ISSN 1853-709X

Fascículo 25

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

J. D. Álvarez Alonso

Distribuciones y transformación de Fourier

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2012

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 25

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Fascículo 25

J. D. Álvarez Alonso

Distribuciones y transformación de Fourier

1977

LAS DISTRIBUCIONES

LA TRANSFORMACION DE FOURIER

REFERENCIAS

[1] Schwartz, L.: "Théorie des distributions". Tomos I y II, Hermann, 1957.

[2] Garsoux, J. : "Espaces vectoriels topologiques et distributions". Dunod, 1963.

[3] Cotlar, M. y Cignoli, R.: "Nociones de espacios normados". Tomos I y II. Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1967.

[4] Bachman, G. y Narici, L.: "Functional analysis". Academic Press, 1966.

[5] Gunning, R. y Rossi, H.: "Analytic functions of several complex variables". Prentice-Hall, 1965.

[6] Gelfand, I. y Chilov, G.: "Les distributions" Dunod, 1962.

[7] Donoghue, W.F.: "Distributions and Fourier transforms". Academic Press, 1969.

NOTACIONES

Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in N^n$, se indica:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$$

Si $\alpha, \beta \in N^n$, $\alpha \geq \beta$ significa $\alpha_j \geq \beta_j$, $1 \leq j \leq n$.

Si $\alpha, \beta \in N^n$ y $\alpha \geq \beta$, $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \dots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$

Si $x \in R^n$ y $\alpha \in N^n$, es $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$

$D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Si interesa destacar el orden en que se calculan las derivadas, se indica:

$$D_{r_1 \dots r_k} = \frac{\partial^k}{\partial x_{r_1} \dots \partial x_{r_k}}$$

Si $x, \xi \in R^n$, es $x\xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$.

LAS DISTRIBUCIONES

§1. LOS ESPACIOS $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$

Definición 1.1.:

Dada una función $\phi: \Omega \to C$, $\Omega \subset R^n$ abierto, se llama soporte de ϕ y se indica sop (ϕ), a la clausura, en Ω, de $\{x \in \Omega / \phi(x) \neq 0\}$. Cuando una función sea continua y admita derivadas continuas de todos los órdenes, se dirá que es indefinidamente derivable.

Definición 1.2 :

Sea $\mathcal{D} = \{\phi: R^n \to C / \phi$ es indefinidamente derivable y sop (ϕ) es compacto$\}$.

Sobre $\mathcal{D}$ se considera la siguiente noción de convergencia:

La sucesión $\{\phi_j\}$ converge hacia ϕ en $\mathcal{D}$, si sop(ϕ_j), sop (ϕ) están contenidos en un compacto fijo y para cada $\alpha \in N^n$, $D^\alpha \phi_j(x) \to D^\alpha \phi(x)$, uniformemente en R^n.

Ejemplo 1.1:

La función

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

pertenece al espacio $\mathcal{D}$ y sop $(\rho) = \{x \in R^n / |x| \leq 1\}$.

ρ es interesante como ejemplo de funciones cuya existencia no es nada obvia; además, se la va a usar con frecuencia y por razones que aparecerán luego, será llamada función regularizante.

Definición 1.3:

Una aplicación $T: \mathcal{D} \to C$ lineal es una distribución, si es continua en el siguiente sentido:

$$T(\phi_j) \to 0, \text{ cada vez que } \phi_j \to 0 \text{ en } \mathcal{D}.$$

El valor que toma la forma T en la función ϕ, suele notarse (T,ϕ), con lo cual, la condición de continuidad se escribirá:

$$(T,\phi_j) \to 0 \quad \text{si} \quad \phi_j \to 0 \text{ en } \mathcal{D}.$$

Las funciones de $\mathcal{D}$ se llamarán <u>funciones de prueba</u>; este nombre volverá a usarse en el §2, para nuevos espacios de funciones, que serán introducidos.

<u>Observación 1.1</u>:

Cuando se menciona la continuidad de cierta aplicación definida entre dos espacios, lo habitual es que sobre esos espacios, haya una estructura topológica que justifique el hablar de continuidad. Esto no es lo que se ha hecho en la definición 1.3, al menos explícitamente; por ello, es necesario hacer algún comentario sobre el significado de esa definición:

Fijado un compacto $K \subset R^n$, sea

$$\mathcal{D}(K) = \{\phi \in \mathcal{D} / \operatorname{sop}(\phi) \subset K\}.$$

A $\mathcal{D}(K)$ puede darse una estructura de espacio vectorial topológico, mediante la familia de seminormas.

$$N_\alpha(\phi) = \sup_{x \in R^n} |\mathcal{D}^\alpha \phi(x)|, \quad \alpha \in N^n.$$

Esta topología, da origen a la noción de convergencia introducida en la definición 1.2. Además, entre otras cosas por tratarse de una familia numerable de seminormas, la topología de $\mathcal{D}(K)$, puede obtenerse a partir de una métrica compatible con la estructura vectorial. Cada espacio $\mathcal{D}(K)$, resulta entonces métrico y además completo.

La definición 1.3 puede darse ahora en la siguiente forma:
Una aplicación T: $\mathcal{D} \to C$ es una distribución si es lineal y restringida a cada espacio $\mathcal{D}(K)$, es continua.

La explicación dada, desde luego válida, intenta aclarar la definición 1.3 sin referirse a su verdadera naturaleza: Lo que ocurre, es que sobre el espacio $\mathcal{D}$, hay una estructura topológica "inducida" de cierta manera por los espacios $\mathcal{D}(K)$, que permite hablar de la continuidad de T usando nada más que sucesiones. Es respecto de esa topología, que tiene sentido referirse al espacio vectorial complejo de las distribuciones como el dual topológico, $\underline{\mathcal{D}'}$, de $\mathcal{D}$. (Para estas cuestiones de topología, ver [1] y [2]).

Cada vez que se hable de continuidad sobre $\mathcal{D}$, o sobre otros espacios de funciones que van a ser introducidos luego, se trabajará con sucesiones.

<u>Definición 1.4</u>:

Una sucesión $\{T_j\}$ de $\mathcal{D}'$ se dice que converge hacia la distribución T, si

$$\text{para cada } \phi \in \mathcal{D}, \quad (T_j, \phi) \to (T, \phi).$$

Esta definición de convergencia, que es independiente de la topología de $\mathcal{D}$, se llama <u>débil</u>. Se la ha introducido sin hacer referencia a ninguna estructura topológica sobre $\mathcal{D}'$; pero se prueba, que definiendo en $\mathcal{D}'$ la "topología fuerte", la noción de convergencia de sucesiones asociada, es la convergencia débil. (Ver nuevamente [1] y [2]).

Que un operador $h: \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ sea continuo, siempre querrá decir aquí que

$$(h(T_j), \phi) \to (h(T), \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}, \text{ si } (T_j, \phi) \to (T, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Ejemplos 1.2:

i) Si χ_K es la función característica del compacto $K \subset R^n$, se indicará $L^p_{loc} = \{$clases de funciones $f: R^n \to C / \chi_K \cdot f \in L^p$, para cada compacto $K \subseteq R^n\}$, $1 \leq p \leq \infty$

Sobre L^p_{loc} se considera la topología inducida por la familia de seminormas

$$N_K(f) = \| \chi_K \cdot f \|_{L^p}$$

Como basta considerar un cubrimiento numerable de R^n por compactos, en L^p_{loc} hay una estructura de espacio métrico completo, que da origen a la noción de convergencia:

$$f_j \to f \text{ en } L^p_{loc}, \text{ si } \chi_K \cdot f_j \to \chi_K \cdot f \text{ en } L^p, \text{ para cada}$$

compacto $K \subset R^n$.

En síntesis, L^p_{loc} es un espacio de Fréchet, lo mismo que $\mathcal{D}(K)$; ver [2].

Si $f \in L^1_{loc}$, o sea si f es una clase de funciones localmente integrables, ella define una distribución, que se indicará T_f y a veces simplemente f, escribiendo:

$$(T_f, \phi) = \int f(x) \phi(x)\, dx, \quad \phi \in \mathcal{D}.$$

La aplicación

$$L^1_{loc} \to \mathcal{D}'$$
$$f \to T_f$$

es inyectiva. Esta es una propiedad fundamental, que se usará con frecuencia y que va a demostrarse luego.

Se dirá, brevemente, que una distribución T es una función f, cuando T coincide con la distribución T_f.

ii) Fijados $a \in R^n$, $m \in N$, se define:

$$(T_m, \phi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m \phi\ (a), \quad \phi \in \mathcal{D}$$

No hay dificultad en comprobar que T_m es una distribución.

Para $m = 0$, T_0 se llama medida de Dirac y se indica δ_a. Cuando sea $a = 0$, se escribirá δ.

Los conceptos introducidos hasta ahora, no permiten profundizar el análisis de estos ejemplos; se seguirá hablando de ellos en el §2 ; allí va a quedar justificado el nombre de medida que se dió a la distribución δ_a.

Definición 1.5:

Dadas funciones $f, g: R^n \to C$, se llama producto de convolución, (o de composición), de f y g, que se indica $f * g$, a la función

$$h(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy .$$

Naturalmente que si f y g son funciones cualesquiera, h no estará definida.

Sobre la existencia del producto de convolución, se enuncia el

Teorema 1.1: (Young). (Ver [3], tomo II).

Si $f \in L^1$ y $g \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, entonces la función $f * g$ está definida pp, es medible y pertenece a L^p.

Además, se cumple la desigualdad, llamada de Young:

$$\| f * g \|_{L^p} \leq \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^p}$$

Observación 1.2:

En particular, el producto de convolución define sobre L^1 una estructura de álgebra de Banach conmutativa, (ver [4]), que no es unitaria. Es decir, no existe $f \in L^1$, tal que $f * g = g$, $\forall g \in L^1$. (ver ejercicio 1.3).

El concepto de producto de convolución interviene en la prueba de varios resultados que se verán enseguida.

Teorema 1.2:

Dados $K \subset R^n$ compacto y $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in \mathcal{D}$ tal que

$$0 \leq \phi(x) \leq 1, \ \forall x \in R^n$$

$$\phi(x) = 1, \ \forall x \in K$$

$$\text{sop } (\phi) \subset \varepsilon\text{- entorno } (K) = \{x \in R^n / d(x,K) < \varepsilon\}.$$

Demostración:

A partir de la función ρ introducida en el ejemplo 1.1, se define

$$\rho_j(x) = \frac{j^n}{c} \rho(jx) \ ; \ j = 1,2,\ldots ; c = \int \rho(x)\, dx.$$

ρ_j sigue perteneciendo a $\mathcal{D}$, su soporte está contenido en $\{|x| \leq 1/j\}$ y $\int \rho_j(x)\, dx = 1$.

Si χ es la función característica de K_ε = $\varepsilon/3$-entorno (K), sea

$$\phi_j(x) = \chi * \rho_j(x) = \int_{K_\varepsilon} \rho_j(x-y)\, dy = \frac{j^n}{c} \int_{|y| \leq 1/j} \chi(x-y)\rho(jy)\, dy.$$

ϕ_j está definida en todo $x \in R^n$ y

$$0 \leq \phi_j(x) \leq \int \rho_j(x-y)\, dy = 1$$

Además, ϕ_j resulta indefinidamente derivable.

Se afirma ahora que existe $j_0 \in N$, tal que $x-y \in K_\varepsilon$, si $x \in K$, $|y| \leq 1/j_0$:

En efecto, con $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene:

$$d(x-y,K) \leq d(x-y,x) = |y| .$$

Entonces, fijado $x \in K$, es:

$$\phi_{j_0}(x) = \int_{|y|\leq 1/j_0} \chi(x-y)\, \rho_{j_0}(y)dy = \int \rho_{j_0}(y)\, dy = 1$$

En cuanto al soporte de ϕ_{j_0}, como

$$|d(z_1,K) - d(z_2,K)| \leq |z_1-z_2| ,$$

si $x \notin \varepsilon$- entorno (K), es:

$$d(x-y,K) \geq d(x,K) - |y| \geq \varepsilon-\varepsilon/3 > \varepsilon/3.$$

Luego $\phi_{j_0}(x) = 0$ #

Observación 1.3:

Tanto como el resultado, es importante en este teorema la forma en que se lo probó: Por convolución con ρ_j, se "suaviza" la función discontinua χ. Este método de regularización, será aplicado en el §4 a distribuciones.

Teorema 1.3:

$\mathcal{D}$ es denso en L^p si $1 \leq p < \infty$.

Demostración:

En primer lugar, basta poder aproximar funciones con soporte compacto, pues por truncación, se prueba que éstas son densas en L^p.

Dada $f \in L^p$ con soporte compacto, sea

$$f_j = f * \rho_j$$

donde ρ_j es la función definida en el teorema 1.2.

De la misma forma que se razonó en ese teorema, se comprueba que $f_j \in \mathcal{D}$ y que tiene su soporte contenido en un entorno fijo de sop (f).

Hay que comprobar que $f_j \to f$ en L^p:

Si se supone primero que f es continua, por tener soporte compacto, resulta uniformemente continua; luego es:

$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$ si $|y| < 1/j$ para $j \geq j_0(\varepsilon)$, independientemente de $x \in R^n$.

Por lo tanto,

$$|f_j(x) - f(x)| \leq \int |f(x-y) - f(x)| \, \rho_j(y) \, dy < \varepsilon \text{ si } j \geq j_0 .$$

Es decir, que la sucesión $\{f_j\}$ converge hacia f, uniformemente en x, si f es una función continua con soporte compacto. Como f_j y f se anulan fuera de un compacto fijo, esa convergencia uniforme implica la convergencia en L^p.

Si ahora f es cualquier función de L^p con soporte compacto, se sabe que dado $\varepsilon > 0$, existe una función g continua y con soporte compacto, tal que $\| f-g \|_{L^p} < \varepsilon$,

Si se escribe:

$$\| f_j - f\|_{L^p} \leq \| f_j - g_j\|_{L^p} + \| g_j - g \|_{L^p} + \| g - f\|_{L^p} ,$$

por el teorema de Young, el primer término puede acotarse como:

$$\| f_j - g_j\|_{L^p} = \| (f-g) * \rho_j \|_{L^p} \leq \| f-g\|_{L^p} . \| \rho_j \|_{L^1} = \| f-g\|_{L^p} .$$

o sea que

$$\| f_j - f \|_{L^p} \leq 2 \| f-g \|_{L^p} + \| g-g_j \|_{L^p} ,$$

de donde resulta la convergencia de f_j hacia f en $L^p_{\#}$.

Observación 1.4:

Dada $f \in L^1$, se deduce del teorema 1.3, que $f * \rho_j \to f$ en L^1, esto justifica el nombre de identidad aproximada , que suele darse a la función ρ_j.

Teorema 1.4:

La aplicación

$$L^1_{loc} \to \mathcal{D}'$$

$$f \to T_f$$

es inyectiva.

Demostración:

Debe probarse que si $\int f(x) \; \phi(x) \, dx = 0 \;\forall\; \phi \in \mathcal{D}$, entonces $f = 0$pp.
Puede suponerse que la función f es real, porque sino, se trabaja por separado con sus partes real e imaginaria.
Si $K_k = \{ |x| \leq k \}$ y χ_k es su función característica, basta probar que $f^{(k)} = \chi_k . f = 0$ pp, para cada k= 1,2,....
Sea

$$\operatorname{sg} f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{f^{(k)}(x)}{|f^{(k)}(x)|} & \text{si} \quad f^{(k)}(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f^{(k)}(x) = 0 \end{cases}$$

sg $f^{(k)}$ es una función integrable y con soporte compacto contenido en K_k.

Luego,

$$f_j^{(k)} = sg\ f^{(k)} * \rho_j \to sg\ f^{(k)},\ \text{en}\ L^1.$$

Además, $f_j^{(k)} \in D$, $|f_j^{(k)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in R^n$ y sop $(f_j^{(k)}) \subset$

$\subset K_{k+1}$, $\forall$ j.

