ISSN 1853-709X

Fascículo 20

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Evelio T. Oklander

Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 20

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO 20 cursos y seminarios de matemática

Evelio T. Oklander

INTERPOLACION, ESPACIOS DE LORENTZ Y TEOREMA DE MARCINKIEWICZ

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES - DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
1965

INTRODUCCION

Las ideas expuestas en este fascículo han sido desarrolladas en un seminario realizado en la Universidad de Buenos Aires en el primer semestre de 1964.

En el primer capítulo se estudia la teoría general de interpolación en los términos en que ha sido planteada principalmente por Calderón, Lions, Aronszajn, Gagliardo, S. G. Krein.

El capítulo II se relaciona con los espacios de Lorentz. Los resultados más importantes son debidos a A. P. Calderón, aunque hemos modificado algo algunas definiciones y demostraciones.

En el capítulo III se introducen los interpoladores L_{pq} y se estudian sus propiedades, utilizadas luego para demostrar el teorema de Marcinkiewicz - Calderón. El contenido de este capítulo se publica aquí por primera vez, y constituye una continuación de ciertos resultados obtenidos por el autor en [6].

Los licenciados J. Bouillet y N. Fava han colaborado en la redacción de estas notas y en la demostración de algunos teoremas.

E. T. Oklander

CAPITULO I

LA TEORIA GENERAL DE INTERPOLACION

§ 1. - OBSERVACIONES PRELIMINARES

Desde que Federico Riesz introdujo los espacios L^p de funciones medibles tales que la potencia p de su valor absoluto es integrable, se ha presentado frecuentemente en análisis un problema que, en forma no muy precisa, puede ser formulado de la siguiente manera:

Dado un operador T definido en algún subespacio denso de los espacios L^p, y suponiendo conocidas ciertas propiedades de T como operador en L^p y en L^q $(q > p)$ cómo se puede deducir información sobre propiedades de T considerado como operador en L^s, $p < s < q$?

El primer resultado en este sentido fue obtenido por Marcel Riesz y G. O. Thorin. Para ulterior referencia formularemos separadamente un caso particular y el teorema completo de Riesz - Thorin, cuya demostración puede verse en [9], tomo II, pág. 93. Indicaremos con (R, μ) un espacio con medida, y con $L^p(R, \mu)$ el espacio de las funciones μ-medibles cuyo valor absoluto elevado a la potencia p es μ-integrable, provisto de la norma

$$\|f\|_{L^p(R,\mu)} = \left\{ \int_R |f|^p \, d\mu \right\}^{1/p}$$

Diremos que un operador lineal T es de tipo $(L^p(R,\mu)\ ;\ L^q(S,\nu))$, o bien de tipo (p,q) cuando no haya lugar a confusión, si el dominio de T es un subespacio denso de $L^p(R,\mu)$, su rango está contenido en $L^q(S,\nu)$, y existe un número $M > 0$ tal que para toda f perteneciente al dominio de T se verifica

$$\left\|Tf\right\|_{L^q(S,\nu)} \leqslant M \left\|f\right\|_{L^p(R,\mu)}$$

Llamaremos a M la norma (p,q) de T si M es la mínima constante que verifica esta desigualdad

TEOREMA RESTRINGIDO DE RIESZ - THORIN

Si T es un operador lineal de tipo (p_1, p_1) con norma M_1 y de tipo (p_2, p_2) con norma M_2, entonces T es de tipo (p, p) para todo p tal que $p_1 \leqslant p \leqslant p_2$, y la norma (p, p) de T es menor o igual a $M_1^{1-\alpha}\ M_2^{\alpha}$, donde α está definido por la igualdad

$$(1-\alpha)/p_1 + \alpha/p_2 = 1/p$$

TEOREMA GENERAL DE RIESZ - THORIN

Sea T un operador lineal de tipo $(L^{p_1}(R,\mu)\ ,\ L^{q_1}(S,\nu))$ con norma M_1 y de tipo $(L^{p_2}(R,\mu)\ ,\ L^{q_2}(S,\nu))$ con norma M_2. Sean p y q dos números dados por

$$1/p = (1-\alpha)/p_1 + \alpha/p_2\ ,\quad 1/q = (1-\alpha)/q_1 + \alpha/q_2$$

donde $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Entonces T es de tipo $(L^p(R, \mu), L^q(S, \nu))$ con norma M , y

$$M \leqslant M_1^{1-\alpha} \quad M_2^{\alpha} \tag{1}$$

El paso siguiente fue dado por J. Marcinkiewicz, quien, con hipótesis más débiles obtuvo el mismo resultado, aunque sin la acotación (1) para la norma. Probaremos más adelante una generalización del teorema de Marcinkiewicz debida a A. P. Calderón, pero sugerimos al lector ver la demostración en [9] , pues la mayor parte de las ideas que manejaremos están contenidas en germen en la demostración original de Marcinkiewicz.

La teoría de ecuaciones en derivadas parciales condujo a introducir familias de espacios funcionales análogas a los L^p (funciones derivables, lipschitzianas, etc.) , y surgió la necesidad de obtener teoremas análogos a los mencionados para estas familias de espacios. El instrumento general para abordar estos problemas fue la teoría de interpolación de espacios de Banach, desarrollada por A. P. Calderón, J. L. Lions, E. Gagliardo, N. Aronszajn, S. G. Krein, y otros (véase [3] , donde también se encontrarán otras referencias) .

------

§ 2 . - ESPACIOS INTERMEDIOS

Desarrollaremos ahora el esquema que permite formular en forma abstracta el teorema restringido de Riesz - Thorin.

DEFINICION 1

Un par de interpolación es un par de espacios de Banach (A_1 , A_2) contínuamente contenidos en un espacio vecto rial topológico Hausdorff V .

Por ejemplo, (L^p, L^q) es un par de interpolación, pues se puede tomar como V el espacio de las funciones localmente integrables, o bien el espacio de las distribuciones, etc. El hecho de que A_1 y A_2 estén contenidos en un mismo espacio hace que tenga sentido decir que un elemento pertenece simultáneamente a A_1 y a A_2 . La continuidad de la inclusión nos permite comparar la convergencia en ambos espacios: si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de $A_1 \cap A_2$ que converge en A_1 y en A_2, entonces ambos límites deben coincidir, pues la convergencia en A_1 o en A_2 implican la convergencia en V al mismo límite, y V es un espacio de Hausdorff. Luego de estas consideraciones es fácil verificar la siguiente afirmación.

LEMA 1

Si (A_1, A_2) es un par de interpolación, la funcional

$$\| x \|_{A_1 \cap A_2} = \max (\| x \|_{A_1}, \| x \|_{A_2})$$

es una norma en $A_1 \cap A_2$, y $A_1 \cap A_2$ es un espacio de Banach con esta norma.

Indicaremos con $A_1 + A_2$ la suma algebraica de A_1 y A_2, es decir

$$A_1 + A_2 = \{ x \in V : x = y + z , \ y \in A_1 , \ z \in A_2 \}$$

y pondremos

$$\| x \|_{A_1 + A_2} = \inf_{y+z=x} (\| y \|_{A_1} + \| z \|_{A_2}) \tag{2}$$

LEMA 2

Si (A_1, A_2) es un par de interpolación, entonces $\|x\|_{A_1+A_2}$ es una norma en A_1+A_2, y A_1+A_2 es un espacio de Banach con esta norma.

Demostración

a) Homogeneidad:

$$\|\lambda x\|_{A_1+A_2} = \inf_{y+z=\lambda x} (\|y\|_{A_1} + \|z\|_{A_2}) = \inf_{y+z=x} (\|\lambda y\|_{A_1} + \|\lambda z\|_{A_2}) =$$

$$= |\lambda| \inf_{y+z=x} (\|y\|_{A_1} + \|z\|_{A_2}) = |\lambda| \|x\|_{A_1+A_2}$$

b) Sublinealidad: Dados x, $x' \in A_1+A_2$, podemos elegir y, $y' \in A_1$, z, $z' \in A_2$ tales que

$$y+z = x \quad , \quad \|x\|_{A_1+A_2} + \varepsilon \geqslant \|y\|_{A_1} + \|z\|_{A_2} \quad ,$$

$$y'+z' = x' \quad , \quad \|x'\|_{A_1+A_2} + \varepsilon \geqslant \|y'\|_{A_1} + \|z'\|_{A_2} \quad ,$$

donde ε es un número positivo arbitrario; entonces

$$\|x\|_{A_1+A_2} + \|x'\|_{A_1+A_2} + 2\varepsilon \geqslant \|y\|_{A_1} + \|y'\|_{A_1} + \|z\|_{A_2} + \|z'\|_{A_2} \geqslant$$

$$\geqslant \|y+y'\|_{A_1} + \|z+z'\|_{A_2} \geqslant \|x+x'\|_{A_1+A_2} \quad ;$$

la última desigualdad se deduce de $y+y' \in A_1$, $z+z' \in A_2$, $(y+y')+(z+z') = x+x'$. Siendo ε arbitrario, esto prueba la sublinealidad.

c) Supongamos que $\|x\|_{A_1+A_2} = 0$. Entonces, para todo número natural n

existen $y_n \in A_1$, $z_n \in A_2$, tales que $y_n + z_n = x$, y $\|y_n\|_{A_1} + \|z_n\|_{A_2} < 1/n$. Luego y_n tiende a cero en A_1, z_n tiende a cero en A_2. Por lo tanto ambos tienden a cero en V, de donde $y_n + z_n$ tiende a cero en V. Pero como $y_n + z_n = x$ es constante, esto significa que $x = 0$.

d) Completitud: sea x_n una sucesión de Cauchy en $A_1 + A_2$. Podemos encontrar una subsucesión x_{n_i} tal que

$$\| x_{n_i} - x_{n_{i+1}} \|_{A_1 + A_2} < 1/2^i$$

Por lo tanto existen $y_i \in A_1$, $z_i \in A_2$, tales que

$$y_i + z_i = x_{n_i} - x_{n_{i+1}} \quad , \quad \|y_i\|_{A_1} + \|z_i\|_{A_2} < 1/2^i$$

Luego

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \longrightarrow y \text{ en } A_1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{m} z_i \longrightarrow z \text{ en } A_2$$

Poniendo $x = x_{n_1} - y - z$, tenemos

$$x_{n_1} - x = x_{n_i} - x_{n_1} + y + z = y - \sum_{j=1}^{i-1} y_j + z - \sum_{j=1}^{i-1} z_j$$

por consiguiente

$$\| x_{n_i} - x \|_{A_1 + A_2} \leqslant \| y - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \|_{A_1} + \| z - \sum_{j=1}^{i-1} z_j \|_{A_2} \longrightarrow 0$$

Una demostración más directa sería la siguiente: Si $A_1 \times A_2$ es el producto cartesiano de A_1 y A_2 con norma $\|(u, v)\|_{A_1 \times A_2} = \|u\|_{A_1} + \|v\|_{A_2}$, y $N = \{(u, v) \in A_1 \times A_2 : u + v = 0 \text{ en } V\}$, entonces $A_1 + A_2$ con la norma (2) es isométricamente isomorfo al espacio cociente $A_1 \times A_2/N$; pero éste es un espacio de Banach por ser el cociente de un espacio de Banach por un subespacio cerrado.

Los espacios $A_1 + A_2$ y $A_1 \cap A_2$ están contenidos contínuamente en V. En efecto, si x_n tiende a cero en $A_1 + A_2$, existen $y_n \in A_1$, $z_n \in A_2$, tales que $x_n = y_n + z_n$, con y_n tendiendo a cero en A_1 y Z_n tendiendo a cero en A_2. Como ambas convergencias también tienen lugar en V, deducimos que $x_n = y_n + z_n$ tiende a cero en V. Es evidente, ahora, que nuestra afirmación es también cierta con respecto a $A_1 \cap A_2$, pues este espacio está contínuamente contenido en $A_1 + A_2$.

Llamaremos $\mathcal{T}$ al conjunto de los operadores lineales acotados de $A_1 + A_2$ en $A_1 + A_2$ cuyas restricciones a A_1 y a A_2 son operadores acotados de estos espacios en sí mismos. Si $\|T\|_{A_1}$ y $\|T\|_{A_2}$ son las normas de T como operador en A_1 y en A_2, respectivamente, pondremos $\|T\| = \max(\|T\|_{A_1}, \|T\|_{A_2})$; entonces es fácil ver que $\|T\|$ es una norma y que $\mathcal{T}$ es un espacio de Banach con esta norma. Llamaremos $\mathcal{S}$ a la esfera unitaria de $\mathcal{T}$, es decir

$$\mathcal{S} = \left\{ T \in \mathcal{T} : \|Tx\|_{A_i} \leqslant \|x\|_{A_i} \ , \quad i = 1, 2 \right\}$$

DEFINICION 2

Dado un par de interpolación (A_1, A_2), diremos que un espacio de Banach A_3 es un espacio intermedio entre A_1 y A_2 si :

i) A_3 está contenido contínuamente en V ;

ii) $A_1 \cap A_2 \subset A_3 \subset A_1 + A_2$;

iii) todo $T \in \mathcal{T}$ transforma a A_3 en sí mismo.

Veremos que se puede dar a esta definición una forma más cómoda para las aplicaciones y esencialmente equivalente a ésta, para lo cual nos basaremos en los dos lemas siguientes.

LEMA 4

Si A y B son espacios de Banach contínuamente contenidos en un espacio vectorial topológico Hausdorff V, y $A \subset B$, entonces la inyección e de A en B es continua.

Demostración

Supongamos que x_n tiende a x en A y que x_n tiende a y en B; entonces x_n tiende a x y a y en V, de donde $x = y$. Esto prueba que e es un operador cerrado, y obtenemos la tesis aplicando el teorema del gráfico cerrado.

LEMA 5

Sean A y B dos espacios de Banach, y V un espacio vectorial topológico Hausdorff. Si e es una inyección continua de B en V y L es un operador lineal de A en B tal que $e \,.\, L$ es contínuo, entonces L es continuo.

Demostración

Sea N el núcleo de L. Como N es también el núcleo de $e \,.\, L$, N es un subespacio cerrado de A. Sea A/N el espacio cociente con la norma cociente, y $\prod$ la proyección canónica de A sobre A/N. L induce una inyección L' de A/N en B tal que $L = L' \,.\, \prod$, y esta inyección es continua. En efecto, supongamos que u_n tiende a cero en A/N; podemos encontrar una sucesión x_n en A tal que $\prod x_n = u_n$ y $\|x_n\|_A < \|u_n\|_{A/N} + 1/n$. Entonces x_n tiende a cero en A, y por lo tanto $e \,.\, Lx_n = e \,.\, L' \,.\, \prod x_n = e \,.\, L'u_n$ tiende a cero en V por hipótesis. Aplicando el Lema anterior a

$$A/N \xrightarrow{L'} B \xrightarrow{e} V$$

deducimos que L' es continuo, de donde $L = L' . \Pi$ es también continuo.

LEMA 6

Utilizando la notación de la Definición 2, todo $T \in \mathcal{C}$ es un operador continuo de A_3 en A_3.

Demostración

Como $A_1 \cap A_2$ y $A_1 + A_2$ están contenidos contínuamente en V, se deduce del Lema 4 que la condición i) de la Definición 2 implica que las inclusiones en ii) son contínuas; en particular tenemos $\|x\|_{A_1+A_2} \leqslant K\|x\|_{A_3}$ para x en A_3. Luego

$$\|Tx\|_{A_1+A_2} \leqslant M\|x\|_{A_1+A_2} \leqslant MK\|x\|_{A_3}$$

La tesis del Lema resulta ahora de aplicar el Lema 5 a

$$A_3 \xrightarrow{T} A_3 \xrightarrow{e} A_1 + A_2$$

LEMA 7

Los operadores $T \in \mathcal{S}$ son uniformemente acotados en A_3, es decir que existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_{A_3} \leqslant M\|x\|_{A_3}$ para todo $T \in \mathcal{S}$ y $x \in A_3$.

Demostración

Si x es un elemento fijo de A_3, podemos asociarle un operador lineal U de $\mathcal{C}$ en A_3 dado por $U(T) = Tx$. Sea e la inyección de A_3 en $A_1 + A_2$, y sea $x = y + z$, $y \in A_1$, $z \in A_2$, $\|y\|_{A_1} + \|z\|_{A_2} \leqslant \|x\|_{A_1+A_2} + 1$; entonces

$$\| (e \cdot U)(T) \|_{A_1 + A_2} = \|Tx\|_{A_1 + A_2} \leqslant \|Ty\|_{A_1} + \|Tz\|_{A_2} \leqslant (\|x\|_{A_1 + A_2} + 1)\|T\|$$

Luego $e \cdot U$ es un operador lineal continuo de $\mathcal{C}$ en $A_1 + A_2$, y aplicando el Lema 2 a

$$\mathcal{C} \xrightarrow{U} A_3 \xrightarrow{e} A_1 + A_2$$

deducimos que U es continuo. Esto significa que $\|Tx\|_{A_3} \leqslant C\|T\|_{A_3}$, donde C puede depender de x, pero no de T. En particular, si $T \in \mathcal{S}$, $\|Tx\|_{A_3} \leqslant C$. Pero entonces, por el teorema de Banach - Steinhaus, $\|T\|_{A_3} \leqslant M$ para todo $T \in \mathcal{S}$.

LEMA 8

Cualquier espacio intermedio A_3 puede ser renormalizado de tal manera que $\|T\|_{A_3} \leqslant 1$ para todo $T \in \mathcal{S}$.

Demostración

Sea $|x|_{A_3} = \sup (\|Sx\|_{A_3} : S \in \mathcal{S})$; es fácil verificar que $|x|_{A_3}$ es una norma. Por el Lema 7 tenemos $|x|_{A_3} \leqslant M\|x\|_{A_3}$, y, como el operador identidad pertenece a $\mathcal{S}$, $\|x\|_{A_3} \leqslant |x|_{A_3}$. Esto prueba que ambas normas son equivalentes. Por otra parte, si $T \in \mathcal{S}$

$$|Tx|_{A_3} = \sup (\|STx\|_{A_3} : S \in \mathcal{S}) \leqslant \sup (\|Sx\|_{A_3} : S \in \mathcal{S}) = |x|_{A_3}$$

lo cual completa la demostración del Lema.

Reuniendo nuestros resultados, vemos que la Definición 2 es equivalente a la siguiente, que adoptaremos en lo sucesivo:

DEFINICION 3

Dado un par de interpolación (A_1, A_2), un espacio de Banach A_3 es intermedio entre A_1 y A_2 si:

i) $A_1 \cap A_2 \subset A_3 \subset A_1 + A_2$, siendo estas inclusiones continuas ;

ii) si $T \in \mathcal{S}$, entonces T es un operador continuo de A_3 en A_3, y $\|T\|_{A_3} \leqslant 1$.

La condición ii) equivale a decir que la esfera unitaria de A_3 es invariante bajo los operadores de $\mathcal{S}$.

Algunas propiedades importantes de los espacios intermedios son consecuencia inmediata de la definición. Sea $U \in \mathcal{S}$; supongamos que existe el operador inverso U^{-1} y que $U^{-1} \in \mathcal{S}$ (esto equivale a decir que U es una isometría de A_1 sobre A_1 y de A_2 sobre A_2). Entonces U es también una isometría en cualquier espacio intermedio A_3. En efecto, se deduce de la definición que tanto U como U^{-1} tienen norma menor o igual que uno en A_3, de donde resulta que ambos operadores tienen norma uno en A_3.

Si B_1 y B_2 son espacios intermedios entre A_1 y A_2, todo espacio C intermedio entre B_1 y B_2 es intermedio entre A_1 y A_2. En efecto, llamemos $\mathcal{S}'$ al conjunto de los operadores lineales de norma menor o igual que uno en B_1 y en B_2. Por ser B_1 y B_2 intermedios, tendremos $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$; luego, si la esfera unitaria de C es invariante bajo los operadores de $\mathcal{S}'$, con mayor razón lo será bajo los operadores de $\mathcal{S}$.

------

§ 3 . - LOS ESPACIOS INTERMEDIOS ENTRE L^1 Y L^∞

A modo de ejemplo veremos ahora una caracterización de los espacios intermedios entre L^1 y L^∞ debida a A. P. Calderón. Comenzaremos por estudiar los análogos finito dimensionales de estos espacios. Si $x = (x_1, \ldots\ldots, x_n)$ es una n-upla compleja, pondremos

$$\|x\|_{L^1} = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad \|x\|_{L^\infty} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Un operador A en E_n se representa en una base dada por una matriz $A = (a_{ij})$ de $n \times n$, y es fácil ver que

$$\|A\|_{L^1} = \sup_j \sum_i |a_{ij}| \quad , \quad \|A\|_{L^\infty} = \sup_i \sum_j |a_{ij}|$$

El conjunto $\mathscr{S}_n = \left\{ A : \|A\|_{L^1} \leqslant 1 \; , \; \|A\|_{L^\infty} \leqslant 1 \right\}$ es evidentemente convexo y es un subconjunto cerrado de E_{n^2}. Supondremos conocido el hecho de que todo conjunto convexo cerrado C en un espacio de dimensión finita coincide con el conjunto de las combinaciones lineales convexas de sus puntos extremales, es decir, de los puntos que gozan de la siguiente propiedad: si x, $y \in C$, $u = \alpha x + (1 - \alpha) y$, $0 < \alpha < 1$, entonces $x = y = u$.

Llamaremos matriz permutación a una matriz cuyos elementos son 1 ó 0 y tal que en cada fila y en cada columna hay un único elemento no nulo. Es obvio que toda matriz permutación pertenece a $\mathscr{S}_n$, así como toda matriz diagonal unitaria (con elementos diagonales de módulo uno). La inversa de una matriz permutación es una matriz permutación, y lo mismo vale para matrices diagonales unitarias. Es fácil ver que una matriz A admite una representación $A = PD$, donde P es una matriz permutación y D es diagonal unitaria, si y sólo si en cada fila y en cada columna de A hay un único elemento no nulo, y éste es de módulo uno.

TEOREMA 1

Una matriz A es extremal en $\mathscr{S}_n$ si y sólo si puede ser representada como producto de una matriz permu-

tación por una diagonal unitaria.

Demostración

Probaremos primero que, si A es extremal, entonces

$$\sum_k |a_{ik}| = \sum_k |a_{kj}| = 1 \quad \text{para} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

Supongamos que $\sum_k |a_{rk}| < 1$ para algún r. Como la suma de las columnas es $\sum_i \sum_j |a_{ij}| < n$ (porque la contribución de cada fila es menor o igual que uno y la de una al menos es menor que uno), debe haber una columna s tal que $\sum_k |a_{ks}| < 1$. Tomando $\varepsilon = \min (1 - \sum_k |a_{rk}|, 1 - \sum_k |a_{ks}|)$, reemplacemos al elemento a_{rs} por $a^{(1)}_{rs} = a_{rs} + \varepsilon$ y $a^{(2)}_{rs} = a_{rs} - \varepsilon$; entonces obtendremos dos matrices $A^{(1)}$ y $A^{(2)}$ pertenecientes a $\mathscr{S}_n$ y distintas de A tales que $\dfrac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2} = A$, lo cual prueba que A no es extremal.

Veremos ahora que si A es extremal, sus elementos no nulos son de módulo uno; este resultado y el que acabamos de probar implican que toda matriz extremal es de la forma $A = PD$. Supongamos que existe un elemento b_1 de A tal que $0 < |b_1| < 1$. En la fila de b_1 debe haber otro elemento b_2 con la misma propiedad. En la columna de b_2 debe haber un elemento b_3 con la misma propiedad, etc.

$$\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_2 & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ \vdots & & b_3 & \cdots & b_4 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{2k} & \cdots & \cdots & \cdots & b_5 \end{pmatrix}$$

Como b_{2m+2} está en distinta columna que b_{2m+1} para todo m, habrá un m y un k tal que b_{2m+2k} está en la misma columna que b_{2m+1}. Desechando los primeros $2m$ elementos, podemos suponer que $m = 0$. Sea $b_j = \rho_j e^{i\alpha_j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2k$. Eligiendo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leqslant \min \rho_j$, $\varepsilon \leqslant \min (1 - \rho_j)$, pongamos $b_j^{(1)} = \left[\rho_j + (-1)^j \varepsilon\right] e^{i\alpha_j}$, $b_j^{(2)} = \left[\rho_j - (-1)^j \varepsilon\right] e^{i\alpha_j}$. Obtenemos así $A^{(1)}$ y $A^{(2)} \in \mathscr{S}_n$ y distintas de A tales que $A = \dfrac{A^{(1)} + A^{(2)}}{2}$, de donde resulta que A no es extremal.

Recíprocamente, si A no es extremal, podemos encontrar una representación $A = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A_j$ con $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, A_j extremales. Supongamos que $A = PD$, y sea a_{ks} un elemento no nulo de A . Entonces $|a_{ks}| = \left|\sum_j \lambda_j a_{ks}^{(j)}\right| = 1$; teniendo en cuenta que $\left|a_{ks}^{(j)}\right| = 1$, esto sólo es posible si $a_{ks}^{(j)}$ es independiente de j y, por lo tanto, $a_{ks}^{(j)} = a_{ks}$ para todo j. Por consiguiente tendremos $A_j = A$ para todo j en contradicción con lo supuesto, y esto termina la demostración.

