ISSN 1853-709X

Fascículo 23

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

P. Kree

Lecciones sobre interpolación

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 23

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CEMBA

FASCICULO **23** cursos y seminarios de matemática

P. Kree

LECCIONES SOBRE INTERPOLACION

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES – DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

1969

INDICE

INTRODUCCION

Estas lecciones se desarrollaron en un curso dictado en el 2º semestre de 1965 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Este curso tuvo dos partes:

1) Interpolación

- Exposición introductoria a la teoría de Lions-Peetre de espacios de media (El estudio detallado de esta teoría se encuentra en).
- Una breve extensión de la teoría de Lions-Peetre para el caso de espacios casi normados.
- Algunas aplicaciones.

(Por aparecer en los Anales del Instituto Fourier).

2) Operadores de convolución y multiplicadores.

Hemos comenzado por la exposición de la teoría de la interpolación porque sus razonamientos típicos son más elementales, y por lo tanto más claros.

Al final de estas notas se indican algunos problemas (no ha sido mi intención hacer una lista completa) que pueden servir para iniciarse en la investigación.

Agradezco a C. A. Berenstein, N. L. Kerzman y a D. Viñoly, quienes redactaron este fascículo.

quienes re-

PROBLEMAS ACERCA DE LA TEORIA DE LA INTERPOLACION

1. Una fuente inagotable de problemas es la transposición abstracta de los teoremas de interpolación concreta.

   Ejemplo: La versión abstracta de la generalización de M. Cotlar del teorema de Marcinkiewicz (P. Krée, por aparecer).

2. Interpretación clara del teorema de Foias-Lions mediante el teorema de representación integral de Choquet.

3. Más generalmente, las funciones K del método de las casi normas funcionales (Peetre) constituyen un cono convexo. Hallar sus generatrices extremales.

4. Los "reseaux" que se utilizan en el método de Peetre (juegan un papel análogo al de los L^p_*) constituyen un cono convexo. Problema análogo a 3 .

5. Hacer un estudio completo de un caso interesante de reseau y de los métodos de interpolación correspondientes. Ver sus aplicaciones.

   La dificultad: Hallar una desigualdad que reemplace a la de Hardy.

6. Hallar la expresión concreta del $K(t, f, F_0, F_1)$ para algún par de

interpación (F_o , F_1) , por ejemplo (L^{p_o} , L^{p_1}) (El caso $p_1 = \infty$ es conocido).

7. Hallar aplicaciones concretas de interpolación entre n espacios $(n > 2)$. (Para su definición y algunas propiedades ver: N. L. Kerzman, comunicación a la U. M. A. 1965 , por aparecer).

8. O'Neil probó que en el caso particular

$$F_o = G_o = H_o = L'$$

$$F_1 = G_1 = H_1 = L^\infty ,$$

si T es bilineal continuo

$$F_o \times G_o \longrightarrow H_o$$

$$F_o \times G_1 \longrightarrow H_1$$

$$F_1 \times G_o \longrightarrow H_1$$

entonces, si $h = T(f , g)$

$$\frac{K(t, h)}{t} \leq C \int_t^\infty \frac{K(\theta , f)}{\theta} \cdot \frac{K(\theta , g)}{\theta} \, d\theta$$

Se puede generalizar esta desigualdad?

9. Hallar una demostración simple de

$$(F_o , F_1)_{\theta, p_o, p_1} = (F_o , F_1)_{\theta, p} , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$$

(S. Peetre).

10. Hallar demostración simple que:

$$(B^{s_o}_{p_o q_o} , B^{s_1}_{p_1 q_1})_{\theta, q} = B^{s_o}_{p_o q_o}$$

(Calderón-Grisvard).

11. Interpolación de aplicaciones nucleares.

12. Es completo el L'^{∞} ? (Este problema fue resuelto afirmativamente por C. A. Berenstein, comunicación a la U. M. A. 1965, por aparecer).

13. Hallar los K posibles para un par de espacios de Banach (método de Peetre de las casi normas funcionales).

BIBLIOGRAFIA

ARONSZAJN - GAGLIARDO

1.- Technical Report. University of Kansas. 1965

BONSALL

2.- On the representation of points of a convex set. J. London Math. Soc. 38 (1963) p. 332-334

CALDERON, A. P.

3.- Intermediate spaces and interpolation. The complex method. Stud. Math. vol. 24 fasc. 2 (1964) p. 113-190

4.- Intermediate spaces and interpolation. Stud. Math. serie especial (1963) p. 31-34

COTLAR, M.

5.- Hilbert transforms and ergodic theorems. Revista matemática cuyana. Vol. 1 (1955) fasc. 2

6.- Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert. Cursos y seminarios de matemática. Buenos Aires (1959) fasc. 2

COTLAR, M. - PANZONE, R.

7.- Generalized potential operators. Revista Unión Matemática Ar -

gentina. Vol. 19, p. 341 (1960)

DOEUTSCH, N.

8. - Tesis (por publicarse)

9. - Notas en C. R. Acad. Sc. Parîs. 1963-1964

FOIAS, C. - LIONS, J.L.

10. - Sur certains theoremes d'interpolation. Acta Scient. Math. Szeged Tomo 22 (1961) p. 269-282

GAGLIARDO, E.

11. - Interpolazione di spazi di Banach e aplicazioni. Ric. di Mat. t. IX (1960) p. 58-81

GOULAOUIC, C.

12. - Nouvelle méthode d'interpolation. C. R. Acad. Sc. Parîs. t. 260 (28/6/1965) p. 6797

GRISVARD, P.

13. - Identités entre spaces de traces. Math. Scand. 13 (1963) p. 70 - 74

14. - Comptes vendus Acad. Sc. Parîs

t. 256 : p. 2745-2748 ; p. 2990-2992 ; p. 3226-3228

t. 257 : p. 349-352 (1963)

t. 258 : p. 4900-4902

t. 259 : p. 27-29

15. - Tesis (aparecerá en Journ. Math. Pures Appliquées)

16. - Problemes aux limites et calcul operationnel. Sem. Bourbaki (junio 1965)

HARDY - LITTLEWOOD - POLYA

17. - Inequalities. Cambridge 1934

HOFFMAN

18. - Banach spaces of analitic functions. Prentice Hall 1962

HUNT

19. - An extension of the Marcinkiewicz theorem to Lorentz spaces. Bull. AMS vol. 70 N^{o} 6 (nov. 1964) p. 803-807

HUNT - WEISS

20. - The Marcinkiewicz interpolation theorem of Marcinkiewicz. Tohoku Math. J. Vol. 65 p. 343-358

KREE, P.

22. - Une proprieté simple des espaces de moyenne. C. R. Ac. Sc. Paris. T. 260 (1965) p. 2679-2682

23. - Remarque sur certains ensembles convexes liés a des espaces L^p (Aparecerá en Ann. Inst. Fourier)

24. - Interpolation d'espaces vectoriels qui ne sont ni normés ni complets. Faculté des Sciences de Paris (15/2/1965). Sém. Lions-Schwartz-Köthe

25. - Topologische lineare Raüme. Springer Verlag. Berlín 1961

LIONS, J. L.

26. - C. R. Acad. Sc. París t. 251 (1961) p. 1853-1855

LIONS, J. L. - PEETRE, J.

27. - Proprietés d'espaces d'interpolation. C. R. Acad. Sc. París t. 253 (1961) p. 1747-1749

28. - Sur une classe d'espaces d'interpolation. Publicaciones azules de IHES N° 19 París (1964)

MAGENES, E.

29. - Spazi di interpolazione e equazioni a derivate parziali. Actas del VII Congreso dell'Unione Matematica Italiana. Génova (1963)

MARCINKIEWICZ

30. - Sur l'interpolation d'operateurs. C. R. Acad. Sc. París t. 208 (1939) p. 1272-1273

O'NEIL, R.

31. - Convolution operators and L(p, q) spaces. Duke math. J. 30 (1963) p. 129-142

OKLANDER, E.T.

32. - Cursos y seminarios de matemática. Buenos Aires. Fasc. 20 (1965)

PEETRE, J.

33. - Nouvelles proprietés d'espaces d'interpolation. C. R. 2/1963 p. 1424-1426

34. - Sur le nombre de parametres dans la definition de certain espaces d'interpolation. Ric. di Mat. Vol. 12 (1963) fasc. 2

35. - Relation entre deux methodes d'interpolation (Aparecerá en las publicaciones azules IHES, París)

36. - Espaces d'interpolation. Generalisations. Applications. Rend. dei Sem. Mat. e Fisica di Milano. Vol. 34. Pavia (1964)

37. - On an interpolation theorem of Foias and Lions. Act. Scient. Math. t. 25 Fasc. 3-4 (1964) p. 255-261

RIESZ, M.

38. - Sur les maximas des formes bilineaires et sur les fonctionelles lineaires. Act. Math. t. 49 (1927) p. 465-497

SCHWARTZ, J.

39. - Linear Operators. t. 1

STAMPACCHIA, G.

40. - $L^{p,\lambda}$ spaces and interpolation. Comm. Pure. Appl. Math. Vol. 27. p. 293-306 (1964)

STEIN - WEISS

41. - On the theory of harmonic functions of several variables. Act. Math. 103 (1960) p. 25-62

ZYGMUND, A.

42. - Trigonometrical series. T. 2. Cambridge 1960

LECCION 1

GENERALIDADES

1. NOTACION

Los espacios vectoriales que se considerarán serán siempre reales (no obstante, todo se puede desarrollar en espacios vectoriales complejos).

1.1. NORMAS, ESPACIOS NORMADOS Y ESPACIOS POLINORMADOS

Definición

Una norma $|\cdot|_i$ sobre el espacio vectorial F es una aplicación

$$(1) \qquad |\cdot|_i : F \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$f \longmapsto |f|_i$$

tal que

$$(2) \qquad |f|_i = 0 \iff f = 0$$

$$(3) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall f \in F \quad |\lambda f|_i = |\lambda| \; |f|_i$$

$$(4) \qquad \forall f, \; \forall f' \quad |f + f'|_i \leq |f|_i + |f'|_i$$

Definición

Una esfera abierta de centro f_o y radio $\rho \geqslant 0$ es el conjunto $b_i(f_o, \rho) =$
$= \{b \in F \ ; \ |f - f_o|_i < \rho\}$

Definición

Una esfera cerrada de centro f_o y radio $\rho \geqslant 0$ es el conjunto $\bar{b}_i(f_o, \rho) =$
$= \{b \in F \ ; \ |f - f_o|_i \leqslant \rho\}$

Se comprueba fácilmente que toda esfera es convexa, es decir

$$(5) \qquad n, y \in b_i(x_o, \rho) \Longrightarrow \forall \lambda \in [0, 1] \quad \lambda x + (1 - \lambda) y \in b_i(x_o, \rho)$$

ídem si la esfera es cerrada.

A toda familia $(|\,.\,|_i)$ de normas $|\,.\,|_i$ sobre el espacio vectorial F, $i \in I$ le corresponde una topología sobre F tal que:

$$(6) \qquad f_j \longrightarrow f_o \iff \forall i \qquad |f_j - f_o|_i \longrightarrow 0$$

Una base del filtro de entornos de f_o en tal topología es el conjunto de los $V(f_o)$ con:

$$(7) \qquad V(f_o) = \bigcap_{i \in I_o} b_i(f_o, \rho_i) \qquad \rho_i > 0 \qquad I_o \text{ finita } \subseteq I$$

Si la familia tiene un sólo elemento, el espacio se dirá <u>normado</u>. Si la familia tiene más de un elemento, entonces F se dirá <u>polinormado</u>.

Continuidad de las aplicaciones lineales

Si T es una aplicación lineal del espacio vectorial F en el espacio vectorial

F'. Es fácil ver que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) T es continua en las topologías deducidas de $(|.|_i)_{i \in I}$ en F y $(|.|_{i'})_{i' \in I'}$ en F'.

b) T es continua en el origen, en las mismas topologías.

c) $\forall\, i' \in I' \quad \exists\, i_1, \ldots, i_N \in I$ y $c > 0$ tal que si $f \in F$, entonces $|Tf|_{i'} \leq c(|f|_{i_1} + \ldots + |f|_{i_N})$

Ejemplos

1. Sea Ω un espacio con medida $\mu \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Lebesgue $L^p(\Omega, \mathbb{C}) = L^p$ es el conjunto de las clases de equivalencia de funciones $f : \Omega \to \mathbb{C}$, medibles, e iguales en casi todo punto, tales que

$$|f|_p = \left(\int_{w \in \Omega} |f(w)|^p \, d\mu\,(w)\right)^{1/p} < \infty$$

(si $p < \infty$ y una extensión natural si $p = \infty$). L^p es un espacio normado.

2. $\mathbb{R}^n$ es el espacio de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $x_i \in \mathbb{R}$. El espacio de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x, \mathbb{C}) = \mathcal{S}$$

es el espacio vectorial de las funciones derivables $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\forall\, k, l \in N$

$$|\varphi|_{k,l} = \sup_{\substack{x \\ |m| \leq k}} (1 + |x|^2)^l \, |D^m \varphi(x)| < \infty$$

donde

$$D^m \varphi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m_n} \varphi(x)$$

$$m = (m_1, \dots, m_n) \qquad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

m_i naturales o nulos

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En este caso $I = N^2 \quad i \in I \Leftrightarrow i = (k, l)$

3. Una aplicación lineal continua $T : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ se dirá una distribución temperada:

si $\exists\, k \quad \exists\, l \quad \exists\, C > 0$ tal que $\forall \varphi \in \mathcal{S}$

$$T(\varphi) = |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \, |\varphi|_{k,l}$$

Por ejemplo, x^m define una distribución temperada sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$\langle x^m, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \varphi(x) \, dx \qquad (m \geq 0)$$

Observar que no sucede lo mismo con

$$\langle e^x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \varphi(x) \, dx$$

4. Sea Ω como en el ejemplo 1) y $k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una función medi-

ble tal que

$$1 \leq k(w) \leq 2 \quad \text{p.p.}$$

Entonces se puede definir otra norma en L^p

$$|f|'_p = \left(\int_\Omega |f(w)\, k(w)|^p \, d\mu(w) \right)^{1/p}$$

Las normas $|\,.\,|_p$ y $|\,.\,|'_p$ son equivalentes, es decir: $\exists$ C y C' constantes ambas estrictamente positivas tales que

$$\forall f \in L^p \qquad C\,|f|'_p \leq |f|_p \leq C'\,|f|'_p$$

Más generalmente se tiene la noción de <u>familias equivalentes de normas.</u> Las familias $\mathcal{F} = (|\,.\,|_i)_{i \in I}$ y $\mathcal{F}' = (|\,.\,|_{i'})_{i' \in I'}$ de normas sobre el espacio vectorial F son equivalentes si la aplicación identidad $id : (F, \mathcal{F}) \longrightarrow (F, \mathcal{F}')$ es bicontinua: $((F, \mathcal{F})$ significa el espacio vectorial F con la topología deducida de la familia de normas $\mathcal{F}$). O sea, usando las equivalencias enunciadas anteriormente, si y sólo si se verifican simultáneamente

$$\forall\, i' \in I' \quad \exists\, i_1, \ldots, i_N \in I \;, \quad C > 0 \quad \text{tal que} \quad \forall f \in F$$

$$|f|_{i'} \leq C \sum_{j=1}^{N} |f|_{i_j}$$

$$\forall\, i \in I \quad \exists\, i'_1, \ldots, i'_M \in I' \;, \quad C' > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\forall f \in F \qquad |f|_i \leq C' \sum_{j=1}^{M} |f|_{i'_j}$$

Dos familias equivalentes de normas definen la misma topología.

Definición

Si llama espacio polinormable al par formado por un espacio vectorial F y una clase maximal de familias equivalentes de normas. Si existe una familia de la clase tal que su cardinal es uno, entonces F se dice normable.

1. 2. SEMINORMAS

Definición

Una seminorma $|\,.\,|_i$ sobre el espacio vectorial F es una aplicación que verifica (1) , (3) y (4) de la definición de norma.

Las definiciones del 1. 1. se trasladan de manera evidente, por ejemplo, una semibola abierta es

$$b_i\ (f_0\ ,\ \rho\ )\ =\ \{ f \in F \quad |f - f_0| < \rho \}$$

Sigue valiendo (5) , o sea que las semibolas son convexas. Dada una familia $\mathcal{F} = (|\,.\,|_i)_{i \in I}$ de seminormas sobre el espacio vectorial F , la topología inducida se deduce también a partir de (6) y (7) de 1. 1. En este caso la topología puede no ser separada. Si la familia $\mathcal{F}$ posee un solo elemento, el espacio F se dirá semi normado.

Ejemplo

$$F = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ continuas} \}$$

entonces $\forall\, x_i \in \mathbb{R}$, existe una seminorma

$$| f |_{x_i} = | f(x_i) |$$

La topología deducida de $\mathcal{F} = (| . |_{x_i})_{x_i \in \mathbb{R}}$ es la de la convergencia puntual.

1. 3. CASINORMAS

Definición

Una casinorma $| . |_i$ sobre el espacio vectorial F es una aplicación que verifica (1) , (2) y (3) del 1. 1. Además verifica:

$$(4') \qquad \exists\, C(F) > 0$$

tal que

$$\forall\ f, f' \in F \qquad | f + f' |_i \leq C(F) (| f |_i + | f' |_i)$$

(si C(F) = 1 , F es normado) .