De todo esto se deduce, que para una subsucesión {j} es:

$$\int f(x)\ f_j^{(k)}(x)\ dx = \int f^{(k+1)}(x)\ f_j^{(k)}(x)\ dx \to$$

$$\to \int f^{(k+1)}(x)\ sg\ f^{(k)}(x)\ dx = \int |f^{(k)}(x)|\ dx = 0,$$

pues $\int f(x)\ f_j^{(k)}(x)\ dx = 0 \quad \forall\ j \geq 1.$ #

Definición 1.6:

Una distribución $T \in D.$ es nula en el abierto $\Omega \subset R^n$, o sea

$T/_{\Omega} = 0$, si

$$(T,\phi) = 0\ \forall \phi \in D\ \text{con sop}(\phi) \subset \Omega .$$

Por ejemplo, la distribución δ_a es nula en cualquier abierto que no contenga al punto a.

Dadas $T_1, T_2 \in D'$, se dice que coinciden en Ω ; si la distribución $T_1 - T_2$ se anula en Ω .

De manera análoga a lo que se hizo en R^n, puede definirse el concepto de distribución sobre un abierto $\Omega \subset R^n$.

En efecto, si $D(\Omega)$ es el subespacio de D formado por las funciones con soporte contenido en Ω , una distribución sobre Ω es una forma lineal $T: D(\Omega) \to C$, que restringida a cada $D(\Omega;K)$ es continua, si $D(\Omega;K)$ indica a las funciones de $D(\Omega)$ con soporte en K, para $K \subset \Omega$, compacto.

Se nota $\underline{\mathcal{D}'(\Omega)}$ al espacio de esas distribuciones.

Por ejemplo, la función $1/x \notin \mathcal{D}'$, pero define una distribución, sobre cualquier abierto de R que no contenga al origen.

Sean ahora T_1 y T_2 distribuciones de $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ y $\mathcal{D}'(\Omega_2)$, respectivamente, tales que $T_1 = T_2$ en $\Omega_1 \cap \Omega_2$; se pregunta si no existirá una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, tal que $T/\Omega_i = T_i$.

Para responder a esto, conviene enunciar primero el

<u>Teorema 1.5</u>: (Ver [1], tomo I).

Dado $\Omega \subset R^n$ abierto, sea $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de Ω por abiertos.

Existen entonces funciones $\alpha_i : \Omega \to R$ indefinidamente derivables, tales que:

$\alpha_i(x) \geq 0$, $\forall x \in \Omega$,

$sop(\alpha_i) \subset \Omega_i$.

para cada compacto $K \subset \Omega$, sólo un número finito de las funciones α_i no son idénticamente nulas

para cada $x \in \Omega$, $\sum_{i \in I} \alpha_i(x) = 1$.

<u>Definición 1.7</u>:

La familia de funciones $\{\alpha_i\}$, se llama <u>partición de la unidad subordinada al cubrimiento</u> $\{\Omega_i\}$.

Cuando Ω_i es relativamente compacto, $\alpha_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$.

<u>Teorema 1.6</u>:

Sea $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de R^n y sea, para cada $i \in I$, $T_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$ tal que si $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset$, T_i coincide con T_j en esa intersección.

Entonces, si $\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, existe una y sólo una distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que $T/\Omega_i = T_i$, $\forall\, i \in I$.

Demostración:

Sea $\{\alpha_i\}$ una partición de la unidad asociada al cubrimiento $\{\Omega_i\}$ de Ω.

Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, sólo ciertas funciones $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$ entre las α_i no son idénticamente nulas sobre sop(ϕ).

Además

$$\phi = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i_j}\,\phi.$$

Cada término pertenece a $\mathcal{D}(\Omega_{i_j})$; luego, tiene sentido definir:

$$(T,\phi) = \sum_j (T_{i_j}, \alpha_{i_j}\phi).$$

Se afirma que $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y que cumple lo pedido:

La linealidad es clara.

Si $\phi_\ell \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, significa en particular, que los soportes de las funciones ϕ_ℓ están contenidos en un compacto fijo $\subset \Omega$.

Luego, hay un número finito, fijo también, de funciones, $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_k}$, tales que

$$\phi_\ell = \sum_j \alpha_{i_j}\phi_\ell, \quad \forall\, \ell \geq 1.$$

$\alpha_{i_j} \cdot \phi_\ell \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega_{i_j})$; luego

$$\sum_j (T_{i_j}, \alpha_{i_j}\phi_\ell) \to 0.$$

Hay que probar que $T/\Omega_i = T_i$, para cada $i \in I$:

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_{i_0})$; nuevamente

$$\phi = \sum_j \alpha_{i_j} \phi \, .$$

Cada término tiene soporte en $\Omega_{i_0} \cap \Omega_{i_j}$, y allí T_{i_0} y T_{i_j} coinciden.

Entonces:

$$(T,\phi) = \sum_j (T_{i_j}, \alpha_{i_j} \phi) = \sum_j (T_{i_0}, \alpha_{i_j} \phi) = (T_{i_0}, \phi).$$

En cuanto a la unicidad, si T y S son distribuciones de $\mathcal{D}'(\Omega)$ que restringidas a cada Ω_i coinciden, dada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, es:

$$(T,\phi) = \sum_j (T_{i_j}, \alpha_{i_j} \phi) = (S,\phi)$$

Luego, S = T en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$. #

<u>Observación 1.5:</u>

Cuando en el teorema 1.5 todas las distribuciones T_i son nulas, se deduce que si una distribución es nula en cada uno de los abiertos de cierta familia, también es nula en su unión.

Esto permite dar la siguiente

<u>Definición 1.8:</u>

Dada $T \in \mathcal{D}'$, se llama <u>soporte de T</u> y se indica <u>sop(T)</u>, al complemento del mayor abierto donde T se anula.

O sea:

$$\mathrm{sop}(T) = R^n \setminus \bigcup \{\Omega \subset R^n \text{ abierto } / \ T/\Omega = 0 \}.$$

Por ejemplo, $\mathrm{sop}(\delta_a) = \{a\}$.

En el §2, se trabajará con el subespacio de $\mathcal{D}'$ formado por las distribuciones que tienen soporte compacto.

<u>Ejercicios:</u>

1.1. - Demostrar que se tienen las inclusiones estrictas y continuas

$$L^p_{loc} \subset L^q_{loc} \subset \mathcal{D}' , \quad 1 \leq q < p \leq \infty$$

1.2.- Dada $\phi \in \mathcal{D}(R)$, se considera

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

Probar que este límite existe y que define una distribución, llamada <u>valor principal de $\frac{1}{x}$</u>, que se indicará $\mathrm{vp}\ \frac{1}{x}$

1.3.- Mostrar que no existe $f \in L^1$, tal que $f * g = g$, $\forall\, g \in L^1$

<u>Sugerencia:</u> Suponer que sí existe f y tomar como g funciones características de cubos.

1.4.- Dada $f \in L^{p_o}$, para cierto $1 \leq p_o < \infty$, mostrar una sucesión $\{\phi_j\} \subset \mathcal{D}$, tal que $\phi_j \to f$ en todos los espacios L^p, $1 < p < \infty$, a los cuales pertenezca f.

1.5.- i) Dada $T \in \mathcal{D}'$, probar que

$x \in \mathrm{sop}(T) \Rightarrow \forall$ entorno abierto V de x, $\exists\ \phi \in \mathcal{D}(V)$ tal que $(T, \phi) \neq 0$.

ii) Si $T \in \mathcal{D}'$, $\phi \in \mathcal{D}$ y $\mathrm{sop}(T) \cap \mathrm{sop}(\phi) = \emptyset$, probar que $(T, \phi) = 0$.

iii) Dada $f: R^n \to C$ continua, demostrar que $\mathrm{sop}(f) = \mathrm{sop}(T_f)$.

¿Qué pasa cuando $f \in L^1_{loc}$ no es continua ?

§2. LOS ESPACIOS $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$, E, E' , $\mathcal{D}^{(m)}$ y $\mathcal{D}^{(m)'}$.

Se van a introducir nuevos espacios de funcionesde prueba, que definirán, por dualidad, ciertos subespacios del espacio $\mathcal{D}'$ de las distribuciones.

Más adelante se verá la conveniencia y aún la necesidad de hacer esto.

Definición 1.2:

Sea

$$\underline{E} = \{\phi : R^n \to C/\phi \text{ es indefinidamente derivable}\} .$$

Una sucesión $\{\phi_j\}$ converge hacia ϕ en E, si para cada $\alpha \in N^n$,

$$\mathcal{D}^\alpha \phi_j(x) \to D^\alpha \phi(x), \text{ uniformemente en los compactos de } R^n.$$

Definición 2.2:

Una función $\phi : R^n \to C$, indefinidamente derivable, es rápidamente decreciente en el infinito, con todas sus derivadas, si para cada par de n-uplas $\alpha,\beta \in N^n$, existe $C_{\alpha\beta} > 0$, tal que

$$\sup_{x \in R^n} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi(x)| \leq C_{\alpha\beta}$$

Se indicará con $\underline{\mathcal{S}}$, al espacio vectorial complejo formado por estas funciones.

En $\mathcal{S}$, se considera la siguiente noción de convergencia:

$\phi_j \to \phi$ en $\mathcal{S}$, si $x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi_j(x) \to x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi(x)$, uniformemente en R^n, fijadas, $\alpha,\beta \in N^n$.

Teorema 2.1:

Se tiene $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset E$, inclusiones continuas y densas.

Demostración:

No hay dificultad en comprobar las contenciones; tampoco, en ver que la noción de convergencia en $\mathcal{D}$ es más fuerte que la de S y análogamente con la de S, respecto de la convergencia en E.

Quiere verse ahora que cada espacio es denso en el siguiente:

Fijada $\psi \in \mathcal{D}$, tal que

$$0 \leq \psi(x) \leq 1, \forall \; x \in R^n$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases},$$

sea $\psi_j(x) = \psi(x/j)$.

Si $\phi \in S$, se afirma que la sucesión $\{\phi.\psi_j\}$, contenida en $\mathcal{D}$, converge hacia ϕ en S.

Habrá que probar, que dadas $\alpha, \beta \in N^n$,

$$x^\alpha \mathcal{D}^\beta [\phi(\psi_j - 1)] \to 0, \text{ uniformemente en } R^n.$$

Si $\beta \neq 0$, por la regla de Leibniz, (ejercicio 2.3), puede escribirse:

$$x^\alpha \mathcal{D}^\beta [\phi(\psi_j - 1)] (x) = (\psi_j - 1)(x) \; . \; x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi(x) +$$

$$+ \sum_{0 < \gamma < \beta} C_\gamma \, x^\alpha \mathcal{D}^{\beta - \gamma} \phi(x). \; (1/j)^{|\gamma|} [\mathcal{D}^\gamma \psi](x/j).$$

Si $\beta = 0$, queda el primer término. Luego, bastará analizar el caso $\beta \neq 0$.

Cada término de la sumatoria puede acotarse:

$$(1/j)^{|\gamma|} C_\gamma \sup_{x\in R^n} |x^\alpha \mathcal{D}^{\beta-\gamma}\phi(x)| \cdot \sup_{x\in R^n} |\mathcal{D}^\gamma \psi(x)| \leq \frac{C}{j^{|\gamma|}}$$

con la constante C independiente de j.

Por lo tanto, el segundo término converge a cero, uniformemente en $x \in R^n$.

En cuanto al primero:

Por ser ϕ rápidamente decreciente con todas sus derivadas, existe

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \mathcal{D}^\beta |\phi(x)| = 0$$

Además $1-\psi_j(x) = 0$ para $|x| \leq j$.

Luego,

$$\sup_{x\in R^n} |[1-\psi_j(x)] . x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi(x)| \leq \sup_{|x|>j} |x^\alpha \mathcal{D}^\beta \phi(x)| \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

En forma semejante, se prueba que S es denso en E. #

<u>Definición 2.3</u>:

Una forma lineal $T: S \to C$, continua en el sentido habitual, es decir:

$$(T, \phi_j) \to 0 \quad \text{si} \quad \phi_j \to 0 \quad \text{en } S ,$$

se llama una <u>distribución temperada</u>.

Al espacio vectorial complejo formado por las distribuciones temperadas, se lo indica <u>S'</u>.

El nombre de distribución se justifica, pues por la inclusión continua de $\mathcal{D}$ en S, la restricción de T perteneciente a S' a $\mathcal{D}$, determina un elemento de $\mathcal{D}'$.

Es decir, que pensando en esa restricción, S' está contenido en $\mathcal{D}'$. En el §3, se verá por qué a estas distribuciones se las llama temperadas.

Definición 2.4:

Con E', se indica el espacio de las formas lineales y continuas sobre E.

Por restricción, los elementos de E' definen distribuciones, que son temperadas.

Pero se puede decir algo más para caracterizar a ese espacio:

Sea T una distribución con soporte compacto y sea $\alpha \in \mathcal{D}$, una función que vale 1 en un entorno compacto de sop(T).

Dada $\phi \in E$, tiene sentido $(T,\alpha\phi)$. Esta cantidad, no depende de la función α elegida valiendo 1 en algún entorno compacto de sop(T); además, la aplicación

$$E \to \mathbb{C}$$
$$\phi \to (T, \alpha\phi)$$

pertenece a E'.

En efecto:

Si $\alpha,\beta \in \mathcal{D}$ y $\alpha = \beta = 1$ en un entorno compacto de sop(T),

$$\text{sop } [(\alpha-\beta)\, \phi] \cap \text{sop } (T) = \phi$$

Luego, $(T,\alpha\phi) = (T,\beta\phi)$. (Ver ejercicio 1.5 ii))

Si $\{\phi_j\}$ es una sucesión que converge hacia 0 en E, $\alpha\phi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$ y entonces $(T,\alpha\phi_j) \to 0$.

El valor de la distribución de soporte compacto T, en la función indefinidamente derivable ϕ, suele indicarse (T,ϕ), omitiendo la función α.

Sea ahora L una forma lineal y continua sobre E; se afirma que su restricción a $\mathcal{D}$, es una distribución T de soporte compacto:

Si esto no ocurriera, para cada compacto $K \subset R^n$, debería existir $\phi_k \in \mathcal{D}$, tal que $\operatorname{sop}(\phi_k) \subset R^n \setminus K$, $(T,\phi_k) \neq 0$. (Ver ejercicio 1.4i))

En particular, tomando $K_j = \{|x| \leq j\}$, existiría $\phi_j \in \mathcal{D}$, idénticamente cero en K_j, pudiendo suponerse que $(T,\phi_j) = 1$.

Pero la sucesión $\{\phi_j\}$, converge hacia 0 en E; debería tenerse $(L,\phi_j) \to 0$, lo cual no ocurre.

Finalmente, la extensión a E de la distribución T, coincide con L.

La prueba de esto, se basa en la densidad de $\mathcal{D}$ en E:

En efecto, si $\operatorname{sop}(T) \subset \{|x| < a\}$ para cierto $a > 0$, sea $\psi \in \mathcal{D}$, que vale 1 en $\{|x| \leq a\}$.

Si $\psi_j(x) = \psi(x/j)$, dada $\phi \in E$, se prueba que la sucesión $\{\phi.\psi_j\}$, contenida en $\mathcal{D}$, converge hacia ϕ en E.

Entonces, es:

$$(T,\phi) = (T, \phi\psi_j) = (L,\phi\psi_j) \to (L,\phi).$$

Es decir, que se ha demostrado:

<u>Teorema 2.2</u>:

E' puede identificarse con el subespacio de $\mathcal{D}'$ formado por las distribuciones de soporte compacto.#

Va a probarse ahora una manera equivalente de definir el concepto de distribución:

<u>Teorema 2.3</u>:

Dada una aplicación $T:\mathcal{D} \to C$, son equivalentes:

i) T es una distribución

ii) T es lineal y para cada compacto $K \subset R^n$, existen $m = m(K) \in N$, $C_K > 0$, tales que

$$|(T,\phi)| \leq C_K \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \phi(x)| \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(K) \tag{2.1}$$

<u>Demostración</u>:

i) $\Rightarrow$ ii):

Si T no cumple (2.1), debe existir un compacto $K \subset R^n$, de tal manera, que dados $C > 0$, $m \in N$, existe $\phi \in \mathcal{D}(K)$, tal que

$$|(T, \phi)| > C \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha \phi(x)|$$

En particular, se toma $C = m$, fijado $m \in N$.