Observemos que, dado un espacio de Banach de dimensión n , los operadores de $\mathscr{S}_n$ tendrán norma menor o igual que uno en él si y sólo si tal condición se verifica para los operadores extremales de $\mathscr{S}_n$. Luego podemos enunciar:

COROLARIO

Un espacio de Banach de dimensión n es intermedio entre L^1 y L^{∞} si y sólo si las matrices permutación y las diagonales unitarias son isometrías en él .

Si consideramos el caso particular de espacios de dimensión 2 con coeficientes reales, podemos dar una interpretación geométrica sencilla a este corolario: los espacios intermedios se caracterizan por el hecho de que su esfera unitaria es simétrica con respecto a los ejes y a las diagonales. Desde el punto de vista algebraico se puede caracterizar a los espacios intermedios como aquéllos en los que la norma de una n-upla no cambia si se permuta sus elementos o si se cambia el signo de los mismos.

Veremos ahora cómo se generaliza estos resultados a espacios de funciones. Por razones de simplicidad nos limitaremos a considerar funciones en la recta, pero los razonamientos se extienden fácilmente al caso de funciones en E_n con medida de Lebesgue.

LEMA 9

La funcional bilineal

$$\ell_g(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \ , \quad f \in L^1 + L^\infty \ , \quad g \in L^1 \cap L^\infty \tag{3}$$

establece un isomorfismo entre $(L^1 + L^\infty)^*$ y $L^1 \cap L^\infty$.

Además

$$\| \ell_g \| = \| g \|_{L^1 \cap L^\infty} \tag{4}$$

Demostración

La funcional ℓ_g dada por (3) es evidentemente lineal. Si $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^\infty$, entonces

$$|\ell_g(f)| \leqslant \|f_1\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} + \|f_2\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \leqslant (\|f_1\|_{L^1} + \|f_2\|_{L^\infty}) \|g\|_{L^1 \cap L^\infty}$$

Tomando ínfimo en el último miembro con respecto a los pares f_1, f_2 con $f_1 + f_2 = f$, obtenemos

$$|\ell_g(f)| \leqslant \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|f\|_{L^1 + L^\infty}$$

luego ℓ_g es contínua y

$$\|\ell_g\| \leqslant \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \tag{5}$$

Supongamos que $\|g\|_{L^1 \cap L^\infty} = \max (\|g\|_{L^1} , \|g\|_{L^\infty}) = \|g\|_{L^1}$. Tomemos $f = \operatorname{sgn}^{-1} g$ (*); entonces $f \in L^1 + L^\infty$, $\|f\|_{L^1 + L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \leqslant 1$, y

(*) Si $g(x) = |g(x)| e^{i\varphi(x)}$, definimos $(\operatorname{sgn}^{-1} g)(x) = e^{-i\varphi}$ si $g(x) \neq 0$, $(\operatorname{sgn}^{-1} g)(x) = 0$ si $g(x) = 0$.

$$|\ell_g(f)| = \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\,dx = \|g\|_{L^1} = \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \geq \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} \|f\|_{L^1 + L^\infty}$$

por lo tanto $\|\ell_g\| \geq \|g\|_{L^1 \cap L^\infty}$.

Si $\|g\|_{L^1 \cap L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}$, dado $\varepsilon > 0$ sea M un conjunto de medida positiva y finita tal que $|g(x)| \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon$ para $x \in M$. Elijamos $f(x) = \frac{\mathrm{sgn}^{-1} g}{|M|} \chi_M(x)$, donde χ_M es la función característica de M . Entonces $f \in L^1 + L^\infty$, $\|f\|_{L^1 + L^\infty} \leq \|f\|_{L^1} = 1$, y

$$|\ell_g(f)| = \frac{1}{|M|} \int_M |g(x)|\,dx \geq \|g\|_{L^\infty} - \varepsilon = \|g\|_{L^1 \cap L^\infty} - \varepsilon$$

Siendo ε arbitrario tenemos, también en este caso, $\|\ell_g\| \geq \|g\|_{L^1 \cap L^\infty}$. Teniendo en cuenta (5) queda probada la (4) para funcionales de la forma (3).

Sea ahora ℓ cualquier funcional lineal continua en $L^1 + L^\infty$. La restricción de ℓ a L^1 es también continua en L^1 ; por consiguiente existe una función $g \in L^\infty$ tal que

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx \qquad (6)$$

para toda $f \in L^1$. En particular, si $f(x) = \mathrm{sgn}^{-1} g\, \chi_m(x)$; donde χ_m es la función característica de $[-m, m]$, tenemos $f \in L^1$, $\|f\|_{L^1 + L^\infty} = 1$; luego

$$\ell(f) = \int_{-m}^{m} |g(x)|\, dx \leq \|\ell\|$$

Por lo tanto, $g(x)$ es integrable; como también es acotada, $g \in L^1 \cap L^\infty$, y la (6) es válida para toda $f \in L^1 + L^\infty$.

LEMA 10

Si C es un subconjunto convexo de un espacio de Banach

B , entonces C es cerrado si y sólo si C es débilmente cerrado.

Demostración

Basta probar el Lema para convexos que contienen el origen, pues las propiedades de ser cerrado o débilmente cerrado son invariantes por traslaciones. Si C es débilmente cerrado, entonces es obvio que C es cerrado. Si C es cerrado y $x \notin C$, existe una funcional lineal continua ℓ tal que $\ell(y) \leq 1$ si $y \in C$, $\ell(x) > 1$. Luego $\{ y : \ell(y) > 1 \}$ es un entorno de x contenido en el complementario de C .

Diremos que una transformación puntual T de E_1 sobre E_1 es una transformación que preserva la medida si es biunívoca y transforma cada conjunto medible en otro conjunto medible de igual medida. Una transformación T que preserva la medida induce un operador lineal $\mathcal{T}$ definido sobre funcionales medibles de la recta dado por

$$(\mathcal{T} f)(x) = f(Tx)$$

Los operadores de este tipo son isometrías en L^1 y en L^∞ ; constituyen el análogo de las matrices permutación antes tratadas. Las matrices diagonales unitarias tienen su análogo en operadores $(\Phi f)(x) = \varphi(x) f(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función de módulo uno.

Dividamos la recta en intervalos de longitud $1/m$, $I_j^m = \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right)$, $-\infty < j < \infty$. Dividamos cada uno de estos intervalos en n subintervalos $I_{jr}^m = \left[\frac{j}{m} + \frac{r}{nm}, \frac{j}{m} + \frac{r+1}{nm}\right)$; $0 \leq r \leq n-1$. Pongamos

$$T_{nm} x \begin{cases} = x + \frac{1}{nm} & \text{si } x \in I_{jr}^m , \quad 0 \leq r \leq n-2 \\ = x + \frac{1}{nm} - \frac{1}{m} & \text{si } x \in I_{j,\, n-1}^m \end{cases}$$

La transformación T_{nm}. permuta cíclicamente cada grupo de n intervalos y, evidentemente, preserva la medida. Definimos

$$S_{nm}(f) = \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{T}_{nm})^k f \right] \chi_m(x)$$

donde $(\mathcal{T}_{nm} f)(x) = f(T_{nm} x)$ y χ_m es la función característica de $[-m, m)$.

Pondremos

$$(\Pi_m f)(x) \begin{cases} = \dfrac{1}{|I_j^m|} \displaystyle\int_{I_j^m} f(t)\,dt \quad \text{si} \quad x \in I_j^m \,, \quad x \in [-m, m) \\ = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-m, m)\,. \end{cases}$$

Es fácil ver que Π_m es un operador proyección $(\Pi_m^2 = \Pi_m)$, y que es continuo y de norma uno en L^1 y en L^∞. También S_{nm} es de norma uno en L^1 y en L^∞, pues

$$\| S_{nm} f \|_{L^1} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \| (\mathcal{T}_{nm})^k f \|_{L^1} = \frac{1}{n}\, n \|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$$

y análogamente en L^∞.

Otras propiedades que necesitaremos, de sencilla verificación, son: si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces:

1) $\int (\Pi_m f)(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, (\Pi_m g)(x)\, dx$;

2) $\int (S_{nm} f)(x)\, g(x)\, dx = \int f(x)\, (S'_{nm} g)(x)\, dx$, donde S'_{nm} es el operador que se obtiene de S_{nm} reemplazando $\mathcal{T}_{nm}$ por $\mathcal{T}'_{nm}$, $(\mathcal{T}'_{nm} f)(x) = f(T_{nm}^{-1} x)$;

3) $\Pi_m f \longrightarrow f$ pp. Además $\Pi_m f \longrightarrow f$ en L^1 ; en efecto, poniendo $f_n(x) = f(x)$ si $|x| < n$ y $|f(x)| < n$, $f_n(x) = 0$ en los puntos restantes, se tiene $|\Pi_m f_n(x)| \leqslant n\, \chi_n(x)$; luego $\Pi_m f_n \longrightarrow f_n$ en L^1. Observando que $\| \Pi_m f \|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}$, resulta

$$\| \Pi_m f - f \|_{L^1} \leqslant \| \Pi_m f - \Pi_m f_n \|_{L^1} + \| \Pi_m f_n - f_n \|_{L^1} + \| f_n - f \|_{L^1} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \| f - f_n \|_{L^1} + \| \Pi_m f_n - f_n \|_{L^1} ,$$

de donde se obtiene inmediatamente nuestra afirmación .

LEMA 11

Si $f \in L^1$, entonces $\lim S_{nm} f = \Pi_m f$ cuando $n \longrightarrow \infty$, donde el límite se entiende en L^1 .

Demostración

Si f es continua, $S_{nm} f \longrightarrow \Pi_m f$ uniformemente en $[-m, m)$ y ambas son nulas fuera de $[-m, m)$; luego el Lema es cierto para f continua, y el mismo resultado se obtiene por continuidad para $f \in L^1$ por ser S_{nm} y Π_m equicontinuos en L^1 .

LEMA 12

Si $f \in L^1 + L^\infty$, entonces $\lim S_{nm} f = \Pi_m f$ en la topología débil de $L^1 + L^\infty$.

Demostración

Sea $f = f_1 + f_2$, $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^\infty$. Entonces, si $g \in L^1 \cap L^\infty$,

$$\int (S_{nm} f)(x) g(x) dx = \int (S_{nm} f_1)(x) g(x) dx + \int (S_{nm} f_2)(x) g(x) dx$$

Por el Lema 11

$$\int (S_{nm} f_1)(x) g(x) dx \longrightarrow \int (\Pi_m f_1)(x) g(x) dx$$

Por otra parte

$$\int (S_{nm} f_2)\, g\, dx = \int f_2\, (S'_{nm}\, g)\, dx \longrightarrow \int f_2\, (\Pi_m g)\, dx = \int (\Pi_m f_2)\, g\, dx$$

Sea A un operador de $\mathcal{S}$ (operadores de norma menor o igual que uno en L^1 y en L^∞ de la recta) . Si f es una función constante en cada I_j^m y nula fuera de $[-m, m)$, es decir,

$$f(x) = \sum_{-m^2}^{m^2 - 1} a_j\, \chi_j(x) \tag{7}$$

entonces el operador $\Pi_m A \Pi_m$ transforma a $f(x)$ en otra función del mismo tipo:

$$\Pi_m A \Pi_m f = \sum_{-m^2}^{m^2 - 1} b_i\, \chi_i$$

donde $b_i = \sum c_{ij}\, a_j$, o sea que $\Pi_m A \Pi_m$ puede ser interpretado como un operador de un espacio de dimensión $2m^2$ en sí mismo. Además $\Pi_m A \Pi_m$ es un operador de norma menor o igual que uno en los espacios L^1 y L^∞ finito dimensionales. Por el Teorema 1 , si f es de la forma (7) podemos poner

$$\Pi_m A \Pi_m f = \sum_j (\lambda_j\, \mathcal{P}_j\, \varphi_j) f$$

donde la suma es finita, $\mathcal{P}_j$ es un operador inducido por una transformación que preserva la medida correspondiente a una matriz permutación de $2m^2 \times 2m^2$, φ_j es una función de módulo menor o igual que uno y constante en cada I_k^m que corresponde, como operador multiplicación, a una matriz diagonal unitaria, y $\sum \lambda_j = 1$, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$.

Si f es cualquier función de $L^1 + L^\infty$, entonces $\Pi_m f$ es una función de la forma (7) ; luego

$$\Pi_m A \Pi_m f = (\Pi_m A \Pi_m)(\Pi_m f) = \sum \lambda_j\, \mathcal{P}_j\, \varphi_j \Pi_m f = \sum \lambda_j\, \mathcal{P}_j \Pi_m \varphi_j f$$

Utilizando el Lema 11 y la definición de S_{nm} vemos que $\Pi_m A \Pi_m f$ es límite en L^1 (y por lo tanto también en $L^1 + L^\infty$) de expresiones de la forma

$$\sum \lambda_j \tau_j \varphi_j f$$

donde τ_j son operadores inducidos por transformaciones que preservan la medida, y φ_j son funciones de módulo menor o igual que uno, $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$ y $\sum \lambda_j = 1$.

Por otra parte, si $f \in L^1 + L^\infty$, $Af = \lim \Pi_m A \Pi_m f$ cuando $m \longrightarrow \infty$, en la topología débil de $L^1 + L^\infty$. En efecto, si $g \in L^1 \cap L^\infty$ y se anula fuera de $[-k, k]$, entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_m A \Pi_m f \cdot g dx - \int_{-\infty}^{\infty} Af \cdot g dx \right| = \left| \int_{-k}^{k} A \Pi_m f \cdot \Pi_m g dx - \int_{-k}^{k} Af \cdot g dx \right| \leqslant$$

$$\left| \int_{-k}^{k} (A \Pi_m f \cdot \Pi_m g - Af \cdot \Pi_m g) dx \right| + \left| \int_{-k}^{k} (\Pi_m Af \cdot g - Af \cdot g) dx \right| \leqslant$$

$$\int_{-k}^{k} \left| A \Pi_m f - Af \right| dx \left\| \Pi_m g \right\|_{L^\infty} + \int_{-k}^{k} \left| \Pi_m Af - Af \right| dx \left\| g \right\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$$

Por consiguiente, Af es límite de funciones de la forma (8) en la topología débil de $L^1 + L^\infty$.

TEOREMA 2

Sea C un espacio de Banach tal que $L^1 \cap L^\infty \subset C \subset$ $\subset L^1 + L^\infty$ contínuamente. Si C es intermedio entre L^1 y L^∞ , entonces su esfera unitaria $\sum_C$ es invariante bajo operadores τ inducidos por transformaciones que preservan la medida y bajo operadores multiplicación por una función $\varphi(x)$ con $|\varphi(x)| \leqslant 1$.

Si $\sum_C$ es cerrada en $L^1 + L^\infty$, entonces la invariancia de $\sum_C$ bajo los operadores mencionados es también condición suficiente para que C sea un espacio intermedio.

Demostración

La primera parte del teorema es obvia, pues los operadores indicados pertenecen a $\mathcal{S}$.

Si $f \in \sum_C$, entonces todas las funciones de la forma (8) también pertenecen a $\sum_C$ por hipótesis. Si $A \in \mathcal{S}$, entonces Af es límite débil en $L^1 + L^\infty$ de tales funciones, y como $\sum_C$ es cerrada (y por lo tanto débilmente cerrada) en $L^1 + L^\infty$, Af debe pertenecer a $\sum_C$, lo cual prueba que C es un espacio intermedio.

OBSERVACIONES

La condición de tener esfera unitaria cerrada en $L^1 + L^\infty$ es poco restrictiva; todos los espacios intermedios importantes la satisfacen, si bien se puede construir ejemplos que no la verifican. En particular, los espacios L^p tienen esfera unitaria cerrada en $L^1 + L^\infty$ e invariante bajo los operadores del teorema. Por lo tanto, el teorema restringido de Riesz - Thorin con $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, es consecuencia de éste, salvo en lo relativo a la acotación de las normas.

La posibilidad de omitir en el Teorema 2 la condición de esfera unitaria cerrada es un problema abierto.

------

§ 4. - INTERPOLADORES

Ampliamos ahora el esquema del § 2 de modo de abarcar el teorema generalizado. Sean (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) dos pares de interpolación. Indicaremos con $\mathcal{T}(X, Y)$ el conjunto de los operadores lineales de $X_1 + X_2$ en $Y_1 + Y_2$ que transforman contínuamente X_1 en Y_1 y X_2 en Y_2. Definiremos en $\mathcal{T}(X, Y)$ la norma $\|T\| = \max(\|T\|_1, \|T\|_2)$, donde $\|T\|_i$ es la norma de T como operador de X_i en Y_i, $i = 1, 2$. Con esta norma $\mathcal{T}(X, Y)$ es un espacio de Banach cuya esfera unitaria será indicada con $\mathcal{S}(X, Y)$.

DEFINICION 4

> Un interpolador F es una función definida sobre la clase de los pares de interpolación cuyos valores son espacios intermedios de los argumentos, y tal que si $F(X_1, X_2) = X_3$ y $F(Y_1, Y_2) = Y_3$, entonces todo $T \in \mathcal{S}(X, Y)$ transforma a X_3 en Y_3 y verifica $\|Tu\|_{Y_3} \leq \|u\|_{X_3}$ para todo $u \in X_3$.

Los espacios intermedios que están dados por interpoladores satisfacen más condiciones que las establecidas en la Definición 3, de modo que podría esperarse que constituyesen una subclase propia de la clase de todos los espacios intermedios; pero en realidad no es así, y esto es una de las consecuencias del Teorema 3, debido a N. Aronszajn y E. Gagliardo (comunicación verbal).

Antes de probar este teorema debemos hacer algunas consideraciones sobre completación de espacios normados. Recordando una definición bien conocida, si A es un espacio normado con norma $\|u\|_A$, la completación de A con respecto a su norma es el espacio $\bar{A} = A^{\#}/N$, donde $A^{\#}$ es el espacio de las sucesiones de Cauchy en A con la definición natural de suma y producto por escalares, y N es el subespacio de las sucesiones que convergen a cero en A. Si $x = \{x_1, x_2, \ldots\ldots\}$ pertenece a $A^{\#}$, ponemos $\|x\|_{A^{\#}} = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|_A$; entonces $\|x\|_{A^{\#}}$ es una seminorma, y definimos una norma en $\bar{A}$ por $\|y\|_{\bar{A}} = \|x\|_{A^{\#}}$, donde x es cualquier representante de la clase y.

Supongamos ahora que tenemos un espacio normado A contenido en un espacio de Banach B, y que $\|x\|_B \leqslant K\|x\|_A$ para todo $x \in A$. Diremos que las normas de A y B son compatibles si toda sucesión de Cauchy en A que converge a cero en B también converge a cero en A. Como A es denso en $\overline{A}$, la inyección e de A en B puede ser extendida a un único operador continuo $\overline{e}$ de $\overline{A}$ en B. Observando que el núcleo de $\overline{e}$ es el conjunto de los elementos de $\overline{A}$ que son límite de una sucesión de Cauchy en A que tiende a cero en B, vemos que la compatibilidad de las normas es condición necesaria y suficiente para que $\overline{e}$ sea una inyección, es decir, para que se pueda identificar a $\overline{A}$ con un subespacio de B.

Por ejemplo, sea B el espacio $L^1([0,1])$, y A el espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ y derivables a derecha en 0 con la norma $\|f\|_A =$ $= \|f\|_{L^1} + |f'(0)|$. Evidentemente $A \subset B$ y $\|f\|_B \leqslant \|f\|_A$ para todo $f \in A$. Sea $f_n(x) = \frac{1}{n} - x$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$; entonces f_n tiende a 0 en B y f_n es una sucesión de Cauchy en A, pero $\|f_n\|_A > 1$, de modo que f_n no tiende a cero en A.

Si las normas no son compatibles y se quiere preservar la propiedad de inclusión, se debe modificar el concepto de completación. Definimos la completación reducida de A en B con respecto a su norma como el espacio $A' = A/M$ con la topología cociente, donde M es el núcleo de $\overline{e}$ (observemos que M es un subespacio cerrado de A). A' es isométricamente isomorfo al espacio $\{ v \in B : v = \overline{e}u$ para algún $u \in \overline{A}\}$, y la norma en A' puede ser expresada como $\|v\|_{A'} = \inf(\|u\|_{\overline{A}} :$ $: \overline{e}u = v)$.

Si u_n es una sucesión de Cauchy en A que converge a u en B, entonces $\|u\|_B \leqslant K \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_A$; tomando ínfimo en el segundo miembro sobre todas las sucesiones de Cauchy en A que convergen a u en B, obtenemos $\|u\|_B \leqslant$ $\leqslant K\|u\|_{A'}$ para todo $u \in A'$. Por otra parte A está contenido contínuamente en A', porque $A \cap M = 0$ y $\|u\|_{A'} \leqslant \|u\|_{\overline{A}} = \|u\|_A$ para todo $u \in A$.

LEMA 13

Sean A , B y C espacios normados, C completo. Supongamos que $A \subset B \subset C$ contínuamente y que $\|x\|_B \leqslant K\|x\|_A$ para todo $x \in A$. Entonces, si A' y B' son las completaciones reducidas de A y B en C , se tiene $A' \subset B'$ y $\|u\|_{B'} \leqslant K\|u\|_{A'}$ para todo $u \in A'$.

Demostración

Sea $u \in A'$; toda sucesión de Cauchy en A que converge a u en C es también una sucesión de Cauchy en B que converge a u en C . Entonces

$$\|u\|_{B'} = \inf\left\{\lim \|x_n\|_B : \|x_m - x_n\|_B \longrightarrow 0 \quad , \quad \|x_n - u\|_C \longrightarrow 0\right\} \leqslant$$

$$\leqslant K \inf\left\{\lim \|x_n\|_A : \|x_m - x_n\|_A \longrightarrow 0 \quad , \quad \|x_n - u\|_C \longrightarrow 0\right\} = K\|u\|_{A'} .$$

La desigualdad se justifica observando que el segundo ínfimo se toma sobre un subconjunto de las sucesiones sobre las cuales se toma el primer ínfimo.

TEOREMA 3

Dado un par de interpolación (A_1 , A_2) y un espacio A_3 intermedio entre A_1 y A_2 , existen dos interpoladores F_1 y F_2 tales que:

i) $F_1(A_1 , A_2) = A_3$, $F_2(A_1 , A_2) = A_3$;

ii) F_1 es minimal: si F es cualquier interpolador tal que $F(A_1 , A_2) = A_3$, entonces $F_1(X_1 , X_2)$ está contínuamente contenido en $F(X_1 , X_2)$ para todo par de interpolación (X_1 , X_2) ;

iii) F_2 es maximal: si F es cualquier interpolador tal que $F(A_1, A_2) = A_3$, entonces $F(X_1, X_2)$ está contínuamente contenido en $F_2(X_1, X_2)$ para todo par de interpolación (X_1, X_2).

Demostración

Comenzaremos con la construcción de F_1. Sea (X_1, X_2) un par de interpolación arbitrario. Sea $\mathcal{S}(A, X)u$, $u \in A_3$, el conjunto de los elementos de la forma Tu con $T \in \mathcal{S}(A, X)$; definimos $X_0 = \sum_{u \in A_3} \mathcal{S}(A, X)u$, donde el signo de sumación se entiende como suma algebraica. Dado $u \in X_0$, denotemos con $\Lambda(u)$ la clase de todos los conjuntos finitos $\{u_1, \ldots\ldots, u_m\}$, $u_i \in A_3$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tales que $u = \sum_{i=1}^{m} T_i u_i$ con $T_i \in \mathcal{S}(A, X)$. El paso siguiente consiste en introducir en X_0 la función $\|u\|_{X_0} = \inf \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{A_3}$, donde el ínfimo se toma sobre todos los conjuntos $\{u_1, \ldots\ldots, u_m\} \in \Lambda(u)$.

Probaremos ahora que $\|u\|_{X_0}$ es una norma. La homogeneidad es obvia. Para verificar la desigualdad triangular, sean u, $v \in X_0$; podemos encontrar $\{u_1, \ldots \ldots, u_n\} \in \Lambda(u)$, $\{v_1, \ldots\ldots, v_m\} \in \Lambda(v)$, tales que

$$\|u\|_{X_0} + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{A_3} \quad , \quad \|v\|_{X_0} + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|_{A_3}$$

Entonces, teniendo en cuenta que $\{u_1, \ldots\ldots, u_n, v_1, \ldots\ldots, v_m\} \in \Lambda(u+v)$,

$$\|u\|_{X_0} + \|v\|_{X_0} + 2\varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_{A_3} + \sum_{i=1}^{m} \|v_i\|_{A_3} \geqslant \|u+v\|_{X_0}$$

Sea $u \in X_0$ y $\{u_1, \ldots\ldots, u_m\} \in \Lambda(u)$ tal que $\|u\|_{X_0} + \varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{A_3}$. Si $u = \sum_{i=1}^{m} T_i u_i$, tenemos

$$\|u\|_{X_1+X_2} \leqslant \sum_i \|T_i u_i\|_{X_1+X_2} \leqslant \sum_i \|u_i\|_{A_1+A_2} \leqslant K \sum_i \|u_i\|_{A_3} \leqslant K(\|u\|_{X_0} + \varepsilon)$$

Luego

$$\|u\|_{X_1+X_2} \leqslant K \|u\|_{X_0} \tag{9}$$

Se deduce de (9) que $\|u\|_{X_0} = 0$ implica $u = 0$, y esto completa la demostración de que $\|u\|_{X_0}$ es una norma.