Una casibola abierta $b_i(f_0, \rho)$ es $\{ f \in F\ ,\ | f - f_0 |_i < \rho \}$. En general, no vale que las casibolas sean convexas. Pero vale que las casibolas son casiconvexas, con respecto al centro, es decir que: si $f, f' \in b_i(f_0, \rho)$, entonces $\forall\ \lambda \in [0, 1]$:

$$\lambda f + (1 - \lambda) f' \in b_i (f_0, \rho\ C(F))$$

A toda familia de casi normas sobre el espacio vectorial F , le corresponde una topología definida por (6) y (7) de 1. 1. Si la familia posee un único elemento, el espacio F se dirá casinormado.

Lo importante en todo esto es la topología de F y no la casinorma de la cual se deduce. Análogamente, lo importante es la noción de espacio casinormable y no la de espacio casinormado.

Ejemplo

El espacio de Lebesgue $L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = L^{\frac{1}{2}}$ = al conjunto de las clases de equivalencia de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles, iguales p.p. tales que

$$| f |_{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) |^{\frac{1}{2}} dx \right)^2 < \infty$$

es un espacio casinormado, con $C(F) = 2$. Además el menor conjunto convexo que contiene a la casiesfera $b(0, \rho)$ es todo el espacio. En efecto, si $f \in b(0, 1)$ existe un número α tal que

$$\int_{-\infty}^{\alpha} |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\alpha}^{+\infty} |f(x)|^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}.$$

Sean

$$f_1(x) = f(x) \quad \chi_{]-\infty, \alpha[}(x)$$

$$f_2(x) = f(x) \quad \chi_{[\alpha, \infty[}(x)$$

entonces $g_1 = 4 f_1 \in b(0, 1)$ y $g_2 = 4 f_2 \in b(0, 1)$, por lo tanto

$$2f = \frac{g_1 + g_2}{2} \in \mathrm{Conv}\left[b(0, 1)\right]$$

Luego $b(0, 2) \leq \mathrm{Conv}[b(0, 1)]$, por recurrencia obtenemos $L^{\frac{1}{2}} \leq$ $\leq \mathrm{Conv}\left[b(0, 1)\right]$

(Esta demostración se puede adaptar al caso $L^p(\Omega, \mu)$ con $0 < p < 1$

y μ medida no atómica).

Como la imagen inversa, por una aplicación lineal, de un conjunto convexo es un conjunto convexo, se deduce que toda aplicación $T : L^{\frac{1}{2}} \longrightarrow \mathbb{C}$ lineal continua es idénticamente nula.

Sean E y F dos espacios casi normados, $T : E \longrightarrow F$ lineal, entonces

$$
\begin{aligned}
& T \text{ continuo} \\
\Longleftrightarrow \; & T \text{ continuo en el origen} \\
\Longleftrightarrow \; & \exists\, C(T) \geq 0 \qquad \forall f \in E \qquad |Tf|_F \leq C(T)|f|_E
\end{aligned}
$$

2. CATEGORIA DE LOS PARES DE INTERPOLACION DE ESPACIOS CASINORMADOS

En una categoría deben definirse los objetos y los morfismos, en nuestro caso:

2.1. LOS OBJETOS

Serán los pares de interpolación de espacios casinormados.

Definición

Un par de interpolación $(F_j)_{j=0,1}$ de espacios casinormados, es un par de espacios casinormados F_o y F_1, contenidos continuamente ambos en el mismo espacio vectorial $\mathcal{F}$ topológico de Haussdorf (observar que la notación es absurda, pues se dan tres espacios como dato). El espacio $\mathcal{F}$ permite definir

$$F_o + F_1 = \{ f \in \mathcal{F} \quad \exists f_i \in F_i \quad f = f_o + f_1 \}$$

$$F_o \cap F_1 = \{ f \in \mathcal{F} \quad f \in F_o \cap F_1 \}$$

2.2. LOS MORFISMOS

Dados dos objetos $(F_j)_j$ y $(G_j)_j$ de la categoría, un morfismo $T : (F_j)$ $(G_j)_j$ es un par de aplicaciones lineales y continuas

$$T_j : F_j \longrightarrow G_j \qquad (j = 0 \, , \, 1)$$

tales que T_0 y T_1 coinciden sobre $F_0 \cap F_1$. También se ve que es posible extender las aplicaciones T_j del morfismo T a una aplicación lineal $\widetilde{T}$ de $F_0 + F_1$ en $G_0 + G_1$.

Se comprueba fácilmente que con estas definiciones se verifican los axiomas de categoría.

3. METODO DE INTERPOLACION DE LIONS - PEETRE

Definamos con $t \in \mathbb{R}^+$, $f \in F_0 + F_1$, la función $K(t, f)$

$$\begin{aligned} K(\,.\,, f) : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto K(t, f) \end{aligned}$$

$$K(t, f) = \inf_{\substack{f = f_0 + f_1 \\ f_j \in F_j}} \{ |f_0|_0 + t\, |f_1|_1 \}$$

$K(t, f)$ tiene las siguientes propiedades:

a) $K(t, f)$ es creciente en t

b) $K(\,.\,, f)$ es cóncava (el ínfimo de funciones cóncavas es cóncava)

c) $\forall \lambda \quad K(t, \lambda f) = |\lambda| \, K(t, f)$

d) $\forall \; f, f' \in F_0 + F_1$

$$K(\,.\,,f+f') \leqslant C(F)\{K(\,.\,,f)+K(\,.\,,f')\}$$

con $C(F) = \max\limits_{j=0,1} C(F_j)$

Definición del espacio intermedio $(F_o\,,F_1)_{\theta p}$

Dado el objeto $(F_j)_j$, $\theta \in \,]0,1[$, $0 < p \leqslant \infty$, llamaremos

$$(F_o\,,F_1)_{\theta,p} = \{f \in F_o + F_1 \;;\; |f|_{\theta,p} = \{\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t\,,f))^p \frac{dt}{t}\}^{1/p} < \infty\}.$$

se verifica, usando las propiedades anteriores de $K(\,.\,,f)$ que $(F_o\,,F_1)_{\theta,p}$ es un espacio casinormado.

Observación:

Si consideramos la categoría de los espacios casinormables (F_j) , para cada elección de un par de casinormas

$$P = \{|\,.\,|_o\,,\,|\,.\,|_1\} \qquad P' = \{|\,.\,|'_o\,,\,|\,.\,|'_1\} \qquad .....$$

existe una función $K(t\,,f)$ para P ,

$K'(t\,,f)$ para P' .....

Siempre existen constantes $C_i > 0$ tal que para todo $f \in F_o + F_1$, $\forall\, t > 0$

$C_o K(t\,,f) \leqslant K'(t\,,f) \leqslant C_1 K(t\,,f)$.

Entonces $(F_o\,,F_1)_{\theta,p}$ es un espacio casinormable.

Teorema de interpolación (Lions y Peetre)

Dado un par de objetos $(F_j)_j$ y $(G_j)_j$ de la categoría, y un morfismo T entre ellos.

$$(F_j)_j \xrightarrow{\ T\ } (G_j)_j$$

Entonces T define por restricción a $(F_o , F_1)_{\theta, p}$ una aplicación lineal y continua

$$(F_o , F_1)_{\theta, p} \xrightarrow{\ T\ } (G_o , G_1)_{\theta, p}$$

y la norma de esta aplicación es

$$|T|_{\theta, p} \leqslant T = \max_{j=0,1} |T_j|$$

Demostración

Sea $f \in (F_o , F_1)_{\theta, p}$, entonces

$$K(t, Tf) = \inf_{\substack{Tf=g_o+g_1 \\ g_j \in G_j}} |g_o|_o + t|g_1|_1 \leqslant \inf_{\substack{f=f_o+f_1 \\ f_j \in F_j}} |Tf_o|_o + t|Tf_1|_1$$

$$\leqslant |T| \inf_{\substack{f=f_o+f_1 \\ f_j \in F_j}} |f_o|_o + t|f_1|_1 = |T|\, K(t, f)$$

De donde se deduce

$$|(Tf)|_{\theta, p} \leqslant |T|\, |f|_{\theta, p}$$

Q. E. D.

Nota 1

Se obtiene un teorema análogo si en lugar de suponer que $t^{-\theta} K(\,.\,, f) \in L^p_*$: $L^p_* = \{\varphi$ medibles $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$; $\left(\int_0^\infty (t^{-\theta} \varphi(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty$ se supone que $K(\,.\,, f)$ está en otro espacio de funciones.

Nota 2

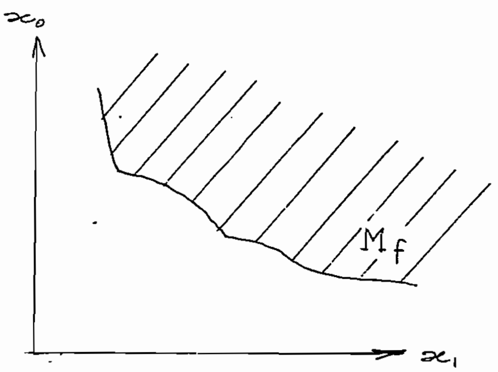
Análogamente se puede definir la categoría de los espacios de Banach, de los polinormables, etc. El problema es encontrar un subespacio de $F_o + F_1$ donde se pueda demostrar un teorema similar.

4. METODO DE INTERPOLACION DE GAGLIARDO.

Definición del dominio M_f

Dado el objeto $(F_j)_j$ para cada $f \in F_o + F_1$, llamaremos M_f al subconjunto de $(\mathbb{R}^+)^2$

$$M_f = \{ (x_1 , x_o) \; ; \; \exists \, f_j \in F_j \quad f = f_o + f_1 \; , \; |f_j|_j \leqslant x_j \}$$



Propiedades de M_f

Se verifica sin dificultad que

a) $M_{\lambda f} = |\lambda| \; M_f$

b) $M_{f+f'} \supseteq C(F) \{ M_f + M_{f'} \}$

c) M_f es casi convexo respecto al origen

d) M_f es estable para todos los desplazamientos horizontales hacia la derecha, idem para los desplazamientos hacia arriba.

Consideremos una función ϕ con las siguientes propiedades, definida sobre una familia $\mathbb{P}$ de partes de $(\mathbb{R}^+)^2$ tal que si $A \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$ verifica c), d) entonces $A \in \mathbb{P}$

$$\mathbb{P} \xrightarrow{\ \phi\ } \mathbb{R}^+$$

1) ϕ es positivamente homogénea:

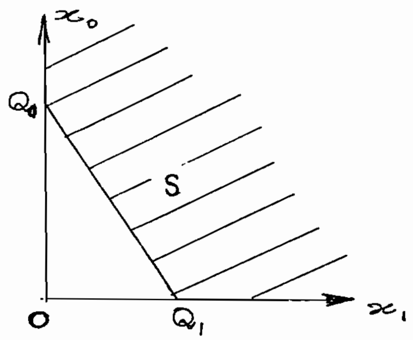
$$\lambda \geq 0 \quad y \quad A \in \mathbb{P} \qquad \phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$$

2) ϕ es casi subaditiva $\phi(A+B) \leq C_\phi (\phi(A) + \phi(B))$

3) ϕ es decreciente

$$\text{si} \quad A \subseteq B \, , \quad \text{entonces} \quad \phi(A) \geq \phi(B)$$

4) ϕ es no trivial, es decir:



i) existen α, $\beta > 0$ tales que si $0 = (0,0)$ $\begin{cases} Q_0 = (0, \alpha) \\ Q_1 = (\beta, 0) \end{cases}$, $S = (\mathbb{R}^+)^2 - 0 \overset{\triangle}{Q_0} Q_1$ entonces $\phi(S) \neq 0$

ii) existe $K_\phi > 0$ tal que si $A \in \mathbb{P}$ posee puntos sobre los ejes x_0, x_1 llamando $\xi_0 = \inf \{ x_0 : (0, x_0) \in A \}$, $\xi_1 = \inf \{ x_1 : (x_1, 0) \in A \}$ entonces $\phi(A) \leq K_\phi \, \text{máx} \, \{ \xi_0 , \xi_1 \}$.

<u>Definición de $(F_0, F_1)_\phi$</u>

Dado un objeto $(F_j)_j$ de la categoría, y ϕ con las propiedades 1) a 4) anteriores, llamaremos

$$(F_0, F_1)_\phi = \{ f \in F_0 + F_1 \; ; \; |f|_\phi = \phi(M_f) < \infty \}$$

Es un espacio casinormado. En efecto: $|f|_\phi$ verifica (1), (3), (4') de la definición de casinorma trivialmente.

Para verificar (2) veamos que:

$$f = 0 \iff M_f \supseteq \,]0, \infty[\times]0, \infty[$$

Si $M_f \supseteq \,]0, \infty[\times]0, \infty[$ entonces $\forall n$ existen f_{0n}, f_{1n} tales que

$$f = f_{0n} + f_{1n} \quad , \quad f_{jn} \in F_j \quad , \quad |f_{jn}|_j \leq \frac{1}{n} \implies \begin{cases} f_{0n} \longrightarrow 0 \text{ en } F_o \\ f_{1n} \longrightarrow 0 \text{ en } F_1 \end{cases}$$

(por la continuidad de la inclusión en F)

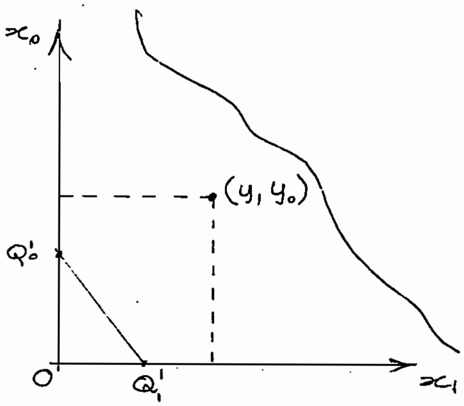
$$f_{0n} \longrightarrow 0 \text{ en } F \quad , \quad f_{1n} \longrightarrow 0 \text{ en } F \implies f_{0n} + f_{1n} \longrightarrow 0 \text{ en } F$$
$$\implies f = 0$$

La recíproca es trivial.

Luego $\phi(M_f) = |f|_\phi = 0 \implies f = 0$ pues si $M_f \not\supseteq \,]0, \infty[\times]0, \infty[$ entonces no puede tener puntos tan cerca del origen como se quiera, por la condición d) , luego existe un triángulo $\overset{\triangle}{OQ'_oQ'_1}$ de lado $\overline{Q'_oQ'_1}$ paralelo al $\overline{Q_oQ_1}$ contenido en $(\mathbb{R}^+)^2 - M_f$, por lo tanto si $S' = (\mathbb{R}^+)^2 - \overset{\triangle}{OQ'_oQ'_1}$ entonces $\phi(S') = 0$ por la condición 3) , luego por 1) $\phi(S) = 0$, absurdo por 4 i) .

Observación sobre la bondad de las condiciones 4 i) 4 i i)

1) La condición 4 i) implica que $(F_o , F_1)_\phi \xhookrightarrow{\subseteq} F_o + F_1$ continúa. Sea f_n una sucesión en $(F_o , F_1)_\phi$ tal que $|f_n|_\phi \longrightarrow 0$ entonces $M_{f_n} \longrightarrow \,]0, \infty[\times]0, \infty[$ en el sentido siguiente: si $y_1 > 0$, $y_o > 0$ entonces existe N tal que $(y_1 , y_o) \in M_{f_n}$ $\forall n \geq N$ pues si $(y_1 , y_o) \notin M_{f_n}$ para infinitos n entonces ninguno de ellos contiene puntos en el rectángulo de lados paralelos a los ejes con vértices en el origen y en (y_1 , y_o) luego existe



un triángulo $\overset{\triangle}{OQ'_0Q'_1}$ de lado $\overline{Q'_0Q'_1}$ paralelo al $\overline{Q_0Q_1}$ tal que $S' =$ $= (\mathbb{R}^+)^2 - \overset{\triangle}{OQ'_0Q'_1} \supseteq M_{f_n}$ para esos infinitos n, luego $\phi(S') \subseteq \phi(M_{f_n})$ para esa subsucesión, luego $\phi(S') = 0$, $\Rightarrow \phi(S) = 0$ por 1)

Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $(\varepsilon, \varepsilon) \in M_{f_n}$ $\forall\, n \geq N$, luego existen $f_n^j \in F_j$ tal que $f_n = f_n^0 + f_n^1$, $|f_n^0|_0 < \varepsilon$ $|f_n^1|_1 < \varepsilon$

$\Rightarrow$ $|f_n|_{F_0+F_1}$ $|f_n^0|_0 + |f_n^1|_1 < 2\varepsilon$ $\Rightarrow$ $f_n \longrightarrow 0$ en $F_0 + F_1$.

2) La condición 4ii) implica que $F_0 \cap F_1 \overset{\subseteq}{\hookrightarrow} (F_0, F_1)_\phi$ es continua. Si $f \in F_0 \cap F_1 \Longrightarrow f = f + 0$ $\therefore$ $(|f|_{j}, 0) \in M_f$, $(0, |f|_0) \in$ $\in M_f \Longrightarrow$ 4ii) $|f|_\phi \leq K_\phi \{|f|_1 + |f|_0\} = K_\phi \|f\|_{F_0 \cap F_1}$.

<u>Teorema</u> (de Gagliardo: ver [11]).

<u>Dado un par de objetos $(F_j)_j$ y $(G_j)_j$ y un morfismo $T : (F_j)_j \longrightarrow (G_j)_j$, entonces la aplicación lineal T define por restricción una aplicación lineal y continua</u>

$$(F_0, F_1)_\phi \xrightarrow{\;T\;} (G_0, G_1)_\phi$$

<u>para cada ϕ en las condiciones 1) a 4)</u>.