Entonces, existe $\psi_m \in \mathcal{D}(K)$, tal que

$$|(T,\psi_m)| > m \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \psi_m(x)|$$

Sea $\phi_m = \dfrac{\psi_m}{(T,\psi_m)}$

Fijada $\beta \in N^n$, para $m \geq |\beta|$, es

$$\sup_{x \in R^n} |\mathcal{D}^\beta \phi_m(x)| \leq \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \phi_m(x)| \leq 1/m$$

Luego, $\phi_m \to 0$ en $\mathcal{D}$; sin embargo, $(T,\phi_m) = 1$, $\forall$ m.

ii) $\Rightarrow$ i):

Se comprueba sin dificultad .

#

<u>Definición 2.5</u>:

Cuando existe <u>m</u> independiente de K en la condición ii) del teorema 2.3 , se dice que T es de <u>orden finito</u> $\leq$ m. Si no, T es de <u>orden infinito</u>.

Se indicará $\underline{\mathcal{D}'^{(m)}}$ el subespacio de $\mathcal{D}'$ formado por las distribuciones de orden $\leq m$.

En términos no muy precisos, el orden de la distribución T. es la "cantidad" de derivadas de la función de prueba que basta emplear, para comprobar la continuidad de T.

Definición 2.6:

Dado $m \in N$, sea

$$\underline{\mathcal{D}^{(m)}} = \{\phi : R^n \to C/\phi \text{ admite derivadas continuas de}$$

todos los órdenes $\leq m$ y sop (ϕ) es compacto $\}$. En $\mathcal{D}^{(m)}$, una sucesión $\{\phi_j\}$ converge hacia ϕ, si existe un compacto $K \subset R^n$, tal que sop (ϕ_j), sop$(\phi) \subset K$, $\forall j \geq 1$ y

$$\mathcal{D}^\alpha \phi_j(x) \to \mathcal{D}^\alpha \phi(x), \text{ uniformemente en } x \in R^n,$$

para cada $\alpha \in N^n$ con $|\alpha| \leq m$.

Es claro que $\mathcal{D}$ está contenido en $\mathcal{D}^{(m)}$ y que la inclusión es continua; por regularización, puede verse que también es densa. (Ver ejercicio 2.8).

Con $\underline{\mathcal{D}^{(m)'}}$, se indicará el espacio de las formas lineales y continuas sobre $\mathcal{D}^{(m)}$.

Debido a la inclusión continua de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}^{(m)}$, los elementos de $\mathcal{D}^{(m)'}$ definen, por restricción, distribuciones.

Más aún:

Teorema 2.4:

i) Si $T \in \mathcal{D}^{(m)'}$, la distribución que determina es de orden finito $\leq m$.

ii) Si $T \in \mathcal{D}'^{(m)}$, puede extenderse de una única manera a una forma L, lineal y continua sobre $\mathcal{D}^{(m)}$.

Es decir, que los espacios $\mathcal{D}'^{(m)}$ y $\mathcal{D}^{(m)'}$ quedan así identificados.

Demostración:

i) Hay que comprobar que T cumple (2.1) para ese m, independientemente de K:

Si esto no ocurriera, razonando como en el teorema 2.3, existiría un compacto $K \subset R^n$ y una sucesión $\{\phi_j\}$ contenida en $\mathcal{D}(K)$, cumpliendo:

$$1 = |(T, \phi_j)| > j \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \phi_j(x)|$$

De aquí se deduciría, que $\phi_j \to 0$ en $\mathcal{D}^{(m)}$; sin embargo, $(T, \phi_j) \neq 0$.

ii) Dada $\phi \in \mathcal{D}^{(m)}$, sea $\{\phi_j\}$ una sucesión de $\mathcal{D}$ que converge hacia ϕ en $\mathcal{D}^{(m)}$.

Como T, por pertenecer a $\mathcal{D}'^{(m)}$, cumple (2.1), resulta que la sucesión $\{(T, \phi_j)\}$ es de Cauchy en C; además, su límite no depende de la sucesión de $\mathcal{D}$ con que se aproxime a ϕ en $\mathcal{D}^{(m)}$.

Se define entonces:

$$(L, \phi) = \lim (T, \phi_j)$$

$L \in \mathcal{D}^{(m)'}$:

En efecto, si K es un compacto que contiene a los soportes de las funciones ϕ_j, ϕ, vale:

$$|(L, \phi_j)| = |(T, \phi_j)| \leq C_K \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \phi_j(x)|$$

Tomando $\lim_{j \to \infty}$, resulta que

$$|(L, \phi)| \leq C_K \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq m}} |\mathcal{D}^\alpha \phi(x)| \qquad (2.2)$$

de donde se deduce que la forma lineal L es continua sobre $\mathcal{D}^{(m)}$.

Si L_1 es otra extensión de T a un elemento de $\mathcal{D}^{(m)'}$, por la densidad de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}^{(m)}$, L_1 debe coincidir con L. #

Observaciones 2.1:

i) Del teorema 2.4, resulta que una aplicación lineal L: $\mathcal{D}^{(m)} \to C$, pertenece a $\mathcal{D}^{(m)'}$ si y sólo si cumple (2.2) para cada compacto $K \subset R^n$ y $\forall\ \phi \in \mathcal{D}^{(m)}$ con $sop(\phi) \subset K$.

ii)En particular, se deduce también del teorema 2.4, que las distribuciones de orden 0, son aquéllas que pueden extenderse a formas lineales y continuas sobre $\mathcal{D}^{(0)}$.

Pero de acuerdo con un teorema de R. Riesz, (ver [3], tomo I), estas formas están en correspondencia biunívoca con las medidas de Radon.

Es decir, dada T $\in \mathcal{D}^{(0)'}$, existe una única medida de Radon μ, con valores complejos , tal que :

$$(T, \phi) = \int \phi d\mu, \quad \phi \in \mathcal{D}^{(0)}$$

Se introducen así las medidas en $\mathcal{D}'$, identificándolas con las distribuciones de orden 0. Por ello, al hablar de medidas, se hace referencia, indistintamente, a las aplicaciones de conjuntos, o a las formas en $\mathcal{D}^{(0)'}$.

Volviendo a los ejemplos 1.2, como claramente es δ_a una distribución de orden 0, se justifica su nombre de medida de Dirac; δ_a está asociada a la medida de Radon real, positiva y finita:

$$\mu_a(B)=\begin{cases}1 & a \in B \\ 0 & a \notin B\end{cases}, \quad B \text{ boreliano de } R^n$$

Dada $f \in L^1_{loc}$, también T_f es de orden 0; pero las distribuciones asociadas a funciones localmente integrables, determinan una categoría especial dentro de las medidas : Es la formada por aquellas medidas absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue.

Como μ_a es singular respecto de la medida de Lebesgue, δ_a no puede tener asociada una densidad de L^1_{loc} ; así, en términos un poco vagos, pero justificados por todo esto, se dice que δ_a es el ejemplo más elemental de una distribución, o mejor, de una medida, que no es una función.

Por otra parte, si $m \neq 0$, las distribuciones T_m dadas en esos ejemplos 1.2, ya dejan de ser medidas: T_m es una distribución de orden $\leq m$, pero no de orden $\leq m-1$.

Ejercicios:

2.1 i) Probar que la distribución vp $1/x$, pertenece a $\mathcal{D}'^{(1)}$.

ii) Se fijan $p \in R$, $p < n+1$ y una función $\alpha \in \mathcal{D}$, que vale 1 en un entorno de 0.

Probar que:

$$\int |x|^{-p} \; [\phi(x) - \alpha(x)\;\phi(0)]\; dx, \quad \phi \in \mathcal{D},$$

define una distribución, que es de orden ≤ 1.

2.2 Demostrar que $\sum_{j\geq 0} \phi^{(j)}(j)$, $\phi \in \mathcal{D}(R)$, define una distribución, que es de orden infinito.

2.3 Regla de Leibniz para la derivada de un producto:

Si ϕ, $\psi \in E$, mostrar que dada $\alpha \in N^n$, es

$$\mathcal{D}^{\alpha}(\phi.\psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \mathcal{D}^{\beta}\phi . \mathcal{D}^{\alpha-\beta}\psi .$$

2.4 i) Si $\phi \in E$, probar que son equivalentes:

1. $\phi \in S$

2. Para cada $\beta \in N^n$ y cada polinomio $P(X) \in C[X]$, existe $C_{\beta_P} > 0$, tal que

$$\sup_{x\in R^n} |\mathcal{D}^{\beta}[P(x).\phi(x)]| \leq C_{\beta_P}$$

3. Dados $k \in R$, $\beta \in N^n$, existe $C_{k\beta} > 0$ tal que

$$\sup_{x\in R^n} |(1+|x|^2)^k \mathcal{D}^{\beta}\phi(x)| \leq C_{k\beta}$$

ii) A partir de i), obtener maneras equivalentes de describir la convergencia en S.

iii) Probar que hay una inclusión continua $S \subset L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, que es densa si p es finito.

2.5 i) Lema de Peetre:

Dado $r \in R$, ver que

$$(1+|\xi|^2)^r \leq 2^{|r|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|r|}(1+|\eta|^2)^r,\ \xi, \eta \in R^n$$

ii) Probar que la aplicación

$$(\phi,\psi) \to \phi * \psi$$

está definida y es continua, de $S \times S$ en S.

Deducir que el producto de convolución, define en $\mathcal{S}$ una estructura de álgebra compatible con su topología. ¿Es unitaria ?

iii) Lo mismo que ii), respecto del producto multiplicativo

$$\phi . \psi(x) = \phi(x) . \psi(x)$$

2.6 i) Probar que $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}$ y que $\int e^{-\pi|x|^2}\, dx = 1$

ii) Probar que la función $e^{-|x|^2} . e^{i\exp(|x|^2)}$. es rápidamente decreciente, pero no sus derivadas.

iii) Mostrar que las inclusiones

$$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \qquad \mathcal{D}' \subset \mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{E}'$$,son estrictas

iv) Probar que hay una inclusión continua $L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$, $1 \leq p \leq \infty$.

¿Qué puede decirse de L^p_{loc} ?

v) Una función $f : R^n \to C$ se llama de <u>crecimiento lento en el infinito</u>, si existen $k \in N$, $C_k > 0$, tales que

$$\sup_{x \in R^n} \left| \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^k} \right| \leq C_k$$

Mostrar que toda función medible de crecimiento lento define una distribución temperada.

vi) Dada $T \in \mathcal{S}'$ probar que su restricción a $\mathcal{D}$ la determina unívocamente.

2.7 Demostrar que toda distribución de $\mathcal{E}'$, es de orden finito y que

$$\sup \{ord(T) / T \in \mathcal{E}'\} = \infty$$

2.8 Por regularización, probar que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{D}^{(m)}$, $\forall$ m ≥ 0.

2.9 Demostrar que los polinomios forman un subespacio denso en E.

Sugerencia: Dada $\phi \in E$, basta poder aproximarla en E con funciones enteras (Ver [5]). Considerar:

$$\int_{|y| \leq R} (\sqrt{j/4\pi})^n \; e^{-j\,|x-y|^2/4} \; \phi(y)\,dy \; .$$

2.10 Cambio de variable en distribuciones:

Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de R^n y $\Phi:\Omega_1 \to \Omega_2$ una aplicación indefinidamente derivable propia, o sea, tal que $\Phi^{-1}(K)$ es compacto, si $K \subset \Omega_2$, lo es.

Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, probar que

$$(T_\Phi, \phi) = (T, \phi \circ \Phi), \phi \in \mathcal{D}(\Omega_2),$$

define una distribución sobre Ω_2.

¿Qué puede decirse del orden de T_Φ, si T es de orden $\leq$ m?

§3. LA DERIVACION DE DISTRIBUCIONES

Dada una distribución $T\in\mathcal{D}'$, se le quiere hacer corresponder n distribuciones, llamadas derivadas parciales de T respecto de las variables $x_1,\dots,x_n$; esto se hará de tal manera, que cuando T sea la distribución asociada a una función f de clase C^1, la derivada parcial respecto de x_j, sea la distribución asociada a la función continua $\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Se parte de este caso, tomando j=1 para simplificar la notación. Si $\phi\in\mathcal{D}$, se tiene:

$$(T_{\partial f/\partial x_1},\phi) = \int \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n\dots\int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x).\,\phi(x)dx_1$$

Al integrar por partes en x_1, como el soporte de ϕ es compacto, el término integrado desaparece, resultando:

$$(T_{\partial f/\partial x_1},\phi) = -(T_f, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}) .$$

Si en lugar de T_f se considera una distribución T cualquiera, la aplicación

$$\mathcal{D} \to C$$

$$\phi \to (T, \frac{\partial\phi}{\partial x_j}),$$

está bien definida y es claramente lineal.

Además, si $\phi_k \to 0$ en $\mathcal{D}$, también $\frac{\partial\phi_k}{\partial x_j} \to 0$ en $\mathcal{D}$, con lo cual

$$(T, \frac{\partial\phi_k}{\partial x_j}) \to 0.$$

O sea, que es una distribución.

Definición 3.1:

Dada $T \in \mathcal{D}'$, la distribución $\phi \to -(T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j})$ se indica $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ y se llama derivada parcial de T respecto de x_j.

Esta operación puede repetirse, por lo cual se dice que toda distribución es indefinidamente derivable.

Como $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j}$ para $\phi \in \mathcal{D}$, el valor de cualquier derivada de T no depende del orden en que se derive.

Si $\alpha \in N^n$, es

$$(D^\alpha T, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \mathcal{D}^\alpha \phi).$$

Ejemplo 3.1:

La distribución T_m introducida en los ejemplos 1.2 ii), es $(-1)^m (\frac{\partial}{\partial x_1})^m \delta_a$.

Teorema 3.1:

Si K indica cualquiera de los espacios $\mathcal{D}'$, S', E' , $\mathcal{D}^\alpha$ es un operador lineal y continuo de K en sí mismo. Además, dada $T \in D'$, vale sop $(\mathcal{D}^\alpha T) \subset$ sop(T).

Demostración:

Se hará en el caso $K = S'$, por ejemplo:

Si $T \in S'$, $\mathcal{D}^\alpha T$ también pertenece a S', pues $\mathcal{D}^\alpha \phi_j \to 0$ en S, cada vez que $\phi_j \to 0$ en S.

La linealidad de $\mathcal{D}^\alpha$ es clara y en cuanto a la continuidad, si $T_j \to 0$ en S', $\mathcal{D}^\alpha T_j \to 0$ en S' también, porque

$$(\mathcal{D}^\alpha T_j, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (T_j, \mathcal{D}^\alpha \phi) \to 0, \text{para } \phi \in S.$$

Finalmente, si el soporte de $\phi \in \mathcal{D}$ está contenido en $R^n \setminus \text{sop}(T)$,

$$(\mathcal{D}^\alpha T, \phi) = (-1)^{|\alpha|} (T, \mathcal{D}^\alpha \phi) = 0,$$

pues sop $(\mathcal{D}^\alpha \phi) \subset \text{sop}(\phi)$. #

Que para cierta función f exista la derivada parcial respecto de x_j en el punto x, significa que existe

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x)}{h_j}$$

Si $h = (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0)$ y τ_{-h} indica el operador de traslación

$$\tau_{-h} f(x) = f(x+h),$$

resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tau_{-h} f(x) - f(x)}{h_j}$$

Para una distribución $T \in \mathcal{D}'$, es posible obtener el mismo resultado. En efecto:

τ_{-h} es un operador continuo de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}$; luego, si se define el operador de traslación sobre $\mathcal{D}'$ como

$$(\tau_h T, \phi) = (T, \tau_{-h} \phi),$$

resulta que $\tau_h T \in \mathcal{D}'$.

Se tiene:

Teorema 3.2:

Existe
$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau_{-h}T - T}{h_j} = \frac{\partial T}{\partial x_j},$$
entendiendo con esto que para cada $\phi \in \mathcal{D}$,
$$\left(\frac{\tau_{-h}T - T}{h_j}, \phi\right) \underset{h\to 0}{\to} -\left(T, \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)$$

Demostración:
$$\left(\frac{\tau_{-h}T - T}{h_j}, \phi\right) = \left(T, \frac{\tau_h\phi - \phi}{h_j}\right).$$
Luego, bastará comprobar que
$$\frac{\tau_h\phi - \phi}{h_j}(x) = \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j},$$ converge hacia $-\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)$ en $\mathcal{D}$, para $h \to 0$.

