ISSN 1853-709X

Fascículo 2

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Misha Cotlar

Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 2

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **2** cursos y seminarios de matemática

Mischa Cotlar

CONDICIONES DE CONTINUIDAD DE OPERADORES POTENCIALES Y DE HILBERT

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA — FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

1959

ADVERTENCIA

El presente fascículo es una ampliación de unas notas mimeografiadas por esta Facultad en 1957, y reproduce el material de un curso - seminario dictado en 19[illegible] en el Instituto Matemático de Buenos Aires y en 1958 en Washington University de Saint Louis. Su principal objeto es servir de introducción a los recientes trabajos de Calderón y Zygmund sobre integrales singulares, y algunos tópicos estrechamente vinculados a los mismos, como la teoría de operadores potenciales y espacios de Sobolev.

El orden seguido en esta publicación es el de la exposición durante el curso, pero para informarse sobre los resultados fundamentales conviene hacer algunas alteraciones, a saber:

1) Después de los §§ 1 y 2 del Cap. I, leer los §§ 1 , 2 del Cap. IV, y volver luego al § 3 del Cap. II.

2) Para la demostración del Corolario 4 , pág. 46, conviene tener en cuenta la nota J del § 7 , Cap. IV.

3) El § 9 del Cap. II puede omitirse, basta leer la definición de la página 80, el enunciado del teorema 5, pág. 87, y la demostración de este teorema dada en la pág. 98 .

4) Para el teorema 16, pág. 181, parte c), es necesario tener en cuenta la nota L) al final del § 7, Cap. IV; lo mismo para el teorema de Young, en la pág. 240.

He tratado en lo posible de hacer la exposición en base a métodos generales, con vistas a posibles generalizaciones y vinculaciones con otras teorías. Para no presuponer más conocimientos que la teoría de la integral de Lebesgue, he insertado demostraciones de algunos hechos bien conocidos.

Mucho agradezco a Rafael Panzone, E. Oklander y Cora Ratto de Sadosky la valiosa ayuda prestada en la redacción de estas notas.

M.C.

Buenos Aires, 1959

I. TIPO DE OPERADORES

1. GENERALIDADES Usaremos las notaciones siguientes. E^n designará el espacio euclídeo de n dimensiones; cada punto x de E^n es una n-upla de números reales, $x = (x^1,\dots,x^n)$. Dados dos puntos x, y de E^n, $x+y$ designará al punto $(x^1+y^1,\dots,x^n+y^n)$, y si a es un escalar (un número real) ax designará al punto $(ax^1,\dots,ax^n)$; además escribiremos

$$(x,y) = x^1y^1 +,\dots,+ x^ny^n , \qquad |x| = \left[(x^1)^2 +\dots+ (x^n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = (x,x)^{\frac{1}{2}} = \text{distancia de } x \text{ al origen.}$$

Si A es un conjunto de E^n designaremos con $|A|$ su medida (o medida exterior) de Lebesgue; la integración respecto de esta medida se designará con dx. Además de la medida de Lebesgue consideraremos otras medidas μ de Lebesgue-Stieltjes (de Radón) y para éstas usaremos las notaciones $\mu(A)$, $d\mu$. $L^p = L^p(E^n)$ indicará el conjunto de todas las funciones $f(x)$ definidas en E^n, medibles y tales que $|f(x)|^p$ es integrable Lebesgue; para una tal función escribiremos

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p \right\}^{1/p}$$

Más generalmente, dado un conjunto E (por ejemplo un cubo de E^n, un dominio, un círculo, etc.) y una medida μ en E, designaremos con $L^p(E,\mu)$ al conjunto de todas las funciones $f(x)$ definidas en E, medibles, tales que $|f(x)|^p$ es integrable respecto de μ sobre E.

Consideraremos también el caso en que $E = \{1,2,\dots,n,\dots\}$ es discreto y μ es una medida sobre E. En este caso μ queda perfectamente determinada conociendo los números $\mu(n)$ = medida del punto n, pues todo conjunto de E es una suma numerable de puntos y su medida es suma de las medidas respectivas. En este caso, una función definida en E es una sucesión $h(n) = h_n$ y su integral es una suma:

$$\int_E h\,d\mu = \sum_n h_n \mu(n) .$$

En particular, si μ es la medida con masa uno en cada punto, es decir si $\mu(n) = 1$, entonces la integral última se reduce a la suma $\sum h_n$, y $\|h\|_p = \left\{ \sum |h_n|^p \right\}^{1/p}$

Como es usual, dos funciones de L^p se identifican si difieren tan solo en puntos de un conjunto de medida nula.

En el Análisis se consideran preferiblemente los espacios L^p con $p \geq 1$, pues en este caso $\|f\|_p$ verifica la desigualdad $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ y tiene todas las propiedades de una norma; esta desigualdad no vale si $p<1$. El caso $p = \infty$ no se excluye; recordemos que se dice que $f \in L^\infty$ si existe un número fijo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todos los x salvo un conjunto de medida nula. Se prueba facilmente que entre todos estos números M hay uno mínimo que recibe el nombre de sup esencial de f y se designa con $\|f\|_{\infty}$ = sup esenc. de $|f(x)|$.

Si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones definidas en E , diremos que $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ si $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo x de E , exceptuando un conjunto de medida nula (respecto de la medida que opera en E). Diremos que f_n converge a f en media (p), o que $f_n \longrightarrow f$ en L^p, si todas estas funciones pertenecen a L^p y si $\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$.

Si $f_n \longrightarrow f$ en L^p , en general, no se puede afirmar que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente; pero sí se puede afirmar de que existe una sub sucesión f_{n_i} que converge puntualmente a $f(x)$. Recíprocamente, si $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ no se puede, en general, afirmar de que f_n converge a f en L^p ; pero esto es cierto si la sucesión $f_n(x)$ tiene una mayorante en L^p , es decir si existe una función fija $G(x) \in L^p$ tal que $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ para todo n y para casi todo x . En efecto, supongamos que $\lim f_n(x) = f(x)$ para casi todo x , y que $|f_n(x)| \leqslant G(x)$, donde $G(x) \in L^p$, y probaremos que $f_n \longrightarrow f$ en L^p . De $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ resulta $|f(x)| \leqslant G(x)$, luego $|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2G(x)$, $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant 2^p |G(x)|^p$. Como $|f_n(x) - f(x)|^p \longrightarrow 0$ para casi todo x , y como $2^p |G(x)|^p$ es integrable, podemos integrar término a término (por el teorema de paso a límite bajo el signo integral de Lebesgue) resultando

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p d\mu \longrightarrow 0 \text{ , es decir } \|f_n - f\|_p \longrightarrow 0 \text{ , como queríamos ver.}$$

Una función $g(x)$, definida en E , se dice <u>simple</u> , si existen p conjuntos $A_1, .. A_p$, medibles, acotadas, y de medida finita, y p constantes $a_1, .. a_p$, tales que $g(x) = a_1 g_1(x) + ... + a_p g_p(x)$, donde $g_i(x)$ es la función característica del conjunto A_i . Es decir una función simple es una función medible que toma un número finito de valores y que es nula fuera de un conjunto acotado de medida finita. Si $E = E^n$ y si los conjuntos A_i son cubos (de lados paralelos a los ejes), diremos que $g(x)$ es función simple escalera.

Designaremos con L_o al conjunto de todas las funciones simples. Este conjunto $L_o = L_o(E)$ tiene las 3 propiedades siguientes : 1° L_o es un <u>lineal</u> , es decir un espacio vectorial (es decir si f , $g \in L_o$ entonces también $af(x) + bg(x) \in L_o$) 2° Para todo p es $L_o \subset L^p$. 3° Para todo p , es L_o <u>denso</u> en L^p ; esto quiere decir que dada $f \in L^p$ y $\mathcal{E} > 0$, existe una $g \in L_o$ tal que $\|f - g\|_p < \mathcal{E}$ (o también, que existe una sucesión g_n de L_o tal que $g_n \longrightarrow f$ en L^p) .

Si $E = E^n$ indicaremos con L_e al conjunto de las funciones elementales-escaleras: L_e es también un lineal y es denso en todas las L^p .

Otro conjunto importante de funciones, que es lineal y denso en todas las L^p , es el

$\mathcal{D}_o = \mathcal{D}_o(E^n)$ = conjunto de las funciones $f(x)$ que son contínuas y que se anulan fueran de un conjunto acotado (este conjunto acotado varía con f). Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_o$ el conjunto compuesto de aquellas funciones de $\mathcal{D}_o$ que tienen derivadas de todos los ordenes; entonces $\mathcal{D}$ es también denso en todas las L^p

Finalmente recordemos que para toda función medible y no-negativa $f(x)$ existe una sucesión no-decreciente de funciones simples $g_n(x)$, tales que $0 \leq g_1(x) \leq \ldots \leq g_n(x) \leq \ldots$ y $g_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente (y recíprocamente). Si $f(x)$ es medible y de signo cualquiera existe todavía una sucesión g_n de L_o tal que $f(x) = \lim g_n(x)$, pero la sucesión g_n no es necesariamente monótona.

En todo lo que sigue, salvo indicación contraria, se considerarán tan solo funciones y conjuntos medibles.

2. DEFINICION DE TIPO

Sea $E = \{x\}$ un conjunto fijo con una medida fija también μ, y sea $E_1 = \{y\}$ otro conjunto (en general en un espacio de dimensión diferente) y μ_1 una medida en E_1. Sea $\mathcal{L} = \{f(x)\}$ un conjunto de funciones definidas en E; supondremos que $\mathcal{L}$ es un lineal (es decir f, $g \in \mathcal{L}$ implica $af + bg \in \mathcal{L}$). Consideremos un operador $h = Tf$ definido en $\mathcal{L}$, que a cada función $f(x)$ de $\mathcal{L}$ le hace corresponder una función $h(y)$ definida en E_1.

DEFINICION 1. Diremos que el operador T es de tipo (p, s) sobre $\mathcal{L}$ si se verifican las condiciones siguientes: a) $\mathcal{L} \subset L^p(E, \mu)$; b) para toda f de $\mathcal{L}$ la función $h = Tf$ pertenece a $L^s(E_1, \mu_1)$; c) existe una constante M fija, tal que para toda f de $\mathcal{L}$ se verifica

$$\|Tf\|_s \leq M \cdot \|f\|_p \qquad (1)$$

Se entiende que en (1), $\|f\|_p$ designa $\left\{\int_E |f(x)|^p \, d\mu\right\}^{1/p}$, y $\|Tf\|_s = \|h\|_s$ designa $\left\{\int_{E_1} |h(y)|^s \, d\mu_1\right\}^{1/s}$.

La mínima constante M para la cual vale la desigualdad (1) se llama la norma del operador T y se designará con $\|T\|$. A veces, para precisar, escribiremos $M_{p,s} = \|T\|_{p,s}$ y hablaremos del tipo $\left(L^p(E, \mu); \; L^s(E_1, \mu_1)\right)$.

A todo par de números (p, s) asociemos un punto P del plano de coordenadas $(1/p, 1/s)$ y en vez del par (p, s) hablaremos del punto P. Diremos entonces que T es de tipo P si T es de tipo (p, s). Por ejemplo si $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, T de tipo P significa que T es de tipo $(2, 2)$. Si se consideran tan solo los espacios L^p normados con $p \geq 1$, entonces el punto $P = (1/p, 1/s)$ estará dentro del cuadrado unitario del plano. En particular si $p = s$ entonces P está en la diagonal principal del cuadrado.

La otra diagonal del cuadrado está formada por los puntos $(1/p, 1/s)$ tales que $1/p + 1/s = 1$. En tal caso decimos que p y s son <u>números conjugados</u> y escribimos

$$s = p^* \quad , \qquad \text{de modo que} \quad 1/p + 1/p^* = 1 \quad , \qquad p^* = p/(p-1) \tag{2}$$

El punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el punto de intersección de ambas diagonales y corresponde al tipo $(2, 2)$.

Un operador T definido sobre $\mathcal{L}$ se dice <u>lineal</u> si $T(af + bg) = aT(f) + bT(g)$, cualesquiera sean las constantes a, b. Suponemos conocido el siguiente teorema que vale en todo espacio normado:

<u>TEOREMA DE EXTENCION</u>. Sea $\mathcal{L} \subset L^p$ un lineal y sea T un operador lineal de tipo (p, s) sobre $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ es denso en L^p, entonces existe un único operador T_1 definido en todo L^p tal que: T_1 es de tipo (p, s) en L^p y $T_1 f = Tf$ para todo f de $\mathcal{L}$. Más aún $\|T_1\| = \|T\|$.

En particular, si T es de tipo (p, s) sobre L^p, y lineal, entonces T queda perfectamente determinado por sus valores Tf para las f de L_o ó de L_e (ó de $\mathcal{D}_o$ ó de $\mathcal{D}$). Recíprocamente todo operador lineal de tipo (p, s) sobre L_o (ó $\mathcal{D}_o$ ó $\mathcal{D}$) es la restricción a L_o de un único operador de tipo (p, s) sobre todo L^p. Por eso para determinar el tipo de T es suficiente estudiarlo sobre L_o, loque haremos frecuentemente en lo sucesivo.

<u>Observación</u>: Si $E = \{1, 2 .. n, ..\}$ de modo que toda función h sobre E es una suceción h_n, designaremos con L_o al conjunto de todas las sucesiones h_n tales que $h_n = 0$ para $n > n_o$, donde n_o varía con h. Para tal h simple la suma $\sum |h_n|^p$ se reduce a una suma finita y por tanto h pertenece a todo $L^p(E)$ y se comprueba facilmente que L_o es denso en todo $L^p(E)$.

Si T es de tipo (p, s) sobre L^p entonces T transforma a toda función f de L^p en una función $h = Tf$ de L^s; pero esta condición por sí sola no constituye la definición de tipo, es necesario agregar la condición esencial (1) con M independiente de f.

Suponemos también conocido el siguiente teorema que vale para todo espacio normado:

<u>Teorema</u>. Para un operador lineal $h = Tf$ definido en todo L^p son equivalentes las dos condiciones siguientes: 1) T es de tipo (p, s) en L^p; 2) para toda sucesión f_n de L^p tal que $f_n \to f$ en L^p, se verifica $Tf_n \to Tf$ en L^s.

Observemos todavía que de la condición (1) de tipo sigue que si f varía en la esfera unitaria $\|f\| \leq 1$ de L^p entonces los Tf correspondientes varían en la esfera $\|h\|_s \leq 1$ de L^s. Es decir un operador T de tipo (p, s), transforma conjuntos acotados de L^p en conjuntos acotados de L^s. Por tanto un operador de tipo (p, s) es lo mismo que un operador contínuo de L^p en L^s, y lo mismo que un operador acotado de L^p en L^s.

3. EJEMPLOS DE OPERADORES .

EJEMPLO 1 . Sea $E = \{x\}$ la circunferencia O un intervalo (a , b) de longitud 2π, dx la medida de Lebesgue sobre E, y sea $E' = \{..-n,..-1,0,1,..n,..\}$ y μ' la medida sobre E' de masa 1 en cada n : $\mu'(n) = 1$. Para toda $f(x)$ de $L^1(E)$ es $f(x)\, e^{-inx}$ integrable, pues e^{-inx} tiene módulo 1 para todo n . Luego podemos definir el operador

$$\mathcal{F} f = h(n) = h_n = 1/2\pi \int_a^b f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad (1)$$

Este operador hace corresponder a toda $f(x)$ definida sobre E una función $h = h(n)$ definida sobre E'. Este operador es de tipo $(1 , \infty)$, pues para todo n ,

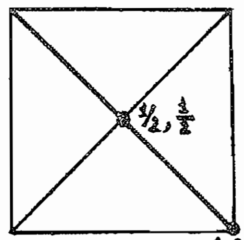
$$|h(n)| \leqslant 1/2\pi \cdot \int_a^b |f(x)|\, dx = 1/2\pi\ \|f\|_1 , \qquad \text{luego}$$

$$\|h_n\|_\infty \leqslant 1/2\pi\ \|f\|_1 .$$

El operador es también de tipo $(2,2)$, pues por la desigualdad de Bessel,

$$\|h_n\|_2^2 = \sum |h(n)|^2 \leqslant 1/2\pi \int_a^b |f(x)|^2\, dx = 1/2\pi\ \|f\|_2^2 .$$

En el dibujo adjunto están marcados los dos puntos $(1/1 , 1/\infty)$ y $(1/2 , 1/2)$ que, como acabamos de ver, responden al tipo del operador.



Ejemplo 1a. Sean E , dx , E' , μ' comoen el ejemplo anterior. Consideremos ahora el operador

$$\mathcal{F}^* h = f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n\, e^{inx} \qquad (2)$$

que hace corresponder a funciones $h(n) = h_n$ definidas sobre E' funciones $f(x)$ definidas sobre E. Este operador es de tipo $(1 , \infty)$, pues si $h \in L^1(E')$, es decir si $\sum |h_n|$ es convergente, entonces la serie (2), es absolutamente convergente y se tiene para todo x, $|f(x)| \leqslant \sum |h_n| = \|h\|_1$.

Por otra parte, el operador (2) está perfectamente bien definido sobre L_o , es decir si h_n es nula para $n > N$. Por el teorema de Riesz-Fischer este operador es de tipo $(2 , 2)$ sobre L_o, pues en virtud de este teorema para toda h de L_o se tiene que

$$\frac{1}{2\pi}\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\, \|\mathcal{F}^* h\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_a^b |f(x)|^2\, dx = \sum |h_n|^2 = \|h\|_2^2 .$$

Luego, como L_o es denso $L^2(E')$, el operador (2) se extiende de una única manera a un operador de tipo $(2 , 2)$ definido en todo $L^2(E')$. Luego (2) defineun operador de tipo $(2 , 2)$ sobre L^2. Más aún se prueba en la teoría de las series de

Fourier, que los operadores (1) y (2) son inversos uno del otro, es decir, para toda f de $L^2(E)$ vale :

$$f = \mathcal{F}^* h = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f). \qquad (3).$$

EJEMPLO 2. Sea $E = E^n$, $E' = E^n$, $\mu = \mu'$ = medida de Lebesgue, y sean

$$\mathcal{F} f = h(y) = \int_{E^n} f(x)\, e^{-2\pi i(x,y)}\, dx . \qquad (3)$$

$$\mathcal{F}^* h = f(x) = \int_{E^n} h(y)\, e^{+2\pi i(x,y)}\, dy . \qquad (4)$$

El operador (3) transforma funciones $f(x)$ definidas en E^n en funciones $h(y)$ definidas en E^n, y (4) transforma funciones $h(y)$ en funciones $f(x)$. Como en el ejemplo 1 se verá que estos operadores son de tipo $(1, \infty)$. Por el teorema de Plancherel, cuya demostración se da más abajo, estos operadores son de tipo $(2, 2)$, y cada uno es inverso del otro sobre L^2. Más precisamente, los operadores (3) y (4) están bien definidos sobre L_0, y el teorema de Plancherel dice que son de tipo $(2, 2)$ sobre L_0, y por lo tanto se extienden a todo L^2.

EJEMPLO 3. Sea $k(x)$ una función fija, definida en E^n, $k(x) \in L^1(E^n)$. Fijando $k(x)$ y variando la función $f(x)$, consideremos el operador convolución:

$$Tf = h(y) = f * k = \int_{E^n} f(y-x)\, k(x)\, dx . \qquad (5)$$

Por un teorema de Young (ver el libro de Zygmund, cap. 4, o nuestros apuntes de Funciones Reales), si $f(x)$ pertenece a L^p, $p \geq 1$, la integral (5) existe para casi todo y, de modo que la función $h(y)$ está definida para casi todo y, y más aún $h(y)$ también pertenece a L^p y se tiene la desigualdad siguiente:

$$\|h\|_p = \|f * k\|_p \leqslant \|k\|_1 \cdot \|f\|_p . \qquad (6)$$

Como $\|k\|_1 = M$ es un número fijo, la desigualdad (6) muestra que el operador (5) es de tipo (p, p) para todo $p \geq 1$, incluyendo $p = \infty$.

Observación 1. Más generalmente, sea $k(x) \in L^q$, $q \geq 1$, y sea p tal que $1/p + 1/q > 1$. Entonces para toda f de L^p la función $h(y)$ de (5) está definida para casi todo y; más aún, $h(y)$ pertenece a L^r donde $1/r = 1/p + 1/q - 1$, y se tiene

$$\|h\|_r \leqslant \|k\|_1 \cdot \|f\|_p . \qquad (6a)$$

Observación 2. Los resultados que preceden valen lo mismo para funciones f, k definidas sobre la circunferencia, entendiendo por $y - x$ la diferencia de los ángulos correspondientes. Más generalmente, supongamos que $k(x)$ y $f(x)$ están definidas en un cubo de lado 2, y sea E el cubo de igual centro y lado 1. Entonces podemos definir

$$h(y) = \int_E f(y-x) \; k(x) \; dx$$

para todo y de E; pues si x e y varían en E, $y - x$ no se sale del dominio de definición de las funciones, y la última integral tiene sentido. Entonces vale: si $k(x) \in L^1(E)$, el operador $h = Tf$ es de tipo (p, p) para todo $p \geq 1$ donde h se considera definida en E.

EJEMPLO 3a. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $k(x) = k_\varepsilon$ la función igual a uno si x pertenece al intervalo $(0, \varepsilon)$ y a cero en caso contrario. Sea

$$T_\varepsilon f = f * k_\varepsilon = 1/\varepsilon \int_0^\varepsilon f(y-x) \; dx . \qquad (6b)$$

Este operador es de tipo (p, p) para todo ε, pues

$$\| k_\varepsilon \|_1 = \int_0^\varepsilon (1/\varepsilon) \; dx = 1 , \text{ para todo } \varepsilon > 0 .$$

Más aún todos estos operadores, para diferentes ε, tienen norma uniformemente acotada, $\| T_\varepsilon \| \leq 1$, pues por lo visto en el ejemplo 3 la norma de T_ε es menor igual que $\| k_\varepsilon \|_1 = 1$.

Observemos que si $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ entonces (6b) se escribe

$$\left[T_\varepsilon f \right] (y) = h(y) = \left[F(y+\varepsilon) - F(y) \right] / \varepsilon .$$

Cuando ε tiende a cero $T_\varepsilon f$ tiende a $f(y)$ para casi todo y, y también en L^p si f pertenece a L^p y $p > 1$; la demostración de este hecho será dada más adelante. Observemos todavía que el operador T_ε está dado por el núcleo k_ε; para ε tendiente a cero el operador T_ε tiende al operador unidad I, mientras que el núcleo k_ε tiende a cero; es decir el operador límite no está más dado por el núcleo límite, si el núcleo se considera como función. Pero si se toma el límite en sentido de distribuciones, el núcleo límite no será la función nula sino la distribución delta, y entonces se mantiene también en el límite la correspondencia entre núcleos y operadores.

EJEMPLO 4. Vimos que toda función $f(x)$ de $L^2(E^n)$ tiene una transformada de Fourier $h(y) = \mathcal{F} f$, $h(y) \in L^2(E^n)$, y que recíprocamente, toda $h(y)$ de L^2 es la transformada de una f, $f = \mathcal{F}^* h$. Sea ahora $m(y)$ una función fija, acotada:

$$|m(y)| \leq M \quad \text{para todo } y \text{ de } E^n .$$

Dada $h(y)$ de $L^2(E^n)$, es facil ver que $h(y)\ m(y)$ también será de L^2, y que $\|h(y)\ m(y)\|_2 \leq M \cdot \|h\|_2$; en efecto, se tiene

$$\|h(y)\ m(y)\|_2^2 = \int_{E^n} |m(y)|^2\ |h(y)|^2\ dy \leq M^2 \int_{E^n} |h(y)|^2\ dy = M^2 \|h\|_2^2$$

Ahora, dada f de L^2, le corresponde su transformada de Fourier $h = \mathcal{F} f$. Como h es de L^2, $h(y)\ m(y)$ es también de L^2 y por tanto es la transformada de cierta función g de L^2. Asi pues a toda f de L^2 le corresponde una g, resultando definido un operador $g = Tf$ por la fórmula :

$$g = Tf = \mathcal{F}^*\ m(y)\ h(y) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f) . \qquad (7)$$

Evidentemente este operador es lineal, y es facil ver que es de tipo $(2, 2)$, pues por el teorema de Plancherel se tiene que :

$$\|g\|_2 \leq \|\mathcal{F} g\|_2 = \|m(y)\ h(y)\|_2 \leq M \cdot \|h\|_2 \leq M\ \|f\|_2 \quad , \text{ luego}$$

$$\|g\|_2 \leq M \cdot \|f\|_2 .$$

El operador Tf definido por la fórmula (7) se llama operador definido por el multiplicador $m(y)$. Asi pues todo operador dado por un multiplicador acotado es de tipo $(2, 2)$ y de norma $\|T\| \leq M$, donde $M =$ sup de $|m(y)|$.

De la misma manera se define el operador multiplicador con series, en vez de integrales, de Fourier : Si con las notaciones de los ejemplos 1 y 1a, $f(x)$ pertenece a $L^2(E)$, y $m(n) = m_n$ es una función acotada en E', $|m_n| \leq M$ entonces la fórmulas

$$h_n = 1/2\pi \int_a^b f(x)\ e^{-inx}\ dx ,$$

$$g(x) = \mathcal{F}^*(h_n\ m_n) = \sum m_n\ h_n\ e^{inx} ,$$

definen un operador $g = Tf$, llamado operador dado por el multiplicador $\{m_n\}$, y como más arriba se verá que este operador es lineal y de tipo $(2, 2)$, con norma menor igual que $M =$ sup de $|m_n|$.

Uno de los objetos de este curso será estudiar tales operadores multiplicadores en los espacios L^p para $p \neq 2$.

Observación 3. Si E tiene una medida finita y si $f(x)$ pertenece a $L^2(E)$ entonces f es integrable, es decir pertenece a $L^1(E)$ (más generalmente, si $q > p$ y $f \in L^q$ entonces $f \in L^p$). Esto no es cierto si E tiene medida infinita (la demostración de esto puede verse en los apuntes de Funciones Reales) . Ahora, en el ejemplo 1 , el espacio E tiene medida finita 2π , luego si f es de $L^2(E)$ ella es de $L^1(E)$ y su transformada de Fourier está bien definida por la fórmula (1).

Pero en los ejemplos 1a, y 2, los espacios E' ó E^n tienen medidas infinitas, y si $f \in L^2$ no se puede asegurar que las fórmulas (2) ó (3) ó (4) tengan sentido. Por eso en estos casos la transformada $\mathcal{F} f$ se definió antes en L_0 , luego se probó que es de tipo (2 , 2) en L_0, y esto permitió extender su definición a todo L^2 .

4 . TEOREMA DE PLANCHEREL

Para simplificar consideraremos el caso de E^1 , pero los razonamientos que siguen se extienden facilmente a todo E^n .

Sea $f(x) \in L^2(E^1)$ y consideremos la integral de Fourier

$$\mathcal{F} f = F(y) = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad . \quad (1)$$

Como $f(x)$ puede ser no integrable, la fórmula (1) no tiene aûn sentido. Para darle sentido se puede proceder de las tres maneras siguientes :

a) La integral (1) está bien definida si $f \in L_0$; probando que $\mathcal{F} f$ es de tipo (2 , 2) sobre L_0 , podremos extenderlo a todo L^2 , con lo cual (1) adquirirá sentido para toda f de L^2.

b) Sobre todo intervalo finito es $f(x)$ integrable (cfr. Observación 3) , luego para todo a finito está bien definida la integral

$$\mathcal{F}_a f = F_a(y) = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-a}^{a} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \; . \quad (1a)$$

Probando que , para a tendiendo al infinito, la función F_a tiende hacia una función $F(y)$ en L^2 , podremos tomar esta función $F(y)$ como definición de la integral (1) . Para que esta definición sea correcta, es necesario probar además que si $f(x) \in L^1 \cap L^2$ (es decir, si f es tal que (1) tiene sentido y está bien definida) entonces F_a tiende $F(y)$ en L^2, siendo $F(y)$ dada por (1) . Obsérvese, que aqui se trata deprobar de que F_a tiende a un límite en L^2 pero no que tiende para casi todo y , es decir puntualmente (la convergencia puntual de $F_a(y)$, para f de L^2, es una de las cuestiones delicadas del Análisis Harmónico).

c) Si f es de L_0 la integral (1) está bien definida, e integrando de 0 á y , tendremos, llamando $H(y)$ la primitiva de $F(y)$,

$$H(y) = \int_0^y F\, dy = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{iy}\, dy \qquad (2)$$

(para deducir (2) hemos intercambiado el orden de integración, lo que es lícito en nuestro caso pues la integral doble

$$\int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x)\, e^{-ixy} \right| dx\, dy = |y| \int |f(x)|\, dx \qquad \text{es finita}$$

y podemos aplicar el teorema de Fubini).

Ahora, si probamos que para toda f de L^2 la integral (2) está bien definida y que la función $H(y)$ correspondiente es derivable en casi todo punto y, podremos definir la transformada (1) por la fórmula

$$F(y) = d/dy \left\{ (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{-ixy} - 1}{iy}\, dx \right\}. \qquad (2a)$$

Análogamente, si f es de L^2, la transformada $\mathcal{F}^* f$ no está definida, y también su definición puede hacerse según uno de los tres métodos a), b), c).

<u>TEOREMA</u> (de Plancherel). <u>Si $f(x)$ pertenece a $L^2(E^1)$, entonces cada uno de los tres métodos a), b), c), son aplicables a $f(x)$ y los tres definen una misma transformación $\mathcal{F} f = F(y)$</u>. <u>Los mismos métodos se aplican para la transformada $\mathcal{F}^* h$</u>. <u>Más aún, $\mathcal{F} f$ y $\mathcal{F}^* h$ son operadores unitarios:</u>

$$\|\mathcal{F} f\|_2 = \|f\|_2 \quad ; \quad \|\mathcal{F}^* h\|_2 = \|h\|_2 , \qquad (3)$$

<u>y los operadores $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ son inversos uno del otro, es decir para toda f de L^2 vale:</u>

$$f(x) = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f), \qquad (4)$$

<u>Demostración</u>. 1) Probaremos antes que se aplica el método a), o sea que el operador (1) es de tipo (2 , 2) sobre L_o, o también que si $g \in L_o$ entonces vale $\|G(y)\|_2 = \|g\|_2$, donde $G(y) = \mathcal{F} g$. Tenemos

$$\int_{-a}^{a} |G(y)|^2\, dy = 1/2\pi \int_{-a}^{a} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-ixy}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, e^{izy}\, dz =$$

$$= 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, g(z)\, dx\, dz \int_{-a}^{a} e^{iy(z-x)}\, dy =$$

$$= 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, g(z) \frac{\operatorname{sen} a\,(x - z)}{x - z}\, dx\, dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\; S_a(x)\; dx \quad , \qquad (5)$$

donde

$$S_a(x) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} g(z) \frac{\operatorname{sen} a\,(x - z)}{x - z} \quad . \qquad (5a).$$

Probaremos ahora que, para toda g de L_o, $S_a(x)$ tiende a $g(x)$, para a tendiente a infinito, manteniéndose menor que una constante C para todo a y todo x. De ahi va a seguir que el integrando de la última integral de (5) se mantiene menor que $C\,|g(x)|$, luego por el teorema de integración bajo el signo de límite de Lebesgue, se obtendrá de (5), haciendo a tender a infinito, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx \quad ,$$ lo que probará que el operador es de tipo $(2, 2)$ sobre L_o.

Asi pues debemos probar que para g de L_o la integral (5a) tiende a $g(x)$ en forma acotada. Como toda g de L_o es una combinación lineal de funciones características de intervalos, basta probarlo en este último caso, es decir basta probarlo para el caso en que $g(x)$ es igual a 1 en un intervalo (c, d) finito, y nula fuera de este intervalo. Para este caso tenemos que

$$S_a(x) = 1/\pi \int_c^d \frac{\operatorname{sen} a\;(x - z)}{x - z}\, dz =$$

$$= 1/\pi \int_{a(x-d)}^{a(x-c)} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt \quad . \qquad (5b)$$

Ahora, en los cursos de Análisis se prueba que la integral

$$\int_A^B \operatorname{sen} t\; dt \;/\; t$$

está acotada por una constante C para todo A, B, lo que prueba que $|S_a(x)|$ está acotada por C, para todo a y todo x. Además si x está fuera de (c, d) entonces $a(x - d)$ y $a(x - c)$ tienen igual signo y tienden ambos a $\pm\infty$, luego en este caso (5b) tiende a cero; en este caso $g(x)$ es también cero, luego $S_a(x)$ tiende a $g(x)$. Si x está dentro de (c, d), (5b) tiende a

$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}$ sent dt/t que como se sabe es igual a $\pi/\pi = 1$; luego también en este caso S_a tiende a $g(x)$, y esto prueba la aplicabilidad del método a).

2) Sea f de L^2 tal que $f(x)$ es nula fuera de un intervalo $(-A, A)$. Entonces la integral (1) tiene sentido y define una función $F(y)$; por otra parte el método a) también adjudica a $f(x)$ una transformada que designaremos con $f(y)$. Veamos que $[\mathcal{F} f]$ (y) = F(y) en casi todo y , es decir que el método a) define la misma función que la integral (1), en el caso cuando esta integral existe y se reduce a una integral de $-A$ a A . Para ello sea g_n una sucesión de funciones de L_o tal que todas las g_n se anulan fuera de $(-A , A)$ y tal que g_n tiende a f en L^2 , es decir $\|f - g_n\|_2 \longrightarrow 0$. Entonces por lo visto en 1), tendremos que $G_n = \mathcal{F} g_n$ tiende a $\mathcal{F} f$ en L^2, y por tanto una subsucesión de $G_n(y)$ tiende a $[\mathcal{F} f]$ (y) en casi todo y.

Por otra parte, como $G_n(y) = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-A}^{A} g_n(x)\, e^{-ixy}\, dx$,

tendremos de (1), y aplicando la desigualdad de Schwartz, que

$$|F(y) - G_n(y)|^2 \leqslant 1/2\pi \left[\int_{-A}^{A} |f(x) - g_n(x)|\, dx\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 1/2\pi \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g_n(x)|^2\, dx\right] \left[\int_{-A}^{A} 1\, dx\right] =$$

$$A/\pi \quad \|f - g_n\|_2^2 \longrightarrow 0$$

Es decir $G_n(y)$ tiende uniformemente a $F(y)$ y por lo visto más arriba una subsucesión tiende a $F(y)$, luego $F(y)$ coincide con $[\mathcal{F} f]$ (y) .

2a) Sea ahora $f \in L^2 \cap L^1$, de modo que para ella la integral (1) está bien definida y da una función $F(y)$; veamos que también ahora esta función $F(y)$ coincide con la función $[\mathcal{F} f]$ (y) que da el método a). Para ello sea f_n la función igual a $f(x)$ en $(-n , n)$ y nula en los demás puntos. Entonces f_n tiende a $f(x)$ en L^2 y su transformada $F_n(y)$ por lo recién probado, es dada por (1) luego tiende a $F(y)$ en todo y . Pero por a), F_n tiende a $\mathcal{F} f(y)$ en L^2 y una subsucesión tiende puntualmente, luego de nuevo obtenemos que $F(y) = \mathcal{F} f(y)$.

3) De 2) y de 2a) resulta enseguida que el método b) es aplicable, pues la fórmula (1a) no es otra cosa que la transformada de Fourier de la función f_a igual a $f(x)$ en el intervalo $(-a , a)$ y nula en los demás puntos. Como f_a tiende a

$f(x)$ en L^2 resulta de 1) que $\mathcal{F}_a f$ tiende a $\mathcal{F} f$ en L^2.

Lo dicho se aplica también a $\mathcal{F}^*$ y de lo visto en 1) resulta además que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ son operadores unitarios, es decir verifican (3).

4) Veamos que el método d) se aplica también. Por ser $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^*$ unitarios resulta, como se sabe, que no cambian el producto escalar, luego dadas f, g de L^2 y designando con F, G sus transformadas de Fourier, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,\overline{G(x)}\,dx . \qquad (6)$$

Si tomamos $g(x)$ igual a 1 para $0 \leq x \leq z$ y nula en los demás x, se tendrá que $G(y) = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}}(e^{-izy} - 1)/(-iy)$, luego por la última fórmula,

$$\int_0^z f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,\frac{e^{izy}-1}{iy}\,dy . \qquad (2b)$$

Analogamente, aplicando la fórmula (6) a $\mathcal{F}^*$ obtendremos la fórmula (2).

5) Finalmente, para funciones características de intervalos, se comprueba por un cálculo directo, conocido del curso de Análisis, que $f = \mathcal{F}^*(\mathcal{F} f)$. Luego esta fórmula vale tambien para combinaciones lineales de tales funciones, es decir para las funciones f de L_o. Como L_o es denso en L^2 resulta del método a) de definirla transformada de Fourier, que esta fórmula vale para toda f de L^2.

Con esto queda probado el teorema de Plancherel.

<u>Observación</u>. El método b) puede interpretarse así: Sea $k(x,y) = e^{-ixy}$ y sea $k_a(x,y) = k(x,y)$ si $x \in (-a, a)$, y nulo para los demás x. Entonces $F_a(y)$ puede escribirse

$$F_a(y) = (1/2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,k_a(x,y)\,dx .$$

Por tanto el método b) consiste en aproximar el núcleo $k(x,y)$ por núcleos k_a "buenos", en el sentido de que cada k_a da una integral convergente.

5. INTEGRALES SINGULARES.

El método usado en el teorema de Plancherel para definir la transformada de Fourier sobre L^2 puede formularse en términos generales como sigue. Consideremos un núcleo $K(x,y)$, $x \in E^n$, $y \in E^n$ y el operador T definido por la fórmula

$$Tf = F(y) = \int_{E^n} k(x, y) f(x) dx . \qquad (7)$$

Si para (casi) todo $y \in E^n$ es $k(x, y) f(x)$ integrable en x, entonces la fórmula (7) hace corresponder a la función $f(x)$ una función $F(y)$. Si el núcleo $k(x, y)$ es "suficientemente bueno" entonces (7) existe (como integral de Lebesgue) para todas las $f(x)$ de cierto L^p, yqueda entonces definido un operador T en L^p. Uno de los problemas básicos, respecto de este operador, es determinar su tipo (p, s), es decir para que valores de s es T un operador acotado de L^p en L^s.

Sin embargo, en muchos casos, el núcleo $k(x, y)$ no es suficientemente regular y la integral (7) no existe si f es una función general. Es decir, en general (7) es una <u>integral singular</u> cuyo sentido debe ser definido. Por tanto tenemos entonces 2 problemas : definir el operador T para f generales, y luego determinar el tipo del operador así definido.

Ambos problemas se reducen generalmente a un problema de tipo, es decir de determinar para que valores p, s es el operador de tipo (p, s).

En efecto, para definir la integral (7) pueden usarse los métodos siguiente, que ya hemos aplicado en el caso del teorema de Plancherel.

<u>Método A</u>. En general es posible encontrar cierto conjunto $L_o = \{g(x)\}$ de funciones tal que L_o es denso en cada L^p y tal que (7) está bien definida, como integral de Lebesgue, para toda $f = g$ de L_o. En tal caso queda definido un operador $Tf = F(y)$ sobre L_o.

Ahora, si logramos probar que este operador es de tipo (p, s) <u>sobre L_o</u>, por el teorema de extención, T se extenderá de una única manera a todo el L^p, y obtendremos un operador $Tf = F$ definido en todo L^p, y de tipo (p, s). Podemos entonces tomar a la función $F(y) = [Tf](y)$ como definición de la integral singular (7), aún si esta integral no existe.

<u>Método B</u>. En vez de aproximar la función $f(x)$ general por funciones simples podemos aproximar el núcleo $k(x, y)$ por núcleos "buenos" $K_N(x, y)$ tales que $K(x, y) = \lim K_N(x, y)$ y tales que para cada N la integral

$$T_N f = F_N(y) = \int_{E^n} K_N(x, y) f(x) dx \qquad (7a)$$

sea bien definida. Tenemos entonces para cada N un operador T_N.

Si $T_N f = F_N$ tiende a una función límite $F(y)$ al tender N al infinito (a veces se hace N tender a cero), entonces definimos $F(y)$ como el valor de (7). La forma más simple para elegir los núcleos K_N es "cortar" el núcleo $K(x, y)$ (cfr. la observación que precede).

Ahora, $F_N(y)$ puede tender a $F(y)$ en dos sentidos, en media (s), o puntualmente (en caso del teorema de Plancherel se probó la convergencia media y no puntual), y cual de estas convergencias tiene lugar (o ambas), depende de la teoría particular, es decir del núcleo particular.

También es importante averiguar si F_N converge en <u>forma dominada</u> (es decir si existe una función fija $G(y) \in L^s$ tal que $|F_N(y)| \leq G(y)$ para todo y y todo N).

Además, si todos los operadore T_N son de tipo (p, s) y sus normas $\|T_N\|$ están acotadas por una misma constante M, entonces el operador límite $Tf = F(y)$ será también de tipo (p, s) y $\|T\| \leq M$.

<u>Resumiendo</u>, cuando tenemos una integral singular de la forma (7), se presentan los problemas siguientes:

1) Probar que (7) existe para $f \in L_o$, donde L_o es denso en los L^p, y que Tf es de tipo (p, s) sobre L_o. (Aquí L_o puede ser L_o, ó $\mathcal{D}_o$, ó $\mathcal{D}$ etc..).

2) Elijiendo los núcleos aproximantes K_N (en general cortando el núcleo $K(x, y)$), probar que los operadores T_N, definidos por (7a), son de tipo (p, s) con normas uniformemente acotadas, $\|T_n\| \leq M$.

3) Probar que $F_N(y) = T_N f$ converge puntualmente a una función límite $F(y)$, para toda f de cierto L^p, y determinar estos L^p.

4) Determinar los L^p tales que F_N converge en media-(s) para toda $f \in L^p$.

5) Determinar cuando $F_N(y)$ converge puntualmente en forma dominada (en L^s)

Claro que todo lo dicho se aplica a operadores más generales de la forma

$$F(y) = \int_E K(x, y) \, f(x) \, d\mu , \qquad (7b)$$

donde $x \in E$, $y \in E'$, y μ es la medida que actua en E.

En el presente curso consideraremos diferentes operadores singulares del tipo (7b) y resolveremos los problemas 1) _ 5) para estos operadores. Para alguno de estos operadores haremos un estudio más profundo, determinando, además del tipo del operador también lo que llamaremos semitipo, seudo tipo, tipo completamente contínuo, y si Tf es lipshitziana, etc.......Una vez, resueltos estos problemas de tipo y completa continuidad, estudiaremos las ecuaciones integrales con tales núcleos, y finalmente aplicaremos estos resultados a ecuaciones diferenciales.

II CRITERIOS GENERALES DE TIPO

1. LEMAS AUXILIARES

Sea como antes $E = \{x\}$, μ la medida en E. Si $f(x)$, $g(x)$ son dos funciones definidas en E, designaremos con (f, g) al producto escalar

$$(f, g) = \int_E f(x) \overline{g(x)} \, d\mu \qquad (1)$$

Por el teorema de Hölder, este producto escalar existe si $f \in L^p$, $g \in L^{p^*}$, $p \geq 1$, además $|(f, g)| \leq \|f\|_p \|g\|_{p^*}$.

Usaremos frecuentemente el siguiente

LEMA 1. Si $f \in L^p$, $p \geq 1$; entonces : 1) para toda $g \in L^{p^*}$, $\|g\|_{p^*} = 1$, vale $|(f, g)| \leq \|f\|_p$; 2) existe una g tal que $\|g\|_{p^*} = 1$ y $\|f\|_p = (f, g)$.

Demostración. Parte 1) es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder. Para probar 2), sea $\|f\|_p = a$ y pongamos

$$g(x) = (1/a)^{p-1} |f(x)|^{p-1} \operatorname{sig} f(x)$$

Entonces tomando en cuenta que $p^* = p/(p-1)$, $p^*(p-1) = p$, $p/p^* = p-1$, tendremos

$$|g(x)|^{p^*} = (1/a)^p |f(x)|^p, \qquad f(x) g(x) = (1/a)^{p-1} |f(x)|^p$$

luego

$$\|g\|_{p^*} = \left\{ \int (1/a)^p |f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p^*} = (1/a)^{p-1} (\|f\|_p)^{p-1} =$$

$$= (1/a)^{p-1} a^{p-1} = 1,$$

además

$$(f, g) = \int (1/a)^{p-1} |f(x)|^p d\mu = (1/a)^{p-1} \|f\|_p^p = (1/a)^{p-1} a^p =$$

$$= a = \|f\|_p \quad ,$$

lo que prueba el lema 1 .

LEMA 1a. <u>Si $f \in L^p$, $p \geq 1$, entonces</u>

$$\|f\|_p = \sup (f , g) \quad , \quad \|g\|_{p^*} = 1 \ , \ g \in L_o \tag{2}$$

<u>donde el sup se toma para los posibles $g \in L_o$ simples, con $\|g\|_{p^*} = 1$.</u>

<u>Demostración</u> . Evidentemente basta probar que $\|f\|_p \leq \sup (f , g)$, $g \in L_o$, $\|g\|_{p^*} = 1$, o sea que dado $\mathcal{E} > 0$, existe una tal $g \in L_o$ con $\|f\|_p \leq (f , g) + \mathcal{E}$. Por 2) del lema 1 existe una $h \in L^{p^*}$ con $\|h\|_{p^*} = 1$, tal que $\|f\|_p = (f , h)$. Podemos aproximar $h(x)$ con una $g \in L_o$ tal que $\|g\|_{p^*} = 1$ y tal que $\|h - g\|_{p^*} < \mathcal{E} / \|f\|_p$. Entonces $\|f\|_p = (f , h) = (f , g) + (f , h-g)$, y como por la desigualdad de Hölder $(f , h-g) \leq \|f\|_p \ \|h - g\|_{p^*} \leq \|f\|_p \ \mathcal{E} / \|f\|_p = \mathcal{E}$, resulta $\|f\|_p \leq (f , g) + \mathcal{E}$, l,q,d,d .

Pasaremos ahora a otro lema, concerniente a funciones analíticas. De los elementos de la teoría de funciones analíticas se sabe que si $F(z)$ es analítica en un dominio D , entonces $|F(z)|$ no puede alcanzar el máximo en un punto interior de D. Luego, si $|F(z)| \leq M$ en todo z de la frontera de D , entonces también $|F(z)| \leq M$ en D . Más aún, basta pedir que la desigualdad $|F(z)| \leq M$ se verifique en todo z de la frontera salvo un número finito de puntos $z_1,..z_p$, siempre que sea $\limsup |F(z)| < \infty$ para $z \to z_i$, $i = 1,..p$. (En caso en que D es un ángulo o una franja, la última condición puede reemplazarse por más generales aún, del tipo de Phragmén-Lindelöf) .

En particular, si D es la franja $0 \leq x = R(z) \leq 1$, tenemos este principio del máximo módulo : si para todo punto <u>finito</u> z de la frontera de D es $|F(z)| \leq M$, y si para $z \to \infty$ es $\limsup |F(z)| < \infty$, entonces $|F(z)| \leq M$ en D. (Más generalmente, en vez de $\limsup |F(z)| < \infty$, se puede pedir que $m(y) = \sup |F(x + iy)|$, $0 \leq x \leq 1$, no crezca más rápido que una exponencial) .

De este principio del máximo módulo se deduce facilmente el siguiente teorema, análogo del teorema de los tres círculos de Hadamard.

LEMA 2 (Teorema de las tres rectas). Sea $F(z)$, $z = x + iy$, una función analítica en la franja $0 \leq x = R(z) \leq 1$.

Si se verifica que:

1) para todo punto $z = iy$, de la recta $x = 0$, es $|F(iy)| \leq M_1$

2) para todo $z = 1 + iy$, de la recta $x = 1$, es $|F(1+iy)| \leq M_2$

3) $|F(z)|$ es acotada en la franja;

entonces, para todo $z = t + iy$ de la recta $x = t$, vale $|F(t+iy)| \leq M_1^{1-t} M_2^t$, si $0 < t < 1$.

Demostración. Sea $G(z) = e^{az} F(z)$, $a \geq 0$. Entonces $|G(z)| = e^{ax} |F(z)|$, de modo que sobre la recta $x = 0$ es $|G(z)| \leq M_1$ sobre la recta $x = 1$ es $|G(z)| \leq e^a M_2$, y en el resto de la franja es $|G(z)| \leq e^a |F(z)|$, luego acotada. Aplicando el principio del máximo módulo, tendremos que $|G(t+iy)| \leq \max(M_1, e^a M_2)$. Eligiendo a para que sea $M_1 = e^a M_2$, es decir $e^a = M_1 M_2$, tendremos

$$|G(t+iy)| = e^{at} |F(t+iy)| \leq M_1 \text{, luego}$$

$$|F(t+iy)| \leq M_1 e^{-at} = M_1 (M_2/M_1)^t = M_1^{1-t} M_2^t ,$$

l.q.d.d.

Observación 1. Por lo dicho más arriba, el lema 2 vale si $F(z)$ es analítica tan solo en $0 < x < 1$, si $\limsup |F(z)| \leq M_1$ para $z \to iy$, $\limsup |F(z)| \leq M_2$ para $z \to 1 + iy$ y si $\limsup |F(z)| < \infty$ para $z \to \infty$ (o más generalmente, si $|F(z)|$ no crece más rápidamente que una exponencial).

Observación 2. Poniendo $M(t) = \sup |F(t+iy)|$, para los posibles $-\infty < y < \infty$, (es decir $M(t) = \sup |F(z)|$ sobre la recta $x = t$) el lema 2 dice que $M(t) \leq M(0)^{1-t} M(1)^t$, o sea que $\log M(t) \leq (1-t) \log M(0) + t \log M(1)$. Esto significa que $\log M(t)$ es una función convexa de t.

2. TEOREMA DE CONVEXIDAD

Sea $E = \{x\}$ con la medida μ, $E_1 = \{y\}$

con la medida μ_1 y consideremos operadores $h = Tf$ que a funciones $f(x)$ definidas en E les hace corresponder funciones $h(y)$ definidas en E_1. Supondremos que T actua sobre $L_o = L_o(E)$ = funciones simples en E.

Sea ahora T_z un operador función de la variable compleja $z = u + iv$; es decir, para cada z de un dominio D tenemos un operador T_z sobre L_o, $h = T_z f$. Para cada z, la función $T_z f$ está definida en E_1, y si $g \in L_o(E_1)$ es otra función simple definida en E_1 podemos formar el producto escalar $(T_z f, g) = \int_{E_1} [T_z f](y)\, \overline{g(y)}\, d\mu_1$.

Fijando las funciones $f \in L_o(E)$, $g \in L_o(E_1)$, y variando z, obtendremos una función de la variable compleja z,

$$H(z) = (T_z f, g) \tag{3}$$

El operador T_z se dice analítico y acotado en el dominio $D = \{z\}$, si para todo par de funciones $f \in L_o(E)$, $g \in L_o(E_1)$, la función correspondiente $H(z)$, definida por (3), es analítica y acotada en D.

TEOREMA DE CONVEXIDAD PARA OPERADORES FUNCIONES Sea T_z un operador, función de la variable compleja $z = u + iv$, tal que:

(1) para cada z de la franja $0 \leq u = R(z) \leq 1$, es T_z un operador lineal, y T_z es analítico y acotado en dicha franja;

(2) para todo $z = iv$ de la recta $u = 0$, es T_z de tipo (p_1, s_1) = tipo P_1 sobre L_o, con $\|T_{iv} f\|_{s_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ para $f \in L_o$, $p_1, s_1 \geq 1$; (4)

(3) para toda $z = 1 + iv$ de la recta $u = 1$, T_z es de tipo (p_2, s_2) = tipo P_2 sobre L_0, con

$$\|T_{1+iv} f\|_{s_2} \leq M_2 \|f\|_{p_2} \quad \text{para } f \in L_o, \quad p_2, s_2 \geq 1. \tag{5}$$

Entonces: a) para todo $0 < t < 1$, el operador T_t es de tipo (p, s) = tipo P, donde $P = (1/p, 1/s)$ es dado por

$$1/p = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2} \quad , \qquad 1/s = \frac{1-t}{s_1} + \frac{t}{s_2} \quad , \qquad (6)$$

(es decir P divide al segmento $P_1 P_2$ en partes proporcionales a t y $(1-t)$).

b) se tiene $\|T_t f\|_s \leq M \|f\|_p \quad , \quad f \in L_o \quad ,$ (7)

siendo $M \leq M_1^{1-t} M_2^{t}$ (8)

Observación 3 . Este teorema se halla implícitamente demostrado en trabajos de Thorin , Calderón , Zygmund , e Hirshman, y explícitamente formulado por E. Stein .

Demostración . Por el lema la basta probar que para todo $f \in L_o(E)$ y para toda $g \in L_o(E_1)$, $\|g\|_{s^*} = 1$, vale

$$|(T_t f , g)| \leq M \|f\|_p \text{ , con } M \leq M_1^{1-t} M_2^{t} \text{ .} \qquad (8a)$$

Sean :

$$a(z) = (p/p_2 - p/p_1) z + p/p_1 \quad , \quad b(z) = (s^*/s_2^* - s^*/s_1^*) z + s^*/s_1 \quad , \qquad (9)$$

$$F(z) = \left(T_z (f^{a(z)}) , (g)^{b(z)}\right) = \int_{E_1} \left[T_z f^{a(z)}\right](y) \left[g^{b(z)}\right](y) \, d\mu_1 \qquad (10)$$

Vamos a probar las siguientes propiedades .

1) La parte real $R(a(z)) = \begin{cases} p/p_1 & \text{si } z = iv \\ p/p_2 & \text{si } z = 1 + iv \text{ , además } a(t) = 1 \end{cases}$

$R(b(z)) = \begin{cases} s^*/s_1^* & \text{si } z = iv \\ s^*/s_2^* & \text{si } z = 1 + iv \text{ , además } b(t) = 1 \end{cases}$

$F(t) = (T_t f , g)$.

En efecto tenemos $a(iv) = p/p_1 + i(p/p_2 - p/p_1) y$,

$a(1 + iv) = (p/p_2) + i(p/p_2 - p/p_1) y$, $a(t) = p/p_1(1-t) + p/p_2 \, t =$

$= p((1-t)/p_1 + t/p_2) = p \cdot 1/p$ (por (6)) $= 1$.

análogamente para $b(z)$.

2) Si f, $g \in L_0$, entonces $F(z)$ definida por (10) es analítica y acotada en $0 \leqslant u \leqslant 1$.

En efecto, como f, g, son simples se tiene que $f(x) = C_i$ en un conjunto A_i, $i = 1,\ldots p$, $g(x) = d_j$ en un conjunto B_j, $j = 1,\ldots k$, siendo los A_i (B_j) disjuntos entre sí. Por tanto

$$f^{a(z)} = \sum C_i^{a(z)} f_i(x) , \qquad g^{b(z)} = \sum d_j^{b(z)} g_j(x) ,$$

donde f_i = función característica de A_i, g_j de B_j. Luego

$$T_z f^{a(z)} = \sum C_i^{a(z)} T_z f_i \quad , \quad \text{y resulta}$$

$$F(z) = \int_{E_1} T_z f^{a(z)} \overline{g^{b(z)}} d\mu_1 = \sum_{i,j} C_i^{a(z)} d_j^{b(z)} (T_z f_i g_j) =$$

$$= \sum_{i,j} C_i^{a(z)} d_j^{b(z)} H_{ij}(z) ,$$

donde las $H_{ij}(z)$ son analíticas y acotadas por hipótesis, pues T_z es analítico y acotado.

3) Para $z = iv$, es $|F(z)| \leqslant M_1 (\|f\|_{p_\phi})^{p/p_1}$

para $z = 1 + iv$ es $|F(z)| \leqslant M_2 (\|f\|_{p_\phi})^{p/p_2}$

En efecto, sea por ejemplo $z = iv$. Por 1) es

$$\left| f^{a(iv)} \right| = |f|^{p/p_1} , \qquad \left| g^{b(iv)} \right| = |g|^{s^*/s_1^*} ,$$

luego aplicando la desigualdad de Hölder tendremos :

$$|F(iv)| = \left| (T_{iv} f^{a(iv)} , g^{b(iv)}) \right| \leqslant \left\| T_{iv} f^{a(iv)} \right\|_{s_1} \left\| g^{b(iv)} \right\|_{s_1^*} ,$$

y como por hipótesis T_{iv} es tipo (p_1 , s_1),

$$|F(iv)| \leqslant M_1 \left\| f^{a(iv)} \right\|_{p_1} . \left\| g^{b(iv)} \right\|_{s_1^*} =$$

$$= M_1 \left\{ \int (|f|^{p/p_1})^{p_1} \right\}^{1/p_1} \left\{ \int (|g|^{s^*/s_1^*})^{s_1^*} \right\}^{1/s_1^*} =$$

$$= M_1 (\|f\|_p)^{p/p_1} (\|g\|_{s^*})^{s^*/s_1^*} = M_1 (\|f\|_p)^{p/p_1}$$

Análogamente para $z = 1 + iv$.

De la propiedad 3) y del lema 2, resulta que

$$|F(t)| \leqslant \left(M_1 (\|f\|_p)^{p/p_1}\right)^{1-t} \left(M_2 (\|f\|_p)^{p/p_2}\right)^{t} ,$$

y como $p/p_1 (1 - t) + p/p_2\, t = p/p = 1$,

$$|F(t)| \leqslant M_1^{1-t} M_2^{t} \|f\|_p .$$

Como $F(t) = (T_t f , g)$, la última desigualdad se reduce a (8a), lo que prueba el teorema.

<u>COROLARIO</u> . (<u>Teorema de convexidad de Riesz-Thorin</u>) <u>Si $h = Tf$ es un operador lineal de tipo $(p_1 , s_1) =$ tipo P_1 sobre L_o con norma M_1, y también de tipo $(p_2 , s_2) =$ tipo P_2 sobre L_o con norma M_2, entonces :</u>
<u>para todo punto $P = (1/p , 1/s)$ del segmento $P_1 P_2$ es T de tipo (p , s) sobre L_o y con norma M tal que</u>

$$\underline{M \leqslant M_1^{t} M_2^{1-t}} , \qquad (8b)$$

<u>donde t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, es la relación en que P divide a $P_1 P_2$, es decir</u>

$$\underline{1/p = t/p_1 + (1 - t)/p_2 , \qquad 1/s = t/s_1 + (1 - t)/s_2 .} \qquad (6a)$$

<u>Observación 4</u> . La desigualdad (8b) expresa que si $M(t)$ es la norma de T respecto al tipo (p , s), donde p , s estan dados por (6a), entonces $\lg M(t)$ es función convexa de t. Es decir si T es de tipo P_1 y P_2, entonces T es de tipo P para todo P del segmento P , P_2 y la norma es función convexa de P.

<u>Demostración</u> . Pongamos para todo z complejo, $T_z = T$. El operador función T_z así definido es analítico y acotado en z, pues

$(T_z f, g) = (Tf, g) =$ constante para cada $f, g \in L_0$ fijos .

Para $z = iv$ es $T_z = T$ y Tiv es de tipo (p_1, s_1) con norma $\leq M_1$, para $z = 1 + iv$, $T_z = T$ es de tipo (p_2, s_2) con norma $\leq M_2$. Luego se cumplen las hipótesis del teorema de convexidad para operadores funciones, y resulta $\|Tf\| = \|T_{1-t} f\| \leq M_1^{t} M_2^{1-t} \|f\|_p$, lo que prueba el corolario .

Observación 5 . En el corolario que precede (teorema de Riesz-Thorin) se supone que Tf está definido para todas las funciones $f \in L_0$ a valores reales o complejos, y la linealidad $T(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 T(f_1) + C_2 T(f_2)$ vale para constantes C_i complejos.
Si T está definido sobre f reales, el teorema deja de ser cierto para el caso $p_i > s_i$, es decir en el triángulo superior del "cuadrado de los tipos" . Pero si $p_1 \leq s_1$, $p_2 \leq s_2$, es decir para el triángulo inferior del "cuadrado de los tipos" , el teorema subsiste aún si Tf está definido solo para las $f \in L_0$ reales; más aún en este caso se puede dar una demostración "real" que no usa la teoría de variable compleja, y es precisamente la demostración original dada por M. Riesz . M. Riesz probó, por tanto, el teorema para el triángulo inferior y con variable real ; Thorin completó el caso del triángulo superior. Más tarde Calderón y Zygmund probaron que el teorema subsiste para operadores T sublineales .

3. APLICACION A TRANSFORMACION DE FOURIER .

Consideremos por separado el caso de series y de integrales de Fourier.

A) Series de Fourier . En los ejemplos de la parte I hemos definido $h = \mathcal{F} f$ para toda $f(x) \in L^1(E)$, donde $E = \{x\} = (0, 2\pi)$ (o la circunferencia) con medida de Lebesgue dx , y donde $h = h_n = h(n)$ es una sucesión o una función sobre $E_1 = \{\ldots -n, \ldots 1, 2, \ldots n, \ldots\}$ con medida μ_1 de masa uno en cada n . Para $f \in L^2$ tenemos además que $f = \mathcal{F}^{*} (\mathcal{F}^{1} f)$ y que vale la desigualdad de Bessel $\sum |h_n|^2 \leq \|f\|_2^2$ y su opuesta $\|f\|_2 \leq \|h_n\|_2$.

Vamos a extender esta teoría de L^2 para L^p , con $1 < p \leq 2$.

TEOREMA DE HAUSDORFF - YOUNG para series

a) La transformación de Fourier

$$h_n = \mathcal{F} f = (1/2\pi) \int f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

es de tipo (p, p^*) sobre L_o para $1 \leq p \leq 2$, luego se extiende a un operador $\mathcal{F} f$ sobre L^p. Por tanto, para toda $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, está definido el operador $h_n = \mathcal{F} f$, y vale

$$\|h_n\|_{p^*} \leq \|f\|_p \,.\, (1/2\pi)^{1/p} \,. \tag{11}$$

b) La antitransformación

$$\mathcal{F}^* h_n = f(x) = \sum h_n e^{inx} \tag{12}$$

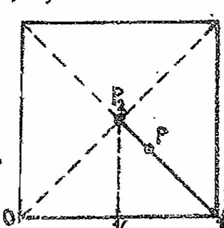
es de tipo (p, p^*) sobre $L_o(E_1)$, si $1 \leq p \leq 2$, y se extiende a todo $L^p(E_1)$. Luego para toda sucesión $h_n \in L^p(E_1)$, $1 \leq p \leq 2$, las sumas parciales de la serie (12) convergen en media p^* hacia una $f(x) \in L^{p^*}$, y más aún se tiene

$$(1/2\pi)^{1/p^*} \|f\|_{p^*} \leq \|h_n\|_p \tag{11a}$$

$$h_n = \mathcal{F}(\mathcal{F}^* h_n) \tag{11b}$$

c) Si $f, g \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, y si $\mathcal{F} f = \mathcal{F} g$, entonces $f = g$. Idem para dos h_n de $L^p(E_1)$.

Demostración. a) En parte I vimos que $\mathcal{F}$ es de tipo $(1, \infty)$ sobre L_o y que $\|\mathcal{F} f\|_\infty \leq \|f\|_1$, y también de tipo $(2, 2)$ con $\|\mathcal{F} f\|_2 \leq 1\, \|f\|_2$. Aplicando el teorema de Riesz-Thorin veremos que $\mathcal{F}$ es de tipo (p, s) sobre L_o para todo p, s tales que el punto $P = (1/p, 1/s)$ pertenece al segmento $P_1 P_2$, donde $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1/2, 1/2)$. Pero tales puntos $P = (1/p, 1/s)$ estan caracterizados por la condición: $1/p + 1/s = 1$, $1/2 \leq 1/p \leq 1$ es decir $s = p^*$ y $1 \leq p \leq 2$, lo que prueba la parte a) de la tésis.



b) Análogamente se prueba que $\mathcal{F}^*$ es de tipo (p, p^*) si $1 \leq p \leq 2$ y que vale (11a). Para probar (11b), observemos que si $h_n \in L^p(E_1)$ enton-

ces $f = \mathcal{F}^* h_n$ pertenece a L^{p^*} con $p^* \geq 2$, y como $f(x)$ está definida sobre un intervalo de medida finita, resulta que también $f(x) \in L^2$.
Para cada m, sea f_m la suma parcial de (12), es decir $f_m = \mathcal{F}^* h^{(m)}$ donde $h_n^{(m)} = h_n$ si $n < m$, y cero si $n \geq m$. Como $h^{(m)}$ tiende a h en L^p, por (11a) $\|f - f_m\|_{p^*} \leq \|h - h_m\|_p \longrightarrow 0$, y f_m tiende a f en L^{p^*}. Luego con más razón (por tratarse de un intervalo finito) f_m tiende a f en L^2, y para toda $g \in L^2$ se tiene que (f_m, g) tiende a (f, g). Poniendo $g_n = e^{-inx}$, obtendremos $(f_m, g_n) = h_n^{(m)}$, $(f, g_n) = \mathcal{F} f(n)$, y $h_n^m = h_n$ para todo $m > n$; luego haciendo $m \longrightarrow \infty$, resulta $h_n^{(m)} \longrightarrow \mathcal{F} f(n)$, o sea $h_n = \mathcal{F} f(n)$, que es (11b).

c) Si $f, g \in L^p$ entonces $f, g \in L^1$, luego como se sabe de los elementos de series de Fourier, $\mathcal{F} f = \mathcal{F} g$ implica $f = g$, salvo medida nula. Si $h, h' \in L^p(E_1)$, $1 \leq p \leq 2$ entonces por (11b), $\mathcal{F}^* h = \mathcal{F}^* h'$ implica $h_n = h'_n$.

<u>Observación 6</u>. En la demostración de (11b) y c), hemos usado el hecho de que E tiene medida finita; esta demostración no se aplica pues al caso de integrales de Fourier. Por otra parte, para $p = 2$, es $p^* = 2$, luego (11) se reduce a la desigualdad de Bessel, y (11a) a su opuesta, y entre ambos dan la desigualdad de Parseval. Pero tal igualdad no puede obtenerse si $p \neq 2$, pues entonces $p^* \neq p$ y (11a) no es la desigualdad opuesta de la (11).

B) <u>Integrales de Fourier</u>. Ahora es $E = E_1 = E^n$ y la medida de Lebesgue.

<u>TEOREMA DE HAUSDORFF-YOUNG-TITCHMARSH</u> <u>para integrales</u>

a) <u>El operador</u>

$$\mathcal{F} f = F(y) = (1/2\pi)^{1/2} \int f(x)\, e^{-ixy}\, dx \qquad (12a)$$

<u>es de tipo (p, p^*) sobre L_o si $1 \leq p \leq 2$</u>, luego se extiende a un opera-

dor $\mathcal{F}$ sobre todo L^p y

$$\|\mathcal{F} f\|_{p^*} \leqslant \|f\|_p \quad \text{para toda } f \text{ de } L^p \text{ ;} \tag{11c}$$

idem para

$$\mathcal{F}^* F = f(x) = (1/2\pi)^{1/2} \int F(y)\, e^{+ixy}\, dy \ , \tag{12b}$$

b) Si $f \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$ y si $F = \mathcal{F} f$, entonces para todo z vale

$$\int_0^z F(y)\, dy = (1/2\pi)^{1/2} \int f(x)\, \frac{e^{-ixz} - 1}{-ix}\, dx \tag{13}$$

$$\int_0^z f(x)\, dx = (1/2\pi)^{1/2} \int F(y) \cdot \frac{e^{iyz} - 1}{iy}\, dy \tag{14}$$

c) Si $f, g \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, y si $\mathcal{F} f = \mathcal{F} g$, entonces $f = g$; idem para $\mathcal{F}^*$.

Demostración a) se prueba igual que en el teorema anterior . Para probar (13) y (14) , observemos que estas fórmulas pueden escribirse

$$(F , h_z) = (f , H_z^*) \ , \tag{13a}$$

$$(f , h_z) = (F , H_z) \ , \tag{14a}$$

donde h_z es la función característica del intervalo $(0 , z)$ y

$$H_z^* = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-ixz} - 1}{-ix} = \mathcal{F}^* h_z \ , \quad H_z = \frac{e^{iyz} - 1}{(2\pi)^{1/2}\, iy} = \mathcal{F} h_z \tag{15}$$

Es evidente que h_z L^p para todo p 1 , cualquiera sea z . También cualquiera sea z , H_z L^p para todo p 1 , pues para valores grandes de y es $|H_z(y)| \leqslant (1/2\pi)^{\frac{1}{2}} |y|^{-1}$, luego $|H_z|^p \leqslant$ cst. $|y|^{-p}$ que es integrable para grandes valores de y , si $p > 1$. Para $|y| < 1$ es $H_z(y)$ acotada (para $y \longrightarrow 0$, el numerador tiende a cero y basta aplicar la regla de L'Hopital para ver que H_z es acotada en el cero) .

Probaremos ahora, por ejemplo, (13). Esta fórmula fué probada ya (ver teorema de plancherel) si $f \in L_0$. Para probarla para $f \in L^p$ general, sean $f_n \in L_0$

tales que $\|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$.

Por la fórmula (11c) ya probada tenemos $\|F - F_n\|_{p^*} \leq \|f - f_n\|_p \longrightarrow 0$, donde $F_n = \mathcal{F} f_n$. Aplicando Hölder , tendremos teniendo en cuenta que $h_z \in L^p$

$$|(F - F_n , h_z)| \leq \|F - F_n\|_{p^*} \|h_z\|_p \longrightarrow 0$$

luego

$$(F_n , h_z) \longrightarrow (F , h_z) \quad . \qquad (16)$$

Teniendo en cuenta que $H_z^* \in L^{p^*}$, tendremos

$$|(f - f_n , H_z^*)| \leq \|f - f_n\|_p \cdot \|H_z^*\|_{p^*} \longrightarrow 0 ,$$

luego

$$(f_n , H_z^*) \longrightarrow (f , H_z^*) \quad . \qquad (17)$$

Como para cada f_n vale $(F_n , h_z) = (f_n , H_z^*)$, obtendremos de (16) y (16a), pasando al límite , la igualdad (13a) .

Análogamente se prueba (14a) .

La parte c) es consecuencia inmediata de (14) y (13) .

Observación 7 .Si bién $\mathcal{F} f$ está definida para toda $f \in L^p$, $1 < p < 2$, y $\mathcal{F} f = F \in L^{p^*}$, no se puede afirmar de que dada una $F \in L^{p^*}$ exista una $f \in L^p$ tal que $F = \mathcal{F} f$. Es decir , $\mathcal{F}(L^p) \subset L^{p^*}$. pero no $\mathcal{F}(L^p) = L^{p^*}$. Un contraejemplo que prueba ésta afirmación puede verse en el libro de Zygmund , Cap. 12 , ejercicio 3. En efecto, en este ejercicio se da un ejemplo de una $F \in L^{p^*}$ tal que la función del segundo miembro de (14) correspondiente, no es derivable en z, para casi todo z. Si fuera $F = \mathcal{F} f$, esta función (14) tendría derivada en casi todo z , y esta derivada sería f , en virtud del teorema que precede.

Observemos, por otra parte, que la fórmula (14) vale para $1 < p \leq 2$, excluido $p = 1$;en efecto, en la demostración se usó esencialmente el hecho que $H_z \in L^p$, lo cual vale solo si $p > 1$.

Resumiendo, de lo visto resulta que podemos hablar de la transformada de Fourier de f para toda f de L^p , $1 \leq p \leq 2$, y que vale el teorema de unicidad o sea existe una correspondencia biunívoca entre f y $\mathcal{F} f$ (el teorema de unicidad fué probado aquí para $1 < p \leq 2$, el caso $p = 1$ es clásico y puede verse en 12.1 del libro de Zygmund).

4. FUNCION DE DISTRIBUCION Sea como antes $E = \{x\}$, μ = medida de E, y sea $f(x) \geq 0$ una función medible, no-negativa, definida en E. Entonces por definición de medible, para todo $a > 0$ es medible el conjunto $E[a] = E(f > a)$ = conjunto de los puntos x tales que $f(x) > a$. Designaremos con $D(a ; f) = D(a)$ a la medida de este conjunto:

$$D(a) = D(a ; f) = \mu E(a) = \text{medida del conjunto } \{f(x) > a\} \qquad (1)$$

Para $f \geq 0$ fija, $D(a, f) = D(a)$ es una función de la variable real $a > 0$, y tiene las propiedades siguientes:

a) $D(a)$ es no-creciente y contínua a derecha, de modo que $-D(a)$ es no-decreciente y contínua a derecha, es decir $-D(a)$ es una función de distribución (en sentido generalizado), llamada función de distribución de la función f. Obsévese que $f(x)$ es función de la variable x, que en general no es real, mientras que $D(a) = D(a ; f)$ es función de la variable real a.

La demostración de la propiedad a) se ve en los cursos de "Funciones Reales" y no la daremos aquí.

b) si $0 \leq f_n(x)$, y si $f_n(x) \nearrow f(x)$ (el signo $\nearrow$ indica que $f_n(x)$ es una sucesión no-decreciente y que su límite es $f(x)$, para todo x), entonces $D_n(a) \nearrow D(a)$ para todo $a > 0$, donde $D_n(a) = D(a ; f_n)$. Dejamos la demostración de b) a cargo del lector, como ejercicio fácil.

c) En general, si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ no se puede afirmar que $D(a) = D_1(a) + D_2(a)$, y ni siquiera que $D(a) \leq D_1(a) + D_2(a)$ (aquí $D_i(a) = D(a, f_i)$). Pero se tiene:

$$\text{si } f = f_1 + f_2 \quad \text{entonces} \quad D(2a) \leq D_1(a) + D_2(a). \qquad (2)$$

Más generalmente, si para todo x vale $f(x) \leq c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, c_i = constantes, entonces

$$D\left((c_1 + c_2)\, a\right) \leq D_1(a) + D_2(a). \qquad (3)$$

En efecto, sean : A = conjunto de los x en que $f(x) > (c_1 + c_2)\,a$, A_1 = conjunto de los x tales que $f_1(x) > a$, $A_2 = \{f_2(x) > a\}$. Entonces (3) dice que $\mu(A) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$,luego (3) quedará probado si mostramos que $A \subset A_1 \cup A_2$. Para probar esto último , sea $x \in A$; entonces $(c_1 + c_2)\,a < f(x) \leq c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$. Luego debe ser ó $f_1(x) > a$, ó $f_2(x) > a$, pues de lo contrario sería $(c_1 + c_2)a \geq c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$.

Luego, $x \in A_1$, ó $x \in A_2$, o sea $x \in A_1 \cup A_2$, l,q,d,d.

Análogamente se prueba que

$$f(x) = cg(x) \quad \text{implica} \quad D(ca\,;\,f) = D(a\,;\,g)\,. \tag{4}$$

d) Si, para todo x, $f(x) \leq f_1(x) + f_2(x)$, y si para todo x , $f_1(x) \leq a$, entonces

$$D(2a\,;\,f) \leq D(a\,;\,f_2) \tag{5}$$

En efecto, sea x tal que $f(x) > 2a$, entonces $2a < f(x) \leq f_1(x) + f_2(x)$ $\leq a + f_2(x)$, luego $f_2(x) > a$, lo que prueba que $E(f > 2a) \subset E(f_2 > a)$.

e) Si $f \geq 0$ es medible , y si $E(a) = E(f > a)$, entonces para todo $p > 0$ y todo $a > 0$, vale la siguiente <u>desigualdad de Tchebicheff</u>

$$a^p\,D(a\,;\,f) \leq \int_{E(a)} |f(x)|^p\,d\mu \quad , \tag{6}$$

luego con más razón :

$$D(a\,;\,f) \leq 1/a^p \int_E |f|^p\,d\mu = (\,\|f\|_p\,/a)^p\,. \tag{7}$$

En efecto, para probar (6) basta observar que para todo $x \in E(a)$ vale $|f(x)|^p > a^p$, luego la integral de la derecha de (6) es $\geq a^p\,\mu(E(a)) = a^p\,D(a)$; para probar (7) basta observar que la integral de (6) es $\leq$ que la de (7) pues $E(a) \subset E$.

f) Si $f \in L^p$, $f \geq 0$, entonces

$$D(a) = D(a\,;\,f) \longrightarrow 0\,, \quad \text{para} \quad a \longrightarrow \infty\,, \tag{8}$$

y más aún

$$a^{p}\, D(a) \longrightarrow 0 \qquad \text{para} \qquad a \longrightarrow \infty \tag{8a}$$

En efecto, (8) resulta de (7) observando que ahora $\|f\|_p$ = número finito fijo y $a \longrightarrow \infty$. Para probar (8a), observamos que (8) significa que $\mu(E(a)) \longrightarrow 0$ para $a \longrightarrow \infty$; y por el teorema de la absoluta continuidad de la integral de Lebesgue de acá resulta que la integral del segundo miembro de (6) tiende a cero , luego de (6) sigue (8a) .

g) Para todo conjunto Boreliano $A \subset E^1$ de la recta , sea $f^{-1}(A)$ = = conjunto de todos los puntos x de E tales que $f(x) \in A$, y definamos

$$\mu'(A) = \mu(f^{-1}(A)) \quad . \tag{9}$$

Es fácil ver que $\mu'(A)$ así definida es una medida de Borel-Stieltjes sobre la recta, llamada la medida inducida por f. En particular si A es la semirecta (intervalo infinito) $x > a$, $a > 0$, entonces $\mu'(A) = D(a) = D(a ; f)$. Luego si $A = J$ = un intervalo semicerrado, se tiene

$$\text{si} \quad J = (a\ ,\ b) \quad \text{entonces} \quad \mu'(J) = D(a) - D(b) \quad . \tag{9a}$$

Por tanto μ' es una medida en la recta y podemos integrar respecto de ella funciones; la integral respecto de μ' se indicará con $d\mu'$ o con $-dD(a)$, en virtud de (9a) .

Si $f(x) \geqslant 0$ es función medible en E , y si $G(a)$ es una función medible Borel de la variable real a , podemos considerar la función compuesta $G(f) = G(f)(x)$ que será función medible de x (por ejemplo, si $G(a) = e^{a}$ tendremos $G(f) = e^{f(x)}$), luego podemos considerar la integral de esta última función. Se tiene entonces :

LEMA 3 . Sea $f(x) \geqslant 0$ medible en E y sea $G(a) \geqslant 0$ medible Borel de la variable real a . Entonces se tiene

$$\int_E G(f)(x)\, d\mu = \int_0^{\infty} G(a)\, d\mu' = \int_0^{\infty} G(a)\ d(-D(a\ ;\ f)) , \tag{10}$$

donde μ' es dada por (9) .

Demostración . Sea antes $G(a)$ = función característica del conjunto A donde A es medible Borel, de modo que $G(a) = 1$ si $a \in A$ y cero en caso contrario. Sea $B = f^{-1}(A)$. Tendremos entonces $G(f)(x) = 1$ si $x \in B$, y $G(f)(x) = 0$ si x no pertenece a B ; es decir $G(f)$ = función característica del conjunto B . Luego, recordando la definición de μ' tendremos

$$\int_E G(f)(x)\, d\mu = \mu(B) = \mu'(A) = \int_0^\infty G(a)\, d\mu' ,$$

de modo que (10) está probada en el caso en que G = función característica de un conjunto Boreliano . Luego está claro que (10) es cierta si G es una combinación lineal finita de tales funciones características, es decir si G es una función simple, medible Borel.

Sea ahora $G(a)$ medible Borel, general. Como $G(a) \geq 0$, existe una sucesión $G_n(a) \geq 0$ tal que cada G_n es simple y $G_n \uparrow G$. Por lo ya probado , para cada n vale

$$\int_E G_n(f)\, d\mu = \int_0^\infty G_n(a)\, d\mu' . \tag{10a}$$

Como $G_n \uparrow G$, $G_n(f) \uparrow G(f)$, aplicando el teorema de Beppo-Levi sobre integración de sucesiones monótonas, obtendremos de (10a) , haciendo $n \longrightarrow \infty$, la tésis (10) .

En particular, haciendo $G(a) = a^p$, obtenemos

$$\int_E \left(f(x)\right)^p d\mu = \int_0^\infty a^p\, d\mu' = -\int_0^\infty a^p\, d\, D(a\, ; f) \tag{10b}$$

En lo que sigue usaremos frecuentemente el siguiente lema, que permite expresar la norma -p de una función $f(x)$ mediante su función de distribución $D(a)$.

<u>LEMA 4</u> . <u>Sea $f(x) \geq 0$ medible , $D(a) = D(a\, ; f)$, y $0 < p < \infty$.</u>

<u>Entonces,</u>

$$\int_E f(x)^p\, d\mu = p \int_0^\infty a^{p-1} D(a)\, da , \tag{11}$$

<u>donde la última integral está tomada respecto de la medida de Lebesgue da ordinaria .</u>

<u>En particular, si $f(x)$ verifica además $f(x) \leq M$, entonces</u>

$$\int_E \left(f(x)\right)^p d\mu = p \int_0^M a^{p-1} D(a)\, da \tag{11a}$$

<u>Observación</u> . Para $p = 1$, la fórmula (11) da la conocida fórmula de la esperanza de la Teoría de Probabilidades , si E es un espacio de probabilidades es decir si $\mu(E) = 1$.

<u>Demostración</u> . Vamos a probar antes la fórmula (11a) suponiendo que $f(x) > m > 0$ en los puntos en que $f(x) \neq 0$, de modo que si $f(x) \neq 0$ vale $0 < m < f(x) \leq M < \infty$. En este caso $D(a) = 0$ para $a > M$, pues no hay puntos x tales que $f(x) > a > M$; análogamente $\mu'(A) = 0$ si A está fuera del intervalo (m , M) y no contiene al cero . Luego en este caso la fórmula (10b) nos da

$$\int_E (f(x))^p \, d\mu = \int_m^M a^p \, d\mu' = - \int_m^M a^p \, d\, D(a)$$

Como a^p es una función absolutamente contínua, podemos aplicar la integración por partes y escribir, teniendo en cuenta que $D(M) = 0$,

$$\int_E (f(x))^p \, d\mu = - M^p D(M) + m^p D(m) + p \int_m^M a^{p-1} D(a) \, da =$$

$$= m^p D(m) + p \int_m^M a^{p-1} D(a) \, da \quad . \tag{11b}$$

Pero como en todo x en que $f(x) > 0$ vale $f(x) > m$, resulta que $E(f > 0) = E(f > m)$, o sea $D(0) = D(m)$, y como $D(a)$ es no-creciente resulta que $D(a) = D(m)$ para todos los a tales que $0 < a \leq m$.

luego $$m^p D(m) = \int_0^m pa^{p-1} D(a) \, da = D(m) \int_0^m p\, a^{p-1} \, da \quad ,$$

y por tanto la fórmula (11b) se reduce a la (11a) .

Consideremos ahora el caso de una $f(x) \geq 0$ general . Para cada entero n, sea f_n la función tal que $f_n(x) = f(x)$ en los x en que $1/n < f(x) \leq n$ y $f(x) = 0$ en los demás x . Se verifica entonces facilmente que $f_n(x) \uparrow f(x)$. Como $f_n(x) > 1/n > 0$ (en los puntos en que no es nula) , cada f_n está en las condiciones del caso recién probado, luego para cada n vale (tomando en cuenta que $D_n(a) = D(a ; f_n) = 0$ si $a > n$) que

$$\int_E \left(f_n(x)\right)^p \, d\mu = p \int_0^n a^{p-1} \; D_n(a)\, da = p \int_0^{\infty} D_n(a)\, da \quad .$$

Por la propiedad b) tenemos $D_n(a) \nearrow D(a)$, y $f_n(x) \nearrow f(x)$, luego podemos pasar al límite bajo el signo integral en la última fórmula, resultando la tésis (11) l,q,d,d.

Vamos a deducir de (11a) el siguiente lema , que nos será útil en lo que sigue y al que nos referiremos como "lema numérico" .

<u>LEMA 5</u> (lema numérico) . <u>Sea $h_n \geq 0$ una sucesión de números reales tal que</u>

$$0 \leq h_n \leq 1 \;, \qquad -h_n\, h_n + i \leq \mathcal{E}^i \;, \quad \underline{\text{para todo}} \quad i \quad \underline{y} \quad n \;, \tag{12}$$

<u>donde $0 \leq \mathcal{E} < 1$</u> . <u>Entonces vale</u>

$$\sum_n h_n \leq c(\mathcal{E}) \leq (1 + \mathcal{E}^{1/2})/(1 - \mathcal{E}) \tag{12a}$$

(cfr. Béla Sz-Nagy , Acta Soc. Mat. , 18 (1957) pág. 190)

<u>Demostración</u> . Sea $E = \{1, 2, .. , n, ..\}$, μ la medida discreta con masa uno en cada n , $f(n) = h_n$, y $D(a)$ la función de distribución de $h_n = f$. La fórmula (11a) da ahora (pues $h_n \leq 1$) ,

$$\sum h_n = \int_E f\, d\mu = \int_0^1 D(a)\, da \tag{11c}$$

Ahora $D(a)$ = número de índices n tales que $h_n > a$. Sea $\ell = D(a)$, donde $a > 0$ está fijado . Esto quiere decir que hay ℓ elementos $h_{n_1}, \ldots, h_{n_\ell}$ que son $> a$. Evidentemente $n_\ell - n_1 \geq \ell - 1$, pues los n_i son distintos , luego por la hipótesis (12) tendremos

$$h_{n_1}\, h_{n_\ell} \leq \mathcal{E}^{\ell - 1} \quad , \text{ y por otra parte } \quad h_{n_1}\, h_{n_\ell} \geq a^2 \quad .$$

luego $a^2 \leq \mathcal{E}^{\ell-1}$, y de acá encontramos que $\ell \leq 1 + 2 \log a / \log \mathcal{E}$ (tengase en cuenta que $\log \mathcal{E} < 0$) . Así pues, $D(a) \leq 1 + 2 \log a / \log \mathcal{E}$, y de (11c) obtenemos

$$\sum h_n \leq \int_0^1 (1 + 2 \log a / \log \mathcal{E}) \, da = c(\mathcal{E}) \quad .$$

Análogamente se prueba (14a) .

La parte c) es consecuencia inmediata de (14) y (13) .

5. OPERADORES CASI ORTOGONALES EN L^2

Sea $k(x)$ una función fija definida en $E^n = \{ x \}$. Vimos en el ejemplo 3, sección I, que si $k \in L^1$ entonces el operador convolución $Tf = f * k$ es de tipo (p , p) para todo $p \geqslant 1$ y $\|T\| \leqslant \| k \|_1$. Però si $k(x)$ no es integrable entonces el operador $Tf = f * k$ debe tratarse como un operador singular . De acuerdo a lo dicho en la página 14, podemos en este caso presentar al núcleo k como una serie de núcleos "buenos" :

$$k(x) = k_1(x) + k_2(x) + \dots + k_i(x) + \dots \qquad (1)$$

donde cada núcleo $k_i(x) \in L^1(E^n)$. Cada operador $T_i f = f * k_i$ es de tipo (p , p) , luego también cada operador

$$S_N = S_N f = f * (k_1 + \dots + k_N) \qquad (2)$$

es de tipo (p , p) para todo N . Si se puede probar que las normas de los S_N estan uniformemente acotadas y que $S_N f$ converge en media a un límite F , para toda f de L^p , entonces se podrá definir : $F = Tf = f * k$, y el operador $Tf = \lim S_N f$ así definida será de tipo (p , p) .

Vamos a indicar a continuación un caso general en que se puede afirmar que tal cosa ocurre , para el espacio L^2 .

NOTACION : En lo que sigue usaremos también la notación

$$\hat{g}(u) = \left[\mathfrak{F} g \right](u) = \text{transformada de Fourier de } g(x) . \qquad (3)$$

TEOREMA 1 . Sea $k_i(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núcleos integrables , y sea para cada N el operador S_N definido por (2) . Si la serie $\Sigma \hat{k}_i(u)$ converge puntualmente y acotadamente, es decir si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \hat{k}_i(u) = h(u) \quad \text{para casi todo} \quad u \in E^n \qquad (4)$$

y si

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \hat{k}_i(u) \right| \leqslant M , \quad \text{para todo } N \text{ y todo } u , \qquad (5)$$

entonces valen las propiedades siguientes :

a) $\| S_N f \|_2 \leq M \| f \|_2$ para toda $f \in L^2(E^n)$ y todo N, es decir los operadores S_N son de tipo $(2, 2)$ con normas uniformemente acotadas ;

b) para toda $f \in L^2(E^n)$ las funciones $S_N f = F_N$ convergen en media -2 hacia una función límite F que se indicará con $F = Tf = f * \sum_1^\infty k_i$

c) el operador Tf así definido es un operador multiplicador de tipo $(2, 2)$, siendo $h(u)$ el multiplicador, y $\| Tf \|_2 \leq M \| f \|_2$.

Demostración . Tomando en cuenta el teorema de Plancherel, y recordando que la transformada de Fourier de una convolución es igual al producto de las transformadas de los factores de convolución, y usando (5) tendremos que

$$\widehat{F}_N (u) = \widehat{S_N f} (u) = \hat{f}(u) \{ \hat{k}_1 (u) + .. + \hat{k}_N (u) \} ,$$

$$\| S_N f \|_2 = \| F_N \|_2 = \| \widehat{F}_N \|_2 = \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^2 | \hat{k}_1(u) + .. + \hat{k}_N(u) |^2 du \right\}^{1/2}$$

$$\leq \left\{ \int_{E^n} M^2 | \hat{f}(u) |^2 du \right\}^{1/2} = M \| \hat{f} \|_2 = M \| f \|_2 ,$$

con lo cual queda probada la parte a) de la tésis .

Por otra parte, de (4) tenemos que para casi todo $u \in E^n$ vale

$$\lim_{N \to \infty} | \hat{f}(u) h(u) - \hat{f}(u) \sum_{i=1}^N \hat{k}_i(u) |^2 = 0 , \qquad (6)$$

y de (5) tenemos $| h(u) | \leq M$, $| \hat{f}(u) h(u) - \hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_i(u) |^2 \leq M^2 | \hat{f}(u) |^2$.

Como $f \in L^2$, es también $\hat{f}(u) \in L^2(E^n)$, luego $M^2 | f(u) |^2$ es una función integrable, de modo que para todo N las funciones de (6) se mantienen mayoradas por una función integrable . Luego, por el teorema de Lebesgue podemos integrar (6) término a término resultando

$$\lim_{N \to \infty} \| \hat{f}(u) h(u) - \hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_i(u) \|_2 = 0 . \qquad (6a)$$

Como $|\hat{f}(u)\,h(u)|^2 \leq M^2 |\hat{f}(u)|^2$, es $\hat{f}(u)\,h(u) \in L^2(E^n)$ y por el teorema de Plancherel $\hat{f}(u)\,h(u)$ es la transformada de Fourier de una función $F(x) \in L^2(E^n)$, es decir

$$\hat{f}(u)\,h(u) = \hat{F}(u) \quad , \qquad F \in L^2(E^n) \ . \tag{6b}$$

De (6a) y (6b) tenemos, por el teorema de Plancherel,

$$\| F - F_N \|_2 = \| \hat{F} - \hat{F}_N \|_2 = \| \hat{f}(u)\,h(u) - \hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_i(u) \|_2 \longrightarrow 0 \ ,$$

lo que prueba que $S_N f = F_N$ tiende en media -2 a F, lo que prueba la parte b) de la tésis.

Como $Tf = F = \lim F_N$, $\| Tf \|_2 = \lim \| F_N \|_2 = \lim \| S_N f \|_2 \leq \lim M \| f \|_2$ se ve que $F = Tf$ es de tipo $(2, 2)$ y norma $\leq M$. Finalmente, como $Tf = F$ (6b) muestra que T es un operador multiplicador, siendo $h(u)$ el multiplicador, l,q,d,d.

Observemos que si $k_1(x)$, $k_2(x)$ son dos funciones integrables entonces vale

$$\int_{E^n} [k_1 * k_2](x)\,dx = \left[\int_{E^n} k_1(x)\,dx \right] \cdot \left[\int_{E^n} k_2(x)\,dx \right] \ , \tag{7}$$

pues por el teorema de Fubini se tiene

$$\int_{E^n} \left[\int_{E^n} k_1(x-t)\,k_2(t)\,dt \right] dx = \int_{E^n} k_2(t) \left[\int_{E^n} k_1(x-t)\,dx \right] dx =$$

$$= \int_{E^n} k_2(t) \left[\int_{E^n} k_1(x)\,dx \right] dt = \left[\int_{E^n} k_2(t)\,dt \right] \left[\int_{E^n} k_1(x)\,dx \right]$$

Si $k_1(x)$ y $k_2(x)$ son ambas no-negativas, entonces de (7) obtenemos $\| k_1 * k_2 \|_1 = \| k_1 \|_1 \| k_2 \|_1$. Pero si estas funciones son de signo cualquiera entonces solo se puede asegurar que

$$\| k_1 * k_2 \|_1 \leq \| k_1 \|_1 \| k_2 \|_1 \ . \tag{7a}$$

En general $\| k_1 * k_2 \|_1$ puede resultar mucho más chico que $\| k_1 \|_1 \| k_2 \|_1$. Más aún en el Análisis es de frecuente uso el "Principio de Regularización" que se basa en el hecho siguiente : si una función dada se convoluciona con otra, su "na -

turaleza" mejora, en general. Es decir, si la función dada es contínua o derivable, al convolucionarla (con una función integrable) obtendremos otra función contínua y derivable; y si la función no es contínua, la convolución puede resultar contínua si el otro factor de convolución es "bueno". Lo mismo la norma disminuye en general.

Ahora, si $T_1 f = f * k_1$, $T_2 f = f * k_2$, tendremos que $T_1 T_2 f = T_2 T_1 f = f * (k_1 * k_2)$. Sabemos que $\| T_1 \| \leq \| k_1 \|_1$, $\| T_2 \| \leq \| k_2 \|_1$, luego también $\| T_1 T_2 \| \leq \| k_1 * k_2 \|_2$, por tanto si la norma $\| k_1 * k_2 \|_1$ disminuye mucho (en comparación con $\| k_1 \|_1$ y $\| k_2 \|_1$), también disminuirá la norma de $T_1 T_2$. Es decir, el Principio de Regularización se refleja en los operadores de este modo: Si T_1, T_2 son los operadores de convolución con k_1, k_2, es de esperar que, en general, la norma de $\| T_1 T_2 \|$ será mucho más pequeña que la de $\| T_1 \|$ y $\| T_2 \|$ (aquí hablaremos de la norma de $T_1 T_2$ considerado como operador de L^2 en L^2, es decir la norma $(2, 2)$).

De estas consideraciones resultará más claro el sentido del teorema siguiente.

__TEOREMA 2__ (de los núcleos casi ortogonales). __Sea $k_i(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núcleos integrables tales que para todo par i, j se verifica__

$$\| k_i * k_{i+j} \|_1 \leq M^2 \varepsilon^j \tag{8}$$

__donde M, ε son constantes fijas y $0 \leq \varepsilon < 1$.__ (8a)

__Entonces estos núcleos verifican las hipótesis (4) y (5) del teorema (1) que__ precede, y por tanto se verifican las propiedades a), b) y c) de dicho teorema.

__Observación__: Si $\| k_i * k_{i+j} \|_1 = 0$ entonces $k_i * k_{i+j} = 0$ y decimos que k_i y k_j son __ortogonales__; en este caso los operadores $T_i = f * k_i$, $T_{i+j} = k_{i+j} * f$ verifican $T_i T_{i+j} f = T_{i+j} T_i f = 0$, para toda f.

La condición (8), que implica que la norma $\| T_i T_{i+j} \|$ disminuye en "progresión geométrica", expresa por tanto una propiedad de "casi ortogonalidad", y es por eso que nos referiremos al teorema 2 como al de los núcleos casi ortogonales.

__Demostración__. Como la transformada de Fourier de $k_i * k_{i+j}$ es $\hat{k}_i(u) \hat{k}_{i+j}(u)$, y como la transformación de Fourier es de tipo $(1, \infty)$, tendremos para todo $u \in E^n$,

$$\left| \hat{k}_i (u) \right| \left| \hat{k}_{i+j} (u) \right| \leqslant \| k_i * k_{i+j} \|_1 \leqq M^2 \, \varepsilon^j \qquad . \qquad (8b)$$

Para cada $u \in E^n$, $|\hat{k}_i(u)|$ es una sucesión numérica y (8b) muestra que esta sucesión verifica la hipótesis del lema numérico vistomás arriba. Luego por dicho lema tendremos

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{k}_i(u)| \leqslant M ,$$

de modo que la serie $\sum \hat{k}_i(u)$ converge absolutamente, y por tanto simplemente , para cada u , se verifican las dos condiciones (4) y (5) , l,q,d,d.

COROLARIO 1 . Sean $k_i(x)$, $h_i(x)$, dos sucesiones de núcleos tales que :

1) $\int_{E^n} k_i(x)\, dx = 0$, para todo $i = 1,2,..$; $\int_{E^n} h_i(x)\, dx = 0$;

2) $\int_{E^n} |k_i(x)|\, dx = \| k_i \|_1 \leqslant M$, para todo i ; $\| h_i \|_1 \leqslant M$;

3) $k_i(x) = 0$ para $|x| > (1/\varepsilon)^i$, $0 \leqslant \varepsilon < 1$;

3a) $h_i(x) = 0$ para $|x| > \varepsilon^i = (1/\varepsilon)^{-i}$, $0 \leqq \varepsilon < 1$;

4) para todo $h \in E^n$, y todo i , se verifica

$$\int_{E^n} |k_i(x + h) - k_i(x)|\, dx \leqslant M \, \varepsilon^i \, |h| \quad ;$$

$$\int_{E^n} |h_i(x + h) - h_i(x)|\, dx \leqslant M \, \varepsilon^{-i} |h| = M(1/\varepsilon)^i |h| .$$

Entonces cada una de las sucesiones k_i , $h_i(x)$, es casi ortogonal, es decir verifica (8) , luego definiendo

$$S_N f = f * (k_1 + \dots + k_N + h_1 + \dots + h_N) , \qquad (8c)$$

los operadores $S_N f$ verificarán las propiedades a) , b) , c) del teorema 1 (con 2M en vez de M) .

Observación : Por lo dicho más arriba, la condición 1) es esencial para la casi ortogonalidad, pues implica que $k_i(x)$ no tiene signo constante ; vimos que si los $k_i(x)$ tienen signo constante no podrá disminuir la norma $\| k_i * k_{i+j}\|_1$

Demostración. En virtud de la condición 1) podemos escribir

$$k_i * k_{i+j}(x) = \int_{E^n} K_{i+j}(x-t)\, k_i(t)\, dt =$$

$$= \int_{E^n} k_i(t)\, k_{i+j}(x-t)\, dt - \int_{E^n} k_{i+j}(x)\, k_i(t)\, dt =$$

$$= \int_{E^n} k_i(t) \left[k_{i+j}(x-t) - k_{i+j}(x) \right] dt.$$

Por tanto, teniendo en cuenta que $k_i(t) = 0$ para $|t| > (1/\varepsilon)^i$, tendremos aplicando 3) y 4) que:

$$\| k_i * k_{i+j}\|_1 = \int_{E^n} \left| \int_{E^n} k_i(t) \left[k_{i+j}(x-t) - k_{i+j}(x) \right] dt \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^n} | k_i(t) | \left[\int_{E^n} | k_{i+j}(x-t) - k_{i+j}(x) | \, dx \right] dt =$$

$$= \int_{|t| < \varepsilon^{-i}} | k_i(t) | \left[\int_{E^n} | k_{i+j}(x-t) - k_{i+j}(x) | \, dx \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t| < \varepsilon^{-i}} | k_i(t) | \left[M\, \varepsilon^{i+j}\, |t| \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t| < \varepsilon^{-i}} | k_i(t) | \left[M \cdot \varepsilon^{i+j}\, \varepsilon^{-i} \right] dt \leqslant$$

$$\leqslant M\, \varepsilon^j \int_{E^n} | k_i(t) | \, dt \leqslant M^2 \cdot \varepsilon^j ,$$

lo que prueba la casi ortogonalidad de los $k_i(x)$. La demostración para los $h_i(x)$ es del todo análoga (intercambiando en el razonamiento que precede k_i con k_{i+j}).

COROLARIO 2. Sea $k(x) \in L^1(E^n)$ un núcleo integrable tal que:

1) $\int_{E^n} k(x)\, dx = 0$, $\int_{E^n} | k(x) | \, dx = \| k \|_1 = M$;

2) para todo $h \in E^n$ se verifica $\int_{E^n} | k(x+h) - k(x) | \, dx \leqslant M \cdot |h|$

3) $k(x) = 0$ para $|x| > 1$.

Entonces, indicando con n la dimensión del espacio y poniendo para cada $i = 1, 2, \ldots$

$$k_i(x) = \varepsilon^{ni}\, k(\varepsilon^i x) \quad , \tag{9}$$

$$h_i(x) = (1/\varepsilon)^{ni}\, k((1/\varepsilon)^i x) = \varepsilon^{-ni}\, k(\varepsilon^{-i} x) \quad , \tag{9a}$$

los núcleos k_i, h_i verifican las hipôtesis del corolario 1 y por tanto las sumas (8c) verifican las propiedades a), b), c) del teorema 1 (con $M = 2M$).

Observación. Diremos que los núcleos k_i, h_i, definidos por (9) y (9a) son generados por el núcleo fundamental $k(x)$ por dilatación de la variable.

Demostración. Si $|x| > (1/\varepsilon)^i$ entonces $|\varepsilon^i x| > 1$, luego $k_i(x) = \varepsilon^{ni} k(\varepsilon^i x) = 0$ y se verifica 3) del corolario 1. Poniendo $\varepsilon^i x = y$, $dx = (\varepsilon^{-i})^n dy$ (n = dimensión del espacio), tendremos

$$\int_{E^n} |k_i(x+h) - k_i(x)|\, dx = \varepsilon^{ni} \int_{E^n} |k(\varepsilon^i x + \varepsilon^i h) - k(\varepsilon^i x)|\, dx =$$

$$= \varepsilon^{ni} (\varepsilon^{-i})^n \int_{E^n} |k(y + \varepsilon^i h) - k(y)|\, dy \leq M\, |\varepsilon^i h| = M\, \varepsilon^i |h| \quad ,$$

luego se verifica 4) del corolario 1, y análogamente se comprueban las demás condiciones, l.q.d.d.