Demostración

Si $f \in (F_0, F_1)_\phi$, entonces

$$M_{Tf} = \{(y_1, y_o) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \exists g_j \in G_j \;,\quad Tf = g_o + g_1 \quad |g_j|_j \leq y_j\}$$

$$\supseteq \{(y_1, y_o) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \exists f_j \in F_j \;,\quad f = f_o + f_1 \quad |Tf_j|_j \leq y_j\}$$

$$\supseteq \{(y_1, y_o) \in (\mathbb{R}^+)^2 \quad \exists f_j \in F_j \;,\quad f = f_o + f_1 \;, |T|\,|f_j|_j \leq y_j\}$$

$$\supseteq |T| \quad M_f \qquad \text{donde} \qquad |T| = \max_j |T_j|_j$$

De donde $\quad |Tf|_\phi = \phi(M_{Tf}) \leq |T| \;\phi(M_f) = |T|\,|f|_\phi$

5. <u>RELACION ENTRE LOS METODOS DE INTERPOLACION DE LIONS - PEETRE Y DE GAGLIARDO</u> (Debidas a Lions y Peetre)

Estudiaremos las relaciones entre los espacios casinormados $(F_o, F_1)_{\theta, p}$ y $(F_o, F_1)_\phi$ deducidos de un objeto $(F_j)_j$ en cada método.

<u>Definición</u>

Si $A \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$, tal que a), b), c) y d) <u>llamaremos recta de apoyo de pendiente -t</u>, $t > 0$ <u>respecto de A</u>, a la recta cuya pendiente es $-t$, y su ordenada al origen es el ínfimo de las ordenadas al origen de las rectas de pendiente $-t$ y secantes a A.

(Tal recta existe si $A \neq \phi$).

Denotaremos por $\overline{K}(t, A)$ a la ordenada al origen de esta recta.

Para todo $\theta \in]0, 1[$, $p > 0$ y A que verifique a), b), c), d) designemos

$$\phi_{\theta, p}(A) = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta}\, \overline{K}(t, A))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

Es fácil ver que $\phi_{\theta, p}$ posee las propiedades 1) , 2) , 3) , 4) .

Siempre se verifica

$$K(t, f) = \overline{K}(t, M_f)$$

Conclusión

$$(F_o, F_1)_{\theta, p} = (F_o, F_1)_{\phi_{\theta, p}}$$

Luego el método de Lions y Peetre es un caso particular del método de Gagliardo, pero ambos utilizan técnicas distintas y por ello el método de Lions y Peetre resulta mucho más manejable.

Nota:

Las dos teorías se generalizan a las aplicaciones casilineales.

Ejercicio

Probar que si $0 < \theta < 1$ entonces $F_o \cap F_1 \subseteq (F_o, F_1)_{\theta, p}$

Si $\theta \leqslant 0$, $\theta \geqslant 1$ entonces $(F_o, F_1)_{\theta, p} = \{0\}$ si $p < \infty$

6. GENERALIDADES ACERCA DE LA INTERPOLACION

La teoría de la interpolación tiene por objeto principal la deducción de la continuidad de cierta aplicación lineal cuando se conoce la continuidad de otras dos aplicaciones lineales.

Hay dos escuelas que encaran el problema desde distintos puntos de vista:

a) la concreta

b) la abstracta

a) La escuela concreta (M. Riesz, Marcinkiewicz, Cotlar, Stampacchia, Weiss, Hunt, ...) considera casos particulares de objetos y morfismos.

Ejemplo 1.

El teorema de Riesz considera un morfismo

$$(L^{p_j}(\Omega))_j \qquad (L^{q_j}(\Omega'))_j$$

y la conclusión es

$$\text{para todo} \quad \theta \in [0, 1] \quad , \text{ si } \frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_o} + \frac{\theta}{q_1}$$

se obtiene una aplicación lineal continua

$$L^{p_\theta}(\Omega) \longrightarrow L^{q_\theta}(\Omega')$$

Ejemplo 2.

El teorema de Igari considera un morfismo del tipo

$$(L^{p_j}(\Omega))_j \longrightarrow (H^{p_j})_j$$

donde H^{p_j} es un espacio de Hardy (ver 21) y deduce la continuidad de

$$L^{p_\theta}(\Omega) \longrightarrow H^{p_\theta}$$

Para cada teorema se utiliza, en esta escuela, una técnica especial.

b) La escuela abstracta (Calderón, Lions, Peetre, Gagliardo, N. Doeutsch, Goulaouic, ...) trata en cambio de sistematizar las técnicas, procediendo en varias etapas.

1^a etapa: definición de un método de interpolación, por ejemplo (el de Lions-Peetre) Probar el teorema de interpolación.

2^a etapa: Estudiar las propiedades generales de los espacios contruidos.

3^a etapa: (generalmente la más difícil). Explicitar para cada par de interpolación de un tipo dado los espacios constituidos.

Ejemplo: $(L^{p_o}, L^{p_1})_{\theta,p} = ?$ $\quad (H^{p_o}, H^{p_1})_{\theta,p} = ?$

4^a etapa: Hallar relaciones con otros métodos de interpolación. (Ejemplo: ver 5.)

Observación

También es posible generalizar la teoría de la interpolación a aplicaciones bilineales.

Ejemplo: sean tres objetos $(F_j)_j$, $(G_j)_j$, $(H_j)_j$ y aplicaciones bilineales continuas T

$$F_o \times G_o \longrightarrow H_o$$

$$F_o \times G_1 \longrightarrow H_1$$

$$F_1 \times G_o \longrightarrow H_1$$

Existe una relación entre θ_k y p_k $(K = 1, 2, 3)$ tal que T define por restricción una aplicación lineal continua

$$(F_o, F_1)_{\theta_1 p_1} \times (G_o, G_1)_{\theta_2 p_2} \longrightarrow (H_o, H_1)_{\theta_3 p_3}$$

7. OTRO METODO DE INTERPOLACION (N. Doeutsch)

Este método puede aplicarse a espacios vectoriales topológicos, pero nos referiremos a espacios normados.

Sea $(A_i)_i$ un par de interpolación fijo, y $a = a_o + a_1$ $a_i \in A_i$, un elemento distinguido de $A_o + A_1$.

Si $(B_i)_i$ es otro par de interpolación y $\mathcal{F}\left[(B_i)_i\right]$ es el conjunto de los morfismos f

$$f : (A_i)_i \longrightarrow (B_i)_i$$

entonces se define

$$(B_o , B_1)_{\mathcal{F}} = \{ b \in B_o + B_1 : \exists f \in \mathcal{F}\left[(B_i)_i\right] \text{ tal que } f(a) = b$$

y

$$|b| = \inf_{\substack{f \in \mathcal{F}(B_i) \\ f(a)=b}} (f |\mathcal{F}|)$$

Puede comprobarse que $(B_o , B_1)\mathcal{F}$ resulta un espacio normado contenido continuamente en la $B_o + B_1$ y que contiene a $B_o \cap B_1$.

Resulta inmediatamente el teorema de interpolación.

<u>Teorema</u>

Si T es un morfismo $T : (B_i)_i \longrightarrow (C_i)_i$, entonces, define por restricción una aplicación lineal continua

$$(B_o\,,\,B_1)_{\mathcal{F}\left[(B_i)_i\right]} \longrightarrow (C_o\,,\,C_1)_{\mathcal{F}(C_i)}$$

Demostración

Si $b \in (B_o\,,\,B_1)_{\mathcal{F}\left[(B_i)_i\right]}$

$$\left|T(b)\right| = \inf_{\substack{g\in \mathcal{F}(C_i)_i \\ g(a)=Tb}} \left\{ \left|g\right|_{\mathcal{F}\left[(C_i)_i\right]} \right\} \leqslant \inf_{\substack{f\in \mathcal{F}(B_i)_i \\ f(a)=b}} \left\{ \left| T_o f \right|_{\mathcal{F}(C_i)_i} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left|T\right| \inf_{\substack{f\in \mathcal{F}(B_i)_i \\ f(a)=b}} \left\{ \left|f\right|_{\mathcal{F}(B_i)_i} \right\} = \left|T\right| \left|b\right|$$

Con este método se obtiene como caso particular el método complejo de Calderón, los teoremas sobre aplicaciones bilineales de Lions-Peetre, etc. (cf. [8] , [9]) .

LECCION 2

PROPIEDADES GENERALES DE LOS ESPACIOS INTERMEDIOS

Recordemos que si $f : R^+ \longrightarrow \bar{R}^+$, no es necesariamente medible, se define su integral superior como

$$\int^* f = \inf \int_0^\infty \varphi(t) \frac{dt}{t}$$
$$\begin{array}{l} \varphi \text{ semicontinua} \\ \text{inferiormente} \\ \varphi \geqslant f \quad \text{P.P.} \end{array}$$

Con esta definición valen cambios de variable, por ejemplo

$$\int^* |f(\lambda t)|^p \frac{dt}{t} = \int^* |f(t)|^p \frac{dt}{t} \qquad \forall \lambda > 0$$

(cf. Bourbaki - Livre VI - Chap. IV).

Llamaremos L^p_* al conjunto

$$L^p_* = \{ f \mid f : R^+ \longrightarrow \bar{R}^+ \ , \ \int^* f^p < \infty \} \qquad , \quad p < \infty$$

Análogamente se define L^∞_* .

1. DEFINICIONES EQUIVALENTES DE LOS $(F_0\ F_1)_{\theta p}$

El interés de estas definiciones equivalentes se ve al intentar explicitar el espacio obtenido: según el caso particular, una definición resultará más o menos práctica que las otras.

Por ejemplo, la cuarta que se dará, es útil para eliminar condiciones de medibilidad, que en general son dificultosas. (Ver problema 12) .

Teorema

Las siguientes definiciones de $(F_0\ F_1)_{\theta p}$ son equivalentes para $\forall \lambda$ real, $\lambda \neq 0$, $\theta \in \,]0,1[$, $p \in \,]0,\infty]$.

1$_\lambda$: Es el espacio naturalmente[(*)] casinormado de las $f \in F_0 + F_1$ que pueden descomponerse así:

$$f = u_0(t) + u_1(t) \quad \text{p.p. en } t ,$$

donde $u_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow F_j$, $j = 0 , 1$; y además las funciones

$$t \longrightarrow t^{\lambda(j-\theta)}\ |u_j(t)|_j ,$$

están en L^p_* .

2$_\lambda$: Es el espacio naturalmente casinormado de las

(*) O sea

$$|f| = \inf_{\{u_j\}} \sum_{j=0}^{1} \left\| t^{\lambda(j-\theta)}\ |u_j(t)|_j \right\|_{L^p_*}$$

<u>$f \in F_o + F_1$, tales que vale $\mathbf{1}_\lambda$ pero considerando sólo las u_j continuas (y además afines por trozos en el caso $\lambda = 1$).</u>

$\mathbf{3}_\lambda$: <u>Es el espacio naturalmente casinormado de las $f \in F_o + F_1$ tales que la función (cóncava y continua)</u>

$$t^{-\lambda\theta} K(t^\lambda, f) = \inf_{\substack{(f_j)_j \; f_j \in F_j \\ \sum_0^1 f_j = f}} (t^{-\lambda\theta} |f_o|_o + t^{\lambda(1-\theta)} |f_1|_1)$$

está en L^p_*.

$\mathbf{4}_\lambda$: <u>Es el espacio naturalmente casinormado de las $f \in F_o + F_1$, para las cuales se cumple:</u>

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad \exists (u_{jn})_j \quad , \quad \text{con} \quad u_{jn} \in F_j$$

<u>tales que</u>

$$f = u_{on} + u_{1n} \; ,$$

<u>y la "sucesión"</u>

$$(e^{\lambda(j-\theta)n} \, |u_{jn}|_j)_{n \in \mathbb{Z}}$$

está en l^p.

<u>Demostración</u>

Seguiremos el siguiente esquema (las flechas indican inclusiones continuas).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1}_1 \arrow[dd, bend right] & \\ \mathbf{2}_1 \arrow[u] & \mathbf{4}_1 \arrow[ul] \\ \mathbf{3}_1 \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

La demostración quedará completa probando

$$\mathbf{1}_\lambda \longleftrightarrow \mathbf{1}_1$$

$$\mathbf{2}_1 \longrightarrow \mathbf{2}_\lambda \longrightarrow \mathbf{1}_\lambda$$

$$\mathbf{3}_1 \longleftrightarrow \mathbf{3}_\lambda$$

$$\mathbf{3}_\lambda \longrightarrow \mathbf{4}_\lambda \longrightarrow \mathbf{1}_\lambda$$

$\mathbf{1}_1 \longrightarrow \mathbf{3}_1$

Si $f \in \mathbf{1}_1$, y $f = u_{ot} + u_{1t}$ p.p. en t, entonces

$$t^{-\theta} K(tf) = t^{-\theta} \inf_{f_o + f_1 = f} (|f_o|_o + t|f_1|_1) \leq t^{-\theta} (|u_{ot}|_o + t|u_{1t}|_1)$$

Luego,

$$\| t^{-\theta} K(tf) \|_{L^p_*} \leq \| t^{-\theta} |u_{ot}|_o + t^{1-\theta} |u_{1t}|_1 \|_{L^p_*} \leq A_p \sum_{j=0}^{1} \| t^{j-\theta} |u_{jt}|_j \|_{L^p_*}$$

Tomando ínfimo en el miembro de la derecha

$$|f|_{\mathbf{3}_1} \leq A_p |f|_{\mathbf{1}_1}$$

(A_p es la constante de la desigualdad triangular en el espacio casinormado L^p_*; si $p \geq 1$, $A_p = 1$).

$\mathbf{3}_1 \longrightarrow \mathbf{2}_1$

Sea $x_n = e^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Entonces si $\varepsilon > 0$ existen $f_{on} \in F_o$ y $f_{1n} \in F_1$

tales que $f_{on} + f_{1n} = f$, y

$$(1 + \varepsilon)\, K(x_n , f) \geq |f_{on}|_o + x_n |f_{1n}|_1$$

(suponemos $f \neq 0$, luego $K(t\, f) \neq 0 \quad \forall\, t > 0$; si $f = 0$ las equivalencias son evidentes.

Definimos

$u_{ot} = f_{ot}$ si $t = x_n$

u_{ot} completada afínmente entre x_n y x_{n+1}

$u_{1t} = f_{1t}$ si $t = x_n$

u_{1t} completada análogamente.

u_{ot} y u_{1t} son continuos, afines por trozos y

$$\forall\, t > 0 \qquad u_{ot} + u_{1t} = f$$

Por la concavidad de $K(t\, f)$ resulta

$$|u_{ot}|_o \leq C_o \; \{ \lambda |f_{on}|_o + (1 - \lambda) |f_{o\, n+1}|_o \} \leq C_o (1 + \varepsilon)\, K(t\, f)$$

para $t = \lambda x_n + (1 - \lambda) x_{n+1}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Además

$$t\, |u_{1t}|_1 \leq t\, C_1 \; \{ \lambda |f_{1n}|_1 + (1 - \lambda) |f_{1\; n+1}|_1 \} \leq$$

$$\leq C_1 (1 + \varepsilon) \; \{ \frac{t}{x_n} \; \lambda K(x_n f) + \frac{t}{x_{n+1}} (1 - \lambda)\, K(x_{n+1}\, f) \} \leq$$

$$\leq C_1 (1 + \varepsilon)\; e \;\; K(t\, f)$$

Luego

$$|f|_{\mathbf{2}_1} \leqslant (1+\varepsilon)\ e\ (C_o + C_1)\ |f|_{\mathbf{3}_1}$$

$\mathbf{3}_1 \longrightarrow \mathbf{4}_1$

Tomamos $u_{on} = f_{on}$ y $u_{1n} = f_{1n}$ como en la demostración anterior. Entonces

$$|u_{on}|_o \leqslant (1+\varepsilon)\ K(1^n f) \quad ,$$

luego

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} (e^{-\theta n} |u_{on}|_o)^p \frac{dt}{t} \leqslant (1+\varepsilon)^p\, 1^{\theta p} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (t^{-\theta} K(tf))^p \frac{dt}{t} \quad , \quad x_n \leqslant t \leqslant x_{n+1}$$

luego

$$\| 1^{-\theta n}\, |u_{on}|_o \|_{1^p} \leqslant (1+\varepsilon)\, 1^{\theta}\ |f|_{\mathbf{3}_1}$$

Análogamente, se procede con u_{1n}, y resulta la tesis.

$\mathbf{4}_1 \longrightarrow \mathbf{1}_1$

Dados $(u_{on})_n$ y $(u_{1n})_n$ tales que $f = u_{on} + u_{1n}$, definimos

$$w_{ot} = u_{on} \quad \text{si} \quad x_n \leqslant t < x_{n+1} \qquad\qquad w_{1t} = u_{1n} \quad \text{si} \quad x_n \leqslant t < x_{n+1}$$

Entonces

$$t^{-\theta} |w_{ot}|_o = t^{-\theta} |u_{on}|_o \leqslant 1^{-n\theta} |u_{on}|_o \quad \text{si} \quad x \leqslant t < x_{n+1}$$

Luego

$$\| t^{-\theta} |w_{ot}|_o \|_{L^p_*} \leqslant \| 1^{-n\theta} |u_{on}|_o \|_{1^p}$$

Análogamente para w_{1t} , y entonces

$$| f |_{1_1} \leqslant | f |_{4_1}$$

La demostración de

$$3_\lambda \longrightarrow 4_\lambda \longrightarrow 1_\lambda$$

es análoga a las dos anteriores.