La desigualdad (9) también prueba que X_0 está contínuamente contenido en $X_1 + X_2$. Por otra parte, $X_1 \cap X_2$ está contenido en X_0. En efecto, sea $z \in A_1 \cap A_2$; existe una funcional lineal h continua en $A_1 + A_2$ tal que $h(z) = 1$. Si u es un elemento arbitrario de $X_1 \cap X_2$, definimos $Ty = h(y)u$. Evidentemente T es un operador lineal continuo de $A_1 + A_2$ en $X_1 + X_2$. Si $y \in A_i$, $i = 1, 2$, tenemos

$$\|Ty\|_{X_i} = |h(y)| \, \|u\|_{X_i} \leqslant \|h\| \, \|y\|_{A_1+A_2} \|u\|_{X_i} \leqslant M \|y\|_{A_i}$$

Poniendo $T' = T/M$, $z' = Mz$, tenemos $T' \in \mathcal{S}(A, X)$, $z' \in A_3$ y $T'z' = u$. Luego $u \in X_0$, de donde

$$X_1 \cap X_2 \subset X_0 \tag{10}$$

Indicando con X' la completación reducida de X_0 en $X_1 + X_2$ con respecto a la norma $\|u\|_{X_0}$, definimos $F_1(X_1, X_2) = X'$. Se deduce de (9) y (10), utilizando los Lemas 4 y 13, que $X_1 \cap X_2 \subset X' \subset X_1 + X_2$ contínuamente.

Debemos probar que F_1 es un interpolador. Sea (Y_1, Y_2) otro par de interpolación y $F_1(Y_1, Y_2) = Y'$. Consideremos cualquier operador $S \in \mathcal{S}(X, Y)$, y sea $u \in X_0$, $u = T_1 u_1 + \ldots\ldots + T_m u_m$, $u_i \in A_3$, $\|u\|_{X_0} + \varepsilon \geqslant \sum_i \|u_i\|_{A_3}$, donde ε es un número positivo arbitrario; entonces $Su = ST_1u_1 + \dots + ST_mu_m$, y como $ST_i \in \mathcal{S}(A, Y)$, tenemos

$$\|Su\|_{Y_0} \leqslant \sum_i \|u_i\|_{A_3} \leqslant \|u\|_{X_0} + \varepsilon$$

Luego $\|Su\|_{Y_0} \leqslant \|u\|_{X_0}$, y por lo tanto $\|Su\|_{\overline{Y}} \leqslant \|u\|_{\overline{X}}$. Por un pasaje al límite, primero en el primer miembro y después en el segundo, obtenemos $\|Su\|_{Y'} \leqslant \|u\|_{X'}$.

Veremos ahora que $F_1(A_1, A_2) = A_3$. Si $u \in A_3$, entonces $u = Iu$, donde I es el operador identidad; esto significa que $u \in \Lambda(u)$, y por consiguiente $\|u\|_{A_0} \leqslant \|u\|_{A_3}$. Por otra parte, si $\{u_1, \dots, u_m\} \in \Lambda(u)$ y $u = T_1u_1 + \dots + T_mu_m$, $T_i \in \mathcal{S}$, entonces

$$\|u\|_{A_3} \leqslant \sum_i \|T_iu_i\|_{A_3} \leqslant \sum_i \|u_i\|_{A_3}$$

de donde resulta que $\|u\|_{A_3} \leqslant \|u\|_{A_0}$. Por lo tanto $\|u\|_{A_3} = \|u\|_{A_0}$ y $A_0 = A' = A_3$.

Por último, probaremos la minimalidad de F_1. Sea F cualquier interpolador tal que $F(A_1, A_2) = A_3$, y sea $F(X_1, X_2) = X_3$, $u \in X_0$, $u = T_1u_1 + \dots + T_mu_m$, donde $\{u_1, \dots, u_m\} \in \Lambda(u)$ y $T_i \in \mathcal{S}(A, X)$. Entonces

$$\|u\|_{X_3} \leqslant \sum_i \|T_iu_i\|_{X_3} \leqslant \sum_i \|u_i\|_{A_3}$$

Por lo tanto $\|u\|_{X_3} \leqslant \|u\|_{X_0}$, y se deduce del Lema 13 que X' está contenido contínuamente en X_3.

Construiremos ahora F_2, pero omitiendo las demostraciones, que se basan en ideas análogas a las del caso anterior. Sea (X_1, X_2) un par de interpolación arbitrario, y $T \in \mathscr{S}(X, A)$. Indiquemos con $T^{-1}(A_3)$ la contraimagen de A_3 por T, es decir

$$T^{-1}(A_3) = \{u \in X_1 + X_2 : Tu = v \ \text{ para algún } \ v \in A_3\}$$

Sea

$$X'' = \bigcap_{T \in \mathscr{S}(X, A)} T^{-1}(A_3)$$

Definamos, para $u \in X''$

$$\|u\|_{X''} = \sup_{T \in \mathscr{S}(X, A)} \|Tu\|_{A_3}$$

Se puede probar que $\|u\|_{X''}$ es una norma con respecto a la cual X'' es completo, y que $F_2(X_1, X_2) = X''$ es el interpolador maximal de la tesis.

OBSERVACIONES

El teorema general de Riesz - Thorin quedaría probado si encontramos un interpolador F tal que $F(L^{p_1}, L^{p_2}) = L^p$, $F(L^{q_1}, L^{q_2}) = L^q$, excepto en lo referente a la desigualdad (1) ; aquí sólo obtendríamos la desigualdad más débil $M \leqslant \text{máx}(M_1, M_2)$. Si quisiéramos probar una desigualdad de la forma (1) necesitaríamos hallar un interpolador con ciertas propiedades adicionales; trataremos en detalle una situación análoga en el Capítulo III al probar el teorema de Marcinkiewicz.

Los métodos minimales ofrecen especial interés, pues nos dan una descripción más precisa del rango de los operadores de $\mathscr{S}(A, X)$ al actuar sobre A_3 .

------

§ 5. - SOBRE LA DENSIDAD DE $A_1 \cap A_2$ EN $A_1 + A_2$

Muchos problemas de interpolación se simplifican si $A_1 \cap A_2$ es un subespacio denso de $A_1 + A_2$; por ejemplo, sólo en este caso es equivalente hablar de operadores continuos en A_1 y en A_2 con dominio denso en $A_1 \cap A_2$, como hicimos en el teorema de Riesz - Thorin, o de operadores continuos en A_1 y en A_2 cuyo dominio es $A_1 + A_2$, como hicimos al definir el espacio $\mathcal{T}$.

Si llamamos A_1' y A_2' a las clausuras de $A_1 \cap A_2$ en las normas de A_1 y A_2 , respectivamente, es evidente que $A_1' \cap A_2'$ (= $A_1 \cap A_2$) es denso en $A_1' + A_2'$. Por lo dicho anteriormente, presenta interés estudiar la relación entre los espacios intermedios entre A_1 y A_2 y los espacios intermedios entre A_1' y A_2'. En esta dirección tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4

> Sea (A_1, A_2) un par de interpolación, A_1' y A_2' las clausuras de $A_1 \cap A_2$ en las normas de A_1 y A_2 . Si C es un espacio intermedio entre A_1 y A_2 , pongamos $C' = C \cap (A_1' + A_2')$. Entonces, o bien $C = C'$, o $C = C' + A_1$, o $C = C' + A_2$, o $C = A_1 + A_2$.

Demostración

Si denotamos con $\bar{A}_2$ la clausura de A_2 en la norma de $A_1 + A_2$, entonces $\bar{A}_2 \cap A_1 \subset A_1'$. En efecto, supongamos que x_n es una sucesión de elementos de A_2 que tiende en $A_1 + A_2$ a un elemento $x \in A_1$; entonces existen $u_n \in A_1$, $v_n \in A_2$, tales que $x_n - x = u_n + v_n$ y $u_n \longrightarrow 0$ en A_1 , $v_n \longrightarrow 0$ en A_2 . El primer miembro de la igualdad $x_n - v_n = x - u_n$ pertenece a A_2 , y el segundo a A_1 ; luego ambos pertenecen a $A_1 \cap A_2$. Poniendo $x_n - v_n = h_n$, deducimos que $x - h_n = u_n$ tiende a cero en A_1 , lo cual prueba que $x \in A_1'$.

Supongamos ahora que $C \neq C'$, y sea $y \neq 0$, $y \in C - C'$. Si $y = u + v$, con $u \in A_1$ y $v \in A_2$, entonces o bien u no pertenece a A_1' o bien v no pertenece a A_2'. Supongamos, por ejemplo, que u no pertenece a A_1'; entonces, por lo que acabamos de probar, u no pertenece a $\overline{A}_2$. Como $\overline{A}_2$ es un subespacio cerrado de $A_1 + A_2$, existe una funcional lineal h, continua en $A_1 + A_2$ y tal que $h(u) = 1$, $h(x) = 0$ para $x \in \overline{A}_2$. Si z es cualquier elemento de A_1, pongamos $Tx = h(x).z$. Entonces

$$\|Tx\|_{A_1+A_2} = |h(x)|\,\|z\|_{A_1+A_2} \leqslant K\|x\|_{A_1+A_2} \quad \text{si} \quad x \in A_1 + A_2$$

$$\|Tx\|_{A_1} = |h(x)|\,\|z\|_{A_1} \leqslant M\|x\|_{A_1+A_2} \leqslant N\|x\|_{A_1} \quad \text{si} \quad x \in A_1$$

$$Tx = 0 \quad \text{si} \quad x \in A_2$$

Como $Ty = Tu = z$, deducimos que z pertenece a C y, por consiguiente, que A_1 está contenido en C. Esto significa que tenemos dos posibilidades: $C = C' + A_1$, o bien C contiene un elemento $x \in A_2 - A_2'$. En el segundo caso un razonamiento análogo al anterior muestra que A_2 está contenido en C, es decir, $C = A_1 + A_2$. Reemplazando la hipótesis original $u \notin A_1'$ por $v \notin A_2'$ hubiéramos llegado a la alternativa: $C = C' + A_2$ o bien $C = A_1 + A_2$, y esto completa la demostración.

OBSERVACION

A_1' y A_2' son espacios intermedios entre A_1 y A_2, porque si $T \in \mathscr{S}$, entonces T transforma a $A_1 \cap A_2$ en sí mismo, y como T es acotado en A_1 y en A_2, todo punto límite de $A_1 \cap A_2$ en la norma de A_1 (o A_2) es transformado en otro punto con la misma propiedad. Por consiguiente, $A_1' + A_2'$ es intermedio entre A_1 y A_2, y también lo es C' por ser intersección de dos espacios intermedios. Pero esto no significa que C' sea intermedio entre A_1' y A_2', lo cual equivaldría a decir que todo espacio intermedio entre A_1 y A_2 contenido en $A_1' + A_2'$ es intermedio entre A_1' y A_2'. Es fácil ver que una condición suficiente para que esto sea cierto es que todo operador lineal en $A_1' + A_2'$ de norma menor o igual que uno en A_1' y en A_2' pueda ser extendido a un operador lineal en $A_1 + A_2$ de norma menor o igual que uno en A_1 y en A_2. Veremos ahora que esta condición se cumple en el caso (L^1, L^∞), resultado que tiene cierto interés en sí mismo.

En lo sucesivo, salvo que se diga expresamente otra cosa, consideraremos espacios de funciones a valores complejos definidas sobre un espacio R con medida μ totalmente σ-finita. Llamaremos L' a la clausura de $L^1 \cap L^\infty$ en la norma de L^∞.

TEOREMA 5

Todo operador lineal definido en $L^1 + L'^\infty$ de norma menor o igual que uno en L^1 y en L'^∞ puede ser extendido a un operador lineal en $L^1 + L^\infty$ de norma menor o igual que uno en L^∞.

Demostración

Sea T un operador lineal definido en $L^1 + L'^\infty$ tal que $\|Tf\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}$ para toda $f \in L^1$, y $\|Tf\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ para toda $f \in L'^\infty$. Si $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a $L^1 \cap L^\infty$, pongamos

$$(Tf, g) = \int_R (Tf)(x)\, g(x)\, dx$$

Entonces

$$|(Tf, g)| \leqslant \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \qquad (11)$$

$$|(Tf, g)| \leqslant \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \qquad (12)$$

Definimos un operador lineal continuo de $L^1 \cap L^\infty$ en $(L^1 \cap L^\infty)^*$ por

$$(f, T^*g) = (Tf, g)$$

Entonces (12) prueba que T^*g es una funcional lineal continua definida en un subconjunto denso de L^1; luego puede ser identificada con una función acotada (que también indicaremos con T^*g) tal que $\|T^*g\|_{L^\infty} \leqslant \|g\|_{L^\infty}$. Por otra parte se deduce de (11) que T^*g es una funcional lineal en $L^1 \cap L^\infty$ que es continua en la norma de L^∞. Como T^*g coincide con una función acotada en $L^1 \cap L^\infty$, la continuidad en la norma de L^∞ implica que esta función es integrable y satisface $\|T^*g\|_{L^1} \leqslant \|g\|_{L^1}$. Podemos utilizar esta función integrable y acotada para extender T^*g como una funcional lineal continua sobre todo L^∞.

Si $f \in L^\infty$ y $g \in L^1 \cap L^\infty$, definimos ahora

$$(Qf, g) = (f, T^*g)$$

entonces

$$|(Qf, g)| = |(f, T^*g)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \|T^*g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

Luego Qf es una funcional lineal continua en un subconjunto denso de L^1, y por lo tanto es una función acotada que satisface $\|Qf\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$.

Esto significa que Q es un operador lineal que es continuo en L^∞ y coincide con T en $L^1 \cap L^\infty$. Si $f \in L^1 + L^\infty$ y $f = u + v$ con $u \in L^1$ y $v \in L^\infty$, definimos $Sf = Tu + Qv$. Entonces a) S está bien definido, b) S es acotado en $L^1 + L^\infty$, c) S es una extensión de T de norma menor o igual que uno en L^1 y en L^∞.

Observemos, para probar a) , que si $u \in L^1$, $v \in L^\infty$, y $u + v = 0$, entonces u y v pertenecen a $L^1 \cap L^\infty$. Luego $S(u+v) = Tu + Qv = T(u+v) = 0$. Si ε es un número real positivo arbitrario y $f = u + v$, con $u \in L^1$, $v \in L^\infty$, $\|f\|_{L^1 + L^\infty} + \varepsilon \geqslant \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^\infty}$, tenemos

$$\|Sf\|_{L^1 + L^\infty} \leqslant \|Tu\|_{L^1} + \|Qv\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1 + L^\infty} + \varepsilon$$

lo cual prueba b) . Como c) es evidente, esto completa la demostración.

CAPITULO II

ESPACIOS DE LORENTZ

§ 1. - FUNCION DE DISTRIBUCION

Hemos visto en el Capítulo I, § 3, que una de las propiedades características de los espacios intermedios entre L^1 y L^∞ consiste en que la norma de una función no cambia si se la transforma por un operador inducido por una transformación que preserva la medida. Resulta natural preguntarse, entonces, qué es lo que tienen de común funciones que están relacionadas por tales operadores; esto conduce a los conceptos de función de distribución, reordenada no creciente y promediada, que estudiaremos en este párrafo y el siguiente, y que están vinculadas a diversos problemas importantes del análisis.

Para abreviar la notación pondremos $\{x \in R : |f(x)| > \lambda\} = \{|f| > \lambda\}$ cuando no haya lugar a confusión.

DEFINICION 1

Si (R, μ) es un espacio con medida totalmente σ-finita y f es una función μ-medible a valores complejos, la función de distribución de f es

$$D_f(\lambda) = \mu(\{|f| > \lambda\})$$

utilizaremos también la función

$$D_f^!(\lambda) = \mu(\{|f| \geqslant \lambda\})$$

Las funciones $D_f(\lambda)$ y $D_f^!(\lambda)$ están definidas en la semirrecta $\lambda \geqslant 0$; cualquiera de ellas puede ser infinita en todo punto, como, por ejemplo, si R es la recta, μ la medida de Lebesgue y $f(x) = x$, o infinita en un intervalo, como en el caso $f(x) = 1$ (si $\mu(R) = \infty$). Ampliaremos la noción ordinaria de continuidad por medio de la siguiente convención: si $g(\lambda_0) = \infty$, y $g(\lambda)$ tiende a infinito cuando $\lambda \longrightarrow \lambda_0$, diremos que $g(\lambda)$ es continua en λ_0. Extenderemos análogamente las definiciones de continuidad a derecha o a izquierda.

LEMA 1

Si f es μ-medible, entonces

a) $D_f(\lambda)$ es no creciente y continua a derecha;

b) $D_f^!(\lambda)$ es no creciente y continua a izquierda;

c) $D_f(\lambda) \leqslant D_f^!(\lambda) \leqslant D_f(\lambda - \varepsilon)$, $\lambda \geqslant 0$, $0 < \varepsilon \leqslant \lambda$.

Demostración

a) Si $\lambda' > \lambda$, entonces $\{|f| > \lambda'\} \subset \{|f| > \lambda\}$; luego $D_f(\lambda') \leqslant D_f(\lambda)$. Si $\lambda_n \searrow \lambda$, se tiene $\{|f| > \lambda\} = \bigcup_n \{|f| > \lambda_n\}$; luego $D_f(\lambda_n) \nearrow D_f(\lambda)$.

b) y c) se prueban análogamente.

LEMA 2

Si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones μ-medibles y no negativas tales que $f_n(x) \nearrow f(x)$ pp. , entonces $D_{f_n}(\lambda) \nearrow D_f(\lambda)$.

Demostración

Basta observar que, luego de eliminar un conjunto de medida nula, $\{|f| > \lambda\} = \bigcup_n \{|f_n| > \lambda\}$, y que $\{|f_n| > \lambda\}$ es una sucesión creciente de conjuntos.

LEMA 3

Si f , f_1 , f_2 son funciones medibles no negativas, c_1 , c_2 números reales positivos, y $f(x) \leqslant c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, entonces

$$D_f((c_1 + c_2)\lambda) \leqslant D_{f_1}(\lambda) + D_{f_2}(\lambda) \tag{1}$$

En particular, si $f(x) \leqslant f_1(x) + f_2(x)$, entonces

$$D_f(\lambda) \leqslant D_{f_1}(\lambda/2) + D_{f_2}(\lambda/2) .$$

Demostración

Si $f(x) > (c_1 + c_2)\lambda$, debe ser $f_1(x) > \lambda$, o bien $f_2(x) > \lambda$; luego $\{f > (c_1 + c_2)\lambda\} \subset \{f_1 > \lambda\} \cup \{f_2 > \lambda\}$, de donde resulta (1)

LEMA 4 (Desigualdad de Chebichev)

Si $f(x)$ es μ-medible y $E_\lambda = \{|f| > \lambda\}$, entonces, para todo $\lambda \geqslant 0$ y $0 < p < \infty$,

$$\lambda^p D_f(\lambda) \leqslant \int_{E_\lambda} |f(x)|^p d_\mu \tag{2}$$

Demostración

Si $x \in E_\lambda$, entonces $|f(x)| > \lambda$; luego

$$\int_{E_\lambda} |f(x)|^p \, d\mu \geqslant \lambda^p \mu(\{|f| > \lambda\}) = \lambda^p D_f(\lambda)$$

COROLARIO

Si $f(x) \in L^p$, entonces

a) $\lambda^p D_f(\lambda) \leqslant (\|f\|_{L^p})^p$;

b) $\lambda^p D_f(\lambda)$

tiende a cero cuando λ tiende a infinito.

Demostración

La primera desigualdad es obvia; de ella se deduce que $D_f(\lambda)$ tiende a cero cuando λ tiende a infinito. Luego, utilizando (2) y la absoluta continuidad de la integral resulta b) .

LEMA 5

Si $f(x)$ es μ-medible y $0 < p < \infty$, entonces

$$\int_R |f(x)|^p \, d\mu = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} D_f(\lambda) \, d\lambda \qquad (3)$$

Demostración

Podemos suponer que $f(x) \geqslant 0$. Un cálculo sencillo muestra que la igualdad (3) es cierta si $f(x) = c\,\chi_A(x)$, donde $c \geqslant 0$ y $\chi_A(x)$ es la función característica de un conjunto medible. Si $f(x) = f_1(x) + \ldots\ldots + f_n(x)$, donde $f_i = c_i\,\chi_{A_i}$, $c_i \geqslant 0$ y los conjuntos A_i son disjuntos, entonces, poniendo $D_{f_i} = D_i$, tenemos

$$\int_R f^p \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_R f_i^{\,p} \, d\mu$$

$$p\int_0^\infty \lambda^{p-1} D_f(\lambda) \, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} D_i(\lambda) \, d\lambda \; ;$$

luego el lema es cierto si f es simple. Eligiendo una sucesión de funciones simples que tiendan a f en forma creciente, aplicando el Lema 2 y el teorema de Beppo Levi, se prueba la tesis en el caso general.

Diremos que dos funciones f y g (definidas, en general, sobre distintos espacios con medida) son equimedibles, si tienen la misma función de distribución. Se deduce del Lema 5 que dos funciones equimedibles tienen igual norma p; es obvio que esto es también cierto si $p = \infty$, pues $\|f\|_{L^\infty} = \{\sup \lambda : D_f(\lambda) \neq 0\}$.

------

§ 2. - FUNCION REORDENADA NO CRECIENTE

Sea $f(x)$ una función medible y $D_f(\lambda)$ su función de distribución. La reordenada no creciente de f es la función $f^*(t)$ definida para $t \geqslant 0$ por

$$f^*(t) = \inf\{\lambda : D_f(\lambda) \leqslant t\}.$$

En adelante nos limitaremos a considerar funciones $f(x)$ tales que $f^*(t) < \infty$ para $t > 0$. Examinando la definición de f^* vemos que esta condición equivale a pedir que $D_f(\lambda)$ tienda a cero cuando $\lambda \longrightarrow \infty$. También se puede caracterizar a esta clase de funciones por las dos propiedades siguientes: $f(x)$ es finita pp., y existe $\lambda_0 \geqslant 0$ tal que $D_f(\lambda)$ es finita para $\lambda > \lambda_0$.

La reordenada no creciente es esencialmente la función inversa de la función de distribución en el siguiente sentido. Completemos el gráfico de D_f en los puntos de salto por medio de trazos verticales; borremos los trazos horizontales correspondientes a intervalos de constancia de D_f conservando los extremos izquierdos de los mismos, pero no los extremos derechos; reflejemos el gráfico así modificado con respecto a la diagonal del primer cuadrante. Obtendremos entonces el gráfico de f^*. Por razones de rigor probaremos todas las proposiciones concernientes a f^* basándonos exclusivamente en la definición, pero es útil y más intuitivo formarse una imagen gráfica de las propiedades en cuestión considerando separadamente los puntos de salto, los intervalos de constancia y los puntos de decrecimiento de D_f y f^* .

LEMA 6

Si $f(x)$ es una función medible que cumple las condiciones antes mencionadas, entonces:

a) $f^*(t)$ es no creciente y continua a derecha;

b) si $0 < \mathcal{E} \leqslant D_f(\lambda) < \infty$, entonces $f^*(D_f(\lambda)) \leqslant \lambda < f^*(D_f(\lambda) - \mathcal{E})$;

c) si $f^*(t)$ es continua en $t = D_f(\lambda)$, entonces $f^*(D_f(\lambda)) = \lambda$;

d) si $D_f(\lambda) \leqslant t < D_f'(\lambda)$, entonces $f^*(t) = \lambda$;

e) si $\lambda > 0$ y $0 < \mathcal{E} \leqslant D_f'(\lambda) < \infty$, entonces $f^*(D_f'(\lambda)) \leqslant \lambda \leqslant f^*(D_f'(\lambda) - \mathcal{E})$;

f) si $f^*(t)$ es continua en $t = D_f'(\lambda)$, entonces $f^*(D_f'(\lambda)) = \lambda$;

g) $D_f(f^*(t)) \leqslant t \leqslant D_f'(f^*(t))$ para todo $t \geqslant 0$.

Demostración

a) Si $t_2 > t_1$, entonces $\{\lambda : D_f(\lambda) \leqslant t_2\} \supset \{\lambda : D_f(\lambda) \leqslant t_1\}$; luego el ínfimo del primer conjunto es menor o igual que el ínfimo del segundo, de donde resulta que f^* es no creciente. Si $f^*(t') = 0$, entonces f^* es continua a derecha en t' porque $f^*(t) = 0$ para $t > t'$. Si $f^*(t') > 0$, sea $h_n \searrow 0$ y $0 < \mathcal{E} \leqslant f^*(t')$; se deduce de la definición de f^* que $D_f(f^*(t) - \mathcal{E}) > t'$; por lo tanto existe n_0 tal que $D_f(f^*(t) - \mathcal{E}) > t' + h_n$ para $n > n_0$. Aplicando nuevamente la definición de f^* y su carácter no creciente, tenemos $f^*(t') - \mathcal{E} < f^*(t' + h_n) \leqslant f^*(t')$ para $n > n_0$, lo cual prueba la continuidad a derecha de f^* .

b) Evidentemente $\lambda \in \{ \lambda' : D_f(\lambda') \leq D_f(\lambda) \}$; luego $f^*(D_f(\lambda)) =$ $= \inf \{ \lambda' : D_f(\lambda') \leq D_f(\lambda) \} \leq \lambda$. La segunda desigualdad se obtiene análogamente, observando que $\lambda \notin \{ \lambda' : D_f(\lambda') \leq D_f(\lambda) - \varepsilon \}$ y que este conjunto es una semirrecta cerrada.

c) Esta proposición es consecuencia inmediata de b) .

d) Siendo $D_f(\lambda) \leq t$ tenemos, usando b) , que $f^*(t) \leq f^*(D_f(\lambda)) \leq \lambda$.