6 APLICACION A TRANSFORMADAS DE HILBERT EN L^2

A) La transformada clásica, ó 1-dimensional de Hilbert de la función $f(x)$, $x \in E^1$, se define como

$$Hf(x) = F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t)}{t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \quad . \tag{1}$$

La función $1/t$ no es integrable en ningún intervalo que contiene el cero o el infinito (porque $\log t$ es infinito para $t = 0$ y para $t = \infty$), luego la integral (1) en general no existe como integral de Lebesgue, y debe tratarse como una integral singular, precisamente como un valor principal de Cauchy. Para cada $\varepsilon > 0$, eliminando un intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ y un intervalo $|t| > 1/\varepsilon$, la función $f(x-t)/t$ se hace integrable. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ definimos (cfr. pag. 14) el operador $H_\varepsilon f$ definido así:

$$H_\varepsilon f(x) = F_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon < |t| < 1/\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\, dt =$$

Es

$$= \left\{ \int_{-1/\varepsilon}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}\, dt \right\} = \left\{ \int_{x-1/\varepsilon}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+1/\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \right\} \qquad (2)$$

La integral (2) existe para cada $\varepsilon > 0$, como integral de Lebesgue. La integral (1) se define como

$$Hf(x) = \lim H_{\varepsilon} f(x) \quad \text{para } \varepsilon \longrightarrow 0 \,, \qquad (3)$$

donde el último límite puede entenderse en sentido puntual o media-(p). Que tal límite existe, es decir que Hf puede definirse por la fórmula (3), es cosa bastante dificil de probar. Para funciones $f(x)$ contínuas (y en forma algo modificada, para intervalos finitos) la existencia del límite puntual (3) fué probada por Fatou. Para funciones $f(x)$ de $L^2(E^1)$, la existencia del límite (3), en sentido de convergencia media-(2), fué probada por Lusin. Así pues por el teorema de Lusin Hf está definido para toda f de L^2, y más aún Hf es un operador de tipo (2, 2). M. Riesz extendió este resultado a todos los L^p con $p > 1$, $p < \infty$. Además Privaloff y Plessner probaron la convergencia puntual de (3) para toda $f \in L^p$ y todo $p \geq 1$.

En este párrafo, como aplicación del teorema de los núcleos casi ortogonales, vamos a deducir los resultados de Lusin, es decir para el caso del espacio L^2.

Sea J_i el conjunto $2^{i-1} < |t| \leq 2^i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ de modo que J_i se compone de los dos intervalos simétricos $(-2^i, -2^{i-1}]$ y $(2^{i-1}, 2^i]$.

Para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ definimos

$$k(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \in J_0 \text{, es decir } 1/2 < |t| \leq 1 \,, \\ 0 & \text{en los demás } t \,; \end{cases} \qquad (4)$$

$$k_i(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \in J_i \text{, es decir } 2^{i-1} < |t| \leq 2^i \,, \\ 0 & \text{en los demás } t \,; \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (4a)$$

$$h_i(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si } t \in J_{-i} \text{, es decir } 2^{-i-1} < |t| \leq 2^{-i} \\ 0 & \text{en los demás } t \,; \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (4b)$$

Es evidente entonces que se tiene

$$\sum_1^{\infty} k_i(t) + \sum_1^{\infty} h_i(t) + k(t) = 1/t \quad , \quad \text{para todo} \quad t \ . \tag{5}$$

Más aún se tiene

$$k_i(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^i k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^i t\right) , \tag{5a}$$

$$h_i(t) = 2^i \ k(2^i \ t) \quad . \tag{5b}$$

En efecto, para probar (5a), observemos que si t está fuera de J_i es $k_i(t) = 0$; pero si t no pertenece a J_i entonces $(1/2)^i t$ no pertenece a J_o y también $k\left((1/2)^i t\right) = 0$; luego (5a) es cierto si t no pertenece a J_i. Si $t \in J_i$ entonces $(1/2)^i t \in J_o$, luego para tal t se tiene $k_i(t) = 1/t$, $k\left((1/2)^i t\right) = 1/\left((1/2)^i t\right) = 2^i/t$, y por tanto (5a) vale también para este caso . Análogamente se prueba (5b) .

Consideremos primero solo los ε de la forma $\varepsilon = 2^{-N}$ y pogamos

$$H_N f = H_{2^{-N}} f \doteq \int_{2^{-N} < |t| < 2^N} \frac{f(x - t)}{t} \ dt \quad , \tag{6}$$

y vamos a probar que la sucesión $H_N f$ converge en media hacia un operador de tipo (2 , 2) .

Evidentemente (6) puede escribirse así :

$$H_N f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\left[k(t) + \sum_1^N k_i(t) + \sum_1^N h_i(t) \right] dt =$$

$$= f * \left[k + \sum_1^N k_i + \sum_1^N h_i \right] \quad , \tag{6a}$$

es decir (teniendo en cuenta (5a) y (5b)) , los $H_N f$ son del mismo tipo que los S_N del Corolario 2 , con $\varepsilon = 1/2$. Por lo tanto si probamos que nuestro núcleo $k(t)$, definido por (4) , verifica las condiciones 1) – 3) del Corolario , podremos afirmar que dicho Corolario es aplicable a los operadores H_N.

Es evidente que el núcleo $k(t)$ definido por (4) verifica las condiciones 1) y 3) del Corolario 2, con $M = 2 \log 2$. Veamos que verifica también la condición 2) de dicho Corolario . Evidentemente basta considerar solo los valores $|h| < 1/4$, pues para $|h| \geqslant 1/4$ tendremos

$$\int_{E^1} | k(x+h) - k(x) | \, dx \leq 2 \int_{E^1} | k(x) | \, dx = 2 \int_{2^{-1} < |t| < 1} | 1/t | \, dt =$$

$$= 4 \int_{1/2}^{1} \frac{1}{t} \, dt \leq 4 \leq 16 \left(\frac{1}{4}\right) \leq 16 | h | ,$$

y 2) se verifica con $M = 16$. Si $|h| < 1/4$, sea A el conjunto de los x tales que x y $x + h$ ambos pertenecen a $J_o = \{ 1/2 \leq |t| \leq 1 \}$, B el conjunto de los x tales que x y $x + h$ ambos no pertenecen a J_o, y C el conjunto de los x tales que uno de los dos puntos x, $x + h$ pertenece a J_o y el otro no. Para $x \in B$ tenemos $| k(x+h) - k(x) | = 0$. Para $x \in A$ tenemos $| k(x+h) - k(x) | = | 1/(x+h) - 1/x | = | h/x(x+h) | \leq 4 |h|$. Para x de C es ó $k(x) = 0$ ó $k(x+h) = 0$, luego $| k(x+h) - k(x) | = | 1/x + h |$ ó $= | 1/x |$, luego $| k(x+h) - k(x) | \leq 2$. Además es evidente que $|A| \leq |J_o| = 1$ y que la medida del conjunto C es $\leq 8 |h|$ (C = los puntos que distan menos de $|h|$ de la frontera de J_o).

Por tanto,
$$\int_{E^1} | k(x+h) - k(x) | \, dx = \int_A + \int_B + \int_C | k(x+h) - k(x) | \, dx \leq$$

$$\leq 0 |B| + 4 |h| \cdot |A| + 2 |C| \leq 4 |h| + 16 |h| = 20 |h| .$$

Así pues la condición 2) del Corolario 2 se verifica con toda seguridad con $M \leq 20$. Obtenemos pues del Corolario 2 el siguiente

<u>COROLARIO</u> <u>3</u>. <u>Si $H_N f$ están definidos por (6), entonces los $H_N f$ son operadores de tipo (2, 2) con normas uniformemente acotadas $\| H_N \| \leq M$, y para cada f de $L^2(E^1)$ las funciones $F_N = H_N f$ convergen en media-2 hacia una función límite $F \in L^2$. A esta función límite se la designa con $Hf = F$ y se la toma como definición de la integral (1). El operador Hf así obtenido, sobre L^2, es de tipo (2, 2)</u>.

Este Corolario 3 prueba el teorema de Lusin pero tan solo para los valores diádicos 2^{-N} de $\varepsilon > 0$.

Para extender el Corolario 3 a todas la $H_\varepsilon f$, basta probar que si para cada ε se toma el N tal que $2^{-N-1} \leqslant \varepsilon \leqslant 2^{-N}$, y se define $D_\varepsilon f = H_\varepsilon f - H_N f$, entonces $D_\varepsilon f$ tiende en media a cero para toda $f \in L^2$. Para probar este último punto observemos que

$$D_\varepsilon f = f * k'_N + f * h'_N \tag{7}$$

donde

$$k'_N(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si} \quad \varepsilon < |t| < 2^{-N} \\ 0 & \text{en los demás } t, \end{cases} \tag{7a}$$

$$h'_N(t) = \begin{cases} 1/t & \text{si} \quad 2^N < |t| < 1/\varepsilon \\ 0 & \text{en los demás } t, \end{cases} \tag{7b}$$

$$2^{-N-1} \leqslant \varepsilon \leqslant 2^{-N}, \qquad 2^N \leqslant 1/\varepsilon \leqslant 2^{N+1} \tag{7c}$$

De (7a), (7b), (7c) se deduce enseguida que :

$$\int_{E^1} k'_N(t)\,dt = \int_{E^1} h'_N(t)\,dt = 0 \tag{8}$$

$$\|k_N\|_1 = \int |k'_N(t)|\,dt \leqslant 2 \quad ; \quad \|h_N\|_1 \leqslant 2 \tag{8a}$$

De estas fórmulas se deducen facilmente las propiedades siguientes :

a) <u>Si $g(x)$ es la función característica del intervalo finito (a, b) entonces $g * k'_N(x) \doteq 0$ si x no pertenece a uno de los intervalos $(a - 2^{-N}, a + 2^{-N})$ ó $(b - 2^{-N}, b + 2^{-N})$, y $|g * k'_N(x)| \leqslant 2$ si x pertenece a uno de estos dos intervalos</u>.

En efecto, como $k'_N(x)$ es nula para $|x| > 2^{-N}$, podemos escribir

$$g * k'_N(x) = \int_{|t| < 2^{-N}} g(x - t)\, k'_N(t)\,dt \tag{9}$$

Si x está fuera de los intervalos indicados, es decir a distancia mayor que 2^{-N} de la frontera del intervalo (a, b), como $|t| < 2^{-N}$, $x - t$ se va a mantener también fuera de estos intervalos, y siendo $g(x) = 1$ en (a, b) y

$g(x) = 0$ fuera de (a, b), está claro que $g(x-t)$ será constante en (9) y la integral de (9) se reducirá a $\int k'_N(t)\, dt$

que es nula por (8)

Si x está dentro de uno de los intervalos indicados, no podemos afirmar más que $g(x-t)$ será constante para todo t en (9), pero como $|g(t)| \leq 1$, la integral (9) es $\leq \int |k'_N(t)| dt = \| k'_N \|_1$

que por (8a) es ≤ 2.

b) <u>Si $g(x)$ es la función característica del intervalo (a, b), entonces $g * h'_N(x) = 0$ si x no pertenece a $(2^N - b, 2^{N+1} + b)$ ó a $(-2^{N+1} - b, -2^N + b)$, y $|g * h'_N(x)| \leq 2b/2^N$ si x pertenece a $(2^N - b, 2^{N+1} + b)$ ó a $(-2^{N+1} - b, -2^{-N} + b)$.</u>

En efecto, como $g(t) = 0$ si $|t| > b$, tenemos

$$g * h'_N(x) = \int_{|t|<b} k'_N(x-t)\, g(t)\, dt \tag{9a}$$

Como k'_N se anula fuera de $(2^N, 2^{N+1})$ y $(-2^{N+1}, -2^N)$, y como $|t| < b$, está claro que la integral (9a) es nula si x está fuera de los intervalos indicados. En los demás x, puesto que $|g(t)| \leq 1$ y $|k'_N(t)| \leq 2^{-N}$, la integral (9a) es $\leq 2b \cdot 1 \cdot 2^{-N}$.

c) <u>Si g es la función característica de (a, b) entonces</u>

<u>$\|g * k'_N\|_2 \longrightarrow 0$, $\| g * h'_N \|_2 \longrightarrow 0$, y por tanto $\| D_\varepsilon g \|_2 \longrightarrow 0$ para $\varepsilon \longrightarrow 0$</u>

En efecto, por a) $g * k'_N(x)$ no es nula en dos intervalos de longitud total $4 \cdot 2^{-N}$, y es ≤ 2, luego la integral del cuadrado de esta función es $\leq 4 \cdot 2^{-N} \cdot 4 = 8 \cdot 2^{-N}$ es decir $\| g * k'_N \|_2 \leq (8 \cdot 2^{-N})^{1/2} \longrightarrow 0$ para $N \longrightarrow \infty$

Por b), $g * h'_N(x)$ no es nula en un conjunto de medida $2^N + 2b$ y es $\leq 2b/2^N$ en este conjunto. Luego la integral del cuadrado de esta función es $\leq (2^N + 2b) / (2b + 2^N)^2 \longrightarrow 0$ para $N \longrightarrow \infty$. Luego también $\| g * h'_N \|_2 \longrightarrow 0$ y como $D_\varepsilon g = g * k'_N + g * h'_N$ resulta también $\| D_\varepsilon g \|_\varepsilon \longrightarrow 0$.

d) Para toda $f \in L^2$ se tiene $\|D_\varepsilon f\|_2 \leq 4 \|f\|_2$.
En efecto, de (8a) resulta $\|f * k'_N\|_2 \leq \|k'_N\|_1 \|f\|_2 \leq 2 \|f\|_2$, $\|f * h'_N\|_2 \leq 2 \|f\|_2$, y como $D_\varepsilon f = f * k'_N + f * h'_N$ resulta $\|D_\varepsilon f\|_2 \leq 4 \|f\|_2$.

COROLARIO 4. (Teorema de Lusin). Si $H_\varepsilon f$ está definido por (2), entonces los $H_\varepsilon f$ son operadores de tipo (2, 2) con normas uniformemente acotadas $\|H_\varepsilon\| \leq M$, y para cada f de $L^2(E^1)$ las funciones $F_\varepsilon = H_\varepsilon f$ convergen en media-2 hacia una función límite $F \in L^2$. A esta función límite se la designa con $Hf = F$ y se la toma como definición de la integral singular (1). El operador Hf así obtenido, sobre L^2, es de tipo (2, 2).

DEMOSTRACION. $H_\varepsilon f = H_N f + D_\varepsilon f$, $2^{-N-1} < \varepsilon \leq 2^{-N}$, basta, en virtud del Corolario 3, probar que $\|D_\varepsilon f\|_2 \longrightarrow 0$ para toda $f \in L^2$. Por c) esto es cierto para toda $g(x)$, función característica de un intervalo, luego también para toda $g \in L_o$. Dada $f \in L^2$ cualquiera, sea $g \in L_o$ tal que $\|f - g\|_2 < \delta$, donde δ es arbitrariamente pequeño. De $f = g+(f-g)$ tenemos $\|D_\varepsilon f\|_2 \leq \|D_\varepsilon g\|_2 + \|D_\varepsilon (f-g)\|_2$, y por d), $\|D_\varepsilon f\|_2 \leq$ $\leq \|D_\varepsilon g\|_2 + 4 \|f - g\|_2 \leq \|D_\varepsilon g\|_2 + 4 \delta$. Como $g \in L_o$, $\|D_\varepsilon g\|_2 \longrightarrow 0$ y siendo 4δ arbitrariamente pequeño, esto prueba la tésis.

B) Pasemos ahora a las llamadas transformadas de Hilbert n-dimensionales. Consideremos por ejemplo el caso del plano, $n = 2$, y veamos cual es el análogo del operador $Hf(x)$ cuando x es un punto de E^2. Como Hf es la convolución de f con el núcleo $K(t) = 1/t$, se trata de ver cual es el análogo de este núcleo en el caso de 2 o más dimensiones.

Para ello observemos que el núcleo $K(t) = 1/t$ está caracterizado, salvo un factor constante, por las dos propiedades siguientes: a) para todo $a > 0$ es $K(at) = a^{-1} K(t) = a^{-n} K(t)$, donde $n = 1 =$ dimensión de E^1; b) $K(1) + K(-1) = 0$, es decir $K(-1) = -K(1)$. En efecto, la propiedad

a) da que $K(t) = |t| K(1)$ si $t > 0$, $K(t) = |t| K(-1)$ si $t < 0$ de modo que $K(t)$ queda determinado conociendo los valores $K(1)$ y $K(-1)$; la propiedad b) muestra que basta conocer el valor $K(1)$. Luego a) y b) determinan el núcleo $1/t$ salvo un factor constante. Observemos todavía que 1 y -1 constituyen todos los puntos t de E^1 de módulo $|t| = 1$; es decir, la "esfera unitaria de E^1" está constituida por los dos puntos $1, -1$, de modo que b) puede expresarse diciendo que el "valor medio" de $K(t)$ sobre la "esfera unitaria de E^1" es nulo.

Al pasar a dos dimensiones, los análogos del núcleo $1/t$ serán, por tanto, los núcleos $K(t)$, $t \in E^2$, que verifican las dos propiedades siguientes:

a) Para todo $a > 0$ y todo $t \in E^2$ se tiene $K(a\,t) = a^{-2} K(t)$;

b) el valor medio de $K(t)$ sobre la circunferencia $|t| = 1$ es nulo.

La propiedad a) da $K(t) = |t|^{-2} K(t/|t|)$ donde el punto $t/|t|$ pertenece a la circunferencia unitaria, de modo que $K(t)$ queda determinado conociendo sus valores sobre la circunferencia $|t| = 1$.

Para cada t sea $t' = t/|t|$ y $w(t') = K(t')$, entonces $w(t')$ es una función definida sobre la circunferencia unitaria S de E^2, y las condiciones a), b) se escriben así:

$$K(t) = \frac{w(t')}{|t|^2} \quad , \qquad (10)$$

$$\int_S w(t')\, dt' = 0 \quad , \qquad (10a)$$

En caso del plano, los puntos t' de S pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los puntos φ del intervalo $(0, 2\pi)$, de modo que podemos escribir $w(t') = w(\varphi)$ considerando que $w(\varphi)$ es una función definida en $(0, 2\pi)$, resultando

$$K(t) = w(\varphi) / |t|^2 \quad , \quad \varphi = \text{argumento de } t \, , \qquad (10\,b)$$

$$\int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi = 0 \quad , \qquad (10\,c)$$

donde $|t|$ = módulo de t, φ = argumento de t, $t = |t|\, e^{i\varphi}$.

Mientras que en caso de E^1 la "circunferencia unitaria de E^1" consta solo de dos puntos y, salvo factor constante, hay solo una función $w(\varphi)$ que verifica (10a) en el caso de E^2 la circunferencia unitaria es un contínuo y hay una infinidad de diferentes funciones $w(\varphi)$ que verifican (10 c). Es decir, en caso de

E^2 tendremos tantas transformadas de Hilbert como funciones $w(\varphi)$ definidas en $(0, 2\pi)$ que verifican (10c) . Para cada tal función $w(\varphi)$ tendremos una correspondiente transformada de Hilbert

$$H f(x) = \left[H_w f\right](x) = f * (w(t')/|t|^2) =$$

$$= \int_{E^2} f(x-t) \frac{w(t')}{|t|^2} dt = \int_{E^2} f(x-t) \frac{w(\varphi)}{|t|^2} dt \qquad (11)$$

Analogamente, en caso de E^n, $n \geq 2$, para cada función $w(t')$ definida sobre la esfera unitaria $S = \{t'\}$ y que verifica (10 a) , se tiene el operador

$$H f(x) = \left[H_w f\right](x) = \int_{E^n} f(x-t) \frac{w(t')}{|t|^n} dt \quad . \qquad (11a)$$

La función $w(t')$ se llama <u>característica</u> del operador (11a). En caso de E^1 la función característica $w(t')$ es igual a $+1$ si $t' = 1$, y a -1 si $t' = -1$, es decir $w(t')$ = signo de t . Así pues, en caso de E^n , el operador $H f$ es la convolución de f con el núcleo $K(t) = w(t')/|t|^n$, donde $w(t')$ verifica (10a) .

Si $n = 2$, podemos escribir $t = (t_1, t_2) = |t| e^{i\varphi}$, $w(t') = w(\varphi)$; un caso importante es el de

$$w(\varphi) = e^{ik\varphi} \quad , k = \pm 1 , \pm 2 , .. \qquad (11b)$$

y en particular los casos

$$w(\varphi) = \cos\varphi = t_1/|t| \quad ; \quad w(\varphi) = \operatorname{sen}\varphi = t_2/|t| \quad ; \qquad (11c)$$

$$w(\varphi) = \cos 2\varphi \quad ; \quad w(\varphi) = \operatorname{sen} 2\varphi \quad . \qquad (11d)$$

<u>NOTA:</u> Los operadores de Hilbert 2-dimensionales con características (11c) ó (11d) , aparecieron por primera vez en la Teoria del Potencial. En efecto, toda función $f(t) = f(t_1, t_2)$ definida en E^2 genera el potencial Newtoniano

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_{E^2} f(t_1, t_2) \frac{1}{R} \, dt_1 \, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{E^2} f(x_1 - t_1 , x_2 - t_2) \left\{ t_1^2 + t_2^2 + x_3^2 \right\}^{-1/2} dt_1\, dt_2 \qquad (12)$$

en el semiespacio $x_3 > 0$. Generalmente se consideran funciones $f(t)$ que se anulan fuera de un círculo, de modo que la integral de (12) se extiende no a todo E^2 sino a un círculo finito. Como $1/R = 1/|t|$ es integrable en todo tal círculo, la función (12) está bien definida como una integral de Lebesgue. Con - deremos ahora las derivadas parciales U_{x_1}, U_{x_2}, U_{x_3}; en la teoría del Potencial tiene importancia estudiar el comportamiento de estas derivadas para $x_3 \longrightarrow 0$. La derivada en x_3 es igual a

$$U_{x_3}(x_1 , x_2 , x_3) = - \frac{x_3}{4\pi} \int_{E^2} f(t_1 , t_2) . \frac{dt_1\, dt_2}{R^3}$$

que es la integral de Poisson de $-f(t)$ y un resultado clásico afirma que U_{x_3} tiende a $f(x_1 , x_2)$ para casi todo $x = (x_1 , x_2)$ de E^2, cuando $x_3 \longrightarrow 0$.

El estudio del límite correspondiente para U_{x_1}, U_{x_2} es más dificil y ha sido concluido tan solo recientemente en los trabajos de Zygmund y Calderón. Se tiene, en efecto,

$$U_{x_1} = - \frac{1}{4\pi} \int_{E^2} f(t_1 , t_2) \frac{x_1 - t_1}{R^3} =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int_{E^2} f(x_1 - t_1 , x_2 - t_2) \frac{t_1}{(t_1^2 + t_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dt_1\, dt_2$$

y haciendo $x_3 = 0$ resulta

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{E^2} f(x_1 - t_1 , x_2 - t_2) \frac{t_1/|t|}{|t|^2} dt_1\, dt_2 , \qquad (12a)$$

y esta es la transformada de Hilbert $H_w f$ con caractrística $w(t) = t_1/|t| = \cos\varphi$. Asi pues el estudio del comportamiento de las derivadas U_{x_1}, U_{x_2} llevan a transformadas de Hilbert 2-dimensionales con características (11c).

Análogamente, considerando el potencial logarítmico

$$u(x , y) = \frac{1}{2\pi} \int_{E^2} f(x - t) \log 1/|t| \, dt ,$$

se presenta la cuestión de la existencia de las derivadas de 2-do orden de $u(x , y)$, problema que ha ejercido una influencia considerable en el desarrollo histórico de la teoría de las funciones de variable real. Derivando formalmente dos veces bajo el signo de integral en la última fórmula se obtienen integrales de Hilbert 2-dimensionales $H_w f$ donde $w(\varphi) = \cos 2\varphi$ ó $w(\varphi) = \operatorname{sen} 2\varphi$, de modo que también la teoría del potencial logarítmico conduce a la consideración de transformadas de Hilbert multidimensionales, con características de la forma (11b) (en caso de $n = 2$).

Volviendo a la transformada Hf definida por (11) o por (11a), como $1/|t|^2$ no es integrable en ningún entorno del origen ni del infinito (en la medida de E^2), la integral (11) no existe como una integral de Lebesgue y debe tratarse como una integral singular.

Como en el caso 1-dimensional, definimos para todo $\varepsilon > 0$,

$$H_\varepsilon f(x) = \left[H_{w\varepsilon} f\right](x) = \int_{\varepsilon < |t| < 1/\varepsilon} f(x - t) \frac{w(t')}{|t|^2} \, dt \qquad (13)$$

Esta integral existe para todo $\varepsilon > 0$, pues $1/|t|^2$ es acotada en el conjunto $\varepsilon < |t| < 1/\varepsilon$, luego la integral (11) se define como

$$Hf(x) = \lim H_\varepsilon f(x) \quad \text{para} \quad \varepsilon \longrightarrow 0 , \qquad (14)$$

donde el límite se entiende en sentido puntual o media-(p). Calderón y Zygmund han probado en 1952 que para toda $f \in L^p$ y todo $p > 1$, $p < \infty$, las funciones $H_\varepsilon f$ convergen en media-p hacia una función límite Hf, y que el operador Hf así obtenido es de tipo (p , p); además ellos probaron que el límite (14) existe en sentido de la convergencia puntual para toda $f \in L^p$ si $p \geq 1$, $p < \infty$.

En este párrafo, como aplicación del teorema de los núcleos casi ortogonales, vamos a deducir la convergencia media de $H_\varepsilon f$ en el espacio L^2, es decir probaremos que para toda f de L^2 las funciones $H_\varepsilon f$ convergen en media-2 hacia una función límite Hf, y que el operador Hf así definido es de tipo.

$(2, 2)$.

Supondremos que la función característica $w(t') = w(\varphi)$, además de satisfacer la condición esencial (10a), verifica la condición de Lipshitz, o generalmente la condición siguiente : para todo $h \in E^2$ y para toda función diferenciable $h(\varphi)$ tal que $|h(\varphi)| \leq |h|$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \left| w(\varphi + h(\varphi)) - w(\varphi) \right| d\varphi \leq M |h| . \tag{15}$$

(la función $h(\varphi)$ hace corresponder a un φ de $(0, 2\pi)$ otro punto $h(\varphi)$ de $(0, 2\pi)$).

Sea J_i el conjunto $2^{i-1} < |t| \leq 2^i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ de modo que J_i es un anillo circular. Para cada $i = 1, 2, \ldots$, definimos

$$k(t) = \begin{cases} w(t')/|t|^2 = w(\varphi)/|t|^2 & \text{si} \quad t \in J_o, \text{ es decir si } 1/2 < |t| \leq 1 \\ 0 & \text{en las demás } t ; \end{cases} \tag{16}$$

$$k_i(t) = \begin{cases} w(t')/|t|^2 & \text{si} \quad t \in J_i, \text{ es decir } 2^{i-1} < |t| \leq 2^i , \\ 0 & \text{en los demás } t ; \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{16a}$$

$$h_i(t) = \begin{cases} w(t')/|t|^2 & \text{si} \quad t \in J_{-i}, \text{ es decir } 2^{-i-1} < |t| \leq 2^{-i} , \\ 0 & \text{en los demás } t ; \quad i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{16b}$$

Evidentemente se tiene

$$\sum_1^{\infty} k_i(t) + \sum_1^{\infty} h_i(t) + k(t) = w(t')/|t|^2 . \tag{17}$$

para todo t de E^2. Más aun se tiene

$$k_i(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} k\left(\left(\frac{1}{2}\right)^i t\right) , \tag{18}$$

$$h_i(t) = 2^{2i} k(2^i t) . \tag{18a}$$

Como en el caso 1-dimensional, consideremos primero los ε de la forma $\varepsilon = 2^{-N}$ y pongamos

$$H_N f = H_{2^{-N}} f = \int_{2^{-N} < |t| < 2^N} f(x-t) \frac{w(t')}{|t|^2} dt \qquad (19)$$

y vamos a probar que la sucesión $H_N f$ converge en media hacia un operador de tipo $(2, 2)$.

Evidentemente (19) puede escribirse así

$$H_N f = \int_{E^2} f(x-t) \left[k(t) + \sum_1^N k_i(t) + \sum_1^N h_i(t) \right] dt =$$

$$= f * \left[k + \sum_1^N k_i + \sum_1^N h_i \right] , \qquad (19a)$$

es decir (teniendo en cuenta (18)), los $H_N f$ son del mismo tipo que los $S_N f$ del Corolario 2, con $\varepsilon = 1/2$. Por lo tanto si probamos que nuestro núcleo $k(t)$, definido por (16), verifica las condiciones 1) - 3) del Corolario 2, podremos afirmar que dicho Corolario es aplicable a los operadores H_N.

Es evidente que $k(t)$, definido por (16), verifica las condiciones 1) y 3) de dicho Corolario. Veamos que verifica también la condición 2). Evidentemente basta considerar solo los valores $|h|$ suficientemente pequeños (cfr. página 42).

Sea A el conjunto de los t tales que t y $t+h$ ambos pertenecen a $J_o = \{1/2 < |t| \leq 1\}$, B el conjunto de los t tales que t y $t+h$ ambos no pertenecen a J_o, y C el conjunto de los t tales que uno de los dos puntos t, $t+h$ pertenece a J_o y el otro no.

Para t de B tenemos $|k(t+h) - k(t)| = 0$. Para t de A, poniendo $t = re^{i\varphi}$, $t+h = r_1 e^{i\varphi_1}$, tendremos $1/2 < r, r_1 \leq 1$, además

$$|k(t+h) - k(t)| = |w(\varphi_1)/r_1^2 - w(\varphi)/r^2| \leq$$

$$|w(\varphi_1) - w(\varphi)| / r_1^2 + 2 |w(\varphi)| \, |r_1 - r| / (r_1^2 \, r^2) ,$$

de modo que

$$\int_A |k(t+h) - k(t)| \, dt \leq$$

$$\cdot \int_{1/2}^{1} r dr \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{|w(\varphi_1) - w(\varphi)|}{r_1^2} d\varphi + \int_0^{2\pi} \frac{|2\ w(\varphi)|\ |r_1 - r|}{r_1^2\ r^2} d\varphi \right\}$$

$$\leq \text{cst.} \left\{ \int_0^{2\pi} |w(\varphi) - w(\varphi + h(\varphi))| \, d\varphi \right\} + \text{cst.} \, |r_1 - r| \quad ,$$

donde $\varphi_1 = \varphi + h(\varphi)$, $|h(\varphi)| \leq \text{cst.} \, |h|$ y $|r - r_1| \leq |h|$.
Luego por (15) tendremos

$$\int_A |k(t + h) - k(t)| \, dt \leq \text{cst.} \, |h| \tag{20}$$

Por otra parte, para $t \in C$ tenemos que $k(t + h) - k(t)$ es igual a $k(t + h)$ o a $k(t)$, pues uno de estos têrminos es nulo, luego $|k(t + h) - k(t)| \leq 2M$, y como el conjunto C tiene medida $\leq 4|h|$, resulta que

$$\int_C |k(t + h) - k(t)| \, dt \leq \text{cst.} \, |h| \tag{20a}$$

De (20) y (20a) sigue la condición 2) del Corolario 2 y por tanto obtenemos el siguiente .

<u>COROLARIO 5</u> . <u>Si $H_N f$ están definidos por (19a) , y si la función caractrística $w(\varphi)$ verifica (10a) y (15) , entonces los operadores $H_N f$ son de tipo (2 , 2) con normas uniformemente acotadas $\|H_N\| \leq M$, y para cada f de $L^2(E^2)$ las funciones $F_N = H_N f$ convergen en media-2 hacia una función límite $F \in L^2$. A esta función límite se la designa con $Hf = F$ y se la toma como definición de la integral (11) . El operador Hf así obteni - do sobre L^2 es un operador multiplicador y de tipo (2 , 2)</u> .

Los razonamientos de las páginas 44 y 45 se aplican también a los operado - res actuales definidos en E^2 , de modo que el ultimo Corolario 5 vale también para todas las $H_\varepsilon f$, cualquiera sea $\varepsilon > 0$. (Ofrecemos al lector, a título de ejercicio fácil, verificar que los argumentos de las páginas 44 y 45 se apli- can al caso actual) . Análogamente este Corolario vale en todo E^n , de modo que obtenemos definitivamente el siguiente

COROLARIO 6 (teorema de Calderón-Zygmund-Mijlin). Sea $H_\varepsilon f$ definido por (13) en el espacio E^n, y supongamos que la función caractrística $w(t')$ verifica además de la condición esencial (10a) también la condición

$$\int_S \left|w(t' + h(t')) - w(t')\right| dt' \leq M |h| , \tag{15a}$$

donde S es la esfera unitaria $|t| = 1$ de E^n y $h(t')$ una función diferenciable de S en S tal que $|h(t')| \leq |h|$. Entonces para toda $f \in L^2(E^n)$ las funciones $H_\varepsilon f$ tienden en media-2 a una función límite Hf, cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, y Hf es un operador lineal de tipo $(2, 2)$.

Observación 1. La condición (10a) es esencial, pues de lo contrario la integral (11) no va a existir aún para las funciones más simples; por ejemplo si $f(t) = 1$ para todo t, entonces

$$Hf(x) = \int_{E^2} \frac{w(\varphi)}{|t|^2} dt = \int_0^\infty \frac{r}{r^2} \left\{\int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi\right\} dr =$$

$$= a \int_0^\infty \frac{1}{r} dr \qquad \text{donde} \qquad a = \int_0^{2\pi} w(\varphi)\, d\varphi$$

Luego si $a \neq 0$, la integral (11) no existe en ningún x.

Observación 2. La demostración dada aquí del Corolario 6 difiere de la demostración original de Calderón y Zygmund. Mijlin enunció anteriormente el Corolario 6 pero en forma incompleta y con demostración no del todo correcta (Mijlin probaba tan solo que el operador Hf, que está bién definido para las $f \in L_0$ elementales, se extendía a todo el L^2; pero Mijlin no consideraba la convergencia en media-2 de los $H_\varepsilon f$). El Corolario 6 contiene evidentemente como caso particular al Corolario 4, el cual se demostraba generalmente con métodos de la teoría de funciones analíticas; la primera demostración con "variable real" fué dada por Besicovitch y perfeccionada por Lusin. La demostración de Calderón-Zygmund de Corolario 6 tampoco usa funciones analíticas.

7. EXTENCION A TIPOS (p, p^*).

Vamos ahora a extender los resultados del párrafo 5 a los espacios L^p, $p \neq 2$. En dicho párrafo dimos condiciones que permiten asegurar que los operadores $S_N f$, definidos por (2), convergen en media-2 hacia una función límite Tf, para toda f de L^2, y que Tf es de tipo $(2, 2)$. Ahora, daremos condiciones que permiten asegurar que, para toda $f \in L^p$, los $S_N f$ convergen en media-p^* hacia un operador Tf que es de tipo (p, p^*). Como para $p = 2$ es $p^* = 2$, los teoremas que siguen constituyen una extensión de los del § 5.

Antes de pasar a estos teoremas veamos una importante generalización del teorema de Plancherel debida a Hardy, Littlewood y Paley. Ya vimos una generalización de este teorema debida a Hausdorff - Young, según la cual para todo $1 \leq p \leq 2$ se tiene

$$\| \mathcal{F}^* f \|_{p^*} \leq \| f \|_p \tag{1}$$

que para $p = 2$ se reduce al teorema de Plancherel. Si bien (1) es una generalización de $\|f\|_2 \leq \|\hat{f}\|_2$, en la fórmula (1) aparecen las normas p y p^*, siendo $p^* \neq p$ si $p \neq 2$, mientras que en el teorema de Plancherel tenemos en ambos miembros normas 2. Se quiere pues una generalización de la desigualdad de Plancherel - Bessel en que figuren exponentes p en ambos miembros. Tal generalización es dada por el siguiente

<u>**TEOREMA DE HARDY - LITTLEWOOD - PALEY**</u>. <u>Si $1 < p \leq 2$, entonces se tiene</u>

$$\int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p \, |u|^{n(p-2)} \, du \leq C_p \int_{E^n} |f(x)|^p \, dx , \tag{2}$$

<u>donde C_p es una constante que depende solo de p, y la misma para todas las $f \in L^p$</u>

Para $p = 2$ es $n(p-2) = 0$ y se obtiene la desigualdad de Plancherel-Bessel que dice que el operador $\mathcal{F} f = \hat{f}$ es de tipo $(2, 2)$. Para $p \neq 2$ este operador no es de tipo (p, p), pero vale (2). [La desigualdad (2) dice que $\mathcal{F} f = \hat{f}$ es de tipo $(2, 2)$ si en $E^n = \{x\}$ se toma la medida de

Lebesgue dx y en $\hat{E}^n = \{u\}$ se toma la medida ponderada $|u|^{n(p-2)}\, du]$.

La desigualdad (2) será probada más adelante, en el capítulo siguiente, por ahora vamos a aceptarla sin demostración y la usaremos para generalizar los teoremas del § 5. Observemos todavía que (2) no vale para $p = 1$ pues la constante C_p tiende a ∞ cuando p tiende a 1. Así pues la desigualdad (2) difiere de la (1) en que en ambos miembros figura el mismo p, y además en que C_p varía con p (mientras que en (1) es $C_p = 1$ para todo p), excluyéndose el valor $p = 1$.

TEOREMA 1a. Sea $k_j(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núucleos integrables, y sea para todo N el operador $S_N f$ definido por (2), pág. 34. Si se verifica :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \hat{k}_j(u) = h(u) \quad \text{para casi todo } u \in E^n , \tag{3}$$

$$\left|\sum_{j=1}^{N} \hat{k}_j(u)\right| \leq M\, |u|^{-d} , \quad \text{para todo } N \text{ y casi todo } u \in E^n , \tag{4}$$

$$0 \leq d < n = \text{dim. de } E^n ,\quad p = 2n/(n+d) ,\quad p^* = p/(p-1) = $$

$$= 2n/(n-d) , \tag{5}$$

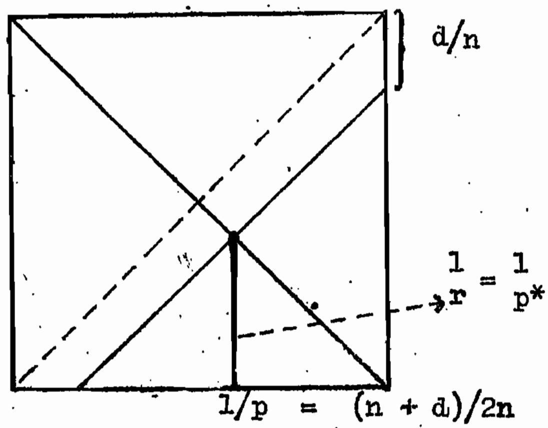
entonces : a) $\|S_N f\|_{p^*} \leq C_p M \|f\|_p$ para toda $f \in L^p$ y todo N, es decir los operadores S_N son de tipo (p, p^*) con normas uniformemente acotadas ;

b) para toda $f \in L^p(E^n)$ las funciones $S_N f = F_N$ convergen en media-p^* hacia una función límite $F \in L^{p^*}(E^n)$ que se indicará con $F = Tf = f * \sum_1^\infty k_j$;

c) el operador Tf así definido es un operador multiplicador de tipo (p, p^*) siendo $h(u)$ el multiplicador y $\|Tf\|_{p^*} \leq C_p M \|f\|_p$.

Observación 1 . El teorema afirma que, bajo las hipótesis (3) y (4), el operador Tf es de tipo-P donde $P = ((n+d)/2n\, ;\, (n-d)/2n)$. Para obte -

ner este punto P en el cuadrado de los tipos hay que intersectar la diagonal secundaria con la paralela a la diagonal principal a diatancia d/n. En efecto, las ecuaciones de estas dos rectas son respectivamente :



$1/p + 1/r = 1$, $1/p - 1/r = d/n$, de donde se obtiene $1/p = (n + d)/2n$, $1/r = (n - d)/2n$ y como $1/p + 1/r = 1$ se tiene , $r = p^*$

<u>Observación. 2</u> . Para $d = 0$ es $p = 2$ y el teorema la se reduce al teorema 1 .

<u>Demostración</u> Sea antes $f \in L_o$. Luego $f \in L^2$ y también $F_N =$
$= S_N f = f * \sum_1^N k_j \in L^2$ (ver (6) pág. 6) .

De (5) tenemos que $1 < p = 2n/(n + d) \leq 2$, . luego para este p son aplicables ambas desigualdades (1) y (2) . Usando estas desigualdades y la hipótesis (4), y observando que por ser $F_N \in L^2$ es $F_N = \mathcal{F}^* \hat{F}_N$, tendremos (recordando que $2n = np + dp$, $dp = n(2 - p)$) ,

$$\|S_N f\|_{p^*} = \|F_N\|_{p^*} \leq \|\hat{F}_N\|_p = \left\{ \int_{E^n} |\hat{F}_N(u)|^p du \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int_{E^n} \left|\hat{f}(u) \sum_{j=1}^N \hat{k}_j(u)\right|^p du \right\}^{1/p} \leq M \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |u|^{-dp} du \right\}^{1/p} =$$

$$= M \left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |u|^{n(p-2)} du \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq M C_p \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = M C_p \|f\|_p ,$$

lo que prueba la parte a) de la tésis .

Por otra parte, de (3) tenemos que para casi todo u vale

$$\lim_{N \to \infty} \left| \hat{f}(u) h(u) - \hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_j(u) \right|^p = 0 ; \tag{6}$$

y de (4) tenemos $|h(u)| \leq M |u|^{-d}$, $\left|\sum_1^N \hat{k}_j(u)\right| \leq M |u|^{-d}$, de modo que para todo N las funciones del primer miembro de (6) son mayoradas por la función fija

$$H(u) = 2^p M^p \left|\hat{f}(u)\right|^p |u|^{-dp} = (2M)^p \left|\hat{f}(u)\right|^p |u|^{n(p-2)}$$

Esta función $H(u)$ es integrable, pues por (2) tenemos, supuesto $f \in L^p$

$$\int_{E^n} H(u)\, du = (2M)^p \int_{E^n} \left|\hat{f}(u)\right|^p |u|^{n(p-2)}\, du \leq (2M)^p C_p \|f\|_p^p < \infty$$

Luego por el teorema de Lebesgue podemos integrar término a término la igualdad (6), resultando que

$$\left\|\hat{f}(u)\, h(u) - \hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_j(u)\right\|_p \longrightarrow 0 \qquad (6a)$$

es decir $\hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_j(u)$ converge en media-p hacia $\hat{f}(u)\, h(u)$, y en particular $\hat{f}(u)\, h(u) \in L^p$, $1 < p \leq 2$. Luego la función $\hat{f}(u)\, h(u)$ tiene por el teorema de Haudorff-Young, una transformada de Fourier que llamaremos $F(x) \in L^{p^*}(E^n)$, y como $S_N f = f * \sum_1^N k_j = F_N$ es la transformada de Fourier de $\hat{f}(u) \sum_1^N \hat{k}_j(u)$, resulta de (6a), usando (1), que

$$\|F - F_N\|_{p^*} \leq \left\|\hat{f}\, h - \hat{f} \sum_1^N \hat{k}_j\right\|_p \longrightarrow 0$$

o sea F_N converge en media-p* hacia F. Más aún $\hat{F} = \hat{f}(u)\, h(u)$, lo que prueba la tésis para el caso $f \in L_o$.

Sea ahora $f \in L^p$ cualquiera. Elejimos una sucesión $f^m \in L_o$ tal que $\|f - f^m\|_p \longrightarrow 0$, $\|f^m - f^{m+\ell}\|_p \longrightarrow 0$, luego $S_N f^m$ converge en media-p* hacia una función $G_N(x)$. Como $\|G_N\|_{p^*} = \lim \|S_N f^m\|_{p^*} \leq C_p M \lim \|f^m\|_p =$ $= c_p M \|f\|_p$, tenemos $\|G_N\|_{p^*} \leq C_p M \|f\|_p$. Por otra parte (ver (6) pág. 6) $\|S_N f - S_N f^m\|_p \leq \sum_1^N \|k_j\|_1 \|f - f^m\|_p \longrightarrow 0$, luego $S_N f^m$ tiende en media-p a $S_N f$, y por tanto debe ser $S_N f = G_N(x)$ en casi todo x. Luego $\|S_N f\|_{p^*} \leq C_p M \|f\|_p$, lo que prueba la parte a) para $f \in L^p$ cualquiera, y análogamente se extienden las partes b) y c), por el paso al límite a partir de funciones elementales, l.q.d.d.

DEFINICION . Una función $g(x)$ definida en E^n se dirá Lipshitziana de orden d, en símbolos $g(x) \in \mathrm{Lip}\ d$, si existe una constante fija M tal que para todo $x \in E^n$, $h \in E^n$ se verifica

$$|g(x+h) - g(x)| \leqslant M\,|h|^d \tag{7}$$

La mínima constante M para la cual vale (7) se llamará la norma Lipshitziana de $g(x)$ y se indicará con $\|g\|_{(d)}$.

La función $g(x)$, definida en E^n, se dirá Lipshitziana en media-p de orden d, si existe una constante M tal que para toda $h \in E^n$ vale

$$\int_{E^n} |g(x+h) - g(x)|^p\, dx \leq M\,|h|^d \tag{7a}$$

Es decir ahora la desigualdad (7) no vale para cada punto individual $x \in E^n$ sino en promedio-p. La mínima constante M que verifica (7a) se llamará la norma Lip (p , d) y se indicará con $\|g\|_{(p\,,\,d)}$.

En particular si $g(x) \in \mathrm{Lip}\ (1\,,\,d)$ esto significa que para todo $h \in E^n$ vale

$$\int_{E^n} |g(x+h) - g(x)|\, dx \leq \|g\|_{(1\,,\,d)}\, |h|^d \,. \tag{7b}$$

LEMA de LEBESGUE . Si $g(x) \in L^1(E^n)$ y si $g(x) \in \mathrm{Lip}\ (1\,,\,d)$, entonces para todo $u \in E^n$ la transformada de Fourier $\hat{g}(u) = \mathcal{F}g$ verifica

$$|\hat{g}(u)| \leq 2^{-d}\, \|g\|_{(1\,,\,d)}\, |u|^{-d} \,. \tag{8}$$

Observación 3 : La definición de $g \in \mathrm{Lip}\ (p\,,\,d)$ se aplicó también al caso cuando $g(x)$ está definida en $(0\,,\,2\pi)$ y es periódica , o a funciones periódicas en E^n . Luego el lema de Lebesgue vale también para los coeficientes de Fourier $h_n = \mathcal{F}g$ de una tal función periódica .

Demostración Por definición tenemos, puesto que $g(x)$ es integrable,

$$\hat{g}(u) = \int_{E^n} g(x)\, e^{-2\pi i(x,u)}\, dx \qquad (9)$$

luego sustitutyendo x por $x + h$,

$$\hat{g}(u) = \int_{E^n} g(x + h)\, e^{-2\pi i(x,u)}\, e^{-2\pi i(h,u)}\, dx \;,$$

de donde

$$e^{2\pi i(h,u)}\, \hat{g}(u) = \int_{E^n} g(x + h)\, e^{-2\pi i(x,u)}\, dx \;. \qquad (9a)$$

Restando (9a) de (9) y teniendo en cuenta que el módulo de $e^{-2\pi i(x,u)}$ es i - gual a uno , tendremos

$$\left|1 - e^{2\pi i(h,u)}\right| \left|\hat{g}(u)\right| = \left|\int_{E^n} \left[g(x) - g(x + h)\right] e^{-2\pi i(x,u)}\, dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^n} \left|g(x) - g(x + h)\right| dx \leqslant \left\|g\right\|_{(1\,,\,d)} |h|^d \;, \qquad (9b)$$

cualquiera sea $h \in E^n$. Fijado $u \in E^n$, tomamos h de igual argumento que u , es decir sobre la recta que une el origen con u , y el módulo $|h| = 1/(2|u|)$; tendremos entonces

$$(h\,,\,u) = |h|\,|u| = 1/2 \;,\; |h| = (2|u|)^{-1} \;,$$

$1 - e^{2\pi i(h,u)} = 1 - (-1) = 2$, luego de (9b) resulta

$$2\left|\hat{g}\,(u)\right| \leqslant \left\|g\right\|_{(1\,,\,d)} (2|u|)^{-d} \;,$$

lo que prueba la tésis .

<u>Observación 4</u> . <u>Si $g(x) \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d)$ con $d > 1$ entonces $g(x)$ es una constante (luego $g(x) = 0$, supuesto que $g(x)$ es integrable) , es decir fuera de la función nula no existen funciones Lipshitzianas $(1\,,\,d)$ de orden $d > 1$</u> . En efecto si $g \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d)$ con $d > 1$, hacemos en (9b) $h = \mathcal{E}/u$, donde $\mathcal{E}$ es un número arbitrariamente pequeño ; entonces $2\pi i(h\,,\,u) = 2\pi i\mathcal{E}$, $\left|e^{2\pi i(h,u)} - 1\right| = \left|e^{2\pi i\mathcal{E}} - 1\right| \geqslant \mathcal{E}/2$, si $\mathcal{E}$ es suficientemente pequeño . Luego de <u>(9b)</u> resulta

$$|\hat{g}(u)| \leq \|g\|_{(1\ ,\ d)} \, (\mathcal{E}/|u|)^d / (\mathcal{E}/2) = 2\,\|g\|_{(1\ ,\ d)}\, \mathcal{E}^{d-1}\, |u|^{-1} .$$

Si $d > 1$, $d - 1 > 0$, haciendo $\mathcal{E} \longrightarrow 0$ resulta $\hat{g}(u) = 0$ para todo $u \neq 0$. Luego $\|\hat{g}\|_2 = 0$, y por el teorema de Plancherel $\|g\|_2 = 0$, luego $g(x) = 0$ en casi todo x .

La misma observación se aplica si $g(x) \in \mathrm{Lip}\ d$, $d > 1$, así como en caso en que $g(x)$ es periódica ; pero en estos casos resulta $g(x) =$ constante , no necesariamente nula [pues si $g(x)$ está definida en $(0\ ,\ 2\pi)$ y es periódica , la hipótesis $g \in \mathrm{Lip}\,(1\ ,\ d)$, $d > 1$ dará $h_i = \mathcal{F} g = 0$ para todo i menos $i = 0$, luego ahora solo podemos afirmar que $g(x) =$ constante $= h_o$ pudiendo ser $h_o \neq 0$] .

Observemos todavía que si $g(x) \in L^1\,(E^n)$ entonces $g(x) \in \mathrm{lip}\ (1\ ,\ 0)$ con $\|g\|_{(1\ ,\ 0)} \leq 2\|g\|_1$, es decir $\mathrm{Lip}\ (1\ ,\ 0)$es practicamente lo mismo que $L^1\ (E^n)$; en efecto ,

$$\int_{E^n} |g(x+h) - g(x)|\, dx \leq \int_{E^n} |g(x+h)|\, dx + \int_{E^n} |g(x)|\, dx =$$

$$= 2 \int_{E^n} |g(x)|\, dx = 2\,\|g\|_1 = 2\,\|g\|_1\, |h|^0 \tag{9c}$$

<u>TEOREMA 2a</u> (de los núcleos casi ortogonales en L^p) . <u>Sea $k_j(x) \in L^1\ (E^n)$ una sucesión de núcleos integrables tales que para todo par $i\ ,\ j$ se verfica</u>

$$\|k_i * k_{i+j}\|_{(1\ ,\ 2d)} \leq M^2\ \mathcal{E}^j \quad , \tag{10}$$

<u>donde M , $\mathcal{E}$, d son constantes fijas y</u>

$$0 \leq \mathcal{E} < 1 \quad , \quad 0 \leq d \leq 1/2 \quad . \tag{10a}$$

<u>Entonces estos núcleos verifican las hipótesis (3) y (4) del teorema 1a , y por tanto verifican las propiedades a) , b) y c) de dicho teorema</u> .

<u>Observación 5</u> . Como para $d = 0$ se tiene $\|k_i * k_{i+j}\|_{(1\ ,\ 0)} \leq$

$\leq 2 \left\| k_i * k_{i+j} \right\|_1$, el teorema la se reduce al teorema 1 para $d = 0$. Por otra parte la limitación $d \leq 1/2$ es natural, pues por lo visto en la Observación 4 la condición (10) no puede verificarse para $d > 1/2$, $2d > 1$, al menos que los núcleos $k_i * k_{i+j}$ sean idénticamente nulos.

Demostración. Como la transformada de Fourier de $k_i * k_{i+j}$ es $\hat{k}_i(u)\, \hat{k}_{i+j}(u)$, la hipótesis (10) da, en virtud del lema de Lebesgue, que para todo $u \in E^n$ vale

$$\left| \hat{k}_i(u) \right| \left| \hat{k}_{i+j}(u) \right| \leq M^2 \varepsilon^j |u|^{-2d} = (M |u|^{-d})^2 \varepsilon^j$$

Para cada $u \in E^n$ fijo, $\left| \hat{k}_i(u) \right|$ es una sucesión numérica, y la última desigualdad muestra que esta sucesión verifica la hipótesis del lema numérico del párrafo 4. Luego por dicho lema tendremos

$$\sum_1^N \left| \hat{k}_i(u) \right| \quad M\, C(\varepsilon)\, |u|^{-d} ,$$

para todo N. Si $|u| \neq 0$, esto muestra que $\sum \left| \hat{k}_i(u) \right|$ es absolutamente convergente y se verifican las hipótesis (3) y (4) del teorema la,
l,q,d,d.

<u>COROLARIO la. Sea $k_j(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núcleos tales que</u> :

$$\left\| k_j \right\|_1 \leq M \varepsilon^{-jd} , \quad \text{para todo } j = 1, 2, .. \tag{11}$$

$$\left\| k_j \right\|_{(1,1)} \leq M \varepsilon^{(1-d)j} , \quad \text{para todo } j = 1, 2, .. \tag{11a}$$

$$0 < d \leq 1/2 , \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \tag{11b}$$

<u>Entonces la sucesión $k_i(x)$ verifica la hipótesis de casi-ortogonalidad (10) pero con ε^d en vez de ε , y por tanto, si $d > 0$ se verifican las propiedades a), b) y c) del teorema la</u>.

Observación 6. El Corolario 1 corresponde al caso $d = 0$, pero en el caso $d = 0$ se imponían además otras dos hipótesis : $\int k_j(x)\, dx = 0$ y $k_j(x) = 0$ si $|x| > \varepsilon^{-j}$, que no se exigen si $d > 0$.

Esto se debe a que el Corolario la dice que las hipótesis (11) y (11a) implican la condición (10) con ε^d en vez de ε. Si $d > 0$ entonces $\varepsilon^d < 1$ y vale (10) con $\varepsilon = \varepsilon^d < 1$; pero si $d = 0$ es $\varepsilon^d = 1$ mientras que el teorema 2a exige que sea $\varepsilon < 1$. Por eso el caso $d = 0$ necesita además de las hipótesis (11) y (11a) otras suplementarias.

<u>Demostración</u>. De (11), teniendo en cuenta (9c), y la desigualdad (7a) de la pág. 36, obtenemos

$$\int_{E^n} \left| k_i * k_{j+i}(x+h) - k_i * k_{j+i}(x) \right| dx \leqslant 2 \left\| k_i * k_{i+j} \right\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant 2 \left\| k_i \right\|_1 \left\| k_{i+j} \right\|_1 \leqslant 2 M^2 \varepsilon^{-id} \varepsilon^{-(i+j)d} \qquad (12)$$

Por otra parte, recordando la definición de $k_i * k_{i+j}(x)$ tendremos usando (11a)

$$\int_{E^n} \left| k_i * k_{i+j}(x+h) - k_i * k_{i+j}(x) \right| dx =$$

$$= \int_{E^n} \left| \int_{E^n} k_{i+j}(x+h-t)\, k_i(t)\, dt - \int_{E^n} k_{i+j}(x-t)\, k_i(t)\, dt \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^n} \left| k_i(t) \right| \left[\int_{E^n} \left| k_{i+j}(x+h-t) - k_{i+j}(x-t) \right| dx \right] dt =$$

$$= \left[\int_{E^n} \left| k_i(t) \right| dt \right] \left[\int_{E^n} \left| k_{i+j}(x+h) - k_{i+j}(x) \right| dx \right] \leqslant$$

$$\leqslant \left\| k_i \right\|_1 \left\| k_{i+j} \right\|_{(1,1)} |h| \leqslant M^2 \varepsilon^{-id} \varepsilon^{(1-d)(i+j)} |h| . \qquad (12a)$$

Dado $h \in E^n$, consideremos antes el caso $\varepsilon^{-(i+j)} \leqslant |h|$. En este caso $\varepsilon^{-(i+j)d} \leqslant |h|^d$, y de (12) obtenemos

$$\int_{E^n} \left| k_i * k_{i+j}(x+h) - k_i * k_{i+j}(x) \right| dx \leqslant 2 M^2 \varepsilon^{-id} \varepsilon^{-(i+j)d} =$$

$$= 2M^2 \; \varepsilon^{jd} \; \varepsilon^{-2(i+j)\,d} \leq 2M^2 \; (\varepsilon^{d})^{j} \; |h|^{2d} \; ,$$

es decir se cumple (10) con ε^d en vez de ε.

Sea ahora $\varepsilon^{-(i+j)} \geq |h|$ o sea $\varepsilon^{(i+j)} \leq |h|^{-1}$, luego como $1-2d \geq 0$ tendremos ahora $\varepsilon^{(i+j)\,(1-2d)} \leq |h|^{-(1-2d)}$. De (12a) obtenemos entonces

$$\int_{E^m} |k_i * k_{i+j}(x+h) - k_i * k_{i+j}(x)|\,dx \leq M^2 \; \varepsilon^{-id} \; \varepsilon^{(1-d)\,(i+j)} |h| =$$

$$= M^2 \; \varepsilon^{jd} \; \varepsilon^{(i+j)\,(1-2d)} \leq M^2 \,(\varepsilon^d)^j \, |h|^{-(1-2d)} \, |h| = M^2 \,(\varepsilon^d)^j \, |h|^{2d} \, ,$$

de modo que también en este caso se verifica (10) con ε^d en vez de ε, 1,q,d,d.

<u>**COROLARIO 1b**</u>. <u>Sea $h_j(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núcleos tales que</u> :

$$\|h_j\|_1 \leq M \; \varepsilon^{jd} \quad \underline{\text{para todo } j = 1, 2, ..} \tag{11'}$$

$$\|h_j\|_{(1\,,\,1)} \leq M \; \varepsilon^{-(1-d)\,j} \, , \quad \underline{\text{para todo } j = 1, 2, ..} \tag{11a'}$$

$$0 < d \leq 1/2 \quad , \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad . \tag{11b}$$

<u>Entonces la sucesión h_j verifica la condición (10), con ε^d en vez de ε, y por tanto se aplican a esta sucesión las propiedades a), b) y c) del teorema 1a</u>.

En otros términos, el Corolario 1a vale si reemplazamos en las hipótesis j por $-j$. La demostración del Corolario 1b es del todo análoga a la del Corolario 1a. y no vamos a repetirla.

<u>**COROLARIO 2a**</u>. <u>Sea $k(x)$ un núcleo tal que</u> : 1) <u>$k(x) \in L^1(E^n)$</u> ; 2) <u>$k(x) \in Lip\,(1\,,\,1)$</u>. <u>Entonces indicando con n la dimensión del espacio y poniendo para cada $j = 1, 2, ..$</u> ,

$$k_j(x) = \varepsilon^{(n-d)\,j} \; k(\varepsilon^{j}\,x) \quad , \tag{13}$$

$$h_j(x) = \varepsilon^{-(n-d)\,j} \; k(\varepsilon^{-j}\,x) \quad , \tag{13a}$$

$$0 < d \leq 1/2 \quad , \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad , \tag{11b}$$

los núcleos k_j y h_j verifican las hipótesis de los Corolarios 1a y 1b respectivamente y por tanto las propiedades a), b) y c) del teorema 1a (con $M = \left[\sup \|k\|_1 \; ; \; \|k\|_{(1,1)} \right]$) .

Observación 6a . El Corolario 2 corresponde al caso $d = 0$ y también aquí en el caso $d = 0$ se imponen dos condiciones suplementarias , $\int k(x)\, dx = 0$ y $k(x) = 0$ para $|x| > 1$, por la misma razón explicada en la observación 6.

La demostración del Corolario 2a es del todo análoga a la del Corolario 2 y no vamos a repetirla.

Diremos que los núcleos k_j , h_j , definidos por (13) y (13a) son generados por el núcleo fundamental $k(x)$ por dilatación de orden $(n - d)$ de la variable . Así pues, si $k(x)$ verifica (13) , (13a) y (11b) , entonces poniendo

$$S_N f = S_{N,d} f = f * \left[k + \sum_1^{\infty} k_j + \sum_1^{\infty} h_i \right] , \qquad (14)$$

se tiene para toda $f \in L^p$, las funciones $S_N f$ convergen en media-(p^*) hacia una $Sf \in L^{p^*}$ y Sf es de tipo (p , p^*) , para $p = 2n/(n + d)$ y $0 < d \leq 1/2$.

8 . EXTENSION A $d < n$. OPERADORES POTENCIALES

Mientras que en el teorema 1a, d puede tomar todo valor $< n$, en el teorema 2a y los Corolarios 1a. y 2a tenemos la limitación $d < 1/2$. Veamos que estos últimos teoremas pueden extenderse a todos los valores $d < n$ imponiendo algunas hipótesis suplementarias .

Hemos definido la clase Lip$(1 , d)$ tan solo para $d \leq 1$; podemos extender la definición a valores $d > 1$ del modo siguiente . Supongamos antes que $n = 1$ de modo que $g(x)$ está definida para x de E^1 , es decir es función de una variable real . Si $d > 1$ sea m el entero más próximo a d , $m < d \leq m+1$, y sea $g^{(m)}(x)$ la m-ima derivada de $g(x)$.

Diremos que $g(x) \in \mathrm{Lip}(1\,,\,d)$ si existe la derivada $g^{(m)}(x)$, si $g^{m}(x) \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d-m) = \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d')$ en el sentido ordinario (como $d' = d-m \leqslant 1$ sabemos que quiere decir $\mathrm{Lip}\,(1\,,\,d')$), es decir si

$$\int_{E^1} \left| g^{(m)}(x+h) - g^{(m)}(x) \right| dx \leqslant M\,|h|^{d-m} \tag{15}$$

para toda $h \in E^1$, y si $g^{(i)}(x) \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,1)$ para $i \leq m$ en el caso $m \geqslant 1$. La mínima constante M que verifica (15) se designará com $\|g\|_{(1\,,\,d)}$
Para $d \leq 1$ es $m = 0$, $g^{(m)} = g$, y obtenemos la definición anterior.

Si $g(x)$ está definida en E^n, se define $g(x) \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d)$ si (15) se verifica para cada derivada parcial de orden m de $g(x)$.

Con esta definición, el lema de Lebesgue, es decir la desigualdad (8), subsiste aún para $d > 1$. En efecto, consideremos para simplificar el caso de E^1, y sea $d > 1$, $m < d \leq m+1$. Si $\hat{g}(u) = \mathcal{F} g$, como $g^{(i)} \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,1)$, luego $g^{(i)}$ es absolutamente contínua, resulta que $\mathcal{F}\, g^{(m)} = \hat{g}^{(m)}(u) = u^m\,\hat{g}(u)$. Como $g^{(m)} \in \mathrm{Lip}\,(1\,,\,d-m)$, resulta del lema de Lebesgue para $d \leqslant 1$ que $|u^m \cdot \hat{g}(u)| \leqslant M\,|u|^{-(d-m)}$, de donde sigue

$|\hat{g}(u)| \leqslant M\,|u|^{-d}$; 1,q,d,d.

Como en la demostración del teorema 2a se usó tan solo el lema de Lebesgue y el lema numérico, resulta inmediatamente de lo dicho que el teorema 2a vale para todo d tal que $0 \leq d < n$, siempre que $\mathrm{Lip}\,(1\,,\,d)$ se entienda en el sentido que acabamos de definir.

Antes de pasar a la extensión del Corolario 1a a valores $d < n$, hagamos la siguiente

Observación 7. Sean $k_j(x)$, $k_j'(x)$ dos sucesiones de núcleos integrables y

$$S_N f = f * \sum_1^N k_j \quad , \quad S_N' f = f * \sum_1^N k_j'$$

Si para todo x y todo j se verifica $|k_j'(x)| \leq C\,k_j(x)$, $k_j \geqq 0$ y si para los operadores $S_N f$ valen las tres propiedades a), b), c) del teorema la (menos la parte que dice que Tf es un operador multiplicador) , entonces las mismas propiedades valen para los $S_N' f$. En efecto, basta considerar el caso de una $f \geq 0$ no-negativa . Para una tal $f(x)$ tendremos , para todo j y todo x ,

$$|f * k_j'(x)| = \left|\int_{E^n} f(x-t)\, k_j'(t)\, dt\right| \leq C \int_{E^n} f(x-t)\, k_j(t)\, dt =$$

$$= C\, f * K_j(x) \quad .$$

Luego para todo x tendremos

$$\left|S_N' f(x) - S_{N_1}' f(x)\right| = \left|\sum_N^{N_1} f * k_j'(x)\right| \leq \left|\sum_N^{N_1} f * k_j(x)\right| =$$

$$= \left|S_{N_1} f(x) - S_N f(x)\right| \quad ,$$

y por tan

$$\left\|S_N' f - S'_{N_1} f\right\|_{p^*} \leq C \left\|S_N f - S_{N_1} f\right\|_{p^*} \quad ;$$

análogamente

$$\left\|S_N' f\right\|_{p^*} \leq C \left\|S_N f\right\|_{p^*}$$

De $\left\|S_N f - S_{N_1} f\right\|_{p^*} \longrightarrow 0$ y $\left\|S_N f\right\|_{p^*} \leq M \left\|f\right\|_p$ resulta entonces también $\left\|S_N' f - S_{N_1}' f\right\|_{p^*} \longrightarrow 0$ y $\left\|S_N' f\right\|_{p^*} \leq M \left\|f\right\|_p$, l,q,d,d.

COROLARIO 1c . Sea $k_j(x) \in L^1(E^n)$ una sucesión de núcleos y sea $0 < d < n$. Si existe un d' , $0 < d' \leq 1/2$ tal que poniendo $k_j^*(x) = |k_j(x)|^{(n-d')/(n-d)}$ se verifican las condiciones :

$$\left\|k_j^*\right\|_1 , \leq M\, \varepsilon^{-jd'} \quad , \quad j = 1, 2, .. \quad , \quad 0 \leq \varepsilon < 1 \quad , \tag{16}$$

$$\left\|\ {}_j^*\right\|_{(1\,,\,1)} \leq M\, \varepsilon^{(1-d')\, j} \quad j = 1, 2, .. \quad , \tag{16a}$$

$$k_i(x)\, k_j(x) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad , \tag{17}$$

entonces los operadores $S_N f = f * \sum_1^N k_j$ verifican las propiedades

a) , b) y c) del teorema la. (menos la parte que dice que Tf es un operador multiplicador) . Lo mismo vale si en (16) y (16a) se sustituye j por $-j$.

Observación 8. Si $d \leq 1/2$ y si los $k_j(x)$ son no negativos entonces el Corolario 1c se reduce al Corolario 1a (o al Corolario 1b) , pues entonces podemos tomar $d' = d$ y será $k_j{}^* = k_j(x)$.

Demostración Para todo z , real o complejo , definimos el operador

$$S_z^* f = S_{N,z}^* f(x) = f * \left[\sum_1^N |k_j{}^*(x)|^z\right] . \tag{18}$$

Vamos a probar que para todo número real a se verifica

$$\|S_{ia}^* f\|_\infty \leq \|f\|_1 \tag{19}$$

En efecto, si $z = ia$ = imaginario puro , tenemos para todo j y todo x , $\left||k_j{}^*(x)|^{ia}\right| = 1$, y en virtud de (17) para cada x fijo hay solo un sumando en la suma $\sum |k_j{}^*(x)|^z$ que no es nulo . Luego $\left|\sum_1^N |k_j{}^*(x)|^{ia}\right| \leq 1$ para todo x es decir $\left\|\sum_1^N |k_j{}^*(x)|^{ia}\right\|_\infty \leq 1$.

De la última desigualdad y de la desigualdad de Young (ver (6) , pág. 6) resulta entonces

$$\|S_{ia}^* f\|_\infty \leq \|f\|_1 \quad \left\|\sum |k_j{}^*|^{ia}\right\|_\infty = \|f\|_1 \cdot 1 ,$$

lo cual prueba (19) .

Vamos a probar ahora que para todo a real se verifica

$$\|S_{1+ia}^* f\|_{s^*} \leq C_s M \|f\|_s \qquad \text{para} \quad s = 2n/(n + d') , \tag{20}$$

donde $C_s M$ no depende de $f(x)$ ni de N . En efecto, para todo tal a tenemos

$$\left||k_j{}^*(x)|^{1+ai}\right| \leq |k_j{}^*(x)| , \tag{20a}$$

y los núcleos $|k_j{}^*|$ verifican las hipótesis del Corolario 1a, con $d = d' \leq 1/2$. Luego por dicho Corolario 1a , y tomando en cuenta (20a) y la Observación 7, resulta que vale (20) .

Ahora $S_z^* = S_{N,z}^* f$ es un operador anlítico de la variable compleja z, evidentemente acotado para $0 \leqslant R(z) \leqslant 1$ (pues si f, g son funciones elementales fijas, se tiene $\left||k_j^*(x)|^z\right| \leqslant \sup\left[1, |k_j^*(x)|\right]$, luego $\sum|k_j^*(x)|^z = k_z' + k_z''$ donde $|k_z'| \leqslant 1$ y $|k_z''| \leqslant \sum k_j^*$ por tanto $|S_z^* f(x)| \leqslant f * k_z' + f * k_z''$, $|(S_z^* f, g)| \leqslant$ $\leqslant |(f * k_z', g)| + |(f * k_z'', g)|$ y por tanto $|(S_z^* f, g)|$ es acotado en z).

La desigualdad (19) dice que $S_z^* f$ es de tipo $(1, \infty) = (p_1, r_1)$ para $z = 0 + ia$, con norma $\leqslant 1$; la (20) dice que es de tipo $(s, s^*) = (p_2, r_2)$ para $z = 1 + ia$, con $p_2 = s = 2n/(n+d)$, $r_2 = s^* = 2n/(n-d)$, y norma $\leqslant C_s M$. Por el teorema de Convexidad (ver pág. 19) resulta que para todo $0 < t < 1$ es $S_t^* f$ de tipo (p, r) con

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2} \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{r_1} + \frac{t}{r_2}$$

y norma $\leqslant 1^{1-t} (C_s M)^t$. Hagamos $t = (n-d)/(n-d')$, entonces obtendremos:

$$|k_j^*(x)|^t = |k_j(x)| \quad , \quad S_t^* f = f * \sum_1^N |k_j(x)| \; ,$$

$$|S_N f(x)| \leqslant S_t^* f(x) \quad \text{para todo } x \; , \tag{20b}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{1} + \frac{n+d'}{2n} t = \frac{n+d}{2n} \quad , \quad \frac{1}{r} = \frac{1-t}{\infty} + \frac{n-d'}{2n} t = \frac{n-d}{2n} .$$

luego $r = p^*$ y $S_t^* f$ es de tipo (p, p^*) con $p = 2n/(n+d)$.

Hemos probado pues que $S_N' f = f * \sum_1^N |k_j| = S_t^* f$ es de tipo (p, p^*) con norma uniformemente acotada:

$$\|S_N' f\|_{p^*} \leqslant M' \|f\|_p$$

En virtud de (20b) esto prueba en particular la parte a) de la tésis. Para probar la parte b), sea $f \in L^p$, $f(x) \geqslant 0$ entonces $S_N' f(x) =$

$= \quad \sum_1^N f * |k_j(x)|$ converge monótonamente para cada x (pues es una suma a términos ≥ 0) hacia un límite finito o infinito $S' f(x)$, luego

$$|S_N' f(x)|^{p^*} \nearrow |S' f(x)|^{p^*}$$

y por el teorema de Beppo Levi, de integración de sucesiones monótonas, se tiene

$$\|S' f\|_{p^*} = \|\lim S_N' f\|_{p^*} \leq \lim M' \|f\|_p = M' \|f\|_p .$$

Luego $|S' f|^{p^*} \in L^1$ y la sucesión

$$|S' f(x) - S_n' f(x)|^{p^*} \longrightarrow 0$$

es dominada por $2^{p^*} |S'f|^{p^*} \in L^1$. Luego se puede integrar término a término la última sucesión, resultando que $\|S_N' f - S' f\|_{p^*} \longrightarrow 0$, y con más razón $\|S f - S_N f\|_{p^*} \longrightarrow 0$, pues $|Sf - S_N f| = |\sum_N^\infty f * k_j| \leq$ $\leq \sum_N^\infty f * |k_j| = S' f - S_N' f$. Esto prueba la parte b), y la c) es consecuencia fácil de a) y b), l,q,d,d.

<u>COROLARIO 2b</u>. <u>Sea $0 < d < n$, y sea $k(x)$ un núcleo tal que para cierto d', $0 < d' \leq 1/2$ se verifica</u>:

1) <u>$|k(x)|^{(n-d')/(n-d)} = k^*(x) \in L^1(E^n)$</u>; 2) <u>$k^*(x) \in Lip(1, 1)$</u>;

3) <u>$k(x) = 0$ fuera del anillo $\varepsilon < |x| \leq 1$</u>. <u>Entonces indicando con n la dimensión del espacio, y poniendo</u>

$$k_j(x) = \varepsilon^{(n-d)j} k(\varepsilon^j x), \quad j = 1, 2, .. \quad , \quad 0 \leq \varepsilon < 1,$$

$$h_j(x) = \varepsilon^{-(n-d)j} k(\varepsilon^{-j} x), \quad j = 1, 2, ..$$

<u>los núcleos k_j y h_j las hipótesis del Corolario 1c (para $+j$, $-j$ respectivamente)</u>, de modo que los operadores $S_N f$ definidos por (14) verifican las propiedades a), b) y c) del teorema 1 a (menos la que afirma que el operador límite Tf es un operador multiplicador

La verificación es del todo análoga a la del Corolario 2 y no vamos a repetirla, solamente observemos que la condición (17) resulta de la 3), pues como $k(x)$ es nulo fuera de $\mathcal{E} < |x| \leq 1$, $k_j(x)$ es nulo fuera de $\mathcal{E}^j < |x| \leq 1$, luego si $i \neq j$ el núcleo k_i será nulo donde $k_j(x)$ no es nulo ; por tanto $k_i(x)\, k_j(x) = 0$ para $i \neq j$.

Observación 8 . En la demostración del teorema la tan solo se usó el hecho de que $F_N = S_N f$ verifica $F_N = \mathcal{F}^*(\hat{F}_N)$ donde $|\hat{F}_N(u)| \leq M|u|^{-d}$ para todo u. Por tanto la misma demostración prueba el siguiente

TEOREMA 1b . Sea $Tf = F$ un operador tal que para toda $f \in L^p$, se tiene $F = Tf = \mathcal{F}^*(\hat{f}(u)\, h(u))$ con $|h(u)| \leq M\, |u|^{-d}$, M = constante fija, siendo $0 < d < n$, $p = en/(n+d)$, n = dimensión de E^n. Entonces Tf es de tipo (p, p^*) y se tiene $\|Tf\|_{p^*} \leq M\, C_p \|f\|_p$, donde la constante C_p se mantiene acotada si p se mantiene en un intervalo $(1+\mathcal{E}, 2]$ $\mathcal{E} > 0$, y tiende a infinito si p tiende a uno (ver observación que sigue al enunciado del teorema de Hardy - Littlewood - Paley) .

Para cada d, $0 < d \leq n$, n = dimensión del espacio, consideremos el operador

$$\left[H_d\, f\right](x) = F(x) = \int_{E^n} \frac{f(x-t)}{|t|^{n-d}}\, dt = f * \frac{1}{|t|^{n-d}} \tag{22}$$

donde $|t|$ es la distancia al origen del punto t (es decir $|t|^2 = t_1^2 + \ldots t_n^2$)

$H_d f$ se llamará operador potencial de orden d, o también integral fraccionaria de orden d. Veremos enseguida que, contrariamente a las transformadas de Hilbert la integral (22) se trata como una integral de Lebesgue y no como una integral singular . Sin embargo también acá (para $d > 0$) se presenta el problema de para que funciones $f(x)$ existe la integral (22) y cual es el tipo del operador H_d.

Hardy y Littlewood (para el caso $n = 1$) , Sobolieff y Thorin (para $n > 1$) , han probado que el operador $H_d f$ es de tipo (p, r) para todo p, r tales que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = \frac{d}{n} \qquad\qquad \frac{d}{n} < p < 1 \quad , \tag{23}$$

es decir $H_d f$ es de tipo P para todo P interior al segmento paralelo a la diagonal del cuadrado de los tipos, a distancia d/n. En particular, la intersección de este segmento con la segunda diagonal es el punto $(1/p, 1/r)$ donde $r = p^*$, $p = 2n/(n+d)$ (cfr. Observación 1). Es decir, en particular, $H_d f$ es de tipo (p, p^*) para $p = 2n/(n+d)$.

Como aplicación de los teoremas generales de esta sección, probaremos que $H_d f$ es de tipo (p, p^*) para $p = 2n/(n+d)$. Para ello pongamos

$$k_o(t) = k(t) = \begin{cases} 1/|t|^{n-d} & \text{si} \quad 1 < |t| \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás} \quad t , \end{cases} \tag{24}$$

$$k_j(t) = \begin{cases} 1/|t|^{n-d} & \text{si} \quad 2^j < |t| \leq 2^{j+1} \\ 0 & \text{en los demás} \quad t , \quad j = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{24a}$$

$$h_j(t) = \begin{cases} 1/|t|^{n-d} & \text{si} \quad 2^{-j} < |t| \leq 2^{-j+1} \\ 0 & \text{en los demás} \quad t , \end{cases} \tag{24b}$$

de modo que

$$\sum_1^\infty (k_j(t) + h_j(t)) + k_o(t) = 1/|t|^{n-d} . \tag{24c}$$

Como en el caso de la transformada de Hilbert se comprueba facilmente que se verifica:

$$k_j(t) = (1/2)^{(n-d)j} \quad k((1/2)^j t) , \quad j = 1, 2, .. \tag{25}$$

$$h_j(t) = 2^{(n-d)j} \quad k(2^j t) , \quad j = 1, 2, .. \tag{25a}$$

y que el núcleo $k(t) = k_o(t)$ pertenece a $L^1(E^n)$ y a Lip $(1, 1)$, <u>es decir verifica la hipótesis 1) y 2) del Corolario 2a</u>, además $k(t)$ se anula fuera del anillo $1 < |t| \leq 2$.

Más aún, poniendo $d' = 1/2$, $k^*(t) = |k(t)|^{(n-1/2)/(n-d)}$,

se tiene

$$k^*(t) = \begin{cases} 1/|t|^{n-1/2} & \text{si} \quad 1 < |t| \leq 2 \\ 0 & \text{en los demás} \quad t \quad , \end{cases} \tag{26}$$

de modo que $k^*(t)$ verifica las condiciones 1), 2) y 3) del Corolario 2b. Teniendo en cuenta estas observaciones vamos a deducir el siguiente

TEOREMA 3 (de Hardy-Littlewood, Sobolieff, Thorin). Sea $0 < d \leq n$ $p = 2n/(n+d)$. Entonces: 1) Para toda $f \in L^p$, las funciones

$$F_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}} f(x-t)/|t|^{n-d} \, dt \tag{22a}$$

convergen en media-p^*, para $\varepsilon \longrightarrow 0$, hacia una función límite $F(x)$ que se designará con $H_d f$. 2) El operador $H_d f$ así definido es de tipo (p, p'), siendo $\|H_d f\|_{p^*} \leq M_p \|f\|_p$, siendo $M_p = M_d$ acotada para los p de $(1+\varepsilon, 2-\varepsilon)$, es decir para los d tales que $\varepsilon < d < n - \varepsilon$. 3) Para toda $f \in L^p$, la integral (22) existe, como integral de Lebesgue, para casi todo x, es decir las funciones $F_\varepsilon(x)$ convergen también puntualmente hacia $F(x)$ 4) Si $0 < d < 1/2$, entonces para casi todo $u \in E^n$ vale

$$\lim_{A \longrightarrow \infty} \int_{|t| < A} \frac{1}{|t|^{n-d}} e^{-i(t,u)} \, dt = \frac{C_d}{|u|^d} , \tag{27}$$

donde C_d es una constante y se tiene, para toda $f \in L^p$, que

$$Tf = \mathcal{F}^* \left(\hat{f}(u) \cdot C_d/|u|^d \right) . \tag{27a}$$

La función $C_d/|u|^d$ se toma como definición de la transformada de Fourier de $1/|t|^{n-d}$. 5) Si $1/2 \leq d < n$, no se puede afirmar que valga (27), pero todavía vale (27a). Es decir en todo caso, para todo $0 < d < n$, el operador $H_d f$ es un operador multiplicador, con multiplicador $C_d/|u|^d$.

Demostración. a) Si $S_N f$ está definido por (14) y los núcleos k_j,

h_j por (24a), (24b), tendremos que

$$S_N f = \int_{2^{-N} < |t| < 2^N} f(x-t)\, dt / |t|^{n-d} .$$

Como el núcleo $k_o = k$ verifica la hipótesis del Corolario 2b, tendremos por dicho Corolario que $S_N f$ converge en media-p* hacia una función límite $F = H_d f$ y que el operador $H_d f$ así obtenido es de tipo (p, p*). Por tanto las funciones $F_\mathcal{E}(x)$ convergen en media-p* a $F(x)$ cuando $\mathcal{E}$ recorre los valores 2^{-N}. Luego las partes 1) y 2) de la tésis quedarán probadas si mostramos que $F_\mathcal{E}$ tiende en media a $F(x)$ cuando $\mathcal{E}$ tiende a cero recorriendo todos los valores positivos. Para ello basta mostrar que si N es tal que $2^{-N-1} < \mathcal{E} \leq 2^{-N}$ entonces $F_\mathcal{E} - F_{2^{-N}} = F_\mathcal{E} - S_N f$ tiende en media a cero cuando N tiende a infinito. Pero ésto último, resulta enseguida observando que

$$\left| S_N f(x) - F_\mathcal{E}(x) \right| \leqslant \int_{\mathcal{E} < |t| < 2^{-N}} \left| f(x-t)\, dt / |t|^{n-d} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{2^{-N-1} < |t| < 2^{-N}} \left| f(x-t) \right| dt / |t|^{n-d} = \left[S_N |f| \right](x) - \left[S_{N+1} |f| \right](x)$$

luego $\left\| S_N f - F_\mathcal{E} \right\|_p \leqslant \left\| S_N(|f|) - S_{N+1}(|f|) \right\|_{p^*} \longrightarrow 0$,

pues $|f| \in L^p$, luego $S_N(|f|)$ tiende en media-p* hacia $H_d(|f|)$.

Con esto quedan probadas las partes 1) y 2) de la tésis.

b) Sea $f \in L^p$. Para cada x las funciones $\left[S_N(|f|) \right](x)$ convergen puntualmente hacia la integral, finita o infinita,

$$J(x) = \int_{E^n} \left| f(x-t) \right| dt / |t|^{n-d} .$$

Por otra parte estas funciones $S_N(|f|)$ convergen en media hacia $H_d(|f|) = G(x)$ que pertenece a L^{p^*}. Luego $G(x)$ es finita en casi todo x, pues $|G(x)|^{p^*}$ es integrable. Una subsucesión de $S_N(|f|)$ converge puntualmente hacia $G(x)$ en casi todo x (ver pág. 2). Luego $J(x) = G(x)$ en casi todo x, y por la integral $J(x)$ es finita en casi todo x. Esto muestra que la integral

$$\int_{E^n} f(x-t)\, dt / |t|^{n-d} = \lim F_\varepsilon (x)$$

es convergente absolutamente en casi todo x. Esto prueba la parte 3) de la tésis.

c) Sea $0 < d < 1/2$. Pongamos

$$H_N(t) = k(t) + \sum_1^N k_j(t) + \sum_1^N h_j(t) = \begin{cases} 1/|t|^{n-d} & \text{si } 2^{-N} < |t| \leq 2^N \\ 0 & \text{en los demás } t, \end{cases}$$

de modo que $S_N f = f * H_N$.

Por el Corolario 2a, $\hat{H}_N(u)$ converge hacia un límite $h(u)$ en casi todo $u \in E^n$ y se tiene que

$$H_d f = F = \mathcal{F}^* \left(\hat{f}(u)\, h(u) \right).$$

En particular el límite (27) existe para casi todo u, y es igual a $h(u)$, cuando A recorre los valores $A = 2^N$. Luego la parte 4) de la tésis quedará probada si mostramos que el límite (27) existe para A tendiendo al infinito, para todo A, y que $h(u) = c_d |u|^{-d}$.

Para ver que el límite en (27) existe para "todo A", basta probar que si $2^N < A \leq 2^{N+1}$ entonces la expresión siguiente tiende a cero para casi todo u:

$$\left| \hat{H}_N(u) - \int_{|t| < A} \frac{1}{|t|^{n-d}} e^{-i(t,u)}\, dt \right| = \int_{|t| < 2^{-N}} \frac{1}{|t|^{n-d}} e^{-i(t,u)}\, dt +$$

$$+ \left| \int_{2^N < |t| < A} \frac{1}{t^{n-d}} e^{-i(t,u)}\, dt \right| = R_N(u) + \hat{k}_A(u),$$

donde $k_A(t) = 1/|t|^{n-d}$ si $2^N < |t| < A$, y cero en los demás t. Como $1/|t|^{n-d}$ es integrable para $|t| < 1$ es evidente que $R_N(u) \longrightarrow 0$.
Como más arriba se comprueba facilmente que $k_A(t) \in \mathrm{Lip}(1, 1)$ y que $\|k_A\|_{(1,1)} \leq 2^{-N(n-d)} \longrightarrow 0$; luego por el lema de Lebesgue $\hat{k}_A(u) \leq$

$\leq 2^{-N(n-d)} \; |u|^{-1} \longrightarrow 0$ en todo $u \neq 0$.

Así pues la expresión (27) tiende a un límite $h(u)$ cuando A tiende a infinito, para todo $u \neq 0$; veamos que $h(u) = C_d |u|^{-d}$. Para ello observemos que si en (27) hacemos la sustitución $t = c\,s$, $A = c\,B$, se obtiene una expresión análoga con B en vez de A , con $c\,u$ en vez de u , y con un factor c^d . Esto significa que $h(u) = c^d\, h(c\,u)$ luego $h(u) = |u|^{-d}\, h(u/|u|)$. Es decir, como $u/|u|$ es un punto de la superficie de la esfera unitaria de E^n , basta conocer los valores de $h(u)$ sobre esta esfera . Pero $h(u)$ tiene sobre dicha esfera un valor constante C_d , pues para cada N la función $H_N(t)$ solo depende del módulo $|t|$ de t , luego $\hat{H}_N(u)$ solo depende de $|u|$, y en el límite, $h(u) = \lim \hat{H}_N(u)$ también depende solo de $|u|$, es decir es constante sobre cada esfera $|u| = r$. Así pues resulta que $h(u) = C_d\, |u|^{-d}$ donde C_d es cierta constante.

Para calcular la constante C_d , aplicamos la fórmula de Parseval a las funciones $H_N(t)$ y $e^{-\pi|t|^2}$:

$$\int_{E^n} H_N(t)\, e^{-\pi|t|^2}\, dt = \int_{E^n} \hat{H}_N(u)\, e^{-\pi|u|^2}\, du ,$$

pues $\exp(-\pi|u|^2) = \mathcal{F}(\exp(-\pi|t|^2))$. Recordando que para $0 < d < 1/2$ es $|\hat{H}_N(u)| \leq M|u|^{-d}$, podemos hacer $N \longrightarrow \infty$ y se obtiene (puesto que $H_N(t) \longrightarrow$ $\longrightarrow |t|^{-(n-d)}$, $\hat{H}_N(u) \longrightarrow C_d\, |u|^{-d}$) ,

$$\int_{E^n} \exp(-\pi|t|^2)\, |t|^{-(n-d)}\, dt = \int_{E^n} \exp(-\pi|u|^2)\, C_d\, |u|^{-d}\, du ,$$

de donde resulta que

$$C_d = \pi^{n/2}\, \pi^{-d}\, \Gamma(d/2) \,/\, \Gamma((n-d)/2) . \qquad (28)$$

d) Consideremos ahora el caso $1/2 \leq d < n$. La expresión (28) es la función analítica en d luego define la constante C_d aún para $d > 1/2$. Veamos que si C_d está así definido, se tiene $H_d f = \mathcal{F}^* (\hat{f}(u) . C_d |u|^{-d})$, si $f \in L^p$. Para ello consideremos el operador

$$T_d f = \mathcal{F}^* (\hat{f}(u) \ C_d |u|^{-d}) \tag{29}$$

Por teorema 1b este operador $T_d f$ está bién definido para todo $0 < d < n$ y es de tipo (p , p^*) , $p = 2n/(n + d)$. Debemos pues probar que $T_d f (x) = H_d f (x)$ para toda $f \in L^p$ y casi todo x ¿ Para ello basta probar que para todo par $f , g \in L_o$ es

$$(T_d f , g) = (H_d f , g) \tag{30}$$

En efecto (30) dará $(T_d f - H_d f , g) = 0$, y como $T_d f - H_d f \in L^{p^*}$, podemos tomar una sucesión g_i tal que sea (cfr. lema 1a , pág. 17)

$$\lim (T_d f - H_d f , g_i) = \| T_d f - H_d f \|_{p^*} = 0 ,$$

luego $T_d f(x) - H_d f(x) = 0$ en casi todo x .

Para probar (30) , pongamos para todo z complejo , $0 < |z| < n$,

$$H_z f(x) = \int_{E^n} f(x - t) \, dt / |t|^{n-z} \tag{31}$$

$$T_z f = \mathcal{F}^* (\hat{f}(u) \ c_z |u|^{-z}) = \int_{E^n} \hat{f}(u) \ c_z |u|^{-z} e^{i(u,x)} du \tag{31a}$$

como $\left| H_z f(x) \right| \leq \int_{E^n} |f(x - t)| \, dt / |t|^{n-d}$, $d = R_z$,

el operador $H_z f$ está bién definido y de tipo (p , p^*) , $p = 2n/(n + d)$, $d = R_z$.

Análogamente, por el teorema 1b , $T_z f$ será de tipo (p , p^*) . Más aún poniendo

$$H_{z,N} f(x) = \int_{2^{-N} < |t| < 2^N} f(x - t) |t|^{-n+z} dt$$

$$T_{z,N} f(x) = \int_{2^{-N} < |t| < 2^N} \hat{f}(u) \ c_z |u|^{-z} e^{i(u,x)} du$$

tendremos que $\|H_{z,N} f\|_{p^*} \leq M_z \|f\|_p$, $\|T_{z,N} f\|_{p^*} \leq M_z \|f\|_p$, y M_z se mantiene acotado si d está en $(\varepsilon, n-\varepsilon)$, $d = R_z$.

Evidentemente las funciones

$$F_N(z) = \int_{E^n} H_{z,N} f(x)\, g(x)\, dx = (H_{z,N} f, g) .$$

$$G_N(z) = \int_{E^n} T_{z,N} f(x)\, g(x)\, dx = (T_{z,N} f, g)$$

son analíticas en z (supuestas $f, g \in L_o$) , y por la desigualdad de Hölder

$$(H_{z,N} f, g) \leq \|H_{z,N} f\|_{p^*} \|g\|_p \leq M_z \|f\|_p \|g\|_p ,$$

y análogamente para $G_N(z)$. Luego las funciones $F_N(z)$, $G_N(z)$ se mantienen acotadas si $\varepsilon < R_z < n-\varepsilon$, y para $N \longrightarrow \infty$ ellas tienden a $(H_z f, g)$ y $(T_z f, g)$, respectivamente .

Luego las funciones límites $F(z) = (H_z f, g)$, $G(z) = (T_z f, g)$, son analíticas en z . Pero para $z = d$, con $0 < d < 1/2$ estas funciones coinciden en virtud de la parte 4) de la tésis , luego $F(z) = G(t)$ para todo z , es decir $(H_d f, g) = (T_d f, g)$ para todo d , $0 < d < n$; lo que prueba el teorema. <u>Observación 9</u> . En la demostración de las partes 1) , 2) del teorema que precede, no hemos considerado el caso límite $d = n$. Pero en este caso se tiene

$$H_n f(x) = \int_{E^n} f(x-t)\, |t|^o\, dt = \int_{E^n} f(x)\, dx ,$$

luego $|H_n f(x)| \leq \|f\|_1$ para todo x , y esto prueba que $\|H_n f\|_\infty \leq \|f\|_1$ o sea que $H_n f$ es de tipo $(1, \infty)$, es decir de tipo (p, p^*) con $p = 1 = 2n/(n+n) = 2n/(n+d)$, si $d = n$.

<u>Observación 10</u> . Conviene modificar la definición del operador $H_d f$ poniendo

$$H_d f(x) = (c_d)^{-1} \int_{E^n} f(x-t)\, |t|^{-n+d}\, dt \tag{32}$$

tendremos entonces la relación más simple

$$H_d f = \mathcal{F}^* \left(\hat{f}(u) \, |u|^{-d} \right) \tag{32a}$$

es decir, $H_d f$ es ahora un operador multiplicador, siendo el multiplicador $= |u|^{-d}$. En particular de (32a) se deduce facilmente que si $0 < d + d' < n$, entonces $|u|^{-(d+d')} = |u|^{-d} \, |u|^{-d'}$, luego

$$H_{d+d'} f = H_d f * |t|^{-n+d'} = H_{d'} (H_d f) \, . \tag{33}$$

La fórmula (33), debida a M. Riesz, es fundamental en la teoría del potencial; su deducción rigurosa se hace usando el hecho que $H_d f = \lim S_N f$, por paso al límite que dejamos a cargo del lector como ejercicio fácil.

<u>Observación 11</u>. La parte 3) de la tésis del último teorema que afirma la convergencia puntual de la intégral (22), es consecuencia inmediata de la parte 2) del mismo teorema. Es decir en este caso, $d > 0$, la convergencia puntual no presenta dificultades, lo que se debe al hecho de que (22) es una integral de Lebesgue. En cambio en caso de los operadores de Hilbert, dados por integrales singulares, el problema de la convergencia puntual es mucho más dificil y será tratado más adelante.

9. EXTENCION A TIPOS $(L^p(E^n), L^{p^*}(E^m))$.

En las dos secciones anteriores hemos considerado operadores Tf de la forma

$$Tf(x) = \int_{E^n} f(x-t) \, K(t) \, dt \quad , \tag{34}$$

donde $f(t)$ y $K(t)$ están definidas en E^n, y hemos mostrado que bajo ciertas condiciones la función $F(x) = Tf(x)$ pertenece a L^{p^*}, es decir es finita la integral

$$\|Tf\|_{p^*} = \|F\|_{p^*} = \left\{ \int_{E^n} |F(x)|^{p^*} \, dx \right\}^{1/p^*} \quad , \tag{35}$$

y $\|Tf\|_{p^*} \leq M \, \|f\|_p$.

Ahora, si $E^m \subset E^n$ es un subespacio de dimensión $m < n$, podemos en particular considerar la norma respecto de este espacio, es decir la integral

$$\|F\|_{p^*}^{(m)} = \left\{ \int_{E^m} |F(y)|^{p^*} \, dy \right\}^{1/p^*} , \tag{35a}$$

donde dy indica la medida de Lebesgue m-dimensional. El hecho que la integral (35) sea finita no nos permite asegurar que lo sea la integral (35a), y menos aún podemos afirmar que $\|Tf\|_{p^*}^{(m)} \leq M \|f\|_p$.

<u>Definición</u> : Si para toda $f \in L^p$ es finita la integral (35a) y si existe una constante M tal que $\|Tf\|_{p^*}^{(m)} \leq M \|f\|_p$, para toda f, entonces diremos que <u>el operador Tf es de tipo $(L^p(E^n) , L^{p^*}(E^m))$</u>.

Análogamente sea $E^m \subset E^n$, $K(x)$ definida en todo E^n y $f(t)$ definida en E^m. Podemos considerar para todo x de E^n la integral

$$F(x) = Tf(x) = \int_{E^m} f(t) \, K(x - t) \, dt , \tag{34a}$$

es decir $F(x)$ está definida en E^n, pues $x - t$ es un punto de E^n y $K(x-t)$ está definida en este punto.

Diremos que el operador Tf así definido es de tipo $(L^p(E^m) , L^{p^*}(E^n))$, $m < n$, si $\|Tf\|_{p^*}^{(n)} \leq M \|f\|_p^{(m)}$, donde

$$\|f\|_p^{(m)} = \left\{ \int_{E^m} |f(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} . \tag{35b}$$

Si $E^m \subset E^n$ podemos escribir $E^n = E^m \times E^{n-m}$, $E^m = \{t_1\}$, $E^{n-m} = \{t_2\}$, $E^n = \{(t_1 , t_2)\}$, luego si $K(t)$ está definida en E^n escribiremos $K(t) = K(t_1 , t_2)$. Usaremos entonces las notaciones siguientes (aquí $u \in E^n$, $u = (u_1 , u_2)$) :

$$\hat{K}(u) = \hat{K}(u_1 , u_2) = [\mathcal{F} K] (u_1 , u_2) = \int_{E^n} K(t) \, e^{-i(t,u)} \, dt =$$

$$= \int_{E^m} \int_{E^{n-m}} K(t_1, t_2)\, e^{-i(t_1, u_1)}\, e^{-i(t_2, u_2)}\, dt_1\, dt_2 , \qquad (36)$$

$$\hat{K}^1(u_1, t_2) = [\mathcal{F}_1 K](u_1, t_2) = \int_{E^m} K(t_1, t_2)\, e^{-i(t_1, u_1)}\, dt_1 , \qquad (36a)$$

$$\hat{K}^2(t_1, u_2) = [\mathcal{F}_2 K](t_1, u_2) = \int_{E^{n-m}} K(t_1, t_2)\, e^{-i(t_2, u_2)}\, dt_2 , \qquad (36b)$$

Es decir, $\hat{K}^1(u_1, t_2)$ es la tranformada de Fourier de la función $K(t_1, t_2) = K_{t_2}(t_1)$, considerada como función de t_1 con parámetro t_2. Se tiene evidentemente

$$\hat{K}(u) = \hat{K}(u_1, u_2) = \hat{K}^{12}(u_1, u_2) = [\mathcal{F}_2 \hat{K}^1](u_1, u_2) , \qquad (36c)$$

siempre que estas expresiones tengan sentido. Por ejemplo, si $K \in L^2(E^n)$ entonces para casi todo t_2 es $K(t_1, t_2) \in L^2(E^n)$, como función de t_1, y se puede escribir las cuatro fórmulas (36), (36a), (36b), (36c), además será

$$\hat{K}^1(u_1, t_2) = [\mathcal{F}_2^* \hat{K}](u_1, t_2) . \qquad (36d)$$

Si $K(t) = K(t_1, t_2)$ y $f(t) = f(t_1, t_2)$ son ambas definidas en E^n y si

$$F(t) = F(t_1, t_2) = (f * K)(t) , \qquad (37)$$

entonces se tiene la fórmula clásica

$$\hat{F}(u_1, u_2) = \hat{f}(u_1, u_2)\, \hat{K}(u_1, u_2) .$$

Pongamos ahora $G(t_1) = F(t_1, 0)$ (38)

De modo que $G(t_1)$ está definida en E^m, y veamos como se expresa la transformada de Fourier de $G(t_1)$, es decir,

$$\hat{G}(u_1) = \hat{F}^1(u_1, 0) = \int_{E^m} G(t_1)\, e^{-i(t_1, u_1)}\, dt_1 . \qquad (38a)$$

Es fácil comprobar que se tiene la fórmula

$$\hat{G}(u_1) = \int_{E^{n-m}} \hat{f}^1(u_1 , t_2)\ \hat{K}^1(u_1 , -t_2)\ dt_2 \tag{39}$$

en efecto ,

$$\hat{G}(u_1) = \int_{E^m} \left[\int_{E^m} \int_{E^{n-m}} f(x_1 - t_1 , 0 - t_2)\, K(t_1 , t_2) dt_1\, dt_2\right] e^{-i(x_1,u_1)}\, dx_1 =$$

$$= \int_{E^{n-m}} dt_2 \int_{E^m} f(t_1 , t_2)\, dt_1 \int_{E^m} K(x_1 , -t_2)\, e^{-i(x_1,u_1)}\ e^{-i(t_1,u_1)}\, dx_1 =$$

$$= \int_{E^{n-m}} \left[\int_{E^m} f(t_1 , t_2)\, e^{-i(t_1,u_1)}\, dt_1\right] \left[\int_{E^m} K(x_1 , -t_2)\, e^{-i(x_1,u_1)}\, dx_1\right] dt_2 .$$

En particular de (39) se obtiene, aplicando la desigualdad de Hölder :

$$\left|\hat{G}(u_1)\right| = \left|\hat{F}^1(u_1 , 0)\right| \leq \left\{\int_{E^{n-m}} \left|\hat{f}^1(u_1 , t_2)\right|^p dt_2\right\}^{1/p} \left\{\int_{E^{n-m}} \left|\hat{K}^1(u_1 , t_2)\right|^{p^*} dt_2\right\}^{1/p^*} \tag{40}$$

Análogamente si $f(t_1)$ está definido en $E^m \subset E^n$ y $K(t) = K(t_1 , t_2)$ en E^n , y si $F(x) = F(x_1 , x_2) = f * K$ está definida por la fórmula (34a) , entonces se tiene

$$\hat{F}(u_1 , u_2) = \hat{F}(u) = \hat{f}(u_1)\, \hat{K}(u_1 , u_2) . \tag{41}$$

La demostración de (41) es del todo análoga a la de (39) .

<u>LEMA 6</u> . <u>Sea $E^n = \{t\} = \{(t_1 , t_2)\}$, $E^m \subset E^n$, $E^n = E^m \times E^{n-m}$ $E^m = \{t_2\}$, $e^{n-m} = \{t_2\}$, y sea $K(t_1 , t_2)$ un núcleo integrable tal que para todo</u> $u_1 \in E^m$ es

$$\left\{\int_{E^{n-m}} \left|\hat{K}^1(u_1 , t_2)\right|^{p^*} dt_2\right\}^{1/p^*} \leq M\, |u_1|^{(n-m-pd)/p} . \tag{42}$$

<u>Si $0 \leq d < n$, y si $p = (n + m)/(m + d)$, entonces el operador $Tf = f * K$ definido por (34) , es de tipo ($L^p(E^n)$, $L^{p^*}(E^m)$)</u> .

