 37.4 respectivamente.

Si aplicamos el teorema de Parseval se deduce, multiplicando 37.3 por la conjugada de 37.4

$$\begin{aligned}
 37.5 \quad & \int \Psi_y(x_0) (\overline{\partial_0 \Psi})_y(x_0) dy = \\
 & = -i\pi \int \frac{\Psi(q) \overline{\Psi}(q)}{2 \sqrt{q^2 + M^2}} dq = \\
 & = -i\pi \|\Psi\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \\
 & = -i\pi \|\Psi\|^2
 \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$37.6 \quad -\frac{1}{i\pi} \int_{E_3} \Psi \overline{\partial_0 \Psi} dy = 1,$$

pues la norma de Ψ en \mathcal{H}_0 es igual a uno.

La expresión 37.6 se toma, en algunos tratados de Física, como la densidad de la probabilidad de presencia, pues su integral es igual a uno.

Pero ello no es lícito, pues si bien la integral 37.6 es igual a uno, el integrando no es positivo ni tampoco real.

Esta segunda dificultad puede evitarse tomando en ambos miembros la parte real: se tendría, puesto que $R 1 = 1$,

$$R \left(-\frac{1}{\pi} \int \Psi_y(x_0) \partial_0 \Psi_y(x_0) dy \right) = 1;$$

pero el hecho que esta expresión sea igual a uno no prueba que el integrando sea positivo. Más aún, se puede ver que tal integrando no es

positivo y por consiguiente no es apto para definir una ley de probabilidad.

Además, una cosa más grave es que dicho integrando es el producto de una función $\Psi_y(x_0)$ por una distribución $\delta_0 \Psi_y(x_0)$, y por lo tanto carece de sentido.

Es cierto que las transformadas de Fourier de estas últimas son funciones y que, en ese caso, el producto existe como muestran 37.1 y 37.3, pero el teorema de Parseval no es siempre aplicable.

Más precisamente: si se tiene $f \in L^2$; $g \notin L^2$. (Para $M = 0$ ninguna de las dos pertenece a L^2).

Supongamos que F y G sean sus transformadas de Fourier; se tiene $F \in L^2$; $G \notin L^2$. Puede suceder que $\int F \bar{G} dy$ tenga sentido, pero ello no autoriza a suponer que el producto $f \bar{g}$, y a fortiori la integral $\int f \bar{g} dx$, también lo tenga.

III) Imposibilidad de calcular la probabilidad de presencia. En Física se acostumbra a decir que el problema no tiene interés en la Teoría de los Campos, y por lo tanto no es necesario calcularlo.

Pero podría replicarse que es imposible concebir una partícula libre sin localización, y que, por tanto, debe ser factible calcular dicha probabilidad de alguna manera.

IV) Nueva definición de la probabilidad de presencia. Si el espacio $\mathcal{H}_y(x_0)$ fuera exactamente el espacio L_y^2 sería natural decir que la descomposición espectral de la medición de la magnitud en cuestión es la que ya hemos analizado, a saber, a cada F le corresponde la subvariedad $(L_y^2)_F$. Pero sabemos que $\mathcal{H}_y(x_0)$ no es el espacio L_y^2 , y en particular sabemos que su métrica no es la métrica de este último, que

está dada por la integral del producto de un elemento por el conjugado de otro.

Pero, por otra parte, es sabido que todos los espacios de Hilbert de dimensiones infinitas numerables son isomorfos.

Es posible entonces de infinitas maneras encontrar un isomorfismo tal que a cada ψ del espacio de Hilbert sección le haga corresponder un elemento $\theta \in L^2$, es decir, tendremos el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi &\longrightarrow \theta \\ \mathcal{H}(x_0) &\longrightarrow L^2 \end{aligned} ,$$

de manera que podamos tomar la descomposición espectral en L^2 y determinar \mathcal{H}_F para F contenido en E_3 .

En otros términos, para obtener \mathcal{H}_F tomaremos en L^2_y el subespacio $(L^2_y)_F$ de las funciones de cuadrado sumable que son nulas fuera de F , y pasaremos a \mathcal{H} por el isomorfismo inverso.

De esta manera se obtiene sin dudas una descomposición espectral; pues las subvariedades \mathcal{H}_{F_1} y \mathcal{H}_{F_2} serán ortogonales, pues corresponden por un isomorfismo de espacios de Hilbert a subespacios ortogonales de L^2_y .