Como $t < D_f^!(\lambda)$, se deduce del Lema 1 , c) que $t < D_f(\lambda - \varepsilon)$ para todo ε con $0 < \varepsilon \leq \lambda$. La definición de reordenada implica, entonces, que $\lambda - \varepsilon < f^*(t)$; luego $f^*(t) \geq \lambda$, lo cual prueba d) si $\lambda > 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $f^*(t) \leq f^*(D_f(0)) = 0$, de donde $f^*(t) = 0$, y d) vale también en este caso.

e) La primera desigualdad es consecuencia de b) , pues $f^*(D_f^!(\lambda)) \leq$ $\leq f^*(D_f(\lambda))$ por ser $D_f^!(\lambda) \geq D_f(\lambda)$. También la segunda se deduce de b) si $D_f^!(\lambda) - \varepsilon < D_f(\lambda)$; si $D_f^!(\lambda) - \varepsilon \geq D_f(\lambda)$, entonces podemos poner $t = D_f^!(\lambda) - \varepsilon$ en d) y obtenemos $f^*(D_f^!(\lambda) - \varepsilon) = \lambda$; luego también en este caso vale la segunda desigualdad.

f) Es consecuencia inmediata de e) .

g) Si $\lambda_1 > f^*(t)$, se deduce de la definición de reordenada que $D_f(\lambda_1) \leq$ $\leq t$; entonces $D_f(f^*(t)) \leq t$ porque D_f es continua a derecha. La segunda desigualdad se prueba análogamente, utilizando la continuidad a izquierda de $D_f^!$.

Observemos que $D_f^!(\lambda) - D_f(\lambda) = \mu(\{|f| = \lambda\})$; por lo tanto, si f no es constante en ningún conjunto de medida positiva, será $D_f(\lambda) = D_f^!(\lambda)$, para todo λ . En tal caso se deduce de g) que $D_f(f^*(t)) = t$ para todo t , o sea que D_f es la función inversa de f^* . Por otra parte resulta de c) que f^* es la función inversa de D_f si f^* es continua.

LEMA 7

Si $f(x)$ es medible, entonces $f(x)$ y $f^*(t)$ son equimedibles, es decir, $D_f(\lambda) = D_{f^*}(\lambda)$.

decrec

Demostración

Resulta de la definición de reordenada que $f^*(t) > \lambda$ si y sólo si $t < D_f(\lambda)$. Luego $\{f^* > \lambda\} = \{0 \leqslant t < D_f(\lambda)\}$. Por consiguiente $D_{f^*}(\lambda) =$ $= |\{f^* > \lambda\}| = |[0, D_f(\lambda))| = D_f(\lambda)$.

Una consecuencia importante de los Lemas 7 y 5 es la siguiente: si $f \in L^p$, $0 < p \leqslant \infty$, entonces $\|f\|_{L^p} = \|f^*\|_{L^p}$.

LEMA 8

Sea f una función medible, A un conjunto medible y $E_\lambda = \{|f| > \lambda\}$. Entonces

a) $$\int_A |f(x)|\, d\mu \leqslant \int_0^{\mu(A)} f^*(t)\, dt,$$

b) $$\int_{E_\lambda} |f(x)|\, d\mu = \int_0^{D_f(\lambda)} f^*(t)\, dt.$$

Demostración

a) Si $|f| \leqslant |g|$, se deduce fácilmente de la definición de reordenada que $f^* \leqslant g^*$. Pongamos $f_1(x) = f(x)\, \chi_A(x)$, donde χ_A es la función característica de A; evidentemente $D_{f_1}(\lambda) \leqslant \mu(A)$ para todo $\lambda \geqslant 0$ y, por consiguiente, $f_1^*(t) = 0$ para $t \geqslant \mu(A)$. Por otra parte $|f_1| \leqslant |f|$, de donde $f_1^* \leqslant f^*$. Luego

$$\int_A |f|\, d\mu = \int_R |f_1|\, d\mu = \int_0^\infty f_1^*(t)\, dt = \int_0^{\mu(A)} f_1^*(t)\, dt \leqslant \int_0^{\mu(A)} f^*(t)\, dt$$

b) Pongamos $f_1(x) = f(x)\, \chi_{E_\lambda}$, $h(t) = f^*(t)$ si $0 \leqslant t < D_f(\lambda)$,

$h(t) = 0$ si $t \geqslant D_f(\lambda)$. Entonces $|\{h > \lambda'\}| = |\{f^* > \lambda'\}| =$
$= \mu(\{|f| > \lambda'\}) = \mu(\{|f_1| > \lambda'\})$ si $\lambda' \geqslant \lambda$, y $|\{h > \lambda'\}| =$
$= \mu(\{|f_1| > \lambda'\}) = D_f(\lambda)$ si $\lambda' < \lambda$. Luego f_1 y h son equimedibles, de donde

$$\int_{E_\lambda} |f(x)|\, d\mu = \int_R |f_1(x)|\, d\mu = \int_0^\infty h(t)\, dt = \int_0^{D_f(\lambda)} f^*(t)\, dt$$

LEMA 9

Si μ es una medida no atómica y $f(x)$ es una función medible, entonces para cada $t \geqslant 0$ existe un conjunto $B_t \subset R$ tal que $\mu(B_t) = t$ y

$$\int_0^t f^*(s)\, ds = \int_{B_t} |f(x)|\, d\mu .$$

Demostración

Sea $C = \{|f| > f^*(t)\}$, $E = \{|f| \geqslant f^*(t)\}$. Por el Lema 6, g).

$$\mu(C) = D_f(f^*(t)) \leqslant t \leqslant D_f'(f^*(t)) = \mu(E)$$

Siendo μ no atómica, existe un conjunto B_t tal que $C \subset B_t \subset E$ y $\mu(B_t) = t$. Pongamos $f_1(x) = f(x)\, \chi_{B_t}(x)$. Es fácil probar que $f_1^*(s) = f^*(s)$ si $s < t$, $f_1^*(s) = 0$ si $s \geqslant t$. Por lo tanto

$$\int_{B_t} |f(x)|\, d\mu = \int_R |f_1(x)|\, d\mu = \int_0^\infty f_1^*(s)\, ds = \int_0^t f_1^*(s)\, ds = \int_0^t f^*(s)\, ds$$

COROLARIO

Se deduce del Lema 8 a) y 9 que, si μ es no atómica, entonces

$$\int_0^t f^*(t)\,dt = \sup_{\mu(B)=t} \left\{ \int_B |f(x)|\,d\mu \right\} \qquad (6)$$

Se puede probar que (6) y la continuidad a derecha caracterizan a la función reordenada en el caso de medidas no atómicas. No usaremos este hecho, de modo que dejamos la demostración a cargo del lector.

LEMA 10

Si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones medibles y $|f_n(x)| \nearrow |f(x)|$ pp., entonces $f_n^*(t) \nearrow f^*(t)$.

Demostración

Por el Lema 2; $D_{f_n} \nearrow D_f$. Luego $C_n = \{ \lambda : D_{f_n}(\lambda) \leqslant t \}$ es una sucesión decreciente de conjuntos y $\bigcap_n C_n = \{ \lambda : D_f(\lambda) \leqslant t \}$, pues si $D_{f_n}(\lambda) \leqslant t$ para todo n se tiene, pasando al límite, $D_f(\lambda) \leqslant t$. Entonces

$$f_n^*(t) = \inf \{ \lambda : D_{f_n}(\lambda) \leqslant t \} \nearrow \inf \{ \lambda : D_f(\lambda) \leqslant t \} = f^*(t)$$

LEMA 11

Si (R, μ) es un espacio con medida totalmente σ-finito, existe un espacio (R', μ') totalmente σ-finito y no atómico y un operador lineal T que transforma funciones μ-medibles en R en funciones μ'-medibles en R' tales que:

a) para toda f μ-medible se tiene $D_{Tf}(\lambda) = D_f(\lambda)$; por lo tanto también $(Tf)^*(t) = f^*(t)$;

b) si f y g son μ-medibles, entonces $T(fg) = Tf \cdot Tg$.

Demostración

Si R es σ-finito, sus átomos son de medida finita y hay a lo sumo una cantidad numerable de ellos. Sean $K_1, K_2, \ldots\ldots$ los átomos de R, $K = \bigcup_j K_j$ y $R_1 = R - K$. Sean $H_1, H_2, \ldots\ldots$ una familia de intervalos disjuntos de la recta real tales que $|H_j| = \mu(K_j)$. Si $H = \bigcup_j H_j$, pongamos $R' = R_1 \cup H$. Diremos que un conjunto $A \subset R'$ es medible si $A \cap R_1$ es μ-medible en R y $A \cap H$ es medible Lebesgue, y definimos

$$\mu'(A) = \mu(A \cap R_1) + |A \cap H|$$

es evidente que μ' es una medida σ-finita no atómica en R'. Si f es μ-medible, debe ser f constante sobre cada K_j. Definimos ahora

$$(T f)(x) \begin{cases} = f(x) & \text{si } x \in R_1 \\ = f(K_j) & \text{si } x \in H_j \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que T es un operador lineal que verifica a) y b).

TEOREMA 1.

Si f y g son funciones μ-medibles en R, entonces

$$\int_R |fg|\, d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)\, g^*(t)\, dt \tag{7}$$

(como siempre, suponemos que μ es totalmente σ-finita).

Demostración

Podemos suponer que f y g son no negativas. Por el Lema 11, el problema se reduce al caso de medidas no atómicas. Utilizando el Lema 10 y el teorema de Bepo Levi vemos que basta probar (7) siendo f y g funciones simples.

Una ulterior simplificación se obtiene de la siguiente manera. Si

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} , \quad g = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i} , \quad a_i > 0 , \quad b_i > 0$$

son funciones simples no negativas, siempre podemos representar a f y g como

$$f = \sum_{j=1}^{r} d_j \chi_{C_j} , \quad g = \sum_{j=1}^{r} e_j \chi_{C_j} , \quad d_j \geqslant 0 , \quad e_j \geqslant 0 \qquad (8)$$

donde los d_j o los e_j no son necesariamente todos distintos (basta tomar como C_j los conjuntos de la forma $A_i \cap B_k$) .

Por último observemos que, siendo μ no atómica, las funciones (8) son límite creciente pp. de funciones del mismo tipo que además verifican la condición de que la medida de C_j es independiente de j . Para probarlo se construye f_n y g_n dividiendo C_j en $[\mu(C_j)/2^n]$ conjuntos disjuntos de medida $1/2^n$, se asigna a f_n y g_n el valor d_j y e_j respectivamente en cada uno de ellos, y cero en el resto de C_j ; en el paso siguiente se divide en dos a cada uno de estos subconjuntos agregando eventualmente uno más. Utilizando nuevamente el Lema 10 y el teorema de Bepo Levi se prueba, entonces, que podemos suponer que f y g son de la forma (8) con $\mu(C_j) = k$; en caso necesario reordenamos los términos de tal modo que $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \dots \geqslant d_r$. Si π es una permutación de $(1, 2, \dots, r)$ tal que $e_{\pi(1)} \geqslant e_{\pi(2)} \geqslant \dots \geqslant e_{\pi(r)}$; se tiene

$$f^*(t) = d_j , \quad g^*(t) = e_{\pi(j)} \quad \text{si} \quad (j-1)k \leqslant t < jk , \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$

$$f^*(t) = 0 , \quad g^*(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \geqslant rk$$

Luego

$$\int_0^{\infty} f^*(t)\, g^*(t)\, dt = k \sum_{j=1}^{r} d_j\, e_{\pi(j)} , \qquad (9)$$

$$\int_R f(x)\, g(x)\, d\mu = k \sum_{j=1}^{r} d_j\, e_j \qquad (10)$$

Supongamos que existen dos índices $p < q$ tales que $e_p < e_q$; entonces

$$(d_p e_q + d_q e_p) - (d_p e_p + d_q e_q) = (d_p - d_q)(e_q - e_p) \geqslant 0$$

Luego la suma en (10) no decrece sustituyendo e_p por e_q ; como π es producto de un número finito de tales sustituciones, resulta

$$\sum_{j=1}^{r} d_j e_j \leqslant \sum_{j=1}^{r} d_j e_{\pi(j)}$$

Por lo tanto, obtenemos de (9) y (10)

$$\int_R f(x)\, g(x)\, d\mu \leqslant \int_0^{\infty} f^*(t)\, g^*(t)\, dt$$

lo cual prueba el teorema.

LEMA 12

Sea (R, μ) un espacio con medida no atómica y $g_1(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, una función no creciente, no negativa y continua a derecha. Si $\{B_t\}$, $0 \leqslant t < \infty$, es una familia de subconjuntos medibles de R tales que $\mu(B_t) = t$, $B_{t_1} \subset B_{t_2}$ si $t_1 < t_2$, entonces existe una función μ-medible no negativa $g(x)$ tal que :

a) $\{g > \lambda\} \subset B_t \subset \{g \geqslant \lambda\}$ si $D_{g_1}(\lambda) \leqslant t \leqslant$
$\leqslant D'_{g_1}(\lambda)$ y t es un punto de continuidad de g_1 ;

b) $g^*(t) = g_1(t)$.

Demostración

Pongamos $g(x) = g_1(r)$, donde $r = \inf\{s : x \in B_s\}$. Si $x \in \{g > \lambda\}$, entonces $g(x) = g_1(r)$ con $g_1(r) > \lambda$; luego $r < D_{g_1}(\lambda)$. Por lo tan to $D_{g_1}(\lambda) \in \{s : x \in B_s\}$, o sea $x \in B_{D_{g_1}(\lambda)}$; por ser B_t creciente tendremos $x \in B_t$ si $t \geqslant D_{g_1}(\lambda)$.

Sea t un punto de continuidad de g_1 y $t \leqslant D'_{g_1}(\lambda)$; entonces $g_1(t) \geqslant \lambda$, porque $g_1(s) \geqslant \lambda$ para todo $s < t$. Si $x \in B_t$, entonces $g(x) = g_1(r)$ con $r \leqslant t$; luego $g(x) = g_1(r) \geqslant g_1(t) \geqslant \lambda$. Por lo tanto $x \in \{g \geqslant \lambda\}$, y esto completa la demostración de a) .

Para probar que $g^*(t) = g_1(t)$ basta ver que $D_g(\lambda) = D_{g_1}(\lambda)$ (porque $g_1^*(t) = g_1(t)$) . Como $\{g > \lambda\} \subset B_{D_{g_1}(\lambda)}$, se tiene $D_g(\lambda) \leqslant D_{g_1}(\lambda)$ de donde $D_g(\lambda) = D_{g_1}(\lambda)$ si $D_{g_1}(\lambda) = 0$. Si $D_{g_1}(\lambda) > 0$, sea $0 < \varepsilon \leqslant D_{g_1}(\lambda)$; entonces $B_{D_{g_1}(\lambda) - \varepsilon} \subset \{g > \lambda\}$. En efecto, si $x \in B_{D_{g_1}(\lambda) - \varepsilon}$, tenemos $g(x) = g_1(r)$ con $r \leqslant D_{g_1}(\lambda) - \varepsilon < < D_{g_1}(\lambda)$; luego $g(x) = g_1(r) > \lambda$, o sea $x \in \{g > \lambda\}$. Por consiguiente $D_{g_1}(\lambda) - \varepsilon \leqslant D_g(\lambda)$, de donde $D_{g_1}(\lambda) = D_g(\lambda)$.

TEOREMA 2

Dada una función medible f en un espacio con medida no atómica y una función $g_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$, no negativa, no creciente y continua a derecha, existe una función μ-medible $g(x)$ tal que $g^*(t) = g_1(t)$ y

$$(fg)^*(t) = f^*(t)\, g^*(t) \tag{11}$$

Demostración

Es fácil ver que, siendo μ no atómica, se puede construir una familia creciente de conjuntos $\{B_t\}$, $0 \leqslant t < \infty$, tal que $\mu(B_t) = t$ y $\{|f| > \lambda\} = = B_{D_f(\lambda)}$. Observemos que para esa familia se tiene $B_{D'_f(\lambda)} \subset \{|f| \geqslant \lambda\}$. En efecto, si $|f(x)| < \lambda$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant \lambda - \varepsilon$; luego $x \notin \{|f| \geqslant \lambda\}$ implica $x \notin B_{D_f(\lambda - \varepsilon)} \supset B_{D'_f(\lambda)}$.

Sea $g(x)$ la función del lema anterior y pongamos $f^*(t) = \alpha$, $g^*(t) = \beta$. Llamando H al conjunto de los t tales que $g_1(t)$ y $(fg)^*(t)$ son continuas, basta probar (11) para $t \in H$, pues éste es un conjunto denso en la semirrecta y ambos miembros de (11) son funciones continuas a derecha.

Por el Lema 6 , g) , se tiene

$$D_f(\alpha) \leqslant t \leqslant D_f'(\alpha)$$

luego, por ser B_t creciente

$$\{|f| > \alpha\} = B_{D_f(\alpha)} \subset B_t \subset B_{D_f'(\alpha)} \subset \{|f| \geqslant \alpha\}$$

Por consiguiente

$$x \notin B_t \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \alpha , \tag{12}$$

$$x \in B_t \Longrightarrow |f(x)| \geqslant \alpha . \tag{13}$$

Por otra parte

$$D_g(\beta) \leqslant t \leqslant D_g'(\beta)$$

de donde, por el Lema 12 , si $t \in H$

$$\{g > \beta\} \subset B_t \subset \{g \geqslant \beta\} ;$$

luego

$$x \notin B_t \Longrightarrow |g(x)| \leqslant \beta , \tag{14}$$

$$x \notin B_t \Longrightarrow |g(x)| \geqslant \beta \qquad (15)$$

Resulta de (12) y (14) que $x \notin B_t$ implica $|f(x)\ g(x)| \leqslant \alpha\beta$, de donde

$$\{|fg| > \alpha\beta\} \subset B_t \qquad (16)$$

Se deduce de (13) y (15) que $x \in B_t$ implica $|f(x)\ g(x)| \geqslant \alpha\beta$, o sea

$$B_t \subset \{|fg| \geqslant \alpha\beta\} . \qquad (17)$$

De (16) y (17) se obtiene

$$D_{fg}(\alpha\beta) \leqslant t \leqslant D'_{fg}(\alpha\beta)$$

Si fuese $D_{fg}(\alpha\beta) \leqslant t < D'_{fg}(\alpha\beta.)$, entonces, por el Lema 6 d),

$$(fg)^*(t) = \alpha\beta = f^*(t)\ g^*(t)$$

Por el Lema 6 f) , el mismo resultado se obtiene si $t = D'_{fg}(\alpha\beta)$ a menos que t sea un punto de discontinuidad de $(fg)^*$, caso que hemos excluído. El teorema está demostrado.

Para terminar este párrafo mencionaremos un problema interesante cuya solución no se conoce.

Si $f(x)$ es μ-medible en R y $g(x) = f(\tau x)$, donde τ es una transformación puntual de R sobre R que preserva la medida, entonces f y g son equimedibles, pues $\{|g| > \lambda\} = \tau\{|f| > \lambda\}$, de donde $D_g(\lambda) =$

$= D_f(\lambda)$. Recíprocamente, sean f y g dos funciones equimedibles no negativas definidas en el mismo espacio con medida (R, μ). Se trata de saber si existe una transformación τ de R sobre R que preserva la medida tal que $g(x) = f(\tau x)$. Es fácil ver que esto no es cierto en general. Por ejemplo, sea R la recta, μ la medida de Lebesgue, $f(x) = 0$ si $x \in (0, 1)$, $f(x) = 1$ si $x \notin (0, 1)$, y $g(x) = 1$ para todo x. Si existiera τ con las condiciones indicadas, $\tau(0, 1)$ tendría que ser un conjunto de medida uno en el cual $g(x) = 0$, y tal conjunto no existe. Más en general, tenemos la siguiente situación: si $f^*(t) \longrightarrow a > 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$, el conjunto $\{|f| < a\}$ puede tener medida positiva y podemos variar arbitrariamente los valores de $f(x)$ en ese conjunto manteniéndolos menores o iguales que a, sin modificar f^*; por lo tanto la reordenada no es un instrumento suficientemente preciso para separar funciones que no se pueden transformar una en otra por una transformación τ que preserva la medida. Este hecho señala una diferencia esencial entre la reordenación de funciones y su análogo finito-dimensional, la reordenación de n-uplas.

El problema que queríamos plantear consiste en averiguar si la pregunta tiene respuesta afirmativa si nos limitamos a considerar funciones $f(x)$ tales que $f^*(t)$ tiende a cero cuando t tiende a ∞.

------

§ 3. - LA FUNCION PROMEDIADA

Si f es μ-medible llamaremos función promediada de f al valor medio de f^* en el intervalo $[0, t]$:

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds$$

No es difícil deducir de esta definición que $f^{**}(t)$ es finita para todo $t > 0$ si y sólo si $f \in L^1 + L^\infty$. Por otra parte, esta afirmación es consecuencia inmediata del Teorema 3 . Otras propiedades de la función promediada son:

a) si $f \in L^1 + L^\infty$, $f^{**}(t)$ es absolutamente continua y derivable a derecha para todo $t > 0$;

b) $f^{**}(t)$ es no creciente;

c) $t f^{**}(t)$ es no decreciente;

d) si $f \in L^\infty$, entonces $\sup f^{**}(t) = \lim_{t \to 0} f^{**}(t) = \|f\|_{L^\infty}$;

e) si $f \in L^1$, entonces $\sup t f^{**}(t) = \lim_{t \to \infty} t f^{**}(t) = \|f\|_{L^1}$;

f) si f , $g \in L^1 + L^\infty$ y $|f| \leqslant |g|$, entonces $f^{**}(t) \leqslant g^{**}(t)$;

g) $f^{**}(t) \geqslant f^*(t)$ para todo $t > 0$;

h) $f^{**}(t_0) = 0$ para algún t_0 si y sólo si f^{**} es idénticamente nula, lo cual también equivale a que f sea nula pp. ;

i) $f^{**}(t_0) = \infty$ para algún $t_0 > 0$ si y sólo si $f^{**}(t) = \infty$ para todo t .

Todas estas propiedades son de fácil verificación; observemos sólamente que h) e i) son consecuencia de b) y c) .

LEMA 13

Si C es un espacio intermedio entre L^1 y L^∞ , y $f \in C$, entonces $|f| \in C$ y $\|f\|_C = \||f|\|_C$. Si f y g pertenecen a C y $|g| \leqslant |f|$, entonces $\|g\|_C \leqslant \|f\|_C$.

Demostración

Observemos que si $|\varphi(x)| \leqslant 1$ y definimos $(Th)(x) = \varphi(x)h(x)$ para $h \in L^1 + L^\infty$, entonces T tiene norma menor o igual que uno en L^1 y en L^∞, y por lo tanto también en C . Tomando $\varphi(x) = \mathrm{sgn}^{-1} f$ tendremos $Tf = |f|$, de donde $\||f|\|_C \leqslant \|f\|_C$; tomando $\varphi(x) = \mathrm{sgn}\, f$ tendremos $T|f| = f$, de donde $\|f\|_C \leqslant \||f|\|_C$. Para probar la segunda prate del lema basta tomar $\varphi(x) = g(x)/f(x)$ si $f(x) \neq 0$, $\varphi(x) = 0$ si $f(x) = 0$.

Si A es un espacio de Banach con norma $\|x\|_A$ y t es un número real positivo, indicaremos con tA al espacio de Banach cuyos elementos son los de A con la norma $\|x\|_{tA} = \|x\|_A / t$.

Desde el punto de vista de la teoría de interpolación la propiedad más importante de la función promediada es la siguiente :

TEOREMA 3

Si $f \in L^1 + L^\infty$ y $D_t = tL^1 + L^\infty$, entonces
$f^{**}(t) = \|f\|_{D_t}$.

Demostración

Podemos suponer, por el Lema 13 , que $f(x)$ es real y no negativa. Si $f(x) = u(x) + v(x)$ con $u \in tL^1$ y $v \in L^\infty$, entonces también tenemos $f(x) = \operatorname{Re} u(x) + \operatorname{Re} v(x)$. Como $|\operatorname{Re} u| \leqslant |u|$, $|\operatorname{Re} v| \leqslant |v|$, deducimos que para calcular

$$\inf\left\{ \|u\|_{tL^1} + \|v\|_{L^\infty} : u \in tL^1 \quad , \quad v \in L^\infty \quad , \quad u + v = f \right\} \qquad (18)$$

podemos suponer que u y v son reales.