En primer lugar, cada función $\frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j}$, tiene su soporte contenido en un compacto independiente de h, si por ejemplo, es $0 < |h| \leq 1$.

Como $\mathcal{D}_x^\alpha \left[\frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j}\right] = \frac{D_x^\alpha \phi(x-h) - \mathcal{D}_x^\alpha\phi(x)}{h_j}$, es suficiente probar que $\frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j}$ converge hacia $-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)$, uniformemente en $x \in R^n$.

Esto se hace aplicando dos veces el teorema del valor medio:
$$\left|\frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j} + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\right| = \left| - \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(\xi) + \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2}(\eta)\right| \cdot |x-\xi|,$$

donde los puntos ξ y η pertenecen a los segmentos de extremos x, $x-h$ y x, ξ, respectivamente.

Luego, se comprueba que:

$$\sup_{x \in R^n} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) + \frac{\phi(x-h) - \phi(x)}{h_j} \right| \underset{h \to 0}{\to} 0$$

#

Un propósito fundamental al definir las distribuciones fue el de poder derivar las funciones continuas; pero se ha logrado más, pues con sólo ser localmente integrable, una función es indefinidamente derivable en el sentido de las distribuciones y no importa el orden en que se derive.

Sin embargo, no se ha introducido nada de sobra, pues, localmente, una distribución es la derivada de un cierto orden, de una función continua.

En efecto:

Teorema 3.3: (Ver [1], tomo I).

Si $T \in \mathcal{D}'$, para cada abierto $\Omega \subset R^n$ relativamente compacto, existen

$F = F(\Omega): R^n \to C$ continua y $m = m(\Omega) \in N$, tales que

$$T = \frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^m \ldots \partial x_n^m} F, \text{ en } \Omega.$$

Observación 3.1:

Del teorema 3.3, se deduce que toda distribución restringida a un abierto relativamente compacto, es de orden finito; esto, precisamente, muestra que la condición de ser Ω acotado, no puede eliminarse.

Finalmente, va a enunciarse un resultado que justifica el nombre de temperadas, dado a las distribuciones de $\mathcal{S}'$.

Teorema 3.4: (Ver [1], tomo II)

Si $T \in \mathcal{S}'$, existen una función f continua de crecimiento lento, (ver ejercicio 2.6 iv)) y una n-upla $\alpha \in N^n$, tales que

$$T = D^{\alpha} f$$

Observaciones 3.2:

i) Resulta del teorema 3.4, que las distribuciones de $\mathcal{S}'$ son de orden finito.

ii) Es posible vincular las derivadas de una función en el sentido usual, con sus derivadas en el sentido de las distribuciones (ver [1], tomo I).

Ejercicios:

3.1 i) Probar que el operador de derivación $\mathcal{D}^{\alpha}$, es continuo de $\mathcal{D}'^{(m)}$ en $\mathcal{D}'^{(m+|\alpha|)}$.

ii) Demostrar que una serie de distribuciones, convergente en $\mathcal{D}'$, siempre puede derivarse término a término, sin alterarse su convergencia.

iii) Mostrar que el operador de traslación τ_h, aplica $\mathcal{S}'$ en sí mismo.

3.2 Calcular, en el sentido de $\mathcal{D}'$:

i) $\left(\frac{d}{dx}\right) \log |x|$; $\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) \log |x|$.

ii) $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} Y(x)$, siendo $Y(x)$ la función de Heaviside ;

$$Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \geq 0 \ldots x_n \geq 0 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

3.3 Derivadas sucesivas de una función regular por secciones:

Se da una sucesión de intervalos (x_{n-1}, x_n), $n \in Z$, con $x_n \to \pm \infty$, cuando $n \to \pm \infty$, respectivamente.

Que f sea regular por secciones, significa que en cada intervalo, f es indefinidamente derivable en el sentido usual, que en cada punto x_n, f y sus derivadas tienen discontinuidades de primera especie.

Sea $S_n^{(k)}$ el salto de la derivada usual k-ésima, $f^{(k)}$, en el punto x_n.

Probar que

$$(T_f)^{(p)} = \sum_{n \in Z} \sum_{k=0}^{p-1} S_n^{(k)} \, \delta_{x_n}^{(p-k-1)} + T_{f^{(p)}} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

3.4 i) Dada $T \in E'$, demostrar que son equivalentes:

1. T está <u>concentrada</u> en el punto $x_0 \in R^n$.
2. Existen únicos $M \in N$, $c_k \in C$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{M} c_k \, \delta_{x_0}^{(k)}$$

<u>Sugerencia</u>: Si ord $(T) \leq m$, dada $\phi \in E$, escribir

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\mathcal{D}^\alpha \phi(x_0)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha| = M+1} \phi_\alpha(x) . (x-x_0)^\alpha$$

y observar que $(T, (x-x_0)^\alpha \phi) = 0$, $\forall \phi \in E$, si $|\alpha| \geq M+1$

3.5. Si $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$ y $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, calcular en el sentido de $\mathcal{D}'$,

$\Delta\, r$ para $n = 1$

$\Delta \log r$ para $n=2$

$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ para $n \geq 3$

3.6. Existencia de primitivas en R:

Si $T \in \mathcal{D}'$, demostrar que existen infinitas distribuciones S tales que $S' = T$

Sugerencia: Probar que $H = \{\psi \in \mathcal{D} \mid \phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(t)\, dt \in \mathcal{D}\} =$

$$= \{\psi \in \mathcal{D} \mid \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0\}.$$

Para $\psi \in H$, que es un hiperplano en $\mathcal{D}$, definir $(S,\psi) = -(T,\phi)$.

§4. LOS PRODUCTOS TENSORIAL, DE CONVOLUCION Y MULTIPLICATIVO

El objeto, es definir estas operaciones de tal manera, que cuando se trate de funciones, coincidan con las definiciones usuales.

Producto tensorial:

Definición 4.1:

Dadas $f = f(x): R^n \to C$, $g = g(y): R^m \to C$, su producto $f(x).g(y)$ define una nueva función $h = h(x,y): R^{n+m} \to C$, llamada producto tensorial, (ó directo) , de las funciones f, g y que será indicada $f \times g$.

Ya en esta definición, se advierte la importancia de precisar con qué variables se trabaja; por ello, se notarán $\mathcal{D}_x$, $\mathcal{D}_y$, $\mathcal{D}_{xy}$, los espacios de las funciones indefinidamente derivables y de soporte compacto, definidas sobre R^n, R^m y R^{n+m}, respectivamente. D'_x ; D'_y; D'_{xy} , serán los correspondientes espacios de distribuciones.

Si las funciones f y g son localmente integrables, también lo será su producto tensorial $f \times g$, en R^{n+m}. Luego, dada $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$, tiene sentido calcular:

$$(f \times g, \phi) = \int f(x) \quad g(y) \quad \phi(x,y) \, dx \, dy = \int f(x) \left[\int g(y) \, \phi(x,y) \, dy \right] dx =$$

$$= \int g(y) \quad \left[\int f(x) \quad \phi(x,y) \, dx \right] dy .$$

Para expresar esto en la notación de distribuciones, o sea para escribir:

$$(f \times g, \phi) = (f(x), (g(y), \phi(x,y))) = (g(y), (f(x), \phi(x,y))) \quad (4.1)$$

debería probarse que las funciones

$\psi(x) = (g(y), \phi(x,y))$; $\chi(y) = (f(x), \phi(x,y))$,

pertenecen a $\mathcal{D}_x$ y $\mathcal{D}_y$, respectivamente.

Esto puede comprobarse por cálculo directo, pero se obtendrá de un resultado general, que será demostrado enseguida.

Si, en particular, la función ϕ es de variables separadas, o sea

$$\phi(x,y) = \alpha(x) . \beta(y), \quad \alpha \in \mathcal{D}_x, \ \beta \in \mathcal{D}_y ,$$

es

$$(f \times g, \phi) = (f,\alpha). (g,\beta).$$

Sean ahora $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$; si se busca definir su producto tensorial, W, de tal manera que cuando se trate de funciones coincida con $f \times g$, es natural escribir:

$$(W, \phi) = (T,\alpha). (S,\beta) \qquad (4.2)$$

cuando ϕ sea de variables separadas.

O sea, que ya se conoce el valor de W en las funciones ϕ de variables separadas y por linealidad, también en las funciones ϕ de la forma $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j(x). \beta_j(y)$, con $\alpha_j \in \mathcal{D}_x$, $\beta_j \in \mathcal{D}_y$.

Lo que se busca ahora, es extender la definición de W a todo $\mathcal{D}_{xy}$.

La posibilidad de definir esa extensión, se apoya en el siguiente teorema, que también da sentido a (4.1):

<u>Teorema 4.1:</u>

Sean T y S distribuciones pertenecientes a $\mathcal{D}'_x$ y $\mathcal{D}'_y$, respectivamente.

Entonces:

i) Dada $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$, la función $\psi(x) = (S_y, \phi(x,y))$, pertenece a $\mathcal{D}_x$

ii)La aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{xy} &\to C \\ \phi &\to (T_x, (S_y, \phi(x,y))), \end{aligned}$$

es una distribución de $\mathcal{D}'_{xy}$.

Demostración:

i) El soporte de la función $\psi(x)$, está contenido en la proyección sobre R^n del sop(ϕ) y es, por lo tanto, compacto. Además, como en el teorema 3.2, se ve que ψ resulta continua.

Se prueba ahora que existe $\mathcal{D}_{r_1,\ldots,r_k}\psi$, para cualquier orden de derivación k y que es:

$$\mathcal{D}_{r_1,\ldots,r_k}\psi(x) = (S_y, \mathcal{D}^x_{r_1,\ldots,r_k}\phi(x,y)).$$

Esto se hace por inducción sobre k:

Que sea $k = 1$, significa que $\mathcal{D}_{r_1,\ldots,r_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}$, para cierto $1 \leq j \leq n$.

Fijado $x \in R^n$, se emplea la notación del teorema 3.2:

$$\frac{\tau_{-h}\psi(x) - \psi(x)}{h_j} = (S_y, \frac{\tau^x_{-h}\phi(x,y) - \phi(x,y)}{h_j}).$$

Habrá que comprobar que existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau^x_{-h}\phi(x,y) - \phi(x,y)}{h_j} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(x+h,y) - \phi(x,y)}{h_j}$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x,y), \text{ en } \mathcal{D}_y.$$

Se hace con un razonamiento semejante al empleado en ese teorema 3.2.

Si se supone la afirmación cierta para $\mathcal{D}_{r_1,\ldots,r_k}$, debe probarse para $\frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{D}_{r_1,\dots,r_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{D}_k$

Pero por lo que acaba de hacerse, existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{D}_k \psi(x+h) - \mathcal{D}_k \psi(x)}{h_j} = \lim_{h\to 0} \left(S_y, \frac{\mathcal{D}_k^x \phi(x+h,y) - \mathcal{D}_k^x \phi(x,y)}{h_j}\right) =$$

$$= \left(S_y, \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{D}_k^x \phi(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{D}_k \psi(x).$$

Esto finaliza la demostración de i).

ii) Lo probado en i), muestra que esa aplicación está bien definida; es clara su linealidad . Para concluir que es una distribución en R^{n+m}, bastará comprobar que cumple la condición (2.1).

Es decir, que dado $K \subset R^{n+m}$ compacto, existen $C_K > 0$, $\ell = \ell(K) \in N$, tales que

$$|(T_x,(S_y,\phi(x,y)))| \leq C_K \sup_{\substack{(x,y) \in R^{n+m} \\ |\alpha+\beta| \leq \ell}} |\mathcal{D}_x^\alpha \mathcal{D}_y^\beta \phi(x,y)|,$$

si $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$, $\mathrm{sop}(\phi) \subset K$.

Fijado ese compacto K, sea K_1 la proyección sobre R^n de K; dada $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$ con soporte contenido en K, la función $\psi(x) = (S_y, \phi(x,y))$, según i), pertenece a $\mathcal{D}_x$ y sop $(\psi) \subset K_1$. Como $T \in \mathcal{D}'_x$, existen $\ell_1 = \ell(K_1) \in N$, $C_{K_1} > 0$, tales que

$$|(T, \psi(x))| \leq C_{K_1} \sup_{\substack{x \in R^n \\ |\alpha| \leq \ell_1}} |\mathcal{D}^\alpha \psi(x)|$$

También se probó en i), que $\mathcal{D}^{\alpha}\psi(x) = (S_y, \mathcal{D}_x^{\alpha} \phi(x,y))$.

Fijado x, $\mathcal{D}_x^{\alpha} \phi(x,y) \in \mathcal{D}_y$ y su soporte está contenido en la proyección, K_2, de K sobre R^m. Como $S \in \mathcal{D}'_y$, existen también $\ell_2 = \ell(K_2) \in N$, $C_{K_2} > 0$, tales que

$$|\mathcal{D}^{\alpha} \psi(x)| = |(S_y, \mathcal{D}_x^{\alpha} \phi(x,y))| \leq C_{K_2} \sup_{\substack{y \in R^m \\ |\beta| \leq \ell_2}} |\mathcal{D}_y^{\beta} \mathcal{D}_x^{\alpha} \phi(x,y)|$$

En total, se comprueba la condición (2.1). #

Observación 4.1

Este teorema, generaliza los resultados clásicos sobre derivación bajo el signo integral.

Con el teorema 4.1, ya se está en condiciones de completar la definición del producto tensorial.

En efecto, puede escribirse:

$$(W, \phi(x,y)) = (T_x, (S_y, \phi(x,y))) \qquad (4.3)$$

si $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$

El teorema 4.1, muestra que $W \in \mathcal{D}'_{xy}$; además, cuando ϕ es de variables separadas, es claro que se obtiene (4.2)

Para justificar plenamente la definición de W y poder llamarla el producto tensorial de T y S, T x S, falta sólo probar que (4.3) es la única manera de extender a una distribución de $\mathcal{D}'_{xy}$, la aplicación definida por (4.2). Esto resultará del siguiente

Teorema 4.2

Las funciones de variables separadas forman un sistema total en $\mathcal{D}_{xy}$.

Es decir, el subespacio de las funciones $\phi(x,y) = \sum_j \alpha_j(x) \cdot \beta_j(y)$, es denso en $\mathcal{D}_{xy}$.

Demostración

Dada $\phi \in \mathcal{D}_{xy}$, existe una sucesión de polinomios, $\{P_j(x,y)\}$, que converge hacia ϕ en E_{xy}. (Ver ejercicio 2.9).

Si ahora se eligen funciones $\alpha \in \mathcal{D}_x$, $\beta \in \mathcal{D}_y$ que valgan 1 en las proyecciones de sop(ϕ) sobre R^n y R^m, respectivamente, la sucesión $\{\alpha(x) \cdot \beta(y) \cdot P_j(x,y)\}$, es de la forma pedida y converge hacia ϕ en $\mathcal{D}_{xy}$. #

A partir de estos resultados, puede enunciarse el siguiente

Teorema 4.3:

Dadas $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$, existe una única distribución $W \in \mathcal{D}'_{xy}$, tal que

$$(W, \alpha(x) \cdot \beta(y)) = (T, \alpha(x)) \cdot (S, \beta(y)), \text{ si } \alpha \in \mathcal{D}_x, \beta \in \mathcal{D}_y .$$

Demostración:

No tiene ninguna dificultad, a partir de los teoremas 4.1 y 4.2. #

Definición 4.2:

Se define a la distribución W, como el producto tensorial de las distribuciones T y S, que se indicará T x S.

Observación 4.2:

También la distribución W_1 definida como

$$(W_1, \phi(x,y)) = (S_y, (T_x, \phi(x,y)))$$

cumple (4.2); luego, se deduce que $W_1 = W$.