Se tiene así una verdadera descomposición espectral en $\mathcal{H}(x_0)$. Pero hay una infinidad de isomorfismos entre dos espacios de Hilbert como se ve al tomar una base ortogonal en cada uno y ponerlas en correspondencia.

Si se toma un isomorfismo cualquiera, no habrá en general, ninguna significación física relacionada. Pero tengamos en cuenta que hay una condición fundamental a imponer: la magnitud respectiva tendrá

que ser invariante por el grupo ortogonal de E_3 . Es decir, si σ es un elemento del grupo ortogonal de E_3 , σ actúa sobre los elementos de $\mathcal{H}(x_0)$ y actúa sobre E_3 ; para un estado $\psi_y(a_0)$ la probabilidad de encontrar la posición en F debe ser la misma que la probabilidad, para $\sigma \psi_y(a_0)$, de encontrar la posición en σF .

En otros términos, para obtener una descomposición espectral interesante desde el punto de vista físico, debe conmutar con las transformaciones del grupo ortogonal de E_3 en el sentido que hemos definido oportunamente.

Hay que buscar entonces, todos los isomorfismos $\psi \rightarrow \theta$ que conmuten con los operadores del grupo ortogonal de E_3 . Tales isomorfismos definirán descomposiciones espectrales que conmutarán en el grupo ortogonal de E_3 .

Nuestro problema es ahora buscar todos los isomorfismos del tipo indicado.

Sea un isomorfismo

$$\mathcal{H}(a_0) \rightarrow L^2$$

entre el espacio de Hilbert sección y L^2 .

Como en todas las operaciones con buenas propiedades que transforman espacios apropiados en otros del mismo tipo, se puede demostrar que este isomorfismo está definido por un núcleo. Es decir, existe un núcleo J que define esta operación y tal que la imagen de $\psi \in \mathcal{H}(a_0)$ es $J \cdot \psi$.

Pero si esta operación debe conmutar con las traslaciones de E_3 , el núcleo J tendrá la forma $J_{x-\xi}$ siendo $J \in \mathcal{D}'(E_3)$. Ello equivale a decir que la transformación a que nos estamos refiriendo ten-

drá la forma

$$\Psi \rightarrow \theta = J * \Psi .$$

Pero se quiere también que haya invariancia no sólo respecto a las traslaciones, sino también respecto al grupo ortogonal entero.

En virtud de las mismas ideas analizadas en el caso del núcleo $H_{x-\xi}$ podemos afirmar que J debe ser invariante por el núcleo ortogonal de \vec{E}_3 .

En definitiva: hay que tomar todas las distribuciones invariantes con respecto a los operadores ortogonales de E_3 y formar las convoluciones de manera que la aplicación

$$\Psi \longrightarrow J * \Psi$$

establezca un isomorfismo entre $\mathcal{H}(x_0)$ y L^2 .

Se puede demostrar que puede aplicarse la transformación de Fourier en la relación precedente.

Admitamos que J es temperada y recordemos la expresión de la transformada de Fourier de $\Psi_y(a_0)$ dada en 37.3 ,

$$37.7 \quad \mathcal{F} \Psi_y(a_0) = \frac{\Psi(q) e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{2\sqrt{q^2 + M^2}}$$

en que $\Psi(q)$ es tal que

$$37.8 \quad \int \frac{|\Psi(q)|^2}{2\sqrt{q^2 + M^2}} dq < \infty ,$$

siendo su norma precisamente esta integral.

Habrá que hallar entonces un operador de multiplicación dado por una función que dependa sólo de $|q|$, de manera que se obtenga

el espacio L^2_q con su norma respectiva. Teniendo en cuenta 37.7 vemos que dicho multiplicador debe ser

$$37.9 \quad \Lambda(q) = \sqrt{2} \sqrt{q^2 + M^2} ,$$

pues su producto con 37.7 da

$$\frac{\Psi(q) e^{-2i\pi a_0 \sqrt{q^2 + M^2}}}{\sqrt{2} \sqrt{q^2 + M^2}} ,$$

función que en virtud de 37.8 pertenece a L^2_q con la norma dada por la misma integral.

$\Lambda(q)$ es además invariante por rotación.