Sea $u'(x) = \min(u(x)\varphi(x), f(x))$, donde $\varphi(x)$ es la función característica del conjunto en el cual u es positiva, y definamos $v'(x) = f(x) - u'(x)$. Entonces $u'(x) + v'(x) = f(x)$, $0 \leqslant u'(x) \leqslant |u(x)|$ y

$$0 \leqslant v'(x) = f(x) - u'(x) \leqslant |f(x) - u(x)| = |v(x)| \quad ;$$

luego el ínfimo en (18) no cambia si imponemos a u y v la condición adicional de ser no negativas. Suponiendo esto, si $\|v\|_{L^\infty} = \sigma$, definimos

$$f_\sigma(x) = \min(\sigma, f(x)) \quad , \quad h(x) = f(x) - f_\sigma(x) \tag{19}$$

Como $v(x) \leqslant \sigma$ (podemos suponer que esta desigualdad se cumple en todo punto en vez de pp.) y $v(x) \leqslant f(x)$, tenemos $v(x) \leqslant f_\sigma(x)$, y por lo tanto $h(x) \leqslant u(x)$. Entonces

$$\|h\|_{tL^1} + \|f_\sigma\|_{L^\infty} = \|h\|_{tL^1} + \|v\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{tL^1} + \|v\|_{L^\infty}$$

Esto significa que para obtener el ínfimo en (18) podemos tomar como u y v funciones de la forma (19), es decir

$$\|f\|_{D_t} = \inf_{\sigma \geqslant 0} \left(\|f - f_\sigma\|_{tL^1} + \sigma \right)$$

Por otra parte probaremos que, si $\sigma_0 = \inf(\sigma : D_f(\sigma) < t)$, entonces $\|f - f_\sigma\|_{tL^1} + \sigma$ alcanza su valor mínimo para $\sigma = \sigma_0$. En efecto, si $\sigma > \sigma_0$, entonces, como $D_f(\sigma_0) \leqslant t$, tenemos

$$\|f - f_\sigma\|_{tL^1} + \sigma - (\|f - f_{\sigma_0}\|_{tL^1} + \sigma_0) =$$

$$= \sigma - \sigma_0 - \frac{1}{t}\int_R (f_\sigma(x) - f_{\sigma_0}(x))\, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t}\left[D_f(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) - D_f(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0) \right] = 0$$

Para considerer el caso $\sigma < \sigma_0$ observemos que, si $\|f - f_\sigma\|_{tL^1} + \sigma < \infty$, entonces $\|f - f_\tau\|_{tL^1} + \tau$ es una función continua de τ para $\tau > \sigma$. Por lo tanto, dado cualquier ε positivo podemos elegir τ de modo que $\sigma \leqslant \tau < \sigma_0$ y

$$\|f - f_\tau\|_{tL^1} + \tau - (\|f - f_{\sigma_0}\|_{tL^1} + \sigma_0) < \varepsilon \tag{20}$$

Como $D_f(\tau) \geqslant t$, tenemos

$$\| f - f_\sigma \|_{tL^1 + \sigma} - (\| f - f_\tau \|_{tL^1 + \tau}) =$$

$$\frac{1}{t}\int_R (f_\tau - f_\sigma)\,d\mu - (\tau - \sigma) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t}\left[\int_R (f_\tau - f_\sigma)\,d\mu - D_f(\tau)(\tau - \sigma)\right] \geqslant 0$$

Esta desigualdad, junto con la (20), prueba nuestra afirmación. Por lo tanto, tenemos

$$\| f \|_{D_t} = \frac{1}{t}\left[\int_R (f - f_{\sigma_0})\,d\mu + t\,\sigma_0\right.$$

Observemos ahora que $f^*(s) = \sigma_0$ si $D_f(\sigma_0) \leqslant s \leqslant t$. Por consiguiente

$$\| f \|_{D_t} = \frac{1}{t}\left\{\int_{f > \sigma_0} f(x)\,d\mu + \sigma_0\left[t - D_f(\sigma_0)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{t}\left\{\int_0^{D_f(\sigma_0)} f^*(s)\,ds + \sigma_0\left[t - D_f(\sigma_0)\right]\right\} = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds = f^{**}(t) .$$

Como caso particular de este teorema obtenemos una expresión interesante para la norma en $L^1 + L^\infty$:

$$\| f \|_{L^1 + L^\infty} = f^{**}(1) = \int_0^1 f^*(s)\,ds$$

Una consecuencia obvia del hecho de que $f^{**}(t)$ es una norma es que

$$(f+g)^{**}(t) \leqq f^{**}(t) + g^{**}(t) \tag{21}$$

La desigualdad análoga a la (21) no es válida para f^*, como se ve tomando, por ejemplo, f = función característica del intervalo $(0, 1)$ en la recta, g =

= función característica del intervalo $(1, 2)$.

Veremos ahora algunas desigualdades tipo Hardy, que nos permitirán más adelante relacionar integrales en las que figura f^{**} con las análogas en términos de f^{*} , y que jugarán un papel importante en la teoría de los espacios de Lorentz y en la demostración del teorema de Marcinkiewicz - Calderón.

LEMA 14

Sea $f(t)$, $0 \leqslant t < \infty$, una función no negativa y medible Lebesgue. Pongamos

$$F(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds \quad , \quad F_1(t) = \int_t^{\infty} f(s)\, s^{u-1}\,ds \ ,$$

$$F_2(t) = \int_0^t f(s)\, s^{u-1}\,ds$$

Entonces

$$\left[\int_0^{\infty} F(t)^p\, t^r\,dt\right]^{1/p} \leqslant \frac{p}{p-r-1}\left[\int_0^{\infty} f(t)^p\, t^r\,dt\right]^{1/p} \quad \text{si} \quad p > r+1 \qquad (22)$$

$$\left[\int_0^{\infty} F_1(t)^p\, t^r\,dt\right]^{1/p} \leqslant \frac{p}{r+1}\left[\int_0^{\infty} f(t)^p\, t^{up+r}\,dt\right]^{1/p} \quad \text{si} \quad r > -1 \qquad (23)$$

$$\left[\int_0^{\infty} F_2(t)^p\, t^r\,dt\right]^{1/p} \leqslant \frac{-p}{r+1}\left[\int_0^{\infty} f(t)^p\, t^{up+r}\,dt\right]^{1/p} \quad \text{si} \quad r < -1 \qquad (24)$$

Demostración

Podemos suponer que $f(t)$ se anula en un entorno del origen y para t suficientemente grande, pues esta restricción se elimina de manera obvia usando el Teorema de Bepo Levi.

Integrando por partes y utilizando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\int_{0}^{\infty} F(t)^p t^r\, dt = \int_0^\infty \left[F(t)t\right]^p t^{r-p}\, dt = \frac{1}{r-p+1}\int_0^\infty \left[F(t)t\right]^p d(t^{r-p+1}) =$$

$$= \frac{p}{p-r-1}\int_0^\infty t^{r-p+1}\left[F(t)t\right]^{p-1} f(t)\, dt = \frac{p}{p-r-1}\int_0^\infty (F(t)t^{r/p})^{p-1}(f(t)t^{r/p})\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p}{p-r-1}\left[\int_0^\infty F(t)^p t^r\, dt\right]^{(p-1)/p}\left[\int_0^\infty f(t)^p t^r\, dt\right]^{1/p}$$

Dividiendo por $\left[\int_0^\infty F(t)^p t^r\, dt\right]^{(p-1)/p}$ obtenemos (22) .

Análogamente, si $r > -1$,

$$\int_0^\infty F_1(t)^p t^r\, dt = \frac{1}{r+1}\int_0^\infty F_1(t)^p d(t^{r+1}) = \frac{-p}{r+1}\int_0^\infty t^{u+r} F_1(t)^{p-1} f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{-p}{r+1}\left[\int_0^\infty F_1(t)^p t^r\, dt\right]^{(p-1)/p}\left[\int_0^\infty f(t)^p t^{up+r}\, dt\right]^{1/p}$$

de donde se obtiene (23) .

Por último, si $r < -1$,

$$\int_0^\infty F_2(t)^p t^r\, dt = \frac{1}{r+1}\int_0^\infty F_2(t)^p d(t^{r+1}) = \frac{-p}{r+1}\int_0^\infty t^{u+r} F_2(t)^{p-1} f(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{-p}{r+1}\left[\int_0^\infty F_2(t)^p t^r\, dt\right]^{(p-1)/p}\left[\int_0^\infty f(t)^p t^{up+r}\, dt\right]^{1/p}$$

de donde resulta (24) .

------

§ 4 . - ESPACIOS DE LORENTZ

Estudiaremos ahora una familia biparamétrica L_{pq} de espacios intermedios entre L^1 y L^∞ que incluye a los espacios L^p $(= L_{pp})$. Para $q = \infty$, la idea que conduce a estos espacios está contenida en la noción de tipo débil de operadores de Marcinkiewicz. Para $q = 1$ y $q = \infty$ fueron formalmente definidos y estudiados por G. G. Lorentz [5] . Finalmente Calderón introdujo los espacios L_{pq} ,

$1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, y los utilizó para generalizar el teorema de Marcinkiewicz y aclarar su relación con el teorema de Riesz - Thorin. Trataremos estos temas en el Capítulo III .

Si $f(x)$ es una función medible y $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, definimos

$$I_1(f, p, q) = \left\{ \int_0^\infty \left[f^*(t)\, t^{1/p} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} ,$$

$$I_1(f, p, \infty) = \sup_{t > 0} f^*(t)\, t^{1/p} ,$$

$$I_2(f, p, q) = \left\{ \int_0^\infty \left[f^{**}(t)\, t^{1/p} \right]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q} ,$$

$$I_2(f, p, \infty) = \sup_{t > 0} f^{**}(t)\, t^{1/p}$$

Como $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$, tenemos $I_1(f, p, q) \leqslant I_2(f, p, q)$. Por otra parte, utilizando el Lema 14 con $F(t) = f^{**}(t)$, reemplazando en (22) p por q y r por $\frac{q}{p} - 1$, se obtiene, si $q < \infty$,

$$I_2(f, p, q) \leqslant \frac{p}{p-1} I_1(f, p, q) = p' I_1(f, p, q)$$

Esta desigualdad vale también si $q = \infty$. En efecto, si $I_1(f, p, q) = K$, entonces $f^*(t) \leqslant K t^{-1/p}$; luego

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^\infty f^*(s)\, ds \leqslant \frac{K}{t} \int_0^\infty s^{-1/p}\, ds = K p' t^{-1/p}$$

Por lo tanto $f^{**}(t)\, t^{1/p} \leqslant p' K$, de donde

$$I_2(f, p, \infty) \leqslant p' I_1(f, p, \infty)$$

Observemos que, en particular

$$I_2(f, p, 1) = \int_0^\infty f^{**}(t)\, t^{1/p - 1}\, dt = \int_0^\infty \left[\int_0^t f^*(s)\, ds \right] t^{1/p - 2}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty f^*(s)\left[\int_s^\infty t^{1/p-2}\,dt\right]ds = p'\int_0^\infty f^*(s)\,s^{1/p-1}\,ds = p'\, I_1(f, p, 1)$$

Hemos probado, entonces, los siguientes resultados.

LEMA 15

Si $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$I_1(f, p, q) \leqslant I_2(f, p, q) \leqslant p'\, I_1(f, p, q);$$

además $\quad I_2(f, p, 1) = p'\, I_1(f, p, 1)$

Si $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, llamaremos L_{pq} al conjunto de las funciones medibles tales que cualquiera de las dos funcionales equivalentes $I_1(f, p, q)$ o $I_2(f, p, q)$ es finita. Pondremos, además, $L_{1,q} = L^1$, $L_{\infty, q} = L^\infty$ para $1 \leqslant q \leqslant \infty$.

Observemos que, si $q < \infty$, $I_2(f, p, q)$ es la norma de $f^{**}(t)$ en el espacio L^q de funciones en la semirrecta positiva con la medida $t^{q/p-1}\,dt$. Por lo tanto, usando (21) y la desigualdad de Minkowsky, resulta inmediatamente que L_{pq} es un espacio vectorial y se prueba, además, la subaditividad de $I_2(f, p, q)$; con respecto a $L_{p,\infty}$, basta la desigualdad (21) para obtener los mismos resultados.

Es fácil probar que $I_2(f, p, q)$ es una norma en L_{pq} ; en cambio $I_1(f, p, q)$ no lo es si $q > p$, pues en tal caso se pueden construir ejemplos para los cuales no se verifica la subaditividad. Esta es una de las principales razones de la introducción de la función promediada.

Definiremos normas en los espacios L_{pq} de la siguiente manera:

$$\|f\|_{L_{pq}} = \left(\frac{q}{pp'}\right)^{1/q} I_2(f, p, q) = \left[\frac{q}{pp'}\int_0^\infty f^{**}(t)^q\, t^{q/p-1}\,dt\right]^{1/q}$$

si $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = I_2(f, p, \infty) = \sup_{t>0} f^{**}(t)\, t^{1/p} \quad \text{si } 1 \leqslant p < \infty ,$$

$$\|f\|_{L_{1,q}} = \|f\|_{L^1} \quad , \quad \|f\|_{L_{\infty,q}} = \|f\|_{L^\infty} \quad , \quad \text{si} \quad 1 \leq q \leq \infty$$

Hemos introducido el factor $(q/pp')^{1/q}$ porque con esta definición se tiene $\|f\|_{L_{pq}} = \|f\|_{L^p}$ si f es la función característica de un conjunto medible, como se comprueba por un cálculo sencillo.

Los espacios L_{pq} con las normas anteriores son espacios de Banach intermedios entre L^1 y L^∞ No es difícil demostrar esto directamente, pero no lo haremos porque es consecuencia de un teorema más general que veremos en el próximo capítulo; nos limitaremos ahora a probar la completitud.

Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L_{pq} $(1 \leq q < \infty)$. Pasando a una subsucesión en caso necesario, podemos suponer que $\|f_{n+1} - f_n\|_{L_{pq}} \leq$ $\leq 1/2^n$. Entonces

$$\left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{m} (f_{n+1} - f_n)^{**q} \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{m} \left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^\infty (f_{n+1} - f_n)^{**q} \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \leq 1$$

Por el teorema de Fatou tendremos

$$\left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)^{**q} \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \leq 1$$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)^{**}(t) < \infty$ pp. , y por ser no creciente es finita para todo $t > 0$: Como $f^{**}(t) = \|f\|_{tL^1 + L^\infty}$ por el Teorema 3 , deducimos que la serie $f_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)$ converge en $tL^1 + L^\infty$ a una función $f(x)$, y además que $(f - f_k)^{**}(t) = \left(\sum_{n=k}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)\right)^{**}(t) \leq \sum_{n=k}^{\infty} (f_{n+1} - f_n)^{**}(t)$; luego

$$\left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^\infty (f - f_k)^{**}(t)^q \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^{\infty} (f_{n+1} - f_n)^{**}(t)^q \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \leqslant 1/2^{k-1}$$

Por consiguiente $f \in L_{pq}$ y $\| f_n - f \|_{L_{pq}} \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

El caso $q = \infty$ es más sencillo y lo dejamos a cargo del lector.

Los dos teoremas que siguen prueban que, si $1 \leqslant p < \infty$, los espacios $L_{p,1}$ y $L_{p,\infty}$ se caracterizan como el mínimo y máximo espacio intermedio entre L^1 y L^{∞} cuya norma coincide con la de L^p para funciones características. El mismo resultado valdría para $p = \infty$ si hubiésemos definido $L_{\infty,1}$ como L'^{∞} (ver Cap. I , § 5) .

TEOREMA 4

Sea C un espacio intermedio entre L^1 y L^{∞} tal que $\| f \|_C = \| f \|_{L^p}$ $(1 \leqslant p < \infty)$ si f es una función característica. Entonces $L_{p,1} \subset C$, $\| f \|_C \leqslant \leqslant \| f \|_{L_{p,1}}$ para toda $f \in L_{p,1}$.

Demostración

Por el Lema 13 podemos suponer que f es no negativa. Además podemos limitarnos a considerar funciones simples, pues es fácil ver que éstas son densas en $L_{p,1}$. Sea

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \chi_{A_i}(x) \quad , \quad a_1 > a_2 > \ldots . > a_n > 0 \quad , \quad A_i \cap A_j = \emptyset \;\; \text{si} \;\; i \neq j$$

Pongamos $B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i$, $b_j = a_j - a_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $a_{n+1} = 0$, $b_j \chi_{B_j} = f_j$. Entonces se comprueba fácilmente que $f = \sum_{j=1}^{n} f_j$; además

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j^*(t)$$

En efecto, sea $t_0 = 0$, $t_i = \mu(B_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Si $t_{i-1} \leqslant t < t_i$, entonces $f^*(t) = \inf \{ \lambda : D_f(\lambda) \leqslant t \} = a_i$, $f_j^*(t) = 0$ si $j < i$, $f_j^*(t) = b_j$ si $j \geqslant i$. Luego $\sum_{j=1}^{n} f_j^*(t) = \sum_{j=i}^{n} b_j = \sum_{j=i}^{n} (a_j - a_{j+1}) = a_i = f^*(t)$ si $0 \leqslant t < t_n$. La igualdad también vale si $t \geqslant t_n$, pues en tal caso ambos miembros son nulos. Por lo tanto

$$\|f\|_{L_{p,1}} = \frac{1}{p} \int_0^\infty f^*(t)\, t^{1/p-1}\, dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} \int_0^\infty f_j^*(t)\, t^{1/p-1}\, dt = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L_{p,1}}$$

Por hipótesis $\|f_j\|_C = \|f_j\|_{L_p} = \|f_j\|_{L_{p,1}}$ para $1 \leqslant j \leqslant n$; luego

$$\|f\|_C \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_C = \sum_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L_{p,1}} = \|f\|_{L_{p,1}}$$

Observemos que no hemos utilizado el hecho de que C es intermedio, sino solamente que $\|f\|_C = \| \, |f| \, \|_C$.

TEOREMA 5

Sea E un espacio intermedio entre L^1 y L^∞ tal que $\|f\|_E = \|f\|_{L^p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ si f es una función característica; entonces $E \subset L_{p,\infty}$ y $\|f\|_{L_{p,\infty}} \leqslant \|f\|_E$ para toda $f \in E$.

Demostración

Sea $f \in E$; como antes, podemos suponer que f es no negativa. Supongamos primero que la medida es no atómica. Si $t > 0$, sea B_t un conjunto tal que $\{f > f^*(t)\} \subset B_t \subset \{f \geqslant f^*(t)\}$ y $\mu(B_t) = t$, y sea χ_t la función característica de B_t.

Definamos, para $h \in L^1 + L^\infty$, $(Th)(x) = \left[\frac{1}{t} \int_{B_t} h(x)\, d\mu \right] \chi_t(x)$. Entonces T es un operador lineal de norma menor o igual que uno en L^1 y en L^∞ y $(Tf)(x) = f^{**}(t)\, \chi_t(x)$ (ver la demostración del Lema 9). Como Tf es múltiplo de una función característica y E es intermedio, tenemos

$$f^{**}(t)\, t^{1/p} = \| Tf \|_{L^{p'}} = \| Tf \|_E \leqslant \| f \|_E \qquad (25)$$

de donde $\| f \|_{L_{p,\infty}} \leqslant \| f \|_E$.

Si la medida tiene átomos, la desigualdad (25) está probada sólo para los t tales que existe B_t con $\mu(B_t) = t$ y $\{ f > f^*(t) \} \subset B_t \subset \{ f \geq f^*(t) \}$. Llamando H al conjunto de tales t , probaremos que

$$\sup_{t > 0} f^{**}(t)\, t^{1/p} = \sup_{t \in H} f^{**}(t)\, t^{1/p}$$

de donde resultará que la tesis sigue siendo válida.

Sea $1 < p < \infty$, y sean $t_1 , t_2 \in H$ tales que $(t_1, t_2) \cap H = \emptyset$. Entonces es evidente que $f^*(t)$ es constante en $[t_1, t_2)$, y por lo tanto $f^{**}(t)$ es derivable en (t_1, t_2) . Si $\varphi(t) = f^{**}(t)\, t^{1/p}$, entonces

$$\varphi'(t) = t^{-1/p'} \left[f^*(t) - \frac{1}{p'} f^{**}(t) \right] .$$

Por la definición de f^{**} como valor medio de f^* es fácil ver que sólo tenemos dos posibilidades: o bien $f^{**}(t) = f^*(t)$ en (t_1, t_2) (y también en $(0, t_2)$) , o bien $f^{**}(t)$ es estrictamente decreciente en (t_1, t_2) . En el primer caso será $\varphi'(t) > 0$ en (t_1, t_2) , y en el segundo $\varphi'(t)$ se anula a lo sumo en un punto $t_0 \in (t_1, t_2)$ y es creciente en t_0 . Luego $\varphi(t)$ no puede tener un máximo en (t_1, t_2) , lo cual prueba nuestra afirmación.

Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son más sencillos, pues entonces $\varphi(t) = t f^{**}(t)$ ó $\varphi(t) = f^{**}(t)$, y ambas funciones son monótonas.

Veremos ahora que, para cada p , L_{pq} es una cadena de espacios que crece con q .

TEOREMA 6

Si $q_2 > q_1$, entonces $L_{p,q_1} \subset L_{p,q_2}$ y
$\|f\|_{L_{p,q_2}} \leqslant (q_2/q_1)^{1/q_2} \|f\|_{L_{p,q_1}}$ para toda
$f \in L_{p,q_1}$.

Demostración

El teorema es cierto para $q_2 = \infty$, en virtud del Teorema 5 , si se reemplaza la constante de la desigualdad por uno. Si $q_2 < \infty$, podemos suponer que $\|f\|_{L_{p,q_1}} = 1$. Entonces, por el teorema anterior, $f^{**}(t)t^{1/p} \leqq 1$; por lo tanto $[f^{**}(t)t^{1/p}]^{q_1} \geqslant [f^{**}(t)t^{1/p}]^{q_2}$, de donde

$$\|f\|_{L_{p,q_2}} = \left\{ \frac{q_2}{pp'} \int_0^\infty [f^{**}(t)t^{1/p}]^{q_2} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{q_2}{q_1} \frac{q_1}{pp'} \int_0^\infty [f^{**}(t)t^{1/p}]^{q_1} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q_2} = (q_2/q_1)^{1/q_2}$$

Estamos ahora en condiciones de motivar las definiciones de L_{pq} para $p = 1$ y para $p = \infty$. Supongamos que $f \in L^1 \cap L^\infty$ y que se anula fuera de un conjunto de medida $K < \infty$; entonces

$$\|f\|_{L_{p,1}} = \frac{1}{p} \int_0^\infty f^*(t)\,t^{1/p-1}\,dt \longrightarrow \int_0^\infty f^*(t)\,dt = \|f\|_{L^1} \tag{26}$$

si $p \to 1$, pues es evidente que se puede pasar al límite bajo el signo de integral. Por otra parte

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\,t^{1/p} \longrightarrow \sup_{t>0} f^{**}(t)\,t = \|f\|_{L^1} \tag{27}$$

cuando $p \to 1$. En efecto, $f^{**}(t)t^{1/p} = \|f\|_{L^1} t^{-1/p'}$ si $t \geqslant K$; luego $f^{**}(t)t^{1/p}$ no crece para $t > K$, y por lo tanto basta tomar el supremo para $0 \leqslant t \leqslant K$. Pero en ese intervalo $f^{**}(t)t^{1/p}$ tiende uniformemente a $f^{**}(t)t$.

Como $\|f\|_{L_{p,1}} \geqslant \|f\|_{L_{pq}} \geqslant \|f\|_{L_{p,\infty}}$, se deduce de (26) (27) que $\|f\|_{L_{pq}} \longrightarrow \|f\|_{L^1}$ si $p \longrightarrow 1$ (independientemente de cómo varíe q) .

Análogamente, si $f \in L^1 \cap L^\infty$ y $\delta > 0$, tenemos

$$\frac{1}{p}\int_\delta^\infty f^*(t)\, t^{1/p-1}\, dt \leqslant \|f\|_{L^1}/p \;\; \delta^{1/p'} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad p \longrightarrow \infty$$

luego

$$\liminf_{p\longrightarrow\infty} \|f\|_{L_{p,1}} = \liminf_{p\longrightarrow\infty} \frac{1}{p}\int_0^\delta f^*(t)\, t^{1/p-1}\, dt$$

y análogamente con lim sup .

Dado $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta > 0$ tal que $\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon < f^*(\delta) <$ $< \|f\|_{L^\infty}$; entonces

$$(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon)\;\; \delta^{1/p} \leqslant \frac{1}{p}\int_0^\delta f^*(t)\, t^{1/p-1}\, dt \leqslant \|f\|_{L^\infty}\;\; \delta^{1/p}$$

Por lo tanto

$$(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon) \leqslant \liminf_{p\longrightarrow\infty} \|f\|_{L_{p,1}} \leqslant \limsup_{p\longrightarrow\infty} \|f\|_{L_{p,1}} \leqslant \|f\|_{L^\infty}$$

y en virtud de la arbitrariedad de ε resulta

$$\lim_{p\longrightarrow\infty} \|f\|_{L_{p,1}} = \|f\|_{L^\infty} \tag{28}$$

Por otra parte, $f^{**}(t)\, t^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^1}\, t^{1/p-1}$; luego podemos elegir $M > 0$ tal que $f^{**}(t)\, t^{1/p} \leqslant f^{**}(1)$ si $t > M$ y $p > 2$. Por lo tanto

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup_{0 < t \leqslant M} f^{**}(t)\, t^{1/p} \leqslant \|f\|_{L^\infty} M^{1/p}$$

de donde

$$\limsup_{p \to \infty} \| f \|_{L_{p,\infty}} \leqslant \| f \|_{L^\infty}$$

Si $\varepsilon > 0$, $f^{**}(t)\, t^{1/p}$ tiende uniformemente a $f^{**}(t)$ para $\varepsilon \leqslant t \leqslant$ $\leqslant M$ cuando $p \to \infty$; luego

$$\liminf_{p \to \infty} \| f \|_{L_{p,\infty}} \geqslant \lim_{p \to \infty} \sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant M} f^{**}(t)\, t^{1/p} = \sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant M} f^{**}(t) = f^{**}(\varepsilon)$$

Por lo tanto

$$\liminf_{p \to \infty} \| f \|_{L_{p,\infty}} \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} f^{**}(\varepsilon) = \| f \|_{L^\infty}$$

Este resultado y el anterior prueban que

$$\lim_{p \to \infty} \| f \|_{L_{p,\infty}} = \| f \|_{L^\infty} \qquad (29)$$

Como antes, se deduce de (28) y (29) que $\| f \|_{L_{pq}} \to \| f \|_{L^\infty}$ si $p \to \infty$.