Como las restantes son evidentes (usando en algunos casos el cambio de variable $t \longmapsto t^\lambda$), la demostración está completa.

2. UNA RELACION DE CONVEXIDAD

Teorema:

a) La siguiente es una casi norma en $(F_0 F_1)_{\theta p}$ equivalente a las consideradas hasta ahora:

$$(*)\quad | f | = \inf_{\substack{(u_j)_j \\ \sum_0^1 u_{jt} = f \\ u_j : \mathbb{R}^+ \to F_j}} \left\{ \left\| t^{-\theta} | u_{\theta t} |_o \right\|_{L^p_*}^{1-\theta} \cdot \left\| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \right\|_{L^p_*}^{\theta} \right\}$$

b) Si $(F_j)_j$ y $(G_j)_j$ son dos pares de interpolación de espacios casi normados y T un morfismo $(F_j)_j \longrightarrow (G_j)_j$. Llamando $\| T_j \|_j$ a las normas de las aplicaciones $T_j = T \mid F_j$, entonces la aplicación natural (definida por restricción de T)

$$(F_o \; F_1)_{\theta p} \longrightarrow (G_o \; G_1)_{\theta p}$$

tiene norma mayorada por

$$\| T_o \|_o^{1-\theta} \quad \| T_1 \|_1^{\theta}$$

Demostración:

Observemos que si A y $B > 0$ $A_1 B \in R$, la función $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\theta} A + \lambda^{1-\theta} B$ toma su mínimo absoluto en $\lambda_o = \frac{\theta}{1-\theta} \frac{A}{B}$ y que

$$\varphi(\lambda_o) = A^{1-\theta} B^{\theta} \; \gamma(\theta)$$

Con $\gamma(\theta) = (\frac{\theta}{1-\theta})^{-\theta} + (\frac{\theta}{1-\theta})^{1-\theta}$.

Entonces si u_{ot} y u_{1t} es una descomposición de la f, correspondiente a (*) $\exists \lambda$ tal que $\gamma(\theta)$

$$\| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|_{L_*^p}^{1-\theta} \; \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|_{L_*^p}^{\theta} = \lambda^{-\theta} \| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|_{L_*^p} +$$

$$+ \lambda^{1-\theta} \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|_{L_*^p} = \| \tau^{-\theta} | v_{o\tau} |_o \|_{L_*^p} + \| \tau^{1-\theta} | u_{1\tau} |_1 \|_{L_*^p}$$

donde $\lambda t = \tau$, $v_{o\tau} = u_{ot}$, $v_{1\tau} = u_{1t}$ (tal λ existe pues si p. ej.: $\| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|_{L_*^p} = 0$, entonces sería $\| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|_{L_*^p} = \infty$ contradiciendo que u_{ot} y u_{1t} es descomposición admisible de f).

Por lo visto, $\gamma(\theta) | f | \leqslant | f |_1$.

Dada $(u_j)_j$ tal que

$$u_j : R^+ \longrightarrow F_j$$

$$u_{ot} + u_{1t} = f \qquad \text{P. P.}$$

descomposición admisible para la casinorma $\mathbf{1}_1$

$$\| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|_{L^p_*} + \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|_{L^p_*} = \varphi(1)$$

con $\varphi(\lambda) = \lambda^{-\theta} \| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|_{L^p_*} + \lambda^{1-\theta} \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|_{L^p_*}$.

Poniendo

$$\lambda = \lambda_o \quad , \quad \varphi(1) \geqslant \varphi(\lambda_o) \quad ,$$

luego

$$\varphi(1) \geqslant \gamma(\theta) \ \| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|^{1-\theta}_{L^p_*} \ \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|^{\theta}_{L^p_*}$$

$\therefore$

$$\gamma(\theta) \, | f | = | f |_{\mathbf{1}_1}$$

b) Si $f \in (F_o \, F_1)_{\theta p}$, usando la casi norma $(*)$

$$| Tf | = \inf_{u_{ot}+u_{1t}=Tf} \left\{ \| t^{-\theta} | u_{ot} |_o \|^{1-\theta}_{L^p_*} \ \| t^{1-\theta} | u_{1t} |_1 \|^{\theta}_{L^p_*} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{v_{ot}+v_{1t}=f} \left\{ \| t^{-\theta} | T v_{ot} |_o \|^{1-\theta}_{L^p_*} \ \| t^{1-\theta} | T v_{1t} |_1 \|^{\theta}_{L^p_*} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \| T_o \|^{1-\theta}_o \ \| T_1 \|^{\theta}_1 \ \inf_{v_{ot}+v_{1t}=f} \left\{ \| t^{-\theta} | v_{ot} |_o \|^{1-\theta}_{L^p_*} \ \| t^{-\theta} | v_{1t} |_1 \|^{\theta}_{L^p_*} \right\} =$$

$$= \| T_o \|^{1-\theta}_o \ \| T_1 \|^{\theta}_1 \ | f |$$

3. ESTABILIDAD

Teorema

Sea $(F_j)_j$ un par de interpolación de espacios casinormados. Dados $0 < \theta_o < \theta < \theta_1 < 1$, si

$$w = \frac{\theta - \theta_o}{\theta_1 - \theta_o}$$

entonces la aplicación

$$\mathbb{C} = [(F_o\, F_1)_{\theta_o \infty}\ ,\ (F_o\, F_1)_{\theta_1 \infty}]_{wp} \xrightarrow{id} (F_o\, F_1)_{\theta p}$$

está definida y es continua.

Demostración

Llamando $X_j = (F_o\, F_1)_{\theta_j \infty}$ observemos que si $\lambda = \theta_1 - \theta_o$, entonces

$$-\lambda w = \theta_o - \theta$$

$$\lambda (1 - w) = \theta_1 - \theta$$

Si $f \in \mathbb{C}$, usando la definición 3_λ, resulta

$$|f|_C = \left\| \inf_{f_o + f_1 = f} \{ t^{\theta_o - \theta} |f_o|_{X_o} + t^{\theta_1 - \theta} |f_1|_{X_1} \} \right\|_{L^p_*}$$

Si $\varepsilon > 0$, fijado $t > 0$, $\exists\ \tilde{f}_o, \tilde{f}_1$ tales que

$$t^{\theta_o - \theta} |\tilde{f}_o|_{X_o} + t^{\theta_1 - \theta} |\tilde{f}_1|_{X_1} \leqslant (1 + \varepsilon)\, t^{-w\lambda}\ K(t^\lambda f)$$

Como

Como

$$(*)\qquad |\tilde{f}_o|_{X_o} = \Big\| \inf_{\substack{\varphi_o+\varphi_1=f_o\\ \varphi_j\in F_j}} (\tau^{-\theta_o}|\varphi_o|_o + \tau^{1-\theta_o}|\varphi_1|_1) \Big\|_{L_*^\infty}$$

$$(**)\qquad |\tilde{f}_1|_{X_1} = \Big\| \inf_{\substack{\psi_o+\psi_1=\tilde{f}_1\\ \psi_j\in F_j}} (\tau^{-\theta_1}|\psi_o|_o + \tau^{1-\theta_1}|\psi_1|_1) \Big\|_{L_*^\infty}$$

Para cada $\delta > 0$ existen $(\varphi_j)_j$, $(\psi_j)_j$ tales que

$$t^{-\theta_o}|\varphi_o|_o + t^{1-\theta_o}|\varphi_1|_1 \leqslant |\tilde{f}_o|_{X_o} + \delta$$

$$t^{-\theta_1}|\psi_o|_o + t^{1-\theta_1}|\psi_1|_1 \leqslant |\tilde{f}_1|_{X_1} + \delta$$

(recordar que las funciones de τ que aparecen en (*) y (**) son continuas).

Entonces

$$\inf_{\substack{u_o+u_1=f\\ u_j\in F_j}} \{t^{-\theta}|u_o|_o + t^{1-\theta}|u_1|_1\} \leqslant t^{-\theta}|\varphi_o+\psi_o|_o + t^{1-\theta}|\varphi_1+\psi_1|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \max\{C_o, C_1\}\left[t^{-\theta}|\varphi_o|_o + t^{1-\theta}|\varphi_1|_1 + t^{-\theta}|\psi_o|_o + t^{1-\theta}|\psi_1|_1\right] \leqslant$$

$$\leqslant \max\{C_o, C_1\}\left[t^{\theta_o-\theta}(|\tilde{f}_o|_{X_o} + \delta) + t^{\theta_1-\theta}(|\tilde{f}_1|_{X_1} + \delta)\right]$$

Por la arbitrariedad del δ resulta

$$\inf_{\substack{u_o+u_1=f\\ u_j\in F_j}} \{t^{-\theta}|u_o|_o + t^{1-\theta}|u_1|_1\} \leqslant \max\{C_o, C_1\}\left[t^{\theta_o-\theta}|\tilde{f}_o|_{X_o} + \right.$$

$$\left. + t^{\theta_1-\theta}|\tilde{f}_1|_{X_1}\right] \leqslant (1+\varepsilon)\max\{C_o, C_1\}\, t^{-w\lambda} K(t_1^\lambda f)$$

Luego

$$|f|_{(F_o, F_1)_{\theta p}} \leqslant \text{máx}\,\{C_o, C_1\}\, |f|_{\mathbb{C}}$$

LECCION 3

ESPACIOS DE LORENTZ

1. DOS BUENAS DESIGUALDADES

Estudiaremos las desigualdades de O'Neil y de Hardy, que serán de suma utilidad en lo sucesivo.

a) Desigualdades de O'Neil ([31])

Si $f : R^+ \longrightarrow R^+$ es creciente, $0 < p \leqslant q < \infty$ reales, y $\theta \neq 0$ entonces

$$\| t^\theta f \|_{L_*^q} \leqslant C \| t^\theta f \|_{L_*^p}$$

Idéntica desigualdad vale si f es decreciente y $\theta \ngeq 0$. En todos los casos

$$C = (|\theta| p)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

Demostración

Si $q \neq \infty$, en cualquiera de los dos casos

$$\| t^\theta f \|_{L_*^q}^q = \int_0^\infty |t^\theta f(t)|^q \frac{dt}{t} = \int_0^\infty |f(t)|^q t^{\theta q - 1} dt =$$

$$= \int_0^\infty |f(t)|^{q-p} |f(t)|^p t^{\theta q - 1} dt$$

Para acotar $|f(t)|^{q-p}$ observamos que en el caso de f decreciente

$$\| t^{\theta} f \|^{p}_{L^{p}_{*}} = \int_{0}^{\infty} | t^{\theta} f(t) |^{p} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{0}^{x} | t^{\theta} f(t) |^{p} \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant | f(x) |^{p} \int_{0}^{x} t^{p\theta - 1} \, dt = | f(x) |^{p} \frac{x^{\theta p}}{\theta p} \Longrightarrow | f(x) |^{p} \leqslant \frac{\| t^{\theta} f \|^{p}_{L^{p}_{*}}}{\frac{x^{\theta p}}{\theta p}}$$

Si en cambio, es f creciente, la acotación la hacemos así:

$$\| t^{\theta} f \|^{p}_{L^{p}_{*}} = \int_{0}^{\infty} | t^{\theta} f(t) |^{p} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{x}^{\infty} | t^{\theta} f(t) |^{p} \frac{dt}{t} \geqslant$$

$$\geqslant | f(x) |^{p} \int_{x}^{\infty} t^{\theta p - 1} \, dt = | f(x) |^{p} \frac{x^{\theta p}}{|\theta| p}$$

Por lo tanto

$$(1) \qquad | f(x) |^{p} \leqslant \| t^{\theta} f \|^{p}_{L^{p}_{*}} \frac{|\theta| p}{x^{\theta p}}$$

vale en ambos casos. Luego

$$| f(t) |^{q-p} = \left(| f(t) |^{p} \right)^{\frac{q-p}{p}} \leqslant \left(\| t^{\theta} f \|^{p}_{L^{p}_{*}} \frac{|\theta| p}{t^{\theta p}} \right)^{\frac{q-p}{p}}$$

En definitiva:

$$\| t^{\theta} f \|^{q}_{L^{q}_{*}} = \int_{0}^{\infty} | f(t) |^{q-p} \, | f(t) |^{p} \, t^{\theta q - 1} \, dt \leqslant (|\theta| p)^{\frac{q-p}{p}} \, \| t^{\theta} f \|^{q}_{L^{p}_{*}}$$

La tesis se obtiene extrayendo la raíz q.

Si $q = \infty$ basta observar la fórmula (1).

b) Desigualdades de Hardy ([17]) .

Definición

$$L^q_* = \{ f : R^+ \longrightarrow C \ , \ f \text{ medible}, \ \| f \|_{q\beta} = \left(\int_0^\infty | t^\beta f(t) |^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty$$

donde $\beta \in R$, $q \geqslant 1$.

Nota

L^q_* es un espacio vectorial. Su cociente por la relación de equivalencia $f \approx g \Longleftrightarrow f = g$ p.p. es un espacio normado con $\| . \|_{q\beta}$. Seguiremos llamando $L^q_{*\beta}$ a este cociente pues no habrá peligro de confusión.

Definición

Si $f \in L^q_{*\beta}$, llamaremos

$$\underline{f}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta)\, d\theta \quad , \quad \overline{f}(t) = \frac{1}{t} \int_t^\infty f(\theta)\, d\theta \quad , \quad t \in R^+$$

cuando tales integrales existan.

Las desigualdades de Hardy afirman que:

$$\text{si} \quad \frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{q} \qquad 1 \leqslant r , q \leqslant \infty$$

$$\underline{T} : L^q_{*\beta} \longrightarrow L^r_{*\beta} \quad \text{es continuo para} \quad \beta < 1$$

$$\overline{T} : L^q_{*} \longrightarrow L^r_{*\beta} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \beta < 1$$

Con $\overline{T} f(t) = \frac{1}{t} \int_t^\infty f(\theta)\, d\theta$; $\underline{T} f(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(\theta)\, d\theta$

Demostración

La idea es que los operadores $\underline{T}$ y $\overline{T}$ son de convolución, pero no en R con la suma y la medida de Lebesgue dt, sino en R^+, = grupo multiplicativo de los reales positivos, con la medida de Haar $\frac{dt}{t}$ (que es la única invariante por "translaciones", salvo constante, en el grupo localmente compacto R^+).

Probaremos varios lemas generales antes de pasar al caso concreto que nos interesa.

Lema 1

Sea G grupo conmutativo localmente compacto, dx medida de Haar para $G = \{ x \mid x \in G \}$. (No interesa distinguir entre translaciones izquierdas y derechas, porque G es conmutativo.

Sean $p, q, r \geqslant 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$.

Entonces si $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$ son medibles

$$\| f * g \|_r \leqslant \| f \|_p \quad \| g \|_q$$

Demostración

La suponemos conocida.

No es más que el teorema de Young, lo que afirma el Lema 1 . Se demuestra exactamente igual que en el caso de R^n con la medida de Lebesgue. Idem que $f * g$ es medible. Naturalmente la definición de $f * g$ es

$$f * g (y) = \int_G f (y_0 \, x^{-1}) \; g(x) \; dx$$

Lema 2

Sea G como en el Lema 1, $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, φ medible, φ homomorfismo, o sea $\varphi(x \,.\, y) = \varphi(x) \,.\, \varphi(y)$. Sean f y g, $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$, $g : G \longrightarrow \mathbb{C}$, medibles. Si

$$\| f \|_{p,\varphi} = \| f \varphi \|_p \quad , \quad \| g \|_{q,\varphi} = \| g \varphi \|_q \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{M} \; ,$$

$$p \, , \, q \, , \, M \geqslant 1$$

entonces

$$\| f * g \|_{M,} \leqslant \| f \|_{p,} \quad \| g \|_{q,}$$

Demostración

$\| f * g \|_{M,\varphi} = \| (f * g) \varphi \|_M$; pero

$$(f * g) \, \varphi(y) = \varphi(y) \int_G f(y \,.\, x^{-1}) \, g(x) \, dx = \int_G f(y_o x^{-1}) \, \varphi(y_o x^{-1}) \, \varphi(x) \, g(x) \, dx$$

$$= (f \varphi * g \varphi)(y) \Longrightarrow (f * g) \varphi = f \varphi * g \varphi$$

Luego

$$\| f * g \|_{M,\varphi} = \| (f * g) \varphi \|_M = \| f \varphi * g \varphi \|_M \leqslant \| f \varphi \|_p \, \| g \varphi \|_q =$$

$$= \| f \|_{p,\varphi} \quad \| g \|_{q,\varphi}$$

El teorema concreto que nos interesa es una consecuencia inmediata del Lema 2, pues en este caso $G = R^+$, $dx = \frac{dt}{t}$, $\varphi = t^{\beta}$ cumple $(t_1 \, t_2)^{\beta} = t_1^{\beta} \; t_2^{\beta}$.