Si regresamos ahora al espacio inicial tomando la antitransformada de Fourier, resulta

$$J_y = \overline{\mathcal{F}} \Lambda(q) = \sqrt{2} Q_{-\frac{1}{2}}(y) = \frac{2^{\frac{3}{2}} M^{\frac{7}{4}} \pi^{-\frac{1}{4}}}{\Gamma(-\frac{1}{4})} |y|^{-\frac{7}{4}} K_{\frac{7}{4}}(2\pi M |y|) ,$$

en la que aparece una función de Kelvin que decrece rápidamente en el infinito.

Si formamos las convoluciones con cada $\Psi_y(a_0)$ obtenemos

$$37.10 \quad \Theta_y = J_y * \Psi_y(a_0) ,$$

que da para cada elemento del espacio de Hilbert sección, un elemento de L^2 . Esta correspondencia establece un isomorfismo entre ambos espacios, isomorfismo que conmuta con los operadores del grupo ortogonal.

Hay, naturalmente, muchos otros que tienen la misma propiedad. Para ello, en lugar de tomar para $\Lambda(q)$ la expresión 37.9, se puede tomar la misma multiplicada por una función $h(|q|)$, tal que

$h(|q|) = 1$, pues este multiplicador debe definir un isomorfismo de espacios de Hilbert y ser invariante por el grupo ortogonal homogéneo, lo cual exige que la función sea de módulo igual a uno y dependa de q . En general podrá tomarse por lo tanto

$$37.11 \quad \sqrt{2 \sqrt{q^2 + M^2}} e^{i\alpha(q^2)},$$

donde $\alpha(q^2)$ es una función medible de q^2 .

Señalemos que entre todas las posibilidades para el núcleo J_y , la expresión 37.11 es la única que sea positiva y que da por tanto para J_y , una distribución de tipo positivo.

Esto último implica una condición de carácter matemático pero no se ve a qué condición física corresponde. Digamos que J_y es el más simple posible de los núcleos.

Podemos ahora tomar como descomposición espectral de $\mathcal{H}_0(a_0)$ la descomposición transportada por el isomorfismo inverso que será definido por

$$\Psi_y(a_0) = \Theta * B_y,$$

donde

$$B_y = \overline{\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{2 \sqrt{q^2 + M^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_{\frac{1}{2}}(y) = \frac{\sqrt{2} M^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{4}}}{\Gamma(\frac{1}{4})} |y|^{-\frac{5}{4}} K_{\frac{5}{4}}(2\pi M |y|).$$

Podríamos así conocer la medición de la longitud.

38. Medición de otras magnitudes.

a) Velocidad. Se acostumbra decir en la Mecánica Cuántica Clá-

sica que para medir la componente de la velocidad v en la dirección x_j , habiendo tomado un sistema de coordenadas, se debe considerar el operador autoadjunto

$$\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3$$

y tomar su descomposición espectral, que es una descomposición espectral correspondiente a la recta real, y que esta descomposición da la magnitud mv_j , donde m es la masa en movimiento.

Veamos que es lo mismo, a tal efecto, tomar la función Ψ o la función Θ , pues en virtud de 37.10, Θ se obtiene de Ψ por medio de una convolución, y por consiguiente, la derivada respecto de x_j da el mismo resultado. Es decir, sabemos que el operador

$$\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

es autoadjunto sobre L^2 y su descomposición espectral da la medición de la velocidad en x_j ; el razonamiento anterior nos muestra que es lo mismo considerar dicho operador sobre el espacio de Hilbert sección en el instante x_0 , obteniéndose la misma descomposición espectral.

Se ve entonces, que para la medición de la velocidad no hay problema: tomar el operador de derivación sobre $\mathcal{H}(x_0)$ o sobre L^2 da el mismo resultado.

b) Energía. La energía mc^2 corresponde al operador

$$-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0},$$

como se dice en la Mecánica Cuántica Clásica.

En este caso, a diferencia del anterior, hay que tomar una

derivación en la dirección vertical al hiperplano E_3 , es decir, no podemos hacerla sobre la sección sino sobre todo el movimiento.

Para ello hay que obtener el movimiento que corresponde a θ pero teniendo en cuenta que J_y no depende de x_0 , si en lugar de tomar la sección Ψ y θ para un instante las tomamos para cada valor de x_0 , obtenemos junto al movimiento Ψ un movimiento θ que es una función sobre E_4 . Se encuentra así:

$$38.1 \quad \theta_{\text{total}} = \Psi_{\text{total}} * (\delta_{x_0} \otimes J_y) ,$$

donde debe entenderse que para efectuar el producto de convolución de Ψ_{total} con $\delta_{x_0} \otimes J_y$, hay que tomar para cada x_0 la convolución de la sección $\Psi(x_0)$ con J_y .