<u>Demostración</u> . Poniendo $G(t_1) = F(t_1 , 0) = Tf(t_1 , 0)$, tendremos de (40) y (42) que

$$\left|\hat{G}(u_1)\right|^p \leqslant M^p \left|u_1\right|^{n-m-pd} \int_{E^{n-m}} \left|\hat{f}^1(u_1 , t_2)\right|^p \, dt_2 \quad .$$

Teniendo en cuenta que $n - m - pd = m(p-2)$ y que $G(t_1) = \mathcal{F}^*(\hat{G}(u_1))$, tendremo aplicando los teoremas de Hausdorff-Young y de Hardy-Littlewood-Paley ,

$$\|G\|_{p^*} = \|Tf\|_{p^*}^{(m)} \leqslant \left\{ \int_{E^m} \left|\hat{G}(u_1)\right|^p du_1 \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M \left\{ \int_{E^m} \left|u_1\right|^{m(p-2)} \left[\int_{E^{n-m}} \left|\hat{f}^1(u_1 , t_2)\right|^p dt_2 \right] du_1 \right\}^{1/p} =$$

$$= M \left\{ \int_{E^{n-m}} dt_2 \left[\int_{E^m} \left|\hat{f}^1(u_1 , t_2)\right|^p \left|u_1\right|^{m(p-2)} du_1 \right] \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M c_p \left\{ \int_{E^{n-m}} \left[\int_{E^m} \left|f(t_1 , t_2)\right|^p dt_1 \right] dt_2 \right\}^{1/p} = M c_p \|f\|_p^{(n)} \quad ,$$

lo que prueba la tésis .

LEMA 6a . Sea $f(t_1)$ definida en $E^m \subset E^n$, $K(t_1 , t_2)$ definida en $E^n = E^m \times E^{n-m}$ y $F(x) = Tf(x_1 , x_2) = f * K$ definida por (34a) .

Si $0 \leqslant d < n$, $p = (n+m)/(n+d)$ y si

$$\left\{ \int_{E^{n-m}} \left|\hat{K}(u_1 , u_2)\right|^p du_2 \right\}^{1/p} \leqslant M \left|u_1\right|^{(n-m-pd)/p} \quad , \tag{42a}$$

entonces Tf es de tipo $(L^p(E^m) , L^{p^*}(E^n))$.

Demostración . En efecto, teniendo en cuenta que $n - m - pd = m(p-2)$ usando (41) , (42a) y los teoremas de Hausdorff-Young y Hardy-Littlewood-Paley , tenemos

$$\|F\|_{p^*}^{(n)} = \|Tf\|_{p^*}^{(n)} \leqslant \left\{ \int_{E^n} \left|\hat{F}(u_1 , u_2)\right|^p du_1 \, du_2 \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int_{E^{n-m}} \int_{E^m} \left|\hat{K}(u_1 , u_2)\right|^p \left|\hat{f}(u_1)\right|^p du_1\, du_2 \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M \left\{ \int_{E^m} \left|\hat{f}(u_1)\right|^p |u_1|^{m(p-2)} du_1 \right\}^{1/p} \leqslant M\, c_p \left\{ \int_{E^m} \left|f(t_1)\right|^p dt_1 \right\}^{1/p} ,$$

lo que prueba la tésis .

Observación 12 . En el lema 6 solo se usó el hecho que Tf es la antitransformada de Fourier de (39) y que la función $H(u_1 , t_2) = \hat{K}^1(u_1 , t_2)$ verifica (42) . Por tanto este lema se aplica a operadores Tf definidos por la relación

$$Tf = \mathcal{F}_1^* \left\{ \int_{E^{n-m}} \hat{f}^1(u_1 , t_2)\; H(u_1 , t_2)\; dt_2 \right\} \tag{43}$$

donde $H(u_1 , t_2)$ verifica ,

$$\left\{ \int_{E^{n-m}} \left|H(u_1 , t_2)\right|^{p^*} dt_2 \right\}^{1/p^*} \leqslant M\, |u_1|^{(n-m-pd)/p} . \tag{43a}$$

Análogamente el lema 6a se aplica a operadores Tf definidos por

$$Tf = \mathcal{F}^* \left\{ \hat{f}(u_1)\; H(u_1 , u_2) \right\} \tag{43b}$$

con

$$\int_{E^{n-m}} \left|H(u_1 , u_2)\right|^p du_2 \leqslant M\, |u_2|^{n-m-pd} . \tag{43c}$$

TEOREMA 4 . Si los núcleos $k_j \in L^1(E^n)$ verifican las condiciones (3) y (4) del teorema 1a , y si

$$0 < d < n , \quad m < n < m + 2d , \quad p = (m + n)/(m + d) , \tag{44}$$

entonces : a) Si $f \in L^p(E^n)$ se tiene $\|S_N f\|_{p^*}^{(m)} \leqslant c_p M \|f\|_p^{(n)}$ y las funciones $S_N f(t_1 , 0) = F_N(t_1)$ convergen en norma $\| \; \|_{p^*}^{(m)}$ hacia un límite $F(t_1) \in L^{p^*}(E^m)$ que se designará $F = Tf$

b) Tf es de tipo ($L^p(E^n)$, $L^{p^*}(E^m)$) y $\|Tf\|_{p^*}^{(m)} \leqslant c_p M \|f\|_p^{(n)}$.

c) Si $f \in L^p(E^n)$ está definida en E^m se tiene $\|S_N f\|_{p^*}^{(n)} \leqslant c_p M \|f\|_p^{(m)}$

las $F_N(t_1, t_2) = S_N f(t_1, t_2)$ convergen en $L^{p^*}(E^n)$ hacia una función límite $Tf(t_1, t_2)$, y el operador Tf es de tipo $(L^p(E^m), L^{p^*}(E^n))$.

Observación. Para $m = n$ el teorema 4 se reduce al teorema la pues en este caso sera $(m + n)/(m + d) = 2n/(n + d)$.

Demostración. Fijemos N y pongamos $K = \sum_1^N k_j$, luego por hipótesis tendremos

$$|\hat{K}(u_1, u_2)| \leqslant M(|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-d/2} \quad . \tag{45}$$

Como $\hat{K}^1(u_1, t_2) = [\mathcal{F}_2 * \hat{K}](u_1, t_2)$, tendremos por el teorema de Hausdorff-Young usando (45),

$$\left\{\int_{E^{n-m}} |\hat{K}^1(u_1, t_2)|^{p^*} dt_2\right\}^{1/p^*} \leqslant \left\{\int_{E^{n-m}} |\hat{K}(u_1, u_2)|^p du_2\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\int_{E^{n-m}} (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-pd/2} du_2\right\}^{1/p} =$$

$$= M\left\{|u_1|^{n-m-pd} \int_{E^{n-m}} (1 + |v_2|^2)^{-pd/2} dv_2\right\}^{1/p} , \tag{46}$$

donde se hizo la substitución $u_2 = |u_1|.v_2$, $du_2 = |u_2|^{n-m} dv_2$.

De $p = (m + n)/(m + d)$ y $n < m + 2d$ sigue $p < 2$ y $pd =$ $= n + m - pm > n - m$, luego la última integral de (46) es finita, igual a cierta constante c. Luego $K(t_1, t_2)$ verifica la condición (42) del lema 6, y por dicho lema resulta que $S_N f = f * K = f * \sum_1^N k_j$ verifica $\| S_N f \|_{p^*}^{(m)} \leqslant$ $\leqslant c_p M \|f\|_p^{(n)}$, donde M no depende de N. Luego queda probada la primera parte de a), de la tésis, e igual como en el teorema la de aquí se deduce el resto de a) y de b).

Análogamente se prueba que K verifica la condición (42a) del lema 6a, pues se tiene

$$\int_{E^{n-m}} |\hat{K}(u_1, u_2)|^p du_2 \leqslant M^p \int_{E^{n-m}} (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-pd/2} du_2$$

que es la expresión que figura en (46) y por tanto $\leqslant c|u_1|^{n-m-pd}$.

Luego del lema 6a resulta la parte c) de la tésis, l,q,d,d.

Teniendo en cuenta la observación 12, la misma demostración del teorema 4 nos da el siguiente

TEOREMA 4a. Sea $h(u_1, u_2)$ una función definida en $E^n = E^m \times E^{n-m}$ tal que

$$|h(u_1, u_2)| \leq M \ (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-d/2} \qquad , \qquad (47)$$

pongamos $H(u_1, t_2) = [\mathcal{F}_2{}^* \ h](u_1, t_2)$, y sea Tf definido por (43). Entonces, si d, m, n verifican (44), el operador Tf es de tipo $(L^p(E^n), L^{p^*}(E^n))$. Análogamente definiendo Tf por (43b), Tf será de tipo $(L^p(E^m), L^{p^*}(E^n))$.

Análogamente se demuestra el siguiente

TEOREMA 4b. Sea $\mathcal{L} = \{f\}$ una clase lineal de funciones simples definidas en $E^n = E^m \times E^{n-m}$ y sea $h(u_1, u_2)$ una función definida en E^n que verifica la condición (47). Si para toda f de $\mathcal{L}$ y toda función simple $g(x_1)$ definida en E^m se verifica

$$\left|\int_{E^m} Tf(x_1, 0)\, g(x_1)\, dx_1\right| \leqslant M \left|\int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \int_{E^{n-m}} \hat{f}(u_1, u_2)\, h(u_1, u_2)\, du_2\right| \qquad (48)$$

entonces el operador Tf es de tipo $(L^p(E^n), L^{p^*}(E^m))$ sobre $\mathcal{L}$. Análogamente si Tf está definido por (43), Tf será de tipo $(L^p(E^m), L^{p^*}(E^n))$, supuesto que d, m, n verifican (44).

Demostración. De (48) obtenemos, aplicando la desigualdad de Hölder y la de Hausdorff - Young,

$$|(Tf, g)| \leqslant M \left|\int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \left\{\int_{E^{n-m}} |\hat{f}(u_1, u_2)|^{p^*} du_2\right\}^{1/p^*} \left\{\int_{E^{n-m}} |h(u_1, u_2)|^p\, du_2\right\}^{1/p}\right|$$

$$\leqslant M \left|\int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \left\{\int_{E^{n-m}} |\hat{f}^1(u_1, t_2)|^p\, dt_2\right\}^{1/p} \left\{\int_{E^{n-m}} |h(u_1, u_2)|^p\, du_2\right\}^{1/p}\right|$$

$$\leqslant M \left\{\int_{E^m} |\hat{g}(u_1)|^{p^*} du_1\right\}^{1/p^*} \left\{\int_{E^m} \left[\int_{E^{n-m}} |\hat{f}^1(u_2, t_2)|^p\, dt_2\right] \left[\int_{E^{n-m}} |h(u_1, u_2)|^p\, du_2\right] du_1\right\}^{1/}$$

$$\leq M \; \|g\|_p \left\{ \int_{E^m} \left[\int_{E^{n-m}} |\hat{f}^{1}(u_1 , t_2)|^p \, dt_2 \right] \left[\int_{E^{n-m}} |h(u_1 , u_2)|^p \, du_2 \right] du_1 \right\}^{1/p}$$

En virtud de (48) la integral en el segundo corchete verifica (46), es decir es $\leq M|u_1|^{(n-m-pd)} = M|u_1|^{m(p-2)}$ y la demostración se termina como en el lema 6 ó lema 6a , observando que

$$\|Tf\|^{(m)}_{p^*} = \sup_g |(Tf , g)| \; .$$

<u>TEOREMA 5</u> . <u>Sea $H_d f(x)$ el operador potencial definido por (22) y supongamos que d , m , n , p verifican la condición (44)</u> . <u>Entonces, si $f(x_1 , x_2)$ está definida en $E^n = E^m \times E^{n-m}$, la integral $H_d f(x_1 , 0)$ existe para todo x_1 de E^m salvo medida nula (m-dimensional), y el operador $Tf(x_1) = H_d f(x_1 , 0)$ es de tipo $(L^p(E^n) , L^{p^*}(E^m))$. Si $f(x_1)$ está definida en E^n entonces el operador $Tf(x_1,x_2) = H_d f(x_1,x_2)$ es de tipo $(L^p(E^m) , L^{p^*}(E^n))$</u> .

<u>Demostración</u> . Haremos la demostración de la primera parte del teorema, es decir para el operador $Tf(x_1) = H_d f(x_1 , 0)$, cuando f está definida en E^n ; la segunda parte se demuestra análogamente y la dejamos a cargo del lector.

a) Vamos a probar antes el teorema para las funciones $f(x)$ de $\mathcal{D}$, es decir que $Tf(x_1)$ es de tipo $(L^p(E^n) , L^{p^*}(E^m))$ sobre $\mathcal{D}$ (ver la definición de $\mathcal{D}$ en pág 3) .

Como toda f de $\mathcal{D}$ es nula fuera de un cubo de lado A y es infinitamente derivable, ella y su transformada de Fourier pertenecen a todas las clases L^p, y para todo $0 < d < n$ existe la integral

$$Tf(x_1) = \int_{E^n} f(x_1 - t_1 , -t_2) \, (|t_1|^2 + |t_2|^2)^{-(n-d)/2} \, dt_1 \, dt_2 =$$

$$= \int_{|x_1 - t_1| < A} dt_1 \int_{|t_2| < A} f(x_1 - t_1 , -t_2) \, (|t_1|^2 + |t_2|^2)^{-(n-d)/2} \, dt_1 \, dt_2 \; . \tag{49}$$

En virtud del teorema 4b basta probar que para toda función simple $g(x_1)$, definida en E^m, vale

$$\int_{E^m} Tf(x_1) \, g(x_1) \, dx_1 = c_d \int_{E^m} \hat{g}(u_1) \, du_1 \int_{E^{n-m}} \hat{f}(u_1,u_2) \, (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-d/2} . \tag{50}$$

podemos suponer que también $g(x_1)$ se anula fuera de $|x_1| < A$, de modo que

$$(Tf , g) = \int_{|x_1|<A} dx_1 \int_{|t_1|<2A} \int_{|t_2|<A} g(x_1)\, f(x_1-t_1,-t_2)\, (|t_1|^2+|t_2|^2)^{-(n-d)/2}\, dt_1\, dt_2 \tag{51}$$

por tanto ambos miembros de (50) están definidos para valores complejos de d, $d + ia$, y son funciones analíticas en d, si $0 < d < n$. Luego basta establecer que la igualdad (50) vale para $0 < d \leq 1/2$, y ella valdrá para todo otro d, $0 < d < n$.

Sea pues $d \leqslant 1/2$, y para todo N sea

$$K_N(t_1, t_2) = \begin{cases} K(t_1, t_2) = (|t_1|^2+|t_2|^2)^{-(n-d)/2} & \text{si } |t_1|^2+|t_2|^2 < N^2 \\ 0 & \text{en los demás } (t_1, t_2) \end{cases} \tag{52}$$

de modo que

$$T_N f(x_1) = f * K_N = \int_{|t_1|^2+|t_2|^2<N} f(x_1-t_1,-t_2)\, (|t_1|^2+|t_2|^2)^{-(n-d)/2}\, dt_1\, dt_2 \quad ;$$

además tendremos

$$(Tf , g) = (T_{2A} f , g) = \int_{|x_1|<A} T_{2A} f(x_1)\, g(x_1)\, dx_1 \quad , \tag{53}$$

$$(Tf , g) = (T_N f , g) \quad \text{para todo} \quad N > 2A \quad , \tag{53a}$$

$$(Tf , g) = \lim_{N\longrightarrow\infty} (T_N f , g) \quad . \tag{53b}$$

Como $T_N f = f * K_N$, como K_N es integrable y f, así como $\hat{f}$, $\hat{f}^1$, $\hat{f}^2$ son de L^p para todo p, son aplicables las fórmulas (39) y (36), de modo que

$$(T_N f , g) = (\mathcal{F}(T_N f) , \hat{g}) =$$

$$= \int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \int_{E^{n-m}} \hat{f}^1(u_1,t_2)\, \hat{K}_N^1(u_1,t_2)\, dt_2 \tag{54}$$

La función $\hat{K}_N^{1}(u_1, t_2)$, como función de t_2, pertenece a $L^1(E^{n-m})$ pero no a L^2; si fuese $\hat{K}_N^{1} \in L^2$ podríamos escribir, por la fórmula de Parseval,

$$\int_{E^{n-m}} \hat{f}^{1}(u_1,u_2)\, \hat{K}_N^{1}(u_1,t_2)\, dt_2 = \int_{E^{n-m}} \hat{f}^{12}(u_1,u_2)\, \hat{K}_N^{12}(u_1,u_2)\, du_2 =$$

$$= \int_{E^{n-m}} \hat{f}(u_1,u_2)\, \hat{K}_N(u_1,u_2\, du_2 \quad . \qquad (55)$$

Esta fórmula es sin embargo cierta aún para $\hat{K}_N^{1} \in L^1$, pues aproximando a $\hat{K}_N^{1}$ con funciones H de L^2, teniendo en cuenta que $\|\hat{K}_N - \hat{H}\|_\infty \leqslant \|\hat{K}_N^{1} - H\|_1$, y que $\hat{f}(u_1, u_2) \in L^1$, se deduce facilmente la validez de (55).

Por tanto la fórmula (54) se escribe

$$(T_N f , g) = \int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \int_{E^{n-m}} \hat{f}(u_1,u_2)\, \hat{K}_N(u_1,u_2)\, du_2 \quad .$$

Por lo visto antes sabemos que si $d < 1/2$ entonces $|\hat{K}_N(u_1, u_2)| \leqslant M \;|u|^{-d}$ y $\hat{K}_N(u)$ converge hacia $c_d |u|^{-d}$. Luego, como $\hat{f} \in L^1$, haciendo N tender al infinito, obtenemos

$$(Tf , g) = \lim (T_N f , g) = c_p \int_{E^m} \hat{g}(u_1)\, du_1 \int_{E^{n-m}} \hat{f}(u_1,u_2)\, (|u_1|^2 + |u_2|^2)^{-d/2} du_2 .$$

que es la igualdad (50) deseada.

b) Veamos ahora que Tf es de tipo $(L^p(E^n) , L^{p^*}(E^m))$ sobre todo $L^p(E^n)$. Con las notaciones anteriores tenemos

$$|T_N f (x_1)| \leqslant T(|f|)\,(x_1) \quad , \qquad \|T_N f\|_{p^*} \quad \|T(|f|)\|_{p^*} \quad ,$$

luego para f de $\mathcal{D}$ tenemos

$$\|T_N f\|_{p^*}^{(m)} \leqslant M \;\|f\|_p \quad \text{con } M \text{ independiente de } N . \qquad (56)$$

Como $\int K_N(t_1, t_2)\, dt_1 \leqslant \int_{|t_1|<N} |t_1|^{-(n-d)}\, dt_1 \leqslant c_N$,

tendremos

$$\left|(T_N f , g)\right| = \int_{|t_2|<N} dt_2 \int_{E^m} g(x_1)\, dx_1 \int_{E^m} f(x_1-t_1,-t_2)\, K_N(t_1,t_2)\, dt_1 =$$

$$= \int_{|t_2|<N} dt_2 \int_{E^m} g(x_1)\, (f * K_N)\, (x_1 , t_2)\, dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|t_2|<N} dt_2\, \|g\|_{p^*}\, \|f * K_N\|_p \quad \int_{|t_2|<N} dt_2\, \|g\|_{p^*}\, c_N\, \|f\|_p =$$

$$= c_N\, \|g\|_{p^*} \int_{|t_2|<N} dt_2 \left\{ \int_{E^m} |f(t_1 , -t_2)|^p\, dt_1 \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant c_N\, \|g\|_{p^*} \left\{ \int_{|t_2|<N} dt_2 \int_{E^m} |f(t_1,-t_2)|^p\, dt_1 \right\}^{1/p} N^{1/p^*} =$$

$$= c_N\, N^{1/p^*}\, \|g\|_{p^*}\, \|f\|_p \quad ,$$

(en el preúltimo paso se usó la desigualdad de Holder con $\left\{ \int_{|t_2|<N} dt \right\}^{1/p^*} = N^{1/p^*}$)

de modo que $\left|(T_N f , g)\right| \leqslant c'_N\, \|f\|_p\, \|g\|_{p^*}$,

lo que implica, en virtud del lema 1 , pág 17, que

$$\|T_N f\|_p \leqslant c'_N\, \|f\|_p \quad , \quad \text{para todo } p \ . \tag{57}$$

Sea ahora f una función simple escalera y sea g_i una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ que tienden a f en L^p y en L^{p^*} (tal sucesión existe pues f es acotada y nula fuera de un intervalo y se eligen las g_i también acotadas y nulas fuera de un intervalo comun) . Entonces por (57) , y por (56) tendremos, puesto que $\|f - g_i\|_p \longrightarrow 0$, $\|f - g_i\|_{p^*} \longrightarrow 0$, o que

$$\|T_N f\|_{p^*}^{(m)} \leqslant \|T_N g_i\|_{p^*} + \|T_N (f - g_i\|_{p^*} \leqslant \|T_N g_i\|_{p^*} + c_N \|f - g_i\|_{p^*} ,$$

$$\|T_N f\|_{p^*} \leqslant \lim_i \|T_N g_i\|_{p^*} \leqslant \lim_i M \|g_i\|_p = M \|f\|_p ,$$

o sea

$$\|T_N f\|_{p^*} \leqslant M \|f\|_p ,$$

donde M no depende de N. Es decir (56) vale para toda f simple.

Si f es ahora cualquiera de $L^p(E^n)$, $f \geqslant 0$, eligimos una sucesión creciente de funciones simples f_i tales que $f_i(x) \uparrow f(x)$. Por el teorema de integración de sucesiones monótonas tendremos $T_N f_i (x) \uparrow T_N f (x)$, $\|T_N f\|_{p^*} =$ $= \lim_i \|T_N f_i\|_{p^*} \leqslant \lim_i M \|f_i\|_p = M \|f\|_p$,

lo que prueba que (56) vale para toda $f \in L^p$ con M independiente de N.

Como para $f \geqslant 0$ se tiene $T_N f (x_1) \uparrow Tf(x)$, obtendremos nuevamente

$\|Tf\|_{p^*}^{(m)} = \lim \|T_N f\|_{p^*}^{(m)} \leqslant M \|f\|_p$, lo que prueba el teorema, l,q,d,d.

10 . NOTAS DIVERSAS AL CAPITULO II .

A) Para toda función $f(x)$ (real o compleja) definida en E^n, designaremos con f^* la función $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Evidentemente $f = (f^*)^*$.

Sea $Tf = f * k$ un operador convolución con el núcleo $k(x) \in L^1(E^n)$, y sea $T^*f = f^* k^*$. Se tienen entonces las dos fórmulas siguientes :

$$(Tf , g) = (f , T^* g) , \tag{58}$$

$$(Tf , g) = (Tg^* , f^*) . \tag{59}$$

En efecto, se tiene :

$$(Tf , g) = \int_{E^n} \left[\int_{E^n} f(x - t) k(t) dt\right] \overline{g}(x) dx =$$

$$= \int_{E^n} \left[\int_{E^n} f(x) \overline{g}(x+t) dx\right] k(t) dt = \int_{E^n} \left[\int_{E^n} \overline{g(x+t)} k(t) dt\right] f(x) dx =$$

$$= \int_{E^n} Tg^* (-x) f(x) dx = \int_{E^n} Tg^*(x) f(-x) dx = (Tg^* , f^*) ,$$

lo que prueba (59) , y análogamente se verifica (58) . La fórmula (58) expresa que si T es dadc por la convolución con $k(x)$ entonces el operador conjugado es dado por la convolución con $k^*(x)$.

Observemos todavía que

$$\|f\|_p = \|f^*\|_p \quad , \tag{60}$$

pues al tomar el valor absoluto e integrando , podemos sustituir f^* por f .

B) Es necesario tener en cuenta que los lemas 1 y 1 a. valen para todo $p \geq 1$ pero debe ser $p < \infty$; estos lemas no valen para $p = \infty$ (nótese que en la demostración del lema 1 se usó la relación $|f(x)|^p = |f(x)|\,|f(x)|^{p-1}$, que no tiene sentido si $p = \infty$) . Sin embargo estos lemas valen para $p = 1$. Más generalmente, para todo $p \geq 1$, $p < \infty$, vale que el espacio conjugado de L^p es el L^{p^*} (es decir toda funcional lineal y contínua $\ell(f)$ sobre L^p es de la forma $\ell(f) = (f , g)$ donde g es una función fija de L^{p^*}) . En particular el conjugado de L^1 es el L^∞ . Pero el conjugado de L^∞ <u>no</u> es el L^1 (este conjugado es dado por medidas finitamente aditivas) .

Del lema 1 a. se deduce esta otra definición de tipo :

<u>2da. definición de tipo (p , r)</u> : un operador $h(y) = Tf$ es de tipo (p , r) , $1 \leq p,r$, $r < \infty$, si para toda $f(x)$ y toda $g(y)$ simple se verifica

$$|(Tf , g)| \leq M \|f\|_p \|g\|_{r^*} \tag{61}$$

donde M es una constantr fija independiente de $f(x)$ y de $g(y)$. <u>Nótese que esta definición sólo se aplica en el caso $r < \infty$</u> .

En efecto, si Tf es de tipo (p , r) en la definición común, entonces por la desigualdad de Hölder, $|(Tf , g)| \leq \|Tf\|_r \|g\|_{r^*} \leq M \|f\|_p \|g\|_{r^*}$. Recíprocamente, si Tf es de tipo (p , r) según la 2da. definición, entonces (si $1 \leq r < \infty$) , por el lema 1 a. ,

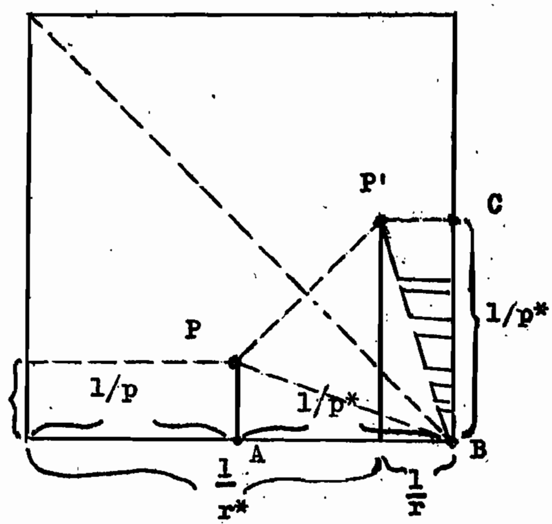
$$\|Tf\|_r = \sup_g (tf , g) \quad , \quad \text{con} \quad \|g\|_{r^*} = 1 \quad ,$$

luego

$$\|Tf\|_r = \sup (Tf , g) \leq \sup M \|f\|_p \|g\|_{r^*} = M \|f\|_p \quad ,$$

o sea Tf es de tipo (p, r) en la definición común .

LEMA 7 . Si $Tf = f * k$ es un operador convolución con un $k(x) \in L^1(E^n)$ y si Tf es de tipo (p, r) , entonces Tf es también de tipo (r^*, p^*) , siempre que sea $p, r \geqslant 1$, $p > 1$. Es decir, si $Tf = f * k$ es de tipo P , donde P es un punto del cuadrado de los tipos, entonces Tf es también de tipo P' donde P' es el simétrico de P respecto de la diagonal secundaria . En particular, si Tf es de tipo (p, p) , lo es también de tipo (p^*, p^*) ; siempre que $p > 1$. El lema no vale si $p = 1$.



Demostración . Supongamos que $Tf = f * k$ es de tipo (p, r) , con $p > 1$, de modo que vale (61) para todo par de funciones simples. Usando las fórmulas (59) , (60) , tendremos

$$|(Tf, g)| = |(Tg^*, f^*)| \leq$$

$$\leq M \|g^*\|_p \|f^*\|_{r^*} = M \|f\|_{r^*} \|g\|_p ,$$

y como $p = (p^*)^*$, de la 2da. definición de tipo resulta que Tf es de tipo (r^*, p^*) , siempre que sea $p^* < \infty$, es decir $p > 1$. Si P es el punto de coordenadas $(1/p, 1/r)$ y P' su simétrico respecto de la diagonal secundaria (ver dibujo), entonces de la igualdad de los triángulos A B P y B P' C resulta que las coordenadas de P' son $(1/r^*, 1/p^*)$, l,q,d,d.

C) Uno de los objetos de este curso es estudiar las propiedades de tipo de los operadores de Hilbert $H_W f$ (ver fórmula (11)) y de los operadores potenciales $H_d f$ (fórmula (22)) .

Los operadores $H_W f$ son de tipo (p, p) para todo $1 < p < \infty$, es decir son de tipo P, para todo P interior a la diagonal principal del cuadrado de los tipos . Este operador no es de tipo en los extremos de dicha diagonal . Sin embargo , en el extremo superior $(1, 1)$ el operador $H_W f$ es lo que se llama de tipo debil , noción que será estudiada en el capítulo que sigue . En este capítulo se probará el siguiente teorema de Marcinkiewicz , que generaliza el de Riesz - Thorin de la página 22: si un operador Tf es de tipo debil P_1 y de tipo debil P_2 , entonces Tf es de tipo (fuerte) P para todo P interior al segmento $P_1 P_2$.

Ahora, en el capítulo presente hemos establecido que $H_w f$ es de tipo (2 , 2) es decir de tipo P_1 , siendo P_1 el centro de la diagonal del cuadrado de los tipos . En el capítulo siguiente estableceremos que $H_w f$ es de tipo debil (1 , 1) , o sea de tipo debil P_2 donde P_2 es el extremo superior de la diagonal; luego del teorema de Marci - kiewicz seguirá que $H_w f$ es de tipo P para todo P interior a la mitad superior de la diagonal. Del lema 7 , recién probado, seguirá entonces que $H_w f$ es también de tipo P para los restantes P de la diagonal, y con esto quedarán establecidas las propiedades de tipo para $H_w f$.

Hagamos notar que en el extremo inferior de la diagonal $H_w f$ no es ni siquiera de tipo debil; esto no contradice al lema 7 pues dicho lema no se aplica al caso excep - cional p = 1 , de modo que un operador puede ser de tipo o tipo debil (1 , 1) y no ser de tipo (0 , 0) , que es el punto simétrico .

Los operadores potenciales $H_d f$ son de tipo (p , r) = tipo P para todo P interior al segmento ℓ paralelo a la diagonal a distancia d/n ; en el extremo superior P_2 de este segmento $H_d f$ es de tipo debil , pero no es ni siquiera de tipo debil en el extremo inferior de ℓ .

En este capítulo ya hemos establecido que $H_d f$ es de tipo P_1 , si P_1 es el punto medio de ℓ . En el capítulo siguiente probaremos que $H_d f$ es de tipo debil en el extremo P_2 de ℓ , y de ahi por el teorema de Marcinkiewicz resultará que $H_d f$ es de tipo P para todo P interior a la mitad superior de ℓ . Por el lema 7 ésto será cierto también en los restantes puntos de ℓ .

El mismo método se aplicará para estudiar los tipos $(L^p(E^n) , L^r(E^m))$ de los operadores $H_d f$.

Asi pues, para establecer los teoremas de tipos de los operadores $H_w f$ y $H_d f$ solo nos falta demostrar el teorema de Marcinkiewicz y establecer que son de tipo debil en las puntas superiores correspondientes , lo que será objeto del capítulo que sigue.

Observemos todavía que, por razones que se verán luego, la verificación de que $H_d f$ es de tipo debil P_2, en la punta, es fácil . La verificación correspondiente para $H_w f$ es en cambio complicada y exige la introducción de otra noción de quasi-tipo que se verá en el capítulo próximo. Se probará que quasi-tipo implica tipo debil, y la verificación de que $H_w f$ es de quasi-tipo (1 , 1) será fácil, con lo cual se probará el tipo debil de $H_w f$.

Finalmente observemos que, como se vió en el teorema 3, la convergencia puntual de la integral (22), correspondiente al operador $H_d f$, no presenta dificultades ; en cambio la convergencia puntual para $H_w f$ es mucho más dificil de probar, y será establecida más adelante al demostrar el tipo del operador maximal asociado a $H_w f$.

D) En la demostración del teorema de convexidad, página 21, hemos supuesto inplícitamente que las funciones $f(x)$, $g(x)$ etc. son reales y no negativas. Para adaptar la demostración al caso general de funciones complejas, basta definir la función $F(z)$ por la fórmula $F(z) = (T_z(f_z), g_z)$, donde (con las notaciones de la pág. 20) :

$$f_z = |f|^{a(z)} \text{ sign } (f) \text{ si } 1/p \neq 0 \quad , \quad f_z = f \text{ si } 1/p = 0 \quad ,$$

$$g_z = |g|^{b(z)} \text{ sign } (g) \text{ si } 1/s \neq 1 \quad , \quad g_z = g \text{ si } s = 1 \quad ;$$

el resto de la demostración queda sin cambiar .

En la hipótesis (2) de este teorema de convexidad, se supuso que la constante M_1 es la misma para todos los $iv = z$ de la recta $u = 0$, y análogamente que existe una M_2 para todos los $z = 1 + iv$ de la recta $u = 1$.

En base a un teorema de Hirshman, E. Stein extendió el teorema de convexidad al caso cuando $M_1 = M_1(v)$, $M_2 = M_2(v)$ varían con v ; el operador T_z es entonces de tipo (p , s) con norma M que se expresa mediante las funciones $M_1(t)$, $M_2(t)$ de un modo determinado que generaliza la desigualdad (8) . (Ver el trabajo de E. Stein en Transactions Am. Math. Society , Vol. 83, 2, (1956), pp. 482-492, especialmente pág. 483) .

Calderón y Zygmund (Ann. of Math. studies, Princeton 1950, Studia Math. (1951) , 194 - 204) han extendido el teorema de convexidad de Riesz-Thorin (pág. 22) al caso de un operador Tf definido sobre las clases H^p de Hardy ; es decir han sustituido en el teorema de Riesz-Thorin las clases L^p de Lebesgue por las clases H^p . E. Stein y G. Weiss (Tohoku Math. J. Vol. 9 pp. 318-339 (1957)) han extendido este teorema de Calderón y Zygmund al caso de operadores funciones T_z . Los mismos autores han obtenido todavía otra generalización del teorema de convexidad en que además del operador T_z cambia también la medida del espacio, al variar z .

E) El teorema de los núcleos casi ortogonales (ver pág. 37) puede generalizarse al caso cuando en vez de una sucesión k_i de núcleos, tenemos un contínuo de núcleos $k_t(x) = k(t ; x)$ donde $t \in E^m$, $x \in E^n$. Por ejemplo se tiene este teorema : <u>Sea $k_t(x) \in L^1(E^n)$ una familia de núcleos dependientes del parámetro contínuo $t \in E^m$ tal que para todo par t , s de valores del parámetro, vale la desigualdad</u>

$$\|k_t * k_s\|_1 \leq M^2 \quad \varepsilon^{-1} \quad \varepsilon^{|t-s|^m} \quad . \tag{62}$$

<u>si</u>

$$H_N(x) = \int_{|t|<N} k_t(x)\, dt \quad , \tag{63}$$

$$T_N f = f * H_N \quad . \tag{63a}$$

<u>entonces los $T_N f$ son de tipo (2 , 2) , con normas uniformemente acotadas, y convergen hacia un operador Tf de tipo (2 , 2) que se indicará formalmente como</u>

$$Tf = f * H \quad , \qquad H(x) = \int_{E^m} k_t(x)\, dt \tag{63b}$$

Más generalmente, se tiene un teorema análogo poniendo

$$H_N(x) = \int_{|t|<N} k_t(x)\, d_t\,\mu \quad , \tag{63c}$$

donde μ es una medida de Radón en E^m . Para $m = 1$ y μ = discreta se obtiene entonces, como caso particular, el teorema 2 anterior .

Análogamente se generalizan los teoremas 2a y 4 . Estas generalizaciones se basan en una generalización correspondiente del lema numérico (pág. 33) , al cual se le puede dar esta forma general: Sea $V(a) \geq 0$ una función decreciente de $a > 0$, $W(a\,;\,b)$ una función creciente en $a > 0$ y en $b > 0$, y sea μ una medida de Radón en E^m y $[x\,,\,y]$ la medida-μ de la esfera de centro x y radio $|x - y|$. Si $h(t)$, $t \in E^m$, es una función tal que $|h(t)| \leq M$, y tal que para todo par $s\,,\,t$ de E^m se verifica

$$W(|h(t)|\;;\;|h(s)|) \leq V([s\,,\,t]) \tag{64}$$

entonces

$$\int_{E^m} |h(x)|^p \, d\mu \leq p \int_0^M a^{p-1}\, V^{-1}(W(a\,,\,a))\, da \,, \tag{65}$$

donde V^{-1} = función inversa de V .

Esta forma del lema numérico permite obtener diversas extensiones del teorema de los núcleos ortogonales. La demostración de (65) puede hacerse por el mismo argumento usado en la pág. 33 . Los detalles serán objeto de un artículo de próxima publicación.

F) El teorema 5 es debido a Sobolieff quien lo demostró, en su libro sobre Aplicaciones del Análisis Funcional a la Física, en forma menos general y tan solo para el caso de dominios finitos. En el mismo libro Sobolieff proponía como problema la demostración del teorema 5 en su forma completa. El problema fué resuelto por Ilin y Smolitzky (ver Uspehi Mat. Nauk, XII (1957)) e independientemente por el autor y R. Panzone (ver nuestro artículo en la Acta Szeged de 1958 y el trabajo sobre Operadores Potenciales, de próxima aparición, así como la exposición hecha en la reunión de la U.M.A de 1957), quienes además establecieron el tipo debil en la punta del segmento de los tipos(ver capítulo siguiente; el material de los párrafos 7 - 9 del presente capítulo y parte del capítulo siguiente, está tomado esencialmente de nuestros dos artículos mencionados) . A continuación damos la demostración directa de Ilin del teorema 5, que reduce el caso de tipo $(L^p(E^n)\,,\,L^{p^*}(E^m))$ al caso ya probado anteriormente (teorema 3) de $m = n$.

Demostración de Ilin del teorema 5. Sea como antes $p = (m+n)/(m+d)$, $0 < d < n$, $m < n < m+2d$, $E^m = \{x_1\}$, $E^{n-m} = \{x_2\}$, $E^n = E^m \times E^{n-m} = \{(x_1, x_2)\}$, y sea

$$F(x_1) = H_d f(x_1) = H_d f(x_1, 0) = \int_{E^m} \int_{E^{n-m}} \frac{f(x_1 - t_1, -t_2)\, dt_1\, dt_2}{(|t_1|^2 + |t_2|^2)^{(n-d)/2}}$$

En virtud del lema 1 es suficiente probar que para todo $g(x_1) \in L^p(E^m)$, $\|g\|_p = 1$, g = real, se verifica

$$|(F(x_1), g(x_1))| \leq M \|f\|_p^{(n)} ,$$

pues esto equivaldrá a

$$\|F\|_{p^*}^{(m)} \leq M \|f\|_p .$$

Usando la definición de $F(x_1)$ y aplicando la desigualdad de Holder tendremos:

$$|(F, g)| = \left|\int_{E^m} F(x_1)\, g(x_1)\, dx_1\right| =$$

$$= \int_{E^m} g(x_1) \left[\int_{E^m} \int_{E^{n-m}} \frac{f(x_1 - t_1, -t_2)\, dt_1\, dt_2}{(|t_1|^2 + |t_2|^2)^{(n-d)/2}}\right] dx_1 \leq$$

$$\leq \int_{E^m} g(x_1)\, dx_1 \int_{E^m} dt_1 \left[\int_{E^{n-m}} |f(x_1 - t_1, t_2)|^p\, dt_2\right]^{1/p} \left[\int_{E^{n-m}} \frac{dt_2}{(|t_1|^2 + |t_2|^2)^{p^*(n-d)/2}}\right]^{1/p^*}$$

Como $p = (n+m)/(n+d)$, $p^* = p/(p-1) = (n+m)/(n-d)$, tenemos que $p^*(n-d) = n+m$, luego haciendo en la última integral la sustitución $t_2 = |t_1| v$, $dt_2 = |t_1|^{n-m} dv$, tendremos que

$$|(F, g)| \leq \int_{E^m} g(x_1)\, dx_1 \int_{E^m} dt_1 \left[\int_{E^{n-m}} |f(x_1 - t_1, t_2)|^p\, dt_2\right]^{1/p}$$

$$\left[\int_{E^{n-m}} \frac{|t_1|^{n-m}\, dv}{|t_1|^{n+m}\, (1 + |v|^2)^{(n+m)/2}}\right]^{1/p^*} =$$

$$\int_{E^m} g(x_1)\, dx_1 \int_{E^m} \left[\int_{E^{n-m}} |f(x_1-t_1\,,\, t_2)|^p\, dt_2\right]^{1/p}$$

$$\left[\int_{E^m} \frac{dv}{(1+|v|^2)^{(n+m)/2}}\right]^{1/p^*} \frac{dt_1}{|t_1|^{2m/p^*}}$$

Como $n + m > m$ la integral en el segundo corchete es convergente y da un número finito A. Como $n \leqslant m + 2d$, tenemos $p < (2m + 2d)/(m + d) = 2$, $p^* > 2$, $2m/p^* < m$, y podemos escribir $2m/p^* = m - d'$ con $d' = m(1 - 2/p^*)$. Luego tendremos

$$|(F\,,\, g)| \leqslant A \int_{E^m} g(x_1) \left[\int_{E^m} \frac{G(x_1 - t_1)}{|t_1|^{m-d'}}\, dt_1\right] dx_1 =$$

$$= A \int_{E^m} g(x_1)\, H_{d'}\, G(x_1)\, dx_1 \quad ,$$

donde se ha puesto

$$G(t_1) = \left[\int_{E^{n-m}} |f(t_1\,,\, t_2)|^p\, dt_2\right]^{1/p} \quad ,$$

y donde $H_{d'}G$ es el operador potencial en el espacio E^m, es decir de la variable t_1. Como $H_{d'}G$ actúa del espacio E^m al espacio E^m, por el teorema 3 ya probado, $H_{d'}G$ es de tipo $(p_1\,,\, p_1^*)$ con $p_1 = 2m/(m + d') = 2m/m(2 - 2/p^*) = p$. Así pues $H_{d'}G$ es de tipo $(p\,,\, p^*)$, o sea

$$\|H_{d'}G\|_{p^*} \leqslant M\, \|G\|_p = M \left[\int_{E^m} |G(t_1)|^p\, dt_1\right]^{1/p} =$$

$$= M \left[\int_{E^m} \left\{\int_{E^{n-m}} |f(t_1\,,\, t_2)|^p\, dt_2\right\} dt_1\right]^{1/p} = M \left[\int_{E^n} |f(t)|^p\, dt\right]^{1/p} =$$

$$= M\, \|f\|_p^{(n)}$$

Por tanto de la preúltima desigualdad obtenemos, aplicando Hölder y usando la última desigualdad,

$$|(F\,,\, g)| \leqslant A\, \|g\|_p\, \|H_{d'}G\|_{p^*} \leqslant A\, 1\, M\, \|f\|_p = M_1\, \|f\|_p \quad ,$$

lo que prueba el teorema.

También puede demostrarse el teorema 5 por una verificación directa de las hipótesis de los lemas 6 , 6a , en el caso en que $n - (n+m)/2 \leq d < n - n(n+m)/(2m+1)$ luego extendiendo la tésis a los demás d .

G) El teorema 2 de los núcleos casi ortogonales en L^2 es caso particular del teorema más general siguiente (los lectores no familiarizados con álgebras de operadores pueden omitir la lectura de esta nota) :

TEOREMA DE LOS OPERADORES CASI ORTOGONALES EN ESPACIO DE HILBERT :

Sea $H = \{f\}$ un espacio de Hilbert (por ejemplo L^2) y $T_i = T_i f$ una sucesión de operadores lineales y acotados de H en H tales que :

1) cada T_i es hermiteano : $(T_i f, g) = (f, T_i g)$;

2) los T_i comutan : $T_i T_j = T_j T_i$;

3) son casi ortogonales : $\|T_i T_{i+j}\| \leq M^2 \varepsilon^j$, $\varepsilon < 1$.

Entonces : a) si $S_N = T_1 + \dots + T_N$ se tiene $\|S_N\| \leq M\, c(\varepsilon)$, para todo N;

b) para todo f de H , los elementos $S_N f$ convergen hacia un elemento Sf ;

c) Sf es un operador lineal y acotado de norma $\|S\| \leq M\, c(\varepsilon)$.

Evidentemente basta probar las partes a) y b) de la tésis .

Demostración de a) (debida a Béla Sz. Nagy, Acta Szeged 18 (1957)) :
Por un conocido teorema de Gelfand y Neumark (ver por ej. Neumark, Anillos Normados (1956), en ruso, o la traducción inglesa, Cap. III , párrafo 16) existe un espacio topológico compacto $W = \{w\}$ tal que el álgebra generada por los T_i es isoformo al de las funciones contínuas sobre W . Es decir, a todo operador T_i (así como a todo S_N y a todo $T_i T_j$) corresponde una función contínua $t_i(w)$ (o respectivamente $s_N(w)$) , definida en W , de modo tal que a $T_i T_j$ corresponde la función $t_i(w)\, t_j(w)$, y a S_N la función $t_1(w) + \dots + t_N(w) = s_N(w)$, y además se verifica que

$$\|T_i\| = \sup_w |t_i(w)| = \|t_i\| , \quad \|S_N\| = \sup_w |s_N(w)| = \|s_N\| .$$

La hipótesis 3) implica entonces la desigualdad $|t_i(w)\, t_j(w)| \leq M^2 \varepsilon^j$, que vale para todo w. Del lema numérico de la pág. 33 resulta entonces

$|t_i(w)| + \cdots |t_N(w)| \leq M\, c(\mathcal{E})$, para todo N, luego $|s_N(w)| \leq M\, c(\mathcal{E})$, y por tanto $\|s_N\| \leq M\, c(\mathcal{E})$.

Demostración de b) (indicación oral de I. Hirschman):

Por el teorema espectral de Algebras comutativas regulares (ver cap. IV, párrafo 17 del libro de Neumark citado) existen subespacios H_a de H tales que: (1) Todo f de H es igual a $f = \sum f_a$, donde f_a pertenece a H_a y la serie es absolutamente convergente, $\sum \|f_a\| < \infty$. (2) Para todo a existe una medida μ_a en $W = \{w\}$ talque $H_a = \{f_a\}$ es isomorfo al $L^2(W, \mu_a)$, de modo que a todo f_a de H_a corresponde un $f_a(w)$ de $L^2(W, \mu_a)$. (3) Para todo f_a de H_a y para todo T_i (así como todo $T_i\, T_j$) el elemento $g_a = T_i\, f_a$ también pertenece a H_a y se tiene que $g_a(w) = t_i(w)\, f_a(w)$.

De (1) resulta que es suficiente probar b) para todo f_a de H_a, y todo H_a. En efecto, supongamos que b) es cierto para todo f_a y probemos que es cierto para $f = \sum f_a = \sum_{i=1}^{\infty} f_{a_i} = \sum f_i$, $f_i = f_{a_i}$. Tomemos j tan grande para que sea $\sum_j^{\infty} \|f_i\| < \mathcal{E}$.

En virtud de a) tendremos que $\|S_N(\sum_j^{\infty} f_i)\| \leq M_1 \|\sum_j^{\infty} f_i\| \leq M_1 \mathcal{E}$. Además para cada $i = 1, \ldots, j$, se tiene por lo supuesto, que $\|S_N f_i - Sf_i\| < \mathcal{E}$, para N suficientemente grande. De acá resulta que

$\|S_N(\sum_1^{\infty} f_i) - S(\sum_1^{\infty} f_i)\| \leq j\mathcal{E} + M_1 . \mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ arbitrariamente pequeño, o sea que $S_N f$ tiende a Sf.

Nos queda pues tan solo probar que para un f_a de H_a se verifica que $S_N f_a$ es una sucesión convergente. Por la propiedades (2) y (3) al elemento $g_N = S_N f_a$ de H_a les corresponde la función $g_N(w) = s_N(w)\, f_a(w)$ de $L^2(W, \mu_a)$, y por tanto bastaprobar que las funciones $g_N(w)$ convergen en media-2 respecto de la medida μ_a. Ahora en a) hemos probado que $\sum_1^{\infty} |t_i(w)| \leq M_1$, o sea con más razón $\sum t_i(w)$ es convergente y por tanto las $s_N(w)$ convergen en cada w de W a una función límite $s(w)$, y se tiene $|s_N(w)| \leq M_1$. Luego también

$$|s_N(w) - s(w)|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{para todo } w \text{ de } W$$

y $|s_N(w) - s(w)| \leq M_1$. Luego para toda $g_N(w) = s_N(w) f_a(w)$ tenemos

$$|g_N(w) - s(w) f_a(w)|^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{para todo } w \text{ de } W$$

y $|g_N(w) - s(w) f_a(w)|^2 \leq 4 M_1^2 |f_a(w)|^2$ = función integrable respecto de μ_a.
Podemos pues integrar término a término la última sucesión, obteniendo

$$\int_W |g_N(w) - s(w) f_a(w)|^2 \, d\mu_a \longrightarrow 0$$

o sea $\|g_N - s(w) f_a\|_2 \longrightarrow 0$, lo que prueba la tésis.

Análogamente se generalizan los teoremas sobre sucesiones de parámetro contínuo; indicados en E) a operadores en espacios de Hilbert. Por ejemplo se tiene el siguiente

<u>Teorema de operadores casi ortogonales dependientes de un parámetro contínuo</u> : <u>Sean V, W (y μ como en E), y supongamos que a todo x de E^n corresponde un operador hermiteano T_x en el espacio de Hilbert H, tal que si para todo par x, y de E^n los operadores T_x, T_y comutan y verifican la desigualdad</u>

$$\|W(T_x ; T_y)\| \leq V([x , y]) \qquad ;$$

<u>entonces, poniendo</u>

$$S_N = \int_{|x| < N} T_x \, d\mu(x) ,$$

<u>los operadores S_N verifican las propiedades a), b) y c) del teorema que precede</u>.

Evidentemente en estos teoremas se puede reemplazar la condición de que los T_i son hermiteanos por la de que los T_i son normales y que los T_i así como los T_i^* comutan entre sí. En esta forma el teorema 2 queda abarcado como un caso particular.

H) Con respecto al teorema anterior, de los operadores casi ortogonales en L^2, quedan abiertas las cuestiones siguientes :

<u>Problema 1</u> : ¿ sigue siendo cierto el teorema de los operadores casi ortogonales en L^2 si los T_i no comutan; idem si los T_i no son hermiteanos o normales ?

Más importante para nosotros es el siguiente

<u>Problema 2</u> : Generalizar el teorema de los operadores casi ortogonales para o-

peradores T_i de L^p en L^p , $p \neq 2$ suponiendo que los T_i son simétricos en el sentido de que la relación $(T_i f , g) = (f , T_i g)$ se verifica para todo par f , g de funciones elementales de L_o .

La solución del problema 2 permitirá posiblemente uniformizar y simplificar varios resultados referentes a tipos (p , p) .

La demostración anterior de G) no se aplica a L^p , $p \neq 2$, y para la solución del Problema 2 podría ser útil tener una demostración directa (del caso precedente, es decir de L^2) que no use el teorema del isomorfismo del álgebra generado por los T_i con las funciones contínuas en W . Una tal demostración (para la parte a) de la tésis) fué dada originalmente en la Revista Mat. Cuyana, 1 (1955), 41-55, y pasamos a esbozarla a continuación.

A pesar de ser la demostración que sigue directa y elemental, ella no se aplica aún al caso de L^p , $p \neq 2$, pues ella usa la fórmula

$$\|T\| = \lim_{r \to \infty} (\|T^r\|)^{1/r} \tag{66}$$

que vale para operadores hermiteanos T en L^2 , pero no para operadores T en L^p . [En realidad usaremos la fórmula (66) sólo con r de la forma $r = 2^s$; para estos r la fórmula (66) es consecuencia directa de la relación

$$\|T\|^2 = \|T^2\| \quad , \tag{66a}$$

pues (66a) da $\|T\| = \{\|T^2\|\}^{1/2} = \{\|T^4\|\}^{1/4} = .. , etc ..$

Para probar (66a) basta observar que, por ser T hérmiteano, se tiene para toda f de L^2 , $\|Tf\|^2 = (Tf , Tf) = (f , T^2 f) \leq \|T^2 f\| \ \|f\| \leq$

$\leq \|T^2\| \ \|f\| \ \|f\| = \|T^2\| \ \|f\|^2$, luego $\|T\| \leq (\|T^2\|)^{1/2}$; pero recíprocamente, $\|T^2 f\| = \|T(Tf)\| \leq \|T\| \ \|Tf\| \leq \|T\| \ \|T\| \ \|f\| =$

$= \|T\|^2 \ \|f\|$, luego $\|T^2\| \leq \|T\|^2$, que junto con la desigualdad precedente da (66a)] .

La fórmula (66) puede generalizarse para operadores T en L^p , simétricos, de la manera siguiente : sea T_1 el operador definido por

$$T_1 f = T\left[T\left(T\left[\left(T\left[(Tf)^{p-1}\right]\right)^{p^*-1}\right]\right)^{p-1}\right] ,$$

entonces se puede probar que vale la fórmula

$$\|T\| = \lim_{r\to\infty} \left(\|T_1{}^r\|\right)^{1/(2p+1)r} , \qquad (66b)$$

donde $\|T\|$ indica ahora la norma respecto de L^p es decir $\|T\| = \|Tf\|$ para los $\|f\|_p = 1$.

Sin embargo la fórmula (66b) tiene el inconveniente de que para $p \neq 2$ el operador T_1 no es lineal y esto dificulta la extensión de la demostración que sigue al caso de los L^p , $p \neq 2$.

Así pues, el Problema 2 está sin resolver, pero la demostración que sigue (del caso L^2) y la fórmula (66b) puedan tal vez proporcionar un camino para la solución de este problema.

Pasamos ahora a esbozar dicha demostración directa del teorema de los operadores ortogonales en L^2 , enunciado en G) . Podemos suponer que en la hipótesis 3) de este teorema es $M = 1$.

De la hipótesis de este teorema tenemos que $\|T_i\| \leq 1$ y que $\|T_i T_m\| \leq \varepsilon^{|m-i|}$, y la tésis equivale, en virtud de (66), a que el límite (para r tendiente a infinito) de la expresión

$$A_r = \left(\|(T_1 + \dots T_N)^r\|\right)^{1/r} = \|(S_N)^r\|^{1/r} \qquad (66c)$$

es menor que un número fijo $c(\varepsilon)$, independiente de N . Por la fórmula de Leibnitz tenemos que

$$S_N{}^r = (T_1 + \dots T_N)^r = \sum_{a_1+\dots a_N=r} \frac{r!}{a_1! \dots a_N!} T_1{}^{a_1} \dots T_N{}^{a_N} \qquad (67)$$

Consideremos un término cualquiera $T_1{}^{a_1} \dots T_N{}^{a_N}$ de esta suma, y escribámoslo como un producto de la forma

$$T_1^{a_1} \cdots T_N^{a_N} = (T_{j_1} T_{m_1})^{\ell 1} (T_{j_2} T_{m_2})^{\ell 2} \cdots , \tag{68}$$

es decir como producto de potencias de productos de pares (con eventualmente una potencia de un solo factor sin pareja) . Por ejemplo, si tenemos el término $T_1^2 T_2^2 T_3^o T_4^3 T_5^o T_6^6$ lo escribimos, por ejemplo, como

$$T_1^2 T_2^2 T_3^o T_4^3 T_5^o T_6^6 = (T_1 T_6)^2 (T_2 T_4)^2 (T_4 T_6)^1 (T_6)^3 . \tag{68a}$$

Acada término de la forma (68) la asociamos el punto o el vector $v = [a_1 , -a_N]$ del espacio (discreto) de N dimensiones E^N_{disc} , En particular indicamos con $v_{j\,m}$ el vector v tal que $a_j = a_m = 1$ y $a_i = 0$ si $i \neq j , m$.
A toda descomposición del término $T_1^{a_1} \cdots T_N^{a_N}$ en potencias de pares de la forma (68) corresponde una descomposición del vector correspondiente v en una suma

$$v = \ell_1 v_{j_1 m_1} + \ell_2 v_{j_2 m_2} + \cdots \tag{68b}$$

Así, en el ejemplo (68a) tenemos que $v = [2 , 2 , 0 , 3 , 0 , 6]$ y la descom - posición (68a) se escribe

$$v = 2 v_{1\,6} + 2v_{2\,4} + 1v_{4\,6} + 3v_6 \quad . \tag{68c}$$

De la hipótesis y de (68a) tendremos que

$$\| T_1^{a_1} - T_N^{a_N} \| \leq \varepsilon^{\ell_1 |j_1-m_1| + \ell_2 |j_2-m_2| + \cdots} \tag{68d}$$

Así pues, si a cada descomposición del vector v en la forma (68b) le hacemos asociar la suma $\ell_1 |j_1 - m_1| + \ell_2 |j_2 - m_2| + \cdots$, y si designamos con

$|v| = |[a_1, \dots a_N]|$ al supremum de estas sumas, para las posibles tales descomposiciones de v, entonces a todo vector v le corresponde un número fijo $|v|$ y de (68d) obtenemos que

$$\left\| T_1^{a_1} \dots T_N^{a_N} \right\| \leq \varepsilon^{|v|} = \varepsilon^{|[a_1, \dots a_N]|} \quad . \tag{68e}$$

Así pues a todo término $T_1^{a_1} \dots T_N^{a_N}$ le hicimos corresponder un vector v, y a todo vector v un número $|v| = |[a_1, \dots a_N]|$, que depende solo de v, y se tiene la desigualdad (68e). Luego

$$\left\| (S_N)^r \right\| \leq \sum_{a_1 + \dots a_N = r} \frac{r!}{a_1! \dots a_N!} \varepsilon^{|[a_1, \dots a_N]|} \quad . \tag{68f}$$

Así pues para acotar el número A_r de (66c) basta acotar la suma de (68f), y esto es un problema puramente combinatorio. Por un cálculo combinatorio se puede probar (ver los detalles en el artículo citado de la Revista Mat. Cuyana) que

$$\sum_{a_1 + \dots a_N = r} \frac{r!}{a_1! \dots a_N!} \varepsilon^{|[a_1, \dots a_N]|} \leq N \, r \, r^{(r^{3/4})} \frac{\varepsilon^{8r}}{(1 - \varepsilon^5)^{2r} (1 - \varepsilon)^r} \tag{69}$$

luego

$$\left\| (S_N)^r \right\|^{1/r} = A_r \leq N^{1/r} r^{1/r} r^{1/r^{1/4}} \frac{\varepsilon^3}{(1 - \varepsilon^5)^2 (1 - \varepsilon)} \quad ,$$

y esto tiende, para r tendiente a infinito, a un número finito $o(\varepsilon)$ que no depende de N, lo que prueba el teorema.

<u>Observación</u>: De la demostración que precede está claro que la hipótesis 3) de casi ortogonalidad implica esta otra: para todo vector $v = [a_1, \dots a_N]$ vale la desigualdad (68e). Diremos que las T_i son <u>casi ortogonales en sentido generalizado</u> si se verifica (68e). Luego el teorema subsiste aún para sucesiones casi ortogonales en sentido generalizado. Esta observación puede ser útil para el Problema 2, es decir para encontrar una formulación del enunciado del teorema para L^p, $p \neq 2$.

La demostración directa, de tipo combinatorio, que acabamos de esbozar, da tan solo la parte a) de la tésis . Sería interesante saber cómo se puede modificar esta demostración, conservando su idea básica, para que permita obtener también la parte b) del teorema.

III EXTENSION DE LA NOCION DE TIPO

1 . DEFINICION DE TIPO DEBIL . De acuerdo a la definición 1 de la pág. 3, el operador $h(y) = Tf(y)$ es de tipo $(L^p(E, \mu) ; L^s(E_1, \mu_1))$ si existe una constante M fija tal que para toda función $f(x)$ se verifica

$$\int_{E_1} |Tf(y)|^s \, d\mu_1 \leq (M \|f\|_p)^s \quad . \tag{1}$$

Si $a > 0$, $E(a)$ = conjunto de los y tales que $|Tf(y)| > a$ y si $D(a ; |Tf|) = \mu_1(E)$, se tiene por la desigualdad de Tchebicheff (pág. 29) que

$$a^s D(a ; |Tf|) \leq \int_{E_1} |Tf(y)|^s \, d\mu_1 \quad . \tag{2}$$

De (1) y (2) sigue que si $s < \infty$ entonces

$$D(a ; |Tf|) \leq (M \|f\|_p / a)^s \quad . \quad (s < \infty) . \tag{3}$$

Así pues si T es de tipo (p , s) entonces se verifica (3) para toda $f(x)$ y todo $a > 0$.

DEFINICION . Si $s < \infty$, diremos que el operador Tf es de tipo debil(p , s) (más exactamente de tipo debil $(L^p(E, \mu) ; L^s(E_1, \mu_1))$) , si existe una constante M tal que se verifica (3) para toda $f(x)$ y todo $a > 0$. Si (3) se verifica para todo $a > 0$ y toda $f(x)$ de $\mathcal{L}$, diremos que T es de tipo debil (p , s) sobre $\mathcal{L}$. La mínima constante M para la cual vale (3) se llamará norma debil (p , s) de T . Si $s = \infty$, diremos que T es de tipo debil (p , ∞) si es de tipo (p , ∞) .

De lo dicho resulta que si T es de tipo (p , s) entonces T es de tipo debil (p , s), pero la recíproca no es cierta como se verá más adelante (veremos que la trans formación de Hilbert Hf es de tipo debil $(1, 1)$ y no de tipo $(1 \cdot 1)$). En vez de tipo debil (p, s) hablaremos también de tipo debil P donde P es el punto del plano de coordenadas $(1/p, 1/s)$ (cfr. pág. 3).

DEFINICION. Si $s < \infty$, diremos que el operador Tf verifica la condición (p, s) de Kolmogoroff con constante M_1, si para todo $s' < s$, $s' > 0$, para toda $f(x)$ y para todo conjunto $X \subset E_1$ de medida finita, se verifica

$$\left\{ \int_X |Tf(y)|^{s'} \, d\mu_1 \right\}^{1/s'} \leq M_1 (s/(s - s'))^{1/s'} \, |X|^{1/s' - 1/s} \, \|f\|_p \qquad (4)$$

donde $|X| = \mu_1(X)$.

Esto significa qu Tf es de tipo (p, s') sobre todo conjunto X, con norma que varía con $|X|$, cualquiera sea $s' < s$. En particular, si el espacio E_1 tiene medida finita $\mu_1(E_1) < \infty$, entonces haciendo en (4) $X = E_1$ resulta que Tf es de tipo (p, s'). Así pues la condición de Kolmogoroff implica, en caso de espacios E_1 de medida finita (por ejemplo si E_1 es un intervalo acotado o la circunferencia), que Tf es de tipo (p, s') para todo $s' < s$. Pero en caso de E_1 infinito (por ejemplo $E_1 = E^n$) no se puede afirmar que la condición de Kolmogoroff implica el tipo (p, s') sobre todo E_1, sino tan solo sobre los conjuntos X de medida finita. Si la condición (4) se cumple para un solo valor $s' < s$ diremos que el operador verifica la condición de Kolmogoroff para este valor s'.

TEOREMA 1. a) Si Tf verifica la condición (4) de Kolmogoroff para un solo valor s', $s' < s < \infty$, y con constante M_1, entonces Tf es de tipo debil (p,s) con norma debil $M \leq M_1 (s/(s - s'))^{1/s'}$. b) Si Tf es de tipo debil (p, s), entonces Tf verifica la condición (4) de Kolmogoroff para todo $s' < s$ y con constante $M_1 = M =$ norma debil (p, s) de Tf.

Observación: Si hacemos la convención de que para $s = \infty$ es $s/(s - s') = 1$, entonces el teorema subsiste para $s = \infty$. Así pues este teorema dice que salvo una modificación inesencial de las constantes M, tipo debil (p, s) es lo mismo que condición de Kolmogoroff $(p\ ,\ s)$. Además de este teorema sigue que si (4) se verifica para un valor $s' < s$ entonces esta condición se verifica también para todo otro $s' < s$.

<u>Demostración</u> . a) Supongamos que se verifica (4) para un $s' < s$ fijo. Sea $a > 0$ y sea $X = E(a) =$ conjunto de los y de E_1 tales que $|Tf(y)| \geq a$; entonces usando (4) tendremos,

$$a^{s'}\ |X| \leq \int_X |Tf(y)|^{s'}\ d\mu_1 \leq (M_1(s/(s-s'))^{1/s'}\ \|f\|_p)^{s'}\ |X|^{1-s'/s}\ ,$$

luego pasando los términos en $|X|$ al miembro izquierdo, resulta

$$a^{s'}\ |X|^{s'/s} \leq (M\ \|f\|_p)^{s'}\ , \qquad \text{con} \quad M = M_1(s/(s-s'))^{1/s'}\ ,$$

o sea

$$|X| \leq (M\ \|f\|_p\ /\ a)^s\ ,$$

donde $|X| = |E(a)| = D(a\ ;\ |Tf|)$, lo que prueba el tipo debil $(p\ ,\ s)$.

b) Supongamos ahora que Tf es de tipo debil $(p\ ,\ s)$ o sea que se verifica (3), y probaremos que se verifica (4) para todo $s' < s$ y todo conjunto $X \subset E_1$.

Sea $E'(a) =$ conjunto de los y <u>pertenecientes a X</u> y tales que $|Tf(y)| > a$ y sea $D_1(a) = \mu_1(E'(a))$. Como $E'(a) \subset X$ tenemos

$$D_1(a) \leq |X|\ ; \qquad (5)$$

como $E'(a) \subset E(a) =$ conjunto de todos los <u>y</u> tales que $|Tf(y)| > a$, resulta $D_1(a) \leq D(a\ ;\ |Tf|)$, y por tanto, en virtud de (3), tenemos :

$$D_1(a) \leq (M\ \|f\|_p\ /\ a)^s\ . \qquad (5a)$$

Además de la definición de $E'(a)$ y $D_1(a)$ y del lema 4 de la pág. 31, aplicado con $p = s'$, $E = X$, $D(a) = D_1(a)$, tenemos que

ð _

$$\int_X |Tf(y)|^{s'} \, d\mu_1 = s' \int_0^{\infty} a^{s'-1} \; D_1(a) \, da \qquad (6)$$

Sea N un número arbitrario. Usando (5) y (5a), tendremos de (6):

$$\int_X |Tf(y)|^{s'} \, d\mu_1 = s' \int_0^{N} a^{s'-1} \; D_1(a) \, da + s' \int_N^{\infty} a^{s'-1} \; D_1(a) \, da \leqslant$$

$$\leqslant s' \int_0^{N} a^{s'-1} \; |X| \, da + s' \int_N^{\infty} a^{s'-1} \; (M \; \|f\|_p)^s \; a^{-s} \, da =$$

$$= N^{s'} \; |X| + s'/(s - s') \; (M \; \|f\|_p)^s \; N^{s'-s}$$

Siendo N arbitrario, pongamos $N = M \; \|f\|_p \; |X|^{-1/s}$, entonces de la última desigualdad resulta

$$\int_X |Tf(y)|^{s'} \, d\mu_1 \leqslant (M \; \|f\|_p)^{s'} \; |X|^{1-s'/s} \; (s/(s - s')) ,$$

que es la condición (4) con $M_1 = M$, l,q,d,d.

<u>OBSERVACION 1</u>. En realidad hemos demostrado este teorema, más preciso: <u>Si para una $f(x)$ fija existe una constante M tal que se verifica (3) para todo $a > 0$, entonces para esta $f(x)$ se verifica (4) para todo $s' < s$ y todo X, con $M_1 = M$. Recíprocamente, si para una $f(x)$ individual existe una M_1 tal que vale (4) para todo conjunto X y $s' < s$, entonces existe una M tal que (1) se verifica para todo $a > 0$ y esta $f(x)$ individual</u>. Es decir la equivalencia de (3) y (4) vale con $f(x)$ fijada.

De esta observación resulta enseguida el siguiente

<u>COROLARIO 1</u>. <u>Sea $p = 1$, $1 < s < \infty$, y sea $\Phi = \{f(x)\}$ una familia de funciones no-negativas $f \geqslant 0$</u>. <u>Si existe una constante M tal que (3) se verifica para todo $a > 0$ y toda $f(x)$ de Φ, entonces (3) se verifica también para todo $a > 0$ y toda $g(x)$ de la forma $g(x) = c_1 f_1(x) + .. + c_k f_k(x)$, donde las</u>

$f_i(x)$ y $c_i \geq 0$ son de Φ (pero con M_1 en vez de M). Es decir, si Tf es de tipo debil $(1, s)$, $1 < s < \infty$, sobre Φ entonces Tf es de tipo debil sobre $\sum$ = = las posibles combinaciones lineales de funciones de Φ. En particular, si Tf verifica (3) para toda $f(x)$ = función característica de un cubo n-dimensional, y con $p = 1$, $s > 1$, entonces Tf es de tipo debil $(1, s)$ sobre L_0 = funciones simples escaleras.

Demostración. Como (3) implica (4), tomando un $s' < s$ tal que $s' \geq 1$, tendremos

$$\left\{\int_X |Tg(y)|^{s'} d\mu_1\right\}^{1/s'} \leq \sum_{i=1}^k \left\{\int_X |c_i Tf_i(y)|^{s'} d\mu_1\right\}^{1/s'} \leq$$

$$\leq M(s/(s-s'))^{1/s'} |X|^{1/s'-1/s} \sum_i c_i \int |f_i(x)| d\mu =$$

$$= M(s/(s-s'))^{1/s'} |X|^{1/s-1/s} \|g\|_1$$

Luego la condición (4) se verifica para $g(x)$, y por el teorema 1 (ver observación 1), la (3) se verifica para $g(x)$ con $M_1 = M(s/s-s')^{1/s'}$, l,q,d,d.

Observación 2. El Corolario 1 no vale si $s = 1$ pues en este caso será $s' < 1$ y no se podrá aplicar la desigualdad de Minkovski que se usó en la demostración precedente. Generalmente resulta fácil calcular la función $Tf(y)$ si $f(x)$ es una función característica de un cubo, y por tanto resulta fácil determinar si Tf es de tipo debil sobre el conjunto de tales funciones características.
Luego, el Corolario 1 permite, en general, determinar facilmente si Tf es de tipo $(1, s)$ si $s > 1$, pero no puede ayudar a determinar el tipo debil $(1, 1)$. En particular, como veremos enseguida, el Corolario 1 permite establecer directamente que los operadores potenciales $H_d f$ son de tipo debil $(1, s)$ con $1/s = 1 - d/n$; en cambio este Corolario 1 no puede ayudarnos a probar que los operadores de Hilbert son de tipo debil $(1, 1)$, cuya demostración será más complicada y se hará mediante la noción de pseudo-tipo.

TEOREMA 2. a) El operador potencial

$$H_d f(x) = F(x) = \int_{E^n} \frac{f(t)}{|X - t|^{n-d}} \, dt = f * \frac{1}{|t|^{n-d}} \qquad (7)$$

es de tipo debil $(1, n/(n-d))$. b) Si en (7) t varía en E^n y x en E^m, $E^m \subset E^n$, entonces $H_d f$ es de tipo debil $(1, n/(n-d))$ = tipo debil $(L^1(E^n), L^{m/(n-d)}(E^m))$. c) Si en (7) t varía en E^n y x en $E^m \supset E^n$, entonces $H_d f$ es de tipo debil $(L^1(E^n), L^{m/(n-d)}(E^m))$.

Siempre que sea $m/(n-d) > 1$, es decir $n < m + d$.

Observación 3. Tipo debil $(1, m/(n-d))$ = tipo debil P donde $P = (1, (n-d)/m)$ es el extremo del segmento de los puntos $(1/p, 1/r)$ que satisfacen la ecuación

$$1/p - \frac{m}{n}\frac{1}{r} = \gamma/n \qquad (8)$$

que para $m = n$ se reduce a

$$1/p - 1/r = \gamma/n \qquad (8a)$$

Demostración. a) Sea $E_n(a)$ = conjunto de las x de E^n tales que $|H_d f(x)| > a$; se trata de probar que existe una constante M tal que para toda f y todo $a > 0$ se verifica

$$|E_n(a)| = \text{medida de } |E_n(a)| \leq \left(\frac{M}{a}\int_{E^n} |f(x)| \, dx\right)^{n/(n-d)} \qquad (9)$$

Como $n/n-d > 1$, basta, por el Corolario 1, probar que (9) vale para todas las $f(x)$ = funciones características de cubos de E^n, con la misma constante M.

Sea $f(x)$ = función característica del cubo de centro c y lado ℓ, de modo que $f(t) = 0$ si $|t - c| > 2\ell$ y $|f(t)| \leq 1$ si $|t - c| \leq 2\ell$, luego tendremos

$$H_d f(x) \leq \int_{|t-c| < 2\ell} \frac{dt}{|x-t|^{n-d}} = \int_{|t-(x-c)| < 2\ell} \frac{dt}{|t|^{n-d}} \qquad (10)$$

De (10) se deduce facilmente, pasando a coordenadas polares, que existe una constante fija c_n, que depende solo de la dimensión del espacio ($c_n = 4^n W_n$, W_n = volumen de la esfera unitaria de E^n) tal que

$$|H_d f(x)| \leq c_n \ell^n / |x|^{n-d} \tag{10a}$$

Si x pertenece a $E_n(a)$, entonces de (10a) resulta $c_n \ell^n / |x|^{n-d} > a$, luego

$$|x| < (c_n \ell^n / a)^{1/(n-d)} \; ; \tag{10b}$$

esto significa que el conjunto $E_n(a)$ está contenido en la esfera de radio $(c_n \ell^n/a)^{1(n-d)}$, y por tanto

$$|E_n(a)| \leq \text{volumen de la esfera de radio } (c_n \ell^n/a)^{1(n-d)} \leq$$

$$\leq M_n (c_n \ell^n/a)^{n/n-d} = (M \ell^n/a)^{n/n-d} =$$

$$= (M \text{ (medida del cubo de lado } \ell)/a)^{n/(n-d)} = (M \|f\|_1 /a)^{n(n-d)} ,$$

que es la igualdad deseada (9) .

b) y c) : Cuando x varía en el espacio m se debe entender por $|E_n(a)|$ a la medida m-dimensional de $E_n(a)$. Pero en este caso el volumen de la esfera de radio $(c_n \ell^n/a)^{1(n-d)}$ será $M_n(c_n \ell^n/a)^{m/(n-d)}$ y obtendremos que $|E_n(a)| \leq$ $\leq (M \|f\|_1 /a)^{m(n-d)}$, o sea que Tf es de tipo debil $(1 , m/(n-d))$, l,q,d,d.

2 . TEOREMA DE MARCINKIEWICZ PARA EL CASO (p , p)

Pasaremos a considerar una importante generalización del teorema de convexidad de Riesz - Thorin, debida a Marcinkiewicz y Zygmund, en que la hipótesis de tipo se reemplaza por la de tipo debil. Para mejor comprensión de la idea de la demostración, consideraremos antes el caso particular de tipos (p , p), es decir de tipos P donde P es punto de la diagonal del cuadrado de los tipos; más adelante expondremos el teorema completo para los tipos (p , r) generales, $r \neq p$. En lo que sigue es suficiente, además, suponer que Tf está definido sobre L_0.

Diremos que el operador Tf es <u>sublineal</u>, si se verifican las dos condiciones siguientes:

1) si $f = g + h$ entonces para todo y (o casi todo y) se verifica

$$|Tf(y)| \leqslant |Tg(y)| + |Th(y)| \quad ; \tag{11}$$

2) si $f = cg$, c = constante, entonces

$$|Tf(y)| = |c|\,|Tg(y)| \,. \tag{11a}$$

De la condición (11) y de la propiedad c) de la página 28, se deduce que si $f = g + h$ entonces

$$D(|Tf| \,;\, a) \leqslant D(|Tg| \,;\, a/2) + D(|Th| \,;\, a/2) \quad , \tag{12}$$

donde $D(f \,;\, a)$ es la función de distribución de f definida en pág. 28.

Para toda función no-negativa $f(x) \geqslant 0$ y todo $a > 0$ designaremos con

$$f^a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{en los puntos } x \text{ tales que } f(x) \geqslant a \\ 0 & \text{en los demás } x \,, \end{cases} \tag{13}$$

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < a \\ 0 & \text{en los demás } x \,, \end{cases} \tag{13a}$$

de modo que

$$f = f^a + f_a \quad , \quad f^a f_a = 0 \tag{13b}$$

Por definición, si Tf es de tipo débil (p, p), entonces para todo $a > 0$ se verifica

$$D(|Tf| \,;\, a) \leqslant (M \,\|f\|_p /a)^p \quad . \tag{14}$$

Ahora si Tf es de tipo (∞, ∞), entonces se tiene el siguiente :

LEMA 1 . Sea Tf un operador sublineal. a) Si Tf es de tipo debil (p , p) con norma M (es decir vale (14)), y si Tf es también de tipo debil$((\infty , \infty)$ = = tipo (∞ , ∞) con norma B , entonces para todo $a > 0$ vale

$$D(|Tf| ; a) \leq \left(\frac{2M}{a} \|f^{(z)}\|_p\right)^p , \quad \text{con} \quad z = a/(2B) . \tag{14a}$$

b) Si T es de tipo debil (p_1 , p_1) y de tipo debil (p_2 , p_2) con normas M_1 , M_2, respectivamente, y si $p_1 < p_2 < \infty$, entonces para $a > 0$ y todo $B > 0$, vale

$$D(|Tf| ; a) \leq \left(\frac{2M_1}{a} \|f^{(z)}\|_{p_1}\right)^{p_1} + \left(\frac{2M_2}{a} \|f_z\|_{p_2}\right)^{p_2} , \quad (z = a/2B) , \tag{14b}$$

Demostración . a) De $f = f^z + f_z$ sigue $|Tf| \leq |Tf^z| + |Tf_z|$. Tenemos $z = a/2B$, y $|f_z(x)| \leq z$ para todo x , es decir $\|f_z\|_\infty \leq z$, luego siendo Tf de tipo (∞ , ∞), resulta $\|Tf\|_\infty \leq B \|f_z\|_\infty = Bz = a/2$, es decir $|Tf(x)| \leq a/2$ para todo x . De esta desigualdad y de la propiedad d) de la página 29 sigue que $D(|Tf| ; a) \leq D(|Tf^z| ; a)$, luego aplicando (14) resulta $D(|Tf| ; a) \leq D(|Tf^z| ; a/2) \leq (M \|f^z\|_p /(a/2))^p$, que es (14a) .

b) De $|Tf(y)| \leq |Tf^z(y)|+|Tf_z(y)|$ resulta (ver pág. 28) que $D(|Tf| ; a) \leq$ $\leq D(|Tf^z| ; a/2) + D(|Tf_z| ; a/2) \leq (M_1 \|f^z\|_{p_1}/(a/2))^{p_1} + (M_2 \|f_z\|_{p_2}/(a/2))^{p_2}$ que es (14b) (en el último paso hemos aplicado la hipótesis de tipo debil (p_1 , p_1) al primer sumando, y la de tipo debil (p_2 , p_2) al segundo sumando) ,l,q,d,d.

El lema 1 dice que si T , además de tipo (p , p), es de tipo (∞ , ∞), entonces en vez de (14) tenemos la desigualdad (14a), más fuerte que la (14) pues en lugar de f tenemos la función menor $f^z \leq f$. Consideremos todavía la siguiente condición, simétrica de la (14a) :

$$D(|Tf| ; a) \leq ((2M/a) \|f_z\|_p)^p , \quad \text{con} \quad z = a/2B . \tag{14c}$$

LEMA 2 . a) Si el operador Tf verifica la condición (14a) para $p = p_1$

(con $M = M_1$ independiente de a y de f y con B fijo), entonces T es de tipo $(p\,,\,p)$ para todo $p > p_1$ y con norma

$$\|T\|_p \leq 2\left[p/(p-p_1)\ B^{p-p_1}\ M_1^{p_1}\right]^{1/p} \tag{15}$$

b) Si T verifica (14c) para $p = p_2$, y con $M = M_2$, entonces T es de tipo $(p\,,\,p)$ para todo $p < p_2$ y vale

$$\|T\|_p \leq 2\left[p/(p_2-p)\ B^{p-p_2}\ M_2^{p_2}\right]^{1/p} \tag{15a}$$

c) Si T verifica (14b) con $p_1 < p_2$, entonces T es de tipo $(p\,,\,p)$ para todo $p_1 < p < p_2$, y vale

$$(\|T\|_p)^p \leq 2^p\ p/(p-p_1)\ B^{p-p_1}\ M_1^{p_1} + 2^p\ p/(p_2-p)\ B^{p-p_2}\ M_2^{p_2} \tag{15b}$$
.

Demostración. a) Usando el lema 4 de la pág. 31 y la hipótesis (14a) para $p = p_1$, $N = M_1$, tendremos,

$$\int_{E_1} |Tf(y)|^p\,dy = p\int_0^\infty a^{p-1}\,D(|Tf|\,;\,a)\,da \leq$$

$$p\int_0^\infty \left\{a^{p-1}\left(\frac{2M_1}{a}\right)^{p_1}\int_E |f^z(x)|^{p_1}\,dx\right\}da =$$

$$= 2^{p_1}\,p\,M_1^{p_1}\int_E dx\int_0^\infty a^{p-p_1-1}\,|f^z(x)|^{p_1}\,da\ ,\quad (z = a/2B)\ .$$

Como $f^z(x) = 0$ si $f(x) < z = a/2B$, es decir para $a > 2B\,|f(x)|$, y $f^z(x) = f(x)$ para $f(x) \geq z$, es decir para $a \leq 2B\,|f(x)|$, la última fórmula se escribe :

$$\int_{E_1} |Tf(y)|^p\,dy \leq 2^{p_1}\,p\,M_1^{p_1}\int_E dx\int_0^{2B|f(x)|} a^{p-p_1-1}\,|f(x)|^{p_1}\,da =$$

$$= 2^{p_1} p M_1^{p_1} \int_E |f(x)|^{p_1} dx \int_0^{2B|f(x)|} a^{p-p_1-1} da .$$

Como $p > p_1$, la última integral en a vale

$$\left[(2B |f(x)|)^{p-p_1} - 0^{p-p_1}\right] /(p - p_1) ,$$

y resulta

$$\|Tf\|_p^p = \int_{E_1} |Tf(y)|^p dy \leq 2^p p M_1^{p_1} B^{p-p_1}/(p - p_1) \int_E |f(x)|^p dx =$$

$$= 2^p p M_1^{p_1} B^{p-p_1}/(p - p_1) \|f\|_p^p ,$$

lo que prueba la desigualdad (15) .

b) En este caso tenemos (14c), en vez de (14a), con $p = p_2$ y $M = M_2$, luego tendremos como en a), que

$$\int |Tf(y)|^p dy \leq 2^{p_2} p M_2^{p_2} \int_E dx \int_0^{\infty} a^{p-p_2-1} |f_z(x)|^{p_2} da .$$

Pero ahora $f_z(x) = 0$ para $z < f(x)$, es decir para $a < 2B |f(x)|$, y $f_z(x) = f(x)$ para $a > 2B |f(x)|$ luego

$$\int |Tf(y)|^p dy \leq 2^{p_2} p M_2^{p_2} \int_E |f(x)|^{p_2} dx \int_{2B|f(x)|}^{\infty} a^{p-p_2-1} da .$$

Como ahora es $p < p_2$, $p - p_2 < 0$, la última integral en a vale $(2B |f(x)|)^{p-p_2}/(p - p_2)$, y resulta (15a) .

c) La demostración de (15b) es una combinación obvia de a) y b) y no vamos a repetirla, dejándola a cargo del lector a título de ejercicio fácil .

<u>TEOREMA 3</u> (de Marcinkiewicz) . <u>Si el operador sublineal T es de tipo debil (p_1 , p_1) = tipo debil P_1 y de tipo debil (p_2 , p_2) = tipo debil P_2, con normas</u> debiles M_1 y M_2 respectivamente, y si $p_1 < p_2$ (p_2 puede ser $= \infty$) , entonces

T es de tipo (p, p) = tipo P para todo $p_1 < p < p_2$ (< estricto), es decir para todo P interior al segmento $P_1 P_2$. Más aún, si t es la relación en que P divide al segmento P_1, P_2, es decir si

$$1/p = t/p_1 + (1-t)/p_2 \tag{16}$$

entonces

$$\|T\|_p \leq 2(p/(p-p_1) + p/(p_2-p))^{1/p} M_1^{t} M_2^{1-t} \tag{17}$$

Demostración. Por hipótesis tenemos que para todo $a > 0$ y toda f se verifica

$$D(|Tf| ; a) \leq (M_1 \|f\|_{p_1}/a)^{p_1} , \tag{18}$$

$$D(|Tf| ; a) \qquad (M_2 \|f\|_{p_2}/a)^{p_2} , \tag{18a}$$

y queremos probar que para $p_1 < p < p_2$ se verifica

$$\left\{ \int |Tf|^p \, dy \right\}^{1/p} \leq M \|f\|_p \tag{18b}$$

con

$$\leq 2(p/(p-p_1) + p/(p_2-p))^{1/p} M_1^{t} M_2^{1-t} \tag{18c}$$

como

$$\int |Tf|^p \, dy = p \int_0^{\infty} a^{p-1} D(|Tf| ; a) \, da , \tag{19}$$

resulta natural que si queremos probar (18b) se debe sustituir, en (19), $D(|Tf| ; a)$ por las desigualdades (18) y (18a). Sin embargo, si sustituimos en (19) bruscamente una de las desigualdades (18), nos encontraremos con las dos dificultades siguientes. Por ejemplo sustituyendo en (19) la desigualdad (18) tendremos

$$\int |Tf|^p \, dy \leq p (M_1 \|f\|_{p_1})^{p_1} \int_0^{\infty} a^{p-p_1-1} \, da . \tag{20}$$

Pero $\int_0^{\infty} a^{p-p_1-1} \, da$ es divergente cualquiera sea $p - p_1 - 1$, y esta es una dificultad; por otra parte en el segundo miembro de (20) tenemos $\|f\|_{p_1}$ y quere - mos obtener $\|f\|_p$. Las mismas dos dificultades aparecerán si reemplazamos en (19) la desigualdad (18a) de la hipótesis .

Para evitar estas dificultades se usan los lemas 1 y 2 del modo siguiente.

1) Consideremos antes el caso en que $p_2 = \infty$, $p_1 < p < \infty$. Por hipótesis T es de tipo debil (p_1 , p_1) y de tipo debil (∞ , ∞), luego por el lema 1, a), se verifica (14a) con $p = p_1$, $B = M_2$ y $M = M_1$. Por el lema 2, a), resulta entonces que T es de tipo (p , p) con norma

$$\|T\|_p = M \leq 2 \, (p/(p - p_1))^{1/p} \, B^{(p-p_1)/p} \, M_1^{p_1/p} , \quad (B = M_2)$$

Pero de (16), y siendo $p_2 = \infty$, obtenemos $t = p_1/p$, $1 - t = (p - p_1)/p$, luego la última desigualdad se escribe

$$M \leq 2 \, (p/(p - p_1))^{1/p} \, M_1^{t} \, M_2^{1-t} ,$$

lo que prueba (18c) para $p_2 = \infty$.

2) Sea ahora $p_1 < p < p_2 < \infty$. Por el lema 1, b), se verifica (14b) para todo B. Luego por el lema 2, c), T es de tipo (p , p) con norma $\|T\|_p = M$ verificando (15b) . Como B es arbitrario eligimos B para que el miembro derecho de (15b) sea mínimo; para ello basta tomar B de modo que ambos sumandos de (15b) sean iguales. Un cálculo fácil, que dejamos a cargo del lector, da entonces que para este valor de B , (15b) se convierte en (17), con lo cual queda demostrado el teorema.

<u>Observación 3</u> . El teorema de Riesz - Thorin afirma dos cosas : 1) que T es de tipo P para P interior a P_1P_2 , 2) que la norma M verifica $M \leq M_1^{t} M_2^{1-t}$ El teorema de Marcinkiewicz generaliza completamente la parte 1), pero tan solo parcialmente la parte 2), pues en vez de $M \leq M_1^{t} M_2^{1-t}$ se tiene (17), que puede escrbirse $M \leq c_p \, M_1^{t} \, M_2^{1-t}$, donde el factor $c_p = p/(p - p_1) + p/(p_2 - p)$ tiende a infinito si P se aproxima a P_1 o a P_2. Sin embargo por la naturaleza de su hipótesis, el teorema de Marcinkiewicz no puede proporcionar una desigualdad de la forma

$M \leqslant c_p \; M_1^{\;t} \; M_2^{\;1-t}$ con $_p$ acotada, pues tal desigualdad implicaría que T es de tipo P_1 y de tipo P_2, cosa que no puede ser si T es de tipo debil y no tipo en los extremos P_1 y P_2.

Si T es de tipo debil (p, p) no se puede afirmar que sea de tipo (p, p), y ni siquiera se puede afirmar que $f \in L^p$ implique $Tf \in L^p$. Pero veremos enseguida que si $f(x)$ es "algo más" que de L^p entonces Tf pertenece a L^p, por lo menos "sobre conjuntos de medida finita". Más precisamente:

Diremos que $f(x)$ pertenece a Z^p (clase de Zygmund) si $f \in L^p$ y si también $|f|^p \log^+ |f| \in L^1$; en otros términos si $|f|^p (1 + \log^+ |f|)$ es integrable, donde $\log^+ |f|$ es igual a $|\log f(x)|$ en los puntos en que $|f(x)| \geqslant 1$, y a cero si $|f(x)| < 1$. También se puede decir que f pertenece a Z^p si $|f|^p (1 + \log (1 + |f|))$ es integrable.

Para conjuntos de medida finita se tiene que si $|f|^q$ es integrable entonces $|f|^r$ es integrable para todo $r < q$; luego si $|f|^{p+\varepsilon}$ es integrable para algún $\varepsilon > 0$ entonces será $|f|^p \log |f|$ integrable, o sea $f \in Z^p$. Así pues, para conjuntos de medida finita, la condición $f \in Z^p$ es más que $f \in L^p$ pero menos que $f \in L^{p+\varepsilon}$, por pequeño que sea $\varepsilon > 0$.

TEOREMA 4. Si el operador sublineal T es de tipo debil (p, p) y de tipo debil (q, q), $p < q$, y si X es un conjunto de medida finita, entonces T transforma funciones $f(x)$ de Z^p en funciones Tf de $L^p(X)$, y se tiene

$$\int_X |Tf|^p \, dy \leqslant M \left\{ |X| + \int_E |f(x)|^p \, (1 + \log^+ |f(x)|) \, dx \right\} , \qquad (21)$$

donde M no depende de f y de X, y $|X|$ = medida de X.

Demostración. Sea $D(a)$ = medida del conjunto de los puntos y tales que $|Tf(y)| > a$, y sea $D'(a)$ = medida de los puntos $y \in X$ tales que $|Tf(y)| > a$. Entonces $D'(a) \leqslant D(a)$, $D'(a) \leqslant |X|$, y por hipótesis tendremos

$$D'(a) \leqslant D(a) \leqslant (M_1/a)^p \int_E |f(x)|^p \, dx ,$$

$$D'(a) \leqslant D(a) \leqslant (M_2/a)^q \int_E |f(x)|^q \, dx .$$

Usando estas desigualdades y designando con $D'(a\,;\,f^a)$ = medida del conjunto de los y de X donde $|Tf^a(y)| > a$, tendremos

$$\int_X |Tf(y)|^p \, dy = p \int_0^\infty a^{p-1} \, D'(a) \, da = 2^p \, p \int_0^\infty a^{p-1} \, D'(2a) \, da \leqslant$$

$$2^p \, p \int_0^1 a^{p-1} \, D'(2a) \, da + 2^p \, p \int_1^\infty a^{p-1} \, D'(a\,;\,f^a) \, da +$$

$$+ 2^p \, p \int_1^\infty a^{p-1} \, D'(a\,;\,f^a) \, da \leqslant 2^p \, p \int_0^1 a^{p-1} \, |X| \, da +$$

$$+ 2^p \, p \int_1^\infty a^{p-1} \, (M_1/a)^p \left(\int_E |f^a(x)|^p \, dx\right) da + 2^p \, p \int_1^\infty a^{p-1} \, (M_2/a)^q \left(\int_E |f_a(x)|^q dx\right) da$$

$$= 2^p \, |X| + 2^p \, p \, M_1^{\,p} \int_E |f(x)|^p \, dx \int_1^{|f(x)|} a^{-1} \, da +$$

$$+ 2^p \, p \, M_2^{\,q} \int_E |f(x)|^q \, dx \int_{|f(x)|}^\infty a^{p-q-1} \, da \qquad ,$$

La integral $\int_1^{|f(x)|} a^{-1} \, da$ es nula si $|f(x)| < 1$, y es igual a $\log |f(x)|$ si $|f(x)| \geqslant 1$, luego en todo caso esta integral es igual a $\log^+ |f(x)|$. Además como $p < q$, $p - q < 0$, la última integral de la fórmula precedente vale $|f(x)|^{p-q}/(q - p)$, luego resulta :

$$\int_X |Tf(y)|^p \, dy \leqslant 2^p \, |X| + 2^p \, p \, M_1^{\,p} \int_E |f(x)|^p \log^+ |f(x)| \, dx +$$

$$+ 2^p \, p/(q - p) \, M_2^{\,q} \int_E |f(x)|^p \, dx \leqslant 2^p \, p \, (1 + M_1^{\,p} + M_2^{\,q}/(q - p)) \Big\{ |X| +$$

$$+ \int_E |f(x)|^p \, (1 + \log^+ |f|) \, dx \qquad ,$$

lo que prueba la tésis con $M \leq 2^p p \left(1 + M_1{}^p + M_2{}^q/(q-p)\right)$.

Observación 4. En la demostración que precede hemos supuesto $q < \infty$. Si $q = \infty$, razonando como en la demostración del teorema de Marcinkiewicz para el caso $p_2 = \infty$, obtendremos en vez de (21) la desigualdad más simple siguiente :

$$\int_X Tf(y)^p \, dy \leq M \left\{ |X| + \int_E |f(x)|^p \log^+ |f(x)| \, dx \right\} , \tag{21a}$$

donde $M \leq 2^p p (B + M_1{}^p)$, siendo $B = \|T\|_\infty$.

Ejercicio: hacer en detalle la demostración de (21a) para el caso $q = \infty$.

Como aplicación del teorema de Marcinkiewicz vamos a deducir el teorema de Hardy - Littlewood - Paley que hemos enunciado sin demostración en la página 55.

TEOREMA DE HARDY - LITTLEWOOD - PALEY. a) Para todo p, $1 < p \leq 2$ existe una constante c_p tal que para toda $f(x)$ definida en E^n se verifica

$$\left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^p |u|^{(p-2)n} \, du \right\}^{1/p} \leq c_p \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \tag{22}$$

b) Si $2 < q \leq \infty$ entonces se tiene

$$\left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^q \, du \right\}^{1/q} \leq c_q \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p |x|^{n(q-2)} \, dx \right\}^{1/q} \tag{22a}$$

El teorema no vale para $p = 1$, $q = \infty$, pues c_p tiende a infinito para p tendiendo a 1, y c_q para $q \longrightarrow \infty$.

Demostración. a) Sea $E = E^n = \{x\}$ con la medida de Lebesgue dx, y sea $E_1 = E^n = \{u\}$ con la medida $d\mu = du/|u|^{2n}$. Consideremos el operador

$$Tf(u) = \hat{f}(u) \, |u|^n \tag{23}$$

que a toda $f(x)$ definida en E le hace correponder una $Tf(u)$ definida en E_1.

Para demostrar (22) es suficiente probar que este operador Tf es de tipo $(2, 2)$ = tipo $(L^2(E) ; L^2(E_1 ; \mu))$, y de tipo debil $(1, 1)$ (donde en E se considera la medida dx y en E_1 la medida $d\mu = du\,|u|^{-2n}$).

En efecto, por el teorema de Marcinkiewicz, esto implica que Tf es de tipo (p, p) para todo p, $1 < p < 2$, o sea que

$$\left\{\int_{E^n} |Tf(u)|^p \, d\mu\right\}^{1/p} \leqslant c_p \left\{\int_{E^n} |f(x)|^p \, dx\right\}^{1/p} ,$$

que en virtud de la definición de Tf y $d\mu$ equivale a (22).

Así pues tan solo debemos probar que T es de tipo $(2, 2)$ y tipo debil $(1, 1)$. Que T es de tipo $(2, 2)$ significa que

$$\left\{\int_{E^n} |Tf(u)|^2 \, d\mu\right\}^{1/2} \leqslant c_2 \left\{\int_{E^n} |f(x)|^2 \, dx\right\}^{1/2} ,$$

lo que equivale, por la definición de Tf y $d\mu$, a

$$\int_{E^n} |\hat{f}(u)|^2 \, du \leqslant c_2^2 \int_{E^n} |f(x)|^2 \, dx$$

y esto es cierto por el teorema de Plancherel.

Nos queda pues verificar que T es de tipo debil $(1, 1)$, o sea que existe una constante M fija tal que

$$\mu(E_a) \leqslant \frac{M}{a} \|f\|_1 , \tag{24}$$

donde E_a = conjunto de los $u \in E^n$ que verifican la desigualdad $|Tf(u)| > a$, o sea la desigualdad $|\hat{f}(u)|\,|u|^n > a$, o sea $a < |\hat{f}(u)|\,|u|^n$. Como para todo u vale $|\hat{f}(u)| \leqslant \|f\|_1$ (ver pág. 5 y 6), resulta que para todo u de E_a se tiene

$$a \leq \|f\|_1 \; |u|^n \quad , \quad \text{luego} \quad |u| \geq (a/\|f\|_1)^{1/n} \qquad (24a)$$

Esto significa que, si designamos con $b^n = a/\|f\|_1$, E_a está contenido en la esfera de radio b , y por tanto

$$\mu(E_a) \leq \int_{|u|>b} d\mu = \int_{|u|>b} du/|u|^{2n} = \int_W dw \int_b^{\infty} r^{n-1} \frac{dr}{r^{2n}} =$$

$$= |W| \; b^{-n} = |W| \; \|f\|_1 / a \quad ,$$

donde $W = \{w\}$ designa la superficie de la esfera unitaria de E^n y $|W|$ su medida. Llamando $M = |W|$ resulta (24), lo que prueba la parte a) de la tésis.

b) Sea $2 < q \leq \infty$ y sea $p = q^* = q/(q-1)$, entonces $1 < p \leq 2$, de modo que la parte a) del teorema, ya demostrada, se aplica a este p . Por el lema 1, pág. 16, existe una función $g(u) \in L^p$ tal que

$$\|f(u)\|_q = (\hat{f} , g) \quad ; \quad \|g\|_p = 1 \quad , \qquad (25)$$

luego por el teorema de Parseval tendremos, llamando $\hat{g} = \mathcal{F}^* g$ y aplicando la desigualdad de Hölder :

$$\left\{\int_E |\hat{f}(u)|^q \; du\right\}^{1/q} = \|f\|_q = (\hat{f} , g) = (f , \hat{g}) =$$

$$= \int_{E^n} f(x) \; \hat{g}(x) \; dx = \int_{E^n} f(x) \; |x|^{n(q-2)/q} \; \hat{g}(x) \; |x|^{-n(q-2)/q} \; dx \leq$$

$$\leq \left\{\int_{E^n} |f(x)\,|x|^{n(q-2)/q}\,|^q \; dx\right\}^{1/q} \int_{E^n} |\hat{g}(x) \; |x|^{-n(q-2)/q}\,|^p \; dx\Big\}^{1/p}$$

Teniendo en cuenta que en virtud de $1/q + 1/p = 1$ vale la identidad

$(q-2)/q = (p-2)/p$, la última desigualdad se escribe

$$\left\{\int_{E^n} |\hat{f}(u)|^q \, du\right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{E^n} |f(x)|^q \, |x|^{n(q-2)} \, dx\right\}^q \cdot \left\{\int_{E^n} |\hat{g}(x)|^p \, |x|^{n(p-2)} \, dx\right\}^{1/p}$$

y por la parte a) del teorema la última integral es $\leqslant c_p \, \|g\|_p = c_p . 1 = c_p$, y obtenemos la desigualdad (22a) con $c_q = c_p$, $p = q^*$, l,q,d,d.

3. <u>OPERADOR MAXIMAL DE HARDY - LITTLEWOOD</u>

Como otra aplicación del teorema de Marcinkiewicz vamos a deducir el teorema maximal de Hardy-Littlewood. Para ello necesitamos antes un lema de cubrimiento.

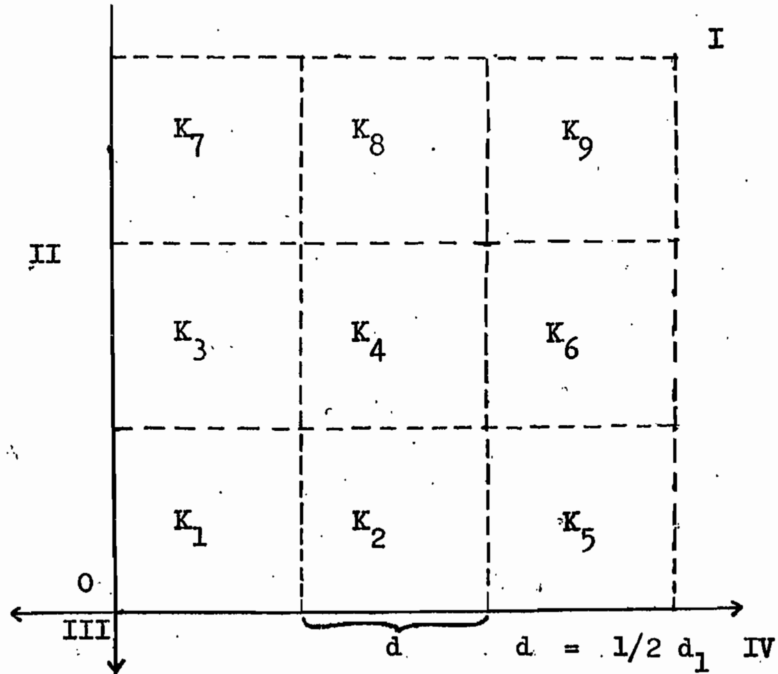
Si $\{Q_j\}$ es una familia de cubos que cubren a un conjunto $A \subset E^n$, en general no existe un subcubrimiento formado de cubos disjuntos (por ejemplo, basta tomar dos cubos no disjuntos y como A su unión). Pero veremos enseguida que siempre existe tal subcubrimiento si se generaliza el concepto de conjunto disjunto como sigue.