Como por hipótesis $\frac{1}{M} \leqslant \frac{1}{q}$, $\exists\, p \geqslant 1$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{M}$$

tomando $\tilde{k}(t) = \frac{1}{t} \chi_{(0,1)}(t)$, $\underset{\smile}{k}(t) = \frac{1}{t} \chi_{(1,\infty)}(t)$ con $\chi_{(a,b)}$ = función característica de (ab) se verifica trivialmente que:

$$\underset{\smile}{k}(t) \in L^p_{*\beta} \qquad \text{si} \qquad \beta < 1$$

$$\tilde{k}(t) \in L^p_{*\beta} \qquad \text{si} \qquad \beta > 1$$

y además

$$\underline{f} = \underset{\smile}{k} * f \qquad ; \qquad \overline{f} = \tilde{k} * f$$

Luego

$$\| \underline{f} \|_{M\beta} \leqslant \| \underset{\smile}{k} \|_{p\beta} \; \| f \|_{q\beta} = \left(\frac{1}{p(1-\beta)}\right)^{1/p} \| f \|_{q\beta} \qquad (\beta < 1)$$

$$\| \overline{f} \|_{M\beta} \leqslant \| \tilde{k} \|_{p\beta} \; \| f \|_{q\beta} = \left(\frac{1}{p(\beta-1)}\right)^{1/p} \| f \|_{q\beta} \qquad (\beta > 1)$$

2. ENUNCIADO CLASICO DEL TEOREMA DE MARCINKIEWICZ [42]

Sean (Ω, μ) y (Ω', μ') espacios con medida positiva. $\mathcal{M}(\Omega)$ y $\mathcal{M}(\Omega')$ los respectivos espacios de funciones medibles, identificando las iguales p. p.

Sea $T : L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega')$, lineal.

Definición

Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, llamaremos función de distribución de f a

$f_* : R^+ \longrightarrow \bar{R}^+$,

$$f_*(t) = \mu\{\omega \mid |f(\omega)| > t\}$$

Nota

Las propiedades más usuales de f_* así como las de otras funciones que se deducen de ella (la reordenada y la promediada), que serán usadas más adelante, pueden verse en [32]; algunas de ellas son:

1) f_* es decreciente y continua a derecha.

2) $f_*(2t) \leqslant f'_*(t) + f''_*(t)$ si $f = f' + f''$

3) $\int_\Omega |f|^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} f_*(t)\, dt$ si $p > 0$

4) $t^p f_*(t) \leqslant \| f \|_p^p$ si $p > 0$

Definición

Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, llamaremos

$$\| f \|_{M_p} = \sup_{t \in R^+} (t^p f_*(t))^{1/p}$$

Por 4), $\| f \|_{M_p} \leqslant \| f \|_p$.

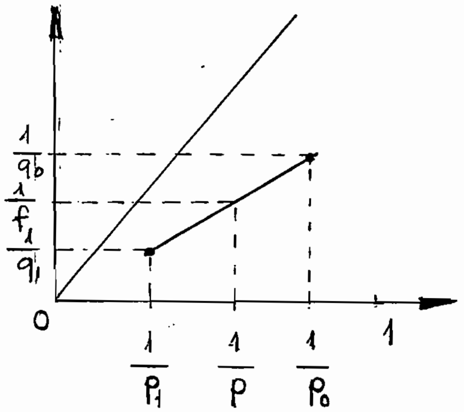
Teorema de Marcinkiewicz

Si $T : L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\Omega')$ es lineal; $1 \geqslant \frac{1}{p_j} \geqslant \frac{1}{q_j}$,

$j = 0, 1$; $q_0 \neq q_1$ y

$$\forall f \qquad \|Tf\|_{M_{q_j}} \leqslant C_j \|f\|_{p_j} \qquad j = 0, 1$$

entonces si $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$, $0 < \theta < 1$, tenemos que:

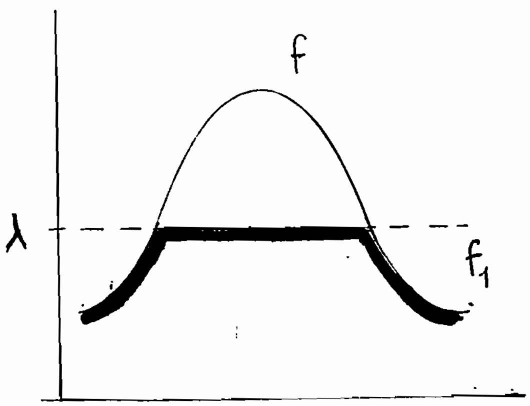


$$\forall f \quad \|Tf\|_q \leqslant C \|f\|_p$$

Demostración.

Sólo la haremos para el caso $p_0 = q_0$ $p_1 = q_1$, para ilustrar los métodos clásicos de demostración. El teorema general saldrá como caso particular de una abstracto que veremos pronto.

Sea $f \in L^p(\Omega)$, $0 < p_0 < p < p_1$. Llamaremos λ - troncadura de f , $\lambda > 0$ al par $f_{0\lambda}$, $f_{1\lambda}$ definido por



$$f_{0\lambda}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| \leqslant \lambda \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|}\,(|f(x)| - \lambda) & \text{si } |f(x)| > \lambda \end{cases}$$

$$f_{1\lambda}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leqslant \lambda \\ \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & \text{si } |f(x)| > \lambda \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que:

a) $f = f_{0\lambda} + f_{1\lambda}$

b) $f_{0\lambda} \in L^{p_0}$, $f_{1\lambda} \in L^{p_1}$

Entonces:

$$\| T f \|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} (T f)_* (t)\, dt = p\, 2^p \int_0^\infty t^{p-1} (T f)_* (2t)\, dt$$

$$f = f_{o\lambda} + f_{1\lambda} \Longrightarrow T f = T f_{o\lambda} + T f_{1\lambda} \Longrightarrow (T f)_* (2t) \leqslant (T f_{o\lambda})_* (t) + $$
$$+ (T f_{1\lambda})_* (t) \qquad \text{con} \qquad \lambda = t$$

$\therefore$

$$\| T f \|_p^p \leqslant p\, 2^p \Big[\underbrace{\int_0^\infty t^{p-1} (T f_{ot})_* (t)\, dt}_{A} + \underbrace{\int_0^\infty t^{p-1} (T f_{1t})_* (t)\, dt}_{B} \Big]$$

Acotaremos A y B usando las hipótesis.

A) Por hipótesis

$$\| T f_{o\lambda} \|_{M_{q_o}} \leqslant C_o \| f_{o\lambda} \|_{p_o} \quad ,$$

luego

$$t^{p_o} (T f_{o\lambda})_* (t) \leqslant C_o^{p_o} \| f_{o\lambda} \|_{p_o}^{p_o} \Longrightarrow (T f_{ot})_* (t) \leqslant C_o^{p_o}\, t^{-p_o} \| f_{ot} \|_{p_o}^{p_o}$$

$\therefore$

$$A \leqslant C_o^{p_o} \int_0^\infty t^{p-p_o-1} \| f_{ot} \|_{p_o}^{p_o}\, dt \;.$$

Pero $\| f_{ot} \|_{p_o}^{p_o} = \int_0^\infty p_o\, u^{p_o-1} (f_{ot})_* (u)\, du$. Se deduce de la definición de $(f_{ot})_*$ que $(f_{ot})_* (u) = (f)_* (u+t)$ $\therefore$

$$\| f_{ot} \|_{p_o}^{p_o} = p_o \int_0^\infty u^{p_o-1} f_* (u+t)\, du = p_o \int_t^\infty (\tau - t)^{p_o-1} f_* (\tau)\, d\tau$$

Entonces

$$A \leqslant C_o^{p_o} \int_0^{\infty} t^{p-1-p_o} \left[p_o \int_t^{\infty} (u - t)^{p_o - 1} f_* (u)\, du \right] dt \quad ,$$

y aplicando el teorema de Fubini

$$A \leqslant p_o\, C_o^{p_o} \int_0^{\infty} f_* (u) \left[\int_0^{u} (u - t)^{p_o - 1} t^{p-1-p_o}\, dt \right] du$$

y como

$$\int_0^{u} (u - t)^{p_o - 1} t^{p-1-p_o}\, dt = u^{p-1} \int_0^{u} (1 - \frac{t}{u})^{p_o - 1} (\frac{t}{u})^{p-1-p_o} \frac{dt}{u}$$

$\therefore$

$$A \leqslant \frac{p_o}{p} C_o^{p_o} \left[p \int_0^{\infty} f_* (u)\, u^{p-1}\, du \right] \underbrace{\int_0^{1} (1 - t)^{p_o - 1} t^{p-p_o-1}\, dt}_{\alpha}$$

$$A \leqslant \frac{p_o}{p} C_o^{p_o} \quad \| f \|_p^p$$ (α finito se verifica, pues $p_o > 0$, $p - p_o > 0$).

Procediendo con B análogamente:

$$(T f_{1t})_* (t) \leqslant C_1^{p_1} t^{-p_1} \| f_{1t} \|_{p_1}^{p_1}$$

$$\| f_{1t} \|_{p_1}^{p_1} = p_1 \int_0^{\infty} (f_{1t})_* (u)\, u^{p_1 - 1}\, du = p_1 \int_0^{t} u^{p_1 - 1} f_* (u)\, du$$

sale de aplicar la definición de $(f_{1t})_*$

Luego

$$B \leqslant \int_0^{\infty} t^{p-1}\, q^{p_1}\, t^{-p_1} \left[p_1 \int_0^{t} f_*(u)\, u^{p_1-1}\, du \right] dt =$$

$$= C_1^{p_1}\, p_1 \int_0^{\infty} f_*(u)\, u^{p_1-1} \left[\int_u^{\infty} t^{p-p_1-1}\, dt \right] du =$$

$$= C_1^{p_1}\, p_1 \int_0^{\infty} f_*(u)\, u^{p_1-1}\, \frac{u^{p-p_1}}{p_1-p}\, du =$$

$$= \frac{C_1^{p}\, p_1}{p_1-p} \int_0^{\infty} u^{p-1} f_*(u)\, du = \frac{C_1^{p}\, p_1}{p\,(p_1-p)} \left\| f \right\|_p^p$$

En definitiva:

$$\left\| T f \right\|_p^p \leqslant C \left\| f \right\|_p^p$$

y de allí

$$\left\| T f \right\|_p \leqslant C' \left\| f \right\|_p$$

C. Q. D.

Observaciones

1) En los razonamientos usados, no importa que alguna función no sea medible, pues en ese caso se interpreta la integral en el sentido del Capítulo II. Pero el teorema de Fubini lo hemos aplicado en una integral de Lebesgue.

2) La constante C' que depende de p, tiende a infinito a $p \longrightarrow p_0$ ó $p \longrightarrow p_1$ debido a la presencia de $\propto$.

3. ALGUNOS ESPACIOS FUNCIONALES

Sea (Ω, μ) espacio con medida $\mu \geqslant 0$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ f medible. $f_*(t)$ su función de distribución (definida en el § 2). Llamaremos:

Definición

Función reordenada $f^*(t)$ a

$$f^* : R^+ \longrightarrow R^+ \quad , \quad f^*(t) = \inf \{ x \mid f_*(x) \leqslant t \}$$

Prácticamente, f_* y f^* son funciones inversas.

Definición

Función promediada

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds$$

Algunas propiedades útiles que utilizaremos (cf. [32]) son:

1) $(f+g)^*(2t) \leqslant 2\,(f^*(t) + g^*(t))$

2) $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$

3) Si $G : R^+ \longrightarrow R^+$, G estrictamente creciente y suryectiva,

$G_o f^*(t) = (G_o |f|)^*(t)$

3a) Caso particular, si $G(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\alpha > 0$, entonces

$(f^*(t))^\alpha = (|f|^\alpha)^*(t)$

Definición de espacio de Lorentz

Dado $0 < p < \infty$, $0 < q \leqslant \infty$, se llama

$$L^{pq} = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \; ; \; f \text{ medible} \; , \; (\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t})^{1/q} = \| f \|_{pq} \; \| f \|_{pq} < \infty \}$$

Para $q < \infty$.

$$L^{p\infty} = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \; , \; f \text{ medible. Sup. es } t^{1/p} f^*(t) = \| f \|_{p\infty} \; \| f \|_{p\infty} < \infty \}$$

Definimos $L^{\infty q} = L^{\infty}$ $0 < q \leq \infty$.

Proposición 1

1) L^{pq} es un espacio vectorial casi-normado con $\| f \|_{pq}$.

2) Si $0 < \alpha < p \leq \infty$, y $0 < \alpha \leq q \leq \infty$, $\exists$, C , C' tal que, si $q \neq \infty$

$$C \left[\int_0^\infty (t^{\frac{\alpha}{p}} (|f|^\alpha)^{**}(t))^{\frac{q}{\alpha}} \frac{dt}{t} \right]^{1/q} \leq \| f \|_{pq} \leq C' (\int_0^\infty (t^{\frac{\alpha}{p}} (|f|^\alpha)^{**}(t))^{\frac{q}{\alpha}} \frac{dt}{t})^{1/q}$$

Análogamente, si $q = \infty$, $\exists$ k , k'

$$k \text{ sup. es. } (t^{\frac{\alpha}{p}} (|f|^\alpha)^{**}(t))^{1/\alpha} \leq \| f \|_{p\infty} \leq k' \text{ sup. es. } (t^{\frac{\alpha}{p}} (|f|^\alpha)^{**}(t))^{1/\alpha}$$

Demostración

1) Trivial. Basta aplicar 1) y desigualdades válidas en L^p , $p > 0$.

2) Las desigualdades en que intervienen C' y k' , valen siempre, con $C' = k' = 1$, aunque $\alpha \nless p$. Dado que $(f^*)^\alpha = (|f|^\alpha)^* \leq (|f|^\alpha)^{**}$ se verifica fácilmente.

Verifiquemos la desigualdad con C: Se trata de aplicar la desigualdad de Hardy relativa a T (cf. § 1)

$$\| f \|_{pq} = \left(\int_0^{\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left(\int_0^{\infty} (t^{\alpha/p} (|f|^{\alpha})^*)^{q/\alpha} \frac{dt}{t} \right)^{1/q}$$

Usando la notación del § 1 ,

$$\| f \|_{pq} = \left\| (|f|^{\alpha})^* \right\|_{r\beta}^{1/\alpha} \quad , \quad r = \frac{q}{\alpha} \geq 1 \quad \beta = \frac{\alpha}{p} < 1$$

Análogamente:

$$\left(\int_0^{\infty} (t^{\frac{\alpha}{p}} (|f|^{\alpha})^{**}(t))^{\frac{q}{\alpha}} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} = \left\| \underline{T} (|f|^{\alpha})^* \right\|_{r\beta}^{1/\alpha}$$

De allí la conclusión.

El caso $q = \infty$ queda comprendido en lo anterior.

C. Q. D.

Observemos que $L^{pp} = L^p$ como espacio casinormable.

<u>Proposición 2</u>

Si $0 < q \leq r \leq \infty$, $0 < p \leq \infty$ entonces

$$L^{pq} \xrightarrow{id} L^{pr}$$

está definida y es continua.

<u>Demostración</u>

Consecuencia inmediata de las desigualdades de O'Neil (cf. § 1) .

Observación

Hemos definido el espacio de Lorentz L^{pq} , $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. Por lo general se supone en la bibliografía que $p \geq 1$, $q \geq 1$. Notemos que:

a) Si $p > 1$, $q \geq 1$ nuestra definición coincide con la usual.

b) Pero para $p = 1$ nuestra definición es diferente (cf. [32]) .

c) Si $p > 1$, $q \geq 1$ se puede tomar $\alpha = 1$, entonces los espacios resultan normables dado que $(f + g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$.

LECCION 4

TEOREMA DE MARCINKIEWICZ Y GENERALIZACIONES

1. IDENTIDADES DE CALDERON (IDENTIFICACION DE $(L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta, r}$)

Teorema

Si $0 < p_i , q_i \leq \infty , 0 < r \leq \infty , 0 < \theta < 1 , p_o \neq p_1,$
$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$ entonces

$$(L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta, r} = L^{pr}$$

(Esta identidad fue demostrada de distintas maneras por Calderón y Peetre si $p_i > 1$ y $q_i , r \geq 1$).

Demostración

Supondremos $p_o < p_1$ (si $p_1 < p_o$ se puede demostrar análogamente, o mejor, usar la relación $(F_o , F_1)_{\theta, r} = (F_1 , F_o)_{1-\theta, r}$).

Supondremos también $p_1 < \infty$, recordando que $L^{\infty q} = L^{\infty}$, $0 < q \leq \infty$, la demostración si $p_1 = \infty$ sigue el mismo esquema simplificándose algunos pasos.

Para mayor claridad dividiremos la demostración en tres partes:

a) Sea $0 < \alpha \leq r$, $\alpha \leq q_o$, $\alpha \leq q_1$, $\alpha < \infty$

$$L^{pr} \hookrightarrow (L^{p_o\alpha}, L^{p_1\alpha})_{\theta, r}$$

b) $$(L^{p_o\alpha}, L^{p_1\alpha})_{\theta, r} \hookrightarrow (L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta, r}$$

c) $$(L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta, r} \hookrightarrow L^{pr}$$

Las flechas, como siempre, indican inclusión continua.

<u>Demostración de a)</u>

Sea $\mathbb{C} = (L^{p_o\alpha}, L^{p_1\alpha})_{\theta, r}$, con la definición 1_λ

$$|f|_{\mathbb{C}} = \inf_{\substack{u_{ot}+u_{1t}=f \\ u_{jt}\in L^{p_j}}} \left\{ \left\| t^{-\lambda\theta} |u_{ot}|_o \right\|_{L_*^r} + \left\| t^{\lambda(1-\theta)} |u_{1t}|_1 \right\|_{L_*^r} \right\}$$

con $|u_{jt}|_j = |u_{jt}|_{L^{p_j\alpha}}$.

Sea $\theta_o = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_o} < 0$, $\theta_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} > 0$.