Pero se trata de una convolución, y por consiguiente la derivación no presenta ninguna dificultad. Es decir, el operador de derivación respecto de x_0 es el mismo en \mathcal{H} o en L^2 .

En definitiva, para la medición de la energía podemos tomar Ψ ó θ .

Para terminar digamos que en virtud de 34.25 el operador cuya descomposición espectral da la energía es, suponiendo $h = 1$

$$- \frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0} = -c q_{-1}^* (y) .$$

c) Momentos cinéticos. Se definen como los operadores

$$38.2 \quad \frac{h}{2i\pi} (x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}) ,$$

respecto a la dirección x_1 , por ejemplo.

Se demuestra que en L^2 este operador es autoadjunto y su

descomposición espectral de la medida del momento cinético.

A primera vista parecería que hay una dificultad, pues junto a una derivada, aparece también una multiplicación por x_2 y x_3 y a priori estos operadores son autoadjuntos en L^2 pero no en \mathcal{H} . Es decir, parecería que para obtener el momento cinético hay que tomar la descomposición espectral de este operador sobre el espacio L^2 relativo a θ y regresar a \mathcal{H} por el isomorfismo inverso.

Pero se puede ver que la combinación de estos operadores de multiplicación y derivación que interviene en el momento cinético da un operador que es el mismo en \mathcal{H} ó en L^2 .

Ello se explica, pues 38.2 es el operador infinitesimal de una rotación y la transformación $\mathcal{H} \rightarrow L^2$ conmuta con las rotaciones, es decir, dicha transformación es invariante por rotación; por consiguiente el operador infinitesimal de una rotación antes o después de la transformación es el mismo.

En resumen. Los operadores de velocidad, energía y momento cinético se calculan sobre θ de la misma manera que sobre ψ . La posición, en cambio, se calcula sólo sobre θ de la manera usual.

Podemos agregar ahora lo siguiente. En lugar de considerar una sección consideremos todo el movimiento: si a partir de $\psi \in \mathcal{D}'(E_4)$ calculamos $\theta \in \mathcal{D}'(E_4)$ dada por la fórmula 38.1, obtenemos una nueva distribución que se puede definir para cada x_0 . Además, para cada x_0 obtenemos una función de L^2 con norma igual a uno, de manera que cada espacio sección resulta ser el espacio L^2 .

Se puede también buscar la ecuación de evolución que verifica θ y se encuentra que es la misma que la que verifica ψ pues 38.1

es una convolución y no será cambiada, por lo tanto, por otra convolución como la que aparece en la ecuación de evolución de Ψ . Se obtiene así

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_0} = - 2i\pi q_{-1} \underset{(y)}{*} \theta .$$

De la misma manera que para Ψ la iteración de ésta nos da la ecuación de Klein-Gordon para θ

$$(\square - 4\pi^2 M^2) \theta = 0$$

Conclusión. A partir de Ψ se puede definir una nueva distribución de ondas θ que se obtiene por la convolución de la fórmula 38.1, aunque es más simple considerar las secciones y hacer la convolución con J_y cuya determinación explícita conocemos. Esta nueva distribución de ondas θ tiene las siguientes propiedades.

- I) Satisface la misma ecuación de evolución y de Klein-Gordon.
- II) Los espacios de las secciones son más sencillos que los de Ψ pues cada espacio sección es el espacio I^2 .
- III) La correspondencia entre θ y Ψ es invariante por el grupo ortogonal de E_3 .
- IV) Los operadores de velocidad, energía y momento cinético de la Mecánica Cuántica Clásica se calculan sobre θ o Ψ indistintamente, pero el operador de posición se calcula sobre θ y no sobre Ψ .

Parecería así que la verdadera distribución de ondas es θ y no Ψ , pero θ no es Lorentz-invariante pues queda determinada por

medio de Ψ a partir de la fijación de un eje del tiempo E_1 ...

La situación es la siguiente: Ψ es la sola distribución de ondas que tiene la invariancia de Lorentz, es decir, \mathcal{H} es Lorentz-invariante, y no hay entonces otra posibilidad más que el espacio \mathcal{H} de las Ψ . Pero sobre Ψ no se puede calcular de una manera sencilla la posición de la partícula.