Un sistema de conjuntos $\{Q_j\}$ es disjunto si todo punto del espacio pertenece a lo sumo a un conjunto Q_j , y no más que a uno. Diremos que estos conjuntos <u>son disjuntos de orden k</u> , si todo punto del espacio pertenece a lo sumo a k conjuntos del sistema. Para $k = 1$ obtenemos el concepto ordinario de disjunto.

<u>LEMA 3.</u> <u>Sean $Q_1, \ldots, Q_p$ p cubos n-dimensionales de E^n (de lados paralelos a los ejes) y sea c_i el centro y d_i el lado de Q_i. Si: 1) para $j > i$ se verifica que $\ell_j \leq 2\ell_i$ y que c_j no pertenece a Q_i, 2) todos los Q_j pasan por un punto 0 , entonces $p \leq 4^n$</u> .

<u>Demostración</u> . Para simplificar pongamos $n = 2$, $E^n = E^2 =$ plano ; Q_j = cuadrados . Tenemos pues p cuadrados pasando por el punto 0 , tales que si $i < j$ entonces Q_i no contiene al centro de Q_j , y tiene lado $\geqslant 1/2$ del de Q_j Debemos probar que $p \leqslant 16$. Dividimos el plano en 4 cuadrantes mediante rectas

paralelas a los ejes por el punto O y vamos a probar que no hay más de 4 cubos por cuadrante. Supongamos, por lo contrario, que cinco cubos $Q_1, \ldots Q_5$ tienen sus centros en el cuadrante I, y veamos que tal suposición lleva a contradicción.



Dividimos el cuadrante I en cuadrados iguales $K_1, K_2, \ldots$ de lado $d = 1/2\, d_1$. Por hipótesis tenemos que $d_j \leq 2\, d_1$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5$. Esto implica que los cinco centros $c_1, \ldots c_5$ están en los cuatro cuadrados $K_1, \ldots, K_4$ (de lo contrario, como Q_j pasa por O, sería $d_j > 2.2d = 2d_1$). El centro c_1 debe estar en K_1, sino sería $d_1 > 2d = d_1$. Teniendo Q_1 su centro en K_1 y lado $= 2d$, está claro que Q_1 contiene a todos los puntos de K_1. Luego los cuatro centros restantes, $c_2, \ldots, c_5$ no pueden estar en K_1 pues Q_1 no debe contener a ninguno de ellos. Luego estos 4 centros $c_2, \ldots, c_5$ están en los 3 cubos K_2, K_3, K_4 y por tanto dos de estos centros, c_i, c_j, están en un mismo cubo K_m. Como Q_i, Q_j pasan por O, y tienen sus centros en K_m, debe ser $K_m \subset Q_i$, $K_m \subset Q_j$, luego Q_i contiene a $c_j \in K_m$, contrariamente a la hipótesis.

<u>Observación 5</u>. Si la hipótesis $\ell_j \leq 2\, \ell_i$ se cambia por $\ell_j \leq \ell_i$, entonces se puede afirmar que $p \leq 2^n$.

<u>LEMA 4</u> (lema de cubrimiento). <u>Sea $S \subset E^n$ un conjunto acotado, y supongamos que cada punto x de S tiene asignado un cubo n-dimensional $Q(x)$ con centros en x y lados paralelos a los ejes, de modo que todos estos cubos $Q(x)$ cubren a S. Entonces es posible seleccionar una sucesión de estos cubos $Q_1 = Q(x_1)$, $Q_2 = Q(x_2), \ldots$, de modo tal que se verifiquen las condiciones siguientes</u> : 1) <u>los</u>

Q_i cubren a S, $S \subset \bigcup Q_i$; 2) todo punto del espacio pertenece a lo sumo a 4^n cubos, es decir los Q_i son disjuntos de órden 4^n; 3) los cubos $1/8\ Q_i$ son disjuntos en sentido ordinario ($1/8\ Q$ designa al cubo de igual centro que Q y de lado igual $1/8$ del de Q); 4) para cada i existe un conjunto $E_i \subset Q_i$ tal que los E_i son disjuntos y cubren a S.

Demostración. Sea $d(x)$ = lado de $Q(x)$, $s = \sup d(x)$ para los posibles $x \in S$. Como S es un conjunto acotado es evidente que si $s = \infty$ entonces hay un cubo $Q(x)$ que cubre a S y el lema es evidente en este caso.

Sea pues $s < \infty$; entonces existen $d(x)$ arbitrariamente cercanos a s. Sea pues x_1 de S tal que $d_1 = d(x_1)$ verifique $d_1 \leq s < 2d_1$, y sea $Q_1 = Q(x_1)$.

Sea $s_1 = \sup d(x)$ para todos los x que pertenecen a $S - Q_1$; evidentemente $s_1 \leq s$. Sea x_2 de $S - Q_1$ tal que $d_2 \leq s_1 < 2d_2$, $Q_2 = Q(x_2)$, $d_2 = d(x_2)$.

Siguiendo así obtendremos los cubos $Q_1, Q_2, \ldots$ tales que cada cubo no contiene al centro de los cubos que le siguen y $d_j \leq 2d_i$ si $j > i$, es decir los cubos Q_i verifican la hipótesis 1) del lema anterior. Veamos que estos cubos responden a la tésis. En efecto, por el lema que precede se verifica la parte 2) de la tésis. La parte 3) de la tésis resulta fácilmente del hecho de que dados dos cubos Q_i, Q_j, $i < j$ el centro de Q_j está fuera de Q_i y su lado $\leq 2d_i$; luego es fácil ver que $1/8\ Q_i$ y $1/8\ Q_j$ no pueden tener puntos comunes (un tal punto común z, distaría de c_j menos de $1/8\ d_j \leq 1/4\ d_i$, y de c_i menos de $1/8\ d_i$, luego la distancia de c_j a c_i sería $< 1/8\ d_i + 1/4\ d_i < 1/2\ d_i$ y c_j pertenecería a Q_i, contrariamente a 2)).

Par probar la parte 1) de la tésis,, supongamos, por lo contrario, que un punto z de S no está cubierto por ningún Q_i. Por definición de s_i y de d_i esto implica $d(z) \leq s_i \leq 2d_i$ para todo i, luego $d_i \geq 1/2\ d(z) = c$ = número fijo > 0. Como los cubos $1/8\ Q_i$ son disjuntos (por la parte 3), ya demostrada), resulta que

$$|\bigcup_1^\infty 1/8\, Q_i| = \sum_1^\infty |1/8\, Q_i| = \sum_1^\infty (d_i/8)^n \geq \sum_1^\infty (c/8)^n = \infty$$

Es decir el conjunto $\bigcup_1^\infty 1/8\, Q_i$ tiene medida infinita, lo cual es imposible pues el centro de cada Q_i está en S y el lado es $\leq s$, siendo S acotado.

Finalmente, para probar la parte 4), basta poner

$$E_i = Q_i - (\bigcup_{j<i} Q_j) , \quad \text{l,q,d,d.}$$

Para todo sistema de conjuntos medibles Q_i vale $|\bigcup_i Q_i| \leq \sum_i |Q_i|$, si los Q_i son disjuntos vale además la desigualdad $|\bigcup_i Q_i| \geq \sum|Q_i|$. Esta segunda desigualdad no vale si los Q_i no son disjuntos; pero para disjuntos de órden k se tiene la siguiente generalización:

<u>LEMA 5</u>. <u>Si Q_i es una sucesión, finita o infinita, de conjuntos medibles disjuntos de orden k, entonces</u>

$$|\bigcup_i Q_i| \geq (1/k) \sum_i |Q_i| .$$

<u>Demostración</u>. Evidentemente basta probar que para todo número finito m vale

$$k\, |\bigcup_1^m Q_i| \geq \sum_1^m |Q_i| . \tag{26}$$

La relación (26) es cierta para todo k y $m = 1$, así como para todo m y $k = 1$. Luego basta probar por inducción, que si (26) es cierta para $k - 1$ y todo m, así como para $m - 1$ y todo k, entonces es cierta también para k y m.

Pongamos

$$A_2 = Q_1 \cap Q_2 , A_3 = Q_1 \cap Q_3 , \dots , A_m = Q_1 \cap Q_m ,$$

$$B_2 = Q_2 - Q_1 = Q_2 - A_2 , \dots , B_m = Q_m - Q_1 = Q_m - A_m ;$$

tendremos

$$\sum|Q_i| = |Q_1| + \sum_2^m |Q_i| = |Q_1| + \sum_2^m |B_j| + \sum_2^m |A_j| .$$

Los A_j son disjuntos de orden $k - 1$, pues cada A_j ya es intersección de dos

Q-es , luego la intersección de k conjuntos A_j equivale a intersección de $k+1$ conjuntos Q_j , luego es vacía. Luego por la suposición inductiva $\sum_2^m |A_j| \leq (k-1)|\cup A_j|$. Análogamente, como los B_j son en número $m-1$, $\sum_2^m |B_j| \leq k\ |\cup B_j|$. Luego, como B_j y Q_1 son disjuntos,

$$\sum_1^m |Q_i| \leq |Q_1| + (k-1)\ |\cup A_j| + k\ |\cup B_j| \leq k\ |Q_1| + k\ |\cup B_j| =$$

$$= k\,(Q_1 + \cup B_j) = k\,(|Q_1 \cup|(\cup B_j)\,) = k\ \ |Q_j| \ , \qquad \text{l,q,d,d.}$$

<u>**LEMA 5a**</u> . <u>Si $f(t) \geq 0$ es una función medible no-negativa, definida en E^n, y si $Q_1, Q_2 \ldots$ son conjuntos medibles disjuntos de orden k , entonces</u>

$$\int_{\cup Q_i} f(t)\,dt \geq (1/k) \sum_i \int_{Q_i} f(t)\,dt \tag{27}$$

<u>Demostración</u> . Si $f(t)$ es la función característica de un conjunto Q entonces el miembro izquierdo de (27) es igual a

$$|(\cup Q_i) \cap Q| = |\cup_i (Q_i \cap Q)| = |\cup_i\ Q_i'| \ ,$$

y el miembro derecho de (27) es igual a

$$(1/k) \sum |Q_i \cap Q| = (1/k) \sum |Q_i'| \ .$$

Luego (27) equivale a (26) y, por el lema 5, la desigualdad (27) es cierta si $f(t)$ es función característica. Luego (27) es cierta también para toda $f(t)$ elemental no negativa = conbinación lineal de funciones caractrísticas. Como toda $f(t) \geq 0$ medible es límite de una sicesión monótona de funciones elementales, basta aplicar el teorema de integración término a término de sucesiones crecientes, para obtener el lema para toda $f(t) \geq 0$, l,q,d,d.

Si $f(x)$ es una función integrable Lebesgue, definida en $E^1 = \{x\}$, y si $F(x)$ es su integral indefinida,entonces por el teorema de Lebesgue (cuya demostración se verá más adelante), para casi todo x vale

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\,(F(x+\varepsilon) - F(x)\,) =$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(t)\, dt = \lim F_\varepsilon (x)$$

Como la sucesión de funciones F_ε (x) converge puntualmente, tiene interés saber si esta sucesión tiene una mayorante integrable o perteneciente a alguna clase L^p. Esta mayorante es

$$L\, f(x) = \sup_\varepsilon |F_\varepsilon (x)| = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{\varepsilon} \left|\int_x^{x+\varepsilon} f(t)\, dt\right| .$$

Queda así definido un operador que a toda función (integrable sobre intervalos finitos) hace corresponder la función $L\, f(x)$.

Otra forma, algo diferente pero esencialmente equivalente, de definir este operador es:

$$L\, f(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{r} \int_{I_r} |f(t)|\, dt ,$$

donde I_r es el intervalo de centro x y radio r.

Análogamente, si f(x) está definida en E^n, pondremos

$$L\, f(x) = \sup_{r > 0} (1/r)^n \left|\int_{Q(x,r)} f(t)\, dt\right| =$$

$$= \sup (1/|Q(x , r)|) \left|\int_{Q(x,r)} f(t)\, dt\right| , \qquad (28)$$

donde Q(x , r) es el cubo de centro x y radio r. En vez de cubos se pueden formar esferas, pero no rectángulos si se quiere el teorema que sigue sea válido (en la parte concerniente al tipo debil). El hecho de tener Q(x , r) centro en x no es esencial, <u>basta que el cubo Q(x , r) contenga a x</u>.

El operador Lf , que se llamará <u>operador maximal de Hardy - Littlewood</u>, no es lineal, pero <u>sí sublineal</u>, puesto que

$$1/|Q| \left|\int_Q (f+g)\,dt\right| \leqslant 1/|Q| \left|\int_Q f\,dt\right| + 1/|Q| \left|\int_Q g\,dt\right| .$$

TEOREMA MAXIMAL DE HARDY – LITTLEWOOD. a) El operador Lf es de tipo (p, p) para todo $p \geqslant 1$ (incluyendo $p = \infty$), y de tipo debil $(1, 1)$; en particular si $f \in L^p$, $p > 1$, entonces también $Lf \in L^p$ (pero no si $p = 1$).
b) Si $f \in Z^1$, es decir si $|f|(1 + \log^+|f|) \in L^1$ entonces Lf es integrable sobre todo conjunto $X \subset E^n$ de medida finita y se tiene

$$\int_X |Lf(x)|\,dx \leqslant M\left\{|X| + \int_{E^n} |f(x)|\,(1 + \log^+|f(x)|)\,dx\right\} , \tag{9}$$

donde M no depende de X ni de f.

Demostración. En virtud de los teoremas 3 y 4 es suficiente probar que Lf es de tipo (∞, ∞) y de tipo debil $(1, 1)$.

1) Veamos que Lf es de tipo (∞, ∞). Sea $\|f\|_\infty = a$ de modo que $|f(x)| \leqslant a$ para todo x; luego para todo x y para todo cubo $Q = Q(x, r)$ tendremos

$$1/|Q| \left|\int_Q f(t)\,dt\right| \leqslant (1/|Q|)\, a\, |Q| = a ,$$

por tanto también $|Lf(x)| \leqslant a$ para todo x, o sea $\|Lf\|_\infty \leqslant a$. Asi pues $\|Lf\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|f\|_\infty$, y Lf es de tipo (∞, ∞) con norma $\leqslant 1$.

2) Veamos que Lf es de tipo debil $(1, 1)$, o sea que se tiene

$$|E_a| \leqslant (M/a) \int_{E^n} |f(x)|\,dx , \tag{30}$$

si E_a es el conjunto de los x tales que $Lf(x) > a$. Basta verificarlo para $f \geqslant 0$. Si x es un punto de E_a, se tiene $Lf(x) > a$, luego por definición de Lf existe un cubo $Q = Q(x)$ tal que

$$1/|Q(x)| \left|\int_{Q(x)} f(t)\,dt\right| > a .$$

o sea

$$|Q(x)| < (1/a) \int_{Q(x)} f(t)\, dt \ . \tag{31}$$

Asi pues, todo punto x de E_a tiene asignado un cubo $Q(x)$ que verifica (31) . Sea $S \subset E_a$ un conjunto acotado cualquiera, contenido en E_a . Por el lema 4, existe una sucesión $Q_1 = Q(x_1)$, $Q_2 = Q(x_2)$, .. de estos cubos, disjunta de orden 4^n y que cubre a S ; además para cada Q_j vale

$$|Q_j| \leqslant (1/a) \int_{Q_j} f(t)\, dt \ . \tag{31a}$$

Aplicando el lema 5a tendremos,

$$|S| \leqslant \sum |Q_j| \leqslant (1/a) \ \sum_j \int_{Q_j} f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1/a)\ 4^n \int_{\cup Q_j} f(t)\, dt \leqslant (4^n/a) \int_{E^n} f(t)\, dt \ . \tag{31b}$$

Como esta desigualdad vale para todo S acotado contenido en E_a , tenemos que también

$$|E_a| \leqslant (4^n/a) \int_{E^n} f(t)\, dt \ ,$$

lo que prueba que (30) es cierto con $M \leqslant 4^n$, l,q,d,d.

<u>Observación 6</u> . Hemos probado más que (30); en efecto, poniendo $H = \cup Q_j$, tenemos de (31b) que

$$E_a \subset H \ , \tag{31c}$$

$$|H| \leqslant (M/a) \int_H |f(x)|\, dx \tag{31d}$$

4. <u>PSEUDO - TIPO (p , p)</u> .

Pasamos a considerar ahora algunas generalizaciones de los teoremas de Riesz y de Marcinkiewicz, siempre para los tipos (p, p), es decir para la diagonal del cuadrado de los tipos, y para el espacio euclídeo $E = E^n$ y para L_o.

Por definición, el operador Tf es de tipo debil (p, p) sobre L_o si para todo $a > 0$ y para toda $f(x)$ de L_o se verifica

$$D(|Tf| ; a) \leq (M/a)^p \int_{E^n} |f|^p \, dx , \tag{32}$$

donde M no depende de a ni de f.

Ahora, toda f de L_o toma un número finito de valores no nulos en un número finito de conjuntos medibles acotados, podemos pues introducir las notaciones siguientes

$$S(f) = \text{soporte de } f = \{ x ; f(x) \neq 0 \} ; \tag{33}$$

$$m(f) = \text{mínimo no nulo de } |f| = \inf_{x \in S(f)} |f(x)| . \tag{33a}$$

$S(f)$ es entonces un conjunto compacto que se compone de un número finito de cubos, y $m(f) > 0$ si f no es identicamente nula.

Consideremos ahora una condición más debil que la (32) : supongamos que existe una constante M fija tal que para toda $f(x)$ de L_o se verifica

$$D(|Tf| ; m(f)) \leq (M/m(f))^p \int_{E^n} |f(x)|^p \, dx , \tag{34}$$

es decir que (32) vale solo si $a = m(f)$.

<u>LEMA 6</u>. <u>Si Tf es sublineal y si existe una constante M tal que para toda f de L_o se verifica (34), entonces también para todo $a < m(f)$ se verifica (32) (pero con $2M$ en vez de M). En otros términos, la verificación de (32) para $a = m(f)$ y toda f, implica la verificación de (32) para $a < m(f)$ (pero no necesariamente para $a > m(f)$).</u>

<u>Demostración</u>. Sea $a < m(f)$ y sea Q un cubo situado fuera de $S(f)$ y de medida $|Q| = \varepsilon$ muy pequeña, y sean $h(x)$, $g(x)$ dos funciones definidas por :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ no pertenece a } Q , \\ - a/2 & \text{si pertenece a } Q ; \end{cases} \tag{35}$$

$$h(x) = \begin{cases} a/2 & \text{si } x \text{ pertenece a } Q , \\ 0 & \text{si } x \text{ no pertenece a } Q . \end{cases} \tag{35a}$$

Entonces es evidente que vale:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad ; \quad m(g) = m(h) = a/2 . \tag{35b}$$

Luego

$$D(|Tf| ; a) \leq D(|Tg| ; a/2) + D(|Th| ; a/2) ,$$

y como $m(g) = m(h) = a/2$, tendremos aplicando (34) ,

$$D(|Tf| ; a) \leq (M/(a/2))^p \int |g(x)|^p dx + (M/(a/2))^p \int |h(x)|^p dx =$$

$$= (2M/a)^p \int |f(x) - h(x)|^p dx + (2M/a)^p (a/2)^p \varepsilon ,$$

y la última suma tiende, para ε tendiente a cero, a

$$(2M/a)^p \int |f(x)|^p dx ,$$

lo que prueba el lema.

Podemos dar ahora la siguiente generalización del teorema de Marcinkiewicz:

LEMA 7 . Sea Tf semilineal y $p < r$. Si Tf verifica la condición (34) (con M fija y para toda f de L_0), y si Tf es de tipo debil (r , r) sobre L_0, entonces T es de tipo debil (p , p) sobre L_0 , y por tanto de tipo (s , s) para todo $p < s < r$.

Demostración . Basta considerar el caso de funciones $f \geq 0$ no-negativas. sea $a > 0$ y pongamos

$$g = f^{(a/2)} \quad , \quad h = f_{(a/2)} \quad , \quad f = g + h \quad .$$

Tendremos evidentemente que $a/2 \leq m(g)$, $|h(x)| \leq a/2$ para todo x , luego aplicando la hipótesis, resulta

$$D(|Tf| \, ; \, a) \leq D(|Tg| \, ; \, a/2) + D(|Th| \, ; \, a/2) \leq$$

$$\leq (2M/a)^p \int |g(x)|^p \, dx + (2M/a)^r \int |h(x)|^r \, dx \leq$$

$$\leq (2M/a)^p \int |g(x)|^p \, dx + (2M/a)^r \, (a/2)^{r-p} \int |h(x)|^p \, dx =$$

$$= (2M/a)^p \int |g(x)|^p \, dx + M^r \, (2/a)^p \int |h(x)|^p \, dx \leq$$

$$\leq \left((2M)^p + (2M)^r \right) / a^p \int \left(|g(x)|^p + |h(x)|^p \right) dx =$$

$$= (M_1/a)^p \int |f(x)|^p \, dx \quad ,$$

lo que prueba que T es de tipo debil (p , p) sobre L_o. Del teorema de Marcinkiewicz resulta entonces que T es de tipo (s , s) para $p < s < r$, l,q,d,d.

Vamos a introducir ahora dos generalizaciones del concepto de tipo $(1 , 1)$. Por definición Tf es de tipo $(1 , 1)$ si existe una constante fija M tal que para toda $f(x)$ vale

$$\int_{E^n} |Tf(x)| \, dx \leq M \, \|f\|_1 \quad . \tag{36}$$

Si T no es de tipo $(1 , 1)$ no se verifica (36) pero puede ocurrir que se verifique una desigualdad más debil de la forma

$$\int_{E^n - G} |Tf(x)| \, dx \leq M \, \|f\|_1 \quad , \tag{36a}$$

donde G es un conjunto sometido a ciertas condiciones, que depende de f . Si tampoco se verifica (36a), es posible que esta desigualdad se verifique si se modifica $f(x)$, es decir que valga una desigualdad de la forma

$$\int_{E^n - G} |T(f-h)(x)|\, dx \leqslant M \, \|f\|_1 \quad , \tag{36b}$$

donde h es una función sometida a ciertas condiciones.

Evidentemente (36b) se verifica siempre si se toma $G = E^n$, o si $h = f$. Por tanto si se quiere que (36b) dé una definición aplicable es necesario imponer restricciones al conjunto G y a la función $h(x)$: G no debe ser muy grande y $h(x)$ no debe "acercarse mucho" a $f(x)$.

Para determinar las restricciones a imponer a G , observemos que generalmente los operadores Tf "singulares" son "malos" para valores de x pertenecientes al soporte $S = S(f)$ de f ; por ejemplo el operador de Hilbert Hf , dado por una integral singular

$$Hf(x) = \int_{E^1} \frac{f(t)}{x-t}\, dt = \int_{S(f)} \frac{f(t)}{x-t}\, dt \quad ,$$

es malo si x pertenece a $S(f)$, pues entonces $x - t$ se hace nulo. Pero si x está lejos del soporte $S(f)$ esta integral es buena, es decir $Hf(x)$ se acota fácilmente en los puntos x de $E^n - S(f)$. Es pues natural tomar $G = S(f)$, o más generalmente, medida de $G \leqslant M\, |S(f)|$. Ahora si f es una función elemental y $m(f)$ su mínimo en $S(f)$, tenemos

$$m(f)\, |S(f)| \leqslant \int_{S(f)} |f(x)|\, dx \leqslant \|f\|_1 \quad ,$$

o sea

$$|S(f)| \leqslant \|f\|_1 / m(f) \quad .$$

Resulta por tanto natural imponer a G la restricción análoga:

$$|G| \leqslant M\, \|f\|_1 / m(f) \tag{37}$$

Análogamente, el ejemplo de los operadores singulares sugiere imponer a $h(x)$ las restricciones siguientes :

$$|S(h)| \leq M \; \|f\|_1 \, / \, m(f) \tag{38}$$

$$|h(x)| \leq M \, m(f) \qquad \text{para todo} \quad x \; . \tag{38a}$$

<u>DEFINICION</u> . Diremos que el operador Tf es de <u>pseudo tipo * (1 , 1)</u> sobre L_o , si existe una constante fija M tal que para toda función $f(x)$ de L_o se puede encontrar un conjunto $G \subset E^n$ y una función $h(x) \in L_o$ de modo que se verifiquen las desigualdades (36b), (37), (38) y (38a) . Naturalmente G y $h(x)$ varían con $f(x)$.

En la definición que precede, (38a) exige que $h(x)$ no debe tomar los valores mayores, esencialmente, que el mínimo $m(f)$ de f . En la definición que sigue se le permite a $h(x)$ tomar valores iguales al valor medio de f sobre cubos, pero se exige haya una $h(x)$ para cada cubo Q que contiene a $S(f)$.

<u>DEFINICION</u> . Diremos que el operador Tf es de <u>pseudo tipo (1 , 1)</u> sobre L_o , si existe una constante M tal que para toda $f(x)$ de L_o y para todo soporte cúbico Q de f (es decir para todo cubo Q tal que $f(x)$ es nula fuera de Q) se puede encontrar un conjunto G y una función $h(x)$ de modo que se verifique (36b) y las tres condiciones siguientes

$$|G| \leq M \; |Q| \qquad , \qquad S(h) \subset Q \qquad , \tag{39}$$

$$|h(x)| \leq \frac{M}{|Q|} \int_Q |f(x)| \, dx = \frac{M \; \|f\|_1}{|Q|} \qquad \text{para todo} \quad x \; . \tag{40}$$

También en esta definición G y $h(x)$ varían con f y con Q .

Evidentemente, si Tf es de tipo (1 , 1) entonces T es de pseudo tipo * (1,1) y de pseudo tipo (1 , 1), pues entonces podemos poner $G = 0$, $h(x) = 0$ y se verifican las condiciones (36b), (38) y (39) .

Vamos a probar los dos teoremas siguientes :

TEOREMA 5 . Si el operador sublineal Tf es de pseudo tipo * (1 , 1) y de tipo debil (p , p), $1 < p$, sobre L_o , entonces T es de tipo debil (1 , 1) sobre L_o (y por tanto de tipo (s , s) para $1 < s < p$) .

TEOREMA 6 . Si el operador sublineal Tf es de pseudo tipo (1 , 1) sobre L_o, entonces T es de pseudo tipo * (1 , 1) sobre L_o .

De los teoremas 5 y 6 sigue inmediatamente la siguiente generalización del teorema de Riesz para el caso $p_1 = r_1 = 1$:

TEOREMA 7 . Si el operador sublineal Tf es de pseudo tipo (1 , 1) y de tipo debil (p_2 , p_2), $1 < p_2$, sobre L_o , entonces T es de tipo debil (1 , 1) y de tipo (p , p) para todo $1 < p \leq p_2$.

Como la condición de pseudo tipo (1 , 1) es mucho más debil que la de tipo, y también más facil de verificar que la de tipo debil (1 , 1), el teorema 7 facilita en diversos casos (como veremos en el ejemplo de las transformadas de Hilbert) establecer el tipo y tipo debil del operador.

Evidentemente es suficiente probar los teoremas 5 y 6, ya que el teorema 7 es consecuencia obvia de los mismos.

Demostración del teorema 5 . En virtud del lema 7 es suficiente probar que existe una constante M tal que para toda f de L_o se verifica

$$D(|Tf| \; ; m(f)) \leq (M/m(f)) \int_{E^n} |f(x)| \, dx \quad . \tag{41}$$

Como por hipótesis T es de pseudo tipo * (1 , 1) existe un conjunto G y una función $h(x)$ tales que se verifican (36b), (37), (38) y (38a) . Como $f = h + (f - h)$, tenemos

$$D(|Tf| \; ; m(f)) \leq D(|Th| \; ; m(f)/2) + D(|T(f - h)| \; ; m(f)/2) \quad . \tag{42}$$

Por ser Tf de tipo debil (p , p) , $p > 1$, tenemos usando (38a) y (38)) que

$$D(|Th|\ ;\ m(f)/2) \leqslant \left(\frac{2M_1}{m(f)}\right)^p \int_{E^n} |h(x)|^p\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (2M_1/m(f))^p\ (M\,m(f))^p\ |S(h)| =$$

$$= (2M_1)^p\ M^p\ |S(h)| \leqslant (2M\,M_1)^p\ M\ \|f\|_1 / m(f) \quad ,$$

luego llamando $M' = (2M\,M_1)^p\,M$ tenemos que

$$D(|Th|\ ;\ m(f)) \leqslant M'\ \|f\|_1 / m(f) \quad . \tag{42a}$$

Llamando E = el conjunto de los x tales que $|T(f-h)\ (x)| > m(f)/2$ tendremos

$$D(|T(f-h)|\ ;\ m(f)/2) = |E| \tag{43}$$

y además

$$|E| \leqslant |E \cap (E^n - G)| + |G| \quad . \tag{43a}$$

Como para todo x de $E \cap (E^n - G) \subset E$ se verifica $|T(f-h)\ (x)| > m(f)/2$, tendremos de (36b) :

$$|E \cap (E^n - G)|\ m(f)/2 \leqslant \int_{E \cap (E^n - G)} |T(f-h)\ (x)|\ dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{E^n - G} |T(f-h)\ (x)|\ dx \leqslant M\ \|f\|_1 \quad ,$$

luego

$$|E \cap (E^n - G)| \leqslant 2M\ \|f\|_1 / m(f) \tag{44}$$

Por otra parte por (37) es $|G| \leqslant M\ \|f\|_1 / m(f)$, luego de esta desigualdad, de (44) y (43a) obtenemos

$$D(|T(f-h)|\ ;\ m(f)/2) \leqslant (2M\ \|f\|_1 + M\ \|f\|_1)/m(f) \quad . \tag{44a}$$

De (42), (42a) y (44a) sigue que $D(|Tf| \; ; \; m(f)) \leqslant (M' + 3M) \; \|f\|_1 \, / \, m(f)$, o sea queda probada la desigualdad (41) con $M = (M' + 3M)$, l.q.d.d.

Demostración del teorema 6 . Designando con $g_A(x)$ la función caractrística del conjunto A (que vale 1 si x pertenece a A , y cero de lo contrario), probaremos antes el siguiente

LEMA . Si Tf es de pseudo tipo $(1 \, , \, 1)$ sobre L_o , entonces para toda f de L_o y todo punto x de $S(f)$ existe un cubo $Q = Q(x)$ con centro en x y con la propiedad siguiente: para todo conjunto $A \subset Q$ se puede encontrar una función $h(x) = h(x \; ; \; A)$ y un conjunto $G = G(A)$ tales que :

$$\int_{E^n - G(A)} |T(g_A f - h)\,(t)| \, dt \leqslant M_1 \int_A |f(t)| \, dt \quad , \tag{45}$$

$$|G(A)| \leqslant (M_1 \, / \, m(f)) \int_Q |f(t)| \, dt \quad , \tag{46}$$

$$|h(x \; ; \; A)| \leqslant M_1 \, m(f) \qquad \text{para todo} \quad x \quad , \tag{46a}$$

$$|S(h)| \leqslant (M_1 \, / \, m(f)) \int_Q |f(t)| \, dt \quad . \tag{46b}$$

Demostración del lema . Podemos suponer $f(t) \geqslant 0$. Como $x \in S(f)$ tenemos $f(x)$ $m(f)$. Si Q es un cubo con centro en x , el cociente

$$1/|Q| \int_Q |f(t)| \, dt \leqslant (1/|Q| \; \|f\|_1)$$

es muy pequeño (tiende a cero) para Q grande, y tiende a $f(x)$ para $|Q| \longrightarrow 0$. Luego, al variar Q este cociente pasa por todos los valores entre 0 y $m(f)$, luego podemos elegir un Q tal que se verifique

$$1/|Q| \int_Q |f(t)| \, dt = m(f)/2 \quad , \quad x = \text{centro de } Q \quad , \tag{47}$$

y veamos que este Q responde a la tésis del lema.

En efecto, sea $A \subset Q$, $f_1(x) = g_A(x)\, f(x)$, entonces $S(f_1) \subset Q$, luego por definición de pseudo tipo existe una función $h(x)$ y un conjunto G tales que se verifica (45) y tales que

$$|G| \leqslant M\, |Q| \quad , \quad S(h) \subset Q \quad , \tag{48}$$

$$|h(x)| \leqslant M/|Q| \int_Q |f(t)|\, dt \quad . \tag{48a}$$

Pero como de (47) tenemos que $|Q| = (2/m(f)) \int_Q |f(t)|\, dt$, las condiciones (48) y (48a) se convierten en (46), (46a) y (46b) , lo que prueba el lema.

<u>Volvamos a la demostración del teorema 6</u> . El lema que acabamos de probar dice que todo x de $S(f)$ es centro de un cubo $Q(x)$ con la propiedad especificada. Por el lema 4 (lema de cubrimiento) podemos seleccionar una sucesión de estos cubos $Q_1 , Q_2 , \dots ,$ que son 4^n-disjuntos (n = dimensión de E^n) y que cubren a $S(f)$; más aún, para cada i tenemos un $E_i \subset Q_i$ de modo que los E_i son disjuntos estrictamente y cubres a $S(f)$. En virtud del lema, para cada E_i existe un conjunto G_i y una función $h_i(x)$ tales que, designando con $g_i(x)$ la función característica de E_i , se tiene

$$\int_{E^n - G_i} |T(fg_i - h_i)(x)|\, dx \leqslant M_1 \int_{E_i} |f(t)|\, dt \quad ; \tag{49}$$

$$|G_i| \leqslant (M_1 / m(f)) \int_{Q_i} |f(t)|\, dt \quad ; \tag{49a}$$

$$|S(h_i)| \leqslant (M_1 / m(f)) \int_{Q_i} |f(t)|\, dt \quad , \quad S(h_i) \subset Q_i \quad ; \tag{49b}$$

$$|h_i(x)| \leqslant M_1\, m(f) \quad , \quad \text{para todo } x \ . \tag{49c}$$

Pongamos $h(x) = \sum_i h_i$, $G = \bigcup_i G_i$ y vamos a probar que estos $h(x)$ y G

y G verifican (36b), (37) y (38), con lo cual quedará probada la tésis. Como los conjuntos E_i son disjuntos y cubren a $S(f)$ tenemos que $f(x) = \sum_i g_i(x) f(x)$, luego por (49),

$$\int_{E^n-G} |T(f-h)(x)| dx = \int_{E^n-G} |T(\sum_i (f_i g_i - h_i))(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \int_{E^n-G} |T(f_i g_i - h_i)(x)| dx \leqslant \sum_i \int_{E^n-G_i} |T(f_i g_i - h_i)| dx$$

$$\leqslant \sum_i M_1 \int_{E_i} |f(t)| dt = M_1 \int_{\cup E_i} |f(t)| dt \leqslant M_1 \|f\|_1 ,$$

o sea el conjunto G y la función $h(x)$, así definidas, verifican (36b). Veamos que ellos verifican también (37) y (38).

De (49a) tenemos, puesto que los cubos Q_i son 4^n-disjuntos, y usando el lema 5a

$$|G| \leqslant \sum |G_i| \leqslant (M_1 / m(f)) \sum_i \int_{Q_i} |f(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant (M_1/m(f)) \, 4^n \int_{\cup Q_i} |f| dt = M_2 \|f\|_1 / m(f) ,$$

lo que prueba que se verifica (37). Análogamente de $S(h) \subset \bigcup_i S(h_i)$ y de (49b) se obtiene que $|S(h)| \leqslant M_2 \|f\|_1 / m(f)$. Falta pues tan solo probar que $|h(x)| \leqslant M_2 m(f)$. Para ello observemos que $h_i(x)$ se anula fuera de Q_i y que todo punto x pertenece a lo sumo a 4^n cubos Q_i, luego fijado x en la suma $h(x) = \sum_i h_i(x)$ hay solo 4^n sumandos no nulos. Como por (49c) cada sumando verifica $|h_i(x)| \leqslant M_1 m(f)$, resulta $|h(x)| \leqslant 4^n M_1 m(f) = M_2 m(f)$, l,q,d,d.

Vamos a aplicar ahora el Teorema 7 a los operadores de Hilbert $H_W f$, y más generalmente a los operadores considerados en los Corolarios 1 y 2 de las páginas 38, 39.

Sean pues $k_i(x)$, $h_i(x)$ dos sucesiones de núcleos que verifican las condiciones del Corolario 1, pág. 38. Para mayor comodidad pongamos $h_i(x) = k_{-i}(x)$, de modo que para todo $i = \pm 1 , \pm 2 , \dots ,$ se verifican las condiciones :

$$\int_{E^n} k_i(x) = 0 \quad ; \quad \|k_i\|_1 \leqslant M \quad ; \tag{50}$$

$$\int_{E^n} |k_i(x+h) - k_i(x)|\, dx \leqslant M \ \varepsilon^i \ |h| \quad ; \tag{50a}$$

$$k_i(x) = 0 \ \text{si} \ |x| > \varepsilon^{-i} \quad , \quad 0 \leqslant \varepsilon < 1 \ ; \tag{50b}$$

y pongamos

$$S_N f = f * \sum_{i=-N}^{N} k_i \quad . \tag{51}$$

Por dicho Corolario 1, para toda f de L^2 , y en particular para todo f de L_0 , los $S_N f$ tienden en media a un operador límite Tf que es de tipo (2 , 2), y

$$Tf = f * \sum_{-\infty}^{\infty} k_i \quad . \tag{51a}$$

TEOREMA 8 . Si los núcleos k_i verifican (5o) - (50b) y Tf está definido por (51a), entonces Tf es de tipo debil (1 , 1) sobre L_0 y de tipo (p , p) sobre L_0 para todo $1 < p < \infty$. Análogamente cada $S_N f$ (definido por (51)) es de tipo débil (1 , 1) y de tipo (p , p) para $1 < p < \infty$, con normas uniformemente acotadas, es decir $\|S_N f\|_p \leqslant M \ \|f\|_p$ donde M no depende de f ni de N .

Demostración . Vamos a probar el teorema para Tf , la demostración es completamente análoga para $S_N f$. Por el Corolario 1, pág. 38, Tf es de tipo (2 , 2) sobre L_0 , luego en virtud del teorema 7 (y en virtud del lema 7 de la pág. 93) es suficiente probar que Tf es de pseudo - tipo (1 , 1). Sea pues $f(x)$ una función de L_0 y Q un soporte cúbico de $f(x)$, y veamos que existe un G y una $h(x)$ que verifican (36b), (39) y (40) .

Sin restringir la generalidad podemos suponer que Q tiene centro en el origen, y sea a = el lado de Q. Sea $G = 2Q$ = cubo de centro en el origen y lado $2a$, y sea

$$h(x) = \begin{cases} (1/|Q|) \int_Q f(t)\, dt = 1/|Q| \int_{E^n} f(t)\, dt \ , & \text{si } x \in Q \ , \\ 0 \quad \text{si } x \text{ no pertenece a } Q \ , \end{cases} \tag{52}$$

y veamos que estos G y $h(x)$ asi definidos responden a la tésis.

Es evidente que G y $h(x)$ verifican (39) y (40), de modo que debemos probar que ellos verifican (36b). Para ello vamos a probar las 5 propiedades siguientes :

$$\int_{E^n} (f(x) - h(x))\, dx = 0 \ , \tag{53}$$

$$f(x) - h(x) = 0 \qquad \text{si } x \text{ no pertenece a } Q \ , \tag{53a}$$

$$\|f - h\|_1 \leqslant 2 \ \|f\|_1 \ , \tag{53b}$$

$$\|(f - h) * k_i\|_1 \leqslant 2M\, \varepsilon^i \ \|f\|_1 \ a \ , \tag{53c}$$

$$(f - h) * k_i(x) = 0 \qquad \text{si} \quad x \in E^n - G \quad \text{y} \quad \varepsilon^{-i} < a \ . \tag{53d}$$

Supongamos probadas (53c) y (53d) y veamos que ellas implican (36b). En efecto; sea j el menor j tal que $\varepsilon^{-j} \geqslant a$, es decir $\varepsilon^j \leqslant a^{-1}$, entonces por (53d) tenemos $(f - h) * k_i(x) = 0$ si $i < j$ y si $x \in E^n - G$, por tanto

$$\int_{E^n - G} |T(f - h)(x)|\, dx = \int_{E^n - G} |f * \textstyle\sum_{-\infty}^{\infty} k_i(x)|\, dx =$$

$$= \int_{E^n - G} |f * \textstyle\sum_{i=j}^{\infty} k_i(x)|\, dx \leqslant \textstyle\sum_j^{\infty} \|f * k_i\|_1$$

$$\leq \sum_j^{\infty} 2M\ \varepsilon^i \ \|f\|_1 \ a = 2M\ a\ \|f\|_1 \ \varepsilon^i \ (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots) \leq$$

$$\leq 2M/(1-\varepsilon)\ \|f\|_1\ a\ a^{-1} = M_1\ \|f\|_1 \ ,$$

lo que prueba (36b) .

Asi pues, solo falta probar que vale (53c) y (53d). De la definición de $h(x)$ es evidente que se verifican (53), (53a) y (53b). Para probar (53c) observemos que en virtud de (53) podemos escribir

$$(f-h) * k_i(x) = \int_{E^n} (f-h)(t)\ k_i(x-t)\ dt =$$

$$= \int_{E^n} (f-h)(t)\ \left[k_i(x-t) - k_i(x)\right]\ dt \ ,$$

por tanto teniendo en cuenta (53a) y (53b), tendremos en virtud de (50) y (50a) :

$$\|(f-h) * k_i\|_1 = \int_{E^n} \left| \int_{E^n} (f(t) - h(t))\ \left[k_i(x-t) - k_i(x)\right] dt \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{E^n} |f(t) - h(t)|\ dt \int_{E^n} |k_i(x-t) - k_i(x)|\ dx \leq$$

$$\leq \int_{E^n} M\ \varepsilon^i\ |t|\ |f(t) - h(t)|\ dt = \int_Q M\ \varepsilon^i\ |t|\ |f(t) - h(t)|\ dt \leq$$

$$\leq M\ \varepsilon^i\ a \int_{E^n} |f(t) - h(t)|\ dt \leq 2M\ \varepsilon^i\ a\ \|f\|_1 \ .$$

Finalmente vamos a probar (53d). Tenemos, puesto que $f(t) - h(t) = 0$ fuera de Q

$$(f-h) * k_i(x) = \int_{E^n} (f(t) - h(t))\ k_i(x-t)\ dt = \int_Q (f(t) - h(t)\ k_i(x-t)\ dt$$

Si $x \in E^n - G$ entonces x está fuera de $2Q$, o sea $|x| > 2a$, y en la última integral t varía en Q, es decir $|t| < a$, luego $|x - t| > 2a - a' = a$. Luego si $\varepsilon^{-i} < a$, como $k_i(x - t)$ se anula para $|x - t| > \varepsilon^{-i}$ (ver (50b)) y como $|x - t| > a > \varepsilon^{-i}$, resulta que la última integral es nula para todo t de Q, l,q,d,d.

Hemos visto (páginas 41, 42, 51) que los operadores de Hilbert $H_w f$, n-dimensionales, $n \geq 1$, son del tipo (51a) donde los $k_i(x)$ verifican (50) - (50c); también son de este tipo los operadores del Corolario 2, pág. 39. Por tanto del teorema 8 obtenemos como caso particular el siguiente

TEOREMA 9 (de Riesz y Kolmogoroff para $n = 1$, de Calderón - Zygmund para $n > 1$ Los operadores $H_w f$ de Hilbert son de tipo debil (1 , 1) y de tipo (p , p), $1 < p < \infty$, sobre L_o; análogamente los $H_{w\varepsilon} f$ son de tipo debil (1 , 1) y de tipo (p , p), $1 < p < \infty$, con normas acotadas uniformemente en ε. Más generalmente, estas propiedades poseen los operadores $S_N f$ y Tf definidos por (51) si los $k_i(x)$ están dados por (9) de la pág. 40 y verifican las hipótesis del Corolario 2, pág. 39.

5. SUBORDINACION DE OPERADORES

Veamos un método general que permite, sabiendo el tipo de un operador T, deducir el tipo de otro operador M subordinado a T en cierto sentido. El tipo más simple de subordinación es el dado por la relación $\leq$. En efecto, si Tf, Mf son dos operadores sobre L_o, escribiremos $|M| \leq |T|$ si para toda $f(x)$ de L_o y para casi todo x se verifica $|Mf(x)| \leq |Tf(x)|$. En este caso se tiene obviamente que:

LEMA 7. Sea $|M| \leq |T|$. Si T es de tipo (p , p) (respectivamente, de tipo debil (p , p)), entonces M es también de tipo (p , p) (respectivamente, tipo debil (p , p))./

En efecto, se tiene $|Mf(x)| \leq |Tf(x)|$ para toda f de L_o y casi todo x, luego $|Mf(x)|^p \leq |Tf(x)|^p$, y por tanto, integrando, $\|Mf\|_p \leq \|Tf\|_p$. Si T es de tipo (p , p), existe una constante c tal que $\|Tf\|_p \leq c \|f\|_p$, luego resulta $\|Mf\|_p \leqslant c\ \|f\|_p = c_1\ \|f\|_p$, es decir T es también de tipo $(p\ ,\ p)$, lo que prueba la primera parte de la tésis. Análogamente se prueba la segunda parte, observando que de $|Mf(x)| \leqslant |Tf(x)|$ sigue que el conjunto donde $|Mf(x)| > a$ está contenido en el conjunto donde $|Tf(x)| \geqslant a$, es decir $D(|Mf|\ ;\ a) \leqslant D(|Tf|\ ;\ a)$ luego si Tf es de tipo debil $(p\ ,\ p)$ obtenemos que

$$D(|Mf|\ ;\ a) \leqslant D(|Tf|\ ;\ a) \leqslant (\ (c/a)\ \|f\|_p\ )^p = (c\ \|f\|_p\ /\ a)^p\ ,$$

o sea que Mf es de tipo debil $(p\ ,\ p)$.

Veamos ahora dos generalizaciones de concepto $\leqslant$. Un operador Mf puede no ser $\leqslant$ Tf en sentido estricto, pero serlo en sentido "local". Por ejemplo, si Lf es el operador maximal de Hardy - Littlewood, definido por (28), entonces $|f(x)| \leqslant Lf(x)$ de modo que no vale $Lf(x) \leqslant |f(x)|$, sin embargo para todo x existe un cubo $Q(x)$ tal que

$$Lf(x) \leqslant (2/|Q(x)|)\int_{Q(x)} |f(t)|\ dt\ ,$$

es decir $Lf(x) \leqslant 2\ |f(x)|$ "localmente", es decir el valor de $Lf(x)$ se acota por el promedio de los valores de f en un entorno de x .

Esto sugiere introducir este otro tipo de subordinación de operadores.

__Definición__. Escribiremos $|M| \overset{\ell}{\leqslant} |T|$, (M está subordinado localmente a T), para toda f de L_0 y todo punto x de E^n existe un cubo $Q = Q(x)$ con centro en x tal que

$$|Mf(x)| \leqslant \frac{1}{|Q(x)|}\int_{Q(x)} |Tf(t)|\ dt = \frac{1}{|Q(x)|}\int_{E^n} g_{Q(x)}(t)\ |Tf(t)|\ dt\ , \tag{54}$$

donde g_Q es la función característica de Q . Más generalmente, escribiremos $|M|^s \overset{\ell}{\leqslant} |T|^s$ si para toda f y todo x existe un cubo $Q(x)$ con centro en x tal que

$$|Mf(x)|^s \leqslant \frac{1}{|Q(x)|}\int_{Q(x)} |Tf(t)|^s\ dt\ . \tag{54a}$$

Si $I = If = f$ es el operador idéntico, se tiene, en virtud de lo observado más arriba, que el operador maximal de Hardy - Littlewood verifica $Lf \overset{\ell}{<} (1+\varepsilon)\, I \overset{\ell}{<} 2\,|If|$, para todo $\varepsilon > 0$. Además $|M| \overset{\ell}{<} |T|$ equivale a

$$|Mf(x)| \leqslant Lf(x) \quad , \tag{54b}$$

análogamente $|M|^s \overset{\ell}{<} |T|^s$ equivale a

$$|Mf(x)|^s \leqslant L(|Tf|^s)(x) \quad . \tag{54c}$$

En la definición que precede $Mf(x)$ se acotaba por los valores de Tf en un entorno de x, luego para x fijado intervienen solo los valores $Tf(t)$ en este entorno Q de x. Pero para conocer $Tf(t)$ en un t de $Q(x)$ hace falta conocer "toda" la función $f(t)$. En la definición siguiente para cada x fijo intervienen los valores de Tf solo en un entorno Q de x, y también solo la $f(t)$ limitada a Q.

<u>Definición</u>. Escribiremos $|M| \overset{\ell\ell}{<} |T|$, si para toda f de L_0 y todo punto x de E^n, existe un cubo $Q = Q(x)$ con centro en x tal que

$$|Mf(x)| \leqslant \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} \left| T\left[\varepsilon_{Q(x)} f\right](t)\right| dt \quad . \tag{55}$$

Análogamente $|M|^s \overset{\ell\ell}{<} |T|^s$ significa que

$$|Mf(x)|^s \leqslant \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} \left| T\left[\varepsilon_{Q(x)} f\right](t)\right|^s dt \tag{55a}$$

<u>LEMA 8</u>. a) <u>Sea $|M|^s \overset{\ell}{<} |T|^s$ y $s < p$; si T es de tipo debil (p, p), entonces M también es de tipo debil (p, p); si T es de tipo (p, p), M es también de tipo (p, p)</u>. b) <u>Sea $|M|^s \overset{\ell\ell}{<} |T|^s$ y $s < p$; si T es de tipo debil</u>

(p , p) entonces M es de tipo debil (p , p) y de tipo (q , q) para todo $q > p$.

Demostración. a) Por hipótesis $|Mf(x)|^s \leq L(|Tf|^s)(x)$, donde Lf es el operador maximal de Hardy - Littlewood, luego el conjunto $\{|Mf(x)| > a\}$ = conjunto $\{|Mf(x)|^s > a^s\} \subset$ conjunto $\{L(|Tf|^s)(x) > a^s\}$. Pero, por lo visto en Observación 6, el último conjunto es parte de un conjunto H tal que

$$|H| \leq \frac{c}{a^s} \int_H |Tf|^s(t)\, dt .$$

Si Tf es de tipo debil (p , p), entonces por ser $s < p$ y por la condición de Kolmogoroff (ver pag. 108, teorema 1) tenemos que

$$|H| \leq \frac{c}{a^s} \left[c_1 (p/(p-s))^{1/s} |H|^{1/s - 1/p} \|f\|_p\right]^s =$$

$$= (c_2/a^s)\, |H|^{1-s/p} \|f\|_p^s ,$$

de donde

$$|H|^{s/p} \leq c_2 (\|f\|_p / a)^s$$

luego

$$|H| \leq (c_3 \|f\|_p / a)^p .$$

Así pués el conjunto $E(a) = \{|Mf(x)| > a\}$ tiene medida menor que $(c_3 \|f\|_p / a)^p$, lo que prueba que Mf es también de tipo debil (p , p).

Supongamos ahora que Tf es de tipo (p , p) y probaremos que también lo es Mf. Tenemos por hipótesis que $|Mf(x)|^s \leq L(|Tf|^s)(x)$, luego elevando a la potencia p/s, integrando, y recordando que $p/s > 1$ y que Lf es de tipo (p/s , p/s), tendremos

$$\int_{E^n} |Mf(x)|^p\, dx \leq \int_{E^n} \{L(|Tf|^s)(x)\}^{p/s}\, dx \leq$$

$$\leq c \int_{E^n} (|Tf(x)|^s)^{p/s} dx = c \int_{E^n} |Tf(x)|^p dx \quad .$$

Siendo Tf de tipo (p , p), la última integral es menor que $c\, c_1 \|f\|_p^p =$ $= c_2 \|f\|_p^p$, luego obtenemos $\|Mf\|_p^p \leq c_2 \|f\|_p^p$, lo que prueba que Mf es de tipo (p , p).

b) Tenemos por hipótesis que para toda f y todo x se verifica (55a). Como Tf es de tipo debil (p , p) y $s < p$, por la desigualdad de Kolmogoroff (aplicada a $g_Q f$ en vez de f la integral de (55a) se acota en

$$\int_{Q(x)} |T [g_{Q(x)} f] (t)|^s dt$$

$$\leq c_1 |Q(x)|^{1-s/p} \{ \int_{E^n} |g_{Q(x)} f(t)|^p dt \}^{s/p} =$$

$$= c_1 |Q(x)|^{1-s/p} \{ \int_{Q(x)} |f(t)|^p dt \}^{s/p} \quad .$$

Luego de (55a) y de la última desigualdad obtenemos

$$|Mf(x)|^s \leq (1/|Q(x)|)^{s/p} \{ \int_{Q(x)} |f(t)|^p dt \}^{s/p} \quad ,$$

luego

$$Mf(x)^p \quad \frac{1}{Q(x)} \quad Q(x) \quad f(t)^p dt \quad L(f^p) \quad . \tag{56}$$

La última desigualdad significa que $|M|^p \leq |I|^p$, donde $I = If = f$ es el operador idéntico, luego por la parte a), ya probada, y por ser I de tipo (q , q) , para todo $q > p$, resulta que M es de tipo (q , q) para todo $q > p$, lo que prueba la segunda afirmación de b) .

Para probar la primera afirmación de b), o sea que M es de tipo debil (p , p)

observemos que de (56) se deduce que el conjunto $E(a)$ = conjunto $\{|Mf(x)| > a\}$ = conjunto $\{|Mf(x)|^p > a^p\} \subset$ conjunto $\{L(|f|^p)(x) > a^p\}$, luego $|E(Q)| \leq D(L(|f|^p) ; a^p)$. Pero como el operador L es de tipo debil (1 , 1) (ver teorema maximal de Hardy - Littlewood) tenemos

$$|E(a)| \leq c/a^p \ \| |f|^p \|_1 = c/a^p \int_{E^n} |f(t)|^p \, dt = c(\|f\|_p / a)^p ,$$

lo que prueba que M es de tipo debil (p , p), l,q,d,d.

Tenemos pue tres tipos de subordinación, $<$ ordinario, $\overset{\ell}{<}$ y $\overset{\ell\ell}{<}$, y cada uno de ellos permite deducir el tipo del operador subordinado conociendo el del operador subordinante. Combinando estos tres tipos obtenemos el siguiente

LEMA 8a . Sean M, T_1, T_2, T_3 cuatro operadores definidos en L_o, tales que para toda f de L_o y todo punto x de E^n existe un cubo $Q(x)$ con centro en x tal que

$$|Mf(x)|^s \leq c_1 |T_1 f(x)|^s + \frac{c_2}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |T_2 f(t)|^s \, dt +$$

$$+ \frac{c_3}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |T_3 (g_{Q(x)} f)(t)|^s \, dt , \qquad (57)$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes fijas. Entonces; si T_1, T_2, T_3 son de tipo debil (p , p), $s < p$, entonces también M es de tipo debil (p , p). Si $T_1; T_2$ son de tipo (q , q) y T_3 de tipo debil (p , p), $s < p \leq q$, entonces M es de tipo (q , q).

Demostración. La condición (57) implica que para todo x de E^n debe verificarse una de las tres desigualdades siguientes

$$|Mf(x)|^s \leq 3 c_1 |T_1 f(x)|^s , \qquad (57a)$$

$$|Mf(x)|^s \leqslant 3\, c_2\, |Q(x)|^{-1} \int_{Q(x)} |T_2 f|^s \, dt \tag{57b}$$

$$|Mf(x)|^s \leqslant 3\, c_3\, |Q(x)|^{-1} \int_{Q(x)} |T_3\, (g_{Q(x)}\, f)|^s \, dt \tag{57c}$$

Luego el espacio E^n se descompone en $E^n = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, siendo E_1 el conjunto de los x en que se verifica (57a), E_2 en que se verifica (57b) y E_3 en que se verifica (57c) .

Pongamos $M_i f(x) = |Mf(x)|$ si x pertenece a E_i , y cero en los demás puntos, es decir $M_i f = g_{E_i} |Mf|$, $i = 1, 2, 3$. Entonces $|Mf(x)| \leqslant$ $\leqslant M_1 f(x) + M_2 f(x) + M_3 f(x)$, y $|M_1|^s \leqslant 3\, c_1\, |T_1|^s$, $|M_2|^s \overset{\ell}{\leqslant} 3\, c_2\, |T_2|^s$, $|M_3|^s \overset{\ell\ell}{\leqslant} 3\, c_3\, |T_3|^s$. Si T_1, T_2, T_3 son de tipo debil $(p\ ,\ p)$, $s < p$, resulta del lema 8 que M_1, M_2, M_3 son de tipo debil $(p\ ,\ p)$, luego también $M_1 f + M_2 f + M_3 f$ y con más razón Mf es de tipo debil $(p\ ,\ p)$. Si T_1, T_2 son de tipo $(q\ ,\ q)$ y T_3 de tipo debil $(p\ ,\ p)$, $s < p < q$, resulta del lema 8 que M_1, M_2, M_3 son de tipo $(q\ ,\ q)$, luego M es también de tipo $(q\ ,\ q)$, l,q,d,d.

Del lema 8a obtenemos enseguida el siguiente criterio general para determinar el tipo o tipo debil de un operador Mf .

TEOREMA 10 . Sean M, T_1, T_2, T_3 operadores definidos en L_o tales que para toda $f(x)$ de L_o y todo punto x de E^n existe un cubo $Q(x)$ con centro en x y con la propiedad siguiente: para todo punto y de $1/2Q(x)$ (= cubo de centro x y mitad del lado de $Q(x)$) vale la desigualdad siguiente (los c_i son constantes fijas)

$$|Mf(x)| \leqslant c_1\, |T_1 f(x)| + c_2\, |T_2 f(y)| + c_3\, |T_3\, (g_{Q(x)}\, f)\, (y)| \quad . \tag{58}$$

Entonces: Si T_1, T_2, T_3 son de tipo debil $(p\ ,\ p)$ entonces Mf es también de tipo debil $(p\ ,\ p)$. Si T_1, T_2 son de tipo $(q\ ,\ q)$, $p < q$, y si T_3 es de tipo debil $(p\ ,\ p)$, entonces M es de tipo $(q\ ,\ q)$.

__Demostración__ . Sea $s < p$. Como (58) vale para todo y de $1/2Q(x)$, elevando a potencia s e integrando en y sobre $1/2Q(x)$, obtendremos

$$|Mf(x)|^s \, |1/2Q(x)| \leq c_s \Big\{ c_1^s \, |1/2Q(x)| \, |T_1 f(x)|^s +$$

$$+ c_2^s \int_{1/2Q(x)} |T_2 f(y)|^s + c_3^s \int_{1/2Q(x)} |T_3 (g_{Q(x)} f)(y)|^s \, dy \Big\}$$

luego

$$|Mf(x)|^s \leq c_s' \Big\{ |T_1 f(x)|^s + \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |T_2 f(y)|^s \, dy +$$

$$+ \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} |T_3 (g_{Q(x)} f)(y)|^s \, dy \Big\} ,$$

y el teorema se reduce al lema 8a , l,q,d,d.

__Aplicación a la transformada de Hilbert 1-dimensional__ . Consideremos el caso $n = 1$, $E^n = E^1$ y el operador de Hilbert

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x-t} \, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) , \qquad (59)$$

donde

$$H_\varepsilon f(x) = \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t} \, dt \qquad (60) .$$

Como $L_0 \subset L^2$ sabemos que $Hf(x)$ está bien definido para toda f de L_0 (ver Corolario 4, pág. 46), y en el párrafo anterior hemos probado que Hf y $H_\varepsilon f$ son de tipo (p , p) para $1 < p < \infty$ y de tipo debil $(1 , 1)$ sobre L_0 , con normas uniformemente acotadas en ε . Ahora vamos a probar un resultado más fuerte, a saber que esta propiedad vale para la función mayorante Mf de las $H_\varepsilon f$. Más precisamente, sea Mf el operador maximal de los $H_\varepsilon f$, que para cada f de L_0 y cada x de E^1 está definido por

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |H_\varepsilon f(x)| \quad . \tag{61}$$

Mf no es un operador lineal, pero se comprueba trivialmente que Mf es <u>sublineal</u>. Evidentemente $|Hf(x)| \leqslant Mf(x)$ para todo x, así como $|H_\varepsilon f(x)| \leqslant Mf(x)$ para todo x y todo ε. Si bien Mf es mayor y no menor que Hf, veremos enseguida que Mf es "menor localmente" que Hf más Lf, en el sentido de las subordinaciones $\overset{\ell}{<}$, $\overset{\ell\ell}{<}$ definidas más arriba. Más precisamente se tiene el siguiente

<u>LEMA 9</u>. <u>El operador maximal Mf definido por (61) verifica la desigualdad (58) con $T_2 = T_3 = |Hf|$ y $T_1 = Lf$ = operador maximal de Hardy - Littlewood, donde Hf es el operador límite (58)</u>.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ sea $Q(x) = Q(x, \varepsilon)$ el cubo (intervalo) de centro x y lado (longitud) 2ε, y vamos a probar que para todo y de $1/2Q(x)$ vale

$$|H_\varepsilon f(x) - Hf(y) + H(g_{Q(x)} f)(y)| \leqslant c_1 Lf(x) \quad . \tag{62}$$

De (62) va a resultar enseguida la tésis, pues para cada x existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|Mf(x)| \leqslant 2H_\varepsilon f(x)$, luego de (62) resulta

$$|Mf(x)| \leqslant 2\, Hf(y) + 2\, H(g_{Q(x)} f)(y) + c_1 Lf(x) \;,$$

para todo y de $1/2Q(x)$, que es la condición (58) con $T_1 = Lf$, $T_2 = T_3 = |H|$.

Asi pues nos basta con probar (62). LLamando Df la expresión del miembro iz -

quierdo de (62), tenemos

$$|Df| = |H_{\varepsilon} f(x) - Hf(y) + H(g_{Q(x)} f)(y)| =$$

$$= \left| \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y-t}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{Q(x)}(t)\, f(t)}{y-t}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y-t}\, dt + \int_{|x-t|<\varepsilon} \frac{f(t)}{y-t}\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt - \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{y-t}\, dt \right| = |y-x| \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)\, dt}{(x-t)(y-t)}$$

Como $|x-y| < \varepsilon/2$ y $|x-t| > \varepsilon$, tenemos $|y-t| \geq 1/2|x-t|$, luego

$$|Df| \leq \varepsilon \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{|f(t)|\, dt}{|x-t|^2}$$

Pongamos

$$F(u) = \int_x^u |f(t)|\, dt$$

e integremos la última integral por partes, obtendremos entonces

$$|Df| \leq \varepsilon \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{|f(t)|}{|x-t|^2}\, dt =$$

$$= \varepsilon \left\{ \left[F(u)/(u-x)^2 \right]_{-\infty}^{x-} + \left[F(u)/(u-x)^2 \right]_{x+\varepsilon}^{\infty} + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{|x-u|>\varepsilon} \frac{F(u)\, du}{(x-u)^3} \right\}$$

Como por definición de Lf tenemos $Lf(x) \geqslant |F(u)|/|u - x|$, o sea $|F(u)| \leqslant |u - x| \; Lf(x)$, la última desigualdad da

$$|Df| \leqslant \varepsilon \; Lf(x) \quad \left\{ \Big[1/(u - x) \Big]_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \right.$$

$$\left. + \Big[1/(u - x)^2 \Big]_{x+\varepsilon}^{\infty} + 2 \int_{|x-u| > \varepsilon} \frac{du}{(x - u)^2} \right\} =$$

$$= \varepsilon \; Lf(x) \; \left\{ 2/\varepsilon + 4(\varepsilon) \right\} = 6 \; Lf(x) \quad ,$$

lo que prueba la tésis.

<u>Aplicación a transformadas de Hilbert n-dimensionales</u> .

Para simplificar consideremos el caso del plano $E^2 = \{x\}$, de modo que podemos indicar los puntos z de E^2 con la notación de los números complejos: $z = |z| \; e^{iv}$. Consideremos el núcleo

$$K(z) = w(v)/|z|^2 \qquad , \qquad z = |z| \; e^{iv} \quad ,$$

donde $w(v)$ verifica las condiciones siguientes (cfr. pág. 47 y (15) de pág. 51) :

$$\int_0^{2\pi} w(v) \, dv = 0 \qquad\qquad |w(v) - w(v_1)| \leqslant a \, |v - v_1| \quad .$$

Consideremos el operador de Hilbert $H_w f$ con característica $w(v)$:

$$Hf = H_w f(z) = \int_{E^2} f(x) \, K(z - x) \, dx = \int_{E^2} \frac{f(x) \, w(t)}{r^2} \, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon \, f(z) \quad , \tag{63}$$

donde

$$x - z = r\,e^{it} \quad , \tag{63a}$$

$$H_\varepsilon f(z) = H_{\varepsilon,w} f(z) = \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)\,w(t)}{r^2}\,dx \quad . \tag{63b}$$

El operador maximal de los $H_{\varepsilon,w}$ es ahora

$$Mf(z) = \sup_{\varepsilon>0} |H_{\varepsilon,w} f(z)| \quad . \tag{64}$$

<u>LEMA 9a</u> . <u>El operador maximal $Mf(z)$, definido por (64), verifica la condición (58) con $T_1 f = Lf$ = operador de Hardy - Littlewood y $T_2 f = T_3 f = |Hf|$, donde Hf es dado por (63)</u> .

Demostración . Sea $D = H_\varepsilon f(z) - Hf(z_1) + H(g_{S(z)} f)(z_1)$, donde $S(z)$ es la esfera de centro z y radio ε y z_1 un punto de $1/2S(z)$. Como en la demostración precedente, es suficiente probar que $D \leq \alpha\, Lf(z)$ (el cambio del cubo $Q(z)$ por una esfera $S(z)$ no cambia la situación, pues el teorema 10 vale evidentemente si el cubo Q se cambia por una esfera de igual radio) . En nuestro caso D es igual a

$$D = Df(z) = H_\varepsilon f(z) - Hf(z_1) + H(g_{S(z)} f)(z_1) =$$

$$= \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)\,w(t)}{r^2}\,dx - \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)\,w(t_1)}{r_1^2}\,dx \quad ,$$

donde $x - z = r\,e^{it}$, $x - z_1 = r_1\,e^{it_1}$, y donde $|z_1 - z| < \varepsilon/2$ mientras que $|x - z| > \varepsilon$.

Tenemos

$$D = \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)\,w(t)\,(r_1^2 - r^2)}{r_1^2\, r_2^2}\,dx +$$

$$+ \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)\ [w(y) - w(t_1)]}{r_1^2}\ dx = I + II \quad .$$

Para la integral I tenemos

$$|I| \leqslant 2\varepsilon \iint_{x-z>\varepsilon} \frac{|f(x)|\ r dx}{r^4} \leqslant 2r \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{f(x)}{r^3}\ dx =$$

$$= 2\varepsilon \int_0^{2\pi} dt \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{|f(z + re^{it})|}{r^2}\ dr = 2\varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(r)}{r^3}\ dr \quad , \quad (65)$$

donde $g(r) = r \int_0^{2\pi} |f(z + r\ e^{it})|\ dt$

Llamando $G(s)$ a la integral indefinida de $g(r)$, tendremos integrando por partes la última integral de (65) ,

$$|I| \leqslant 2\varepsilon \left\{ \left[G(s)/s^3 \right]_{\varepsilon}^{\infty} + 3 \int_{\varepsilon}^{\infty} (G(s)/s^4)\ ds \right\} \quad .$$

Pero

$$G(s) = \int_0^s g(r)\ dr = \int_{Q(s)} |f(x)|\ dx \quad ,$$

donde $Q(s)$ es el cubo de centro z y radio s , por tanto

$$|G(s)| \leqslant c\ Lf(z)\ s^2 \quad ,$$

luego

$$|I| \leqslant 2\varepsilon\ c\ Lf(z) \left\{ \left[1/|s| \right]_{\varepsilon}^{\infty} + 3 \int_{\varepsilon}^{\infty} ds/s^2 \right\} \leqslant c_1\ Lf(z) \quad . \quad (66)$$

Para acotar a II , observamos que en virtud de la condición $|w(t) - w(t_1)| \leqslant$ $\leqslant c\ |t - t_1|$, tenemos

$$|II| \leqslant c \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{|f(x)|\ |t - t_1|}{r_1^2}\ dx \leqslant$$

$$\leq \quad c_1 \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{|f(x)|\,|\mathrm{sen}(t-t_1)|}{r^2}\,dx$$

Cuando x varía sobre la circunferencia $|x| = r$, $|\mathrm{sen}(t - t_1)|$ alcanza su máximo valor cuando el segmento xz_1 es perpendicular al $z_1 z$, y este máximo es igual a la distancia entre z_1 y z sobre $r \leq \varepsilon/r$. Luego, repitiendo el razonamiento que hicimos con (65) ,

$$|II| \leq c_2 \iint_{|x-z|>\varepsilon} \frac{|f(x)|\,\varepsilon}{r^3}\,dx$$

$$\leq \varepsilon\, c_3 \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(r)}{r^3}\,dr \right\} \leq c_4\, Lf(z) \quad . \tag{66a}$$

De (66) y (66a) resulta

$$D \leq c_5\, Lf(z) \quad ,$$

1,q,d,d.

Análogamente se prueba que el lema 9a vale para los operadores H_w n-dimensionales $n \geq 2$. Como el operador Lf de Hardy – Littlewood, así como el Hf , son de tipo (p , p) si $1 < p < \infty$, y de tipo debil (1 , 1), resulta, de los lemas 9 y 9a y del teorema 10, el siguiente

TEOREMA 11 . (de Zygmund, Titchmarsh para $n = 1$, de Calderón – Zygmund para $n > 1$) . El operador maximal de los $H\ f$, definido por (64), es de tipo (p , p) para $1 < p < \infty$, y de tipo debil (1 , 1), sobre L_o .

Observemos que tanto el teorema 11 como el teorema 9 fueron probados tan solo para L_o , pero serán extendidos a todo L^p en el teorema próximo.

6. CONVERGENCIA PUNTUAL Y EL OPERADOR MAXIMAL .

Consideremos una sucesión (sucesión contínua) de operadores $T_r = T_r f$, de modo que para cada $r > 0$ tenemos un operador T_r. Recordemos que se dice que T_r converge puntualmente sobre L^p, si para toda f de L^p existe el límite $\lim_{r\to 0} T_r f(x) = Tf(x)$, para casi todo x. El límite $Tf(x)$ es un nuevo operador, llamado operador límite de la sucesión T_r. Decimos que T_r converge en media-p sobre L^p, si para toda f de L^p vale $\|Tf - T_r f\|_p \longrightarrow 0$, para $r \to 0$. Llamaremos operador maximal de la sucesión T_r al operador $M = Mf$ definido por

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |T_r f(x)| \quad . \tag{67}$$

Si los T_r son operadores lineales entonces M es sublineal, pero en general M no es lineal .

TEOREMA 12 . Sea T_r una sucesión de operadores lineales y $M = Mf$ el operador maximal de esta sucesión. Si $T_r f(x)$ converge a un límite $Tf(x)$ para toda f de L_o y casi todo x, es decir si T_r converge puntualmente sobre L_o (aquí L_o puede ser cualquier conjunto denso en todos los L^p), y si M es de tipo debil (p, p) para todo $1 \leq p < \infty$, entonces :

a) $T_r f(x)$ converge puntualmente sobre L^p para todo $p \geq 1$;

b) $T_r f$ converge en media-p sobre L^p para todo $p > 1$, $p < \infty$;

c) si f es de L^1 no podemos afirmar que $T_r f$ sea convergente en media-1 pero si $|f(x)| \log (1 + |f(x)|)$ es integrable (es decir si f es de Z^1) entonces $T_r f$ converge en media-1 sobre todo conjunto X de medida finita .

Observación 7 : El teorema vale, obviamente, si la condición $1 \leq p < \infty$ se cambia por $p_1 \leq p < p_2$, cambiando 1 por p_1 y Z^1 por Z^{p_1} .

Demostración . a) Sea $f(x)$ una función de L^p, $p \geq 1$, y probaremos las funciones $T_r f(x)$ convergen para casi todo x. Para ello usaremos el siguiente teorema conocido de la teoría de la integral (ver la demostración en la observación 8 que sigue) : para que una sucesión $h_r(x)$ converja para casi todo x es necesario y suficiente que se verifique la siguiente condición de tipo Cauchy - Bolzano :

Condición-ε : dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $E = E_r$ con las dos propiedades siguientes :

1) la medida de E es $|E| < \varepsilon$; 2) dado un punto x que no pertenece a E , se puede indicar un s (que depende de ε y de x) tal que para todo $r > s$ se verifica $|h_s(x) - h_r(x)| < \varepsilon$.

Vamos a probar que esta condición se verifica si $h_r = T_r f$, $f \in L^p$. Como L_0 es denso en L^p , existe una $g(x)$ de L_0 tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon'$, donde ε' se elejirá convenientemente. Sea E el conjunto de los x tales que

$$M(f - g)(x) > \varepsilon/3 \quad . \tag{68}$$

Veamos que este conjunto E satisface las condiciones 1) y 2) de la condición-ε. Por ser M de tipo debil (p , p), tenemos que (c = la constante del tipo)

$$|E| \leqslant (c \|f - g\|_p / (\varepsilon/3))^p \leqslant (3c/\varepsilon)^p (\varepsilon')^p ,$$

que es $< \varepsilon$ si ε' se elije pequeño en relación a ε ; luego se verifica la condición 1) .

Veamos que se verifica la condición 2) . Sea x un punto que no pertenece a E de modo que

$$M(f - g)(x) \leqslant \varepsilon/3 \quad ,$$

y por tanto tendremos

$$|T_s f(x) - T_r f(x)| \leqslant |T_s(f - g)(x)| + |T_r(g - f)(x)| +$$

$$+ |T_s g(x) - T_r g(x)| \leqslant M(f - g)(x) + M(f - g)(x) +$$

$$+ |T_s g(x) - T_r g(x)| \leq (2/3)\, \varepsilon + |T_s g(x) - T_r g(x)| \quad .$$

Como g es de L_0, por hipótesis $T_r g(x)$ converge para casi todo x y la condición 2) se verifica para $T_r g(x)$. Luego (descartando previamente un conjunto fijo de medida nula de puntos x) podemos elejir s para que para todo $r > s$ se verifique $|T_s g(x) - T_r g(x)| < \varepsilon/3$, y de la desigualdad precedente resulta $|T_s f(x) - T_r f(x)| < \varepsilon$.

b) Sea ahora $p > 1$ $(p < \infty)$. Ya hemos probado que $T_r f(x)$ converge puntualmente para toda $f \in L^p$; veamos que (al ser $p > 1$) también $T_r f$ converge en media-p. Tenemos que $T_r f(x) \longrightarrow Tf(x)$ para casi todo x, luego también

$$|T_r f(x) - Tf(x)|^p \longrightarrow 0$$

Solo falta probar que se puede integrar término a término la última relación. Para ello es suficiente probar que las funciones $|T_r f(x) - Tf(x)|^p$ están mayoradas por una función integrable. Como $|T_r f(x)| \leq Mf(x)$ para todo r y todo x, tenemos también $|Tf(x)| \leq Mf(x)$, luego

$|T_r f(x) - Tf(x)|^p \leq |2\, Mf(x)|^p = 2^p\, |Mf(x)|^p$. Pero si si $p > 1$, Mf es de tipo (p, p) (pues Mf es de tipo debil $(1, 1)$ y de tipo debil (q, q) para todo $q > p$, luego por el teorema de Marcinkiewicz Mf es de tipo (p, p) si $1 < p < \infty$) Luego $\|Mf\|_p \leq c\, \|f\|_p$, y como $f \in L^p$, $\|f\|_p < \infty$, resulta $\|Mf\|_p < \infty$ o sea $|Mf(x)|^p$ es integrable. Así pues las funciones $|T_r f(x) - Tf(x)|^p$ se mantienen menores que una función fija integrable, como queríamos ver.

c) Sea ahora $p = 1$, X un conjunto de medida finita y $|f(x)| \log(1 + |f(x)|)$ integrable. Sabemos que que $T_r f(x)$ converge puntualmente pues $f(x)$ es de L^1, luego

$$|T_r(x) - T_s f(x)| \xrightarrow[r,s \to 0]{} 0$$

Solo nos falta probar que se puede integrar término a término la última relación sobre

X . Luego basta probar que $|T_r f(x) - Tf(x)|$ es menor que una función fija integrable sobre X . Como $|T_r f(x) - Tf(x)| \leq 2\, Mf(x)$ basta ver que $Mf(x)$ es integrable sobre X . Pero siendo Mf de tipo debil $(1, 1)$ y de tipo debil (p, p), $p > 1$, resulta del teorema 4, pág. 120, (aplicado con $p = 1$), que

$$\int_X |Mf|\, dx \leq c\left\{|X| + \int |f(x)| \log(1 + |f(x)|)\, dx\right\},$$

y por hipótesis es finita la última integral , l,q,d,d.

Observación 8 . Supongamos la sucesión $h_r(x)$ verifica la condición- $\mathcal{E}$, y probaremos que $h_r(x)$ converge para todos los x , salvo medida nula. Basta probar que dado $\mathcal{E} > 0$, los puntos x en que $h_r(x)$ no converge tienen medida menor que $\mathcal{E}$ (de donde seguirá que estos puntos tienen medida nula). Aplicando la condición- $\mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ igual a $\mathcal{E}/2$, $\mathcal{E}/2^2$, .. , $\mathcal{E}/2^k$, .. , tendremos los conjuntos E_1 , E_2 , .. , E_k , .. , tales que $|E_k| < \mathcal{E}/2^k$ y si x no pertenece a E^k entonces hay un s tal que $|h_s(x) - h_r(x)| < \mathcal{E}/2^k$ para $r > s$.

Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Veamos que $|E| < \mathcal{E}$ y que $h_r(x)$ converge si x no pertenece a E , con lo cual quedará probada la tésis. Evidentemente

$|E| \leq \sum_1^{\infty} |E_k| < \sum_1^{\infty} \mathcal{E}/2^k = \mathcal{E}\ (\sum 1/2^k) = \mathcal{E}$, luego $|E| < \mathcal{E}$.

Además si x no pertenece a E , entonces x no pertenece a E_k , cualquiera sea k, luego hay una s tal que $|h_s(x) - h_r(x)| < \mathcal{E}/2^k$, y como $\mathcal{E}/2^k$ tiende a cero para $k \longrightarrow \infty$, esto significa que $h_r(x)$ converge para este x , l,q,d,d.

Como una aplicación del teorema que acabamos de demostrar vamos a probar el teorema de Lebesguede la derivabilidad de la integral indefinida. Sea $f(t)$ una función definida en E^n , y sea $Q(x, r)$ el cubo de centro x y radio r . Para cada $r > 0$ definimos el operador

$$T_r f(x) = \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} f(t)\, dt \tag{69}$$

El teorema de Lebesgue dice que si $f(t)$ es integrable sobre todo intervalo finito entonces la expresión (69) tiende a $f(x)$, para $r \longrightarrow 0$, en casi todo x de E^n . En caso de $E^n = E^1$ esto equivale a

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{F(x + r) - F(x)}{r} = f(x)^{*}$$

donde

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \ .$$

vamos a probar el siguiente resultado más preciso :

<u>TEOREMA 13</u> (de Lebesgue) : <u>Sea $T_r f$ definido por (69). Si $f \in L^p$, $p \geq 1$ entonces</u>

$$\lim_{r \longrightarrow 0} T_r f(x) = f(x) \quad , \ \underline{\text{en casi todo } x} \quad . \tag{69a}$$

<u>Si $f \in L^p$ y $p > 1$, entonces $T_r f$ tiende también en media-p a $f(x)$. Si $|f| \log(1 + |f|)$ es integrable, entonces $T_r f$ tiende en media-1 a f sobre todo conjunto de medida finita</u> .

<u>Demostración</u> . El operador maximal de la sucesión $T_r f$ es el operador maximal de Hardy - Littlewood estudiado en el párrafo anterior. Sabemos que este operador maximal es de tipo debil (p , p) para todo $p \geq 1$. Luego por el teorema 12 es suficiente probar que (69a) se verifica para toda $f(x)$ de L_o . Como toda $f(x)$ de L_o es combinación lineal de funciones características de cubos, es suficiente probar que (69a) se verifica cuando $f(t)$ = función característica de un cubo Q_o . Pero en este caso, todo punto x (salvo los de la frontera de Q_o , que son en medida nula) tiene un entorno en el cual $f(t)$ es constante : $f(t) = f(x)$ en un entorno de x. Es decir, para r suficientemente pequeño es $f(t) = f(x)$ para todo t de $Q(x , r)$, luego desde un r en adelante se verifica

$$T_r f(x) = \frac{1}{|Q(x , r)|} \int_{Q(x , r)} f(x)\, dt = f(x)$$

y por tanto $\lim T_r f(x) = f(x)$, l,q,d,d.

Observemos que para x fijo, en la expresión de $T_r f(x)$ solo intervienen los valores de f en los puntos próximos a x. Por tanto, del teorema 13 resulta que para que valga (69a) basta que $f(t)$ sea integrable sobre todo intervalo finito, es decir que coincida con una función de L^1 sobre tales intervalos.

En el teorema 12 se pide que el operador maximal Mf, de la sucesión $T_r f$, sea de tipo debil (p, p) sobre todo L^p. El teorema que sigue muestra que en muchos casos es suficiente que Mf sea de tipo debil (p, p) tan solo sobre L_o, para que lo sea sobre todo L^p, y por tanto aplicable el teorema 12.

TEOREMA 14. Sea $T_r f$ una "sucesión" de operadores lineales y Mf el operador maximal correspondiente. Supongamos que la sucesión $T_r f$ posee las dos propiedades siguientes: 1) Para toda $f \in L^p$, $p \geq 1$, la función $T_r f(x)$ está bién definida y es finita en todo (y no solo casi todo) x de E^n. 2) Si $\{f_n\} \subset L^p$, $p \geq 1$, y si $\|f_n\|_p \longrightarrow 0$ para $n \longrightarrow \infty$, entonces para cada $r > 0$ fijo y para todo x de E^n se verifica

$$\lim_{n \to \infty} T_r f_n(x) = 0 \qquad (x \text{ y } r \text{ fijos}) \tag{70}$$

Bajo estas hipótesis se tiene: a) Si Mf es de tipo (p, p) sobre L_o, $p \geq 1$, entonces Mf es de tipo (p, p) sobre L^p.

b) Si Mf es de tipo debil (p, p) sobre L_o, entonces Mf es de tipo debil (p, p) sobre todo L^p.

Demostración. a) Por hipótesis existe una constante c tal que

$$\int_{E^n} |Mg(x)|^p \, dx \leq c \int_{E^n} |g(x)|^p , \quad \text{para toda } g \in L_o . \tag{71}$$

Vamos a probar también que (71) vale también para toda f de L^p. Sea $f \in L^p$. Como L_o es denso en L^p existe una sucesión g_n de funciones de L_o, $g_n \in L_o$, tal que $\|f - g_n\|_p \longrightarrow 0$. Como Mf es sublineal, de $g = h + (g - h)$

sigue $Mg(x) \leq Mh(x) + M(g-h)(x)$, luego $|Mg(x) - Mh(x)| \leq M(g-h)(x)$, y por tanto $\|Mg - Mh\|_p \leq \|M(g-h)\|_p$. Luego, como $\|g_k - g_{k+i}\|_p \longrightarrow 0$, tenemos, usando (71),

$$\|Mg_k - Mg_{k+i}\|_p \leq \|M(g_k - g_{k+i})\|_p \leq c\ \|g_k - g_{k+i}\|_p \longrightarrow 0$$

Asi pues, la sucesión de funciones Mg_i converge en media-p hacia un límite $M_1(x)$; podemos pues extraer una subsucesión (que seguimos llamando g_i para simplificar la notación) que converge puntualmente :

$$\lim_{i\to\infty} Mg_i(x) = M_1(x) \quad , \quad \text{para casi todo } x .$$

Para cada $r > 0$ fijo tenemos, en virtud de la hipótesis (70) ,

$$|T_r f(x)| = \lim_{i\to\infty} |T_r g_i(x)| \leq \lim_{i\to\infty} M g_i(x) = M_1(x)$$

Luego para todo $r > 0$ vale $|T_r f(x)| \leq M_1(x)$ y por tanto $Mf(x) \leq M_1(x)$. Recordando que Mg_i tiende en media-p hacia $M_1(x)$, y usando (71), tendremos

$$\int_{E^n} |Mf(x)|^p\, dx \leq \int_{E^n} |M_1 f(x)|^p\, dx = \lim_{i\to\infty} \int_{E^n} |Mg_i(x)|^p\, dx \leq$$

$$\leq c \lim_{i\to\infty} \int_{E^n} |g_i(x)|^p\, dx = c \int_{E^n} |f(x)|^p\, dx \quad ,$$

lo que prueba que (71) vale para toda f de L^p .

b) Supongamos ahora que existe una constante c tal que para todo $a > 0$ vale

$$D(Mg\, ;\, a) \leq (c/a)^p \int_{E^n} |g|^p\, dx \quad , \quad \text{para toda } g \in L_0 \quad , \qquad (72)$$

y probaremos que (72) vale para toda f de L^p. Dada f de L^p podemos elegir una sucesión $g_i(x)$ de L_0 que converge hacia f en media-p, $\|f - g_i\|_p \longrightarrow 0$. De la hipótesis (70) resulta entonces que para todo $r > 0$ vale $T_r f(x) = \lim_{i\to\infty} T_r g_i(x)$. Sea E es el conjunto de los x tales que $Mf(x) > a$, y sea E_i es el conjunto de los x tales que $Mg_i(x) > a$, y sea x un punto de E. Entonces $Mf(x) > a$, luego para cierto r es $T_r f(x) > a$, y por tanto desde un i también $T_r g_i(x) > a$, y con más razón $Mg_i(x) > a$, desde un i en adelante. Esto significa que $E \subset \lim\sup E_i$, luego $|E| \leqslant \lim\sup |E_i|$, o sea $D(Mf\ ;\ a) \leqslant \lim_{i\to\infty} D(Mg_i\ ;\ a)$. Luego usando (72) tendremos

$$D(Mf\ ;\ a) \leqslant \lim_{i\to\infty} D(Mg_i\ ;\ a) \leqslant \lim_{i\to\infty} (c/a)^p \int_{E^n} |g_i(x)|^p\, dx =$$

$$= (c/a)^p \int_{E^n} |f(x)|^p\, dx \quad ,$$

lo que prueba que (72) vale sobre todo L^p, l,q,d,d.

<u>APLICACIÒN A LOS OPERADORES</u> $\underline{H_w f}$. Apliquemos el teorema 14 a las transformadas de Hilbert, haciendo $r = \varepsilon$, $T_r f = H_\varepsilon f$, donde $H_\varepsilon f$ está definido como en la pág. 40 (o como en la pág. 50, en caso de n dimensiones). Es facil comprobar que la sucesión $H_\varepsilon f$ verifica las hipótesis 1) y 2) del teorema 14. En efecto, consideremos por ejemplo el caso 1-dimensional, de modo que

$$H_\varepsilon f(x) = \int_{\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}} \frac{f(x-t)}{t}\, dt \ .$$

Por la desigualdad de Holder tenemos para $\varepsilon > 0$ fijo,

$$|H_\varepsilon f(x)| \leqslant \|f\|_p \left\{ \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \left(\frac{2}{t}\right)^{p^*} dt \right\}^{1/p^*} = c(\varepsilon)\ \|f\|_p \ .$$

Esta desigualdad muestra que si $f \in L^p$ entonces $H_\varepsilon f(x)$ es finita en todo

$x \in E^n$, y que $\|f_i\|_p \longrightarrow 0$ implica $H_\varepsilon f(x) \longrightarrow 0$, para todo x y para todo $\varepsilon > 0$ fijo .

Asi pues $H_\varepsilon f$ verifican las hipótesis 1) , 2) del teorema 14. Por otra parte ya hemos probado que el operador maximal Mf de los $H_\varepsilon f$ es de tipo (p , p) sobre L_o para $1 < p < \infty$, así como de tipo debil $(1 , 1)$ sobre L_o . Luego aplicando el teorema 14 resulta que Mf es de tipo (p , p) sobre todo L^p para $1 < p < \infty$, y que Mf es de tipo debil $(1 , 1)$ sobre todo L^1 . Podemos entonces aplicar el teorema 12 y deducir el siguiente

__TEOREMA 15__ (de Privaloff y Plesner para $n = 1$, de Calderón - Zygmund para $n > 1$). __La sucesión de operadores $H_\varepsilon f = H_{\varepsilon , wf}$ (definidos en la pág. 50) converge puntualmente hacia un límite $Hf(x)$ para toda f de L^p , si $p \geq 1$ ($p < \infty$) Si $p > 1$, ellos convergen también en media-p; $\|Hf - H_\varepsilon f\|_p \longrightarrow 0$. Si $|f| \cdot \log(1 + |f|)$ es integrable ellos convergen en media-1 sobre todo conjunto de medida finita. Más aún, el operador maximal $Mf(x) = \sup |H_\varepsilon f(x)|$ es de tipo (p , p) sobre todo L^p , si $1 < p < \infty$, y de tipo debil $(1 , 1)$ sobre todo L^1 .__

__Demostración__ . Recién hemos probado que Mf es de tipo (p , p) sobre todo L^p y de tipo debil $(1 , 1)$ sobre L^1 . Luego, en virtud del teorema 12, nos falta tan solo verificar que para toda $f(x)$ de L_o existe el límite

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} H_\varepsilon f(x) = Hf(x) \quad , \text{ para casi todo } x \, . \tag{73}$$

Como toda f de L_o es combinación lineal de funciones características de cubos, basta probar que (73) es cierto cuando $f(x)$ es función característica de un cubo Q . En este caso todo x (salvo los de la frontera de Q , que tienen medida nula) tiene un entorno en que $f(t)$ es constante, y para valores grandes de t es $f(t)$ nula. Luego si ε y ε' , $\varepsilon' < \varepsilon$, son suficientemente chicos, por ser $f(t)$ nula para valores grandes será $f(x - t) = 0$ si $(\varepsilon)^{-1} < |t| < (\varepsilon')^{-1}$,

$$H_{\varepsilon'} f(x) - H_\varepsilon f(x) = \int_{\varepsilon' < |t| < \varepsilon} \frac{f(x - t)}{t} \, dt \quad .$$

Pero para $\varepsilon' < |t| < \varepsilon$ es $x - t$ interior a dicho entorno de x, luego $f(x - t) = f(x)$, y por tanto

$$H_{\varepsilon} f(x) - H_{\varepsilon'} f(x) = \int_{\varepsilon' < |t| < \varepsilon} \frac{f(x)}{t}\, dt = f(x) \left[\int_{\varepsilon' < |t| < \varepsilon} \frac{1}{t}\, dt \right] =$$

$$= f(x) \left[\int_{-\varepsilon < t < -\varepsilon'} \frac{dt}{t} + \int_{\varepsilon' < t < \varepsilon} \frac{dt}{t} \right] = 0$$

Luego se cumple la condición de Cauchy - Bolzano y $H\, f(x)$ es convergente, l,q,d,d.

§7. TEOREMA DE MARCINKIEWICZ PARA TIPOS (p , s) .

En el párrafo 2 hemos demostrado el teorema de Marcinkiewicz para el caso de la diagonal, es decir para tipos (p , p). Vamos a demostrarlo ahora para tipos generales (p , s) pero en el "triángulo inferior del cuadrado de los tipos" es decir para $p \leq s$. Antes de pasar a la demostración hagamos dos observaciones, explicando cuales son las dificultades que se presentan al pasar del caso (p , p) al caso (p , s). En el caso (p , p) se descomponía f en $f = f^{(z)} + f_{(z)}$ con $z = a/2B$ (ver páginas 115, 116). Ahora habrá que tomar $z = (a/2B)^{v}$ donde v se elige de acuerdo a los valores de los (p , s).

Otra dificultad que se presenta en el caso $p \neq s$ es esta: en el caso (p , p) es decir cuando $p = s$, la condición de tipo debil se escribe, por ejemplo para (p_1 , p_1),

$$D(Tf\ ;\ a) \leq (c_1 \|f\|_{p_1} / a)^{p_1} = (c_1/a)^{p_1} \int |f(x)|^{p_1}\, dx \ .$$

Pero si $p_1 \neq s_1$, la condición de tipo debil (p_1 , s_1) es

$$D(Tf\ ;\ a) \leq (c_1 \|f\|_{p_1} / a)^{s_1} = (c_1/a)^{s_1} \left[\int |f(x)|^{p_1}\, dx \right]^{s_1/p_1}$$

es decir la integral aparece elevada a una potencia $s_1/p_1 \neq 1$. Esto hace imposible el cambio del orden de integración que se usó en la demostración de la pág. 116, pues ahora tendríamos la expresión

$$s \int_0^\infty \left\{ a^{s-1} \left(\frac{2M_1}{a}\right)^{s_1} \right\} \left[\int_E |f^z(x)|^{p_1} \, dx \right]^{s_1/p_1} da \ , \qquad (74)$$

y ahora no podemos integrar antes en a y luego en x. Para salvar esta dificultad se va a proceder así: sea $G(a)$ la integral entre corchetes, entonces (74) se escribe

$$(2M_1)^{s_1} \; s \int_0^\infty a^{s-s_1-1} \left[G(a)\right]^{s_1/p_1} da = (2M_1)^{s_1} \; s \int_0^\infty \left[G(a)\right]^{s_1/p_1} d\mu \qquad (74a)$$

$$\text{donde} \quad d\mu = a^{s-s_1-1} \, da \ .$$

Como $s_1/p_1 \geq 1$, podemos escribir (ver lema 1, pág. 16) la última expresión en la forma

$$(2M_1)^{s_1} \; s \int_0^\infty G(a)\, h(a)\, da \qquad \text{con} \quad \int_0^\infty |h(a)|^{s_1/(s_1-p_1)} \, d\mu = 1 \qquad (75)$$

donde $s_1/(s_1-p_1)$ es el conjugado de s_1/p_1. Asi pues (74) se escribe ahora así:

$$(2M_1)^{s_1} \; s \int_0^\infty h(a) \left[\int_E |f^z(x)|^{p_1} \, dx \right] a^{s-s_1-1} \, da \ ,$$

y ahora ya será posible cambiar el orden de integración, ya que la integral en el corchete no está más elevada a una potencia. Cierto que ahora habrá que eliminar finalmente la $h(a)$ introducida, pero esto se hará facilmente mediante la desigualdad de Holder teniendo en cuenta que $h(a)$ verifica (75).

Finalmente, suponiendo que $p_1 \leq p \leq p_2$, habrá que considerar los casos $s_1 \leq s \leq s_2$, y $s_2 \leq s \leq s_1$, asi como el caso $p_2 = p_1$; estos casos no se presentan para $p_i = s_i$.

Observemos todavía que la eliminación de la función $h(a)$ introducida en (74a) se hace mediante la desigualdad de Hölder, usando (75), pero esto implica que $s_1/p_1 \geq 1$ o sea $p_1 \leq s_1$. Esta es la causa porque la demostración que sigue solo se aplica al caso $p_i \leq s_i$, es decir al triángulo inferior (el estudio del caso $p_i \geq s_i$ será hecho en una publicación próxima).

Con estas observaciones en la mente, pasemos a la demostración detallada del teorema, debida a A. Zygmund (Journal Math. Pures App. (1956), págs. 223-248).

TEOREMA DE MARCINKIEWICZ - ZYGMUND. Sean $P_1 = (1/p_1 , 1/s_1)$, $P_2 = (1/p_2 , 1/s_2)$ dos puntos del triángulo inferior de los tipos tales que

$$1 \leq p_1 \leq s_1 \leq \infty \quad , \quad 1 \leq p_2 \leq s_2 \leq \infty \quad ; \quad s_1 \neq s_2 . \tag{76}$$

Sea Tf un operador sublineal, y supongamos que T es de tipo debil P_1 con norma debil M_1, y de tipo debil P_2 con norma debil M_2 (sobre L_o). Entonces, para todo punto $P = (1/p , 1/s)$ interior al segmento $P_1 P_2$,

$$1/p = (1-t)/p_1 + t/p_2 \quad , \quad 1/s = (1-t)/s_1 + t/s_2 \quad , \quad (o < t < 1) , \tag{77}$$

es T de tipo (p , s) = tipo P, con norma M que verifica

$$M \leq K M_1^{1-t} M_2^{t} , \tag{78}$$

donde $M = M(t , p_1 , p_2 , s_1 , s_2)$ no depende de f y es acotada si t permanece en un intervalo completamente interior al $(0 , 1)$ (pero M tiende a infinito al tender P a P_1 ó a P_2).

Este teorema no vale si $s_1 = s_2$ (pero sí puede ser $p_1 = p_2$)

Demostración. Podemos suponer que $p_1 \leq p_2$, y que $f(x) \geq 0$ para todo x. Consideremos varios casos.

a) supongamos que $1 \leq p_1 < p < p_2 < \infty$, $1 \leq s_1 < s < s_2 < \infty$,

$p_1 \leqslant s_1$, $p_2 \leqslant s_2$, $p \leqslant s$. Usaremos las notaciones de la pág. 114 y el lema 4 de la pág. 31 . Por este lema,

$$(\|Tf\|_s)^s = \int_{E_1} |Tf(y)|^s \, dy = s \int_0^\infty a^{s-1} D(|Tf| ; a) \, da =$$

$$= 2^s s \int_0^\infty a^{s-1} D(|Tf| ; 2a) \, da . \qquad (79)$$

Descomponiendo f en $f^{(z)} + f_{(z)}$ con

$$z = (a/B)^{1/v} \quad , \qquad (80)$$

donde B , v son constantes que se determinarán luego, obtenemos de (79), usando las hipótesis de tipo debil, y la desigualdad

$$D(|Tf| ; 2a) \leqslant D(|Tf^{(z)}| ; a) + D(|Tf_z| ; a) \quad ,$$

$$(\|Tf\|_s)^s \leqslant 2^s s \int_0^\infty a^{s-1} D(|Tf^{(z)}| ; a) \, da + 2^s s \int_0^\infty a^{s-1} D(|Tf_{(z)}| ; a) \, da \leqslant$$

$$\leqslant 2^s s \int_0^\infty a^{s-1} (M_1/a)^{s_1} \left(\int_E |f^{(z)}(x)|^{p_1} \, dx \right)^{s_1/p_1} da +$$

$$+ 2^s s \int_0^\infty a^{s-1} (M_2/a)^{s_2} \left(\int_E |f_{(z)}(x)|^{p_2} \, dx \right)^{s_2/p_2} da =$$

$$= 2^s s M_1^{s_1} \int_0^\infty a^{s-s_1-1} \left(\int_E |f^{(z)}(x)|^{p_1} \, dx \right)^{s_1/p_1} da +$$

$$+ 2^s s M_2^{s_2} \int_0^\infty a^{s-s_2-1} \left(\int_E |f_{(z)}(x)|^{p_2} \, dx \right)^{s_2/p_2} da =$$

$$= 2^s s \left[M_1^{s_1} \, I + M_2^{s_2} \, II \right] \quad , \qquad (81)$$

donde

$$I = \int_0^{\infty} a^{s-s_1-1} \left(\int_E |f^{(z)}(x)|^{p_1} dx \right)^{s_1/p_1} da , \qquad (81a)$$

$$II = \int_0^{\infty} a^{s-s_2-1} \left(\int_E |f_{(z)}(x)|^{p_2} dx \right)^{s_2/p_2} da . \qquad (81b)$$

Pongamos (z depende de a)

$$d\mu = a^{s-s_1-1} da , \quad G(a) = \int_E |f^{(z)}(x)|^{p_1} dx . \qquad (82)$$

Entonces

$$I = \int_0^{\infty} (G(a))^{s_1/p_1} d\mu .$$

Por el lema 1, página 16, podemos escribir

$$I^{p_1/s_1} = \int_0^{\infty} h(a)\, G(a)\, d\mu = \int_0^{\infty} h(a) \left[\int_E |f^z(x)|^{p_1} dx \right] d\mu \qquad (83)$$

con

$$\left[\int_0^{\infty} |h(a)|^{s_1/(s_1-p_1)} d\mu \right]^{(s_1-p_1)/s_1} = \|h\|_{s_1/(s_1-p_1)} = 1 . \qquad (83a)$$

Por definición, $f^z(x) = 0$ si $z > |f(x)|$, es decir (ver (80)) si $(a/B)^{1/v} > |f(x)|$, o sea si $a > B\, |f(x)|^v$, luego permutando el orden de integración obtenemos de (83) ,

$$I^{p_1/s_1} = \int_E dx \int_0^{\infty} |f^z(x)|^{p_1} h(a)\, a^{s-s_1-1} da =$$

$$= \int_E dx \int_0^{B|f(x)|^v} |f(x)|^{p_1} h(a)\, a^{s-s_1-1} da =$$

$$= \int_E |f(x)|^{p_1} dx \int_0^{B|f(x)|^v} h(a)\, a^{s-s_1-1} da . \qquad (84)$$

Por la desigualdad de Holder, y por (83a), tenemos

$$\int_0^{B|f(x)|^v} h(a) \quad a^{s-s_1-1} \quad da = \int_0^{B|f(x)|^v} 1.h(a) \; d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^{B|f|^v} d\mu\right]^{p_1/s_1} \left[\int_0^{B|f|^v} |h(a)|^{s_1/(s_1-p_1)} \; d\mu\right]^{(s_1-p_1)/s_1} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_0^{B|f(x)|^v} a^{s-s_1-1} \; da\right]^{p_1/s_1} \|h\|_{s_1/(s_1-p_1)} =$$

$$= \left[\frac{1}{s-s_1} \left[B|f(x)|^v\right]^{s-s_1}\right]^{p_1/s_1} . \tag{85}$$

Eligimos ahora v para que sea

$$p_1 + v(s - s_1)\, p_1/s_1 = p \quad , \tag{86}$$

es decir

$$v = (p - p_1)\, s_1 \,/\, (p_1(s - s_1)) \quad . \tag{86a}$$

Entonces de (84) y (85) obtenemos

$$I^{p_1/s_1} \leqslant (B^{s-s_1}/(s - s_1))^{p_1/s_1} \int_E |f(x)|^p \; dx \quad . \tag{87}$$

Análogamente si sometemos v a la condición

$$p_2 + v(s - s_2)\, p_2/s_2 = p \quad , \quad v = (p_2 - p)\, s_2 \,/\, p_2(s_2 - s) \; , \tag{86b}$$

tendremos que

$$II^{p_2/s_2} \leqslant (B^{s-s_2}/(s_2 - s))^{p_2/s_2} \int_E |f(x)|^p \; dx \quad . \tag{87a}$$

Las condiciones (86a) y (86b) son compatibles, es decir

$$\frac{s_1(p - p_1)}{p_1(s - s_1)} = \frac{s_2(p_2 - p)}{p_2((s_2 - s)} ,$$

pues esta igualdad equivale a

$$\frac{1/p_1 - 1/p}{1/s_1 - 1/s} = \frac{1/p - 1/p_2}{1/s - 1/s_2} ,$$

que expresa el heche de que el punto $P = (1/p , 1/s)$ pertenece al segmento $P_1 P_2$. De (81) , (87) y (87a) resulta

$$(\|Tf\|_s)^s \leqslant 2^s s M_1^{s_1} B^{s-s_1}/(s - s_1) \left[\int_E |f(x)|^p dx\right]^{s_1/p_1} +$$

$$+ 2^s s M_2^{s_2} B^{s-s_2}/(s_2 - s) \left[\int_E |f(x)|^p dx\right]^{s_2/p_2} . \qquad (88)$$

Aqui B es una constante arbitraria. Eligimos ahora B para que ambos sumandos del miembro derecho de (88) sean iguales, o sea ponemos

$$B = M_1^{s_1/(s_1-s_2)} M_2^{s_2/(s_2-s_1)} (\|f\|_p)^{p(s_2/p_2 - s_1/p_2)/(s_2-s_1)} . \qquad (88a)$$

Teniendo en cuenta que, en virtud de (77),

$$t = \frac{p_2(p - p_1)}{p(p_2 - p_1)} = \frac{s_2(s - s_1)}{s(s_2 - s_1)} , \quad 1 - t = \frac{p_1(p_2 - p)}{p(p_2 - p_1)} = \frac{s_1(s_2 - s)}{s(s_2 - s_1)} , \qquad (89)$$

obtenemos de (88) y (88a) que

$$(\|Tf\|_s)^s \leq 2^s \, s \left(\frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2 - s} \right) (M_1^{1-t} \, M_2^{t} \, \|f\|_p)^s \quad ,$$

o sea

$$\|Tf\|_s \leq K \, M_1^{1-t} \, M_2^{t} \, \|f\|_p \quad , \quad \text{con} \quad K^s \leq 2 \left(\frac{s}{s - s_1} + \frac{s}{s_2 - s} \right)^{1/s} \quad , \qquad (90)$$

que es la desigualdad (78) deseada.

b) Supongamos que $1 \leq p_1 < p < p_2 < \infty$, $1 \leq s_2 < s < s < \infty$. La demostración es la misma, solo que hay que cambiar z por $-z$.

c) Sea ahora $p_1 = p_2$, $s_1 < s < s_2$. En este caso procederemos como en la parte b) del teorema 1, página 109, o sea dividimos la integral (79) en dos:

$$(\|Tf\|_s)^s = s \int_0^\infty a^{s-1} \, D(|Tf| \, ; a) \, da \leq s \int_0^B a^{s-1} \, D(|Tf| \, ; a) \, da \, +$$

$$+ \, s \int_B^\infty a^{s-1} \, D(|Tf| \, ; a) \, da \quad ,$$

se reemplaza la primera integral $D(|Tf| \, ; a)$ por $(M_1 \, a^{-1} \, \|f\|_{p_1})^{s_1} =$ $= (M_1 \, a^{-1} \, \|f\|_p)^{s_1}$, y en la segunda por $(M_2 \, a^{-1} \, \|f\|_p)^{s_2}$ y se pone $B =$ $= M_1^{c_1} \, M_2^{c_2} \, \|f\|_p^{c_3}$, y se eligen convenientemente c_1 , c_2 , c_3 para que resulte (78) . Dejamos los detalles a cargo del lector.

d) Finalmente si uno de los s_i es infinito se usa la parte a) del lema 1, pág. 115, es decir (14a) en vez de (14b) (con s_1 en vez de p). Como en parte 1) del teorema 3, página 119, en este caso queda solo una integral en (81) y la demostración se simplifica, l,q,d,d.