Como $\frac{\theta_o}{\theta_1} = \frac{-\theta}{1-\theta}$ existe $\lambda \neq 0$ tal que $\begin{cases} -\lambda\theta = \theta_o \\ \lambda(1-\theta) = \theta_1 \end{cases}$ resulta

$$\lambda = \frac{1}{p_o} - \frac{1}{p_1} > 0$$

Si $f \in L^{pr}$, le hacemos la siguiente descomposición:

$$f_{ot} = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > f^*(t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad f_{1t} = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > f^*(t) \\ f(x) & \text{si no} \end{cases}$$

entonces

$$(f_{ot})^*(s) \leq \begin{cases} f^*(s) & \text{si } s < t \\ 0 & \text{si } s \geq t \end{cases} \qquad (f_{1t})^*(s) \leq \begin{cases} f^*(t) & \text{si } s < t \\ f^*(s) & \text{si } s \geq t \end{cases}$$

$$| f_{ot} |_o = \left\{ \int_0^{\infty} (s^{1/p_o} (f_{ot})^*(s))^{\alpha} \frac{ds}{s} \right\}^{1/\alpha} \leq \left\{ \int_0^{t} (s^{1/p_o} f^*(s))^{\alpha} \frac{ds}{s} \right\}^{1/\alpha}$$

para aplicar las desigualdades de Hardy (Cap. III § 1) ponemos

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \left[s^{1/p_o} f^*(s) \right]^{\alpha}$$

entonces

$$| f_{ot} |_o \leq \left[t \, \underline{\varphi}(t) \right]^{1/\alpha}$$

Entonces

$$\| t^{-\lambda\theta} | f_{ot} |_o \|_{L_*^r} = \| t^{\theta_o} | f_{ot} |_o \|_{L_*^r} \leq \| t^{\alpha\theta_o+1} \underline{\varphi}(t) \|_{L_*^{r/\alpha}}^{1/\alpha}$$

Como $\alpha\theta_o + 1 < 1$, $r/\alpha \geq 1$ por desigualdad de Hardy

$$\| t^{-\lambda\theta} | f_{ot} |_o \|_{L_*^r} \leq k_1 | f |_{L^{pr}} \quad , \quad k_1 = k_1 (\alpha , \theta_o)$$

Análogamente, usando la otra desigualdad de Hardy,

$$\| t^{\lambda(1-\theta)} | f_{1t} |_1 \|_{L_*^r} \leq k_2 | f |_{L^{pr}} \quad , \quad k_2 = k_2 (r , \alpha , p_1 , \theta_1)$$

<u>Demostración de b)</u>

Por la Proposición 2 , § 3 , Cap. III tenemos

$$L^{p_o\alpha} \hookrightarrow L^{p_o q_o}$$

$$L^{p_1\alpha} \hookrightarrow L^{p_1 q_1}$$

luego, es inmediato que

$$(L^{p_o\alpha}, L^{p_1\alpha})_{\theta,r} \hookrightarrow (L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta,r}$$

Demostración de c)

Como, por las mismas razones que en b) ,

$$(L^{p_o q_o}, L^{p_1 q_1})_{\theta,r} \hookrightarrow (L^{p_o\infty}, L^{p_1\infty})_{\theta,r}$$

basta probar que

$$(L^{p_o\infty}, L^{p_1\infty})_{\theta,r} \hookrightarrow L^{pr}$$

Si $f \in (L^{p_o\infty}, L^{p_1\infty})_{\theta,r}$, usando la definición 1_λ , con el mismo λ que en a) , tenemos

$$|f|_{(L^{p_o\infty}, L^{p_1\infty})_{\theta,r}} = \inf_{f=f_{ot}+f_{1t}} \left\{ \left\| t^{\theta_o} |f_{ot}|_o \right\|_{L^r_*} + \left\| t^{\theta_1} |f_{1t}|_1 \right\|_{L^r_*} \right\}$$

donde se entiende que $|f_{jt}|_j = |f_{jt}|_{L^{p_j\infty}}$.

Si $f = f_{ot} + f_{1t}$ entonces

$$f^*(2s) \leq 2\{(f_{ot})^*(s) + (f_{1t})^*(s)\} \qquad s > 0$$

en particular, s = t ,

$$f^*(2t) \leqslant 2\,\{(f_{ot})^*(t) + (f_{1t})^*(t)\}$$

$$|f|_{L^{pr}} = \left\| (2t)^{1/p} f^*(2t) \right\|_{L^r_*} \qquad \left\| 2^{1+\frac{1}{p}}\, t^{1/p}\, \{(f_{ot})^*(t) + (f_{1t})^*(t)\} \right\|_{L^r_*} \leqslant$$

$$\leqslant k_3 \left\{ \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_o}}\, t^{1/p_o} f^*_{ot}(t) \right\|_{L^r_*} + \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}\, t^{\frac{1}{p_1}} f^*_{1t}(t) \right\|_{L^r_*} \right\}$$

pero

$$t^{1/p_o}(f_{ot})^*(t) \leqslant \sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_o}} (f_{ot})^*(s) = |f_{ot}|_o \qquad \text{p. p.}$$

$$t^{1/p_1}(f_{1t})^*(t) \leqslant |f_{1t}|_1 \qquad \text{p. p.}$$

por lo tanto

$$|f|_{L^{pr}} \leqslant k_3 \left\{ \left\| t^{\theta_o} |f_{ot}|_o \right\|_{L^r_*} + \left\| t^{\theta_1} |f_{1t}|_o \right\|_{L^r_*} \right\}$$

Luego, tomando ínfimo,

$$|f|_{L^{pr}} \leqslant k_3\, |f|_{(L^{p_o\infty},\ L^{p_1\infty})_{\theta, r}} \quad , \qquad k_3 = k_3(r, p)$$

2. APLICACIONES

Por el teorema del Cap. II , § 2 ; si T_o es un operador lineal tal que

$$T_o : L^{p_o q_o} \longrightarrow L^{p'_o q'_o}$$

continuo con norma M_o y T_1 es un operador lineal tal que

$$T_1 : L^{p_1 q_1} \longrightarrow L^{p'_1 q'_1}$$

continuo con norma M_1 coincidiendo T_o y T_1 en $L^{p_o q_o} \cap L^{p_1 q_1}$, entonces llamando T al único operador lineal

$$T : L^{p_o q_o} + L^{p_1 q_1} \longrightarrow L^{p'_o q'_o} + L^{p'_1 q'_1}$$

que extiende a ambos.

Entonces

$$T : (L^{p_o q_o} , L^{p_1 q_1})_{\theta, r} \longrightarrow (L^{p'_o q'_o} , L^{p'_1 q'_1})_{\theta, r} \ , \quad 0 < \theta < 1 \ , \quad 0 < r \leq \infty$$

es continuo con norma $M \leq M_o^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Si

$$0 < p_i , q_i \leq \infty \quad , \quad p_o \neq p_1 \quad , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$0 < p'_i , q'_i \leq \infty \quad , \quad p'_o \neq p'_1 \quad , \quad \frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p'_o} + \frac{\theta}{p'_1}$$

por § 1 hemos obtenido

$$| \, Tf \, |_{L^{p' r}} \leq k \, M_o^{1-\theta} M_1^{\theta} | \, f \, |_{L^{pr}} \qquad \forall f \in L^{pr}$$

con $k = k(\theta , r , p_o , q_o , p_1 , q_1 , p'_o , q'_o , p'_1 , q'_1)$ y a fortiori, prop. 2 , § 3 , Cap. III ,

$$T : L^{pr} \longrightarrow L^{p' s} \qquad \forall s \geq r$$

continuamente, que es el teorema de Hunt [19] .

Poniendo $r = p$ vemos que

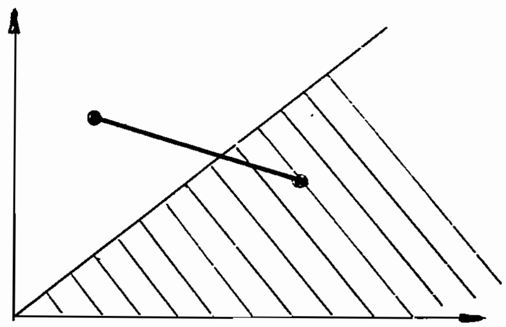
$$T : L^p \longrightarrow L^{p'p}$$

y si $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{p'}$ obtenemos

$$L^p \xrightarrow{T} L^{p'p} \xrightarrow{id} L^{p'}$$

continuamente.

En el caso particular en que $q_j = p_j$, $j = 0, 1$ y $q_j' = \infty$, $j = 0, 1$ tenemos que, con la terminología de Zygmund [42] , si T es de tipo débil (p_j, p_j') , $j=0,1$ es de tipo fuerte (p, p') si $\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{p'}$: es la extensión del teorema de Marcinkiewicz, [30] y [42] , correspondiente al caso en que los puntos



$m_j = (\frac{1}{p_j}, \frac{1}{p_j'})$ son cualesquiera en el primer cuadrante del plano y la conclusión vale en los puntos del segmento $\overline{m_o m_1}$ que yacen en el primer octante, siempre supuesto que valga $p_o \neq p_1$, $p_o' \neq p_1'$. La condición $p_o \neq p_1$ se puede eliminar por la observación del hecho que $(F_o, F_o)_{\theta, r} = F_o$ para todo espacio casinormado.

En cambio la condición $p_o' \neq p_1'$ es esencial, cf. [6] pág. 177 , vale decir que un operador puede ser tipo débil (p_o, q) y (p_1, q) y no ser tipo fuerte (p, q) con $p_o < p < p_1$, aún cuando $\frac{1}{p_j} \geqslant \frac{1}{q}$.

Pero si hay tipo fuerte (p_o, q) y (p_1, q) entonces hay tipo fuerte (p, q) con $p_o \leqslant p \leqslant p_1$.

También resulta de lo visto anteriormente que la condición de tipo débil puede reemplazarse por la de tipo débil restringido cf. [32] .

Por supuesto también resulta que si $(F_j)_j$ es un par de interpolación de espacios casinormados y T un morfismo

$$(L^{p_j q_j})_j \longrightarrow (F_j)_j$$

queda definida una aplicación lineal continua

$$L^{pr} \longrightarrow (F_o , F_1)_{\theta, r}$$

3. ESPACIOS INTERMEDIOS ENTRE ESPACIOS L^p CON PESOS

Definición

Si X es un conjunto no vacío, y w un peso sobre X , o sea

$$w : X \longrightarrow R^+ \qquad , \qquad w(X) \neq 0 \quad \forall x \in X$$

y si A es un espacio casi normado, llamaremos $L^\infty_w(X, A) = L^\infty_w(A)$, al espacio naturalmente casi normado de las aplicaciones $f : X \longrightarrow A$, tales que $w(x) \left| f(x) \right|$ es acotada.

Teorema

Si $(A_j)_j$ es un par de interpolación de espacios casinormados,

$$(L^\infty_{w_o}(A_o) , L^\infty_{w_1}(A_1))_{\theta p} \xrightarrow{id} L^\infty_{w_o^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_o A_1)_{\theta p})$$

está definida y es continua.

Demostración

Es inmediato que $(L^{\infty}_{w_j}(A_j))_j$ es un par de interpolación. Para los espacios intermedios, usando la definición $\mathfrak{f}_1$, tenemos que:

Si

$$f \in (L^{\infty}_{w_o}(A_o)\ ,\ L^{\infty}_{w_1}(A_1))_{\theta p} = \mathbb{C}$$

$$|f|_{\mathbb{C}} = \inf_{(f_j)_j} \sum_{j=0}^{1} \left\| t^{(j-\theta)} |f_{jt}|_{L^{\infty}_{w_j}(A_j)} \right\|_{L^p_*}$$

donde

$$f_j : R^+ \longrightarrow L^{\infty}_{w_j}(A_j) \quad , \quad f_{ot} + f_{1t} = f \qquad \text{p. p.}$$

Además $f : X \longrightarrow A_o + A_1$; entonces si $f(x) = f_{ot}(x) + f_{1t}(x) \quad \forall x \in X$, tenemos que para cada X

$$t^{(j-\theta)} w_j(x) \left| f_{jt}(x) \right|_{A_j} \leqslant t^{j-\theta} \left| f_{jt} \right|_{L^{\infty}_{w_j}(A_j)}$$

Luego

$$\left\| w_j(x) \ \ t^{j-\theta} | f_{jt}(x) |_{A_j} \right\|_{L^p_*} \leqslant \left\| t^{j-\theta} | f_{jt} |_{L^{\infty}_{w_j}(A_j)} \right\|_{L^p_*}$$

si definimos

$$g_{j\tau} = f_{jt} \quad , \quad t = \tau \frac{w_o(x)}{w_1(x)}$$

tenemos que

$$(1) \qquad w_j(x) \left\| t^{j-\theta} | g_{j\tau}(x) |_{A_j} \right\|_{L^p_*} = w_j(x) \left\| t^{j-\theta} | f_{jt}(x) |_{A_j} \right\|_{L^p_*}$$

haciendo en (1) el cambio de variable $t = \tau \dfrac{w_o(x)}{w_1(x)}$

$$w_j(x) \left\| t^{j-\theta} \left| g_{j\tau}(x) \right|_{A_j} \right\|_{L_*^p} = w_j(x) \frac{w_o^{j-\theta}(x)}{w_1^{j-\theta}(x)} \left\| \tau^{j-\theta} \left| g_{j\tau}(x) \right|_{A_j} \right\|_{L_*^p}$$

(por las propiedades ya enunciadas de la medida $\frac{dt}{t}$)

$$w_j(x) \frac{w_o^{j-\theta}(x)}{w_1^{j-\theta}(x)} = w_o^{1-\theta}(x) \; w_1^{\theta}(x) \qquad \text{si} \qquad j = 0 , 1$$

por lo tanto, usando la definición $\mathfrak{I}_1$ de espacio intermedio,

$$w_o^{1-\theta}(x) \, w_1^{\theta}(x) \left| f(x) \right|_{(A_o, A_1)_{\theta, p}} \leqslant w_o^{1-\theta}(x) \, w_1^{\theta}(x) \sum_{j=0}^{1} \left\| \tau^{j-\theta} \left| g_{j\tau}(x) \right|_{A_j} \right\|_{L_*^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{1} \left\| t^{j-\theta} \left| f_{jt} \right|_{L^{\infty}_{w_j}(A_j)} \right\|_{L_*^p}$$

tomando ínfimo sobre las descomposiciones de f , obtenemos, para cada x fijo,

$$w_o^{1-\theta}(x) \;\; w_1^{\theta}(x) \left| f(x) \right|_{(A_o, A_1)_{\theta, p}} \leqslant \left| f \right|_{\mathfrak{C}}$$

luego

$$\left| f \right|_{L^{\infty}_{w_o^{1-\theta} w_1^{\theta}}((A_o, A_1)_{\theta p})} \leqslant \left| f \right|_{\mathfrak{C}}$$

APLICACION A LOS ESPACIOS DEL TIPO H^p $(p > 0)$

(Los espacios H^p de clases de Hardy de funciones holomorfas en el disco unidad, están definidos y generalizados en [18] , [41] y [42]) .

Definición

Si $T =]0,2[$ y $L^{pq} = L^{pq}(T, \mathbb{C})$ es el espacio de Lorentz asociado a T, de funciones complejas (Medibles Lebesgue); y si $X =]0,1[$, llamaremos H^{pq} al subespacio de $L^{\infty}(X, L^{pq})$ formado por las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tilde{f} : X &\longrightarrow L^{pq} \\ r &\longrightarrow \tilde{f}_r \end{aligned}$$

tales que existe una función holomorfa f en el disco unidad, con

$$\tilde{f}_r(\theta) = f(r e^{i\theta}) \qquad \forall \theta \in T \quad , \qquad \forall r \in X$$

Por las proposiciones anteriores, si $p_o \neq p_1$, tenemos que

$$(H^{p_o q_o}, H^{p_1 q_1})_{\theta r} \xrightarrow{\text{id}} H^{pr} \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} = \frac{\theta}{p_1}$$

está definida y es continua, dado que toda función de $(H^{p_o q_o}, H^{p_1 q_1})_{\theta r}$ proviene de una función analítica en el sentido definido más arriba. Con lo que se ha demostrado:

Proposición

Sea $(A_j)_j$ un par de interpolación cualquiera, y un par

$$(H^{p_j q_j})_j \qquad \text{con} \qquad p_o \neq p_1$$

y $T : (A_j)_j \longrightarrow (H^{p_j q_j})_j$ un morfismo. Entonces para $\forall\ \theta \in]0,1[$ y $r \in \mathbb{R}^+$, T da una aplicación lineal continua

$$(A_o\ A_1)_{\theta r} \longrightarrow H^{pr} \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$$

LECCION 5

INTERPOLACION DE ESPACIOS DE BANACH

1. INTRODUCCION

Hasta ahora hemos estudiado los espacios $(A_0 , A_1)_{\theta, p}$, intermedios entre dos espacios casinormados que pueden no ser normables ni completos.

A continuación haremos una introducción a la teoría de J. L. Lions y J. Peetre ([28]) .

Supondremos conocidas las propiedades elementales de la integral de funciones a valores en un espacio de Banach (cf. Hille - Phillips — Functional analysis and semigroups, pág. 58 - 89) .

La definición 1_λ que aparecerá más abajo es la que vincula esta teoría con lo ya estudiado.

Los espacios $S(p_0 , -\theta , A_0 ; p_1 , 1-\theta , A_1)$ de Lions-Peetre son los que aquí denotaremos $(A_0 , A_1)_{\theta, p_0, p_1}$.