Es decir, se tieneuna especie de teorema de Fubini para distribuciones, que asegura siempre la igualdad de las"integrales iteradas":

$$(T_x,(S_y,\ \phi(x,y))) = (S_y,(T_x,\ \phi(x,y))), \quad \phi \in \mathcal{D}_{xy}.$$

Teorema 4.4:

Si $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$, es

$$\mathrm{sop}(T \times S) = \mathrm{sop}(T) \times \mathrm{sop}\ (S)$$

Además, dadas $\alpha \in N^n$, $\beta \in N^m$,

$$\mathcal{D}^{\alpha}_x\ \mathcal{D}^{\beta}_y(T \times S) = \mathcal{D}^{\alpha}_x\ T \times \mathcal{D}^{\beta}_y\ S$$

Demostración:

Si $x \in \mathrm{sop}(T)$, $y \in \mathrm{sop}(S)$ y U es un entorno abierto de (x,y) en R^{n+m}, existen entornos abiertos U_1 y U_2 de x e y, respectivamente y funciones $\alpha \in \mathcal{D}_x(U_1)$, $\beta \in \mathcal{D}_y(U_2)$, tales que $U_1 \times U_2 \subset U$, $(T,\ \alpha) \neq 0$, $(S,\ \beta) \neq 0$.

Luego, $(T \times S, \alpha(x).\ \beta(y)) \neq 0$.

Si dado $(x,y) \in R^{n+m}$, por ejemplo $x \notin \mathrm{sop}(T)$, existe U, entorno abierto de x en R^n, tal que $(T,\alpha) = 0$, $\forall\ \alpha \in \mathcal{D}_x(U)$.

$U \times R^m$ es un entorno abierto de (x,y) en R^{n+m}; dado $\phi \in \mathcal{D}_{xy}(U \times R^m)$, es:

$$(T \times S, \phi) = (S_y, (T_x, \phi(x,y))) = 0,$$

pues $(T_x,\ \phi(x,y)) = 0\ \ \forall\ \ y \in R^m$.

La otra afirmación , sobre las derivadas, se comprueba sin dificultad, mediante el teorema 4.1. i). #

Producto de convolución:

Dadas funciones f y g pertenecientes a L^1, según el teorema de Young, también $f * g \in L^1$.

Luego, dada $\phi \in \mathcal{D}$, tiene sentido calcular

$$(f * g, \phi) = \int \left[\int f(x-y)\, g(y)\, dy \right] \phi(x)\, dx =$$

$$= \int f(x-y)\, g(y)\, \phi(x)\, dx\, dy = \int f(x)\, g(y)\, \phi(x+y)\, dx dy$$

De acuerdo con la definición 4.1, se escribe:

$$(f * g, \phi) = (f(x) \times g(y),\ \phi(x+y))$$

Entonces, para $T, S \in \mathcal{D}'$, parece natural definir

$$(T * S, \phi) = (T_x \times S_y,\ \phi(x+y)) \qquad (4.4)$$

Sin embargo, (4.4) no tiene sentido en $\mathcal{D}'$, pues dada $\phi \in \mathcal{D}$, la función $\psi(x,y) = \phi(x+y)$, no es de soporte compacto, salvo que sea idénticamente nula.

En efecto:

$$\text{sop}(\psi) \supset \bigcup_{\phi(a) \neq 0} \{(x,y) \in R^{2n} / x+y = a\} ,$$

que es una unión de variedades lineales paralelas a la "segunda bisectriz".

La expresión (4.4) tendrá sentido, por ejemplo, si los soportes de $T_x \times S_y$ y $\phi(x+y)$, se cortan en un compacto.

Y esto ocurre, cualquiera sea $\phi \in \mathcal{D}$, si al menos una de las distribuciones pertenece a E'.

<u>Teorema 4.5:</u>

Si, por ejemplo, $T \in \mathcal{D}'$, $S \in E'$, (4.4) define una distribución de $\mathcal{D}'$, cuyo soporte está contenido en $\text{sop}(T) + \text{sop}(S)$.

<u>Demostración:</u>

Es claro que (4.4) tiene sentido cualquiera que sea $\phi \in \mathcal{D}$ y que determina una aplicación lineal; también es continua:

Si $\phi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$, sea $K \subset R^{2n}$ un compacto fijo que contiene a $\operatorname{sop}[\phi_j(x+y)] \cap [\operatorname{sop}(T) \times \operatorname{sop}(S)]$, $j \geq 1$.

Si $\chi \in \mathcal{D}_{xy}$ y vale 1 en un entorno compacto de K,

$$(T_x \times S_y, \phi_j(x+y)) = (T_x \times S_y, \chi(x,y) \, . \, \phi_j(x+y)).$$

La sucesión $\{\chi(x,y).\phi_j(x+y)\}$, converge a 0 en $\mathcal{D}_{xy}$, de donde se deduce que

$$(T_x \times S_y, \phi_j(x+y)) \to 0 \; .$$

En cuanto al soporte, sea Ω el abierto $R^n \setminus [\operatorname{sop}(T) + \operatorname{sop}(S)]$.

Hay que probar que $(T * S, \phi) = 0$, $\forall \phi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{sop}(\phi) \subset \Omega$.

Pero

$$\operatorname{sop}[\phi(x+y)] \subset \{(x,y) \in R^{2n} / x+y \in \Omega\}$$

Luego

$$[\operatorname{sop}(T) \times \operatorname{sop}(S)] \cap \operatorname{sop}[\phi(x+y)] = \emptyset \, .$$

#

<u>Definición 4.2:</u>

La distribución

$$\mathcal{D} \to C$$

$$\phi \to (T_x \times S_y, \phi(x+y)),$$

que ha sido construída en el teorema 4.5 cuando una de las distribuciones tiene soporte compacto, se llama el <u>producto de convolución</u> de T y S y se indica <u>T * S</u>.

<u>Observación 4.3:</u>

A partir de la definición, este producto es <u>conmutativo</u>. O sea

$$\underline{T * S} = \underline{S * T}$$

Reiterando el procedimiento, puede definirse el producto de convolución de varias distribuciones que tengan soporte compacto, salvo a lo más una. (Ver ejercicio 4.1 ii).

Si T y S $\in E'$, $T * S \in E'$, pues la suma de dos compactos es compacta. Luego, puede decirse que el producto de convolución define en E' una estructura de álgebra conmutativa. Más aún, es unitaria, pues se comprueba sin dificultad que

$$\delta * T = T,$$

para cualquier distribución $T \in \mathcal{D}'$.

Se analiza ahora el producto de convolución de una distribución con una función indefinidamente derivable, cuando una de ellas tiene soporte compacto:

<u>Teorema 4.6</u>:

Si $T \in \mathcal{D}'$ y $\alpha \in \mathcal{D}$, ó bien $T \in E'$ y $\alpha \in E$, el producto de convolución $T * \alpha$ es una función β indefinidamente derivable, que se llama <u>regularizada</u> de T y que se calcula así:

$$\beta(x) = (T_y, \alpha(x-y))$$

<u>Demostración</u>:

Según el teorema 4.1 i), la función $\beta(x) = (T_y, \alpha(x-y))$, es indefinidamente derivable en cualquiera de los dos casos.

Hay que ver que β coincide con $T * \alpha$, en el sentido de $\mathcal{D}'$:

Si $\phi \in \mathcal{D}$,

$$(T * \alpha, \phi) = (T_y \times \alpha(x), \phi(x+y)) = (T_y, \int \alpha(x)\, \phi(x+y)\, dx) =$$

$$= (T_y, \int \alpha(z-y)\, \phi(z)\, dz) = (T_y \times \phi(z), \alpha(z-y)) =$$

$(\phi(z), (T_y, \alpha(z-y)))$ $$= ((T_y, \alpha(z-y)), \phi(z)).$$ #

$= \int \phi(z) (T_y, \alpha(z-y)) =$

Observación 4.4:

Aplicando lo visto en la demostración del teorema 4.1 , se deduce que dada $\gamma \in N^n$, es

$$\mathcal{D}^\gamma (T * \alpha) = \mathcal{D}^\gamma \beta(x) = (T_y, \mathcal{D}^\gamma_x \alpha(x-y)) = T * \mathcal{D}^\gamma \alpha.$$

Todas las derivadas están calculadas en el sentido usual.

Teorema 4.7:

Existen las inclusiones

$$E \subset \mathcal{D}'$$

$$\mathcal{D} \subset E'$$

que son continuas y densas.

Demostración:

No hay dificultad en comprobar la existencia de esas inclusiones y su continuidad. Falta ver la densidad.

Se trabaja con la función ρ_j, introducida en el teorema 1.2.

Dada $T \in \mathcal{D}'$, sea

$$\beta_j = T * \rho_j$$

Por el teorema 4.6 , $\beta_j \in E$. Además, como se comprueba sin dificultad que $\rho_j \to \delta$ en E', resulta que $\beta_j \to T$ en el sentido de $\mathcal{D}'$. (Ver ejercicio 4.2. i)).

El otro resultado de densidad es análogo. #

Producto multiplicativo:

Se quiere definir un producto multiplicativo, $S.T \in \mathcal{D}'$, de dos distribuciones $S, T \in \mathcal{D}'$, de tal manera , que en el caso de funciones $f(x), g(x): R^n \to C$, se obtenga el producto habitual $f(x).g(x)$.

Naturalmente, que esto no puede hacerse con un par de distribuciones cualesquiera.

Por ejemplo, si se trata de funciones de L^1_{loc}, su producto no siempre es localmente integrable y por lo tanto, deja de definir una distribución. En términos vagos, la regularidad de un factor, debe "compensar" a la irregularidad del otro (Ver [1], tomo I).

Definición 4.3:

Un producto multiplicativo, siempre puede definirse entre una distribución $T \in \mathcal{D}'$ y una función $\alpha \in E$.

En efecto, si se escribe

$$(\alpha T, \phi) = (T, \alpha\phi), \ \phi \in \mathcal{D},$$

$\alpha. T$ resulta una distribución perteneciente a $\mathcal{D}'$, pues es claramente lineal y si $\phi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$, también $\alpha. \phi_j \to 0$ en $\mathcal{D}$.

El problema de dividir dos distribuciones, es decir, de encontrar $\chi \in \mathcal{D}'$ tal que

$$\chi . T = S$$

dadas $T, S \in \mathcal{D}'$, aparece naturalmente ligado al de la multiplicación y es interesante para la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. En el §6, se hará una breve referencia al por qué de ese interés.

Desde luego, que si T es una función de E que no se anula nunca, una solución del problema de dividir S por T es $\chi = \frac{1}{T} . S$

Para el caso en que la función T se anula en algún punto, ver [1], tomo I.

Ejercicios:

4.1. i) Dadas $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$, $R \in \mathcal{D}'_z$, definir el producto tensorial $(T \times S) \times R$ y probar que coincide con $T \times (S \times R)$.

ii) Deducir que el producto de convolución de varias distribuciones, que pertenecen a E', salvo a lo más una, es asociativo.

iii) Si $T \in E'$ y $S \in \mathcal{D}'$, probar que $\mathcal{D}^\alpha (T * S) = \mathcal{D}^\alpha T * S = T * \mathcal{D}^\alpha S$, dada $\alpha \in N^n$

iv) Mostrar que la contención $\text{sop}(T * S) \subset \text{sop}(T) + \text{sop}(S)$, puede ser estricta.

4.2. i) Si $T \in \mathcal{D}'$, probar que la aplicación

$$\begin{aligned} E' &\to \mathcal{D}' \\ S &\to S * T \end{aligned}$$

es continua.

ii) Demostrar que el producto de convolución está definido y es continuo en cada variable, de $E' \times S'$ en S'.

<u>Sugerencia</u>: Teorema 3.4 y ejercicio 2.5 i).

4.3. i) Calcular $x^k \cdot \delta^{(\ell)}$, dados $k, \ell \in N$.

ii) Si $T \in \mathcal{D}'^{(m)}$ y $\alpha \in \mathcal{D}^{(p)}$, $p \geq m$, demostrar que

$$(\alpha T, \phi) = (T, \alpha\phi), \quad \phi \in \mathcal{D}^{(m)};$$

define una distribución, que es de orden $\leq m$ y cuyo soporte está contenido en $\text{sop}(\alpha) \cap \text{sop}(T)$.

Ver que la desigualdad en el orden y la contención en los soportes, pueden ser estrictos.

iii) Probar que la aplicación

$$(\alpha, T) \to \alpha . T$$

$$\mathcal{D}^{(p)} \times \mathcal{D}^{(m)'} \to \mathcal{D}^{(m)'} \quad m \leq p$$

es continua en cada variable.

4.4. Generalización de la regla de Leibniz para derivar un producto: Si $\alpha \in E$, $T \in \mathcal{D}'$, dada $\beta \in N^n$, probar que vale:

$$\mathcal{D}^{\beta}(\alpha . T) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \mathcal{D}^{\gamma} \alpha \, \mathcal{D}^{\beta - \gamma} T$$

4.5. Se considera el <u>operador diferencial lineal de orden m</u>

$$\underline{P(x, \mathcal{D})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \underline{a_{\alpha}(x) \; \mathcal{D}^{\alpha}}$$

i) Imponer condiciones sobre las funciones a_{α}, para demostrar que $P(x, \mathcal{D})$ está definido y es continuo de $\mathcal{D}'$ en $\mathcal{D}'$.

ii) Analizar el caso en que $P(x, \mathcal{D})$ actúa sobre distribuciones de orden finito, fijo.

4.6. Se consideran varias distribuciones, que son, salvo a lo más una, funciones indefinidamente derivables.

Demostrar la asociatividad y la conmutatividad de su producto multiplicativo.

4.7. Sea $O_M = \{f : R^m \to C / f \in E$ y $\mathcal{D}^{\alpha} f$ es de crecimiento lento, para cada $\alpha \in N^n\}$.

(Ver ejercicio 2.6. iv))

Probar que está bien definido el producto multiplicativo

$$(f, T) \to f . T$$

$$O_M \times S' \to S'.$$

4.8. Dadas $T \in \mathcal{D}'_x$, $S \in \mathcal{D}'_y$ $\alpha \in E_x$, $\beta \in E_y$, probar que

$$\alpha(x).\ \beta(y)\ [T_x \times S_y] = [\alpha(x)\ T_x] \times [\beta(y)\ S_y]$$

4.9. Por truncamiento y regularización, demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{D}'$.

4.10. Dados $a,b \in R$, hallar todas las distribuciones $T \in \mathcal{D}'(R)$ tales que

$$(x-a).T = \delta_b$$

LA TRANSFORMACION DE FOURIER

§5 . LAS TEORIAS L^1 y L^2

El objeto de este § , es introducir las definiciones y propiedades básicas de la transformación y enunciar aquellos resultados que permitan ir viendo las diferencias entre ambas teorías y las ventajas y dificultades inherentes a cada una.

Definición 5.1:

La Transformación de Fourier, que se indica $\mathcal{F}[f]$ o $\hat{f}$, de una función $f \in L^1$, es la función definida como:

$$\mathcal{F}[f]\,(\xi) = \int e^{2\pi i \xi x}\, f(x)\, dx$$

También se la suele escribir, por ejemplo, con un signo menos en el exponente, o eliminando el factor 2π .

Esa integral existe $\forall\, \xi \in R^n$ y además:

Teorema 5.1: (Lebesgue)

$\mathcal{F}\,[f]$ es una función continua, nula en el infinito. Es decir, existe

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \mathcal{F}[f](\xi) = 0$$

Demostración:

Fijado $\xi_0 \in R^n$, sea $\{\xi_j\}$ una sucesión que converge a ξ_0.
Como $e^{2\pi i \xi_j x}\, f(x) \to e^{2\pi i \xi_0 x}\, f(x)$, para cada $x \in R^n$ y $|e^{2\pi i \xi_j x}\, f(x)| = |f(x)|$, aplicando el teorema de convergencia mayorada de Lebesgue, se tiene que

$$\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi_0)$$

A partir de la definición de $\hat{f}$, es inmediato deducir que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} \quad , \quad \forall\, \xi \in R^n$$

De aquí resulta que $\hat{f}$ es una función acotada y

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$$

Es decir, que la transformación de Fourier, lleva las sucesiones convergentes en L^1 a sucesiones uniformemente convergentes.