<u>Ejercicio</u> . Hacer en detalle las demostraciones de las partes b) , c) y d) , del teorema, siguiendo las indicaciones dadas y las demostraciones de los teoremas 1 y 3 .

<u>Observación 9</u> . La fórmula (90) muestra que la expresión de K contiene los términos $1/(s - s_1)$, $1/(s_2 - s)$, o sea $K = \infty$ si $s_1 = s_2$ y la de -

mostracion no se aplica si $s_1 = s_2$. Podría pensarse que tal vez otra demostración sí se aplica a otro caso .Sin embargo ,como se puede ver en el siguiente ejemplo sencillo (indicado por Panzone)el teorema de Marcinkievichno vale si $s_1=s_2$ es decir si el segmento $P_1 P_2$es paralelo al eje de las abcisas en el cuadrado de los tipos.

Ejemplo .Sea $E = E_1 = 0 , 1$ con la medida de Debesgue ,y sea T el operador definido por

$$F(x) = Tf(x) = \left[\int_0^1 f(t)\, dt\right] x^{-1/2} .$$

Tf hace corresponder a toda función f(t), definida en $\left[0 , L\right] = E$ e integrable , otra función F(x) definida por $\left[0 , 1\right] = E_1$. Se verifica facilmente que T eslineal pues la integral $\int f(t)\, dt$ depende de f en forma lineal Sea $a > 0$ y $E(a) =$ conjunto de los x de E tales que $|Tf(x)| > a$, o sea tales que

$$ax^{1/2} \leqslant \left| \int_0^1 f(t)\, dt \right| = J \leq \|f\|_1$$

Si la integral J es negativa entonces E(a) es vacío . Si $0 \leqslant J \leqslant a$ entonces todo x de E(a) verifica $x \leqslant (J/a)^2 \leqslant (\|f\|_1/a)^2$, o sea E(a) es parte del intervalo $\left[0 , (\|f\|_1/a)^2\right]$y por tanto $|E(a)| \leq (\|f\|_1/a)^2$.
Si $J > a$ entonces todo $x \leqslant 1$ verifica $|Tf(x)| > a$, luego $E(a) = E$ $|E(a)| = 1$, y como $J/a > 1$ tenemos $|E(a)| = 1 \leq J/a \leq (J/a)^2 \leq$ $\leq (\|f\|_1/a)^2$. Luego en todo caso se verifica $|E(a)| \leq (\|f\|_1/a)^2$.
Si $p \geqslant 1$, tenemos por Holder

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\, dt \leq \left[\int_0^1 |f|^p\, dt\right]^{1/p} \left[\int_0^1 1^{pm}\, dt\right]^{1/pm} = \|f\|_p$$

Luego para todo $p \geqslant 1$ vale $|E(a)| \leq (\|f\|_p/a)^2$. Esto muestra queT es de tipo debil $(p, 2)$ para todo $p \geq 1$. Si el teorema de Marcinkiewicz fuese cierto para $s_1 = s_2$ (aquí $s_1 = s_2 = 2$) nuestro operador T tendría que ser de tipo $(p, 2)$ para todo $1 < p < 2$, puesto que es de tipo debil $(1, 2)$ y de tipo debil $(2, 2)$. Sin embargo T no es de tipo $(p, 2)$ para ningún $p \geq 1$. En efecto si T fuese de tipo $(p, 2)$ sería $\|Tf\|_2 \leq c\,\|f\|_p$, y $|Tf|^2$ debe ser integrable si $|f|^p$ es integrable. Pero tomando una f de L^p tal que $J \neq 0$, será $|Tf(x)|^2 = J^2 x^{-1}$ que no es integrable en $[0, 1]$.

Observación 9a. El teorema de Riesz - Thorin dice que si T es de tipo P_1 y de tipo P_2 entonces: 1) T es de tipo P, si P es interior a $P_1 P_2$; 2) $M \leq M_1^t M_2^{1-t}$, donde M, M_1, M_2 son las normas correspondientes a P, P_1, P_2 respectivamente. El teorema de Marcinkiewicz dice que si T es de tipo debil P_1 y P_2 entonces: 1a) T es de tipo P, para P interior a $P_1 P_2$; 2a) $M \leq K_t M_1^t M_2$, donde K_t tiende a infinito para t tendiente a cero o a uno, es decir si P tiende a P_1 o a P_2 (pues (90) muestra que K_t tiende a cero si $s \longrightarrow s_1$ ó $s \longrightarrow s_2$).

Vemos que el teorema de Marcinkiewicz generaliza la parte 1), pero tan solo parcialmente la parte 2) del teorema de Riesz. Pero, bajo las hipótesis de tipo debil P_1 y P_2, no es posible obtener la parte 2) completa, y ni siquiera 2a) con K_t acotada para todo t, pues esto implicaría que T es de tipo P_1 y tipo P_2 cosa que no tiene porque suceder. En otras palabras, no es posible con las hipótesis de Marcinkiewicz obtener las dos partes de la tésis de Riesz. Además hay que agregar que el teorema de Riesz - Thorin vale en el cuadrado completo de los tipos, mientras que el de Marcinkiewicz fué probado por ahora tan solo para el triángulo inferior del cuadrado. La validez de este teorema para el triángulo superior es por ahora un problema abierto (esperamos tratarlo en una publicación próxima).

Si bien el teorema de Marcinkiewicz no sustituye completamente al de Riesz - Thorin, en cambio se aplica en casos donde el de Riesz - Thorin no puede aplicarse.

Ejemplo. Hemos visto que el operador Hf de Hilbert es tipo $(2, 2)$, de tipo (p, p) para $1 < p \leq 2$ y de tipo debil $(1, 1)$. Veamos que Hf no es de tipo

$(1\,,\,1)$. En efecto, suponiendo lo contrario la función $F(x) = Hf(x)$ sería integrable cada vez que lo es $f(x)$. Sea $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$ y $f(x) = 0$ en los demás x . Evidentemente $f \in L^1(E^1)$, sin embargo $F = Hf$ no pertenece a $L^1(E^1)$, pues se tiene

$$F(x) = Hf(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x - t} = \log \frac{x}{x-1} \sim \frac{1}{x-1} \text{ si } x > 1 \quad ;$$

luego para valores grandes de x es $F(x) = \log(1 + 1/(x-1)) \sim 1/(x-1)$, y $1/(x-1)$ no es integrable en el intervalo $(2\,,\,\infty)$, luego $F(x)$ no es integrable en $(-\infty\,,\,\infty) = E^1$.

Asi pues Hf no es de tipo $(1\,,\,1)$, pero si de tipo debil $(1\,,\,1)$. Luego aquí podemos aplicar el teorema de Marcinkiewicz (como lo hicimos) para, sabiendo que Hf es de tipo debil $(1\,,\,1)$ y tipo $(2\,,\,2)$, deducir que H es de tipo $(p\,,\,p)$ si $1 < p \leq 2$. Pero no se puede aplicar aquí el teorema de Riesz - Thorin pues Hf no es de tipo en el extremo $(1\,,\,1)$.

Análogamente la deducción del teorema de Hardy - Littlewood - Paley se hizo aplicando el teorema de Marcinkiewicz, pero esta deducción no puede hacerse mediante el de Riesz.

APLICACION A LOS OPERADORES H_a .

Vamos a aplicar ahora el teorema de Marcinkiewicz a los operadores potenciales. Previamente haremos las observaciones siguientes :

a) Si E^m , E^n son dos espacios tales que uno está contenido en el otro , $E^n \subset E^m$ ó $E^m \subset E^n$; y si $k(x)$ es un núcleo definido en el más grande de estos espacios, entonces podemos considerar el operador

$$Tf(x) = F(x) = \int_{E^n} f(t)\, k(x - t)\, dt \;, \tag{91}$$

que hace corresponder a la función $f(t)$, definida en E^n , la función $F(x)$

definida en E^m (cfr. páginas 79 y 80), asi como el operador

$$Tg(t) = G(t) = \int_{E^m} g(x)\, k(t-x)\, dx \,, \qquad (91a)$$

que hace corresponder a la función $g(x)$, definida en E^m, la función $G(t)$ definida en E^n. Si $f(t)$ está definida en E^n y $g(x)$ en E^m podemos considerar los productos escalares

$$(Tf, g) = \int_{E^m} Tf(x)\, \overline{g(x)}\, dx \quad , \quad (Tg, f) = \int_{E^n} Tg(t)\, f(t)\, dt \quad .$$

se tiene entonces la relación

$$(Tf, g) = (Tg^*, f^*) \qquad , \qquad (f^*(x) = \overline{f(-x)}) \ . \qquad (92)$$

La demostración es la misma que en el caso $m = n$ considerado en la página 91. Igual que en la página 93 se deduce de (92) la siguiente propiedad:

<u>Si el operador Tg, definido por (91a) es de tipo $(L^p(E^m), L^s(E^n))$ entonces el operador Tf definido por (91) es de tipo $(L^{s^*}(E^n), L^{p^*}(E^m))$, siempre que sea $p, s \geq 1$, $p > 1$.</u>

b) En los teoremas 12 y 14 hemos considerado operadores que transforman funciones definidas en E^n en funciones definidas en E^n, y que M era de tipo debil o tipo (p, p). Pero estos teoremas se aplican, con modificaciones triviales en la demostración, al caso de operadores que transforman funciones definidas en un espacio en funciones de otro espacio, y cuando M es de tipo (p, s) general.

La parte a) del teorema que sigue se debe a Sobolieff y Thorin; la parte b) a Zygmund; la parte c) fué probada por Sobolieff en forma incompleta, en forma completa por Ilin, e independientemente por el autor y Panzone, quienes también probaron las partes d) y e).

TEOREMA 16 . a) El operador potencial

$$H_d f(x) = \int_{E^n} \frac{f(t)}{|x - t|^{n-d}} \, dt \quad , \tag{93}$$

es de tipo (p , s) para todo punto $P = (1/p , 1/s)$ del segmento AA_1 cuya ecuación es

$$1/p - 1/s = d/n \quad , \quad d/n < p < 1 \quad , \tag{93a}$$

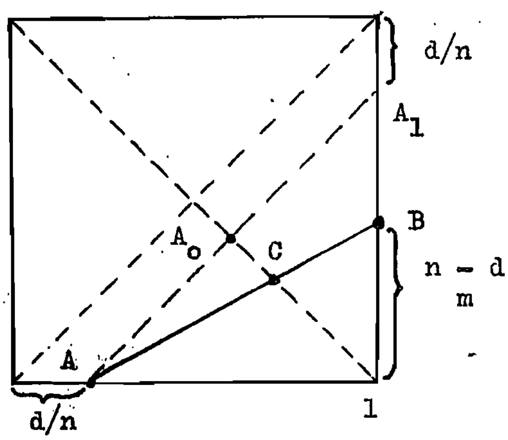
es decir del segmento paralelo a la diagonal a distancia d/n.

b) En los extremos $A = (n/d , \infty)$ y $A_1 = (1 , n/(n - d))$ el operador $H_d f$ no es de tipo, pero $H_d f$ es de tipo debil $(1 , n/(n - d))$, es decir en el extremo A_1 correspondiente a $p = 1$.

c) Si $E^m \subset E^n$ y $m < n < m + d$, entonces $H_d f$ es de tipo $(L^p(E^n) , L^s(E^m))$ para todo (p , s) tal que

$$1/p - \frac{m}{n} \frac{1}{s} = \frac{d}{n} \quad , \quad d/n < p < 1 \quad . \tag{94}$$

Si $E^n \subset E^m$, $n < m < n + d$, entonces $H_d f$ es de tipo $(L^p(E^n) , L^s(E^m))$ para todo (p , s) que verifica (94); es decir para todo punto del segmento AB que se obtiene trasladando la diagonal del cuadrado de los tipos en d/n y girándola en pendiente m/n.



d) En el extremo B el operador $H_d f$ es de tipo debil $(L^p(E^n , L^s(E^m))$, si $E^m \subset E^n$ y $m < n < m + d$, o si $E^n \subset E^m$ y

$n < m < n + d$.

e) <u>En las mismas hipótesis la integral (93) existe para casi todo x de E^m (casi en la medida de E^m), para $d/n < 1/p \leq 1$</u> .

<u>Demostración</u> . a) y b) Sea A_o la intersección del segmento AA_1 (cuya ecuación es (93a)) con la diagonal secundaria (cuya ecuación es $1/p + 1/s = 1$) es decir $A_o = (1/p_o , 1/p_o^*)$ con $p_o = 2n/(n + d)$. Por el teorema 3, pág. 73, sabemos que H_d es de tipo A_o sobre L_o . Por el teorema 2, a), página 111 sabemos que es de tipo debil en A_1 sobre L_o . Luego por el teorema de Marcinkiewicz – Zygmund H_d es de tipo P sobre L_o , para todo P interior a $A_o A_1$. Por el lema 7, página 93, $\mathring{H}_d f$ es también de tipo P en la parte simétrica de $A_o A_1$, es decir en todo P interior a AA_o . Asi pues H_d es de tipo en todo el interior de AA_1 , y de tipo debil en el extremo A_1 , sobre L_o . Como $1/|x - t|^{n-d}$ es un núcleo no negativo, llamando

$$T_\varepsilon f(x) = H_{d,\varepsilon} f(x) = \int_{\varepsilon < |x-t| < \varepsilon^{-1}} \frac{f(t)}{|x - t|^{n-d}} \, dt ,$$

tendremos que

$$Mf(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |T_\varepsilon f(x)| \leq H_d(|f|)(x) .$$

Luego el operador maximal de $T_\varepsilon f$ es aquí practicamente H_d , y por tanto Mf es de tipo debil P en el interior de AA_1 , y de tipo debil en A_1 , sobre L_o Por el teorema 14 y la observación b) de arriba, Mf y por tanto Hf es de tipo ó tipo debil en todo L^p , y esto prueba las partes a) y b) de la tésis.

c) y d). Sea C la intersección de AB con la diagonal secundaria. Por el teorema 5, página 87, $H_d f$ es de tipo C , considerado como actuando de E^n en E^m . Por el teorema 2), b), página 111, es de tipo debil en B , considerado de E^n en E^m , y sobre L_o . Por el teorema de Marcinkiewicz $H_d f$ es entonces de tipo

(p , s) para todo (p , s) tal que $P = (1/p , 1/s)$ es interior a BC. Falta pues probar que H_d es de tipo en AC. Ahora AC no es el segmento simétrico de CB respecto de la diagonal. El segmento BC tiene por ecuación

$$1/p - \frac{m}{n} 1/s = \frac{d}{n} \qquad \text{con} \qquad 1/p + 1/s \geqslant 1 , \tag{95}$$

y su simétrico tiene por ecuación

$$1/s^* - \frac{m}{n} 1/p^* = d/n \qquad \text{con} \qquad 1/p^* + 1/s^* \leqslant 1 ,$$

o sea

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{m} \frac{1}{s} = \frac{m + d - n}{m} \qquad \text{con} \qquad 1/p + 1/s \geqslant 1 . \tag{95a}$$

Como $n - d = m - (m + d - n)$, $m + d - n > 0$, por la parte ya probada (con m en vez de n y $m + d - n$ en vez de d) el operador

$$H_{d'} g(t) = \int_{E^m} \frac{g(x)}{|x - t|^{n-d}} dx = \int_{E^m} \frac{g(x) \quad dx}{|t - x|^{m-(m+d-n)}}$$

es de tipo $(L^p(E^m) , L^s(E^n))$ para todo (p , s) tal que

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{m} \frac{1}{s} = \frac{m + d - n}{m} , \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{s} \geqslant 1 \tag{95b}$$

Por la observación a), de acá sigue que el operador $H_d f$ es de tipo $(L^{p'}(E^n) , L^{s'}(E^m))$ con $p' = s^*$, $s' = p^*$; pero, por lo recién observado (fórmulas (95) y (95a)), si p , s verifican (95b), p' , s' verifican (95). Asi pues $H_d f$ es de tipo en todo punto de AC , como operador que actúa de E^n en E^m.

Hemos pues probado que H_d es de tipo $(L^p(E^n) , L^s(E^m))$ en los puntos de AA_1 y tipo debil en A_1 , pero sobre L_o. Repitiendo el argumento usado en la parte a) y b), se ve que esto vale también sobre todo L^p .

Finalmente, como el operador maximal de la sucesión $H_{d\varepsilon} f$ es $H_d(|f|)$ que es de tipo o tipo debil en el interior de AA_1 y en A_1 , resulta del teorema 12 (ver observación b) de más arriba) que $H_{d\varepsilon} f$ converge puntualmente, o sea que la integral (93) existe, en casi todo x y para toda f de L^p , si $d/n < 1/p \leq 1$. Aquí "casi" significa para todo x de E^m salvo un conjunto de medida n-dimensional nulo, l.q.d.d.

<u>Observación 10</u> . La parte c) del teorema puede también deducirse de la parte a) por el método de Ilin, indicado en la página 98, en el caso especial cuando $(1/p\ ,\ 1/s) = C$. La demostración dada aquí se aplica a casos más generales, por ejemplo a operadores de la forma $T_d f = (H_d f) * k$, donde k es un núcleo cuya transformada de Fourier está acotada o crece muy lentamente .

<u>Observación 10a</u> . En el caso $n = 1$, la parte a) del teorema fué probada por primera vez por Hardy y Littlewood (Mat. Zeit. vol. 27) . Según observó Du Plessis (Trans. Am. Math. Soc. vol. 80, 1, 1955), la demostración de la parte a) para $n > 1$ se reduce facilmente al caso $n = 1$ mediante el artificio siguiente. Supongamos, para simplificar, que $n = 2$, de modo que podemos escribir

$$H_d f(x\ ,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-t\ ,\ y-s)\ dt\ ds}{|t^2 + s^2|^{(2-d)/2}} \tag{96}$$

Como $|t^2 + s^2| \geq 2\ |t|\ |s|$, $1/|t^2 + s^2| \leq 1/(2\ |t|\ |s|)$, tenemos que

$$|H_d f(x\ ,\ y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x-t\ ,\ y-s)|\ dt\ ds}{|t|^{1-d/2}\ |s|^{1-d/2}} \tag{96a}$$

Sea $H^1_{d/2} f$ el operador potencial 1-dimensional de orden $d/2$, y sea

$$G_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t\ ,\ y-s)|\ ds}{|s|^{1-d/2}} \tag{97}$$

entonces podemos escribir

$$|H_d f(x\ ,\ y)| \leqslant H^1{}_{d/2}\ [G_y]\ \cancel{(x)} \tag{97a}$$

Suponiendo que el teorema a) ya fué probado para los operadores 1-dimensionales, ten - dremos que $H^1{}_{d/2}$ es de tipo $(p\ ;\ r)$ para

$$1/p - 1/r = \frac{d/2}{1} = \frac{d}{2} \ . \tag{98}$$

Luego, para estos $p\ ,\ r\ ,$ tenemos :

$$\|H_d f\|_r^{\ r} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |H_d f(x\ ,\ y)|^r\, dx\, dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |H^1{}_{d/2}\, G_y(x)|^r\, dx \leq$$

$$\leqslant M_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(t)|^p\, dt \right\}^{r/p} =$$

$$= M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} H(y) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |G_y(t)|^p\, dt \right\} dy \right\}^{r/p} \quad ,$$

donde $\|H\|_{(r/p)*} = 1$ (hemos aplicado en el último paso el lema 1 de la página 16 con $p = r/p\ ,\ p^* = (r/p)^* = r/(r - p)$) . Luego, aplicando la desigualdad de Holder,

$$\|H_d f\|_r^{\ r} \leqslant M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} H(y)\ |G_y(t)|^p\, dy \right\}^{r/p} \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \|H\|_{(r/p)*}\ \|(G_y(t)\ )^p\|_{r/p} \right\}^{r/p} =$$

$$= M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \||G_y(t)|^p\|_{r/p} \right\}^{r/p} =$$

$$= M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\int_{-\infty}^{\infty} |G_y(t)|^r \, dy \right]^{p/r} \right\}^{r/p} =$$

$$= M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\| G_y(t) \|_r \right]^p \, dt \right\}^{r/p} , \qquad (99)$$

donde la última norma se toma respecto de la variable y.

Pero si ponemos $f_t(y) = |f(t, y)|$, tenemos que $G_y(t) = \left[H^1_{d/2} f_t \right](y)$ luego por la parte 1-dimensional ya demostrada,

$$\| G_y(t) \|_r \leqslant M_2 \| f_t(s) \|_p = M_2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, s)|^p \, ds \right]^{1/p} .$$

Obtenemos pues de (99) que

$$\| H_d f \|_r^r \leqslant M_1 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[M_2^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, s)|^p \, ds \right] dt \right\}^{r/p} =$$

$$= M_1 M_2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t, s)|^p \, dt \, ds \right\}^{r/p} = M_3 \left(\| f \|_p \right)^r ,$$

o sea $\| H_d f \|_r \leqslant M \| f \|_p$, con p, r verificando (98), lo que prueba el teorema a) para $n = 2$. Análogamente se procede para todo $n \geqslant 2$.

8. NOTAS DIVERSAS AL CAPITULO III.

A) Si $k(t)$ es un núcleo fijo definido en E^n, y si $k_i(t) = \mathcal{E}^{ni} \, k(\mathcal{E}^i t)$, entonces la sucesión de operadores

$$T_i f(x) = f * k_i = \int_{E^n} f(t) \, k_i(x - t) \, dt = \mathcal{E}^{ni} \int_{E^n} f(t) \, k(\mathcal{E}^i (x - t)) \, dt ,$$

$$i < 0 , \qquad (100)$$

se llama sucesión de <u>operadores de Fejer</u>. El núcleo fundamental $k(t)$ se dice de <u>tipo de Fejer</u> si verifica las condiciones siguientes: 1) $k(-t) = k(t)$; 2) $\int k(t)\,dt = 1$; 3) $k(t)$ es acotado en $|t| \leq 1$; 4) $\left||t|^2 k(t)\right| \leq M$. Se tiene entonces el siguiente teorema (ver por ej. N. Archieson, Teoría de Aproximación (en ruso, traducción alemana), página 113) :

<u>Si $n = 1$, $k(t)$ verifica 1), 2), 3), 4), y si $f(t)\,(1 + |t|^2)^{-1}$ es integrable, entonces $T_i f(x) \longrightarrow f(x)$ en casi todo x, para $i \longrightarrow \infty$.</u> Teoremas análogos se tienen para la convergencia en media-p.

Vemos pues que los núcleos k_i definidos en la página 40, fórmula (9), son los mismos que figuran en la sucesión de Fejer. Es decir los operadores $Sf = \lim S_N f$ considerados en la página 38, fórmula (8c), puede llamarse <u>series de Fejer</u>. En otros términos, vemos cual es la diferencia entre los teoremas tratados en los Cap. II y III (páginas 38, 39, 143) y el teorema que acabamos de citar sobre las sucesiones de Fejer. En el último teorema se trata de la convergencia de la <u>sucesión</u> de operadores $T_i f$ definidos por (100); en los teoremas de las páginas 38, 143, se trata de la convergencia de la <u>suma</u> de estos $T_i f$, que naturalmente es una cuestión mucho más dificil. Además, en el teorema de Fejer $k(t)$ verifica 2), es decir tiene integral igual a 1, mientras que en nuestro caso la integral de $k(t)$ debe ser nula, y suponemos que $k(t)$ se anula fuera de una esfera de radio finito. Asi pues, en el caso del teorema de Fejer los operadores $T_i f$ son practicamente de "tipo positivo" y se estudia el límite de los $T_i f$; en nuestro caso los $T_i f$ no son positivos jamás, y se estudia la suma de los $T_i f$. Los teoremas y operadores de las páginas 63, 84, constituyen una extensión de las series de Fejer y de los teoremas citados que corresponden al caso $d = 0$.

El teorema citado de Fejer parace haber sido tratado solo en E^1, y tan solo parcialmente, por ejemplo no se han tratado las cuestines relativas a tipos debiles y operadores maximales; tal vez valdría la pena aclarar estas cuestiones asi como, más generalmente, el caso $d > 0$. Observemos todavía que el teorema de derivación de Lebesgue (ver teorema 13), asi como el correspondiente teorema maximal de Hardy - Li -

ttlewood, corresponden al caso cuando el teorema de Fejer se toma $k(t)$ = función característica de la esfera unitaria (o cubo de centro en el origen y lado 1) .

B) Los operadores H_d y H_w son de la forma $f * k$ donde k es suma (infinita) de núcleos integrables. Ahora, la noción de convolución admite la siguiente generalización importante. Vamos a explicar esta generalización en el caso de E^1 . Por definición

$$f * k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, k(t)\, dt .$$

Sea $s_t = s_t x$ la traslación en t , es decir la transformación de la recta E^1 en si misma que hace corresponder al punto x el punto $x - t$. Entonces podemos escmbir

$$f * k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s_t x)\, k(t)\, dt \quad . \tag{101}$$

Ahora $\{s_t\}$ es un conjunto de transformaciones que posee la propiedades siguientes:

a) Para todo t real tenemos una transformación s_t , y cada s_t es <u>isomedible</u>: esto significa que transforma conjuntos medibles en medibles y de igual medida (por ejemplo, un intervalo (a , b) se transforma en otro intervalo $(a-t , b-t)$ de igual medida) .

b) $\{s_t\}$ es un grupo: si $t = t' + t''$ entonces $s_t = s_t x = s_{t'}(s_{t''}x) = s_{t'}\, s_{t''}$, además $s_o x = x$.

c) $\{s_t\}$ es un grupo medible: si $f(x)$ es una función medible de la variable x entonces $f(s_t x) = f(x , t)$ es medible como función de las dos variables t y x (en nuestro caso particular $s_t = x - t$, $\{s_t\}$ es también un grupo contínuo, es decir si $f(x)$ es contínua en x entonces $f(s_t x) = f(x - t)$ es contínua en t y x) .

Consideremos ahora, en vez de la recta E^1 , un conjunto cualquiera X (por ejemplo, una esfera, una variedad de Riemann, una superficie, etc...) y sean $\{x\}$ los puntos de X. Supongamos que X está dada una medida $d\mu$ (por ejemplo una medida de Stieltjes - Lebesgue). Sea ahora, para cada t real, $s_t x$ una transformación de X en X, con las propiedades a), b) y c) (la propiedad a) se entiende ahora respecto de la medida $d\mu$ que actúa en X). En tal caso se dice que en X fué dado un grupo medible de transformaciones isomedibles $\{s_t x\}$. Obsérvese que ahora t es un punto de la recta (un número real) pero x no tiene que ser un punto de E^1, sino es punto del conjunto general X. Si $k(t)$ es una función integrable de la variable real, nula fuera de cierto intervalo, y si $f(x)$ está definida en X y pertenece a $L^p(X, d\mu)$, entonces existe la integral

$$Tf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s_t x)\, k(t)\, dt \tag{101a}$$

y define una nueva función de x. Resulta así un operador que a la función $f(x)$, definida en X, le hace corresponder otra función $Tf(x)$, también definida en X.

Consideremos, en particular, el núcleo $k_N(t) = 1/N$ en $(0, N)$ y nulo en los demás t. Entonces

$$T_N f(x) = \frac{1}{N} \int_0^N f(s_t x)\, dt \; . \tag{101b}$$

En el caso en que $X = E^1$ y $s_t x = x - t$, tenemos

$$T_N f(x) = \frac{1}{N} \int_0^N f(x - t)\, dt \; ,$$

y el teorema de Lebesgue (ver teorema 13) dice que en este caso $\lim T_N f(x) = f(x)$ para $N \longrightarrow 0$ así como para $N \longrightarrow \infty$, y para casi todo x; más aún si $f \in L^p$ se tiene convergencia en media-p, y el teorema maximal de Hardy - Littlewood. Surge entonces naturalmente la pregunta si estos teoremas de Lebesgue y Hardy - Littlewood valen para los operadores (101b) con un grupo $s_t x$ general sobre un espacio X general. Resulta que esto es efectivamente asi, y este hecho constituye los llamados <u>teoremas ergódicos</u> : el teorema de Lebesgue para s_t generales(y $N \longrightarrow \infty$) es el teorema ergódico de Birkoff - Khintchine, el teorema correspondiente para L^2 es el teorema ergódico de V. Neumann, y el teorema maximal de Hardy - Littlewood para s_t generales es el teorema ergódico maximal de Wiener. Estos teoremas generalizan y unifican diversos capítulos de la matemática (teoremas relativos a la distribución de los números mod 1, las leyes de los grandes números de la teoría de Probabilidades, los números normales de Borel, etc..), y tienen aplicaciones importantes a la Física. Las demostraciones de los teorema ergódicos pueden obtenerse modificando ligeramente las demostraciones dadas del teorema 13 y de Hardy - Littlewood (para detalles, y para un método general de trasladar teoremas relativos a convoluciones ordinarias, a convoluciones generalizadas del tipo (101a), ver nuestro artículo sobre teoría ergódica en Math. Notae, año XIV).

Si hacemos $k(t) = 1/t$, obtendremos los <u>operadores de Hilbert ergódicos</u> :

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s_t x)}{t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon f(x) ,$$

$$H_\varepsilon f(x) = \int_{\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}} \frac{f(s_t x)}{t}\, dt ;$$

Aquí x es un punto del espacio general X y s_t es un grupo general de transformaciones isomedibles. Resulta que los teoremas relativos al tipo y tipo debil, y de convergencia puntual, de los operadores de Hilbert, que hemos visto en los Cap. II y III, <u>subsisten para estos operadores de Hilbert ergódicos</u>, y más generalmente para los operadores ergódicos $H_W f$ (ver Revista Mat. Cuyana, volúmen 1, páginas 105-167) .

Podemos considerar análogamente los operadores <u>potenciales ergódicos</u> $H_d f$, que se obtienen haciendo en (101a) $k(t) = |t|^{-(n-d)}$. Sin embargo el estudio de estos últimos operadores <u>no está hecho aún</u> en forma definitiva (algunos resultados par -

ciales estan indicados en la tésis de R. Panzone). Tampoco está aclarada la teoría de las <u>sucesiones de Fejer ergódicas</u> (para definición de Fejer ver A)) para $d = 0$ y más general para $d \geq 0$.

C) En el párrafo 4 de este capítulo hemos estudiado el pseudo-tipo y pseudo-tipo* para el caso (1 , 1). Estos resultados pueden generalizarse al caso (1 , r) del modo siguiente (las demostraciones se darán en un trabajo con R. Panzone, de próxima aparición). Diremos que el operador Tf que transforma funciones f definidas en E^n en funciones Tf definidas en E^m, es de <u>pseudo-tipo* (1 , r ; a)</u> si para toda función $f(x)$ de L_0 existen los conjuntos $E \subset E^n$, $F \subset E^n$ y la función $h(x)$ tales que se verifica :

$$\left\{ \int_{E^m - F} |T(f - h)|^r \, dx \right\}^{1/r} \leq M \, \|f\|_1 \ ,$$

$$|E| \leq M \, \|f\|_1 / m(f) \qquad ; \qquad |F| \leq \left\{ M \, \|f\|_1 / m(f) \right\}^{r/a} ,$$

$$h(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \in E^n - E \quad , \quad |h(t)| \leq M \, m(f) \ ,$$

$$\|h\|_1 \leq M \, |a - r|^{-1} \, \|f\|_1 \ ,$$

donde M es una constante independiente de f, h, E. F y $|a - r|$.

Si $a = r$ 1 , obtenemos la noción anterior de pseudo-tipo* (1 , 1) = = pseudo-tipo* (1 , 1' , 1) .

Diremos que el operador Tf , que actúa de E^n en E^m , es de <u>pseudo tipo (1 , r ; a)</u> , si para toda función $f(x)$ de L_0 y para todo soporte cúbico Q de f , $Q \supset S(f)$, existe un conjunto $F \subset E^m$, y una función $h(x)$ tales que

$$\left\{ \int_{E^m - F} |T(f - h)|^r \, dx \right\}^{1/r} \leq M \, \|f\|_1 \ ,$$

$$|F| \leq 2\, |Q|^{r/a} \quad , \qquad h(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in E^n - Q \quad ,$$

$$|h(x)| \leq M \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x)|\, dx \quad ,$$

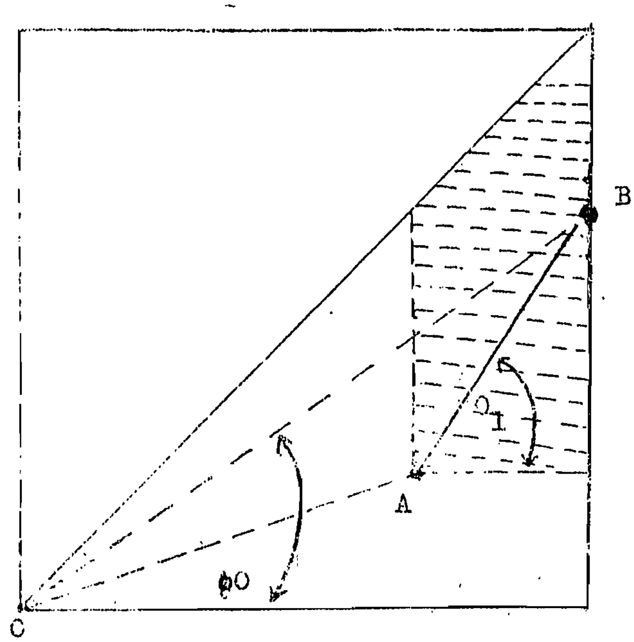
donde M es una constante fija independiente de f, Q y F.

También si $a = r = 1$ obtenemos el concepto anterior de pseudo-tipo $(1 , 1)$ = pseudo-tipo $(1 , 1' , 1)$.

Se tienen entonces los teoremas siguientes:

a) Sea Tf sublineal de pseudo-tipo* $(1 , r ; a)$ y de tipo debil (s , q), con $a = ((q - r)/(s - p))\, s/q > 0$, $1 \leq s \leq q$, $1 \leq r$. entonces Tf es de tipo debil $(1 , r)$.

Si en el cuadrado de los tipos designamos con $A = (1/s , 1/q)$, $B = (1/1 , 1/r)$, $O = (0 , 0)$, y si θ , θ_1 son los ángulos que con el eje de las abcisas forman los segmentos OB , AB , respectivamente, entonces el significado geométrico de a es : $a = tg\, \theta_1 / tg\, \theta$ Por tanto el teorema se aplica si el punto B está en la región rayada en el dibujo.



b) Si el operador sublineal Tf es de pseudo tipo $(1 , r ; a)$ entonces es de seudo tipo* $(1 , r ; a)$.

c) Si Tf es de pseudo tipo $(1 , r ; a)$ y de tipo debil (s , q) , con $a = ((q - r)/(s - p))\, s/q > 0$, $1 \leq s \leq q$, $1 \leq r$, entonces T es de tipo debil $(1 , r)$ y de tipo P para todo punto P interior al segmento AB , $A = (1/s , 1/q)$ $B = (1 , 1/r)$.

Sea $Tf = H_d f$ = operador potencial de orden d, considerado del espacio E^n en el E^m; entonces se tiene :

d) Si $0 \leq d < n$ y $H_d f$ actúa de E^n en E^n, entonces $H_d f$ es de pseudo tipo $(1, r)$ = pseudo tipo $(1, r; r)$ con $r = n/(n-d)$.

e) Si $0 \leq d < n$, $n < m$ y $H_d f$ actúa de E^n en E^m, entonces H_d es de pseudo tipo $(1, r; a)$ con $r = m/(n-d)$, $r/a = m/n$. Lo mismo vale si $m < n < m + d$, $0 < d < n$.

De d), e) combinados con c) se obtiene, por otro camino el teorema 2 de la página 111. Pero de este modo se puede obtener una generalización del teorema 2 a operadores más generales de la forma (14), página 65, y otros.
Análogamente se extienden los lemas 6 y 7 al caso $(1, r)$.

Falta aclarar la generalización de b) y c) a pseudo tipos (p, r, a), con $p \neq 1$. Otro problema es este: el tipo debil y el pseudo tipo son diferentes generalizaciones de la noción de tipo; sería conveniente tener un concepto que las abarque a ambas y que permita unificar los teorema b), c) con el de Marcinkiewicz. También falta aclarar los teoremas relativos a operadores subordinados en el caso de pseudo tipos. Además falta el tratamiento de estas nociones en el triángulo superior del cuadrado de los tipos, asi como para los espacios de Orlicz.

D) En el teorema de Marcinkiewicz del tipo debil P' y P'' se deduce el tipo fuerte en todo P interior a $P'P''$, pero la norma P crece al infinito cuando P se acerca a uno de los extremos. Cabe preguntarse si la norma debil de P no se mantiene acotada para todo P de $P'P''$. Esto es efectivamente asi como lo muestra el teorema siguiente (probado por Panzone por un razonamiento diferente y con constante algo menos precisa) :

a) Si Tf es sublineal de tipo debil (p_1, s_1) y tipo debil (p_2, s_2), con normas debiles M_1, M_2 respectivamente, entonces T es de tipo debil (p, s), para todo $P = (1/p, 1/s)$ del segmento $P'P''$, $P' = (1/p_1, 1/s_1)$, $P'' = (1/p_2, 1/s_2)$, y con norma debil M tal que $M \leq 2^{1/s}\, 2\, M_1^{\,t} M_2^{\,1-t}$, siendo t la relación en que P divide a $P'P''$, es decir,

$$\underline{1/p = t/p_1 + (1-t)/p_2 \quad , \quad 1/s = t/s_1 + (1-t)/s_2} .$$

Obsérvese que este teorema vale para el cuadrado completo de los tipos y sin la restricción $s_1 \neq s_2$.

Demostración . Consideremos el caso $p_1 \neq p_2$, $s_1 \neq s_2$ (dejamos a cargo del lector la consideración de los caso $s_1 = s_2$ ó $p_1 = p_2$).

Sea $p_1 < p_2$. Por hipótesis tenemos:

$$D(Tf\ ;\ a) \leqslant (M_1\ \|f\|_{p_1}/a)^{s_1} \quad , \quad D(Tf\ ;\ a) \leqslant (M_2\ \|f\|_{p_2}/a)^{s_2} \quad ,$$

y por definición de t es

$$t = s_1(s_2 - s)/(\ s(s_2 - s_1)\ ) = p_1(p_2 - p)/(\ p(p_2 - p_1)\ ) \quad , \quad 1 - t =$$

$$= p_2(p - p_1)/(\ p(p_2 - p_1)\ ) = s_2(s - s_1)/(\ s(s_2 - s_1)\ ) \quad ;$$

luego se tiene la proporción

$$\frac{s_1}{p_1}\quad (p - p_1)/(s - s_1) = \frac{s_2}{p_2}\quad (p_2 - p)/(s_2 - s) \quad ,$$

de modo que podemos escribir

$$s - s_1 = c\ s_1(p - p_1)/p_1 \quad , \quad s_2 - s = c\ s_2(p_2 - p)/p_2 \ . \tag{102}$$

De $f = f^b + f_b$ tenemos

$$D(Tf\ ;\ a) \leqslant D(Tf^b\ ;\ a/2) + D(Tf_b\ ;\ a/2) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{M_1}{a/2}\ \|f^b\|_{p_1}\right)^{s_1} + \left(\frac{M_2}{a/2}\ \|f_b\|_{p_2}\right)^{s_2} =$$

$$(2M_1/a)^{s_1} \left\{ \int_E |f^b(x)|^{p_1} \, dx \right\}^{s_1/p_1} +$$

$$+ (2M_2)^{s_2} \left\{ \int_E |f_b(x)|^{p_2} dx \right\}^{s_2/p_2} .$$

Como $|f^b(x)| \geq b$ en los puntos en que $f(x)$ no es nula, tenemos que $|f^b(x)|^{p_1} \leq b^{p_1-p} |f(x)|^p$, análogamente $|f_b(x)|^{p_2} \leq b^{p_2-p} |f(x)|^p$ (pues $p_1 \leq p \leq p_2$), luego

$$D(Tf \; ; \; a) \leq (2M_1/a)^{s_1} \; b^{(p_1-p)s_1/p_1} \left\{ \int_E |f(x)|^p \, dx \right\}^{s_1/p_1} +$$

$$+ (2M_2/a)^{s_2} \; b^{(p_2-p)s_2/p_2} \left\{ \int_E |f(x)|^p \, dx \right\}^{s_2/p_2} .$$

Poniendo

$$b = (2M_1/a)^{cs_1/(s_2-s_1)} \quad (2M_2/a)^{-cs_2/(s_2-s_1)} \quad (\|f\|_p)^{-cp(s_2/p_2-s_1/p_1)/(s_2-s_1)}$$

obtendremos, teniendo en cuenta el valor de t y de $1-t$, y (102), (hemos elegido b para hacer iguales ambos sumandos)

$$D(|Tf| \; ; \; a) \leq (2M_1/a)^{ts} \quad (2M_2/a)^{(1-t)s} \quad \|f\|_p^{\,s} \; +$$

$$+ (2M_1/a)^{ts} \quad (2M_2/a)^{ts} \quad (2M_2/a)^{(1-t)s} \quad \|f\|_p^{\,s} =$$

$$= (2^{1/s} \; 2M_1^{\,t} \, M_2^{\,1-t} \; \|f\|_p \, / \, a)^s \quad ,$$

lo que prueba la tésis.

Queda abierto el problema de si en el teorema a) que acabamos de demostrar , vale $M \quad M_1^{t} \quad M_2^{1-t}$

Por otra parte combinando la demostración del teorema 4 de la página 120 con la del teorema de Marcinkiewicz-Zygmund, se obtiene la siguiente generalización del teorema 4 para el triángulo inferior de los tipos;

b) Si el operante sublinal T es de tipo débil (p, s) y de tipo debil (p_2, s_2), $p \quad s$, $p_2 \quad s_2$, $s \quad s_2$, y si X es un conjunto de medida finita, entonces se transforma a toda f tal que $f^{p} \log(1 + f)^{p/s} \quad L^1$ en una función Tf de $L^s(X)$, y se tiene

$$Tf(X)^{s} \, dx = M \quad X + {}_{E} \quad f(X)^{p} \left(\log^{+} f(x)\right)^{p/s} dx^{\; s/p} +$$

$$+ {}_{E} \quad f(x)^{p} \, dx^{\; s_2/p_2} \quad .$$

Este teorema puede usarse , en combinación con el teorema 12, para establecer la convergencia puntual de una sucesión de operadores cuyo operador maximal es de tipo debil (p, s), para funciones $f(x)$ tales que $f^{p} \log(1 + f)^{p/s}$ es integrable. Dejamos la demostracion a cargo del lector a título de ejercicio.

E) El teorema de convexidad de Riesz puede enunciarse así; Si el operador sub-lineal Tf es de tipo P' y de tipo P'' (P' y P'' en el triángulo inferior) con normas M_1 y M_2 ,respectivamente, entonces; a) T es de tipo P para todo punto P del segmento $P'P''$; b) si t es la relación en que P divide a $P'P''$ y si M es la norma correspondiente a P , entonces $M = c \, M_1^{t} \, M_2^{1-t}$, donde c es una constante fija ,independiente de P y de T ; C) si T es lineal entonces $c=1$

Vamos a probar que las partes a) y b) de este teorema pueden probarse en forma simple por un método análogo al de la demostracion de Marcinkiewicz . Para destacar jor la idea de la demostración haremos la demostración para el caso particular de la diagonal, o sea de tipos $(p\ ,\ p)$.

Supongamos pues que T es de tipo $(r\ ,\ r)$ con norma M_1 y de tipo $(s\ ,\ s)$ con norma M_2 , $1 \leq r \leq s$, y probaremos que T es de tipo $(p\ ,\ p)$ para todo $r \leq p \leq s$, con norma M que verifica $M \leq 3\, M_1^{\ t}\, M_2^{\ 1-t}$, donde $1/p = t/r + (1-t)/s$.

La hipótesis $(\|Tf\|_r)^r \leq (M_1 \ \|f\|_r)^r$, $(\|Tf\|_s)^s \leq (M_2 \ \|f\|_s)^s$ puede escribirse así:

$$r \int_0^\infty a^{r-1}\ D(|Tf|\ ;\ a)\ da \leq M_1^{\ r}\ r \int_0^\infty a^{r-1}\ D(|f|\ ;\ a)\ da\ , \tag{103}$$

$$s \int_0^\infty a^{s-1}\ D(|Tf|\ ;\ a)\ da \leq M_2^{\ s}\ s \int_0^\infty a^{s-1}\ D(|f|\ ;\ a)\ da\ , \tag{103a}$$

y la tésis es

$$p \int_0^\infty a^{p-1}\ D(|Tf|\ ;\ a)\ da \leq 3^p\ M_1^{\ tp}\ M_2^{\ (1-t)p} \int_0^\infty a^{p-1}\ D(|f|\ ;\ a)\ da\ . \tag{103b}$$

Queremos pues acotar la integral del miembro izquierdo de (103b) usando la hipótesis (103), (103a). Pero en (103b) figura el exponente p mientras que la hipótesis es para el exponente r y s . La idea de la demostración consiste en introducir parámetros u , v con exponentes r , s , para poder usar la hipótesis. Llamando J al miembro izquierdo de (103b), tenemos:

$$J = p \int_0^\infty a^{p-1}\ D(|Tf|\ ;\ a)\ da = p\ u^p\ v^p \int_0^\infty a^{p-1}\ D(|Tf|\ ;\ u\ v\ a)\ da\ ,$$

$$u^{r-p-1}\ v^{s-p-1}\ J = p\ u^{r-1}\ v^{s-1} \int_0^\infty a^{p-1}\ D(\ Tf\ \ ;\ u\ v\ a)\ da\ .$$

Integrando en u y v , usando la desigualdad $D(|Tf|\ ;\ a) \leq D(|Tf^a|\ ;\ a/2)$ +

$+ D(|Tf_a| \; ; \; a/2)$ y la hipótesis (103) tendremos :

$$\left[\int_A^{\infty} u^{r-p-1} \, du \int_0^A v^{s-p-1} \, dv \right] J =$$

$$= p \int_A^{\infty} u^{r-1} \, du \int_0^A v^{s-1} \, dv \int_0^{\infty} a^{p-1} \, D(|Tf| \; ; \; u \, v \, a) \, da$$

$$\leqslant 2^p \, p \int_A^{\infty} u^{r-1} \, du \int_0^A v^{s-1} \, dv \int_0^{\infty} a^{p-1} \Big[D(|Tf^a| \; ; \; u \, v \, a) +$$

$$+ D(|Tf_a| \; ; \; u \, v \, a) \Big] \, da =$$

$$= 2^p \, p \int_0^A v^{s-1} \, dv \int_0^{\infty} a^{p-1} \, da \int_A^{\infty} u^{r-1} \, D(|Tf^a| \; ; \; v \, u \, a) \, du +$$

$$+ 2^p \, p \int_A^{\infty} u^{r-1} \, du \int_0^{\infty} a^{p-1} \, da \int_0^A v^{s-1} \, D(|Tf_a| \; ; \; u \, a \, v) \, dv =$$

$$= 2^p \, p \int_0^A v^{s-1-r} \, dv \int_0^{\infty} a^{p-1-r} \, da \int_{A \, v \, a}^{\infty} u^{r-1} \, D(|Tf^a| \; ; \; u) \, du +$$

$$2^p \, p \int_A^{\infty} u^{r-1-s} \, du \int_0^{\infty} a^{p-1-s} \, da \int_0^{A \, u \, a} v^{s-1} \, D(|Tf_a| \; ; \; v) \, dv \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \, p(1/r) \int_0^A v^{s-1-r} \, dv \int_0^{\infty} a^{p-1-r} \, da \, M_1^{\,r} \int_E |f^a(x)|^r \, dx +$$

$$+ 2^p \, p(1/s) \int_A^{\infty} u^{r-1-s} \, du \int_0^{\infty} a^{p-1-s} \, da \, M_2^{\,s} \int_E |f_a(x)|^s \, dx =$$

$$= 2^p \, p(1/r) \, (\, 1/(s - r) \,) \, A^{s-r} \, M_1^{\,r} \, (\, 1/(p - r). \int_E |f(x)|^p \, dx +$$

$$+ 2^p p(1/s) (1/(s-r)) A^{r-s} M_2^s (1/(s-p)) \int_E |f|^p dx .$$

Dividiendo por el factor que acompaña a J obtenemos,

$$J = \int_E |Tf|^p dx \leq 2^p \left[\frac{p}{r} \frac{s-p}{s-r} M_1^r A^{2(p-r)} + \right.$$

$$\left. + \frac{p}{s} \frac{p-r}{s-r} M_2^s A^{2(p-s)} \right] (\|f\|_p)^p .$$

Elegimos ahora A para que haga mínima la última expresión (o sea igualando los dos últimos sumandos) y recordando el valor de t y de $1-t$ se obtiene

$$\|Tf\|_p \leq c M_1^t M_2^{1-t} \|f\|_p ,$$

con

$$c \leq 2 \sup_{p,r,s} \left[p^{1/p} / \left\{ r^{t/r} s^{(1-t)/s} \right\} \right] \leq 3 ,$$

lo que prueba la tésis.

Queda abierto el problema si es posible perfeccionar la demostración que acabamos de hacer, de modo que se obtenga $c \leq 1$, es decir si por este método puede obtenerse también la parte c) del teorema de Riesz.

La demostración que precede permite también obtener un teorema general que contiene como casos particulares al teorema de Marcinkiewicz y las partes a) y b) del de Riesz (ver nuestro artículo con M. Bruschi en la Revista Fac. Cien. Fisicomatemát. La Plata, volumen 5, 1956). También aquí queda abierto el problemade una unificación que abarque el teorema de Marcinkiewicz y las partes a), b) y c) del de Riesz. Para enunciar este teorema general necesitamos la siguiente extensión del concepto de tipo debil.

Para todo a y todo N entero, se tiene la desigualdad siguiente

$$\int_E |h(y)|^s \, dy = s \int_0^\infty a^{s-1} D(|h| ; a) \, da \geqslant$$

$$\geqslant a^s \sum_{i=1}^N \left[i^s - (i-1)^s \right] D(|h| ; i\,a) ,$$

que para $N = 1$ se reduce a la de Tchedichef. De esta desigualdad resulta que si $h = Tf$ es de tipo (r , s) entonces para todo $a > 0$ vale

$$a^s \sum_{i=1}^N \left\{ i^s - (i-1)^s \right\} D(|Tf| ; i\,a) \leqslant (M \, \|f\|_r)^s . \qquad (104)$$

De acuerdo a esto diremos que T es de <u>tipo-N-debil (r , s)</u>, si existe una constante M tal que (104) se verifica para todo $a > 0$ y toda $f(x)$. Si $N = 1$ obtenemos la noción ordinaria de tipo debil, y para $N = \infty$ obtenemos la noción de tipo fuerte la mínima constante M de (104) se llamará norma N-debil de T. El teorema general mencionado se enuncia ahora asi:

<u>Si T es de tipo N-debil (p_1 , s_1) y (p_2 , s_2) con normas N-debiles M_1 y M_2 $p_i \leqslant s_i$, $s_1 \neq s_2$, entonces T es de tipo (p , s) para todo (p , s) tal que el punto $P = (1/p , 1/s)$ es interior al $P' P''$, y con norma fuerte M que verifica $\left(1 - (N+1)^{-d} \right)^{1/s} M \leqslant 3 M_1^{\,t} M_2^{\,1-t}$, donde d es el menor de los números $s - s_1$, $s_2 - s$.</u>

Si $N = \infty$, $1 - (N+1)^{-d} = 1$ y obtenemos las partes a) y b) del teorema de Riesz; para $N = 1$ obtenemos el teorema de Marcinkiewicz.

También este teorema general fué demostrado para el triángulo inferior de los tipos y <u>falta hacerlo</u> para el triángulo superior.

Finalmente observemos que el teorema <u>de Riesz se extiende facilmente reemplazando</u>

las normas por radios espectrales. En efecto, si T es un operador de tipo (p , p), entonces su radio espectral $\rho_p(T)$ es, por definición, el sup $|\lambda|$, para todos los números complejos λ tales que $Tf - \lambda f$ no es el inverso de otro operador de tipo (p , p). El mismo T considerado sobre diferentes L^p tiene diferentes radios $\rho_p(T)$. Se tiene entonces la siguiente desigualdad: si $1/p = t/r + (1 - t)/s$ entonces

$$\rho_p(T) \leq (\rho_r(T))^t \ (\rho_s(T))^{1-t} . \tag{105}$$

En efecto, como se sabe se tiene la siguiente expresión para el radio expectral

$$\rho_p(T) = \lim_{m \to \infty} \left\{ \| T^m \|_p \right\}^{1/m} , \tag{106}$$

londe $\| T \|_p$ indica la norma de T correspondiente al tipo (p , p), es decir el menor M tal que $\|Tf\|_p \leq M \|f\|_p$. Como por el teorema de Riesz es $\|T^m\|_p \leq (\|T^m\|_r)^t \ (\|T^m\|_s)^{1-t}$ que combinado con (106) da la desigualdad deseada (105).

Análogamente podemos definir el radio espectral debil $\rho^*_p(T)$ mediante la fórmula

$$\rho^*_p(T) = \lim_{m \to \infty} \left\{ \|T^m\|_p^* \right\}^{1/m} , \tag{106a}$$

donde $\| T \|_p^*$ es la norma debil (p , p) de T, de modo que el radio espectral debil puede definirse para T no acotados que son de tipo debil (p , p). Para que esta definición sea correcta hay que probar previamente que el límite en (106a) existe. Usando el teorema de Marcinkiewicz tendríamos entonces que

$$\rho_p(T) \leq c_p \ (\rho_r^* (T))^t \ (\rho_s^* (T))^{1-t} , \tag{105a}$$

para $1/p = t/r + (1 - t)/s$, $0 < t < 1$.

F) Los teoremas de Riesz y Marcinkiewicz pueden extenderse a operadores compactos. Diremos que Tf es de tipo compacto (p , s) si es de tipo (p , s), y si dada una sucesión $f_n \in L^p$ tal que $\|f_n\|_p \leq 1$ se puede extraer una subsucesión $\{f'_n\} \subset \{f_n\}$ tal que Tf'_n converge en L^s , o sea $\|Tf'_n - Tf'_m\|_s \longrightarrow 0$ cuando n , m tienden al infinito.

Llamaremos norma debil s de $h(y)$, y la designaremos con $\|h\|_s^*$, al menor número M tal que para todo $a > 0$ se verifica

$$a^s \, D(|h| \, ; a) \leq M^s$$

Diremos que el operador Tf es de tipo compacto debil (p , s) , si es de tipo debil (p , s) y si dada una sucesión $\{f_n\} \subset L^p$ tal que $\|f_n\|_p \leq 1$, se puede extraer una subsucesión $\{f'_n\} \subset \{f_n\}$ tal que $Tf'_n = h_n$ convergen en la norma debil s , es decir $\|Tf'_n - Tf'_m\|_s^* \longrightarrow 0$ para n , m tendientes al infinito.

Se tienen entonces los teoremas siguientes:

a) Sea Tf un operador sublineal que hace corresponder a funciones $f(x)$ definidas en el espacio $E = \{x\}$, funciones $h(y) = Tf(y)$ definidas en $E_1 = \{y\}$. Si Tf es de tipo compacto (p_1 , s_1) y de tipo compacto (p_2 , s_2) , sobre L_0 , entonces Tf es de tipo compacto (p , s) para todo $P = (1/p , 1/s)$ del segmento $P' P''$.

b) Sea Tf un operador sublineal que hace corresponder a funciones $f(x)$ definidas en un espacio $E = \{x\}$, funciones $h(y) = Tf(y)$ definidas en un espacio euclídeo $E^m = \{y\}$, con la medida dy de Lebesgue. Si Tf es de tipo compacto debil (p_1 , s_1) y de tipo compacto debil (p_2 , s_2), sobre L_0 , entonces Tf es de tipo compacto (p , s) para todo $P = (1/p , 1/s)$ completamente interior al segmento $P' P''$. (Se supone que P' , P'' están en el triángulo superior de los tipos y $s_1 \neq s_2$).

Observemos que mientras en a) E y E_1 son espacios generales con medidas correspondientes arbitrarias, en b) es $E_1 = E^m$ de Eúclides y la medida de E_1 es la de Lebesgue. No sabemos si b) vale en espacios generales o con medidas singulares en E^m. También está sin aclarar el caso del triángulo superior de los tipos.

Estos teoremas serán objeto de una publicación aparte.

Análogamente se definen los pseudo-tipos compactos y se presenta el problema de extender los teoremas correspondientes (por ejemplo, si pseudo tipo compacto P' más tipo compacto debil P'' implican tipo compacto debil P', etc...).

Observemos que los teoremas a) y b) permiten deducir y generalizar los teoremas de Sobolieff - Kondrachieff, sobre el tipo compacto de los operadores potenciales, que se verán en el capítulo próximo.

Finalmente mencionaremos los siguientes problemas que se refieren a los teoremas de convexidad de Riesz - Marcinkiewicz, y que tal vez valdrían la pena de ser examinados:

1) Cabe considerar operadores de varias funciones $h = T(f_1 , .. , f_m)$, lineales en cada f_i, asi como operadores vectoriales $\hat{h} = T(f_1 , .. , f_m)$ donde $h = (h_1 , .. , h_\ell)$ -, y las cuestiones tratadas en los capítulos II y III se plantean para tales operadores.

2) Por otra parte, para caso de operadores T de tipo (p , s) se tienen teoremas de representación (de Gelfand, Kantorowitch, Dunford - Pettis, etc...) : tales T están dados por núcleos $K(s , t)$ o por límites de sucesiones $T_n f(x) = \int K_n(x , t) f(t)\, dt$, donde los K_n verifican ciertas condiciones. Sería importante saber si existen también teoremas de representación para tipos debiles y tipos compactos debiles, y si existen algunas propiedades (de convexidad) especiales en el caso particular cuando los K_n son simétricos.

3) En el caso en que las funciones f dependen de dos variables, $f = f(x , y)$, $x \in E_1$, $y \in E_2$, se puede considerar normas mixtas

$$\|f\|_{p,s} = \left\{ \int_{E_2} \left[\left\{ \int_{E_1} |f(x, y)|^p \, dx \right\}^{1/p} \right]^s dy \right\}^{1/s}$$

(si $p = s$ entonces $\|f\|_{p,s}$ es la norma p respecto de la medida producto $dx\,dy$). Si $Tf = h(x, y)$ también depende de dos variables, cabe considerar tipos con normas mixtas.

4) Más generalmente, la noción de norma se basa en la de integral, y esta es caso particular de la de "integral condicional". (Dada una familia boreliana de conjuntos $\{F\}$, $F \subset E$, y dada la función medible $f(x)$, $x \in E$, se llama integral condicional de f respecto de $\{F\}$ a la función $g(x) = E\{f \mid \{F\}\}$ tal que para todo F de la familia $\{F\}$ se verifica

$$\int_F g(x)\,dx = \int_F f(x)\,dx \quad ;$$

tal $g(x)$ existe por el teorema de Radón - Nykodim) . Si $\{F\}$ consta de dos conjuntos, el conjunto vacío y E , entonces $g(x) = \text{constante} = \int_E f(x)\,dx$, y en este caso se obtiene la noción ordinaria de integral de f .

Cabe considerar tipos (p, s) con integrales condicionales, por ejemplo Tf es de tipo $(p, s : r)$ si siendo $g(x) = E\{|f|^p \mid \{F\}\}$, $h(x) = E\{|Tf|^s \mid \{F\}\}$, se verifica $\|h\|_r \leq M \|g\|_r$.

G) En los desarrollos recientes de la Mecánica Cuántica parecen tener importancia los <u>operadores de Hilbert dobles</u>. Por ejemplo la transformación de Hilbert ordinaria doble es dada por

$$Hf(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s, t)\,ds\,dt}{(x - s)(y - t)} = \lim_{\varepsilon,\eta \to 0} H_{\varepsilon\eta} f(x, y) ,$$

$$H_{\varepsilon\eta} f(x, y) = \iint_{\substack{\varepsilon < |x-s| < \varepsilon^{-1} \\ \eta < |y-t| < \eta^{-1}}} \frac{f(s, t)\, ds\, dt}{(x-s)(y-t)} \qquad (106)$$

Es por tanto importante saber cuando estos operadores existen. No se debe confundir la integral doble (106) dada por el producto de dos núcleos 1-dimensionales, con la integral simple de Hilbert H_w dada por un núcleo 2-dimensional. Es decir, no se debe confundir el operador producto de dos operadores 1-dimensionales de Hilbert, con los operadores simples 2-dimensionales

$$H_w f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(s, t)\, w(x-s, y-t)}{|x-s|^2 + |y-t|^2}\, ds\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon} H_{w,\varepsilon} f(x, y) . \qquad (107)$$

Tenemos una única (salvo constantes) transformación doble de Hilbert, pero infinitas H_w 2-dimensionales. Mientras que en (107) se excluye en el plano un círculo de radio ε y se hace tender ε a cero, es decir se integra sobre $\varepsilon^2 < |x-s|^2 + |y-t|^2 < \varepsilon^{-2}$, en (106) se excluye en el plano una cruz $|x-s| > \varepsilon$, $|y-t| > \eta$ y se hace tender a cero ε y η. En el último caso caben dos casos cuando $\varepsilon = \eta$, o cuando ε, η tienden a cero independientemente, lo que da origen a dos teorías diferentes. Más generalmente, podemos considerar operadores dobles $n \times m$ dimensionales

$$H_{w_1, w_2} f(z, w) = \int_{E^n} \int_{E^m} f(z-u; w-v)\, K_1(u)\, K_2(v)\, du\, dv , \qquad (106a)$$

donde $K_1(u) = w_1(u)/|u|^n$, $K_2(v) = w_2(v)/|v|^m$ son núcleos del tipo (IIa) página 48. Análogamente se definen los operadores dobles potenciales.

Consideremos, más generalmente, el concepto de <u>operador producto</u> (cartesiano) de dos operadores. Sean $E^n = \{x\}$, $E^m = \{y\}$, $E^{n+m} = E^n \times E^m = \{x, y\}$, $f(x)$ una función definida en E^n, $g(y)$ en E^m y $h(x, y)$ en E^{n+m}. Sea $T_1 = T_1 f$ un operador que actúa sobre funciones $f(x)$ definidas en E^n, $T_2 = T_2 g$ sobre $g(y)$ definidas en E^m y $T = Th$, un operador que actúa sobre funciones $h(x, y)$. Si $L_o(E^n)$ es la familia de las funciones simples de E^n, $L_o(E^m)$ la de E^m, designaremos con L_{oo} a la familia de las funciones $h(x, y)$ de la forma

$$h(x, y) = c_1 f_1(x) g_1(y) + \dots + c_k f_k(x) g_k(y), \tag{108}$$

donde los c_i son constantes. Entonces L_{oo} es denso en los $L^p(E^{n+m})$ y basta considerar el operador Th sobre L_{oo}.

El operador $T_1 f$ que actúa en E^n da origen a un operador $T_1 h$ en E^{n+m} que a cada $h(x, y)$ de la forma (108) le hace corresponder la función

$$T_1 h(x, y) = [T_1 h(\cdot, y)](x) = \sum_i c_i g_i(y) T_1 f_i(x) ; \tag{108a}$$

análogamente $T_2 g$ da origen a

$$T_2 h(x, y) = [T_2 h(x, \cdot)](y) = \sum_i c_i f_i(x) T_2 g_i(y) . \tag{108b}$$

Diremos que el operador Th, que actúa en E^{n+m}, es <u>producto cartesiano</u> de los T_1, T_2, $T = T_1 \times T_2$ si para toda $h(x, y)$ de la forma (108) se verifica

$$Th(x, y) = T_1 T_2 h(x, y) = \sum_i c_i [T_1 f_i(x)] [T_2 g_i(y)]. \tag{109}$$

Asi por ejemplo el operador doble de Hilbert (106) es el producto cartesiano de los operadores de Hilbert ordinarios, 1-dimensionales. El operador $H_{w_1 w_2}$ de (106a) es el producto de H_{w_1} y H_{w_2} ; aquí H_{w_1} actúa sobre funciones definidas en E^n , H_{w_2} sobre funciones de E^m , y $H_{w_1 w_2}$ de E^{n+m} . Es facil verificar las propiedades siguientes (para detalles ver Revista M. Cuyana, vol. 1, pág. 96) :

a) Si T_1 y T_2 son de tipo (p , p), entonces $T = T_1 \times T_2$ es también de tipo (p , p) .

b) Si T_1 es de tipo debil (p , p) y T_2 de tipo (p , p), entonces $T = T_1 \times T_2$ es de tipo debil (p , p).

c) Si T_1 , T_2 son ambos de tipo debil (p , p) no se puede asegurar que T sea de tipo debil (p , p) . Pero si los operadores se consideran sobre dominios de medida finita, por ejemplo acotados (es decir $f(x)$ es nulo fuera de un tal dominio D_1 y Tf es nula fuera de otro tal dominio D_2 , de modo que las integrales, en definición de norma, se toman no sobre todo el espacio sino tan solo sobre estos dominios), y si T_1 , T_2 son ambos de tipo debil (p , p), y de tipo debil (r , r) , $p < r$, entonces $T = T_1 \times T_2$ transforma funciones de Z^p en funciones de $L^{p'}$, para todo $p' < p$ (y en forma "contínua") .

Si Mh , Th son dos operadores actuando en E^{n+m} cabe considerar tres tipos de subordinación local (cfr. 5) :

$$|Mh(x , y)| \leq \frac{1}{|Q(x)| \; |Q(y)|} \iint_{Q(x) \times Q(y)} |Th(t , s)| \, dt \, ds , \tag{110}$$

$$|Mh(x , y)| \leq \frac{1}{|Q(x)| \; |Q(y)|} \iint_{Q(x) \times Q(y)} |T(g_{Q(x)} h) (t , s)| \, dt \, ds , \tag{110a}$$

$$|Mh(x , y)| \leq \frac{1}{|Q(x)| \; |Q(y)|} \iint_{Q(x) \times Q(y)} |T(g_{Q(x)} \, g_{Q(y)} h) (t , s)| \, dt \, ds , \tag{110b}$$

donde $Q(x)$ es cubo de E^n con centro en x, $Q(y)$ cubo en E^m, y g_Q la función característica de Q.

Se tienen entonces las propiedades siguientes :

d) Si se verifica (110) con $T = T_1 \times T_2$, y si T_1, T_2 son de tipo (p, p), $p > 1$, entonces M es también de tipo (p, p). Si se verifica (110a), $T = T_1 \times T_2$, y T_1 es de tipo (p_1, p_2), T_2 de tipo (p, p), $p_1 > p > 1$, entonces M es de tipo (p_1, p_1). Si vale (110b) con $T = T_1 \; T_2$, y si T_1, T_2 son de tipo (p, p), entonces M es de tipo (r, r) para todo $r > p$.

e) Si uno de los T_1, T_2 es de tipo debil ya no se puede asegurar lo mismo para M. Pero si los operadores se consideran sobre dominios finitos, si T_1 es de tipo debil $(1, 1)$ y T_2 de tipo debil (p, p), $p > 1$, entonces: si vale (110) ó (110a) ó (110b) para $|M|^r$ y $|T|^r$, $r < 1$, entonces M transforma funciones n de $Z^{r'}$ en $L^{r'}$, para todo $r < r' < 1$ (en forma contínua).

f) Sea T'_r $(r > 0)$ una sucesión de operadores lineales que actúan en E^n, tales que para todo $r > 0$, para toda f y para todo x de E^n existe un cubo Q con centro en x tal que para todo x' de Q se verifica

$$|T'_r f(x)| \leq M\left\{ |T'f(x')| + |T'(g_Q \, f)\,(x')| + N_1 f(x) \right. \tag{111}$$

donde T' es lineal pero no necesariamente N_1. Análogamente sea $T''_t g$ una sucesión $(t > 0)$ de operadores lineales que actúan en E^m y que verifican la condición (111) respecto de los operadores correspondientes T'', N_2. Supongamos que los T'_r, T''_t, N_i, T^i $(i = 1, 2)$ conmutan y sea $T_{rt} = T'_r \times T''_t$, y $Mh(x, y)$ el operador maximal de la sucesión T_{rt}.

Entonces si los N_1, N_2, T', T'' son de tipo (p, p) para todo $p > 1$, también lo es Mh. Si estos operadores se consideran sobre dominios finitos, y si N_1, N_2, T', T'' son de tipo debil $(1, 1)$ y tipo debil (p, p), $p > 1$, entonces Mh transforma Z^s en L^s para todo $s < 1$ (en forma contínua).

Este teorema generaliza para operadores productos el teorema correspondiente para operadores simples del 5 .

Estos teoremas a) – f), en combinación con los teoremas 12 y 14, permiten estudiar la convergencia puntual, media y el tipo de la sucesión producto $T_{rt} = T'_r \times T''_t$ de dos sucesiones, a partir de las propiedades correspondientes de las sucesiones factores.

En particular aplicando estos teoremas al caso de $T'_r = H_{w_1}$, $T''_t = H_{w_2}$, se obtienen los siguientes teoremas sobre los operadores de Hilbert dobles:

g) El operador de Hilbert doble $H_{w_1} \times H_{w_2}$ asi como su correspondiente operador maximal M , son de tipo (p , p) para todo $p > 1$. Considerados y definido sobre dominios acotados, estos operadores transforman Z^r en L^r para todo $r < 1$

g_1) Los operadores $H_{w_{1,\varepsilon}} \times H_{w_{2,\eta}}$ $h(x , y)$ convergen en media-p para toda h de $L^p(E^{n+m})$ si $p > 1$, y también puntualmente si $p > 1$. La convergencia puntual tiene además lugar si $|h|(1 + \log^+ |h|)$ es integrable (en caso de $H_{w_1} \times H_{w_2} \times \dots H_{w_m}$ debe ser $|h|(1 + \log^+ |h|^{m-1})$ integrable), siempre que los operadores sean definidos sobre dominios acotados.

Recientemente E. Stein probó en un ejemplo (de próxima publicación) que la última parte de g_1) no vale para $h \in L^1$, es decir si $h \in L^1$ la sucesión $H_{w_{1,\varepsilon}} \times H_{w_{2,\varepsilon}}$ h puede no converger para casi todo punto, si $\varepsilon \longrightarrow 0$ (es decir si $\varepsilon = \eta$) .

Observemos que la teoría de operadores de Hilbert dobles no está elaborada com – (cfr. los comentarios en el trabajo citado de la Revista M. Cuyana, página 163) . Lo mismo se refiere a los operadores potenciales $H_d \times H_{d'}$. Tampoco están del todo aclaradas las propiedades a) – f) para tipos (p , r) generales. Lo mismo se refiere a los tipos compactos .

Las propiedades a) – f) también aclaran algunos casos importantes del problema 3) de F) .

H) El teorema de Hardy – Littlewood – Paley (página 122) fué probado mediante el teorema de Marcinkiewicz para tipos (p , p) . Usando el teorema general de Marcinkiewicz se obtiene del mismo modo la siguiente generalización:

a) Si $f(x)$ está definida en E^n y $\hat{f}$ es su transformada de Fourier, entonces

$$\left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^{s} \, |u|^{-\ell s n} \, du \right\}^{1/s} \leq M \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^{p} \, dx \right\}^{1/p} \tag{112}$$

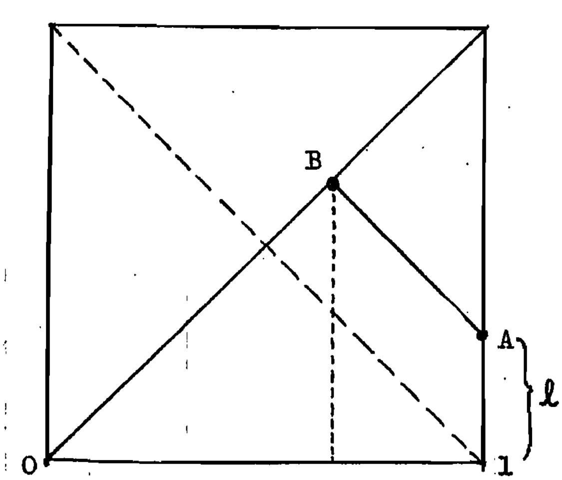
siempre que se verifiquen las condiciones

$$0 < 1 - 1/p \quad ; \quad s \geq p \quad ; \quad 1/p + 1/s = 1 + \ell \quad ; \quad \ell \geq 0 \quad . \tag{112a}$$

b) Si $0 \leq d < 1 - 1/p$; $s \geq p$; $1/p + 1/s = 1 - d$, entonces

$$\left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^{s} \, du \right\}^{1/s} \leq M \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^{p} \, |x|^{dpr} \right\}^{1/p} \quad . \tag{112b}$$

Demostración. a) Sea $Tf(u) = \hat{f}(u) \, |u|^{-\ell n}$, entonces (112) y (112a) dicen que T es de tipo (p, s) para todo punto $P = (1/p , 1/s)$ interior al segmento AB, paralelo a la diagonal secundaria y en B, siendo $A = (1/1 , \ell)$ $B = ((1+\ell)/2 , (1+\ell)/2)$, pues la ecuación de AB es $1/p + 1/s = 1 + \ell$. Por tanto, por el teorema de Marcinkiewicz - Zygmund, es suficiente probar que T es de tipo B = tipo $(2/(1+\ell) ; 2/(1+\ell))$ y de tipo debil A = tipo debil $(1 , 1/\ell)$.



Que T es de tipo B significa que poniendo $r = 2/(1+\ell)$ se verifica

$$\int_{E^n} |\hat{f}(u)|^r \, |u|^{(2-r)n} \, du \leq M \int_{E^n} |f(x)|^r \, dx \, ,$$

y esta es justamente la desigualdad de Paley (ver (22), página 122) ya demostrada. Para ver que T es de tipo debil $(1 , 1/\ell)$, sea E el conjunto de los u tales que $|T(u)| = |\hat{f}(u)| \, |u|^{-\ell n} > a$. Como $|\hat{f}(u)| \leq \|f\|_1$, se tiene $|u| < (\|f\|_1 / a)^{1/n\ell} = b$, o sea que E está contenido en la esfera de radio b y por tanto

$$D(|Tf| \, ; a) = |E| \leq M \cdot b^n = (\|f\|_1 / a)^{1/\ell} \, ,$$

lo que prueba que T es de tipo debil $(1 , 1/\ell)$.

b) La parte b) se deduce de la a) por dualidad del mismo modo que en el teorema de la página 122, l.q.d.d.

Las generalizaciones a) y b) del teorema de Paley son casos particulares del siguiente teorema:

<u>Teorema de Pitt</u> : <u>Si $0 \leq d < 1 - 1/p$, $s \geq p$, $1/p + 1/s = 1 + \ell - d$, $\ell \geq 0$, entonces</u>

$$\left\{ \int_{E^n} |\hat{f}(u)|^s \, |u|^{-n\ell s} \, du \right\}^{1/s} \leq M \left\{ \int_{E^n} |f(x)|^p \, |x|^{ndp} \, dx \right\}^{1/p} . \qquad (112c)$$

Para $d = 0$ esta desigualdad se reduce a (112), para $\ell = 0$ se tiene (112b), para $d = \ell = 0$ se tiene el teorema de Hausdorff - Young; por tanto el teorema de Pitt generaliza y unifica los teoremas de Hausdorff - Young, de Paley, asi como a) y b). Poniendo $g(x) = f(x) \, |x|^{nd}$, se ve que (112c) equivale a decir que el operador $T_{\ell,d} \, g = Tg(u) = \mathcal{F}\left[g(x)\,|x|^{-nd}\right](u)\,|u|^{-n\ell}$ es de tipo (p , s) con $1/p+1/s = 1+\ell-d$.

La última condición establece una dependencia analítica entre ℓ y d , luego el operador $T_{\ell,d}$ será operador-función analítico en d (ó en ℓ); como para

$d = 0$ y para $\ell = 0$ ya fué probado el tipo del operador, se puede aplicar el teorema general de convexidad de operadores funciones (página 19) para deducir el teorema para todo d y ℓ. Dejamos los detalles a cargo del lector a título de ejercicio (para otra demostración y generalizaciones ver los trabajos de E. Stein y Stein - Weiss citados en las páginas 95, 96).

i) El lema 3 de la página 125 admite una generalización que conduce a un problema intersante sobre cuerpos convexos. Dicho lema afirma que si para $j > i$ se verifica: 1) el centro c_j no pertenece a Q_i, 2) el lado ℓ_j es $\leq \ell_i$. (ver observación 5, página 126), y si todos los cubos tienen un punto común, entonces su número es $\leq 2^n$. Observando que las condiciones 1) y 2) implican que también c_i no pertenece a Q_j si $j > i$, y que, todo cubo Q (de lados paralelos a los ejes) es semejante (es decir se obtiene por una homotecia seguida de una traslación) a un cubo fijo K, se puede enunciar el lema 3 en esta forma equivalente:

<u>LEMA 3</u> bis. <u>Sea K el cubo fundamental con centro en el origen y lado 1</u>.
<u>Si $K_1, \ldots, K_p$ son p figuras tales que:</u>

a) <u>cada K_i es "semejante" a K</u>,

b) <u>ningún K_i contiene al centro de otro K_j, $j \neq i$</u>,

c) <u>todos los K_i tienen un punto 0 común</u>. <u>Entonces $p \leq 2^n$</u>.

Este enunciado sugiere la siguiente generalización, en que K puede ser un cuerpo convexo general con centro de simetría. Recordemos que un conjunto K se dice <u>convexo</u> si con cada dos puntos contiene al segmento que los une; un cuerpo convexo es un conjunto convexo de E^n que tiene un punto interior (es decir contiene un esfera n-dimensional).

Consideremos pues, en vez de un cubo, un cuerpo convexo K (compacto) fijo, con centro de simetría c (podemos suponer que $c = 0 =$ origen). Si $r \geq 0$, indicaremos con rK al cuerpo convexo con centro en c que se obtiene aplicando a K una homotecia de razón r. Si c_1 es un punto de E^n, $c_1 + K$ indicará al cuerpo que se obtiene trasladando a K de modo que el centro c pase a c_1. Un conjunto

K_1 es por tanto semejante a K si existen c_1, r, tales que $K_1 = c_1 + rK$, y c_1 será el centro de K_1.

Diremos que un sistema de p conjuntos $\{K_1, \dots K_p\}$ es un <u>sistema-K</u> si se verifican las tres condiciones a), b), c) del lema 3 (pero ahora K es un convexo general).

Para todo <u>convexo K designaremos con $a(K)$</u> al menor número a tal que para todo sistema-K $\{K_1, \dots, K_p\}$ se verifica $p \leq a$.

El lema 3 dice por tanto que <u>si K es un cubo entonces $a(K) \leq 2^n$</u> (y es fácil ver que $a(K) = 2^n$).

Para todo espacio E^n pongamos

$$a_n = \sup a(K) \quad , \quad K \subset E^n \quad , \tag{113}$$

donde el sup se toma para los posibles cuerpos convexos (y compactos) $K \subset E^n$.
Es decir, a_n es el menor número a tal que para todo cuerpo convexo $K \subset E^n$ y todo sistema-K $\{K_1, \dots, K_p\}$ se verifica $p \leq a$.
Consideremos ahora en vez de la condición b) la siguiente condición más debil :

b_1) : <u>si $i \neq j$ entonces c_i no es interior a K_j</u> (pudiendo pertenecer c_i a la frontera de K_j).

Diremos que $\{K_1, \dots K_p\}$ es un <u>sistema-K debil</u> si verifica a), b), c).

Designaremos con $b(K)$ al menor número b tal que $b \geq p$ para todo sistema-K debil de p conjuntos, luego definimos

$$b_n = \sup b(K) \quad \text{para los posibles} \quad K \subset E^n \tag{114}$$

Es fácil ver que <u>si K es un cubo entonces $b(K) = 3^n$</u> (por ejemplo, si K = = cuadrado, y si c_1 es el centro de K, c_2, c_3, c_4, c_5 sus vértices, c_6, c_7, c_8, c_9 los puntos medios de sus lados, entonces los nueve cubos $c_i + K$, $c_i = 1, \dots 9$, forman un sistema-K debil de $9 = 3^2$ conjuntos ;

análogamente se construye un sistema-K débil de 3^n componentes si K es un cubo n-dimensional).

La determinación del número b_n no presenta dificultades y se tiene que: A) <u>Para todo n vale $b_n = 3^n$</u>

En cambio la determinación de a_n no parece ser problema fácil. Además del resultado trivial $a_1 = 2$, solo conocemos el siguiente resultado debido a R.Ricabarra:

B) (R. Ricabarra) : <u>Se tiene $a_2 = 5$</u> .

Observemos que <u>la desigualdad $a_2 \geq 5$ es inmediata</u> , pues si K = círculo de radio 1 , y si K_i = círculo de radio 1 y centro c_i = i-ésimo vértice del pentágono regular inscripto en K , entonces $\{K_1, \ldots, K_5\}$ es un sistema-K (pues todos los K_i pasan por el centro c de K , y c_i no pertenece a K_j , $i \neq j$ pues el lado del pentágono es mayor que el radio) . -

Así pues, para probar b) solo falta probar que $a_2 \leq 5$.

Para $n = 3$, tomando un dodecaedro regular inscripto en la esfera K , se obtiene con igual razonamiento que $a(K) \geq 12$, <u>luego $a_3 \geq 12$</u> . <u>Esto sugiere la conjetura</u>: $a_3 = 12$ (se puede probar, creo, que $a_3 \leq 15$). Para $n > 3$ solo hay un número finito de poliedros regulares y <u>ni siquiera sabemos conjeturar el valor posible de a_n</u> . Por razones de simetría es de esperar que sea $a_n = a(K)$ donde K_n = esfera n-dimensional , pero tampoco sabemos cual es el valor de $a(K)$.

Es fácil probar la siguiente propiedad (debida a R. Ricabarra) :

C) <u>Si $\{K_1, \ldots, K_p\}$ es un sistema-K , entonces existe otro sistema-K $\{K'_1, \ldots, K'_p\}$ que además verifica las dos condiciones siguientes</u>: <u>d) cada K'_i es trasladado de K , $K'_i = c'_i + K$</u> ; <u>e) el centro c de K está en la frontera de K'_i (luego el centro c'_i de K'_i pertenece a la frontera de K), para todo i , (luego c es el punto común a todos los K'_i)</u> . <u>Propiedad análoga vale para los sistemas-K débiles</u> .

De C) resulta esta <u>otra definición de a(K)</u> : $a(K)$ es el máximo número p tal que en la frontera de K se puede colocar p puntos $c_1, \ldots, c_p$ de modo que c_i no pertenece a $c_j + K$ si $i \neq j$.

Como se sabe, todo cuerpo convexo K de E^n define en E^n una norma $\|x\|_K$ tal que K es el conjunto de los puntos x que verifican $\|x\|_K \leqslant 1$ (es decir K es la esfera unitaria respecto de esta norma), y la frontera de K se compone de los puntos $\|x\|_K = 1$; análogamente $c_j + K$ es el conjunto $\|x - c_j\|_K \leqslant 1$. Por lo tanto :

$a(K)$ = máximo número p tal que existen p puntos $c_1 , \ldots, c_p$ que verifican:

$$\|x_i\|_K = 1 \ ; \quad \|c_i - c_j\|_K > 1 \qquad \text{si } i \neq j \ . \tag{115}$$

Es decir $a(K)$ = máximo número p tal que en la frontera de la esfera unitaria $\|x\|_K = 1$ se puede colocar p puntos a distancia > 1 uno de otro. Luego: <u>a_n = máximo p tal que existe un espacio n-dimensional de Banach con p puntos a distancia > 1 uno de otro sobre la frontera de la esfera unitaria</u> .

Análogamente, $b(K)$ = máximo p tal que existen $c_1 , \ldots , c_p$ que verifican:

$$\|c_i\|_K = 1 \ ; \quad \|c_i - c_j\|_K \geqslant 1 \qquad \text{si } i \neq j \tag{115a}$$

Luego: <u>b_n = máximo p tal que existe un espacio n-dimensional de Banach con p puntos a distancia $\geqslant 1$ uno de otro sobre la frontera de la esfera unitaria</u>.

Observemos todavía que la propiedad A) equivale al teorema clásico de Minkowski (de la Geometría de números). La determinación de a_n para $n > 2$ daría por lo tanto un interesante refinamiento del teorema de Minkowski (un problema análogo se plantea para el teorema de Siegel - Hlawka).

Demostración de C) . Podemos suponer que el origen O es el punto común a todos los K_i y que el centro c de K es $c = 0$. Sea $K_i = c_i + r_i K$ y sea $\| \ \|$ = la norma definida por K. Como $c = 0$ pertenece a K_i tenemos $\|c_i\| = \|c - c_i\| = d_i \leqslant r_i$. Sea $K_i'' = c_i + d_i K$; entonces c pertenece a la frontera de K_i'' , $K_i'' \subset K_i$ y c_j no pertenece a K_i'' si $i \neq j$.

Pongamos ahora $K_i' = (1/d_i)\, K_i''$. Los K_i' así definidos verifican entonces la tesis. En efecto , la verificación de a), c), d) y e) es inmediata.

Veamos que se verifica b). Suponiendo lo contrario, un K_i' contendrá a un centro $c_j' = c_j/d_j$, $i \neq j$, por lo tanto K_j' contendrá a $c_i' = c_i/d_i$, pues los K_i' son todos traslaciones uno de otro. Luego existe un x de K_j'' , y de K_i'' tales que $c_j' = c_j/d_j = y/d_i$, $c_i' = c_i/d_i = x/d_j$. Luego $c_j = (d_j/d_i)y$, $c_i = (d_i/d_j)x$. Supongamos por ejemplo que $d_j \leqslant d_i$, entonces $c_j = dy$ con $d \leqslant 1$. Como 0 e y están en K_i'' , por convexidad también $c_j = dy = dy + (1-d)0$ están en $K_i'' \subset K_i$, lo que contradice a b).

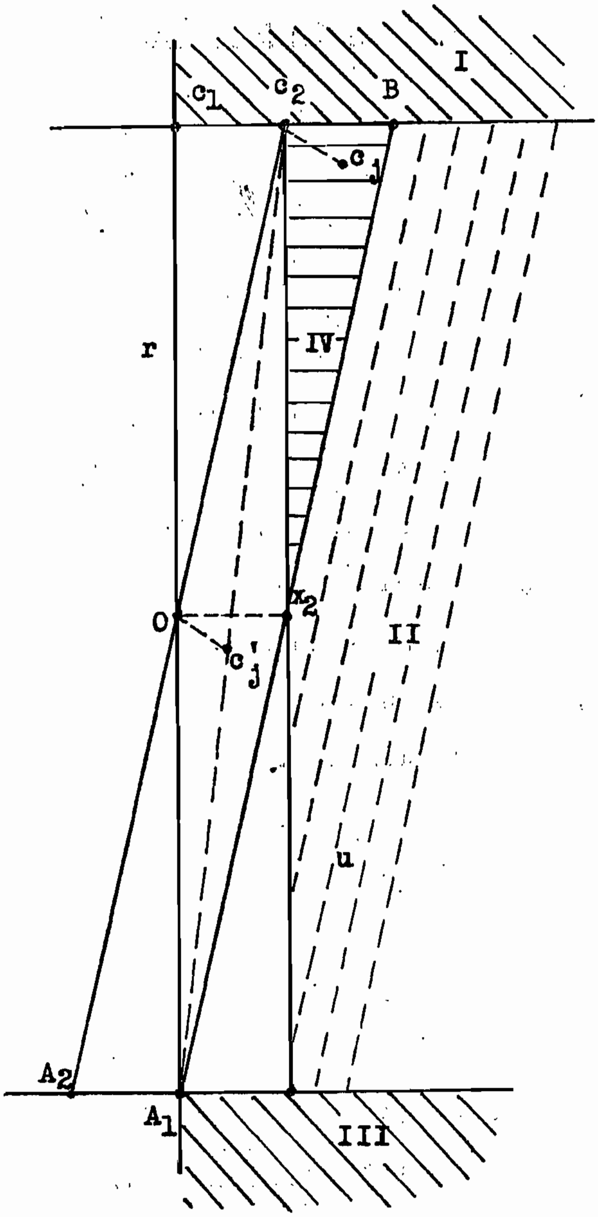
<u>Demostración de A)</u> . Sea $K_1, \dots, K_p$ un sistema que verifica a), b_1) y c) y probaremos que $p \leqslant 3^n$ (ya vimos que $b_n \geqslant 3^n$) . Por C) podemos suponer que $K_i = c_i + K$, $c = 0$, y que los c_i están en la frontera de K , es decir $\| c_i \| = 1$ ($\| \ \|$ es la norma definida por K).

Sean: $K' = 3/2\, K$, $K_i' = c_i + 1/2\, K \subset K_i$. Evidentemente $K_i' \subset K'$ y si $i \neq j$, K_i' y K_j' no pueden tener en común un punto z interior (pues si z es interior a K_i' y K_j' , entonces $\| z - c_i \| < 1/2$, $\| z - c_j \| < 1/2$ luego $\| c_i - c_j \| < 1$, o sea c_j es interior a K_i , contrariamente a b_1)). Además volumen de $K_i' = |K_i'| = (1/2)^n |K| = 1/2^n v$, $\text{vol } K' = (3/2)^n v$. Sea ahora $S = \bigcup_{i=1}^{p} K_i'$. Entonces $S \subset K'$, $|S| = \sum |K_i'|$ (pues los K_i son no rampantes) $= (p/2^n) v$, y por lo tanto $(p/2^n) v \leqslant (3/2)^n v$, lo que da $p \leqslant 3^n$.

<u>Demostración de B)</u> . Ya vimos que $a_2 \geqslant 5$, luego vamos a probar que $a_2 \leqslant 5$. Sea pues, K es un cuerpo convexo con centro de simetría $c = 0$, y sean $c_1, \dots, c_p$, p puntos en la frontera de K (es decir $\| c_i \| = 1$) , $K_i = c_i + K$, y supongamos que K_i no contiene a c_j si $i \neq j$ (es decir $\| c_i - c_j \| > 1$). Tenemos que probar que $p \leqslant 5$.

Sea r la recta que une 0 con c_1 (ver dibujo). Basta que en cada semiplano que determina r , por ejemplo el derecho, hay a lo sumo dos centros $c_i \neq c_j$.

Sea c_2 el centro c_i "mas alto" del semiplano derecho, de modo que en la región I, situada arriba de $c_1 c_2$, no hay puntos c_i. Como $\|x_2\| = \|c_2 - c_1\| > 1$ (ver dibujo), el punto x_2 no pertenece a K. Luego en la región marcada II no hay puntos u de K, pues de lo contrario x_2 quedaría en el triángulo $c_2\ u\ A_1$ formado por puntos de K, luego x_2 sería punto de K. Por igual razón no hay puntos u de K en la región III, pues A_1 es punto frontera de K por serlo su simétrico c_1, y A_2 pertenece a K, y A_1 quedaría interior al triángulo $c_2\ u\ A_2$. Tampoco hay puntos c_j en IV pues sería $\|c_j'\| = \|c_j - c_2\| > 1$ c_j' exterior a K, pero c_j' está en el cuadrilátero $c_2\ c_j\ A_1\ A_2$ formado por puntos de K. Análogamente se ve que en el triángulo $c_2\ x_2\ A_1$ hay a lo sumo un punto c_j. Dejamos los detalles al lector.



<u>Observación</u>. Del teorema C) resulta que en la definición de pseudo-tipo (p,s) y en el teorema correspondiente, se puede sustituir el soporte cúbico Q de f(x) por soportes-K de f(x) (es decir, conjuntos de la forma $S = c + K$, $S \supset S(f)$) donde K es un cuerpo convexo con centro de simetría, fijo.

IV PROPIEDADES DE LOS OPERADORES H_d y H_w

1.- REGULARIZACION DE FUNCIONES DE L^p

Una función f de L^p no tiene por qué ser continua y menos derivable. Por eso tiene importancia el hecho de que toda tal f puede aproximarse (en norma p) por funciones continuas y derivables (de cualquier orden) mediante un procedimiento, llamado regularización de f , que pasamos a exponer.

A) Además de los espacios L^p vamos a considerar el espacio C de las funciones continuas. Indicaremos con $C = C(E^n)$ al conjunto de todas las funciones $f(x)$ definidas en E^n que son uniformemente continuas en todo E^n y nulas en el infinito (es decir $\lim f(x) = 0$ para $|x| \to \infty$). Si en vez de E^n se considera un intervalo acotado y cerrado I , o mas generalmente un conjunto acotado y cerrado I (es decir compacto), indicaremos con $C(I)$ al conjunto de todas las funciones definidas y continuas en I . En el espacio $C(E^n)$ (o en el $C(I)$) se define la norma por la relación $\|f\|_C = \sup |f(x)| =$ máx. de $|f(x)|$, donde el sup se toma para los posibles puntos x de E^n (o de I , respectivamente). El espacio C es pues parte del L^∞ y se compone de aquellas funciones de L^∞ que son continuas y nulas en el infinito. La norma de C es la misma que la de L^∞ , por tanto si una sucesión f_n converge en C a un límite f, esto significa que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, pues $\|f - f_n\|_C < \varepsilon$ significa que $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo x de E^n (o de I).

Indicaremos con $C_0(E^n)$ al subconjunto de $C(E^n)$ que se compone de aquellas funciones continuas f que se anulan fuera de algún intervalo acotado I (I varía con f). Si $C_0(I)$ es el subconjunto de $C_0(E^n)$ que se compone de las funciones continuas que se anulan fuera de I , entonces $C_0(E^n) =$ unión de todos los $C_0(I)$.

Sabemos (cfr. página 2) que $C_0(E^n)$ es denso en todos los L^p , $p < \infty$. Pero esto no es cierto para $p = \infty$: la clausura de $C_0(E^n)$ respecto de la norma de L^∞ es $C(E^n)$ y no L^∞ ; si la clausura de $C_0(E^n)$ fuera L^∞ entonces toda f de L^{∞} sería límite uniforme de funciones continuas y por lo tanto continua, pero una f de L^{∞} no tiene por que ser continua, basta que sea acotada. Por tanto $C(E^n)$ es un subconjunto cerrado de $L^{\infty}(E^n)$. Análogamente $C(I)$ es denso en todo L^p, $p < \infty$, pero no en $L^{\infty}(I)$.

Si bien una f de L^p no tiene por que ser continua, ella es continua en media:

LEMA 1. Toda función $f(x)$ de L^p, $p < \infty$, es continua en media-p, es decir respecto de la norma de L^p: dado $\varepsilon > 0$ existe un $d > 0$ tal que para todo h de E^n de módulo $|h| < d$ se verifica

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p = \left\{ \int_{E^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \varepsilon \qquad (1)$$

Esta propiedad no vale si $p = \infty$. Aquí dx indica la medida de Lebesgue. Lo mismo es cierto para $L^p(I)$, $p < \infty$.

Demostración. Sea antes $f \in C_0(E^n)$, de modo que f es nula fuera de un intervalo finito $|x| < N$. Por ser f uniformemente continua existe un $d > 0$ tal que $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$, para todo x y todo $|h| < d$. Como $f(x+h)$ se anula fuera de $|x| < N + d$, y para d pequeño $N + d < 2N$, tenemos

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p^p \leq \int_{|x| < 2N} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \leq 2N\varepsilon^p$$

siendo N una constante fija, lo que prueba la tesis para f de $C_0(E^n)$.

Sea ahora f de L^p cualquiera, $p < \infty$. Como $C_0(E^n)$ es denso en L^p, existe una g de $C_0(E^n)$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$, luego también $\|f(x+h) - g(x+h)\|_p < \varepsilon$ para todo h, por la propiedad de la invariancia de Lebesgue. De

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |g(x+h) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x+h) - g(x+h)|$$

sigue entonces

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leq \|g(x+h) - g(x)\|_p + \|g - f\|_p + \|f(x+h) - g(x+h)\|_p \leq$$

$$\leq \|g(x+h) - g(x)\|_p + 2\varepsilon .$$

Pero por lo recién demostrado, existe un $d > 0$ tal que $|h| < d$ implica $\|g(x+h) - g(x)\|_p < \varepsilon$, luego $\|f(x+h) - f(x)\|_p < 3\varepsilon$

l.q.q.d.

El lema no vale para $p = \infty$, pues $\|f(x+h) - f(x)\|_\infty < \varepsilon$ significa que $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x , o sea toda f de L^∞ sería continua, lo que no es cierto.

B) Vamos a necesitar el teorema de W. Young que ya hemos usado en los capítulos anteriores, y que ahora enunciaremos y demostraremos en forma completa.

<u>TEOREMA DE YOUNG</u> . <u>Si $k(x)$ pertenece a $L^r(E^n)$, $1 \leq r \leq \infty$, entonces el operador</u>

$$Tf(x) = f * g = \int_{E^n} f(x-t)\, k(t)\, dt \qquad (2)$$

<u>es del tipo (p , s) para</u>

$$1/p - 1/s = 1 - 1/r \quad , \quad 1 - 1/r \leq 1/p \leq 1 \qquad (3)$$

<u>es decir para todo punto $P = (1/p , 1/s)$ del segmento $P'P''$ paralelo a la diagonal a distancia $1 - 1/r$</u> . <u>Además</u>

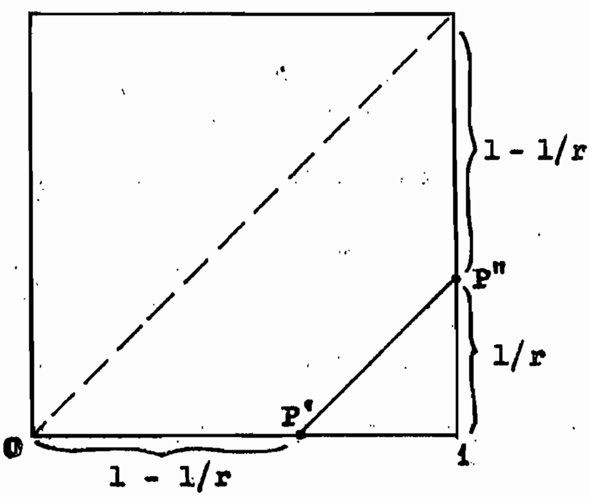
$$\|T\| \leq \|k\|_r \text{ , } \underline{\text{es decir}} \quad \|f * k\|_s \leq \|k\|_r \, \|f\|_p \qquad (4)$$

<u>Demostración</u> . Por el teorema de convexidad de Riesz es suficiente probar el teorema para los extremos P' y P'' .