Recordemos que si $(A_j)_{j=0,1}$ es un par de interpolación de espacios de Banach, $A_j \subseteq \mathcal{A}$ (continuamente), siendo $\mathcal{A}$ espacio vectorial topológico separado, entonces al espacio vectorial $A_0 \oplus A_1$ se le puede asociar una norma que lo convierte en espacio de Banach .

$$\| (a_o , a_1) \|_{A_o \oplus A_1} = \text{máx} \{ \| a_o \|_{A_o} , \| a_1 \|_{A_1} \}$$

Del siguiente diagrama resulta que $A_o + A_1$ es un espacio de Banach, conteniendo continuamente en $\mathcal{A}$

$$\begin{tikzcd}
A_o \oplus A_1 \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{A} \\
\dfrac{A_o \oplus A_1}{\ker +} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, dashed] & A_o + A_1 \arrow[u, "\cup\!\mid"']
\end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} + : A_o \oplus A_1 &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a_o , a_1) &\longmapsto a_o + a_1 \end{aligned} \qquad \text{continua}$$

π es la proyección canónica, y φ el isomorfismo natural, luego $A_o + A_1$ es de Banach por ser isomorfo al cociente de un espacio de Banach por un subespacio cerrado.

2. <u>DEFINICION</u> <u>DE</u> $(A_o , A_1)_{\theta, p_o, p_1}$,

con $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant p_j \leqslant \infty$, $j = 0 , 1$.

Sea $\lambda \neq 0$.

$\mathbf{1}_\lambda$. Es el espacio naturalmente normado de los vectores $a \in A_o + A_1$, tales que existen

$$u_j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow A_j \quad , \quad j = 0 , 1$$

con la propiedad: $a = u_o(t) + u_1(t)$ p. p.

$$t^{\lambda(j-\theta)} u_j(t) \in L_*^{p_j}(A_j)$$

(Donde $L_*^{p_j}(A_j)$ es el conjunto de (clases de) funciones $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow A_j$, fuertemente medibles tales que $\| f(t) \|_{A_j} \in L_*^{p_j}$) .

Es evidente que es lo mismo pedir que existan funciones $v_j : \mathbb{R} \longrightarrow A_j$ tales que:

$$a = v_o(t) + v_1(t) \quad \text{p. p.}$$

y

$$e^{\lambda(j-\theta)t} v_j(t) \in L^{p_j}(A_j) \qquad j = 0 , 1$$

La norma natural es

$$\|a\| = \underset{a=v_o(t)+v_1(t)}{\text{ínfimo}} \ \max_{j=0,1} \left\{ \left\| e^{\lambda(j-\theta)t} v_j(t) \right\|_{L^{p_j}(A_j)} \right\}$$

(Lo mismo sería reemplazar máx por la suma, como hicimos en la 2ª lección: las normas son equivalentes).

Que $\| a \| = 0$ implica que $a = 0$, es consecuencia de que existe una sucesión $(v_{on}, v_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$

$$v_{on}(t) + v_{1n}(t) = a \qquad p.p.$$

tal que $\quad v_{jn} \longrightarrow 0 \quad$ en $\quad A_j \quad$ p.p. , $\quad j = 0, 1$.

El mismo argumento muestra que la inclusión de $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$ en $A_o + A_1$ es continua.

Es fácil verificar que $A_o \cap A_1 \subsetneq (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$.

Además $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$ resulta ser un espacio de Banach, pues si $(a_n)_n$ es fuertemente fundamental en $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$, esto es

$$\| a_{n+1} - a_n \| < \frac{1}{2^n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

existen (v_{on}, v_{1n}) tales que

$$v_{on}(t) + v_{1n}(t) = a_{n+1} - a_n \qquad p.p.$$

y

$$\| e^{\lambda(j-\theta)t} v_{jn}(t) \|_{L^{p_j}(A_j)} < \frac{1}{2^n} \qquad \begin{array}{l} j = 0, 1, \ldots. \\ n = 1, 2, \ldots. \end{array}$$

Sea (v_{oo}, v_{1o}) un par de funciones que representan al a_1 , entonces las series

$$j = 0, 1 \qquad v_{j_o} + \sum_{n=1}^{\infty} v_{j_n}$$

convergen en las normas

$$| f | = \| e^{\lambda(j-\theta)t} f(t) \|_{L^{p_j}(A_j)}$$

a funciones v_o , v_1 respectivamente.

Si existiera $a \in A_o + A_1$ tal que

$$v_o(t) + v_1(t) = a \quad \text{p.p.}$$

entonces $a \in (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$ y

$$\| a_n - a \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

pues

$$\| a_n - a \| = \| a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) - a \| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{j=0,1} \| e^{\lambda(j-\theta)t} (v_{j_o} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{j_k} - v_j) \|_{L^{p_j}(A_j)} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Veamos que tal elemento existe.

Si $\mathcal{D} = \{ \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, φ indefinidamente diferenciable con soporte compacto $\}$, entonces $f : \mathbb{R} \longrightarrow A_o + A_1$, localmente integrable, es constante p.p. si y sólo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi'(t)\, dt = 0 , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

(con $\varphi'(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t)$) .

Obviamente $v_{on}(t) + v_{1n}(t)$ tienen esta propiedad, luego también la posee $v_o(t) + v_1(t)$.

3. <u>OTRA DEFINICION EQUIVALENTE DE</u> $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$

Es evidente que los espacios que se obtienen con distintos λ en la definición $\mathbf{1}_\lambda$ coinciden, con equivalencia de normas. Veamos que también coinciden con los espacios dados por: $(\lambda \neq 0)$.

$\mathbf{2}_\lambda$. Es el espacio naturalmente normado de los puntos $a \in A_o + A_1$ tales que existen $u_j : \mathbb{R} \longrightarrow A_j$, que cumplen: $u_j \in C^\infty$, $a = u_o(t) + u_1(t)$ p.p. y $e^{\lambda(j-\theta)t} D^k_{u_j}(t) \in L^{p_j}(A_j)$ $\forall k \geq 0$.

<u>Demostración</u>

Sea $a = v_o(t) + v_1(t)$ p.p. y $e^{\lambda(j-\theta)t} v_j(t) \in L^{p_j}(A_j)$ $j = 0, 1$.

Tomemos $\rho \in \mathcal{D}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t)\,dt = 1$, $\rho(t) \geq 0$ $\forall t$ y definamos $u_j = v_j * \rho$ resulta

$$u_o(t) + u_1(t) = ((v_o + v_1) * \rho)(t) = a$$

además $u_j \in C^\infty$ y $D^k u_j(t) = (v_j * \rho^{(k)})(t)$ entonces

$$e^{\lambda(j-\theta)t} D^k u_j(t) = (e^{\lambda(j-\theta)t} v_j * e^{\lambda(j-\theta)t} \rho^{(k)})(t)$$

y por la desigualdad de Young

$$\| e^{\lambda(j-\theta)t} D^k_{u_j}(t) \|_{L^{p_j}(A_j)} \leq \| e^{\lambda(j-\theta)t} \rho^{(k)}(t) \|_{L^1} \| e^{\lambda(j-\theta)t} v_j(t) \|_{L^{p_j}(A_j)}$$

lo que da la tesis y la equivalencia de normas. (Ya que la inclusión opuesta es obvia).

4. $(A_o , A_1)_{\theta, p_o, p_1}$ COMO ESPACIO DE MEDIAS

Observemos que si $w : \mathbb{R}^+ \longrightarrow A_o \cap A_1$ verifica

$$t^{\lambda(j-\theta)} w(t) \in L_*^{p_j}(A_j) \quad , \quad j = 0 , 1$$

entonces $\int_0^\infty w(t) \frac{dt}{t}$ converge en el sentido de la norma de $A_o + A_1$ (puesto que $w(t)$ es fuertemente medible en $A_o + A_1$ y $\int_0^\infty \| w(t) \|_{A_o+A_1} \frac{dt}{t} < \infty$).

Definimos entonces:

$\mathbf{3}_\lambda$. El espacio naturalmente normado de los $a \in A_o + A_1$ tales que existe

$$\overline{w} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow A_o \cap A_1 \quad , \quad t^{\lambda(j-\theta)} \overline{w}(t) \in L_*^{p_j}(A_j)$$

$$a = \int_0^\infty \overline{w}(t) \frac{dt}{t}$$

con

$$\| a \| = \inf_{a = \int_0^\infty w(t) \frac{dt}{t}} \max_{j=0,1} \{ \| t^{\lambda(j-\theta)} \overline{w}(t) \|_{L_*^{p_j}(A_j)} \}$$

Observaciones

1) Evidentemente $\| . \|_{\mathbf{3}_\lambda}$ es una seminorma, que es una norma que da un espacio completo será consecuencia de la equivalencia con la norma $\| . \|_{\mathbf{1}_\lambda}$.

2) Se obtiene el mismo espacio si tomamos

$$w : \mathbb{R} \longrightarrow A_o \cap A_1$$

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, dt \quad , \qquad e^{\lambda(j-\theta)t}\, w(t) \in L^{p_j}(A_j)$$

$\mathbf{4}_\lambda$. Existe $w : \mathbb{R} \longrightarrow A_o \cap A_1$ tal que:

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, dt \quad , \quad w \in C^{\infty} \quad , \quad e^{\lambda(j-\theta)}\, D^k w(t) \in L^{p_j}(A_j)\ \forall\, k \geq 0$$

La equivalencia de $\mathbf{3}_\lambda$ con $\mathbf{4}_\lambda$ se prueba análogamente a la de $\mathbf{1}_\lambda$ con $\mathbf{2}_\lambda$.

Proposición

Las definiciones $\mathbf{1}_\lambda$ y $\mathbf{3}_\lambda$ son equivalentes.

Demostración

Basta verlo para $\lambda = 1$.

Sea

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)\, dt \quad , \qquad e^{(j-\theta)t}\, w(t) \in L^{p_j}(A_j)$$

poniendo $Y(t)$ = función característica de $(0, \infty)$ y $Z(t)$ = función característica de $(-\infty, 0]$ entonces

$$a = (w * Y)(t) + (w * Z)(t) \qquad \text{p.p.}$$

definamos

$$v_1(t) = (w * Z)(t)$$

$$v_o(t) = (w * Y)(t)$$

entonces

$$\| e^{-\theta t} v_o(t) \|_{L^{p_o}(A_o)} \leqslant \| e^{-\theta t} Y(t) \|_{L'} \| e^{-\theta t} w(t) \|_{L^{p_o}(A_o)}$$

$$\| e^{(1-\theta)t} v_1(t) \|_{L^{p_1}(A_1)} \quad \| e^{(1-\theta)t} Z(t) \|_{L'} \| e^{(1-\theta)t} w(t) \|_{L^{p_1}(A_1)}$$

Entonces el espacio dado por $\mathbf{3}_\lambda$ está contenido topológicamente en el $\mathbf{1}_\lambda$. (Por lo tanto la seminorma $\| . \|_{\mathbf{3}_\lambda}$ es en realidad una norma).

Recíprocamente, sea $a = v_o(t) + v_1(t)$ p.p. podemos tomar $v_j \in C^\infty$, $e^{(j-\theta)t} D^k v_j(t) \in L^{p_j}(A_j)$ $\forall\, k \geqslant 0$ sin que la norma $\mathbf{1}_\lambda$ altere (§ 3).

Tomemos $u(t) = D v_1(t) = -D v_o(t)$, entonces

$$\max_{j=0,1} \{ \| e^{(j-\theta)t} u(t) \|_{L^{p_j}(A_j)} \} \leqslant C \max_{j=0,1} \{ \| e^{(j-\theta)} v_j(t) \|_{L^{p_j}(A_j)} \}$$

como se vio en el § 3 .

Veamos que $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt = a$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt = (u * Y)(x) + (u * Z)(x) \qquad \forall\, x$$

$$(u * Y)(x) = \int_{-\infty}^{x} u(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} v_1'(t)\,dt = v_1(x) - \lim_{t \to -\infty} v_1(t)$$

Como esta integral está hecha en sentido de $A_o + A_1$ y tanto v_1 como v_1' son integrables en $A_o + A_1$ entonces $\lim_{t \to -\infty} v_1(t)$ existe y es nulo.

Análogamente $(u * Z)(x) = v_o(x)$, por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = v_o(x) + v_1(x) = a \qquad \forall x$$

Lo cual prueba la otra inclusión.

5. <u>DEFINICION DISCRETA DE</u> $(A_o , A_1)_{\theta, p_o, p_1}$

5_λ . Es el espacio naturalmente normado de los puntos $a \in A_o + A_1$ tales que existen

$$u_j : Z \longrightarrow A_j \qquad j = 0 , 1$$

$$n \longmapsto u_{jn}$$

con

$$a = u_{on} + u_{1n} \quad \forall n \quad , \qquad e^{\lambda(j-\theta)n} \| u_{jn} \|_{A_j} \in l^{p_j}$$

6_λ . Es el espacio naturalmente normado de los $a \in A_o + A_1$ tales que existen $u_n \in A_o \cap A_1$, $n \in Z$ con la propiedad

$$a = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n \quad (\text{en } A_o + A_1) \quad , \quad e^{\lambda(j-\theta)n} \| u_n \|_{A_j} \in L^{p_j} \quad , \quad j = 0, 1$$

Las seminormas $\| \cdot \|_{\mathbf{5}_\lambda}$ y $\| \cdot \|_{\mathbf{6}_\lambda}$ dan espacios normados completos, como consecuencia de las proposiciones 1 y 2 de más abajo.

De todas formas se puede probar directamente, por ejemplo, siguiendo este esquema:

$$\| a \|_{\mathbf{5}_\lambda} = \inf_{u_{on}+u_{1n}=a} \max_{j=0,1} \{ \| e^{\lambda(j-\theta)n} u_{jn} \|_{l^{p_j}(A_n)} \}$$

Si $\| a \|_{\mathbf{5}_\lambda} = 0$, existe $(u_{jn})_n$, $u_{on} + u_{1n} = a \quad \forall n$ tal que

$$\max_{j=0,1} \| e^{\lambda(j-\theta)n} u_{jn} \|_{l^{p_j}(A_n)} < \varepsilon$$

Luego

$$\| a \|_{A_o+A_1} \leqslant \| u_{o1} \|_{A_o+A_1} + \| u_{11} \|_{A_o+A_1} < A \cdot \varepsilon$$

con A constante, $A = A(\theta, \lambda)$.

Luego, si $\| a \|_{\mathbf{5}_\lambda} = 0$, entonces $a = 0$ que es de Banach se prueba como en el § 2 . La única diferencia es que para ver que el límite (u_o, u_1) cumple $u_{on} + u_{1n}$ = constante, se usa la convergencia puntual de la sucesión $(u_{jn}^k)_k$.

$\mathbf{6}_\lambda$. La única dificultad está en probar que si $\| a \|_{\mathbf{6}_\lambda} = 0$, entonces $a = 0$, ya que la demostración de la completitud se hace de manera análoga a la del § 2 .

Si $\| a \|_{\mathbf{6}_\lambda} = 0$, y para fijar ideas suponemos $\lambda > 0$ entonces, como

$$a = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n$$

tenemos

$$\| a \|_{A_o+A_1} \leqslant \sum_{-\infty}^{\infty} \| u_n \|_{A_o+A_1}$$

Sean

$$N_o = \{ n/n \geqslant 1 \quad , \quad \| u_n \|_{A_1} e^{\lambda(1-\theta)n} < \varepsilon \}$$

$$N_1 = \{ n/n \geqslant 1 \quad , \quad \| u_n \|_{A_1} e^{\lambda(1-\theta)n} \geqslant \varepsilon \}$$

$$N_2 = \{ n/n \leqslant 0 \quad , \quad \| u_n \|_{A_o} e^{-\lambda\theta n} < \varepsilon \}$$

$$N_3 = \{ n/n \leqslant 0 \quad , \quad \| u_n \|_{A_o} e^{-\lambda\theta n} \geqslant \varepsilon \}$$

Luego

$$\sum_{n\in N_o} \| u_n \|_{A_o+A_1} \leqslant \sum_{n\in N_o} \| u_n \|_{A_1} e^{\lambda(1-\theta)n} e^{-\lambda(1-\theta)n} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{1}^{\infty} e^{-\lambda(1-\theta)n} = \varepsilon A(\lambda, \theta)$$

$$\sum_{n\in N_1} \| u_n \|_{A_o+A_1} \leqslant \sum_{n\in N_1} \frac{\| u_n \|_{A_1} e^{\lambda(1-\theta)n}}{\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^{1-\rho_1} \sum_{n\in N_1} (\| u_n \|_{A_1} e^{\lambda(1-\theta)n})^{\rho_1} \leqslant \varepsilon^{1-\rho_1} \| e^{\lambda(1-\theta)n} u_n \|_{1^{1}(A_1)}^{\rho_1}$$

Análogamente se procede con las sumas sobre N_2 y N_3 . Entonces

$$\| a \|_{A_o+A_1} \leqslant \varepsilon(A(\lambda , \theta) + B(\lambda , \theta)) + (\varepsilon^{1-\rho_1} + \varepsilon^{1-\rho_o}) \max_{j=0,1} \{ \| e^{\lambda(j-\theta)n} u_n \|^{j}_{l^{j}(A_j)} \}$$

Como $\| a \|_{\mathbf{6}_\lambda} = 0$, entonces

$$\| a \|_{A_o+A_1} \leqslant \varepsilon \; K(\lambda , \theta)$$

luego

$$a = 0 .$$

Proposición 1

Los espacios definidos por $\mathbf{3}_\lambda$ y $\mathbf{6}_\lambda$ coinciden, y sus normas son equivalentes.