Entonces, para probar que $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$, basta hallar una sucesión $\{f_j\}$ que converja en L^1 hacia f y tal que $\hat{f}_j$ sea nula en el infinito , $\forall\, j \geq 1$.

Una manera de determinar esa sucesión, es recordando que las funciones características de "paralelepípedos", forman un sistema total en L^1.

Si χ indica una de esas funciones características, por simple cálculo se comprueba que $\hat{\chi}(\xi) \underset{|\xi| \to \infty}{\to} 0$. (Ver ejercicio 5.2, i)).

Observaciones 5.1:

i) Por ser $\hat{f}$ continua y nula en el infinito, resulta ser uniformemente continua.

Esto puede comprobarse directamente, a partir de la definición de $\hat{f}$.

ii) No toda función continua que se anula en el infinito, es la transformada de Fourier de una función integrable (Ver [3], tomo II). Luego, el teorema 5.1) no basta para caracterizar el espacio $\mathcal{F}[L^1]$.

Teorema 5.2

i) Si f admite derivadas continuas e integrables hasta el orden $k \geq 1$ inclusive, es

$$\mathcal{F}[D^{\beta} f](\xi) = (-2\pi i \xi)^{\beta} \mathcal{F}[f](\xi), |\beta| \leq k \qquad (5.1)$$

ii) Si f y $|x|^k f$ son integrables para cierto $k \geq 1$, entonces $\hat{f}$ admite derivadas continuas hasta el orden k, inclusive y es

$$D^{\beta} \hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[(2\pi i x)^{\beta} f](\xi), |\beta| \leq k \qquad (5.2)$$

Demostración:

i) Integrando por partes en

$$\mathcal{F}[\frac{\partial f}{\partial x_1}](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi x} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx_1$$

es

$$\mathcal{F}[\frac{\partial f}{\partial x_1}](\xi) = (2)\pi i \xi_1 \mathcal{F}[f](\xi) +$$

$$+ \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to -\infty}} \int e^{2\pi i (\xi_2, \dots, \xi_n).(x_2, \dots, x_n)} [e^{2\pi i \xi_1 a} f(a, x_2, \dots, x_n) - e^{2\pi i \xi_1 b} f(b, x_2, \dots, x_n)] dx_2 \dots dx_n .$$

Como la función $g(a) = \int |f(a, x_2, \dots, x_n)| dx_2, \dots, dx_n$ es integrable, la medida de $\{a > 0 \;/\; g(a) > \frac{1}{n}\}$, es finita, para cada $n \geq 1$.

Luego, existe una sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n \nearrow \infty$; $g(a_n) \to 0$.

De la misma manera se razona para $g(b)$, considerando $\{b < 0 \;/\; g(b) < 1/n\}$ y obteniendo una sucesión $\{b_n\}$ tal que $b_n \searrow -\infty$, $g(b_n) \to 0$.

Lo que se hizo en la variable x_1 para simplificar la notación, puede repetirse con $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq n$; se comprueba así (5.1) para $|\beta| = 1$. Si ahora D^β es una derivada cualquiera de orden $\leq k$, aplicando en cada variable este razonamiento las veces que sea necesario, se obtendrá (5.1) en el caso general.

ii) Sea $D_{r_1,\ldots,r_\ell}$ una derivada de orden $\ell \leq k$.

Como por hipótesis f y $|x|^k f$ son integrables, también lo será $|x|^\ell f$.

Luego, tiene sentido calcular

$$F[x_{r_1} \ldots x_{r_\ell} f](\xi) = \int e^{2\pi i \xi x} x_{r_1} \ldots x_{r_\ell} f(x)dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^\ell} \int [D^{\xi}_{r_1,\ldots,r_\ell} e^{2\pi i \xi x}] f(x)dx.$$

Como esta integral existe, resulta que la expresión de $\hat{f}(\xi)$ puede derivarse bajo el signo integral, obteniéndose (5.2). Además, $D_{r_1,\ldots,r_\ell} \hat{f}(\xi)$ es continua, según el teorema 5.1, por ser la transformada de Fourier de una función integrable. #

<u>Teorema 5.3</u>

Si $f \in L^1$, $h \in R^n$ y $k \in R$, con $k \neq 0$, entonces:

$F[\tau_h f](\xi) = e^{2\pi i \xi \cdot h} \hat{f}(\xi)$.

$F[f(kx)](\xi) = \frac{1}{|k|^n} \hat{f}(\xi/k)$

Demostración:

Por simple cálculo. #

Definición 5.2:

Dada $f \in L^1$, su transformada de Fourier conjugada $\bar{\mathcal{F}}[f]$ es la función definida como:

$$\bar{\mathcal{F}}[f]\ (\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x}\, f(x)\, dx,$$

con las modificaciones obvias, según la definición que se adopte para $\hat{f}$.

Si se indica

$$\check{f}(x) = \hat{f}(-x),$$

es claro que

$$\bar{\mathcal{F}}\ [f] = \check{\hat{f}}$$

o dicho de otra manera:

$$\bar{\mathcal{F}}\ [f] = \overline{\mathcal{F}[\bar{f}]}$$

Luego, $\bar{\mathcal{F}}$ cumple las propiedades enunciadas en el teorema 5.1. También:

$$\bar{\mathcal{F}}[D^{\beta} f\ ](\xi) = (2\pi i \xi)^{\beta}\ \bar{\mathcal{F}}\ [f]\ (\xi)$$

$$D^{\beta}\ \bar{\mathcal{F}}\ [f](\xi) = \bar{\mathcal{F}}[(-2\pi i x)^{\beta}\ f]\ \ (\xi),$$

bajo hipótesis análogas a las del teorema 5.2 y con la misma demostración.

Teorema 5.4:

Si f y $\mathcal{F}\ [f]$ pertenecen a L^1, entonces

$$\bar{\mathcal{F}}\ \mathcal{F}[f] = f \quad \text{pp}$$

Observación 5.2:

Si f es una función integrable que no es continua y nula en el infinito, del teorema 5.4 se deduce que su transformada de Fourier no es integrable.

Luego $\mathcal{F}[L^1] \not\subset L^1$. (Ver ejercicio 5.2 i)) .

Teorema 5.5:

La aplicación lineal

$$\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{F}[L^1]$$

es inversible, en el sentido de que dada $g \in \mathcal{F}[L^1]$, existe $f \in L^1$, determinada a menos de un conjunto de medida nula, tal que

$$\mathcal{F}[f] = g \quad \text{pp}$$

Observación 5.3:

Como $\mathcal{F}[L^1] \not\subset L^1$, la aplicación inversa

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}[L^1] \to L^1,$$

coincide con $\bar{\mathcal{F}}$ sólo en $\mathcal{F}[L^1] \cap L^1$. (Ver ejercicio 7.1).

Se analiza ahora la transformación de Fourier en L^2:

Si $f \in L^2$, la integral que define $\mathcal{F}$, no tendrá en general sentido; se busca entonces definir un operador sobre L^2, de tal manera que cuando se aplique a una función f de $L^1 \cap L^2$, coincida con $\mathcal{F}[f]$. La construcción de un tal operador, se basa en el siguiente criterio de extensión:

Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $X_1 \subset X$, un subespacio denso.

Si $T_1 : X_1 \to Y$ es un operador lineal acotado, entonces puede extenderse, de una única manera, a un operador lineal y acotado $T: X' \to Y$, tal que $\| T \| = \| T_1 \|$.

En efecto:

Dado $x \in X$ y dada una sucesión $\{x_j\} \subset X_1$, que converge hacia x en X, se prueba sin dificultad que existe $\lim T_1 x_j$ en Y, que este límite es independiente de la sucesión elegida para aproximar a x y que definiendo $Tx = \lim T_1 x_j$, T cumple todo lo que se afirma, con unicidad.

#

Sin mencionarlo explícitamente, este criterio de extensión ya se usó, en una situación más general, en el teorema 2.4 ii).

Teorema 5.6:

Si $f \in S \subset L^1 \cap L^2$, su transformada de Fourier, pertenece a L^2 y cumple

$$\| \mathcal{F}[f] \|_{L^2} = \| f \|_{L^2}.$$

Observación 5.4:

Como S es denso en L^2, del criterio de extensión se deduce que dada $f \in L^2$, existe una función $g \in L^2$, determinada a menos de un conjunto de medida nula, tal que $g = \lim \hat{f}_j$, en L^2, si $\{f_j\}$ es cualquier sucesión de S que converge a f en L^2. Además:

$$\| g \|_{L^2} = \| f \|_{L^2} \quad \text{(Igualdad de Parseval)}$$

Definición 5.3:

Con la notación anterior, g es llamada la transformada de Fourier de f y se indica, como antes:

$$\underline{g} = \underline{\mathcal{F}[f]} = \underline{\hat{f}}$$

Se define

$$\underline{\bar{\mathcal{F}}[f]} = \overline{\mathcal{F}[\bar{f}]}$$

Se prueba, que si $f \in L^1 \cap L^2$, $\mathcal{F}[f]$ calculada de acuerdo con la teoría L^1 y con la teoría L^2, coinciden. (Ver ejercicio 1.4)

La igualdad de Parseval, dice que $\mathcal{F}$ es una isometría de L^2 en sí mismo.

Pero más aún:

<u>Teorema 5.7:</u> (Plancherel)

$\mathcal{F}$ y $\bar{\mathcal{F}}$ son isomorfismos recíprocos de L^2 sobre sí mismo, que conservan el producto escalar.

Esto último se expresa:

Si $f_1, f_2 \in L^2$,

$$(f_1,f_2)_{L^2} = \int f_1(x)\ \overline{f_2(x)}\,dx = \int \hat{f}_1(\xi)\ \overline{\hat{f}_2(\xi)}\,d\xi = (\hat{f}_1,\hat{f}_2)_{L^2}$$

con una igualdad análoga para $\bar{\mathcal{F}}$.

<u>Observación 5.5:</u>

En rigor, $\mathcal{F}$ transforma L^2_x sobre L^2_ξ ; pero en este teorema y en resultados posteriores, van a identificarse las variables, hablándose del espacio L^2, o del que corresponda, a secas.

Como resumen de todo lo enunciado, puede decirse que la teoría L^1 es más natural, en cuanto a la manera de definir la transformación; sin embargo, presenta dificultades para caracterizar su rango, $\mathcal{F}[L^1]$, y para expresar la transformación de Fourier inversa. Sobre $L^1 \cap \mathcal{F}[L^1]$, esa inversa es $\bar{\mathcal{F}}$;

pero $\bar{F}$ no está definida en todo $F[L^1]$.

La teoría L^2 es, en este sentido, más "elegante", porque no aparecen en ella las dificultades indicadas para L^1. Claro que la transformación de Fourier sobre L^2, requiere una definición menos directa que en L^1.

Laurent Schwartz, descubrió que el espacio S constituye un dominio natural para la transformación de Fourier.

Las dificultades apuntadas en L^1 no aparecen en la teoría S y esta teoría tiene la misma elegancia que la de L^2. Además, la transformación puede definirse simplemente con la integral, pues $S \subset L^1$.

Parece entonces bueno, tomar a la teoría S como punto de partida. Schwartz observó que las teorías L^1 y L^2 y en general la teoría L^p, $1 \leq p \leq \infty$, pueden considerarse parte de la teoría de la transformación de Fourier, en cierta clase de distribuciones.

Por ello, las afirmaciones que no han sido demostradas, serán justificadas más adelante, como casos particulares de resultados concernientes a esa teoría.

Ejercicios:

5.1. i) Mostrar que $L^1 \cap L^2$ es un subespacio propio de L^1 y de L^2.

ii) Dada $f \in L^1$ y dada una transformación lineal inversible $A: R^n \to R^n$, expresar $F[f(Ax)]$, en términos de $F[f]$.

iii) Si f, perteneciente a L^1, es una función radial, deducir de ii), que también lo es $\hat{f}$.

5.2. i) Hallar la transformada de Fourier de χ_p, función característica del paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

ii) Demostrar que

1. $F\,[e^{-\pi\alpha|x|^2}] = \alpha^{-n/2}\, e^{-\pi|\xi|^2/\alpha}, \alpha > 0, \quad x \in R^n$

2. $$F[e^{-2\pi\alpha|x|}] = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \quad \frac{\alpha}{(\alpha^2+|\xi|^2)^{(n+1)/2}},$$

$, \alpha > 0 \;, \; x \in R^n$

Datos:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-x}\, dx, \quad Re(s) > 0$$

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \quad e^{-\beta^2/4t} dt \quad , \quad \beta > 0.$$

6.

§ 6. LA TRANSFORMACION DE FOURIER EN S Y EN S'

Como esta transformación interesa desde el punto de vista de las distribuciones, quiere mostrarse, en primer lugar, la necesidad de emplear un espacio de funciones de prueba, que no es D.
Dada $f \in L^1$, su transformada de Fourier, $\hat{f}$, es una función continua y por lo tanto, localmente integrable; luego, define una distribución. Si $\phi \in D$, se tiene:

$$(\hat{f}, \phi) = \int \phi(\xi) \left[\int e^{2\pi i \xi x} f(x)\, dx \right] d\xi .$$

Como el soporte de ϕ es compacto, la integral doble existe y puede cambiarse el orden de integración.

Resulta:

$$(\hat{f}, \phi) = \int f(x) \hat{\phi}(x)\, dx$$

Esta relación, sugiere la posibilidad de extender la transformación de Fourier a distribuciones, definiendo:

$$(F[T], \phi) = (T, F[\phi]), \quad T \in D', \ \phi \in D$$

Para ver si esto tiene sentido, deberán estudiarse las propiedades de las funciones que son transformadas de funciones de D.
Hasta ahora, sólo se consideró $x \in R^n$. Si se reemplaza x por $z = x + iy \in C^n$, la integral

$$\int e^{2\pi i (x+iy)\xi} \phi(\xi)\, d\xi ,$$

que define $F[\phi]$, sigue existiendo, pues el hecho de que ϕ tenga soporte compacto, hace que no afecte la presencia de la exponencial real $e^{-2\pi y\xi}$.

Además, es posible derivar en z bajo el signo integral, con lo que ϕ puede prolongarse al campo complejo, resultando una función entera; entonces, el soporte en $\mathbb{R}^n$ de $\hat{\phi}$ no será compacto, sino cuando ϕ sea idénticamente nula.

Es decir, que la expresión propuesta para la transformada de Fourier de una distribución T cualquiera, no tiene sentido.

Los resultados que siguen mostrarán que esa expresión vale, si se cambia adecuadamente el espacio de funciones de prueba y en consecuencia, la clase de distribuciones usada:

<u>Teorema 6.1:</u>

La transformación de Fourier aplica el espacio S en sí mismo.

<u>Demostración:</u>

Toda función de S es integrable. (Ver ejercicio 2.4 iii)). Luego, su transformada se define simplemente por la integral; además, si $\phi \in S$, $D^{\alpha_1}[\,[x^{\beta_1}\phi\,]$ es continua e integrable, cualesquiera que sean $\alpha_1, \beta_1 \in N^n$.

Entonces, según el teorema 5.2, $F[\phi]$ pertenece a $\mathcal{E}$.

Además,

$$\xi^{\alpha} D^{\beta} F[\phi]\ (\xi) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^{|\alpha|} F\ \{D^{\alpha}\ [(2\pi i x)^{\beta}\phi]\ \ (\xi),$$

que es una función acotada, por el teorema 5.1.

Luego, $F[\phi] \in S$.

Es claro que también $\bar{F}$ cumple este teorema.

<u>Teorema 6.2:</u>

F y $\bar{F}$ son isomorfismos continuos, inverso uno del otro, de S en sí mismo.

Demostración:

Si $F: S \to S$ es continua, $\bar{F}$ también lo es, porque $\bar{F}[\phi] = \overline{F[\bar{\phi}]}$

Si $\forall\ \phi \in S$, es $\bar{F}F[\phi] = \phi$, también $F\bar{F}[\phi] = \phi$, pues

$$F\bar{F}[\phi] = \overline{FF[\bar{\phi}]} = \overline{\bar{F}F[\bar{\phi}]} = \bar{\bar{\phi}}$$

Dada $\phi \in S$, es:

$$\sup_{\xi \in R^n} |\xi^\alpha D^\beta \hat{\phi}(\xi)| \leq C_\alpha \int | D^\alpha [(2\pi i x)^\beta \phi(x)]| dx \leq$$

$$\leq C_\alpha \sup_{x \in R^n} | (1+|x|^2)^{n+1} . D^\alpha [(2\pi i x)^\beta \phi(x)]| \int (1+|x|^2)^{-n-1} dx$$

Según el ejercicio 2.4 ii), de aquí se deduce la continuidad de F, de S en S.

Se prueba ahora la <u>fórmula de inversión de la transformación de Fourier en S</u>:

$$\bar{F}F[\phi] = \phi, \quad \forall\ \phi \in S.$$

Escrito en forma explícita, debe probarse que

$$\phi(y) = \int e^{-2\pi i y\xi} \hat{\phi}(\xi)\, d\xi = \int \left[\int e^{2\pi i (x-y)\xi} \phi(x)\, dx \right] d\xi,$$

$$\forall\ y \in R^n$$

(En el segundo miembro, no puede invertirse el orden de integración.

Sin embargo, dada $\psi \in S$, para cada $j=1,2,...,$ existe la integral doble

$$\int e^{2\pi i (x-y)\xi} \phi(x)\, \psi(\xi/j) dx\, d\xi. = \int e^{-2\pi i y\xi}\, \hat{\phi}(\xi)\, \psi(\xi/j).d\xi$$

Mediante el cambio de variable $\xi/j=u$, $j(x-y)=v$, puede escribirse:

$$\int e^{2\pi iuv} \phi(v/j + y).\ \psi(u)\ du\ dv = \int \phi(v/j + y).\hat{\psi}(v)dv.$$

Es decir, que se ha obtenido la igualdäd:

$$\int e^{-2\pi iy\xi}\ \hat{\phi}(\xi).\ \psi(\xi/j)\ d\xi = \int \phi(v/j + y)\ \hat{\psi}(v)\ dv.$$

En ambos miembros, puede pasarse al límite bajo el signo integral, porque se trabaja con funciones de S.

Resulta:

$$\psi(0)\ \bar{F}F\ [\phi](y) = \phi(y) \int \hat{\psi}(v)\ dv$$

Luego, el teorema estará concluído, si se encuentra una función $\psi \in S$, cumpliendo:

i) $\psi(0) = 1$

ii) $\int \hat{\psi}(v)\ dv = \bar{F}F[\psi](0) = 1.$

Según el ejercicio 2.6 i), si se toma $\psi(x) = e^{-\pi|x|^2}$, para ver que ψ cumple i) e ii), basta comprobarqu que $\hat{\psi} = \psi$.

Esto puede hacerse por cálculo directo, (ver ejercicio 5.2 ii)), o también de la siguiente manera:

Sea $g(\xi) = e^{\pi|\xi|^2}\ \hat{\psi}(\xi)$.

Como ya se sabe que $g(0) = \int \psi(x)\ dx = 1$, es suficiente probar que g es constante:

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_j} = e^{\pi|\xi|^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \xi_j} + 2\pi\xi_j \, e^{\pi|\xi|^2} \hat{\psi} = e^{\pi|\xi|^2} F[2\pi i x_j \psi + i \frac{\partial \psi}{\partial x_j}] = 0,$$

$1 \leq j \leq n.$

#

Definición 6.1:

Dada $T \in S'$, se define:

$$(F[T], \phi) = (T, F[\phi]), \quad \phi \in S.$$

De acuerdo con los teoremas 6.1. y 6.2., esta expresión tiene sentido y define una distribución en S', que también suele indicarse $\hat{T}$. $\bar{F}[T]$, se define de manera análoga.

Teorema 6.3:

F y $\bar{F}$ son isomorfismos continuos de S' sobre sí mismo, inverso uno del otro.

Esto último se expresa:

$$\bar{F}F[T] = T$$

(Fórmula de inversión en S')

$$F\bar{F}[T] = T$$

Demostración:

No presanta ninguna dificultad, a partir del teorema 6.2. #

Teorema 6.4:

Si T es una distribución de soporte compacto, vale:

$$F[T]_\xi = (T_x, e^{2\pi i \xi x}), \text{ en el sentido de } D'_\xi .$$

Además, $F[T]$ resulta una función de la variable ξ, que puede extenderse al espacio complejo C^n, como función entera.

Demostración:

Puede hacerse de varias maneras; por ejemplo, a partir del teorema 3.4:

Según este teorema, T se escribe como $D^{\alpha} f$, para cierta $f: R^n \to C$ continua y de crecimiento lento.

Sea ahora $\chi \in D$, que vale 1 en un entorno de sop(T).

Si $\phi \in D$, es

$$(T,\phi) = (\chi T,\phi) = (T,\chi\phi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^{\alpha}(\chi\phi)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (f, D^{\gamma}\chi \cdot D^{\alpha-\gamma}\phi) =$$

$$= \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (-1)^{|\gamma|} (D^{\alpha-\gamma}[D^{\gamma}\chi \cdot f], \phi) =$$

$$= \Big(\sum_{\beta \leq \alpha} D^{\beta} f_{\beta}, \phi \Big).$$

Es decir T, puede escribirse también $\sum_{\beta} D^{\beta} f_{\beta}$, con f_{β} funciones continuas, de soporte compacto contenido en un entorno arbitrario de sop(T). Luego, (ver ejercicio 6.1),

$$F[T] = \sum_{\beta} F[D^{\beta} f_{\beta}] = \sum_{\beta} (-2\pi i\xi)^{\beta} F[f_{\beta}] =$$

$$= \sum_{\beta} (-2\pi i\xi)^{\beta} \int e^{2\pi i\xi x} f_{\beta}(x)\, dx =$$

$$= \sum_{\beta} (-2\pi i\xi)^{\beta} (f_{\beta}, e^{2\pi i\xi x}) = \sum_{\beta} (-1)^{|\beta|} (f_{\beta}, D^{\beta}_{x} e^{2\pi i\xi x}) =$$

$$= \sum_{\beta} (D^{\beta} f_{\beta}, e^{2\pi i\xi x}) = (T_x, e^{2\pi i\xi x}).$$

Para concluir, se afirma que la integral

$$\int e^{2\pi i\xi x} f_\beta(x)\, dx,$$

es una función de ξ, que puede extenderse a C^n como función entera. En efecto, para $\xi \in C^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, vale el desarrollo:

$$e^{2\pi i\xi . x} = \sum_\alpha \frac{(2\pi i x)^\alpha}{\alpha!} \xi^\alpha ,$$

que converge uniformemente respecto de x, ξ moviéndose en compactos.

Como f_β es una función continua con soporte compacto, puede integrarse término a término la serie, obteniéndose:

$$\int e^{2\pi i\xi x} f_\beta(x)dx = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \int f_\beta(x)\ (2\pi i x)^\alpha\ dx\ .\ \xi^\alpha$$

para todo $\xi \in \mathbb{C}^n$

Observaciones 6.1:

i) El teorema 6.4. es parte de un resultado que se enunciará ahora:

Teorema 6.5: (Paley- Wiener) (Ver [1], tomo II)

Dada $T \in S'$, son equivalentes;

a) sop(T) $\subset \{x \in R^n / |x_1| \leq C, |x_2| \leq C, \ldots, |x_n| \leq C\}$

b) $\hat{T}$ es una función continua que puede extenderse a todo C^n como función entera, cumpliendo:

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ A(\varepsilon) > 0$, tal que si $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) \in C^n$, vale:

$$|\hat{T}(Z)| \leq A(\varepsilon)\ \exp\ [2\pi (C+\varepsilon)\ (|Z_1| + \ldots + |Z_n|)]$$

Una función que verifica esta desigualdad, se llama de tipo exponencial $\leq 2\pi C$

ii) Ya se está en condiciones de aclarar lo dicho en el §4, cuando se afirmaba que la posibilidad de dividir distribuciones, era de interés para la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales:

En efecto, sea:

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \cdot D^\alpha$$

un operador diferencial con coeficientes constantes $a_\alpha \in$

Para $T \in S'$, tiene sentido calcular

$$\mathcal{F}\,[\,P(D)T] = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \,(-2\pi i\xi\,)^\alpha \mathcal{F}\,[T\,]$$

Luego, si se indica $P(-2\pi i\xi\,)$ el polinomio en n variables $\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(-2\pi i\xi\,)^\alpha$, dada $S \in S'$, resulta, <u>formalmente</u>, que

$$\bar{\mathcal{F}}\left[\frac{\hat{S}}{P(-2\pi i\xi\,)}\right]$$

verifica la ecuación $P(D)T = S$.

Schwartz conjeturó y luego fue probado, (ver [1], tomo II), que siempre puede dividirse una distribución temperada, por un polinomio no idénticamente nulo y que <u>por lo menos un resultado</u> de esa división, es una distribución temperada.

Esto asegura que $P(D)T = S$, admite <u>al menos una</u> solución temperada, cuando se da un segundo miembro temperado.

ii) Lo dicho en este §, permite definir la transformación de Fourier en S'; pero hay funciones, como e^x, que por crecer en el infinito más rápido que cualquier polinomio, no definen distribuciones de S'.

Modificando el espacio de prueba, es posible dar sentido, en una nueva clase de distribuciones, a la transformación de Fourier de funciones como e^x que son llamadas de crecimiento rápido . (Ver [6]).

Ejercicios:

6.1. Dada $T \in S'$, probar que

$$\mathcal{F}[(2\pi i x)^{\alpha} T] = \mathcal{D}^{\alpha}\mathcal{F}[T]$$

$$\mathcal{F}[D^{\alpha} T] = (-2\pi i \xi)^{\alpha} \mathcal{F}[T]$$

$$\mathcal{F}[\tau_h T] = e^{2\pi i \xi h}\mathcal{F}[T]$$

6.2. i) Calcular la transformada de Fourier de la medida de Dirac δ_a.

ii) Probar que las distribuciones $\log |x|$ y vp $1/x$ pertenecen a $S'(R)$.

Calcular la transformada de Fourier de vp $1/x$. ¿Qué relación hay entre $\mathcal{F}[\log |x|]$ y $\mathcal{F}[\text{vp } 1/x]$?

iii) Si $n/2 < k < n$, probar que $\mathcal{F}[1/|x|^k]$ existe y es una función proporcional a $1/|\xi|^{n-k}$

Sugerencia: Dada $\alpha \in \mathcal{D}$ que vale 1 en un entorno de 0, escribir

$$\frac{1}{|x|^k} = \alpha(x)\frac{1}{|x|^k} + [1 - \alpha(x)]\frac{1}{|x|^k}$$

6.3. Si $T \in \mathcal{E}'$, probar que su transformada de Fourier es una función de $\mathcal{O}_M$. (Ver ejercicio 4.7).

6.4. Dada $T \in \mathcal{E}'$, mostrar que $\hat{T}(z)$ es de tipo exponencial, sin recurrir al teorema de Paley-Wiener.

§7. LAS TEORIAS L^1 y L^2. (CONCLUSION)

El objeto de este §, es demostrar los resultados que quedaron pendientes en el §5.

Lema 7.1:

Si f es una función integrable, vale:

$$\mathcal{F}[T_f] = T_{\hat{f}} \text{ , en el sentido de } S'$$

Lo mismo con $\overline{\mathcal{F}}$.

Demostración:

Ambos miembros de la igualdad que se quiere probar, pertenecen efectivamente a S'.

Dada $\phi \in S$, es

$$(T_{\hat{f}}, \phi) = \int \hat{f}(\xi)\ \phi(\xi)\ d\xi$$

Luego, hay que comprobar que

$$\int [\int e^{2\pi i\xi x} f(x)\ dx]\ \phi(\xi)\ d\xi = \int f(x)[\int e^{2\pi i x\xi}\ \phi(\xi)]\ d\xi\ dx$$

Pero como la integral doble

$$\int e^{2\pi i x\xi}\ f(x)\ \phi(\xi)\ dx\ d\xi$$

existe, también ambas integrales iteradas y son iguales. #

Demostración del teorema 5.4:

Dada $f \in L^1$, sea $g = \mathcal{F}[f]$. Se supone que también $g \in L^1$.

Entonces, del lema que se acaba de probar y de la fórmula de inversión para la transformación de Fourier en S', resulta:

$$T_{\bar{F}[g]} = \bar{F}[T_g] = \bar{F}F[T_f] = T_f \ .$$

Según el teorema 1.4, $\bar{F}[g] = f$ pp.

#

Demostración del teorema 5.5:

Si una función f de L^1 tiene transformada de Fourier idénticamente nula, habrá que probar que f = 0 pp.

Usando otra vez el lema y la fórmula de inversión, es:

$$T_f = \bar{F}F[T_f] = \bar{F}[T_{\hat{f}}] = 0$$

Luego, f=0 pp.

#

Demostración del teorema 5.6:

Cuando $\phi \in S$, se sabe que su transformada de Fourier es una función de cuadrado integrable.

Debe probarse que

$$\| F[\phi] \|_{L^2} = \| \phi \|_{L^2}$$

Si se acepta por un momento que

$$(F[\phi], \psi)_{L^2} = (\phi, \bar{F}[\psi])_{L^2} \qquad (7.1)$$

$$\phi, \psi \in S$$

usando (7.1) con $\psi = F[\phi]$ y la fórmula de inversión en S, resulta lo afirmado.

Se prueba ahora (7.1):

$$\int [e^{2\pi i \xi x} \phi(x)\, dx] \ \bar{\psi}(\xi)\, d\xi = \int e^{2\pi i \xi x} \phi(x)\, \bar{\psi}(\xi)\, dx\, d\xi =$$

$$\int \phi(x) \left[\overline{\int e^{-2\pi i \xi x} \psi(\xi)\, d\xi} \right] dx \ .$$

#

Lema 7.2:

Si $f \in L^2$, vale

$$\mathcal{F}[T_f] = T_{\hat{f}}, \text{ en el sentido de } S'.$$

Demostración:

Ambos miembros pertenecen a S'.

Sea $\{\phi_j\}$ una sucesión de S que converge hacia f en L^2.

Dado $\phi \in S$, es:

$$(T_{\hat{f}}, \phi) = \lim (T_{\hat{\phi}_j}, \phi) = \lim(\mathcal{F}[\phi_j], \phi) = \lim(\phi_j, \mathcal{F}[\phi]) =$$

$$= (f, \mathcal{F}[\phi]) = (\mathcal{F}[T_f], \phi). \quad \#$$

Demostración del teorema 5.7:

Es semejante a la del teorema 5.4, pero ahora los argumentos se apoyan en el lema 7.2:

Si $f \in L^2$ y $g = \mathcal{F}[f]$, es

$$T_{\bar{\mathcal{F}}[g]} = \bar{\mathcal{F}}[T_g] = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}[T_f] = T_f$$

Que $\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}[f] = f$, se prueba de la misma manera.

En cuanto a la conservación del producto escalar, se usa la igualdad (7.1):

Sea $\{\psi_j\}$ una sucesión de S que converge hacia $\hat{f}_2$ en L^2.

Entonces, $\bar{\mathcal{F}}[\psi_j] \to f_2$, en L^2.

Tomando límite en (7.1), es

$$(\hat{\phi}, \hat{f}_2)_{L^2} = (\phi, f_2)_{L^2}, \ \forall \phi \in S.$$

Si ahora se toma como ϕ el j-ésimo término de una sucesión $\{\phi_j\}$ contenida en S, que converge hacia f_1 en L^2, volviendo a tomar límite, resulta:

$$(\hat{f}_1,\hat{f}_2)_{L^2} = (f_1,f_2)_{L^2} \ , \ f_1,f_2 \in L^2$$

Ejercicios:

7.1

Si $f \in L^1$ probar que

$$f = \lim_{R\to\infty} \int_{|\xi| \leq R} e^{-2\pi i x\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad , \text{ en el sentido de } S'.$$

§ 8. RELACION DE LA TRANSFORMACION DE FOURIER CON LOS PRODUCTOS DE CONVOLUCION Y MULTIPLICATIVO.

Sólo quiere mostrarse el tipo de resultados que vinculan a la transformación de Fourier con esas operaciones. (Ver [1], tomo II).