------

§ 5 . - DUALIDAD EN ESPACIOS DE LORENTZ

LEMA 16

Si la medida μ es no atómica y $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, entonces

$$I_2(f, p, q) = \sup_{g} \left| \int_R f(x)\, g(x)\, d\mu \right|$$

donde g varía sobre el conjunto de las funciones μ-medibles tales que

$$g^*(t) = \int_t^\infty \frac{h(s)}{s}\, ds$$

con

$$\left\{ \int_0^\infty \left[h(t)\, t^{1/p'} \right]^{q'} \frac{dt}{t} \right\}^{1/q'} \leqslant 1$$

Demostración

1) Para una tal g tenemos

$$\left| \int_R f g\, d\mu \right| \leqslant \int_0^\infty f^* g^*\, dt = \int_0^\infty f^*(t) \int_t^\infty \frac{h(s)}{s}\, ds\, dt = \int_0^\infty \frac{h(s)}{s}\, ds \int_0^s f^*(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty h(s)\, f^{**}(s)\, ds \leqslant \left\{ \int_0^\infty \left[f^{**}(s)\, s^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} \left\{ \int_0^\infty \left[h(s)\, s^{1/p'} \right]^{q'} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant I_2(f, p, q)$$

2) Elegimos $h(s)$ tal que

$$h(s)\, s^{1/p'} = \left[f^{**}(s)\, s^{1/p} \right]^{q-1} \alpha^{1-q}$$

en $0 < a \leqslant s \leqslant b$, donde

$$\alpha^q = \int_a^b \left[f^{**}(s)\, s^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s}$$

y $h(s) = 0$ fuera de $[a, b]$.

Ahora elegimos g (ver Teorema 2, § 3) de modo que

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| = \int_0^{\infty} f^* g^* \, dt = \int_0^{\infty} h(s) \, f^{**}(s) \, ds =$$

$$= \left\{ \int_a^b \left[f^{**}(s) \, s^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\} \alpha^{1-q} = \left\{ \int_a^b \left[f^{**}(s) \, s^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q}$$

Además, para esta función $h(s)$ tenemos

$$\left\{ \int_a^{\infty} \left[h(s) \, s^{1/p'} \right]^{q'} \frac{ds}{s} \right\}^{1/q'} = \alpha^{1-q} \left\{ \int_a^b \left[f^{**}(s) \, s^{1/p} \right]^q \frac{ds}{s} \right\}^{1/q} = 1$$

Como a y b son arbitrarios, resulta

$$I_2(f, p, q) = \sup_g \left| \int_R f g \, d\mu \right|$$

LEMA 17

Si la medida es no atómica, $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$, entonces

$$q^{-1/q} q'^{-1/q'} \| f \|_{L_{pq}} \leqslant \sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| : \| g \|_{L_{p'q'}} = 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant p p' q^{-1/q} q'^{-1/q'} \| f \|_{L_{pq}} \qquad (30)$$

Demostración

Si

$$g^*(t) = \int_t^{\infty} \frac{h(s)}{s} \, ds$$

entonces

$$g^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \int_r^{\infty} \frac{h(s)}{s} \, ds \, dr = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{h(s)}{s} \int_0^s dr \, ds + \frac{1}{t} \int_t^{\infty} \frac{h(s)}{s} \int_0^t dr \, ds =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t h(s) \, ds + \int_t^{\infty} \frac{h(s)}{s} \, ds$$

Si

$$\left\{ \int_0^{\infty} h(t)^{q'} \, t^{q'/p'-1} \, dt \right\}^{1/q'} \leqslant 1 \tag{31}$$

obtenemos, utilizando el Lema 14

$$\|g\|_{L_{p'q'}} = \left\{ \frac{q'}{pp'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t} \int_0^t h(s)\, ds + \int_t^{\infty} \frac{h(s)}{s}\, ds \right]^{q'} t^{q'/p'-1}\, dt \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \frac{q'}{pp'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t} \int_0^t h(s)\, ds \right]^{q'} t^{q'/p'-1}\, dt \right\}^{1/q'} + \left\{ \frac{q'}{pp'} \int_0^{\infty} \left[\int_t^{\infty} \frac{h(s)}{s}\, ds \right]^{q'} t^{q'/p'-1}\, dt \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant \; p \left\{ \frac{q'}{pp'} \int_0^{\infty} h(t)^{q'} \, t^{q'/p'-1}\, dt \right\}^{1/q'} + p' \left\{ \frac{q'}{pp'} \int_0^{\infty} h(t)^{q'}\, t^{q'/p'-1}\, dt \right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$\leqslant (p+p') \left(\frac{q'}{pp'} \right)^{1/q'} = pp' \left(\frac{q'}{pp'} \right)^{1/q'} = (pp')^{1/q} \, q'^{1/q'}$$

Por consiguiente, el conjunto de las funciones $g(x)$ cuya reordenada proviene de una $h(s)$ que verifica (31) está contenido en el conjunto de las $g(x)$ tales que $\|g\|_{L_{p'q'}} \leqslant (pp')^{1/q} \, q'^{1/q'}$. Luego se deduce del Lema 15 que

$$I_2(f, p, q) \leqslant \sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| \; : \; \|g\|_{L_{p'q'}} \leqslant (pp')^{1/q} \, q'^{1/q'} \right\} =$$

$$= (pp')^{1/q} \, q'^{1/q'} \sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| \; : \; \|g\|_{L_{p'q'}} = 1 \right\}$$

de donde resulta inmediatamente la primera desigualdad de (30) .

Por otra parte

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| \leqslant \int_0^{\infty} f^*(t) \, g^*(t) \, dt \leqslant \int_0^{\infty} f^{**}(t) \, g^{**}(t) \, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} f^{**}(t) \, t^{1/p} \, g^{**}(t) \, t^{1/p'} \frac{dt}{t} \leqslant I_2(f, p, q) \, I_2(g, p', q') =$$

$$= pp' \, q^{-1/q} \, q'^{-1/q'} \, \|f\|_{L_{pq}} \, \|g\|_{L_{p'q'}} \, ,$$

lo cual prueba la segunda desigualdad.

LEMA 18

Si la medida es no atómica, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, entonces

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| \; : \; \|g\|_{L_{p',1}} \leqslant 1 \right\} , \qquad (32)$$

$$\|f\|_{L_{p,1}} = \sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| \; : \; \|g\|_{L_{p',\infty}} \leqslant 1 \right\} . \qquad (33)$$

Demostración

Para $p = 1$ ó $p = \infty$ el resultado es bien conocido. Si $f \in L_{p,\infty}$ y $g(x) = \chi_A(x)$, $\mu(A) = K$, entonces

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| \leqslant \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt = \int_0^k f^*(t) \, dt =$$

$$= K^{1/p'} K^{1/p} f^{**}(K) \leqslant \|f\|_{L_{p,\infty}} \|g\|_{L_{p',1}}$$

Si g es simple no negativa, g puede ser expresada como $g(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, g_i(x)$ donde $g_i = \chi_{B_i}$, $B_1 \subsetneq \ldots \subsetneq B_n$, de modo que sea $g^*(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, g_i^*(t)$, $\|g\|_{L_{p',1}} = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \|g_i\|_{L_{p',1}}$. Luego

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| \leqslant \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^\infty f^*(t) \, g_i^*(t) \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_{p,\infty}} \sum_{i=1}^{n} c_i \, \|g_i\|_{L_{p',1}} = \|f\|_{L_{p,\infty}} \|g\|_{L_{p',1}}$$

Eligiendo funciones $g^{(n)}$ simples tales que $g^{(n)*}(t) \nearrow g^*(t)$ se tiene, en geral

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| \leqslant \|f\|_{L_{p,\infty}} \|g\|_{L_{p',1}} . \qquad (34)$$

Luego

$$\sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| : \|g\|_{L_{p',1}} \leqslant 1 \right\} \leqslant \|f\|_{L_{p,\infty}}$$

cambiando en (34) f por g y p por p' , se obtiene análogamente

$$\sup \left\{ \left| \int_R f g \, d\mu \right| : \|g\|_{L_{p',\infty}} \leqslant 1 \right\} \leqslant \|f\|_{L_{p,1}}$$

Si $f \in L_{p,\infty}$, sea $g(x)$ tal que $g^*(t) = K^{-1/p'}$ si $0 < t < K$, $g^*(t) =$ $= 0$ si $t \leqslant K$, y

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| = \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt = K^{-1/p'} \int_0^k f^*(t) \, dt = K^{1/p} f^{**}(K)$$

Para estas g se tiene

$$\|g\|_{L_{p',1}} = \frac{1}{p'} K^{-1/p'} \int_0^k t^{1/p' - 1} \, dt = 1$$

Eligiendo K_n tal que $K_n^{1/p} f^{**}(K_n) \longrightarrow \|f\|_{L_{p,\infty}}$, vemos que se verifica (32) .

Si $f \in L_{p,1}$, sea g tal que $g^*(t) = \frac{1}{p} t^{1/p - 1}$ y

$$\left| \int_R f g \, d\mu \right| = \int_0^\infty f^*(t) \, g^*(t) \, dt = \frac{1}{p} \int_0^\infty f^*(t) \, t^{1/p - 1} \, dt = \|f\|_{L_{p,1}}$$

Para esta g tenemos

$$g^{**}(t) = \frac{1}{pt}\int_0^t s^{1/p-1}\, ds = t^{-1/p'}$$

de donde

$$\|g\|_{L_{p',\infty}} = \sup g^{**}(t)\, t^{1/p'} = 1$$

y esto prueba (33) .

OBSERVACION

Las desigualdades (30) y las igualdades (32) y (33) siguen siendo válidas si se impone a las funciones $g(x)$ la condición adicional de ser simples, pues podemos suponer que f y g son no negativas, y entonces nuestra afirmación es consecuencia obvia del Teorema de Beppo Levi.

TEOREMA 7

Sea $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Si la medida μ es no atómica y $f \in L_{pq}$, $g \in L_{p'q'}$, la forma bilineal

$$h_g(f) = \int_R f(x)\, g(x)\, d\mu \qquad (35)$$

establece un homeomorfismo entre $L_{p'q'}$ y el dual topológico $L_{pq}{}^*$ de L_{pq} tal que

$$q^{-1/q}\, q'^{-1/q'}\, \|g\|_{L_{p'q'}} \leqslant \|h_g\|_{L_{pq}{}^*} \leqslant pp'\, q^{-1/q}\, q'^{-1/q'}\, \|g\|_{L_{p'q'}}$$

si $1 < q < \infty$, y

$$\|h_g\|_{L_{p,1}{}^*} = \|g\|_{L_{p',\infty}}$$

$$\|h_g\|_{L_{p,\infty}*} = \|g\|_{L_{p',1}}$$

Demostración

Si $g \in L_{p'q'}$, se deduce de los Lemas 17 y 18 que (35) define una función lineal continua sobre L_{pq} y que se verifica el resto de la tesis. Por lo tanto, el teorema se reduce a probar que para toda $h \in L_{pq}*$ existe una $g \in L_{p'q'}$ tal que $h = h_g$.

Sea h una funcional lineal continua en L_{pq} con norma $\|h\|$ y $f = \chi_A$ la función característica de un conjunto medible A con $\mu(A) = K < \infty$. Entonces

$$|h(f)| \leqslant \|h\| \|f\|_{L_{pq}} = \|h\| K^{1/p}$$

Luego $\nu(A) = h(\chi_A)$ es una función numerablemente aditiva de conjunto y $\nu(A)$ es completamente continua con respecto a μ. Por el Teorema de Radon-Nikodym existe, entonces, una función localmente μ-integrable $g(x)$ tal que

$$h(\chi_A) = \int_A g\,d\mu = \int_R \chi_A(x)\,g(x)\,d\mu .$$

Si f es una función simple, se deduce por linealidad que

$$h(f) = \int_R f(x)\,g(x)\,d\mu , \tag{36}$$

de donde

$$\left|\int_R f(x)\,g(x)\,d\mu\right| \leqslant \|h\|$$

si f es simple y $\|f\|_{L_{pq}} \leqslant 1$. Entonces se deduce de los Lemas 17 y 18 que $g \in L_{p'q'}$ y que (36) vale para toda $f \in L_{pq}$, con lo cual se completa la demostración del teorema.

Utilizando el Lema 11 no es difícil probar que la condición de que μ sea no atómica puede ser eliminada.

CAPITULO III

INTERPOLADORES L_{pq} Y EL TEOREMA DE MARCINKIEWICZ - CALDERON

§ 1 . - INTERPOLADORES L_{pq}

El Teorema 3 del Cap. II sugiere la siguiente generalización de la función promediada.

DEFINICION

> Si (A_1 , A_2) es un par de interpolación y $u \in A_1 + A_2$, definimos la función promediada de u (con respecto a (A_1 , A_2)) como $u^{**}_A(t) = \|u\|_{tA_1 + A_2}$, $0 < t < \infty$.

Es fácil ver que $\|u\|_{tA_1 + A_2}$ es una norma equivalente a $\|u\|_{A_1 + A_2}$ cualquiera sea $t > 0$; luego $u^{**}_A(t)$ será finita para todo $t > 0$ si y sólo si $u \in A_1 + A_2$. Además se tiene las siguientes propiedades.

1) $u^{**}_A(t)$ es no creciente. En efecto, si $t_1 < t_2$ y $v \in A_1$, $w \in A_2$, $v + w = u$, entonces

$$u^{**}_A(t_2) \leqslant \frac{\|v\|_{A_1}}{t_2} + \|w\|_{A_2} \leqslant \frac{\|v\|_{A_1}}{t_1} + \|w\|_{A_2} ;$$

tomando ínfimo en el último miembro obtenemos $u_A^{**}(t_2) \leqslant u_A^{**}(t_1)$.

2) $t\, u_A^{**}(t)$ es no decreciente. Con la misma notación que antes

$$t_1 u_A^{**}(t_1) \leqslant t_1\left(\frac{\|v\|_{A_1}}{t} + \|w\|_{A_2}\right) = \|v\|_{A_1} + t_1\|w\|_{A_2} \leqslant \|v\|_{A_1} + t_2\|w\|_{A_2} =$$

$$= t_2\left(\frac{\|v\|_{A_1}}{t} + \|w\|_{A_2}\right)$$

de donde $t_1 u_A^{**}(t_1) \leqslant t_2 u_A^{**}(t_2)$.

3) $u_A^{**}(t)$ es continua. En efecto, sea $h > 0$; se deduce de 1) y 2) que

$$u_A^{**}(t+h) \leqslant u_A^{**}(t) \leqslant \frac{t+h}{t} u_A^{**}(t+h)$$

luego

$$-\frac{1}{t} u_A^{**}(t+h) \leqslant \frac{u_A^{**}(t+h) - u_A^{**}(t)}{h} \leqslant 0$$

4) Si $u \in A_2$, entonces $u_A^{**}(t) \leqslant \|u\|_{A_2}$ para todo $t > 0$; si $u \in A_1$, entonces $t\, u_A^{**}(t) \leqslant \|u\|_{A_1}$ para todo $t > 0$. En efecto, si $u \in A_2$, entonces $u = 0 + u$, $0 \in A_1$, $u \in A_2$, de donde

$$u_A^{**}(t) \leqslant \frac{\|0\|_{A_1}}{t} + \|u\|_{A_2} = \|u\|_{A_2}$$

Análogamente, si $u \in A_1$,

$$t\, u^{**}(t) \leqslant \|u\|_{A_1} + t\|0\|_{A_2} = \|u\|_{A_1}$$

5) Definamos $\|u\|_{A_2} = \infty$ si $u \in A_1 + A_2$, $u \notin A_2$. Entonces la igualdad

$$\sup_{t>0} u_A^{**}(t) = \lim_{t \to 0} u_A^{**}(t) = \|u\|_{A_2} \qquad (1)$$

es válida para todo $u \in A_1 + A_2$ si y sólo si la esfera unitaria de A_2 es cerrada en $A_1 + A_2$.

En efecto, supongamos que se cumple (1) y sea u_n una sucesión de elementos de A_2 que converge a u en $A_1 + A_2$ y tal que $\|u_n\|_{A_2} \leqslant 1$. Entonces $u_n \longrightarrow u$ en $tA_1 + A_2$, y por lo tanto $(u_n)^{**}_A(t) \longrightarrow u^{**}_A(t)$ para todo $t > 0$ Por (1) $(u_n)^{**}_A(t) \leqslant 1$ para todo n , de donde $u^{**}_A(t) \leqslant 1$. Luego $u \in A_2$ y $\|u\|_{A_2} \leqslant 1$, lo cual prueba que la esfera unitaria de A_2 es cerrada en $A_1 + A_2$.

Recíprocamente, supongamos que la esfera unitaria de A_2 es cerrada en $A_1 + A_2$. Si $u^{**}_A(t)$ no es acotada, entonces la igualdad (1) se deduce de 4) . Si $u^{**}_A(t) \leqslant K$, sea $v_n \in A_1$, $w_n \in A_2$, $u = v_n + w_n$, $u^{**}_A(1/n) + 1/n \geqslant$ $\geqslant n\|v_n\|_{A_1} + \|w_n\|_{A_2}$; entonces $\|u - w_n\|_{A_1 + A_2} \leqslant \|u - w_n\|_{A_1} =$ $= \|v_n\|_{A_1} \leqslant (K+1)/n \longrightarrow 0$. Por lo tanto $w_n \longrightarrow u$ en $A_1 + A_2$, y como $\|w_n\|_{A_2} \leqslant K+1$, resulta que $u \in A_2$ y

$$\lim_{t \to 0} u^{**}_A(t) \geqslant \lim\sup \|w_n\|_{A_2} \geqslant \|u\|_{A_2}$$

6) Definamos $\|u\|_{A_1} = \infty$ si $u \in A_1 + A_2$, $u \notin A_1$. Entonces

$$\sup_{t > 0} t u^{**}_A(t) = \lim_{t \to \infty} t u^{**}_A(t) = \|u\|_{A_1}$$

para todo $u \in A_1 + A_2$ si y sólo si la esfera unitaria de A_1 es cerrada en $A_1 + A_2$.

La demostración se reduce al caso anterior teniendo en cuenta la propiedad 7) .

7) Sea (A_1 , A_2) un par de interpolación, y pongamos $B_1 = A_2$, $B_2 = A_1$ Entonces

$$u^{**}_B(t) = \frac{1}{t} u^{**}_A(1/t)$$

En efecto, sea $v \in B_1$, $w \in B_2$, $v+w = u$. Entonces

$$u^{**}_B(t) \leqslant \frac{\|v\|_{B_1}}{t} + \|w\|_{B_2} = \frac{1}{t}(t\|w\|_{A_1} + \|v\|_{A_2})$$

y tomando ínfimo en el tercer miembro resulta

$$u^{**}_B(t) \leqslant \frac{1}{t} u^{**}_A(1/t)$$

Si repetimos el razonamiento cambiando (A_1, A_2) por (B_1, B_2) y t por $1/t$, obtenemos la desigualdad contraria.

8) $u^{**}_A(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ para todo $u \in A_1 + A_2$ si y sólo si $A_1 \cap A_2$ es denso en A_2.

En efecto, supongamos que $A_1 \cap A_2$ es denso en A_2. Dado $u \in A_1 + A_2$, $u = v + w$, $v \in A_1$, $w \in A_2$, podemos elegir $z \in A_1 \cap A_2$ tal que $\|w - z\|_{A_2} < \varepsilon/2$, donde ε es un número positivo arbitrario. Entonces $u = (v + z) + (w - z)$ y

$$u^{**}_A(t) \leqslant \|v + z\|_{A_1}/t + \|w - z\|_{A_2} < \varepsilon$$

si $t > 2\|v + z\|_{A_1}/\varepsilon$.

Si $A_1 \cap A_2$ no es denso en A_2, sea $w \in A_2$ tal que $\|w - z\|_{A_2} > \delta > 0$ si $z \in A_1 \cap A_2$. Entonces

$$w^{**}_A(t) = \inf_{z \in A_1 \cap A_2} \left\{ \|z\|_{A_1}/t + \|w - z\|_{A_2} \right\} > \delta$$

para todo $t > 0$.

9) $tu^{**}_A(t) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow 0$ para todo $u \in A_1 + A_2$ si y sólo si $A_1 \cap A_2$

es denso en A_1. La demostración se reduce a la anterior utilizando 7).

10) Supongamos que $A_1 \cap A_2$ en denso en A_1. Si $\delta > 0$ definamos

$$g(\delta, t) = \inf\left\{\|w\|_{A_2} : \|u - w\|_{A_1}/t + \|w\|_{A_2} \leqslant u_A^{**}(t) + \delta\right\},$$

$$u_A^*(t) = \lim_{\delta \to 0} g(\delta, t)$$

Entonces

a) $u_A^*(t)$ es no creciente y continua a derecha;

b) $u_A^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t u_A^*(s)\,ds$.

Comenzaremos probando que $tu_A^{**}(t)$ es una función cóncava, o sea que

$$(1-\alpha)t_0 u_A^{**}(t_0) + \alpha t_1 u_A^{**}(t_1) \leqslant \left[(1-\alpha)t_0 + \alpha t_1\right] u_A^{**}((1-\alpha)t_0 + \alpha t_1)$$

para todo α con $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Si $v \in A_1$, $w \in A_2$, $u = v + w$, es evidente que

$$(1-\alpha)(\|v\|_{A_1} + t_0\|w\|_{A_2}) + \alpha(\|v\|_{A_1} + t_1\|w\|_{A_2}) =$$

$$= \|v\|_{A_1} + ((1-\alpha)t_0 + \alpha t_1)\|w\|_{A_2}$$

Luego

$$(1-\alpha)t_0 u_A^{**}(t_0) + \alpha t_1 u_A^{**}(t_1) \leqslant \|v\|_{A_1} + ((1-\alpha)t_0 + \alpha t_1)\|w\|_{A_2}$$

y tomando ínfimo en el segundo miembro se obtiene la concavidad de $tu_A^{**}(t)$. Por ser $tu_A^{**}(t)$ cóncava, no decreciente y nula en el origen, existe una única función $\varphi(t)$ no creciente, no negativa y continua a derecha tal que

$$t u_A^{**}(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds$$

Sólo queda por ver que $\varphi(t) = u_A^{*}(t)$. Sea $v \in A_1$, $w \in A_2$, $v + w = u$, y $h > 0$; entonces

$$\frac{1}{t}\Big[(\|v\|_{A_1} + (t+h)\|w\|_{A_2}) - (\|v\|_{A_1} + t\|w\|_{A_2}) \Big] = \|w\|_{A_2}$$

Elijamos v y w de modo que

$$\|v\|_{A_1} + t\|w\|_{A_2} \leqslant t u_A^{**}(t) + \mathcal{E} h$$

$$\|w\|_{A_2} \leqslant g(\mathcal{E} h/t, t) + \mathcal{E} .$$

Entonces tendremos

$$\frac{1}{h}\Big[(t+h)\, u_A^{**}(t+h) - t u_A^{**}(t) \Big] \leqslant g(\mathcal{E} h/t, t) + 2\mathcal{E}$$

Haciendo tender h a cero resulta $\varphi(t) \leqslant u_A^{*}(t) + 2\mathcal{E}$ para todo $\mathcal{E} > 0$, de donde $\varphi(t) \leqslant u_A^{*}(t)$.

Elijamos ahora v y w de modo que

$$\|v\|_{A_1} + (t+h)\|w\|_{A_2} \leqslant (t+h)\, u_A^{**}(t+h) + \mathcal{E} h$$

entonces

$$\frac{1}{h}\Big[(t+h)\, u_A^{**}(t+h) - t u_A^{**}(t) \Big] \geqslant \|w\|_{A_2} - \mathcal{E} \geqslant g(\mathcal{E}h/t,\ t+h) - \mathcal{E}$$

Probaremos luego que

$$g(\delta, t+h) \geqslant g(2\delta, t) \tag{*}$$

si h es bastante pequeño. Utilizando este resultado, obtenemos

$$\frac{1}{h}\left[(t+h)\, u_A^{**}(t+h) - t u_A^{**}(t)\right] \geqslant g(2\varepsilon h/t, t) - \varepsilon,$$

de donde resulta, haciendo tender h a cero, que $\varphi(t) \geqslant u_A^*(t) - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$; por lo tanto, $\varphi(t) \geqslant u_A^*(t)$.