Si hacemos una transformación que depende de la descomposición de E_4 en $E_1 \times E_3$ pero que es invariante por el grupo ortogonal de E_3 , obtenemos una nueva distribución de ondas que para esta descomposición de E_4 fijada, se convierte en una verdadera distribución de ondas sobre la cual se pueden calcular todas las magnitudes físicas que se desean.

En este caso la probabilidad de presencia está dada no por $|\Psi_y(a_0)|^2$, sino por

$$|\theta_y(a_0)|^2 = |\Psi_y(a_0) * J_y|^2.$$

Puede agregarse que esta última probabilidad no es de carácter local, es decir, si se conoce, en un instante dado, la sección Ψ en un conjunto determinado de E_3 no se puede conocer la probabilidad de presencia correspondiente.

Para conocerla en este caso es necesario conocer la sección Ψ completa. Pero J_y contiene una función de Kelvin que decrece rápidamente de manera que prácticamente si se observan los valores numéricos se ve que hay una "casi localización".

Además, si la sección Ψ tiene un cierto soporte, ello no significa que la partícula esté contenida en ese soporte, pues θ tiene su soporte en el espacio entero, pero puede decirse, por la misma ra-

zón que la anterior, que θ está "casi concentrada" en dicho soporte.

Si fuera la única solución posible sería necesario adoptarla pero hay una infinidad que se pueden clasificar matemáticamente. J_y es la única que sea una distribución de tipo positivo. Las otras son de diferentes signos o complejas, y dan probabilidades de presencia diferentes.

Se puede mostrar además, que este proceso se puede efectuar para todas las partículas escalares o vectoriales de masa igual a cero o diferente de cero, con excepción de las partículas de masa cero y espín diferente de cero.

Para un fotón, por ejemplo, parece que no habría localización posible, o bien no habría densidad de probabilidad de presencia.

39. El problema de la energía positiva.

Hemos visto que la energía $E = mc^2$ se mide por el operador $-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$. En el espacio dual, en virtud de la transformación de Fourier, este operador corresponde al operador de multiplicación $-cp_0$.

Es claro que esta energía debe ser positiva, lo cual significa que el operador de multiplicación por $-p_0$ debe tener un espectro puramente positivo.

Esta condición de energía positiva excluye la consideración de algunos hiperboloides; los de una napa se excluyen, pues en ellos p_0 toma valores de ambos signos; entre los hiperboloides de dos napas sólo está permitida la hoja en que $-p_0$ es positiva. Esto es lo que se admite generalmente en Física. Pero aparece una dificultad matemática y es que en tal caso no se puede tomar como grupo estructural el grupo de

Lorentz entero y hay que tomar sólo el grupo de Lorentz propio, lo cual equivale a decir que no es permitido un cambio en el sentido del tiempo.

Ahora bien, el hecho que en la física de la interacción, por ser un fenómeno estadístico, el sentido del tiempo tenga una significación precisa (como en la ecuación del calor), nada autoriza a fijar el sentido, pues estamos acostumbrados en la Mecánica Clásica, mecánica de un punto libre, que en la ley fundamental de un punto libre, $F = \frac{d}{dt}(mv)$, el sentido del tiempo no debe tener una importancia especial y aquí aparece tenerlo.

Analicemos la cuestión con más detalles.

Si se cambia, por ejemplo, el sentido del tiempo, la expresión $-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$ cambia de signo y por consiguiente no puede servir para calcular la energía.

Será necesario decir que para un sentido del tiempo, la energía se mide con la expresión $-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$ y para el otro sentido se mide con la expresión $+\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$, de manera de obtener el mismo resultado en los dos casos.

Un razonamiento análogo puede hacerse con respecto a las componentes de la velocidad; éstas se miden con los operadores $\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$ que no dependen del sentido del tiempo. Pero el sentido de la velocidad depende del sentido del tiempo, esto es, si en un sentido del tiempo la componente se mide con $\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$, en el otro sentido del tiempo se mide con $-\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Se puede admitir entonces que hay un sentido privilegiado del tiempo con respecto al cual la energía y las componentes de la velocidad se calculan con las expresiones $-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$ y $\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$

respectivamente, y que si se cambia el sentido del tiempo la energía y las componentes de la velocidad se calculan por estas expresiones cambiadas de signo, de manera tal que se tenga siempre la misma hoja del hiperboloide.

Esta solución no es la ideal, pues sería preferible establecer que en la Mecánica Cuántica una partícula elemental libre sea independiente del sentido del tiempo.

Teniendo esto en cuenta proponemos la siguiente solución. Como no hay sentido privilegiado del tiempo, tomaremos el grupo de Lorentz entero.

En tal caso, el espacio de Hilbert de la partícula \mathcal{H} debe descomponerse en una suma directa de dos subespacios de Hilbert \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β , es decir

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha \oplus \mathcal{H}_\beta ;$$

cada uno de los subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β deben ser invariantes por el grupo de Lorentz propio y deben ser intercambiados por los operadores de Lorentz anticronos.

α y β son dos índices que indican los dos conos de luz, de manera que cada uno de ellos se individualiza por uno de estos índices y no con el signo + ó - .

\mathcal{H}_α corresponde al cono de luz de índice α , y \mathcal{H}_β al cono de luz de índice β ; para los elementos de \mathcal{H}_α , si se toma el sentido del tiempo que corresponde al cono de índice α la energía y las componentes de la velocidad se calculan con los operadores

$-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$ y $\frac{h}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Para los elementos de \mathcal{H}_β , si se toma el sentido del tiempo que corresponde al cono de índice β la energía

y las componentes de la velocidad se calculan con los mismos operadores.

En tal caso vemos que los dos subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β corresponden, en el espacio dual, a ambas napas del hiperboloide y no a una sola como se hace en Física.

Si se acepta esta explicación, no hay posibilidad de distinguir un sentido del tiempo que tenga un privilegio particular en una partícula elemental.

Finalmente, el operador de multiplicación que corresponde en el espacio dual al operador $-\frac{hc}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_0}$ será respectivamente $-c(p_0)_\alpha$ sobre el subespacio \mathcal{H}_α y $+c(p_0)_\beta$ sobre el subespacio \mathcal{H}_β , donde $(p_0)_\alpha$ y $(p_0)_\beta$ son los valores de p_0 cuando el sentido del tiempo es el que corresponde al cono α ó β respectivamente. En conclusión, el operador de multiplicación es: $+c|p_0|$.

Ello prueba que \mathcal{H}_α debe ser el subespacio de \mathcal{H} formado por las distribuciones cuyas transformadas de Fourier F tienen su soporte en el cono de luz de índice β . En este caso el operador de energía en $F\mathcal{H}$ es la multiplicación por $c|p_0| = c\sqrt{q^2 + M^2}$; en \mathcal{H} es la convolución con cQ_{-1} .

Es preferible entonces usar las dos hojas del hiperboloide pero midiendo la energía no con el operador $-cp_0$ sino con el operador $+c|p_0|$ que es un operador de espectro positivo, lo cual permite utilizar el grupo de Lorentz entero.

Si se utiliza el grupo de Lorentz propio en una partícula que es elemental respecto al grupo de Lorentz entero, esa partícula deja de ser elemental: aparecen entonces dos tipos de partículas elementales, el tipo α y el tipo β , que corresponden a los subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β . Si Ψ tiene como proyecciones Ψ_α y Ψ_β sobre \mathcal{H}_α

y \mathcal{H}_β la probabilidad de que en este movimiento Ψ la partícula sea de tipo α ó β es $\|\Psi_\alpha\|^2$ ó $\|\Psi_\beta\|^2$ respectivamente.

Para el grupo propio una partícula elemental debe ser del tipo α ó β , pues ahora el tipo α ó β es una magnitud universal respecto al grupo de Lorentz propio, y por consiguiente debe tener un valor cierto.

Recordemos que hemos dicho que para el grupo de Lorentz propio hay que considerar una sola hoja del hiperboloide; la partícula de tipo α corresponde a la hoja de índice β : es la partícula, la otra es la antipartícula.

De esto se deduce que hay una magnitud física de tipo universal con respecto al grupo de Lorentz propio que no lo es con respecto al grupo de Lorentz entero, y que separa la partícula en otras dos de distinto tipo.

Si se tiene en cuenta que la carga eléctrica de una partícula cargada toma dos valores opuestos y que ambos valores se intercambian por una reflexión del tiempo, se concluye que se tiene así una magnitud física natural que permite distinguir los subespacios \mathcal{H}_α y \mathcal{H}_β

Conviene recordar que en las ecuaciones de Maxwell, la derivada del campo eléctrico con respecto del tiempo es el rotor del campo magnético; este último no cambia al cambiar el sentido del tiempo, y por consiguiente no cambia la derivada que hemos mencionado. Pero una derivada cambia de signo al cambiar el sentido de la variable, y por lo tanto debe cambiar el signo del campo eléctrico. (1)

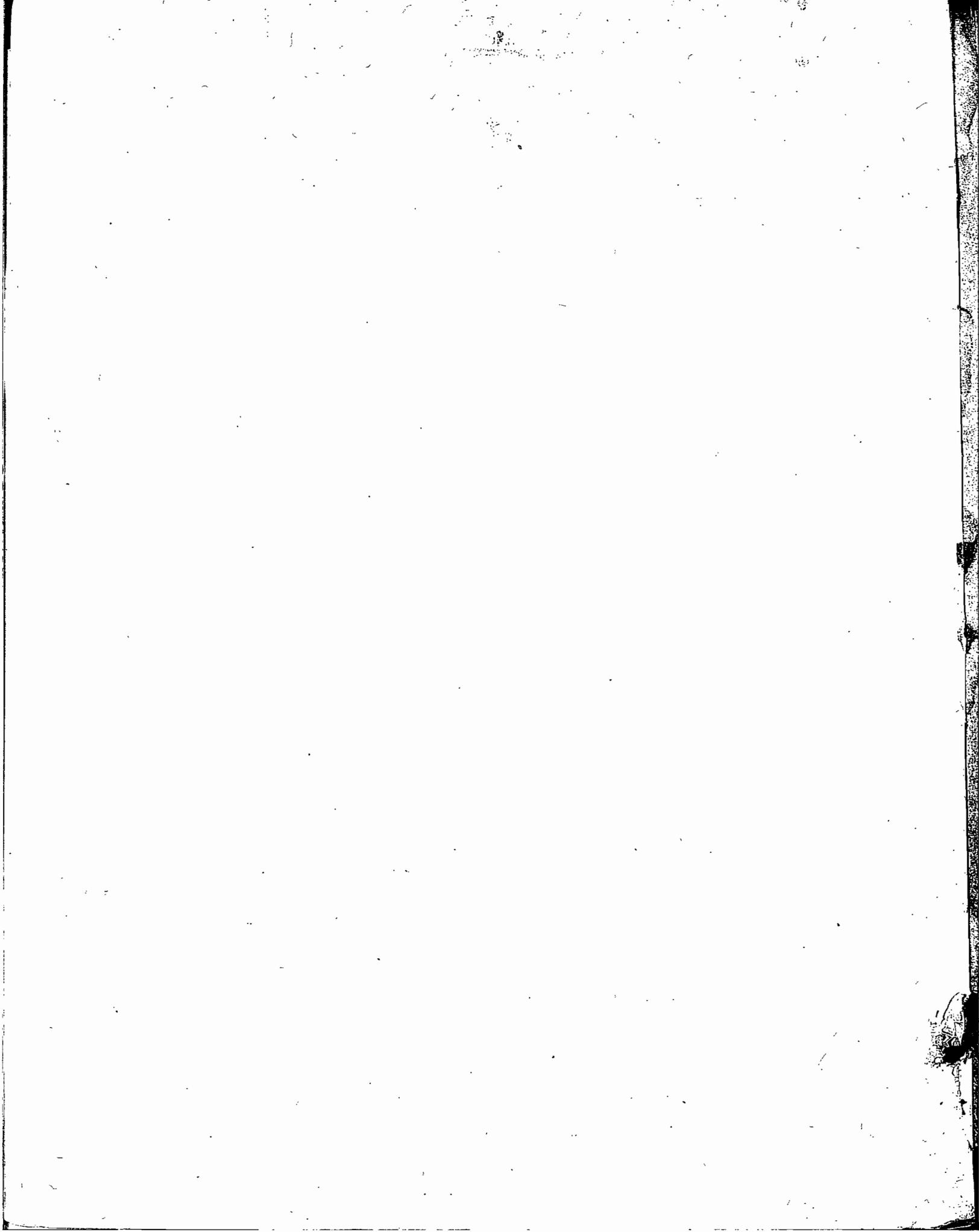
(1) El caso de la partícula neutra lleva a un problema distinto, pues es necesario considerar distribuciones de ondas con valores reales

Se ve así que, de acuerdo a este planteo, hay una magnitud física que no conocemos y que distingue, para una partícula de parámetro M dado, dos posibilidades según sea el cono de luz elegido.

Hay entonces una magnitud física con dos valores y se ve que es la única posible que dependa del sentido del tiempo, pues sobre el espacio \mathcal{H} el grupo de Lorentz entero es irreducible y el grupo propio es reducible de una sola manera en dos componentes.

En conclusión, toda magnitud física que depende del sentido del tiempo para una partícula debe ser una función de ésta. Es lógico entonces considerar que tal magnitud constituye una interpretación natural de la carga eléctrica.

Pag.	Linea	donde dice	debe decir
3	7	es decir $\frac{h}{2\pi}$	es decir $\frac{h}{2\pi}$
6	27	la topología es	\mathcal{D}' la topología es
21	12	córrrientes	corrientes (ver G. De Rham: Variétés Differentiables. Act. Sc. et Ind.)
25	21	$K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'_x$	$K \cdot \varphi \in \mathcal{D}'_x$
36	6	Si $\varphi_\nu = 0$ en \mathcal{D}	Si $\varphi_\nu \rightarrow 0$ en \mathcal{D}
36	7	$\phi_\nu = 0$ en \mathcal{H}	$\phi_\nu \rightarrow 0$ en \mathcal{H}
44	9	que depende de	que depende de μ .
45	4	que coinciden	que coincide
55	13	$ (K \cdot \varphi T)_{\mathcal{H}}$	$ (K \cdot \varphi T)_{\mathcal{H}}$
59	22	cualquiera sea	cualquiera sea Ψ
71	11	$(K_1 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_1}$	$(K_1 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_1}$
71	13	$(K_2 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2}$	$(K_2 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2}$
71	17	$(K_2 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)$	$(K_2 \cdot \varphi K_1 \cdot \varphi)_{\mathcal{H}_2}$
90	23	llamémoslo a	llamémoslo \vec{a}
107	8	$x \vec{E}_n$	$E_n \times \vec{E}_n$
116.	5	corrector	covector
124	17	no puede ser $\mathcal{F}\mathcal{H}$	no puede ser $\mathcal{F}'\mathcal{H}$
131	1	se verifica que	En efecto si el operador "flecha" asociado es la identidad se verifica que
136	17	subgrupo G	subgrupo \vec{G}
143	21	en realidad	en la realidad
158	1	de la Teoría de los Caracteres o de la Teoría de los Convexos	Puede decirse que en la categoría de los espacios de Hilbert G -invariantes, \mathcal{H} es extremal en el sentido de los puntos extremales de la Teoría de los Caracteres o de la Teoría de los Convexos
163	7	a cada	A cada
168	1	escalar en \vec{E}_n	pues para obtener el producto escalar de \vec{p} y \vec{q} es necesario transportarlos sobre el espacio \vec{E}_n por medio de γ^{-1} y tomar el producto escalar en \vec{E}_n
184	14	La medida	La medida μ
195	1	definido analíticamente por la expresión $p^2 > 0$	los conjuntos abiertos, intersección que en este caso es el abierto definido analíticamente por la expresión $p^2 > 0$
207	24	Si T es	Si \vec{T} es
216	18	recta arbitraria a la recta	recta arbitraria paralela a la recta
226	1	contenido en $\mathcal{D}'(E_3)$ con topología más fina que la inducida y también	Veremos que de esta manera se obtiene un espacio de Hilbert contenido en $\mathcal{D}'(E_3)$ con topología más fina que la inducida y también



CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

- Fascículo 1. Matemática y física cuántica Laurent Schwartz
- Fascículo 2. Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert . . . Mischa Cotlar
- Fascículo 3. Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por Alberto P. Calderón
- Fascículo 4. Propiedades en el contorno de funciones analíticas Alberto González Domínguez
- Fascículo 5. Teoría constructiva de funciones . . . Jean Pierre Kahane
- Fascículo 6. Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables Jean Pierre Kahane
- Fascículo 7. Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones Juan Carlos Merlo
- Fascículo 8. Funciones armónicas Stephan Vagi

Pedidos:

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Avenida de Mayo 760 - 2º piso
Buenos Aires - Argentina.



316562