Demostración

Sea $a = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dx$ con $e^{\lambda(j-\theta)x} u(x) \in L^{\rho_j}(A_j)$; tomemos

$$u_n = \int_n^{n+1} u(x)\, dx$$

Entonces

$$a = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n$$

Además

$$\| u_n \|_{A_o} \leqslant \int_n^{n+1} \| u(x) \|_{A_o} dx \leqslant \{ \int_n^{n+1} \| u(x) \|^{\rho_o}_{A_o} dx \}^{1/\rho_o}$$

Luego

$$\left\| e^{-\lambda\theta n} u_n \right\|_{A_o}^{\rho_o} \leqslant \text{Máx } \{1, e^{+\lambda\theta\,\rho_o}\} \int_n^{n+1} \left\| e^{-\lambda\theta x} u(x) \right\|_{A_o}^{\rho_o} dx$$

Análogamente se procede con el otro término. Entonces

$$\| a \|_{\mathbf{6}_\lambda} \quad C(\theta, \rho_o, \rho_1, \lambda) \quad \| a \|_{\mathbf{3}_\lambda}$$

Recíprocamente si

$$a = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n \quad , \quad \text{con} \quad e^{\lambda(j-\theta)n} u_n \in l^{\rho_j}(A_j)$$

ponemos

$$u(x) = u_n \quad \text{si} \quad n \leqslant x < n+1$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, dx = a$$

y se cumple

$$\int_n^{n+1} \left\| e^{\lambda(j-\theta)x} u(x) \right\|_{A_j}^{\rho_j} dx \quad \text{Máx} \left\{ 1, e^{\lambda(j-\theta)\rho_j} \right\} \left\| e^{\lambda(j-\theta)n} u_n \right\|_{A_j}^{\rho_j}$$

de donde resulta la otra inclusión.

<u>Proposición 2</u>

Los espacios definidos por $\mathbf{1}_\lambda$ y $\mathbf{5}_\lambda$ coinciden, y sus normas son equivalentes.

Demostración

Si $a = w_o(t) + w_1(t)$ con w_o y w_1 en las condiciones **1** entonces $a = v_o(t) + v_1(t)$ con v_o y v_1 en las condiciones de **2**

$$v_j = w_j * \rho \quad , \quad \rho \in D \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$$

Definimos

$$u_{jn} = v_j(n) \quad , \quad j = 0, 1 \quad , \quad n \in Z$$

Entonces

$$u_{on} + u_{1n} = a \qquad \forall n$$

Acotemos $\| u_{jn} \|_{A_j}$. Si $n \leq x < n+1$, $u_{jn} = v_j(n) - v_j(x) + v_j(x)$

$$\| u_{jn} \|_{A_j} \leq \| v_j(x) \|_{A_j} + \int_n^{n+1} \| v_j'(x) \|_{A_j} dx$$

Luego

$$\| u_{jn} \|_{A_j} \leq \int_n^{n+1} (\| v_j(x) \|_{A_j} + \| v_j'(x) \|_{A_j}) dx$$

aplicando la desigualdad de Hölder

$$\| u_{jn} \|_{A_j}^{j} \leq \int_n^{n+1} (\| v_j(x) \|_{A_j} + \| v_j'(x) \|_{A_j})^{\rho_j} dx \leq 2^{\rho_j - 1} \int_n^{n+1} (\| v_j(x) \|_{A_j}^{\rho_j} + \| v_j'(x) \|_{A_j}^{\rho_j}) dx$$

luego, como se hizo en la proposición 1 ,

$$\left\| e^{\lambda (j-\theta)n} u_{jn} \right\|_{A_j}^{\rho_j} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \int_n^{n+1} \left\| e^{\lambda (j-\theta)x} v_j(x) \right\|_{A_j}^{\rho_j} dx + \int_n^{n+1} \left\| e^{\lambda (j-\theta)x} v_j'(x) \right\|_{A_j}^{\rho_j} dx$$

Luego

$$\left\| e^{\lambda (j-\theta)n} u_{jn} \right\|_{l^{\rho_j}(A_j)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1^{1/\rho_j} \{ \left\| e^{\lambda (j-\theta)x} v_j(x) \right\|_{L^{\rho_j}(A_j)} + \left\| e^{\lambda (j-\theta)x} v_j'(x) \right\|_{L^{\rho_j}(A_j)} \}$$

Luego

$$\left\| e^{\lambda (j-\theta)n} u_{jn} \right\|_{l^{\rho_j}(A_j)} \leqslant C_2 \left\| e^{\lambda (j-\theta)x} w_j(x) \right\|_{L^{\rho_j}(A_j)}$$

entonces

$$\| a \|_{\lambda} \leqslant C_3 \| a \|_{\mathfrak{I}_\lambda}$$

Finalmente, si

$$a = u_{on} + u_{1n} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

con u_{jn} en las condiciones de $\mathfrak{S}_\lambda$, definimos

$$u_j(x) = u_{jn} \qquad \text{si} \qquad n \leqslant x < n+1$$

Vale entonces

$$u_o(x) + u_1(x) = a \qquad \forall x \in R$$

y resulta (como en la proposición 1)

$$\| a \|_{1_\lambda} \leqslant C_4 \| a \|_{5_\lambda} .$$

6. $(A_0 , A_1)_{\theta, \rho_0, \rho_1}$ COMO ESPACIO DE TRAZOS

Sea $u : R^+ \longrightarrow A_0 \cap A_1$ tal que

$$t^{\lambda \theta} u \in L_*^{\rho_0} (A_0)$$

$$t^{\lambda (\theta - 1) + 1} u' \in L_*^{\rho_1} (A_1)$$

donde $0 < \theta < 1$, $\lambda > 0$, y u' es la derivada en el sentido de las distribuciones de u , es decir que u' es una función localmente integrable que verifica

$$\int_0^\infty u'(x) \varphi(x) \, dx = \int_0^\infty u(x) \varphi'(x) \, dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ con soporte compacto en $] 0 , \infty [$. (Las integrales convergen en $A_0 + A_1$) .

En estas condiciones $u' \in L^1 ((0 1] , A_0 + A_1)$ pues

$$\int_0^1 \| u'(x) \|_{A_0 + A_1} dx \leqslant C \left\{ \int_0^1 \| t^{\lambda(\theta-1)+1} u'(t) \|_{A_1}^{\rho_1} \frac{dt}{t} \right.^{1/\rho_1}$$

donde $C = C(\theta , \lambda , \rho_1)$.

Luego u coincide en $[0 , 1]$ p.p. con la función absolutamente continua

$$u(1) - \int_x^1 u'(t)\, dt$$

Por lo tanto existe

$$a = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} u(t) = u(0) \qquad \text{(convergencia en } A_o + A_1)$$

A tal límite se lo llama traza de la u en el origen.

Definimos entonces:

$\mathcal{T}_\lambda$. **Es** el espacio de los puntos $a \in A_o + A_1$ tales que existe $u : R^+ \longrightarrow A_o \cap A_1$ con

$$t^{\lambda\theta} u \in L_*^{\rho_o}(A_o) \qquad 0 < \theta < 1$$

$$t^{\lambda(\theta-1)+1} u' \in L_*^{\rho_1}(A_1) \qquad \lambda > 0$$

y $a = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \geq 0}} u(t) = u(0)$. Se introduce la norma

$$\| a \|_T = \inf_{a=u(0)} \operatorname{Máx}_{j=0,1} \left\{ \left\| t^{\lambda(\theta-j)+j} u^{(j)} \right\|_{L_*^{\rho_j}(A_j)} \right\}$$

con $u^{(0)} = u$, $u^{(1)} = u'$.

En la notación de Lions-Peetre, [28], este espacio es el

$$T\left(\rho_o,\ \lambda\theta - \frac{1}{\rho_o},\ A_o,\ \rho_1,\ \lambda(\theta-1)+1-\frac{1}{\rho_1},\ A_1\right)$$

Se puede ver que con esta seminorma T resulta un espacio de Banach; por otro lado, esto es consecuencia de la equivalencia de T con los espacios de media, que probaremos luego.

Como en casos anteriores se puede reemplazar la condición

$$u : R^{+} \longrightarrow A_o \cap A_1$$

por la de que exista

$$v : R \longrightarrow A_o \cap A_1 \quad , \quad a = \lim_{t \to -\infty} v(t)$$

y las modificaciones naturales que ya hemos realizado.

Observemos por último que los espacios que se obtienen con distintos λ $(\lambda > 0)$ coinciden, con normas equivalentes. En efecto, basta hacer el cambio de variable $\tau = t^{\lambda}$ para ver que

$$T(\rho_o, \lambda\theta - \frac{1}{\rho_o}, A_o, \rho_1, \lambda(\theta-1)+1-\frac{1}{\rho_1}, A_1) =$$

$$= T(\rho_o, \theta - \frac{1}{\rho_o}, A_o, \rho_1, \theta - \frac{1}{\rho_1}, A_1)$$

y

$$\| a \|_{\mathcal{T}_\lambda} = C(\lambda) \| a \|_{\mathcal{T}_1}$$

Lema

Si $a = u(0)$, con $t^{\theta} u^{(j)} \in L_{*}^{p_j}(A_j)$, $j = 0, 1$ existe $v \in \overset{\bullet}{C}^{\infty}$ tal que

$a = v(0)$, $t^{\theta+k} v^{(k)} \in L_*^{p_o}(A_o)$ $\quad \forall k \geq 0$ $\quad t^{\theta} v' \in L_*^{p_1}(A_1)$ y

$$\| t^{\theta+k} v^{(k)}(t) \|_{L_*^{p_o}(A_o)} \leq C_k \| t^{\theta} u(j) \|_{L_*^{p_o}(A_o)} \qquad \forall k \geq 0$$

$$\| t^{\theta} v'(t) \|_{L_*^{p_1}(A_1)} \leq C \| t^{\theta} u'(t) \|_{L_*^{p_1}(A_1)}$$

con c , c_k constantes.

Demostración

Sea $\rho \in \mathcal{D}$, $\rho \geq 0$, sop $\rho \subseteq [1, 2]$, $\int_0^{\infty} \rho(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = 1$ definamos $v(t) = \int_0^{\infty} u(\sigma)\, \rho(\frac{t}{\sigma}) \frac{d\sigma}{\sigma}$, convolución de u con ρ en la medida de Haar de $\mathbb{R}+$. Entonces

$$v^{(k)}(t) = \int_0^{\infty} u(\sigma) \frac{1}{\sigma^k} \rho^{(k)}(\frac{t}{\sigma}) \frac{d\sigma}{\sigma} \qquad , \qquad k \geq 0 \quad ;$$

las integrales convergen tanto en A_o como en A_1 . Como

$$\lim_{t \downarrow 0} v(t) = \lim_{t \downarrow 0} \int_0^{\infty} u(\frac{t}{\sigma}) \rho(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \int_0^{\infty} \lim_{t \to 0} u(\frac{t}{\sigma}) \rho(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = u(0) \int_0^{\infty} \rho(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = u(0)$$

Además

$$t^{\theta+k} v^{(k)}(t) = t^{\theta+k} (\frac{1}{\sigma^k} u(\sigma) * \rho^{(k)})(t) = (\sigma^{\theta} u * \sigma^{\theta+k} \rho^{(k)})(t)$$

Por el teorema de Young, obtenemos

$$\left\| t^{\theta+k} v^{(k)}(t) \right\|_{L_*^{p_o}(A_o)} \quad \left\| t^{\theta+k} \rho^{(k)}(t) \right\|_{L_*^{1}} \left\| t^{\theta} u(t) \right\|_{L_*^{p_o}(A_o)}$$

entonces

$$\left\| t^{\theta+k} \rho^{(k)}(t) \right\|_{L_*^{1}} = C_k < \infty$$

Dado que

$$(u * \rho)' = u' * \frac{1}{\sigma} \rho$$

(por ser dos funciones localmente integrables que coinciden como distribuciones), resulta la última parte de la tesis.

Proposición

Los espacios de trazas y de media coinciden con normas equivalentes, es decir

$$T\left(p_o, \theta - \frac{1}{p_o}, A_o, p_1, \theta - \frac{1}{p_1}, A_1\right) = (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$$

Demostración

Sea $a \in T$, $a = u(0)$ y sea v en las condiciones del lema previo, entonces

$$\int_0^{\infty} v'(\sigma)\, d\sigma = -a$$

pues $\int_0^{\infty} v'(\sigma)\, d\sigma$ existe en $A_o + A_1$ pues $t^{\theta} v' \in L_*^{p_1}(A_1)$ y $t^{\theta+1} v' \in L_*^{p_o}(A_o)$, luego

$$\int_0^{\infty} v'(\sigma)\, d\sigma = \lim_{t \to \infty} v(t) - \lim_{\varepsilon \to 0} v(\varepsilon) ,$$

veamos que $\lim\limits_{t \to \infty} v(t) = 0$.

Si $\alpha > \beta$.

$$v(\alpha) - v(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} v'(\sigma)\, d\sigma$$

lo que asegura que tal límite existe, pero $t^{\theta} v \in L_{*}^{p_o}(A_o)$, luego debe ser nulo.

Designando $w(\sigma) = -\sigma v'(\sigma)$ resulta

$$a = \int_0^{\infty} w(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}$$

y

$$\| t^{\theta} w(t) \|_{L_{*}^{p_o}(A_o)} = \| t^{\theta+1} v'(t) \|_{L_{*}^{p_o}(A_o)} \leqslant C_1 \| t^{\theta} u(t) \|_{L_{*}^{p_o}(A_o)}$$

$$\| t^{\theta-1} w(t) \|_{L_{*}^{p_1}(A_1)} \leqslant C \| t^{\theta} u'(t) \|_{L_{*}^{p_1}(A_1)}$$

por el lema; luego, recordando la definición $\mathfrak{J}_{\lambda}$ con $\lambda = -1$,

$$a \in (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1} \qquad \text{y} \qquad \| a \| \leqslant C \| a \|_{T}$$

donde C es una constante y $\| . \|$ es la norma en $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$.

Recíprocamente, si $a \in (A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$ y

$$a = \int_0^{\infty} w(\sigma)\, d \quad , \quad t^{\theta-j} w^{(j)} \in L_{*}^{p_j}(A_j) \quad , \quad j = 0, 1$$

definimos $u(t) = \int_t^{\infty} w(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}$, entonces como $w \in L_{*}^{1}(A_o + A_1)$, por el teorema de Lebesgue

$$\lim_{t \to 0} u(t) = \lim_{t \to 0} \int_t^{\infty} w(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} = a$$

Además $u(t) = (w * \chi_{(0,1)})(t)$ (convolución en la medida de Haar de la semirrecta), por lo tanto

$$t^{\theta} u(t) = (\sigma^{\theta} w * \sigma^{\theta} \chi_{(0,1)})(t)$$

y de aquí

$$\| t^{\theta} u(t) \|_{L_*^{p_o}(A_o)} \leqslant \left\{ \int_0^1 \sigma^{\theta p_o'} \frac{d\sigma}{\sigma} \right\}^{1/p_o'} \| t^{\theta} w(t) \|_{L_*^{p_o}(A_o)}$$

la derivada en $A_o + A_1$ de $u(t)$ resulta

$$u'(t) = \frac{w(t)}{t}$$

por lo tanto $\| t^{\theta} u'(t) \|_{L_*^{p_1}(A_1)} = \| t^{\theta - 1} w(t) \|_{L_*^{p_1}(A_1)}$ luego $a \in T$,

$$\| a \|_T \leqslant C \| a \|$$

como queríamos demostrar.

Vale decir que en el transcurso de esta lección, hemos probado que el espacio de Banach $(A_o, A_1)_{\theta, p_o, p_1}$, $(0 < \theta < 1 \; ; \; 1 \leqslant p_j \leqslant \infty \; , \; j = 0, 1)$ puede caracterizarse mediante cualquiera de las definiciones anteriores.

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 1.	Matemática y física cuántica	Laurent Schwartz
Fascículo 2.	Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert . . .	Mischa Cotlar
Fascículo 3.	Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por . . .	Alberto P. Calderón
Fascículo 4.	Propiedades en el contorno de funciones analíticas	Alberto González Domínguez
Fascículo 5.	Teoría constructiva de funciones . . .	Jean Pierre Kahane
Fascículo 6.	Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables .	Jean Pierre Kahane
Fascículo 7.	Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones	Juan Carlos Merlo
Fascículo 8.	Introducción al estudio del problema de Dirichlet	Esteban Vági
Fascículo 9.	Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP	Guido Weiss
Fascículo 10.	Probabilidades y estadítsica	Roque Carranza
Fascículo 11.	Introducción a la teoría de la representación de grupos	Mischa Cotlar
Fascículo 12.	Algebra lineal	Jean Dieudonné
Fascículo 13.	Una introducción de la integral sin la noción de medida	Jan Mikusinski
Fascículo 14.	Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas	Jean Dieudonné
Fascículo 15.	Equipación con espacios de Hilbert	Mischa Cotlar
Fascículo 16.	Grupos de Lie y grupos de transformaciones	Philippe Tondeur
Fascículo 17.	Tres teoremas sobre variedades diferenciales	Juan Carlos Merlo
Fascículo 18.	Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos	S. Lojasiewicz
Fascículo 19.	Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables . . .	L. A. Santaló
Fascículo 20.	Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz	Evelio T. Oklander
Fascículo 21.	Categorías y Functores	Philippe Tondeur
Fascículo 22.	Notas de Algebra	Enzo R. Gentile
Fascículo 23.	Lecciones sobre interpolación	P. Kree
Fascículo 24.	Notas de topología algebraica	R. A. Ricabarra y A. R. Lar

PEDIDOS: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766 - Buenos Aires - Argentir