Para probar $(*)$, sea w tal que

$$\| u - w \|_{A_1}/(t+h) + \| w \|_{A_2} \leqslant u_A^{**}(t+h) + \delta .$$

Para esta w tenemos

$$\| u - w \|_{A_1}/t = \| u - w \|_{A_1}/(t+h) + \| u - w \|_{A_1}/(t+h)\,\frac{h}{t} \leqslant$$

$$\leqslant \| u - w \|_{A_1}/(t+h) + (u_A^{**}(t) + \delta)\,\frac{h}{t}$$

Poniendo $h_0 = t\,\delta/(u_A^{**}(t) + \delta)$ tendremos, para $h < h_0$,

$$\| u - w \|_{A_1}/t \leqslant \| u - w \|_{A_1}/(t+h) + \delta\,;$$

por lo tanto

$$\| u - w \|_{A_1}/t + \| w \|_{A_2} \leqslant \| u - w \|_{A_1}/(t+h) + \| w \|_{A_2} + \delta \leqslant u_A^{**}(t) + 2\delta$$

Hemos probado que

$$\| u - w \|_{A_1}/(t+h) + \| w \|_{A_2} \leqslant u_A^{**}(t+h) + \delta$$

implica

$$\| u - w \|_{A_1}/t + \| w \|_{A_2} \leqslant u^{**}_A(t) + 2\delta$$

si $h < h_0$, de donde resulta inmediatamente (*) .

Sea M el conjunto de las funciones $f(t)$, $0 < t < \infty$, no negativas, medibles Lebesgue y finitas pp. Llamaremos funcional admisible a una funcional no negativa $\Phi(f)$, $f \in M$, tal que :

a) $\Phi(af) = a\Phi(f)$ si $a > 0$;

b) $\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$;

c) $\Phi(f) = 0$ si y sólo si $f(t) = 0$ pp. ;

d) si $h(t) = \min(1, 1/t)$, entonces $\Phi(h) < \infty$;

e) si $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$, entonces $\Phi(f) \leqslant \Phi(g)$;

f) si $f \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, entonces $\Phi(f) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(f_n)$;

g) si $\Phi(f_n) \longrightarrow 0$, entonces $f_n(t) \longrightarrow 0$ en medida.

TEOREMA 1

Sea (X_1, X_2) un par de interpolación y Φ una funcional admisible. Si definimos $\Phi(X_1, X_2)$ como el espacio $\{u \in X_1 + X_2 : \Phi(u^{**}_X) < \infty\}$, con la norma $\|u\|_{\Phi(X_1, X_2)} = \Phi(u^{**}_X)$, entonces $\Phi(X_1, X_2)$ es un interpolador.

Demostración

Resulta inmediatamente de a), b), c) y de las propiedades de $u^{**}_X(t)$ que $\Phi(X_1, X_2)$ es un espacio lineal y que $\Phi(u^{**}_X)$ es una norma.

Observemos que si $(u_n)^{**}_X(t)$ tiende a cero en medida, por ser las promediadas no crecientes tendremos $(u_n)^{**}_X(t) \longrightarrow 0$ para todo $t \longrightarrow 0$, y en particular para $t = 1$. Por lo tanto se deduce de g) que si $u_n \longrightarrow 0$ en $\bar{\Phi}(X_1, X_2)$, entonces $u_n \longrightarrow 0$ en $X_1 + X_2$, lo cual prueba que $\bar{\Phi}(X_1, X_2)$ está continuamente contenido en $X_1 + X_2$.

Si $u \in X_1 \cap X_2$ tenemos, por la propiedad 4) de la promediada, $u_X^{**}(t) \leqslant \leqslant \|u\|_{X_1 \cap X_2} \min(1, 1/t)$. Luego d) implica que $X_1 \cap X_2$ está contínuamente contenido en $\bar{\Phi}(X_1, X_2)$.

Sea $\{u_n\}$ una sucesión fundamental en $\bar{\Phi}(X_1, X_2)$. Pasando a una subsucesión en caso necesario, podemos suponer que $\|u_n - u_{n+1}\|_{\bar{\Phi}(X_1 X_2)} < 1/2^n$. La sucesión $\{u_n\}$ es también fundamental en $X_1 + X_2$; por lo tanto existe $u \in X_1 + X_2$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $X_1 + X_2$, y también en $tX_1 + X_2$ para todo $t > 0$. Luego

$$u - u_j = \sum_{n=j}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$$

en el sentido de la convergencia en $tX_1 + X_2$, de donde

$$(u - u_j)_X^{**}(t) \leqslant \sum_{n=j}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)_X^{**}(t)$$

Resulta entonces de f) que

$$\|u - u_j\|_{\bar{\Phi}(X_1, X_2)} \leqslant \sum_{n=j}^{\infty} \|u_{n+1} - u_n\|_{\bar{\Phi}(X_1, X_2)} \leqslant 1/2^{j-1}$$

Por lo tanto $u \in \bar{\Phi}(X_1, X_2)$ y $u_n \longrightarrow u$ en $\bar{\Phi}(X_1, X_2)$, lo cual prueba que este espacio es completo.

Sea (Y_1, Y_2) otro par de interpolación y sea $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Si $u \in \bar{\Phi}(X_1, X_2)$, sea $v \in X_1$, $w \in X_2$, $u = v + w$. Entonces

$$(Tu)_Y^{**}(t) = \|Tu\|_{tY_1 + Y_2} \leqslant \frac{1}{t}\|Tv\|_{Y_1} + \|Tw\|_{Y_2} \leqslant \frac{1}{t}\|v\|_{X_1} + \|w\|_{X_2}$$

y tomando ínfimo en el tercer miembro

$$(Tu)^{**}_{Y}(t) \leqslant u^{**}_{X}(t)$$

Por e) tendremos, entonces

$$\|Tu\|_{\Phi(Y_1, Y_2)} \leqslant \|u\|_{\Phi(X_1, X_2)}$$

esto prueba la propiedad de interpolación y completa la demostración del teorema.

Es fácil verificar que

$$\Phi(f) = \left\{ \frac{q}{pp'} \int_0^\infty f(t)^q \, t^{q/p-1} \, dt \right\}^{1/q} \quad , \quad 1 < p < \infty \quad , \quad 1 \leqslant q < \infty \; ,$$

$$\Phi(f) = \sup_{t > 0} f(t) \, t^{1/p} \quad , \quad 1 \leqslant p < \infty \; ,$$

$$\Phi(f) = \sup_{t > 0} f(t) \; ,$$

son funcionales admisibles; por lo tanto el teorema anterior nos permite definir, en términos de estas funcionales aplicadas a $u^{**}_{X}(t)$ los $L_{p,q}(X_1, X_2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, que llamaremos interpoladores tipo Lorentz. En particular, $L_{pq}(L^1, L^\infty)$ coincide con el espacio de Lorentz L_{pq} definido en el Capítulo II y el Teorema 1 prueba que estos espacios son intermedios entre L^1 y L^∞

------

§ 2 . - TIPO DEBIL Y TIPO DEBIL RESTRINGIDO

Diremos que un operador lineal T de $L^1 + L^\infty$ en $L^1 + L^\infty$ es de tipo débil (p, q) si existe $M > 0$ tal que

$$D_{Tf}(\lambda) \leqslant \left[\frac{M \| f \|_{L^p}}{\lambda} \right]^q \tag{2}$$

para toda $f \in L^p$; llamaremos norma débil (p, q) al ínfimo de las constantes M tales que se verifica (2) . Diremos que T es de tipo débil (p, ∞) si y sólo si T transforma contínuamente L^p en L^∞ ; la norma débil será en este caso la norma ordinaria.

Teniendo en cuenta la desigualdad de Tchebicheff (Cap. II , § 1 , Lema 4) es fácil ver que si T transforma contínuamente L^p en L^q (es decir, si T es de tipo (p, q)) con norma $\| T \|$, entonces T es de tipo débil (p, q) con norma débil $M \leqslant \| T \|$.

La desigualdad (2) puede ser escrita

$$\lambda D_{Tf}(\lambda)^{1/q} \leqslant M \| f \|_{L^p}$$

y como el segundo miembro es independiente de λ , equivale a

$$\sup_{\lambda > 0} \left(\lambda D_{Tf}(\lambda)^{1/q} \right) \leqslant M \| f \|_{L^p} \tag{3}$$

Veremos ahora cómo se expresa la noción de tipo débil en términos de los espacios de Lorentz.

TEOREMA 2

Un operador lineal T de $L^1 + L^\infty$ en $L^1 + L^\infty$ es de tipo débil (p, q) , $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, si y sólo si T transforma contínuamente L^p en $L_{q,\infty}$. Si M es la norma débil (p, q) de T y N es la norma de T como operador de L^p en $L_{q,\infty}$, se tiene

$$M \leqslant N \leqslant q' M \qquad (4)$$

<u>Demostración</u>

Si $q = \infty$, en virtud de las definiciones de tipo débil (p, ∞) y de $L_{\infty, \infty}$, no hay nada que probar. Si $q < \infty$, veremos que el teorema se deduce de la igualdad

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda D_g(\lambda)^{1/q} = \sup_{t > 0} g^*(t)\, t^{1/q} \qquad (5)$$

válida para toda $g \in L^1 + L^\infty$, como probaremos luego.

En efecto, suponiendo (5), la (3) equivale a

$$I_1(Tf, q, \infty) \leqslant M \|f\|_{L^p}$$

de donde

$$I_2(Tf, q, \infty) = \|Tf\|_{L_{q,\infty}} \leqslant q' M \|f\|_{L^p}$$

o sea que T transforma contínuamente L^p en $L_{q,\infty}$ y $N \leqslant q'M$.

Recíprocamente, si $\|Tf\|_{L_{q,\infty}} \leqslant N \|f\|_{L^p}$, entonces

$$\sup_{\lambda > 0} \lambda D_{Tf}(\lambda)^{1/q} = I_1(Tf, q, \infty) \leqslant \|Tf\|_{L_{q,\infty}} \leqslant N \|f\|_{L^p}$$

y vale (3) con $M \leqslant N$.

Probaremos ahora la igualdad (5). Sea $g \in L^1 + L^\infty$ y $\lambda = g^*(t)$; entonces, por el Lema 6, Cap. II, $D_g(\lambda) \leqslant t$, de donde

$$\lambda D_g(\lambda)^{1/q} \leqslant g^*(t)\, t^{1/q}$$

y por lo tanto

$$\lambda D_g(\lambda)^{1/q} \leqslant \sup_{t>0} g^*(t)\, t^{1/q} \tag{6}$$

La desigualdad (6) ha sido probada para los λ de la forma $\lambda = g^*(t)$ Si λ no pertenece al rango de g^*, entonces $\lambda > g^*(0)$ o bien existe $t > 0$ tal que $g^*(t-0) \geqslant \lambda \geqslant g^*(t)$. En el primer caso será $D_g(\lambda) = D_{g^*}(\lambda) = 0$, y por lo tanto la (6) sigue siendo válida. En el segundo caso se tiene $D_g(\lambda) \leqslant t$; luego

$$\lim_{s \nearrow t} g^*(s)\, s^{1/q} = g^*(t-0)\, t^{1/q} \geqslant \lambda D_g(\lambda)^{1/q}$$

por consiguiente (6) vale para todo $\lambda > 0$, o sea

$$\sup_{\lambda>0} \lambda D_g(\lambda)^{1/q} \leqslant \sup_{t>0} g^*(t)\, t^{1/q} \tag{7}$$

Por otra parte, si $t = D_g(\lambda)$, se tiene $f^*(t) \leqslant \lambda$, de donde

$$f^*(t)\, t^{1/q} \leqslant \lambda D_g(\lambda)^{1/q}$$

y por lo tanto

$$f^*(t)\, t^{1/q} \leqslant \sup_{\lambda>0} \lambda D_g(\lambda)^{1/q} \tag{8}$$

Si t no pertenece al rango de $D_g(\lambda)$, entonces $t > D_g(0)$, en cuyo caso $f^*(t) = 0$, o bien existe $\lambda > 0$ tal que $D_g(\lambda - 0) \geqslant t > D_g(\lambda)$; en este último caso tenemos $f^*(t) \leqslant \lambda$, de donde

$$\lim_{\sigma \nearrow \lambda} \sigma D_g(\sigma)^{1/q} = \lambda D_g(\lambda - 0)^{1/q} \geqslant f^*(t)\, t^{1/q}$$

y la desigualdad (8) vale para todo $t > 0$, con lo cual queda probado el teorema.

Diremos que un operador lineal T de $L^1 + L^\infty$ en $L^1 + L^\infty$ es de tipo débil restringido (p, q) si se verifica la desigualdad (2) cuando f es la función característica de un conjunto medible. Llamaremos norma débil restringida al ínfimo de las constantes M tales que se verifica (2) para cualquier función característica.

Es obvio que un operador de tipo débil (p, q) es de tipo débil restringido (p, q) con norma débil restringida menor o igual que la norma débil. Teniendo en cuenta que la norma en $L_{q,\infty}$ coincide con la de L^q para funciones características, el Teorema 2 muestra que T es de tipo débil restringido (p, q), $q > 1$, si y sólo si cumple la condición de tipo ordinario $\|Tf\|_{L^q} \leqslant L\, \|f\|_{L^p}$ cuando f es una función característica.

El próximo teorema aclara la relación entre tipo débil y tipo débil restringido y permite expresar a este último concepto en términos independientes de funciones características, posibilitando así una formulación abstracta que lo haga aplicable a situaciones más generales.

TEOREMA 3

Un operador lineal T de $L^1 + L^\infty$ en $L^1 + L^\infty$ es de tipo débil restringido (p, q), $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, si y sólo si T transforma contínuamente $L_{p,1}$ en $L_{q,\infty}$. Si K es la norma débil restringida (p, q) y L es la norma de T como operador de $L_{p,1}$ en $L_{q,\infty}$, entonces

$$K \leqslant L \leqslant q' K$$

Demostración

Si T es de tipo débil restringido (p, q) con norma débil restringida K, entonces, como se vio en la demostración del Teorema 2

$$I_1 (Tg, q, \infty) \leqslant K \|g\|_{L^p} = K \|g\|_{L_{p,1}}$$

si g es una función característica. Luego

$$\|Tg\|_{L_{q,\infty}} = I_2 (Tg, q, \infty) \leqslant q' K \|g\|_{L_{p,1}}$$

Si f es una función simple, podemos expresarla como

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

donde las f_i son funciones características multiplicadas por constantes, de modo que se verifica

$$\|f\|_{L_{p,1}} = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_{p,1}}$$

(ver la demostración del Teorema 4, Cap. II).

Por lo tanto

$$\|f\|_{L_{q,\infty}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_{q,\infty}} \leqslant q' K \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L_{p,1}} = q' K \|f\|_{L_{p,1}}$$

Teniendo en cuenta que las funciones simples son densas en $L_{p,1}$ si $p < \infty$, vemos que T transforma contínuamente $L_{p,1}$ en $L_{q,\infty}$ con norma $L \leqslant q' K$. Si $p = \infty$, se procede análogamente, reemplazando las funciones simples por com binaciones lineales de funciones características de conjuntos medibles de medida no necesariamente finita.

Si T transforma contínuamente $L_{p,1}$ en $L_{q,\infty}$ con norma L, entonces

$$I_1(Tf, q, \infty) \leqslant I_2(Tf, q, \infty) \leqslant L\|f\|_{L_{p,1}}$$

Si g es una función característica, tiene la misma norma en $L_{p,1}$ que en L^p; luego

$$I_1(Tg, q, \infty) \leqslant L\|g\|_{L^p}$$

si g es una función característica, y esta desigualdad, en virtud de (5), prueba que T es de tipo débil restringido (p, q) con norma débil restringida $K \leqslant L$.

------

§ 3. - LA FUNCION PROMEDIADA PARA ALGUNOS PARES DE INTERPOLACION PARTICULARES

Hallaremos en este párrafo las expresiones analíticas de las funciones promediadas con respecto a ciertos pares de espacios de Lorentz, expresiones que utilizaremos más adelante en la demostración del Teorema de Marcinkiewicz - Calderón.

TEOREMA 4

Si $A_1 = L_{p_1,1}$, $A_2 = L_{p_2,1}$, $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$, entonces

$$f^{**}_A(t) = \frac{1}{p_1 t}\int_0^{t^\beta} f^*(s)\, s^{\frac{1}{p_1}-1}\, ds + \frac{1}{p_2}\int_{t^\beta}^{\infty} f^*(s)\, s^{\frac{1}{p_2}-1}\, ds \qquad (9)$$

donde

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \qquad ;$$

si $p_2 = \infty$, entonces

$$f^{**}_A(t) = \frac{1}{p_1 t} \int_0^{t^{p_1}} f^*(s)\, s^{\frac{1}{p_1} - 1}\, ds \tag{10}$$

Demostración

Supongamos que $p_2 < \infty$. Comenzaremos considerando el caso en que f es la función característica de un conjunto medible B de medida K . Como en el Teorema 3 , Cap. II , podemos limitarnos a considerar descomposiciones $f = u + v$ con u y v reales y no negativas. Además podemos suponer que u y v son imples. En efecto, si u , v son no negativas, $u + v = f$, $f^{**}_A(t) + \varepsilon \geqslant \geqslant \frac{1}{t}\|u\|_{L_{p_1,1}} + \|v\|_{L_{p_2,1}}$, sea u_1 simple tal que $0 \leqslant u_1 \leqslant f$, $\|u_1 - u\|_{L_{p_1,1} \cap L_{p_2,1}} \leqslant \min(t\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces $v_1 = f - u_1$ es simple no negativa y $\|v_1 - v\|_{L_{p_1,1} \cap L_{p_2,1}} = \|u - u_1\|_{L_{p_1,1} \cap L_{p_2,1}} \leqslant \varepsilon$.

Luego

$$f^{**}_A(t) + \varepsilon \geqslant \frac{1}{t}\|u - u_1 + u_1\|_{L_{p_1,1}} + \|v - v_1 + v_1\|_{L_{p_2,1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t}\|u_1\|_{L_{p_1,1}} + \|v_1\|_{L_{p_2,1}} - 2\varepsilon$$

de donde

$$f^{**}_A(t) + 3\varepsilon \geqslant \frac{1}{t}\|u_1\|_{L_{p_1,1}} + \|v_1\|_{L_{p_2,1}}$$

Sea, entonces, $u = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{B_k}$, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \dots \geqslant c_n \geqslant 0$, B_k disjuntos , $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, y pongamos $D_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$, $D_0 = \emptyset$, $\mu(D_k) = \beta_k$,

$\bar{v} = \sum_{k=1}^{n} (1 - c_k) \chi_{B_k}$. Entonces

$$u^*(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, \chi_{[\beta_{j-1}, \beta_j)}(t) ,$$

$$v^*(t) = \sum_{j=1}^{n} (1 - c_j) \, \chi_{[k - \beta_j , k - \beta_{j-1})}(t) ,$$

$$\|u\|_{L_{p_1, 1}} = \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} d(s^{1/p_1}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left[\beta_j^{1/p_1} - \beta_{j-1}^{1/p_1} \right] ,$$

$$\|v\|_{L_{p_2, 1}} = \sum_{j=1}^{n} (1 - c_j) \left[(k - \beta_{j-1})^{1/p_2} - (k - \beta_j)^{1/p_2} \right]$$

Supongamos primero que $K^{1/\beta} \leqslant t$. Pongamos

$$\varphi = \varphi(c_1, \ldots\ldots, c_n, t) = \frac{1}{t} \|u\|_{L_{p_1, 1}} + \|v\|_{L_{p_2, 1}}$$

Entonces

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_n} = \frac{1}{t} \left[K^{1/p_1} - \beta_{n-1}^{1/p_1} - t (K - \beta_{n-1})^{1/p_2} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \quad \frac{1}{t} \left[K^{1/p_1} - \beta_{n-1}^{1/p_1} - (k - \beta_{n-1})^{1/p_1} \right] \leqslant 0$$

Por lo tanto, φ no crece si se aumenta c_n hasta c_{n-1} , luego el valor común de c_n y c_{n-1} hasta c_{n-2} , etc. Esto prueba que el ínfimo se alcanza para $u = f$, $v = 0$. En resumen, si $K \leqslant t^{\beta}$ y $f = \chi_B$, $\mu(B) = K$, entonces

$$f_A^{**}(t) = \frac{1}{t} \|f\|_{L_{p_1, 1}} = \frac{1}{t} K^{1/p_1} . \qquad (11)$$

Si $t \geqslant K^{1/\beta}$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = \frac{1}{t}\left\{ \beta_1^{\ 1/p_1} - t\left[K^{1/p_2} - (K - \beta_1)^{1/p_2}\right]\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{t}\left[\beta_1^{\ 1/p_1} - K^{1/p_1} + K^{1/\beta}\ (K - \beta_1)^{1/p_2}\right] \geqslant \frac{1}{t}\left\{\beta_1^{\ 1/p_1} - \left[K^{1/p_1} - (K - \beta_1)^{1/p_1}\right]\right\} \geqslant 0$$

(Hemos utilizado aquí el hecho de que si $0 < \alpha \leqslant 1$ y x , h son números positivos, entonces $(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha} \leqslant h^{\alpha}$). Luego φ no crece si se disminuye c_1 hasta c_2 , etc. Por lo tanto el ínfimo se alcanza para $u = 0$, $v = f$. Luego, si $K \geqslant t^{\beta}$ y $f = \chi_B$, $\mu(B) = K$, se tiene

$$f_A^{**}(t) = \| f \|_{L_{p_2,\,1}} = K^{1/p_2} \qquad (12)$$

Llamando $M(f)$ al segundo miembro de (9) y usando (11) y (12) , es fácil probar que

a) $M(f) = f_A^{**}(t)$ si f es una función característica.

En efecto, si $f = \chi_B$, $\mu(B) = K$, $K^{1/\beta} \leqslant t$, entonces

$$M(f) = \frac{1}{t}\int_0^k d\,(s^{1/p_1}) = \frac{1}{t}K^{1/p_1} = f_A^{**}(t)$$

Si $K^{1/\beta} \geqslant t$, entonces

$$M(f) = \frac{1}{t}\int_0^{t^{\beta}} d\,(s^{1/p_1}) + \int_{t^{\beta}}^{k} d\,(s^{1/p_2}) = K^{1/p_2} = f_A^{**}(t)$$

De a) se deduce

b) $\| f \|_{tL_{p_1,\,1}} \geqslant M(f)$ para toda $f \in tL_{p_1,\,1}$; $\| f \|_{L_{p_2,\,1}} \geqslant M(f)$ para toda $f \in L_{p_2,\,1}$.

En efecto, si $f = \chi_B$, $\mu(B) = K \leqslant t^{\beta}$, entonces

$$\|f\|_{L_{p_2,1}} = K^{1/p_2} = K^{1/p_1}\Big/K^{1/\beta} \geqslant \frac{1}{t}K^{1/p_1} = \|f\|_{tL_{p_1,1}} = f^{**}_A(t) = M(f) ;$$

si $K \geqslant t^{\beta}$, entonces

$$\|f\|_{tL_{p_1,1}} = \frac{1}{t}K^{1/p_1} \geqslant K^{1/p_1}\Big/K^{1/\beta} = K^{1/p_2} = \|f\|_{L_{p_2,1}} = f^{**}_A(t) = M(f)$$

Luego b) es cierto para funciones características. Si f es simple no negativa, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i}$, $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_n$, entonces $f^* = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(\chi_{B_i})^*$, y

$$M(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i M(\chi_{B_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \,\|\chi_{B_i}\|_{tL_{p_1,1}} = \Big\|\sum_{i=1}^{n} c_i\,\chi_{B_i}\Big\|_{tL_{p_1,1}} = \|f\|_{tL_{p_1,1}}$$

y análogamente con $L_{p_2,1}$. Luego b) vale para funciones simples, y por un pasaje al límite se prueba que vale en general. Además tenemos

c) $M(f)$ es la máxima norma monótona que satisface a) y b) . En otros términos, si $\|f\|_C$ es una norma monótona que satisface a) (y por lo tanto también b)) , entonces $\|f\|_C \leqslant M(f)$. Basta probar esto para f simple no negativa; con igual notación que en b) ,

$$\|f\|_C \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_i \|\chi_{B_i}\|_C = \sum_{i=1}^{n} c_i (\chi_{B_i})^{**}_A(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i M(\chi_{B_i}) = M(\sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{B_i}) = M(f)$$

Como f^{**}_A verifica a) , b) y c) , y estas tres condiciones determinan una única norma, se tiene $f^{**}_A(t) = M(f)$ para toda $f \in tL_{p_1,1} + L_{p_2,1}$.

Si $p_2 = \infty$, se procede análogamente, pero en lugar de funciones simples se debe considerar en este caso combinaciones lineales finitas de funciones características de conjuntos con medida no necesariamente finita.

<u>LEMA 1</u>

Sea $f(x)$ una función medible definida en un espacio no atómico. Si $f^*(t) \leqslant h_1(t) + h_2(t)$ con h_1 y h_2 no negativas, no crecientes y continuas a derecha, existen $u(x)$, $v(x)$ tales que $u + v = f$, $u^*(t) \leqslant h_1(t)$, $v^*(t) \leqslant h_2(t)$.