Como $P' = \{(r-1)/r \ , \ 0\} = \{1/r^* \ , \ 0\}$, es decir que T es de tipo P' con norma (4), significa que $\| Tf \|_\infty \leq \| k \|_r \ \| f \|_{r^*}$, o sea que para todo x vale

$$|Tf(x)| \leq \| k \|_r \ \| f \|_{r^*} \quad ;$$

pero esto es consecuencia inmediata de la desigualdad de Hölder aplicada a (2) :



$$|Tf(x)| \leq \left\{ \int_{E^n} |f(x-t)|^{r^*} dt \right\}^{1/r^*} \left\{ \int_{E^n} |k(t)|^r dt \right\}^{1/r} = \| f \|_{r^*} \ \| k \|_r$$

Luego tan solo falta probar que T es de tipo en el punto $P'' = \{1 \ , \ 1/r\}$, es decir que

$$\| Tf \|_r \leq \| k \|_r \ \| f \|_1 \qquad (5)$$

Para probar (5), observemos que por el lema 1 , página 16 , existe una función $g(x)$ de L^{r^*} tal que

$$\| Tf \|_r = (Tf \ , \ g) \quad , \quad \| g \|_{r^*} = 1 \quad .$$

Luego (suponiendo Tf real) aplicando Hölder tenemos:

$$\| Tf \|_r = \int_{E^n} \left\{ \int_{E^n} f(t) \ k(x-t) \ dt \right\} g(x) \ dx =$$

$$= \int_{E^n} f(t) \left[\int_{E^n} g(x) \ k(x-t) \ dx \right] dt \leq$$

$$\int_{E^n} |f(t)| \quad \|g\|_{r^*}\Big] \left[\int_{E^n} |k(x-t)|^r \, dx\right]^{1/r} dt =$$

$$= \int_{E^n} |f(t)| \; \|k\|_r \, dt = \|k\|_r \; \|f\|_1 \; ,$$

lo que demuestra (5), y con ello la tésis.

Del teorema resulta en particular que, <u>si $k(t)$ es de $L^1(E^n)$ entonces Tf es de tipo $(p\ ,\ p)$</u>, para todo $1 \leq p \leq \infty$, con $\|f * k\|_p \leq \|k\|_1 \; \|f\|_p$, hecho que hemos usado ya en los capítulos anteriores.

C) Diremos que ha sido dada una <u>unidad de convolución</u> en E^n , si para todo $h > 0$ se fija una función $w_h(x)$ con las propiedades siguientes:

a) $w_h(x) \geq 0$ para todo x de E^n ;

b) $w_h(x) = 0$ si $|x| > h$, es decir fuera del entorno de radio h del origen .

c) w_h tiene integral igual a uno

$$\int_{E^n} w_h(x)\, dx = \|w_h\|_1 = 1 \tag{6}$$

Fijada w_h , para toda $f(x)$ escribiremos

$$f_h = f * w_h \tag{6a}$$

El nombre unidad de convolución se debe a que para $h \longrightarrow 0$ la función w_h actúa practicamente como una unidad en la operación de convolución. En efecto, se tiene el siguiente

<u>LEMA 2 . Toda unidad de convolución w_h tiene las propiedades siguientes</u>

1) <u>Para toda f de $L^p(E^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, $f_h = f * w_h$ también pertenece a L^p y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.</u>

2) Si para todo $|t| < h$ se verifica $\|f(x) - f(x+t)\|_p < \varepsilon$, $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces $\|f - f_h\| < \varepsilon$.

3) Para toda f de $L^p(E^n)$, $1 \leq p < \infty$ (pero no para $p = \infty$), se tiene que $\|f - f_h\|_p \longrightarrow 0$ para $h \longrightarrow 0$.

3a) Si $f \in C(E^n)$ entonces $\|f - f_h\|_\infty \longrightarrow 0$ para $h \longrightarrow 0$.

4) Si w_h es contínua o derivable hasta cierto órden k, entonces f_h es también contínua o derivable y $D^i(f_h) = f * D^i w_h$ (D^i = símbolo de una derivación parcial de órden i).

5) Si f es derivable, lo es f_h y $D(f_h) = (Df)_h$.

6) Para toda $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$, dados $\varepsilon > 0$ y $h > 0$, existe un $d > 0$, que depende solo de ε y de h y no de f, tal que para todo $|t| < d$ vale $|f_h(x+t) - f_h(x)| < \varepsilon \|f\|_p$, para todo x.

Demostración. 1) es consecuencia inmediata del teorema de Young y de la condición $\|w_h\|_1 = 1$, pues según este teorema $\|f_h\|_p \leq \|w_h\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p$

2) En virtud de (6) $f(x)$ puede escribirse en la forma :

$$f(x) = f(x) \int_{E^n} w_h(t)\, dt = \int_{E^n} f(x)\, w_h(t)\, dt \,, \tag{7}$$

y como w_h se anula fuera de $|t| < h$, tendremos

$$f(x) - f_h(x) = \int_{|t| < h} [f(x) - f(x-t)]\, w_h(t)\, dt \tag{7a}$$

Sea antes $p = \infty$, entonces la hipótesis $\|f(x) - f(x+t)\|_\infty < \varepsilon$ significa $|f(x) - f(x-t)| < \varepsilon$ para todo $|t| < h$, y todo x, y de (7a) obtenemos $|f(x) - f_h(x)| \leq \varepsilon \|w_h\|_1 = \varepsilon$ para todo x, o sea $\|f - f_h\|_\infty < \varepsilon$.

Si $1 \leq p < \infty$, existe una $g(x)$ tal que (ver página 16) $\|g\|_{p^*} = 1$ y $\|f - f_h\|_p = ((f - f_h), g)$, luego

$$\|f - f_h\|_p = \int_{E^n} \left\{ \int_{|t| < h} [f(x) - f(x - t)] \, w_h(t) \, dt \right\} g(x) \, dx =$$

$$= \int_{|t| < h} w_h(t) \left[\int_{E^n} (f(x) - f(x - t)) \, g(x) \, dx \right] dt . \qquad (7b)$$

Por la desigualdad de Hölder la última integral entre corchetes de (7b) es $\leq \|f(x) - f(x - t)\|_p \|g\|_{p^*} = \|f(x) - f(x - t)\|_p$, y como en (7b) es $|t| < h$ resulta que esta integral es $< \varepsilon$, luego de (7b) resulta $\|f - f_h\|_p \leq$ $\leq \varepsilon \|w_h\|_1 = \varepsilon$.

3) Por el lema 1, dado $\varepsilon > 0$ existe $h > 0$ tal que $|t| < h$ implica $\|f(x) - f(x + t)\|_p < \varepsilon$, luego por 2), para este h tendremos $\|f - f_h\|_p < \varepsilon$.

3a) Si $f \in C(E^n)$ entonces f es uniformemente contínua y existe un $h > 0$ tal que para todo $|t| < h$ es $\|f(x) - f(x + t)\|_\infty < \varepsilon$; por 2) es entonces $\|f - f_h\|_\infty < \varepsilon$.

4) y 5) resultan enseguida de

$$f_h(x) = \int_{|t| < h} f(x - t) \, w_h(t) \, dt = \int_{|x - t| < h} f(t) \, w_h(x - t) \, dt$$

aplicando la regla de derivación bajo el signo de integral.

6) De

$$f_h(x + t) - f_h(x) = \int_{E^n} [w_h(x + t - y) - w_h(x - y)] \, f(y) \, dy$$

se tiene $|f_h(x + t) - f_h(x)| \leq \|w_h(y - t) - w_h(y)\|_{p^*} \|f\|_p$. Para $h > 0$ fijo w_h pertenece a todo L^{p^*} ; luego por el lema 1 $\| w_h(y-t) - w_h(t)\|_{p^*} < \varepsilon$. Si $|t| < d$, donde $d > 0$ depende solo de h y de ε . Luego $|f_h(x+t) - f_h(x)| < \varepsilon \|f\|_p$ para $|t| < d$ y todo x , l,q,d,d.

El ejemplo más simple de unidad de convolución es : $w_h(x) = (1/h)^n$ si $|x| < h$ y cero si $|x| > h$.

En este caso tenemos

$$f_h(x) = \frac{1}{h^n} \int_{|t|<h} f(x+t)\, dt ,$$

y las partes 1) - 2b) del lema que precede se reducen a una parte del teorema de Lebes - gue sobre la derivación de la integral indefinida.

Sin embargo en este caso $w_h(x)$ no es derivable y ni siquiera contínua. El lema siguiente prueba la existencia de unidades de convolución derivables infinitamente.

<u>LEMA 3</u> . <u>Existen unidades de convolución tales que $w_h(x)$ admite derivadas de todos los órdenes, y además con la propiedad $w_h(x) = w_h(y)$ para $|x| = |y|$ (es decir $w_h(x)$ es una función de $|x|$).</u>

<u>Demostración</u> . Sea $u(x) = u_h(x)$ la función definida así :

$$u(x) = \begin{cases} \exp.\ (\ |x|^2 / (|x|^2 - h^2)\ ) , & \text{si } |x| < h , \\ 0 , & \text{si } |x| \geqslant h . \end{cases}$$

Esta función es contínua y tiene derivadas contínuas de todos los ordenes. Es fácil comprobar, por inducción que la derivada $\partial^k/(\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n})\ u(x_1 , .. x_n)$ es de la forma $(\ P(x_1 , .. x_n)/(|x|^2 - h^2)^{2k}\ ) \exp\ (|x|^2 - h^2)$, donde P es un polinomio de las variables $x_1 , .. x_n$.

Esto muestra que $u(x)$ asi como toda derivada $D^k u(x)$ tienden a cero para

$|x| \longrightarrow h$, $|x| < h$. Luego $u(x)$ y todas sus derivadas son nulas para $|x| = h$; lo mismo es cierto para $|x| > h$ pues $u(x)$ es nula en $|x| > h$.

De lo dicho resulta que $u(x) = u_h$ es infinitamente derivable, no-negativa, se anula fuera de $|x| < h$, y depende solo de $|x|$. Es decir u_h tiene todas las propiedades requeridas menos la c), pues su integral es $= c\, h^n \neq 1$. Basta entonces poner $w_h(x) = u_h(x)/(c\, h^n)$ y w_h tendrá todas las propiedades de la u_h y además su integral será $= 1$, l,q,d,d.

De los lemas 2 y 3 resulta <u>que toda f de L^p , $1 \leq p < \infty$, es límite en L^0</u> (es decir respecto de la norma $\| \ \|_p$) , <u>y toda f de $C(E^n)$ es límite en $C(E^n)$</u> (es decir respecto de $\| \ \|_\infty$) , <u>de funciones f_h infinitamente derivables</u> . Pues basta poner $f_h = f * w_h$ donde w_h es una unidad derivable. Este procedimiento de aproximar $f \in L^p$ por las f_h derivables se llama <u>regularización de f</u>.

2 . CONJUNTOS COMPACTOS EN ESPACIOS FUNCIONALES

Sea $M = \{f\}$ alguno de los espacios funcionales que estabamos considerando (por ejemplo $L^p(d\mu)$, $C(E^n)$, ..) y $\|f\|$ la norma de este espacio.

M es un espacio métrico completo. En los espacios euclídeos E^n , es fundamental el teorema de Bolzano - Weirestrass que dice: un conjunto de E^n es acotado si y solo si de toda sucesión de este conjunto se puede extraer una subsucesión convergente Como el espacio E^n puede identificarse a un espacio $L^2(d\mu)$ donde la medida μ está concentrada en un número finito de puntos, surge el problema si el teorema de Bolzano vale en todo L^p . Más precisamente, un conjunto $\mathcal{Y} \subset M$ se llama <u>relativamente compacto</u> (abreviado, <u>r. compacto</u>) si dada una sucesión infinita $F = \{f_i\} \subset \mathcal{Y}$ se puede extraer de ella una subsucesión $F_1 = \{g_i\} \subset \mathcal{Y}$ convergente : $\|g_i - g\| \longrightarrow 0$. El teorema de Bolzano dice entonces que $\mathcal{Y}$ es r. compacto si y solo si es acotado. Pero este teorema <u>no</u> es cierto en los L^p , y en los M generales; más aún un teorema de Riesz dice que el teorema de Bolzano vale solamente en espacios de dimensión finita. Asi pues, para que un conjunto $\mathcal{Y}$ de L^p ó M sea r. compacto no basta que sea acotado (es decir que exista un número fijo a tal que

$\|f\| < a$ para toda f de $\mathcal{Y}$); además de la acotación hace falta otra condición suplementaria que depende del espacio M particular. En caso de los espacios $C(I)$, $C(E^n)$, y $L^p(E^n)$ (este último con la <u>medida de Lebesgue)</u> se tienen los teoremas de Arzela y F. Riesz que determinan cual es esta condición suplementaria. Esencialmente esta condición consiste en que las funciones de $\mathcal{Y}$ sean igualmente uniformemente contí - nuas. Más precisamente, si $\mathcal{Y} \subset C(I)$, para toda f de $\mathcal{Y}$ y todo $\varepsilon > 0$ existe un d tal que $|h| < d$ implica $|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon$; si $\mathcal{Y} \subset L^p$, tenemos (lema 1) que $|h| < d$ implica $\|f(x + h) - f(x)\|_p < \varepsilon$. Pero el $d > 0$ depende de $\varepsilon > 0$ y de la f particular. Si d puede elegirse el mismo para todas las f de $\mathcal{Y}$ entonces se dice que las funciones de $\mathcal{Y}$ son <u>igualmente uniformemente contínuas</u>, en caso de $M = C(I)$ ó $M = C(E^n)$, o <u>igualmente contínuas en media-p</u> , en caso de $M = L^p(E^n)$ ó $M = L^p(I)$.

Para establecer los teoremas de Arzelá y Riesz conviene usar la noción de red. Una <u>ε-red de $\mathcal{Y}$</u> es un conjunto $R \subset M$ tal que dada una $f \in \mathcal{Y}$ existe una $g \in R$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$; es decir toda f de $\mathcal{Y}$ pertenece a una esfera de radio ε y centro en un punto de R . Una red R se dice <u>finita</u> si R se compone de un número finito de elementos $f_1 , .. f_N$.

<u>LEMA 4</u> . (de Hausdorff).- <u>Para que el conjunto $\mathcal{Y} \subset M$ sea r. compacto es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista una ε-red finita R de $\mathcal{Y}$</u> (el teorema vale para todo espacio métrico M ; la parte "suficiente" exige además la <u>hi</u>pótesis de que M sea completo).

<u>Demostración</u>. <u>Necesario</u>. Sea $\mathcal{Y}$ r. compacto y veamos que existe una ε-red finita R de $\mathcal{Y}$. Supongamos lo contrario, o sea que ningún número finito de elementos no puede constituir una ε-red de $\mathcal{Y}$. Sea f_1 un elemento de $\mathcal{Y}$; como f_1 no puede ser una red de $\mathcal{Y}$, hay una f_2 de $\mathcal{Y}$ tal que $\|f_1 - f_2\| > \varepsilon$. Como f_1 , f_2 no puede ser una red, existe f_3 de $\mathcal{Y}$ tal que $\|f_1 - f_3\| > \varepsilon$ Siguiendo así obtendremos una sucesión infinita $\{f_i\} \subset \mathcal{Y}$ tal que $\|f_i - f_j\| > \varepsilon$ si $i \neq j$. Esto implica que ninguna subsucesión de $\{f_i\}$ puede ser convergente pues una tal subsucesión contendría dos elementos f_i , f_j tales que

$\|f_i - f_j\| < \varepsilon$. Obtenemos así una contradicción con la hipótesis de que $\mathcal{Y}$ es r. compacta.

Suficiente. Sea $\mathcal{Y}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ hay una ε-red finita de $\mathcal{Y}$, y probaremos que $\mathcal{Y}$ es r. compacto, o sea fué dada una sucesión infinita $F = \{f_i\} \subset \mathcal{Y}$ existe una subsucesión convergente. Sea $\varepsilon_n = 1/n \longrightarrow 0$. Por hipótesis para cada n existen $N(n)$ elementos que formen una $1/n$-red de $\mathcal{Y}$. Luego si con centro en cada uno de los $N(1)$ puntos de la primera red tracemos una esfera (de M) de radio $\varepsilon = 1/1$ toda f de M , y en particular toda f_i de F debe caer en una de estas esferas (por definición de red). Como F contiene infinitos elementos, y las esferas son en número finito $N(1)$, una de estas esferas de radio 1, que llamaremos S_1 , debe contener infinitas f_i de F ; es decir $S_1 \supset F_1$ donde $F_1 \subset F$ es una subsucesión infinita. Repitiendo el razonamiento, con F_1 en vez de F y con $\varepsilon = 1/2$ en vez de $\varepsilon = 1$, obtendremos una esfera S_2 de radio $1/2$ que contiene una subsucesión infinita $F_2 \subset S_2$, $F_2 \subset F_1$.

Es decir para todo par f_i , f_j de F_2 tendremos $\|f_i - f_j\| < 1/2$; pues estas f_i , f_j estan en S_2 que tiene radio $1/2$. Siguiendo asi obtendremos para cada k un conjunto infinito F_k tal que:

1) $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_k \supset F_{k+1} \supset \cdots$;

2) Si f_i , f_j son de F_k entonces $\|f_i - f_j\| < 1/k$.

Elegimos ahora en F_1 una f_i fija que llamaremos g_1 ; en F_2 elegimos una g_2 tal que $g_2 \neq g_1$ etc.. Obtendremos asi la sucesión infinita g_k donde $g_k \in F_k$. De 1) resulta que $g_{k+1} \in F_k$ y análogamente $g_n \in F_k$ para todo $n > k$. Luego como g_k y g_n , pertenecen a F_k para todo $n > k$, resulta de 2) que $\|g_k - g_n\| < 1/k$ para todo $n > k$. Esto significa que $\{g_n\}$ es una sucesión convergente. Como las g_n son extraidas de F lo que prueba la tésis.

Dejamos a cargo del lector, como ejercicio fácil, deducir del lema 4 estas consecuencias :

Todo conjunto $\mathcal{Y}$ r. compacto es acotado, es decir $\|f\| \leq a$ para toda f

de M. Además tal $\mathcal{Y}$ contiene un subconjunto denso y numerable. Finalmente, $\mathcal{Y}$ es r. compacto si y solo si dado $\varepsilon > 0$ existe una ε-red R tal que R es r. compacto.

TEOREMA DE ARZELA PARA $C(I)$. Sea I un intervalo (o conjunto) cerrado y acotado, y sea $\mathcal{Y} \subset C(I)$. Para que $\mathcal{Y}$ sea r. compacto (en $C(I)$) es necesario y suficiente que se verifiquen las dos condiciones siguientes :

1) $\mathcal{Y}$ es acotado, es decir existe una constante fija $a > 0$ tal que $\|f\|_\infty \leqslant a$ para toda f de $\mathcal{Y}$;

2) las $f(x)$ de $\mathcal{Y}$ son igualmente uniformemente contínuas sobre I (dado $\varepsilon > 0$ existe $h > 0$ tal que para todo $|t| < h$ vale $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, cualquiera sea $x \in I$ y cualquiera sea $f \in \mathcal{Y}$).

Demostración. Necesario. Supongamos que $\mathcal{Y}$ es r. compacto y probaremos 1) y 2). En la observación que sigue al lema 4 vimos que $\mathcal{Y}$ verifica la condición 1), luego solo falta probar 2).

Del lema 4, aplicado a $M = C(I)$, resulta que dado $\varepsilon > 0$ existen N funciones contínuas $g_1(x), \ldots, g_N(x)$ tales que a toda $f(x)$ de corresponde una $g_i(x)$ tal que $\|f - g_i\|_\infty < \varepsilon$. Como las g_i son en número finito existe un mismo h para todas las g_i tal que $|t| < h$ implica $|g_i(x+t) - g_i(x)| < \varepsilon$, para todo x y toda g_i. Luego

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant |g_i(x+t) - g_i(x)| + |g_i(x) - f(x)| + |f(x+t) - g_i(x+t)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\,\|f - g_i\|_\infty < 3\varepsilon,$$

para toda f de $\mathcal{Y}$ y todo x de I.

Suficiente. Supongamos que se verifica 1) y 2) y probaremos que $\mathcal{Y}$ es r. compacto. Por el lema 4 basta probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un número finito S de funciones contínuas $g_1, \ldots, g_s$ tales que para toda f de $\mathcal{Y}$ hay una g_i

con $\|f - g_i\|_\infty < 3\varepsilon$. Para simplificar supongamos que I es un cubo (o rectángulo) y subdividamoslo en N cubos $I = I_1 \cup \ldots \cup I_N$ de tal modo que cada I_i tenga diámetro menor que el número $h > 0$ de la condición 2). Sea x_i un punto fijo de I_i (por ejemplo el centro de I_i), entonces para todo t de I_i será $|t - x_i| < h$ luego por 2)

$$|f(t) - f(x_i)| < \varepsilon \quad , \quad \text{si} \quad t \in I_i \; , \; f \in \mathcal{Y} \; . \tag{8}$$

Por hipótesis existe un $a > 0$ tal que $-a \leq |f(x)| < a$ cualquiera sea $f \in \mathcal{Y}$ y $x \in I$, es decir $f(x) \in J = (-a, a)$. Subdividimos J en r intervalos $J = J_1 \cup \ldots J_r$ de longitud $< \varepsilon$. Dada una f de $\mathcal{Y}$ y un x_i, el número $f(x_i)$ cae en uno de los intervalos J_j. Es decir a cada f de $\mathcal{Y}$ le corresponde una N-upla $j(1), \ldots, j(N)$ tal que $f(x_1) \in J_{j(1)}, \ldots, f(x_N) \in J_{j(N)}$. Luego las f de $\mathcal{Y}$ se agrupan en un número finito $s = r^N$ de grupos $\mathcal{Y}_1, \ldots \mathcal{Y}_s$, de modo que dos f funciones de y g de $\mathcal{Y}$ pertenecen a un mismo grupo si les corresponde la misma N-upla $j(1), \ldots j(N)$, es decir si para todo i, $f(x_i)$ y $g(x_i)$ pertenecen a un mismo J_j, y por tanto

$$|f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \; . \tag{8a}$$

Elijamos en cad grupo $\mathcal{Y}_j$ una función $g_j(x)$, y veamos que estas s funciones g_j forman una 3ε-red de $\mathcal{Y}$. En efecto dada f de $\mathcal{Y}$ ella pertenece a cierto grupo $\mathcal{Y}_j$, y como g_j pertenece al mismo grupo tendremos por (8a) que $|f(x_i - g_j(x_i)| < \varepsilon$ para todo $i = 1, \ldots N$. Como todo t de I pertenece a un I_i tenemos por (8) que $|f(x_i) - f(t)| < \varepsilon$, $|g_j(x_i) - g_j(t)|$, luego resulta $|f(t) - g_j(t)| < 3\varepsilon$ para todo t de I, l,q,d,d.

TEOREMA DE ARZELA PARA $C(E^n)$. Un conjunto $\mathcal{Y} \subset C(E^n)$ es r. compacto si y sólo si verifica las 3 condiciones siguientes :

1) existe un $a > 0$ fijo tal que $\|f\|_\infty < a$ para toda f de $\mathcal{Y}$;

2) las f de $\mathcal{Y}$ son igualmente uniformemente continuas ;

3) dado $\varepsilon > 0$ existe un cubo acotado I tal que $|f(t)| < \varepsilon$ para todo t fuera de I y toda f de $\mathcal{Y}$.

Demostración . Necesario . Supongamos que $\mathcal{Y}$ es m. compacto. Por el lema 4 existen $g_1 , .. g_N$ de $C(E^n)$ tales que toda f de $\mathcal{Y}$ tiene una g_i con $\|f - g_i\|_\infty < \varepsilon$. Como cada g_i es nula en el infinito, y son en número finito, existe un cubo I tal que fuera de I vale $|g_i(t)| < \varepsilon$ para todo i , luego $|f(t)| < 2\varepsilon$ para tales t , de modo que se verifica 3). Análogamente se comprueban 1) y 2) (confrontar la demostración del teorema precedente) .

Suficiente. Supongamos que se verifican 1) , 2) , 3) , sea $F = \{f_n\}$ una sucesión infinita, $F \subset \mathcal{Y}$, y probaremos que se puede extraer de F una subsucesión convergente respecto de la norma de $C(E^n)$.

Por 3), para cada $m = 1 , 2 , ..$, existe una esfera I_m tal que fuera de I_m vale $|f(t)| < \varepsilon/m$ para toda f de $\mathcal{Y}$. Como las $f(x)$ están definidas y verifican 1) y 2) en todo E^n , ellas están definidas y verifican 1) y 2) en I_1 , luego por el teorema anterior para $C(I)$, podemos extraer de F una subsucesión $F_1 \subset F$, tal que para todo par f_i , f_j de F_1 se verifique $|f_i(t) - f_j(t)| < \varepsilon/1$ para todo t de I_1 . Pero para t fuera de I_1 todas las funciones son $< \varepsilon/1$, luego $|f_i(t) - f_j(t)| < \varepsilon/1$ para todo t , o sea

$$\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon/1 \qquad \text{si} \qquad f_i , f_j \in F_1 \quad .$$

Análogamente de F_1 se puede extraer una subsucesión $F_2 \subset F_1$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon/2 \qquad \text{si} \qquad f_i , f_j \in F_2 \quad ,$$

y obtenemos asi

$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m \supset \dots$ tales que

$$\|f_i - f_j\|_\infty < \varepsilon/m \quad \text{si} \quad f_i , f_j \in F_m \ .$$

Elijamos una función fija g_m en cada F_m. La sucesión $\{g_m\}$ asi elegida es extraida de F y es convergente en $C(E^n)$ porque si $n > m$ es $g_n \in F_n \subset F_m$, luego $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon/m$, l,q,d,d.

TEOREMA DE RIESZ - ARZELA PARA L^p. Si $1 \leq p < \infty$, un conjunto $\mathcal{Y} \subset L^p(E^n)$ es r. compacto si y solo si se verifican las 3 condiciones siguientes:

1) Existe un $a > 0$ tal que $\|f\|_p < a$ para toda f de $\mathcal{Y}$.

2) Las $f(x)$ de $\mathcal{Y}$ son igualmente contínuas en media-p (dado $\varepsilon > 0$ existe $h > 0$ tal que $|t| < h$ implica $\|f(x+t) - f(x)\|_p < \varepsilon$ para toda f de $\mathcal{Y}$).

3) Dado $\varepsilon > 0$ existe una esfera acotada I tal que si $f \in \mathcal{Y}$ y si $f'(x) = f(x)$ en I y nula fuera de I entonces $\|f - f'\|_p < \varepsilon$. En caso de $\mathcal{Y} \subset L^p(I)$, I = compacto, la condición 3) es innecesaria.

Demostración. La necesidad de las condiciones 1), 2), 3) se prueba igual que en el teorema de Arzelá. Supongamos pues que $\mathcal{Y}$ verifica 1), 2), 3) y probaremos que es r. compacto, o lo que es lo mismo que hay una ε-red de $\mathcal{Y}$. Sea $w_h(t)$ una unidad de convolución con w_h contínuas. Para cada f de $\mathcal{Y}$ sea f' la función igual a f en I y nula fuera de I, y sea $f'' = (f')_h = f' * w_h$. Por 3) es $\|f' - f\|_p < \varepsilon$, luego también $\|f'(x+t) - f(x+t)\|_p < \varepsilon$, y por 2), si $|t| < h$, es $\|f(x+t) - f(x)\|_p < \varepsilon$. Luego para todo $|t| < h$ es $\|f'(x+t) - f'(x)\|_p < 3\varepsilon$. De 2) del lema 2 resulta entonces, recordando que $f'_h = f''$

$$\|f'' - f\|_p < \varepsilon \qquad \text{para toda } f \text{ de } \mathcal{Y} \tag{9}$$

Por otra parte como $|f'(x)| \leq |f(x)|$ es $\|f'\|_p \leq \|f\|_p \leq a$ para toda f' ; luego de 6) del lema 2, resulta que dado $\mathcal{E} > 0$ existe un $d > 0$ que depende de solo de $\mathcal{E} > 0$ y no de f' tal que $|f'_h(x + t) - f'_h(x)| < \mathcal{E} a$, es decir $|f''(x + t) - f''(x)| < \mathcal{E} a$ para toda f'' y todo x . Como f' es nula fuera de I, f'' es nula fuera de otro $I' = I + h$, y como regularización de f' , $f'' = f'_h$ es continua; luego la desigualdad precedente significa que $\mathcal{Y}'' = \{f''\}$ es un conjunto de $C(E^n)$ igualmente continuo. Además por el teorema de Young :

$$\|f''\|_\infty \leq \|f'\|_p \|w_h\|_{p^*} \leq \|f\|_p \|w_h\|_p$$

luego para $h > 0$ fijo tenemos $\|f''\|_\infty \leq a'$ para toda f'' . Del teorema de Arzelá resulta entonces que el conjunto $\mathcal{Y}'' = \{f''\}$ es r. compacto en $C(E^n)$, luego también en $C(I)$ y por lo tanto existen n funciones $g_1 , \dots , g_n$, continuas en I , nulas fuera de I , y tales que a toda f'' corresponde una g_i con $\|g_i - f''\|_\infty < \mathcal{E}$, luego en particular $|g_i(x) - f''(x)| < \mathcal{E}$ para todo x de I .

Como $|I| = b$ es un número fijo tendremos

$$\int_I |f''(x) - g_i(x)|^p \, dx < \varepsilon^p b$$

que junto con (9) da

$$\int_I |f(x) - g_i(x)|^p \, dx < 2 \varepsilon^p b = \mathcal{E}_1^{\,p} ;$$

como por 3) es

$$\int_{E^n - I} |f(x)|^p \, dx < \varepsilon^p$$

y $g_i(x) = 0$ fuera de I , resulta $\|f - g_i\|_p < \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}$. Así pues $g_1 , \dots g_n$ es una $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}$-red finita de $\mathcal{Y}$,

l,q,q,d.

Se dice que la sucesión $\{f_n\} \subset L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, <u>converge débilmente</u> hacia la función f de L^p , si para toda g de L^{p^*} la sucesión numérica (f_n , g) converge hacia el límite (f , g) . Si f_n converge a f en media-p entonces ella converge también débilmente, es decir la convergencia en norma

implica la convergencia débil; en efecto, tenemos que $\|f - f_n\|_p \to 0$, y por Hölder $|(f, g) - (f_n, g)| = |(f - f_n, g)| \leq \|f - f_n\|_p \cdot \|g\|_{p^*}$.
Como $\|g\|_{p^*}$ es un número finito fijo, resulta $|(f, g) - (f_n, g)| \to 0$.
La recíproca no es cierta: f_n puede converger débilmente y no converger en norma; un ejemplo clásico es el siguiente:
Sea $\{f_n(x) = \text{sen}\, nx\} \subset L^2(0, 2\pi)$ y sea $f(x) = 0 \in L^2$.
Si $g \in L^2(0, 2\pi)$, entonces $(f_n, g) = b_n =$ coeficiente de Fourier de $g(x)$, luego $b_n \to 0$, es decir $(f_n, g) \to 0 = (0, g)$, lo que muestra que $f_n(x)$ tiende débilmente a cero en L^2. Pero $f_n(x)$ no tiende en norma-2 a cero pues entonces sería $\|f_n\|_2 \to 0$, mientras que $(\|f_n\|_2)^2 = \pi$ para todo n.

Un conjunto $\mathcal{Y} \subset L^p$ se dirá débilmente r. compacto si de toda sucesión infinita $\{f_n\} \subset \mathcal{Y}$ se puede extraer una subsucesión débilmente convergente. Mientras que para la compacidad fuerte era suficiente que $\mathcal{Y}$ sea acotada, se tiene en cambio que:

Si $\mathcal{Y} \subset L^p$ es un conjunto acotado, es decir $\|f\|_p \leq a$ para toda f de $\mathcal{Y}$, entonces $\mathcal{Y}$ es débilmente r. compacto (y recíprocamente).

Vamos a esbozar rápidamente la demostración, dejando los detalles al lector.

Sea $F = \{f_n\} \subset \mathcal{Y}$. Como se sabe L^{p^*} es separable, es decir existe un conjunto numerable $\{g_1, g_2, \ldots\} \subset L^{p^*}$ denso en L^{p^*}.
Tenemos
$$|(f_n, g_1)| \leq \|f_n\|_p \|g_1\|_{p^*} \leq a \|g_1\|_{p^*} = a_1$$
para todo n, luego la sucesión numérica (f_n, g_1) es acotada y podemos extraer una subsucesión $F_1 = \{f_n^1\} \subset F$ tal que (f_n, g_1) converge a un límite ℓ_1, siendo $|\ell_1| \leq a \|g_1\|_{p^*}$. Análogamente de F_1 extraemos una subsucesión $F_2 = \{f_n^2\}$ tal que (f_n^2, g_2) converge a un límite ℓ_2, siendo $|\ell_2| \leq a \|g_2\|_{p^*}$, y así sucesivamente. Poniendo $h_n = f_n^n$, todos los h_n, $n > m$, pertenecen a F_m, luego (h_n, g_m) converge hacia ℓ_m para toda g_m y $|\ell_m| \leq a \|g_m\|_{p^*}$.
De aquí sigue que para toda g de L^{p^*} es (h_n, g) convergente hacia un límite $\ell = \ell(g)$, tal que $|\ell(g)| \leq a \|g\|_{p^*}$ (pues dado $\varepsilon > 0$ existe un g_m con $\|g - g_m\|_{p^*} < \varepsilon$, luego $|(h_n, g) - (h_n, g_m)| \leq \|h_n\|_p \|g - g_m\|_{p^*} \leq \varepsilon a$

y puesto que $|(h_n , g_m) - (h_{n+k} , g_m)| < \varepsilon$ resulta

$$|(h_n , g) - (h_{n+k} , g)| < 3\varepsilon).$$

Ahora el límite $\ell(g)$ es una funcional lineal de g, y acotada puesto que

$$|\ell(g)| \leqslant a \|g\|_{p^*}$$

luego como se sabe existe una f de L^p tal que $\ell(g) = (f , g)$. Luego (h_n , g) converge hacia (f , g) para toda g, o sea h_n converge débilmente a f, l,q,q,d.

Observación . En la demostración que precede se supone que L^{p^*} es separable. Esto es cierto para $L^p(E^n ; d\mu)$ pero puede no serlo para $L^p(X)$ generales. Sin embargo el teorema es cierto para todo L^p y mas generalmente para los conjugados de espacios normales; para no suponer conocida la teoría de espacios normados nos limitamos al caso de L^p separables.

3 . OPERADORES INTEGRALES

A) Sean: $E = \{x\}$ un espacio con una medida dx, $E_1 = \{y\}$ otro espacio con medida dy ; en las aplicaciones E y E_1 serán un E^n y un E^m, y dx, dy serán medidas de Lebesgue o de Lebesgue - Stieltjes (de Radón).
Sea $K(x , y)$ una función definida en $E \times E_1 = \{(x , y)\}$, y consideremos el operador

$$Tf(y) = F(y) = \int_E K(x , y) f(x)\, dx \qquad (10)$$

que hace corresponder a funciones $f(x)$ definidas en E, funciones $F(y) = [Tf](y)$ definidas en E_1. Tales operadores se llaman operadores integrales con núcleo K.

Los espacios E, E_1 pueden tener medida infinita, como ocurre en el caso de los E^n. Consideraremos además el operador T, con núcleo K, sobre dominios finitos o acotados ; esto quiere decir lo siguiente:

Sea $D \subset E^n$ un dominio acotado, de medida finita, de $E^n = E$, y $D_1 \subset E^m$ otro tal dominio acotado de $E^m = E_1$, y consideremos el operador

$$Tf(y) = F(y) = \int_D K(x , y) f(x)\, dx \qquad (10a)$$

que hace corresponder a funciones $f(x)$ definidas en D funciones $F(y)$ definidas en D_1. En el caso del operador (10), definido en el espacio entero, al decir que T es de tipo (p, s) esto significa que $\|Tf\|_s \leq M\|f\|_p$, donde $(\|f\|_p)^p$ = integral de $|f|^p$ sobre todo el espacio E^n, y $(\|Tf\|_s)^s =$ = integral de $|f|^s$ sobre todo E_1.

En cambio cuando decimos que el operador (10a) es de tipo (p, s) sobre los dominios finitos, entonces la desigualdad $\|Tf\|_s \leq M\|f\|_p$ se entiende que $(\|f\|_p)^p$ = integral de $|f|^p$ sobre D, y $(\|Tf\|_s)^s$ = integral de $|f|^s$ sobre D_1. Si el operador Tf es de tipo (p, s) sobre todo el espacio lo es con mas razón sobre dominios finitos, pues si f es definida en D se puede suponer que está definida en todo E^n y que vale cero fuera de D, lo cual no cambia su norma.

Por otra parte la norma de Tf tomada sobre D_1 es $\leq$ que esta norma tomada sobre todo E^m, Es decir, si

$$({}_{D_1}\|Tf\|_s)^s = \int_{D_1} |Tf(y)|^s \, dy \tag{11}$$

y si $\|Tf\|_s$ es la norma definida por la integral sobre todo E_1, tenemos

$${}_{D_1}\|Tf\|_s \leq \|Tf\|_s \leq M\|f\|_p = M\,{}_D\|f\|_p$$

si $f = 0$ fuera de D.

En general ma mayor parte (pero no todas) de las propiedades consideradas aquí, si son válidas para "todo el espacio" valen también sobre dominios finitos.

La recíproca no es cierta, Tf puede ser de tipo sobre todo par de dominios acotados, y no serlo sobre los espacios enteros, y lo mismo para otras propiedades análogas.

Esto se debe a que la integral sobre conjuntos acotados o de medida finita tiene propiedades que no valen sobre el espacio que tiene medida infinita.

Por ejemplo:

a) Siendo D = medida de D un número finito, para toda f definida en D

vale:

$$\text{si } p \leq r \quad \text{entonces} \quad \|f\|_p \leq c\,\|f\|_r \quad , \quad c = (|D|)^{1/p - 1/r} \tag{12}$$

donde las normas son tomadas sobre D , pues por la desigualdad de Hölder

$$(\|f\|_p)^p = \int_D |f(x)|^p\, 1\, dx \leq \left\{ \int_D |f|^r\, dx \right\}^{p/r} \{|D|\}^{1 - p/r}$$

En (12) c es una constante fija, la misma para todas las f .

b) De (12) resulta que si $p \leq r$ y $f \in L^r$ entonces también $f \in L^p$ En particular si $f(x)$ es acotada en D, ella pertenece a L^∞, luego ella pertenece con mas razón a todo L^p. Tenemos así:

$$C(D) \subset L^\infty(D) \subset L^r(D) \subset L^p(D) \subset L^1(D) \subset \ldots \quad (p < r) \tag{13}$$

c) De (12) sigue también que si $p \leq r$ y si f_n es una sucesión convergente en media-r entonces f_n converge también en media-p . En particular si f_n converge uniformemente sobre D , entonces f_n converge en media-p para todo $0 < p \leq \infty$.

d) Para que un conjunto $\mathcal{Y}$ de $C(D)$, o de $L^p(D)$, $1 \leq p \leq \infty$, sea r. compacto basta que se verifiquen solo las dos primeras condiciones del teorema de Arzelá o de Riesz - Arzelá.

e) Si un operador (que actúa de D a D_1 , acotados) T es de tipo (p , s) entonces T es de tipo (p , s') para todo $s' \leq s$, pues si

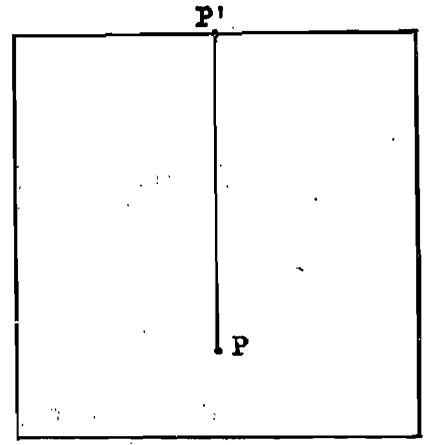
$$\|Tf\|_s \leq M\,\|f\|_p$$

tendremos de (12) que

$$\|Tf\|_{s'} \leq c\,\|Tf\|_s \leq c\,M\,\|f\|_p = M_1\,\|f\|_p \quad ,$$

donde $c = |D|^{1/s' - 1/s}$.

En otros términos, si T es de tipo en todo punto de la semirrecta $P P'$ con origen en P y paralela al eje de las ordenadas (= eje de las $1/s$).



f) Si se sabe que actuando sobre los espacios enteros es T de tipo P, entonces sobre todo par D, D_1 de dominios finitos, es T de tipo-Q, cualquiera sea Q de la semirrecta $P P'$.

Además de los tipos (p, s) = tipo (L^p, L^s) consideraremos también los tipos (C, L^s), tipos (L^p, C), tipos (C, C) etc....

Por ejemplo, <u>T es de tipo $(L^p(D), C(D_1))$</u> si se hace corresponder a toda f de $L^p(D)$ una Tf de $C(D_1)$ con $\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_p$. Cuando no hay lugar a confusión diremos tipo (L^p, C) en vez de $(L^p(E^n), C(E^m))$, o en vez de $(L^p(D), C(D_1))$. Si T es de tipo (p, ∞) entonces $\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_p$, pero esto todavía no da derecho a decir que T es de tipo (L^p, C) pues falta todavía saber que para toda f de L^p es Tf continua, además de acotada; para que T sea de tipo $(L^p, C(E^m))$ hace falta que T sea de tipo (p, ∞) y que Tf sea continua y además nula en el infinito.

B) Si Tf es un operador que transforma elementos f de un espacio M en elementos Tf de un espacio M_1, se dice que T es <u>compacto</u> si dada una sucesión $\{f_n\} \subset M$ tal que $\|f_n\| \leq 1$ para todo n, se puede extraer una subsucesión f'_i tal que Tf'_i (no confundir con f'_i) es convergente en M_1.

Es decir un operador T es compacto si transforma la esfera unitaria $\|f\| \leq 1$ de M en un conjunto r. compacto de M_1.

Por ejemplo, un operador T de L^p en L^s es compacto si transforma todas las f con $\|f\|_p \leq 1$ en un conjunto $\{Tf\}$ r. compacto en L^s; o también si dadauna sucesión f_n de L^p con $\|f_n\|_p \leq 1$, existe una subsucesión f'_i tal que Tf'_i es convergente en media-s. Análogamente T es compacto de L^p en C si dada una sucesión $\{f_n\} \subset L^p$, $\|f_n\|_p \leq 1$ se tiene que $\{Tf_n\} \subset C$ y se puede extraer una subsucesión Tf'_i convergente en medi-∞ (es decir, convergente uniformemente).

El sentido de esta definición es el siguiente: En general el conjunto de todas las f tales que $\|f\| \leq 1$ no es nunca compacto (salvo el caso finito - dimensional); pero si T es compacto, él transforma este conjunto no compacto en un conjunto $\{Tf\}$ r. compacto; o sea, por decir así, T mejora la estructura topológica del conjunto $\|f\| \leq 1$.

Como todo conjunto r. compacto es acotado (ver nota al final del lema 4), si T es compacto entonces las $\|f\| \leq 1$ se transforman en Tf que verifican $\|Tf\| \leq a$.

Es decir <u>todo T compacto es acotado</u> (luego continuo, si T es lineal). La recíproca no es cierta, luego compacto es algo mucho mas que acotado.

Diremos que T es de <u>tipo compacto (p , s)</u> si hace corresponder a toda f de L^p una Tf de L^s, y si es compacto. Luego T es de tipo compacto (p , s) si T es de tipo (p , s) + compacto. Análogamente T es de <u>tipo compacto (L^p , C)</u> si T es de tipo (L^p , C) y si T es compacto.

(La importancia de los operadores compactos se debe a que para ellos valen los teoremas de Fredholm que generaliza los de Cramer y Rochet - Frobenius del Álgebra elemental sobre ecuaciones lineales; por ejemplo la ecuación $Tf = af$ tiene un número finito de soluciones linealmente independientes, etc. Ver por ejemplo el libro de Kolmogoroff y Fomin sobre Análisis Funcional).

En lo que sigue usaremos la siguiente proposición general:

<u>Si T_1, T_2 ... son operadores compactos (de M en M_1) y si $\|T - T_n\| \to 0$ entonces T es también compacto</u> (no confundir la norma del operador $\|T - T_n\|$ con la norma $\|(T - T_n) f\|$). En efecto, por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ se verifica desde un n.

$$\|T - T_n\| < \varepsilon \quad \text{o sea} \quad \|Tf - T_n f\| < \varepsilon \|f\|$$

cualquiera sea f. Sea $\{f_i\}$ una sucesión con $\|f_i\| \leq 1$ y probaremos que existe una subsucesión $\{g_m\} \subset \{f_i\}$ tal que Tg_m es convergente.

Podemos extraer de T_n una subsucesión T'_n tal que se verifique que

$\| T - T'_n \| < 1/n$. Como T'_1 es compacto, podemos extraer de la sucesión $F = \{f_i\}$ una subsucesión F_1 tal que para todo f_i , f_j de F_1 sea

$$\| T'_1 f_i - T'_1 f_j \| < 1$$

luego como $\| Tf - T'_1 f \| \leq 1 \|f\| \leq 1$, para toda f de F , tendremos que

$$\|Tf_i - Tf_j\| < 3$$

De F_1 extraemos una F_2 tal que para f_i , f_j de F_2 sea

$$\| T'_2 f_i - T'_2 f_j \| \leq 1/2$$

luego

$$\|Tf_i - Tf_j\| \leq 3/2$$

Siguiendo así obtendremos $F \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \quad F_m \supset \ldots$ tales que si f_i , f_j son de F_m entonces $\|Tf_i - Tf_j\| \leq 3/m$. Tomando una g_m en cada F_m obtendremos una sucesión $\{g_m\}$, extraída de F , tal que Tg_m es convergente, pues para todo $n > m$ es $g_n \in F_n \subset F_m$, luego $\|Tg_m - Tg_n\| < 3/m \to 0$

l,q,q,d.

Pasaremos ahora a ver algunas propiedades fundamentales de los operadores integrales.

C) En el teorema de Young el operador T (ver fórmula (2)) es un operador integral cuyo núcleo $K(x , y) = k(x-y)$ depende solo de $x - y$. Este puede extenderse (según Weil, Dunford, Kantorovich) a núcleos generales como sigue:

<u>TEOREMA DE YOUNG GENERALIZADO</u> . <u>Sea $K(x , y)$ definido en $E \times E_1 = \{(x , y)\}$</u>.

a) <u>Si para todo y de E_1 , $K(x , y)$ como función de x pertenece a L^r con norma</u> (el punto indica la variable respecto de la cual se toma la norma).

$$\| K(\cdot , y) \|_r \leq M_1 \qquad \underline{\text{para todo } y} \; ; \tag{14}$$

<u>si para todo x , $K(x , y)$ como función de y tiene norma</u>

$$\|K(x , \cdot)\|_t \leq M_2 \qquad \underline{\text{para todo } x} \; ; \tag{14a}$$

<u>y si</u> $r > 0 \; , \; t > 0$ (14b)

<u>entonces el operador (10) con núcleo K es de tipo $(L^p(E) , L^s(E_1))$, para todo p , s tales que</u>

$$1/p - (t/r)1/s = 1 - 1/r \quad , \quad 1 \leq p \leq s \tag{15}$$

es decir T es de tipo en todo punto del triángulo inferior situado sobre el segmento que se obtiene trasladando la diagonal en $1 - 1/r$ y girándola con pendiente t/r.

Mas aún, la norma correspondiente del operador verifica

$$\|T\| \leq M_1^{1-t/s} M_2^{t/s} \qquad (16)$$

b) Si $r \geq 1$ y K verifica la sola condición (14), entonces T es de tipo $(L^{r^*}(E), L^{\infty}(E_1))$, con $\|T\| \leq M_1$, es decir, de tipo $P' = (1-1/r, 0)$.

c) Si $t \geq 1$ y K verifica la sola condición (14a), entonces T es de tipo $(L^1(E), L^t(E_1))$, con $\|T\| \leq M_2$, es decir, de tipo $P'' = (1, 1/t)$.

a') Si el operador T se considera sobre dominios finitos, entonces las hipótesis (14), (14a), (14b), implican que T es de tipo $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo p, s tales que existe un $s' \geq s$ que verifica

$$1/p - (t/r)\, 1/s' \leq 1 - 1/r \quad , \quad 1 \leq p \leq s' \quad , \quad s' \geq t \qquad (15a)$$

y la norma correspondiente verifica (16).

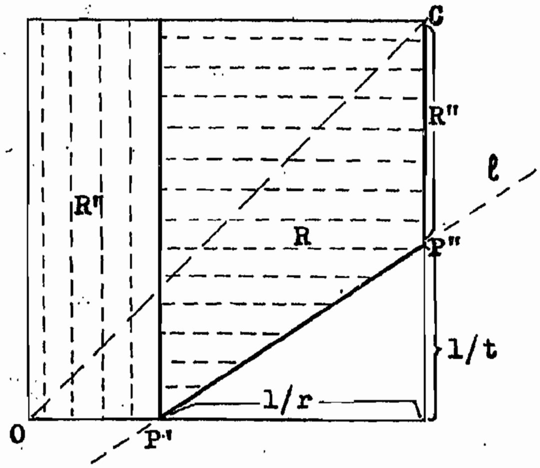
b') Si $r \geq 1$ y K verifica la sola condición (14) entonces T es de tipo $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo p, s tales que

$$1/p \leq 1 - 1/r \quad , \quad 1 \leq s \leq \infty \quad , \quad \text{y} \quad \|T\| \leq M_1 .$$

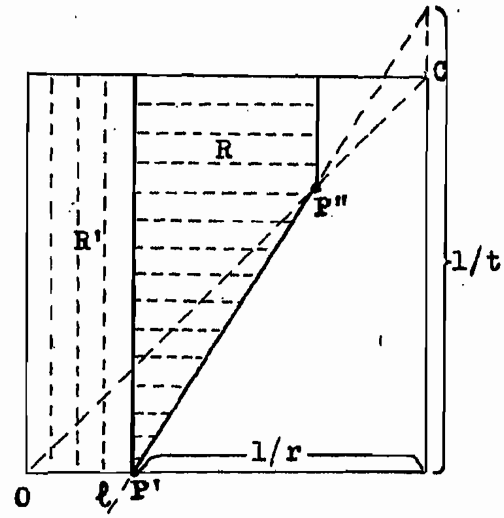
c') Si $t \geq 1$ y K verifica la sola condición (14a) entonces T es de tipo $(L^1(D), L^s(D_1))$ para todo s tal que

$$1/s \geq 1/t \quad , \quad \text{siendo} \quad \|T\| \leq M_2 .$$

Observación 1. Sea ℓ la recta cuya ecuación es $1/p - (t/r)\, 1/s = 1 - 1/r$. Sea $P'P''$ la parte de ℓ comprendida en el triángulo inferior del cuadrado, sea R la región del cuadrado que queda encima de $P'P''$; si P' está sobre el lado del cuadrado, sea R' la parte del cuadrado encima de OP' (si P' no está sobre el



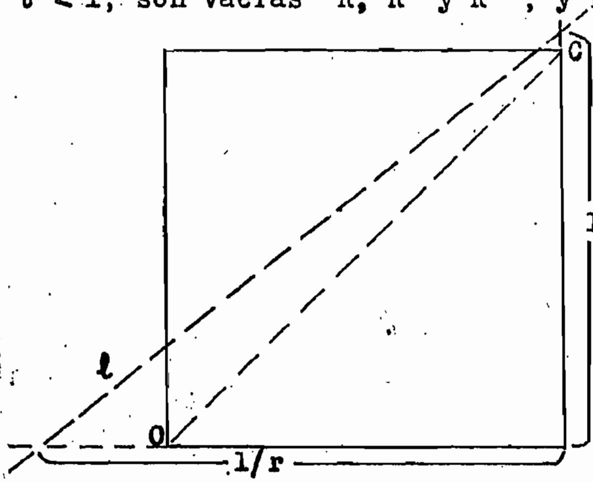
1) $\begin{cases} r > 1 \\ t > 1 \end{cases}$



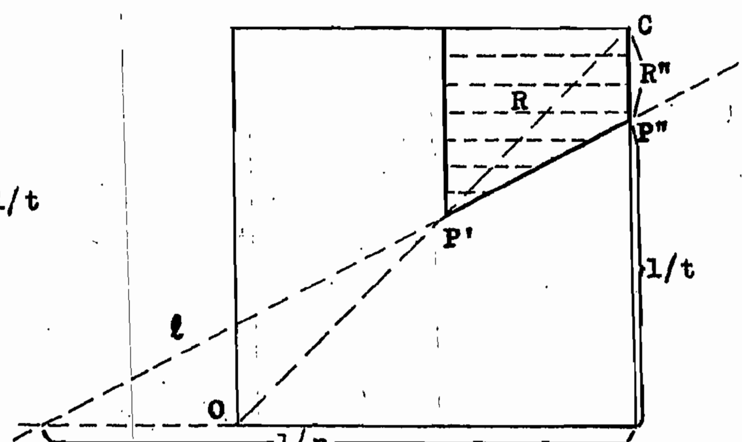
2) $\begin{cases} r > 1 \\ t < 1 \end{cases}$, $R'' = 0$

lado entonces R' es vacía) , y si P'' está sobre el lado sea R'' el segmento $P''C$; sino vacío.

El teorema dice que si se verifica (14) y (14a) entonces T es sobre los espacios infinitos de tipo en todo punto de $P'P''$, y sobre los dominios finitos es de tipo en todo punto, de $R + R'$. Si P' está sobre el lado y se verifica solo (14), T es de tipo P', y sobre dominios finitos es de tipo en todo punto de R'. Si P'' está sobre el lado y se verifica solo (14a), T es de tipo P'', y sobre dominios finitos es de tipo en R''. Si $r \geq 1$ entonces P' está sobre el lado y R' no es vacía; si $t \geq 1$, P'' está sobre el lado y R'' no es vacío. Si $r < 1$, $t < 1$, son vacías R, R' y R'' , y no hay puntos de tipo de T.



3) $\begin{cases} r < 1 \\ t < 1 \\ R' = R = R'' = 0 \end{cases}$



4) $\begin{cases} t > 1 \\ r < 1 \end{cases}$, $R' = 0$

Demostración . a) la desigualdad de Hölder dice que si $1/a + 1/b = 1$ y si $a \geq 0$, $b \geq 0$, entonces la integral de $|f(x) \cdot g(x)|$ es $\leq \|f\|_a \|g\|_b$. Por iteración se deduce, mas generalmente que si $1/a + 1/b + \dots + 1/m = 1$, $a \geq 0$, ... $m \geq 0$, entonces la integral $|f(x)\, g(x) \dots h(x)|$ es $\leq$ que $\|f\|_a \|g\|_b \dots \|h_m\|$. Si ponemos $1/a = 1/s$, $1/b = 1/r - t/(rs)$, $1/c = 1/p - 1/s$, entonces la hipótesis (15) da que $1/a + 1/b + 1/c =$ $= 1/p - t/rs + 1/r' = (1 - 1/r) + 1/r = 1$, y que $a \geq 0$, $c \geq 0$, $b \geq 0$ (porque $1/b = 1/r - t/(rs) = 1 - 1/p \geq 0$ pues $p \geq 1$). Por tanto podemos aplicar la desigualdad generalizada de Hölder con estos valores de a , b , c .

Tenemos que

$$|Tf(y)| \leq \int_E \left[|K(x, y)|^{t/s} |f(x)|^{p/s}\right]\left[K(x, y)\right]^{r(1/r - t/rs)} \left[f(x)\right]^{p(1/p - 1/s)} dx \tag{16}$$

Bajo la integral tenemos tres factores correspondientes a los tres corchetes; luego esta integral es $\leq [\ ]_a \ [\ ]_b \ [\ ]_c$, es decir

$$|Tf(y)| \leq \left[\int_E |K(x, y)|^t |f(x)|^p dx\right]^{1/s} \left[\int_E |K(x, y)|^r dx\right]^{1/b} \left[\int_E |f(x)|^p dx\right]^{1/c} \leq$$

$$\leq \left[\int_E |K(x, y)|^t |f(x)|^p dx\right]^{1/s} M_1^{r/b} (\|f\|_p)^{p/c}$$

luego, elevando a la potencia s e integrando en y , tendremos

$$\int_{E_1} |Tf(y)|^s ds \leq M_1^{rs/b} (\|f\|_p)^{ps/c} \int_{E_1} dy \int_E |K(x, y)|^t |f(x)|^p dx =$$

$$= M_1^{rs/b} (\|f\|_p)^{ps/c} \int_E |f(x)|^p dx \int_{E_1} |K(x, y)|^t dy \leq$$

$$\leq M_1^{rs/b} (\|f\|_p)^{ps/c} \int_E |f(x)|^p dx \cdot M_2^t = M_1^{rs/b} M_2^t (\|f\|_p)^{ps/c + p}$$

Como $r/b = 1 - t/s$, $ps/c + p = s - p + p = s$, de la última desigualdad resulta:

$$\|Tf\|_s \leq M_2^{t/s} \; M_1^{1-t/s} \; \|f\|_p$$

lo que se quería probar.

b) Si $r \geq 1$ y K verifica (14), podemos aplicar la desigualdad de Hölder (con $r \geq 1$ y $r^* \geq 1$) de la manera siguiente:

$$|Tf(y)| \leq \int_E |K(x , y)| \; |f(x)| \; dx \leq$$

$$\leq \|f\|_{r^*} \left[\int_E |K(x , y)|^r \; dx \right]^{1/r} \leq M_1 \; \|f\|_{r^*}$$

cualquiera sea y . Luego $\|Tf\|_\infty \leq M_1 \|f\|_r$

C) Si $t \geq 1$ y K verifica (14a), entonces por el lema 1 de la página 16 tenemos:

$$\|Tf\|_t = (Tf , g) \qquad \text{donde } \|g\|_{t^*} = 1 ,$$

es decir

$$\|Tf\|_t = \int_{E_1} Tf(y) \; g(y) \; dy =$$

$$= \int_{E_1} \left[\int_E K(x , y) \; f(x) \; dx \right] g(y) \; dy =$$

$$= \int_E f(x) \; dx \int_{E_1} K(x , y) \; g(y) \; dy \leq$$

$$\leq \int_E |f(x)| \; dx \; \|g\|_{t^*} \left[\int_{E_1} |K(x , y)|^t \; dy \right]^{1/t}$$

$$\leq M_2 \; \|g\|_{t^*} \int_E |f(x)| \; dx = M_2 \; \|f\|_1$$

luego $\|Tf\|_t \leq M_2 \; \|f\|_1$, como se quería probar.

a_1) Sobre dominios finitos, si T es de tipo (p , s') lo es también de tipo (p , s) para todo $s \leq s'$, luego basta ver que T es de tipo (p , s') si p , s' verifican (15a). Sea pues p , s' un par fijo que verifica (15a), de modo que podemos escribir

$$1/p - (t/r)\, 1/s' = 1 - 1/r - d \qquad \text{donde } d \geq 0$$

Sea s'' definido por

$$1/p - (t/r)\, 1/s'' = 1 - 1/r$$

Consideremos dos casos. Sea antes $1/p \geq 1 - 1/r$, entonces será $1/s'' \geq 0$ y $s' \leq s''$. Por la parte a) ya probada sabemos que T es de tipo (p , s'') (pues p , s'' verifican la primera condición de (15) y $1 \leq p \leq s' \leq s''$) , luego tratándose de dominios finitos T será con mas razón de tipo (p , s').
Si en cambio es $1/p < 1 - 1/r$ entonces estamos en el caso de la parte b_1) que pasamos a probar.

b_1) Sea $r \geq 1$, $1/p \leq 1 - 1/r$ y supongamos que K verifica (14). Por lo probado en b), Tf es de tipo (r^*, ∞) es decir $\| Tf \|_\infty \leq M \|f\|_{r^*}$
Pero como $1/p \leq 1 - 1/r = 1/r^*$ equivale a $r^* \leq p$, y tratándose de dominios de medida finita, tendremos

$$\| Tf \|_s \leq c \, \|Tf\|_\infty \leq c\, M \, \|f\|_{r^*} \leq c\, M\cdot c' \, \|f\|_p = M' \, \|f\|_p$$

para todo $s \leq \infty$, lo que queríamos probar.

c_1) Si $t \geq 1$ y K verifica (14a) entonces por c) tenemos que Tf es de tipo $(1 , t)$. Luego si $1/s \geq 1/t$, es decir si $s \leq T$ tendremos también que Tf es de tipo $(1 , s)$ lo que prueba la tesis.

D) Veamos ahora cuándo el operador integral (10) es compacto, es decir, bajo qué hipótesis sobre el núcleo y para qué valores de (p , s) es T de tipo compacto (p , s).

Lema 5 . Sea Tf dado por (10a), sobre dominios acotados y cerrados . Si el núcleo $K(x , y)$ es continuo entonces T es de tipo compacto (C , C) (mas precisamente de tipo compacto $(C(D) , C(D_1))$), así como de tipo compacto (L^p , C), (C , L^s) y (L^p , L^s) , para tdo $p \geq 1$, $s > 0$ (sobre los dominios acotados se entiende).

__Demostración__ . Probaremos antes que T es de tipo compacto $(L^1(D), C(D_1))$ o sea probaremos que si $A = \{Tf\}$, $\|f\|_1 \leq 1$, es el conjunto de todas las funciones $F(y)$ de la forma $F = Tf$, donde $\|f\|_1 \leq 1$, entonces A es un conjunto r. compacto de $C(D_1)$. Por lo visto en el párrafo anterior, para ello es suficiente probar que las funciones $F(y)$ de A son igualmente continuas y que $|F(y)| \leq M$ para toda F de A y todo y de D_1. Siendo K continuo sobre un dominio compacto, tenemos que K es uniformemente continuo y acotado, es decir $|K(x, y)| \leq M$ y $|K(x, y+h) - K(x, y)| < \varepsilon$ si $|h|$ es suficientemente pequeño, cualquiera sean x, y. Por lo tanto tenemos

$$|F(y+h) - F(y)| = \left| \int_D \left[K(x, y+h) - K(x, y)\right] f(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_D |f(x)|\, dx = \varepsilon \|f\|_1 \leq \varepsilon$$

lo que prueba que las $F(y)$ son igualmente continuas. Además

$$|F(y)| \leq \int_D |K(x, y)| |f(x)|\, dx \leq M \int_D |f(x)|\, dx = M \|f\|_1 \leq M$$

lo que prueba que las F son uniformemente acotadas en C.

b) Probaremos ahora que Tf es de tipo compacto $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo $p \geq 1$, $s > 0$. Sea pues $f_n(x)$ una sucesión tal que $\|f_n\|_p \leq 1$ y probaremos que de la sucesión Tf_n se puede extraer una subsucesión convergente en $L^s(D_1)$. Como $p \geq 1$, y estamos en dominios finitos, la condición $\|f_n\|_p \leq 1$ implica $\|f_n\|_1 \leq c\|f_n\|_p \leq c$, donde c es una constante fija. Por lo probado en a) el operador T es de tipo compacto (L^1, C), luego siendo $\|f_n\|_1 \leq 1$ podemos extraer de la sucesión Tf_n una subsucesión convergente en $C(D_1)$ (es decir convergente uniformemente). Pero sobre dominios acotados la convergencia en C implica la convergencia en L^s, para todo $s > 0$, luego la subsucesión extraída converge en L^s, como deseábamos probar.

Análogamente se prueba que T es de tipo compacto (L^p, C) y (C, L^s)

l,q,q,d.

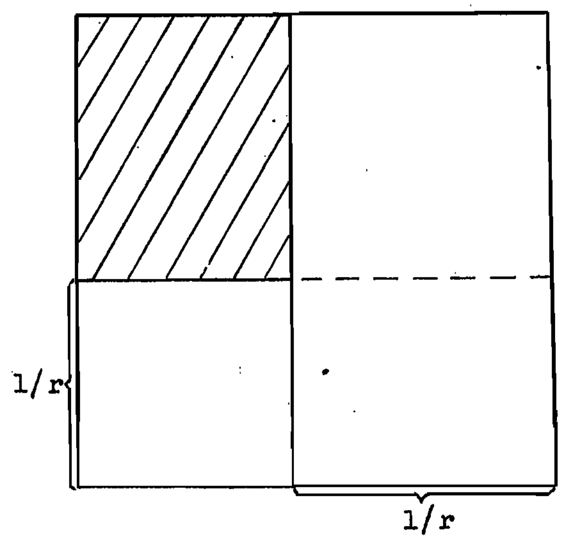
LEMA 6 . (de Banach) Sea Tf dado por (10a) sobre dominios acotados y cerrados. Si

$$\|K(\cdot,\cdot)\|_r = \left\{ \int_D \int_{D_1} |K(x,y)|^r \, dx\, dy \right\}^{1/r} = c < \infty \ , \quad r \geqslant 1 \tag{17}$$

entonces T es de tipo compacto $(L^p(D) \ , \ L^s(D_1))$ para todo p , s tales que

$$p \geqslant r^* \ , \quad s \leqslant r \tag{17a}$$

es decir, para todo punto del rectángulo rayado en el dibujo adjunto.



Demostración. Vamos a probar antes que (17) y (17a) implican que

$$\| Tf \|_s \leqslant M\, c \, \|f\|_p \tag{17b}$$

donde M es una constante fija, independiente de T y f . En efecto, como $p \geqslant r^*$ equivale a $p^* \leqslant r$ y tratándose de dominio acotado, tenemos que

$$|Tf(y)| \leqslant \int_D |K(x,y)|\,|f(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_p \left\{ \int_D |K(x,y)|^{p^*} dx \right\}^{1/p^*} = \|f\|_p \ \|K(\cdot,y)\|_{p^*} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_p \ M_1 \ \|K(\cdot,y)\|_r = M_1 \ \|f\|_p \left\{ \int_D |K(x,y)|^r dx \right\}^{1/r}$$

luego, como $s \leqslant r$ y tratándose de dominios finitos ,

$$\|Tf\|_s \leqslant M_2 \|Tf\|_r = M_2 \left\{ \int_{D_1} |Tf(y)|^r dy \right\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant M_2 M_1 \ \|f\|_p \left\{ \int_{D_1} \left(\int_D |K(x,y)|^r dx \right) dy \right\}^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant M_2 M_1 \|f\|_p \cdot c = M\, c\, \|f\|_p$$

Así pues (17b) es cierto para todo núcleo que verifica (17). Como K pertenece a L^r y las funciones continuas son densas en L^r, podemos elegir una sucesión de núcleos K_i tales que cada K_i es continuo y

$$\| K - K_i \|_r = \varepsilon_i \to 0 \qquad \text{para } i \to \infty \tag{18}$$

Sea para cada i

$$T_i f(y) = \int_D K_i(x, y)\, f(x)\, dx \tag{19}$$

Como cada K_i es continuo, por el lema precedente todos los $T_i f$ son compactos (p, s). Luego para probar que Tf es de tipo compacto (p, s) basta mostrar que $\| T - T_i \| \to 0$ (ver B). Pero aplicando (17b) al operador $T - T_i$ tendremos en virtud de (18), que

$$\| (T - T_i) f \|_s \leqslant M\, \varepsilon_i\, \| f \|_p$$

es decir

$$\| T - T_i \| \leqslant M\, \varepsilon_i$$

donde M es fija y ε_i tiende a cero. l.q.q.d.

<u>Observación 2</u>. Los lemas que preceden pueden extenderse a dominios no acotados del modo siguiente:

<u>LEMA 6a</u> . a) <u>Sea Tf dado por (10), sobre el espacio entero. Si $K(x, y)$ es continuo y nulo fuera de un intervalo compacto, entonces T es de tipo compacto (C, C), (L^p, C), (C, L^s) y (L^p, L^s), para todo $p \geqslant 1$, $s > 0$, sobre los espacios infinitos.</u>

b) <u>Si $K(x, y)$ pertenece a $L^r(E^n \times E^m)$, $r \geqslant 1$, y se anula fuera de un compacto, entonces T (definido por (10)) es de tipo compacto $(L^p(E^n), L^s(E^m))$ para los p, s que verifican (17a).</u>

En efecto, como $K(x, y)$ es nulo para todos los x fuera de un compacto D la integral (10) se reduce a una de la forma (10a), y como $K(x, y)$ es también nulo para los y fuera de otro compacto $D_1 \subset E^m$, resulta que la situación es la misma que en el caso, ya tratado, de dominios acotados.

Observación 3. Como una función acotada pertenece a todas las clases L^r, sobre dominios finitos, resulta del lema anterior que: Si Tf es dado por (10a), sobre dominios acotados y cerrados, y si el núcleo $K(x, y)$ es acotado, entonces T es de tipo compacto $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo (p, s) del cuadrado de los tipos.

En efecto, en este caso $1/r = 0$, y el rectángulo definido por (17a) se convierte en todo el cuadrado de los tipos.

TEOREMA A. a) Sea Tf dado por (10a), sobre dominios compactos $D \subset E^n$, $D_1 \subset E^m$. Si $K(x, y)$ verifica (14), (14a) y (14b), entonces T es de tipo compacto $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo p, s tales que existe un $s' \geq s$ que verifica

$$1/p - (t/r)1/s' < 1 - 1/r \quad , \quad 1 < p \leq s' \quad , \quad s' \geq t \tag{20}$$

es decir para todos los puntos $(1/p, 1/s)$ estrictamente interiores a la región $R + R'$ (ver observación 1) (se excluyen pues los puntos del segmento $P' P''$ dado por (15)).

b) Si $r > 1$ y K verifica (14), entonces T es de tipo compacto $(L^p(D), L^s(D_1))$ para todo p, s tales que $1/p < 1 - 1/r$, $1 \leq s \leq \infty$, es decir en los puntos estrictamente interiores a R'.

Demostración. a) Como en la demostración del teorema de Young generalizado, se verá que, por tratarse de dominios acotados, es suficiente probar que T es de tipo compacto (p, s') para los p, s que verifican la condición (20).

Sea pues (p, s') un par que verifica (20), y sea r' definido por la relación

$$1/p - (t/r')\, 1/s' = 1 - 1/r' \tag{20a}$$

De (20a) obtenemos que $r' = (s' - t)\, p / (s'(p-1))$. En cambio como (20) puede escribirse $1/p - (t/r)\, 1/s' = 1 - 1/r - d$, donde $d > 0$, se tiene que $r = (s' - t)\, p/(s'(p - 1 - dp)$.

Luego, como por hipótesis es $s' - t > 0$, obtenemos

$$r' < r \tag{20b}$$

Sea ahora $K_N(x , y)$ el núcleo igual a $K(x , y)$ en los puntos en que $|K(x , y)| \leq N$, y cero en los demás puntos, de modo que

$$|K_N(x , y)| \leq N \quad ; \quad |K(x , y) - K_N(x , y)| > N \text{ en los puntos en que no es nulo.} \tag{20c}$$

El operador

$$T_N f(y) = \int_D K_N(x , y)\, f(x)\, dx$$

es de tipo compacto (p , s') pues K_N es acotado (ver observación 3). Luego la tesis quedará probada si mostramos que $\| T - T_N \| \to 0$ para $N \to \infty$ (ver B) , es decir, si mostramos que

$$\| Tf - T_N f \|_{s'} \leq M_N \| f \|_p \quad , \quad \text{con } M_N \to 0 \tag{21}$$

Ahora, como $T - T_N$ es el operador dado por el núcleo $K - K_N$, y como p , s' , t , r' verifican (20a), resulta del teorema de Young generalizado, que si ponemos

$$\| (K - K_N)(\cdot , y) \|_{r'} = M_N^1 \quad , \quad \| (K - K_N)(x , \cdot) \|_t = M_N^2 \tag{22}$$

se tiene que

$$\| Tf - T_N f \|_{s'} \leq (M_N^1)^{1 - t/s'} (M_N^2)^{t/s'} \| f \|_p \tag{23}$$

Luego el teorema quedará probado si mostramos que $(M_N^1)^{1 - t/s'} (M_N^2)^{t/s'}$ tiende a cero. Como $|K - K_N| \leq |K|$, tenemos que

$$M_N^2 \leq \| K(x , \cdot) \|_t = M^2 \tag{24}$$

Por otra parte, como $r' < r$ (ver (20b)) , poniendo $r - r' = a > 0$, y como ó $|K - K_N| > N$ ó es nulo, tendremos

$$|K - K_N|^{r'} \leqslant |K - K_N|^r / |K - K_N|^a \leqslant |K - K_N|^r / N^a \leqslant |K|^r / N^a$$

por tanto

$$M_N^{\ 1} = \left\{ \int |K - K_N|^{r'} \, dx \right\}^{1/r'} \leqslant (1/N^a) \left\{ \left[\int |K|^r \, dx \right]^{1/r} \right\}^{r/r'} \leqslant (M^1/N^a)^{r/r'} \to 0$$

Obtenemos así que

$$(M_N^{\ 1})^{1-t/s'} (M_N^{\ 2})^{t/s'} \leqslant (M_N^{\ 1})^{1-t/s'} (M^2)^{t/s'} \to 0$$

como queríamos ver.

Análogamente se prueba la parte b) del teorema, l,q,q,d.

Si Tf es de tipo compacto (p , s) , sobre dominios acotados, entonces la esfera unitaria $\|f\|_p \leqslant 1$ es transformada en un conjunto $\{Tf\}$ r.compacto en L^s. Del teorema de Riesz-Arzelá resulta entonces que si $s < \infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|h| < \delta$ implica $\|Tf(x+h) - Tf(x)\|_s < \varepsilon$ cualquiera sea la función f , $\|f\|_p \leqslant 1$. Por lo tanto, èsto se verifica, en particular, si T verifica las hipótesis del teorema **A** , y $s < \infty$.

Pero esto no vale si $s = \infty$ (pues el teorema de Riesz exige $s < \infty$). Para que esto valga para $s = \infty$ es necesario que las funciones Tf pertenezcan a $C(D_1)$ (y no solo a $L^\infty(D_1)$) , pues entonces será aplicable el teorema de Arzelá. La parte b) del teorema A dice que si $1/p < 1 - 1/r$ entonces T transforma funciones f de $L^p(D)$ en funciones Tf de $L^\infty(D_1)$; es decir, las funciones Tf son acotadas, pero no sabemos si son continuas. Veamos ahora un caso en que se puede afirmar que Tf son continuas, y por lo tanto vale

$$\|Tf(x + h) - Tf(x)\|_\infty < \varepsilon \quad \text{si } |h| < \delta \text{ y } \|f\| \leqslant 1$$

Diremos que el núcleo $K(x , y)$ es casi equicontinuo en y, si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, y para cada punto y un conjunto $e(y)$ de puntos $x \in D$ de medida $|e(y)| < \varepsilon$, tales que la desigualdad $|K(x,y + h) - K(x , y)| < \varepsilon$ se verifica para todo $|h| < \delta$, para todo $y \in D_1$, y para todo $x \in D - e(y)$.

Teorema B . (Kantorovich) . Si $r > 1$, si K verifica (14) y si K es casi equicontinuo en y, entonces el operador Tf dado por (10a) es de tipo compacto $(L^p(D)\ ,\ C(D_1))$ para todo $1/p < 1 - 1/r$; es decir, si $1/p < 1 - 1/r$ y si $f \in L^p$ entonces Tf es una función continua.

Demostración. Basta probar que Tf es una función continua, pues de b) del teorema A y de $C(D_1) \subset L^\infty(D_1)$ va a resultar entonces que el operador es de tipo compacto. Sea $q < r$ tal que $1/p < 1 - 1/q < 1 - 1/r$, sea $K_h(x\ ,\ y) = K(x\ ,\ y + h) - K(x\ ,\ y)$, y sea $\| K_h(\cdot\ ,\ y) \|_q \leq M_h$.

Podemos escribir

$$Tf(x\ ,\ y + h) - Tf(x\ ,\ y) = \int_D K_h(x\ ,\ y)\, f(x)\, dx\ ,$$

luego por b') del teorema de Young generalizado tendremos

$$\| Tf(x\ ,\ y + h) - Tf(x\ ,\ y) \|_\infty \leq M_h \| f \|_p$$

Luego tan solo nos falta probar que si $|h|$ es muy pequeño entonces $M_h < \varepsilon$. Tenemos, usando la definición de casi equicontinuidad,

$$\| K_h(\cdot\ ,\ y) \|_q = \left[\int_D |K(x\ ,\ y + h) - K(x\ ,\ y)|^q\, dx \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \left[\int_{D - e(y)} \right]^{1/q} + \left[\int_{e(y)} \right]^{1/q} \leq$$

$$\leq \varepsilon\, (|D|)^{1/q} + \left[\int_{e(y)} |K(x\ ,\ y + h) - K(x\ ,\ y)|^{q \cdot r/q} dx \right]^{1/r} \left[\int_{e(y)} dx \right]^{(1 - q/r)/q} \leq$$

$$\leq \varepsilon (|D|)^{1/q} + 2 \| K(\cdot\ ,\ y) \|_r\ |e(y)|^{1/q - 1/r}$$

En virtud de (14) y puesto que $|e(y)| < \varepsilon$, $1/q - 1/r > 0$, la última expresión tiende a cero con ε , l.q.q.d.

E) Vamos ahora a aplicar los resultados anteriores a los operadores potenciales H_d , y mas generalmente a los <u>operadores de tipo potencial</u> , de la forma:

$$H_d\, f(y) \;=\; \int_D \frac{B(x,y)}{|x-y|^{\,n-d}}\, f(x)\, dx \quad , \qquad (25)$$

donde D es un dominio de E^n, $0 < d \leq n$, y $B(x,y)$ es una función acotada, continua para $x \neq y$.

Sea $E^m \subseteq E^n$, $m \leq n$, $D_1 \subset E^m$, y sea ℓ la recta de los puntos $(1/p, 1/s)$ (en el cuadrado de los tipos) dada por la ecuación $1/p - (m/n)1/s = d/n$.

Sea $P' = (d/n , 0)$ la intersección de ℓ con el eje de abcisas , $P'' = (d/(n-m) , d/(n-m))$ la intersección de ℓ con la diagonal , y R , R' las regiones indicadas en el dibujo 2) de la página 242.

Tendremos entonces el siguiente teorema, debido a Sobolieff y Kondrachieff.

<u>TEOREMA 1</u> . <u>Sea H_d el operador dado por (25), $E^m \subseteq E^n$, $0 < d \leq n$</u> .

a) <u>Si $D = E^n$, entonces H_d es de tipo $(L^p(E^n) , L^s(E^m))$ sobre el segmento $P'P''$ de los tipos, es decir si</u>

$$1/p - (m/n)1/s = d/n \quad , \quad d/n < 1/p < d/(n-m), \quad 1/p < 1 \qquad (26)$$

b) <u>Si $D \subset E^n$, $D_1 \subset E^m$, son dominios acotados, entonces H_d es de tipo $(L^p(D) , L^s(D_1))$ en la región $R + R'$, es decir si</u>

$$1/p - (m/n)1/s \leq d/n \quad , \quad 0 < 1/p < d/(n-m) \quad , \quad 1/p \neq d/n \qquad (26a)$$

<u>o si</u>

$$1/p = d/n \quad , \quad s < \infty \qquad (\underline{\text{o si}} \quad 1/p = d/(n-m) \quad , \quad 1/s < d/(n-m)) \qquad (26b)$$

c) Si D, D_1 son acotadas y si en (26a) tiene lugar el signo $<$ (es decir $1/p - (m/n)/s < d/n$), entonces H_d es de tipo compacto $(L^p(D), L^s(D_1))$ en $R + R' - P'P''$.

d) Si D, D_1 son acotados y $1/p < d/n$, entonces H_d es de tipo compacto $(L^p(D), C(D_1))$, y en particular para toda $f \in L^p(D)$ es $H_d f$ una función continua; (para $\| f \| \leq 1$ las $H_d f$ son equicontinuas).

Demostración. a) Como $B(x,y)$ es una función acotada, $|B(x,y)| \leq M$, la función (25) es mayorada por el potencial ordinario $\int |f(x)| |x-y|^{d-n} dx$. Luego de la parte c) del teorema 16 de la página 181 resulta la parte a) del teorema que estamos demostrando. (En el teorema 16 hemos supuesto $n < m + d$, pero la demostración de Ilin (ver observación 10, pág. 184) se aplica también si $n < m + dp$).

b) Sea $|x-y|^{d-n} = K(x,y)$ y D, D_1 acotados. Siendo D acotado es $|K(x,y)|^n$ integrable en x para todo r tal que $(n-d)r < n$; análogamente $|K(x,y)|^t$ es integrable en y sobre $D_1 \subset E^m$ si $(n-d)t < n$, y podemos tomar r,t tan próximos como se quiera a $n/n-d$, $m/(n-d)$, respectivamente. Luego t/r se puede tomar tan próximo como se quiera a m/n, y la condición $1/p - (m/n)1/s < d/n$ equivale a $1/p - (t/r)1/s < 1 - 1/r$. Luego la parte b) resulta de a') del teorema de Young, pág. 241.

Análogamente c) resulta del teorema A, y d) del teorema B, que preceden, teniendo en cuenta que por ser $B(x,y)$ continua para $x \neq y$, el núcleo $B(x,y)|x-y|^{d-n}$ es casi equicontinuo en y,

l,q,q,d.

4 . LOS ESPACIOS DE SOBOLIEFF Y BEPPO LEVI .

A) Como una función se obtiene de su derivada mediante integración, es natural esperar que las normas-s de la función puedan acotarse por las normas-p de su derivada, para ciertos p,s . Ilustraremos este hecho en el siguiente caso sencillo. Sea $J = [a,b]$ un intervalo de la recta y consideremos las funciones continuas $g(x)$ derivables en J, nulas ellas y sus derivadas en los extremos de J : $g(a) = g(b) = g'(a) = g'(b) = 0$. Para una tal $g(x)$ tenemos: $g(x) = \int_a^x g'(t)\,dt$, de donde $|g(x)|^2 \leq |x - a| \left[\int_a^x |g'(t)|^2\,dt \right] \leq$ $\leq |b - a| (\|g'\|_2)^2$. Luego $\|g\|_2 \leq M \|g'\|_2$, donde M es una constante fija, independiente de g. Es decir, el operador T que hace corresponder a g' la función G , es de tipo (2 , 2) sobre el conjunto de las funciones $g'(x)$ indicadas. El mismo razonamiento se aplica a funciones $g(x) = g(x_1 , \dots x_n)$ definidas en un dominio acotado $D \subset E^n$, que tienen derivadas continuas en todo punto de D y que se anulan , junto con sus derivadas, en la frontera de D (si D no es convexo, conviene prolongar $g(x)$ a todo E^n poniendo $g(x) = 0$ fuera de D). Si $\{g_1, \dots, g_n\} =$ grad g , son las n derivadas parciales de g, tendremos pues que $\|g\|_2 \leq M \{\|g_1\|_2 + \dots \|g_n\|_2\}$, donde M es una constante fija, para todas las g del tipo indicado. En particular esto vale para toda $g(x) \in \mathfrak{D}(D)$, es decir, si $g(x)$ es infinitamente derivable y nula fuera de un compacto interior a D (luego nula en un entorno de la frontera de D). Análogamente $\|g\|_s \leq M \|g\|_p$, $1 \leq p,s \leq \infty$, para toda $g \in \mathfrak{D}(D)$, donde M depende del diámetro de D.

El razonamiento que precede no se aplica si $g \in \mathfrak{D}(E^n)$ pues la constante M varía con el soporte de g. Para tratar este último caso, cuando g está definida en E^n, sea $k(x) = |x|^{2-n}$, $f = H_2 g = g * k$. En virtud de (27a) de la página 73, $\mathcal{F}(f) = \hat{f}(u) = \hat{g}(u)\hat{k}(u) = c_n \hat{g}(u) \cdot |u|^{-2} =$ $= c_n \hat{g}(u_1, \dots , u_n)(u_1^2 + \dots + u_n^2)^{-1}$, donde c_n es una constante fija. Como g se anula fuera de un compacto, a la derivación respecto de x_i corresponde, en la transformada de Fourier, multiplicación por u_i , y resulta que

$$\mathfrak{F}\left(\sum_{i=1}^{n} \partial^2 f/\partial x_i^2\right) = \hat{f}(u)(u_1^2 + \ldots + u_n^2) = c_n \hat{g}(u_1,\ldots,u_n) = c_n \mathfrak{F}(g)\,.$$

Obtenemos pues:

$$g = c_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\partial^2/\partial x_i^2) f = c_n^{-1} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f * |x|^{2-n})\right) =$$

$$= c_n^{-1} \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} f\right) * \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |x|^{2-n}\right) = M_n \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} * (x_i\, |x|^{-n}) \,, \quad (27)$$

donde M es una constante fija. Como $\left| x_i |x|^{-n} \right| \leq |x|\,|x|^{-n} = |x|^{-n+1}$

resulta que $|g(x)| \leqslant M_n\left(\sum |f_i|\right) * |x|^{-n+1} = M_n H_1\left(\sum |f_i|\right)$,

donde $f_i = \partial f/\partial x_i$. Luego de la parte a) del teorema 1, obtenemos que

$$\|g\|_s \leq M \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} f \right\|_p \leq M \|\text{grad } f\|_p \quad (27a)$$

para todo p, s tales que $1/p - 1/s = 1/n$, $1/n < 1/p < 1$. (27b)

Mas generalmente $\|g\|_s^{(m)} \leq M \|\text{grad } g\|_p^{(n)}$

si p, s verifican (26), donde la primera norma se toma en E^m, siempre que g sea de $\mathfrak{D}(E^n)$. Veremos mas abajo como estas desigualdades se extienden a funciones g mas generales definidas en un dominio $D \subset E^n$.

B) El método de transformada de Fourier, usado para deducir (27), no se aplica si $g(x)$ es definida y continuamente derivable en un dominio $D \subset E^n$, y en este caso la demostración de (27) debe hacerse por otro método. Más aún, si D es acotado y si $g(x)$ no se anula en la frontera, entonces las fórmulas (27) , (27a) , no pueden valer así como están, pues sumando una constante a $g(x)$ el gradiente no cambia, mientras que $\|g\|_s$ puede hacerse arbitrariamente grande. Es necesario pues agregar en el miembro derecho de (27) un término que refleje el valor de la constante aditiva. Si D es convexo veremos que tal término puede ser el valor medio de g sobre D. Si D no es convexo se toma como tal término a la integral de g sobre D respecto de un peso diferenciable.

Para hacer mas clara la idea, consideremos antes el caso mas simple cuando $n = 1$, y $g(x)$ es una función con derivada continua en todo punto del intervalo $J = [a,b]$, pero no necesariamente nula en los extremos de J. Sea x un punto fijo interior a J, y sea $x < y \leq b$. Tenemos entonces:

$$g(x) = g(y) - \int_x^y g'(t)\,dt \quad ;$$

integrando en y , tendremos

$$(b - x)\, g(x) = \int_x^b g(y)\,dy - \int_x^b dy \int_x^y g'(t)\,dt = \int_x^b g\,dy + \int_x^b (y-b) g'(y)\,dy$$

Análogamente

$$(x - a)\, g(x) = \int_a^x g\,dy + \int_a^x (a-y)\, g'(y)\,dy$$

Sumando, y llamando $B(x,y) = a - y$ si $a \leq y \leq x$

$B(x,y) = y - b$ si $x < y \leq b$, tendremos

$$g(x) = (b - a)^{-1} \int_a^b g(y)\,dy + (b - a)^{-1} \int_a^b g'(y)\, B(x,y)\,dy \qquad (28)$$

Aquí $B(x,y)$ es una función acotada, continua si $y \neq x$, y fija. Luego (28) expresa $g(x)$ mediante su derivada y un sumando que es el valor medio de $g(x)$ en (a,b). En vez de la integral de $g(y)$ respecto de la medida de Lebesgue dy se puede introducir su integral respecto de un peso diferenciable, como sigue:

Sea (c,d) un intervalo interior a J, y sea $h(x)$ una función infinitamente derivable en toda la recta real, no-negativa, que se anula fuera de $[a,b]$, y cuya integral vale 1 . Si $h_1(y) = \int_y^b h(t)\,dt$, $h_2(y) = \int_a^y h(t)\,dt$, tendremos como antes,

$$h(y)\, g(x) = h(y)\, g(y) - h(y) \int_x^y g'(t)\,dt \quad ;$$

$$h(y)\, g(x) = h(y)\, g(y) + \left[\int_y^x g'(t)\,dt\right] h(y) \quad ;$$

integrando en y, entre a y b, sumando y teniendo en cuenta $h_1(b) = h_2(a) = 0$ obtendremos

$$g(x) = \int_a^b g(y)\, h(y)\, dy + \int_a^b g'(y)\, B(x,y)\, dy \quad , \tag{28a}$$

donde $B(x,y) = h_1(y)$ si $x < y \leq b$; $B(x,y) = h_2(y)$ si $a \leq y \leq x$; $h_1 + h_2 = 1$. Luego B es continua si $y \neq x$, acotada, y el primer término de (28a) es la integral de $g(x)$ respecto de un peso diferenciable $h(y)\, dy$.

Así pues cuando g no se anula en el contorno, obtenemos una fórmula del tipo (27) pero con un término más en el miembro derecho, igual al valor medio de g , y todavía con un factor $B(x,y)$ acotado y continuo salvo si $x \neq y$, en el segundo término.

Llamando $m(g)$ el valor medio de $g(x)$, como $|B(x,y)| \leq M$, obtenemos de (28), que .

$$|g(x)| \leq |m(g)| + M \int_a^b |g'(y)|\, dy \tag{28b}$$

Luego ahora obtenemos que $\|g\|_s \leq M\, (|m(g)| + \|g'\|_p)$. Es decir, también en la desigualdad (27a) hay que agregar el sumando $|m(g)|$ en el miembro derecho, si $g(x)$ no se anula en la frontera de J. Si se usa (28a) en vez de (28) entonces obtendremos una desigualdad análoga con un sumando $|m_1(g)| =$ integral de $g(y)$ respecto del peso $h(y)\, dy$.

C) Estas consideraciones se extienden al caso de n dimensiones como sigue:

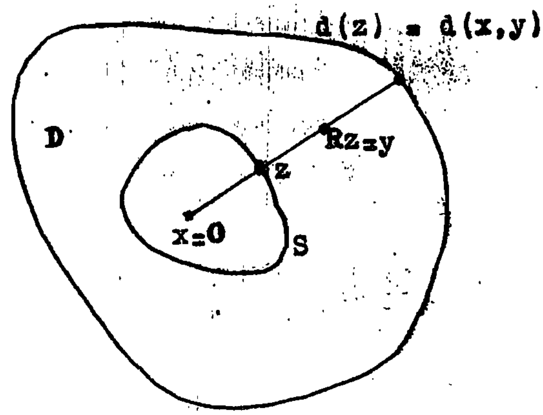
LEMA 7 . <u>Sea $D \subset E^n$ un dominio convexo acotado, $g(x)$ una función definida en D que tiene derivadas continuas en cada punto de D. Entonces se tiene la fórmula</u>

$$g(x) = \frac{1}{|D|} \int_D g(y)\, dy - \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{B_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(y) \right) dy \quad , \tag{29}$$

<u>donde las $B_i(x,y)$ son funciones acotadas, continuas si $x \neq y$. Por tanto $g(x)$ se expresa por sus derivadas mediante los operadores potenciales del tipo (25).</u>

<u>Demostración</u> . Para simplificar supongamos que $x = 0$ = origen, y que la

superficie esférica S de centro **O** = **x** y radio 1 es interior a **D**. Sea z un punto de S, fijo, d(z) el punto en que el rayo **xz** corta al contorno (frontera) de D, y sea $d = |d(z)|$ la longitud del segmento $(x, d(z))$, de modo que $d(z) = d \cdot z = |d(z)|\, z$ (usando notaciones vectoriales e identificando los puntos z, d(z) con los vectores correspondientes). Si g'_z es la derivada según la dirección del vector **Oz**, tendremos para todo R, $0 < R < d = |d(z)|$,



$$g(x) = g(Rz) - \int_0^R g'_z(tz)\, dt$$

Multiplicando por R^{n-1} e integrando en R, entre 0 y d,

$$g(x) \int_0^d R^{n-1} dR = \int_0^d R^{n-1} g(Rz)\, dR - \int_0^d R^{n-1}\, dR \int_0^R g'_z(tz)\, dt =$$

$$= \int_0^d R^{n-1} g(Rz)\, dR - \int_0^d \frac{|d(z)|^n - R^n}{n}\, g'_z(Rz)\, \frac{1}{R^{n-1}}\, R^{n-1}\, dR .$$

Esta fórmula vale para todo z de S. Integrando esta relación en z, sobre S, y teniendo en cuenta que $dy = R^{n-1} dR\, dz$, donde $y = Rz$, $R = |y|$, obtendremos

$$g(x) \int_D dy = \int_D g(y)\, dy - \int_D \frac{|d(x,y)|^n - |y|^n}{n}\, \frac{1}{|y|^{n-1}}\, g'_z(y)\, dy ,$$

donde $d(x,y) = d(z)$, si $z = y/|y|$, $R = |y|$.

Como $g'_z(y) = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \cos(y, x_i)$, obtenemos (29), con

$$B_i(x,y) = \frac{|d(x,y)|^n - |y|^n}{n} \cos(y, x_i) \qquad (29a)$$

Evidentemente $B_i(x,y)$ es una función acotada, y continua si $y \neq x$, 1,q,q,d.

Pongamos $m(g)$ = valor medio de g sobre D,

$$\|\text{grad } g\|_p = \left\{ \int_D \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(y)\right)^2 \right]^{p/2} dy \right\}^{1/p} \tag{30}$$

Evidentemente se tiene

$$\|\text{grad } g\|_p \leq M_p \sup_i \|\partial g/\partial x_i\|_p \leq M_p \|\text{grad } g\|_p \tag{30a}$$

Entonces de (29) y del teorema 1 obtememos inmediatamente, <u>la desigualdad de Sobolieff</u>:

$$\|g\|_s^{(m)} \leq M \left[|m(g)| + \|\text{grad } g\|_p^{(n)} \right] , \tag{31}$$

si $1/p - (m/n)1/s = 1/n$, $1/n < 1/p < 1/(n-m)$, $1/p < 1$ (31a)

donde la norma en el primer miembro es tomada respecto del espacio $E^m \subset E^n$.

Para $D \subset E^n$ acotado, se puede tomar $\leq$ en (31a); en particular se puede tomar $s = p = 2$, si $n \geqslant 2$ (ver b) del teorema 1), y se tiene entonces la <u>desigualdad de Poincaré</u>

$$\int_D |g(y)|^2 \, dy \leq M \left\{ \left| \int_D g(y) \, dy \right|^2 + \int_D \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(y)\right)^2 dy \right\} \tag{31b}$$

<u>Observación 4</u>. El lema 7 y las desigualdades (31) fueron demostradas para el caso de un dominio D convexo; evidentemente (31) vale para todo dominio que es unión de un número finito de dominios convexos. Más generalmente, se puede generalizar el lema 7 para dominios D estrellados respecto de una esfera (es decir, existe una esfera $S \subset D$ tal que para todo x de D y todo z de S, el segmento xz pertenece a D, o sea el cono de base S y vértice x está en D). En efecto en este caso, para cada rayo xz , $z \in S$, se aplica la fórmula (28a), donde $h(y)$ es una función infinitamente derivable que se anula fuera de S. Se obtiene entonces una fórmula del tipo

$$g(x) = \int_D g(y)\, h(y)\, dy + \sum_{i=1}^{n} \int_D B_i(x,y) |x-y|^{1-n} \, \partial/\partial x_i \, g(y) \, dy \, , \tag{32}$$

donde las $B_i(x,y)$ dependen de la $h(y)$ elegida, pero que son acotadas y continuas para $x \neq y$. Por tanto, las desigualdades de Sobolieff (31) (y las demás consecuencias del teorema 1) se aplican a todo dominio que es unión finita de dominios estrellados respecto de una esfera.

Observación 4a . Bajo la condición (31a) (signo $=$), la desigualdad (31) vale aún para dominios no acotados y en particular si $D = E^n$, $D_1 = E^m$. En este caso, si $D = E^n$, $m(g) = 0$ (si $g \in L^1(E^n)$), pues $|D| = |E^n| = \infty$, y obtenemos la desigualdad (27a), para toda g derivable.

Las desigualdades de Sobolieff pueden formularse en esta otra forma:

Sea $B_p^{(1)} = B_p^{(1)}(D)$ el conjunto de todas las funciones $g(x)$ definidas en D, que tienen derivadas continuas de primer orden, siendo estas derivadas funciones de $L^p(D)$, es decir $\text{grad } g \in L^p(D)$. para cada g de $B_p^{(1)}(D)$ definimos la morma siguiente

$$\|g\|_{W(1,p)} = |m(g)| + \|\text{grad } g\|_p = |D|^{-1}\left|\int_D g(y)\, dy\right| + \left\{\int_D |\text{grad } g|^p dy\right\}^{1/p} \tag{33}$$

Con esta norma $B_p^{(1)}$ es un espacio normado (no completo). Para $p = 2$ estos espacios fueron introducidos por Beppo Levi. Del lema 7 y teorema 1 obtenemos entonces que:

TEOREMA 2 . (Teorema de inmersión de Sobolieff - Kondrachieff para $B_p^{(1)}$). Sea $D \subset E^n$, $E^m \subseteq E^n$, $D_1 = D \cap E^m$, $g \in B_p^{(1)}(D)$, y sea $I = Ig$ el operador que a cada función $g(x)$ definida en D le hace corresponder la misma función (mejor dicho, su restricción) definida en $D_1 = D \cap E^m$. Entonces: a) Si $D = E^n$, el operador Ig es de tipo $(B_p^{(1)}(E^n), L^s(E^m))$ para todo p,s tales que se verifique (31a) , es decir

$$\|g\|_s^{(m)} \leq M \|g\|_{W(1,p)}^{(n)} \tag{34}$$

b) Si $D \subset E^n$ es un dominio acotado, $D_1 = D \cap E^m$, entonces Ig es de tipo

$(B_p^{(1)}(D), L^s(D_1))$ para p, s que verifican (26a), (26b) con $d = 1$.

c) Si además en (26a) tiene lugar el signo $<$, entonces Ig es de tipo compacto $(B_p^{(1)}(D), L^s(D_1))$. d) Si D es acotado y $1/p < 1/n$, es decir $n < p$, entonces todas las $g \in B_p^{(1)}(D)$ con $\|g\|_{W(1,p)} \leq 1$ son uniformemente continuas.

Análogamente sea $B_p^{(\ell)} = B_p^{(\ell)}(D)$ el conjunto de todas las funciones $g(x)$ definidas en D, que admiten derivadas continuas hasta el orden ℓ, siendo estas derivadas funciones de $L^p(D)$. Si $v = (v_1, \dots v_n)$ es un vector designaremos con $D^v f = \partial^{|v|} f / \partial x_1^{v_1} \dots \partial x_n^{v_n}$, donde $|v| = v_1 + \dots v_n$. Definimos entonces para cada $g(x)$ de $B_p^{(\ell)}(D)$, la norma $W_p^{(\ell)}$ como sigue:

$$\|g\|_{W(\ell,p)} = |m(g)| + \sum_{|v|=1} |m(D^v g)| + \sum_{|v|=2} |m(D^v g)| + \dots +$$

$$+ \sum_{|v|=\ell-1} |m(D^v g)| + \left\{ \int_D \left[\sum_{|v|=\ell} |D^v g|^2 \right]^{p/2} dy \right\}^{1/p} \qquad (35)$$

TEOREMA 2a. (Teorema de inmersión para $B_p^{(\ell)}$). Sea $D \subset E^n$, $E^m \leq E^n$, $D_1 = E^m \cap D$, y sea $I = Ig$ el operador que a cada $g(x)$ definida en D le hace corresponder la misma $g(x)$ definida en D_1.

a) Ig es de tipo $(B_p^{(\ell)}(D), L^s(D_1))$, es decir se verifica

$$\|g\|_s^{(m)} \leq M \|g\|_{W(\ell,p)} \qquad (36)$$

para los p, s tales que

$$1/p - (m/n)1/s = \ell/n \quad , \quad \ell/n < 1/p < \ell/(n-m) \quad , \quad 1/p < 1 \qquad (36a)$$

b) Si D es acotado entonces Ig es de tipo $(B_p^{(\ell)}(D), L^s(D_1))$ para los p, s que verifican (26a), (26b) con $d = \ell$, y en caso del signo $<$ es de tipo compacto. c) Si además $1/p < \ell/n$ (y D acotado) entonces todas las $g \in B_p^{(\ell)}(D)$ con $\|g\|_{W(\ell,p)} \leq 1$ son uniformemente continuas.

<u>Demostración</u> . Para simplificar supongamos que $m = n$, y sean p, s tales que $1/p - 1/s = \ell/n$, $\ell/n < 1/p < 1$. Sea s' definido por $1/p - 1/s' = (\ell - 1)/n$, de modo que $1/s' - 1/s = 1/n$, $1/n < 1/s' < 1$ (36b)

Como el teorema es cierto para $\ell = 1$, podemos hacer la demostración por inducción, suponiéndolo cierto para $\ell - 1$. Por definición de norma $W(\ell, p)$ es evidente que $\| \partial g/\partial x_i \|_{W(\ell-1,p)} \leq \| g \|_{W(\ell,p)}$, y supuesto el teorema cierto para $\ell - 1$, de la definición de s' resulta

$$\| \partial g/\partial x_i \|_{s'} \leq M \| \partial g/\partial x_i \|_{W(\ell-1,p)} \leq M \| g \|_{W(\ell,p)} \tag{37}$$

Como por (30a) es $\| g \|_{W(1,s')} \leq M_1 \sup_i \| \partial g/\partial x_i \|_{s'}$

obtenemos de (37) que

$$\| g \|_{W(1,s')} \leq M_2 \| g \|_{W(\ell,p)} \tag{37a}$$

Pero de $1/s' - 1/s = 1/n$, y por ser el teorema cierto para $\ell = 1$, obtenemos

$$\| g \|_s \leq M_3 \| g \|_{W(1,s')} \tag{37b}$$

De (37a) y (37b) resulta $\| g \|_s \leq M \| g \|_{W(\ell,p)}$ como se quería probar.

Análogamente se prueban, por inducción, las partes b) y c) del teorema 2a .

D) Los espacios normados $B_p^{(\ell)}$ no son completos. Para obtener espacios completos vamos a hacer uso de las derivadas generalizadas como sigue.

A las funciones $\varphi \in \mathcal{D}(D)$, $D \subset E^n$, (las funciones infinitamente derivables nulas cerca de la frontera de D), las llamaremos <u>funciones de prueba</u> de D. Con D' indicaremos un subdominio completamente interior a D (la clausura de D' es interior a D). Con $W_h(x)$ indicaremos una unidad de convolución tal que las W_h son ifinitamente derivables (cfr.lema 3,pág.225). Sean $f(x)$, $g(x)$ dos funciones definidas en D, localmente integrables (integrables en todo D') .

<u>Entonces las tres propiedades siguientes son equivalentes:</u>

a) **Existe una sucesión φ_m de funciones de prueba de D, tales que para todo D'** se verifica:

$$\int_{D'} |f - \varphi_m| \, dy \to 0 \quad , \quad \int_{D'} |g - \partial\varphi_m/\partial x_1| \, dy \to 0 \qquad (38)$$

b) Para toda φ de prueba de D se verifica

$$\int_D g(y) \; \varphi(y) \, dy = - \int_D f(y) \; \partial\varphi/\partial x_1(y) \, dy \qquad (38a)$$

c) Si $\bar{f} = f$ en D y nula fuera de D, y si $f_h = \bar{f} * W_h$ entonces (cfr.lema 2, pág.222), para todo x interior a D, y $h > 0$ suficientemente pequeño,

$$\partial f_h / \partial x_1 = g_h \to g \qquad \text{para} \quad h \to 0 \qquad (38b)$$

En efecto, <u>a) implica b)</u>: Poniendo $\varphi' = \partial\varphi/\partial x_1$, por ser φ_m, φ diferenciables, nulas sobre el contorno y en un contorno del mismo, se tiene, para cada φ_m,

$$\int_D \varphi_m \, \varphi' \, dy = - \int_D \varphi'_m \, \varphi \, dy \; .$$

Sea $D' \subset D$ tal que φ es nula en D - D', entonces la igualdad anterior se escribe

$$\int_{D'} \varphi_m \, \varphi' \, dy = - \int_{D'} \varphi'_m \, \varphi \, dy$$

De esta igualdad y de (38) obtenemos, al pasar al límite,

$$\int_{D'} f \, \varphi' \, dy = - \int_{D'} g \, \varphi \, dy$$

y como φ es nula fuera de D' resulta (38a).

<u>b) implica c)</u> : Sea x un punto fijo, interior a D. Usando (38a) y teniendo en cuenta que como función de y, $W_h(x-y) \in \mathfrak{D}(D)$ para h pequeño, tendremos

$$f'_h(x) = \int_D \left[\partial/\partial x_1 \, W_h(x-y) \right] f(y) \, dy = \int_D W_h(x-y) \, g(y) \, dy = g_h(x)$$

Por el lema 2, pág.222, g_h tiende a g(x), en media-1, sobre todo D' interior, luego también f_h'.

c) implica a): Evidentemente basta probar que para cada dominio $D' \subset D$ fijo existe una sucesión φ_m que verifica (38). Sea $\overline{D'} \subset D''$, $\overline{D''} \subset D$; poniendo $h = 1/m$, $\varphi_m = f_1 * W_h$, donde $f_1 = f$ en D'' y nula fuera, será φ_m de prueba en (D) y coincidirá con f_h en $D' \subset D''$ si h es pequeño. Tendremos entonces que $\varphi'_m = f_h' = g_h$ en D' y del lema 2, pág. 222, resulta que se verifica (38).

<u>Definición</u>. Si se verifica una de las condiciones equivalente a), b), c), se dice que $g(x)$ es la derivada de $f(x)$ respecto de x_1, <u>en sentido generalizado</u> o <u>en sentido de las distribuciones</u>, y se escribe $g(x) = \partial f/\partial x_1$. Análogamente se definen las derivadas generalizadas $\partial f/\partial x_i$, $i = 1, \ldots n$.

Más generalmente, se dice que $g(x)$ es la derivada generalizada de orden ℓ, o que $g(x) = D^v f(x)$, $|v| = \ell$, $v = (v_1, \ldots v_n)$, si para toda función de prueba φ de D, se verifica

$$\int_D g(y)\, \varphi(y)\, dy = (-1)^{\ell} \int_D f(y)\, D^v \varphi(y)\, dy \qquad (39)$$

Como más arriba se verá que esto equivale a que existe una sucesión de funciones de prueba φ_m tales que φ_m converge en media-1 (sobre todo D') a f, y $D^v \varphi_m$ converge en media-1 a g. O también que $D^v(f_h)$ convergen a $g(x)$ para $h \to 0$, donde f_h es la regularización de f. De la última propiedad resulta en particular que la derivada generalizada $g(x)$ está unívocamente determinada, salvo medida nula.

Si $f(x)$ admite una derivada generalizada $g = D^v f$, y si f_1 coincide con f salvo medida nula entonces es también $g = D^v f_1$. Por otra parte, del teorema de integración por partes se deduce que, si $f(x)$ es localmente sumable y absolutamente continua sobre todo segmento paralelo al eje de los x_1 (y contenido en D), entonces $g = \partial f/\partial x_1$ existe (en sentido ordinario) en casi todo punto y $g(x)$ es la derivada generalizada de f (en sentido de distribuciones). Recíprocamente, si $g = \partial f/\partial x_1$ en sentido de distribuciones, y si $f = 0$ fuera de $D' \subset D$, entonces la función

$$f_1(x_1, \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} g(t, x_2, \ldots x_n)\, dt$$

es absolutamente continua sobre paralelas al eje x_1, y tiene por derivada a $g(x)$ en casi todo punto, luego coincide con f en casi todo punto. De aquí se deduce fácilmente que toda $f(x)$ que admite la derivada $g = \partial f/\partial x_1$ en sentido de distribuciones, es equivalente a una $f_1(x)$ absolutamente continua sobre todo segmento cerrado, paralelo al eje x_1 y contenido en D, y que tiene a $g(x)$ por derivada ordinaria en casi todo punto. Análogamente si las derivadas generalizadas $D^v f$ existen para todo $|v| \leq \ell$, entonces f es equivalente a una función $f_1(x)$ absolutamente continua ella y sus derivadas hasta el orden $(\ell - 1)$, en cada una de las variables, para casi todos los valores de las demás variables. Así pués, modificando la función en medida nula, el concepto de derivada generalizada se reduce al concepto ordinario de derivada (siempre que la derivada generalizada sea localmente integrable).

<u>Observación 5</u>. Más generalmente, segun lo indicaron Deny y Lions (ver Annales Inst. Fourier, 1955, tomo V) si T es una distribución cuyas derivadas $g_v = D^v T$ de orden $\leq \ell$ son funciones localmente sumables, entonces T es igual a una función $f_1(x)$ con las propiedades indicadas mas arriba, es decir T es una función que modificada en un conjunto de medida nula admite a la g_v por derivadas en sentido ordinario, salvo medidas nulas, y es absolutamente continua en el sentido precisado.

<u>Observación 5a</u>. Puede ocurrir que $g(x)$ tenga derivada generalizada de orden ℓ y no de orden $\ell - 1$, o de orden $\ell - k$. Por ejemplo, si $f(x)$ es una función continua singular de la variable real $0 \leq x \leq 1$ ($f'(x) = 0$ p.p.) entonces la función de dos variables $F(x,y) = f(x) + f(y)$ tiene derivada generalizada $\partial F/\partial x \partial y = 0$, pues para toda φ de prueba es

$$\iint f(x)\,(\partial^2\varphi/\partial x\partial y)\,dy\,dx = \iint \partial/\partial y\left[f(x)\ \partial\varphi/\partial x\right] dy\,dx = 0$$

(pues $\partial\varphi/\partial x$ es nula cerca del contorno) ; análogamente

$$\iint f(y)\,(\partial^2\varphi/\partial x\partial y)\,dx\,dy = 0$$

En cambio no existe la derivada generalizada $\partial F/\partial x$, pues de lo contrario $f(x) + f(y)$, y por lo tanto $f(x)$, tendría que ser ser absolutamente continua en x, mientras que $f(x)$ es singular.

Así pues para la validez de la propiedad indicada en la observación precedente es esencial (si $\ell > 1$) que existan las derivadas de todos los órdenes $\leq \ell$.

Observación 6. De la demostración dada mas arriba resulta que en a) es suficiente suponer que las φ_m son tan solo funciones derivables con derivadas (de orden ℓ) continuas en D. Mas aún se tiene la siguiente

Proposición: Si existe una sucesión de funciones f_m tales que cada f_m es ℓ veces continuamente derivable, $\| D^v f_m \|_p < M$ para todo m y todo $|v| = \ell$, donde $1 < p < \infty$, y si $\| f_m - f \|_1 \to 0$ (normas en D), entonces f tiene derivada generalizada $D^v f = g_v$, $|v| = \ell$ y $\| g_v \|_p < M$.

En efecto, por lo visto en la página 234, la condición $\| D^v f_m \|_p < M$ implica que de f_m se puede extraer una subsucesión, que seguimos llamando f_m, tal que $\| D^v f_m - g \|_p \to 0$ donde $g \in L^p$; luego $g = D^v f$ en sentido de las distribuciones, por lo recién observado.

E) Los espacios $B_p^{(\ell)}$ son normados pero no completos. Para obtener espacios completos hay que usar derivadas generalizadas en vez de derivadas ordinarias; de este modo se llega a los llamados espacios de Sobolieff que se definen como sigue.

Sea $W_p^{(1)}(D)$, $D \subset E^n$, el conjunto de todas las funciones f definidas en el dominio D, que tienen derivadas generalizadas $\partial f/\partial x_i$ pertenecientes a $L^p(D)$; es decir para cada $i = 1 , \ldots n$, la derivada generalizada $\partial f/\partial x_i$ es una función de $L^p(D)$; la norma en $W_p^{(1)}$ es como antes

$$\| f \|_{W(1;p)} = |D|^{-1} \left| \int_D f(x)\, dx \right| + \left\{ \int_D \left[\sum_{i=1}^{n} (\partial f/\partial x_i)^2 \right]^{p/2} dx \right\}^{1/p} \tag{35a}$$

Evidentemente $B_p^{(1)}(D) \subset W_p^{(1)}(D)$. Es fácil ver que el teorema de inmersión (teorema 2) vale también para W_p^1. Por ejemplo, probemos que si

$$1/p - 1/s < 1/n$$

entonces vale

$$\|f\|_s \leqslant M \|f\|_{W(1,p)} \quad , \tag{36}$$

para toda f de $W_p^{(1)}(D)$. Para ello consideremos una unidad de convolución $W_h(x)$, infinitamente diferenciable, y sea $f_h = f * W_h$ la regularización correspondiente. Para todo dominio D' completamente interior a D tenemos (indicando con $D_i^1 g = \partial g/\partial x_i$) que

$$\int_{D'} \left|D_i^1(f_h) - D_i^1 f\right|^p dx = \int_{D'} \left|(D_i^1 f)_h - D_i^1 f\right|^p dx \to 0 \ ,$$

donde $D_i^1 f$ es la derivada generalizada. Como $f_h \in B_p^1$, podemos aplicarle el teorema 2 y escribir

$$\left\{\int_{D'} |f_h|^s dx\right\}^{1/s} \leqslant M \left\{(D')^{-1} \left|\int_{D'} (f_h)\, dx\right| + \left\{\int_{D'} \left[\sum_{i=1}^n \left|D_i^1(f_h)\right|^2\right]^{p/2} dx\right\}^{1/p}\right. .$$

Luego pasando al límite obtendremos

$$\left\{\int_{D'} |f|^s\, dx\right\}^{1/s} \leqslant M \|f\|_{W(1,p)} \ .$$

Como la constante M se mantiene acotada si D' varía dentro de D, haciendo tender D' a D obtendremos (36).

Veamos ahora que $W_p^{(1)}$ ya es un espacio completo. En efecto sea f_k una sucesión de $W_p^{(1)}$ tal que $\|f_k - f_m\| \to 0$, donde $\| \ \|$ indica la norma de $W_p^{(1)}$. Esto implica (por definición de la norma, (35a)) que $D_i^1 f_k$ tiende en media-p a un límite g_i, y en virtud de (36) las funciones f_k ellas mismas convergen en media-s a un límite f. Es fácil ver que las g_i son las derivadas generalizadas de f, es decir $g_i = D_i^1 f$. En efecto, si D_m son dominios completamente interiores a D, que tienden a D, de las definiciones a), b), c) de derivada generalizada resulta que existe una F_m de $B_p^{(1)}$ (es decir derivable continuamente en sentido ordinario) tal que

$$\int_{D_m} |f_m - F_m| dx < \frac{1}{m} \quad , \quad \int_{D_m} \left| D_i^1 f_m - D_i^1 F_m \right| dx < \frac{1}{m}$$

Luego

$$\int_{D_m} |f - F_m| \, dx \leq \int_{D_m} |f - f_m| \, dx + \int_{D_m} |f_m - F_m| \, dx < \varepsilon + 1/m \ ,$$

$$\int_{D_m} \left|g_i - D_i^1 F_m\right| dx \leq \int_{D_m} \left|g_i - D_i^1 f_m\right| dx + \int_{D_m} \left|D_i^1 f_m - D_i^1 F_m\right| dx < \varepsilon + 1/m$$

Luego F_m y $D_i^1 F_m$ convergen sobre todo dominio completamente interior hacia f y g_i respectivamente, lo que prueba que g_i es la derivada generalizada de f. Luego f_m converge en $W_p^{(1)}$ hacia una función f también de $W_p^{(1)}$, lo que prueba la completidad.

Análogamente se define el espacio $W_p^{(\ell)}$ de Sobolieff: es el conjunto de todas las funciones f que admiten derivadas generalizadas hasta el orden inclusive, siendo las derivadas de orden ℓ funciones de L^p. La norma en $W_p^{(\ell)}$ es dada por (35), reemplazando en esta fórmula derivadas ordinarias por generalizadas. Como mas arriba, por inducción, se prueba que $W_p^{(\ell)}$ es completo y que valen los teoremas de inmersión (teorema 2a) para los $W_p^{(\ell)}$. Se verifica además fácilmente (lo ofrecemos al lector a título de ejercicio fácil) que $W_p^{(\ell)}$ es separable. Se llega así al siguiente teorema de inmersión, que vale para dominios D acotados que son suma finita de dominios estrellados esféricos (o los mas generales de la observación 5).

Observemos que si $f \in W_p^{(\ell)}$, f no tiene por que ser continua pues sus derivadas existen en sentido generalizado y no ordinario.

TEOREMAS DE INMERSIÓN DE SOBOLIEFF PARA $W_p^{(\ell)}$. a) Si $p > 1$, $1/p < \ell/n$, entonces toda f de $W_p^{(\ell)}$ es continua y

$$\|f\|_{C(D)} \leq M \|f\|_{W(\ell,p)} \quad , \tag{37}$$

donde $\| \ \|_{W(\ ,p)}$ es la norma de $W_p^{(\ell)}(D)$. Es decir $W_p^{(\ell)} \subset C(D)$, o sea el operador idéntico es un operador acotado de $W_p^{(\ell)}$ en $C(D)$.

b) Si $p > 1$, $1/p > \ell/n$, $1/p - m/n\, 1/s \leq \ell/n$, $m > n - p\ell$, entonces toda f de $W_p^{(\ell)}(D)$ pertenece a $L^s(D \cap E^m)$ y vale

$$\|f\|_s^{(m)} \leq M \|f\|_{W(\ell,p)} \quad , \quad W_p^{(\ell)}(D) \subset L^s(E^m \cap D) \ . \tag{38}$$

b_1) Si además $1/p - m/n\, 1/s < \ell/n$ entonces el operador idéntico es además compacto (completamente continuo).

c) Si $1/p - 1/s \leq (\ell - m)/n$ entonces $W_p^{(\ell)}(D) \subset W_s^{(m)}(D)$, siendo el operador idéntico compacto en caso del signo $<$.

d) Además $W_p^{(\ell)}$ es un espacio normado, completo y separable.

El hecho que $W_p^{(\ell)}$ es completo se usa para introducir otras normas equivalentes (es decir que da los mismos límites, la misma topología) a la norma (35).

En efecto se sabe (ver por ejemplo el libro de Banach sobre Operaciones Lineales, o el libro de Loomis sobre análisis armónico) que si V es un espacio vectorial, si $\| \ \|$, $\| \ \|_1$ son dos normas de V y si V es completo respecto de ambas, entonces otras normas son equivalentes. Por tanto toda otra norma que se defina en $W_p^{(\ell)}$, tal que $W_p^{(\ell)}$ sea completo en ella, será equivalente a la (35) y puede usarse en vez de (35).

De esta manera Sobolieff obtuvo diferentes normas equivalentes en $W_p^{(\ell)}$. Un procedimiento general para definir una norma equivalente en $W_p^{(\ell)}$ es el siguiente:

Sean $L_1 f$, ... , $L_j f$ funcionales lineales en $W_p^{(\ell)}$ cualesquiera (es decir

$\|f_k\| \to 0$ implica $L_i f_k \to 0$, además $L_i(C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 L_i f_1 + C_2 L_i f_2$), que poseen la siguiente propiedad (indicamos con $D^{\ell}_{i_1 \ldots i_k} = \partial^{\ell}/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}$):

$$L_1 f = \ldots = L_j f = \sum_{i_1 \ldots i_k} \|D^{\ell}_{i_1 \ldots i_n} f\|_p = 0 \quad \text{implica} \quad f = 0 \tag{39}$$

Veamos que si $L_1, \ldots L_j$ es un tal sistema de funciones, entonces

$$\|f\|_{W(\ell,p)} \leq M \left\{ \left[|L_1 f| + \ldots + |L_j f| \right] + \sum \|D^{\ell}_{i_1 \ldots i_k} f\|_p \right\} \tag{40}$$

En efecto, suponiendo lo contrario existirían f_m tales que

$$\|f_m\|_{W(\ell,p)} = 1$$

pero con

$$|L_1 f_m| + \ldots \; |L_j f_m| + \sum \|D^{\ell} f_m\|_p < \varepsilon_m \to 0 \tag{41}$$

Como $\|f_m\|_{W(\ell,p)} = 1$, se tiene que $m(f_m)$, $m(D^1 f_m)$, $\ldots$ $m(D^{\ell-1} f_m)$ son acotadas y podemos extraer una subsucesión de f_m, que seguimos llamando f_m, tal que los números $m(f_m)$, $m(D^i f_m)$ sean convergente, $i \leq \ell-1$. Esto junto con (41), o sea junto con $\|D^{\ell} f_m\|_p \to 0$, implica que

$$\|f_m - f_k\|_{W(\ell,p)} \to 0 \qquad \text{para} \quad m,k \to \infty ,$$

luego siendo $W^{(\ell)}_p$ completo, resulta que f_m tiende en $W^{(\ell)}_p$ a un límite f. Para esta f en virtud de (41) se va a verificar (39) y por lo tanto $f = 0$, y por otra parte $\|f_m\|_{W(\ell,p)} = 1$ da $\|f\|_{W(\ell,p)} = 1$, que es una contradicción.

Así pues vale (40). Por otra parte es evidente que el miembro derecho de (40) es $\leq M \|f\|_{W(\ell,p)}$, pues las L_i son funcionales lineales continuas y por tanto acotadas. Luego la norma $\| \; \|_{(\ell,p)}$ definida por

$$\|f\|_{(\ell,p)} = |L_1 f| + \ldots + |L_j f| + \sum \|D^{(\ell)} f\|_p \tag{42}$$

es equivalente a la (35). Es decir podemos tomar (42) como norma en $W_p^{(\ell)}$.
De este teorema general resulta en particular que podemos tomar como normas en $W_p^{(\ell)}$ las expresiones siguientes:

$$\| f \|_{(\ell, p)} = \| f \|_p + \sum \| D^{(\ell)} f \|_p \tag{43}$$

$$\| f \|_{(\ell, p)} = \int_S |f| dt + \sum \| D^{(\ell)} f \|_p \tag{44}$$

siendo S = frontera del dominio D.

Observación 7 . Si $D = E^n$ y si $f \in L^1(E^n)$ entonces

$$m(f) = \lim |D_1|^{-1} \left| \int_{D_1} f(x)\, dx \right| = 0 \quad , \quad \text{donde}$$

$|D_1| \to \infty$. En este caso obtenemos (cfr. observación 4a) que si f admite derivadas generalizadas de primer orden entonces $\| f \|_s \leq M \sum_{i=1}^{n} \| \partial f / \partial x_i \|_p$ es decir no aparece el término $m(f)$ en esta desigualdad, siempre que $1/p - 1/s = 1/n$. y análogamente para $E^m \subset E^n$ con $m < n$. La misma conclusión vale para todo D tal que $|D| = \infty$, si $f \in L^1(D)$, $1/p - 1/s = 1/n$. Análogamente si $|D| = \infty$, $f \in W_p^{(\ell)}(D)$ y si las derivadas generalizadas de orden $\leq \ell - 1$ son integrables en D, entonces $\| f \|_s$ se acotada por las normas-p de las derivadas generalizadas de f de orden ℓ , si $1/p - 1/s = \ell/n$, es decir en la desigualdad de Sobolev desaparecen los términos $m(f)$, ... , $m(D^{(\ell-1)} f)$. En cambio, si $|D| = \infty$, no se puede asegurar que estas desigualdades valgan si $1/p - 1/s < 1/n$. Si $|D| < \infty$ esto vale para $1/p - 1/s < 1/n$, $1/n < 1/p < 1$, en particular esto vale si $s = p$, pero ahora intervienen los valores $m(f)$ en las desigualdades. Naturalmente suponemos que D es estrellado esféricamente, o es unión de tales dominios. Si esta última condición no se cumple las desigualdades de Sobolev pueden dejar de verificarse. Lions y Deny llaman a D abierto de Sobolev si la desigualdad de Sobolev vale para $p = 2$, $1/2 - 1/s = 1/n$, y abierto de Nikodym si vale para $p = s = 2$ (si $|D| < \infty$). En particular todo D estrellado esféricamente será de Sobolev y Nikodym; estos autores mostraron que esto vale aún si en todo punto de D se puede colocar cierto sector cónico de modo que estos sectores queden a distancia positiva del contorno. Además ellos probaron que si D es de Sobolev (o de Nikodym) entonces $D_i^1 f \in L^2(D)$, $i = 1, \ldots n$, implica $f \in L^s(D)$. Para detalles y otras aplicaciones enviamos al trabajo ya citado de estos autores y a la nota de Lions en la Revista de la UMA, 1955, vol XVII.

Observación 7a. Como $B_p^{(\ell)}(D) \subset W_p^{(\ell)}(D)$ y el último espacio es completo, resulta que la completación de $B_p^{(\ell)}$ puede realizarse mediante funciones. Sin embargo todavía no podemos afirmar de que $W_p^{(\ell)}$ sea la completación de $B_p^{(\ell)}$; en otros términos, si $\tilde{W}_p^{(\ell)}(D)$ es la clausura de $B_p^{(\ell)}(D)$ en $W_p^{(\ell)}(D)$ no podemos afirmar que $\tilde{W}_p^{(\ell)} = W_p^{(\ell)}$, tan solo podemos afirmar que $\tilde{W}_p^{(\ell)} \subset W_p^{(\ell)}$. Si D tiene contorno "bueno", o si D es cilindro cuya base tiene contorno bueno entonces vale $\tilde{W}_p^{(\ell)} = W_p^{(\ell)}$. Esto resulta del hecho de que para tales D una f de $W_p^{(\ell)}(D)$ puede extenderse a un dominio mas grande D_1, con conservación de clase, y como las regularizadas de f convergen a f en dominios completamente interiores, y D es completamente interior a D_1, se deduce entonces que f es límite de funciones de $B_p^{(\ell)}(D)$. Vemos pues que el problema de si $B_p^{(\ell)}$ es denso en $W_p^{(\ell)}$ está ligado al problema de la posibilidad de extender funciones definidas en D a dominios más grandes conservando la propiedad de tener derivadas generalizadas pertenecientes a L^p. El estudio de tales extensiones fué comenzado por Whitney (Trans.Am.Math.Soc. 1934) y aplicado al problema en cuestión por Nikolski y Babich (Uspehi Mat. Nauk VIII, 1953) (ver los trabajos citados de Deny-Lions).

En las aplicaciones conviene tomar como norma de $W_p^{(\ell)}$ a la dada por $\|f\|_p + \sum \|D^{(\ell)} f\|_p$, es decir la de (43). Entonces el espacio $W_2^{(\ell)}$ es un espacio de Hilbert y el producto escalar de dos funciones f,g de este espacio es definido por

$$(f,g) = \int_D f(x)\, g(x)\, dx + \sum \int_D D^{\ell} f(x)\, D^{\ell} g(x)\, dx \quad , \tag{45}$$

pues entonces será $(f,f)^{1/2} = \|f\|_{W(\ell,2)}$. Para $\ell = 1$, (45) se reduce esencialmente a la integral clásica de Dirichlet del llamado problema de Dirichlet (por ej. la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace es dada por una función f que satisface a las condiciones de contorno y cuya integral de Dirichlet (f,f) es mínima).

Observemos que en (34) la norma $\|g\|_s^{(m)}$ se define mediante una integral extendida a la intersección de D con E^m, es decir a un trozo de hiperplano. Pero la misma desigualdad subsiste si en vez de un trozo de plano contenido en D tomamos un trozo de superficie m-dimensional contenido en D, siempre que la superficie sea suficientemente lisa, pues entonces esta superficie se la aproxima por trozos planos inscriptos y las integrales sobre estos trozos planos tendrán por límite la integral sobre la superficie. Así por ejemplo si D_m es una tal superficie m-dimensional lisa, las restricciones a D_m de las funciones f de $W_p^{(\ell)}(D)$ de norma 1 (en $W_p^{(\ell)}(D)$), formarán un conjunto compacto en $L^s(D_m)$ si $1/p - m/n\, 1/s < \ell/n$, $\ell/n < 1/p < 1$; y si $1/p < \ell/n$ entonces estas f pertenecerán a $C(D_m)$, y en particular se puede entonces hablar de los valores de f sobre la superficie D_m, aún si f, que a priori está definida salvo medida nula, podría no ser definida en D_m que es de medida nula, y menos ser continua allí.

Más aún, si $f \in W_p^{(\ell)}$ y $k < \ell$, entonces toda derivada generalizada de orden k, $g = D^k f$, verifica $g \in W_p^{\ell-k}$, pues una derivada de orden $\ell-k$ de g es igual a una derivada de orden ℓ de f y por tanto $\in L^p$. Luego si $(\ell-k)/n > 1/p$, g será continua. Obtenemos así el siguiente

<u>Corolario 1. Si $f \in W_p^{(\ell)}(D)$, $|D| < \infty$, y si $\ell > n/p + k$, entonces $f \in C^k(D)$, es decir f tiene derivadas ordinarias continuas hasta el orden k</u>

En otros términos el hecho de tener f derivadas generalizadas hasta un orden ℓ suficientemente grande (dependiente de la dimensión n del espacio) implica que f tiene derivadas en sentido ordinario y además continuas, de todos los órdenes $\leq k$. Si $p = 2$ basta que sea $\ell = [n/2] + k + 1$.

Corolario 2 . Si $f \in W_p^{(\ell)}(D)$, $D \subset E^n$, $|D| < \infty$, $p \geq 1$, entonces f y todas sus derivadas generalizadas de orden $\leq \ell-1$ son integrables sobre toda superficie lisa de dimensión (n-1) contenida en D . En efecto, basta aplicar el teorema de inmersión para $m = n-1 > n - \ell p$ pues entonces se puede tomar $s = 1$ y será $1/p - m/n\ 1/s = 1/p - (n-1)/n < 1/n$; luego si $g = D^{(\ell-1)} f$, será

$$\|g\|_1^{(m)} \leq M \sum \|D^1 g\|_p \leq M \sum \|D^{\ell} f\|_p < \infty ,$$

y g es integrable sobre $D \wedge E^m = D \cap E^{n-1}$.

Observación 8 . Los teoremas de inmersión se pueden precisar en la siguiente forma:

Corolario 3 . Si $f \in W_p^{(\ell)}(D)$, $p > 1$, para todo $d > 0$ vale

$$\|f\|_{W(\ell-1,p)} \leq d \|f\|_{W(\ell,p)} + M_d \|f\|_p , \tag{46}$$

donde las normas están tomadas sobre D, y M_d varía con d pero no con f. D es acotado. Vamos a esbozar la demostración de (46). Supongamos que D está contenido en una esfera unitaria. Por el teorema de inmersión

$$\|g\|_{W(\ell-1,p)} \leq M \left\{ \|g\|_{W(\ell,p)} + \|g\|_p \right\} ,$$

o sea

$$\sum \int_D |D^{\ell-1} g(x)|^p dx \leq M^p \left\{ \sum \int_D |D^{\ell} g(x)|^p dx + \int_D |g(x)|^p dx \right\} \tag{47}$$

Haciendo $g(x) = f(dx)$, tendremos una derivada $D^{\ell} g$ de orden ℓ , $D^{\ell} g(x) = d^{\ell} D f(dx)$, por tanto en los tres términos de (47) aparecerán los factores $d^{(\ell-1)p}$, $d^{\ell p}$, 1 , respectivamente. Dividiendo por $d^{(\ell-1)p}$ se llega entonces a una desigualdad de tipo (46).

Análogamente se puede probar el siguiente

Corolario 4 . Si $p > 1$, $d > 0$ entonces

$$\|f\|_{W(\ell-1,p,D\cap E^{n-1})} \leq d\,\|f\|_{W(\ell,p,D)} + M_d\,\|f\|_p \tag{48}$$

Si $1/p < 1/n$, $d > 0$, entonces (cfr. corolario 1)

$$\|D^{\ell-1} f\|_\infty \leq d\,\|f\|_{W(\ell,p,D)} + M_d\,\|f\|_p \tag{48a}$$

(El primer término de (48) es la norma de f en $W_p^{(\ell-1)}(D\cap E^{n-1})$, el segundo término de (48a) es la norma de f en $W_p^{(\ell)}(D)$, y $\|f\|_p$ es la norma en $L^p(D)$).

Observación 9 . Nikolski mostró que los teoremas de inmersión pueden obtenerse (en el caso $D = E^n$) mediante la teoría de aproximación de tipo exponencial de Bernstein. Más aún Nikolski generalizó los teoremas de inmersión para funciones que en cierto sentido tienen derivadas de orden fraccionario. Mas precisamente, sea $r = \bar r + a$, $\bar r \geqslant 0$ entero , $0 < a \leqslant 1$. Entonces se dice que $f \in H^r_{px_k}(E^n)$ si f y sus derivadas en x_k de orden $\leqslant \bar r$ pertenecen a $L^p(E^n)$, y si para $0 < a < 1$ se verifica que sus derivadas de orden $\bar r$ verifican

$$\|D^{\bar r} f(x+h) - D^{\bar r} f(x)\|_p \leq M\,|h|^a$$

(hablando groseramente, f tiene derivada de orden $\bar r + a$), y si para $a = 1$ se verifica

$$\|D^{\bar r} f(x+h) - 2\,D^{\bar r} f(x) + D^{\bar r} f(x-h)\|_p \leq M\,|h| \ .$$

Se dice que $f \in H_p^{r_1\ldots r_n}(E^n)$ si ella $\in H^{r_k}_{px_k}$ para $k = 1, \ldots n$.

Nikolski probó entonces que si

$$\ell_i = t r_i \ , \quad t = 1 - (1/p - 1/s) \sum_1^m 1/r_i - 1/p \sum_{m+1}^n 1/r_i > 0 \tag{49}$$

entonces

$$H_p^{r_1\ldots r_n}(E^n) \subset H_s^{\ell_1\ldots \ell_n}(E^m) \ , \quad (1 \leq p \leq s \leq \infty) \tag{49a}$$

es decir el operador identidad es un operador acotado de $H_p^{r_1\ldots r_n}(E^n)$ en

$H^{\ell_1 \ldots \ell_n}_s(E^m)$. Si $m = n$, $r_i = \ell$, será $t = 1 - (1/p - 1/s)m\ell^{-1} - 1/p(n-m)\ell^{-1}$ y (49) se escribe $1/p - m/n\ 1/s < \ell/n$ que es la condición del teorema de inmersión de Sobolev. O sea el teorema de inmersión de Sobolev corresponde a un caso particular de $r_1 = \ldots = r_n = \ell$.

Nikolski y sus discípulos han estudiado además los teoremas de extensión (cfr. observación 7a) en el caso de estos clase H^r_p. (cfr. los trabajos de Nikolski en Trudi Mat. Inst. Steklor, 1951, Mat. Sbornik 1953, 1956, 1957 y 1958).

Observación 10. En vez de normas $\|f\|_p$, ocurren frecuentemente normas con pesos $|x|^a$ es decir $= \left\{ \int |f(x)|^p |x|^a\, dx \right\}^{1/a}$ (por ejemplo tales normas ocurren en el teorema de Hardy-Littlewood-Paley que generaliza el de Plancherel, ver capítulo III). Se puede hablar entonces de operadores de tipo $(L^p(E^n, |x|^a dx), L^s(E^m, |x|^b dx))$. Hardy y Littlewood probaron para $n = 1$ que los operadores potenciales $H_{d,n}f$ son del tipo $(L^p(E^n, |x|^b dx), L^s(E^n, |x|^{-a} dx))$ si $1/p - 1/s = d/n - (a + b)$; Stein y Weiss han extendido este teorema para $n > 1$. Para $a = b = 0$ obtenemos el teorema de Thorin-Sobolev que vimos en el Cap. II. Se puede probar que los teoremas más precisos de Sobolev (con tipos $E^m \subset E^n$, completa continuidad, tipo débil, etc.) vistos en este curso se extienden al caso de pesos $|x|^a dx$ (las demostraciones se darán en un próximo trabajo en colaboración con E. Ortiz). En caso de un dominio $D \neq E^n$ se usa en vez de $|x|^a$ un peso $|\sigma(x)|^a$ que tiende a cero al tender x al contorno de D con "velocidad" $|d(x)|^a$. Estos teoremas se relacionan con las extensiones de Vishik (Mat. Sbornik 1954) de los teoremas de inmersión de Sobolev: Vishik usa en vez de normas de $L^p(D, dx)$, normas de $L^p(D, |x|^a dx)$ ponderadas, y aplica estos teoremas generalizados de inmersión a ecuaciones diferenciales $\sum \partial/\partial x_i (\sigma^a \partial f/\partial x_i) = 0$ que "degeneran" en la frontera. También han sido generalizados los teoremas de extensión de Nikolski y Babich para normas con pesos (ver los trabajos de Zajarov y Kudriazev en los Dokladi Ac. Nauk de 1956, 1957).

5 . PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMADAS DE HILBERT

A) Veamos antes algunas de las propiedades de las transformadas de Hilbert en el espacio $L^2 = L^2(E^n)$. Recordemos que estas transformadas son operadores de convolución de la forma:

$$Hf = H_W f(x) = \int_{E^n} f(y)\, K(x-y)\, dy = F(x) \tag{50}$$

donde el núcleo $K(x)$ es dado por

$$K(x) = W(x')\,|x|^{-n} = W(x')\, r^{-n} \quad , \; r = |x| \; , \quad x' = x/r \tag{51}$$

aquí x' es un punto de la esfera unitaria S , $|x'| = 1$, y la función <u>característica</u> $W(x')$ satisface la condición (cfr. pág. 47)

$$\int_S W(x')\, dx' = 0 \tag{51a}$$

Sea $K_\varepsilon(x) = K(x)$ si $\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon$, y cero en los demás puntos, sea $H_\varepsilon f = F_\varepsilon = f * K_\varepsilon$, y sea $\widehat{K}_\varepsilon = \mathfrak{F}(K_\varepsilon)$. En el capítulo II (págs 51 - 54) hemos visto que si $W(x')$ satisface una condición de tipo Lipshitz (condición (15a), pág 54) entonces vale:

a) $|\widehat{K}_\varepsilon(u)| \leq M$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $u \in E^n$;

b) $\widehat{K}_\varepsilon(u)$ converge a un límite $h(u)$ para casi todo u , si $\varepsilon \to 0$;

c) para toda f de L^2 , $H_\varepsilon f$ converge en media-2 a un límite Hf , y Hf es de tipo (2 , 2).

Veamos que estas propiedades a), b), c) valen aún si $W(x')$ verifica, en vez de (15a), una de las siguientes dos condiciones, más generales:

$$\text{para todo } y' \in S \;, \quad \int_S |W(x')|\,\left|\log(|x'-y'|^{-1})\right| dx' \leq M \tag{52}$$

$$\int_S |W(x')|\,\lg(1+|W(x')|)\, dx' \leq M < \infty \tag{52a}$$

<u>Ante todo veamos que la condición (52a) implica la (52)</u>. Para ello haremos uso de la siguiente desigualdad de Young: Si $y = g(x) > 0$ es una función creciente

definida en el intervalo $(0,\infty)$, y si $G(y)$ es su función inversa, entonces para todo $a > 0$, $b > 0$, se tiene

$$a\,b \leq \int_0^a g(x)\,dx + \int_0^b G(y)\,dy \tag{53}$$

(para probar (53) basta observar que $a b$ = área del rectángulo de base a y altura b $\leq$ área limitada por la curva $y = g(x)$ correspondiente a $0 \leq x \leq a$ + el área limitada por $x = G(y)$ correspondiente a $0 \leq y \leq b$; si $b = g(a)$ entonces en (53) se tiene el signo $=$).

Haciendo $g(x) = e^x - 1$, $G(y) = \lg(1+y)$, obtendremos

$$a\,b \leq e^a - a + (b+1)\lg(b+1) - b \leq e^a + (b+1)\lg(b+1) \tag{53a}$$

Poniendo $c = \log(|x'-y'|^{-1})$, $d = |W(x')|$, $a = c/2$, $b = 2d$, tendremos

$$|W(x')|\,\log|x'-y'| = c\,d = (c/2)2d = ab \leq |x'-y'|^{1/2} + (1+2|W(x')|)\lg(1+2|W|).$$

Luego si $|W|\log(1+|W|)$ es integrable será también acotada la integral (52),

l,q,q,d.

<u>LEMA 8</u> . (Calderón-Zygmund) . <u>Si la función característica $W(x')$ verifica (52a) entonces valen las propiedades a), b), c), además $\widehat{Hf} = \hat{f}\,\hat{h}$</u> .

<u>Demostración</u> . Por lo que se vió en el capítulo II (teorema 1, pág.34), basta ver que se verifican a) y b). Sea φ el ángulo entre los vectores $\underline{x}$ y $\underline{u}$, luego $(x,u) = |x||u|\cos\varphi$, y por tanto (con $|x| = r$),

$$\hat{K}_\varepsilon(u) = \int_{E^n} K_\varepsilon(x)\, e^{-i|x||u|\cos\varphi}\,dx =$$

$$= \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} dr \int_S W(x')\, r^{-n}\, e^{-i|u|r\cos\varphi}\, r^{n-1}\,dr\,dx' =$$

$$= \int_S W(x')\,dx \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} r^{-1}\, e^{-i|u|r\cos\varphi}\,dr$$

En verdad de (51a), es

$$\int_S W(x')\,dx' \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} e^{-r}\, r^{-1}\, dr = 0 \quad ,$$

luego cambiando ε en $|u|\varepsilon$, podemos escribir

$$\hat{K}_{\varepsilon}(u) = \int_S W(x')\,dx' \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{-i\,r\cos\varphi} - e^{-r}}{r}\, dr \quad . \tag{54}$$

Ahora es fácil ver que

1) $$\left| \int_{\varepsilon}^{1/\varepsilon} \frac{e^{-i\,r\,a} - e^{-r}}{r}\, dr \right| \leqslant A \lg 1/a + B \quad , \qquad a \leqslant 1 \quad ;$$

2) La integral precedente converge para todo $a \neq 0$, si $\varepsilon \to 0$.

La propiedad 2) es inmediata, pues para $r \to 0$, es $e^{-i\,r\,a} \sim 1 + O(r)$, $e^{-r} \sim 1 + O(r)$, y el integrando de 1) es acotado en el origen; y en el infinito esta integral se comporta esencialmente como una serie alternada. Para probar 1) basta observar que si $1/\varepsilon \leqslant 1$ entonces la integral de 1) es

$$\leqslant \int_0^1 \left[O(ar) + O(r) \right] r^{-1}\, dr = O(1)$$

y si $1/\varepsilon > 1$ entonces

$$\int_1^{1/\varepsilon} (e^{-i\,r\,a} - e^{-r})\, r^{-1}\, dr \leqslant A \log 1/a + B \quad ,$$

pues

$$\int_1^{1/\varepsilon} e^{-i\,r\,a}\, r^{-1}\, dr = \int_a^{a/\varepsilon} e^{-ir}\, r^{-1}\, dr =$$

$$= \int_a^1 + \int_1^{a/\varepsilon} e^{-ir}\, r^{-1}\, dr \leqslant A \log 1/a + B$$

De 1) resulta que la integral (54) está dominada por

$$\int_S W(x') \log|\cos\varphi|\, dx' \leqslant \text{cst} \int_S \left| W(x') \log|u'-x'| \right| dx' \quad .$$

Por lo recién visto la hipótesis (52a) implica (52), y la última integral es acotada. Luego el integrando de (54) está dominado por una función integrable, y en virtud de 2) y el teorema de paso al límite bajo la integral de Lebesgue, resultan a) y b), l,q,q,d.

B) En el caso $n = 1$ tenemos, salvo factor constante, una única transformación de Hilbert cuyo núcleo es $K(x) = 1/x$. En este caso se tiene

$$h(u) = \lim \hat{K}_\varepsilon(u) = -i \operatorname{sgn} u \quad (= -i \text{ si } u > 0\ ,\ = +i \text{ si } u < 0).$$

En efecto

$$\hat{K}_\varepsilon(u) = \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} \frac{e^{-ixu} - e^{ixu}}{x}\, dx = \frac{2i}{\pi}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} x^{-1} \operatorname{sen} ux\, dx \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{-2i \operatorname{sgn} u}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = -i \operatorname{sgn} u \quad .$$

Así pues en este caso es $|h(u)| = 1$, y como $\widehat{Hf} = \hat{f}\cdot\hat{h}$, resulta

$$\|Hf\|_2 = \|\widehat{Hf}\|_2 = \|\hat{f}\,\hat{h}\|_2 = \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$$

o sea $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$, luego Hf es un <u>operador unitario</u>. En particular existe el operador inverso, y se tiene: $\widehat{Hf} = (-i \operatorname{sgn} u)\hat{f}(u)$, luego

$$\hat{f}(u) = (i \operatorname{sgn} u)\widehat{Hf} = -(\widehat{Hf})(h(u)) \quad , \quad f = -H(Hf) \ .$$

Así pues

$$HHf = -If = -f \quad , \quad H^{-1} = H^* = -H \ . \tag{55}$$

B_1) Consideremos ahora el caso $n = 2$; aquí podemos escribir los puntos en forma compleja y poner

$$K(z) = \frac{W(\phi)}{|z|^2} \quad , \quad z = |z|\, e^{i\phi} = r\, e^{i\phi} \quad , \tag{56}$$

y $W(\phi)$ será una función periódica de ϕ en $(0, 2\pi)$. Como toda tal función se desarrolla en serie de Fourier $\sum c_k e^{ik\phi}$, vemos que aquí juegan un papel básico los núcleos de la forma

$$K^{(m)}(z) = e^{im\phi}/|z|^2 \quad , \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{56a}$$

(obsérvese que $m \neq 0$, pues en virtud de (51a) es $c_0 = \int_0^{2\pi} W(\phi)\, d\phi = 0$, de modo que la función $1 = e^{i0\phi}$ no puede ser función característica). Las transformadas correspondientes a $m = 1$ y $m = -2$ se llaman de M.Riesz y Beurling, respectivamente (en el último caso $K(z) = 1/z^2$ = función analítica de z).

Veamos que si $K = K^m$ es de la forma (56a) entonces $h(u) = \lim \hat{K}_\varepsilon(u)$ es igual a

$$h^{(m)}(u) = \widehat{K^{(m)}}(u) = \lim K_\varepsilon^{(m)}(u) = \begin{cases} \dfrac{(-i)^m e^{im\phi}}{m} & \text{si } m > 0, \quad u = |u|e^{i\phi} \\ \dfrac{(i)^m e^{im\phi}}{|m|} & \text{si } m < 0, \end{cases} \tag{57}$$

es decir

$$\widehat{K^{(m)}}(u) = \varepsilon_m K(u), \quad \varepsilon_m = (-i)^m/m, \quad \text{o'} \quad \varepsilon_m = i^m/|m| \tag{57a}$$

En efecto, si $u = |u|\, e^{i\alpha}$, $z = |z|\, e^{i\phi}$, se tiene

$$(u,z) = |x||u|\cos(\alpha - \phi), \quad \text{luego}$$

$$\hat{K}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\varepsilon<|z|<1/\varepsilon} e^{im\phi}\, r^{-2}\, e^{-ir|u|\cos(\alpha-\phi)}\, r\, dr\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} r^{-1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{im\phi - ir|u|\cos(\alpha-\phi)}\, d\phi =$$

$$= \frac{e^{im\alpha}}{2\pi} \int_\varepsilon^{1/\varepsilon} r^{-1}\, dr \int_0^{2\pi} e^{imt - i|u|r\cos t}\, dt .$$

Recordando que el valor de la función de Bessel $J_n(r)$ es n-imo coeficiente de Fourier de $e^{ir \operatorname{sen} \phi}$:

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir \operatorname{sen}\phi - in\phi}\, d\phi, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(r) = 1,$$

$$J_n(-r) = (-1)^n J_n(r), \quad J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r),$$

se obtiene que

$$\hat{K}_\varepsilon(u) \to \int_\varepsilon^\infty (-i)^m e^{ima} J_m(r|u|)/r\, dr \to (-i)^m e^{ima} \int_0^\infty \frac{J_m(r)}{r}\, dr .$$

Pero se sabe que la última integral es $= 1/m$ si $m > 0$, y si $m = -|m|$ ella es igual a $(-i)^m(-1/m)$, lo que prueba (57) (para las fórmulas usadas de funciones de Bessel ver p.ej. el libro de Titchmarsh, sobre integral de Fourier, pág. 182).

De (57) sigue que

$$\left| h^{(m)}(u)/\varepsilon_m \right| = \left| \hat{K}^m(u)/\varepsilon_m \right| = \left| e^{ima} \right| = 1 \quad ,$$

o sea el operador $L_m f = f * (K^{(m)}/\ _m)$ es <u>unitario</u>, pues

$$\| L_m f \|_2 = \| \hat{L_m f} \|_2 = \| \hat{f} \cdot |\hat{K}^m/\varepsilon_m| \|_2 = \| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2 \ .$$

Pongamos

$$H^{(1)}f = U f = f * K^{(1)} \quad , \quad K^{(1)}(z) = e^{i\phi}/|z|^2 \quad , \quad z = |z| e^{i\phi} \tag{58}$$

$$H^{(m)}f = f * K^{(m)} \tag{58a}$$

entonces $U f$ es un <u>operador unitario fijo</u> y para todo $m > 0$ vale

$$H^{(m)}f = \frac{1}{m} U^m f \quad , \quad H^{(-m)}f = \frac{(-1)^m}{m} U^{-m} f \quad , \tag{59}$$

donde $U^2 f = U U f$, $U^m f = U(U^{m-1} f)$; en efecto, tenemos por ejemplo

$$U U f = (f * K^{(1)}) * K^{(1)} \quad , \text{ luego } \hat{U^2 f} = \hat{f} \, (\hat{K}^{(-1)})^2 \quad ,$$

y por (57) es $(\hat{K}^{(1)})^2 = 2 \hat{K}^{(2)}$, o sea $U^2 f = 2 H^{(2)} f$, etc.

Sea ahora $W(\phi)$ tal que $|W| \lg(1 + |W|) \in L^1(0, 2\pi)$

Hemos visto en A) que entonces $H f = f * K$ existe como límite de $H_\varepsilon f$. Por otra parte, entonces la serie de Fourier de $W(\phi)$,

$$W(\phi) = \sum_{m \neq 0} c_m e^{im\phi} \tag{60}$$

es tal que $\sum |c_m|/m$ es convergente (ver Zygmund, Series trigonométricas, pág. 138, edición 1933).

Si $$K(z) = W(\phi)/|z|^2 \quad , \quad z = |z| e^{i\phi}$$

tendremos $$K(z) = \sum c_m K^m(z) \quad , \tag{60a}$$

$$H\,f = f * K = \sum c_m (f * K^m) = \sum_{m\neq 0} c_m H^{(m)} f$$

y formalmente podemos escribir, por (59),

$$H\,f = f * K = \sum_1^\infty \frac{c_m}{m} U^m f + \sum_1^\infty (-1)^m \frac{c_{-m}}{m} U^{-m} f \tag{61}$$

La serie (61) converge en media-2 para cada $f \in L^2$, pues siendo U^m unitarios,

$$\left\| \sum_M^N \frac{c_m}{m} U^m f \right\|_2 \quad \left(\sum_M^N \frac{|c_m|}{m} \right) \|f\|_2 \to 0 \qquad \text{para } M,N \to \infty$$

pues la serie $\sum |c_m|/m$ es convergente.

Así pues <u>todo operador de Hilbert H f se desarrolla en serie de Laurent del operador unitario U fijo</u> (Mijlin).

Asi pues si $W(\phi)$ se expresa mediante la función básica $e^{i\phi}$ por la fórmula (60), el operador H_W se expresa mediante el operador $U = H_{e^{i\phi}}$ mediante la serie (61). Así pues (61) asocia a la serie de Fourier (60) la serie

$$\sigma(\phi) = \sum_{m\neq 0} \varepsilon_m \frac{c_m}{|m|} e^{-im\phi} \quad , \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad m > 0 \\ (-1)^{|m|} & \text{si} \quad m < 0 \end{cases} \tag{62}$$

que se llama <u>el símbolo</u> del operador $H = f * K = H_W$.

Así pues todo operador de Hilbert tiene su característica (60) y su símbolo $\sigma(\phi)$. De (60a), (58a) y (57) tenemos

$$\sigma(\phi) = h(u) = \hat{K}(u) \quad , \qquad u = |u| e^{i\phi} \tag{62a}$$

Resumiendo, hemos probado que <u>si la característica verifica $|W| \log(1+|W|) \in L^1(0,2\pi)$ entonces (62) es absolutamente convergente de modo que el símbolo existe y es una función acotada, el operador $H\,f = f * K$ existe como límite de $H_\varepsilon f$, la serie (61) es convergente en L^2 y su límite es $H\,f$.</u>

Además, H f es un operador multiplicador, siendo el multiplicador $h(u) = \sigma(\phi)$, $\phi = \arg u$.

Veamos ahora, siguiendo a Zygmund, que si solo se supone que $W \in L^1$ y que (62) es la serie de Fourier de una función acotada $\sigma(\phi)$, entonces la serie (61) converge en L^2, en sentido de Cesaro, y su límite es un operador acotado en L^2 que puede tomarse como definición de Hf; pero es cuestión abierta si con estas hipótesis existe el límite $H_\epsilon f$ y si coincide con el límite de la serie (61). En efecto, siendo $W \in L^1$, los coeficientes c_k son $O(1)$ y los coeficientes de (62) son $O(1/m)$, y siendo $\sigma(\phi)$ acotada las medias aritméticas $\sigma_n(\phi)$ de (62) verifican $|\sigma_n(\phi)| \leq M$. De la forma más simple del teorema Tauberiano resulta entonces que $|S_m(\phi)| \leq M$ y $S_m(\phi)$ convergen, siendo S_m las sumas parciales de (62). De aquí, teniendo en cuenta (57) y el teorema de la página 34, resulta la convergencia en L^2 de las medias aritméticas de la serie (61), l.q.q.d.

Cada U^m es un operador unitario y en particular tiene inverso, luego todo operador $H^{(m)}f$ tiene inverso, y (57) permite escribir la fórmula de inversión. Pero un $Hf = H_W f$ general, puede no tener inverso: $H_W f = Hf$ tendrá inverso si el símbolo es continuo y $\sigma(\phi) \neq 0$ en todo ϕ. En efecto, de (62a) obtenemos $\widehat{Hf} = \hat{f}\, h(u) = \hat{f}\, \sigma(\phi)$, y como $1/\sigma(\phi) = \sigma_1(\phi)$ es finito en todo ϕ y continuo, tendremos $\hat{f} = (\widehat{Hf})\,\sigma_1$. Luego $f = H_{W_1}(H_W f)$ donde W_1 es una función característica tal que su símbolo sea σ_1. (Obsérvese que dada $\sigma(\phi)$ queda determinada $W(\phi)$ de (60) y (62)).

De aquí resulta clara la importancia de la noción de símbolo para las ecuaciones integrales singulares de la forma

$$\lambda f + H_W f = g \quad , \qquad (\lambda = \text{constante}) \tag{63}$$

donde g es una función dada de L^2 y f es la función incógnita. Pasando a transformadas de Fourier, tendremos

$$(\lambda + h(u))\,\hat{f}(u) = \hat{g}(u)$$

o sea

$$(\lambda + \sigma(\phi))\,\hat{f} = \hat{g}.$$

Luego si $\lambda + \sigma(\phi)$ es continua y $\neq 0$, la ecuación (63) tendrá solución en L^2, en virtud de lo que acabamos de ver.

Por lo que acabamos de ver es importante saber si el símbolo de un operador H_W es acotado (supuesto $W \in L^1$). Por eso puede ser útil la observación siguiente: Llamando $E(\theta) = \sum \varepsilon_m e^{im\phi}$ tendremos, en virtud de (62) y (60),

$$\sigma(\phi) = W * E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W(t)\, E(\phi - t)\, dt \,. \tag{64}$$

$$\text{Pero } E(\phi) = 2\sum_1^\infty \varepsilon_m \cos m\phi = (-i)\left[\cos\phi - \frac{\cos 3\phi}{3} + \frac{\cos 5\phi}{5} - \dots\right] -$$

$$-\left[\frac{\cos 2\phi}{2} - \frac{\cos 4\phi}{4} + \dots\right] = \frac{\pi}{4}(-i)\ \mathrm{sgn}\cos\phi - \frac{1}{2}\log 1/2\,|\cos\phi|)\ ,$$

luego

$$\sigma(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} W(t)\log\left(2^{-1}|\cos(\phi-t)|^{-1}\right)dt -$$

$$- i/8\int_{-\pi}^{\pi} W(t)\ \mathrm{sgn}\cos(\phi-t)\, dt \tag{64a}$$

Observando que si $W(\phi)$ es la integral indefinida de $W(\phi)$, y si $\tilde{W}$ es la función conjugada de $W(\theta)$,

$$\tilde{W} = W * 1/2\ \mathrm{cotg}\ \phi/2$$

entonces

$$\tilde{W}(\phi) = 1/\pi\int_{-\pi}^{\pi} W(t)\log \mathrm{sen}\ 1/2\ (\phi-t)\, dt$$

Luego obtenemos que si $\tilde{W}$ es acotada entonces el símbolo $\sigma(\phi)$ es acotado también.

Finalmente observaremos una vez más, que decir que $\sigma(\phi)$ es un símbolo equivale a decir que $h(u) = \sigma(\phi)$, $u = |u|e^{i\phi}$, es el multiplicador de un operador de Hilbert $H_W f$, es decir si definimos el operador Hf multiplicador que tiene a $\sigma(\phi) = h(u)$ por multiplicador, $\widehat{Hf} = \hat{f}\, h$, entonces $H f$ es un operador de Hilbert cuyo símbolo es $\sigma(\phi)$; si desarrollamos $\sigma(\phi)$ en serie de Fourier (62), el símbolo de $Hf = H_W f$ tendrá por serie de Fourier a (60).

En particular los operadores de Hilbert son operadores multiplicadores cuyos multiplicadores $h(u) = \sigma(\phi)$ son funciones homogéneas de grado cero, es decir, no dependen de $|u|$, o sea, son constantes sobre todo rayo que parte del origen. Recíprocamente si $h(u) = \sigma(\phi)$ no depende de ϕ, el operador multiplicador correspondiente será un operador de Hilbert, siempre que $\sigma(\phi)$ sea tal que al desarrollarla en serie (62) la serie (60) correspondiente determine una función $W(\phi)$ que verifique $|W|\log(1+|W|) \in L^1$. Por tanto casi todas las funciones $h(u)$ homogéneas de grado cero (en E^2) que se encuentran en la práctica son símbolos, es decir, los operadores multiplicadores correspondientes son operadores de Hilbert.

B_2) Sea ahora $n > 2$, por ejemplo consideremos el caso de E^3. Las transformaciones de Hilbert son ahora de la forma (50), (51). Ahora la función característica $W(x')$ está definida sobre la superficie de la esfera unitaria S de E^3 y no podemos usar desarrollo en serie de Fourier; ahora $W(x')$ se desarrolla en serie de armónicas esféricas $Y_m(x')$. Recordemos que una armónica esférica de orden m es una función de la forma $Y_m(x') = P_m(x)/|x|^m$ donde P_m es un polinomio homogéneo de grado m (en las 3 variables x_1, x_2, x_3 si $n = 3$, o n variables en E^n) que satisface la ecuación de Laplace $\Delta P = 0$. Para un mismo m tenemos varios Y_{mi} de grado m. Para $n = 2$ es $Y_m(x') = e^{im\phi}$, $x' = e^{i\phi}$. Por lo tanto en E^3 el papel de las funciones $e^{im\phi}$ lo hacen las armónicas $Y_m = Y_{m_i}$, y son de importancia especial los núcleos

$$K^{(m)}(x) = K^{(m,i)}(x) = Y_m(x')/|x|^3 , \quad x' = x/|x| \tag{65}$$

y los operadores correspondientes

$$H^{(m)}f = f * K^{(m)} \tag{65a}$$

Desarrollando la función característica $W(x')$ en una serie armónica $W = \sum Y_{m_i}$, el operador de Hilbert general $Hf = H_W f$ se desarrolla en una serie de operadores (65a):

$$W = \sum Y_{m_i} , \quad H_W f = \sum H^{(mi)}f = \sum f * K^{(m,i)} \tag{65b}$$

Según un resultado de Bochner (Proc. Nat. Acad. 1951, pág 804), la transformada de Fourier de $K^{(m)}$ es dada por

$$\hat{K}^m(u) = i^n Y_m(u') 2^{-m/2} \Gamma(m/2) \cdot \Gamma(m/2 + n/2) = \varepsilon_m Y_m(n') , \tag{66}$$

si $K^m(x) = Y_m(x')/|x|^n$, es decir es una función homogénea de grado cero que sobre la esfera S coincide con Y_m, salvo factor numérico ε_m. (Se entiende que $\hat{K}^m(u)$ se define como límite de $\mathcal{F}(k_\varepsilon^{(m)}(u))$ para $\varepsilon \to 0$).

A todo operador $H_W f$, dado por (65b), le corresponde entonces un símbolo

$$\sigma(u') = \sum \varepsilon_m Y_{m_i}(u') , \tag{66a}$$

y $H_W f$ es un operador multiplicador cuyo multiplicador $h(u)$ es una función homogénea de grado cero y $h(u) = h(u') = \sigma(u') =$ símbolo de H_W. En particular, todo operador multiplicador cuyo multiplicador h(u) es una función homogénea, dada por una combinación lineal finita de funciones armónicas, es un operador $H_W f$ de Hilbert. En particular, los multiplicadores

$$h(u) = x_j^2/(x_1^2 \;\ldots;\; x_n^2) \quad , \quad h(u) = x_i x_j/(x_1^2 \;\ldots\; x_n^2) \;, \;\ldots \tag{66b}$$

dan operadores de Hilbert, y en particular estos operadores son de tipo (p,p) para $1 < p < \infty$, y tipo débil (1,1).

Mientras que en caso $n = 2$, $Y_m = e^{ik\phi}$ no se anula y por lo tanto los operadores $H^m f$ correspondientes son invertibles, en el caso $n > 2$ las funciones Y_m se anulan y $H^m f$ no es invertible. Por eso para el caso $n = 3$ ($o\ n > 3$) Mijlin considera transformaciones vectoriales $\vec{Hf} = \vec{f} * K$ donde K es una matriz de 3×3, y $\vec{f}$ es un vector de 3 componentes, siendo cada elemento de K un núcleo de la forma (50). Es decir ahora la característica W(x) es una matriz y el símbolo es la matriz transformada de Fourier; ahora si el símbolo no es nulo entonces $\vec{Hf}$ es invertible y así se generaliza la teoría vista en B_1). Análogamente se procede para $n > 3$.

C) Hemos visto (pág. 168) que si $W(x')$ verifica la condición (15a) de la página 54, entonces $H_W f$ es de tipo (p,p) para $1 < p < \infty$: $\|H_W f\|_p \leq A_p \|f\|_p$, y de tipo débil (1,1).

Del teorema de Marcenkiewicz (pág. 118) se tiene para todo $1 < p \leq 2$ que $A_p \leq 2\left(p/(p-1) + p/(2-p)\right)^{1/p} A_1^{\,t} A_2^{\,1-t}$, luego resulta que:

$$A_p \leq A/(p-1) \quad \text{si} \quad 1 < p \leq 2 \;, \quad A_p \leq A p \quad \text{si} \quad p \geq 2 \tag{67}$$

De esta observación se deduce la siguiente propiedad de los operadores $H_W f$. Sabemos cuando es integrable $|Hf|^p$; podríamos preguntar cuando es integrable $\exp|\lambda H f| = e^{|\lambda H f|}$ y entonces hablar de tipos $(L^p, \exp(\lambda L))$.

Se tiene entonces: el operador Hf de Hilbert es de tipo $(L^\infty, \exp(\lambda L))$ sobre dominios acotados para $0 < \lambda \leq \lambda_0$. Más precisamente, <u>si $\|f\|_\infty \leq 1$, si $\lambda \leq e^{-1}/A$, y si f es nula fuera de un conjunto acotado S, entonces</u>

$$\int_S \exp \lambda |Hf| \, dx \leq A_S \tag{68}$$

En efecto, podemos suponer que S es la esfera unitaria $|x| \leq 1$; como $|f| \leq 1$ tenemos, usando (67):

$$\int_S e^{\lambda|Hf|} dx = \int_{|x|<1} e^{\lambda|Hf(x)|} dx \leq 2 \int_{|x|<1} 2 \cosh \lambda |Hf| dx =$$

$$= 2\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} \int_{|x|<1} |Hf(x)|^{2m} dx\right) \leq$$

$$\leq 2 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(2A\lambda m)^{2m}}{(2m)!} \int_{|x|<1} |f|^{2m} dx \leq$$

$$2 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{(2A\lambda m)^{2m}}{(2m)!}$$

y esta serie es finita si $\lambda A < e^{-1}$.

Análoga acotación se tiene para el operador maximal $Mf = \sup_{\varepsilon>0} |H_\varepsilon f|$.

D) En el caso 1-dimensional la transformada de Hilbert $\tilde{f} = f * 1/x$ se llama también función conjugada de f. El término se debe al hecho siguiente. Suponiendo que $f(x)$ es una función real integrable definida en $(-\infty, \infty)$, la integral de Cauchy $G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(z-t)^{-1}dt$ define una función holomorfa en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$. Las partes real e imaginaria de $G(z)$ son:

$$u(x,y) = y/\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[(t-x)^2 + y^2\right]^{-1} dt \quad ,$$

$$v(x,y) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ (x-t)\left[(x-t)^2 + y^2\right]^{-1} dt \quad .$$

Cuando $z = x + iy$ tiende al punto real $x_0 = x_0 + i0$, como se sabe, la integral de Poisson $u(x,y)$ tiende a $f(x_0)$, para casi todo x_0, mientras que $v(x,y)$ tiende a la transformada de Hilbert $\tilde{f}$ de f. Luego $f(t)$ y $\tilde{f}(t)$ son los valores en el contorno de dos funciones armónicas conjugadas en el semiplano superior.

Si en vez del semiplano tomamos el círculo, entonces $f(t)$ será una función periódica definida en $(0,2\pi)$, $z = x + iy = r e^{it}$ un punto del círculo, $r \leq 1$; resulta entonces que la integral de Cauchy de $f(t)$ dará dos funciones $u(r,t)$, $v(r,t)$ tales que $u(r,t)$ tiende a $f(t)$, para $r \to 1$, mientras que $v(r,t)$ tiende a $1/\pi \int_0^{2\pi} f(t)\ 1/2 \operatorname{cotg}(x-t)/2\ dt = 1/\pi\ f * 1/2 \operatorname{cotg} t/2$.

Así pues, al pasar de la recta $(-\infty, \infty)$ a la circunferencia $(0,2\pi)$, el análogo de la transformada de Hilbert es el operador $f * 1/2 \operatorname{cotg} t/2$; o sea el análogo del núcleo $K(x) = 1/x$ es el núcleo $K^*(x) = 1/2 \operatorname{cotg} t/2$. La transformada $f * K^*$ tiene todas las propiedades de la $f * K$, es de tipo (p,p) si $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$; ésto resulta inmediatamente observando que la cotg t se comporta igual que $1/t$ en el punto singular $t = 0$ (en el caso periódico las demostraciones se simplifican pues solo hay un punto singular $t = 0$, mientras que $1/t$ tiene también a $t = \infty$ como singular).

El núcleo $K^* = 1/2 \operatorname{cotg} t/2$ puede obtenerse del $K(t) = 1/t$ mediante la fórmula de periodización:

$$K^*(x) = K(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ K(x - m2\pi) - K(-m2\pi) \right\}$$

Calderón y Zygmund extendieron esta teoría de periodización al caso de núcleos de Hilbert n-dimensionales de la manera siguiente:

Sea $K(x)$ un núcleo de la forma (51) definido en todo el espacio E^n; sean $e_1, \ldots, e_n$ n vectores independientes de E^n y formemos un reticulado R de E^n formado por los puntos $x_0 = 0$, x_m, $m = (a_1, \ldots a_n)$, la forma

$$x_m = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_m e_n \tag{69}$$

donde los a_i recorren los números enteros $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Del núcleo K supondremos que su función característica $W(x')$, además de (51a), verifica esta otra condición (más restringida que la (15a) del capítulo II):

$$\int_0^1 u(a)/a \, da < \infty \tag{70}$$

donde $u(a)$ es el módulo de continuidad de $W(x')$, es decir

$$u(a) = \sup |W(x') - W(y')|$$

para los posibles x', y' de S tales que $|x'-y'| < a$. Formemos ahora el nuevo núcleo K^* definido por

$$K^*(x) = K(x) + \sum_{m \neq 0} \left\{ K(x - x_m) - K(-x_m) \right\} \tag{71}$$

Como la suma se extiende a todos los puntos x_m del reticulado R es evidente que $K^*(x)$ es un núcleo periódico con períodos $e_1, \ldots e_n$, es decir

$$K^*(x) = K^*(x + e_i)$$

para todo x y todo $i = 1, \ldots n$. Parecería natural tomar como definición de K^* la expresión $K(x) + \sum_{m \neq 1} K(x - x_m)$, pero esta serie no resulta convergente; en cambio la sustracción de $K(-x_m)$ en cada término hace que la serie (71) sea convergente, como vamos a probar enseguida.

Vamos a probar las propiedades siguientes:

a) La serie (71) converge absolutamente y uniformemente sobre todo compacto de E^n.

b) K^* es periódico, $K^*(x) = K^*(x+e_i)$.

b_1) Supondremos que los vectores e_i son ortogonales de longitud 1, situados en los ejes coordenados. Si Q es el cubo "fundamental" formado por los puntos $x = \{\xi_1, \dots \xi_n\}$ tales que $|\xi_i| \leq 1/2$, podemos suponer que K^* está definida en Q, pues $K^*(x) = K^*(\xi_1, \dots \xi_n)$ será función de período 1 en cada variable ξ_i. Para toda $f(x) = f(\xi_1, \dots \xi_n)$ definida en Q y de período 1 en cada variable, consideraremos el operador

$$H^*f = f * K^* = \int_Q f(x-y)K^*(y)\,dy \quad , \tag{72}$$

que se llamará la periodización del operador $Hf = f * K$.

c) Siendo K^* periódica en Q, podemos considerar sus coeficientes de Fourier

$$k_m = \int_Q K^*(y)\, e^{-2\pi i(m,y)}\,dy \; , \quad \text{donde } m = (\mu_1, \dots \mu_n) \tag{73}$$

siendo μ_i enteros.

Vamos a probar que

$$k_m = \hat{K}(m) = \text{valor de la transformada de Fourier de } K \text{ en } u = m \; , \tag{74}$$

siempre que sea $m \neq 0 = (0,0, \dots 0)$.

Para probar a) consideremos dos puntos x,y muy distantes del origen 0 y tales que $|x-y| \leq d =$ fijo.

Tenemos que

$$|K(x) - K(y)| = \left|W(x')/|x|^2 - W(y)/|y|^2\right| \leq$$

$$\leq |W(x')|\,\left|1/|x|^2 - 1/|y|^2\right| + 1/|y|^2\,|W(x) - W(y)| = I + II.$$

Siendo $|x|$, $|y|$ grandes, será

$\cdot I \leq \text{const.}\ d/|x|^3 \quad , \quad II \leq u(d/|x|)/|y|^3 \leq \text{const.}\ u(1/|x|)/|x|^2$.

Luego si en (71) es $|x| \leq d$, para m grande serán $|x - x_m|$ y $|x_m|$ grandes, y en virtud de la observación recién hecha tendremos

$$\left| K(x - x_m) - K(-x_m) \right| \leq \text{cst} \left\{ d/|x_m|^3 + u(d/|x_m|)/|x_m|^2 \right\}$$

Como (70) implica que: $\sum_m u(d/|x_m|)/|x_m|^2$ (que es esencialmente $=$ $= \iint W(d/r)/r^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} W(d/r)/r^2\, dx\, dy < \infty$) es convergente, luego esto prueba a).

Para probar b) basta observar que $K^*(x) - K^*(x + e_1) = \sum_m \left\{ K(x - x_m) - K(x - (x_m - e_1)) \right\}$, y que al recorrer $m = (\mu_1, \ldots \mu_n)$ todos los enteros μ_i, x_m y $x_m - e_1$ recorren ambos el reticulado R, de modo que la expresión que precede es igual a cero.

Para probar c), sea $Q_0 = Q$, $Q_m =$ el cubo de centro x_m congruente al cubo fundamental Q, y sea $C(\varepsilon) =$ la esfera con centro en el origen y radio $\varepsilon \leq 1/2$. Entonces

$$\int_{Q-C(\varepsilon)} K^*(y)\, e^{-2\pi i (m,y)}\, dy = \int_{Q-C(\varepsilon)} K(y)\, e^{-2\pi i (m,y)}\, dy +$$

$$+ \sum_{m \neq 0} \int_{Q-C(\varepsilon)} \left\{ K(y - x_m) - K(-x_m) \right\} e^{-2\pi i (m,y)}\, dy \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_Q K(y)\, e^{-2\pi i (m,y)}\, dy + \sum_{m \neq 0} \int_{Q_m} K(y)\, e^{-2\pi i (m,y)}\, dy =$$

$$= \int_{E^n} K(y)\, e^{-2\pi i (m,y)}\, dy$$

El último paso se justifica fácilmente teniendo en cuenta a) y que $K(y) = 0\,(|y|^{-n})$ para $|y|$ grande. Con esto queda probado c)

De estas propiedades es fácil deducir ahora el siguiente:

TEOREMA 3 . (Calderón - Zygmund) Si f es integrable en Q, la integral $H^* f$ dada por (72) existe para casi todo x . El operador $H^* f$ es de tipo (p,p) , si $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1,1)$, sobre Q . Además si c_m son los coeficientes de Fourier de f , k_m los de K^*, c_m^* los de $f^* = H^* f$, entonces

$$c_m^* = c_m k_m \qquad (75)$$

si $m \neq 0$ y si $f \in L^p$, $p > 1$.

En efecto, teniendo en cuenta la definición de $K(x)$ y $K^*(x)$, se ve que

$$|K^*(x) - K(x)| \leq M$$

para todo x de $|x| < 1$. Luego $H^* f = f * K^*$ difiere de $Hf = f * K$ (restringida a Q: $f = 0$ fuera de $|x| < 1$) en una función $f * (K - K^*)$ que es integrable. Por tanto $H^* f(x)$ existe en todo x en que existe $Hf(x)$, además $|Hf(x) - H^* f(x)| \leq M \|f\|_1$. Luego $|H^* f| \leq |Hf| + M \|f\|_1$,

$$\|H^* f\|_{p,Q} \leq \|Hf\|_{p,Q} + M\|f\|_1 \leq M_p \|f\|_{p,Q} + M\|f\|_p \leq M_p \|f\|_p .$$

De donde resulta que $H^* f$ es de tipo (p,p), y (75) resulta fácilmente de c).

Haciendo en particular $K(x) = Y_p(x')/|x|^p$, Y_p = función esférica = $= P(x)/|x|^p$, $\Delta P = 0$, obtendremos el siguiente

TEOREMA 3a . Sea $P(x)$ un polinomio homogéneo de grado p , $x = \{\xi_1, \ldots \xi_n\}$ que satisface la ecuación de Laplace $\Delta P = 0$. Dada una función integrable en Q

$$f(x) \sim \sum c_m e^{2\pi i (m,x)} \qquad (76)$$

consideremos la serie

$$H^* f = f^* = \sum_{m \neq 0} c_m \cdot \frac{P(m)}{|m|^p} e^{2\pi i (m,x)} \qquad (76a)$$

que se obtiene de la anterior mediante el multiplicador $Y_p(m) = P(m)/|m|^p$.

Entonces el operador multiplicador $H^{*}f$ es de tipo (p,p) si $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$ en Q, y si $f \in L^{p}$, $p > 1$, (76a) es serie de Fourier de $H^{*}f$ (y lo mismo es cierto si $|f|\log(1+|f|) \in L^{1}$ pues entonces $H^{*}f$ es integrable y (76a) es serie de Fourier).

Si $n = 1$ la serie (76a) se reduce a la serie conjugada de la (76). Por tanto el método de periodización de Calderón - Zygmund permite definir el concepto de serie conjugada de Fourier en n-dimensiones, y para $n > 1$ tendremos infinitas series conjugadas, pues hay infinitos núcleos de Hilbert K.

Haciendo $P(x) = \xi_{j}$, $P(x) = \xi_{i}\ \xi_{j}$, ...

obtenemos que los multiplicadores (66b) dan operadores de tipo (p,p), $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1,1)$ (ahora los multiplicadores se toman con series y no integrales de Fourier, es decir, en Q y no en E^{n}).

Para $1 < p < \infty$ este caso particular de un importante teorema de Marcinkiewicz, quien solo consideró el caso $p > 1$ y que lo demostró usando funciones analíticas y teoría de series de Walsh.

E) A los operadores de Hilbert están estrechamente vinculados los llamados operadores con núcleos radicales. Por ejemplo en la teoría de integrales de Fourier tenemos la integral de Dirichlet

$$D_{N}f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen} Nt}{t}\,dt = f * K \qquad (77)$$

donde $K(t) = (\operatorname{sen} Nt)\cdot t^{-1} = h(t)/t$, $h(t) = \operatorname{sen} Nt$ (que para integrales es el análogo de la suma N-ima de la serie de Fourier). $D_{N}f$ es pues un operador de convolución con el núcleo K igual al núcleo de Hilbert $1/t$ multiplicado por $h(t)$. Aquí $h(t)$ es una función especial: si $\gamma(u)$ es la función escalera a 3 escalones que tiene en los puntos $\pm N$ los saltos ± 1, entonces

$$h(t) = 1/2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}\, d\,\gamma(u) \quad , \tag{77a}$$

es decir, $h(t)$ es la integral de Fourier-Stieltjes de $\gamma(u)$. Esto llevó a Zygmund a considerar operadores del tipo:

$$F(x) = Tf(x) = \int_{E^1} f(x+t)\, h(t)\, t^{-1}\, dt \tag{78}$$

donde $h(t)$ es de la forma (77a). Para $h = 1$, Tf se reduce a la transformada de Hilbert, para $h = \text{sen } t$ a la integral de Dirichlet; estos operadores unifican pues dos teorías importantes del análisis de Fourier. La expresión (78), como en el caso de la transformada de Hilbert, se entiende como límite de

$$T_{\varepsilon} f = F_{\varepsilon} = \int_{|t|>\varepsilon} f(x+t)\, h(t)\, t^{-1}\, dt \tag{78a}$$

<u>LEMA 9</u> . (Zygmund) <u>Si $\gamma(u)$ es una función a variación acotada y $h(t)$ dada por (77a), entonces el operador (78) es de tipo (p,p) para todo $1 < p < \infty$ y</u>

$$\| F \|_p \leq M_p V \| f \|_p \tag{79}$$

<u>donde V es la variación total de $\gamma(u)$. Además para toda $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $F_{\varepsilon}(x)$ converge a $F(x)$ para casi todo x.</u>

<u>Demostración</u>. Sabemos que el operador maximal $M f(x) = \sup H_{\varepsilon} f(x)$ (ver fórmulas (60) y (61), pag. 154) verifica $\| M f \|_p \leq A_p \| f \|_p$. Aplicando esta desigualdad a la función $f(x) \cdot e^{ixu}$ tendremos

$$\left\| \int_{|t|>\varepsilon} f(x+t)\, e^{itu}\, t^{-1}\, dt \right\|_p \leq A_p \| f \|_p \quad ,$$

donde ε puede variar con x.

Ahora, como se sabe, la desigualdad de Minkowski

$$\left\| \sum_i f_i \right\|_p \leq \sum_i \| f_i \|_p$$

vale si la suma $\sum_i$ se cambia por la integral, es decir se tiene

$$\left\| \int g(x,u) \, d\,\gamma(u) \right\|_p \leq \int \| g(x,t) \|_p \, |d\,\gamma(u)| \, , \tag{80}$$

donde la norma se toma respecto de la variable x. Tendremos pues

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} d\,\gamma(u) \int_{|t|>\varepsilon} f(x+t)\, e^{itu}\, t^{-1} dt \right\|_p \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \int_{|t|>\varepsilon} f(x+t)\, e^{itu}\, t^{-1} dt \right\|_p |d\,\gamma(u)|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} A_p \|f\|_p \, |d\,\gamma(u)| = A_p \|f\|_p V \, . \tag{81}$$

Pero cambiando el orden de integración en el primer término de (81), esta desigualdad se escribe

$$\left\| \int_{|t|>\varepsilon} f(x+t)\, h(t)\, t^{-1} dt \right\|_p \leq A_p V \|f\|_p \, ,$$

o sea

$$\| F_\varepsilon \|_p \leq A_p V \|f\|_p \, .$$

Como ε puede variar con x, en realidad hemos probado que si

$$M_1 f(x) = \sup_{\varepsilon>0} |T_\varepsilon f(x)| \quad \text{entonces} \quad \|M_1 f\|_p \leq A_p V \|f\|_p \, ,$$

o sea el operador maximal de T_ε es de tipo (p,p).

De aquí se deduce enseguida, usando el teorema 12 de la pág. 160, que $T_\varepsilon f$ converge puntualmente en L^p, $1 < p < \infty$, y que vale (79), l.q.q.d.

Haciendo $h(t) = \operatorname{sen} Nt$ obtenemos el siguiente teorema importante de M. Riesz:

$$\| D_N f \|_p \leq A_p \|f\|_p \quad , \quad 1 < p < \infty \quad , \tag{82}$$

donde A_p no depende de N, siendo D_N la integral de Dirichlet. De aquí se deduce fácilmente que si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, entonces $\|f - D_N f\|_p \to 0$ para $N \to \infty$. O sea, la integral (o serie) de Fourier de una función f de L^p, $1 < p < \infty$, es siempre convergente en media-p (es decir las "sumas parciales" de la serie convergen en media-p).

Observación 11 . Análogamente si $K(t) = w(t')|t|^{-n}$ es un núcleo de Hilbert en E^n, y si $K_\gamma(t) = K(t)\,h(|t|)$, donde h es de la forma (77a), Calderón y Zygmund han probado, bajo ciertas condiciones suplementarias, que el operador $Tf = f * K_\gamma$ es de tipo (p,p) si $1 < p < \infty$; y que $T_\varepsilon f$ converge puntualmente a Tf si $f \in L^p$. (Ver el trabajo de estos autores en Amer. Journal of Math., 1956, pág 289-309). Usando este resultado ellos obtuvieron la siguiente generalización importante del teorema de Riesz (82) a n dimensiones. En efecto, en el caso $n = 1$ la serie (o integral de Fourier de una f integrable es sumable Cesaro de orden α para todo $\alpha > 0$, pero no para $\alpha = 0$ (que equivale a convergencia ordinaria) siendo así $\alpha = 0$ el orden "crítico". El teorema (82) de Riesz dice que para $\alpha = 0$, si bien no hay convergencia puntual, por lo menos hay convergencia en media-p. En caso de $n > 1$ el orden crítico no es $\alpha = 0$ sino $\alpha = (n-1)/2$ (si $n = 1$ obtenemos $\alpha = 0$), y se presenta el problema de si las medias aritméticas de orden $(n-1)/2$ convergen en media-p, si $f \in L^p$. Calderón y Zygmund mostraron que si $n = 1, 3, 5, \ldots$ es impar, dichas medias aritméticas pueden expresarse por una integral del tipo $Tf = f * K_\gamma$ mencionado, y por lo tanto el problema tiene solución afirmativa. Este resultado fué completado por E. Stein en el trabajo ya mencionado de Trans. Amer. Math. Society, vol. 83 (1956).

Observación 12 . Vimos que a todo operador de Hilbert $H_w f$ le corresponde una característica $w(t')$ y un símbolo $\sigma(\phi)$ (ver (62)). El símbolo da el desarrollo de H_w en serie de Laurent (61). Además como el símbolo es la transformada de Fourier del núcleo, resulta que el símbolo del producto (composición) de dos operadores de Hilbert es igual al producto de los símbolos. Si $|\sigma(\phi)| > a > 0$, entonces $\sigma_1 = 1/\sigma$ es el símbolo del operador inverso (y el operador es invertible). Como el símbolo es una función $\sigma(\phi)$ definida sobre la esfera unitaria S, resulta que a todo operador H de Hilbert le corresponde biunívocamente una función sobre S, de modo que la suma y producto de operadores se convierten en las operaciones comunes con funciones, o sea el álgebra de los operadores de Hilbert queda representada por un álgebra de funciones definidas en S. Esta representación se debe a Giraud y Michlin, y fué perfeccionada por Calderón y Zygmund (ver Algebras of certain Singular Operators, Amer. Journ. Math. (1956), pp. 310-320). Más aún, Calderón y Zygmund mostraron en dicho trabajo que los operadores $H_w f$ con característica $w \in L^p(S)$, $1 < p < \infty$, forman un álgebra de Banach respecto de la norma $\|w\|_p$, que H_w tiene inverso si y solo si su símbolo es $\neq 0$ en S, y que el espacio de los ideales maximales de este álgebra es homeomorfo a S.

Más aún: los operadores de Hilbert son de convolución, es decir son operadores integrales cuyo núcleo $K(x,y) = K(x-y)$ solo depende de $x-y$, además $K(x-y) = w((x-y)')\,|x-y|^n$. Girau, Toicomi y Michlin han estudiado integrales singulares mas generales del tipo

$$Kf(x) = \int_{E^n} K(x\ ,\ x-y)\ f(y)\ dy = \int_{E^n} \frac{w(x\ ,\ (x-y)')}{|x-y|^n}\ f(y)\ dy \ ; \qquad (83)$$

donde $(x-y)' = (x-y)/|x-y|$; es decir es vez de núcleos $w((x-y)')/|x-y|^n$ se toman núcleos $w(x\ ,\ (x-y)')/|x-y|^n$. Esto equivale a considerar núcleos $K(x,z)$ donde para cada x fijado, $K(x,z)$ es función homogénea de z de grado $-n$, o sea $K(x,z) = w(x,z')\,|z|^{-n}$. Por ej. si $n = 2$, será $K(x,z) = w(x,\theta)\,|r|^{-n}$ donde $z = r\,e^{i\theta}$. Si desarrollamos ahora $w(x,\theta)$ es serie de Fourier respecto de θ, los coeficientes dependerán de x:

$$w(x,\theta) = \sum_{m\neq 0} c_n(x)\ e^{-in\theta} \qquad (83a)$$

Tendremos pues que

$$K f(x) = \sum_{m\neq 0} c_n(x) \int_{E^n} f(y) \frac{e^{-in\phi}}{\rho^n} dy \qquad (84)$$

donde $\rho e^{i\phi} = x - y$. El operador Kf queda así desarrollado (formalmente por ahora) en una serie de operadores $H^{(m)}f$ (ver (59)), es decir en vez del desarrollo (61) tenemos ahora el siguiente

$$Kf = \sum_{m\neq 0} \frac{c_m(x)}{m} (-1)^m U^m f \quad . \qquad (84a)$$

La única diferencia es que los coeficientes c_m dependen ahora de x. Análogamente se procede en caso de $n \geqslant 2$. Por lo tanto podemos definir también ahora el <u>símbolo</u> del operador K como

$$\sigma(\phi) = \sum_{m\neq 0} \varepsilon_m \frac{c_m(x)}{|m|} e^{im\phi} \qquad (84b)$$

(si $n > 2$ se usarán las funciones esféricas armónicas Y_m en vez de $e^{im\phi}$).

Pero ahora, como los coeficientes $c_m(x)$ dependen de x, el símbolo de un producto K_1K_2 no es igual al producto de los símbolos. Sin embargo se prueba que esto es cierto salvo un operador "bueno" (no-singular y completamente continuo). Es decir, el producto de los símbolos es el símbolo de un operador igual a K_1K_2 más un operador de núcleo integrable (no singular). De este modo toda la teoría se desarrolla <u>módulo operadores "buenos"</u> (y más precisamente módulo operadores completamente continuos). Esta teoría fué desarrollada por Giraud y Michlin en forma no del todo completa. La teoría completa fué lograda en el trabajo de Calderón y Zygmund, Singular Integral Operators and Differential Equations, Amer. Journal Math (1956), vol 79, pp. 901-921.

6 . APLICACION A LA ACOTACION A PRIORI DE ECUACIONES DIFERENCIALES

A) Las propiedades de tipo (es decir de continuidad) de los operadores de Hilbert $H_w f$ y los potenciales $H_d f$ encuentran muchas aplicaciones en las ecuaciones diferenciales.

Consideremos por ejemplo una función $g(x) = g(x_1, x_2)$ y sean:

$$f(x) = \Delta g = \partial^2 g/\partial x_1^2 + \partial^2 g/\partial x_2^2 , \quad h(x) = \partial^2 g/\partial x_1 \partial x_2 .$$

La transformada de Fourier de f es (formalmente) igual a $(u_1^2 + u_2^2)\hat{f}(u)$, y la de h a $u_1 u_2 \hat{f}(u)$, luego $\hat{h}(u) = p(u)\hat{f}(u)$ donde

$$p(u) = u_1 u_2/(u_1^2 + u_2^2)$$

Por tanto si consideramos el operador $h = Tf$ que vincula el Laplaciano $f = \Delta g$ de g con la segunda derivada h, se ve que este es un operador multiplicador dado por el multiplicador $p(u)$. Pero este multiplicador es caso particular de los considerados anteriormente (ver fórmula (66b)), luego este operador es una transformación de Hilbert y por lo tanto de tipo (p,p), $1 < p < \infty$ Así pues los operadores H_d aparecen al vincular derivadas del mismo orden.

Por otra parte los operadores potenciales H_d aparecen, como vimos, en la teoría de los espacios y teoremas de inmersión de Sobolev, y estos espacios y teoremas se aplican en un gran número de problemas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, especialmente en los métodos variacionales cuando se busca el mínimo de cierta forma cuadrática sobre una variedad de funciones. Por ejemplo, la solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ se obtiene resolviendo el problema del mínimo de la integral de Dirichlet

$$(\|u\|_1)^2 = \int_D \sum_{i=1}^{n} (\partial u/\partial x_i)^2 \, dx$$

para las funciones que satisfacen a los datos del contorno. Groseramente hablando, la integral de Dirichlet es el cuadrado de la norma de u en el espacio $W_2^{(1)}$ de Sobolev. Luego se puede decir, que entre todas las funciones u que satisfacen a los datos del contorno hay una de mínima norma (en $W_2^{(1)}$) y ésta da la solución del problema de Dirichlet. Análogamente para la ecuación poliarmónica $\Delta^m u = 0$ se busca la función con mínima norma en $W_2^{(m)}$. Se prueba además que la sucesión minimizante converge en norma $W_2^{(m)}$ hacia la solución. Para todas esas cuestiones es importante el hecho de que $W_p^{(m)}$ es completo. Pero al trabajar con $W_p^{(m)}$ el espacio y no con $B_p^{(m)}$ (que no es completo, ver pág 261) la función u(x) de $W_p^{(m)}$ está definida salvo medida nula, y surge entonces la pregunta que se entiende por valores de u en el contorno, el cual por ser variedad de dimensión menor tiene medida nula y u(x) puede no estar definida allí. Esta dificultad la solucionan los teoremas de inmersión que afirman que para p suficientemente grande la función u(x) de $W_p^{(m)}$ es continua sobre variedades de dimensión menor.

Hablando rápidamente, los teoremas de inmersión aseguran la continuidad de los operadores que vinculan derivadas de distintos órdenes (y en diferentes dimensiones), y los teoremas de las transformadas de Hilbert aseguran la continuidad de operadores que vinculan derivadas del mismo orden.

Para dar una idea como ambos tipos de teoremas se combinan en aplicaciones a ecuaciones diferenciales, consideraremos algunos teoremas mas sencillos sobre la acotación a priori de ecuaciones elípticas, enviando a la literatura para un estudio mas profundo del tema.

B) Indicaremos con $[a] = (a_1, \ldots, a_n)$ a una n-upla de números no-negativos, con $|[a]| = a_1 + \ldots + a_n$, y con $D^{[a]}f = \partial^{|[a]|} f/(\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n})$ Sea D un dominio acotado de E^n, con frontera "buena";

$$\|f\|_{(\ell,p,D)} = \|f\|_{(\ell,p)} \text{ indicará la norma de } W_p^{(\ell)} \ ;$$

$$\|f\|_{(\ell,p,D)} = \|f\|_p + \sum_{|[a]|=\ell} \|D^{[a]}f\|_p \ , \qquad (85)$$

donde las normas p se toman sobre el dominio D.

Hemos visto que en $W_p^{(\ell)}$ hay otras normas equivalentes a la (85), tales como la (42), (43), (44). En las normas (42) - (44) varía el primer sumando de (85), pero la segunda suma permanece la misma. Cabe preguntar si no es posible obtener una norma equivalente tomando, en vez de la suma de las normas-p de todas las derivadas de orden ℓ, la norma-p de ciertas combinaciones lineales de estas derivadas. Resulta que esto es así siempre que se tomen combinaciones de "tipo elíptico", y en este hecho se funda la teoría de coercitividad y de acotación a priori.

Por ejemplo, formalmente no hay motivo de suponer que la norma

$$\left\| \partial^2 f / \partial x_1^2 + \partial^2 f / \partial x_2^2 \right\|_2$$

sea mas grande que la norma

$$\left\| \partial^2 f / \partial x_1^2 \right\|_2 \quad \text{o que la} \quad \left\| \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 \right\|_2 .$$

Sin embargo, según lo observó por primera vez S. Bernstein en el caso de D = círculo, esto es efectivamente así siempre que la f se anule en el contorno. En efecto, se tiene el siguiente

<u>Teorema de Bernstein</u>. <u>Si D es un círculo plano, si $f \in B_2^{(2)}(D)$ y si f se anula en el contorno Γ de D (y es continua en $D + \Gamma$), entonces</u>

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx_1 \cdot dx_2 \leq \iint_D |\Delta f|^2 dx_1 dx_2 \tag{86}$$

<u>y por lo tanto para toda derivada $D^{[a]} f$ de orden 2, $|[a]| = 2$, vale</u>

$$\left\| D^{[a]} f \right\|_2 \leq \left\| \Delta f \right\|_2 = \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right\|_2 \tag{86a}$$

<u>luego</u>

$$\left\| f \right\|_{W(2,2,D)} \leq \left\| \Delta f \right\|_2 + \left\| f \right\|_2 \tag{87}$$

Demostración. Sea $\Delta f = g$; elevando al cuadrado e integrando sobre D se tiene

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)^2\right] dx_1 dx_2 = \iint_D |f|^2 \, dx_1 dx_2 ,$$

luego basta probar que es no-negativa la integral

$$J = \iint_D \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2\right] dx_1\, dx_2 = J_1 - J_2$$

Integrando por partes se obtienen las igualdades siguientes:

$$J_1 = -\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\, dx_1 - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_1^2\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2$$

$$J_2 = -\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1 - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\, \partial x_2^2}\, dx_1\, dx_2$$

de donde se obtiene fácilmente que

$$J = \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial x_1}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial f}{\partial x_2}\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

pasando a coordenadas polares (suponiendo que D es el círculo unitario), se obtiene fácilmente que

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)^2\right] d\phi$$

y cómo f se anula sobre Γ , resulta

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 d\phi \geq 0$$

l.q.q.d.

Por el teorema de inmersión si $f \in W_2^{(2)}$ entonces f es continua sobre la frontera Γ de D (D= círculo), luego podemos hablar de <u>valores de f sobre Γ</u>.

Luego de la desigualdad (87) resulta que si $W^0(2,2)$ es el subespacio de $W_2^{(2)}(D)$ formado por las f que se anulan en el contorno, entonces en $W^0(2,2)$ tenemos que $\|\Delta f\|_2 + \|f\|_2$ es una norma equivalente a la dada por (85). O sea, Δf es una combinación especial de las derivadas parciales de segundo orden, tal que ella sola domina en norma a todas las derivadas de orden 2.

<u>Ejemplo 1</u>. Si $f \in W^0(2,2)$ entonces las segundas derivadas de f pertenecen a $L^2(D)$ y por lo tanto $\Delta f \in L^2(D)$. Luego Δ es un operador que transforma $W^0(2,2)$ en (una parte de) $L^2(D)$. En base al teorema de Bernstein y los teoremas de inmersión vamos a probar que: <u>si D es un círculo, entonces existe el operador inverso Δ^{-1}, que es acotado y definido sobre L^2</u>. Esto significa que: 1) $\Delta f = \Delta g$, f, g de $W^0(2,2)$, implica $f = g$; 2) dada $h \in L^2(D)$ existe una única $f \in W^0(2,2)$ tal que $\Delta f = h$; 3) $\|\Delta^{-1}h\|_{(2,2)} \leq M \|h\|_2$ o sea poniendo $f = \Delta^{-1}h$ esto equivale a 3a) $\|\Delta f\|_2 \geq m \|f\|_{(2,2)}$ $m > 0$ si $f \in W^0(2,2)$. Vamos a probar antes 3a).

Si ponemos $|||f||| = \int_\Gamma |f| dx + \sum_{|[a]|=2} \|D^{[a]} f\|_2$ donde Γ = frontera de D, sabemos que la norma $|||f|||$ es equivalente a la $\|f\|_{(2,2)}$ o sea $\|f\|_{(2,2)} \leq M\, |||f|||$. Si $f \in W^0(2,2)$, es decir si f es nula sobre Γ, tenemos que $|||f||| = \sum \|D^{[a]} f\|_2$ y por el teorema de Bernstein es entonces

$$|||f||| = \sum_{|a|=2} \|D^{[a]} f\|_2 \leq \|\Delta f\|_2$$

Resulta así $\|f\|_{(2,2)} \leq M \|\Delta f\|_2$, si $f \in W^0(2,2)$, que es 3a) con $m = 1/M$.

De 3a) resulta 1), pues si $\Delta f = \Delta g$, es $\Delta(f - g) = 0$, y de 3a) sigue

$$\|f - g\|_2 \leq \|f - g\|_{(2,2)} \leq \|\Delta(f - g)\|_2 = 0 ,$$

luego $f = g$.

Para probar 2), observaremos antes que para todo polinomio h existe una $f \in W^0(2,2)$ tal que $\Delta f = h$ (más aún, por el método de coeficientes indeterminados $f(x) = f(x_1,x_2)$ es de la forma $(x_1^2 + x_2^2 - 1)P(x_1,x_2)$ donde P es también un polinomio). Dada $h \in L^2$ cualquiera, sea h_n una sucesión de polinomios tales que $\| h - h_n \|_2 \to 0$. Para cada h_n tenemos una $f_n \in W^0(2,2)$ con $\Delta f_n = h_n$ y por 3a) $\|f_n - f_m\|_{(2,2)} \leqslant M \|h_m - h_n\|_2 \to 0$. Luego f_n converge en $W_2^{(2)}$ hacia una f y tiene que ser $f \in W^0(2,2)$ (esto último resulta del hecho que la norma $|||f|||$ equivale a la de $W_2^{(2)}$, y si cada $|f_n|$ tiene integral nula en Γ lo mismo será cierto para el límite $|f|$, luego $|f| = 0$ en Γ). Como las segundas derivadas de f_n tienden a las de f, resulta $\Delta f_n \to \Delta f$ en L^2, luego $\Delta f = h$, l,q,q,d.

Ejemplo 1a . Sea dada la ecuación

$$\Delta f + \lambda (af + b \frac{\partial f}{\partial x_1} + c \frac{\partial f}{\partial x_2}) = 0 \text{ , } f = 0 \text{ sobre } \Gamma \quad (*)$$

donde Γ = circunferencia unitaria, $f \in W_2^{(2)}$ (luego $f \in W^0(2,2)$). Por lo visto en el ejemplo 1, existe el operador continuo Δ^{-1}, y aplicándolo a ambos miembros de (*) resulta una ecuación de la forma

$$f + \lambda Tf = 0 \text{ , } Tf = \Delta^{-1}(af + b \frac{\partial f}{\partial x_1} + c \frac{\partial f}{\partial x_2}) = \Delta^{-1}T_1 \quad (**)$$

y la ecuación (*) equivale a la $f + \lambda Tf = 0$. Evidentemente T_1 transforma continuamente $W^0(2,2)$ en $W_2^{(1)}$ y por los teoremas de inmersión el operador idéntico es completamente continuo de $W_2^{(1)}$ en L^2, luego T_1 es completamente continuo de $W^0(2,2)$ en L^2. Como por lo visto Δ^{-1} es continuo de L^2 en $W^0(2,2)$ resulta que T es un operador completamente continuo de $W^0(2,2)$ en $W^0(2,2)$. Luego la ecuación $f + \lambda Tf = 0$ es una ecuación del tipo de Fredholm-Riesz, y de la teoría de Riesz - Schauder se sabe que para estas ecuaciones valen los teoremas de Fredholm. Por ejemplo los λ para los cuales esta ecuación tiene solución son en número numerable son un solo punto de acumulación, a lo sumo.

Luego estos teoremas valen también para la ecuación dada (*).

Se presenta así la cuestión general de que otras combinaciones de derivadas de orden-ℓ dominan (en norma) a las demás derivadas. Más precisamente:

Sea $T = Tf$ un operador diferencial de orden ℓ definido para las f de $B_p^{(\ell)}(D)$ (o de $W_p^{(\ell)}(D)$), es decir que a toda f de $B_p^{(\ell)}$ le hace corresponder una función Tf de $L^p(D)$ (en el caso que precede se tenía $Tf = \Delta f$). Sea W un subconjunto fijo de $W_p^{(\ell)}(D)$ (en el caso precedente W era $W^0(2,2)$). Se dice que T es <u>coercitivo</u> sobre W respecto de la norma p, si para todo $|[a]| = \ell$ se verifica

$$\|D^{[a]}f\|_p \leq M\left\{\|Tf\|_p + \|f\|_p\right\}, \quad (|[a]| = \text{orden de } T) \quad , \tag{88}$$

donde M es independiente de f. En particular si W es un subespacio de $W_p^{(\ell)}$, esto significa que $\|Tf\|_p + \|f\|_p$ es una norma equivalente a la dada por (85) sobre W. Aquí $D^{[a]}f$ indica la derivada generalizada.

El teorema de Bernstein dice pues que $T = \Delta f$ es coercitivo sobre $W^0(2,2)$ respecto de la norma-2, si D es un círculo del plano ($n = 2$). Michlin, Vishik, Ladyzenskaya y otros extendieron el teorema de Bernstein a dominios D generales y operadores T elípticos de segundo orden, siempre para la norma $p = 2$. Guseva y Browder extendieron este resultado a operadores elípticos de orden m generales pero con $p = 2$. La teoría de Claderón - Zygmund de los tipos de los operadores $H_w f$ permitió extenderlo a normas p con $p > 1$ (Koshelev, Nirenberg). Si $\ell = 2m$, sea $W^0(\ell,p,D) \subset W_p^{(\ell)}(D)$ el conjunto de aquellas f que verifican sobre el contorno la condición nula de Dirichlet, es decir que todas las derivadas de orden $< m$ de f son nulas en el contorno. Entonces el resultado de Ladizenskaya-Guseva-Koshelev-Browder-Nirenberg se enuncia así:

Sea

$$Tf = \sum_{|[a]| = 2m} c_{[a]}(x)\, D^{[a]}f + T_1 f \quad , \tag{89}$$

un operador elíptico de orden $2m$: T_1 es un operador diferencial <u>lineal</u> de orden $\leq 2m-1$, y para todo sistema $\lambda_1, \dots \lambda_n$, de números reales, se verifica

$$\sum_{\|[a]\|=2m} c_{[a]}(x)\,\lambda^{a} = \sum_{a_1+\dots a_n=2m} c_{a_1\dots a_n}(x)\,\lambda_1^{a_1}\dots\lambda_n^{a_n} > A > 0 \tag{89a}$$

donde A es un número positivo fijo. Suponemos que los coeficientes $c_{[a]}(x)$ son funciones suficientemente lisas. Se tiene entonces el siguiente

TEOREMA 4 (Koshelev, Nirenberg). a) Todo operador elíptico T de la forma (89), (89a), es coercitivo sobre $W^0(\ell,p,D)$, y para toda f de $W^0(\ell,p,D)$ se verifica ($\ell = 2m$)

$$\|f\|_{(\ell,p,D)} \leq M\left[\|Tf\|_p + \sup\|f\|_{1,D_{n-1}}\right] \leq M\,(\|Tf\|_p + \|f\|_p) \tag{90}$$

donde el sup se toma para todos los $D_{n-1} = D \cap E^{n-1}$ de dimensión $n-1$.

b) Si para toda f de $W^0(2m,p,D)$ se verifica

$$(Tf\,,\,f) \geq A\,(\|f\|_{(m,2,D)})^2\,,\quad (A > 0 \text{ fijo}\,,\ p > 1) \tag{91}$$

entonces para toda $g \in L^p(D)$ la ecuación $Tf = g$, $f \in W^0(2m,p,D)$, tiene una única solución que verifica

$$\|f\|_{(2m,p,D)} \leq M\,\|g\|_p = M\,\|Tf\|_p \tag{92}$$

para $p > 1$, $n < 2m$, ó $p \geq 2n/(n+2m)$ si $n \geq 2m$ (92a)

(luego para $p > 2$ en ambos casos).

(La condición (91) se verifica por ejemplo si Tf es autoadjunto de la forma

$$Tf = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[c_{ik}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_k}\right] + c(x)\,f\,, \tag{93}$$

si inf $c(x) > -A$, donde A es la constante de (89a). En efecto, multiplicando (93) por f e integrando por partes se obtiene

$$(Tf, f) = \int_D \left[\sum c_{ik}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + c(x) f^2\right] dx \geq \left[A + \inf c(x)\right] \left(\|f\|_{(1,2)}\right)^2$$

y resulta (91). Si inf $c(x)$ no es $> -A$, la parte b) del teorema deja de ser cierta, pues por ejemplo puede haber soluciones de $\Delta f - \lambda f = 0$, (f nula en el contorno), para λ negativos).

La desigualdad (88) (ó (90)) se llama <u>acotación a priori</u> de la ecuación diferencial $Tf = g$: dada g, la parte a) del teorema 4 dice que si hay una solución $f \in W^0(\ell, p, D)$ ella debe verificar $\|D^{[a]} f\|_p \leq M(\|g\|_p + \|f\|_p)$ para $|[a]| = 2m$. Las acotaciones a priori dan un método para probar la existencia de soluciones. Por ejemplo si los coeficientes de T y g son funciones muy lisas, la existencia de soluciones se prueba por los métodos clásicos. En caso de coeficientes y de funciones g mas generales, se los aproxima por funciones lisas, y el problema se reduce entonces a probar que las soluciones f_i de las ecuaciones aproximantes $Tf_i = g_i$ tienden a un límite f, solución de $Tf = g$. Esto último se logra usando (90) (ó (88)), aplicado a $f_i - f_{i+j}$, y usando la completidad del espacio $W_p^{(\ell)}$; pues si $\|g_i - g_{i+j}\|_p \to 0$ resulta de (90) que $\|f_i - f_{i+j}\|_{(2m,p)} \to 0$ y las f_i forman una sucesión de Cauchy en $W_p^{(\ell)}$, y por tanto tienden a un límite f en $W_p^{(\ell)}$. Después de esto ya resulta generalmente fácil probar que la f límite es solución de la ecuación dada.

Nos limitaremos a dar la demostración del teorema 4 en el caso mas simple de operadores de orden $2m = 2$ (y sin entrar en muchos detalles), pues nuestro objeto es tan solo dar una idea de como se aplican los teoremas de Calderón - Zygmund y los de Sobolev. El caso $2m > 2$ es mucho mas complicado, pues hace falta recurrir al método de parametrix de Hilbert (es decir a operadores casi-inversos del T dado, que son operadores integrales con núcleos satisfaciendo las condiciones de contorno). El caso general puede verse en el artículo de Koshelev en Uspehi Mat. Nauk. (1958), vol XIII.

Veamos antes que si T verifica (91) (y (92a)) entonces (90) se reduce a (92) (suponemos $2m = 2$) . En efecto, (91) nos da que $f \in W_2^{(1)}(D)$, y del teorema de inmersión de Sobolev sigue que $f \in L^q(D_{n-1})$ sobre todo $D_{n-1} = D \cap E^{n-1}$, si $\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\frac{n-1}{n} < \frac{1}{n}$, es decir si $q < 2(1 + 1/(n-2))$, y se tiene

$$(\|f\|_{q,D_{n-1}})^2 \leq M(\|f\|_{(1,2,D)})^2 \leq A^{-1} M(Tf, f) \leq$$

$$\leq M A^{-1} \int_D |f||Tf| dx \leq M_1 \|Tf\|_p \|f\|_{p^*} . \tag{94}$$

Pero por los teoremas de inmersión se tiene que

$$\|f\|_{p^*} \leq M \|f\|_{(1,2,D)} , \quad \text{si} \quad 1/2 - 1/p^* < 1/n ,$$

luego

$$(\|f\|_{(1,2,D)})^2 \leq M_1 \|Tf\|_p \|f\|_{p^*} \leq M_2 \|Tf\|_p \|f\|_{(1,2,D)}$$

y resulta

$$\|f\|_{(1,2,D)} \leq M_2 \|Tf\|_p$$

y en definitiva

$$\|f\|_{q,D_{n-1}} \leq M_3 \|Tf\|_p$$

de modo que (90) se reduce a (92). (También se puede proceder así:

$$(Tf,f) \leq \int_{x_n} dx_n \int_{D_{n-1}} |Tf||f| \, dD_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_{x_n} dx_n \left(\int_{D_{n-1}} |Tf|^{q^*} dD_{n-1}\right)^{1/q^*} \left(\int_{D_{n-1}} |f|^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq M \|Tf\|_{p,D} \|f\|_{q,D_{n-1}}$$

y eligiendo $q^* = p$ se tendrá usando (94) que el segundo sumando de (90) es $\leq M \|Tf\|_p$ si $p > 2(1 - 1/n)$).

Según ya se explicó, de la acotación (92) es fácil obtener la existencia fr la solución de la ecuación $Tf = g$, $f \in W^0(2,p,D)$, si $g \in L^p(D)$, pues para ello se aproxima (en L^p) g por función g_i de la clase Lip(α), $0 < \alpha < 1$, $\|g - g_i\|_p \to 0$. Por un teorema clásico de Giraud la ecuación $Tf_i = g_i$ tiene solución $f_i \in W^0(2,p,D)$, y por (92), $\|f_i - f_j\|_{(2,p)} \leq M \|g_i - g_j\|_p \to 0$ Luego f_i tiende en $W_p^{(2)}$ a un límite f, y se comprueba fácilmente (por ser débilmente cerrado la operación de derivación generalizada) que f es la solución buscada.

Así pues todo se reduce a probar la desigualdad (90). Para ello consideremos antes el caso cuando $Tf = \Delta f$ y $D = Q_\pi =$ cubo de lado π ($0 \leq x_j \leq \pi$, $j = 1, \dots n$) de modo que $f = 0$ sobre la frontera S_π de Q_π. Desarrollando la función $g = Tf$ en serie de Fourier

$$g = \Delta f = \sum_{k_1,\dots k_n=1}^{\infty} g_{k_1\dots k_n} \operatorname{sen} k_1 x_1 \dots \operatorname{sen} k_n x_n \quad ,$$

como la derivación respecto de x_i da un factor k_i en la serie de Fourier, se encuentra (formalmente) que

$$f(x) = - \sum g_{k_1,\dots k_n} (k_1^2 + \dots + k_n^2)^{-1} \operatorname{sen} k_1 x_1 \dots \operatorname{sen} k_n x_n$$

y que por ejemplo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \sum g_{k_1,\dots k_n} k_1^2 (k_1^2 + \dots + k_n^2)^{-1} \operatorname{sen} k_1 x_1 \dots \operatorname{sen} k_n x_n$$

Así pues la serie de Fourier de las segundas derivadas de f se obtienen de la serie de $g = \Delta f$ multiplicando sus coeficientes por factores de la forma

$$k_i^2 (k_1^2 + \dots + k_n^2)^{-1} \quad , \quad k_i k_j (k_1^2 + \dots + k_n^2)^{-1}$$

($i, j = 1, 2, 3, \dots n$). Por lo visto anteriormente (ver (66b) y teorema 3a) resulta que

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j} \right\|_p \leq M \|g\|_p = M \|\Delta f\|_p \quad ,$$

luego obtenemos

$$\|f\|_{(2,p,D)} \leq M \|g\|_p \quad (p > 1) \quad . \tag{95}$$

Hemos pues probado la tesis para el caso particular $T = \Delta$, $D = Q_\pi$.

Sea ahora Q_d el conjunto de los puntos de Q_π a distancia $> d > 0$ de la frontera S_π. Si Q_π no es D pero es un cubo interior a D, la función f no será mas nula sobre la frontera de Q_π ; sea $\bar{f}$ la restricción de f a la frontera S_π de Q_π , de modo que $f = \bar{f}$ en S_π . (96)

Supongamos antes que $\bar{f}$ es continua. Por lo recién visto existe una función v tal que

$$\Delta v = g \ , \quad v = 0 \text{ sobre } S_\pi \tag{97}$$

que satisface

$$\| v \|_{(2,p,Q_\pi)} \leq M \| g \|_{p,Q_\pi} \qquad (p > 1) \ . \tag{97a}$$

Poniendo $w = f - v$ tendremos que

$$\Delta w = 0 \quad , \quad w = \bar{f} \text{ sobre } S_\pi \ . \tag{98}$$

Es fácil ver que en Q_d la función armónica w satisface la desigualdad

$$\| w \|_{(2,p,Q_d)} \leq M\, d^{-n-1} \| \bar{f} \|_{1,S} \tag{98a}$$

En efecto, mas generalmente, basta observar que si u es una función armónica, $\Delta u = 0$ en Q_π, tal que sobre el lado $x_n = \pi$ de S_π es $u = \bar{u}$, y en el resto de S_π es $u = 0$, entonces

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right| \leq M\, d^{-n-1} \| u \|_{1,x_n=\pi} \quad , \text{ en } Q_d \tag{98b}$$

Pues si $\bar{u}$ tiene por serie de Fourier

$$\bar{u} = \sum_{k_1,\dots k_{n-1}=1}^{\infty} b_{k_1,\dots k_{n-1}} \operatorname{sen} k_1 x_1 \dots \operatorname{sen} k_{n-1} x_{n-1}$$

entonces (por la unicidad) será

$$u(x) = \sum_{k_1,\dots k_{n-1}=1}^{\infty} b_{k_1,\dots k_{n-1}} \frac{\operatorname{sh}(k_1^2 + \dots k_{n-1}^2)^{1/2} x_n}{\operatorname{sh}(k_1^2 + \dots k_{n-1}^2)^{1/2} \pi} \operatorname{sen} k_1 x_1 \dots$$

$$\dots \operatorname{sen} k_{n-1} x_{n-1} \ ,$$

luego si $|\pi - x_n| > d > 0$, como los coeficientes de la última serie son

$$\leq b_{k_1 \ldots k_{n-1}} e^{-d^{1/2}} (1 - e^{-2\pi})^{-1}$$

resulta (98b). De (98b) sigue inmediatamente (98a).

De (98a) y (98b) obtenemos que

$$\|f\|_{(2,p,Q_d)} \leq M \left[\|g\|_{p,Q_\pi} + d^{-n-1} \|\bar{f}\|_{1,S_\pi}' \right] \tag{99}$$

Usando (98b), veremos de la misma manera que si S'_π es el contorno S_π menos el lado $x_n = 0$ y si $Tf = g$ y f verifica

$$f = \bar{f} \text{ en } S'_\pi \quad , \quad f = 0 \text{ en } (x_n = 0) \cap S_\pi = S_\pi - S'_\pi \tag{100}$$

entonces vale la acotación

$$\|f\|_{(2,p,\bar{Q}_d)} \leq M \left[\|f\|_{p,Q_\pi} + d^{-n-1} \|\bar{f}\|_{1,S'_\pi} \right] \tag{100a}$$

donde $\bar{Q}_d$ son los puntos que distan de S'_π mas de d (de modo que $\bar{Q}_d$ se apoya en el lado $x_n = 0$).

Se comprueba fácilmente, por cambio de variables, que las mismas acotaciones (99) y (100a) valen para cubos Q_r $(0 \leq x_i \leq r \, , \, 0 < r < 1)$, con constantes M independientes de r.

Consideremos ahora el caso cuando

$$Tf = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_k} ,$$

con coeficientes c_{ik} constantes. Sea Q_r el cubo de lados paralelos a los ejes principales del elipsoide determinado por la forma cuadrática de esta expresión, Entonces, con cambio de variable, la ecuación $Tf = g$ se reduce a $\Delta f = g$ en Q_r y tenemos la acotaciones (99) y (100a).

Análogamente se puede tratar el caso cuando

$$Tf = \sum c_{ik} \, \partial^2 f / \partial x_i \, \partial x_k + \sum b_j \, \partial f / \partial x_j + cf = g \tag{101}$$

con coeficientes constantes. Pasemos ahora al caso cuando T es de la forma (101) pero a coeficientes no constantes. Sea $x_0 \in D_e$, $e > 0$, podemos escribir (101) así

$$\sum c_{ik}(x_0) \; \partial^2 f/\partial x_i \partial x_k = g(x) + G(x) \tag{101a}$$

con $\quad G(x) = \sum \left[c_{ik}(x_0) - c_{ik}(x)\right] \partial^2 f/\partial x_i \partial x_k \quad .$

Sea Q_0 un cubo de centro x_0 y lados paralelos a los ejes principales de la forma $\sum c_{ik}(x_0)x_i x_k$. El lado de Q_0 se toma tal que $Q_0 \subset Q$ y para un $\varepsilon > 0$ fijo se verifica

$$\max_{x_0 \in Q_0} \sum \left| c_{ik}(x) - c_{ik}(x_0) \right| < \varepsilon \tag{102}$$

Entonces en Q_0 vale para G la acotación

$$\| G \|_{p,Q_0} \leq \varepsilon \| f \|_{(2,p,Q_0)} \; .$$

Si Q'_0 tiene centro en x_0, lados paralelos a los de Q_0 y dos veces menores, entonces en virtud de (99) tendremos

$$\| f \|_{(2,p,Q'_0)} \leq M \left[\| g \|_{p,Q_0} + \varepsilon \| f \|_{(2,p,Q_0)} + d^{-n-1} \| f \|_{1,S_0} \right] \tag{103}$$

donde M no depende de Q_0 y d es la distancia entre las fronteras de Q_0 y Q'_0.

Análoga acotación se tiene para un $\overline{Q}_0$ que se apoya en un lado de Q_0. Usando el lema de cubrimiento de la página 126, se vé que D_e puede cubrirse con un número finito de cubos Q_0 para cada uno de los cuales vale (103), Luego sumando resulta

$$\| f \|_{(2,p,D_e)} \leq M \left[\| f \|_p + \sup_{S_\pi} d^{-n-1} \| f \|_{1,S_\pi} \right] \tag{103a}$$

Si la frontera de D es suficientemente lisa se la puede pensar como compuesta de pedazos de hiperplanos. Luego usando la desigualdad (103) para cubos $\overline{Q}_0$ que se apoyan en estos hiperplanos tendremos una desigualdad del tipo (103a) para $D - D_e$, y sumando resulta la tesis (90), l.q.q.d.

(para detalles ver el artículo de Koshelev en el Mat. Sbornik, (1956), 38(80):3, pp. 359-372).

Ultimamente varios autores (Aronzajn, Garding, Schecter, Browder) han estudiado el recíproco del teorema 4, y han probado que en cierto modo los operadores elípticos (y sistemas elípticos) son los únicos para los cuales vale la propiedad (88) de coercitividad. Pero no podemos entrar aquí a considerar este apecto del problema.

C) En el teorema 4 se consideran soluciones no-clásicas en espacios L^p, es decir, dada la ecuación diferencial elíptica $Tf = g$, de orden $2m$, se prueba que si g está en L^p entonces las derivadas generalizadas de f de orden $2m$ están L^p y verifican (88), además la ecuación se verifica en sentido de derivadas generalizadas y salvo medida nula. En las teorías clásicas interesan soluciones clásicas con derivadas ordinarias continuas o lipshitzianas; en este caso se necesitan acotaciones del tipo (88) pero con normas de las funciones continuas o lipshitzianas en vez de las normas p. Se sabe por ejemplos clásicos que ya en el caso de la ecuación $\Delta f = g$ hay funciones g continuas tales que no admiten soluciones clásicas, de modo que no se puede esperar obtener desigualdades de tipo (88) con norma C de funciones continuas. En cambio la teoría tiene lugar para las funciones lipshitzianas. Nos limitaremos a indicar los resultados sin demostraciones enviando para detalles al libro de Miranda sobre ecuaciones elípticas y el artículo de Nirenberg en Comm. Pure Appl. Math. (1956).

Recordemos antes la definición de los espacios lipshitzianos. Sea $C(D)$ el espacio de las funciones continuas en D con norma $\|f\|_{C(D)} = \|f\|_\infty$.
Sea $C^1(D)$ el espacio de las funciones con derivadas de primer orden continuas en $D+S$ (S = contorno de D) y norma

$$\|f\|_{C^1(D)} = \|f\|_\infty + \sum_{|[a]|=1} \|D^{[a]}f\|_\infty$$

Más generalmente, $C^m(D)$ son las funciones con derivadas continuas hasta el orden m y norma

$$\|f\|_{C^m(D)} = \|f\|_\infty + \sum_{|[a]|=1} \|D^{[a]}f\|_\infty + \dots + \sum_{|[a]|=m} \|D^{[a]}f\|_\infty$$

(104)

f es lipshitziana de orden α $(0 < \alpha \leq 1)$, en símbolos $f \in \Lambda_\alpha(D)$ si $|f(x+h) - f(x)| \leq M\,|h|^\alpha$ ($x+h$ se toma sin salir de D); si M es la mínima constante para la cual vale esta condición, se define

$$\|f\|_{\Lambda(\alpha;D)} = \|f\|_\infty + M = \|f\|_\infty + \sup_{x,h} |f(x+h) - f(x)|\,|h|^{-\alpha} \qquad (105)$$

Sea $\Lambda_\alpha^{(m)}(D)$ el espacio de las funciones derivables hasta el orden m y cuyas derivadas de orden m son lipshitzianas - α ; la norma de este espacio es

$$\|f\|_{\Lambda(m,\alpha,D)} = \|f\|_\infty + \sum_{|[a]|=m} \|D^{[a]}f\|_{\Lambda(\alpha,D)} \qquad (105a)$$

Todavía en 1909 Korn probó para $n = 2$ el siguiente resultado: si $g \in \Lambda_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ entonces existe solución clásica f de la ecuación $\Delta f = g$, f nula en el contorno, tal que $f \in \Lambda_\alpha^{(2)}$ y se tiene para $|[a]| = 2$,

$$\|D^{[a]}f\|_{\Lambda(\alpha,D)} \leq M\,\|\Delta f\|_{\Lambda(\alpha)} = M\,\|g\|_{\Lambda(\alpha)} \qquad (106)$$

es decir

$$\|f\|_{\Lambda(2,\alpha,D)} \leq M\,\|\Delta f\|_{\Lambda(\alpha,D)} \qquad (106a)$$

Esto indica que el operador $T = \Delta f$ $(n = 2)$ <u>es coercitivo en $\Lambda^0(2,\alpha,D)$ respecto de la norma Λ_α</u>. De gran importancia es el célebre resultado de Schauder:

<u>Acotaciones de Schauder</u> : a) Sea Tf un operador diferencial elíptico de segundo orden, con coeficientes de Λ_α y sea $f \in \Lambda_\alpha^{(2)}(D)$. Entonces para todo dominio $D' \subset D$ completamente interior a D (pero no para D mismo) se verifica que

$$\|f\|_{\Lambda(2,\alpha,D')} \leq M\left(\|f\|_{\infty} + \|Tf\|_{\Lambda(\alpha,D)}\right) \tag{107}$$

donde M varía con D' y no con f.

b) Si f es además nula en el contorno entonces esta acotación se verifica por D mismo:

$$\|f\|_{\Lambda(2,\alpha,D)} \leq M\left(\|f\|_{\infty} + \|Tf\|_{\Lambda(\alpha,D)}\right) \tag{107a}$$

<u>de modo que T es coercitivo en $\Lambda^0(2,\alpha,D)$ respecto de la norma de Λ_α.</u>

De estas desigualdades resulta que si g varía en la esfera unitaria de Λ_α, la solución f de $Tf = g$ así como las $D^{[a]}f$, $[a] \leq 2$, varían en un conjunto compacto de Λ_α, y esto permite aplicar el método de aproximación por funciones g y coeficientes infinitamente diferenciables, así como el método de continuación por parámetro.

Nirenberg obtuvo en 1956 acotaciones con "normas mixtas", acotando la norma Λ_α de $D^{2m-1}f$ por la norma - p de Tf, llevando así la teoría de Schauder a mayor nivel de generalidad y combinándola con los métodos de Sobolev. Su teorema se basa en el siguiente lema que se aplica a dominios D suficientemente regulares y acotados.

<u>Lema de Nirenberg</u>. Si $r > 0$ es entero, k, p constantes, $p \geq 1$, $0 < k < n$, $r > (n-k)/p \neq$ entero, y si $s = r - [(n-k)/r] - 1$, $a = 1 + [(n-k)/p] - (n-k)/p$, entonces

$$\left(\|f\|_{\Lambda(s,a,D)}\right)^p \leq M \sum_{|\ell| = r} \|H_{n-k}(|D^\ell f|^p)\|_{\infty} + M\left(\|f\|_p\right)^p \tag{108}$$

donde H_{n-k} es el operador potencial de orden n-k. Una acotación análoga se tiene para $D' \subset D$.

Como por el teorema de Sobolev la norma de $\|H_{n-k}(|D^\ell f|^p)\|_{\infty}$ se acota por las normas de $D^\lambda f$, (108) da una acotación de la norma Λ_α de f y sus derivadas por la norma - p de las derivadas de orden superior. Este lema da pues un complemento a los teoremas de inmersión, con normas de Λ_α: por ejemplo, el teorema de inmersión de Sobolev (para $1/p < \ell/n$) afirma que si f tiene derivadas generalizadas de orden suficientemente grande pertenecientes a L^p entonces f es continua y tiene derivadas ordinarias continuas hasta cierto orden menor. El lema de Nirenberg generaliza esto para derivadas por decir así de orden fraccionario (en el sentido de que, por ej. f tiene derivada de orden $2+\alpha$ si la segunda derivada pertenece a Λ_α).

Combinando este lema con el teorema 4 se obtiene el

<u>Teorema de Nirenberg</u>: Si T es un operador elíptico de orden $r = 2m$, $s = [r - n/p]$, $a = r - n/p - s$ ($n/p \neq$ entero), y si f verifica los datos de Dirichlet nulos en el contorno, entonces

$$\| f \|_{\Lambda(s,a,D)} \leq M \left\{ \| Tf \|_p + \| f \|_p \right\} \tag{109}$$

Si f no verifica los datos nulos en el contorno, se tiene una acotación análoga con $D' \subset_o D$ en vez de D.

De este teorema resulta en particular que si $Tf \in L^p$, $p > n$, $[n/p] = 0$, esto obliga a que f tenga derivadas ordinarias de orden $r - 1 = 2m - 1$ y estas derivadas son lipshitzianas de orden $1 - n/p$, o sea f tiene derivadas "fraccionarias" de orden $> r - 1$.

Para detalles enviamos al artículo citado de Nirenberg.

7 . NOTAS DIVERSAS

A) Sabemos (ver pág. 181) que si $d/n < 1/p < 1$ y si $f \in L^p$ entonces $H_d f \in L^s$, y si $p = 1$ entonces $H_d f \in L^r(B)$ para $r < s$ y B acotado. En ambos casos la función $F_{dn}(x) = H_d f(x)$ debe ser finita en casi todo punto x (salvo medida nula). Más aún, sabemos que si $m < n < m + d/p$, $E^m \subset E^n$, entonces $F_d(x) = H_d f$ pertenece a cierto $L^s(E^m)$ y por tanto también es finita en todo punto de E^m, salvo medida <u>m-dimensional</u> nula.

Así pues, si $f \in L^p(E^n)$, y si

$$H_d f = F_d(x) = \int_{E^n} f(t)\,|x-t|^{d-n}\,dt \qquad (1)$$

los puntos de E^m en que la integral (1) no converge forman un conjunto de medida nula m-dimensional, y esto es mucho más que decir que (1) es finita salvo medida nula n-dimensional (ya que todo E^m tiene medida nula en E^n). Sin embargo, esto todavía no dice nada de los puntos de un conjunto m-dimensional pero no situado en un solo E^m (por ejemplo un conjunto contenido con una suma numerable de curvas rectificables).

Para medir conjuntos de dimensión menor pero no situados en un mismo E^m, $m < n$, conviene usar la noción de capacidad o la de medida α-dimensional de Hausdorff. Recordemos brevemente la definición de capacidad.

Consideremos en E^n, además de la medida ordinaria de Lebesgue, otras medidas μ de Radón (o Lebesgue-Stieltjes); cada tal μ está definida para todos los conjuntos Boreleanos B, siendo $\mu(B) \geqslant 0$, $\mu(B) < \infty$ si B es acotado, y μ es completamente aditiva. Si $B \cap C = 0$ implica $\mu(B) = 0$ se dice que μ está concentrada en el conjunto C. El soporte de μ es el mínimo cerrado en que μ está concentrada. Para cada d, $0 < d < n$, y cada μ de Radón podemos considerar la función $H_d\,\mu(x)$ definida por

$$H_d\,\mu(x) = H_{d,n}\,\mu(x) = C_d^{-1} \int_{E^n} |x-t|^{d-n}\,d\,\mu(t) \qquad (2)$$

donde C_d es la constante definida en la página 78. La integral (2) se llama potencial de orden d de la medida μ. Si μ es absolutamente continua, $d\mu = f(x)\,dx$, entonces $H_\alpha \mu(x) = H_d f(x)$, y obtenemos el operador (1). Consideraremos tan solo medidas μ de Radón concentrados en conjuntos compactos.

Sea B un conjunto compacto de E^n; consideremos las posibles μ concentradas en B y tales que $H_{d,n}\mu(x) \leq 1$ para todo x de E^n, es decir:

$$\mu(B) > 0 \,, \quad \mu(E^n - B) = 0 \,, \quad \| H_{d,n}\, \mu(x) \|_\infty \leq 1 \tag{3}$$

El número

$$c_{\gamma n}(B) = \sup_\mu \{ \mu(B) \} \,, \tag{4}$$

donde el sup se toma para las posibles μ que verifican (3), se llama d-capacidad (n-dimensional) del conjunto B. Si A es abierto, se consideran los compactos $B \subset A$ y el sup de las $c_{dn}(B)$ correspondientes es la d-capacidad de A. Análogamente se define la capacidad para todo B boreleano. Si para toda μ concentrada en B, $\mu(B) > 0$, es $\| H_{\gamma n}\, \mu \|_\infty = \infty$, es decir si no existen medidas que verifican (3), se dice que $c_{dn}(B) = 0$, o que B es de d-capacidad nula o también que B es un conjunto d-polar n-dimensional.

Se tiene entonces el siguiente teorema probado por Du Plessis (Transact. Am. Math. Soc. vol.80, 1, 1955):

Teorema. Si $d/n < 1/p$ y $p > 2$, y si $f \in L^p(E^n)$, entonces los puntos x en que la integral (1) no es finita forman un conjunto de d'-capacidad nula, para todo $d' > n - dp$; si $1 \leq p \leq 2$, $f \in L^p(E^n)$, entonces este conjunto es d'-capacidad nula, con $d' = n - dp$.

En nuestro trabajo con Panzone citado, se extiende este teorema a los operadores H f más generales (del tipo de los considerados en pág. 148), introduciendo la capacidad respecto de núcleos generales, así como a capacidades m-dimensionales.

No damos aquí la demostración de este teorema, enviando para ello al trabajo citado de Du Plaessis o a nuestro artículo con Panzone. En cambio detallaremos un poco más el concepto de capacidad, para aclarar mejor el sentido del teorema que acabamos de enunciar. Para ello recordaremos rápidamente la relación de capacidad con medida de Hausdorff.

Observemos antes que de la definición de capacidad resulta que

$$A = \bigcup_1^{\infty} A_i \quad \text{implica} \quad c_{dn}(A) \leq \sum_1^{\infty} c_{dn}(A_i) \quad , \tag{5}$$

además $c_{dn}(B) = 0$ significa que

$$\mu(B) > 0 \quad , \quad \mu(E^n - B) = 0 \quad \text{implica} \quad \sup_{x \in E^n} \left| H_{dn}\, \mu(x) \right| = \infty \tag{6}$$

Recordemos ahora la definición de medida α-dimensional de Hausdorff.

Mientras que la medida ordinaria de un conjunto se obtiene cubriéndolo con esferas y sumando los volúmenes de las esferas, siendo cada volumen igual a una constante por el diámetro de las esferas correspondientes elevado a la n (con n igual a la dimensión del espacio), en la medida α-dimensional se suman las potencias α de los diámetros . Más exactamente, dado un conjunto $E \subset E^n$ y un $\varepsilon > 0$, se consideran las posibles sucesiones $\{ S(\rho_i) = S_i \}$ donde los S_i son esferas de radio $\rho_i < \varepsilon$, tales que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S(\rho_i)$. Para toda sucesión de esta clase se forma el número $\sum_{i=1}^{\infty} (2\rho_i)^{\alpha}$, luego se toma el inf. de estas sumas para todas las sucesiones posibles con $\rho_i \leq \varepsilon$. Finalmente se hace tender ε a cero y el número que así resulta

$$m_{\alpha n}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \inf_{\bigcup S(\rho_i) \supset E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2\rho_i)^{\alpha} \right] \right\} \tag{7}$$

se llama <u>medida α-dimensional de Hausdorff</u> del conjunto E.

Por ejemplo, si S es una esfera de E^n de radio 1 y si las S_i son esferas de radio ε , se necesita por lo menos $(1/\varepsilon)^n$ de estas esferas para cubrir S, luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} (2\rho_i)^{\alpha} > (1/\varepsilon)^n (2\varepsilon)^{\alpha} = 2^{\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{n-\alpha}}$$

y si $\alpha < n$ este número tiende a ∞. Así pues si $\alpha < n$ toda esfera n-dimensional tiene medida α-dimensional infinita. En cambio si S es una esfera de dimensión menor que α se ve que su α-medida será nula.

Si $E \subset E^n$ su <u>dimensión métrica</u> es el sup. de los números α tales que $m_{\alpha n}(E) > 0$, es decir el sup. de los α tales que E tiene medida α-dimensional positiva. Es lo mismo decir que la dimensión métrica de E es el inf. de los α tales que $m_{\alpha n}(E) = 0$. Por ejemplo, la dimensión métrica de la esfera n-dimensional (sólida) de E^n es n.

Se tienen entonces las siguientes relaciones entre capacidad y medida (ver Kolmogoroff, Mat. Ann.1932; Zygmund y Salem, Trans. Math. Soc. 1946; Eropin, Uspehi 1958):

a) si S es una esfera de radio ρ entonces $c_{\gamma n}(S) = \rho^{n-\gamma}$

b) todo conjunto boreleano B de dimensión métrica mayor que $n-\gamma$ tiene capacidad $c_{\gamma n}(B) > 0$

c) todo conjunto boreleano B de dimensión métrica menor que $n-\gamma$ tiene capacidad $c_{\gamma n}(B) = 0$ es decir es un conjunto polar.

d) si el conjunto boreleano B tiene dimensión métrica igual a $n-\gamma$ y su medida de Hausdorff $m_{n-\gamma,n}(B) < \infty$, entonces B es polar, $c_{\gamma n}(B) = 0$. Luego también si $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ y $m_{n-\gamma,n}(B_i) < \infty$, entonces $c_{\gamma n}(B) = 0$.

Si B tiene dimensión métrica $n-\gamma$ y su medida de Hausdorff $m_{n-\gamma}(B)$ es infinita, en general no se puede decir nada respecto a la polaridad de B.

De estas propiedades se deduce en particular que B tiene γ-capacidad nula, $\gamma \leq n$, entonces B tiene también medida nula. Pero la recíproca no es cierta; por tanto saber que una propiedad vale salvo γ-capacidad nula es mucho más que saber que vale salvo medida nula p. p.

De la propiedad d) se deduce que todo conjunto situado sobre un número numerable de curvas rectificables de E^3 es de 1-capacidad nula; en general si B está contenido en una unión numerable de superficies de dimensión menor o igual que $n-\gamma$ y de medidas finitas, entonces B es polar.

Recordemos también la relación entre capacidad y energía (ver H. Cartan, Theoréme du potenciel, Bull. Soc. Math. de France, 1940). La μ se dice de γ- energía finita si

$$(H_\gamma \mu, \mu) = c_\gamma^{-1} \int_{E^n} \int_{E^n} |x-t|^{\gamma-n} \, d\mu(x) \, d\mu(t) = \|\mu\|_\gamma^2 < \infty \quad ;$$

y la <u>γ- energía</u> de μ es el valor: $\|\mu\|_\gamma$

Se consideran medidas de signo cualquiera $\mu = \mu_1 - \mu_2$, donde μ_1 y μ_2 son ≥ 0, y se define $\|\mu\|_\gamma$ para una tal μ, así como $H_{\gamma n}\mu(x)$. En la teoría del potencial se prueban las propiedades siguientes (que son consecuencias de la fórmula de M. Riesz (pág. 78) y de la teoría general de los espacios de Hilbert):

1) $\|\mu\|_\gamma^2 = \int_{E^n} |H_{\gamma/2,n}\mu(x)|^2 \, dx = \|H_{\gamma/2}\mu\|_2^2$

2) Si $\|\mu\|_\gamma$ es finita entonces $\|\mu\|_\gamma \geq 0$ siendo $\|\mu\|_\gamma = 0$ sólo si $\mu \equiv 0$.

3) Si $H_{\gamma n}\mu(x) = 0$ p. p. entonces $\mu \equiv 0$ (unicidad)

3a) Si μ_1 y μ_2 están concentradas en el compacto B y si $H_{\gamma n}\mu_1(x) =$ $= H_{\gamma n}\mu_2(x)$ para todo x de un entorno de B, entonces $\mu_1 = \mu_2$.

4) Siendo $\mathcal{E}_{\gamma n}$ el conjunto de todos las medidas (de signo cualquiera) de energía finita, con la norma $\|\mu\|_\gamma$ este $\mathcal{E}_{\gamma n}$ es un espacio prehilbertiano (Hilbert no completo). Si B es un compacto fijo y si $\mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ es el subconjunto de $\mathcal{E}_{\gamma n}$ de las $\mu \geq 0$ concentradas en B, entonces $\mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ si es completo (es decir cerrado en la completación $\overline{\mathcal{E}}_{\gamma n}$ de $\mathcal{E}_{\gamma n}$).

5) Como $\mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ es un subconjunto convexo cerrado del espacio de Hilbert $\overline{\mathcal{E}}_{\gamma n}$, dada $\mu \in \mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ existe una $\mu' \in \mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ a distancia mínima de μ, es decir que minimiza $\|\mu - \mu'\|_\gamma$. La operación $\mu \to \mu'$ se llama "<u>balayage</u>" (de Poincaré) de μ sobre B. μ' está caracterizada por la propiedad de ser $\mu - \mu' \perp \mathcal{E}_{\gamma n}(B)$, y es la única medida de $\mathcal{E}_{\gamma n}(B)$ que verifica las dos propiedades siguientes:

6a) $H_{\gamma n}\mu'(x) \geq H_{\gamma n}\mu(x)$ si $x \in B$, salvo medida nula respecto de toda medida de $\mathcal{E}_{\gamma n}(B)$.

6b) $H_{\gamma n}\mu'(x) = H_{\gamma n}\mu(x)$ en el soporte de μ'.

Además μ' minimiza la expresión

$$\int_{E^n}\left[H_{\gamma n}\mu'(x) - 2\,H_{\gamma n}\mu(x)\right] d\,\mu'(x)$$

7) El compacto B es de capacidad nula si y solo si $\mu(B) = 0$ para toda $\mu \geq 0$ de energía finita.

8) Si $c_{\gamma n}(B) > 0$, entonces es no vacío el conjunto de las μ concentradas en B, de energía finita y $\mu(B) = 1$, y este conjunto es convexo y cerrado en $\overline{\mathcal{E}}_{\gamma n}$; luego en este conjunto hay una μ_0 a distancia mínima del origen, es decir de energía mínima $c \neq 0$; $\mu_1 = \frac{1}{c}\,\mu_0$ se llama la <u>medida capacitiva</u> de B y está caracterizada por las siguientes condiciones:

8a) $H_{\gamma n}\mu_1(x) \geq 1$ p. p. sobre B ;

8b) $H_{\gamma n}\mu_1(x) = 1$ en el soporte de μ_1

El número <u>c</u> es igual a la capacidad $c_{\gamma n}(B)$ de B.

Por tanto la capacidad $c_{\gamma n}(B)$ puede definirse también como el <u>sup. de $\mu(B)$</u> para los posibles $\mu \geq 0$ de energía finita tales que $H_{\gamma n}\mu(x) \leq 1$ para $x \in B$ (μ concentrada en B). La μ_1 capacitiva es la única $\mu \geq 0$, de energía finita con $H_{\gamma n}\mu(x) \leq 1$ en B, concentrada en B y tal que $\mu(B) = \frac{1}{c}$ (es decir de energía mínima entre tales μ).

9) $c_{\gamma n}(B)$ puede también definirse como el inf. de $\|\mu\|_\gamma$ para los $\mu \geq 0$ de energía finita y tales que $H_{\gamma n}\mu(x) \geq 1$ sobre B.

En el caso del potencial newtoniano $\gamma = 2$ y en general si $\gamma \leq 2$, la medida capacitiva μ_1 tiene además la propiedad: $H_{\gamma n}\mu_1(x) = 1$ p. p. en B, por eso se la llama, en ese caso, <u>medida de equilibrio</u>. Esto es consecuencia del <u>principio de máximo</u> que vale para $\gamma \leq 2$: si $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ μ_1 de energía finita y si $H_{\gamma n}\mu_1(x) \leq H_{\gamma n}\mu_2(x)$ en el soporte de μ_1, entonces $H_{\gamma n}\mu_1(x) \leq H_{\gamma n}\mu_2(x)$ en todo otro $x \in E^n$.

B) Si $f(x)$ está definida en E^n y $0 \leq \beta \leq 1$, se dice que $f(x)$ pertenece a la clase $\mathrm{Lip}\,\beta(E^n)$ si $|f(x+h) - f(x)| \leq M\,|h|^{\beta}$ para todo x y todo h, donde M es una constante fija; si además M tiende a cero con $h \to 0$, se escribe $f \in \mathrm{Lip}\,\beta$.

Se tienen los siguientes teoremas, probados por Hardy y Littlewood para $n = 1$, y por Du Plessis para $n > 1$.

1) Si $f \in \mathrm{Lip}\,\beta$, $0 < \beta < 1$ entonces $H_d f \in \mathrm{Lip}(d+\beta)$, $0 < d+\beta < 1$, donde $H_d f$ es el operador potencial.

2) Si $f \in L^p(E^n)$, $p > 1$; $1/p + 1/n > d/n > 1/p$ entonces

$$H_d f \in \mathrm{lip}\,(d-n/p)$$

Además Hardy y Littlewood probaron (para $n = 1$, generalizado por Panzone para $n > 1$) que

3) Si $f \in L^p(E^n)$, $1 \leq p < \infty$, $0 < d < 1$, entonces $H_{dn} f \in \mathrm{Lip}(p,d)$, donde $g \in \mathrm{Lip}(p,d)$ significa que $\| g(x+h) - g(x) \|_p \leq M\,|h|^{\alpha}$.

4) Si $f \in \mathrm{Lip}(p,\beta) \cap L^p(E^n)$, $0 < \beta$, $1 \leq p < \infty$, $0 < d < 1-\beta$ entonces

$$Hf \in \mathrm{Lip}(d,\beta).$$

En nuestro trabajo con Panzone, citado, estos teoremas fueron extendidos a los operadores potenciales generalizados y al caso de condiciones

$$f \in \mathrm{Lip}\,\beta(E^n)\,, \qquad H_d f \in \mathrm{Lip}\,\beta(E^m) \qquad \text{con} \quad m < n\,.$$

Para demostraciones enviamos al trabajo de Du Plessis y nuestro artículo con Panzone.-

C) Vamos a explicar rápidamente como se definen los operadores potenciales generalizados considerados en nuestro artículo mencionado. Los operadores potenciales clásicos $H_d f$ son convoluciones con el núcleo $K(t) = |t|^{d-n}$ que tiene la propiedad siguiente: para todo $a > 0$ es $K(at) = a^{d-n}K(t)$; además, si K_1 es la restricción de K al anillo $1 < |t| < 2$, es decir si $K_1 = K$ en $1 < |t| < 2$ y nula en los demás t, entonces $K_1 \in L^p(E^n) \cap \mathrm{Lip}(1,1)$ para todo p. Llamamos operador potencial generalizado al operador convolución con un núcleo

K que verifica la propiedad homogénea para <u>un solo valor</u> de a, por ejemplo $a = 2$: $K(2t) = 2^{d-n}K(t)$, y tal que la restricción K_1 verifica ciertas condiciones suplementarias. En dicho artículo se prueba que toda la teoría de los operadores $H_d f$ clásicos se extiende a los $H_d f$ generalizados. Observemos todavía que la condición $K(2t) = 2^{d-n}K(t)$ equivale a la siguiente

$$K(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{(n-d)i} K_1(2^i t) \tag{8}$$

Es decir el núcleo no integrable K es "generado por dilataciones" por el núcleo "bueno" K_1 . Una generalización análoga fué considerada en nuestro trabajo de Revista Mat. Cuyana para el caso de la transformada de Hilbert. En efecto la transformada de Hilbert $H_w f$ es la convolución con un núcleo $K(t) = w(t') |t|^{-n}$ que tiene las propiedades siguientes: a) para todo $a > 0$ es $K(at) = a^{-n}K(t)$; b) la restricción $K_1(t)$ de K es una función integrable "buena" ; c) la integral de $K_1(t)$ es nula (esta última condición es esencial en la teoría de transformadas de Hilbert y es lo que les distingue esencialmente de los operadores potenciales). En nuestro trabajo mencionado mostramos que las propiedades de los operadores $H_w f$ clásicos valen también para los $H_w f$ generalizados, que se definen como operadores de convolución con un núcleo K que verifica b) y c) y la propiedad a) tan solo para $a = 2$. Tales núcleos son de la forma

$$K(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^{ni} K_1(2^i t) \tag{8a}$$

Los operadores de Fejer definidos en la página 187 son casos particulares de estos operadores $H_w f$ generalizados; resulta así que los operadores con núcleos generalizados de la forma (8a) unifican la teoría de <u>operadores de Hilbert con la de los operadores de Fejer</u>, así como con la teoría ergódica. La idea principal de estas generalizaciones es presentar el operador H como límite o como <u>serie de operadores, que no están desvinculados sino "generados" por un operador fijo</u>.

Esta idea sugiere el siguiente problema general. Para simplificar consideremos los espacios L^1. Se sabe que todo operador lineal continuo de L^p en L^1 es de la forma

$$Tf(x) = d\left[\int K(e,t)f(t)\,dt\right]/de ,$$

donde el núcleo es función del punto t y del conjunto e. Formalmente

$$dK(e,t) = \lim K_\varepsilon(x,t) = \lim K(e,t)/|e| ,$$

donde $\varepsilon \to 0$ y $x \in e$, $|e| = \varepsilon$, luego $Tf = \lim T_\varepsilon f = \lim \int K_\varepsilon(x,t)\, f(t)\, dt$

Es posible que también aquí los diferentes núcleos K_ε pueden considerarse como generados por un núcleo fijo, y que aquí puedan aplicarse los métodos usados en el caso de los núcleos (8) y (8a) (por ejemplo el método de núcleos casi ortogonales expuesto en el capítulo II o el de pseudo tipos del capítulo III).

D) Hemos visto, en los capítulos II y III, que si la función característica $w(t')$ verifica la condición (15a) de la página 54, además de tener integral nula, entonces el operador de Hilbert $H_w f = f * K$, $K(t) = w(t')\,|t|^{-n}$, es de tipo (p,p) para $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1,1), valiendo lo mismo para el operador maximal de los $H_\varepsilon f$ correspondientes. Además, en A) del § 5 vimos que para $p = 2$ esto vale aún bajo la condición más general $|w|\log(1+|w|) \in L^1(S)$. En su trabajo del 1956 citado, Calderón y Zygmund probaron que bajo la misma hipótesis sobre $w(t')$, el teorema vale para todo p, $1 < p < \infty$, y que esta hipótesis no puede ser relajada (queda aún por aclarar si vale el tipo débil (1,1) con esta hipótesis, lo que parece poco probable). Más aún, estos autores extendieron el teorema a los operadores con característica $w(x,t')$ dependiente de x (ver observación 12 del § precedente, fórmula (83)) probando que si para todo x es $w(x,t')$ integrable en t' con integral nula, y si para un $q_0 > 1$ es $\| w(x,t')\|_q \leq M$ = independiente de x (la norma se toma respecto de t') entonces el operador Kf definido por (83) es de tipo (p,p) para todo p tal que $q^* \leq p < \infty$, y esta hipótesis no puede mejorarse; idem para el operador maximal.

En el mismo trabajo se prueban teoremas análogos para los núcleos más generales de la forma $w(x,t')\,|t|^{-n}\,h(|t|)$, donde h es una transformada de Fourier-

Stieltjes (ver E) del § precedente). En este trabajo estos autores hacen uso sistemático del operador de M. Riesz que es el operador de Hilbert con núcleo

$$x_i|x|^{-n-1} = (x_i|x|^{-1})|x|^{-n} ,$$

es decir, con

$$w(t') = t_i|t|^{-1} , \quad t = (t_1, .. t_n)$$

Sin embargo, estos resultados pueden obtenerse también por los métodos que hemos usado en los capítulos II y III (es decir de los pseudo tipos u núcleos ortogonales), y pueden extenderse a los operadores generalizados con núcleos del tipo (8a) o (8); Las demostraciones serán dadas en un artículo próximo con E. Oklander. Finalmente, Calderón y Zygmund también probaron para los operadores de Hilbert teoremas del tipo de Privalov, o sea con clases Lip β (ver B)), y lo mismo para los operadores periodizados del tipo (71).

E) Una teoría muy importante es la de las ecuaciones integrales con núcleos singulares. Vamos a resumir brevemente algunos aspectos de la misma.

Como se sabe, la teoría clásica de Fredholm estudia ecuaciones de la forma

$$\lambda f + Vf = g$$

donde λ = constante y Vf es un operador integral del tipo (10) de la página 235) con núcleo integrable "bueno", considerado además sobre dominios finitos, de modo que Vf es un operador <u>completamente continuo</u> (g es dada y f es la función incógnita). Se trata pues de la inversión de operadores Af de la forma $A = \lambda I + V$, I = operador idéntico , V = completamente continuo. Para tales operadores, llamados regulares o de Fredholm, valen los siguientes teoremas de Fredholm que constituyen la llamada teoría de Fredholm-Riesz-Schauder (las demostraciones pueden verse en el libro clásico de Banach o en el libro de Análisis Funcional de Kolmogorov y Fomin):

a) La ecuación $\lambda f + Vf = g$, $\lambda \neq 0$, tiene solución si y solo si $g(x)$ es ortogonal (es decir $(g,h) = 0$) a todas las soluciones h de la ecuación homogenea adjunta $\lambda h + V^* h = 0$ (si Vf es dado por el núcleo $K(t,x)$, V^*f es dado por el núcleo $K(x,t)$ traspuesto).

La propiedad a) se expresa diciendo que el operador $\lambda f + Vf$ es <u>normalmente resoluble.</u>

b) La ecuación homogénea $\lambda f + Vf = 0$, $\lambda \neq 0$, tiene un <u>número finito α</u> de soluciones linealmente independientes.

b_1) La ecuación homogénea adjunta $\lambda f + V^* f = 0$ tiene un <u>número finito β</u> de soluciones linealmente independientes.

c) $\alpha - \beta = 0$ es decir $\alpha = \beta$

Después de Fredholm, Hilbert, Poincaré, y particularmente Carleman y F. Noether, empezaron el estudio de ecuaciones integrales con núcleos singulares. Hilbert consideraba el núcleo $K(t,x) = \operatorname{cotg}(t-x)/2$ en el intervalo $(0,2\pi)$, es decir la transformada de Hilbert en $(0,2\pi)$ (ver D) del § 5) y Poincaré consideraba integrales sobre una curva L del plano complejo con núcleo $z - t$.

Precisamente ellos estudiaron ecuaciones del tipo

$$Tf(x) = a(x)\, f(x) - \frac{b(x)}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{x-t}\, dt + Vf = g(x) \qquad (9)$$

donde $a(x)$, $b(x)$ son funciones lipshitzianas, V es un operador con núcleo "bueno", luego completamente continuo, y L es una curva lisa abierta (caso de Hilbert) o cerrada (caso de Poincaré). Como las ecuaciones con núcleos completamente continuos ya fueron estudiadas bien, el estudio de las ecuaciones (9) se hace "módulo las completamente continuas Vf", Luego los operadores (9) son esencialmente de la forma $a(x)\, f(x) - b(x)\, H f(x) + V f(x)$, donde Hf es el operador de Hilbert 1-dimensional considerado sobre dominios acotados.

El método ideado por Carleman para tratar las ecuaciones del tipo (9) es el de <u>regularización</u>: dado un operador Tf se llama <u>regularizador</u> de la ecuación $Tf = g$ al operador Bf tal que aplicando a ambos miembros de la ecuación da una ecuación de Fredholm, es decir tal que $BT = \lambda f + Vf$. Si existe tal regularizador entonces toda solución de $Tf = g$ debe ser solución de la ecuación de Fredholm correspondiente $BTf = Bg$, pero no recíprocamente. Luego si una ecuación $Tf = g$ tiene un regularizador entonces para ella deben valer los teoremas a), b) y b_1) de Fredholm, pero no necesariamente c).

Supuesta L cerrada, Carleman y Noether probaron que: la ecuación (9) admite un regularizador si y solo si $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ en todo t ; luego en este caso valen los teoremas a), b), b_1), pero no necesariamente c); es decir en general es $\alpha - \beta \neq 0$. El número $i(T) = \alpha - \beta$ se llama índice del operador T, y se tiene la fórmula de Noether

$$i(T) = (2\pi i)^{-1} \int d \log \left[(a(t) + b(t))/(a(t) - b(t)) \right] .$$

La expresión $\sigma = a^2(t) - b^2(t)$, o más exactamente el par de funciones $a(t) + b(t)$, $a(t) - b(t)$, se llama símbolo del operador (9), término justificado por las razones siguientes. En caso del operador de Hilbert 1-dimensional $\mathring{H}f$, la función característica $w(t')$ está definida en el par de puntos $+1, -1$, pues en este caso la "circunferencia" unitaria $|t'| = 1$ consta de estos dos puntos, y se tiene $w(1) = 1$, $w(-1) = -1$. Es decir, contrariamente a lo que ocurre para $n > 1$, la esfera $|t| = 1$ es disconexa, y $w(t')$ es dada por un par de números. Luego el símbolo de Hf es dado por unpar de números $+1$, -1 y por tanto el símbolo de $a(x)\, f(x) + b(x)\, Hf(x)$ es el par $a(x) + b(x)$, $a(x) - b(x)$. Luego (9) admite regularización si y solo si su símbolo $\sigma(t) \neq 0$.

Después de Carleman, S. Trikomi (en 1928) estudió las ecuaciones integrales singulares del tipo

$$Tf = a(x)\, f(x) + \int_{E^2} f(t)\, w((x-t)')\, |x-t|^{-2}\, dt + Vf(x) = g \tag{10}$$

es decir operadores $Tf = a(x)\, f(x) + H_w f(x) + Vf$, donde $H_w f$ es un operador de Hilbert 2-dimensional considerado sobre dominios acotados. Más generalmente Trikomi consideró operadores de la forma (10) con características $w(x,t')$ dependientes de x , es decir

$$Tf = a(x)\, f(x) + \int_{E^2} f(t)\, w(x, (x-t)')\, |x-t|^{-2}\, dt + V f = g \tag{10a}$$

pero considerado sobre dominios finitos. Ya vimos que para tales operadores se tiene definido el concepto de símbolo (ver (84b)): si $W(\phi) = \sum c_m(x)\, e^{im\phi}$

entonces el símbolo de (10a) es dado por

$$\sigma(T) = a(x) + \sum_{m\neq 0} \varepsilon_m |m|^{-1} c_m(x)\, e^{im\phi} \qquad (10b)$$

Giraud y Mijlin han considerado ecuaciones análogas en E^n, $n \geq 2$. Como entonces no se sabía todavía si $H_w f$ existe para funciones f de L^p (esto recién lo probaron Calderón y Zygmund en 1952 y 1956) Trikomi y Giraud consideraban solamente funciones f de Lip $\beta(E^n)$ para las cuales la existencia de $H_w f$ se comprueba inmediatamente (más aún, Giraud probó que entonces $H_w f$ es también lipshitziana). Mijlin probó, aunque en forma incompleta, que $H_w f$ opera sobre L^2, y esto le permitió estudiar las ecuaciones (10) en el L^2, que es un espacio de Hilbert, y lograr así una teoría mas perfecta. En base de los trabajos de Trikomi y Giraud, Mijlin estableció finalmente, en L^2, que la ecuación (10) o (10a) tiene regularizador si y solo si su símbolo $\sigma(T) \neq 0$, y de modo que en este caso valen los teoremas a), b), b_1) de Fredholm. Las demostraciones de Mijlin son algo incompletas, y la teoría fué perfeccionada en forma definitiva y mucho más general en los trabajos de Calderón y Zygmund ya citados (Mijlin afirma además que, si $n \geq 2$ y si el símbolo es $\neq 0$, entonces vale también el teorema c) de Fredholm; pero esto parece algo improbable, además Mijlin considera que V es completamente continuo, lo cual está bien en dominios acotados pero no en todo el espacio E^n).

F) La teoría de Fredholm que considera operadores integrales con núcleos regulares, dió origen a la teoría de F. Riesz - Schauder donde se prueba que los teoremas a). - c) de Fredholm valen para operadores generales de la forma $\lambda f - Vf$, definidos en espacios de Banach generales. Asimismo la teoría de Carleman - Noether - Tricomi - Mijlin dió origen a la siguiente teoría de operadores Φ ó casi fredholmeanos, desarrollada por F. Atkinson (en base a un trabajo de Nikolski), y perfeccionada por Gojberg, M. Krein y Nagy.

Sea $E = \{f\}$ un espacio de Banach, por ejemplo E puede ser L^p; $p \geq 1$. Con $\mathcal{V} = \{V\}$ indicaremos al conjunto de los operadores completamente continuos definidos en E (cada V transforma un conjunto acotado de E en relativamente compacto). Un operador Tf se dirá de Fredholm si $T = I + V$ (I = operador idéntico). Un operador B se dirá <u>regularizador izquierdo</u> (respectivamente derecho) de T si $BT = I + V$ (resp. $TB = I + V$), y se dirá regularizador si es izquierdo y derecho a la vez.

Se tienen entonces los resultados siguientes:

1) Para que para la ecuación $Tf = g$ valgan los teoremas a), b), b_1) y c) de Fredholm, es necesario y suficiente que T admita un regularizador B tal que exista B^{-1} acotado, es decir, exista un operador acotado $C = B^{-1}$ con $BC = CB = I$. (Nikolski)

2) Para que se verifiquen los teoremas a), b), b_1) (pero no necesariamante c)) es necesario y suficiente que T admita un regularizador izquierdo y otro derecho; también es necesario y suficiente que T admita un regularizador B tal que B tenga inverso izquierdo C : $CB = I$, y tal que $BC = I + V$ (es decir $BC = I$ (mód V)). (Atkinson).

3) Para que valgan los teoremas a) y b) (pero no necesariamente b_1) y c)) es necesario y suficiente que T tenga un regularizador izquierdo. (Gojberg).

4) Para que valga el teorema a) es necesario y suficiente que el rango de A sea cerrado. (Hahn-Banach).

Los operadores que verifican a), b) y b_1), pero no necesariamente c), se llaman <u>operadores - Φ</u> o casi Fredholm; el teorema 2) caracteriza pues a tales operadores. Los operadores (9) o (10a) son por tanto operadores - Φ, si el símbolo es diferente de cero.

El teorema a) expresa, en virtud de 4), que le rango de T es cerrado. Las funcionales lineales continuas de E que se anulan en este rango de T forman un subespacio N(T) (en el conjugado de E) llamado subespacio de deficiencia del operador T; el teorema b_1) expresa que N(T) tiene dimensión finita β. Si Z(T) es el subespacio de E formado por las caras de T, el teorema b) expresa que Z(A) tiene dimensión finita α. La diferencia $i(T) = \alpha - \beta$ se llama <u>índice de deficiencia</u> del operador $-\Phi$ T. Para los operadores $-\Phi$ valen las propiedades siguientes:

2a) Los operadores $-\Phi$ forman un conjunto Σ que es abierto en el espacio E_1 de todos los operadores acotados de E.

2b) Ningún punto frontera de Σ le pertenece, pues tales puntos son divisores de cero generalizados.

2c) T_1, $T_2 \in \Sigma$ implica $T_1 T_2 \in \Sigma$ y vale $i(T_1 T_2) = i(T_1) + i(T_2)$

2d) $T \in \Sigma$, $V \in \vartheta$ implica $T + V \in \Sigma$, $i(T + V) = i(T)$.

2e) Para cada $T \in E_1$, se llama <u>región - Φ</u> de T y se indica Φ_T al conjunto de los números complejos λ tales que $\lambda I - T \in \Sigma$; esta región se compone de un número numerable de regiones conexas en cada una de las cuales es constante el índice $i(\lambda I - T)$ (en caso de los operadores (10a) estas son las regiones estudiadas por Mijlin).

2f) Si Φ_T = todo el plano entonces el espacio E es de dimensión finita. Si $V \in \vartheta$ entonces $\Phi_{T+V} = \Phi_T$.

2g) Existen dos operadores fundamentales $U \in \Sigma$, $U_1 \in \Sigma$ tales que todo otro T de Σ es de la forma $T = B(U^m + V)$ ó $T = B(U_1^{-m} + V)$, donde $m \geqslant 0$ es entero, B es invertible y $V \in \vartheta$. En particular $U^m U_1^m = I + V$, $UU_1 = I$ (mód V). Así pues las potencias de U y U_1 dan esencialmente todos los operadores $-\Phi$.

2h) Sean U, U_1 dos operadores de Σ tales que $UU_1 = I$ (mód V), y sea $\Sigma_1 \subset \Sigma$ el conjunto de todos los operadores de la forma

$$T = \sum_{n=1}^{N} a_n U^n + \sum_{n=1}^{N} a_{-n} U_1^n + cI + V \tag{11}$$

a_n, b_n constantes. Sea $\bar{\Sigma}_1$ la clausura de Σ_1 en Σ, o sea el conjunto de los operadores acotados de la forma

$$T = \sum_1^{\infty} a_n U^n + \sum_1^{\infty} a_{-n} U_1^n + cI + V \tag{11a}$$

En $\bar{\Sigma}_1$ consideramos la norma $\|T\| = \sum |a_n| \|U^n\| + \sum |b_n| \|U_1^n\| + c + \|V\|$. $\bar{\Sigma}_1$ es un álgebra de Banach dentro del álgebra de todos los operadores acotados. La serie $\sum a_n z^n$ se llamará <u>característica</u> del operador $T \in \bar{\Sigma}_1$. Mientras $\Sigma_1 \subset \Sigma$, $\bar{\Sigma}_1$ puede contener operadores que no son más de Σ . Queremos ver cuando, dado $T \in \bar{\Sigma}_1$, es $T \in \Sigma$. Para ello se observa que por 2), $T \in \Sigma$ si y solo si T es inversible (mód V). Consideremos el álgebra cociente $\bar{\Sigma}_1/\mathfrak{V}$ ($\mathfrak{V}$ es un ideal bilátero). Este cociente es comutativo y tiene a las clases I y U como generadores. Por un teorema de Shilov los ideales maximales de $\bar{\Sigma}_1/\mathfrak{V}$ son puntos del plano complejo formando cierto conjunto compacto $\bar{S}$, y los elementos de $\bar{\Sigma}_1/\mathfrak{V}$, es decir los $T \in \bar{\Sigma}_1$ (mód $\mathfrak{V}$), se representan por funciones de la forma $\sum c_n z^n$ ($z \in \bar{S}$). Por un teorema clásico de Gelfand T será inversible si y solo si $\sum c_n z^n$ no se anula en ningún z de $\bar{S}$.

Así pues, a todo T de $\bar{\Sigma}_1$ le corresponde una serie de Laurent $\sum c_n z^n$ definida en cierta región $\bar{S}$ del plano, y que se llamará símbolo de T. Para que $T \in \bar{\Sigma}_1$ pertenezca a Σ es necesario y suficiente que su símbolo no se anule. (Atkinson).

La teoría de los símbolos de Tricomi - Giraud - Mijlin, para el caso de operadores con coeficientes constantes y $n = 2$, queda comprendida dentro de este último resultado. En efecto, para tales operadores las fórmulas (60a) y (58) del § 5 corresponden a la (11a) y el símbolo se reduce a (61), y $\bar{S}$ es aquí el círculo unitario.

Para demostraciones y un estudio más profundo de estas cuestiones enviamos a los trabajos de Atkinson y de Krein - Gojberg.

Observación 1. Por lo que vimos, a todo espacio de Banach E corresponde un álgebra $\bar{\Sigma}_1$, y por lo tanto una región $\bar{S}$, y una transformación que a toda serie de Laurent $\sum a_n z^n$, $z \in \bar{S}$, (característica de un T), le hace corresponder otra tal serie $\sum c_n z^n$ (símbolo de T). En virtud de lo visto en el § 5, D) (comentario al teorema 3a), esta transformación puede considerarse como una definición muy general del concepto de serie conjugada.

Observación 2. La teoría anterior de Atkinson, generaliza la teoría de Mijlin para operadores (10) con coeficientes constantes y $n = 2$. Si bien el teorema 2g) de Atkinson permite aplicar (11) en todo espacio de Banach, sin embargo esta teoría no se aplica a los operadores (10) con coeficientes constantes en el caso de $n > 2$, pues según se vió en el § 5, fórmulas (65), (65b), los desarrollos de tales operadores no son de la forma (11a) además los símbolos de los operadores fundamentales (que corresponden a las funciones esféricas Y_{mi}) pueden anularse, mientras que en la teoría de Atkinson es $UU_1 = I$ (mód V). Hace falta pues extender la teoría de Atkinson (y el teorema de Shilov) para $n > 2$ de modo que armonice con la teoría de Mijlin, lo que esperamos hacer en otra oportunidad.

<u>Observación 3</u> . La teoría de Atkinson no abarca los operadores (10) o (10a) con coeficientes no constantes. Hace falta pues una subsiguiente extensión de esta teoría. Si bien en caso de espacio de Banach no podemos hablar de coeficientes no constantes, pero podemos interpretarlos como operadores de cierta clase particular, por ej. como operadores C tales que $C = V$ implica $C = 0$, $C = \lambda I + V$ implica C es inversible. (Estas propiedades se verifican si $Cf = c(x)\, f(x)$, $c(x)$ función continua en $(0,1)$ y $f \in L^2$).

<u>Observación 4</u> . Como dijimos, Mijlin afirma que para todo operador (10a) con símbolo $\neq 0$ vale también el teorema c) de Fredholm. Si bien su demostración no parece completa, esto sugiere el siguiente problema general:

Sea A un álgebra de Banach, V un ideal bilátero del mismo, $\bar{\Sigma}_1$ subálgebra generado por un elemento U y V. ¿Bajo qué condiciones se puede afirmar que si un elemento de $\bar{\Sigma}_1$ tiene un inverso B (módulo V) entonces existe un B_1 de la forma $B_1 = B + V$ tal que B_1 tiene inverso (en sentido absoluto, y no tan solo módulo V)?

G) Siguiendo a Gojberg, vamos a ilustrar en caso de las ecuaciones (9), como se obtienen los resultados de Carleman - Noether mediante métodos generales de álgebras de Banach. Sea $T = a + bH + V$ un operador de la forma (9) donde

$$Hf = \int_L f(t)\, (x-t)^{-1}\, dt$$

Sea Σ el conjunto de todos estos operadores. El operador singular Hf tiene las siguientes propiedades (bien conocidas para el caso análogo del núcleo $\operatorname{cotg} \frac{t}{2}$):

1) $H^2 = HH = I$

2) $H^* =$ adjunto de $H = H + V$

3) Si J es el operador de conjugación, $Jf = \bar{f}$, entonces

$$JH^*J = -H + V$$

4) $a(t)\,[Hf(t)] - H[a(t)\,f(t)] = V$ (fórmula de Poincaré - Bertrand).

(Para las demostraciones ver el artículo de Mijlin en Uspehi Mat. Nauk III, 3 (1948), 29 - 112).

De estas propiedades sigue que Σ es un álgebra normado de operadores en $L^2(L)$. Si $\Sigma_1 = \Sigma/V$ entonces a cada $T = a + bH + V$ le corresponde en Σ_1 el elemento $T_1 = a + bH$. La correspondencia $T_1 \to (a,b)$ es biunívoca, como se prueba fácilmente usando los teoremas de Fredholm (pues si $a(t)f(t) = H + V$, como H es inversible la ecuación $a(t)f(t) = 0$ tiene un número finito de soluciones independientes, y de ahí es fácil deducir que $a(t) \neq 0$ en todo t, y se obtendría que H es un operador regular, imposible). Como $(a + bH)(c + dH) =$ $= (ac+bd)+(ad+bc)H$, resulta enseguida que Σ_1 es isomorfo al álgebra de las funciones definidas así: Sea j el conjunto de dos puntos $j = (1, -1)$, y sea $L \times j$ el conjunto de los pares $(t,1)$ y $(t,-1)$, $t \in L$, es decir dos líneas L repetidas.

Consideremos todas las funciones definidas en $L \times j$ y de la forma siguiente:

$$G(t) = a(t) + j\,b(t) ,$$

o sea en un punto de la forma $(t,1)$ es $G = a(t) + b(t)$ y en un punto $(t,-1)$ es $G = a(t) - b(t)$. Entonces Σ_1 es isomorfo al anillo de todas estas funciones $G(t)$ y cada tal G es dada por un par de funciones $a(t)$, $b(t)$ definidas en la curva L. Por un teorema de Stone (generalizado por Shilov), si un álgebra $\{G\}$ de funciones continuas sobre un compacto es tal que: 1° con cada G pertenece al álgebra $\bar{G}$, 2° si $G \neq 0$ entonces $1/G$ está en el anillo, - entonces los ideales maximales del álgebra son los puntos del compacto. Luego los ideales maximales de Σ_1 son los puntos $(t,1)$ y $(t,-1)$, $t \in L$. De aquí resulta enseguida que un $T_1 \in \Sigma_1$, $T_1 = a + bH$ es inversible en Σ_1 si y solo si $a(t) + b(t)$ y $a(t) - b(t)$ no se anulan, es decir si $(a(t))^2 - (b(t))^2 \neq 0$ en todo t de L.

De 2) de F) resulta entonces que los teoremas fundamentales a), b) y b_1) de Fredholm valen para la ecuación (9) si y solo si $a(t)^2 - b(t)^2 \neq 0$, que es el teorema fundamental de Carleman - Noether. (En los razonamientos que preceden así como en los de F) se debe tener en cuenta que en realidad para que sea $T \in \Sigma$ debe ser T_1 inversible en Σ_1/V y no solo en $\Sigma/V = \Sigma_1$, E_1 = álgebra de todos los operadores acotados en E. Pero en nuestro caso el álgebra es simétrico, es decir $I + TT^*$ tiene inverso para todo T, y ambas afirmaciones son equivalentes).

Análogamente se trata el caso de sistemas

$$\sum_{k=1}^{n} a_{mk}(t)\, f_k(t) + b_{mk}(t)\, Hf_k + V_m = g_k \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

que puede escribirse

$$A(t)f(t) + B(t)\, Hf + Vf = g\,,$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son matrices, V una matriz completamente continua, y $Hf = \{Hf_1, Hf_2, \ldots Hf_n\}$ si $f = \{f_1, \ldots f_n\} \in L_2^{(n)}$. Se tiene entonces que para este sistema valen los teoremas a), b), b_1) de Fredholm si y solo si el determinante de $[A(t) + B(t)]\,[A(t) - B(t)]$ no se anula en L. La demostración es exactamente igual al caso $n = 1$.

H) El teorema de Marcinkiewicz citado al final de D) del § 5 (teorema 3a) puede formularse para E^n en la siguiente forma debida a Mijlin: Sea $h(u)$, $u \in E^n$ una función tal que: 1° $h(u)$ es continua en todo $u \neq 0$; 2° existe la derivada $\partial^n h/\partial u_1 \ldots \partial u_n$ en cada punto u, y las derivadas precedentes son continuas ; 3° $|u|^s\, |D^{[a]}h(u)| \leq M$ para todo $|[a]| = s$ y todo $s = 0, \ldots n$. Entonces el operador multiplicador $F = Tf$ definido por $\hat{F} = \hat{f}\, h$ es de tipo (p,p) para todo $1 < p < \infty$. Según comunicación oral de Calderón, la demostración del teorema 3a del § 5 puede extenderse de modo que se aplique al caso general de Marcinkiewicz.

Sería útil generalizar este teorema de Marcinkiewicz para operadores de tipo (p,s). Creemos que si en la condición 3° se reemplaza $|u|^s$ por $|u|^{s+d}$

entonces el operador será de tipo (p,s) con $1/p - 1/s = d/n$. Idem para tipos $(L^p(E^n), L(E^m))$, y tipos débiles.

I) Como lo demostró C. Ratto de Sadosky en su tesis, las propiedades de tipo de los operadores potenciales $H_d f$ valen también para los operadores potenciales hiperbólicos (por ejemplo en E^2, el operador hiperbólico es dado por

$$H f(x_1,x_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1+t_1,x_2+t_2)\left|t_1^2 - t_2^2\right|^{1/2(2-\gamma)} dt_1 dt_2 \quad),$$

salvo la propiedad de tipo débil para $p = 1$ que <u>no vale</u> para estos operadores. Sin embargo en este trabajo se considera tan solo el caso $n = 2$, y falta hacerlo para $n > 2$ y para otras distancias dadas por formas cuadráticas generales; también falta considerar las propiedades de capacidad y de espacios Lipshitz. Estos resultados sugieren el siguiente problema que podría resultar útil en aplicaciones a ecuaciones diferenciales: extender el teorema de Marcinkiewicz citado en la nota precedente a tipos (p,s) pero con condiciones dónde en vez de la distancia euclídea $|u|$ aparezca la distancia hiperbólica $u_1^2 - \dots - u_n^2$.

J) La demostración del corolario 4 de la pág. 46 se simplifica considerablemente si en vez de poner $f = g + (f - g)$, $f \in L^2$, donde $g \in L_0$, se pone $f = g + (f - g)$ con $g \in \mathfrak{D}$; en efecto, si g es de $\mathfrak{D}$ entonces es inmediata la convergencia de $H_\varepsilon g$ a Hg (la convergencia es uniforme sobre conjuntos acotados, mientras que $H_\varepsilon g(x) - H_{\varepsilon'} g(x)$ es nula para $|x|$ grandes). Dejamos los detalles a cargo del lector a título de ejercicio fácil.

K) Es necesario hacer una distinción entre los espacios de Sobolev $W_p^{(1)}$ y los de Beppo - Levi $BL(L^p)$. Las funciones f de $W_p^{(1)}(D)$ son, por definición, pertenecientes a L^p y tales que $Df \in L^p$. En cambio $BL(L^p(D))$ se define como el espacio de todas las funciones f tales que existe la derivada generalizada Df y es $Df \in L^p$, pero de la función f misma no se sabe si ella pertenece a $L^p(D)$. La condición $Df \in L^p$ implica que f es integrable sobre todo dominio $D' \subset D$ completamente interior, pero no sobre D mismo. En caso de D acotado, si supiéramos que f es integrable sobre todo D, resultaría de las desigualdades de

Sobolev (pág. 260) que $|f|^s$ es integrable, con $s > p$, y por tanto también $f \in L^p$. Pero no siempre se sabe que f es integrable en D. En el trabajo citado de Lions y Deny se prueba que para dominios estrellados, y otros más generales, esto es cierto. Por tanto ambos espacios coinciden para los dominios que se encuentran en las aplicaciones. Para detalles enviamos al trabajo de Lions y Deny.

L) En el teorema 16 de la pág. 181, parte c), se supone que $E^m \subset E^n$ con $m < n < m + d$. Sin embargo <u>este teorema vale bajo la hipótesis más general $m < n < m + dp$</u>. Para verlo basta repetir la demostración de la pág. 98 (de Ilin) reemplazando p^* por s, donde $1/p - (m/n)/s = d/n$. Con este cambio, en la primera fórmula de la pág. 99, tendremos en vez del factor $dt_1/|t_1|^{2m/p^*}$ el factor $|t_1|^{(n-m-p^*(n-d))/p^*}dt_1$, luego en vez de la desigualdad $2m/p^* < m$, hace falta ahora la desigualdad $-(n-m)/p^* + (n-d) < m$, o sea $-(n-m)(1-1/p) + n - d < m$ lo que da $n < m + dp$. Es con esta hipótesis más general que el teorema 16 es aplicado más adelante en el Cap. III. La hipótesis mas restringida $n < m + d$ es usada aquí para presentar una demostración que se aplica a situaciones más generales.

Por otra parte observemos que si un operador T, considerado sobre dominios acotados, es de tipo (p,s) entonces T es también de tipo (p_1,s) para $p_1 > p$ (y también de tipo (p,s_1) para $s_1 < s$, como ya fué observado). En efecto de $\|Tf\|_s \leq M\|f\|_p$ sigue $\|Tf\|_s \leq M\|f\|_p \leq M_1\|f\|_{p_1}$, sobre dominios acotados. Esta observación permite ampliar las regiones dibujadas de la validez del teorema de Young (pág 240) en el caso de dominios acotados.

Dejamos a cargo del lector completar estos detalles.

M) Toda la teoría puede hacerse, en vez de E^n, sobre una superficie S, aunque se tiene tan solo resultados parciales en este caso; ver Mijlin (10) para la teoría de ecuaciones. Si S es lisa se puede pasar a E^n por cambio de variables, pero el caso general queda como problema abierto. (Para el caso de S = curva plana cfr. G)).

INDICACIONES BIBLIOGRÁFICAS

a) La contribución de Calderón y Zygmund a la teoría de integrales singulares está contenida en los trabajos 1, 2, 3, 4, 5, 9. En el trabajo 1 ellos demuestran las propiedades de tipo de los operadores $H_w f$ de Hilbert n-dimensionales, con aplicaciones importantes a la teoría del potencial. En 2 ellos perfeccionan estos teoremas para características que verifican $w \in L \log^+ L$, luego extienden estos teoremas a los operadores con $w = w(x,t')$ dependientes de x, así como a los núcleos $K(t) = w(x,t')|t|^{-n} h(t)$, donde h = transformada de Fourier-Stieltjes. En 3 se hace la teoría de los operadores de Riesz, la teoría de composición de operadores singulares y de sus símbolos, con aplicaciones a ecuaciones diferenciales. En 4 se hace la teoría de periodización. En 5 se estudia el álgebra de los H_w con norma $\|w\|_p$. En 6,7,8 se dan exposiciones didácticas de algunos de estos resultados. En 25, 26, 31, 35 se dan generalizaciones del teorema de Riesz-Thorin (ver C)).

b) El tipo (2,2) de los operadores $H_w f$ de Hilbert, así como los más generales con w dependiente de x, fué establecido por Mijlin (10,23), aunque sus demostraciones son incompletas. Para la teoría clásica del operador Hf de Hilbert 1-dimensional ver 12 y 13. De especial importancia en esta teoría es el trabajo célebre de M. Riesz 20 (ver además 17, 21, 22). También es necesario mencionar los trabajos de Besicovitch 14, donde por primera vez el problema es tratado sin funciones analíticas, Por métodos generales los operadores son tratados en 18, donde se da una unificación con los núcleos de Fejer y teoremas ergódicos. (Para núcleos de Fejer ver también González Dominguez y Scarfiello 77 y 78). Otras contribuciones a la teoría de los operadores $H_w f$, y especialmente a los de M. Riesz, débense a J. Horvath 11, 24. Otras generalizaciones, sobre superficies, se deben a E. Zarantonello 55.

c) Para el teorema de convexidad de Riesz-Thorin ver el libro de Zygmund 12, y 25. En 26 el teorema fué extendido a tipos (p,q) con p < 1, y a los espacios H^p, en 34 esto se generaliza para operadores sublineales. El teorema de interpolación para operadores analíticos es dado en 27, 28, 29 y 33; el teorema de convexidad de Marcinkiewicz es probado y estudiado en 31 (ver también 32 y 34). La noción de pseudo tipo se encuentra implícitamente en 1 y 31, y está formulada explícitamente en 18 y en forma general en 51. El método de operadores casi ortogonales fué introducido en 18, una demostración simplificada fué dada por B. Nagy en 36, la extensión a espacios L^p es dada en 37 (ver también E. Oklander 59). (Para tipo débil ver también 79).

d) El tipo (p,s) de los operadores potenciales $H_d f$ fué establecido por Hardy-Littlewood 38, para el caso $n = 1$, y por Thorin y Sobolev 39 para $n > 1$; el tipo débil para $p = 1$ se debe a Zygmund 31. Los tipos $(L^p(E^n), L^s(E^m))$, $m < n$, de los operadores $H_d f$ fueron probados en forma incompleta por Sobolev y perfeccionados por Ilin 48, Cotlar y Panzone 50, 51. La completa continuidad sobre dominios acotados se debe a Sobolev y Kondrachev 39a. Para operadores potenciales hiperbólicos los teoremas fueron extendidos por C. Ratto de Sadosky 60. Para la teoría de espacios de Sobolev ver 39a, 47, 53 y 54, su generalización por Nikolski 52. En 47 se da una exposición de la teoría para dominios acotados y tipos (p,s'), $s' < s$, por métodos de operadores integrales generales. El teorema de tipos ponderados de los operadores $H_d f$ fué probado por Hardy-Littlewood 38 para $n = 1$, y por Stein-Weiss 40 para $n > 1$; las extensiones sucesivas a tipos $(L^p(E^n), L^s(E^m))$ es dada en 58. Para convergencia puntual en espacios con medida ponderada ver 56, 57; para espacios de Sobolev con medida ponderada ver 61, 62. Propiedades importantes de espacios de Sobolev se encuentran también en 3 y en el trabajo de Zarantonello 55 no publicado aún.

e) Para acotaciones a priori en L^p ver el trabajo de Koshelev 63 y el artículo de Nirenberg 66 (también 64 y 65). Para el problema de coercividad ver 67 y 68. En el artículo de Nirenberg se combinan la teoría de Schauder de espacios Lip α con la de espacios L^p. Para medidas ponderadas ver 61, 62.

f) La teoría de ecuaciones integrales singulares está expuesta en el trabajo de Mijlin 23, especialmente la teoría de Carleman-Noether está tratada con mucho detalle. La teoría para $n > 1$ adolece de algunas inexactitudes, en la exposición de Mijlin, y se encuentra perfeccionada y generalizada en 3 y 5 (ver también 71a). La teoría general, en espacios de Banach de operadores - Φ se debe especialmente a Atkinson 69 y Nikolski 72 (ver también 73, 74, 75); un estudio completo y profundo está hecho en el trabajo de Gojberg y Krein 76.

g) No hemos podido tratar en este curso unas aplicaciones importantes recientes de las integrales singulares a funciones analíticas; enviamos para referencias a los trabajos 80, 81 (ver también 82). Tampoco hemos podido considerar las vinculaciones con la teoría espectral para lo cual enviamos a los trabajos 83, 84, 85 donde se encontrarán referencias bibliográficas más completas.

REFERENCIAS

1 . A. Calderón and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. Acta Math. 88 (1952), 85 - 139.

2 . A. Calderón and A. Zygmund. On singular integrals. American Journal of Math. 78 (1956), 289 - 309 .

3 . A. Calderón and A. Zygmund. Singular integrals and differential equations. Am.Journal Math. 79(1957), 901-921

4 . A. Calderón and A. Zygmund. Singular integrals and periodic functions. Studia Math. 142 (1955).

5 . A. Calderón and A. Zygmund. Algebras of singular integrals. American Journal 78 (1956), 310-320

6 . A. Zygmund. On singular integrals. Lectures, Kingston meeting of the Am. Math. Soc. (1953)

7 . A. Zygmund. Hilbert Transforms in E^n. Proceedings International Congress of Math. 1954. 140-151

8 . A. Zygmund. Curso sobre integrales singulares. CIME, Varenna, Roma 1957

9 . Calderón y Zygmund. On a problem of Mihlin. Transact. Am. Math. Soc. 78(1955) 209-224

10. S. Mihlin. Singular integral equations. Uspehi M. Nauk 3(1948), 29-112
(existe traducción inglesa)

11. J. Horvath. Sur les fonctions conjuguées. Kon. Ned. Akad. vol 15, 1 (1953),
17-29

12. A. Zygmund. Trigonometrical Series. 1935 y 1959

13. E. C. Titchmarsh. Fourier Integrals. 1937

14. A. Besicovitch. Fundamental Mat. IV(1923). Journal Lon. M. Soc. (1926)

15. E. C. Titchmarsh. Conjugate functions. Proceed. London M.S. (1929)

16. S.Pollar. Journal London Math. Soc. 2 (1927)

17. N. Lusin. Integral singular, en el libro Integral y series trigonométricas.
Moscú. 1951

18. M. Cotlar. Revista Mat. Cuyana. 1 (1955), 41-167

19. S. Mihlin. Integral Fourier e integrales singulares. Vest.L9U, 7(1957)

20. M. Riesz. Sur les fonctions conjuguées. Mat. Z. 27 (1927) 218-44

21. A. Plessner. J. Reine und ang. M. 158 (1927)

22. J. Marcinkiewicz. Lond. M. Soc. 10 (1935) y 14(1939), Fund. Mat. 27 (1936).

23. S. Mijlin. Ecuaciones singulares en dos variables. M. Sbornik 1 (43) (1936)
535-552, 3 (45) (1937)

24. J. Horvath. C. R. Acad. París, sep. 1953, 1480-2

X 24a J. Horvath. Singular operators, spherical harmonics. TAMS, 82(1956); también
Proc. AMS 9(1958), 10(1959).

25. Calderón - Zygmund. Contributions Fourier Analysis. An.Math.Studies.
Princeton 1950

26. Calderón - Zygmund. Interpolation of operations. Studia Math.(1951),194-204

27. I. Hirschman. Convexity theorem. Journal d'Analyse, 2(1952), 209-18

28. E. M. Stein. Interpolation of Operations. Trans. Am. M. Soc. 43(1956), 482-92

29. G. Weiss. Interpolation theorem on H^p spaces. Proc. Am. M. Soc. 8(1957) 92-99

30. J. Marcinkiewicz. C. Rendues. Ac. S. Paris. (1939), p.1272.

31. A. Zygmund. Theorem of Marcinkiewicz. Journal Math. Pures App.(1956)223-248

32. M. Cotlar y M. Bruschi. Revista Universidad de La Plata (1956), vol V, N 3, 162-172

33. E. Stein y G. Weiss. Interpolation with change of measures. TAMS 87, 1(1958)

33a Stein - Weiss. J. Math. Mech. 8(1959)

34. R. Panzone. Tesis. Facultad de Ciencias. Buenos Aires 1958.

35. Calderón - Zygmund. Interpolation of sublinear operators. Am. Journal Math. 78, 2 (1956), 282-288

36. Béla Sz. Nagy. Acta Sci. Mat. 18(1957) p.190

37. M. Cotlar y R. Panzone. Ortogonal Operators in L^p. Acta Sci. Mat. (1958), 19, 165-171.

38. G. Hardy and J. Littlewood. Fractional Integrals. Math. Zeit. 27(1928), 565-601, y 28(1928)

39. S. Sobolev. Théoreme de l'analyse Fonct. Doklady Acad. S. URSS 20(1938), 5-9

39a S. Sobolev. Aplicaciones del Análisis Funcional a Física Matemática. Leningrado 1950

40. E. Stein y G. Weiss. Fractional Integrals. Journal Math. Mech. 7 (1958)

41. N. Du Plessis. Fractional Integrals. Trans. Am. M. Soc. 80, 1(1955)

47. L. Kantorovich. Operadores integrales. Uspehi M. Nauk. (1956)

48. V. Ilin. Uspehi M. Nauk (1956)

49. A. Smolitzki. Uspehi M. Nauk XII (1957).

50. M. Cotlar. Operadores con núcleos singulares. Exposición, Reunión UMA 1957

51. M. Cotlar y R. Panzone. Generalized Potencial Operators. Revista UMA (1959)

52. S. Nikolski. Trudi Inst. Steklov (1951), así como en Mat. Sbornik 1956-7-8

53. Deny y Lions. Les espaces de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier, V, 1953-4, 305-70

54. J. Lions. Revista UMA, XVII, (1955), 103-116

55. E. H. Zarantonello. Comunicaciones a la UMA. 1957 y 1958.

56. K. Babenko. Doklady Akad. Nauk. 62(1948), 157-60

57. E. Stein. Proceedings Am. Math. Soc. 8,2(1957) 250-254

58. M. Cotlar y E. Ortiz. Tipos ponderados de operadores potenciales. Comunicación a la UMA 1959.

59. E. Oklander. Una fórmula para norma de operadores en L^p. Comunicación a la UMA 1959.

60. Cora Ratto de Sadosky. Tesis. Universidad de Buenos Aires. 1959

61. M. Vishik. Mat. Sbornik. 1954

62. L. Kudriatzev. Izvestia 1959

63. A. Koshelev. Acotaciones a priori en L^p. Uspehi M. Nauk 13(1958), 29-88

64. K. Miranda. Ecuaciones elípticas en derivadas parciales. 1957

65. O. Guseva. Trudi Inst. Steklov. 1953

66. L. Nirenberg. Estimates of solutions of el. equations. Comm. Pure. A. Math. vol 9 (1956)

67. N. Aronzajn. On coercive forms. Conference Partial Diff. Eq. Univ. Kansas 1954

68. M. Schechter. Amer. J. Math. 79(1957) y Comm. Pure A. Math. (1959)

69. F. Atkinson. Ecuaciones en espacios normados. Mat. Sbornik 28(1951), 3-14, además Acta Sci Math.3(1952), ibid. 15,1(1953)

70. F. Noether. Math. Ann. 8, 2(1921), 42-63

71. Carleman T. Arkis Mat. Astr. Fys. 16, N 26 (1922)

71a A. Tricomi. Mat. Zeit. 27(1928)

72. S. Nikolski. Izvestia Akad. Nauk 7, N 3 (1943) 147-166

73. Z. Jalilov. Ibid 13, N 2 (1949), 163-76

74. B. Sz. Nagy. Acta Sci. M. 3(1952), 14(1951), 1(1952)

75. I. Gojberg. Doklady 76, 1 (1951), Uspehi M. Nauk 7(1952), 149-156

76. I. Gojberg y M. Krein. Indices de deficiencias y radicales. Uspehi M. Nauk, 12 (1957), 43-118

77. A. González Dominguez y R. Scarfiello. Revista de la UMA.

78. Merlo. Núcleos singulares. Facultad de Ciencias, Buenos Aires 1959.

79. C. Trejo. Revista Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas. Univ.La Plata 1959

80. E. M. Stein. Functions of Littlewood-Paley, Lusin, Marcinkiewicz. Transac. A. Math. Soc. 88, 2(1958), 430-66

81. D. Waterman. Integral of Marcinkiewicz, Proc. Int. Congress. vol 2, 1954, 185-6, y TAMS 81 (1956), 167-194

82. E. Ostrow y E. Stein. Lemmas of Marcinkiewicz. Scuola Normale S. di Pisa. XI (1957)

83. A. Devinatz and I. Hirschman. Spectra of Multiplier transforms. Amer. Journal Math. 90 (1958), 829-842

84. A. Devinatz and I. Hirschman. Multipliers in ^{2,a}. Washington Univ. 1958

85. C. S. Herz. Potential theory and Spectral Analysis. Cornell Symposium on Harmonic Analysis 1956.

ÍNDICE

Advertencia iii

I) Tipo de operadores 1

Definiciones 3

Teorema de Plancherel 9

Integrales singulares 13

II) Criterios generales de tipo 16

Teorema de convexidad 18

Aplicación a transformación de Fourier 23

Teorema de Hausdorff - Young (para series) 23

Teorema de Hausdorff - Young (para integrales) 25

Función de distribución 28

Operadores casi ortogonales en L^2 34

Aplicación a transformadas de Hilbert en L^2 40

Extensión a tipos (p, p^*) 55

Operadores potenciales 65

Extensión a tipos $\left[L^p(E^n), L^{p^*}(E^m)\right]$ 79

Notas al Capítulo II 91

Teorema de los operadores casi ortogonales en el espacio de Hilbert 100

III) Extensión de la noción de tipo 107

Definición de tipo débil 107

Teorema de Marcinkiewicz para (p , p) 113

Teorema de Hardy - Littlewood - Paley 122

Operador maximal 125

Lema de cubrimiento 126

Teorema maximal de Hardy - Littlewood 131

Seudotipo (p , p) 132

Subordinación de operadores 146
La convergencia puntual y el operador maximal 160
Teorema de Marcinkiewicz para (p, s) 169
Teorema de Marcinkiewicz - Zygmund 171
Notas sobre el Capítulo III 186

IV) Propiedades de los operadores H_d y H_w 218
Regularización de funciones en L^p 218
Teorema de Young 220
Conjuntos compactos en espacios funcionales 226
Teoremas de Arzelá 229
Teorema de Riesz - Arzelá para L^p 232
Operadores integrales 235
Teorema de Young generalizado 240
Los espacios de Sobolieff y Beppo Levi 255
Teoremas de inmersión en espacios $B_p^{(1)}$ y $B_p^{(\ell)}$ 261
Derivadas generalizadas 265
Teoremas de inmersión de Sobolieff para $W_p^{(\ell)}$ 270

V) Propiedades de las transformadas de Hilbert 278

VI) Aplicación a la acotación a priori de ecuaciones diferenciales . . . 301
Teorema de Bernstein 303
Acotaciones de Schauder 316
Teorema de Niremberg 318

VII) Notas diversas 319
Nota bibliográfica y referencias 341
Erratas advertidas 349

ERRATAS ADVERTIDAS

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
6	3b	$\Vert k \Vert_1$	$\Vert k \Vert_q$
7	8	igual a uno	igual a $1/\varepsilon$
8	8	$\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f)$	$\mathcal{F}^*[(\mathcal{F}f)\cdot m(y)]$
9	14 y 12b	$(1/2\pi)^{-1/2}$	$(1/2\pi)^{1/2}$
10	1	$(1/2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ixy}-1}{iy}\,dy$	$(1/2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ixy}-1}{iy}\,dx$
10	8	$(1/2\pi)^{-1/2}$	$(1/2\pi)^{1/2}$
11	3	$\frac{\operatorname{sen} a\,(x-z)}{x-z}$	$\frac{\operatorname{sen} a\,(x-z)}{x-z}\,dz$
11	9	$\vert f(x)\vert^2\,dx$	$\vert g(x)\vert^2\,dx$
12	6	$f(y)$	$\mathcal{F}f(y)$
18	11	$a \geq 0$	a real
18	14	$e^a\,\vert F(z)\vert$	$e^{\vert a\vert}\vert F(z)\vert$
18	16	$M_1\ M_2$	M_1/M_2
19	3b	$\Vert T_1 + ivf \Vert$	$\Vert T_{1+iv}f \Vert$
20	3b,2b	$i(p/p_2 - p/p_1)\,y$	$i(p/p_2 - p/p_1)\,v$
21	10,11	$C_i^{a(z)}\ d_j^{b(z)}$	$C_i^{a(z)}\ d_j^{\overline{b(z)}}$
22	9		Agregar: (ver D, pág. 95)
23	3b	$\Vert f \Vert_2^2$	$1/2\pi\ \Vert f \Vert_2^2$
23	2b	$\Vert f \Vert_2$	$(1/2\pi)^{1/2}\Vert f \Vert_2$
24	2	$\int f(x)\ e^{-inx}\,dx$	$\int_0^{2\pi} f(x)\ e^{-inx}\,dx$
26	9b	$H_z = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}$	$H_z^* = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}$
25	8b	tal igualdad	tal desigualdad

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
25	3b	$\int$	$\int_{-\infty}^{\infty}$
26	5 , 6	$\int$	$\int_{-\infty}^{\infty}$
26	8b	$h_z \quad L^p$ para todo $p \quad 1$	$h(z) \in L^p$ para todo $p \geq 1$
26	7b	$H_z \quad L^p$ para todo $p \quad 1$	$H(z) \in L^p$ para todo $p > 1$
33	7	$h_n \; h_n + i$	$h_n \; h_{n+i}$
33	3b,2b,1b	$1 + 2 \log a / \log \varepsilon$	$1 + [2 \log a/\log \varepsilon]$
34	1 y 2	Quitar las dos líneas	
35	6b	$\leq M^2 \lvert \hat{f}(u) \rvert^2$	$\leq 4 M^2 \lvert \hat{f}(u) \rvert^2$
35	5b	$M^2 \lvert f(u) \rvert^2$	$4 M^2 \lvert \hat{f}(u) \rvert^2$
35		Agregar como última línea:	Por ser $\hat{f}(u) \in L^2$ y $h(u)$ acotada, es $\hat{f}(u)\, h(u) \in L^2$; luego por el teore-
37	7	$\lVert k_1 * k_2 \rVert_2$	$\lVert k_1 * k_2 \rVert_1$
38	6	$\leq M$	$\leq M\, c(\varepsilon)$
39	1	$\lVert k_i \quad k_{i+J} \rVert_1$	$\lVert k_i * k_{i+j} \rVert_1$
44	1b	también fuera de estos intervalos	dentro de (a,b) para todo t o fuera de (a,b) para todo t
45	9 ...	b	$\lvert b \rvert$
45	11	Agregar:	(Suponemos que $\lvert b \rvert \geq \lvert a \rvert$)
45	13,14,16	k	h
45	4b	$2^N + 2b$	$2\,(2^N + 2\lvert b \rvert)$
45	2b	$(2^N + 2b)\, /\, (2b + 2^N)^2$	$2(2^N + 2\lvert b \rvert)(2\lvert b \rvert / 2^N)^2$
45	1b	$\lVert D_\varepsilon\, g \rVert_\varepsilon$	$\lVert D_\varepsilon\, g \rVert_2$
47	1	$K(t) = \lvert t \rvert K(1)$ si $t > 0$, $K(t) = \lvert t \rvert K(-1)$	$K(t) = \lvert t \rvert^{-1} K(1)$ si $t > 0$, $K(t) = \lvert t \rvert^{-1} K(-1)$

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
54	7	de S en S	de t' en S
66	5	$g^{(i)}(x) \in \mathrm{Lip}\,(1\ ,\ 1)$	$g^{(i)}(x)$ es absolutamente continua
66	12	$g^{(i)} \in \mathrm{Lip}\,(1\ ,\ 1)$, luego	por hipótesis
66	13	$\widehat{g}^{(m)}(u) = u^m\,\widehat{g}(u)$	$\widehat{g^{(m)}}(u) = (iu)^m\,\widehat{g}(u)$
71	11	en/(n + d)	2n/(n + d)
74	1b	y por	y por lo tanto
75	6b	$= \int_{\lvert t\rvert<2^{-N}} \frac{1}{\lvert t\rvert^{n-d}}\, e^{-i(t,u)}\,dt$	$\leqslant \left\lvert \int_{\lvert t\rvert<2^{-N}} \frac{1}{\lvert t\rvert^{n-d}}\, e^{-i(t,u)}\,dt \right\rvert$
81	1 y 3	$\int_{E^m} \int_{E^{n-m}}$	$\int_{E^{n-m}} \int_{E^m}$
82	7b	$E^m = \{t_2\},\ e^{n-m} = \{t_2\}$	$E^m = \{t_2\},\ E^{n-m} = \{t_2\}$
86	7	$(L^p(E^n)\ ,\ L^{p^*}(E^n))$	$(L^p(E^n)\ ,\ L^{p^*}(E^m))$
87	10	definida en E^n	definida en E^m
104	2	$= T\left[T(T\left[(T\left[(Tf)^{p-1}\right])^{p^*-1}\right])^{p-1}\right]$	$= T\left\{\left[T\lvert Tf\rvert^{p-1}\ \mathrm{sgn}\ f)\right]^{p^*-1}\mathrm{sgn}\ f\right\}$
104	4	$= \lim_{r\to\infty}\ (\lVert T_1{}^r\rVert)^{1/(2p+1)r}$	$= \lim_{r\to\infty}\ (\lVert T_1\rVert^r)^{1/rp^*+1}$
105	7	$v = [a_1\ ,\ -a_N]$	$v = [a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots,\ a_N]$
110	3	$\int_0^N s^{s'-1}$	$\int_0^N a^{s'-1}$
111	5	sobre L_0	sobre L_e
111	8b	es de tipo	es de tipo débil
112	3	(1 , n/(n - d))	(1 , m/n-d)
112	10,11	γ/n	d/n
115	10	$\lVert Tf\rVert_\infty$	$\lVert Tf_z\rVert_\infty$
115	11	$\lvert Tf(x)\rvert$	$\lvert Tf_z(x)\rvert$
115	12	$\leqslant D(\lvert Tf^z\rvert\ ;\ a)$	$\leqslant D(\lvert Tf^z\rvert\ ;\ a/2)$
118	9b	$\leqslant 2(p/(p - p_1)+\dots)$	$M \leqslant 2(p/(p - p_1)+\dots)$
124	2	en la esfera	en el complementario de la esfera

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
124	5	$= \lvert w \rvert\, b^{-n} = w\, \Vert f \Vert_1 / a$	$= \frac{\lvert w \rvert}{n}\, b^{-n} = \frac{\lvert w \rvert}{n} \Vert f \Vert_1 / a$
124	7	$M = \lvert W \rvert$	$M = \frac{\lvert w \rvert}{n}$
124	11	$= (\hat{f}\,,\, g)$	$= (f\,,\, g)$
124	4b	$= \Vert f \Vert_q$	$= \Vert \hat{f} \Vert_q$
140	6b	$f(x)\ \ m(f)$	$f(x) \geqslant m(x)$
144	1b,2b	$f\ *$	$(f - h)\ *$
148	4	$\lvert Mf(x) \rvert \leqslant Lf(x)$	$\lvert Mf(x) \rvert \leqslant L(Tf(x))$
150	6b	$Mf(x)$	$\lvert Mf(x) \rvert^p \leqslant \frac{1}{\lvert Q(x) \rvert} \int_{Q(x)} \lvert f(t) \rvert^p dt =$ $= L(\lvert f \rvert^p)$
151	3	$\lvert E(Q) \rvert$	$\lvert E(a) \rvert$
155	2b	$\Big]_{-\infty}^{x-}$	$\Big]_{-\infty}^{x-\varepsilon}$
156	4	$+ \left[1/(u - x)^2\right]$	$+ \left[1/(u - x)\right]$
156	5	$+ 4(\varepsilon)$	$+ 4/\varepsilon$
157	1b	$r_1^{\,2}\ r_2^{\,2}$	$r_1^{\,2}\ r^2$
158	1	$w(y)$	$w(t)$
158	3	$2r \iint$	$2\varepsilon \iint$
162	8b	$\Vert f \Vert_p \to \infty$	$\Vert f \Vert_p < \infty$
168	1	$H_\varepsilon f(x)$	$H_\varepsilon f_i(x)$
176	3	$K^s \leqslant$	$K \leqslant$
177	10b	$\int_0^1 f(t)\, dt$	$\left\lvert \int_0^1 f(t)\, dt \right\rvert$
177	9b	Si la integral J es negativa entonces E(a) es vacío.	(suprimirlo)
178	15	tiende a cero	tiende a infinito
181	5,12	$d/n < p < 1$	$d/n < 1/p < 1$
186	8b	$= M_1\, M_2$	$= M_1\, M_2^{\,r}$

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
187	4	Archieson	Achieser
204	8	$g(x) = E\{f \mid \{F\}$ tal que	$g(x) = E\{f \mid \{F\}\}$ medible con respecto a F tal que
204	12	y E ,	y E , y si suponemos que la medida de E es igual a 1 ,
226	9	L^o	L^p
230	13	f funciones de y g de $\mathcal{Y}$	f y g funciones de $\mathcal{Y}$
234	13	era suficiente	no era suficiente
236	1b	D	$\lvert D \rvert$
238	1	si T es de tipo	T es de tipo
239	13b	Rochet	Rouché
244	7	$\leq M_1 \lVert f \rVert_r$	$\leq M_1 \lVert f \rVert_{r^*}$
264	10	y en un contorno	y en un entorno
269	11b	el orden inclusive	el orden ℓ inclusive
272	12b	se acotada	se acota
284	6	$\dots \rVert_2 \ (\Sigma \dots$	$\dots \rVert_2 = (\Sigma \dots$
288	12b	$x_j^2/(x_1^2 \ \dots \ x_n^2)$	$x_j^2/(x_1^2 + \dots + x_n^2)$
288	12b	$x_i x_j/(x_1^2 \ \dots \ x_n^2)$	$x_i x_j/(x_1^2 + \dots \pm x_n^2)$
291	3b	$\sum_{m \neq 1}$	$\sum_{m \neq 0}$
299	10b	Toicomi	Tricomi
301	6	$(u_1^2 + u_2^2)\hat{f}(u)$	$(u_1^2 + u_2^2)\hat{g}(u)$
301	7	$u_1 \ u_2 \ \hat{f}(u)$	$u_1 \ u_2 \ \hat{g}(u)$
302	5	$W_p^{(m)}$ el espacio	el espacio $W_p^{(m)}$
304	2	$= \iint_D \lvert f \rvert^2 \, dx_1 dx_2$	$= \iint_D \lvert g \rvert^2 \, dx_1 dx_2$

Pág.	Línea	Dice	Debe decir
306	1b	son un sólo punto	con un solo punto
320	9	$H_{\gamma n}$	H_{dn}
325	14	$\leq M \lvert h \rvert^{\alpha}$	$\leq M \lvert h \rvert^{d}$
329	5b	B T	B T f
330	10b,5b	Trikomi	Tricomi
331	5 , 11	Trikomi	Tricomi