El espacio S, es un álgebra respecto de ambos productos, el de convolución y el multplicativo. (Ver ejercicio 2.5). Lo que va a probarse ahora, es que F y $\bar{F}$; transforman una estructura en la otra:

Lema 8.1:

Si $\phi, \psi \in S$, vale

$$F[\phi \cdot \bar{F}[\psi]] = F[\phi] * \psi$$

Análogamente, intercambiando F y $\bar{F}$.

Demostración:

$$F[\phi \bar{F}[\psi]] = \int e^{2\pi i z\xi} \phi(\xi) \left[\int e^{-2\pi i \xi x} \psi(x)\, dx \right] d\xi =$$

$$= \int \left[\int e^{2\pi i (z-x).\xi} \phi(\xi)\, \psi(x)\, dx \right] d\xi .$$

Como la integral doble existe, puede cambiarse el orden de integración, obteniéndose

$$\int \psi(x) \left[\int e^{2\pi i (z-x)\xi} \phi(\xi)\, d\xi \right] = F[\phi] * \psi. \qquad \#$$

Si en el lema 8.1 se reemplaza ψ por $F[\psi]$, se obtiene

$$\underline{F[\phi \cdot \psi] = F[\phi] * F[\psi]} \qquad (8.1)$$

Lo mismo con $\bar{F}$.

Si en (8.1) se escribe $\bar{F}[\phi]$ y $\bar{F}[\psi]$, en lugar de ϕ y ψ, respectivamente, resulta:

$$\bar{F}[\phi * \psi] = \bar{F}[\phi] . \bar{F}[\psi]$$

Vale también con F.

Teorema 8.1:

Si f y g pertenecen a L^1, entonces

$$F[f * g](\xi) = F[f](\xi). F[g](\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración:

Este resultado acaba de probarse cuando f,g $\in$ S.

En el caso general, sean $\{\phi_j\}, \{\psi_j\}$, sucesiones de S que convergen hacia f y g, respectivamente, en L^1.

El teorema de Young, muestra que

$$\phi_j * \psi_j \to f * g, \text{ en } L^1$$

Pero entonces

$$F[f * g](\xi) = \lim F[\phi_j * \psi_j](\xi) =$$

$\lim \hat{\phi}_j(\xi) . \lim \hat{\psi}_j(\xi) = \hat{f}(\xi) . \hat{g}(\xi)$, siendo los límites uniformes. #

Observación 8.1

El teorema 8.1, muestra que la transformación de Fourier, es un homomorfismo del álgebra (L^1, $*$) en una subálgebra propia, (ver observaciones 5.1. ii)), de $C_0(R^n) = \{f: R^n \to C / f$ es continua y nula es el infinito$\}$.

Puede probarse que esa subálgebra es densa (Ver[3], Tomo II).

Si $T \in E'$, $S \in S'$, el producto de convolución $T * S$ está bien definido y es una distribución temperada (Ver ejercicio 4.2. ii)). En relación con esto, se prueba:

Teorema 8.2:

Si $T \in E'$, $S \in S'$, es:

$$\mathcal{F}[T * S] = \mathcal{F}[T] \cdot \mathcal{F}[S] \text{ , en el sentido de } S'.$$

(Según los ejercicios 6.3 y 4.7, el producto del segundo miembro está bien definido).

Demostración:

$$(\mathcal{F}[T * S]_\xi , \phi(\xi)) = (T * S, \hat{\phi}) = (T_x \times S_z , \hat{\phi}(x+z)) =$$

$$= (T_x, (S_z, \hat{\phi}(x+z))) = (T_x, (\tau_x S_z, \hat{\phi}(z))) =$$

$$= (T_x, (\mathcal{F}[\tau_x S_z] , \phi(\xi))) = (T_x, (e^{2\pi i \xi x} S_\xi , \phi(\xi))) =$$

$$= (T_x, (\hat{S}_\xi , e^{2\pi i x\xi} \phi(\xi))) = (T_x \times \hat{S}_\xi , e^{2\pi i x\xi} \phi(\xi)) =$$

$$= (\hat{S}_\xi , (T_x, e^{2\pi i x\xi} \phi(\xi))) = (\hat{S}_\xi , \phi(\xi) \hat{T}(\xi)) = (\hat{S} \cdot \hat{T} , \phi).$$

#

Ejercicios:

8.1:

Si $T \in S'_x$ y $S \in S'_y$, probar que $T \times S \in S'_{xy}$ y que

$$\mathcal{F}[T \times S] = \mathcal{F}[T] \times \mathcal{F}[S] \text{ , en el sentido de } S'_{xy}$$

Sugerencia:

Teorema 3.4.

§ 9 . EL TEOREMA DE HAUSDORFF - YOUNG

Según lo visto en los §5 y 7, la transformación de Fourier es un operador continuo de L^1 en L^∞ y de L^2 en sí mismo. Por otra parte, se sabe que las funciones de cualquier $L^p, 1 \leq p < \infty$, definen distribuciones temperadas y en consecuencia, dada $f \in L^p$, tiene sentido, en S', $\hat{f}$. Cabe preguntarse ahora si para algún $p \neq 1,2$, $\mathcal{F}$ aplicará L^p en L^q, $1/p + 1/q = 1$. El teorema que se dará enseguida, provee una respuesta cuando $1 \leq p \leq 2$. En efecto, se prueba que la transformación de Fourier define un operador continuo de L^p en L^q. Además, éste es el mejor resultado que puede darse, pues si $p > 2$, es posible encontrar una función $f \in L^p$, cuya transformada no pertenezca a L^q. (Ver [7], pág. 263).

Teorema 9.1: (Hausdorff-Young).

Dada $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$, su transformada de Fourier en el sentido de las distribuciones, $\hat{f}$, es una función de L^q, con $1/p + 1/q = 1$. Además se tiene la desigualdad:

$$\|\hat{f}\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p}$$

En la demostración de este teorema, van a usarse dos resultados:

Lema 9.1:(Principio de Lindelöff)

Dados $a,b \in R$, sea $B = \{z \in C / a \leq Re(z) \leq b\}$

Sea $F(z)$ una función definida y analítica en un entorno abierto de B. Se supone que $F(z)$ está acotada en B; es decir, existe $C > 0$ tal que $|F(z)| \leq C$, si $z \in B$.

Si además, existe $M > 0$ tal que $|F(z)| \leq M$ para $z \in \partial B$, frontera de B, entonces M sirve como cota para la función en B.

O sea:

$$|F(z)| \leq M, \text{ si } z \in B.$$

Demostración:

Para cada $n > -a$, la función $F_n(z) = \dfrac{nF(z)}{z+n}$ es analítica en un entorno abierto de B.

Además, si $z \in B$,

$$|F_n(z)| \leq \frac{C}{|1+z/n|} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0.$$

Luego, existe $R_n > 0$ tal que si

$$B_{R_n} = \{z \in B / |Im(z)| \leq R_n\},$$

es

$$\sup_{z \in B} |F_n(z)| = \sup_{z \in B_{R_n}} |F_n(z)| .$$

Como B_{R_n} es compacto, puede aplicarse el principio del módulo máximo y resulta:

$$\sup_{z \in B_{R_n}} |F_n(z)| = \sup_{z \in \partial B_{R_n}} |F_n(z)| .$$

Además, si se elige R_n suficientemente grande, puede asegurarse que $|F_n(z)|$ alcanza su supremo en $z \in \partial B_{R_n}$ con $Re(z) = a$ o $Re(z) = b$.

Luego, dado $z \in \partial B_{R_n}$, es

$$\frac{|F(z)|}{|1+z/n|} \leq \frac{M}{|1+x/n|} \leq \frac{M}{1+a/n}$$

Finalmente, para $z \in B$, se ha obtenido

$$| F_n(z) | \leq \frac{M}{1+ a/n}$$

Como fijado $z \in B$ existe $\lim_{n \to \infty} F_n(z) = F(z)$, se concluye que

$$\sup_{z\in B} |F(z)| \leq M. \quad \#$$

En lo que sigue, una función será <u>simple</u> cuando pueda escribirse como $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{P_j}$, con $\lambda_j \in C$, $\lambda_j \neq 0$, χ_{P_j} función característica de un "paralelepípedo" P_j, siendo la familia $\{P_j\}$ disjunta.

<u>Lema 9.2</u>:

Dados $f \in L^q_{loc}$, $1 \leq q \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$f \in L^q \Leftrightarrow \sup_{\substack{g \text{ simple} \\ \|g\|_{L^p} = 1}} \left| \int f\, g\, dx \right| = C$$

Además resulta $C = \| f\|_{L^q}$.

<u>Demostración</u>:

($\Leftarrow$) Dado $k = 1,2,\ldots$, sean $B_k = \{ \| x\| \leq k\}$, χ_k la función característica de B_k.

Se sabe que existe $\lim_{k \to \infty} \left(\int | \chi_k f|^q dx\right)^{1/q} = \| f\|_{L^q}$

Quiere probarse que ese límite es finito.

Se considera $S_i = \{g$, función simple$\}$ y la aplicación

$$L^p \supset S_i \xrightarrow{L_k} C$$
$$g \to \int f \chi_k g\, dx$$

Con la desigualdad de Holder, resulta que L_k es una forma lineal y continua en S_i; luego, puede extenderse a L^p conservando su norma que vale

$$\sup_{\substack{g \text{ simple} \\ \|g\|_{L^p} = 1}} \left| \int f \cdot \chi_k \; g \; dx \right|$$

Por otra parte, un teorema de Riesz afirma que toda forma lineal y continua L sobre L^p, $1 \leq p < \infty$, se representa mediante cierta $f \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y que la correspondencia

$$(L^p)' \to L^q$$
$$L' \to f$$

es una isometría suryectiva.

Luego,

$$\| f \; \chi_k \|_{L^q} = \| L_k \| = \sup_{\substack{g \text{ simple} \\ \|g\|_{L^p} = 1}} \left| \int f \; \chi_k \; g \; dx \right|$$

Por hipótesis, este supremo es finito, independientemente de k.

Entonces $f \in L^q$.

($\Rightarrow$) Volviendo a aplicar el teorema de Riesz a la forma lineal y continua

$$L^p \supseteq S_i \xrightarrow{L} C$$
$$g \to \int f \; g \; dx$$

Se tiene que

$$\| L \| = \sup_{\substack{g \text{ simple} \\ \|g\|_{L^p} = 1}} \left| \int f \; g \; dx \right| = \| f \|_q < \infty$$

Demostración del teorema 9.1:

Primero se hará la demostración para f una función simple y por argumentos de densidad, se obtendrá luego para cualquier función de L^p.

Si f es simple, por la manera de definirla, f es integrable; según el lema 9.2, $\hat{f}$ pertenecerá a L^q y $\|\hat{f}\|_q$ será $\leq \|f\|_p$, si

$$\sup_{\substack{g \text{ simple} \\ \|g\|_p = 1}} \left| \int \hat{f}\, g \, dx \right| \leq \|f\|_p$$

Dado $z = \alpha + i\beta \in C$, se considera la función

$$f_z = |f|^{pz}\, sgf, \quad \text{donde } sg\, f = e^{iArg\, f}$$

Como $|f_z| = |f|^{p\alpha}$, $f_z \in L^1$ y entonces

$$\hat{f}_z(x) = \int e^{2\pi ixy}\, |f(y)|^{pz}\, sg\, f(y)\, dy$$

$f = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, \chi_{P_j}$, con los P_j disjuntos ; luego, es:

$$|f|^{pz} = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|^{pz}\, \chi_{P_j}$$

, la cual está bien definido, pues

$|\lambda_j| > 0$, para todo j.

Por lo tanto se tiene:

$$\hat{f}_z(x) = \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|^{pz} \int e^{2\pi ixy}\, sg\, f(y)\, \chi_{P_j}(y)\, dy.$$

De esta expresión se deduce que para cada $x \in R^n$ fijo, $\hat{f}_z$ es entera, como función de la variable compleja z, por ser combinación linal de las exponenciales $e^{pz\ell n|\lambda_j|}$, $|\lambda_j| > 0$.

De la misma manera, dada g simple con $\|g\|_{L^p} = 1$, sea $g_z = |g|^{pz}\, sg\, g$.

$$\phi(z) = \int \hat{f}_z(x)\, g_z(x)\, dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|^{pz} \int g_z(x) \left[\int e^{2\pi i x y}\, sg\, f(y)\, \chi_{P_j}(y)\, dy\right] dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} A_j\, \xi_j^{pz}, \text{ para ciertos } A_j \in C,\ \xi_j > 0.$$

Como $|\phi(z)| \leq \sum_j |A_j|\, \xi_j^{p\alpha}$, resulta que la función $\phi(z)$ está acotada en cada banda vertical B.

Si $z = \frac{1}{p}$, f_z coincide con f y g_z coincide con g.

Para $1 \leq p \leq 2$, z mueve en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

Luego, si se prueba que cuando $Re(z) = \frac{1}{2}$ y cuando $Re(z) = 1$, es $|\phi(z)| \leq \|f\|_{L^p}$, el lema 9.1 permite deducir que $|\phi(z)| \leq \|f\|_{L^p}$, en toda la banda $B = \{z \in C / \frac{1}{2} \leq Re(z) \leq 1\}$; en particular, se tendrá que

$$\left|\int \hat{f}\, g\, dx\right| = |\phi(1/p)| \leq \|f\|_{L^p} .$$

Se va a demostrar entonces que cuando $Re(z) = \frac{1}{2}$ y $Re(z) = 1$, vale la acotación

$$|\phi(z)| \leq \|f\|_{L^p}$$

Primero se hará suponiendo que $\|f\|_{L^p} = 1$:

Si $Re(z) = \frac{1}{2}$, $|f_z| = |f|^{p/2}$, $|g_z| = |g|^{p/2}$

Por la desigualdad de Schwarz y la igualdad de Parseval, es

$$|\phi(z)| \leq \|g_z\|_{L^2} \cdot \|f_z\|_{L^2} = \left(\int |g(x)|^p\, dx\right)^{1/2} .$$

$$\cdot \left(\int |f(x)|^p\, dx\right)^{1/2} = 1.$$

Si $Re(z) = 1$, $|f_z| = |f|^p$, $|g_z| = |g|^p$; además, $|\hat{f}_z| \leq \int |f|^p\, dy = 1$.

Luego, es:

$$|\phi(z)| \leq \int |\hat{f}_z(x)|\, |g_z(x)|\, dx \leq \int |g(x)|^p\, dx = 1.$$

Si ahora f es cualquier función simple, con $\|f\|_{L^p} > 0$ sea

$$h = \frac{f}{\|f\|_{L^p}}$$

Se tiene:

$$\left| \frac{1}{\|f\|_{L^p}} \int \hat{f}\, g\, dx \right| = \left| \int \hat{h}\, g\, dx \right| \leq 1 .$$

En total, se ha demostrado el teorema para f, función simple

Sea ahora f una función de L^p. Se sabe que existe una sucesión $\{f_j\}$ de funciones simples, tal que $f_j \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ en L^p.

Lo que se ha probado hasta ahora, permite concluir que la sucesión $\{\hat{f}_j\}$ es de Cauchy en L^q. En efecto, es:

$$\|\hat{f}_j - \hat{f}_k\|_{L^q} \leq \|f_j - f_k\|_{L^p} \xrightarrow[j,k\to\infty]{} 0.$$

Luego, existe $F \in L^q$ tal que $\hat{f}_j \xrightarrow[j\to\infty]{} F$ en L^q.

Se afirma que en el sentido de S', es $\hat{f} = F$, con lo cual resultará que $\hat{f}$ es una función de L^q:

Como todos los espacios L^p están incluídos continuamente en S', dada $\phi \in S$, es:

$$(F, \phi) = \lim_j (\hat{f}_j, \phi) = \lim_j (f_j, \hat{\phi}) = (f, \hat{\phi}) = (\hat{f}, \phi)$$

En cuanto a la desigualdad entre las normas:

$$\|\hat{f}\|_{L^q} = \|F\|_{L^q} = \lim_j \|\hat{f}_j\|_{L^q} \leq \lim_j \|f_j\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} .$$

Se concluye así el teorema 9.1.

#