Demostración

Podemos suponer que $f(x) \geqslant 0$. A toda función $g(t)$ no negativa, no creciente y continua a derecha, el Lema 12, Cap. II, asigna una función de x que llamaremos $\tilde{g}(x)$. Para cada $t > 0$ sea B_t un conjunto medible tal que $\{f > f^*(t)\} \subset B_t \subset \{f \geqslant f^*(t)\}$ con $\mu(B_t) = t$ y $B_t \subset B_{t'}$ si $t < t'$. Tomemos $u(x) = \min\left[\tilde{h}_1(x), f(x)\right]$, $v(x) = f(x) - u(x)$. Entonces $u(x) \leqslant \tilde{h}_1(x)$, de donde $u^*(t) \leqslant h_1(t)$. Además $f(x) = \widetilde{f^*}(x) \leqslant \widetilde{(h_1 + h_2)}(x) = \tilde{h}_1(x) + \tilde{h}_2(x)$. Luego $v(x) = f(x) - u(x) \leqslant \left[f(x) - \tilde{h}_1(x)\right]^+ \leqslant \tilde{h}_2(x)$, de donde $v^*(t) \leqslant h_2(t)$.

Hemos utilizado aquí la siguiente notación: si $g(x)$ tiene valores reales, $\left[g(x)\right]^+ = \max\left[g(x), 0\right]$.

TEOREMA 5

Si $A_1 = L_{q_1,\infty}$, $A_2 = L_{q_2,\infty}$, $q_1 \neq q_2$, $1 \leqslant q_i \leqslant \infty$,

$$H_t(f) = \inf_{0 \leqslant \alpha \leqslant 1} \sup_{s > 0} f^{**}(s) / \left[(1 - \alpha)\, t\, s^{-1/q_1} + \alpha\, s^{-1/q_2}\right]$$

entonces

$$H_t(f) \leqslant f^{**}_A(t) \leqslant C\, H_t(f) \tag{13}$$

donde $C = \min\left[2, \max(q_1', q_2')\right]$.

Demostración

Sea $f(x)$ no negativa y $f^{**}_A(t) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, sean $u \in A_1$, $v \in A_2$, tales que $u + v = f$, $\|u\|_{A_1} = t\mu$, $\|v\|_{A_2} = \nu$, $\mu + \nu \leqslant 1 + \varepsilon$. Entonces

$$u^{**}(s) \leqslant \mu t\, s^{-1/q_1} \quad , \quad v^{**}(s) \leqslant \nu\, s^{-1/q_2}$$

Luego

$$f^{**}(s) \leqslant u^{**}(s) + v^{**}(s) \leqslant \mu t\, s^{-1/q_1} + \nu\, s^{-1/q_2} \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\,(1-\beta)\, t\, s^{-1/q_1} + \beta s^{-1/q_2}$$

donde $\beta = \nu/(\mu + \nu)$. Por lo tanto

$$\sup_{s>0} f^{**}(s)/[(1-\beta)\, t\, s^{-1/q_1} + \beta\, s^{-1/q_2}] \leqslant 1 + \varepsilon,$$

de donde

$$H_t(f) \leqslant f^{**}_A(t)$$

Supongamos ahora que $H_t(f) = 1$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe β, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, tal que

$$f^{**}(s) \leqslant (1+\varepsilon)\left[(1-\beta)\, t\, s^{-1/q_1} + \beta\, s^{-1/q_2}\right] \tag{14}$$

Como $f^*(s) \leqslant f^{**}(s)$, si la medida es no atómica podemos encontrar, usando el Lema 1, funciones $u(x)$ y $v(x)$ tales que $u(x) + v(x) = f(x)$, y

$$u^*(s) \leqslant (1+\varepsilon)(1-\beta)\, t\, s^{-1/q_1},$$

$$v^*(s) \leqslant (1+\varepsilon)\, \beta\, s^{-1/q_2}$$

Luego

$$\frac{1}{t} u^*(s)\, s^{1/q_1} \leqslant (1+\varepsilon)(1-\beta) \quad , \quad v^*(s)\, s^{1/q_2} \leqslant (1+\varepsilon)\beta ,$$

de donde

$$\frac{1}{t} u^{**}(s)\, s^{1/q_1} \leqslant q_1'(1+\varepsilon)(1-\beta) \quad , \quad v^{**}(s)\, s^{1/q_2} \leqslant q_2'(1+\varepsilon)\beta .$$

Por lo tanto

$$f_A^{**}(t) \leqslant \frac{1}{t} \|u\|_{L_{q_1,\infty}} + \|v\|_{L_{q_2,\infty}} \leqslant (1+\varepsilon)\left[q_1'(1-\beta) + \beta q_2'\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon) \max(q_1', q_2')$$

por la arbitrariedad de ε y la homogeneidad de $H_t(f)$ y $f_A^{**}(t)$ tendremos

$$f_A^{**}(t) \leqslant \max(q_1', q_2')\, H_t(f)$$

La restricción de que la medida sea no atómica puede ser fácilmente eliminada utilizando el Lema 11 , Cap. II .

Sólo falta probar que $f_A^{**}(t) \leqslant 2 H_t(f)$. Para ello partimos de (14) y supongamos, para fijar ideas, que $q_1 < q_2$. Observemos que $t\, s^{-1/q_1} \geqslant s^{-1/q_2}$ si $s \leqslant t^{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}$, y $t\, s^{-1/q_1} \leqslant s^{-1/q_2}$ si $s \geqslant t^{\gamma}$. Sea $B =$ $= \{ x : |f(x)| > f^*(t^{\gamma}) \}$, $u = f \cdot \chi_B$, $v = f - u$. Es fácil ver que si f verifica (14) , entonces

$$u^{**}(s) \leqslant (1+\varepsilon)\, t\, s^{-1/q_1} \quad , \quad v^{**}(s) \leqslant (1+\varepsilon)\, s^{-1/q_2}$$

por lo tanto

$$f^{**}_A(t) \leqslant \frac{1}{t} \|u\|_{L_{q_1,\infty}} + \|v\|_{L_{q_2,\infty}} \leqslant 2 + 2\varepsilon ,$$

de donde resulta que $f^{**}_A(t) \leqslant 2\, H_t(f)$.

COROLARIO 1

Con la notación del teorema anterior, se tiene

$$f^{**}_A(t) \geqslant t^{\gamma/q_2} f^{**}(t^{\gamma}) \qquad (15)$$

Para probar **esta desigualdad basta** poner $s = t^{\gamma}$ en la expresión que define $H_t(f)$, con lo cual dicha expresión se hace independiente de α .

COROLARIO 2

Si $A'_1 = M_1 L_{q_1,\infty}$, $A'_2 = M_2 L_{q_2,\infty}$, M_1 , $M_2 >$ > 0 , entonces

$$f^{**}_{A'}(t) \geqslant \frac{1}{M_2} (tM_1/M_2)^{\gamma/q_2} f^{**}((tM_1/M_2)^{\gamma}) \qquad (16)$$

En efecto, $tA'_1 + A'_2$ es, en este caso,

$$tM_1 L_{q_1,\infty} + M_2 L_{q_2,\infty} = M_2 \left[\frac{tM_1}{M_2} L_{q_1,\infty} + L_{q_2,\infty} \right]$$

de donde

$$f^{**}_{A'}(t) = \frac{1}{M_2} f^{**}_{A}(t M_1/M_2)$$

Por lo tanto, (16) es consecuencia inmediata de (15).

OBSERVACION

Aventuramos la conjetura de que $H_t(f)$ es igual a $f^{**}_A(t)$. De cualquier manera, para nuestros fines basta con la desigualdad del Corolario 2.

------

§ 4. - LOS INTERPOLADORES L_{pq} APLICADOS A PARES DE ESPACIOS DE LORENTZ

TEOREMA 6

Sea $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, $1 < k < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$;

entonces

$$L_{kr}(L_{p_1,1}; L_{p_2,1}) \supset L_{pr}$$

y

$$\|f\|_{L_{kr}(L_{p_1,1}; L_{p_2,1})} \leq \left(\frac{\beta kk'}{pp'}\right)^{1/r'} p' \|f\|_{L_{pr}} \tag{17}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1 k} + \frac{1}{p_2 k'} \quad , \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$$

Demostración

Consideremos primero el caso $p_2 < \infty$. Usando la fórmula (9), tenemos

$$\| f \|_{L_{kr}(L_{p_1,1}; L_{p_2,1})} =$$

$$= \left\{ \frac{r}{kk'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t p_1} \int_0^{t^\beta} f^*(s)\, s^{1/p_1 - 1}\, ds + \frac{1}{p_2} \int_{t^\beta}^{\infty} f^*(s)\, s^{1/p_2 - 1}\, ds \right]^r t^{r/k - 1}\, dt \right\}^{1/r} \leq$$

$$\leq \left\{ \frac{r}{kk'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t p_1} \int_0^{t^\beta} f^*(s)\, s^{1/p_1 - 1}\, ds \right]^r t^{r/k - 1}\, dt \right\}^{1/r} +$$

$$+ \left\{ \frac{r}{kk'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{p_2} \int_{t^\beta}^{\infty} f^*(s)\, s^{1/p_2 - 1}\, ds \right]^r t^{r/k - 1}\, dt \right\}^{1/r}$$

Haciendo el cambio de variables $t^\beta = u$, y usando la desigualdad (24), Cap. II, resulta:

$$\left\{ \frac{r}{kk'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{t p_1} \int_0^{t^\beta} f^*(s)\, s^{1/p_1 - 1}\, ds \right]^r t^{r/k - 1}\, dt \right\}^{1/r} =$$

$$= \frac{1}{p_1} \left(\frac{r}{kk'\beta} \right)^{1/r} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\int_0^{u} f^*(s)\, s^{1/p_1 - 1}\, ds \right]^r u^{-r/\beta k' - 1}\, du \right\}^{1/r} \leq$$

$$\leq \frac{\beta k'}{p_1} \left(\frac{r}{kk'\beta} \right)^{1/r} \left\{ \int_0^{\infty} f^*(t)^r\, t^{r/p_1 - r/\beta k' - 1}\, dt \right\}^{1/r} \leq$$

$$\frac{\beta k'}{p_1} \left(\frac{r}{kk'\beta} \right)^{1/r} \left\{ \int_0^{\infty} f^{**}(t)^r\, t^{r/p - 1}\, dt \right\}^{1/r} = \frac{\beta k'}{p_1} \left(\frac{pp'}{kk'\beta} \right)^{1/r} \| f \|_{L_{pr}} \qquad (18)$$

Con el mismo cambio de variables y usando (23), Cap. II, obtenemos

$$\left\{ \frac{r}{kk'} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{p_2} \int_{t^\beta}^{\infty} f^*(s)\, s^{1/p_2 - 1}\, ds \right]^r t^{r/k - 1}\, dt \right\}^{1/r} =$$

$$= \frac{1}{p_2} \left(\frac{r}{kk'\beta} \right)^{1/r} \left\{ \int_0^{\infty} \left[\int_u^{\infty} f^*(s)\, s^{1/p_2 - 1}\, ds \right]^r u^{r/\beta k - 1}\, du \right\}^{1/r} \leq$$

$$\leq \frac{\beta k}{p_2} \left(\frac{r}{kk'\beta} \right)^{1/r} \left\{ \int_0^{\infty} f^{**}(t)^r\, t^{r/p - 1}\, dt \right\}^{1/r} = \frac{\beta k}{p_2} \left(\frac{pp'}{kk'\beta} \right)^{1/r} \| f \|_{L_{pr}} \qquad (19)$$

Sumando (18) y (19) y observando que

$$\frac{\beta k'}{p_1} + \frac{\beta k}{p_2} = \frac{\beta kk'}{p}$$

obtenemos (17) .

Si $p_2 = \infty$, en vez de (9) se debe usar (10) , y el resultado se reduce a (18) ; pero como en este caso es $p_1 = p/k$, es fácil ver que (17) sigue siendo válida.

OBSERVACION

Para $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, la constante de (17) se reduce a p' ; como en este caso ambas normas son iguales, habría que esperar que dicha constante se pueda mejorar. Esto se puede hacer partiendo de la expresión

$$f^{**}_A(t) = \frac{1}{p_1 p_1' t}\int_0^{t^\beta} f^{**}(s)\, s^{1/p_1 - 1}\, ds + \frac{1}{p_2 p_2'}\int_{t^\beta}^{\infty} f^{**}(s)\, s^{1/p_2 - 1}\, ds + \frac{1}{\beta}\, t^{\beta/p_2} f^{**}(t^\beta)$$

la cual, como es fácil probar cambiando el orden de integración, es equivalente a (9) . Acotando las tres integrales que resultan siguiendo el esquema de la demostración anterior, se obtiene una constante algo más complicada, pero que se reduce a uno para $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$. Esta observación tiene interés si se desea mejorar la constante del teorema de Marcinkiewicz - Calderón.

TEOREMA 7

Sea $q_1 \neq q_2$, $1 \leq q_i \leq \infty$, M_1 , $M_2 > 0$, $1 < k < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$. Entonces

$$L_{kr}(M_1 L_{q_1,\infty} ; M_2 L_{q_2,\infty}) \subset L_{qr}$$

y

$$\|f\|_{L_{qr}} \leqslant \left(\frac{|\gamma|\, kk'}{qq'}\right)^{1/r} M_1^{\ 1/k} M_2^{\ 1/k'} \|f\|_{L_{kr}(M_1 L_{q_1,\infty};\, M_2 L_{q_2,\infty})} \qquad (20)$$

donde

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \quad , \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1 k} + \frac{1}{q_2 k'}$$

Demostración

Utilizando (16) e introduciendo el cambio de variables $(M_1 t/M_2)^{\gamma} = u$, tenemos

$$\|f\|_{L_{kr}(M_1 L_{q_1,\infty};\, M_2 L_{q_2,\infty})} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{r}{kk'}\right)^{1/r} \frac{1}{M_2}\left\{\int_0^{\infty} f^{**}\left((M_1 t/M_2)^{\gamma}\right)^r (M_1 t/M_2)^{r\gamma/q_2}\, t^{r/k-1}\, dt\right\}^{1/r} =$$

$$= \left(\frac{r}{|\gamma|\, kk'}\right)^{1/r} \frac{1}{M_2} \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/k}\left\{\int_0^{\infty} f^{**}(u)^r\, u^{r/q_2 + r/\gamma k - 1}\, du\right\}^{1/r} =$$

$$= \left(\frac{r}{|\gamma|\, kk'}\right)^{1/r} \frac{1}{M_1^{\ 1/k} M_2^{\ 1/k'}}\left\{\int_0^{\infty} f^{**}(u)^r\, u^{r/q-1}\, du\right\}^{1/r} =$$

$$= \left(\frac{qq'}{|\gamma|\, kk'}\right)^{1/r} \frac{1}{M_1^{\ 1/k} M_2^{\ 1/k'}} \|f\|_{L_{qr}}$$

Las inclusiones en los Teoremas 6 y 7 son en realidad igualdades, como veremos ahora.

TEOREMA 8

Sea $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant \infty$, $1 \leqslant r_i \leqslant \infty$, $1 < k < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Entonces

$$L_{kr}(L_{p_1, r_1};\, L_{p_2, r_2}) = L_{pr}.$$

y

$$\left(\frac{pp'}{\beta kk'}\right)^{1/r} \|f\|_{L_{pr}} \leq \|f\|_{L_{kr}(L_{p_1,r_1}\,;\,L_{p_2,r_2})} \leq$$

$$\left(\frac{\beta kk'}{pp'}\right)^{1/r} p' \|f\|_{L_{pr}} \quad , \tag{21}$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1 k} + \frac{1}{p_2 k'} \quad , \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \quad .$$

Demostración

Probaremos primero que los interpoladores son funciones monótonas, en el siguiente sentido. Sean (A_1, A_2) , (B_1, B_2) dos pares de interpolación contenidos en el mismo espacio vectorial topológico V , y supongamos que $A_1 \subset B_1$, $A_2 \subset B_2$, siendo $\|x\|_{B_i} \leq \|x\|_{A_i}$, $i = 1, 2$. Si F es cualquier interpolador se tendrá, entonces, $F(A_1, A_2) \subset F(B_1, B_2)$ y $\|x\|_{F(B_1, B_2)} \leq \|x\|_{F(A_1, A_2)}$. Esto se debe a que la inyección de $A_1 + A_2$ en $B_1 + B_2$ transforma continuamente A_1 en B_1 y A_2 en B_2 con norma menor o igual que uno, lo cual equivale a nuestra afirmación. Por lo tanto, teniendo en cuenta los teoremas 4 y 5, Cap. II, la primera desigualdad de (21) se deduce de (20) (con $M_1 = M_2 = 1$ y reemplazando q_1 , q_2 por p_1 , p_2) ; análogamente, la segunda desigualdad de (21) se deduce de (17) .

------

§ 5 . - EL TEOREMA DE MARCINKIEWICZ - CALDERON

Compararemos ahora el teorema de Marcinkiewicz con la generalización del mismo dada por Calderón y veremos que la demostración de este último es un corolario inmediato de nuestros resultados anteriores.

TEOREMA 9 (de Marcinkiewicz)

Sea T un operador lineal de tipo débil (p_1, q_1) y (p_2, q_2), $1 \leqslant p_i$, $q_i \leqslant \infty$, $p_i \leqslant q_i$, $q_1 \neq q_2$, con normas débiles M_1 y M_2. Entonces T es un operador continuo de L_p en L_q, donde

$$1/p = (1-\alpha)/p_1 + \alpha/p_2 ,$$

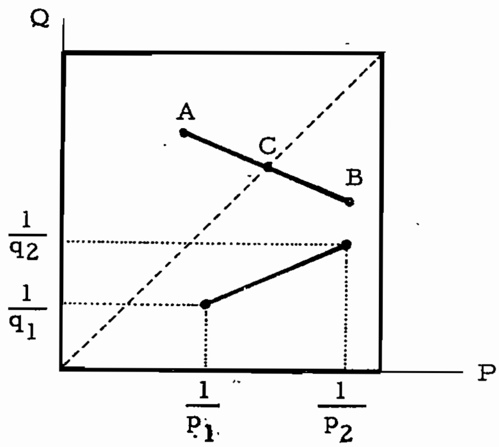
$$1/q = (1-\alpha)/q_1 + \alpha/q_2 , \qquad 0 < \alpha < 1 ;$$

además, si $\|T\|_{p,q}$ es la norma de T como operador de L_p en L_q, se tiene

$$\|T\|_{p,q} \leqslant K(p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha)\, M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha} .$$

OBSERVACIONES

Consideremos un par de ejes perpendiculares P y Q; dado un par de números (p, q), asignémosle el punto de coordenadas $(1/p, 1/q)$. Entonces los pares (p, q) con $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, estarán representados por los puntos del cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. El teorema de Marcinkiewicz afirma que si (p_1, q_1) y (p_2, q_2) corresponden a puntos del triángulo inferior de dicho cuadrado, y el segmento que los une no es horizontal, entonces T es continuo para todo par (p, q) correspondiente a puntos interiores a dicho segmento. La restricción $q_1 \neq q_2$ es esencial, como lo prueba un ejemplo dado por R. Panzone (ver [4], pág. 177).



TEOREMA 10 (de Calderón)

Si T es un operador lineal de $L^1 + L^\infty$ en sí mismo que transforma continuamente $L_{p_1,1}$ en $L_{q_1,\infty}$ y $L_{p_2,1}$ en $L_{q_2,\infty}$, $1 \leqslant p_i, q_i \leqslant \infty$, $q_1 \neq q_2$, con normas M_1 y M_2, entonces T transforma continuamente L_{pr} en L_{qr}, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, donde

$$1/p = (1-\alpha)/p_1 + \alpha/p_2 ,$$

$$1/q = (1-\alpha)/q_1 + \alpha/q_2 , \qquad 0 < \alpha < 1 . \tag{22}$$

Además, si $\|T\|$ es la norma de T como operador de L_{pr} en L_{qr}, se tiene

$$\|T\| \leqslant (|\gamma|/qq')^{1/r} (\beta/pp')^{1/r'} \alpha (1-\alpha) p' M_1^{1-\alpha} M_2^{\alpha}, \tag{23}$$

donde

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} , \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} .$$

Consideremos la relación de este teorema con el anterior. Sin restringir la generalidad, podemos suponer $p_1 \leqslant p_2$. Si fuese $q_1 = 1$, las hipótesis del teorema 9 exigirían que $p_1 = 1$. Excepto en este caso, el teorema 3 muestra que las hipótesis del teorema 10 son más débiles que las del teorema 9. Por otra parte, si $p_1 \leqslant q_1$, $p_2 \leqslant q_2$ será $p \leqslant q$ en (22). La tesis del teorema 10 vale, en particular, con $r = q$. Teniendo en cuenta que L^p ($= L_{pp}$) está continuamente contenido en L_{pq}, el hecho de que T transforma continuamente L_{pq} en L_{qq} implica que T transforma continuamente L^p en L^q. Luego el teorema 10 contiene al teorema 9 si se excluye el caso $p_1 = q_1 = 1$.

Este último razonamiento no depende de que sea $p_i \leqslant q_i$, sino sólo de que sea $p \leqslant q$. Se deduce de esto que en el teorema de Marcinkiewicz se puede debilitar la condición de que el segmento esté en el triángulo inferior: si se tiene tipo débil en los pun tos A y B de la figura, se tendrá continuidad (p, q) en los puntos del segmento CB, excluyendo B .

Demostración del Teorema 10

Observemos que T transforma $L_{p_i, 1}$ en $L_{q_i, \infty}$ con norma M_i si y sólo si T transforma $L_{p_i, 1}$ en $M_i L_{q_i, \infty}$ con norma uno. Si $1/k = 1 - \alpha$, entonces, por los teoremas 6, 7 y 8 ,

$$L_{kr}(L_{p_1, 1}; L_{p_2, 1}) = L_{pr} \quad ,$$

$$L_{kr}(M_1 L_{q_1, \infty}; M_2 L_{q_2, \infty}) = L_{qr} \quad .$$

Luego la tesis resulta de la definición de interpolador, y la desigualdad (23) se obtiene inmediatamente de (17) y (20) .

En [8] puede verse una modificación del teorema 10 de modo que el teorema de Marcinkiewicz quede incluído también en el importante caso $p_1 = q_1 = 1$. Nuestro método puede ser modificado de manera análoga.

Benedek y Panzone [2] han generalizado el teorema de Riesz - Thorin para el caso de normas mixtas $L^p(L^q)$. Recientemente se han planteado generalizaciones análogas para el teorema de Marcinkiewicz en [1] , donde se prueban algunas de las generalizaciones posibles. En este caso quedan puntos por aclarar en el planteo del problema, y pensamos que los interpoladores L_{pq} u otros análogos pueden ser el instrumento adecuado para ello.

B I B L I O G R A F I A

[1] C. Ballester de Pereyra. Sobre la continuidad débil y magra en $L^p(L^q)$, tesis, Universidad de Buenos Aires, 1964.

[2] A. Benedek y R. Panzone. The spaces L^P with mixed norms. Duke Math. J., 28, 3 (1961), p. 301-324.

[3] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math., XXIV, 2 (1964), p. 113-190.

[4] M. Cotlar. Continuidad de operadores potenciales y de Hilbert. Cursos y seminarios, 2, Universidad de Buenos Aires, 1959.

[5] G. G. Lorentz. Some new functional spaces. Annals of Math., 51 (1950), p. 37-55.

[6] E. Oklander. On interpolation of Banach Spaces, thesis, University of Chicago, 1963.

[7] R. O'Neill, Convolution operators and L_{pq} spaces. Duke Math. J., (1963).

[8] R. O'Neill. A proof of the Calderón-Marcinkiewicz theorem. Notas mimeografiadas, University of Chicago, 1962.

[9] A. Zygmund. Trigonometric series. Cambridge University Press, 1959.

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo	1.	Matemática y física cuántica	Laurent Schwartz
Fascículo	2.	Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert ...	Mischa Cotlar
Fascículo	3.	Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por ...	Alberto P. Calderón
Fascículo	4.	Propiedades en el contorno de funciones analíticas	Alberto González Domínguez
Fascículo	5.	Teoría constructiva de funciones ...	Jean Pierre Kahane
Fascículo	6.	Algebras de conv[illegible]ión de sucesiones, funciones y medidas sumables .	Jean Pierre Kahane
Fascículo	7.	Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones	Juan Carlos Merlo
Fascículo	8.	Introducción al estudio del problema de Dirichlet	Esteban Vági
Fascículo	9.	Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP	Guido Weiss
Fascículo	10.	Probabilidades y estadítsica	Roque Carranza
Fascículo	11.	Introducción a la teoría de la representación de grupos	Mischa Cotlar
Fascículo	12.	Algebra lineal	Jean Dieudonné
Fascículo	13.	Una introducción de la integral sin la noción de medida	Jan Mikusinski
Fascículo	14.	Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas	Jean Dieudonné
Fascículo	15.	Equipación con espacios de Hilbert .	Mischa Cotlar
Fascículo	16.	Grupos de Lie y grupos de transformaciones	Philippe Tondeur
Fascículo	17.	Tres teoremas sobre variedades diferenciales	Juan Carlos Merlo
Fascículo	18.	Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos	[illegible]jas[illegible]ewicz
Fascículo	19.	Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables ...	L. A. Santaló
Fascículo	20.	Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz	Evelio T. Oklander
Fascículo	21.	Categorías y Functores	Philippe Tondeur
Fascículo	22.	Notas de Algebra	Enzo R. Gentile

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina