ISSN 1853-709X

Fascículo 26

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

R. J. Noriega, L. A. Santaló

Variedades diferenciables

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2012

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 26

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CIUDAD UNIVERSITARIA (NUÑEZ) PABELLON 1
BUENOS AIRES - REP. ARG.

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 26

R.J.Noriega y L.A. Santaló

VARIEDADES DIFERENCIABLES

1978

INDICE

CAPITULO IV - GRUPOS DE LIE

CAPITULO V - ESPACIOS DE RIEMANN Y DE CONEXION AFIN

CAPITULO VI - SUBVARIEDADES DEL ESPACIO EUCLIDIANO; METODO DE LA REFERENCIA MOVIL

1. INTRODUCCION

Descartes (1596-1656) en 1637, en su tercer ensayo del famoso "Discurso del Método", titulado Géométrie, y Fermat (1601-1665) en su memoria Ad locos planos et solidos isagoge escrita en 1637 y publicada en 1679, al crear la Geometría Analítica, indicaron el camino para representar los puntos del plano por pares de números reales y los puntos del espacio por ternas de números reales. Desde entonces fué usual el estudio de las curvas y de las superficies por sus ecuaciones, es decir, mediante su representación analítica en un sistema de coordenadas.

Durante mucho tiempo el estudio se limitó al plano y al espacio, o sea, a curvas y superficies contenidas en los espacios euclidianos de dos o tres dimensiones. Además, las superficies se consideraban en un principio como límite o contorno de cuerpos sólidos. Así, Euler (1707-1783) titula el apéndice de su Introductio in Analysis Infinitorum (1748), dedicado a la teoría de superficies, De Superficiebus corporum, y más tarde, una memoria sobre superficies desarrollables la titula De solidus quorum superficiem in planum explicare licet.

Más tarde, Gauss (1777-1855) en sus célebres Disquisitiones generales circa superficies curvas (1828) considera por primera vez a las superficies "no como límites de un sólido, sino como un sólido una de cuyas dimensiones se considera como desvanecida y las representa por sus ecuaciones paramétricas

(1) $x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v)$

con lo cual las superficies aparecen como imágenes del plano, u,v en el espacio. Se las ha liberado de ser contorno de un cuerpo, pero se sigue suponiéndolas sumergidas en el espacio euclidiano de tres dimensiones. En vez de superficies, se puede hablar de las "aplicaciones" (1) que les dan origen.

En 1854, Riemann (1826-1866) publica su fundamental memoria titulada Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen origen de toda la geometría diferencial contemporanea, en la cual se introducen los espacios multidimensionales, independientemente de su posible sumersión en un espacio ambiente de mayor número de dimensiones. Riemann parte de una variedad de una dimensión o "simplemente extendida", cuyo caracter esencial es que "partiendo de un punto no se puede ir de manera continua más que en dos direcciones, hacia adelante o hacia atrás", para pasar luego, sucesivamente, a las variedades de mas dimensiones. La exposición de Riemann no es muy clara (posiblemente por tratarse de una memoria dirigida a una Facultad de Filosofía (Gottingen), por lo cual trata de usar el lenguaje lo mas intuitivo posible), pero la idea, en el lenguaje actual, es la de considerar a las variedades de dos dimensiones como "producto" de dos variedades de una dimensión, las de tres dimensiones como producto de una de dos por otra de una, y así sucesivamente. Naturalmente que una definición de este tipo sólo puede aceptarse "localmente", pero hace innecesario suponer a la variedad contenida en un espacio de mayor número de dimensiones. Si los puntos de una variedad de una dimensión se representan por el valor de una coordenada x_1, los puntos de una variedad de n dimensiones se representarán por n coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Esta definición "local" fué la comunmente admitida durante muchos años. T.Levi-Civita (1873-1941) en The absolute differential Calculus, 1923, traducción inglesa de 1926, dice "Punto de una variedad n-dimensional abstracta es el conjunto de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y variedad n dimensional es el conjunto de valores que pueden asignarse a n variables" (p.119). L.P.Eisenhart (Riemannian Geometry, 1925, p.1) dice: "n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pueden pensarse como las coordenadas de un espacio n-dimensional, en el sentido de que cada conjunto de valores de las variables define un punto de la variedad".

El primero en llamar especialmente la atención sobre la posibilidad de que un mismo sistema de coordenadas no valga para toda la variedad, parece ser H.Weyl(1885-1955) que en su Space, Time and Matter (1918) (p.84 de la edición inglesa de 1922), dice: "La característica de una variedad n-dimensional es que cada uno de sus elementos (puntos, condiciones de un gas, colores) puede ser especificado dando n cantidades: las "coordenadas", que son funciones continuas dentro de la variedad. Esto no debe significar que "toda" la variedad, con todos sus elementos, pueda representarse de una sola y reversible manera por los valores de sistemas de coordenadas (por ejemplo, esto es imposible para la esfera, para la cual es n = 2); significa solamente que si P es un elemento arbitrario de la variedad, siempre existe un cierto dominio en el entorno de P que

puede representarse de manera unívoca y reversible por los valores de un sistema de n coordenadas".

Las necesidades de la geometría diferencial global, cuya importancia se manifestó con ímpetu en la década 1930-1940 para reforzar con las herramientas del cálculo diferencial los progresos que iba haciendo la Topología, obligaron a puntualizar bien las definiciones básicas de los espacios multidimensionales. El primer ensayo fué el libro <u>The foundations of Differential Geometry</u>, Cambridge Tracts, nº 29, publicado por O.Veblen (1880-1960) y J.H.C. Whitehead (1904-1960) en 1932, cuya idea esencial fué la de definir rigurosamente las relaciones entre la variedad y los sistemas de coordenadas que se introducen en ella para su estudio, haciendo una clara distinción entre ambos conceptos. Se formula por primera vez de manera explícita que las variedades que estudia la geometría diferencial son un conjunto de dos elementos: primero, la variedad como conjunto de puntos, para cuya definición y tratamiento la topología suministra los útiles y los medios necesarios; segundo, un cierto conjunto de "sistemas de coordenadas admisibles" que permiten el estudio "diferencial" de la variedad y entre los cuales deberán existir ciertas fórmulas de transformación o ciertas relaciones de equivalencia que los vinculen entre si y permitan pasar de unos sistemas a otros.

Esta idea se fué puliendo y simplificando, hasta llegar a la definición actual de "variedad diferenciable" que veremos en esta Monografía, y que es el resultado de sucesivos perfeccionamientos debidos principalmente a H.Whitney (Differentiable Manifolds, Annals of Mathematics, vol. 37, 1936, p.645-480), C.Chevalley (Theory of Lie Groups, Princeton, 1946, Cap. III), S.S.Chern (Topics in differential geometry, curso mimeografiado, Princeton, 1951) G. de Rham (Variétés Differentiables, Hermann, Paris, 1955), A.Lichnerowicz (Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Paris, 1955, Cap. I). A partir de este fecha, la definición de variedad diferenciable es ya usual en todos los textos de Geometría Diferencial.

En todas las definiciones se trata de introducir coordenadas x_i, que pueden sustituirse por otras mediante ciertas "fórmulas de transformación" $x'_i = x'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sujetas a determinadas condiciones para mantener la biunivocidad entre las x_i y las x'_i. Para hacer geometría hay que elegir un determinado sistema de coordenadas, trabajar con él, y luego probar que los resultados obtenidos no dependen del sistema elegido. Para asegurar esta independencia del sistema de coordenadas, o sea, para distinguir las propiedades intrinsecas de la variedad (independientes del sistema de coordenadas) de las que no lo son, se presentan dos posibilidades, a saber: a) Encontrar unas reglas de cálculo apropiadas tales que, aún utilizando coordenadas, se sepa en cada momento cuales son los resultados que no dependen de ellas; b) Suprimir las coordenadas y operar únicamente con ciertos elementos que sean ellos mismos intrínsecos a la variedad. La primera alternativa dió lugar al cálculo tensorial y corresponde a la tendencia de la tradicional geometría en coordenadas. La segunda, muy influida por el álgebra moderna, corresponde a la tendencia de la geometría sintética y es, en general, mas breve y elegante.

Aún a riesgo de perder en elegancia, pero ganando en efectividad, en la presente exposición vamos a seguir indistintamente una u otra tendencia, según convenga a cada caso, sin aferrarnos a un exagerado exclusivismo. Creemos, por otra parte, que conviene conocer y ejercitar las distintas posibilidades, para poder disponer de todas ellas cuando aparezca la necesidad de atacar un problema concreto.

Aunque el título de la Monografía es "Variedades Diferenciables" incluimos una introducción a los grupos de Lie, cuya teoría, desde los trabajos de E.Cartan (1869-1951) y C.Chevalley, está indisolublemente ligada a la geometría diferencial.

El contenido puede considerarse como el núcleo central sobre el que se han basado los cursos regulares de Geometría Diferencial, dictados por ambos autores en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, durante los últimos años. La idea ha sido reunir los conocimientos que se consideran indispensables para poder proseguir con estudios más especializados.

Buenos Aires, febrero 1978

CAPITULO I

PRELIMINARES TOPOLOGICOS

1. ESPACIOS TOPOLOGICOS

Suponemos conocidas las definiciones elementales sobre conjuntos y subconjuntos, asi como las operaciones fundamentales de unión e intersección entre ellos. Representaremos el conjunto vacio por $\emptyset$.

DEFINICIÓN 1.1. Se llama espacio topológico a todo conjunto E en el cuál se distinguen una familia de subconjuntos, llamados abiertos, que cumplen los siguientes axiomas:

1. La unión de cualquier número de abiertos es un abierto;
2. La intersección de dos abiertos es un abierto;
3. El conjunto vacío es un abierto;
4. El conjunto total E es un abierto.

Los elementos de un espacio topológico se llaman puntos. En algunos textos, los axiomas anteriores aparecen reducidos. Por ejemplo, si en el Axioma 1 se interpreta que el cero entra dentro de "cualquier número", entonces la unión de cero abiertos es el conjunto vacío y el Axioma 3 resulta consecuencia del 1. Sin embargo, dejando de lado la independencia, el sistema anterior es el mas usado y el mas cómodo para nuestros fines.

Para un mismo conjunto E, las familias de abiertos pueden ser diferentes: los espacios topológicos correspondientes son entonces también diferentes. Al asignar a E una familia de abiertos, que cumplen los axiomas anteriores, se dice que se ha asignado a E una estructura de espacio topológico, o bien, una topología. Si sobre un mismo conjunto se tienen definidas dos topologías y ocurre que todo abierto de la primera es también un abierto de la segunda, pero no al revés, se dice que esta última topología es <u>mas fina</u> que la primera.

<u>Ejemplos</u>

1. Tomando como únicos abiertos el conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio mismo E, se tiene definida una topología. Es la menos fina de todas. Se llama la topología <u>concreta</u> o la topología <u>trivial</u>.

2. Tomando como abiertos todos los subconjuntos de E, incluidos el $\emptyset$ y el E, se tiene otra topología. se llama la topología <u>discreta</u> de E. Es la más fina de todas. En ella los puntos son abiertos de E y este hecho caracteriza la topología discreta.

3. Sea la recta real $-\infty < x < \infty$. La familia de abiertos $a < x < b$ (a,b números cualesquiera, tales que $a < b$), junto con la unión de un número cualquiera de ellos, define una topología. Obsérvese que el Axioma 2 vale para cualquier número finito de abiertos, pero puede no valer para

un número infinito. Por ejemplo, en la topología mencionada, los abiertos $-1/n < x < 1/n$, para $n = 1,2,3,...$ tienen por intersección el sólo punto $x = 0$, que no es un abierto.

4. Sea un conjunto de puntos A contenido en el espacio topológico E. Tomando como abiertos de A las intersecciones $A \cap U$ (U abierto de E), se tiene definida sobre A una topología (puesto que $\cup(A \cap U_i) = A \cap (\cup U_i)$, $(A \cap U_i) \cap (A \cap U_j) = A \cap (U_i \cap U_j)$). Esta topología se llama la <u>topología inducida</u> en A por la topología de E, o también la <u>topología relativa</u> en A. Se dice también que A es un <u>subespacio topológico</u> de E.

2. BASE DE UN ESPACIO TOPOLOGICO

DEFINICION 1.2. Se llama <u>base</u> de un espacio topológico E a toda familia de abiertos $\{U_\alpha\}$ de E tal que todo abierto de E sea unión de U_α. El conjunto vacío se interpreta como la unión de un conjunto vacío de abiertos U_α.

Son importantes los espacios topológicos que admiten una base numerable. Se dice, a veces, que tales espacios satisfacen al segundo axioma de numerabilidad.

Sea E un conjunto y $\{U_\alpha\}$ una familia de subconjuntos. Interesa saber si $\{U_\alpha\}$ puede tomarse como base de una topología de E. Para ello es necesario y suficiente que:

a) E sea unión de U_α.

b) La intersección de dos U_α, sea también unión de U_α.

Con estas dos condiciones, es claro que se cumplen las condiciones que exige la definición de espacio topológico. A veces conviene sustituir la condición b) por la siguiente:

b*) Si $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, existe un U_γ tal que

$$x \in U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta .$$

Dos bases que determinan la misma topología, o sea, la misma familia de abiertos de E. se llaman equivalentes.

3. EL ESPACIO NUMERICO R^n

DEFINICION 1.3. Se llama espacio numérico R^n al conjunto de todas las n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reales, dados en un cierto orden. Cada una de estas n-uplas se llama un punto del espacio y los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman las coordenadas del punto.

Para unificar el enunciado de ciertos resultados y teoremas se suele completar la definición anterior con el convenio de que para n = 0 el espacio numérico R^0 está formado por un sólo punto.

Tomemos en R^n la familia de abiertos formada por los conjuntos de puntos $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tales que

$$(1.1) \qquad a_i < x_i < b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

siendo $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $b(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ dos puntos de R^n tales que las diferencias b_i-a_i sean todas positivas. Llamaremos a estos abiertos intervalos de R^n. Ellos definen una base en R^n, por cumplirse las condiciones a) y b) anteriores. La topología correspondiente se llama la topología natural de R^n. Siempre que se mencione a R^n como espacio topológico, se entenderá con la topología anterior, que tiene como abiertos a los intervalos y a los conjuntos formados por unión de los mismos.

Si en (1.1) se suponen a_i y b_i racionales, los intervalos (1.1) constituyen también una base de la misma topología anterior, pues todo intervalo real es unión de intervalos racionales. Por tanto:

El espacio numérico R^n, con la topología natural definida por los intervalos (1.1) como abiertos, admite una base numerable.

El espacio numérico R^n puede considerarse también como un espacio vectorial de dimensión n. Los vectores son entonces las n-uplas $X(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, con la ley de adición $X+Y = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ y el producto por un escalar definido por $\lambda X = (\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$. A veces conviene considerar a R^n como espacio topológico y a veces como espacio vectorial. En el primer caso, las x_i se llaman las coordenadas del punto x y en el segundo las componentes del vector X.

4. ESPACIOS METRICOS

DEFINICION 1.4. Una función $d(x,y)$ de valores reales, definida para todo par ordenado x,y de puntos de un espacio topológico E, se dice que define una <u>métrica</u> en E, o que define una estructura de <u>espacio métrico</u> en E, si cumple las siguientes condiciones:

a) $d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

b) $d(x,y) = d(y,x)$ (propiedad de simetría);

c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para cualquier terna de puntos x,y,z (propiedad triangular).

El número real $d(x,y)$ se llama la <u>distancia</u> entre los puntos x,y.

Un espacio topológico en el cual se ha definido una métrica, se llama un <u>espacio métrico</u>.

Por ejemplo, se puede dar a R^n una estructura de espacio métrico, definiendo la distancia $d(x,y)$ por

$$d(x,y) = [(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2]^{1/2} \tag{1.2}$$

la cual satisface a los postulados a), b), c) anteriores. El espacio R^n con esta métrica se llama el <u>espacio euclidiano</u> de n dimensiones.

Dada la métrica $d(x,y)$ se define la <u>bola abierta</u> de centro x y radio r ($r > 0$) como el conjunto de puntos y tales que $d(x,y) < r$ y la <u>bola cerrada</u> de centro x y radio r como el conjunto de puntos y tales que $d(x,y) \leq r$. La esfera de R^n de centro x y radio r es el conjunto de puntos y tales que $d(x,y) = r$.

Sea $B_r(x)$ la bola abierta de centro x y radio r. Un subconjunto U del espacio métrico E se dice que es abierto, si para todo punto $x \in U$ existe un número real $r > 0$, tal que $B_r(x) \subset U$. El conjunto de estos abiertos, mas el conjunto vacio, forma una familia de abiertos que definen una topología en el espacio métrico E. Esta es la topología natural que se supone definida en todo espacio métrico cuando no se especifica otra cosa.

Sea $\{x_i\}$ una sucesión de puntos del espacio métrico E, que tiene la propiedad de que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un número natural $n(\varepsilon)$ tal que para $k > n(\varepsilon)$ y $m > n(\varepsilon)$, sea $d(x_k, x_m) < \varepsilon$. Una tal sucesión se dice que es una sucesión de Cauchy. Si dada la sucesión $\{x_i\}$ existe un punto x de E tal que para cualquier $\eta > 0$ existe $n(\eta)$ tal que para $n > n(\eta)$ sea $d(x_n, x) < \eta$, entonces la sucesión $\{x_i\}$ se dice que es convergente.

DEFINICION 1.5. Un espacio métrico se dice que es completo, si toda sucesión de Cauchy del mismo es una sucesión convergente.

5. ESPACIOS SEPARADOS O DE HAUSDORFF

DEFINICION 1.6. Se llama entorno del punto $x \in E$, a todo conjunto $U_x \subset E$ que contiene a un abierto que contiene a x.

DEFINICION 1.7. Un espacio topológico E se dice que es <u>separado</u> o <u>de Hausdorff</u>, si cualesquiera que sean los puntos $x,y \in E$, existen entornos U_x, Y_y sin punto común.

No debe confundirse "separado" con "separable", nombre este último que se da a los espacios topológicos que contienen un subconjunto denso (ver la Definición 1.12.) y numerable. Para evitar la confusión los llamaremos siempre espacios de Hausdorff.

<u>Ejemplos</u>

1. Consideremos el conjunto E formado por dos rectas con las partes $x < 0$ identificadas y las partes $x \geq 0$ diferentes, y en cada caso los abiertos sean los intervalos. Los puntos $x = 0$ de cada recta son dos puntos diferentes de E y sin embargo no tienen entorno sin punto común, o sea, E no es de Hausdorff.

2. La recta real, tomando como abiertas las semirectas a la derecha de todo punto $(a < x < \infty)$ es un espacio topológico que no es de Hausdorff. Vemos así que sobre la recta real los abiertos $a < x < b$ y los $a < x < \infty$ definen topologías diferentes, pues la primera es de Hausdorff y la segunda no. La primera topología es más fina que la segunda.

3. Todo espacio métrico, con su topología natural, es un espacio de Hausdorff. En efecto, dados dos puntos x,y tales que $d(x,y) = a > 0$, los abiertos $B_{a/2}(x)$, $B_{a/2}(y)$ no tienen punto común.

6. OTRAS DEFINICIONES

En las definiciones siguientes, E representa un espacio topológico dado.

DEFINICION 1.8. Se dice que un punto x es <u>interior</u> a un conjunto $A \subset E$, si A es un entorno de x. El conjunto de los puntos interiores de A se llama el interior de A.

DEFINICION 1.9. Se dice que un punto x es <u>adherente</u> a un conjunto $A \subset E$, si todo entorno de x contiene por lo menos un punto de A. El conjunto de los puntos adherentes de A se llama la <u>adherencia</u> o la <u>clausura</u> de A y se representa por $\overline{A}$.

DEFINICION 1.10. Se llaman conjuntos <u>cerrados</u> de E a los complementarios de los abiertos de E, es decir, a los $E-U_\alpha$, siendo U_α un abierto de E. El conjunto vacio y el espacio entero E son, a la vez, abiertos y cerrados.

Un subespacio $A \subseteq E$ se dice que es <u>cerrado</u>, si E-A es un abierto E.

DEFINICION 1.11. Un punto x se dice que es un punto frontera de un conjunto A de E, si es a la vez punto adherente de A y de su complementario E-A. El conjunto de los puntos frontera de A se llama el <u>borde</u>, el <u>contorno</u> o la <u>frontera</u> de A y se representa por ∂A.

DEFINICION 1.12. Un conjunto A se dice que es <u>denso</u> en E si $\overline{A} = E$.

DEFINICION 1.13. E se dice que es <u>conexo</u> si, siendo A y B abiertos de E no vacíos, la relación $A \cup B = E$ implica $A \cap B \neq \emptyset$.

Obsérvese que en la definición se puede sustituir "abierto" por "cerrado" y que de ella se deduce que "E es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$".

DEFINICION 1.14. Un espacio topológico E se dice que es <u>compacto</u>, si todo cubrimiento de E por abiertos contiene un cubrimiento finito.

Para probar la compacidad de un espacio es a veces útil la siguiente

DEFINICION 1.15. Una familia de conjuntos se dice que tiene la "propiedad de intersección finita", si toda subfamilia finita de la misma tiene intersección no vacía.

Vale entonces el siguiente teorema, que viene a ser la definición dual de compacidad:

TEOREMA 1.1. <u>El espacio topológico E es compacto, si y sólo si, toda familia de conjuntos cerrados de E que tenga la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía</u>.

Demostración.

a) Supongamos que E es compacto. Sea $\{C_\alpha\}$ una familia de cerrados con la propiedad de intersección finita; hay que demostrar que su intersección no es vacia. Si fuera vacía, los complementarios $\{E-C_\alpha\}$ serían abiertos que cubren E y por tanto un número finito de ellos también cubriría E. La intersección de los C_α correspondientes a estos últimos sería vacía, contra la hipótesis de que $\{C_\alpha\}$ posee la propiedad de intersección finita.

b) Supongamos que se cumplen las condiciones del teorema. Queremos demostrar que E es compacto. Sea $\{A_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos de E; los complementarios $\{E-A_\alpha\}$ tienen intersección vacía. Por tanto, existe una familia finita de $\{E-A_\alpha\}$ con intersección vacía. Sus complementarios forman un cubrimiento finito de E por abiertos.

También facilita la demostración de la compacidad de ciertos espacios, el siguiente

TEOREMA 1.2. <u>En la Definición 1.14, los cubrimientos de E pueden limitarse a cubrimientos por abiertos de una base determinada.</u>

En efecto, sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento por abiertos cualesquiera y B una base. Como cada U_α es unión de abiertos de B, se tiene también un cubrimiento $\{B_\alpha\}$ con $B_\alpha \subset C$. Si para todo cubrimiento $\{B_\alpha\}$ existe un cubrimiento finito formado por $B_1, B_2, \ldots, B_m$, como cada B_i pertenece a un cierto U_i de $\{U_\alpha\}$, también estos U_i formarán un cubrimiento de E. Es decir, con sólo suponer que la condición de la Definición 1.14 se cumple para abiertos de B, se deduce que se cumple para abiertos cualesquiera.

Sin dar la demostración, enunciamos el conocido y muy útil teorema siguiente:

TEOREMA 1.3. Todo subespacio cerrado y acotado de R^n es compacto.

Decir "acotado" significa que las coordenadas de sus puntos están acotadas, o bien, que puede encerrarse dentro de un cubo o una esfera suficientemente grande.

Obsérvese que R^n no es compacto. Para espacios compactos es fácil demostrar el siguiente

TEOREMA 1.4. Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.

Interesa también el teorema

TEOREMA 1.5. Si E es un espacio topológico compacto, todo conjunto de puntos $\{P_i\}$ que contiene infinitos puntos, tiene por lo menos un punto de acumulación, o sea, un punto Q tal que cualquier entorno de Q tiene algún punto del conjunto $\{P_i\}$, distinto de Q.

Por tanto, según la definición de espacio métrico completo, se tiene

TEOREMA 1.6. Todo espacio métrico compacto es completo.

Finalmente vamos a resumir a continuación unas últimas definiciones y algunos teoremas referentes a las mismas, que van a ser útiles en lo sucesivo. Estas definiciones difieren a veces ligeramente de un autor a otro. Las demostraciones de los teoremas que se mencionan pueden verse en la mayoría de los textos de Topología General, por ejemplo en los de KELLEY [13], LEFSCHETZ [16], HOCKING-YOUNG [9] y WILLARD [33] citados en la bibliografía del final.

DEFINICION 1.16. Un espacio topológico E se dice que es <u>localmente compacto</u>, si todo punto del mismo posee un entorno compacto.

DEFINICION 1.17. Un espacio topológico E se dice que es <u>regular</u>, si para cada punto x y cada entorno U de x existe un entorno cerrado V de x tal que $V \subset U$.

DEFINICION 1.18. Un espacio topológico E se dice que es <u>normal</u>, si para cada par de conjuntos cerrados y disjuntos A y B contenidos en E, existen conjuntos abiertos y disjuntos U y V tales que $A \subset U$, $B \subset V$.

DEFINICION 1.19. Dados dos cubrimientos $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\alpha\}$ de un espacio topológico E, se dice que el segundo es <u>más fino</u> que el primero o que es un <u>refinamiento</u> del primero, si para todo V_β existe un U_α tal que $V_\beta \subset U_\alpha$.

DEFINICION 1.20. Un cubrimiento $\{U_\alpha\}$ de E se dice que es <u>localmente finito</u>, si para todo punto $x \in E$, existe un entorno de x que solamente tiene punto común con un número finito de conjuntos $\{U_\alpha\}$. El cubrimiento $\{U_\alpha\}$ se dice que es de *tipo finito*, si todo conjunto U_α solamente tiene punto común con un número finito de conjuntos $\{U_\alpha\}$.

DEFINICION 1.21. Un espacio topológico E se dice que es *paracompacto*, si es de Hausdorff y todo cubrimiento por abiertos de E admite un refinamiento por abiertos localmente finito.

Los espacios topológicos que son el sostén de las variedades diferenciables que queremos estudiar son espacios de Hausdorff de base numerable. Interesa, por tanto, recopilar algunos resultados de estos espacios y sus vinculaciones con los que acabamos de definir. En este sentido son interesantes los siguientes teoremas:

TEOREMA 1.7. (Lindelöff). *En un espacio topológico de base numerable, todo cubrimiento por abiertos de un subconjunto arbitrario, tiene un subcubrimiento numerable.*

TEOREMA 1.8. *Todo espacio topológico regular de base numerable, es normal.* (Tijonov)

TEOREMA 1.9. *Todo espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, es regular.*

TEOREMA 1.10. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

TEOREMA 1.11. *Todo espacio paracompacto es normal.*

TEOREMA 1.12. *Si el espacio topológico E es normal, para todo cubrimiento por abiertos* $\{U_\alpha\}$ *localmente finito, existe un refinamiento* $\{V_\alpha\}$ *tal que* $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ *para todo* α.

Un ejemplo de espacio no paracompacto es el semiplano, $y > 0$ con la topología usual de intervalos, mas la recta $y = 0$ junto con los abiertos formados por la unión de cada punto $(x,0)$ y un círculo abierto contenido en $y > 0$, tangente en $(x,0)$ a la recta $y = 0$. Con esta topología, todo subconjunto del eje x es cerrado. En particular, los racionales Q y los irracionales I forman conjuntos cerrados disjuntos que no admiten abiertos disjuntos que los contengan. Por tanto el espacio no es normal y, en consecuencia, tampoco paracompacto. Sin embargo, es de Hausdorff.

Para mas detalles ver el libro de STEEN-SEEBACH [27] donde se encuentran interesantes ejemplos de espacios para los que se cumplen parcialmente las condiciones de los teoremas anteriores, pero no las restantes.

7. APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

DEFINICION 1.22. Sean X, Y dos conjuntos. Una relación f que a cada $x \in X$ hace corresponder uno y un solo $y = f(x) \in Y$, se dice que es una <u>aplicación</u> de X en Y o también una <u>función</u> definida en X con valores en Y. Se representa $f: X \to Y$. El conjunto X se llama el <u>dominio</u> y el conjunto Y el <u>codominio</u> de la aplicación. Se dice también que Y es la imagen de X respecto de f.

DEFINICION 1.23. Una aplicación $f:X \to Y$ se dice que es

a) Suryectiva o simplemente "sobre", si $f(X) = Y$, es decir, si las imágenes de los puntos de X cubren todo Y;

b) Inyectiva si $f(x) = f(x')$ implica que sea $x = x'$. Es decir, si ningún punto de Y es imagen de más de un punto de X;

c) Biyectiva, si es suryectiva e inyectiva a la vez.

Si $Y = X$, la aplicación que a cada x hace corresponder el mismo x, se llama la identidad o aplicación idéntica. Si $X \subset Y$, la restricción de la identidad a X se llama la inyección natural de X en Y.

Para toda aplicación biyectiva o biyección $f:X \to Y$, está definida la aplicación inversa $f^{-1}:Y \to X$, tal que si $y = f(x)$, es $x = f^{-1}(y)$. Si f no es biyectiva, no existe la aplicación inversa; sin embargo, si $A \subset Y$, se representa por $f^{-1}(A)$ al conjunto de puntos de X cuya imagen por f es A.

DEFINICION 1.24. Dados tres conjuntos, X, Y, Z y dos aplicaciones $f:X \to Y$, $g:Y \to Z$, la aplicación $X \to Z$ definida por $z = g(f(x))$ se llama la aplicación compuesta o composición de f y g. Se representa por $g \circ f$.

De la definición se deduce que se cumplen las relaciones

(1.3) $\quad f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h \qquad (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

la última de ellas bajo la hipótesis de que f y g sean ambas biyectivas.

Las definiciones anteriores valen para conjuntos cualesquiera. Sean ahora E, E' dos espacios topológicos.

DEFINICION 1.25. Una aplicación $f:E \to E'$ se dice que es continua en un punto $x \in E$, si para todo abierto U' de E' que contiene a f(x), existe un entorno de x cuya imagen está contenida en U'.

DEFINICION 1.26. Una aplicación $f:E \to E'$ se dice que es continua en E si es continua en todo punto x de E.

Representando por $f^{-1}(U')$ el conjunto de puntos de E cuya imagen por f es $U' \subset E'$, se puede también decir que $f:E \to E'$ es continua, si la imagen por f^{-1} de todo abierto de E' es un abierto de E.

DEFINICION 1.27. Una aplicación $f:E \to E'$ se dice que es una aplicación topológica o un homeomorfismo, si es biyectiva y bicontinua. Decir que es bicontinua significa que son continuas f y f^{-1}.

De la definición de continuidad se deduce que los homeomorfismos y sus inversos transforman abiertos en abiertos, o sea, conservan las topologías de E y E'. Otras consecuencias inmediatas de la definición son:

a) La composición de homeomorfismos es un homeomorfismo;

b) Los homeomorfismos conservan la compacidad.

Una propiedad de un espacio topológico se dice que es una propiedad topológica, si se conserva por homeomorfismos. Por ejemplo, la compacidad y la propiedad de ser o no conexo, son propiedades topológicas.

Todo conjunto homeomorfo al segmento $0 \leq x \leq 1$, se llama un <u>arco</u> de curva y todo conjunto homeomorfo a una circunferencia se llama <u>curva cerrada</u>.

DEFINICION 1.28. Un espacio topológico E se dice que es <u>conexo por arcos</u>, si cualesquiera que sean los puntos $x,y \in E$, existe un arco que los une contenido en E.

Todo espacio topológico que es conexo por arcos es conexo en el sentido de la Definición 1.13., pero no recíprocamente. Por ejemplo, la clausura del conjunto de puntos de R^2 de coordenadas $(x, \mathrm{sen}(1/x))$, con $0 < x \leq 1$, con la topología subordinada por la natural de R^2, es conexo, pero no es conexo por arcos, puesto que los puntos del segmento $(0,y)$ con $-1 \leq y \leq 1$ no pueden unirse por un arco de curva continua con otro punto que no esté en dicho segmento.

8. APLICACIONES DE R^n EN R^m

Dado un abierto $X \subset R^n$, una aplicación $f:X \rightarrow R^m$ está determinada por m aplicaciones $f_i:X \rightarrow R^1$ de X en la recta real, tales que

(1.4) $\qquad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$

para todo $x \in X$. Es decir, si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ son las coordonadas de $x \in X$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ son las coordenadas de $y \in R^m$, la aplicación f define las m funciones reales

(1.5) $\qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$

Recíprocamente, m funciones reales del tipo (1.5) definen una aplicación $f: X \to R^m$.

DEFINICION 1.29. Una función $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se dice que es de clase C^r (r entero > 0) en el subconjunto X de R^n, si existen y son continuas todas las derivadas parciales de F hasta el orden r inclusive, en todo punto de X.

Se dice también: a) que F es de clase C^0 si es continua en X; b) que es de clase C^∞ si admite en X derivadas parciales continuas de cualquier orden; c) que es analítica, si admite en un entorno de cada punto de X un desarrollo en serie de potencias de las variables x_i que sea absolutamente convergente.

DEFINICION 1.30. Una aplicación $f: X \to R^m$ de un abierto de R^n en R^m se dice que es de clase C^r (respectivamente de clase C^∞ o analítica), si son de clase C^r (respectivamente de clase C^∞ o analíticas) en X, las aplicaciones $f_i: X \to R^1$ definidas por f, o sea, las funciones (1.5).

En Geometría Diferencial se trabaja generalmente con aplicaciones de clase C^∞. Por esto y para abreviar, diremos simplemente que una aplicación es <u>diferenciable</u> si es de clase C^∞. En caso contrario, lo mencionaremos explicitamente.

DEFINICION 1.31. Se llama <u>matriz jacobiana</u> de una aplicación de clase C^1 $f:X \to R^m$ (X abierto de R^n) a la matriz $m{\times}n$ de las derivadas parciales $\partial f_i/\partial x_j$ ($i = 1,2,\ldots,m$; $j = 1,2,\ldots,n$). Si $n \leq m$ y la matriz jacobiana tiene rango n en todos los puntos de X, la aplicación se llama <u>regular</u>.

Si indicamos $D(f)(p)$ a la matriz jacobiana de f en p, entonces la regla de la cadena se puede escribir de la forma

$$D(f\circ g)(p) = D(f)(g(p)).Dg(p) \quad \text{(producto de matrices)}$$

Si la notación $\partial f_i/\partial x_j$ se presta a confusión en algún caso, utilizaremos en cambio la notación $D_j(f_i)$.

DEFINICION 1.32. Sean dos abiertos $X \subset R^n$, $Y \subset R^m$. Sea $f:X \to Y$ una aplicación de clase C^1. Si existe la inversa $f^{-1}:Y \to X$ y ella es también de clase C^1, se dice que f es un <u>difeomorfismo</u> de X en Y. Evidentemente ello exige que sea $n = m$.

En muchos libros de Análisis (por ejemplo APOSTOL [1] o REY PASTOR-PI CALLEJA-TREJO [23]) puede verse la demostración del siguiente <u>Teorema sobre funciones inversas</u>:

TEOREMA 1.13. Sean X,Y dos abiertos de R^n. Si la aplicación $f:X \to Y$ es de clase C^1 y el jacobiano de la misma, o sea el determinante de la matriz jacobiana, no es nulo en el entorno de un punto $x_0 \in X$, existe entonces un entorno U de x_0 tal que la restricción $f:U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

Representando por J(f) el determinante jacobiano, conviene recordar las relaciones

$$(1.6) \qquad J(g\circ f) = J(g).J(f), \qquad J(f^{-1}) = 1/J(f)$$

Es interesante observar que el Teorema 1.13 asegura unicamente un difeomorfismo "local", en un entorno de cada punto en el cual es $J(f) \neq 0$. Puede ocurrir que aun siendo $J(f) \neq 0$ en todo punto de X, la aplicación $f:X \to Y$ no resulte biyectiva en todo X. Por ejemplo, sea $f:R^2 \to R^2$ definida por

$$(1.7) \qquad y_1 = e^{x_1} \cos\pi x_2, \qquad y_2 = e^{x_1} \operatorname{sen}\pi x_2$$

Es $J(f) = \pi e^{2x_1} \neq 0$ y, sin embargo, no es biyectiva, pues a los puntos (x_1, x_2+2k), k-entero, corresponde el mismo punto y_1, y_2.

También vamos a utilizar el siguiente clásico teorema de las funciones implícitas, cuya demostración puede verse en los mismos lugares citados:

TEOREMA 1.14. Indiquemos $x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ a los puntos de R^n e $y(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ a los de R^m. Sea U_{n+m} un abierto de $R^n x R^m$ y $f:U_{n+m} \to R^m$ una aplicación de clase $C^r (r > 0)$. Sea $p(x^0,y^0) = p(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0, y_1^0,y_2^0,\ldots,y_m^0)$ un punto de U_{n+m} para el cual sea $f(p) = 0$ y el determinante jacobiano en p sea $\neq 0$. En estas condiciones, existe un entorno V_n de x^0 en R^n y una aplicación $g:V_n \to R^m$, tales que

a) g es de clase C^r;

b) $g(x^0) = y^0$;

c) $f(x,g(x)) = 0$ para todo $x \in V_n$.

Recordemos finalmente, otra definición:

DEFINICION 1.33. Se llama soporte de una función F definida sobre un espacio topológico, a la adherencia del conjunto de puntos para los cuales es $F \neq 0$.

9. ESPACIO PRODUCTO

Sean E_1, E_2 dos espacios topológicos. Consideremos el conjunto cuyos elementos son los pares (x_1,x_2) con $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Este conjunto es el producto cartesiano de los conjuntos que constituyen E_1 y E_2. Para introducir en el mismo una topología, se pueden definir los abiertos de la siguiente manera: W será un abierto, si cualquiera de sus puntos pertenece al producto cartesiano de abiertos de E_1 y E_2 respectivamente, el cual producto esté contenido completamente en W. Estos abiertos, incluyendo el conjunto vacío, satisfacen a los axiomas de espacio topológico así obtenido se llama el producto de E_1 y E_2, que se representa por $E_1 \times E_2$.

Demuéstrese como ejercicio simple que la aplicación $p: E_1 \times E_2 \to E_1$ definida por $p(x_1, x_2) = x_1$, con $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ es continua. Analogamente, es continua la aplicación $q: E_1 \times E_2 \to E_2$ definida por $q(x_1, x_2) = x_2$. Estas aplicaciones se llaman las <u>proyecciones</u> de $E_1 \times E_2$ sobre E_1 y E_2 respectivamente.

Es importante el teorema (Tychonoff):

<u>El producto de dos espacios topológicos compactos, es compacto</u>.

<u>Ejemplos</u>

1. Si R es la recta real y S^1 la circunferencia, ambos con la topología natural de intervalos, se tienen los productos $R \times R = R^2$ = plano cartesiano, $R \times S^1$ = cilindro, $S^1 \times S^1$ = toro.

2. La parte de R^3 formada por los puntos de coordenadas x_1, x_2 cualesquiera y $0 \leq x_3 \leq 2$ con la propiedad de identificar los puntos $(x_1, x_2, 0)$ y $(x_1, x_2, 2)$ es el producto $R^2 \times S^1$.

Evidentemente, no todo espacio topológico es un espacio producto. Por ejemplo S^2 no es producto de otros espacios topológicos.

CAPITULO II

VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. VARIEDADES DIFERENCIABLES

Los espacios topológicos que hemos considerado hasta ahora son demasiado generales para poder estudiar en ellos lo que clasicamente se entiende por Geometría.

Su estudio es el objeto de la Topología. La Geometría Diferencial, en cambio, necesita poder introducir coordenadas para representar los puntos del espacio mediante números, para luego operar con ellos y aplicar los poderosos medios del cálculo infinitesimal. Esto exige ciertas restricciones al espacio que vamos a exponer sucesivamente hasta llegar a la definición de "variedad diferenciable".

Primero definimos con mayor precisión el concepto de representación de los puntos del espacio mediante números; como eso no va a ser todo lo que pidamos para hacer Geometría, le damos otro nombre.

DEFINICION 2.1. Una <u>variedad topológica</u> es un espacio topológico X tal que para cada $p \in X$ existen un entorno abierto U de p, un número entero no negativo n y un homeomorfismo $x:U \to x(U)$, donde $x(U)$ es un abierto del espacio numérico R^n.

De esta manera, si X es una variedad topológica y para $p \in X$, $x:U \to x(U)$ es el homeomorfismo en cuestión, a cada $q \in U$ le asociamos $x(q) = (x^1(q),\ldots,x^n(q)) \in R^n$.

Dicho de otra manera, representamos a q por las coordenadas $x^1(q),\ldots,x^n(q)$; por eso el par (x,U) se suele llamar sistema de coordenadas local o carta local, esta última terminología proveniente de la cartografía en donde a cada punto de la superficie terrestre se le asignan dos coordenadas: latitud y longitud (la palabra "local" proviene del hecho de que, en general, $U \neq X$). Frecuentemente el par (x,U) se indica como el sistema de coordenadas $x^1,\ldots,x^n$.

El primer problema que se nos plantea es la posible variación del n para puntos distintos de la variedad o incluso para el mismo punto. Para resolverlo necesitaremos de un teorema cuya demostración omitimos y que puede encontrarse en Newman [20] o Greenberg [7]:

TEOREMA 2.2. (Invariancia del dominio): Si U es un abierto de R^n y $f:U \to R^n$ es una función inyectiva y continua, entonces $f(U) \subset R^n$ es abierto.

Podemos expresar este teorema diciendo que la propiedad de ser abierto es invariante por funciones inyectivas y continuas; como lo mismo ocurre con la propiedad de ser conexo, resulta que el ser abierto y conexo (dominio) es invariante por funciones inyectivas y continuas. De ahí el nombre del teorema.

Es muy frecuente citar la "invariancia del dominio" para referirse al siguiente colorario:

COROLARIO 2.3. Si U es un abierto de R^n y V es un abierto no vacío de R^m y $n \neq m$, entonces U y V no son homeomorfos.

DEMOSTRACION. Supongamos $m < n$ y sea $g:U \to V$ un homeomorfismo. Consideremos

$$W = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

Entonces la función $i:R^m \to W$ definida por

$$i(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$$

es un homeomorfismo (W con la topología inducida por R^n), en particular inyectiva y continua. En consecuencia, también es inyectiva y continua la composición

$$U \overset{g}{\to} V \overset{i}{\to} i(V) \subset W \subset R^n$$

Por el teorema de invariancia del dominio, resulta $i(V)$ abierto no vacío en R^n, o sea W tiene interior no vacío. Es fácil probar que ésto último es falso, en consecuencia no puede existir el homeomorfismo g supuesto.///

Volvemos entonces a las variedades topológicas y notamos la consecuencia inmediata del corolario 2.3.

COROLARIO 2.4. Si X es una variedad topológica, $p \in X$ y (x,U), (y,V) son cartas locales alrededor de p (es decir, $p \in U \cap V$) con $x(U)$ abiertos en R^n e $y(V)$

abierto en R^m, entonces $n = m$.

DEMOSTRACION. Como $x:U \to x(U)$, $y:V \to y(V)$ son homeomorfismos, también lo es

$$x \circ y^{-1}: y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

Resulta de la definición de variedad topológica que $x(U \cap V)$ es abierto en R^n (no vacío pues contiene a $x(p)$) e $y(U \cap V)$ es abierto en R^m (no vacío pues contiene a $y(p)$). La existencia del homeomorfismo $x \circ y^{-1}$ implica entonces, de acuerdo al corolario 2.3, que $n = m$ ///

Entonces el n es el mismo en un punto de la variedad. Veamos que ocurre para puntos diferentes:

TEOREMA 2.5. Si X es una variedad topológica conexa, entonces el n es el mismo para todos los puntos de la variedad.

DEMOSTRACION. Sea $A_n = \{p \in X$: p tiene un entonrno homeomorfo a un abierto de $R^n\}$.

Como consecuencia de la definición de variedad topológica, es $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Como consecuencia del corolario 2.4, $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Además cada A_n es abierto trivialme te. Luego, por la conexión, todos los A_n deben ser vacíos menos uno, que es justamente lo que queríamos probar ///

Esto resuelve completamente el problema por las siguientes observaciones:

i) Todo abierto W de una variedad topológica es una variedad topológica también, siendo las cartas locales $(x', U \cap W)$, donde x' es la restricción de x a $U \cap W$;

ii) Toda variedad topológica es localmente conexa, pues localmente es homeomorfa a abiertos de R^n que es localmente conexo.

Entonces, si X es una variedad topológica cualquiera, sus componentes conexas son abiertos de X por la conexión local de este último y por lo tanto, en cada una de esas componentes, el n es el mismo.

Sea o no conexa la variedad topológica, si el n es el mismo para todos los puntos diremos que la variedad topológica tiene <u>dimensión n</u>.

Sea entonces X una variedad topológica de dimensión n y sean (x,U), (y,U) dos cartas locales con $U \cap V \neq \emptyset$. Diremos que las dos cartas están <u>C^k-relacionadas</u> si las funciones:

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

son de clase C^k, es decir, tienen derivadas parciales continuas hasta el orden k. (según hemos hecho notar en la demostración del corolario 2.4, estas dos funciones son siempre homeomorfismos entre abiertos de R^n).

Para una carta local (x,U), es costumbre referirse al abierto U como el dominio de la carta local.

DEFINICION 2.6. Un atlas de clase C^k de una variedad topológica X es una familia de cartas locales C^k-relacionadas entre sí, cuyos dominios cubran a la variedad X.

Observemos que, en principio, puede no existir un atlas de clase C^k para una variedad topológica dada.

Supongamos ahora que tenemos un atlas de clase C^k sobre una variedad topológica X, digamos $\{(x_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$. Si (x,U) es una carta local de la variedad, entonces diremos que (x,U) es C^k-admisible por el atlas dado si las funciones

$$x_\alpha \circ x^{-1}:x(U_\alpha \cap U) \to x_\alpha(U_\alpha \cap U)$$

$$x\circ x_\alpha^{-1} :x_\alpha(U_\alpha \cap U) \to x(U_\alpha \cap U)$$

son de clase C^k para todo $\alpha \in A$.

Si partimos de un atlas de clase C^k de una variedad topológica y le agregamos todas las cartas C^k-admisibles por dicho atlas, es natural que la familia así formada tenga alguna propiedad de maximalidad; en efecto:

TEOREMA 2.7. Sea X una variedad topológica tal que existe un atlas de clase C^k para esa variedad, digamos $\mathcal{A} = \{(x_\alpha,U_\alpha):\alpha \in A\}$; entonces la familia $\mathcal{A}'$ formada por todas las cartas locales de X C^k-admisibles por $\mathcal{A}$ satisface las siguientes condiciones:

i) A' es un atlas de clase C^k para X

ii) A' es el máximo atlas de clase C^k que contiene a A.

DEMOSTRACION. i) Sean (x,U), (y,V) pertenecientes a A'. Si alguna de ellas dos pertenece a A, no hay nada que probar. Si ninguna de las dos está en A, queremos ver que la función

$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

es de clase C^k (supuesto $U \cap V \neq \emptyset$) y análogamente para $y \circ x^{-1}$.

Sea entonces $p \in U \cap V$: como A es un atlas, existe $(x_\alpha, U_\alpha) \in A$ tal que $p \in U_\alpha$. Entonces, en $U \cap V \cap U_\alpha$:

$$x \circ y^{-1} = (x \circ x_\alpha^{-1}) \circ (x_\alpha \circ x^{-1})$$

y las dos funciones entre paréntesis son de clase C^k por la construcción de A'. Luego lo mismo vale para la función $x \circ y^{-1}$. Hemos demostrado entonces que todo punto de $y(U \cap V)$ tiene un entorno abierto en el cual $x \circ y^{-1}$ es de clase C^k en todo $y(U \cap V)$.

ii) Si A'' es un atlas de clase C^k que contiene a A, entonces en particular todas las cartas de A'' son C^k-admisibles por A. Pero de acuerdo a la construcción de A', eso significa $A'' \subset A'$ ///

Podemos ahora dar la definición de nuestros objetos de estudio:

DEFINICION 2.8. Una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n es el par formado por una variedad topológica Hausdorff y de base numerable de dimensión n y un atlas maximal de clase C^k para la variedad.

La hipótesis de ser un espacio de Hausdorff es esencial para pasar de un espacio de Riemann a un espacio métrico según indicaremos más adelante. El estudio de las variedades diferenciables que no son de Hausdorff es útil en el estudio de ciertas variedades cociente (ver, por ejemplo, R.S.PALAIS [21]). La existencia de una base numerable es esencial para el estudio de la integración en variedades, que también veremos.

Las propiedades topológicas de las variedades diferenciables son las del espacio topológico subyacente. Así, se habla de variedades diferenciables compactas, conexas, paracompactas, etc., si lo son los espacios topológicos que les sirven de base.

Como, en general, estudiaremos variedades diferenciable de clase C^∞, en lo sucesivo, al decir variedad diferenciable, entenderemos que se trata de una variedad de clase C^∞; en caso contrario lo advertiremos explícitamente.

Antes de ver algunos ejemplos de variedades diferenciables, notemos que, en vista del Teorema 2.7, para dar una variedad diferenciable no hace falta dar el atlas máximo; basta dar un atlas cualquiera pues entonces hay un un único máximo que lo contiene y a ese nos referimos.

Ejemplos

1. Consideremos $X = R^n$ y (x,U) la carta local x = identidad, $U = R^n$. Claramente, $\{(x,U)\}$ es un atlas de clase C^k para el k que se quiera. Una vez decidido el k, hay un único atlas máximo de esa clase que contiene al dado, con lo que R^n queda convertido en una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n.

2. Sea $X = S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in R^{n+1}: x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2 = 1\}$ la "superficie esférica n-dimensional". Vamos a darle a S^n una estructura de variedad diferenciable, pero desde ya notamos que no bastará una carta local como en el ejemplo 1 ya que S^n es compacta y ningún abierto no vacío del espacio numérico lo es.

Definimos primero lo que van a ser los dominios de las cartas:

Para $1 \leq i \leq n+1$, sean:

$$U_i^+ = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n : x_i > 0\}$$
$$U_i^- = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n : x_i < 0\}$$

Sean, también, las funciones:

$$\varphi_i^+ : U_i^+ \to V_1(0)$$

$$\varphi_i^+(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1})$$

donde $V_1(0) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in R^n : x_1^2 +\ldots+ x_n^2 < 1\}$ y el acento ^ sobre x_i significa que hay que sacar x_i (o sea, $\varphi_i^+(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{n+1})$) y

$$\varphi_i^-:U_i^- \to V_1(0)$$

dada por

$$\varphi_i^-(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{n+1})$$

(proyecciones de los casquetes sobre los hiperplanos coordenados)

Estas funciones son claramente continuas como restricción a los casquetes U_i^+ y U_i^- de la proyección a los hiperplanos coordenados. Por otra parte, las funciones

$$\psi_i^+:V_1(0) \to U_i^+$$

$$\psi_i^-:V_1(0) \to U_i^-$$

definidas por:

$$\psi_i^+(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{i-1},(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)^{1/2},x_i,\ldots,x_n)$$

$$\psi_i^-(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_{i-1},-(1-x_1^2-\ldots-x_n^2)^{1/2},x_i,\ldots,x_n)$$

son las inversas respectivas (verificar componiendo) y evidentemente son continuas. Entonces los φ_i^+ y φ_i^- son homeomorfismos de abiertos de S^n sobre abiertos de R^n; como la unión de los U_i^+ y U_i^- sobre i da todo S^n, tenemos entonces un atlas sobre S^n.

Para ver la clase de ese atlas, hay que hallar todas las composiciones

$$\varphi_i^+\circ(\varphi_j^+)^{-1},\ \varphi_i^+\circ(\varphi_j^-)^{-1},\ \varphi_i^-\circ(\varphi_j^+)^{-1},\ \varphi_i^-\circ(\varphi_j^-)^{-1}$$

Hallamos una cualquiera de ellas y las demás quedan como ejercicio.

Por ejemplo:

$$\varphi_i^+\circ(\varphi_j^-)^{-1}\ (x_1,\dots,x_n) = \varphi_i^+\circ\psi_j^-(x_1,\dots,x_n)$$

$$= \varphi_i^+(x_1,\dots,x_{j-1},-(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^{1/2},x_j,\dots,x_n)$$

$$= (x_1,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_{j-1},-(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^{1/2},x_j,\dots,x_n)$$

en el caso $i<j$ y

$$(x_1,\dots,x_{j-1},-(1-x_1^2-\dots-x_n^2)^{1/2},x_j,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_n)$$

en el caso $i>j$. En ambos casos, las funciones resultan de clase C^k para el k que se quiera. Extendiendo a un atlas máximo, fijado el k, resulta que S^n es una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n.

3. <u>(Variedad producto)</u> Sean, X, Y variedades diferenciables de clases C^k y C^h y de dimensiones n y m respectivamente y sea $r = \min(k,h)$.

Dado $(p,q) \in X\times Y$, sean (x,U) una carta local alrededor de p e (y,V) una alrededor de q. Consideremos la función:

$$x\times y : U\times V \to x(U)\times y(V)$$

dada por:

$$x\times y(p',q') = (x(p'),\ y(q'))$$

Esta función es claramente biyectiva y es continua por serlo en cada coordenada.

Por otra parte, la inversa de $x \times y$ es $x^{-1} \times y^{-1}$ que es continua por el mismo argumento. Entonces $x \times y$ es un homeomorfismo del abierto $U \times V$ de $X \times Y$ sobre el abierto $x(U) \times y(V)$ de R^{n+m} (desde luego $X \times Y$ se considera con la topología producto). Si $(\overline{x}, \overline{U})$, $(\overline{y}, \overline{V})$ son otras cartas alrededor de p y q respectivamente, entonces

$$(x \times y) \circ (\overline{x} \times \overline{y})^{-1} = (x \circ \overline{x}^{-1}) \times (y \circ \overline{y}^{-1})$$

como se puede verificar inmediatamente, resultando por lo tanto de clase C^r como producto de tales. De esta manera vemos que el producto de una variedad de clase C^k y dimensión n por una variedad de clase C^h y dimensión m tiene una estructura diferenciable de clase C^r, $r = \min(k,h)$, y dimensión n+m. Cuando hablemos de variedad producto nos estaremos refiriendo a esta estructura.

Es útil aquí, como en tantos casos, tener una idea más breve, aunque más imprecisa, del porqué del resultado obtenido. Si X tiene dimensión n, entonces sus puntos se pueden representar por coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ y, análogamente, los puntos de Y se pueden representar por coordenadas $y_1, \ldots, y_m$.

Entonces los puntos $X \times Y$ se pueden representar por las coordenadas $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$. Si tenemos otras coordenadas $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ para X e $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m$ para Y, sabemos que las $\overline{x}_i$ son funciones C^k de las x_j y las y_i son funciones C^h de las y^j. Cómo para $X \times Y$ tenemos las coordenadas $\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n$, $\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_m$, debemos ver cómo dependen estas coordenadas de $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$. Por ejemplo, una $\overline{x}_i$ depende en forma C^k de las primeras n (o sea, de $x_1,\dots,x_n$) y en forma C^∞ de las últimas m (pues no depende de ellas); en cambio, una $\overline{y}_i$ depende en forma C^∞ de las primeras n (pues no depende de ellas) y en forma C^h de las últimas (o sea, de $y_1,\dots,y_m$).

Entonces, todo lo que podemos decir es que $\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n$, $\overline{y}_1,\dots,\overline{y}_m$ dependen en forma C^r, $r = \min(h,k)$, de $x_1,\dots,x_n$, $y_1,\dots,y_m$.

4. Con los dos ejemplos anteriores, el toro

$$T = S^1 \times S^1$$

resulta una variedad diferenciable de la clase que se quiera y de dimensión 2.

Más generalmente, el toro n-dimensional, producto de n copias de S^1, es una variedad diferenciable de dimensión n.

5. El conjunto $R^{m\times n}$ de las matrices de m filas y n columnas no es otra cosa que $R^{m.n}$ como se puede ver poniendo las filas de una matriz una a continuación de la otra. Entonces según vimos en el Ejemplo 1, es una variedad diferenciable de la clase que se quiera y dimensión n.m.

6. El conjunto $GL(n,R)$ de todas las matrices $n\times n$ inversibles es un abierto de $R^{n\times n}$ como imagen inversa del abierto

$R \setminus \{0\}$ por la función (continua) determinante y tiene por tanto una estructura diferenciable de clase C^k, cualquiera sea el k, y de dimensión n^2. Este hecho es general: si X es una variedad de clase C^k y dimensión n, entonces todo abierto W de X tiene una estructura diferenciable de igual clase y dimensión (si (x, U) es una carta de atlas de X, se considera $(x', U \cap W)$, donde x' es la restricción de x a $U \cap W$, como carta local de W).

Ejercicios

1. Probar que una variedad topológica es:

   a) localmente arco-conexa

   b) localmente compacta

   c) regular (si es Hausdorff)

2. Probar que en una variedad topológica de dimensión n, todo punto tiene un entorno homeomorfo a:

   a) R^n

   b) $V_1(0)$

   c) $\overset{\circ}{I}^n = \{x \in R^n : -1 < x_i < 1$ para todo $i\}$

3. Supongamos que un espacio topológico X tiene la propiedad: "Dado $p \in X$ existe un entorno U de p tal que U es homeomorfo a un abierto de R^n". Probar que U es necesariamente abierto (Sugerencia: usar Invariancia del Dominio).

4. Probar que un subconjunto de una variedad topológica de dimensión n es una variedad topológica de dimensión n (con la topología inducida) si y sólo si es abierto.

5. Probar que el conjunto formado por los dos ejes coordenados en R^2 con la topología inducida no es una variedad topológica.

6. a) Probar que S^n tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión n y clase C^∞ usando como cartas las proyecciones estereográficas sobre el hiperplano $x_{n+1} = 0$ desde los dos polos.

   b) Probar que el único atlas máximo que contiene al dado en la parte a) es el mismo que contiene al atlas del ejemplo 2 (y por lo tanto ambos atlas definen la misma estructura diferenciable).

7. Probar que estar C^k-relacionados no es en general una relación de equivalencia entre las cartas locales.

2. APLICACIONES ENTRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Debido a que las variedades diferenciables son localmente homeomorfas a los espacios numéricos, muchas propiedades de estos espacios se trasladan inmediatamente a las variedades diferenciables. Vamos a considerar el caso de las aplicaciones de abiertos de R^n en R^m que vimos en el capítulo 1.

DEFINICION 2.9. Sean X una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n e Y una variedad diferenciable de clase C^s y dimensión m.

Si $f:X \to Y$ es una función y $t \leq s,k$, diremos que f es diferenciable de clase C^t en $a \in X$ si existen cartas locales (x,U) alrededor de a, (y,V) alrededor de f(a) tales que $f(U) \subset V$ y la función

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to y(V)$$ (representante local de f)

sea diferenciable de clase C^t en $x(a)$ (esto último como función de un abierto de R^n en R^m; ver capítulo 1).

Veamos que esta definición no depende de la carta local elegida, es decir, si se cumple para una carta alrededor de a y otra alrededor de f(a), entonces se cumple para cualquier carta en a y cualquier carta en f(a) (siempre que f mande el dominio de la primer carta dentro del dominio de la segundo). Sean entonces (x,U), (y,V) como en la definición y sean $(\overline{x},\overline{U})$ una carta en a, $(\overline{y},\overline{V})$ una carta en f(a) tales que $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$. Por lo tanto

$$\overline{y} \circ f \circ \overline{x}^{-1} = \overline{y} \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ (x^{-1} \circ x) \circ \overline{x}^{-1} =$$

$$= (\overline{y} \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ \overline{x}^{-1})$$

siendo esta relación válida en $\overline{x}(U \cap \overline{U})$. Por lo tanto, en un entorno de $\overline{x}(a)$, la función $\overline{y} \circ f \circ \overline{x}^{-1}$ puede escribirse como composición de tres funciones de clases s, t y k respectivamente. Pero como pedimos $t \leq s,k$, las tres funciones son de clase C^t y lo mismo vale para su composición, es decir para $\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$. Luego $\bar{y} \circ f \circ \bar{x}^{-1}$ es de clase C^t en $\bar{x}(a)$, que es lo que queríamos probar.

Naturalmente, diremos que es diferenciable de clase C^t en X si lo es en cada punto $a \in X$.

La función $y \circ f \circ x^{-1}$, como es una función C^t de un abierto de R^n en R^m, equivale a dar m funciones de clase C^t de dicho abierto en R, o sea se puede poner en la forma

$$y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

con las f_i de clase C^t (más precisamente, es $f_i = \pi_i \circ y \circ f \circ x^{-1}$ donde π_i es la proyección de R^n a la i-ésima coordenada).

Tanto en estos casos como en variedades, función diferenciable (a secas) significará función diferenciable de clase C^∞ (entre variedades C^∞, desde luego).

DEFINICION 2.10. Sean X, Y variedades diferenciables; una función $f:X \to Y$ se dice <u>difeomorfismo</u> si es biyectiva, diferenciable y de inversa diferenciable.

Los difeomorfismos entre variedades diferenciables juegan en la Geometría Diferencial el mismo papel que los homeomorfismos entre espacios topológicos en la topología. A Dos variedades difeomorfas las miramos como definiendo esencialmente una misma variedad. Pero debemos tener cuidado con una posible confusión: si sobre un espacio X tenemos dos estructuras diferenciables (dos atlas máximos) y esas estructuras son difeomorfas, eso no significa que los atlas máximos coincidan. (Para un contraejemplo, ver ejercicio 1 de esta sección). De la misma manera, sobre un mismo espacio podemos dar dos topologías homeomorfas pero no coincidentes.

Sean ahora X,Y variedades diferenciables y sea $f:X \to Y$ diferenciable. Por la definición, dado $a \in X$ existen (x,U) carta local en a, (y,V) carta local en f(a) tales que $y \circ f \circ x^{-1}$ es diferenciable en x(a).

DEFINICION 2.11. Llamamos <u>rango de f en a</u> al rango de la matriz jacobiana de $y \circ f \circ x^{-1}$ en x(a), es decir, al rango de $D(y \circ f \circ x^{-1})(x(a))$.

Recordamos que los elementos de la matriz jacobiana $D(y \circ f \circ x^{-1})(x(a))$ son los números $D_i(y^j \circ f \circ x^{-1})(x(a))$, donde $y^i = \pi^i \circ y$ (o sea las derivadas parciales de las funciones componentes de $y \circ f \circ x^{-1}$). Emplearemos la siguiente notación sistemáticamente:

$$\left.\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^j}\right|_a = D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})(x(a))$$

Ya que hemos definido el rango de una función en un punto eligiendo un par de cartas locales, tenemos que ver que dicho rango no depende de las cartas elegidas. Para ello sean $(\overline{x},\overline{U})$ carta en a, $(\overline{y},\overline{V})$ carta en f(a) tales que $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$. Entonces, por la regla de la cadena:

$$D(\overline{y}\circ f\circ \overline{x}^{-1})(\overline{x}(a)) = D(\overline{y}\circ y^{-1}\circ y \overset{f\circ}{\circ} x^{-1}\circ x\circ \overline{x}^{-1})(\overline{x}(a)) =$$

$$= D(\overline{y}\circ y^{-1})(y(f(a))).D(y\circ f\circ x^{-1})(x(a)).$$

$$.D(x\circ \overline{x}^{-1})(\overline{x}(a))$$

(producto de matrices). Observemos que la primer matriz y la tercera del segundo miembro son inversibles y por lo tanto, por un resultado del álgebra lineal, el rango de $D(\overline{y}\circ f\circ \overline{x}^{-1})(\overline{x}(a))$ es igual al rango de $D(y\circ f\circ x^{-1})(x(a))$. Esto prueba la independencia del concepto "rango de f en a" respecto de la elección de las cartas.

Es interesante notar que si, al igual que en el ejemplo 3 de la sección anterior, disminuimos un poco el formalismo, el hecho anterior aparece muy claro. En efecto, si en las coordenadas $x_1,\ldots,x_n$ e $y_1,\ldots,y_m$ la función la escribimos como $y_i = f_i(x_1,\ldots,x_n)$ y en las coordenadas $\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n$ e $\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_m$ como $\overline{y}_i = \overline{f}_i(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n)$, entonces

$$\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial \overline{x}_j} = \sum_{k,h=1}^{m,n} \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \overline{x}_j}$$

y nuevamente vemos que $\left(\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial y_k}\right)$ y $\left(\frac{\partial x_h}{\partial \overline{x}_j}\right)$ son inversibles y por lo tanto el rango de $\left(\frac{\partial \overline{y}_i}{\partial \overline{x}_j}\right)$ es igual al rango de $\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_h}\right)$

Vamos a ver ahora que, si conocemos el rango de una función, podemos encontrar cartas locales en las cuales f tiene una expresión muy sencilla. La demostración es totalmente técnica y puede resultar un poco pesada, pero veremos luego la utilidad del resultado.

TEOREMA 2.12. (Forma local normal) a) Sea $f:X^n \to Y^m$ una función diferenciable de rango k en $b \in X^n$. Existen entonces cartas locales (x,U) en b, (y,V) en $f(b)$, con $f(U) \subset V$ tales que

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^k,\psi^{k+1}(a),\ldots,\psi^m(a))$$

donde $a = (a^1,\ldots,a^n)$ es cualquier elemento de $x(U)$ y $\psi^{k+1},\ldots,\psi^m$ son funciones diferenciables de $x(U)$ en R.

b) Si $f:X^n \to Y^m$ es diferenciable de rango k <u>en un entorno</u> de $b \in X^n$, entonces existen cartas locales (x,U) en b, (y,V) en $f(b)$, con $f(U) \subset V$, tales que

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^k,0,\ldots,0)$$

DEMOSTRACION. a) Tomamos cartas locales cualesquiera (x,U) en b, (y,V) en $f(b)$ tales que $f(U) \subset V$. Sabemos que el rango de la matriz $\left(\frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j}\right)$ es k y por lo tanto dicha matriz contiene un menor $k\times k$ de determinante no nulo, digamos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial y^{i_1} \circ f}{\partial x^{j_1}} & \cdots & \frac{\partial y^{i_k} \circ f}{\partial x^{j_1}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial y^{i_1} \circ f}{\partial x^{j_k}} & & \frac{\partial y^{i_k} \circ f}{\partial x^{j_k}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{en } b$$

Vamos ahora a reordenar las coordenadas de manera que dicho menor sea el formado por las primeras k filas y las primeras k columnas.

Para ello, sean $\{i_{k+1},\dots,i_m\}$, $\{j_{k+1},\dots,j_n\}$ los complementarios de $\{i_1,\dots,i_k\}$ y $\{j_1,\dots,j_k\}$ respectivamente (por ejemplo, con orden creciente:

$i_{k+1} < i_{k+1} < \dots < i_m$ y lo mismo para j). Sean $\pi : R^n \to R^n$, $\pi' : R^m \to R^m$ las permutaciones

$$\pi(x_1,\dots,x_n) = (x_{j_1},\dots,x_{j_n})$$
$$\pi'(y_1,\dots,y_m) = (y_{i_1},\dots,y_{i_m})$$

y sean:

$$\overline{x} = \pi \circ x, \quad \overline{y} = \pi' \circ y$$

Entonces $(\overline{x},U)$ es admisible por el atlas de X^n, pues $\overline{x} \circ x^{-1} = \pi \circ x \circ x^{-1} = \pi^{-1}$, y también $(\overline{y},V)$ es admisible por el atlas de Y^m por ser $\overline{y} \circ y^{-1} = \pi' \circ y \circ y^{-1} = (\pi')^{-1}$.

En otras palabras, $(\overline{x},U)$ es carta en b, $(\overline{y},V)$ lo es en f(b) y además

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^1} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^k} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^k} \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{en } b$$

Sea ahora $u : U \to R^{n}$ definida de la siguiente manera:

$$u(q) = (\bar{y}^1 \circ f(q), \ldots, \bar{y}^k \circ f(q), \bar{x}^{k+1}(q), \ldots, \bar{x}^n(q))$$

o sea:

$$u^1 = \bar{y}^1 \circ f, \ldots, u^k = \bar{y}^k \circ f, \; u^{k+1} = \bar{x}^{k+1}, \ldots, u^n = \bar{x}^n$$

(recordamos que $\bar{y}^j = \pi^j \circ \bar{y}$, $\bar{x}^i = \pi^i \circ \bar{x}$, donde π^j, π^i son las proyecciones a la j-sima e i-sima coordenada respectivamente).

Queremos que u sea un nuevo sistema de coordenadas y tenemos entonces que examinar $u \circ \bar{x}^{-1}$. Es:

$$J(u \circ \bar{x}^{-1})(\bar{x}(b)) = \det \left[\begin{array}{ccc|ccc} \dfrac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^1} & & & \\ \vdots & & & & 0 & \\ \dfrac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^k} & \cdots & \dfrac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^k} & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & X & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^1} & \cdots & \frac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \bar{y}^1 \circ f}{\partial \bar{x}^k} & & \frac{\partial \bar{y}^k \circ f}{\partial \bar{x}^k} \end{vmatrix} . \det I \neq 0 \ (I = \text{identidad})$$

Resulta del teorema de la función inversa que $u \circ \bar{x}^{-1}$ es un difeomorfismo entre entornos abiertos U' de $\bar{x}(b)$ y U'' de $u(b)$. Por lo tanto, $(u, u^{-1}(U''))$ es una carta admisible por el atlas de X^n.

Afirmamos que las cartas $(u, u^{-1}(U''))$ en b e $(\bar{y}, V)$ son las buscadas. En efecto, dado $q \in u^{-1}(U'')$, sea $u(q) = (a^1,\ldots,a^n)$. Entonces

$$\begin{aligned} (\bar{y} \circ f \circ u^{-1})(a^1,\ldots,a^n) &= \bar{y} \circ f(u^{-1}(a^1,\ldots,a^n)) = \\ &= \bar{y} \circ f(q) = \\ &= (\bar{y}^1 \circ f(q),\ldots,y^m \circ f(q)) = \\ &= (a^1,\ldots,a^k,\ldots) \end{aligned}$$

lo que prueba nuestra afirmación

b) Si ahora f tiene rango k en un entorno de $b \in X^n$, entonces en particular podemos aplicar el resultado a) para considerar cartas locales (x,U) en b, (y,V) en $f(b)$, con $f(U) \subset V$, tales que

$$y \circ f \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^k,\psi^{k+1}(a),\ldots,\psi^m(a))$$

para todo $a = (a^1,\ldots,a^n) \in x(U)$. Entonces para $q \in U$:

$$\left(\frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j}\right)_q = (D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})(x(q))) = \left[\begin{array}{c|ccc} I & & (0) & \\ \hline & D_{k+1}\psi^{k+1} & \ldots & D_{k+1}\psi^m \\ X & \vdots & & \\ & D_n\psi^{k+1} & \ldots & D_n\psi^m \end{array}\right]_q$$

Pero siendo la matriz dada de rango k en U, entonces los términos que aparecen en el ángulo inferior derecho deben ser identicamente nulos en U, es decir $D_h \psi^\ell = 0$ para $k+1 \leq h \leq m$, $k+1 \leq \ell \leq m$. En efecto, si $D_h \psi^\ell$ es no nula en un punto de U, entonces el menor formado por las filas $1,2,\ldots,k,h$ y las columnas $1,2,\ldots,k,\ell$, tiene determinante distinto de cero. Por lo tanto, será:

$$\psi^j(a^1,\ldots,a^n) = \Psi^j(a^1,\ldots,a^k) \qquad (j \geq k+1)$$

para ciertas funciones diferenciables Ψ^j (pues ψ^j sólo depende de las primeras k variables).

Definimos ahora $v: V \to R^m$ de la siguiente manera: si $(y(q) = (y^1(q),\ldots,y^m(q))$, entonces

$$\begin{aligned} v(q) = (&y^1(q),\ldots,y^k(q),y^{k+1}(q) - \\ &- \Psi^{k+1}(y^1(q),\ldots,y^k(q)),\ldots,y^m(q) - \\ &- \Psi^m(y^1(q),\ldots,y^k(q))) \end{aligned}$$

o, dicho de otra manera:

$$v^1 = y^1,\ldots,v^k = y^k,\ v^{k+1} = y^{k+1} - \Psi^{k+1}\circ(y^1,\ldots,y^k),\ldots,$$
$$v^m = y^m - \Psi^m\circ(y^1,\ldots,y^k)$$

Queremos usar v como un nuevo sistema de coordenadas y debemos entonces examinar $v\circ y^{-1}$. Es:

$$v\circ y^{-1}(a^1,\dots,a^m) = v(y^{-1}(a^1,\dots,a^m)) =$$
$$= (a^1,\dots,a^k,a^{k+1} - \bar{\psi}^{k+1}(a^1,\dots,a^k),\dots,a^m - \bar{\psi}^m(a^1,\dots,a^k))$$

como es inmediato verificar. Calculemos su jacobiano:

$$J(v\circ y^{-1})_p = \det(D(v\circ y^{-1})(y(p))) = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ X & I \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Y por el teorema de la función inversa, $v\circ y^{-1}$ es un difeomorfismo de un entorno U' de $y(f(b))$ sobre un entorno U" de $v(f(b))$. Por lo tanto, $(v, v^{-1}(U''))$ es una carta local en $f(b)$. Veamos como queda f en los sistemas de coordenadas $x^1,\dots,x^n$ y $v^1,\dots,v^m$.

$$\begin{aligned} v\circ f\circ x^{-1}(a^1,\dots,a^n) &= v\circ y^{-1}\circ y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\dots,a^n) = \\ &= v\circ y^{-1}(a^1,\dots,a^k,\psi^{k+1}(a),\dots,\psi^m(a)) = \\ &= (a^1,\dots,a^k,\psi^{k+1}(a)-\bar{\psi}^{k+1}(a^1,\dots,a^k),\dots \\ &\dots,\psi^n(a)-\bar{\psi}^m(a^1,\dots,a^k)) = \\ &= (a^1,\dots,a^k,0,\dots,0) \end{aligned}$$

lo que completa la demostración ///

DEFINICION 2.13. Sean X^n, Y^m variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente con $n \leq m$. Una función $f: X^n \to Y^m$ se dice <u>inmersión</u> si es diferenciable y si el rango de f es igual a n en todo punto de X^n.

Como consecuencia del teorema de la forma local normal, toda inmersión se puede ver en coordenadas locales como la inclusión de R^n en R^m, es decir

$$y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0)$$

Esto prueba que <u>toda inmersión es localmente inyectiva</u>, es decir, todo $b \in X^n$ tiene un entorno en el cual f es inyectiva (pues si (x,U), (y,V) son las cartas en las cuales vale la igualdad anterior, sean $p,q \in U$ tales que $f(p) = f(q)$. Si $x(q) = (a^1,\ldots,a^n)$ y $x(p) = (c^1,\ldots,c^n)$, entonces $y\circ f\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = y\circ f(q) = y\circ f(p) =$ $= y\circ f\circ x^{-1}(c^1,\ldots,c^n)$, de donde $(a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0) =$ $= (c^1,\ldots,c^n,0,\ldots,0)$ y por tanto $x(q) = x(p)$. Por ser x homeomorfismo, en particular es inyectiva y entonces $p = q$).

DEFINICION 2.14. Una función $f:X^n \to Y^m$ se dice <u>sumersión</u> (imbedding, plongement) si es una inmersión y si es un homeomorfismo con su imagen (es decir, $f:X^n \to f(X^n) \subset Y^m$ es homeomorfismo dándole a $f(X^n)$ la topología inducida por Y^m).

Sabemos que la inmersión es localmente inyectiva; desde luego, si la inmersión es sumersión, es globalmente inyectiva. La recíproca no es cierta en general, una inmersión puede ser globalmente inyectiva sin ser sumersión (ver Ejercicio 5 de esta sección).

Nota. Las definiciones de "inmersión" (en francés e inglés "immersión") y de "sumersión" (en francés "plongement", en inglés "imbedding") pueden diferir de un autor a otro. Un análisis comparado de las distintas definiciones se encuentra en NAVEIRA [19].

Ejercicios

1. Consideremos R con el atlas formado por la única carta (id, R) y si $f(x) = x^3$, consideremos R con el atlas formado por la única carta (f,R). Probar que (f, R) no es admisible por (id, R) y deducir que los atlas maximales son distintos. Probar, sin embargo, que $f:R \to R$ es un difeomorfismo (el primer R con la carta (f, R), el segundo con (id, R)).

2. Sean X, Y variedades diferenciables y consideremos la siguiente definición: "$f:X \to Y$ es diferenciable si para todas las cartas (x,U) en X, (y,V) en Y tales que $f(U) \subset V$ es $y \circ f \circ x^{-1}$ diferenciable". Probar que $f:R \to S^1$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (\cos \frac{1}{t}, \ \text{sen} \ \frac{1}{t}) & \text{si} \quad t \neq 0 \\ (1, 0) & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

satisface esa definición pero f no es continua en 0.

3. Probar que una inmersión entre variedades de la misma dimensión es necesariamente una función abierta.

4. Si $f:M \to N$ es una inmersión entre dos variedades de igual dimensión y M es compacta y N conexa, entonces f es suryectiva.

5. a) Probar que $f:R^2/\{0\} \to R^2$; $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ es una inmersión no globalmente inyectiva.

b) Sean $W = (0,1) = \{t:0 < t < 1\}$ y $V = (2,3) = \{t:2 < t < 3\}$. Sea $f:W \cup V \to R^2$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} (t,0) & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ (\frac{1}{2}, t-2) & \text{si} \quad 2 < t < 3 \end{cases}$$

Probar que f es una inmersión globalmente inyectiva que no es sumersión.

3. SUBVARIEDADES DIFERENCIABLES

DEFINICION 2.15. Sean M, X variedades diferenciables de dimensiones n y m respectivamente con $n \leq m$ y $M \subset X$. Decimos que M es una <u>subvariedad inmersa</u> o simplemente <u>subvariedad</u> de X si la inclusión $i:M \to X$ es una inmersión

DEFINICION 2.16. En las mismas condiciones, decimos que M es <u>subvariedad sumergida</u> de X si la inclusión $i:M \to X$ es una sumersión.

Observemos que si M es subvariedad de X, entonces la topología de $i(M)$ (que es la inducida por X) no será en general igual a la topología de M (que tiene una estructura diferenciable propia y por tanto una topología propia).

Pero al pedir que i sea una inmersión, estamos pidiendo en particular que i sea diferenciable, luego continua. Entonces la topología propia de M es más fina que la inducida por X (la contiene, tiene más abiertos). Brevemente, topología de $i(M) \subset$ topología de M. En cambio, si M es subvariedad sumergida, topología de $i(M)$ = topología de M, y ésta es exactamente la diferencia entre subvariedades y subvariedades sumergidas (pues la inclusión es siempre globalmente inyectiva).

La noción de subvariedad sumergida tiene una importante equivalencia:

TEOREMA 2.17. Sea X una variedad diferenciable de dimensión m y sea M un subconjunto de X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) M tiene una estructura de variedad diferenciable con la cual resulta subvariedad sumergida de X de dimensión n.

ii) Dado $b \in M$, existe una carta local (x,U) alrededor de b en X tal que

$$x(U \cap M) = \{(x^1,\ldots,x^m) \in x(U): x^{n+1}=\ldots=x^m = 0\}$$

DEMOSTRACION. i) $\Rightarrow$ ii)

Consideremos a M con la estructura diferenciable que, por hipótesis, tiene.

Por la forma local normal (Teorema 2.12), sabemos que dado $b \in M$ existen cartas locales (y,V) en M alrededor de b, (x,W) en X alrededor de $i(b) = b$ tales que $x \circ i \circ y^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0)$ en $y(V)$ (y además $i(V) = V \subset W$), o sea:

$$x \circ y^{-1}(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0) \qquad (1)$$

Si $j:R^n \to R^m$ es la inclusión $j(a^1,\ldots,a^n) = (a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0)$, lo anterior se expresa diciendo que $x \circ y^{-1} = j$ en $y(V)$ o sea $x = j \circ y$ en V. En consecuencia:

$$x(q) = (y(q),0,\ldots,0) \qquad \text{para } q \in V \qquad (2)$$

Como V es abierto en M y M tiene la topología inducida, será $V = V' \cap M$ con V' abierto en X. Luego:

$$V = V' \cap W = V' \cap M \cap W = (V' \cap W) \cap M$$

Llamando $W' = V' \cap W$ resulta (x,W') carta alrededor de b en X y además en las cartas (y,V), (x,W') vale (1) y por lo tanto (2) (además de ser $W' \cap M = V$).

El W' encontrado no va a ser todavía el U buscado (sugerimos hacer un dibujo del caso $X = W' = R^2$, $M = V = \{(t,0):0 < t < 1\}$; en este ejemplo vale $W' \cap M = V$ pero no la afirmación ii) si como U tomamos W').

Para achicar convenientemente W' consideramos:

$$\begin{aligned} U &= x^{-1}(x(W') \cap (y(V) \times R^{m-n})) = \\ &= x^{-1}(x(W')) \cap x^{-1}(y(V) \times R^{m-n}) = \\ &= W' \cap x^{-1}(y(V) \times R^{m-n}) \end{aligned}$$

(sugerimos notar como queda U en el ejemplo anteriormente mencionado)

Ahora que hemos encontrado U, probemos nuestra afirmación es decir:

$$x(U \cap M) = \{(x^1,\dots,x^m) \in x(U): x^{n+1}=\dots=x^m = 0\} \quad (3)$$

Primeramente notemos que

$$U \cap M = W' \cap x^{-1}(y(V) \times R^{m-n}) \cap M =$$
$$= W' \cap M \cap x^{-1}(y(V) \times R^{m-n}) =$$
$$= V \cap x^{-1}(y(V) \times R^{m-n})$$

Pero siendo $x(V) = y(V) \times \{0\}$ por (2), entonces $x(V) \subset y(V) \times R^{m-n}$ y entonces $V \subset x^{-1}(y(V) \times R^{m-n})$. En definitiva:

$$U \cap M = V$$

Probemos ahora la doble inclusión de los conjuntos que aparecen en (3).

Si $a \in x(U \cap M)$, será $a = x(q)$ con $q \in U \cap M = V$. Luego, por (2):

$$a = x(q) = (y(q),0,\dots,0)$$

y entonces a está en x(U) y sus últimas m-n coordenadas son cero, lo cual prueba una inclusión. Para la otra, sea $a = x(q)$ con $q \in U$, $a = (a^1,\dots,a^n,0,\dots,0)$. Por la definición de U, resulta $q \in x^{-1}(y(V) \times R^{m-n})$ o sea $a = x(q) \in y(V) \times R^{m-n}$. Luego $a = (y(q'), c^{n+1},\dots,c^m)$ y entonces $c^{n+1} = \ldots = c^m = 0$. Resulta entonces $a = (y(q'),0,\ldots,0) = x(q')$ por (2) y por la inyectividad de x, $q = q'$. En definitiva, $q \in V = U \cap M$, lo cual prueba la otra inclusión

ii) $\Rightarrow$ i)

Dado $b \in M$, sea (x,U) la carta alrededor de b en X tal que

$$x(U \cap M) = \{(x^1,\ldots,x^m) \in x(U): x^{n+1} = \ldots = x^m = 0\}$$

Sea $\pi: R^n \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \to R^n$ definida por $\pi(a^1,\ldots,a^n,0,\ldots,0) = (a^1,\ldots,a^n)$.

Claramente π es un homeomorfismo del primer espacio con la topología inducida por R^m sobre R^n. Definimos $(\overline{x},\overline{U})$ como:

$$\overline{U} = U \cap M$$

$$\overline{x} = \pi \circ x$$

Entonces $\overline{x}: \overline{U} \to \overline{x}(\overline{U})$ es un homeomorfismo de $\overline{U}$ sobre un abierto de R^n; en efecto, $\overline{x}$ es una composición de homeomorfismos y

$$\overline{x}(\overline{U}) = \pi \circ x(U \cap M) = \pi(x(U) \cap (R^n \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}))$$

y $x(U) \cap R^n \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$ es un abierto de $R^n \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}$. Siendo π homeomorfismo, resulta $\overline{x}(\overline{U})$ abierto de R^n.

Por último, si (y,V) es otra de esas cartas, entonces

$$\overline{x} \circ \overline{y}^{-1} = \pi \circ x \circ y^{-1} \circ \pi^{-1}$$

Podemos considerar π^{-1} como función de R^n en R^m y resulta diferenciable; sabemos que $x\circ y^{-1}$ también lo es y π, (quedarse con las primeras coordenadas), siempre lo es. Luego $\overline{x}\circ\overline{y}^{-1}$ es diferenciable.

Hemos munido a M, entonces, de una estructura de variedad diferenciable de dimensión n. Resta ver que, con esa estructura, la inclusión $i:M \to X$ es una inmersión, o sea, tiene rango n en todos sus puntos. Pero vista en coordenadas, la inclusión es: $x\circ i\circ\overline{x}^{-1} = x\circ\overline{x}^{-1} = x\circ x^{-1}\circ\pi^{-1} = \pi^{-1}$, y $\pi^{-1}(a^1,\dots,a^n) = (a^1,\dots,a^n,0,\dots,0)$ claramente tiene matriz jacobiana de rango n ///

La demostración del Teorema 2.17 es, desde luego, la indicada. Pero la necesidad de hacer detallada la demostración quizás oculte la idea del porqué de la equivalencia de i) y ii) que es muy sencilla: si X es variedad diferenciable y M subvariedad sumergida, sea $x_1,\dots,x_m$ un sistema de coordenadas en X. Como $i:M \to X$ tiene rango n, entonces por el teorema de la función implícita podremos despejar m-n variables en función de las restantes. Cambiando el orden, si es preciso, podemos suponer $x_{n+1} = f_{n+1}(x_1,\dots,x_n),\dots,x_m = f_m(x_1,\dots,x_n)$ en M. Haciendo el cambio de coordenadas: $\overline{x}_1 = x_1,\dots,\overline{x}_n = x_n$; $\overline{x}_{n+1} = x_{n+1}-f_{n+1}(x_1,\dots,x_n),\dots,\overline{x}_m = x_m-f_m(x_1,\dots,x_n)$, resulta que M puede quedar descripta por $\overline{x}_{n+1} = \dots = \overline{x}_m = 0$.

Para terminar con las generalidades sobre subvariedades, demostramos el siguiente teorema que es el de mayor aplicación:

TEOREMA 2.18. Sea $f:X^n \to Y^m$ una función diferenciable de rango $m \leq n$ en todos los puntos de $f^{-1}(a)$ para un cierto $a \in Y^m$. Entonces $f^{-1}(a)$ es subvariedad sumergida cerrada de X^n de dimension n-m.

DEMOSTRACION. Es $f^{-1}(a)$ cerrada por ser la imagen inversa del cerrado $\{a\}$ por la función continua f. Por otra parte, dado $p \in f^{-1}(a)$, la matriz $D(y\circ f\circ x^{-1})(x(p))$ tiene rango m, el máximo posible. Eso significa que hay un determinante m×m de derivadas parciales que es no nulo. Por la continuidad del determinante, será distinto de cero en un entorno de p y por tanto f tendrá rango m en ese entorno. En definitiva, f tendrá rango m en un entorno de $f^{-1}(a)$ y podemos aplicar el Teorema 2,12 sobre la forma local normal para concluir que, dado $p \in f^{-1}(a)$, existen cartas locales (x,U) alrededor de p, (y,V) alrededor de $f(q) = a$ para las cuales

$$y\circ f\circ x^{-1}(b^1,\ldots,b^n) = (b^1,\ldots,b^m) \qquad (1)$$

Sea $y(a) = (a^1,\ldots,a^m)$; entonces $q \in U \cap f^{-1}(a)$ sii $q \in U$ y $f(q) = a$.

Eso vale sii $q \in U$ y además $y\circ f(q) = (a^1,\ldots,a^m)$ o sea $q \in U$ y además

$$y\circ f\circ x^{-1}(x(q)) = (a^1,\dots,a^m)$$

Si $x(q) = (x^1,\dots,x^n)$, entonces debe ser

$$y\circ f\circ x^{-1}(x^1,\dots,x^n) = (a^1,\dots,a^m)$$

o sea, por (1):

$$x^1 = a^1,\dots,x^m = a^m$$

En definitiva, $q \in U \cap f^{-1}(a)$ si y sólo si $q \in U$ y $x^1(q) = a^1,\dots,x^m(q) = a^m$.

Luego:

$$x(U \cap f^{-1}(a)) = \{(x^1,\dots,x^n) \in x(U): x^1 = a^1,\dots,x^m = a^m\}$$

Haciendo un cambio de coordenadas $\bar{x}^1 = x^1 - a^1,\dots,\bar{x}^m = x^m - a^m$, $\bar{x}^{m+1} = x^{m+1},\dots,\bar{x}^n = x^n$, resulta:

$$\bar{x}(U \cap f^{-1}(a)) = \{(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n) \in \bar{x}(U): \bar{x}^1 = 0,\dots,\bar{x}^m = 0\}$$

Si ahora hacemos $\bar{\bar{x}}^1 = \bar{x}^{m+1},\dots,\bar{\bar{x}}^{n-m} = \bar{x}^n$, $\bar{\bar{x}}^{n-m+1} = \bar{x}^1,\dots,\bar{\bar{x}}^n = \bar{x}^m$, resulta:

$$\bar{\bar{x}}(U \cap f^{-1}(a)) = \{(\bar{\bar{x}}^1,\dots,\bar{\bar{x}}^n) \in \bar{\bar{x}}(U): \bar{\bar{x}}^{n-m+1} = 0,\dots,\bar{\bar{x}}^n = 0\}$$

y basta aplicar el teorema 2.17 para concluir la demostración ///

COROLARIO 2.19. Si $F: R^n \to R^m$ es una función diferenciable con matriz jacobiana de rango $m \leq n$ en $F^{-1}(0,\dots,0) = \{(x^1,\dots,x^n): F(x^1,\dots,x^n) = 0\}$, entonces $F^{-1}(0,\dots,0)$ es subvariedad sumergida cerrada de R^n de dimensión $n-m$.

Este corolario cubre la mayor parte de las variedades diferenciables conocidas. Por ejemplo, vimos que S^n es una variedad diferenciable de dimensión n definiendo sus cartas locales. Con este corolario, ese hecho se demuestra muy fácilmente considerando la función $F:R^{n+1} \to R$ dada por

$$F(x^1,\ldots,x^{n+1}) = (x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 - 1$$

Entonces $S^n = F^{-1}(0)$ y como F tiene rango 1 en todos los puntos de S^n (verificar), resulta lo afirmado.

<u>Nota</u>: <u>Superficies en R^3</u> Una superficie en R^3 está dada, localmente, por ecuaciones de la forma

$$x_1 = x_1(u,v),\ x_2 = x_2(u,v),\ x_3 = x_3(u,v) \qquad (1)$$

que representan una sumersión de un abierto del plano u,v en R^3. Cada punto (x_1,x_2,x_3) de la superficie queda determinado por los valores u,v y para que estas coordenadas sean admisibles, también deberá ocurrir que, recíprocamente, a cada punto (x_1,x_2,x_3) corresponda un par u,v bien determinado. Esto significa que la matriz jacobiana de tipo 2 x 3 cuyas columnas son $\partial x_i/\partial u$, $\partial x_i/\partial v$ (i = 1,2,3), debe ser de rango 2. Esto es equivalente a decir que el producto vectorial $x_u \times x_v$ sea $\neq 0$, siendo x el vector cuyas componentes x_i están dadas por (1). Si ésto se cumple, las ecuaciones (1) pueden escribirse localmente en la forma $x_1 = x_1(x_2,x_3)$ (o en forma análoga, permutando los índices) que es la forma general de las subvariedades de R^3

dada por el Teorema 2.18. Los puntos para los cuales la matriz de las derivadas $\partial x_i/\partial u$, $\partial x_i/\partial v$ es de rango inferior a 2 son "puntos singulares" de la parametrización u,v. Puede ocurrir que por un cambio de parámetros $u = u(u',v')$, $v = v(u',v')$, el rango sea igual a 2, en cuyo caso la singularidad es, efectivamente, debida a la parametrización, no a la superficie. Si el punto es singular cualquiera que sea la parametrización, se dice que es singular de la superficie. En cambio el punto $u = 0$, $v = v_0$ de la esfera

$$x_1 = \text{sen } u \cos v, \; x_2 = \text{sen } u \text{ sen } v, \; x_3 = \cos u$$

es singular de la parametrización, no de la superficie. Basta, por ejemplo, hacer el cambio de parámetros $u' = \text{sen } u \cos v$, $v' = \text{sen } u \text{ sen } v$, respecto de las cuales las coordenadas del punto $(0,v_0)$ son $u' = 0$, $v' = 0$, que es un punto regular de las ecuaciones $x_1 = u'$, $x_2 = v'$, $x_3 = (1-(u')^2 - (v')^2)^{1/2}$.

Ejercicios

1. a) Si $f: X^n \to Y$ tiene rango constante k en un entorno de $f^{-1}(y)$, entonces $f^{-1}(y)$ es una subvariedad sumergida cerrada de dimensión n-k ó $f^{-1}(y)$ es vacía

b) Si $f: X^n \to Y$ tiene rango constante k en $f^{-1}(y)$, la conclusión de a) no es necesariamente cierta; dar un contraejemplo.

2. a) Probar que $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1,\ x_1 . x_2\ x_3\ x_4 = a^4\}$ es subvariedad sumergida de R^4 de dimensión 2 si $|a| \neq \frac{1}{2}$. ¿Qué pasa si $|a| = \frac{1}{2}$?

b) ¿Para qué valores de c es $\{(x,y) \in R^2 : x^2 - y^2 = c\}$ subvariedad de R^2?

c) $\{(x,y,z) \in R^3 : z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = c\}$ es una subvariedad de R^3 de dimensión 2 si $0 < c < 4$.

3. Dar un ejemplo en el que la familia de cartas locales dadas en el teorema 2.17, para ii), no se pueda extender a un atlas de X de tal manera que siga valiendo la propiedad ii) (Tomar $X = R^2$, $M = S^1$ menos un punto).

4. VARIEDADES DIFERENCIABLES CON BORDE

Para trabajar con variedades con borde, consideramos el siguiente espacio que responderá, localmente, a tal noción:

$$H^n = \{(x^1, \ldots, x^n) \in R^n : x^n \geq 0\}$$

Probamos ahora unas propiedades sencillas sobre este espacio.

PROPOSICION 2.20.

i) $\overset{o}{H}{}^n$ = Interior de $H^n = \{(x^1, \ldots, x^n) : x^n > 0\}$

ii) Fr H^n = Frontera de $H^n = \{(x^1, \ldots, x^n) : x^n = 0\}$

iii) Si V es abierto no vacío de H^n, entonces $V \cap \overset{o}{H}{}^n$ es un abierto no vacío de R^n

DEMOSTRACION.

i) Sea $(x^1,\ldots,x^n) \in R^n$ con $x^n > 0$; entonces la bola abierta de centro $(x^1,\ldots,x^n)$ y radio x^n está completamente contenida en H^n, lo cual prueba una inclusión. Para la otra inclusión, si $(x^1,\ldots,x^n)$ es un punto de H^n tal que x^n no es mayor que cero, entonces $x^n = 0$. Entonces, cualquiera sea $\delta > 0$, la bola abierta de centro $(x^1,\ldots,x^n)$ y radio δ tiene puntos que no están en H^n (por ejemplo, $(x^1,\ldots,x^{n-1}, -\frac{1}{2}\delta)$), lo cual prueba la otra inclusión.

ii) $\mathrm{Fr}\, H^n = \overline{H^n} \cap (R^n - H^n)^- = H^n \cap (R^n - \overset{\circ}{H}{}^n)$

iii) Si V es abierto no vacío de H^n, entonces existe U abierto de R^n tal que $V = U \cap H^n$ (pues H^n se considera con la topología inducida por R^n).

Entonces

$$V \cap \overset{\circ}{H}{}^n = U \cap H^n \cap \overset{\circ}{H}{}^n = U \cap \overset{\circ}{H}{}^n$$

Debemos probar que $U \cap \overset{\circ}{H}{}^n \neq \emptyset$ suponiendo $U \cap H^n \neq \emptyset$. Si $x = (x^1,\ldots,x^n) \in U \cap H^n$ y $x^n > 0$, no hay nada que probar; si $x^n = 0$, sea $\delta > 0$ tal que la bola abierta de centro x y radio δ esté contenida en U (recordar que U es abierto de R^n). Entonces $(x^1,\ldots,x^{n-1}, +\frac{1}{2}\delta) \in U \cap \overset{\circ}{H}{}^n$, que resulta así no vacío ///

Siguiendo el esquema de variedades, definimos primero "variedad topológica con borde".

DEFINICION 2.21. Una variedad topológica con borde es un espacio topológico X tal que todo $p \in X$ tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de H^n.

Si $p \in X$ y X es una variedad topológica con borde, por definición existe un homeomorfismo $x: U \to x(U)$ donde U es un abierto que contiene a p y $x(U)$ es un abierto de H^n; el par (x, U) se denomina carta local de la variedad topológica con borde.

Nuevamente se nos plantea la posibilidad de que varíe el n para puntos distintos de la variedad o, incluso, para el mismo punto. El tratamiento es esencialmente el mismo que el hecho para variedades topológicas:

PROPOSICIÓN 2.22. i) Si un abierto no vacío de R^n es homeomorfo a un abierto de H^m, entonces $n = m$.

ii) Si un abierto no vacío de H^n es homeomorfo a un abierto de H^m, entonces $n = m$.

DEMOSTRACION. i) Sean U abierto de R^n, V abierto de H^m y sea $\varphi: U \to V$ el homeomorfismo supuesto. Sabemos que $V \cap \overset{\circ}{H}{}^m$ es un abierto no vacío de R^m y por lo tanto la restricción

$$\varphi:\varphi^{-1}(V \cap \overset{\circ}{H}{}^n) \to V \cap \overset{\circ}{H}{}^n$$

es un homeomorfismo entre un abierto de R^n y un abierto no vacío de R^m. Por el Corolario 2.3, resulta $n = m$.

ii) Sean U abierto de H^n, V abierto de H^m y sea $\varphi:U \to V$ el homeomorfismo supuesto. Como $U \cap \overset{\circ}{H}{}^n$ es abierto no vacío de R^n, la restricción

$$\varphi:U \cap \overset{\circ}{H}{}^n \to \varphi(U \cap \overset{\circ}{H}{}^n)$$

es un homeomorfismo de un abierto no vacío de R^n sobre un abierto de H^m.

Por el punto i) concluimos que $n = m$ ///

COROLARIO 2.23. Sea X una variedad topológica con borde y sea $p \in X$. Si (x,U), (y,V) son cartas locales en p con $x(U)$ abierto de H^n e $y(V)$ abierto de H^m, entonces $n = m$.

DEMOSTRACION. Pues entonces

$$y \circ x^{-1}:x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

es un homeomorfismo de un abierto de H^n sobre un abierto de H^m ///

En otras palabras, el n es el mismo en un punto de la variedad.

TEOREMA 2.24. Si X es una variedad topológica con borde conexa, entonces el n es el mismo para todos los puntos de la variedad.

DEMOSTRACION. Cambiando R^n por H^n y Corolario 2.4 por Corolario 2.23 en la demostración del Teorema 2.5, obtenemos una demostración de este teorema ///

Las mismas observaciones hechas inmediatamente después del Teorema 2.5 son válidas aquí y resulta entonces que las componentes conexas de una variedad topológica con borde son variedades topológicas con borde, y en cada componente el n es el mismo en todos sus puntos.

Sea ahora X una variedad topológica con borde; definimos

$$\text{Int } X = \text{Interior de } X = \{p \in X \colon p \text{ tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto de } R^n\}$$

$$\partial X = \text{Borde de } X = X - \text{Int } X.$$

PROPOSICION 2.25. Si X es una variedad topológica con borde de dimensión n, entonces

i) Int X es una variedad topológica (con la topología inducida) de dimensión n

ii) ∂X es una variedad topológica (con la topología inducida) de dimensión n-1.

DEMOSTRACION. i) Es consecuencia inmediata de la definicion

ii) Sea $p \in \partial X$; sabemos que hay una carta local (x,U) en p con $x(U)$ abierto de H^n. Afirmamos que

$$x(U \cap \partial X) = x(U) \cap \text{Fr } H^n$$

En efecto, si $q \in U \cap \partial X$ es tal que $x^n(q) > 0$, entonces $x(q) \in \overset{\circ}{H}{}^n$ y $\overset{\circ}{H}{}^n$ es homeomorfo a R^n. Luego $x^{-1}(x(U) \cap \overset{\circ}{H}{}^n)$ es un abierto de X al cual pertenece q y

$$x:x^{-1}(u(U) \cap \overset{\circ}{H}{}^n) \to x(U) \cap \overset{\circ}{H}{}^n$$

es un homeomorfismo de un abierto de X que contiene a q con un abierto de R^n, contra la suposición de que $q \notin \text{Int } X$.

Eso prueba una inclusión; para la otra, supongamos $x^n(q) = 0$. Si fuese $q \in \text{Int } X \cap U$, entonces existiría una carta local (y,V) en q con $y(V)$ abierto de R^n. Consideremos la función

$$x \circ y^{-1}:y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

El dominio $y(U \cap V)$ es un abierto de R^n pues y es homeomorfismo y $U \cap V$ es abierto en V. La imagen $x(U \cap V)$ está contenida en R^n, de modo que la función $x \circ y^{-1}$ va de un abierto de

R^n a R^n. Es claramente inyectiva y continua y por lo tanto, por invariancia del dominio (Teorema 2.2), $x(U \cap V)$ es abierto en R^n. Pero $x(U \cap V) \subset H^n$, luego $x(U \cap V) \subset \overset{\circ}{H}{}^n$. Esto se contradice con el hecho de ser $q \in U \cap V$ y $x^n(q) = 0$.

Habiendo probado que $x(U \cap \partial X) = x(U) \cap \mathrm{Fr}\, H^n$, observemos que el segundo miembro es un abierto de $\mathrm{Fr}\, H^n$; en efecto, como $x(U)$ es abierto de H^n, existirá un abierto W de R^n tal que $x(U) = W \cap H^n$. Pero entonces

$$x(U) \cap \mathrm{Fr}\, H^n = W \cap H^n \cap \mathrm{Fr}\, H^n = W \cap \mathrm{Fr}\, H^n$$

Por lo tanto, $x: U \cap \partial X \to x(U) \cap \mathrm{Fr}\, H^n$ es un homeomorfismo de un abierto de ∂X que contiene a p sobre un abierto de $\mathrm{Fr}\, H^n$. Como $\mathrm{Fr}\, H^n$ es homeomorfo a R^{n-1} y ésto se puede hacer para todo $p \in \partial X$, queda probada la Proposición ///

Si A es un subconjunto de R^n, no necesariamente abierto, una función $f: A \to R^m$ se dice de clase C^k en $x_0 \in A$ si existe un entorno abierto U de x_0 y una función $\overline{F}:U \to R^m$ de clase C^k tal que $\overline{F}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$.

Sea entonces X una variedad topológica con borde y sean (x,U), (y,V) dos cartas locales; decimos que están C^k-relacionadas si las funciones

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$
$$x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$$

son de clase C^k (en el sentido recién definido)

Es claro que la definición 2.6 y Teorema 2.7 se pueden repetir para el caso en que X sea una variedad topológica con borde. Por tanto podemos repetir la definición 2.8:

DEFINICION 2.26. Una <u>variedad diferenciable con borde de clase C^k y dimensión n</u> es el par formado por una variedad topológica con borde Hausdorff y de base numerable de dimensión n y un atlas maximal de clase C^k para la variedad.

PROPOSICION 2.27. Sea X una variedad diferenciable con borde de clase C^k y dimensión n. Entonces:

i) Int X es una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n.

ii) ∂X es una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión n-1.

DEMOSTRACION. i) Sea $p \in$ Int X y sea (x,U) una carta local en p. Vimos en la demostración de la Proposición 2.25 que $x(U \cap \partial X) = x(U) \cap \mathrm{Fr}\ H^n$. Siendo x biyectiva, $x(U \cap \mathrm{Int}\ X) = x(U \cap (X - \partial X)) = x(U) \cap \mathring{H}^n$. Pero $x(U) \cap \mathring{H}^n$ es abierto en R^n. Luego de toda carta local de un punto de Int X podemos conseguir una carta cuya imagen sea un abierto de R^n, simplemente achicando el abierto U (más precisamente considerando $U \cap \mathrm{Int}\ X$; notar que Int X es trivialmente abierto en X). Dos cartas locales de ese tipo estan C^k-relacionadas por definición de variedad con borde de clase C^k.

ii) Es $\mathrm{Fr}\ H^n$ homeomorfo a R^{n-1} a través de la función

$$\pi(x^1,\ldots,x^{n-1},0) = (x^1,\ldots,x^{n-1})$$

Según vimos en la Proposición 2.25, dada una carta local (x,U), la función

$$\bar{x} = \pi \circ x : U \cap \partial X \to \pi(x(U) \cap \mathrm{Fr}\ H^n) \subset R^{n-1}$$

es un homeomorfismo y su imagen es un abierto de R^{n-1}.

Si tenemos dos cartas de ese tipo,

(x,U), (y,V), entonces

$$\overline{x\circ y}^{-1} = \pi\circ x\circ y^{-1}\circ\pi^{-1}$$

Si $\overline{\pi}$ es la extensión de π a R^n, i.e., $\overline{\pi}(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^{n-1})$, $\overline{x\circ y}^{-1}$ se puede ver como la composición

$$(a^1,\dots,a^{n-1}) \xrightarrow{\pi^{-1}} (a^1,\dots,a^{n-1},0) \xrightarrow{x\circ y^{-1}} x\circ y^{-1}(a^1,\dots,a^{n-1},0) \xrightarrow{\overline{\pi}}$$

$$\xrightarrow{\overline{\pi}} \pi\circ x\circ y^{-1}(a^1,\dots,a^{n-1},0)$$

y resulta de clase C^k como composición de tales (π^{-1} y $\overline{\pi}$ son C^∞ y $x\circ y^{-1}$ es C^k por hipótesis) ///

Las variedades diferenciables con borde que vamos a precisar son las que están en una variedad diferenciable sin borde. Más precisamente:

DEFINICION 2.28. Un subconjunto D de una variedad diferenciable X de dimensión n se dice que es un <u>dominio</u> si para todo $p \in \overline{D}$ (clausura de D) existe una carta local (x,U) en p tal que $x(U \cap \overline{D})$ es un abierto del semiespacio H^n.

Claramente, si D es un dominio de una variedad X de clase C^k y dimensión n, entonces $\overline{D}$ es una variedad con borde de clase C^k y dimensión n (la topología es la inducida por X y las cartas son las restricciones de x a $U \cap D$ para las (x,U) que aparecen en la definición de dominio)

Ejercicios

1. Si X es un subconjunto de R^n que es variedad topológica con borde de dimensión n con la topología inducida, entonces $\partial X = Fr\, X$ si X es cerrado. Dar un contraejemplo si a X no se le pide que sea cerrado.

2. Si $(C_i)_{i\in I}$ son las componentes conexas de ∂X para una variedad topológica con borde X y si $I' \subset I$, entonces $X-\cup\{C_i : i \in I'\}$ es una variedad topológica con borde.

3. Sea $I = [0,1] = \{t\in R: 0 < t < 1\}$ y sea $M = I\times I$. Sobre M consideramos la relación de equivalencia:

$$(0,t) \sim (1,t) \quad \text{para} \quad t \in [0,1]$$

Probar que $X = M/\sim$ (cilindro) es una variedad diferenciable con borde de Clase C^∞ y dimensión 2.

4. Si (x,U) es una carta local de una variedad topológica con borde, probar que $x(U \cap \mathrm{Int}\, X) = x(U) \cap \overset{\circ}{H}{}^n$.

5. Probar que $\pi: Fr\, H^n \to R^{n-1}$ es un homeomorfismo si a $Fr\, H^n$ le damos la topología inducida por R^n (recordar que $\pi(x^1,\dots,x^{n-1},0) = (x^1,\dots,x^{n-1})$)

5. ORIENTABILIDAD

Vamos a dar una definición analítica de variedades orientables y más adelante veremos su interpretación geométrica.

DEFINICION 2.29. Si X es una variedad diferenciable, un atlas A sobre la variedad se dice orientado si, para (x,U), (y,V) pertenecientea a A se verifica

$$J(x\circ y^{-1})(y(p)) > 0 \quad \text{para todo} \quad p \in U \cap V$$

No siempre existirá un atlas orientado para la variedad dada. En caso afirmativo, le damos un nombre a la variedad:

DEFINICION 2.30. Una variedad diferenciable X se dice orientable si existe un atlas orientado para la variedad contenido en el atlas maximal de X.

El siguiente criterio resulta útil en muchos casos:

PROPOSICION 2.31. (Criterio de orientabilidad): Si una variedad diferenciable X tiene un atlas consistente de dos cartas locales (x,U), (y,V) con $U \cap V$ conexo, entonces X es orientable.

DEMOSTRACION. Consideremos la función

$$p \to J(y\circ x^{-1})(x(p))$$

de $U \cap V$ en R. Esa función es continua por la continuidad del determinante y su dominio es conexo. Luego su imagen es un conexo de R que no contiene al cero (porque $y\circ x^{-1}$ tiene inversa diferenciable $x\circ y^{-1}$ y por la regla de la cadena). Entonces la imagen de esa función está completamente contenida en los reales positivos o completamente contenida en los reales negativos. En el primer caso la

Proposición queda probada pues el atlas en cuestión resulta orientado. En el segundo caso, o sea $J(y\circ x^{-1})(x(p)) < 0$ para todo $p \in U \cap V$, consideramos la función

$$\pi : R^n \to R^n$$
$$\pi(x^1,\dots,x^n) = (-x^1,x^2,\dots,x^n)$$

y si $\bar{y} = \pi\circ y$; entonces $\{(x,U),(\bar{y},V)\}$ es un atlas orientado de X. En efecto:

$$\begin{aligned} J(\bar{y}\circ x^{-1})(x(p)) &= J(\pi\circ y\circ x^{-1})(x(p)) = \\ &= J(\pi)(y(p)).J(y\circ x^{-1})(x(p)) = \\ &= (-1).J(y\circ x^{-1})(x(p)) > 0 \end{aligned}$$

para todo $p \in U \cap V$. Luego X es orientable ///

Probar que una determinada variedad no es orientable es, en principio, muy difícil, pues hay que probar una propiedad determinada para todos los atlas (a saber, que en algún punto algún Jacobiano es negativo). El siguiente lema permite reducir ese problema universal a una cuestión de existencia:

LEMA 2.32. Sea X una variedad diferenciable orientable. Si (x,U), (y,V) son dos cartas locales con U y V conexos, entonces el signo de $J(y\circ x^{-1})$ es constante en $U \cap V$.

DEMOSTRACION. Sean $p,q \in U \cap V$. Como U es conexo y X es una variedad, entonces U es arco conexo (es conexo y localmente arco conexo). Luego existe una curva $\gamma:[0,1] \to U$

continua tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado de X de forma tal que los dominios de las cartas locales de $\mathcal{A}$ (es decir, los U de los pares (x,U)) sean conexos y formen una base de abiertos de X. Estas dos condiciones son fáciles de conseguir: si algún dominio de las cartas de $\mathcal{A}$ no es conexo, se lo separa en sus componentes conexas, lo que asegura la conexión de todos los dominios. Además, dada una carta $(z,W) \in \mathcal{A}$, le agregamos a $\mathcal{A}$ todas las cartas de la forma (z,W') con W' abierto y conexo contenido en W. De esta manera, el nuevo atlas formado sigue siendo orientado y satisface las dos condiciones requeridas.

Queremos llegar de p a q por una "cadena" de dominios de cartas de $\mathcal{A}$ contenidos en U; más precisamente, si

$$A = \{s \in \gamma : \text{existen } (\varphi_1,U_1),\ldots,(\varphi_n,U_n) \in \mathcal{A} \text{ con } U_i \subset U \text{ y tales que } U_1 \cap U_2 \neq \emptyset,\ U_2 \cap U_3 \neq \emptyset,\ldots,U_{n-1} \cap U_n \neq \emptyset,\ p \in U_1,\ s \in U_n\}$$

entonces queremos probar que $q \in A$. Para ello vamos a probar que A es abierto y cerrado en γ (notar que por γ designamos tanto la función $\gamma : [0,1] \to U$ como la imagen $\gamma([0,1])$).

Si $s \in \gamma$, sean $(\varphi_1,U_1),\ldots,(\varphi_n,U_n)$ las cartas en cuestión. De la definición de A se sigue inmediatamente que $U_n \cap \gamma \subset A$. Luego, cada vez que A contiene un punto, contiene un abierto (en γ) que contiene al punto. Entonces A es entorno de cada uno de sus puntos o sea A es abierto (en γ).

Sea $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en A con límite $s \in \gamma$. Si (φ, W) es una carta de A alrededor de s con $W \subset U$, existe $m \in N$ tal que $s_m \in W$ por definición de límite,. Pero como $s_m \in A$, existen $(\varphi_1, U_1), \ldots, (\varphi_n, U_n) \in A$ con $U_i \subset U$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \ldots, U_{n-1} \cap U_n \neq \emptyset$, $p \in U_1$, $s_m \in U_n$. Para ver que $s \in A$ basta considerar la sucesión

$$(\varphi_1, U_1), \ldots, (\varphi_n, U_n), \ (\varphi, W)$$

Resulta entonces A abierto y cerrado en γ; pero γ es conexo como imagen continua de un conexo. Entonces $A = \emptyset$ ó $A = \gamma$. La primer posibilidad queda descartada por ser $p \in A$ trivialmente. Luego $A = \gamma$ y en particular $q \in A$. Eso significa que existen $(\varphi_1, U_1), \ldots, (\varphi_n, U_n) \in A$ con $U_i \subset U$ tales que

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset, \ldots, U_{n-1} \cap U_n \neq \emptyset, \ p \in U_1, \ q \in U_n.$$

Sea $s_1 \in U_1 \cap U_2$; entonces:

$$\begin{aligned} sg(J(\varphi_2 \circ x^{-1})(x(s_1))) &= sg(J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} \circ \varphi_1 \circ x^{-1})(x(s_1))) = \\ &= sg(J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(s_1))). \\ &\quad sg(J(\varphi_1 \circ x^{-1})(x(s_1))) = \\ &= sg(J(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\varphi_1(s_1))). \\ &\quad sg(J(\varphi_1 \circ x^{-1})(x(s_1))) = \\ &= 1.sg(J\varphi_1 \circ x^{-1})(x(s_1))) \end{aligned}$$

Entonces $J(\varphi_2 o x^{-1})$ y $J(\varphi_1 o x^{-1})$ tienen el mismo signo en un punto. Pero siendo $U_2 \cap U = U_2$, conexo y $U_1 \cap U = U_1$, conexo, entonces el signo de $J(\varphi_2 o x^{-1})$ es constante en U_2, el signo de $J(\varphi_1 o x^{-1})$ es constante en U_1 y ambos son iguales entre sí. Brevemente:

$$\text{sg } J(\varphi_2 o x^{-1}) \text{ en } U_2 = \text{sg } J(\varphi_1 o x^{-1}) \text{ en } U_1$$

Sea ahora $s_2 \in U_2 \cap U_3$; entonces

$$\text{sg}(J(\varphi_3 o x^{-1})(x(s_2)) = \text{sg}(J(\varphi_3 o \varphi_2^{-1})(\varphi_2(s_2))).$$

$$. \text{ sg}(J(\varphi_2 o x^{-1})(x(s_2))) =$$

$$= \text{sg}(J(\varphi_2 o x^{-1})(x(s_2)))$$

Los mismos razonamientos que antes nos permiten concluir que:

$$\text{sg } J(\varphi_3 o x^{-1}) \text{ en } U_3 = \text{sg } J(\varphi_2 o x^{-1}) \text{ en } U_2$$

Iterando este procedimiento, llegaremos a:

$$\text{sg } J(\varphi_n o x^{-1}) \text{ en } U_n = \text{sg } J(\varphi_1 o x^{-1}) \text{ en } U_1$$

En particular:

$$\text{sg } J(\varphi_n o x^{-1})(x(q)) = \text{sg } J(\varphi_1 o x^{-1})(x(p))$$

Repitiendo todo el procedimiento, conseguimos cartas $(\psi_1, V_1), \ldots (\psi_m, V_m) \in \mathcal{A}$ tales que

$$\text{sg } J(\psi_m o y^{-1})(y(q)) = \text{sg } J(\psi_1 o y^{-1})(y(p))$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sg} J(y\circ x^{-1})(x(q)) &= \operatorname{sg} J(y\circ\psi_m^{-1}\circ\psi_m\circ\varphi_n^{-1}\circ\varphi_n\circ x^{-1})(x(q)) = \\
&= \operatorname{sg}(J(y\circ\psi_m^{-1})(\psi_m(q))) . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\psi_m\circ\varphi_n^{-1})(\varphi_n(q))) . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\varphi_n\circ x^{-1})(x(q))) = \\
&= \operatorname{sg}(J(\psi_m\circ y^{-1})(y(q))^{-1}) . 1 . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\varphi_n\circ x^{-1})(x(q))) = \\
&= (\operatorname{sg}(J(\psi_m\circ y^{-1})(y(q)))^{-1} . 1 . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\varphi_n\circ x^{-1})(x(q))) = \\
&= (\operatorname{sg}(J(\psi_1\circ y^{-1})(y(p)))^{-1} . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\psi_1\circ\varphi_1^{-1})(\varphi_1(p))) . \\
&\quad . \operatorname{sg}(J(\varphi_1\circ x^{-1})(x(p))) = \\
&= \operatorname{sg} J(y\circ\psi_1^{-1})(\psi_1(q)) . \\
&\quad . \operatorname{sg} J(\psi_1\circ\varphi_1^{-1})(\varphi_1(p)) . \\
&\quad . \operatorname{sg} J(\varphi_1\circ x^{-1})(x(p)) = \\
&= \operatorname{sg} J(y\circ\psi_1^{-1}\circ\psi_1\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_1\circ x^{-1})(x(p)) = \\
&= \operatorname{sg} J(y\circ x^{-1})(x(p))
\end{aligned}$$

lo cual termina de probar el lema ///

Escribiendo el lema en una forma lógicamente equivalente, obtenemos un criterio de gran utilidad para probar que ciertas variedades son no orientables:

COROLARIO 2.33. (Criterio de no-orientabilidad): Sea X una variedad diferenciable y supongamos que existen dos cartas locales (x,U), (y,V) con U y V conexos y puntos $p,q \in U \cap V$ tales que

$$\operatorname{sg} J(y \circ x^{-1})(x(p)) \neq \operatorname{sg} J(y \circ x^{-1})(x(q))$$

Entonces X no es orientable.

El lema 2.32 prueba que, en una variedad orientable, una carta tiene jacobiano de signo constante al compararla con cualquier carta (siempre que los dominios sean conexos). La siguiente proposición prueba que lo mismo es cierto cuando se compara una carta con un átlas orientado:

PROPOSICION 2.34. Sea X una variedad diferenciable otientable y sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado cuyas cartas tienen dominios conexos. Sea (x,U) una carta cualquiera con U conexo y sea $\bar{x} = \pi \circ x$ donde $\pi(x^1,\ldots,x^n) = (-x^1,\ldots,x^n)$. Entonces se da una y sólo una de las siguientes posibilidades:

a) $\mathcal{A} \cup \{(x,U)\}$ es un atlas orientado

b) $\mathcal{A} \cup \{(\bar{x},U)\}$ es un atlas orientado

DEMOSTRACION. Supongamos que existe una carta $(y,V) \in \mathcal{A}$ tal que

$$J(y \circ x^{-1})(x(p)) > 0$$

para algún $p \in U \cap V$. En ese caso, por el Lema 2.32, dicho jacobiano es positivo en todo $U \cap V$. Definimos el conjunto

$$B = \{p \in U : J(z \circ x^{-1})(x(p)) > 0 \text{ para toda carta } (z,W) \in \mathcal{A} \text{ tal que } p \in W\}$$

Afirmamos que B es abierto y cerrado en U. En efecto, sea $p \in B$ y sea (z_1,W_1) una carta cualquiera de $\mathcal{A}$ con $p \in W_1$. Entonces, para $q \in U \cap W_1$, si (z_2,W_2) es una carta de $\mathcal{A}$ con $q \in W_2$, será:

$$J(z_2 \circ x^{-1})(x(q)) = J(z_2 \circ z_1^{-1} \circ z_1 \circ x^{-1})(x(q)) =$$

$$= J(z_2 \circ z_1^{-1})(z_1(q)).J(z_1 \circ x^{-1})(x(q))$$

y este producto es positivo (el primer factor es positivo por ser $\mathcal{A}$ orientado y el segundo por ser $p \in B$ y por el Lema 2.32). Con ésto deducimos que $U \cap W_1 \subset B$ con lo cuál B resulta entorno de cada uno de sus puntos y por lo tanto abierto.

Es importante observar que el mismo razonamiento, con $z_1 = y$, $W_1 = V$, prueba que $U \cap V \subset B$ y por tanto $B \neq \emptyset$.

Veamos ahora que B es cerrado en U: sea $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de B con límite $q \in U$ y veamos que $q \in B$.

Sea (z,W) una carta cualquiera de $\mathcal{A}$ tal que $q \in W$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_n \in V$ para $n \geq n_0$. Como $q_n \in B$, será

$$J(z \circ x^{-1})(x(q_n)) > 0 \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Como $z\circ x^{-1}$ es C^∞, entonces $J(z\circ x^{-1})\circ x$ es continua (en realidad es C^∞) y por lo tanto:

$$J(z\circ x^{-1})(x(q)) = \lim_{n\to\infty} J(z\circ x^{-1})(x(q_n)) \geq 0$$

como límite de números positivos. Pero como el jacobiano de un cambio de coordenadas no puede ser nulo, resulta $J(z\circ x^{-1})(x(q)) > 0$. Como (z,W) era una carta cualquiera de $\mathcal{A}$ con $q \in W$, resulta $q \in B$.

En definitiva, B es abierto y cerrado en el conexo U y no vacío; por lo tanto $B = U$ lo que establece a)

Para lo anterior hemos supuesto que existía una carta (y,V) en $\mathcal{A}$ tal que $J(y\circ x^{-1})(x(p)) > 0$ en algún $p \in U \cap V$. Si eso no ocurre, se cumple automaticamente b). ///

Probamos ahora que la propiedad de orientabilidad de una variedad se traslada a los bordes de sus dominios

PROPOSICION 2.35. Si D es dominio de una variedad orientable X, entonces ∂D es orientable

DEMOSTRACION. Sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado de X con cartas locales de dominios conexos Por definición de dominio, dado $p \in \overline{D}$ existe una carta local (y,V) en X alrededor de p tal que $y(V \cap \overline{D})$ es un abierto de H^n. Según vimos al estudiar variedades con borde, será:

$$y(V \cap \partial D) = \{(y^1,\ldots,y^n) \in y(V \cap \overline{D}) : y^n = 0\} \quad (1)$$

Si W está contenido en V, afirmamos que sigue valiendo (1) cambiando V por W. En efecto, si $p \in W \cap \partial D$, en particular $p \in V \cap \partial D$ y por tanto $y(p) = (y^1(p),\ldots,y^n(p)) \in$ $\in y(V \cap \overline{D})$ y además $y^n(p) = 0$, luego una inclusión es cierta. Para la otra, si $p \in W \cap \overline{D}$ es tal que $y^n(p) = 0$, entonces $p \in V \cap \overline{D}$ e $y^n(p) = 0$; por (1) resulta $p \in V \cap \partial D$ y como además $p \in W$, será $p \in V \cap \partial D \cap W = (V \cap W) \cap \partial D =$ $= W \cap \partial D$, lo que prueba la otra inclusión.

Ya que (1) vale para cualquier subconjunto de V, en particular vale para sus componentes conexas. Entonces dado $p \in \partial D$, existe una carta (y,V) en X alrededor de p con V conexo tal que $y(V \cap \partial D) = \{(y^1,\ldots,y^n) \in y(V \cap \overline{D}) : y^n = 0\}$. Por la Proposición 2.35, la carta (y,V) se puede agregar a $\mathcal{A}$ y el atlas resultante es orientado o bien lo mismo se puede hacer para $(\overline{y},V)$ (es claro que cambiando y por $\overline{y}$ sigue valiendo (1)). Procediendo de esa manera con todos los puntos de ∂D, obtenemos un atlas $\mathcal{A}'$ de X orientado tal que para todo $p \in \partial D$ existe una carta $(y,V) \in \mathcal{A}'$ alrededor de p que cumple (1). Recordemos que, en ese caso, $(\tilde{y}, V \cap \partial D)$ es carta en ∂D alrededor de p, donde $\tilde{y} = P\circ y$, $P(y^1,\ldots,y^n) = (y^1,\ldots,y^{n-1})$. Las cartas $(\tilde{y}, V \cap \partial D)$ nos proporcionan un atlas para ∂D.

Vamos a probar ahora que ese atlas es orientado.

Sean (x,U), (y,V) dos cartas en X que cumplen (1); queremos ver que el determinante de la matriz jacobiana $D(\tilde{y}\circ\tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p))$ es mayor que cero para todo $p \in U \cap V \cap \partial D$.

Para ello calculamos los coeficientes de dicha matriz, es decir las derivadas parciales $D_i(\tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p))$, donde $\tilde{y}^j = \pi^j \circ \tilde{y}$, π^j = proyección a la j-sima coordenada $(1 \leq i,j \leq n-1)$.

Notemos que $\tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1}) =$

$= (\pi^j \circ P \circ y) \circ x^{-1} \circ P^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1}) = y^j \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},0)$

Entonces, si $p \in U \cap V \cap \partial D$ y $x(p) = (a^1,\ldots,a^{n-1},0)$ (por (1), la última coordenada es necesariamente cero), será $\tilde{x}(p) = (a^1,\ldots,a^{n-1})$ y por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
D_i(\tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p)) &= D_i(\tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1})(a^1,\ldots,a^{n-1}) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{\tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1}(a^1,\ldots,a^i+h,\ldots,a^{n-1}) - \\
&\qquad - \tilde{y}^j \circ \tilde{x}^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1})\} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{y^j \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^i+h,\ldots,a^{n-1},0) - \\
&\qquad - y^j \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},0)\} = \\
&= D_i(y^j \circ x^{-1})(a^1,\ldots,a^{n-1},0) \\
&= D_i(y^j \circ x^{-1})(x(p)) \qquad (1 \leq i,j \leq n-1)
\end{aligned}
$$

Por otra parte es, si $i \leq n-1$:

$$
\begin{aligned}
D_i(y^n \circ x^{-1})(x(p)) &= D_i(y^n \circ x^{-1})(a^1,\ldots,a^{n-1},0) = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{y^n \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^i+h,\ldots,a^{n-1},0) - \\
&\qquad - y^n \circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},0)\} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \{y^n(q) - y^n(p)\} = \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ya que $q = x^{-1}(a^1,\ldots,a^i+h,\ldots,a^{n-1},0)$ y p están en ∂D por (1) y entonces, también por (1), $y^n(q) = y^n(p) = 0$.

Pero entonces, desarrollando $J(y\circ x^{-1})(x(p))$ por la última columna, obtenemos el siguiente resultado:

$$0 < J(y\circ x^{-1})(x(p)) = J(\tilde{y}\circ\tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p)) \;.\; D_n(y^n\circ x^{-1})(x(p))$$

y por lo tanto si probamos que $D_n(y^n\circ x^{-1})(x(p))$ es mayor que cero, obtendremos que $J(\tilde{y}\circ\tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p))$ es mayor que cero, que es lo que queríamos probar. Es claro, por la desigual dad anterior, que $D_n(y^n\circ x^{-1})(x(p))$ no puede ser cero. Supongamos entonces que es menor que cero; pero:

$$\begin{aligned} D_n(y^n\circ x^{-1})(x(p)) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{y^n\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},h) - \\ &\quad - y^n\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},0)\} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{y^n\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},h)\} \end{aligned}$$

ya que $y^n(x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},0)) = 0$ por (1). Entonces si ese límite es menor que cero, existe $\delta > 0$ tal que para $0 < h < \delta$:

$$y^n\circ x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},h) < 0$$

Ahora bien, como $x(U\cap\overline{D})$ es un abierto de H^n que contiene a p, como para h positivo es $(a^1,\ldots,a^{n-1},h)\in H^n$, entonces para h pequeño, $(a^1,\ldots,a^{n-1},h)\in x(U\cap\overline{D})$ y por tanto $x^{-1}(a^1,\ldots,a^{n-1},h)\in U\cap\overline{D}$, en particular

$x^{-1}(a^1,\dots,a^{n-1},h) \in \overline{D}$. Luego, al aplicarle y^n, recordando que $y(V \cap \overline{D}) \subset H^n$, debe ser $y^n(x^{-1}(a^1,\dots,a^{n-1},h)) \geq 0$ contradiciendo lo anterior.

En resumen, resulta $J(\tilde{y}\circ\tilde{x}^{-1})(\tilde{x}(p)) > 0$ para todo $p \in U \cap V \cap \partial D$ y por tanto el atlas que A' induce sobre ∂D es orientado ///

Para terminar con las cuestiones generales correspondientes a orientabilidad estudiamos qué relación hay entre la orientabilidad de una variedad producto y la de los factores.

PROPOSICION 2.36. Sean M_1 y M_2 variedades diferenciables. Entonces $M_1 \times M_2$ es orientable si y sólo si M_1 y M_2 son orientables.

DEMOSTRACION. Supongamos que M_1 y M_2 son orientables y sean A_1, A_2 atlas orientados de M_1 y M_2 respectivamente. Entonces el atlas $A_1 \times A_2$ descrito en la definición de variedad producto es orientado; en efecto, sus cartas son de la forma $(x\times y, U\times V)$ para $(x,U) \in A_1$, $(y,V) \in A_2$. Luego, si $(\overline{x}\times \overline{y}, \overline{U}\times \overline{V})$ es otra de esas cartas, será:

$$(\overline{x}\ \overline{y})\circ(x\ y)^{-1} = (\overline{x}\circ x^{-1})\ (\overline{y}\circ y^{-1})$$

como es inmediato verificar, y por lo tanto, si $p \in U$, $q \in V$:

$$J((\overline{x}\ \overline{y})\circ(x\ y)^{-1})(x(p),y(q)) =$$

$$= J(\overline{x}\circ x^{-1})(x(p)).J(\overline{y}\circ y^{-1})(y(q))$$

positivo como producto de números positivos.

Recíprocamente, supongamos que $M_1 \times M_2$ es orientable y sea A un atlas orientado de dicha variedad. Fijamos un punto cualquiera $q \in M_2$ y sea (y,V) una carta en M_2 alrededor de q con V conexo. Para cada $p \in M_1$ tomamos una carta (x,U) en M_1 alrededor de p con U conexo. Como $U \times V$ es conexo como producto de tales, entonces $A \cup \{(x \times y, U \times V)\}$ es un atlas orientado o bien $A \cup \{(x' \times y, U \times V)\}$ lo es (donde $x' = \pi . x$, $\pi(x^1,\dots,x^n) = (-x^1,\dots,x^n)$). Quedándonos con una u otra carta según el caso, obtenemos un atlas A_1 de M_1 que resulta orientado; en efecto, si (x,U), $(\bar{x},\bar{U})$ son dos cartas de A_1, por definición de A_1 será:

$$0 < J((\bar{x}\ y)\circ(x\ y)^{-1})(x(p'),y(q)) =$$

$$= J(\bar{x}\circ x^{-1})(x(p')).J(y\circ y^{-1})(y(q)) =$$

$$= J(\bar{x}\circ x^{-1})(x(p'))$$

para todo $p' \in U \cap \bar{U}$ ///

Ejercicios

1. Probar que S^n es orientable usando el criterio de orientabilidad 2.31 y las proyecciones estereográficas desde los dos polos. Deducir que el toro m-dimensional es orientable.

2. Sea $I = [-1,1]$ y sea $M = I \times \overset{\circ}{I}$ ($\overset{\circ}{I} = (-1,1)$). Consideramos la siguiente relación de equivalencia:

$(-1,a) \sim (1,-a)$ si $-1 < a < 1$

y sea $X = M/\sim$ (Cinta de Möbius)

a) Probar que X es una 2-variedad C^∞

b) Probar que X no es orientable usando el criterio de no-orientabilidad 2.33.

3. Sea $M = I \times I$ con $I = [-1,1]$ y consideremos la relación de equivalencia:

$$\begin{array}{l} (-1,a) \sim (1,-a) \\ \qquad\qquad\qquad -1 \le a \le 1 \\ (a,1) \sim (a,-1) \end{array}$$

y sea $X = M/\sim$ (Botella de Klein)

a) Probar que X es una 2-variedad C^∞

b) Probar que X es no orientable utilizando el criterio de no-orientabilidad 2.33.

4. Probar que una variedad es orientable si y sólo si todo abierto de la variedad es orientable (con el atlas inducido por el de la variedad). Utilizar este hecho para probar 3) b) a partir de 2) b).

5. Probar que una variedad es orientable si y sólo si todas sus componentes conexas lo son.

6. EL ESPACIO PROYECTIVO REAL

Recordamos la definición del espacio proyectivo. En $R^{n+1} - \{(0,\ldots,0)\}$ consideramos la siguiente relación, que resulta muy facil de ver que es de equivalencia:

$$(x_1,\ldots,x_{n+1}) \sim (y_1,\ldots,y_{n+1}) \text{ si existe } \lambda \neq 0$$

$$\text{tal que } (x_1,\ldots,x_{n+1}) = \lambda(y_1,\ldots,y_{n+1})$$

$x = \lambda y$

Indicamos el cociente como $Pn = R^{n+1} / \{0\}/\sim$ y lo denominamos espacio proyectivo real n-dimensional. Vamos a probar que, con la topología cociente, P^n es una variedad diferenciable.

Indicaremos $\overline{(x_1,\ldots,x_{n+1})}$ a la clase de equivalencia de $(x_1,\ldots,x_{n+1})$. Primero definimos los dominios de las cartas locales:

$U_1 = \{\overline{(1, \ldots)}\}$

$$U_i = \{\overline{(x_1,\ldots,x_{n+1})} : x_i \neq 0\} \qquad (i = 1,\ldots,n+1)$$

Estos conjuntos resultan abiertos pues si π es la proyección de $R^{n+1} \sim \{0\}$ al cociente P^n, entonces $\pi^{-1}(U_i) = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in R^{n+1} : x_i \neq 0\}$, claramente abierto.

Habiendo definido los U_i, definimos

$$\varphi_i : U_i \to R^n$$

$$\varphi_i(\overline{(x_1,\ldots,x_{n+1})}) = \left(\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

Es inmediato verificar que la definición de φ_i no depende del representante elegido; también es inmediata la verificación de que $\varphi_i : U_i \to R^n$ es una biyección. Además φ_i es continua puesto que $\varphi_i \circ \pi$ lo es (una función que sale

de un cociente es continua si y sólo si compuesta con la proyección al cociente lo es); en efecto,
$\varphi_i \circ \pi(x_1,\ldots,x_{n+1}) = (\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i})$ que es claramente continua en $\pi^{-1}(U_i)$. Por último, es:

$$\varphi_i^{-1}\underbrace{(y_1,\ldots,y_n)}_{\mathbb{R}^n} = (y_1,\ldots,y_{i-1},1,y_i,\ldots,y_n) =$$
$$= (y_1,\ldots,y_{n-1},1,y_i,\ldots,y_n)$$

así que φ_i^{-1} es una función continua como composición de tales. En resumen, para cada i entre 1 y n+1, (φ_i,U_i) es una carta local. Con esto, ya sabemos que P^n es una variedad topológica.

Veamos ahora que P^n es T_2. Sean $\overline{x} = \overline{(x_1,\ldots,x_{n+1})}$, $\overline{y} = \overline{(y_1,\ldots,y_{n+1})} \in P^n$ y sea $\overline{x}^m = \overline{(x_1^m,\ldots,x_{n+1}^m)}$ una sucesión en P^n que tiende tanto a $\overline{x}$ como a $\overline{y}$. Si $\overline{x}$ e $\overline{y}$ están en un mismo abierto coordenado U_i, entonces siendo U_i homeomorfo al T_2 $\mathbb{R}^n$, sería $\overline{x} = \overline{y}$. Queda por contemplar el caso $\overline{x} \in U_i - U_j$, $\overline{y} \in U_j - U_i$ que vamos a ver que no puede ocurrir. En ese caso sería

$$x_i \neq 0, \quad x_j = 0$$
$$y_i = 0, \quad y_j \neq 0$$

Como $\overline{x}^m \to \overline{x}$, entonces $\overline{x}^m \in U_i$ para todo $m \geq m_0'$; análogamente $\overline{x}^m \in U_j$ para todo $m \geq m_0''$. Luego existe n_0 tal que $\overline{x}^m \in U_i \cap U_j$ para todo $m \geq m_0$. Pero siendo $\overline{x}^m \in U_i$, $\overline{x} \in U_i$ y $\overline{x}^m \to \overline{x}$, entonces por la continuidad de φ_i:

$$\varphi_i(\overline{x}^m) \to \varphi_i(\overline{x})$$

y en particular, como la convergencia en R^n es coordenada a coordenada:

$$\frac{x_j^m}{x_i^m} \to \frac{x_j}{x_i} = 0$$

Análogamente resulta:

$$\frac{x_i^m}{x_j^m} \to \frac{y_i}{y_j} = 0$$

con lo cual $1 = \dfrac{x_j^m}{x_i^m} \cdot \dfrac{x_i^m}{x_j^m} \to \dfrac{x_j}{x_i} \cdot \dfrac{y_i}{y_j} = 0.0 = 0$, absurdo. En consecuencia, P^n es T_2.

Como cada U_i es homeomorfo a R^n, cada U_i es N_2. Pero entonces P^n es unión finita de abiertos N_2 así que P^n es N_2.

Por último, veamos que ocurre con los cambios de coordenadas. Consideremos primero $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ para $i < j$:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \varphi_i\overline{(y_1,\ldots,y_{j-1},1,y_j,\ldots,y_n)} =$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_i},\ldots,\frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_j}{y_i},\ldots,\frac{y_n}{y_i}\right)$$

y entonces $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es claramente C^∞. Si $i > j$:

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \varphi_i\overline{(y_1,\ldots,y_{j-1},1,y_j,\ldots,y_n)} =$$

$$= \left(\frac{y_1}{y_{i-1}},\ldots,\frac{y_{j-1}}{y_{i-1}}, \frac{1}{y_{i-1}}, \frac{y_j}{y_{i-1}},\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{y_{i-2}}{y_{i-1}}, \frac{y_i}{y_{i-1}},\ldots, \frac{y_n}{y_{i-1}}\right)$$

que también resulta C^∞.

Sabiendo ya que P^n es una variedad diferenciable, vamos a estudiar su orientabilidad. Más precisamente, vamos a probar lo siguiente:

PROPOSICION 2.37. El espacio proyectivo real P^n de dimensión n es orientable si n es impar y no-orientable si n es par.

DEMOSTRACION. Vamos a calcular los jacobianos de los cambios de coordenadas $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$. Basta considerar el caso $i < j$ ya que el signo jacobiano de una función es igual al signo del jacobiano de la inversa.

Para $i < j$ sabemos que

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{y_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots$$
$$\ldots,y_{j-1},1,y_j,\ldots,y_n)$$

Como las variables están cambiadas de lugar, es conveniente introducir la siguiente función que las restituye a su lugar original:

$$\pi : R^n \to R^n$$

$$\pi(y_1,\ldots,y_n) = (y_1,\ldots,y_{i-1},y_{j-1},y_i,\ldots$$
$$\ldots, y_{j-1},1,y_j,\ldots,y_n)$$

Como es inmediato verificar, resulta

$$\pi \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{y_i}(y_1,\ldots,y_{i-1},1,y_{i+1},\ldots,y_n)$$

El jacobiano de esta función es el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{y_i} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_1}{y_i^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_i} & \cdots & 0 & -\frac{y_2}{y_i^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{y_i} & -\frac{y_{i-1}}{y_i^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{y_i^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -\frac{y_{i+1}}{y_i^2} & \frac{1}{y_i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{y_n}{y_i^2} & 0 & \cdots & \frac{1}{y_i} \end{pmatrix}$$

y desarrollando por la primera fila es fácil ver que

$$J(\pi \circ \varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n) = -\frac{1}{y_i^{n+1}}$$

Pero, cualquiera sea $a \in R^n$:

$$J(\pi)(a) = (-1)^{i-j-1}$$

ya que π consiste en $i-j-1$ permutaciones de dos variables entre sí (y cada una de esas permutaciones tiene jacobiano igual a -1). Por la regla de la cadena:

$$-\frac{1}{y_i^{n+1}} = J(\pi\circ\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n) =$$

$$= J(\pi)(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1}(Y_1,\ldots,y_n)).$$

$$.J(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n) =$$

$$= (-1)^{i-j-1}.J(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n)$$

de donde:

$$J(\varphi_i\circ\varphi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n) = \frac{(-1)^{i-j}}{y_i^{n+1}}$$

Cambianos ahora nuestras cartas. Sea $P:R^n \to R^n$ la función

$$P(y_1,\ldots,y_n) = (-y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

de jacobiano igual a -1. Definimos

$$\psi_i:U_i \to R^n$$

por:

$$\psi_i = \varphi_i \text{ para i par}$$

$$\psi_i = P\circ\varphi_i \text{ para i impar}$$

Entonces resulta claramente

$$J(\psi_i\circ\psi_j^{-1})(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{y_i^{n+1}}$$

Luego, si n es impar, los cambios de coordenadas tienen jacobiano positivo y resulta la primer parte de la proposición. Si n es par, aplicamos el criterio de no-orientabilidad 2.33: sean $p,q \in U_i \cap U_j$ dados por:

$p = \overline{(1,\ldots,1,-1,1,\ldots,1)}$ (el -1 en el lugar i)

$q = \overline{(1,\ldots,1)}$

Entonces, de acuerdo a lo probado:

$$J(\psi_i \circ \psi_j^{-1})(\psi_j(p)) = -1$$

$$J(\psi_i \circ \psi_j^{-1})(\psi_j(q)) = 1$$

y siendo U_i y U_j conexos (cada uno es homeomorfo a R^n), resulta P^n no orientable para n par ///

Cuando veamos la interpretación geométrica de la orientabilidad, indicaremos una forma de ver intuitivamente porqué la orientabilidad de P^n depende de la paridad de n.

Notas

1. El conjunto de los puntos de la esfera unidad $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, con la relación de equivalencia $(u,v,w) \sim \sim (-u,-v,-w)$ es un modelo del plano proyectivo real P^2. Se demuestra que no puede sumergirse en R^3. En cambio, la aplicación

$$x_1 = u^2 - v^2, \quad x_2 = u\ v, \quad x_3 = w\ u, \quad x_4 = w\ v$$

es una sumersión de P^2 en R^4.

Es interesante también la sumersión de P^2 en R^5, dada por las siguientes ecuaciones

$$y_0 = x_0^2, \quad y_1 = x_0\ x_1, \quad y_2 = x_1^2, \quad y_3 = x_0\ x_2,$$
$$y_4 = x_1\ x_2, \quad y_5 = x_2^2$$

La imagen de P^2 es una superficie algebráica en P^5 de grado 4 que tiene la propiedad de que su intersección con los hiperplanos $\sum_0^5 a_i y_i = 0$, son precisamente las imágenes de las cónicas $a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_2^2 + a_3x_0x_2 + + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = 0$ del plano P^2. Analogamente, tomando las cúbicas de P^2, se tiene una sumersión de P^2 en P^9 cuya imagen es una superficie de grado 9 y cuyas intersecciones con los hiperplanos de P^9 son las imágenes de las cúbicas de P^2. Estas superficies se llaman superficies de Veronese. Todavía mas general, tomando las variedades algebraicas de grado n de P^r, las ecuaciones análogas a las anteriores dan la sumersión de P^r en el espacio proyectivo de dimensión $(n+1)(n+2)\ldots(n+r)/r! - 1$ y la imagen es la variedad de Veronese $V_r^{(n)}$ de grado n^r y dimensión r. Estas variedades de Veronese tienen propiedades muy importantes tanto desde el punto de vista algebráico como diferencial. Ver, por ejemplo, B. Segre [25].

2. La recta proyectiva compleja $P^1(C)$ es el conjunto de los números complejos z con un único punto impropio, común a todos los abiertos definidos por $|z| > m$ para todo m. Es una variedad de dos dimensiones (puesto que un número complejo es un par de números reales) que se puede sumergir en R^3 por las ecuaciones

$$x_1 = \frac{2(z+\bar{z})}{4+z\bar{z}}, \quad x_2 = \frac{2i(z-\bar{z})}{4+z\bar{z}}, \quad x_3 = \frac{2z\bar{z}}{4+z\bar{z}}$$

que representa biyectivamente $P^1(C)$ en la esfera real $x_1^2 + x^2 + x_3^2 = 1$. Se ha indicado por $\bar{z}$ al complejo conjugado de z.

3. El plano proyectivo complejo $P^2(C)$ es el conjunto de ternas de números complejos (z_0, z_1, z_2), no nulos a la vez, con la relación de equivalencia $(z_0, z_1, z_2) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1, \lambda z_2)$ (λ complejo 0). La aplicación $P^2(C) \to R^9$ definida por

$$x_i = 2 z_i\bar{z}_i, \quad x_{ij} = z_i\bar{z}_j + z_j\bar{z}_i, \quad y_{ij} = i(z_i\bar{z}_j - z_j\bar{z}_i)$$

para $i,j = 0,1,2$, es una sumersión de $P^2(C)$ en R^9.

Importantes teoremas y ejemplos sobre inmersiones y sumersiones de variedades en R^n, pueden verse en James [12], Milnor [18] y Lashof-Smale [15].

Aunque no podemos dar la demostración, por ser bastante complicada, es importante tener presente el siguiente importante teorema de Whitney (Annals of Mathematics, 37, 1936, 645-680):

Toda variedad diferenciable de dimensión n puede sumergirse en el espacio euclidiano de dimensión 2n+1.

Ejercicios

1. Sea $X = I \times I$ donde $I = [-1,1]$. Consideramos la

relación de equivalencia

$$(-1,a) \sim (1,-a)$$

$$-1 \le a \le 1$$

$$(a,-1) \sim (-a,1)$$

Si $M = X/\sim$, probar:

a) M es una 2-variedad C

b) M es difeomorfo al plano proyectivo real P^2.

2) Sea $X = I \times \ldots \times I = I^n$. Este espacio tiene n caras opuestas cuyos puntos pueden identificarse de manera directa (+) o de manera inversa (-) identificando los puntos simétricos respecto del origen. Se tienen así n+1 variedades de dimensión n, compactas, representadas simbolicamente por los signos (+ +...+), (- + +...+), (- - +...+),... ...,(- -...-) (Por ejemplo, P^2 es (- -) y la botella de Klein es (- +)). La primera es el toro n-dimensional y la última el espacio proyectivo P^n. Probar que si n es par, solamente es orientable el toro, y si n es impar son todas orientables. Se propone estudiar lo que pasa si la identificación de los puntos de caras opuestas se hace de distinta manera, por ejemplo, según simetrías respecto de subespacios de dimensión variable.

7. GRASSMANIANAS

LLamaremos grassmaniana G_{rn} al conjunto de subespacios

H de R^{n+r} de dimensión r con la topología y estructura de variedad diferenciable que vamos a ver a continuación.

Si H es un subespacio de dimensión r de R^{n+r}, sea $v_1,\ldots,v_r$ una base de H:

$$v_1 = (v_{11},\ldots,v_{1,n+r}),\ldots,v_r = (v_{r1},\ldots,v_{r,n+r})$$

Podemos asociarle a H la matriz

$$\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1,n+r} \\ \vdots & & \\ v_{r1} & \cdots & v_{r,n+r} \end{bmatrix}$$

y es claro que le podemos asociar varias matrices a H de esta manera. Consideramos entonces la función $f:G_{rn} \to P(R^{r\times(n+r)})$ de G_{rn} en los subconjuntos de $R^{r\times(n+r)}$ definida de la siguiente manera: $f(H)$ es el conjunto de todas las matrices $(v_{ij}) \in R^{r\times(n+r)}$ tales que $(v_{11},\ldots$ $\ldots,v_{1,n+r}),\ldots,(v_{r1},\ldots,v_{r,n+r})$ es base de H.

Si $A,B \in f(H)$, digamos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, entonces

$$a_1 = (a_{11},\ldots,a_{1,n+r}),\ldots,a_r = (a_{r1},\ldots,a_{r,n+r})$$

es una base de H y lo mismo vale para

$$b_1 = (b_{11},\ldots,b_{1,n+r}),\ldots,b_r = (b_{r1},\ldots,b_{r,n+r})$$

Entonces cada a_i se puede escribir como combinación de $b_1,\ldots,b_r$ y recíprocamente. En otras palabras, existe $C \in GL(r,R)$ tal que

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} c_{ik}\, b_{kj} \qquad (1 \le i \le r,\ 1 \le j \le n+r)$$

o sea:

$$A = CB$$

Reciprocamente, si $B \in f(H)$ y $C \in GL(r,R)$, entonces $CB \in f(H)$ como es inmediato verificar. En resumen, si $B \in f(H)$, entonces $A \in f(H)$ si y sólo si existe $C \in GL(r,R)$ tal que $A = CB$.

Antes de definir las que serán cartas locales, necesitamos introducir ciertas funciones. Si $(i_1,\ldots,i_r)$ es una sucesión creciente contenida en $(1,2,\ldots,n+r)$ (es decir, $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ y $1 \le i_j \le n+r$), consideramos

$$\alpha_{i_1\ldots i_r} : R^{r\times(r+n)} \to R^{r\times r}$$

definida por:

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n+r} \\ \vdots & & \\ p_{r1} & \cdots & p_{r,n+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,i_1} & \cdots & p_{1,i_r} \\ \vdots & & \\ p_{r,i_1} & \cdots & p_{r,i_r} \end{bmatrix}$$

(o sea, $\alpha_{i_1\ldots i_r}$ consiste en quedarse con las columnas $i_1 \ldots i_r$). Si $(j_1,\ldots,j_n)$ es el complemento de $(i_1,\ldots,i_r)$ en $(1,\ldots,n+r)$ con $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$, definimos

$$\alpha^{*}_{i_1\ldots i_r} : R^{r\times(n+r)} \to R^{r\times n}$$

de la siguiente manera:

$$\alpha^*_{i_1 \dots i_r} \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1,n+r} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{r1} & \cdots & p_{r,n+r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1,j_1} & \cdots & p_{1,j_r} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ p_{r,j_1} & \cdots & p_{r,j_r} \end{bmatrix}$$

(o sea, $\alpha^*_{i_r \dots i_r}$ es quedarse con las otras columnas que restan).

Observemos que, para toda $A \in R^{r \times r}$ y para toda $Y \in R^{r\times(n+r)}$ es:

$$\alpha_{i_1 \dots i_r}(A.Y) = A.\alpha_{i_1,\dots,i_r}(Y)$$

En efecto, $[\alpha_{i_1 \dots i_r}(A.Y)]_{hk} = (A.Y)_{h\, i_k} =$

$$= \sum_{\ell=1}^{r} a_{h\ell}\, y_{\ell\, i_k} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{r} a_{h\ell}\, (\alpha_{i_1 \dots i_r}(Y))_{\ell k} =$$

$$= [A.\alpha_{i_1 \dots i_r}(Y)]_{hk}$$

Analogamente resulta $\alpha^*_{i_1 \dots i_r}(A.Y) = A.\alpha^*_{i_1,\dots,i_r}(Y)$.

Vamos ahora a definir ciertos subconjuntos de G_{rn} que resultarân ser los dominios de las cartas locales.

Para $(i_1,\dots,i_r) \subset (1,\dots,n+r)$ estrictamente creciente, sea:

$$U_{i_1 \dots i_r} = \{H \in G_{rn} : \text{para toda } A \in f(H),\ \alpha_{i_1 \dots i_r}(A) \text{ sea inversible}\}$$

Entonces, para ver si un subespacio H está en $U_{i_1 \dots i_r}$, habría que tomar todas las bases posibles de H y verificar que, quedándose con las columnas $i_1,\dots,i_r$ de la matriz asociada, el resultado es una matriz inversible. Pero en realidad basta verificarlo para una base cualquiera; en efecto, sean $A,B \in f(H)$ y supongamos que $\alpha_{i_1 \dots i_r}(A)$ sea inversible. Sabemos que existe $C \in GL(r,R)$ tal que $B = CA$. Entonces

$$\alpha_{i_1\dots i_r}(B) = \alpha_{i_1\dots i_r}(CA) = C.\alpha_{i_1\dots i_r}(A) \in GL(r,R)$$

como producto de matrices de $GL(r,R)$.

Una vez que tenemos los $U_{i_1 \dots i_r}$, definimos las funciones

$$x_{i_1\dots i_r} : U_{i_1\dots i_r} \to R^{r\times n}$$

de la siguiente manera:

$$x_{i_1\dots i_r}(H) = \alpha^*_{i_1\dots i_r}(\alpha_{i_1\dots i_r}(A)^{-1}.A) =$$

$$= (\alpha_{i_1\dots i_r}(A))^{-1}.\alpha^*_{i_1\dots i_r}(A)$$

para $A \in f(H)$. En otras palabras, consideramos la matriz A asociada a una base de H y, como las columnas $i_1,\dots,i_r$ forman una matriz inversible, multiplicando por la inversa de dicha matriz en las columnas correspondientes aparece la matriz identidad; las coordenadas de H son entonces los números que quedan en las restantes columnas (miramos

$R^{r\times n}$ como $R^{r.n}$).

Es de esperar que el resultado de este proceso no dependa de la matriz A elegida en f(H) (o sea, $x_{i_1\dots i_r}$ bien definida). En efecto, si $B \in f(H)$ existe $C \in GL(r,R)$ tal que $B = CA$. Entonces

$$[\alpha_{i_1\dots i_r}(B)]^{-1}.B = [\alpha_{i_1\dots i_r}(C.A)]^{-1}.CA =$$

$$= [C.\alpha_{i_1\dots i_r}(A)]^{-1}.CA =$$

$$= [\alpha_{i_1\dots i_r}(A)]^{-1}.C^{-1}.C.A =$$

$$= [\alpha_{i_1,\dots,i_r}(A)]^{-1}.A$$

y aplicando $\overset{*}{\alpha}_{i_1\dots i_r}$ al primer y último miembro resulta $x_{i_1\dots i_r}$ bien definida.

Veamos ahora que $x_{i_1\dots i_r}$ es inyectiva. Sean $H,H' \in U_{i_1\dots i_r}$ tales que

$$x_{i_1\dots i_r}(H) = x_{i_1\dots i_r}(H')$$

y sean $A \in f(H)$, $A' \in f(H')$. Entonces, por definición de $x_{i_1\dots i_r}$:

$$(\alpha_{i_1\dots i_r}(A))^{-1}.\overset{*}{\alpha}_{i_1\dots i_r}(A) = (\alpha_{i_1\dots i_r}(A'))^{-1}.\overset{*}{\alpha}_{i_1\dots i_r}(A')$$

o sea:

$$\overset{*}{\alpha}_{i_1\dots i_r}(A) = \alpha_{i_1\dots i_r}(A).(\alpha_{i_1\dots i_r}(A'))^{-1}.\overset{*}{\alpha}_{i_1\dots i_r}(A')$$

Por otra parte, y trivialmente, es:

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}(A) = \alpha_{i_1\ldots i_r}(A)\,(\alpha_{i_1\ldots i_r}(A'))^{-1}.\alpha_{i_1\ldots i_r}(A')$$

Por lo tanto, si llamamos $C = \alpha_{i_1\ldots i_r}(A).(\alpha_{i_1\ldots i_r}(A'))^{-1} \in GL(r,R)$, es:

$$A = CA'$$

ya que las matrices son iguales columna a columna. Pero eso es exactamente lo mismo que decir $H = H'$. Luego $x_{i_1\ldots i_r}$ es inyectiva.

Veamos ahora que $x_{i_1\ldots i_r}$ es suryectiva. Sea $w = (w_{ij}) \in R^{r\times n}$ y sea $\overline{w} \in R^{r\times(n+r)}$ definida de la siguiente manera:

$$\alpha^*_{i_1\ldots i_r}(\overline{w}) = w$$

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}(\overline{w}) = I \qquad \text{(Matriz identidad)}$$

(o sea, definimos $\overline{w}$ diciendo cuáles son sus columnas).

Sea H el subespacio generado por

$$\overline{w}_1 = (\overline{w}_{11},\ldots,\overline{w}_{1,n+r}),\ldots,\overline{w}_r = (\overline{w}_{r1},\ldots,\overline{w}_{r,n+r})$$

Este subespacio tiene claramente dimensión r y está en $U_{i_1\ldots i_r}$. Además

$$x_{i_1\ldots i_r}(H) = \alpha_{i_1\ldots i_r}(\overline{w})^{-1}.\alpha^*_{i_1\ldots i_r}(\overline{w}) =$$

$$= I^{-1}.w = w$$

lo que prueba la suryectividad de $x_{i_1\ldots i_r}$. Como vamos a usarla en seguida, llamamos $\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}$ a la función que manda w a $\overline{w}$.

Consideramos ahora la función

$$x_{j_1\ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1\ldots i_r} : x_{i_1\ldots i_r}(U_{i_1\ldots i_r} \cap U_{j_1\ldots j_r}) \to$$

$$\to x_{j_1\ldots j_r}(U_{i_1\ldots i_r} \cap U_{j_1\ldots j_r})$$

Observemos que el dominio de esta función es un abierto de $R^{r\times n}$; en efecto

$$x_{i_1\ldots i_r}(U_{i_1\ldots i_r} \cap U_{j_1\ldots j_r}) =$$

$$= \{A \in R^{r\times n} : \det((\alpha_{j_1\ldots j_r} \circ \overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r})(A)) \neq 0\}$$

y como $\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}$, $\alpha_{j_1\ldots j_r}$ y det son funciones continuas, resulta lo afirmado. Si $w \in x_{i_1\ldots i_r}(U_{i_1\ldots i_r} \cap U_{j_1\ldots i_r})$:

$$x_{j_1\ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1\ldots i_r}(w) = \alpha_{j_1\ldots j_r}(\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(w))^{-1}.$$

$$\cdot\ \alpha^{*}_{j_1\ldots j_r}(\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(w))$$

como es inmediato verificar. Pero entonces $x_{j_1\ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1\ldots i_r}$ es una función C^{∞} ya que todas las operaciones que hay que hacer sobre los coeficientes de w (quedarse con algunas columnas, agregar otras, tomar la inversa de un cierto menor) son funciones racionales de dichos coeficientes y por lo tanto C^{∞}.

Todavía no hemos definido una topología ni, en consecuencia, una estructura diferenciable sobre G_{rn}. Para hacerlo vamos a apelar a un procedimiento que es completamente general (Ejercicio 3 de esta sección). Primero definimos una topología $\tau'_{i_1\ldots i_r}$ sobre $U_{i_1\ldots i_r}$ requiriendo que $x_{i_1\ldots i_r}$ sea un homeomorfismo, es decir:

$U \in \tau'_{i_1\ldots i_r}$ si y sólo si $U \subset U_{i_1\ldots i_r}$ y

$x_{i_1\ldots i_r}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^{r\times n}$

Como G_{rn} es la unión de los $U_{i_1,\ldots,i_r}$ para todas las sucesiones estrictamente creciente $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, podemos definir una topología τ sobre G_{rn} de la siguiente manera:

$U \in \tau$ si y sólo si $U \cap U_{i_1\ldots i_r} \in \tau'_{i_1\ldots i_r}$

para toda sucesión estrictamente creciente $(i_1,\ldots,i_r) \subset (1,2,\ldots,n+r)$

Es inmediata la verificación de que τ es una topología sobre G_{rn}. Si llamamos $\tau_{i_1\ldots i_r}$ a la topología inducida por τ en $U_{i_1\ldots i_r}$, vamos a probar que las dos topologias dadas coinciden, es decir, $\tau_{i_1\ldots i_r} = \tau'_{i_1\ldots i_r}$.

i) Sea $W \in \tau_{i_1\ldots i_r}$. Entonces existe V abierto en G_{rn}, es decir $V \in \tau$, tal que $W = V \cap U_{i_1\ldots i_r}$ por definición de topología inducida. Pero $V \in \tau$ implica, en particular que $V \cap U_{i_1\ldots i_r}$, o sea W, está en $\tau'_{i_1\ldots i_r}$

ii) Sea $W \in \tau'_{i_1 \ldots i_r}$. Entonces $x_{i_1 \ldots i_r}(W)$ es abierto de $R^{r \times n}$. Para ver que $W \in \tau_{i_1 \ldots i_r}$ habría que probar que $W = V \cap U_{i_1 \ldots i_r}$ para V abierto en G_{rn}. Vamos a probar que podemos tomar $V = W$; hay que ver entonces que $W \cap U_{j_1 \ldots j_r} \in \tau'_{j_1 \ldots j_r}$ para toda sucesión estrictamente creciente $(j_1, \ldots, j_r)$.

Pero

$$
\begin{aligned}
x_{j_1 \ldots j_r}(W \cap U_{j_1 \ldots j_r}) &= x_{j_1 \ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1 \ldots i_r} \circ \\
&\quad \circ x_{i_1 \ldots i_r}(W \cap U_{j_1 \ldots j_r}) = \\
&= x_{j_1 \ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1 \ldots i_r} \circ \\
&\quad \circ x_{i_1 \ldots i_r}(W \cap U_{i_1 \ldots i_r} \cap \\
&\quad \cap U_{j_1 \ldots, j_r}) = \\
&= x_{j_1 \ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1 \ldots i_r} \\
&\quad (x_{i_1 \ldots i_r}(W) \cap x_{i_1 \ldots i_r} \\
&\quad (U_{i_1 \ldots i_r} \cap U_{j_1 \ldots j_r}))
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $x_{i_1 \ldots i_r}(W)$ es abierto por hipótesis y ya vimos que $x_{i_1 \ldots i_r}(U_{i_1 \ldots i_r} \cap U_{j_1 \ldots j_r})$ es abierto. Como $x_{j_1 \ldots j_r} \circ x^{-1}_{i_1 \ldots i_r}$ es un difeomorfimo, en particular es un homeomorfismo y por lo tanto $x_{j_1 \ldots j_r}(W \cap U_{j_1 \ldots j_r})$ es abierto en $R^{r \times n}$. Esto prueba la otra inclusión.

Pero entonces, con la topología τ, resulta G_{rn} una variedad topológica de dimensión $r.n$ con cartas locales $(x_{i_1\ldots i_r}, U_{i_1\ldots i_r})$. Como además esas cartas locales están C^∞ relacionadas entre sí, entonces para ver que G_{rn} es variedad diferenciable, sólo nos queda probar que es N_2 y T_2. Es inmediato que es N_2 ya que es unión finita de abiertos homeomorfos al N_2 $R^{r\times n}$. Pasamos a probar que es T_2.

Sean H, $H' \in G_{rn}$ y sea $(H^n)_{n=1}^\infty$ una sucesión que tiende a H y a H'. Si H y H' están en un mismo abierto coordenado $U_{i_1,\ldots,i_r}$, como este abierto es homeomorfo al T_2 $R^{r\times n}$, resultaría $H = H'$. Entonces sólo queda examinar la posibilidad

$$H \in U_{i_1\ldots i_r} \sim U_{j_1\ldots j_r}$$
$$H' \in U_{j_1\ldots j_r} \sim U_{i_1,\ldots i_r}$$

que vamos a ver que no se puede dar. Es claro que existe $m_0 \in N$ tal que $H^m \in U_{i_1\ldots i_r} \cap U_{j_1\ldots j_r}$ para $m \geq m_0$. Entonces

$$A^m_{i_1\ldots i_r} = x_{i_1\ldots i_r}(H^m) \text{ tiende a } A_{i_1\ldots i_r} = x_{i_1\ldots i_r}(H)$$
$$A^m_{j_1\ldots j_r} = x_{j_1\ldots j_r}(H^m) \text{ tiende a } A_{j_1\ldots j_r} = x_{j_1\ldots j_r}(H')$$

Si hacemos $\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r})$, es claro que las filas de esta matriz generan H^m, es decir

$$\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r}) \in f(H^m)$$

Análogamente es

$$\bar{\alpha}_{j_1\ldots j_r}(A^m_{j_1\ldots j_r}) \in f(H^m)$$

Por lo tanto, según hemos visto, existe $C^m \in GL(r,R)$ tal que

$$\bar{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r}) = C^m.\bar{\alpha}_{j_1\ldots j_r}(A^m_{j_1\ldots j_r})$$

Aplicando $\alpha_{j_1\ldots j_r}$ obtenemos:

$$\alpha_{j_1\ldots j_r}(\bar{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r})) =$$

$$= C_m\, \alpha_{j_1\ldots j_r}(\bar{\alpha}_{j_1\ldots j_r}(A^m_{j_1\ldots j_r})) =$$

$$= C_m.I = C_m$$

Tomando limite para $m \to \infty$, por la continuidad de $\bar{\alpha}_{i_1\ldots i_r}$ y $\alpha_{j_1\ldots j_r}$ es:

$$\alpha_{j_1\ldots j_r}(\bar{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A_{i_1\ldots i_r})) = \lim_{m\to\infty} C^m = C$$

Pero el primer miembro tiene determinante cero al no estar H en $U_{j_1\ldots j_r}$.

Luego:

$$\det C = 0$$

También podemos escribir

$$\bar{\alpha}_{j_1\ldots j_r}(A^m_{j_1\ldots j_r}) = (C^m)^{-1}.\bar{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r})$$

Aplicando $\alpha_{i_1\ldots i_r}$:

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}(\overline{\alpha}_{j_1\ldots i_r}(A^m_{j_1\ldots j_r})) = (C^m)^{-1}.$$

$$.\alpha_{i_1\ldots i_r}(\overline{\alpha}_{i_1\ldots i_r}(A^m_{i_1\ldots i_r})) = (C^m)^{-1}.I = (C^m)^{-1}$$

Por la continuidad de $\alpha_{i_1\ldots i_r}$ y $\overline{\alpha}_{j_1\ldots j_r}$ resulta, tomando límite:

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}(\overline{\alpha}_{j_1\ldots j_r}(A^m_{j_1\ldots j_r})) = \lim_{m\to\infty} (C^m)^{-1} = D$$

y como el primer miembro tiene determinante cero por no estar H' en $U_{i_1\ldots i_r}$, resulta:

$$\det D = 0$$

Luego:

$$1 = \det I = \det C^m.(C^m)^{-1} = \det C^m.\det(C^m)^{-1}$$

y tomando limite: 1 = 0, absurdo. Luego H y H' deben estar en el mismo abierto coordenado, con lo cual H = H' y G_{rn} es T_2.

En definitiva podemos enunciar:

PROPOSICION 2.20: G_{rn} es una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión r.n con atlas dado por las cartas $(x_{i_1\ldots i_r}, U_{i_1\ldots i_r})$.

NOTA: La variedad formada por los r-planos de P^{r+n} que no necesariamente pasan por el origen, es la intersección de $G_{r-1,n}$ con un R^{r+n} que no pase por el origen, ampliado con los elementos del infinito para tener en cuenta los (r+1)-planos paralelos a R^{r+n}. Por tanto, la variedad de los r-planos de P^{r+n} es la grassmaniana $G_{r+1,n}$, de de grado n(r+1). Por ejemplo la variedad de las rectas de P^3, que constituyen el llamado espacio proyectivo reglado, para indicar que los elementos son las "rectas" de P^3, es la grassmaniana G_{22} ya estudiada. Para analizar mejor esta grassmaniana se utilizan las llamadas coordenadas pluckerianas, que vamos a definir para este caso de G_{22}, pero que se pueden extender a cualquier grassmaniana (ver, por ejemplo, HODGE-PEDOE, Methods of Algebraic Geometry, Cambridge, 1947, Cap. 7), [10].

Si x,y son dos puntos de P^3 y x_i, y_i $(i = 1,2,3,4)$ son sus coordenadas homogêneas (o sea los elementos de la matriz X anterior), se llaman coordenadas pluckerianas de la recta que ellos determinan a los determinantes

$$p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix} , \qquad p_{ij} = -p_{ji}$$

las cuales cumplen las condiciones: a) No son todas nulas, pues el rango de la matriz X es 2; b) Si la recta se determina por otros dos puntos x', y', resulta $p'_{ij} = \lambda p_{ij}$, siendo λ una constante. Estas propiedades nos dicen que las p_{ij} son "coordenadas homogêneas" de un punto de P^5. Escribiendo la matriz 4x4 formada por la repetición de la matriz X y desarrollando el determinante correspondiente por menores complementarios de orden 2, resulta la relación

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0 \qquad (1)$$

Esto nos dice que cada recta de P^3 determina un punto de P^5 cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación (1), o sea, que pertenece a la cuádrica representada por esta ecuación. Esta cuádrica se llama la cuádrica de Klein. Es decir: la grassmaniana G_{22} o el espacio reglado de 3 dimensiones, son topológicamente equivalentes a la cuádrica de P^5 representada por la ecuación (1).

Ejercicios

1. a) Describir en $G_{2,1}$ (planos por el origen en R^3) los abiertos $U_{i_1 \ldots i_r}$ y ubicarlos geometricamente

b) Hallar las coordenadas proporcionadas por los distintos $x_{i_1 \ldots i_r}$ para el plano de ecuación $x_1+2x_2+x_3=0$

c) Calcular todos los cambios de coordenadas

d) Hallar entornos disjuntos de los planos $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

2. Sea $V_r(R^{n+r})$ el conjunto de matrices $R^{r\times(n+r)}$ de rango r.

Sea $\pi : V_r(R^{n+r}) \to G_{rn}$ definida por

(Y) = subespacio generado por las filas de Y

a) Probar que C es continua

b) Sea $C = \{(c_{ij}) \in R^{r\times(n+r)} : \langle C_i, C_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \cdot c_{jk} = \delta_{ij}\}$

Probar que C es compacto

c) Probar que $\pi(C) = G_{rn}$ y concluir que G_{rn} es compacto

3. Sea X un conjunto y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de X tal que:

i) $X = \bigcup\{U_i : i \in I\}$

ii) Para cada $i \in I$ existe una biyección $\varphi_i : U_i \to V_i$ donde V_i es un abierto de R^n

iii) $\varphi_j(V_i \cap U_j)$ es abierto de R^n para todos los $i,j \in I$

iv) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es C^∞ para todos los $i,j \in I$

Probar que existe sobre X una única estructura de variedad diferenciable (salvo quizás el ser T_2) tal que $\{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ es un atlas C^∞.

8. PARTICION DE LA UNIDAD

En el estudio de las variedades diferenciables es muchas veces útil el teorema llamado "de partición de la unidad". Para establecerlo necesitamos dos lemas previos.

LEMA 2.21. Sean A un compacto de R^n y B un cerrado de R^n tales que $A \cap B = \emptyset$. Existe entonces $\varphi : R^n \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que $\varphi(A) = 1$, $\varphi(B) = 0$.

DEMOSTRACION. Sean $a,b \in R$ tales que $0 < a < b$. Sea $f : R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right) & \text{si} \quad a < x < b \\ 0 & \text{si} \quad x \leq a \text{ ó } x \geq b \end{cases}$$

Queremos ver que esta función es C^∞; en cualquier punto que no sea a ó b es claramente C^∞. Veamos que ocurre en b.

Es fácil probar inductivamente que, para $a < x < b$, $f^{(n)}(x)$ es combinación lineal de términos del tipo

$$\exp\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right) \frac{1}{(x-a)^h} \frac{1}{(x-b)^k} \qquad (1)$$

y entonces una aplicación reiterada de la regla de L'Hospital prueba que $\lim_{x\to b^-} f^{(n)}(x) = 0$. (En última instancia es el límite de $x^k e^x = x^k/e^{-x}$ cuando $x \to -\infty$). Por otra parte, al ser $f^{(n)}(x) = 0$ para $x = b$, resulta $\lim_{x\to b^+} f^{(n)}(x) = 0$. Entonces $\lim_{x\to b} f^{(n)}(x) = 0$.

Calculemos $f^{(n)}(b)$; si suponemos $f^{(n-1)}(b) = 0$, entonces

$$f^{(n)}(b) = \lim_{x\to b} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(b)}{x - b} =$$

$$= \lim_{x\to b} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x - b}$$

Pero $f^{(n-1)}(x)$ tiene la forma (1) a la izquierda de b y es 0 a la derecha de b. Entonces lo mismo vale para $f^{(n-1)}(x)/_{x-b}$ y por lo visto antes, ese límite es cero, es decir

$$f^{(n)}(b) = 0$$

Esto prueba que f es C^∞ en b y de la misma forma se prueba que lo es en a.

Consideremos ahora la función $F:R \to [0,1]$ definida por

$$F(x) = \frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$$

Esta función es C^∞ por serlo f y además:

si $x \leq a$, $F(x) = 1$

si $x \geq b$, $F(x) = 0$

Sea ahora $\psi:R^n \to [0,1]$ definida por:

$$\psi(x_1,\ldots,x_n) = F(x_1^2 +\ldots+ x_n^2)$$

Entonces ψ es C^∞ como composición de tales y además:

si $x_1^2 +\ldots+ x_n^2 \leq a$, $\psi(x_1,\ldots,x_n) = 1$

si $x_1^2 +\ldots+ x_n^2 \geq b$, $\psi(x_1,\ldots,x_n) = 0$

Si en lugar de a y b hubieramos construido todas estas funciones para a^2 y b^2, la función ψ tendría las propiedades:

ψ es 1 en la bola cerrada de centro 0 y radio a, $B(0,a)$

ψ es 0 fuera de la bola abierta de centro 0 y radio b, $R^n \sim V(0,b)$

Sea ahora $p = (p_1,\ldots,p_n) \in R^n$ y consideremos $\overline{\psi}:R^n \to R$ definido por

$$\overline{\psi}(x_1,\ldots,x_n) = \psi(x_1-p_1,\ldots,x_n-p_n) = F((x_1-p_1)^2+\ldots+(x_n-p_n)^2)$$

Entonces $\overline{\psi}$ es C^∞ y satisface:

$\overline{\psi}$ es 1 en $B(p,a)$

$\overline{\psi}$ es 0 fuera de $V(p,b)$

y esta función se puede construir cualesquiera sean $p \in R^n$ y $a,b \in R$ (con $0 < a < b$)

Con estas funciones auxiliares demostramos el lema. Como $A \cap B = \emptyset$ y B es cerrado, dado $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $V(x,r_x) \cap B = \emptyset$. Como $\{V(x,\frac{r_x}{2}):x \in A\}$ es un cubrimiento abierto del compacto A, existe un subcubrimiento finito, digamos

$$W_1 = V(x_1,\frac{r_{x_1}}{2}),\ldots,W_m = V(x_m,\frac{r_{x_m}}{2})$$

sean

$$V_1 = V(x_1,r_{x_1}),\ldots,V_m = V(x_m,r_{x_m}) \text{ y}$$

$$B_1 = \overline{W}_1,\ldots,B_m = \overline{W}_m$$

Como $B_i = B(x_i,\frac{r_{x_i}}{2})$, según vimos antes existen $\overline{\psi}_i:R^n \to [0,1]$ de clase C^∞ tales que

$$\overline{\psi}_i(B_i) = 1$$

$$\overline{\psi}_i(R^n \sim V_i) = 0$$

Definimos $\varphi:R^m \to [0,1]$ por:

$$\varphi = 1-(1-\psi_1)(1-\psi_2)\ldots(1-\psi_m)$$

Entonces φ es de clase C^∞; por otra parte, si $p \in A$ entonces $p \in W_i \subset B_i$ para algún i entre 1 y m y por lo tanto $\overline{\Psi}_i(p) = 1$ de lo cual se deduce $\varphi(p) = 1$. Si $p \in B$, como $V_i \cap B = \emptyset$ para todo i, entonces $\overline{\Psi}_i(p) = 0$ para todo i y entonces $\varphi(p) = 0$ ///

LEMA 2.22. Sea M una variedad diferenciable de cla se C^∞ y sea C un compacto de M incluido en el dominio de una carta local (x,U). Existe entonces una función $f:M \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que

$$f(C) = 1, \quad \text{sop } f \subset U.$$

DEMOSTRACION. Como x es un homeomorfismo, $x(C)$ es un compacto de R^n contenido en el abierto $x(U)$. Como R^n es normal, existe un abierto W de clausura compacta de R^n tal que

$$x(C) \subset W \subset \overline{W} \subset x(U)$$

Usando el lema anterior, construimos $\varphi:R^n \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que

$$\varphi(x(C)) = 1$$
$$\varphi(R^n \sim W) = 0$$

Ahora definimos $f:M \to [0,1]$ por:

$$f(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \notin U \\ \varphi \circ x(q) & \text{si } q \in U \end{cases}$$

Veamos que esta función es C^∞; para ello, dada una carta cualquiera (y,V), debemos ver que $f\circ y^{-1}: y(V) \to R$ es C^∞. Pero:

$$f\circ y^{-1}(a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \notin y(U \cap V) \\ \varphi\circ x\circ y^{-1}(a) & \text{si} \quad a \in y(U \cap V) \end{cases}$$

como es inmediato verificar. Entonces $f\circ y^{-1}$ es C^∞ como composición de tales en el abierto $y(U \cap V)$. Además $f\circ y^{-1}$ es nula en el abierto $y(V \sim \text{sop } f)$. Pero $\text{sop } f \subset x^{-1}(\overline{W}) \subset x^{-1}(x(U)) = U$ y entonces

$$y(V \sim \text{sop } f) \cup y(U \cap V) \supset y(V \sim U) \cup y(U \cap V) =$$
$$= y(V)$$

Entonces $f\circ y^{-1}$ es C^∞ en los abiertos $y(U \cap V)$ e $y(V \sim \text{sop } f)$ cuya unión es $y(V)$, luego $f\circ y^{-1}$ es C^∞ en $y(V)$.

Por último, si $q \in C$, entonces $x(q) \in x(C)$ y entonces

$$f(q) = \varphi(x(q)) = 1$$

y si $f(q) \neq 0$, necesariamente $q \in U$ y además $\varphi(x(q)) \neq 0$.

Entonces $x(q) \in W$, o sea $q \in x^{-1}(W)$. Entonces

$$\text{sop } f \subset \overline{x^{-1}(W)} = x^{-1}(\overline{W}) \subset x^{-1}(x(U)) = U$$

(La igualdad $\overline{x^{-1}(W)} = x^{-1}(\overline{W})$ vale por lo siguiente: al ser $\overline{W}$ compacto, $x^{-1}(\overline{W})$ es compacto y, como la variedad es T_2, es cerrado. Entonces $\overline{x^{-1}(W)} \subset x^{-1}(\overline{W})$. Además

$\overline{x(x^{-1}(W))}$ es compacto en R^n, luego cerrado y contiene a W. Entonces $\overline{W} \subset \overline{x(x^{-1}(W))}$, de donde $x^{-1}(\overline{W}) \subset \overline{x^{-1}(W)}$) ///

Estamos ahora en condiciones de probar el teorema de partición de la unidad.

TEOREMA 2.23. (Partición de la unidad): Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un cubrimiento abierto de M.

Existe entonces una familia $\{g_i\}_{i\in I}$ de funciones $g_i : M \to [0,1]$ de clase C^∞ tales que

i) Dado $i \in I$ existe $\alpha \in A$ tal que

$$\operatorname{sop} g_i \subset U_\alpha$$

ii) La familia $\{\operatorname{sop} g_i\}_{i\in I}$ es localmente finita

iii) $\sum_{i\in I} g_i = 1$

DEMOSTRACION. La propiedad iii) significa que para cada $q \in M$ es

$$\sum_{i\in I} g_i(q) = 1$$

y por la propiedad ii), la suma en el primer miembro es finita.

Antes de dar la demostración propiamente dicha, notemos que M es N_2 y T_3 (ejercicio 1.b de la sección 1 de este capítulo); entonces, por el teorema de matrización de Urysohn ([13], pag. 147), M es metrizable. En particular, M es paracompacta (id., pag. 184) y en consecuencia normal (id., pag. 183).

Pasamos ahora a la demostración del teorema. Consideramos un refinamiento localmente finito $\{U_i'\}_{i\in I}$ de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ tal que cada U_i' sea dominio de alguna carta local y además tal que $\overline{U_i'}$ sea compacto; la existencia de ese tipo de refinamiento se puede ver de la siguiente manera: como los dominios de cartas locales con clausura compacta forman claramente una base de abiertos, cada U se puede escribir como unión de abiertos de ese tipo. Variando α obtenemos un refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ con dominios de cartas de clausura compacta y ahora, utilizando la paracompacidad de M, obtenemos un refinamiento localmente finito del anterior refinamiento y esos son los U_i'.

Ahora utilizando la normalidad de M conseguimos un cubrimiento $\{V_i\}_{i\in I}$ de M tal que

$$V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i' \subset U_\alpha$$

(ésto se suele llamar "lema de contracción" [shrinking lemma])

Entonces $\overline{V}_i$ es un compacto contenido en el dominio U_i' y por el lema anterior existe $\psi_i: M \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que

$$\psi_i(\overline{V}_i) = 1, \text{ sop } \psi_i \subset U_i'$$

Sean ahora $g_i: M \to [0,1]$ definidas por:

$$g_i = \frac{\psi_i}{\sum_{i\in I} \psi_i}$$

para $q \in M$, sea U un entorno de q que corta sólo a un número finito de U'_i, digamos $U'_{i_1}, \ldots, U'_{i_m}$. Entonces, para $p \in U$:

$$g_i(p) = \frac{\psi_i(p)}{\psi_{i_1}(p) + \ldots + \psi_{i_m}(p)}$$

lo cual prueba que las g_i están bien definidas y además que todo punto tiene un entorno en el cual g_i es C^∞. Luego g_i es C^∞ en todo M.

Por otra parte:

$$\text{sop } g_i = \text{sop } \psi_i \subset U'_i \subset U_\alpha$$

lo cual prueba el punto i). El punto ii) se deduce del caracter localmente finito de $\{U'_i\}_{i\in I}$ y el punto iii) es trivial a partir de la definición de las g_i ///

Ejercicio

Sea M una variedad C^∞ y sean A compacto, V abierto tales que $A \subseteq V$. Probar que existe $f: M \to [0,1]$ de clase C^∞ tal que $f(A) = 1$ y sop $f \subset V$

a) Usando partición de la unidad

b) Usando sólo el lema 2.

CAPITULO III

ESPACIOS TANGENTES Y APLICACIONES ENTRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

1. ESPACIO VECTORIAL TANGENTE

Si una variedad diferenciable M, de dimensión n, se supone sumergida en R^m ($m > n$), la definición de espacio tangente en un punto, puede hacerse como una generalización fácil de la que usualmente se da para la recta tangente a una curva o el plano tangente a una superficie de R^3. En estos casos, el espacio tangente es un n-plano de R^m, el cual queda, generalmente, fuera de M. Si M no se supone contenida en un espacio numérico de mayor número de dimensiones, ya no se puede pensar en subespacios lineales que queden fuera de M y la definición de espacio tangente en un punto no puede basarse en la idea intuitiva de espacio lineal que, en el entorno del punto, aproxima a la variedad.

Si M es de clase C^∞, se puede dar una definición intrínseca (sin uso de coordenadas) muy interesante y útil, que vamos a dar a continuación (debida a CHEVALLEY, Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946 [4]). Si M es de clase C^r (r finito) la definición no sirve y hay que dar otra que también veremos después, mas cercana a la corriente para el caso de variedades sumergidas en otra variedad de mayor número de dimensiones.

Sea F(p) el conjunto de las funciones de clase C^∞, con valores reales, cuyos dominios contienen un entorno del punto $p \in M$. Si M es de clase C^∞, el conjunto F(p) no depende de la carta local considerada, pues las funciones C^∞ de funciones C^∞, son también de clase C^∞.

DEFINICION 3.1. Se llama vector tangente a M en p, a toda aplicación $X:F(p) \to R$, tal que:

a) Es lineal, o sea,

$$X(af + bg) = a\,X(f) + b\,X(g),\quad a,b \in R,\quad f,g \in F(p); \tag{3.1}$$

b) Es una derivación, o sea,

$$X(fg) = X(f)\,g(p) + f(p)\,X(g),\quad f,g \in F(p). \tag{3.2}$$

En vez de X(f), si no hay posible confusión, escribiremos a veces Xf. Dada una carta local que contiene a p, si sus coordenadas son x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, unos ejemplos importantes de vectores tangentes son las aplicaciones

$$X_i : f \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \qquad \text{para } i = 1,2,\ldots,n \tag{3.3}$$

que se comprueba inmediatamente que cumplen a) y b).

Consecuencias inmediatas de la definición son:

1. Para cualquier vector X y cualquier constante k, es $X(k) = 0$. En efecto, una constante k puede considerarse tanto como una función constante, $f = k \in F(p)$, para la cual se aplica (3.2) como una constante $k \in R$, para la

cual se aplica (3.1). Por tanto, cualquiera que sea la función $g \in F(p)$ es, por un lado $X(kg) = k\,X(g)$, y por el otro $X(kg) = X(k)\,g(p) + k\,X(g)$, de donde $X(k)\,g(p) = 0$, para cualquier $g(p)$, y por tanto $X(k) = 0$.

2. Si $f \in F(p)$ es nula en un entorno U_p de p, es $X(f) = 0$. En efecto, sean A, B un compacto y un abierto de M que contienen a p y tales que $A \subset B \subset U_p$. Según el último ejercicio del Capítulo 2, nº 9, existe una función $h \in C^{\infty}$ que vale 1 sobre A y tiene el soporte contenido en B. La función $g = 1 - h$, será nula en A e igual a 1 fuera de B. Por tanto se puede escribir $f = gf$ y aplicando (3.2) resulta

$$X(f) = X(fg) = X(f).0 + 0.X(g) = 0.$$

3. Si dos funciones f_1, f_2 de $F(p)$ coinciden en un entorno de p, es $X(f_1) = X(f_2)$ (para cualquier X). Basta aplicar la consecuencia anterior a la función $f_1 - f_2$ y la linealidad (3.1).

De las consecuencias 1 y 3 se deduce:

4. Si f es constante en un entorno de p, es $X(f) = 0$, para todo X.

Este hecho puede usarse para dar una definición alternativa del espacio tangente en un punto que también resulta útil. En lugar de tomar como dominio de un vector tangente el conjunto $F(p)$ de las funciones C^∞ cuyo dominio es un entorno de p, tomamos como $F = \{f: M \to R$ de clase $C^\infty\}$ y definimos un vector tangente en p como una función $X: F \to R$ que sea lineal y derivación. La equivalencia de estas definiciones se deriva del hecho de que, dada $f \in F(p)$, existe $\tilde{f} \in F$ tal que $\tilde{f}$ coincide con f en un entorno de p. En efecto, sea C un entorno compacto de p contenido en el dominio de f y sea $\varphi: M \to R$ de clase C^∞ tal que $\varphi(C) = 1$ y sop $\varphi \subset$ dominio de f. Definimos $\tilde{f}: M \to R$ por:

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} \varphi(q).f(q) & \text{si } q \text{ está en el dominio de } f \\ 0 & \text{para todo otro } q \end{cases}$$

Se verifica facilmente que $\tilde{f}$ es C^∞ (lo es en los abiertos dom f y $M \sim$ sop φ cuya unión produce M) y, por construcción, $\tilde{f}$ coincide con f en el entorno C de p. Por lo que vimos antes, es $X(\tilde{f}) = X(f)$ para todo X vector tangente a M en p.

DEFINICION 3.2. La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar se definen por las igualdades

$$(X' + X'') f = X'(f) + X''(f), \quad (\lambda X) f = \lambda X(f) \quad (3.4)$$

con $\lambda \in R$, con lo cual los vectores tangentes en un punto $p \in M$ forman un espacio vectorial sobre R, que se llama el espacio vectorial tangente a M en p y se representa por T_p.

Vamos a demostrar que, cualquiera que sea p, la dimensión de T_p es igual a la dimensión n de la variedad M. Consideremos una carta que contenga a p y sean x_i las coordenadas locales de la misma. Sean $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ las coordenadas de p, de manera que el punto p lo indicaremos indistintamente por p o por x^0. Poniendo para abreviar

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{3.5}$$

siempre se puede escribir la identidad

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x^0)\,(x_i - x_i^0) + g(x) \tag{3.6}$$

donde la función $g(x)$ pertenece a $F(p)$ y cumple las condiciones

$$g(x^0) = 0, \quad g_i(x^0) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3.7}$$

Observemos la identidad

$$\frac{d}{dt}\, g(t(x-x^0)+x^0) = \sum_{i=1}^{n} g_i(t(x-x^0)+x^0)(x_i - x_i^0) \tag{3.8}$$

de la cual, usando (3.6) y (3.7) se deduce

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \int_0^1 g_i(t(x-x^0)+x^0)\, dt. \tag{3.9}$$

Siendo $g \in C^{\infty}$, también será $g_i \in C^{\infty}$ y por tanto, aplicando las propiedades (3.1), (3.2), y teniendo en cuenta (3.7) resulta $X(g) = 0$. De aquí, aplicando el vector X a (3.6) resulta

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^0).X(x_i) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \quad (3.10)$$

lo cual nos dice:

a) Todo vector tangente $X \in T_p$ se expresa como combinación lineal de los vectores X_i (3.3). Estos vectores X_i son independientes, pues si existiera una relación de la forma $\sum_i \lambda_i X_i = 0$, aplicando sucesivamente el primer miembro a las funciones x_i, resulta que todos los coeficientes λ_i deben ser nulos. Por tanto, los vectores (3.3) constituyen una base, asociada a la carta local cuyas coordenadas son x_i, del espacio vectorial tangente T_p, el cual, por consiguiente resulta ser de dimensión n.

Estos vectores X_i se suelen representar

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

b) Los números reales $\lambda_i = X(x_i)$ son las componentes del vector X en la base X_i (3.11) asociada a las coordenadas locales x_i.

Obsérvese que por costumbre, las componentes λ^i se indican con supraíndices.

Por un cambio $x_i \to x'_i$ de coordenadas locales, puesto que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x'_m} \frac{\partial x'_m}{\partial x_i} \qquad (3.12)$$

resulta

$$X(f) = \sum_{i,m=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x'_m}\right)_p \left(\frac{\partial x'_m}{\partial x_i}\right)_p \lambda^i_i \qquad (3.13)$$

y por tanto las componentes λ'_m del vector X en la nueva base $\partial/\partial x'_m$ se vinculan con las primitivas componentes λ^i por

$$\lambda'^m = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_m}{\partial x_i}\right)_p \lambda^i . \qquad (3.14)$$

Estas son las fórmulas de transformación para las componentes de los vectores tangentes (o simplemente "vectores") por un cambio de coordenadas locales. En el cálculo tensorial clásico, las fórmulas (3.14) se toman como definición de vector.

<u>Otra definición de vector tangente</u>. En la demostración anterior se ha utilizado que M es de clase C^∞, tanto para definir el conjunto F(p), como para poder asegurar que si $g \in C^\infty$, también la integral entre 0 y 1 de (3.9) es de clase C^∞. Si fuera $g \in C^r$, con $r < \infty$, sólo se podría asegurar que dicha integral es de clase C^{r-1} y por tanto no se podría aplicar la condición (3.2) que exige que f y g sean de la misma clase. Si M es de clase C^r, $r < \infty$, se puede tomar el conjunto de funciones $F_r(p)$

de clase C^r cuyo dominio contiene un entorno de p, pero entonces no bastan las condiciones (3.1), (3.2) para asegurar que el espacio vectorial de los vectores tangentes es de dimensión n. Es más, A.G.WALKER y W.F. NEWNS (Journal London Math, Society, 1956, pag. 400-407) [18] han demostrado que en tal caso el espacio vectorial tangente es de dimensión infinito (con la potencia del continuo). Esto hace que para variedades de clase finita r, la definición de vector tangente deba modificarse, para que los vectores resulten elementos útiles en geometría. Una definición posible es la siguiente.

Sea M una variedad diferenciable de clase C^r, $1 \leq r < \infty$. Sea $F_r(p)$ el conjunto de las funciones de clase C^r cuyo dominio contiene un entorno de p; este conjunto no depende de la carta local utilizada para definir las derivadas parciales. Sea γ una curva de M que pase por p. En un sistema de coordenadas locales x_i, las ecuaciones de γ serán de la forma $x_i = x_i(t)$, con $x_i(t_0) = x_i^0$ = coordenadas de p. Diremos que γ es de clase C^r si $x_i(t) \in C^r$ lo cual no depende de la carta considerada.

DEFINICION 3.3. Se llama <u>vector tangente</u> a la curva γ de clase C^r, respecto del parámetro t, en el punto p, a la aplicación $F_r(p) \rightarrow R$ definida por

$$X(\gamma): f \to \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \cdot x_i'(t_0), \quad f \in F_r(p) \tag{3.15}$$

donde x_i' indica la derivada dx_i/dt.

El conjunto de los vectores tangentes en p a todas las curvas de M que pasan por este punto, con sus distintas parametrizaciones de clase C^r, definiendo la suma de vectores y el producto por un escalar de la manera obvia, constituye el espacio vectorial tangente T_p a M en p. Obsérvese que según (3.15), una base de este espacio vectorial está constituida por los vectores

$$X_i: f \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \tag{3.16}$$

que son vectores tangentes a las curvas $x_i(t) = t + x_i^0$, $x_h = x_h^0$ $(h = 1,2,\ldots,i-1,1+1,\ldots,n)$ que para $t = 0$ pasan por p. Las componentes en esta base del vector tangente a la curva γ son $x_i'(t_0)$, las cuales dependen de la curva, como conjunto de puntos, y de su parametrización. Recíprocamente, dados n números cualesquiera λ^i, ellos son componentes del vector tangente a la curva $x_i = \lambda^i t + x_i^0$.

Ejercicios

1. Si M_1, M_2 son dos variedades diferenciables, probar que el espacio vectorial tangente $T_{x,y}$ de la variedad diferenciable producto $M_1 \times M_2$ en el punto (x,y), $x \in M_1$, $y \in M_2$, es la suma directa de T_x y T_y.

2. Para vincular los vectores definidos en este Capítulo, con los vectores clásicos, observar que la aplicación $X_{\vec{u}}$ definida por un vector clásico $\vec{u}$, es

$$X_{\vec{u}}: f \to \vec{u}.\text{grad } f.$$

3. Consideremos el subconjunto $F_s(p)$ de las funciones de $F(p)$ que son de la forma $f = c + \sum f_i g_i$, siendo c una constante, $f_i(p) = g_i(p) = 0$, $f_i, g_i \in F(p)$ y la suma finita. Probar que una aplicación lineal $F(p) \to R$ es una derivación si y sólo si, es cero sobre $F_s(p)$. (Indicación: observar que $fg = (f-f(p))(g-g(p)) + f(p)g + g(p)f - f(p)g(p)$).

4. Sea M una variedad diferenciable y, dado $p \in M$, sea $\{X_1,\dots,X_n\}$ una base cualquiera del espacio tangente a M en p. Probar que existe una carta local (x,U) en M alrededor de p tal que $X_i = (\frac{\partial}{\partial x^i})$ $(i = 1,2,\dots,n)$

5. Sea $S^2 \subset R^3$ la superficie esférica y sea (x,U) la carta local dada por la latitud y la longitud. Sea $f: R^3 \to R$ la función $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$. Hallar $(\frac{\partial}{\partial \varphi})_p(\bar{f})$ y $(\frac{\partial}{\partial \theta})_p(\bar{f})$ para todo $p \in U$, donde $\bar{f}$ es f restringida a S^2.

2. EL ESPACIO TANGENTE DUAL: COVECTORES

En lo sucesivo, para variedades diferenciables de clase C^∞ consideraremos la primera definición de espacio vectorial tangente y para variedades de clase C^r, la segunda definición, de manera que siempre tendremos en cada punto p de la variedad M el espacio vectorial tangente T_p de dimensión n.

Podemos, por tanto, considerar el espacio dual T_p^*, conjunto de las aplicaciones lineales $T_p \to R$. Sus elementos se llaman covectores. Por tanto, los covectores aplican linealmente a los vectores en los reales. Para formar una base de T_p^* se sigue el método general del Algebra Lineal. La base dual de la X_i de T_p está formada por los covectores φ^i definidos por

$$\varphi^i(X_h) = \delta^i_h \tag{3.17}$$

siendo δ^i_h los símbolos de Kronecker (=1 si i = h e = 0 si i $\neq$ h).

Un covector será de la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varphi^i \tag{3.18}$$

siendo $\mu_i \in R$ sus componentes relativas a la base φ^i y el resultado de la aplicación de φ al vector $X = \sum_h \lambda^h X_h$ es el número real

$$\varphi(X) = \sum_{i,h=1}^{n} \mu_i \lambda^h \varphi^i(X_h) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda^i \tag{3.19}$$

que es el llamado producto escalar de X y φ. En particular, es $\varphi^i(X) = \lambda^i$. Por un cambio de coordenadas $x_i \to x'_i$, aplicando (3.14) a la transformación inversa $x'_i \to x_i$, resulta $\lambda^i = \sum_m (\partial x_i/\partial x'_m)_p \lambda'^m$ y siendo $\varphi(X)$ independiente del sistema de coordenadas, debe ser

$$\varphi(X) = \sum_h \mu'_h \lambda'^h = \sum_i \mu_i \lambda^i = \sum_i \mu_i \left(\frac{x_i}{x'_h}\right)_p \lambda'^h \qquad (3.20)$$

de donde

$$\mu'_h = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}\right)_p \mu_i \qquad (3.21)$$

que son las fórmulas de transformación para las componentes de los covectores. En el cálculo tensorial clásico, estas fórmulas se toman como definición de los covectores o vectores covariantes. Las componentes de los covectores se indican con índices inferiores, con lo cual se distinguen de las componentes de los vectores que se indican, como dijimos, con supraíndices.

<u>Diferencial X de una función</u>. Dada una función $f \in F(p)$, queda definido un covector $(df)_p$ en el punto p, por la relación

$$(df)_p X = X(f) \qquad (3.22)$$

Se comprueba inmediatamente que esta aplicación es lineal.

DEFINICION 3.4. El covector $(df)_p$ definido por (3.22) se llama el <u>diferencial</u> de f en el punto p.

En particular, fijado un sistema local de coordenadas x_i que contenga a p, para $f = x_i$ se tiene

$$(dx_i)_p X = X(x_i) = \lambda^i = \varphi^i(X) \qquad (3.23)$$

y por tanto, para cualquier covector φ, según (3.18), se tiene

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, (dx_i)_p \tag{3.24}$$

es decir, <u>las diferenciales</u> $(dx_i)_p$ <u>forman una base de</u> T_p^*.

También, juntando (3.22) con (3.23), resulta

$$(df)_p \, X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \lambda^i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p (dx_i)_p \, X \tag{3.25}$$

que tiene la forma clásica del diferencial de una función. En particular, por un cambio de coordenadas $x_i \to x_i'$, resulta

$$(dx_i')_p = \sum_{h=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_h}\right)_p (dx_h)_p .$$

Las fórmulas (3.25) y (3.26) nos dicen que los covectores $(df)_p$, $(dx_i)_p$ se comportan como los diferenciales clásicos de las funciones de varias variables. Esto es muy práctico como regla operatoria con covectores, si bien hay que tener en cuenta que su definición es muy distinta de la clásica.

3. FIBRADO TANGENTE

DEFINICION 3.5. Se llama <u>fibrado tangente</u> de una variedad diferenciable M, al conjunto

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p$$

unión de los espacios vectoriales tangentes de M en todos sus puntos p.

TEOREMA 3.1. <u>Si M es de clase C^r y dimensión</u> n, T(M) <u>es una variedad diferenciable de clase C^{r-1} y dimensión</u> 2n.

DEMOSTRACION. Un punto de T(M) es un par (p,X) con $p \in M$, $X \in T_p$. Para todo p existe un sistema de coordenadas locales x_i y una base asociada X_i de T_p, respecto de la cual es $X = \sum_i \lambda^i X_i$. La aplicación $(p,X) \to (x_1,x_2,\ldots,x_n;\lambda^1,\lambda^2,\ldots,\lambda^n)$ representa en R^{2n} a los puntos de T(M) correspondientes al abierto de M para el cual valen las coordenadas locales x_i. Esta correspondencia es localmente biyectiva y por tanto permite inducir en T(M) la topología natural de R^{2n} (usar ejercicio 3 de la sección 7 del Capítulo II). Para ver que T(M) es una variedad diferenciable se observa que si en otra carta es $(p,X) \to (x'_1,x'_2,\ldots,x'_n;\lambda'^1,\lambda'^2,\ldots,\lambda'^n)$ las fórmulas de transformación entre las coordenadas de un mismo punto, recordando (3.14) son

$$x_i \to x'_i, \quad \lambda^i \to \lambda'^i = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_h}\right)_p \lambda^h \tag{3.28}$$

las cuales son de clase C^{r-1} y el teorema queda demostrado.

DEFINICION 3.6. Se llama <u>fibrado cotangente</u>, al conjunto

$$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^* \tag{3.29}$$

unión de los espacios duales de los tangentes a M en sus puntos p.

Igual que antes se demuestra que $T^*(M)$ es una variedad diferenciable de clase C^{r-1} y dimensión $2n$.

TEOREMA 3.2. <u>La variedad T(M) es orientable.</u>

DEMOSTRACION. Según (3.28) el jacobiano de la transformación $(x,\lambda) \to (x',\lambda')$ es

$$\left|\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial(x')}{\partial(x)} & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\partial(x')}{\partial(x)} \end{array}\right| = \left(\frac{\partial(x')}{\partial(x)}\right)^2 > 0, \tag{3.30}$$

donde $\partial(x')/\partial(x)$ representa el jacobiano de la transformación $x \to x'$. Según la definición 2.8, esta desigualdad demuestra el teorema.

Corolario de este Teorema y del 2.4 es que para las variedades M no orientables, los espacios T(M) no son nunca los productos $M\times T_p$ si bien coinciden "localmente". Conviene sonsiderar con detalle la diferencia entre T(M) y el producto $M\times T_p$. Naturalmente que aquí se considera el espacio vectorial T_p como una variedad diferenciable equivalente a R^n, con la identificación natural del "vector" de componentes λ^i con el "punto" de coordenadas λ^i.

Para la variedad producto $M\times T_p$, el espacio T_p es siempre el mismo y los cambios de coordenadas $x \to x'$ no influyen en T_p. Los cambios de coordenadas en T_p son de la forma $\lambda'^i = \sum a_{ih} \lambda^h$, con los coeficientes a_{ih} independientes de x. Por tanto, el jacobiano de un cambio de coordenadas en $M\times T_p$ es de la forma $|\partial(x')/\partial(x)||a_{ih}|$, expresión que ya no es un cuadrado, como en (3.30) y en consecuencia $M\times T_p$ puede ser o no ser orientable. Como T_p es isomorfo a R^n y por tanto es orientable, el producto $M\times T_p$ será orientable o no según lo sea M. Si M es orientable, puede ocurrir que sea $T(M) = M\times T_p$ en cuyo caso se dice que M es una <u>variedad paralelizable</u>. Si, en cambio $T(M) \neq M\times T_p$, se dice que M no es <u>paralelizable</u>.

Para las variedades paralelizables, fijada una base X_i de T_p, se tienen en cada punto de M, bien determinados, los n vectores tangentes X_i. Cada uno de estos vectores es un punto de $M\times T_p = T(M)$ y por tanto ellos varian con continuidad sobre M. Reciprocamente, si M es tal que admite en cada punto n vectores tangentes no nulos, independientes entre si, que varian con continuidad sobre M, se pueden tomar en cada punto estos vectores como base del espacio tangente correspondiente y por tanto $T(M) = M\times T_p$.

Ejemplos

1. El toro T^2 es una superficie paralelizable. Basta tomar en cada punto los dos vectores tangentes al meridiano y al paralelo correspondientes para tener dos vectores tangentes en cada punto, que varian con continuidad. Mas generalmente es inmediato ver que el producto de variedades paralelizables es paralelizable. En consecuencia, el toro n dimensional $T^n = S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1$ (n factores) es paralelizable por serlo la circunferencia S^2. S^1

2. La esfera ordinaria S^2 no es paralelizable. Bastará demostrar que no admite un campo continuo de vectores tangentes. Sea C un círculo máximo de la esfera. Fijemos en cada punto de la esfera una orientación, por ejemplo la que gira en sentido contrario a las agujas del reloj mirando desde el exterior. Fijemos también un sentido de recorrido cualquiera a C, con lo cual en cada punto P de C quedarán bien determinados el vector tangente a C y el vector del campo; sea φ el ángulo entre estos dos vectores, medido según la orientación fijada sobre la esfera. Cuando P describe C, al volver al punto de partida, el ángulo φ habrá variado un múltiplo de 2π, o sea, $\int_C d\varphi = 2k\pi$, siendo k un número entero, positivo, nulo o negativo.

Tomemos dos puntos diametralmente opuestos de C y hagamos girar con continuidad este círculo alrededor de ellos. Como el campo supuesto es continuo, el número k obtenido por la misma operación anterior, deberá también varias con continuidad y como es un número entero, permanecerá constante. Al volver a superponer C sobre si mismo, después de girar 180°, el sentido de recorrido de C se habrá invertido; el ángulo de la tangente a C con el vector del campo será ahora $\psi = \pi + \varphi$. Por tanto $d\psi = d\varphi$ y la variación total de ψ será $\int_{-C} d\psi = - \int_{C} d\varphi = -2k\pi$

Como este valor debe ser el mismo anterior, resulta $k = -k$ y por tanto $k = 0$.

Por otra parte, consideremos la familia de círculos menores paralelos a C, que van desde C hasta el polo O del mismo. Haciendo en cada uno de ellos la operación anterior, por la continuidad del campo, también k deberá permanecer constante. Al reducirse el paralelo al punto O, como en este punto hay un solo vector del campo, el ángulo φ varia en $\pm 2\pi$ (el signo depende del sentido de recorrido), puesto que el vector del campo es fijo y el versor tangente al paralelo varía en $\pm 2\pi$. En consecuencia, resulta $k = \pm 1$. Este resultado es contradictorio con el resultado anterior $k = 0$, lo cual prueba que la existencia de un campo continuo de vectores tangentes no es admisible.

Esta demostración elemental es debida a W.FENCHEL, Matem. Tids. B. 1932.

3. Sobre S^{2m-1} existe siempre un campo continuo de vectores tangentes. En efecto, sea el punto $(x_1,x_2,\dots,x_m, x_{m+1},\dots,x_{2m})$ de la esfera $x_1^2 + x_2^2 +\dots+ x_{2m}^2 = 1$, que es la S^{2m-1}. En este punto el vector $(-x_{m+1},-x_{m+2},\dots,-x_{2m}, x_1,x_2,\dots,x_m)$ es perpendicular al radío y por tanto es tangente a S^{2m-1}, siendo evidente que varía con continuidad sobre esta variedad.

4. CAMPOS DE VECTORES, Y DE COVECTORES

Hemos definido los vectores X en un punto $p \in M$. Si en cada punto $p \in M$ se tiene determinado un vector X, se dice que se tiene un campo de vectores sobre M. La expresión de un campo de vectores en la base asociada a la carta local de coordenadas será

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.31}$$

donde ahora las componentes λ^i son funciones de punto, o sea, $\lambda^i = \lambda^i(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Si estas funciones λ^i son de clase C^∞, se dice que el campo de vectores es de clase C^∞.

Si F representa el conjunto de funciones de clase C^∞ definidas en M (supuesta también de clase C^∞), todo campo de vectores (3.31) define una aplicación $F \to F$, la cual es lineal y una derivación, de acuerdo con la Definición 3.1, o sea,

$$X(af+bg) = aX(f) + bX(g), \quad X(fg) = X(f)g + fX(g),$$
$$f,g \in F \qquad (3.32)$$

Estas condiciones son análogas a las (3.1), (3.2), pero ahora $X(f)$, $X(g)$ son funciones C^{∞}, y pueden servir como definición de un campo de vectores.

Dados dos campos de vectores sobre M, sean X,Y, se indica con XY a la aplicación $F \to F$ resultante de componer la Y con la X. Esta aplicación no es un campo de vectores, puesto que no se cumple la segunda condición (3.32). En efecto, es

$$XY(fg) = X(gY(f) + fY(g)) = Y(f)X(g) + gXY(f) +$$
$$+ X(f)Y(g) + fXY(g). \qquad (3.33)$$

En cambio, la diferencia

$$[X,Y] = XY - YX \qquad (3.34)$$

cumple las condiciones (3.32) como se comprueba facilmente. Para la segunda basta escribir XY(fg) de manera análoga a (3.33) y restar. Por tanto $[X,Y]$ es un nuevo campo de vectores que se llama el "corchete" de X e Y.

DEFINICION 3.7. Se llama <u>derivada de Lie</u> del campo Y respecto del campo X, al campo $[X,Y]$, o sea,

$$L_X\, Y = [X,Y] \tag{3.35}$$

En un sistema de coordenadas locales, dados los campos

$$A = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad B = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.36}$$

se tiene

$$A\,B = \sum_{i,j=1}^{n} a^i b^j{}_{,i} \frac{\partial}{\partial x_j} + a^i b^j \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\,,$$

$$[A,B] = AB - BA = \sum_{i,j=1}^{n} (a^i b^j{}_{,i} - b^i a^j{}_{,i}) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{3.37}$$

donde con una coma se ha indicado la derivada parcial ordinaria. La última expresión es también la derivada de Lie de B respecto del campo A.

Si X, Y, Z son tres campos de vectores sobre M se comprueban facilmente las relaciones

$$[Y,X] = -[X,Y]\,, \quad [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0. \tag{3.38}$$

El conjunto de los campos de vectores sobre M, con la definición natural de suma y producto por un escalar (número real) es un espacio vectorial de dimensión n, en el que la operación corchete actua como ley de composición interna. Recordando que se llama "álgebra" sobre un cuerpo

K a un espacio vectorial V con una composición interna entre los vectores, tal que:

a) $(aX).Y = a(X.Y) = X.(aY)$;

b) $(X+Y).Z = X.Z + Y.Z$;

c) $X.(Y+Z) = X.Y + X.Z$,

resulta que los campos vectoriales sobre M, con la operación corchete entre ellos, constituyen un álgebra. Por cumplir las condiciones (3.38) se dice que se trata de un <u>álgebra de Lie</u>.

A veces es útil la siguiente identidad

$$\begin{aligned}[uX,vY] &= u\,X(vY) - v\,Y(uX) = u(X(v)Y + vXY) - \\ &\quad - v(Y(u)X + uYX) \\ &= uv[X,Y] + u\,X(v)\,Y - v\,Y(u)\,X.\end{aligned}$$

<u>Ejercicios</u>

1. Comprobar que en un sistema local de coordenadas x_i es

$$[X,Y] = \sum_{h=1}^{n} (XY(x_h) - YX(x_h)) \frac{\partial}{\partial x_h}$$

2. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

a) X es un campo vectorial C^∞ en M

b) Considerando X como función de M en T(M), X es una función C^∞

3. Sea U un abierto de una variedad diferenciable M de clase C^∞. Si X es un campo vectorial C^∞ en la variedad U, probar que dado $p \in U$ existen V entorno de p y $\tilde{X}$ campo vectorial C^∞ en M tales que $\tilde{X}$ restringido a V es igual a X restringido a V.

4. a) Si (x,U) es una carta local, probar que $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$

b) Sea $M = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 < 1,\ x > 0\}$. Sean $X = \frac{\partial}{\partial x}$, $Y = \cos x \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} x \frac{\partial}{\partial y}$. Probar que X,Y son campos C^∞, que $\{X(p), Y(p)\}$ es base de M_p para todo $p \in M$ pero que no existe carta local $((x',y'),U)$ tal que $X = \frac{\partial}{\partial x'}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y'}$.

5. Llamando $D^1(M)$ al conjunto de los campos vectoriales C^∞ en M, probar que $D^1(M)$ tiene una estructura de F-módulo. Si (x,U) es una carta local en M, probar que $D^1(U)$ es libre.

<u>Formas diferenciales</u>. Hemos definidos los covectores φ en un punto $p \in M$. Ellos son los elementos del espacio vectorial T_p^* dual de T_p. Una 1-forma diferencial o, simplemente, una 1-forma es un campo de covectores, o sea, el resultado de dar un covector en cada punto de la variedad diferenciable M. En una carta local de coordenadas x_i, tomando en cada punto como base de T_p^* los covectores $(dx_i)_p$, una 1-forma se escribirá

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i \tag{3.40}$$

donde dx_i indica que en cada punto p hay que tomar el covector $(dx_i)_p$ y los coeficientes α_i son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si estas funciones son de clase C^∞ (como supondremos siempre), la 1-forma se dice que es de clase C^∞. Las 1-formas se aplican a los campos de vectores y el resultado es la función $\omega(X) = \sum \alpha_i \lambda^i$, suponiendo $X = \sum \lambda^i (\partial/\partial x_i)$. Las 1-formas sobre M constituyen un módulo sobre el anillo de funciones F, una base del cual está formado por los diferenciales dx_i.

Una 2-forma es un elemento del producto alternado del módulo de las 1-formas por si mismo. Representando por $D^1(M)$ el espacio vectorial de los campos de vectores sobre M, en un sistema local de coordenadas x_i, una base de las 2-formas está formada por los productos exteriores $dx_i \wedge dx_j = - dx_j \wedge dx_i$, los cuales se definen como aplicaciones de $D^1(M) \times D^1(M)$ sobre F, tales que

$$dx_i \wedge dx_j \, (A,B) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a^i & a^j \\ b^i & b^j \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

donde a^i, b^i son las componentes de los campos de vectores A, B (3.36).

De esta manera, una 2-forma general se escribirá

$$\omega^{(2)} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \tag{3.42}$$

y será una aplicación lineal antisimétrica de $D^1(M) \times D^1(M)$ sobre F definida por

$$\omega^{(2)}(A,B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \begin{vmatrix} a^i & a^j \\ b^i & b^j \end{vmatrix}.$$

Se puede ver que estas definiciones son independientes del sistema de coordenadas. El producto exterior de dos 1-formas $\omega_1 = \sum \alpha_i\, dx_i$, $\omega_2 = \sum \beta_i\, dx_i$ es la 2-forma

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{i,h} \alpha_i \beta_h\, dx_i \wedge dx_h. \tag{3.44}$$

Aplicando esta 2-forma al par A,B resulta

$$\omega_1 \wedge \omega_2(A,B) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \omega_1(A) & \omega_2(A) \\ \omega_1(B) & \omega_2(B) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{i,h} \alpha_i \beta_h \begin{vmatrix} a^i & a^h \\ b^i & b^h \end{vmatrix}. \tag{3.45}$$

De manera general, una r-forma $\omega^{(r)}$ puede definirse como una aplicación r-lineal antisimétrica del espacio producto $D^1(M) \times D^1(M) \times \ldots \times D^1(M)$ (r factores) sobre el anillo de funciones F. En una carta local, una base de las r-formas es el conjunto de r-formas $dx_i \wedge dx_j \wedge \ldots \wedge dx_m$ (r fectores), definidas por

$$dx_i \wedge dx_j \wedge \ldots \wedge dx_m(A,B,\ldots,H) = \frac{1}{r!} \begin{vmatrix} a^i & a^j & \ldots & a^m \\ b^i & b^j & \ldots & b^m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^i & h^j & \ldots & h^m \end{vmatrix}. \qquad (3.46)$$

donde a^i, b^i,..., h^i son las componentes respectivas de los campos de vectores A, B,...,H. Esta relación (3.46), junto con la propiedad distributiva del producto exterior, permite definir el producto exterior de formas cualesquiera y hallar el resultado de aplicar cualquier r-forma a una r-upla de campos vectoriales. Por ejemplo se tiene

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_r(X_1,X_2,\ldots,X_r) = \frac{1}{r!} \det \omega_i(X_h) \qquad (3.4\ )$$

que es la generalización de (3.45).

El producto exterior de dos formas
$\omega^{(r)} = \sum \alpha_{i\ldots h}\, dx_i \wedge \ldots \wedge dx_h$, $\omega^{(s)} = \sum \beta_{j\ldots m}\, dx_j \wedge \ldots \wedge dx_m$
se define por

$$\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)} = \sum \alpha_{i\ldots h}\beta_{j\ldots m}\, dx_i \wedge \ldots \wedge dx_h \wedge dx_j \wedge \ldots \wedge dx_m \qquad (3.48)$$

Resulta de aquí, facilmente,

$$\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)} = (-1)^{rs}\, \omega^{(s)} \wedge \omega^{(r)} \qquad (3.49)$$

La <u>diferencial exterior</u> de una r-forma
$\omega^{(r)} = \sum \alpha_{i\ldots h}\, dx_i \wedge \ldots \wedge dx_h$ (cada sumando tiene r diferenciales y la suma está extendida a todas las permutaciones

posibles de los índices) es la (r+1)-forma definida por

$$d\omega^{(r)} = \sum_{i,\dots,h} d\alpha_{i\dots h} \wedge dx_i \wedge\dots\wedge dx_h \tag{3.50}$$

$$= \sum_{m,i,\dots,h} \frac{\partial\alpha_{i\dots h}}{\partial x_m} dx_m \wedge dx_i \wedge\dots\wedge dx_h$$

Se comprueba que esta definición no depende del sistema de coordenadas. Además, se cumplen las relaciones

$$d(\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)}) = d\omega^{(r)} \wedge \omega^{(s)} + (-1)^r \omega^{(r)} \wedge d\omega^{(s)},$$

$$dd\omega^{(r)} = 0 \tag{3.51}$$

la primera de las cuales resulta al aplicar (3.48) y (3.50) y la segunda es una consecuencia de la conmutatividad del orden de derivación en las derivadas segundas de funciones.

Sea una 1-forma y dos campos vectoriales X, Y. Es importante la siguiente relación

$$(d\omega)(X,Y) = \frac{1}{2} (X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])), \tag{3.47}$$

Para demostrarla, tomamos un sistema local de coordenadas y supongamos que respecto del mismo sea

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i, \quad X = \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.48}$$

con lo cual se tiene

$$\omega(X) = \sum \alpha_i \, a^i, \quad \omega(Y) = \sum \alpha_i \, b^i,$$

$$\alpha(X,Y) = \sum_{i,h} \alpha_h (a^i b^h{}_{,i} - b^i a^h{}_{,i})$$

$$X(\omega(Y)) = \sum_{i,h} a^i (b^h{}_{,i} \, \alpha_h + b^h \, \alpha_{h,i})$$

$$Y(\omega(X)) = \sum_{i,h} b^i (a^h{}_{,i} \alpha_h + a^h \, \alpha_{h,i})$$

$$\omega([X,Y]) = \sum_{i,h} \alpha_h \, (a^i b^h{}_{,i} - b^i a^h{}_{,i})$$

$$d\omega(X,Y) = \sum_{i,h} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_h} dx_h \wedge dx_i(X,Y) = \sum_{i,h} \frac{1}{2} \alpha_{i,h} (a^h b^i - a^i b^h)$$

con cuyos valores se comprueba inmediatamente (3.48).

Ejercicios

1. Probar que si (x,U), (y,V) son dos sistemas de coordenadas en M^n y $g\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = f\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$, entonces $g = f . J(y \circ x^{-1})$

2. Probar que la definición de diferencial exterior no depende del sistema de coordenadas.

3. Sea $M = R^2/\{0\}$ y sea w la 1-forma $w = \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$. Probar que $dw = 0$ pero no existe $f \in C^\infty(R^2/\{0\})$ tal que $w = df$ (sugerencia: si $L = \{(x,0) \in R^2 : x \geq 0\}$, entonces $w = d\theta$ en R^2/L)

4. Probar las igualdades (3.51)

5. Hallar una 1-forma diferenciable w en $R^2/\{0\}$ tal que i^*w sea una base de las 1-formas de S^1 ($i : S^1 \to R^2/\{0\}$ la inclusión)(sugerencia: diferenciar $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$)

5. DIFERENCIAL Y ADJUNTA DE UNA APLICACION ENTRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

En el Capítulo 2, nº 2 se definieron las aplicaciones entre variedades diferenciables. Recordemos que si $\varphi: M \to M'$ y $p, p' = \varphi(p)$ son dos puntos homólogos contenidos respectivamente en las cartas locales (U_p, ψ), $(U_{p'}, \psi')$, llamando x_i a las coordenadas de $\psi(U_p) \in R^n$ y x'_α a las de $\psi'(U_{p'}) \in R^{n'}$, la aplicación φ se dice que es de clase C^∞ si lo es la aplicación compuesta $\psi' \circ \varphi \circ \psi^{-1}$. Si M y M' son de clase C^∞, esta definición no depende de las cartas consideradas.

Para abreviar, al hablar de la aplicación $\varphi: M \to M'$, entenderemos siempre la aplicación $\psi' \circ \varphi \circ \psi^{-1}$ entre abiertos de R^n y de $R^{n'}$, la cual está dada por funciones de clase C

$$\varphi: x'_\alpha = x'_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n' \tag{3.49}$$

Estas funciones son la representación de la aplicación φ en las cartas consideradas. A cada aplicación φ corresponde así la matriz jacobiana de tipo $n \times n'$

$$J(\varphi) = \left(\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i}\right) \tag{3.50}$$

cuyo rango es facil probar (hágase como ejercicio) que no depende de las cartas locales consideradas. Convendremos en que los índices latinos varian de 1 a n y los griegos de 1 a n'. Con todo esto, las aplicación $M \to M'$ son, localmente, aplicaciones $R^n \to R^{n'}$ y se puede aplicar lo dicho en el Capítulo 1, nº 8.

DEFINICION 3.8. Se llama aplicación diferencial de la aplicación $\varphi: M \to M'$ en los puntos homólogos, $p, p' = \varphi(p)$, a la aplicación $d\varphi$: $T_p \to T_{p'}$ definida por

$$d\varphi(X)\, f = X(f, \varphi) \tag{3.51}$$

para todo vector $X \in T_p$ y toda función $f \in F(p')$ (funciones de clase C^∞ definidas en un abierto de M' que contiene a p').

Esto significa que el vector de $T_{p'}$ que corresponde al X de T_p es la aplicación que a la función $f \in F(p')$ hace corresponder el número real $X(f \circ \varphi)$. Es un ejercicio simple probar que, efectivamente, la aplicación $d\varphi(X): F(p') \to R$ definida de esta manera es lineal y es una derivación, es decir, es un vector de $T_{p'}$.

En los sistemas locales de coordenadas x_i de M y x'_α de M', si las ecuaciones de φ son las (3.49), la aplicación diferencial $d\varphi$ es la que hace corresponder al vector

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3.52}$$

el vector

$$X' = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \sum_{\alpha=1}^{n'} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_\alpha} \tag{3.53}$$

o sea, las componentes λ^i se transforman según la ley

$$\lambda'^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_{\alpha}}{\partial x_i} \lambda^i \qquad (3.54)$$

Si representamos el vector $X \in T_p$ por la matriz columna λ cuyos elementos son sus componentes λ^i y lo mismo para el vector $X' \in T_{p'}$, (3.54) se puede escribir en forma matricial

$$\lambda' = J\,\lambda, \qquad (3.55)$$

siendo J la matriz jacobiana (3.50). En estas fórmulas, las derivadas parciales se entienden tomadas en el punto p, lo cual no se indica por no recargar la notación.

Para que $d\varphi$ sea inyectiva, o sea, para que todo vector $X' \in T_{p'}$ sea imagen a lo sumo de un vector $X \in T_p$, debe ser $n' = n$ y J debe ser de rango n.

DEFINICION 3.9. Una aplicación $\varphi: M \to M'$ se dice que es <u>regular</u> en p, si $d\varphi$ es inyectiva en p. Si lo es en todo punto, se dice que φ es regular en M. Si son regulares φ y φ^{-1} se dice que φ es un <u>difeomorfismo</u>.

<u>Ejercicio</u>

Si $M' = R$, $n' = 1$, probar que $d\varphi$ coincide con el covector $(d\varphi)_p$ de la Definición 3.4.

<u>El teorema de SARD</u>. Supongamos el caso de una aplicación $\varphi: M \to M'$ entre variedades diferenciables de la misma dimensión $n = n'$. Los puntos de M para los cuales el

determinante jacobiano de φ se anula, se llaman <u>puntos críticos</u> de φ. Si $C \subset M$ es el conjunto de los puntos críticos, se puede demostrar que el conjunto $\varphi(C)$ es de medida nula en M'. La medida nula en M' se define como la medida nula en el $R^{n'}$ al cual M' es localmente homeomorfo. Es fácil ver que la condición de "medida nula" no depende de la carta local considerada.

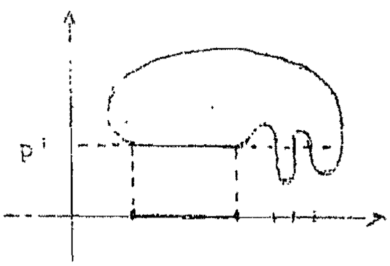
Para $n \neq n'$ caben dos casos, Si $n < n'$, entonces es evidente que $\varphi(M)$ es de medida nula en M'. Si $n > n'$ se puede demostrar (de manera no muy simple) que el conjunto de puntos de M' para los cuales la matriz jacobiana J tiene rango menor que n' es también de medida nula.

Estas propiedades constituyen el llamado teorema de SARD. La demostración se complica para variedades de clase finita. Ver, por ejemplo, S.STERNBERG, <u>Lectures on Differential Geometry</u>, Prentice Hall, 1965.

<u>Observaciones</u>.

1. La propiedad de "medida nula" no se conserva por homeomorfismos (existen homeomorfismos del plano en otro plano que transforman un segmento del primero en un conjunto de medida positiva del segundo), pero en cambio se conserva por difeomorfismos.

2. Una aplicación $f:M \to M'$ se dice que es <u>regular</u> en $p' = f(p)$ si lo es en todo punto p tal que $f(p) = p'$. Probar como ejercicio que entonces $f^{-1}(p')$ es una variedad diferenciable de dimensión $n' - n$ (recordar que dimensión cero significa un conjunto numerable de puntos). Si p' no es regular, la propiedad no es cierta como lo indica el ejemplo de la figura en que $f^{-1}(p')$ es la unión de un segmento y puntos aislados, que no es una variedad diferenciable.



DEFINICION 3.10. Se llama <u>aplicación adjunta</u> de la aplicación $\varphi:M \to M'$, a la aplicación $\varphi^*:T^*_{p'} \to T^*_p$ que al covector $\omega' \in T^*_{p'}$, hace corresponder el covector $\omega \in T^*_p$ tal que

$$\omega(X) = \omega'(X') \qquad (3.56)$$

para todo $X \in T^*_p$, siendo $X' = d\varphi(X)$.

En coordenadas locales es

$$\varphi^*: \omega' = \sum_{\alpha=1}^{n'} \omega'_\alpha \, dx'_\alpha \to \omega = \sum_{\alpha,h} \omega'_\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_h} dx_h \,. \qquad (3.57)$$

o sea, al covector de componentes ω'_α de $T^*_{p'}$, corresponde el covector de T^*_p cuyas componentes son

$$\mu_h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_h} \mu'_\alpha \tag{3.58}$$

o sea, si μ, μ' indican las matrices "fila" cuyos elementos son las componentes μ_i, μ'_α se tiene, en forma matricial,

$$\mu = \mu' J \tag{3.59}$$

La aplicación adjunta φ^* puede actuar sobre 2-formas. La definición entonces es la siguiente, que generaliza (3.56),

$$(\varphi^* \omega'^{(2)})(X,Y) = \omega'^{(2)}(d\varphi(X),\ d\varphi(Y)). \tag{3.60}$$

En coordenadas, es

$$\varphi^*: \sum_{\alpha,\beta} \mu'_\alpha \quad dx'_\alpha \wedge dx'_\beta \to \omega^{(2)} = \sum_{\alpha,\beta,i,h} \mu'_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_h} dx_i \wedge dx_h \tag{3.61}$$

lo cual se extiende de manera natural a r-formas.

<u>Ejemplos</u>

1. Sea la aplicación $\varphi: R^2 \to R^2$ definida por

$$\varphi: x'_1 = x_1^2 + 2\, x_x^2, \qquad x'_2 = x_1\, x_2$$

La aplicación diferencial $d\varphi$ es

$$d\varphi: \lambda^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda^2 \frac{\partial}{\partial x_2} \to \lambda^1 \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} 2x_1 + \frac{\partial}{\partial x'_2} x_2\right) +$$

$$+ \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial x'_1} 4x_2 + \frac{\partial}{\partial x'_2} x_1\right)$$

$$= (2x_1\, \lambda^1 + 4x_2\, \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x'_1} + x_2\, \lambda^1 + x_1\, \lambda^2) \frac{\partial}{\partial x'_2}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} \lambda'^1 \\ \lambda'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$$

de acuerdo con (3.55).

La aplicación adjunta es

$$\psi^*: \lambda_1\, dx'_1 + \lambda_2\, dx'_2 \to (2x_1\, \lambda'_1 + x_2\, \lambda'_2)dx_1 +$$
$$+ (4x_2\, \lambda'_1 + x_1\, \lambda'_2)dx_2$$

o sea

$$(\lambda_1\ \ \lambda_2) = (\lambda'_1\ \ \lambda'_2) \begin{vmatrix} 2x_1 & 4x_2 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

de acuerdo con (3.59).

2. La aplicación $\psi: R^2 \to R^2$ definida por $x'_1 = x_1^3$, $x'_2 = x_1 + x_2$ tiene

$$d\psi: \begin{bmatrix} \lambda'^1 \\ \lambda'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad \psi^*: (\lambda_1\ \ \lambda_2) = (\lambda'_1\ \ \lambda'_2) \begin{bmatrix} 3x_1^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Considerar ~~como~~ ejercicio la aplicación

$$\psi\circ\varphi: x'_1 = (x_1^2 + 2x_2^2)^3, \qquad x'_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2$$

y comprobar las relaciones $d(\psi\circ\varphi) = d\psi\circ d\varphi$, $(\psi\circ\varphi)^* = \varphi^*\circ\psi^*$ que ahora vamos a demostrar de manera general.

Propiedades de las aplicaciones diferencial y adjunta.

Son útiles las siguientes propiedades:

1. $d(\psi \circ \varphi) = d\psi \circ d\varphi$.

En efecto, según (3.55) es $d\varphi : \lambda' = J(\varphi)\lambda$, $d\psi : \lambda'' = J(\psi)\lambda'$ y por tanto $\lambda'' = J(\psi)J(\varphi)\lambda$. Como se sabe por Cálculo que $J(\psi \circ \varphi) = J(\psi).J(\varphi)$, resulta el enunciado.

2. $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

En efecto, según (3.59) es $\mu' = \mu'' J(\psi)$, $\mu = \mu' J(\varphi)$ y por tanto $\mu = \mu'' J(\psi)\, J(\varphi) = \mu'' J(\psi \circ \varphi)$, lo que prueba el enunciado.

3. $d([X,Y]) = [(d\varphi(X), d\varphi(Y)]$ si φ es difeomorfismo

Para demostrar está relación observemos que la condición (3.51) se puede interpretar como una igualdad entre aplicaciones de un entorno de $p \in M$ en los reales, con sólo escribirla en la forma

$$d\varphi(X)\ f \circ \varphi = X(f \circ \varphi) \qquad (3.62)$$

que es equivalente a (3.51). Aplicando esta igualdad para definir $d\varphi([X,Y])$, se tiene

$$\begin{aligned}
[X,Y]\ (f \circ \varphi) &= (XY - YX)(f \circ \varphi) = XY(f \circ \varphi) - YX(f \circ \varphi) \\
&= X(d\varphi(Y) f \circ \varphi) - Y(d\varphi(X) f \circ \varphi) \\
&= d\varphi(X)\ d\varphi(Y) f \circ \varphi - d\varphi(Y)\ d\varphi(X) f \circ \varphi \\
&= [d\varphi(X),\ d\varphi(Y)] f \circ \varphi,
\end{aligned}$$

que según (3.62) prueba el enunciado.

En la relación siguiente, la letra d aplicada a una forma diferencial significa derivada exterior.

4. $d(\varphi^*\omega) = \varphi^* d\omega$

Para la demostración basta verificarla en un particular sistema de coordenadas locales, a saber:

$$\omega = \sum \mu'_\alpha \, dx'_\alpha \, , \quad \varphi^*\omega = \sum \mu'_\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} dx_i , \quad d\omega = \sum \frac{\partial \mu'_\alpha}{\partial x'_\beta} dx'_\beta \wedge dx'_\alpha$$

$$d(\varphi^*\omega) = \sum \frac{\partial \mu'_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_h} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} dx_h \wedge dx_i$$

$$\varphi^* d\omega = \sum \frac{\partial \mu'_\alpha}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_h} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} dx_h \wedge dx_i$$

con lo cual se obtiene inmediatamente el resultado. Las sumas van siempre extendidas de 1 a n' para los índices griegos y de 1 a n para los latinos.

5. $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$.

En coordenadas locales se tiene

$$\omega_1 = \sum \mu'_\alpha \, dx'_\alpha \, , \quad \omega_2 = \sum \nu'_\beta \, dx'_\beta \, , \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = \sum \mu'_\alpha \nu'_\beta \, dx'_\alpha \wedge dx'_\beta$$

$$\varphi^*(\omega_1) = \sum \mu'_\alpha \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} dx_i \, , \quad \varphi^*(\omega_2) = \sum \nu'_\beta \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_h} dx_h$$

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \sum \mu'_\alpha \nu'_\beta \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_h} dx_i \wedge dx_h$$

y como el segundo miembro de esta expresión es igual al producto $\varphi^*(\omega_1) \varphi^*(\omega_2)$, resulta probado el enunciado.

Ejemplo

Sea la aplicación $\varphi: R^3 \to R^2$ definida por

$x_1' = x_1 - 3x_2 + x_3$, $x_2' = x_1 x_2 - x_3^2$. Es

$$J(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \end{bmatrix}$$

y por tanto la aplicación es regular en todo punto $\neq (0,0,0)$. La aplicación diferencial $d\varphi$ es $\lambda' = J\lambda$, o sea, la que al vector $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de R^3 hace corresponder el vector de R^2

$$\lambda_1' = \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 \qquad \lambda_2' = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 - 2\lambda_3 x_3$$

La aplicación φ^* es $\mu = \mu' J$, que a la 1-forma $\omega' = \mu_1' \, dx_1' + \mu_2' \, dx_2'$ de R^2 hace corresponder la 1-forma de R^3

$$\omega = (\mu_1' + \mu_2' \, x_2)dx_1 + (-3\mu_1' + \mu_2' \, x_1)dx_2 + $$
$$+ (\mu_1' - 2\mu_2' \, x_3)dx_3$$

Si se da otra aplicación $\psi: R^2 \to R^2$ dada por $x_1'' = x_1'^2 - 2x_2'$, $x_2'' = x_1' \, x_2' + x_2'^2 - 3$, comprobar las propiedades 1,2,3,4,5 anteriores.

Ejercicios

1. Probar que la aplicación $R^2 \to R^2$ definida por

$$x_1' = x_1 e^{x_2} + x_2, \qquad x_2' = x_1 e^{x_2} - x_2$$

es un difeomorfismo.

2. Probar que si $d\varphi = 0$ en todo punto de M, entonces $\varphi: M \to M'$ es la aplicación constante, que aplica todo $x \in M$ en un mismo punto $y \in M'$.

3. Probar que

$$x_1' = x_1 \cos\alpha(x_3) - x_2 \operatorname{sen}\alpha(x_3),\quad x_2' = x_1 \operatorname{sen}\alpha(x_3) + x_2\cos\alpha(x_3),\quad x_3' = x_3$$

es un difeomorfismo de la esfera S^2 $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1)$ en si misma, cualquiera que sea la función diferenciable $\alpha(x_3)$. Interpretación geométrica.

4. Sean M,N variedades C^∞, $\varphi: M \to N$ una función C^∞. Si $X \in M_p$ es el vector tangente en t_0 de una curva α, probar que $d\varphi_p(X)$ es el vector tangente en t_0 a la curva $\varphi\circ\alpha$.

APENDICE

INTEGRACION EN VARIEDADES Y TEOREMA DE STOKES

Sea M una variedad orientable de dimensión n y sea A un atlas orientado maximal. Supongamos primero que ω es una n-forma en M tal que su soporte sea compacto y esté contenido en U, donde $(x,U) \in A$. Entonces se podrá escribir de una única manera:

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad (f: U \to R \quad C^\infty)$$

Podríamos definir entonces

$$\int_M \omega = \int_{x(U)} f \circ x^{-1} \quad \left(= \int_{x(U)} f(x^1, \ldots, x^n) dx^1, \ldots, dx^n\right)$$

Veamos que esta definición no depende del sistema de coordenadas usado: si $(y, V) \in \mathcal{A}$ y sop $\omega \subset V$, entonces

$$\int_{x(U)} f \circ x^{-1} = \int_{x(U \cap V)} f \circ x^{-1} = \int_{y(U \cap V)} f \circ x^{-1} \circ x \circ y^{-1} .$$

$$. \left|\det \circ D(x \circ y^{-1})\right| =$$

$$= \int_{y(U \cap V)} f \circ y^{-1} . \det \circ D(x \circ y^{-1}) =$$

$$= \int_{y(V)} f \circ y^{-1} . \det \circ D(x \circ y^{-1})$$

Pero si $\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = g\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$, sabemos que

$$f = g.(\det \circ D(y \circ x^{-1}) \circ x)$$

o también

$$g = f.(\det \circ D(x \circ y^{-1}) \circ y).$$

Luego

$$g \circ y^{-1} = (f \circ y^{-1}).(\det \circ D(x \circ y^{-1}))$$

lo cual prueba que la definición de $\int_M \omega$ no depende del sistema de coordenadas elegido.

Sabemos entonces integrar n-formas con soporte compacto contenido en algún abierto coordenado. Observemos que si ω y η tienen el soporte compacto contenido <u>en el mismo abierto coordenado</u>, entonces claramente

$$\int_M a\omega + b\eta = a\int_M \omega + b\int_M \eta \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

Vamos ahora a tratar de integrar n-formas cualesquiera. Este objetivo desde ya es imposible de lograr pues en $\mathbb{R}$ por ejemplo hay funciones C^∞ no integrables (la identidad por ejemplo). Para salvar esta dificultad supondremos que las n-formas a integrar tienen soporte compacto. Sea entonces ω una n-forma a soporte compacto, sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado de M y sea $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{A}$ con sop φ_i compacto. Definimos entonces

$$\int_M \omega = \sum_{i\in I} \int_M \varphi_i\, \omega$$

Hay que observar que siendo ω de soporte compacto, las integrales que aparecen como sumandos son todas nulas salvo un número finito, con lo cual la suma es en realidad una suma finita.

Desde luego, tenemos que ver que esta definición de integral no depende ni del atlas $\mathcal{A}$ ni de la partición de la unidad particulares. Para ello sea $\mathcal{A}'$ otro atlas de M igualmente orientado y sea $\{\psi_j\}_{j\in J}$ una partición de la unidad subordinada a $\mathcal{A}'$.

Entonces

$$\sum_{i\in I}\int_M \varphi_i\,\omega = \sum_{i\in I}\int_M \sum_{j\in J}\varphi_i\,\psi_j\,\omega =$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\int_M \varphi_i\,\psi_j\,\omega =$$

$$= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\int_M \varphi_i\,\psi_j\,\omega =$$

$$= \sum_{j\in J}\int_M \sum_{i\in I}\varphi_i\,\psi_j\,\omega =$$

$$= \sum_{j\in J}\int_M \psi_j\,\omega$$

lo que prueba lo afirmado. Obsérvese que hemos usado la aditividad de la integral para n-formas de soporte compacto contenidos todos en un abierto coordenado.

Notemos que como en una variedad orientable hay sólo dos atlas orientados maximales (dos "orientaciones" de M) entonces hay dos integrales posibles para una n-forma a soporte compacto que difieren solamente en el signo. Eso significa que nuestra integral es una integral "orientada" es decir que depende (en signo) de la orientación elegida entre las dos posibles.

Para seguir interpretando estas integrales, debemos tener en claro la interpretación geométrica de la orientabilidad. Para ello consideremos un R-espacio vectorial V de dimensión finita n; si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ y $\{w_1,\ldots,w_n\}$ son dos bases ordenadas de V, diremos que esas bases proporcionan la misma orientación para V si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Queda claro entonces que las bases de V quedan divididas en dos conjuntos disjuntos, que llamaremos μ y $-\mu$, de modo tal que dos elementos de μ (dos bases de V) proporcionen la misma orientación para V y analogamente para dos elementos de $-\mu$. Decimos entonces que tenemos dos orientaciones posibles para V que indicaremos μ y $-\mu$ y una orientación para V queda entonces definida dando una base ordenada de V.

Si M es una variedad y (x,U) es una carta local, entonces tenemos definida una orientación para cada M_p con $p \in U$. En efecto, si $p \in U$ sabemos que $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p,\ldots$ $\ldots,(\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$ es una base de M_p y tomándola ordenada tenemos una orientación μ_{xp} para M_p.

Si (y,V) es otra carta local y $p \in U \cap V$, entonces para M_p tenemos dos orientaciones posibles, μ_{xp} y μ_{yp}. Queremos ver qué debe ocurrir para que esas orientaciones sean iguales.

Tenemos entonces las bases ordenadas $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_p,\ldots,(\frac{\partial}{\partial x^n})_p\}$, $\{(\frac{\partial}{\partial y^1})_p,\ldots,(\frac{\partial}{\partial y^n})_p\}$. Pero hemos visto en II. que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

Luego la matriz de cambio de base es $D(x\circ y^{-1})(y(p))$ y su determinante es $J(x\circ y^{-1})_p = \det(D(x\circ y^{-1})(y(p))$. Entonces la condición necesaria y suficiente para que dos cartas locales (x,U), (y,V) definan la misma orientación para los M_p con $p \in U \cap V$ es que

$$J(x\circ y^{-1})_p = \det(D(x\circ y^{-1})(y(p)) > 0 \quad \forall\, p \in U \cap V$$

En otras palabras, una variedad será orientable si existe un atlas $\mathcal{A}$ y una orientación para cada M_p de manera que la orientación de (x,U) sobre M_p para $p \in U$ sea la dada (para $(x,U) \in \mathcal{A}$).

Por ejemplo, en S^1 (o en cualquier curva cerrada simple) las dos orientaciones consisten en recorrer la curva dejando el interior a la izquierda o a la derecha.

Entonces vemos el sentido que tiene una integral curvilínea orientada: consiste en tomar una 1-forma en R^2, inducir una 1-forma sobre S^1 e integrar respecto a una de las dos orientaciones posibles.

La orientabilidad tiene una caracterización muy sencilla en términos de formas:

PROPOSICION. M^n es orientable $\Leftrightarrow$ existe una n-forma C^∞ ω en M nunca nula (o sea, $\omega(p) \neq 0\ \forall\, p \in M$).

DEMOSTRACION. ($\Leftarrow$) Sea (x,U) una carta local cualquiera de M. Entonces será

$$\omega = a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad a \in C^\infty(U)$$

Nos quedamos con la carta (x,U) si $a > 0$; si $a < 0$ la dejamos. De esa manera conseguimos un atlas A de M que resulta orientado:

Si (x,U), $(y,V) \in A$, entonces en $U \cap V$ será

$$\omega = a\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = b dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \qquad a,b > 0$$

Sabemos que entonces

$$a(p) = b(p) \det(D(y \circ x^{-1})(x(p))) \qquad p \in U \cap V$$

Como $a,b > 0$, resulta

$$J(y \circ x^{-1})_p = \det(D(y \circ x^{-1})(x(p))) > 0 \quad \text{para } p \in U \cap V$$

Luego A es orientado. (Nótese que al ser ω nunca nula tenemos un criterio <u>sobre toda la variedad</u> para aceptar ó rechazar cartas según su orientación).

($\Rightarrow$) Si A es un atlas orientado, sea $\{\varphi_i\}$ una partición de la unidad subordinada a A. Si $A = \{(x_i,U_i)\}$ y η_i es la n-forma sobre U_i definida por

$$\eta_i = dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n$$

entonces consideramos

$$\eta = \sum_{i \in I} \varphi_i \eta_i$$

(esta suma tiene sentido pues en cada punto es una suma finita).

Si $p \in M$, será

$$\eta(p) = \varphi_1(p)\,\eta_1(p) + \ldots + \varphi_s(p)\eta_s(p) =$$

$$= \varphi_1(p)\, dx_1^1(p) \wedge \ldots \wedge dx_1^n(p) + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_s(p)\, dx_s^1(p) \wedge \ldots \wedge dx_s^n(p)$$

$$= [\varphi_1(p) + \varphi_2(p)\, J(x_2 \circ x_1^{-1})_p + \ldots$$
$$\ldots + \varphi_s(p)\, J(x_s \circ x_1^{-1})_p] \,.$$
$$.\, dx_1^1(p) \wedge \ldots \wedge dx_1^n(p)$$

y el coeficiente es no nulo (es mayor que cero) por la orientabilidad de A y por ser $\varphi_i(p) > 0$ $(i = 1,\ldots,s)$ ///

Sea ahora M una variedad orientable y sea D un dominio de M. Sabemos que podemos tomar un atlas orientado A de $\overline{D}$ de modo que para $(x,U) \in A$ y $U \cap \partial D \neq \emptyset$:

$$x(U \cap \overline{D}) = (-1,1) \times \ldots \times (-1,1) \times [0,1)$$

$$x(U \cap \partial D) = (-1,1) \times \ldots \times (-1,1) \times \{0\}$$

Si $x(p) = (x^1(p),\ldots,x^{n-1}(p),0)$ para $p \in U \cap \partial D$, recordemos que habíamos definido

$$\overline{x}(p) = (x^1(p),\ldots,x^{n-1}(p))$$

y que $\{(\overline{x}, U \cap \partial D)\}$ resultaba un atlas de ∂D orientado. Llamemos μ a su orientación. Definimos la <u>orientación inducida en ∂D</u> por M a $(-1)^n\mu$

TEOREMA DE STOKES. Sea M una variedad orientable y sea D un dominio abierto de M. Si elegimos una orientación cualquiera para M (y por lo tanto para D) y la orientación inducida para ∂D, entonces para toda $(n-1)$-forma ω a soporte compacto es

$i : \partial D \longrightarrow D$ aplic. inclusión

$i^*\omega : D \longrightarrow \Omega^{n-1}(D)$

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

DEMOSTRACION. Introducimos un atlas orientado A de M de modo que, para $(x,U) \in A$ y $U \cap \partial D = \emptyset$ sea $x(U) = (-1,1) \times \ldots \times (-1,1)$ y para $U \cap \partial D \neq \emptyset$:

$$x(U \cap \overline{D}) = (-1,1) \times \ldots \times (-1,1) \times [0,1)$$

$$x(U \cap \partial D) = (-1,1) \times \ldots \times (-1,1) \times \{0\}$$

En el segundo caso, sea ω de soporte contenido en U. Podremos escribir:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_j \, dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

con lo cual

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

Al inducir ω una forma $i^*\omega$ sobre ∂D (que seguiremos designando ω), todos los sumandos son cero salvo el último (pues $i^* dx^n = d(i^*x^n) = d(x^n \circ i) = d(0) = 0$)

Luego, y teniendo en cuenta la orientación dada a ∂D:

$$\int_{\partial M} \omega = (-1)^n \int_{A_n^0} (-1)^{n-1} a_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\ldots dx^{n-1}$$

$$= -\int_{A_n^0} a_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)dx^1\ldots dx^{n-1}$$

$$(A_n^0 = (-1,1)^{n-1})$$

Por otra parte:

$$\int_D d\omega = \int_D \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1\ldots dx^n = \sum_{j=1}^{n} \int_D \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^1\ldots dx^n$$

Aplicando Fubini, hay que integrar en algún momento

$$\int_{-1}^{1} \frac{\partial a_j}{\partial x^j} dx^j \qquad (j = 1,\ldots,n-1)$$

y eso es $a_j(x^1,\ldots,x^{j-1},1,x^{j+1},\ldots,x^n) -$

$- a_j(x^1,\ldots,x^{j-1},0,x^{j+1},\ldots,x^n)$

y eso es 0 pues sop $\omega \subset U$ (y por lo tanto los a_j son nulos en el borde salvo en la base)

Sólo queda entonces el término $j = n$ o sea

$$\int_{x(U)} \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^1,\ldots,dx^n$$

Usando Fubini hay que calcular

$$\int_0^1 \frac{\partial a_n}{\partial x^n} dx^n = a_n(x^1,\ldots,a^{n-1},1) - a_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)$$

$$= -a_n(x^1,\ldots,x^{n-1},0)$$

Luego:

$$\int_D d\omega = -\int_{A_n^0} a_n(x^1,\dots,x^{n-1},0)dx^1 \dots dx^{n-1}$$

de donde

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

Si $x(U) = (-1,1)^n \Rightarrow \int_{\partial D} \omega = 0$ trivialmente ($i^*\omega = 0$)

y en cuanto a $\int_D d\omega$, usando Fubini y sop $\omega \subset U$ sale facilmente que es cero. (pues ni siquiera queda $j = n$)

Sea ahora ω una $(n-1)$-forma a soporte compacto. Si $\{\varphi_i\}$ es una partición de la unidad subordinada a A, entonces

$$\int_D d\omega = \int_D d\Big(\sum_{i\in I} \varphi_i\, \omega\Big) = \sum_{i\in I} \int_D d(\varphi_i\, \omega)$$

y

$$\int_{\partial D} \omega = \int_{\partial D} \sum_{i\in I} \varphi_i\, \omega = \sum_{i\in I} \int_{\partial D} \varphi_i\, \omega =$$

$$= \sum_{i\in I} \int_D d(\varphi_i\, \omega) = \int_D d\omega \ ///$$

Aplicaciones

i) En el caso particular en que $D = S$ es una superficie en R^3, como

$$d(Pdx+Qdy+Rdz) = (P_z-R_x)dz\wedge dx + (Q_x-P_y)dx\wedge dy + $$
$$+ (R_y-Q_z)dy\wedge dz$$

obtenemos el Teorema de Stokes en el espacio:

$$\iint_S (P_z - R_x)dz\wedge dx + (Q_x - P_y)dx\wedge dy + (R_y - Q_z)dy\wedge dz =$$

$$= \int_{\partial S} Pdx+Qdy+Rdz$$

ii) En el caso en que $D = V$, abierto de R^3, como

$$d(Pdx\wedge dy + Qdy\wedge dz + R\,dz\wedge dx) = (Q_x+R_y+P_z)dx\wedge dy\wedge dz$$

obtenemos el teorema de la divergencia:

$$\iiint_V (Q_x+R_y+P_z)dx\wedge dy\wedge dz =$$

$$= \iint_{\partial V} Pdx\wedge dy + Qdy\wedge dz + Rdx\wedge dz$$

Hemos visto cómo integrar n-formas a soporte compacto en variedades orientables. Tratemos de quitar hipótesis.

En variedades no orientables, hay una manera de discutir integración. Sea ω una función en M tal que para cada $p \in M$ sea

$$\omega(p) = |\eta_p| \text{ para alguna } \eta_p \in \Lambda^n(M_p)$$

es decir, para $v_1,\dots,v_n \in M_p$

$$\omega(p)(v_1,\dots,v_n) = |\omega_p(v_1,\dots,v_n)|$$

Una tal función ω es llamada un <u>elemento de volumen</u>.

Si (x,U) es un sistema de coordenadas en M, entonces será:

$$\eta_p = a_p \, dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \omega(p)(v_1,\ldots,v_n) &= |\eta_p|(v_1,\ldots,v_n) = |\eta_p(v_1,\ldots,v_n)| = \\ &= |a_p \, dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)(v_1,\ldots,v_n)| = \\ &= |a_p| \cdot |dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)(v_1,\ldots,v_n)| = \\ &= |a_p| \cdot |dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)|(v_1,\ldots,v_n) \end{aligned}$$

o sea

$$\omega(p) = |a_p| \cdot |dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)|$$

Haciendo variar p en U, podremos escribir

$$\omega = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n| \qquad f \geq 0 \quad \text{en } U$$

Decimos que ω es un elemento de volumen C^∞ si la función f lo es. Veremos enseguida que el carácter C^∞ de un elemento de volumen no depende del sistema de coordenadas elegido (aunque sí la función f).

Una forma de obtener un elemento de volumen es comenzar con una n-forma η y definir $\omega(p) = |\eta(p)|$.

Localmente todo elemento de volumen C^∞ se consigue de esa manera. En efecto, sabemos que

$$\omega = f|dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n| \qquad f \geq 0 \qquad f C^\infty$$

$$\Rightarrow \omega = |f dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$$

y entonces basta tomar $\eta = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Globalmente no es así; por ejemplo, consideremos la banda de Möbius M sumergida en R^3; entonces cada M_p se puede considerar como un subespacio de R^3_p. Definimos entonces para $V_p, W_p \in M_p$

$$\omega(p)(V_p, W_p) = \text{área del paralelogramo generado por } V_p \text{ y } W_p$$

Se puede ver que ω es un elemento de volumen C^∞ pero no puede ser $\omega = |\eta|$ para una 2-forma C^∞ η. Pues siendo ω nunca nulo resultaría η nunca nula y C^∞, lo cual no puede ser por ser M no orientable (recordemos que si $V_p = (a_1, a_2, a_3)$, $W_p = (b_1, b_2, b_3)$, entonces el área del paralelogramo generado por V_p y W_p es

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - c_3b_2)^2).$$

Si $f: M \to N$ es una función C^∞ entre variedades de dimensión n, defininos f^*:(elementos de volumen en N) $\to$ (elementos de volumen en M) de la siguiente manera:

$$(f^* \omega)(p)(V_1, \ldots, V_n) = \omega_{f(p)}((df)_p V_1, \ldots, (df)_p V_n)$$

Veamos ahora cuál es la expresión local de f^*.

PROPOSICION. Si $f: M \to N$ es C^∞ entre n-variedades, (x, U) es una carta en $p \in M$ e (y, V) una carta en $f(p) \in N$ de modo que $f(V) \subset V$, entonces para toda $g: V \to R$ no negativa

$$f^*(g|dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|) = g \circ f . \left|\det\left(\frac{\partial y^i \circ f}{\partial x^j}\right)\right| |dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|$$

DEMOSTRACION. En efecto

$$f^*(g|dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|)(p)(x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= f^*(g|dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|)(p)(a_{1i}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p,\ldots,a_{ni}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p) =$$

$$= g(f(p))|dy^1(f(p)) \wedge \ldots \wedge dy^n(f(p))|(a_{1i}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p,\ldots$$

$$\ldots,(a_{ni}(\frac{\partial}{\partial x^i})_p) =$$

$$= g(f(p)).|dy^1(f(p)) \wedge \ldots \wedge dy^n(f(p))|$$

$$(a_{1i_1}\frac{\partial y^{h_1}\circ f}{\partial x^{i_1}}.\frac{\partial}{\partial x^{h_1}},\ldots,a_{ni_n}\frac{\partial y^{h_n}\circ f}{\partial y^{i_n}}.\frac{\partial}{\partial y^{h_n}})|$$

$$= g(f(p)).\frac{1}{n!}\ |\det(a_{ij}).\det(\frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j})| =$$

$$= g(f(p)).|\det(\frac{\partial y^i\circ f}{\partial x^j})|.|dx^1(p) \wedge \ldots \wedge dx^n(p)|(x_1,\ldots,x_n) \ //$$

COROLARIO. Si (x,W), (y,V) son sistemas de coordenadas en M y

$$g\ dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = h\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

entonces

$$h = g.|\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j})| = g|J(y\circ x^{-1})|_p$$

DEMOSTRACION. Basta poner f = identidad en la proposición ///

Este hecho, que los elementos de volumen cambien "correctamente", hace que podamos integrar elementos de volumen en cualquier variedad, por ejemplo si son de soporte compacto.

En efecto, si ω es un elemento de volumen a soporte compacto contenido en U, entonces será

$$\omega = f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad f \geq 0$$

y definimos

$$\int_M \omega = \int_{x(U)} f o x^{-1}$$

Si (y,V) es otro sistema de coordenadas y sop $\omega \subset V$; digamos $\omega = g\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$, entonces

$$\int_{x(U)} f o x^{-1} = \int_{y(U \cap V)} f o x^{-1} o x o y^{-1} . |J(x o y^{-1})| =$$

$$= \int_{y(U \cap V)} f o y^{-1} . |J(x o y^{-1})| =$$

$$= \int_{y(U \cap V)} g o y^{-1} = \int_{y(V)} g o y^{-1}$$

con lo cual la definición de integral no depende del sistema de coordenadas.

Para definir la integral para un elemento de volumen a soporte compacto, se utiliza una partición de la unidad subordinada a un atlas cualquiera y se repite lo que hicimos para n-formas.

Si M es orientable, sabemos que existe una n-forma C^∞ η nunca nula. Si ω es un elemento de volumen, resulta $\omega = f|\eta|$, $f \geq 0$ y claramente f es C^∞.

Entonces $\omega = |f\eta|$ y da lo mismo integrar un elemento de volumen que una n-forma. (salvo el signo, pues hay dos integrales posibles de la n-forma).

CAPITULO IV

GRUPOS DE LIE

1. DEFINICIONES

Recordemos del Algebra que un grupo abstracto G es un conjunto de elementos $\{a,b,\ldots\}$ entre los cuales está definida una operación, llamada producto, tal que a cada par ordenado de elementos $a,b \in G$ corresponde el elemento producto $a.b \in G$, cumpliéndose los siguientes "axiomas" de grupo:

i) $a(bc) = (ab)c$, propiedad asociativa del producto;

ii) Existe un elemento $e \in G$, llamado elemento identidad, elemento unidad, o elemento neutro, tal que $ea = ae = a$ para todo $a \in G$;

iii) Para todo elemento $a \in G$ existe el elemento inverso $a^{-1} \in G$, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Un grupo G se dice que es un grupo de Lie si sus elementos $\{a,b,c,\ldots\}$ son los puntos de una variedad diferenciable de clase C^∞, que se representa por la misma letra G y, además, las aplicaciones $G\times G \to G$ y $G \to G$ definidas respectivamente por $(a,b) \to ab$ y $a \to a^{-1}$ son aplicaciones C^∞ entre variedades diferenciables (Cap. 3, nº 5). La dimensión n de la variedad diferenciable se llama también la dimensión del grupo.

Consideremos en un entorno del punto a un sistema de coordenadas locales $(x_1,\ldots,x_n)$ y lo mismo en un entorno del punto b unas coordenadas locales $(y_1,\ldots,y_n)$. Si en un entorno del punto $c = ab$ se tienen las coordenadas locales $(z_1,\ldots,z_n)$, la aplicación $(a,b) \to c$ está dada por ecuaciones de la forma

$$z_i = z_i(x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_n) \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{4.1}$$

y si $(x_1',\ldots,x_n')$ son coordenadas locales en un entorno de a^{-1}, la aplicación $a \to a^{-1}$ estará representada por ecuaciones de la forma

$$x_i' = x_i'(x_1,\ldots,x_n), \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{4.2}$$

Las condiciones para que G sea un grupo de Lie son que (4.1) y (4.2) sean funciones C^∞ (de jacobiano no nulo estas últimas), lo cual, siendo G de clase C^∞, no depende de las cartas locales consideradas.

Todo grupo de Lie va unido a una variedad diferenciable, pero la recíproca no es cierta, es decir, no todo variedad diferenciable puede ser variedad de un grupo de Lie. Mas adelante veremos, por ejemplo, que la esfera de dos dimensiones S^2 no es variedad de ningún grupo de Lie. Las propiedades topológicas de la variedad diferenciable de un grupo, se asignan también al mismo. Asi se dice que un grupo de Lie es compacto o que es conexo, si tiene esta propiedad la variedad diferenciable correspondiente.

Ejemplo

Consideremos el plano (x_1,x_2) excluido el eje $x_1 = 0$. Es una variedad diferenciable de dimensión 2. Consideremos las funciones

$$z_1 = x_1y_1, \quad z_2 = x_1y_2 + x_2 \tag{4.3}$$

que al par de puntos $x(x_1,x_2)$, $y(y_1,y_2)$ hacen corresponder el punto $xy = z$ y las funciones

$$x_1' = 1/x_1, \quad x_2' = -x_2/x_1 \tag{4.4}$$

que al punto x hace corresponder el $x' = x^{-1}$.

Se tiene así definido un grupo de Lie de dimensión 2, cuyo elemento unidad es el punto (1,0). Obsérvese que por haber excluido los puntos $x_1 = 0$, las funciones (4.3), (4.4) son C^∞. Se trata de un grupo de Lie no conmutativo, pues $yx = (y_1x_1,\ y_1x_2 + y_2)$, que no es el punto $z = xy$.

2. TRASLACIONES A LA IZQUIERDA Y A LA DERECHA: ALGEBRA DE LIE

Dado un grupo de Lie G, para cada elemento $a \in G$ quedan definidas dos aplicaciones $G \times G \to G$ importantes, a saber

$$\begin{aligned} &\text{traslaciones a la izquierda} \quad L_a : x \to ax \\ &\text{traslaciones a la derecha} \quad R_a : x \to xa \end{aligned} \tag{4.5}$$

Obsérvese que por ser $R_b L_a x = axb$, $L_a R_b x = axb$, resulta

$$R_b L_a = L_a R_b \tag{4.6}$$

o sea, las dos traslaciones, a la derecha y a la izquierda, conmutan entre si.

Las traslaciones a la izquierda y a la derecha se estudian de manera análoga. Vamos a referirnos a las traslaciones a la izquierda, siguiendo la costumbre general, bien entendido que las traslaciones a la derecha conducen a resultados completamente análogos.

La aplicación diferencial dL_a, estudiada en el Cap. 3, Nº 5, actua entre los espacios vectoriales tangentes, de G. Sea X un campo de vectores tangentes de G (o sea, de la variedad diferenciable G) y representemos por X_x el vector vector correspondiente del campo en el punto $x \in G$. El campo X se dice que es <u>invariante a la izquierda</u>, si se verifica

$$dL_a(X_x) = X_{ax} \quad \text{para todo } a \in G. \tag{4.7}$$

Dado un vector tangente A_e en la identidad e, se puede deducir del mismo el campo de vectores

$$A_x = dL_x(A_e) \tag{4.8}$$

que es invariante a la izquierda, y por lo tanto C^∞ (ver ejercicio 2 de esta sección) puesto que, aplicando la propiedad 1 del nº 5 del Cap. 3, se tiene

$$dL_a(A_x) = dL_a \circ dL_x(A_e) = d(L_a \circ L_x)A_e = dL_{ax}(A_e) = A_{ax}.$$

Recíprocamente, todo campo de vectores invariante a la izquierda determina el vector X_e del campo correspondiente al punto unidad. Esto nos dice que los campos de vectores de G invariantes a la izquierda se pueden representar por los vectores del espacio vectorial tangente T_e en la identidad (o unidad) e. Sean A, B dos vectores de T_e. Mediante (4.8) se pueden extender a dos campos de vectores sobre G y por tanto se puede calcular el corchete $[A_x, B_x]$, que para x = e nos dará un nuevo vector $[A,B] \in T_e$. De esta manera se tiene definida en T_e un <u>álgebra de Lie</u>, la cual se llama el álgebra de Lie de G y se representa por G (recordar el Cap. 3 nº 4). Obsérvese que según la propiedad 3 del nº 5 del Cap. 3, se tiene $dL_a[X,Y] = [dL_aX, dL_aY]$ y por tanto, si X,Y son campos de vectores invariantes a la izquierda, también $[X,Y]$ es un campo de vectores invariantes a la izquierda. Por tanto, con las operaciones usuales de adición y producto por escalares (números reales), los campos de vectores invariantes a la izquierda forman un espacio vectorial y la operación corchete $[X,Y]$ define en el mismo un álgebra, la cual es evidentemente isomorfa a la anterior y constituye otra interpretación del álgebra de Lie del grupo G. La dimensión del álgebra de Lie es la dimensión de T_e y por tanto igual a la dimensión de G.

Ejemplo

Consideremos el grupo G definido por (4.3) y (4.4)
Las traslaciones a la izquierda son

$$L_a : x_1' = a_1 x_1, \quad x_2' = a_1 x_2 + a_2 \tag{4.9}$$

y las traslaciones a la derecha

$$R_a : x_1' = a_1 x_1, \quad x_2' = a_2 x_1 + x_2 \tag{4.10}$$

Dado un vector $A(A_1,A_2) = A_1 \partial/\partial x_1 + A_2 \partial/\partial x_2$ en $e(1,0)$, el campo de vectores invariantes a la izquierda engendrado por A es

$$A_x = A_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2 x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{4.11}$$

Comprobar como ejercicio que se cumple (4.7).

De la misma manera, otro vector $B \in T_e$ engendrará el campo $B_x = B_1 x_1 \partial/\partial x_1 + B_2 x_1 \partial/\partial x_2$ y por tanto se tiene

$$[A_x, B_x] = A_x B_x - B_x A_x = (A_1 B_2 - B_1 A_2)\, x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

que para $e(1,0)$ da el vector $[A,B]$ de componentes 0 y $A_1 B_2 - B_1 A_2$. Por tanto, el álgebra de Lie de G es el espacio vectorial T_e con el corchete $[A,B] = (A_1 B_2 - B_1 A_2)\partial/\partial x_2$.

Ejercicios

1. Probar que L_a es difeomorfismo de G sobre G para todo $a \in G$.

2. Probar que los campos invariantes a izquierda son C^∞ (sugerencia: probar que, si X es invariante a izquierda y (x,U) es una carta local alrededor de e, entonces $X(x^i)$ es C^∞ en un entorno de e).

3. ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE MAURER-CARTAN

Consideremos ahora las aplicaciones adjuntas L_a^* de las traslaciones a la izquierda. Ellas transforman los covectores $\omega(ax)$ en el punto ax, en covectores en el punto x. Una 1-forma diferencial (o campo de covectores) ω se dice que es invariante a la izquierda por el grupo G, si se cumple

$$L_a^*\omega(ax) = \omega(x) \quad \text{para todo} \quad a \in G. \tag{4.12}$$

De aqui se deduce la manera de engendrar una 1-forma invariante a la izquierda a partir de una 1-forma en e. En efecto, de (4.12) se deduce $L_a^*\omega(e) = \omega(a^{-1})$ y de aqui resulta que

$$\omega(x) = L^*_{x^{-1}}\omega(e) \tag{4.13}$$

es una 1-forma invariante a la izquierda. Para comprobarlo basta aplicar la propiedad 2 del nº 5 del Cap. 3, resultando

$$L_a^* (ax) = L_a^* L^*_{x^{-1}a^{-1}}\omega(e) = L_a^* L^*_{a^{-1}}L^*_{x^{-1}}\omega(e) =$$
$$= L_a^* L^*_{a^{-1}}\omega(x) = \omega(x)$$

Por ejemplo, para el grupo (4.3), (4.4) es

$L^*_{a^{-1}}: x_1' = x_1/a_1,\ x_2' = x_2/a_1 - a_2/a_1$ y por tanto según (4.13), tomando $\omega(e) = A_1\, dx_1' + A_2 dx_2'$, es $\omega(a) = (A_1/a_1)dx_1 + (A_2/a_1)dx_2$ o sea $\omega(x) = (A_1/x_1)dx_1 + (A_2/x_1)dx_2$.

Con respecto a las 1-formas invariantes a la izquierda, son importantes las siguientes propiedades: 1. Con las operaciones ordinarias de suma y producto por un escalar (número real), ellas constituyen un espacio vectorial sobre los reales cuya dimensión es la misma que T_e^*, o sea n, puesto que hemos visto que cada covector de T_e^* engendra una 1-forma invariante a la izquierda y recíprocamente. 2. De la propiedad 4 del nº 5 del Capítulo 3, se deduce $d(L_a^*\omega) = L_a^*(d\omega)$ de donde resulta que si ω es invariante a la izquierda, también su diferencial exterior es invariante a la izquierda.

Sean X, Y dos campos de vectores sobre G invariantes a la izquierda. Si ω es una 1-forma también invariante a la izquierda, el número real $\omega(X)$ será invariante a la izquierda, lo que quiere decir que es una constante. Lo mismo $\omega(Y)$. Por tanto, la ecuación (3.47) se reduce a

$$d\omega(X,Y) = -\frac{1}{2}\,\omega([X,Y]) \qquad (4.14)$$

para toda 1-forma invariante a la izquierda y todo par X,Y de campos vectoriales también invariantes a la izquierda.

Estas ecuaciones (4.14) se llaman las <u>ecuaciones de estructura de</u> MAURER-CARTAN.

Para expresarlas en coordenadas, sea $\{E_i\}$ una base del espacio vectorial (sobre los reales) de los campos de vectores invariantes a la izquierda y supongamos que

$$[E_i, E_j] = \sum_{h=1}^{n} C_{ij}^{h} E_h \tag{4.15}$$

donde C_{ij}^{h} son constantes, que dependen de la base $\{E_i\}$, y que por la antisimetria del corchete, cumplen la condición

$$C_{ij}^{h} + C_{ji}^{h} = 0 \tag{4.16}$$

Supongamos $X = \sum x^i E_i$, $Y = \sum y^j E_j$, con las sumas extendidas de 1 a n. Tendremos

$$[X,Y] = \sum_{h,i,j=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^{h} E_h \tag{6.17}$$

Consideremos ahora la base dual de $\{E_i\}$ del espacio vectorial de las 1-formas invariantes a la izquierda, sea $\{\omega^i\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, de manera que se cumple $\omega^i E_j = \delta_j^i$. Según (4.14) y (4.17) se tiene

$$d\omega^k(X,Y) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,h=1}^{n} x^i y^j C_{ij}^{h} \delta_h^k =$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{k}(x^i y^j - x^j y^i) \tag{4.18}$$

y como $\omega^i \wedge \omega^j(X,Y) = (1/2)(x^i y^j - x^j y^i)$, resulta

$$d\omega^k(X,Y) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}^{k}\ \omega^i \wedge \omega^j(X,Y) \tag{4.19}$$

que se suele escribir

$$d\omega^k = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} C^k_{ij}\,\omega^i \wedge \omega^j \qquad (4.20)$$

y constituyen las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan en términos de una base de las 1-formas invariantes a la izquierda. Las 1-formas $\{\omega^i\}$ de una base de las 1-formas invariantes a la izquierda, se llaman formas de Maurer-Cartan. Las C^h_{ij} se llaman las constantes de estructura respecto de la base $\{E_i\}$ o su dual $\{\omega^i\}$. Además de las condiciones de antisimetría (4.16) escribiendo en (4.20) que $d(d\omega^k) = 0$, se tiene que las constantes de estructura satisfacen las relaciones

$$\sum_{s=1}^{n} (C^s_{ij}C^h_{sk} + C^s_{jk}C^h_{si} + C^s_{ki}C^h_{sj}) = 0. \qquad (4.21)$$

Ejemplo

Volvamos al grupo G definida por (4.3) y (4.4). Según (4.11) una base para los campos de vectores invariantes a la izquierda, puede ser

$$E_1 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad E_2 = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (4.22)$$

de manera que las ecuaciones (4.15) resultan ser

$$[E_1,E_2] = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} = E_2 \qquad (4.23)$$

o sea, las constantes de estructura son todas nulas excepto $C^2_{12} = C^2_{21} = 1$. La base dual de la (4.22) es la formada por las 1-formas

$$\omega^1 = dx_1/x_1, \qquad \omega^2 = dx_2/x_1 \qquad (4.24)$$

como resulta de la condición $\omega^i(E_j) = \delta^i_j$.

Las 1-formas (4.24) constituyen un sistema de formas de Maurer-Cartan de G y las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan resultan ser, derivando exteriormente,

$$d\omega^1 = 0, \quad d\omega^2 = -x_1^{-2}\, dx_1 \wedge dx_2 = -\omega^1 \wedge \omega^2 \qquad (4.25)$$

Teniendo en cuanta (4.20) resultan las mismas constantes de estructura de antes.

4. FORMAS DIFERENCIALES VECTORIALES. NUEVA FORMA DE LAS ECUACIONES DE ESTRUCTURA.

Supongamos una variedad diferenciable cualquiera y sean T_p, T_p^* los espacios vectoriales tangente y su dual es un punto p. Los elementos del producto tensorial $T_p \otimes T_p^*$ se llaman 1-formas vectoriales o 1-formas con valores en T_p. Si $X \otimes \omega$ es una de estas formas, aplicada a un vector $Y \in T_p$ resulta el nuevo vector $X \otimes \omega(Y) = \omega(Y)X$. Recuérdese que $\omega(Y)$ es un número real.

Si se considera el espacio vectorial de las 2-formas en p, o sea, $T_p^* \wedge T_p^*$, se llaman 2-formas con valores en T_p a los elementos del producto tensorial $(T_p^* \wedge T_p^*) \otimes T_p$. Si $\omega^{(2)} \otimes X$ es uno de estos elementos, la aplicación a un par de vectores (Y,Z) da el vector $\omega^{(2)}(Y,Z)X$. Para las 1-formas vectoriales $\varphi = X \otimes \alpha$, $\psi = Y \otimes \beta$, se define

$$[\varphi,\psi] = [X,Y] \otimes (\alpha \wedge \beta), \quad d\varphi = X \otimes d\alpha \qquad (4.26)$$

Estas definiciones son útiles para expresar de manera intrinseca las ecuaciones de Maurer-Cartan. Sean $\{E_i\}$, $\{\omega^i\}$ dos bases duales de los espacios vectoriales de los campos de vectores y de las 1-formas invariantes a la izquierda. Pongamos

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} E_i \, \omega^i \qquad (4.27)$$

de manera que es $\omega(X) = \sum E_i \, \omega^i(X) = \sum x^i E_i = X$, o sea, ω aplica los campos vectoriales X en si mismos. Utilizando (4.26), (4.20) y(4.15) resulta

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} E_i \otimes d\omega^i = -\frac{1}{2} \sum_{i,h,k} C^i_{hk} E_i \, (\omega^h \wedge \omega^k) =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{h,k=1} [E_h, E_k] \otimes (\omega^h \wedge \omega^k) =$$

$$= -\frac{1}{2} [\omega,\omega] . \qquad (4.28)$$

De esta manera las ecuaciones de estructura de Maurer-Cartan pueden condensarse en la ecuación

$$d\omega = -\frac{1}{2} [\omega,\omega] . \qquad (4.29)$$

<u>Elementos de volumen invariantes</u>. Si $\{\omega^i\}$ es un sistema de formas de Maurer-Cartan (base de las 1-formas invariantes a la izquierda), el producto exterior

$$d_L G = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^n \qquad (4.30)$$

es una n-forma diferencial invariante a la izquierda. Se llama el "elemento de volumen" de G invariante a la izquierda.

Analogamente, si $\{\bar{\omega}^i\}$ es un sistema de 1-formas independientes invariantes a la derecha, el producto exterior

$$d_R G = \bar{\omega}^1 \wedge \bar{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \bar{\omega}^n \qquad (4.31)$$

es el elemento de volumen de G invariante a la derecha.

Los grupos para los cuales es $d_L G = d_R G$ se llaman <u>grupos unimodulares</u>.

<u>Ejemplo</u>

Para el grupo (4.3), (4.4) las traslaciones a la derecha $x \to xb$ se escriben

$$R_b : x_1' = b_1 x_1 , \qquad x_2' = b_2 x_1 + x_2 \qquad (4.32)$$

y una base para las 1-formas invariantes a la derecha es

$$\bar{\omega}^1 = dx_1/x_1 , \qquad \bar{\omega}^2 = -(x_2/x_1)dx_1 + dx_2 \qquad (4.33)$$

Por tanto es

$$d_L G = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1^2} , \qquad d_R G = \frac{dx_1 \wedge dx_2}{x_1}$$

o sea, el grupo definido por (4.3), (4.4) no es unimodular.

Para ver lo que significa que $d_L G$ es invariante a la izquierda, supongamos por ejemplo el rectángulo cuyos vértices son $P(2,0)$, $Q(3,0)$, $R(3,2)$, $S(2,2)$. Suponiendo $a=(2,3)$, por la traslación L_a este rectángulo pasa al de vértices $P'(4,3)$, $Q'(6,3)$, $R'(6,7)$, $S'(4,7)$. Es inmediato comprobar que para ambos rectángulos la integral sobre ellos de $d_L G$ vale lo mismo, en este caso 1/3.

5. GRUPOS DE MATRICES

Los grupos de Lie más manejables y los más importantes en Geometría son los grupos de matrices. Son aquellos cuyos elementos son matrices cuadradas de un orden dado, inversibles, con la operación producto del grupo coincidente con el producto ordinario de matrices. Vamos a considerar algunos ejemplos, limitándonos siempre a matrices con elementos reales.

1. <u>El grupo lineal general</u> $GL(n)$. Está formado por todas las matrices $n\times n$ inversibles, o sea, de determinante no nulo. Si $a = (a_{ij})$ es una de estas matrices, se puede representar por un punto de R^{n^2}, cuyas coordenadas sean $x_1 = a_{11}$, $x_2 = a_{12}, \ldots, x_{(i-1)n+j} = a_{ij}, \ldots, x_{n^2} = a_{nn}$. La variedad del grupo, que

representaremos igualmente por GL(n), es el espacio numérico R^{n^2} exceptuando la hipersuperficie det a = 0, que es de la forma $f(x_1,x_2,\ldots,x_{n^2}) = 0$ siendo f un polinomio de grado n. Tomando la identidad como el homeomorfismo de las cartas locales, resulta una variedad diferenciable de dimensión n^2 y como las funciones (4.1) y (4.2) son polinomios o cocientes de polinomios de denominador no nulo, resulta que GL(n) es un grupo de Lie de dimensión n^2. Para hallar el álgebra de Lie de GL(n) debemos hallar los vectores tangentes en la identidad e (matriz unidad). Para ello consideremos una curva $a_{ij} = a_{ij}(t)$ que pase por el origen; podemos suponer que el origen corresponde a t = 0 y por tanto $a_{ij}(0) = \delta_{ij}$. El vector tangente en e tendrá por componentes las derivadas $a'_{ij}(0)$. Como estas derivadas pueden tomar valores cualesquiera (tomando la curva convenientemente), resulta que los vectores de T_e son todas las matrices n×n (sean o no regulares). Si $a = (a_{ij})$ es una de estas matrices, el campo de vectores tangentes invariantes a la izquierda engendrado por ella según (4.8) es

$$a_X = \sum_{i,j,h=1}^{n} x_{ij}a_{jh} \frac{\partial}{\partial x_{ih}} \qquad (4.34)$$

donde hemos indicado a las variables $x_1,x_2,\ldots,x_{n^2}$ por $x_{11},x_{12},\ldots,x_{nn}$ para mayor comodidad. Por tanto, se tiene

$$[a_x, b_x] = (a_x b_x - b_x a_x) = \sum x_{ij} a_{jh} b_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{is}} -$$

$$- \sum x_{ij} b_{jh} a_{hs} \frac{\partial}{\partial x_{is}} = \sum x_{ij} (ab-ba)_{js} \frac{\partial}{\partial x_{is}} \qquad (4.35)$$

donde las sumas se extienden de 1 a n respecto todos los pares de índices repetidos. Para $x = e$, este resultado se puede escribir

$$[a,b] = ab - ba. \qquad (4.36)$$

Es decir, el álgebra de Lie de $GL(n)$ es el álgebra de todas las matrices $n \times n$ con elementos reales y la operación corchete (4.36).

Las 1-formas invariantes a la izquierda son los elementos de la matriz

$$\Omega = x^{-1}\, dx, \qquad x \in GL(n) \qquad (4.37)$$

En efecto, se tiene $\Omega(ax) = (ax)^{-1} d(ax) = x^{-1}\, dx = \Omega(x)$ lo que prueba que Ω es invariante por traslaciones a la izquierda. Las ecuaciones de estructura se obtienen por diferenciación exterior de (4.47), resultando

$$d\Omega = d(x^{-1}) \wedge dx = -x^{-1} dx\, x^{-1} \wedge dx = -\Omega \wedge \Omega \quad (4.38)$$

o sea, si ω_{ij} son los elementos de Ω,

$$d\omega_{ij} = - \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \qquad (4.39)$$

Las n^2 1-formas ω_{ij}, elementos de la matriz Ω, forman un sistema de 1-formas de Maurer-Cartan, correspondientes al sistema de coordenadas mencionado, en el cual los elementos de GL(n) están representados por los puntos del espacio numérico de n^2 dimensiones, con las coordenadas $x_{(i-1)n+j} = x_{ij}$. Las 1-formas invariantes a la derecha son los elementos de la matriz $\Gamma = dx.x^{-1}$ puesto que $\Gamma(xa) = d(xa).(xa)^{-1} = dx.x^{-1} = \Gamma(x)$.

2. <u>El grupo lineal especial</u> SL(n). Esta formado por todas las matrices nxn de elementos reales cuyo determinante es igual a la unidad. La variedad diferenciable de SL(n) es la hipersuperficie de R^{n^2} cuya ecuación es $\det a = f(x_1,x_2,...,x_{n^2}) = 1$, con la topología inducida por la del espacio ambiente y la identidad como homeomorfismo de las cartas locales. Puesto que las derivadas parciales $\partial f/\partial x_{ij}$ son los determinantes adjuntos o cofactores de x_{ij} en el det a; y por tanto no pueden ser todos nulos, la matriz jacobiana $(\partial f/\partial x_{ij})$ (en este caso de una sola fila) tiene rango 1 y el Teorema 2.18 nos dice que SL(n) es una variedad diferenciable de dimensión n^2-1. Las funciones (4.1), (4.2) son polinomios. Por tanto SL(n) es un grupo de Lie de dimensión n^2-1.

Para encontrar el álgebra de Lie, observemos que un vector tangente en la identidad e, está determinado por las derivadas $a'_{ij}(t)$ para t = 0 de una curva $a_{ij}(t)$ que para $t = 0$ pase por e. Si $t = 0$ corresponde a la identidad, debe ser $a_{ij}(t) = \delta_{ij} + a'_{ij}(0)t + \ldots$ y por tanto

$$\det a = \det(\delta_{ij} + a'_{ij}(0)t + \ldots) = 1 + \sum a'_{ii}\, t + \ldots$$

y si este determinante debe valer la unidad, resulta $\sum a'_{ii} = 0$. Como aparte de esta condición, las derivadas $a'_{ij}(0)$ pueden ser cualesquiera, resulta por razones de dimensión: el álgebra de Lie del grupo SL(n) esta formada por las matrices $n \times n$ de traza nula. La operación corchete, como para todo grupo de matrices, es $[a,b] = ab - ba$ (Ver ejercicio 5 de esta sección).

Las 1-formas invariantes a la izquierda, igual que antes, son los elementos de la matriz $\Omega = x^{-1}dx$ y las ecuaciones de estructura son las mismas (4.38) o (4.39) (Ver ejercicio 5 de esta sección). Observemos unicamente que los elementos de la matriz inversa son, en general $x^{-1}_{ij} = (\text{adj } x_{ji})/\det x$ y por tanto, si $\det x = 1$, resulta $x^{-1}_{ij} = \text{adj } x_{ji}$. Por tanto, aplicando la regla de derivación de un determinante, resulta

$$d(\det x) = \sum (\text{adj } x_{ij})dx_{ij} = \sum x^{-1}_{ji}\, dx_{ij} = \text{traza } \Omega$$

o sea, las 1-formas de Maurer-Cartan ω_{ij} de SL(n) cumplen la condición

$$\omega_{11} + \omega_{22} + \ldots + \omega_{nn} = 0 \qquad (4.41)$$

Por consiguiente hay sólo n^2-1 1-formas independientes, como debe ser, puesto que la dimensión de $SL(n)$ es n^2-1.

3. El grupo ortogonal $O(n)$. Es el grupo de las matrices $n\times n$ tales que

$$O.O^t = e \tag{4.42}$$

siendo O^t la matriz transpuesta y e la matriz unidad. La variedad del grupo es la intersección en R^{n^2} de las hiper superficies definidas por las ecuaciones

$$\sum_{h=1}^{n} x_{ih}x_{jh} = \delta_{ij} \tag{4.43}$$

deducidas de (4.42), llamando x_{ih} a los elementos de O. Según el teorema 2.18 se trata de una variedad diferenciable cuya dimensión es $n(n-1)/2$ (ver ejercicio 4 de esta sección). Vamos a calcular el álgebra de Lie de $O(n)$. Si $O(t)$ es una curva contenida en la variedad del grupo, tal que $O(0) = e$, será $O(t)O^t(t) = e$ y derivando respecto de t resulta $O'O^t + O\,O'^t = 0$, que para $t = 0$ se reduce a

$$O'(0) + O'^t(0) = 0 \tag{4.44}$$

Cada matriz $O'(0)$ es un vector de T_e, es decir, por razones de dimensión, los vectores de T_e son las matrices que cumplen (4.44). En otras palabras: el álgebra de Lie de $O(n)$ está formada por las matrices $n\times n$ antisimétricas.

La operación corchete es la de siempre $[a,b] = ab - ba$. Obsérvese, como debe ser, que si a,b son antisimétricas, también ab-ba es antisimétrica.

Las 1-formas invariantes a la izquierda son las 1-formas independientes de la matriz $\Omega = x^{-1}dx$. Se observa que es $\Omega^t = dx^t. (x^t)^{-1} = -x^{-1} dx\, x^t x = -\Omega$ lo que nos dice que Ω es una matriz antisimétrica, o sea, las ω_{ij} cumplen las condiciones

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \qquad (4.45)$$

Se tienen así $n(n-1)/2$ 1-formas independientes, número igual a la dimensión de $O(n)$, como debe ser.

La forma explícita de estas 1-formas invariantes a la izquierda (formas de Maurer-Cartan de $O(n)$) es

$$\omega_{ij} = \sum_{h=1}^{n} x_{hi}dx_{hj} = \sum_{h=1}^{n} x_{ih}dx_{jh} \qquad (4.46)$$

como se deduce de $\Omega = x^{-1}dx$ y de $x^{-1} = x^t$, por ser $x \in O(n)$.

De la condición (4.42) se deduce $(\det O)^2 = 1$, $\det O = \pm 1$. Las matrices ortogonales tales que $\det O = +1$ forman el <u>grupo ortogonal especial</u> $SO(n)$, que tiene la misma dimensión y las mismas formas de Maurer-Cartan que $O(n)$, pero es sólo una parte de $O(n)$. El grupo $O(n)$ no es conexo, puesto que no se puede pasar de un punto con $\det O = +1$ a otro con $\det O = -1$, sin pasar por $\det O = 0$, que no pertenece al grupo. El grupo especial $SO(n)$ es la parte conexa de $O(n)$ que contiene la identidad.

Las propiedades topológicas de las variedades de los grupos $O(n)$ y $SO(n)$ no son inmediatas. Para el grupo $SO(3)$, que representa las rotaciones de E_3 alrededor del origen O, observemos que cada una de estas rotaciones se puede representar por un vector de origen O cuya dirección sea la del eje de rotación y cuyo módulo sea la amplitud de la rotación, con $0 \leq \varphi \leq \eta$. Para $-\eta \leq \varphi \leq 0$, tomaremos el vector en el sentido opuesto. De esta manera $SO(3)$ queda representado por los puntos interiores de la bola B_3 de E_3 de radio η, con los puntos de la superficie diametralmente opuestos identificados, ya que las rotaciones alrededor del mismo eje de amplitudes $+\eta$ o $-\eta$ coinciden. El origen O corresponde a la identidad. Según lo dicho en el Capítulo 2, nº 6, $SO(3)$ equivale, por tanto, al espacio proyectivo P^3. Por consiguiente es también equivalente a S^3 con los puntos diametralmente opuestos identificados (Capítulo 2, nº 6) y entonces las semicircunferencias máximas son curvas cerradas que no pueden reducirse a un punto por deformación continua dentro de la variedad y, en cambio, si se consideran estas curvas cerradas recorridas dos veces, por ser entonces reducibles a circunferencias máximas, son reducibles a un punto por deformación continua. Esta propiedad se expresa en el lenguaje de la topología algebráica, diciendo que

P^3 o SO(3) tiene el coeficiente de torsión de dimensión 1 igual a 2.

Ejercicios

1. Estudiar el grupo O_Q de las matrices $n\times n$ tales que $O_Q Q O_Q^t = Q$, siendo Q una matriz invertible $n\times n$ simétrica dada. El caso O(n) corresponde al caso Q = e. Probar que el álgebra de Lie de O_Q está formada por las matrices A tales que $A^t Q + QA = 0$.

2. Un subgrupo $G_1 \subset G$ se dice que es un subgrupo invariante o normal de G, si $g\, G_1\, g^{-1} \subset G_1$ para todo $g \in G$. Probar que la componente conexa de un grupo de Lie G que contiene la identidad, es un subgrupo invariante de G. En particular SO(n) es un subgrupo invariante de O(n) y SL(n) un subgrupo invariante de GL(n).

3. Consideremos las matrices reales g de tipo $2n\times 2n$ tales que $g^t J\, g = J$, siendo

$$J = \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix}, \quad e = \text{matriz unidad } n\times n$$

Probar que forman un grupo de Lie de dimensión n(2n+1), cuya álgebra de Lie está formada por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{pmatrix}$$

siendo A,B,C matrices $n\times n$, con la condición de ser B y C simétricas. Se llama el grupo simpléctico lineal $Sp(n,R)$.

4. a) Si $A \in GL(n,R)$, sea $R_A : GL(n,R) \to GL(n,R)$ dada por $R_A(B) = B.A$. Si ψ de $GL(n,R)$ en el conjunto de las matrices simétricas está dada por $\psi(A) = A.A^t$, probar que R_A es difeomorfismo y que $\psi \circ R_A = \psi$ para todo $A \in O(n)$

b) Aplicando la regla de la cadena, probar que, para toda $A \in O(n)$:

$$\text{rango}\left(\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(A)\right) = \text{rango}\left(\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(I)\right)$$

donde $x^{k\ell}$ son las funciones coordenadas en R^{n^2} y $\psi^{ij}(i \leq j)$ son las funciones coordenadas de ψ.

c) Si $A = (a_{ij})$, probar que:

$$\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(A) = \begin{cases} a_{j\ell} & \text{si } k = i \neq j \\ a_{i\ell} & \text{si } k = j \neq i \\ 2a_{i\ell} & \text{si } k = i = j \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases}$$

d) Probar que $\text{rango}\left(\frac{\partial\psi^{ij}}{\partial x^{k\ell}}(I)\right) = \frac{n(n+1)}{2}$

e) Deducir que $O(n)$ es subvariedad sumergida de $GL(n,R)$ de dimensión igual a $\frac{n(n-1)}{2}$

f) Probar que $SO(n)$ es subvariedad abierta de $O(n)$

5. a) Sea M_1 una subvariedad inmersa de M y sea $f:P \to M$ una función C^∞ tal que $f(P) \subset M_1$. Probar que si $f:P \to M_1$ es continua también es C^∞.

b) Sea G un grupo de Lie. Si H es un subgrupo de G y es subvariedad de G, entonces H es un grupo de Lie.

c) Para H en las condiciones de b), sea $i:H \to G$ la inclusión. Entonces $(di)_e[X_e,Y_e] = [(di)_e(X_e),(di)_e(Y_e)]$ para $X_e,Y_e \in H_e \subset G_e$. Deducir que el corchete en H es "el mismo" que en G.

d) Si $\{\omega^i\}_{i=1}^n$ es un sistema de formas de Maurer-Cartan para G, sean $\omega'^i = i^*\omega^i$. Probar que $\{\omega'^1,\dots,\omega'^n\}$ es un sistema de generadores para las 1-formas invariantes a izquierda de H y que $\omega'^1,\dots,\omega'^n$ satisfacen ecuaciones de estructura con iguales coeficientes que $\omega^1,\dots,\omega^n$ (usar la conmutatividad de i^* y d y la distributividad de i^* respecto al producto exterior)

4. Grupo de los movimientos en E_2. Aunque en el último Capítulo estudiaremos el grupo de las isometrías en E_n, que comprende al grupo de los movimientos, vamos a estudiar ahora, a manera de introducción, el grupo de los movimientos en el plano E_2.

Un movimiento en el plano euclidiano E_2 es una aplicación $(x,y) \to (x',y')$ dada por ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \cos\varphi\, x - \operatorname{sen}\varphi\, y + a, \\ y' &= \operatorname{sen}\varphi\, x + \cos\varphi\, y + b \end{aligned} \qquad (4.47)$$

Para dar un movimiento hay que dar el ángulo φ (rotación) y los números reales a,b (traslación). Es fácil ver que los movimientos forman un grupo de traslaciones de E_2 en si mismo, isomorfo al grupo G de las matrices

$$g = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & a \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que al producto de dos movimientos corresponde la matriz producto de los mismos y que al movimiento inverso corresponde la matriz inversa g^{-1}. La variedad diferenciable del grupo G está formada por la franja de R^3 limitada por los planos $x_3 = 0$, $x_3 = 2\pi$, con los puntos $(x_1, x_2, 0)$ y $(x_1, x_2, 2\pi)$ identificados. Se trata del producto $R^2 \times S^1$, que es un "cilindro" de dimensión 3. El álgebra de Lie es el álgebra de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un sistema de formas de Maurer-Cartan está formado por los elementos de la matriz

$$\Gamma = g^{-1}\, dg = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi & \cos\varphi\ da + \operatorname{sen}\varphi\ db \\ d\varphi & 0 & -\operatorname{sen}\varphi\ da + \cos\varphi\ db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o sea

$$\omega^1 = \cos\varphi\ da + \operatorname{sen}\varphi\ db, \quad \omega^2 = -\operatorname{sen}\varphi\ da + \cos\varphi\ db,$$
$$\omega^3 = d\varphi$$

y las ecuaciones de estructura resultan ser

$$d\omega^1 = -\omega^2 \wedge \omega^3, \quad d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega^3, \quad d\omega^3 = 0$$

Las constantes de estructura, en el sistema de formas de Maurer-Cartan considerado, que no son nulas, resultan ser $C^2_{13} = -C^2_{31} = -1$, $C^1_{23} = -C^1_{32} = 1$.

Un sistema de 1-formas invariantes a la derecha está formado por los elementos de la matriz

$$\overline{\Gamma} = dg\ g^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -d\varphi & b\ d\varphi + da \\ -d\varphi & 0 & -a\ d\varphi + db \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o sea, $\overline{\omega}^1 = b\ d\varphi + da$, $\overline{\omega}^2 = -a\ d\varphi + db$, $\overline{\omega}^3 = d\varphi$ con las ecuaciones de estructura $d\overline{\omega}^1 = \overline{\omega}^2 \wedge \overline{\omega}^3$, $d\overline{\omega}^2 = -\overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^3$, $d\overline{\omega}^3 = 0$ y las mismas constantes de estructura de antes, cambiadas de signo, como ocurre en todo grupo.

Los elementos de volumen invariantes a la izquierda y a la derecha resultan ser iguales, a saber

$$d_L G = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = da \wedge db \wedge d\varphi = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_3 = d_R G.$$

O sea: <u>el grupo de los movimientos de E_2 es unimodular</u>

Ejercicio

Estudiar el grupo de las semejanzas en el plano euclidiano, definido por

$$x' = \rho(\cos\varphi\, x + \operatorname{sen}\varphi\, y) + a,$$

$$y' = \rho(-\operatorname{sen}\varphi\, x + \cos\varphi\, y) + b$$

el cual es isomorfo al grupo de las matrices de la forma

$$g = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\varphi & a \\ \rho\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho > 0$$

La variedad correspondiente es el producto $R^+ \times R^2 \times S^1$ siendo R^+ la semirecta real positiva.

Un sistema de formas de Maurer-Cartan es

$$\omega^1 = d\rho/\rho, \quad \omega^2 = d\varphi, \quad \omega^3 = \frac{\cos\varphi}{\rho}\,da + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\,db,$$

$$\omega^4 = -\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho}\,da + \frac{\cos\varphi}{\rho}\,db$$

de manera que el elemento de volumen invariante a la izquierda es $d_L G = \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 = \rho^{-3}\,d\rho \wedge d\varphi \wedge da \wedge db$. El elemento de volumen invariante a la derecha es $d_R G = \rho^{-1}\,d\rho \wedge d\varphi \wedge da \wedge db$ de manera que el grupo de las semejanzas del plano no es unimodular.

Problema

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n\times n$ y sea A^σ la matriz que resulta por una permutación σ de los n^2 elementos a_{ij}.

Hallar las permutaciones σ con la condición de que las matrices A que cumplen la condición $A\,A^{\sigma} = E$ formen un grupo. El caso $\sigma = t$ = transposición, corresponde al grupo ortogonal. Este caso no es el único. Por ejemplo, para $n = 2$, la permutación $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \to (a_{22}, a_{12}, a_{21}, a_{11})$ caracteriza el grupo de matrices

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \quad \text{con } a \neq 0.$$

La permutación $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \to (a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11})$ caracteriza el grupo de matrices SO(2).

6. SOBRE LAS VARIEDADES DE GRUPO

No toda variedad diferenciable puede ser variedad de un grupo de Lie. Unas condiciones "necesarias" para ello son inmediatas. En efecto, si la dimensión es n, dados n vectores tangentes independientes en el punto identidad e, por traslación a la izquierda (o a la derecha), se obtienen n vectores tangentes independientes en cada punto de la variedad, formando n campos de vectores tangentes independientes. Por tanto, según la definición del nº 3 del Capítulo 3, se tiene: <u>las variedades de grupo son paralelizables</u>. Esto equivale a decir que el fibrado tangente T(G) (3.27) es el producto $G \times T_e$ y según los Teoremas 3.2 y 2.36 se tiene: <u>las variedades de grupo son orientables.</u> Del primer resultado y del ejemplo 2 del nº 3 se deduce que la esfera S^2 no puede ser variedad de grupo.

La circunferencia S^1 es la variedad del grupo de las rotaciones del plano euclidiano alrededor de un punto. Se puede representar como el grupo multiplicativo de los complejos de módulo unidad, con las operaciones $\exp(ix).\exp(iy) = \exp(ixy)$, $(\exp(ix))^{-1} = \exp(-ix)$, $x,y \in S^1$.

Para ver si S^3 es o no variedad de grupo, recordemos lo siguiente. Un cuaternión es un elemento de la forma $\alpha = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ con a_i números reales y i,j,k símbolos que satisfacen las relaciones:
$i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.
El cuaternión conjugado de α es $\overline{\alpha} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k$ y la norma $N(\alpha)$ de α es $N(\alpha) = \alpha\overline{\alpha} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. El inverso de α es $\alpha^{-1} = \overline{\alpha}/N(\alpha)$. Los cuaterniones de norma unidad se representan biyectivamente por los puntos de la esfera S^3 de E_4, a saber, $a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Por otra parte, con las reglas anteriores para el producto de cuaterniones y observando que $N(\alpha\beta) = N(\alpha)\,N(\beta)$ y que el producto de cuaterniones es asociativo, resulta que los cuaterniones de norma unidad forman un grupo multiplicativo. Por tanto, S^3 es variedad de grupo, precisamente la variedad del grupo multiplicativo de los cuaterniones de norma unidad.

Se puede demostrar que S^1 y S^3 son las únicas esferas que son variedad de grupo (H.Samelson, Comm. Math. Helvetici, 13, 1940, p. 144-155) [24].

La condición necesaria de ser paralelizable, no es suficiente para que una variedad diferenciable sea una variedad de grupo. Por ejemplo, unas consideraciones analogas a las anteriores, pero con los números de Cayley de norma unidad (que se pueden representar por puntos de S^7) en vez de cuaterniones, prueban que S^7 es paralelizable, pero no es variedad de grupo, por no ser asociativo el producto de números de Cayley (ver, por ejemplo, Steenrod, Topology of Fiber Bundles, Princeton 1951, p. 37 y 108). Se puede demostrar que las únicas esferas paralelizables son S^1, S^3 y S^7.

Sobre estas cuestiones ver F.Thomas, Vector fields on manifolds, Bull, Amer. Math. Soc. 75, 1969, p. 643-683. El número de campos de vectores tangentes independientes que una variedad diferenciable puede admitir, es una característica topológica importante de la variedad. Mencionaremos, sin demostración, los siguientes teoremas:

a) Si las variedades diferenciables M, M' admiten respectivamente k y k' campos de vectores tangentes independientes, entonces la variedad $M \times M'$ admite $k+k'$ de ellos; en particular, si M y M' son paralelizables, también $M \times M'$ es paralelizable.

b) Si M' admite un campo de vectores tangentes, con los vectores distintos de cero en todo punto, entonces también $M \times M'$ admite, para cualquier variedad diferenciable M, un campo de vectores tangentes en las mismas condiciones.

c) Toda variedad diferenciable no compacta (supuesta, como siempre, paracompacta) admite un campo de vectores tangentes que no se anula en ningún punto (Hirsch, <u>On imbedding differentiable manifolds in euclidean space</u>, Ann. Math. 73, 1961, p.566-571) [8].

CAPITULO V

ESPACIOS DE RIEMANN Y DE CONEXION AFIN

1. TENSORES

Sea V un R-espacio vectorial de dimensión finita n y, para r,t enteros no negativos sea

$$T_r^t(V) = \{T: \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{r} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{t} \to R \text{ multilineales}\}$$

(En particular, $T_0^1(V) = V^*$, $T_1^0(V) = V^{**}$ y $T_0^0(V) = R$)

Este espacio tiene una estructura natural de R-espacio vectorial con la suma y el producto por un número real definidos punto a punto. Si $T \in T_r^t(V)$ y $S \in T_\ell^m(V)$, se define su producto tensorial $T \otimes S \in T_{r+\ell}^{t+m}(V)$ como:

$$T \otimes S(\gamma^1,\ldots,\gamma^{r+\ell}, v_1,\ldots,v_{t+m}) =$$

$$= T(\gamma^1,\ldots,\gamma^r, v_1,\ldots,v_t).$$

$$. \; S(\gamma^{r+1},\ldots,\gamma^{r+\ell}, v_{t+1},\ldots,v_{t+m})$$

para $\gamma_i \in V^*$, $v_j \in V$. Este producto tensorial es evidentemente asociativo y no conmutativo.

Vamos a calcular la dimensión de $T_r^t(V)$ encontrando una base. Recordamos que $v \in V$, v puede pensarse como un elemento de V^{**} a través de

$$v(\gamma) = \gamma(v) \qquad \text{para} \quad \gamma \in V^*$$

y, siempre para espacios vectoriales de dimensión finita, esa correspondencia $V \to V^{**}$ es un isomorfismo.

TEOREMA 5.1. Sea V un R-espacio vectorial de dimensión n, sea $V_1,\dots,V_n$ una base de V y sea $\gamma^1,\dots,\gamma^n$ la base dual de V^*. Entonces

$$\{V_{i_1}\otimes\dots\otimes V_{i_r}\otimes\gamma^{j_1}\otimes\dots\otimes\gamma^{j_t}\}_{1\leq i_\ell,j_k\leq n}$$

es una base de $T^t_r(V)$ que, por tanto, tiene dimensión n^{r+t}.

DEMOSTRACION Veamos primero que ese conjunto es un sistema de generadores. Para ello sea $T\in T^t_r(V)$ y sean $W_1,\dots,W_t\in V$, $\varphi^1,\dots,\varphi^r\in V^*$. Entonces será:

$$W_i = a^j_i\,V_j$$

$$\varphi^i = b^i_j\,\gamma^j$$

en donde hemos utilizado la convención de Einstein para la suma: índices repetidos se sobreentiende que van sumados de 1 a n.

Luego:

$$T(\varphi^1,\dots,\varphi^r,W_1,\dots,W_t) = T(b^1_{i_1}\,\gamma^{i_1},\dots,b^r_{i_r}\,\gamma^{i_r},\; a^{j_1}_1\,V_{j_1},\dots,a^{j_t}_t\,V_{j_t}) =$$

$$= b^1_{i_1},\dots,b^r_{i_r}.a^{j_1}_1\dots a^{j_t}_t.T(\gamma^{i_1},\dots,\gamma^{i_r},V_{j_1},\dots,V_{j_t}) =$$

$$= V_{i_1}(\varphi^1)\dots V_{i_r}(\varphi^r).\gamma^{j_1}(W_1)\dots\gamma^{j_t}(W_t).$$

$$.T(\gamma^{i_1},\dots,\gamma^{i_r},V_{j_1},\dots,V_{j_t}) =$$

$$= T(\gamma^{i_1},\ldots,\gamma^{i_r},V_{j_1},\ldots,V_{j_t}).$$

$$.V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_r}\otimes\gamma^{j_1}\otimes\ldots\otimes\gamma^{j_t}(\varphi^1,\ldots,\varphi^r,W_1,\ldots,W_t)$$

y como eso vale cualesquiera sean los φ^i y los W_j, resulta

$$T = T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_t}\,.\,V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_r}\otimes\gamma^{j_1}\otimes\ldots\otimes\gamma^{j_t}$$

con $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_t} = T(\gamma^{i_1},\ldots,\gamma^{i_r}, V_{j_1},\ldots,V_{j_t}) \in R$. Esto prueba el carácter de generadores del conjunto dado.

Para la independencia lineal, supongamos

$$\lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_t} V_{i_1}\otimes\ldots\otimes V_{i_r}\otimes\gamma^{j_1}\otimes\ldots\otimes\gamma^{j_t} = 0$$

Aplicando a $(\gamma^{h_1},\ldots,\gamma^{h_r},V_{k_1},\ldots,V_{k_t})$ resulta:

$$\lambda^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_t}\,\delta^{h_1}_{i_1}\ldots\delta^{h_r}_{i_r}.\delta^{j_1}_{k_1}\ldots\delta^{j_t}_{k_t} = 0$$

o sea

$$\lambda^{h_1\ldots h_r}_{k_1\ldots k_t} = 0$$

Y ésto vale cualesquiera sean los índices $h_1,\ldots,h_r,\ k_1,\ldots,k_t$ ///

Sea ahora M una variedad C^∞ de dimensión n. Para $p \in M$, consideramos $V = M_p$, espacio tangente a M en p. Si (x,U) es una carta local alrededor de p, entonces, por el Teorema 5.1.

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p \otimes (dx^{j_1})_p \otimes \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \otimes (dx^{j_t})_p\right\}_{1 \leq i_h, j_k \leq n}$$

es una base de $T^t_r(M_p)$.

Un <u>campo tensorial</u> (o simplemente, un tensor) <u>de tipo (r,t)</u> es una función

$$T : M \to \bigcup_{p \in M} T^t_r(M_p)$$

tal que $T(p) \in T^t_r(M_p)$ para todo $p \in M$.

Si (x,U) es una carta local en M y T un campo tensorial de tipo (r,t), podremos escribir en U:

$$T = a^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_t} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_t}$$

Si $(\overline{x},\overline{U})$ es otra carta local, también será, en $\overline{U}$:

$$T = \overline{a}^{h_1 \ldots h_r}_{k_1 \ldots k_t} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{h_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \overline{x}^{h_r}} \otimes d\overline{x}^{k_1} \otimes \cdots \otimes d\overline{x}^{k_t}$$

Escribiendo las $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en función de las $\frac{\partial}{\partial \overline{x}^j}$ y las dx^i en función de las $d\overline{x}^j$ y usando la multilinealidad del producto tensorial resulta, en $U \cap \overline{U}$:

$$\overline{a}^{h_1 \ldots h_r}_{k_1 \ldots k_t} = \frac{\partial \overline{x}^{h_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{h_r}}{\partial x^{i_r}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \overline{x}^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_t}}{\partial \overline{x}^{k_t}} a^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_t}$$

o sea el campo tensorial de tipo (r,t) corresponde a la noción clásica de tensor r-contravariante, s-covariante.

2. CONEXIONES

Una conexión sobre una variedad C^{∞} M es una función

$$\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$$

o sea una función que a cada par de campos vectoriales C^{∞} X,Y les hace corresponder otro campo C^{∞} que se indica $\nabla_X Y$ tal que

1) $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\, \nabla_{X_1} Y + g\, \nabla_{X_2} Y$

2) $\nabla_X (Y_1+Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

3) $\nabla_X (fY) = f.\nabla_X Y + X(f).Y$

Alternativamente, podemos pensar a una conexión como a una función que a cada $X_p \in M_p$ y cada campo C^{∞} Y le hace corresponder un elemento $\nabla_{X_p} Y \in M_p$ de manera que se satisfagan las siguientes propiedades:

1') $\nabla_{aX_p + bX'_p} Y = a\, \nabla_{X_p} Y + b \nabla_{X'_p} Y$

2') $\nabla_{X_p} (Y_1+Y_2) = \nabla_{X_p} Y_1 + \nabla_{X_p} Y_2$

3') $\nabla_{X_p} (fY) = f(p)\, \nabla_{X_p} Y + X_p(f).Y$

4') El campo $p \to \nabla_{X_p} Y$ es C^{∞} si X,Y son campos C^{∞} (y $X_p = X(p)$)

Para pasar de la primera definición a la segunda, definimos

$$\nabla_{X_p} Y = \nabla_X Y(p)$$

donde X es un campo C^∞ tal que $X(p) = X_p$. Hay que ver desde luego que $\nabla_X Y(p)$ no depende de la extensión X elegida. Ello lo debemos hacer en dos pasos

i) Si $X = X'$ en un abierto U, entonces $\nabla_X Y = \nabla_{X'} Y$ en U para todo campo C^∞ Y. Sea $q \in U$ y sea $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $\varphi(q) = 1$, sop $\varphi \subset U$. Entonces $\varphi X = \varphi X'$ y por tanto para todo campo C^∞ Y será

$$\nabla_{\varphi X} Y = \nabla_{\varphi X'} Y$$

o sea por 1):

$$\varphi \nabla_X Y = \varphi \nabla_{X'} Y$$

Evalu ndo en q:

$$\nabla_X Y(q) = \nabla_{X'} Y(q)$$

ii) Si $X_p = X'_p$, entonces $\nabla_{X_p} Y(p) = \nabla_{X'_p} Y(p)$ para todo campo C^∞ Y. Sea (x, U) una carta local en p; si $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $X' = \sum a'^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en U, entonces $a^i(p) = a'^i(p)$. Apelando a extensiones $\tilde{a}^i$, $\tilde{a}'^i$, $\tilde{X}_i$ que coincidan con, a^i, a'^i y $\frac{\partial}{\partial x^i}$ en un entorno de p respectivamente, resulta que si

$$\tilde{X} = \sum \tilde{a}^i \tilde{X}_i, \quad \tilde{X}' = \sum \tilde{a}'^i \tilde{X}_i$$

entonces usando i):

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{\tilde{X}} Y(p) = \sum \tilde{a}^i \nabla_{\tilde{X}_i} Y(p) = \sum \tilde{a}^i(p) \nabla_{\tilde{X}_i} Y(p) =$$

$$= \sum \tilde{a}'^i(p) \nabla_{\tilde{X}_i} Y(p) = \nabla_{\sum \tilde{a}'^i \tilde{X}_i} Y(p) = \nabla_{X'} Y(p)$$

Para pasar de la segunda definición a la primera definimos

$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{X(p)} Y$$

y lo único que hay que verificar es que ∇ es $C^\infty(M)$-lineal en X:

$$\nabla_{fX} Y(p) = \nabla_{(fX)(p)} Y = \nabla_{f(p)X(p)} Y = f(p)\, \nabla_{X(p)} Y =$$

$$= (f.\nabla_X Y)(p)$$

y como vale para todo p, concluimos $\nabla_{fX} Y = f\, \nabla_X Y$.

Hacemos notar que si $Y = Y'$ en un abierto U, $\nabla_X Y = \nabla_X Y'$ en ese entorno aunque ya no es cierto que $Y(p) = Y'(p)$ implique $\nabla_X Y(p) = \nabla_X Y'(p)$ (mirar 3)). Entonces si X,Y son campos C^∞ en un abierto U no definidos sobre toda la variedad, tiene un sentido unívoco $\nabla_X Y$.

Sea ahora (x,U) una carta local en la variedad M. Como $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$ es un campo C^∞ en U, podremos escribirlo en términos de la base $\frac{\partial}{\partial x^k}$, digamos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

para ciertas funciones C^∞ Γ^k_{ij}. Si $(\overline{x},\overline{U})$ es otro sistema de coordenadas, será

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k}$$

En $U \cap \overline{U}$ es $\dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^h} \cdot \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^i}$. Reemplazando en la igualdad y usando la convención de Einstein para la suma:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^s}} \left(\frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^h}\right) = \overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^s}$$

o sea por 3):

$$\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^s}} \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^s} \left(\frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^j}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^h} = \overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^s}$$

es decir:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^\ell_{hs} \frac{\partial}{\partial x^\ell} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^h} = \overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^s}$$

Cambiando índices:

$$\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \overline{x}^j} \Gamma^h_{\ell s} \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{\partial^2 x^h}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^h} = \overline{\Gamma}^k_{ji} \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

Por ser $\frac{\partial}{\partial x^h}$ una base, concluimos que

$$\bar{\Gamma}^k_{ji} \cdot \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \Gamma^h_{\ell s}$$

o sea

$$\bar{\Gamma}^k_{ji} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^h} \left(\frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \Gamma^h_{\ell s} \right)$$

que es la ley de transformación para las conexiones clásicas.

Recíprocamente, si tenemos una conexión clásica Γ^k_{ij}, definimos

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

y extendemos para campos cualesquiera usando 1) 2) y 3). La ley de transformación de las Γ^k_{ij} asegura que la definición dada no depende del sistema de coordenadas usado.

En el análisis tensorial clásico, las conexiones se introducen para obtener un operador (la derivada covariante) que aplicado a tensores de tipo (r,t) da como resultado un tensor de tipo (r,t+1) en cuyas componentes aparecen las derivadas parciales de las componentes del tensor original. Para recuperar ese punto de vista partiendo de la definición que dimos de una conexión, debemos hacer las siguientes observaciones:

a) Si $X \in D^1(M)$, podemos pensar a X como una función $\overline{X}$ de $C^\infty(M)$ en si mismo. En efecto, si $f \in C^\infty(M)$ (o sea, $f:M \to R$ es C^∞), definimos $\overline{X}(f) \in C^\infty(M)$ por

$$\overline{X}(f)(p) = X(p)(f) \qquad (p \in M)$$

Se prueba que la función $X \to \overline{X}$ es un isomorfismo entre los $C^\infty(M)$-módulos $D^1(M)$ y $Der(M) = \{T:C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ R-lineales tales que $T(f.g) = f.T(g) + g.R(f)\}$

b) Analogamente, si $\omega \in D_1(M)$ (1-forma diferencial C^∞), ω se puede pensar como una función $\overline{\omega}$ de $D^1(M)$ en $C^\infty(M)$ de la siguiente manera:

$$\overline{\omega}(X)(p) = \omega(p)(X_p)$$

para $X \in D^1(M)$ y $p \in M$. La correspondencia $\omega \to \overline{\omega}$ es un isomorfismo entre los $C^\infty(M)$-módulos $D_1(M)$ y $D^1(M)^*$ (dual algebraico de $D^1(M)$).

c) Todo $X \in D^1(M)$ se puede pensar como un elemento $\tilde{X} \in D_1(M)^*$ a través de

$$\tilde{X}(\omega) = \omega(X)$$

para $\omega \in D_1(M)$. Nuevamente la correspondencia $X \to \tilde{X}$ es un isomorfismo.

d) En general, si $D^r_t(M)$ designa los tensores de tipo (r,t), entonces cada $T \in D^r_t(M)$ se puede interpretar como una función $C^\infty(M)$-multilineal

$$\overline{T}:\underbrace{D_1(M)\times\ldots\times D_1(M)}_{r}\times\underbrace{D^1(M)\times\ldots\times D^1(M)}_{t} \to C^\infty(M)$$

a través de

$$\overline{T}(\omega_1,\ldots,\omega_r,X_1,\ldots,X_t)(p) = T(p)(\omega_1(p),\ldots$$
$$\ldots,\omega_r(p),X_1(p),\ldots,X_t(p))$$

y nuevamente la correspondencia $T \to \overline{T}$ es un isomorfismo.

De ahora en adelante, no distinguiremos en la notación las diferentes interpretaciones de un tensor dado.

Volviendo a las conexiones, supongamos tener $\nabla : D^1(M) \times D^1(M) \to D^1(M)$ que satisface las condiciones 1) a 4) de la definición. Dado $Y \in D^1(M)$, podemos considerar la función $\nabla Y : D^1(M) \to D^1(M)$ definida por

$$\nabla Y(X) = \nabla_X Y$$

Siendo $D^1(M) \simeq D_1(M)^*$, ∇Y se puede interpretar como una función de $D_1(M) \times D^1(M)$ en $C^\infty(M)$, explicitamente:

$$\nabla Y(\omega,X) = \omega(\nabla_X Y)$$

De acuerdo a d), la conexión ∇ puede pensarse como una función que transforma campos vectoriales Y (o sea, tensores de tipo (1,0)) en tensores de tipo (1,1). Veamos en una carta local la expresión de ∇Y supuesta conocida la de Y.

Sea (x,U) una carta local de M y sea, en U:

$$Y = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Entonces será

$$\nabla Y = b^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j$$

para ciertas función $b^i_j : U \to R$. Para calcular estas funciones basta usar la dualidad entre $\frac{\partial}{\partial x^i}$ y dx^j:

$$b^h_k = \nabla Y(dx^h, \frac{\partial}{\partial x^k}) = dx^h(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} Y) =$$

$$= dx^h (\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}) =$$

$$= dx^h (a^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^k} (a^i) . \frac{\partial}{\partial x^i}) =$$

$$= dx^h (a^i \Gamma^j_{ik} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial a^i}{\partial x^k} . \frac{\partial}{\partial x^i}) =$$

$$= a^i \Gamma^h_{ik} + \frac{\partial a^i}{\partial x^k}$$

Entonces las componentes de ∇Y en la base proporcionada por la carta local (x,U) son las de la clásica derivada covariante de un vector (campo vectorial) (Ver por ejemplo Santaló, (Vectores y tensores con sus aplicaciones Eudeba 1961, p.310).

Al igual que en el cálculo tensorial clásico, el operador ∇ se puede extender a un operador, llamado derivada covariante, que transforma tensores de tipo (r,t) en tensores de tipo $(r,t+1)$, o sea aumenta en uno el grado de covariancia (Ver ejercicio 1 de esta sección).

Asociados con una conexión, aparecen dos tensores de gran importancia. El primero es el <u>tensor de torsión</u> T, tensor de tipo (1.2) dado por

$$T(\omega, Y\ X) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])$$

para $\omega \in D_1(M)$, X, $Y \in D^1(M)$.

De acuerdo a lo dicho en d), para ver el caracter tensorial de T hay que verificar la $C^\infty(M)$-multilinealidad, lo que se deja como ejercicio. Queremos calcular ahora este tensor en coordenadas locales. Para ello, sea (x,U) una carta local y sea, en U:

$$T = T^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k.$$

Entonces

$$T^i_{jk} = T(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) =$$

$$= dx^i(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} - [\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}]) =$$

$$= dx^i\ (\Gamma^\ell_{jk} \frac{\partial}{\partial x^\ell} - \Gamma^\ell_{kj} \frac{\partial}{\partial x^\ell} - 0) =$$

$$= \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

es decir las componentes de T correspondientes a la carta local (x,U) son las del clásico tensor de torsión.

El otro tensor que aparece asociado a una conexión es el tensor de <u>curvatura de Riemann</u> R, tensor de tipo (1,3) definido por

$$R(\omega,X,Y,Z) = \omega(\nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla_{[Y,Z]}X)$$

Dejamos como ejercicio la verificación del carácter tensorial de R, así como su expresión en coordenadas locales: si (x,U) es una carta local en M y, en U:

$$R = R^i_{jk\ell}\, \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell$$

entonces

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^\ell} + \Gamma^s_{j\ell}\, \Gamma^i_{sk} - \Gamma^s_{jk}\, \Gamma^i_{s\ell}$$

(componentes del clásico tensor de curvatura)

<u>Ejercicios</u>

1\. a) Si T en un tensor de tipo (r,t) y para cada carta (x,U) sus componentes son $T^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_t}$, consideremos las funciones $T^{i_1\ldots i_{h-1}\, i_{h+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\ell-1}\, j_{\ell+1}\ldots j_t} : U \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$T^{i_1\ldots i_{h-1}\, i_{h+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\ell-1}\, j_{\ell+1}\ldots j_t} = T^{i_1\ldots i_{h-1}\, a\, i_{h+1}\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{\ell-1}\, a\, j_{\ell+1}\ldots j_t}$$

(sumado sobre a). Probar que forman las componentes de un tensor de tipo (r-1, t-1) (que se denomina <u>contracción</u> de los índices h y ℓ de T).

b) Sea ∇ una conexión en una variedad M. Probar que hay un único operador lineal

$$A \to \nabla A$$

que lleva tensores de tipo (r,t) en tensores de tipo (r,t+1) tal que

a) $\nabla f(X) = X(f)$ para $X \in D^1(M)$

b) ∇X coincide con la derivada covariante de X para $X \in D^1(M)$

c) $\nabla(A \otimes B) = (\nabla A) \otimes B + A \otimes \nabla B$

d) ∇ conmuta con las contracciones

e) Verificar que si A es un tensor de tipo (r,t), (x,U) es una carta local y

$$A = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_t} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_t}$$

entonces

$$\nabla A = A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{t;h}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_t} \otimes dx^h$$

donde $A^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_{t;h}}$ son las componentes de la clásica derivada covariante de A respecto a la conexión dada (Ver Santaló, Id., p. 312)

3. TRASLACION PARALELA

Sea M una variedad y sea ∇ una conexión sobre M. Si Y es un campo vectorial C^∞ sobre M y $c:[a,b] \to M$ es una curva C^∞, hemos visto que ∇Y es un tensor de tipo (1,1) llamado derivada covariante del campo Y. Decimos que Y es <u>paralelo a lo largo de c</u> si esa derivada covariante es nula aplicada a los vectores tangentes a la curva (que notamos $c'(t)$). Entonces paralelismo a lo largo de c significa:

$$(\nabla_{c'(t)}Y)(c(t)) = 0 \qquad \text{para todo } t \in [a,b]$$

Veamos en coordenadas el significado del paralelismo. Si (x,U) es una carta local, entonces $c'(t) = (x^i \circ c)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$ y sea $Y = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$0 = \left(\nabla_{(x^i \circ c)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}} v^s \frac{\partial}{\partial x^s}\right)(c(t)) =$$

$$= (x^i \circ c)'(t)\, \frac{\partial v^s}{\partial x^i}(c(t))\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{c(t)} +$$

$$+ (x^i \circ c)'(t)\, v^s(c(t))\, \Gamma^{\ell}_{is}(c(t))\left(\frac{\partial}{\partial x^{\ell}}\right)_{c(t)} =$$

$$= \frac{d(v^s \circ c)}{dt}(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{c(t)} +$$

$$+ (x^i \circ c)'(t)v(c(t)).\Gamma^s_{i\ell}(c(t)).\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{c(t)}$$

o sea, como $\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)_{c(t)}$ forma una base y t es cualquiera:

$$(1) \qquad \frac{d(v^s \circ c)}{dt} + (x^i \circ c)' v^{\ell} \circ c . \Gamma^s_{i\ell} \circ c = 0$$

Observemos ahora que, dada la curva c, las ecuaciones anteriores resultan ser ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en las incognitas $v^s \circ c$. Como además son lineales, las soluciones (única si fijamos una condición inicial) están definidas para todo $t \in [a,b]$. Luego, dado $X_a \in M_{c(a)}$, existe una única familia de vectores $X_t \in M_{c(t)}$ tales que sus componentes verifican la ecuación diferencial dada y que X_a sea el dado; además sus componentes son C^∞ como función de t. El campo X_t así conseguido a lo largo de c se denomina transporte paralelo de X_a a lo largo de c. Por la linealidad de las ecuaciones (1) (y la unicidad), es fácil verificar que $X_a + Y_a$ da lugar a $X_t + Y_t$ y $\lambda.X_a$ da lugar a $\lambda.X_t$. Luego tenemos, dada la curva c, una transformación lineal entre $M_{c(a)}$ y $M_{c(t)}$ para cada $t \in [a,b]$ que conecta estos espacios tangentes (de ahí el nombre de "conexión" para ∇). Esta transformación es un isomorfismo: si consideramos la curva recorrida en sentido inverso (i.e., $\bar{c}(t) = c(-t)$), entonces por unicidad de las soluciones de (1), el transporte paralelo de X_t a c(a) da como resultado X_a.

Podemos preguntarnos ahora si el transporte paralelo será independiente de la curva, es decir, si dados $p,q \in M$ y curvas c_1, c_2 entre p y q y dado $X_p \in M_p$, la traslación por c_1 a q, X_q, y la traslación por c_2 a q, X'_q, son iguales, $X_q = X'_q$. En general no es así, pero la condición necesaria y suficiente para que lo sea es muy fácil de expresar:

TEOREMA 5.1. Sea M una variedad conexa C^{∞} y sea ∇ una conexión sobre M. Entonces son equivalentes:

a) La traslación paralela es localmente independiente de la curva.

b) El tensor de curvatura de Riemann es idénticamente nulo.

DEMOSTRACION a) $\Rightarrow$ b)

Sea (x,U) una carta con U conexo, sea $p \in U$ y $X_p \in M_p$ fijo de ahora en adelante. Trasladamos X_p por paralelismo a todo U y obtenemos así un campo vectorial sobre U, digamos

$$X = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Hemos indicado ya que las soluciones de (1) son C^{∞} como función de t para toda curva s. Si en particular consideramos las curvas coordenadas, vemos que u^i es una función C^{∞} o sea el campo obtenido por traslación es C^{∞}.

Como este campo satisface (1) para toda curva c en U, podemos escribir:

$$(x^i \circ c)'(t) \left[\frac{\partial u^s}{\partial x^i}(c(t)) + u^{\ell}(c(t))\, \Gamma^s_{i\ell}(c(t))\right] = 0$$

para toda curva c en U. Luego

$$(2) \quad \frac{\partial u^s}{\partial x^i} + u^{\ell}\, \Gamma^s_{i\ell} = 0$$

identicamente en U. Por ser las u^s C^∞, será

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 u^s}{\partial x^j \partial x^i}$$

o sea

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (u^\ell \Gamma^s_{i\ell}) = \frac{\partial}{\partial x^i} (u^\ell \Gamma^s_{j\ell})$$

de donde es fácil llegar a:

$$R^s_{\ell ij} \; u^\ell = 0$$

Como la condición inicial X_p es arbitraria, los u^ℓ pueden tomar cualquier valor y por lo tanto:

$$R^s_{\ell ij} = 0$$

Luego $R = 0$ en U y eso vale para toda carta local (x,U)

b) ⇒ a)

Si $R = 0$, sea $p \in M$, sea (x,U) una carta alrededor de p y $X_p \in M_p$ fijo pero arbitrario. Según vimos en la implicación anterior, las condiciones de integrabilidad $\frac{\partial^2 u^s}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 u^s}{\partial x^j \partial x^i}$ se traducen en $R^s_{\ell ij} = 0$. Como esto último se satisface ahora por hipótesis, las ecuaciones (2) son integrables con solución única fijada la condición inicial X_p. Construimos de esa manera un campo en U que satisface (2).

Construimos de esa manera un campo en W que satisface (2), donde W es algún entorno de p contenido en U. Si ahora hacemos variar la condición inicial X_p, tendremos una solución de (2) para cada condición inicial; el entorno W va cambiando con la condición inicial, pero tomando una base $X_{1p},\dots,X_{np}$ de M_p con sus correspondientes entornos $W_1,\dots,W_n$, entonces por ser lineales las ecuaciones (2), resulta que en $V = W_1 \cap \dots \cap W_n$ están definidas todas las soluciones correspondientes a las diferentes condiciones iniciales.

Sea ahora c una curva en W, $c:[a,b] \to W$ y sea $X_{c(a)} \in M_{c(a)}$. Si X es el campo en W solución de (2) con condición inicial $X(c(a)) = X_{c(a)}$, entonces inmediatamente resulta que X también es solución de (1). Luego, si $\tilde{X}_t$ es la traslación paralela de $X_{c(a)}$, por unicidad $\tilde{X}_t = X(c(t))$, en particular $\tilde{X}_b = X(c(b))$. Luego la traslación de $c(a)$ a $c(b)$ no depende del camino c elegido (pues X no depende de c).///

4. ESPACIOS DE RIEMANN

DEFINICION 5.2. Un espacio de Riemann es un par (M,G) formado por una variedad C^∞ M y un tensor G de tipo $(0,2)$ (o sea, 2-covariante) llamado tensor métrico tal que para cada $p \in M$ la forma bilineal $G(p):M_p \times M_p \to R$ sea un producto escalar (o sea, $G(p)$ es simétrica y definida positiva: $G(p)(v_1,v_2) = G(p)(v_2,v_1)$ y, para $v \neq 0$, $G(p)(v,v) > 0$).

Veamos como interpretar esta definición en términos de un sistema de coordenadas locales. Sea (x,U) una carta local en M; dado $p \in M$ será

$$G(p) = g_{ij}(p)\, dx^i(p) \otimes dx^j(p)$$

(Recordamos que estamos usando la convención de Einstein: índices repetidos van sumados de 1 a n).

Esto define funciones C^∞ $g_{ij}: U \to R$. Para obtenerlas basta hacer

$$g_{ij}(p) = G(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p , \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

En particular, la simetría de $G(p)$ para cada p se traduce en la igualdad

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Si $v \in M_p$, sea $v = v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$. Entonces

$$G(p)(v,v) = G(p)\left(v^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p , v^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) =$$

$$= v^i\, v^j\, G(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p , \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right) =$$

$$= g_{ij}(p)\, v^i v^j$$

luego, de acuerdo a la definición, debe ser para $v = (v^1,\dots,v^n) \neq 0$

$$g_{ij}(p)\, v^i\, v^j > 0.$$

Debilitando un poco lo que hemos pedido para ser espacio de Riemann, obtenemos una clase de espacios de gran importancia en la física:

DEFINICION 5.3. Un <u>espacio seudo-Riemanniano</u> es un par (M,G) formado por una variedad C^∞ M y un tensor G 2-covariante tal que, para cada $p \in M$, $G(p)$ sea simétrica y no singular (esto es, si $G(p)(v,w) = 0$ para todo $w \in M_p$, entonces $v = 0$)

Obsérvese que todo espacio de Riemann es automáticamente seudo-Riemanniano.

Definiendo, para una carta local (x,U) en M, las funciones $g_{ij}: U \to R$ como antes, entonces la simetría se traduce, según vimos en la igualdad $g_{ij} = g_{ji}$.

Para ver en que se traduce la no singularidad, sean $v,w \in M_p$, digamos

$$v = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p , \quad w = w^j \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

Entonces un rápido cálculo nos muestra que

$$G(p)(v,w) = g_{ij}(p)\, v^i\, w^j$$

Luego, la igualdad $g_{ij}(p)\, v^i\, w^j = 0$ para toda n-pla $(w^1,\dots,w^n)$ debe ser equivalente a $v^1 = \dots = v^n = 0$

Pero esa igualdad equivale a

$$g_{ij}(p)\, v^i = 0$$

Entonces la no singularidad de $G(p)$ es equivalente a que la matriz $n\times n$ de coeficientes $g_{ij}(p)$ sea no singular (o sea, tenga determinante $g(p) \neq 0$)

Sea $(g^{ij}(p))$ la matriz inversa de $(g_{ij}(p))$, es decir:

$$g^{ij}(p)\, g_{jt}(p) = \delta^i_t$$

Esto nos define funciones $g^{ij}: U \to R$. Si $(\overline{x},\overline{U})$ es otra carta local, será:

$$(3) \quad \overline{g}^{ij}\, \overline{g}_{jt} = \delta^i_t$$

Como $\overline{g}_{jt}$ son las componentes en la carta $(\overline{x},\overline{U})$ del tensor 2-covariante G, entonces en $U \cap \overline{U}$ será

$$\overline{g}_{jt} = \frac{\partial x^h}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^t}\, g_{hk}$$

Reemplazando en (3) y despejando, obtenemos

$$(4) \quad \overline{g}^{ij} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^h}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^k}\, g^{hk}$$

Definiendo

$$G^{-1}(p) = g^{ij}(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p$$

la igualdad (4) nos asegura que la definición del tensor 2-contravariante G^{-1} no depende de la carta local elegida.

Supongamos ahora que tenemos un espacio de Riemann (M,G) y además una conexión ∇ sobre M. Al tener la conexión, tenemos la noción de traslación paralela que mos provee de isomorfismos lineales entre los diferentes espacios tangentes. Ya que ahora los espacios tangentes tienen una estructura de producto escalar, querríamos averiguar cuál es la condición para que los isomorfismos lineales entre los espacios tangentes conserven el producto escalar. Recordemos (ejercicio 1 de la sección 2) que la derivada covariante del tensor métrico respecto a ∇ está dada en coordenadas locales por la expresión

$$G' = g_{ij;h}\, dx^i \otimes dx^j \otimes dx^h$$

donde

$$g_{ij;h} = g_{ij,h} - \Gamma^k_{ih}\, g_{kj} - \Gamma^k_{jh}\, g_{ik} \quad \left(g_{ij,h} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}\right)$$

PROPOSICION 5.4. Sea (M,G) un espacio de Riemann y sea ∇ una conexión sobre M. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) La derivada covariante del tensor métrico G respecto a ∇ es idénticamente nula

b) Las traslaciones paralelas respecto a ∇ son isometrías

DEMOSTRACION a) $\Rightarrow$ b)

Basta ver, como es sabido, que la traslación paralela conserva normas. Consideremos un arco de curva suficientemente pequeño como para caer en el dominio de una carta local (x,U).

Entonces el cuadrado de la norma de un vector tangente $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es

$$\|v\|^2 = g_{ij}\, v^i\, v^j$$

Como las v^i se han obtenido por traslación paralela, satisfacen la ecuación (1), es decir:

$$(v^s \circ c)' + (x^i \circ c)'(v^\ell \circ c).(\Gamma^s_{i\ell} \circ c) = 0$$

que escribiremos más brevemente:

$$(5) \quad v^{s'} + x^{i'}\, v^\ell . \Gamma^s_{i\ell} = 0$$

Calculamos ahora como varía la norma del vector tangente trasladado:

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 = \frac{d}{dt}(g_{ij}\, v^i\, v^j) =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} . x^{h'}\, v^i\, v^j + g_{ij}\, v^{i'}\, v^j +$$

$$+ g_{ij}\, v^i\, v^{j'} =$$

$$= g_{ij,h}\, x^{h'}\, v^i\, v^j + 2g_{ij}\, v^{i'}\, v^j$$

en donde hemos usado la simetría de g_{ij}.

Multiplicando (5) por $2g_{st}\, v^t$:

$$2g_{st}\, v^{s'}\, v^t + 2g_{st}\, v^t\, x^{i'}\, v^\ell\, \Gamma^s_{i\ell} = 0$$

Reemplazando en la expresión de $\frac{d}{dt}\|v\|^2$:

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 = g_{ij,h}\, x^{h'}\, v^i\, v^j - 2g_{ij}\, x^{s'}\, v^i\, v^\ell\, \Gamma^j_{s\ell} =$$

$$= g_{ij,h}\, x^{h'}\, v^i\, v^j - g_{ij}\, x^{s'}\, v^i\, v^\ell\, \Gamma^j_{s\ell} -$$

$$- g_{ij}\, x^{s'}\, v^i\, v^\ell\, \Gamma^j_{s\ell} =$$

$$= g_{ij,h}\, x^{h'}\, v^i\, v^j - g_{ij}\, \Gamma^j_{s\ell}\, x^{s'}\, v^i\, v^\ell -$$

$$- g_{\ell j}\, x^{s'}\, v^\ell\, v^i\, \Gamma^j_{si} =$$

$$= x^{h'}\, v^i\, v^j\, (g_{ij,h} - g_{i\ell}\, \Gamma^\ell_{hj} - g_{j\ell}\, \Gamma^\ell_{hi}) =$$

$$= x^{h'}\, v^i\, v^j\, .\, g_{ij;h} =$$

$$= 0$$

b) $\Rightarrow$ a)

Como la traslación paralela es isometría, resultará

$$\frac{d}{dt}\langle v,w\rangle = 0$$

y repitiendo la última cuenta resulta:

$$x^{h'}\, v^i\, w^j\, g_{ij;h} = 0$$

cualquiera sea la curva y los vectores trasladados. Luego

$$g_{ij;h} = 0 \qquad ///$$

En un espacio de Riemann hay una conexión perfectamente determinada:

PROPOSICION 5.5. Si (M,G) es un espacio de Riemann, entonces existe sobre M una única conexión ∇ tal que

i) ∇ es simétrica (o sea, el tensor de torsión es nulo)

ii) La traslación paralela respecto a ∇ es una isometría.

DEMOSTRACION Por la Proposición anterior, la condición ii) se escribe:

$$g_{ij,h} - \Gamma^k_{ih}\, g_{kj} - \Gamma^k_{jh}\, g_{ik} = 0$$

Permutando cíclicamente i,j,h, obtenemos

$$g_{jh,i} - \Gamma^k_{ji}\, g_{kh} - \Gamma^k_{hi}\, g_{jk} = 0$$

$$g_{hi,j} - \Gamma^k_{hj}\, g_{ki} - \Gamma^k_{ij}\, g_{hk} = 0$$

Sumando estas dos últimas igualdades y restando la primera obtenemos, usando la simetría de la conexión:

$$2\, \Gamma^k_{ij}\, g_{hk} = g_{hi,j} + g_{jh,i} - g_{ij,h}$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}\, g^{ht}$:

$$(6) \quad \Gamma^t_{ij} = \frac{1}{2}\, g^{ht}(g_{hi,j} + g_{jh,i} - g_{ij,k})$$

Esto prueba la unicidad; para la existencia, hay que verificar que (6) tiene la ley de transformaciones de las conexiones y después definir

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ji} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

y extender ∇ a campos cualesquiera ///

Repitiendo textualmente la demostración de la Proposición 5.5, resulta:

PROPOSICION 5.6. Si (M,G) es un espacio seudo-Riemanniano, entonces existe sobre M una única conexión ∇ tal que

i) ∇ es simétrica

ii) La derivada covariante del tensor métrico G respecto a ∇ es idénticamente nula.

La conexión definida por 5.5 para un espacio de Riemann o más generalmente por 5.6 para un espacio seudo-Riemanniano se denomina <u>Conexión de Levi-Civita</u> y las funciones Γ^i_{jk} definidas por (6) se denominan <u>símbolos de Christoffel</u>; se indican $\{^{\,i}_{jk}\}$ en lugar de Γ^i_{jk}.

<u>Ejercicios</u>

1. Si (M,G) es un espacio de Riemann, probar que dado $p \in M$ existe una carta local (x,U) alrededor de p tal que $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$

2. Si S es una superficie en R^3, $\vec{X} = \vec{X}(u,v)$ es una parametrización inversible de S y $E = \vec{X}_u.\vec{X}_u$, $F = \vec{X}_u.\vec{X}_v$, $G = \vec{X}_v.\vec{X}_v$, si definimos

$$g_{11} = E\circ\vec{X}^{-1},\ g_{12} = g_{21} = F\circ\vec{X}^{-1},\ g_{22} = G\circ\vec{X}^{-1}$$

entonces las g_{ij} son las componentes de un tensor métrico.

3. Dar un ejemplo de un espacio de Riemann en el cual no se pueda conseguir una carta (x,U) tal que $g_{ij} = \delta_{ij}$ en todo U (Sugerencia: en ese caso, el tensor de curvatura sería nulo).

4. Sea (M,G) un espacio de Riemann y sea $\varphi:N \to M$ una inmersión. Probar que $(N,\tilde{G})$ es un espacio de Riemann, donde

$$\tilde{G}(p)(v_1,v_2) = G(\varphi(p))(d\varphi_p(v_1),\ d\varphi_p(v_2))$$

para $v_1,v_2 \in N_p$ $(p \in N)$. Esa estructura de espacio de Riemann se dice inducida por M sobre N a través de la inmersión φ.

5. Sobre R^n definimos $G(p) = dx^1 \otimes dx^1 + \ldots$ $\ldots + dx^n \otimes dx^n$, donde $(x^1,\ldots,x^n)$ es el sistema usual de coordenadas de R^n. Probar que (R^n,G) es un espacio de Riemann. Probar que si S es una superficie en R^3 e $i:S \to R^3$ es la inclusión, entonces la estructura de espacio de Riemann de S definida en el ejercicio 2) es la inducida por (R^3,G) a través de la inclusión.

5. GEODESICAS

Sea $c:[a,b] \to M$ una curva C^∞ en un espacio de Riemann (M,G). Definimos la longitud de dicha curva como

$$L_a^b(c) = \int_a^b \{G(c(t))(c'(t), c'(t))\}^{1/2} dt =$$

$$= \int_a^b \|c'(t)\| dt$$

Haciendo variar b obtenemos la función longitud de arco

$$s(t) = \int_a^t \|c'(t)\| dt$$

Si la curva c es regular, es decir $c'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, entonces s es inversible y podemos reparametrizar la curva por la longitud de arco (es decir, considerar $c \circ s^{-1}$). La curva así reparametrizada tiene vectores tangentes de norma 1.

Vamos ahora a estudiar las geodésicas en un espacio de Riemann. Para ello necesitamos ver algo de Cálculo de Variaciones

Consideremos una función $F: R \times R \times R \to R$ y supongamos que queremos encontrar entre todas las funciones $f:[a,b] \to R$ tales que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ aquella que haga máxima o mínima la cantidad

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) dt$$

Vamos a encontrar una condición necesaria (no suficiente) que debe cumplir f.

Para ello consideremos las funciones

$$\alpha(\varepsilon, t) = f(t) + \varepsilon\, h(t)$$

donde h es una función arbitraria salvo por $h(a) = h(b) = 0$.

Para estas funciones tenemos las integrales

$$J(\alpha_\varepsilon) = \int_a^b F(t, f(t) + \varepsilon h(t), f'(t) + \varepsilon h'(t))dt$$

donde $\alpha_\varepsilon(t) = \alpha(\varepsilon, t)$.

Si f es la función que buscamos, debe ser $\left.\dfrac{d\, J(\alpha_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$. Pero suponiendo regularidad en todas las funciones que aparezcan, es

$$0 = \left.\frac{d\, J(\alpha_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(t, f(t) + \varepsilon h(t), f'(t) + \varepsilon h'(t))dt =$$

$$= \int_a^b \{\frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)).h(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t)).h'(t)\}dt$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)).h(t)dt + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t))h'(t)dt = \quad \text{(partes)}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t).h(t)dt + \left.\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t)).h(t)\right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t)).h(t)dt =$$

$$= \int_a^b h(t)\{\frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\}dt$$

Para que esto sea cero cualquiera sea $h(t)$, debe ser

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t),f'(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t),f'(t))\right) = 0$$

(ecuación de Euler)

A las funciones f que satisfacen las ecuaciones de Euler se las llama <u>puntos extremales de J.</u>

Claramente, si partímos de $F:R \times R^n \times R^n \to R$ y buscamos $f:[a,b] \to R^n$, digamos $f = (f^1,\ldots,f^n)$, entonces para que f haga extrema la integral

$$J(f) = \int_a^b F(t,f^1(t),\ldots,f^n(t), \dot{f}^1(t),\ldots,\dot{f}^n(t))dt$$

deberá cumplir las siguientes ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(t,f^1(t),\ldots,f^n(t), \dot{f}^1(t),\ldots,\dot{f}^n(t)) -$$

$$- \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial F}{\partial x^{n+i}}(t,f^1(t),\ldots,f^n(t),\right.$$

$$\left.\dot{f}^1(t),\ldots,\dot{f}^n(t)\right] = 0$$

$$(i = 1,\ldots,n)$$

o brevemente:

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x^{n+i}} = 0$$

o, todavía, en la notación clásica

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

Consideremos ahora dos puntos A y B de una variedad Riemanniana y busquemos una curva que una A y B que haga la longitud extremal. Supondremos primero A,B dentro de una carta local y todas las curvas variadas en esa carta.

Sabemos que si $c:[a,b] \to M$ es una curva tal que $c(a) = A$, $c(b) = B$, entonces

$$L_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(c(t))\, dx^i(c(t))\otimes dx^j(c(t))(c'(t))}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{ij}(c(t))\, dx^i(c(t))(c'(t))\, dx^j(c(t))(c'(t))}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{[g_{ij}(c(t))\, dx^i(c(t))\, (x^h\circ c)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)_{c(t)} dx^j(c(t))\, (x^k\circ c)'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{c(t)}]}\, dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{ij}\circ c(t)\, (x^i\circ c)'(t)\, (x^j\circ c)'(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{g_{ij}\circ x^{-1}(x\circ c(t))(x^i\circ c)'(t)(x^j\circ c)'(t)}\, dt$$

$$= \int_a^b F(t, x^1\circ c(t), \ldots, x^n\circ c(t), (x^1\circ c)'(t), \ldots, (x^n\circ c)'(t))\, dt$$

siendo $F(t,x^1,\dots,x^n, y^1,\dots,y^n) = \sqrt{g_{ij}\circ x^{-1}(x^1,\dots,x^n)\, y^i y^j}$

Entonces las ecuaciones de Euler resultan

$$\frac{1}{2\|c'(t)\|} \cdot g_{ij,\ell}\circ c.(x^i\circ c)'.(x^j\circ c)' -$$

$$-\frac{d}{dt}\,\frac{1}{2\|c'(t)\|} \cdot g_{i\ell}\circ c.(x^i\circ c)' = 0$$

Si consideramos la curva parametrizada por la longitud de arco:

$$g_{ij,\ell}\circ c.(x^i\circ c)'(x^j\circ c)' - 2\, g_{i\ell,s}\circ c(x^s\circ c)'(x^i\circ c)' -$$

$$-2\, g_{i\ell}\circ c(x^i\circ c)'' = 0$$

o sea:

$$2\, g_{i\ell}\circ c(x^i\circ c)'' - (g_{ij,\ell}\circ c - g_{j\ell,i}\circ c -$$

$$-g_{\ell i,j}\circ c)(x^i\circ c)'(x^j\circ c)' = 0$$

de donde:

$$(7)\quad (x^s\circ c)'' + \{{}^{\,s}_{ij}\}\circ c.(x^i\circ c)'.(x^j\circ c)' = 0$$

o, aligerando la notación:

$$(7')\quad x^{s''} + \{{}^{\,s}_{ij}\}\, x^{i'}\, x^{j'} = 0 \qquad (s = 1,\dots,n)$$

Es fácil verificar que la igualdad (7) no depende del sistema de coordenadas elegido. Aprovechando eso, definimos las <u>geodésicas de un espacio de Riemann</u> como las curvas c parametrizadas por la longitud de arco tales que para toda carta local (x,U) se verifica la ecuación diferencial (7) (que se denomina entonces <u>ecuación diferencial de las geodésicas</u>).

Observando la ecuación (7) ó (7'), vemos que la estructura de espacio de Riemann entra sólo a través de la conexión de Levi-Civita y que la invariancia de (7) por cambios de coordenadas depende solo de la ley de transformación de dicha conexión.

Podemos entonces definir las <u>geodésicas de un espacio de conexión afín</u> (en particular para los espacios seudo-Riemannianos) como las curvas que en cualquier carta local satisfacen las ecuaciones:

$$x^{s''} + \Gamma^s_{ij}\, x^{i'}\, x^{j'} = 0 \qquad (s = 1,\ldots,n)$$

<u>Ejercicios</u>

1. Probar que si una curva satisface la ecuación (7), entonces está parametrizada por un múltiplo constante de la longitud de arco.

2. Hallar las geodésicas de S^2 (superficie esférica en R^3)

3. Sea (M,G) el espacio de Riemann dado por $M = \{(x,y) \in R^2 : y > 0\}$ y $G(x_1,y_1) = \dfrac{dx \otimes dx}{y_1^2} + \dfrac{dy \otimes dy}{y_1^2}$, donde (x,y) es el sistema usual de coordenadas de R^2 restringido a M. Probar que las geodésicas de (M,G) son las semicircunferencias de centro en el eje x y las semirrectas verticales.

CAPITULO VI

SUBVARIEDADES DEL ESPACIO EUCLIDIANO

METODO DE LA REFERENCIA MOVIL

1. EL GRUPO DE LA ISOMETRIAS EN E_n

Representemos el punto x del espacio euclidiano E_n por una matriz columna cuyos elementos sean las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del punto. Representaremos por la misma letra x el punto y la matriz correspondiente.

DEFINICION 5.1. Se llama <u>isometría</u> de E_n en si mismo, a toda aplicación $x \to x'$ representada por una ecuación matricial de la forma

$$x' = a\,x + b \qquad (6.1)$$

siendo $a \in O(n)$ y b una matriz columna cualquiera

Si $a \in SO(n)$ la isometría se llama un <u>movimiento</u>.

Las isometrías de E_n forman un grupo isomorfo al grupo de las matrices $n \times n$ de la forma

$$g = \begin{vmatrix} a & b \\ & \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (6.2)$$

puesto que al producto de dos isometrías $x' = a_1 x + b_1$; $x'' = a_2 x + b_2$ corresponde la matriz producto $g_2 g_1$ y a la isometría inversa $x = a^{-1}x - a^{-1}b$ corresponde la matriz inversa g^{-1}, como es fácil comprobar. Por tanto las formas de Maurer-Cartan del grupo de las isometrías serán los elementos de la matriz $\Omega = g^{-1}dg$, que se descompone en dos

$$\Omega_1 = a^{-1}da \;, \qquad \Omega_2 = a^{-1}db \tag{6.3}$$

puesto que

$$\Omega = \begin{vmatrix} a^{-1} & -a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} da & db \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^{-1}da & a^{-1}db \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{6.4}$$

Puesto que a, por ser ortogonal, depende de $n(n-1)/2$ parámetros y b tiene n elementos independientes, resulta que el grupo de las isometrías (y lo mismo el grupo de los movimientos) es de dimensión $n+n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. La variedad del grupo es la variedad $O(n)\times R^n$.

Llamando a_{ij} a los elementos de la matriz a, los elementos de a^{-1} son los transpuestos a_{ji}, de manera que la expresión explícita de las formas de Maurer-Cartan para el grupo de las isometrías de E_n, son

$$\omega_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}da_{hj}, \qquad \omega_i = \sum_{h=1}^{n} a_{hi}db_i \tag{6.5}$$

Obsérvese que se satisface la condición (4.45). Obsérvese también que hemos puesto ω_i, con subíndices, para indicar los covectores (en vez de ω^i como antes). Es simplemente una cuestión de notación y aunque está más justificada la notación ω^i, en contraposición a e_i, por comodidad de notación pondremos ahora ω_i.

Geometricamente, una isometría se puede respresentar de la manera siguiente. Sea $(0;e_1^0,e_2^0,\ldots,e_n^0)$ la "referencia fija" constituida por el origen 0 y n versores (vectores de módulo unidad) ortonormales e_i^0 cuyas componentes son $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,0,\ldots,0)$,...$(0,0,\ldots,0,1)$. Toda isometría lleva esta referencia a otra posición $(x;e_1,e_2,\ldots,e_n)$ y, reciprocamente, dada una "referencia móvil" $(x;e_1,e_2,\ldots,e_n)$ formada por un punto x y n versores ortonormales e_i de origen x, está determinada la isometría que lleva $(0;e_1^0,\ldots,e_n^0)$ a coincidir con $(x;e_1,\ldots,e_n)$

Introduciendo las matrices fila vectoriales

$$e^0 = (e_1^0,e_2^0,\ldots,e_n^0), \qquad e = (e_1,e_2,\ldots,e_n) \tag{6.6}$$

las vinculaciones entre las referencias fija y móvil y las ecuaciones (6.1) de la isometría, se expresan

$$x = e^0 b, \qquad e = e^0 a \tag{6.7}$$

La primera ecuación expresa que el origen $0(0,0,\ldots,0)$ pasa al punto $b = e_1^0 b_1 + e_2^0 b_2 + \ldots$ $\ldots + e_n^0 b_n$ y la segunda que el versor $e_i^0(0,\ldots,1.0,\ldots,0)$ (el 1 en el lugar i) pasa al versor $e_i = \sum_h a_{hi} e_h^0$. De (6.7) se deduce

$$dx = e^0 db = e\,a^{-1}\,db = e\,\Omega_2,$$
$$de = a^0 da = e\,a^{-1} da = e\,\Omega_2 \tag{6.8}$$

que son las llamadas "ecuaciones de la referencia móvil" para el grupo de las isometrías de E_n. En forma explícita es

$$dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, e_i, \qquad de_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji} \, e_j. \tag{6.9}$$

De aqui, teniendo en cuenta que $e_i . e_j = \delta_{ij}$, se deducen las siguientes expresiones para las formas de Maurer-Cartan

$$\omega_i = e_i \, dx, \qquad \omega_{ji} = e_j \, de_i \tag{6.10}$$

Las ecuaciones de estructura resultan facilmente al escribir que $d(dx) = 0$, $d(de_i) = 0$ y son

$$d\omega_i = \sum_{h=1}^{n} \omega_h \wedge \omega_{ih}, \qquad d\omega_{ij} = -\sum_{h=1}^{n} \omega_{ih} \wedge \omega_{hj} \tag{6.11}$$

2. UN LEMA DE E. CARTAN

Para muchas cuestiones de Geometría Diferencial es importante el siguiente "lema de Cartan":

<u>Si</u> $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ <u>son 1-formas linealmente independientes sobre una variedad diferenciable</u> M <u>de dimensión</u> $n \geq r$ <u>y existen otras 1-formas</u> $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ <u>tales que</u>

$$\omega_1 \wedge \varphi_1 + \omega_2 \wedge \varphi_2 + \ldots + \omega_r \wedge \varphi_r = 0 \tag{6.12}$$

<u>entonces existen funciones</u> A_{ij} <u>tales que</u>

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \, \omega_j, \quad \underline{\text{con}} \quad A_{ij} = A_{ji} \tag{6.13}$$

DEMOSTRACION. Siendo las ω_i linealmente independientes, existirán otras 1-formas $\psi_{r+1},\psi_{r+2},\dots,\psi_n$ que junto con ellas forman una base del espacio vectorial de las 1-formas sobre M. Por tanto se podrá escribir

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\,\omega_j + \sum_{h=r+1}^{n} B_{ih}\,\psi_h \qquad (6.14)$$

y sustituyendo en (6.12) se tiene

$$\sum_{i<j\le r} (A_{ij} - A_{ji})\omega_i \wedge \omega_j + \sum_{i\le r<h} B_{ih}\,\omega_i \wedge \psi_h = 0 \qquad (6.15)$$

Puesto que las formas ω_i, ψ_h son independientes, también lo serán las 2-formas $\omega_i \wedge \omega_j$, $\omega_i \wedge \psi_h$ y por tanto de (6.15) se deduce que $A_{ij} = A_{ji}$, $B_{ih} = 0$, lo que prueba el lema.

3. SUBVARIEDADES DEL ESPACIO EUCLIDIANO

El método de la referencia móvil puede aplicarse al estudio de las subvariedades del espacio euclidiano. Para simplificar la escritura vamos a suponer una variedad diferenciable M de dimensión n, sumergida en el espacio euclidiano E_{n+N}. El número N se llama la codimensión de M.

Consideremos la familia de referencias móviles $(x;e_1,e_2,\dots,e)$ tales que $x \in M$ y los versores $e_1,e_2,\dots,e_n$ son tangentes a M en el punto x (formando por tanto una base ortonormal de T_x), con lo cual $e_{n+1},e_{n+2},\dots,e_{n+N}$ serán normales a M, engendrando el N-plano normal a M en x.

Para simplificar la escritura, vamos a suponer que en lo sucesivo los índices varían entre los siguientes límites.

$$1 \leq i,j,k,\ldots, \leq n,$$
$$n < \alpha,\beta,\gamma,\ldots, \leq n+N \qquad (6.16)$$
$$1 \leq A,B,C,\ldots, \leq n+N$$

y las sumas indicadas se entenderán siempre respecto de los índices repetidos y entre los límites (6.16). Con este convenio, las ecuaciones (6.9), (6.10) se escriben

$$dx = \sum \omega_A e_A, \quad de_A = \sum \omega_{BA} e_B, \quad \omega_A = e_A\, dx, \quad \omega_{BA} = e_B de_A \qquad (6.17)$$

$$d\omega_A = \sum \omega_B \wedge \omega_{AB}, \quad d\omega_{AB} = -\sum \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} \qquad (6.18)$$

Para la familia de referencias considerada, tales que los vectores e_α son normales a M y por tanto a dx, será $e_\alpha\, dx = 0$, o sea, $\omega_\alpha = 0$. En consecuencia también será $d\omega_\alpha = 0$ y según (6.18) $\sum \omega_i \wedge \omega_{\alpha i} = 0$. El lema de Cartan nos dice entonces que existen funciones $A_{\alpha,ij}$ tales que

$$\omega_{\alpha i} = \sum A_{\alpha,ij}\, \omega_j \text{ siendo } A_{\alpha,ij} = A_{\alpha,ji} \qquad (6.19)$$

De aquí y de (6.18) resulta que se puede escribir

$$d\omega_{ij} = -\sum \omega_{ih} \wedge \omega_{hj} - \Omega_{ij} \qquad (6.20)$$

siendo

$$\Omega_{ij} = \sum \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} = -\sum A_{\alpha,ih} A_{\alpha,jk}\, \omega_h \wedge \omega_k =$$

$$= \frac{1}{2} \sum R_{ijkh}\, \omega_k \wedge \omega_h \qquad (6.21)$$

habiendo puesto

$$R_{ijkh} = \sum (A_{\alpha,ih}A_{\alpha,jk} - A_{\alpha,ik}A_{\alpha,jh}) \qquad (6.22)$$

Las ecuaciones (6.20) se llaman las <u>ecuaciones de Gauss</u> de la teoria de subvariedades. Especificando las segundas ecuaciones (6.18) para $A = i$, $B = \alpha$, resulta

$$d\omega_{i\alpha} = - \sum \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} - \sum \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} \qquad (6.23)$$

que son las llamadas <u>ecuaciones de Codazzi</u>. Finalmente, para $A = \alpha$, $B = \beta$, de (6.18) se deduce

$$d\omega_{\alpha\beta} = - \sum \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \Omega_{\alpha\beta} \qquad (6.24)$$

siendo

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} = - \sum A_{\alpha,ij}A_{\beta,ih}\, \omega_j \wedge \omega_h =$$

$$= \frac{1}{2} \sum R_{\alpha\beta hj}\, \omega_h \wedge \omega_j \qquad (6.25)$$

con

$$R_{\alpha\beta hj} = \sum (A_{\alpha,ih}A_{\beta,ij} - A_{\alpha,ij}A_{\beta,ih}) \qquad (6.26)$$

Los símbolos R_{ijkh}, $R_{\alpha\beta hj}$ son análogos a las componentes del clásico tensor de curvatura del cálculo tensorial clásico, pero no coinciden exactamente, aunque tienen las mismas propiedades de simetria siguientes:

$$R_{ijkh} = - R_{ijhk} = - R_{jikh}, \quad R_{ijkh} = R_{khij}$$

$$R_{ijkh} + R_{ikhj} + R_{ihjk} = 0$$

$$R_{\alpha\beta hj} = - R_{\beta\alpha hj} = - R_{\alpha\beta jh}$$

Las expresiones

$$I = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \,, \quad II = \sum_{\alpha,i,j} (A_{\alpha ij}\omega_i\omega_j)e_\alpha \qquad (6.28)$$

se llaman, respectivamente, la primera y la segunda formas fundamentales de la teoria de subvariedades de dimensión n en E_{n+N}.

4. CURVAS EN E_n

Los casos extremos de subvariedades de E_{n+N}, son el caso de curvas, n = 1, y el caso de hipersuperficies, N = 1. Vamos a estudiarlos por separado.

Para simplificar la notación, vamos a considerar el caso de curvas en E_n, $n \geq 2$. Sea $\underline{C}: x = x(s)$ una curva de E_n, o sea, la imagen de un intervalo de la recta real por la aplicación $s \to x(s)$ que suponemos, como siempre, infinitamente derivable. Supongamos también que en cada punto los vectores $x', x'', \ldots, x^{(n-1)}$ sean independientes, de manera que engendren un (n-1)-plano (hiperplano osculador).

En cada punto $x \in C$ podemos considerar la referencia ortonormal $(x; e_1, \ldots, e_n)$ tal que cada versor e_k esté contenido en el k-plano engendrado por $x', x'', \ldots, x^{(k)}$, con lo cual de_k será una combinación lineal de $e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}$, para $k = 1, 2, \ldots, n$ con el convenio $e_{n+1} = 0$. Suponiendo el parámetro s normalizado de manera que $|x'(s)| = 1$ (entonces se dice que s es el <u>arco</u> de la curva), o sea, $x' = e_1$, las ecuaciones (6.17) y las relaciones $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ nos dicen que para esta familia de referencias es $\omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_n = 0$ y, además, $\omega_{hi} = 0$ para $h = 1,\ldots,i-2,i,i+2,\ldots,n$. De manera que las ecuaciones (6.17) toman la forma

$$\begin{aligned} dx &= \omega_1 e_1 = ds.e_1, \\ de_k &= -\omega_{k-1,k}e_{k-1} + \omega_{k+1,k}e_{k+1} \end{aligned} \tag{6.29}$$

válidas para $k = 1,2,\ldots,n$ con el convenio de poner $\omega_{n+1,n} = 0$.

Como las ω_{ij}, como todas las referencias elegidas de la manera dicha a lo largo de la curva, sólo dependen del punto de la curva o sea de s, se puede poner $\omega_{k-1,k} = \kappa_{k-1}ds$, $\omega_{k+1,k} = \kappa_{k+1}ds$ y las ecuaciones (6.29) toman la forma de las clásicas <u>fórmula de Frenet</u>

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= e_1 \\ \frac{de_k}{ds} &= -\kappa_{k-1}e_{k-1} + \kappa_{k+1}\ e_{k+1} \quad (k = 1,2,\ldots,n) \end{aligned} \tag{6.30}$$

en las cuales $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_{n-1}$ son las curvaturas de la curva C. Para el espacio ordinario E_3, κ_1 es la curvatura propiamente dicha κ y $\kappa_2 = \tau$ es la torsión de la curva. Las fórmulas de Frenet se escriben entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = \kappa\ e_2, \quad \frac{de_2}{ds} = -\kappa\ e_1 + \tau\ e_2, \\ \frac{de_3}{ds} = -\tau e_2 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Los versores e_1, e_2, e_3 elegidos de la manera dicha se llaman respectivamente los versores <u>tangente</u>, <u>normal principal</u> y <u>binormal</u> de C.

Un teorema de existencia de la teoría de ecuaciones diferenciales permite asegurar que, recíprocamente, dadas las curvaturas $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ de una curva C de E_n, la curva queda determinada salvo una isometría.

Aunque está asegurada la existencia, la determinación efectiva de la curva no es un problema fácil. En general no puede obtenerse por cuadraturas. Solamente para el caso del plano, n = 2, resulta facilmente que dada la curvatura κ en función del arco s, la curva correspondiente está dada por las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \kappa(s)\, dx,$$

$$x = x_0 + \int_0^s \cos\varphi\, ds,$$

$$y = y_0 + \int_0^s \operatorname{sen}\varphi\, ds,$$

5. HIPERSUPERFICIES EN E_{n+1}

Consideremos ahora el caso M = 1. En este caso, como α solo puede tomar el valor n+1 (según (6.16)), podemos poner $A_{n+1,ij} = A_{ij} = A_{ji}$ y las ecuaciones

(6.19) quedan

$$\omega_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\omega_j, \quad A_{ij} = A_{ji} \qquad (6.32)$$

La segunda forma fundamental (6.28), prescindiendo del versor e_{n+1}, se puede escribir

$$II = \sum A_{ij}\,\omega_i\,\omega_j = \sum \omega_{i,n+1}\cdot\omega_i \qquad (6.33)$$

Observemos que si se sustituyen los versores e_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ tangentes a M en x, por otro sistema de versores ortonormales e_i^* también tangentes a M, será $e_i^* = \sum a_{ih}e_h$, siendo la matriz (a_{ih}) ortogonal. Para la nueva referencia móvil $(x;e_1^*,e_2^*,\ldots,e_n^*,e_{n+1})$ (el versor e_{n+1} no cambia) será

$$\omega_{i,n+1}^* = \sum A_{ij}^*\omega_j^* = de_{n+1}\cdot e_i^* = \sum de_{n+1}\,a_{ih}\,e_h$$

$$= \sum a_{ih}\,\omega_{h,n+1} = \sum A_{hs}\,\omega_s\,a_{ih} \qquad (6.34)$$

donde las sumas se entienden siempre de 1 a n respecto de los índices repetidos. Por tanto

$$\sum A_{ij}^*\,\omega_j^*\,\omega_i^* = \sum A_{hs}a_{ih}a_{ik}\omega_s\omega_k = \sum A_{ks}\omega_s\omega_k \qquad (6.35)$$

donde la segunda igualdad ha resultado por las condiciones $\sum a_{ih}a_{ik} = \delta_{hk}$ consecuencia de ser la matriz (a_{ih}) ortogonal. Tenemos por tanto la igualdad $II^* = II$, o sea, la forma cuadrática (6.33) (segunda forma fundamental de la hipersuperficie M) es independiente de los versores ortonormales

e_i tomados en el espacio tangente T_x. Se trata de una forma cuadrática invariante (dependiente únicamente de M y del punto x). En consecuencia, las raices $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ de la ecuación

$$\left| A_{ij} - \kappa \delta_{ij} \right| = 0 \tag{6.36}$$

serán también invariantes de la hipersuperficie. Se llaman las <u>curvaturas principales</u> de M en el punto x.

La r-ésima curvatura media de M en el punto x se define por

$$H_r = \binom{n}{r}^{-1} \{\kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_r\} \quad , \quad r = 1,2,\ldots,n \tag{6.37}$$

donde $\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n\}$ indica la r-ésima función simétrica elemental de las curvaturas principales $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$. Para $r = 1,n$ se tiene

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{n} (\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n) = \frac{1}{2} (A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}) \\ H_n &= \kappa_1 \kappa_2 \ldots \kappa_n = \det(A_{ij}) = A \end{aligned} \tag{6.38}$$

H_1 es la <u>curvatura media</u> y H_n la <u>curvatura total</u> o <u>curvatura de Gauss</u> de M en x.

Como los vectores e_i son tangentes a M, una dirección tangente $dx = \omega_i e_i$ queda determinada por las componentes ω_i. Se llaman <u>direcciones principales</u> en el punto x aquellas para las cuales se cumple $\sum A_{ij} \omega_j = \kappa \omega_i$. Los valores correspondientes de κ son las raíces de la misma ecuación (6.36), o sea, las curvaturas principales. Eligiendo estas direcciones principales como direcciones de los versores e_i, la matriz A_{ij} resulta una matriz diagonal y las curvaturas principales son precisamente las $\kappa_i = A_{ii}$. Si (6.36) tiene raices múltiples, hay curvaturas principales repetidas y las direcciones principales no quedan determinadas, pero siempre se puede elegir los e_i tangentes a direcciones principales. Aplicando entonces la segunda ecuación (6.17) y (6.32) se tiene

$$de_{n+1} = \sum \omega_{i,n+1} e_i = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \omega_i \, e_i \qquad (6.39)$$

donde e_{n+1} es el versor normal a M. Esta ecuación (6.39) es la forma vectorial de las llamadas <u>ecuaciones de O. Rodrigues</u>, bien entendido que ella supone que los versores e_i son tangentes a direcciones principales. Por ejemplo, si e_{n+1} varia según la dirección de e_i y $ds_i = \omega_i$ es la longitud del desplazamiento según e_i, (6.39) queda $\partial e_{n+1}/\partial s_i = \kappa_i e_i$ que es la forma clásica de las ecuaciones de O.Rodrigues salvo tal vez el signo que depende del sentido elegido para e_i.

Observemos finalmente que las 1-formas $\omega_i = dx.e_i$ representan el elemento de arco sobre M en la dirección del vector tangente e_i. Por tanto, la forma

$$d\Sigma = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n \qquad (6.40)$$

es el <u>elemento de área</u> de M en el punto x considerado.

Si a cada punto $x \in M$ se le hace corresponder el extremo del versor normal e_{n+1} sobre la esfera unidad, la aplicación $x \to e_{n+1}$ se llama la <u>representación esférica</u> de M. Siendo $de_{n+1} = \sum \omega_{i,n+1}\, e_i$ comparando con $dx = \sum \omega_i\, e_i$ y teniendo en cuenta (6.40) resulta que el elemento de área de la representación esférica es $d\Sigma^* = \omega_{1,n+1} \wedge \omega_{2,n+1} \wedge \ldots \wedge \omega_{n,n+1}$ y por tanto, según (6.32)

$$d\Sigma^* = \det(A_{ij})\, d\Sigma = H_n\, d\Sigma \qquad (6.41)$$

lo cual nos dice que la curvatura de Gauss H_n puede definirse como el cociente entre el elemento de área de la representación esférica y el elemento de área correspondiente de la hipersuperficie en el punto x.

6. SUPERFICIES EN E_3

Vamos a aplicar lo anterior al caso de superficies del espacio euclidiano de tres dimensiones.

Si e_1, e_2 son versores ortogonales entre si, tangentes a la superficie M en el punto x y e_3 es el versor normal, las ecuaciones fundamentales (6.17) se escriben

$$\begin{aligned} dx &= \omega_1\, e_1 + \omega_2\, e_2, \\ de_1 &= \qquad\quad \omega_{12}\, e_2 + \omega_{13}\, e_3 \\ de_1 &= -\omega_{12}\, e_1 \qquad\quad + \omega_{23}\, e_3 \\ de_3 &= -\omega_{13}\, e_1 - \omega_{23}\, e_2 \end{aligned} \qquad (6.42)$$

puesto que siendo e_3 siempre normal a la superficie, dx no tiene componente según e_3, o sea, $\omega_3 = 0$ y siendo $e_i^2 = 1$, es $e_i.de_i = 0$, o sea, $\omega_{ii} = 0$ $(i = 1,2,3)$, además de ser $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ por ser $e_i.de_j + e_j.de_i = 0$ (por derivación de $e_i.e_j = 0$, $i \neq j$).

Las ecuaciones de estructura, o condiciones de integrabilidad, escribiendo que $d(dx) = 0$, $d(de_i) = 0$ resultan ser

$$\begin{aligned}
&d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_1,\\
&\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0\\
&d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}, \qquad d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23},\\
&d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

El triedro $(x; e_1,e_2,e_3)$ (referencia móvil) no queda completamente determinado por el hecho de ser e_1, e_2 ortogonales y tangentes a la superficie. Por una rotación de ángulo φ en el plano tangente, resulta otro triedro de iguales características. Es decir, cabe hacer la transformación

$$\begin{aligned}
e_1^* &= \cos\varphi\, e_1 + \operatorname{sen}\varphi\, e_2,\\
e_2^* &= -\operatorname{sen}\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2,\\
e_3^* &= e_3
\end{aligned} \tag{6.44}$$

on la cual las nuevas formas diferenciales resultan er:

$$\omega_1^* = dx.e_1^* = \cos\varphi\ \omega_1 + \operatorname{sen}\varphi\ \omega_2,$$
$$\omega_2^* = dx.e_2^* = -\operatorname{sen}\varphi\ \omega_1 + \cos\varphi\ \omega_2$$
$$\omega_{12}^* = de_1^*.e_2^* = d\varphi + \omega_{12}, \qquad (6.45)$$
$$\omega_{13}^* = de_1^*.e_3^* = \cos\varphi\ \omega_{13} + \operatorname{sen}\varphi\ \omega_{23}$$
$$\omega_{23}^* = de_2^*.e_3^* = -\operatorname{sen}\varphi\ \omega_{13} + \cos\varphi\ \omega_{23}$$

De aquí se deduce que las siguientes formas diferenrenciales valen lo mismo para ω_i, ω_{ij} que para ω_i^*, ω_{ij}^*, es decir son invariantes por rotaciones φ y, por tanto, son intrínsecas de la superficie:

$$I = \omega_1^2 + \omega_2^2 = dx^2 = \text{primera forma cuadrática fundamental},$$

$$II = \omega_{13}\ \omega_1 + \omega_{23}\ \omega_2 = \text{segunda forma cuadrática fundamental}, \qquad (6.46)$$

$$d\Sigma = \omega_1 \wedge \omega_2 = \text{elemento de área de la superficie},$$

$$d\sigma = \omega_{13} \wedge \omega_{23} = \text{elemento de área de la representación esférica}.$$

La primera forma cuadrática fundamental se representa por ds^2 y ds se llama el elemento de arco sobre la superficie. Si la superficie está dada por la ecuación vectorial $x = x(u,v)$, es

$$ds^2 = (x_u du + x_v dv)^2 = x_u^2\ du^2 + 2\ x_u.x_v\ du\ dv + x_v^2\ dv^2 \qquad (6.47)$$

En la geometría diferencial clásica, se acostumbra a poner $x_u^2 = E$, $x_u.x_v = F$, $x_v^2 = G$. Si las líneas coordenadas u, v son ortogonales, entonces $x_u.x_v = F = 0$ y la primera forma fundamental se escribe

$$ds^2 = E\, du^2 + G\, dv^2 \qquad (6.48)$$

o sea, $\omega_1 = \sqrt{E}\, du$, $\omega_2 = \sqrt{G}\, dv$. El elemento de área toma entonces la forma

$$d\Sigma = \omega_1 \wedge \omega_2 = \sqrt{EG}\, du \wedge dv. \qquad (6.49)$$

La representación esférica de la superficie es la representación $x \to e_3(x)$, que a cada punto de la superficie hace corresponder el punto $e_3(x)$ de la esfera unidad. Para ella, la primera forma fundamental es $(de_3)^2 = \omega_{13}^2 + \omega_{23}^2$ y por tanto el elemento de área es $d\Omega = \omega_{13} \wedge \omega_{23}$. El cociente

$$K = \frac{d\Omega}{d\Sigma} = \frac{\omega_{13} \wedge \omega_{23}}{\omega_1 \wedge \omega_2} \qquad (6.50)$$

es la curvatura de Gauss de la superficie en el punto x. Teniendo en cuenta (6.43) también se puede escribir

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} \qquad (6.51)$$

De la relación $\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$ (6.43) se deduce (lema de Cartan)

$$\omega_{13} = a\, \omega_1 + b\, \omega_2, \quad \omega_{23} = b\, \omega_1 + c\, \omega_2 \qquad (6.52)$$

con lo cual la segunda forma fundamental se escribe

$$II = a\, \omega_1^2 + 2\, b\, \omega_1\, \omega_2 + c\, \omega_2^2 \qquad (6.53)$$

y la curvatura media y la curvatura de Gauss, según (6.38) toman la forma

$$H = \frac{1}{2}(a+c), \qquad K = ac - b^2 \tag{6.54}$$

Siendo ω_1, ω_2 independientes, se podrá escribir

$$\omega_{12} = \lambda_1 \, \omega_1 + \lambda_2 \, \omega_2 \tag{6.55}$$

de donde, según (6.43)

$$d\omega_1 = \lambda_1 \, \omega_1 \wedge \omega_2, \qquad d\omega_2 = \lambda_2 \, \omega_1 \wedge \omega_2 \tag{6.56}$$

y de aquí y (6.51) se deduce

$$K = -\frac{1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \, d \left[\frac{d\omega_1}{\omega_1 \wedge \omega_2} \, \omega_1 + \frac{d\omega_2}{\omega_1 \wedge \omega_2} \, \omega_2 \right] \tag{6.57}$$

Esta importante fórmula nos dice que K depende unicamente de las formas ω_1, ω_2 de la primera forma fundamental, o sea, del elemento de arco ds. Esto quiere decir que para cualquier deformación de la superficie, mientras las longitudes de las curvas se mantengan invariantes, la curvatura de Gauss K no variará. Esta propiedad constituye el llamado "teorema egregium" de Gauss.

Si el elemento de arco está dado en la forma (6.48), siendo $\omega_1 = \sqrt{E}\, du$, $\omega_2 = \sqrt{G}\, dv$, es fácil comprobar que

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\omega_{12} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} du + \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv$$

y por tanto

$$K = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]\right]$$

Ejemplos

1. Para el plano euclidiano en coordenadas cartesianas ortogonales u, v es $ds^2 = du^2 + dv^2$, o sea, $E = 1$, $G = 1$, y por tanto $K = 0$.

2. Para la esfera de radio R, siendo u, v las coordenadas geográficas (u distancia polar o colatitud, v longitud) es

$$x_1 = R \text{ sen } u \cos v, \quad x_2 = R \text{ sen } u \text{ sen } v,$$
$$x_3 = R \cos u$$

de donde $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = R^2(du^2 + \text{sen}^2 u\, dv^2)$, o sea, $E = R^2$, $G = R^2 \text{ sen}^2 u$ y por tanto $K = 1/R^2$.

3. El toro engendrado por la circunferencia de radio r que gira alrededor del eje x_3, supuesto que este eje está en el plano de la circunferencia y que $a > r$, siendo a la distancia del eje al centro de la circunferencia, tiene por ecuaciones

$$x_1 = (a + r \text{ sen } u)\cos v, \quad x_2 = (a+r \text{ sen } u)\text{sen } v,$$
$$x_3 = r \cos u$$

de donde $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = r^2\, du^2 + (a+r \text{ sen } u)^2\, dv^2$, o sea, $E = r^2$, $G = (a+r \text{ sen } u)^2$, de donde

$$K = \frac{\text{sen } u}{r(a+r \text{ sen } u)} \qquad (6.59)$$

Esto nos dice que para los puntos de la parte del toro opuesta al eje de rotación ($0 < u < \pi$) es $K > 0$ y para los puntos de la parte dirigida hacia el eje ($\pi < u < 2\pi$) es $K < 0$. En los puntos de las circunferencias $u = 0$, $u = \pi$, es $K = 0$.

4. Si suponemos el semiplano positivo $v > 0$ con la métrica $ds^2 = (du^2 + dv^2)/v^2$, se tiene $E = 1/v^2$, $G = 1/v^2$ y resulta $K = -1$. Es decir, el semiplano $v > 0$ con la métrica $ds^2 = (du^2 + dv^2)/v^2$ es una representación de las superficies de curvatura constante negativa (representación de Poincaré).

5. Por rotación de la curva del plano x_1, x_3

$$x_1 = \text{sen } u, \quad x_3 = -\log \tan (u/2) - \cos u \quad (0 \leq u \leq 2\pi) \qquad (6.60)$$

alrededor del eje x_3 se obtiene la superficie de revolución llamada la <u>pseudoesfera</u>. Para ella es

$$ds^2 = \cot^2 u \, du^2 + \text{sen}^2 u \, dv^2$$

o sea, $E = \cot^2 u$, $G = \text{sen}^2 u$ y aplicando (6.58) resulta $K = -1$. Esta superficie de curvatura constante negativa tiene los

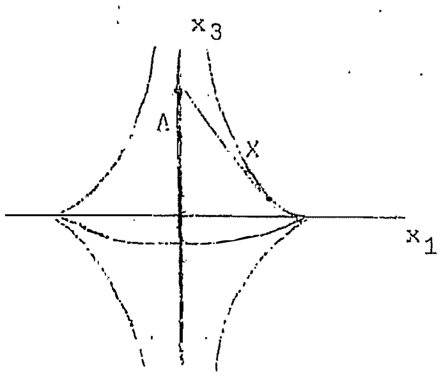


fig. 6.1

puntos singulares de la circunferencia $x_3 = 0$. Un teorema famoso de Hilbert afirma que no existe en E_3 ninguna superficie sin singularidades de curvatura constante negativa. La curva (6.60) se llama la "tractriz" y tiene la propiedad de que el segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto X y el eje x_3 es constante. Mas exactamente es AX = 1 como se puede comprobar como ejercicio.

La consecuencia mas importante del "teorema egregium" es que dos superficies aplicables isometricamente, o sea, que admiten una representación de una sobre la otra que conserve las longitudes de las curvas homólogas, deben tener la misma curvatura de Gauss. Por tanto, no puede representarse, por ejemplo, una esfera sobre un plano de manera isométrica. De aqui que todos los mapas geográficos de la Tierra en un plano deban tener siempre deformaciones. Las superficies que pueden representarse isometricamente sobre el plano deben tener K = 0 y se llaman superficies desarrollables. Ellas son los conos, cilindros y las formadas por todas las tangentes a una curva cualquiera del espacio.

. CURVAS SOBRE UNA SUPERFICIE

Consideremos ahora una curva C sobre una superficie . Si e_1 es el versor tangente a C en el punto $x \in M$ y ds s el elemento de arco de C, se introducen las siguientes efiniciones

$$\frac{\omega_{12}}{ds} = \kappa_g = \text{curvatura geodésica de C}$$

$$\frac{\omega_{13}}{ds} = \kappa_n = \text{curvatura normal de C} \qquad (6.61)$$

$$\frac{\omega_{23}}{ds} = \tau_g = \text{torsión geodésica de C.}$$

Si representamos ahora por e_2^* el versor normal principal de C en x y por e_3^* el versor binormal, la primera fórmula de Frenet (6.31) nos dice que $de_1/ds = \kappa e_2^*$. Si es el ángulo entre e_2^* y el versor normal a la superficie e_3, será

$$\begin{aligned} e_2^* &= \operatorname{sen}\theta\, e_2 + \cos\theta\, e_3 , \\ e_3^* &= -\cos\theta\, e_2 + \operatorname{sen}\theta\, e_3 \end{aligned} \qquad (6.62)$$

y por tanto

$$de_1/ds = \kappa \operatorname{sen}\theta\, e_2 + \kappa\cos\theta\, e_3 \qquad (6.63)$$

de donde, comparando con (6.42) y (6.61),

$$\kappa_g = \kappa \operatorname{sen}\theta , \qquad \kappa_n = \kappa\cos\theta \qquad (6.64)$$

La segunda de estas fórmulas constituye el llamado teorema de Meusnier. Para $\theta = 0$, nos da la interpretación de κ_n como la curvatura de la curva obtenida cortando la superficie por un plano normal que contenga e_1.

La fórmula de Meusnier permite calcular la curvatura de las secciones oblicuas en función de la curvatura

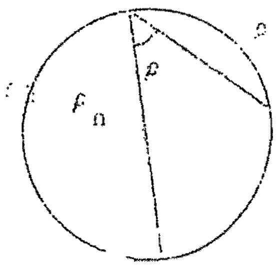


fig. 6.2

de la sección normal y del ángulo de inclinación. Si en vez de las curvaturas se introducen sus inversas, los radios de curvatura, se tiene $\rho = \rho_n \cos\theta$. Para el caso de la esfera (fig. 6.2) esta relación es evidente.

Consideremos ahora como varian las curvaturas de las secciones normales. Sea e_1^* otro versor tangente que forma con e_1 un ángulo φ. La curvatura normal según la dirección e_1^*, según (6.45) y (6.61) será (puesto que $ds^* = \omega_1^*$)

$$\kappa_n^* = \kappa_n(\varphi) = \frac{\omega_{13}^*}{\omega_1^*} = \frac{\cos\varphi\ \omega_{13} + \operatorname{sen}\varphi\ \omega_{23}}{\cos\varphi\ \omega_1 + \operatorname{sen}\varphi\ \omega_2} \qquad (6.65)$$

En la dirección de e_1^* es $\omega_2^* = 0$ y por tanto, según (6.45)

$$\tan\varphi = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}} \qquad (6.66)$$

con lo cual, sustituyendo en (6.65) y aplicando (6.52) resulta

$$\kappa_n(\varphi) = a\cos^2\varphi + 2b\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi \qquad (6.67)$$

Las direcciones φ para las cuales $d\kappa_n/d\varphi = 0$ (direcciones de curvatura normal máxima o mínima) se llaman <u>direcciones principales</u> y estan dadas por la ecuación

$$b \cos 2\varphi + \frac{c-a}{2} \operatorname{sen} 2\varphi = 0 \qquad (6.68)$$

Si $b = 0$, $c-a = 0$, las direcciones principales son indeterminadas y el punto se llama un <u>umbílico</u> (por ejemplo los puntos de una esfera). En los demás casos las direcciones principales son

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{2b}{a-c}$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tan} \frac{2b}{a-c} + \frac{\pi}{2} \qquad (6.69)$$

lo que nos dice que las direcciones principales son ortogonales entre si.

Observemos que la actual definición de las direcciones principales coincide con la dada en general para hipersuperficies en el nº 5. En efecto, las ecuaciones $\sum A_{ij}\omega_j = k\omega_i$ de antes, son ahora $a \cos \varphi + b \operatorname{sen} \varphi = \kappa \cos \varphi$, $b \cos \varphi + c \operatorname{sen} \varphi = \kappa \operatorname{sen} \varphi$ y eliminando κ resulta la misma ecuación (6.68).

Eligiendo las direcciones principales como direcciones de los versores e_1, e_2 de la referencia móvil $(x;e_1,e_2)$, los valores (6.69) deben ser $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$ y por tanto $b = 0$, con lo cual (6.67) se escribe

$$\kappa_n(\varphi) = \kappa_n^{(1)} \cos^2 \varphi + \kappa_n^{(2)} \operatorname{sen}^2\varphi \qquad (6.70)$$

habiendo llamado $\kappa_n^{(1)} = a$, $\kappa_n^{(2)} = c$ a las <u>curvaturas principales</u> o sea a las curvaturas normales correspondientes a las direcciones principales. La fórmula (6.70) es la llamada <u>fórmula de Euler</u>.

Obsérvese, finalmente, que la curvatura de Gauss vale $K = ac = \kappa_n^{(1)} \kappa_n^{(2)}$, o sea, es igual al producto de las curvaturas principales. Analogamente, la curvatura media se escribe $H = (1/2)\,(\kappa_n^{(1)} + \kappa_n^{(2)})$.

<u>La fórmula de Gauss-Bonnet</u>. Sea C una curva de la superficie M, con tangente en cada punto que suponemos varia con continuidad a lo largo de C. Según (6.61) y (6.45) la curvatura geodésica κ_g de C vale

$$\kappa_g = \frac{\omega_{12} + d\varphi}{ds} \qquad (6.71)$$

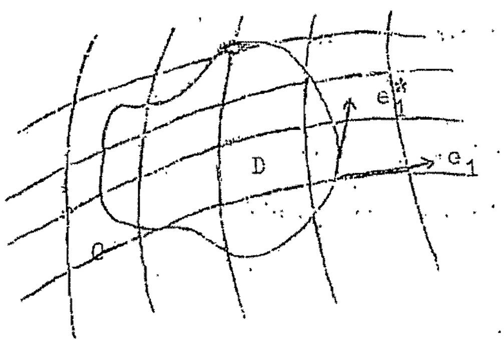


fig. 6.3

siendo φ el ángulo entre el versor e_i de la referencia móvil y el versor e_i^* tangente a la curva.

Si C es una curva cerrada que limita un dominio D simplemente conexo de M y suponiendo, además, que la referencia móvil $(x;e_1,e_2,e_3)$ cubre sin singularidad el dominio D, se puede aplicar a (6.71) la fórmula de Stokes (Apéndice del Capítulo 3) según la cual la integral de una 1-forma ω_{12} a lo largo de un contorno C es igual a la integral de la derivada exterior $d\omega_{12}$ en el dominio

D limitado por C (o sea, $C = \partial D$). Puesto que $d\omega_{12} = -K\,\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\,d\Sigma$ (según (6.46) y (6.51)), el resultado es

$$\int_{\partial D} \kappa_g \, ds + \int_D K \, d\Sigma = 2\pi \qquad (6.72)$$

donde se ha supuesto que la tangente e_1^* gira un ángulo 2π, con respecto del campo de versores e_1 de la referencia móvil. Esta es la forma clásica de la fórmula de Gauss-Bonnet para curvas de una superficie que son contornos de un dominio simplemente conexo D.

Si el contorno ∂D tiene puntos angulosos, el ángulo φ experimenta en ellos un salto brusco, incrementándose en el valor $\alpha(A_i)$, del ángulo exterior del punto anguloso (fig. 5.4). Por tanto, al integrar la expresión $d\varphi + \omega_{12} = \kappa_g\, ds$ (6.71) para obtener (6.72), en los puntos angulosos hay que añadir el salto $\alpha(A_i)$ a la integral de $\kappa_g\, ds$, resultando

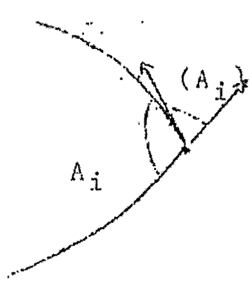


fig. 6.4

$$\int_{\partial D} \kappa_g \, ds + \int_D K \, d\Sigma + \sum_{i=1}^{N} \alpha(A_i) = 2\pi \qquad (6.73)$$

donde la suma está extendida a todos los puntos angulosos de ∂D.

Si se quieren introducir los ángulos interiores $A_i = \pi - \alpha(A_i)$ resulta

$$\int_{\partial D} \kappa_g \, ds + \int_D K \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} A_i - (N-2)\pi \qquad (6.74)$$

Las curvas para las cuales es $\kappa_g = 0$ se llaman <u>geodésicas</u>.

Por tanto, para un polígono geodésico de N lados, es

$$\int_D K \, d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} A_i - (N-2)\pi \qquad (6.75)$$

De aquí se deducen inmediatamente las siguientes proposiciones:

1. Para las superficies de curvatura constante K, el área F de un triángulo geodésico está relacionada con los ángulos A, B, C del mismo por la fórmula

$$K\,F = A + B + C - \pi \qquad (6.76)$$

Por tanto: si $K > 0$ es $A+B+C > \pi$, si $K < 0$ es $A+B+C < \pi$ y si $K = 0$ es $A+B+C = \pi$. Estos tres casos corresponden, respectivamente, a la geometría esférica, geometría no euclidiana hiperbólica y geometría euclidiana.

2. Si $K \leq 0$, no existen geodésicas que se corten en dos puntos A, B y limiten un dominio D conexo. En efecto, en tal caso sería $A+B \leq 0$, lo cual no es posible.

3. Sea M una superficie cerrada orientable. Supongamos que se divide en C caras poligonales mediante arcos de

geodésicas, formando un reticulado de V vértices y L aristas o lados. Escribiendo (6.75) para cada cara y sumando las igualdades obtenidas, teniendo en cuenta que la suma de los ángulos alrededor de un mismo vértice es 2π y que cada lado pertenece a dos caras resulta

$$\int K\, d\Sigma = 2\pi(V - L + C) \qquad (6.77)$$

Como el primer miembro depende sólo de M pero no del particular reticulado dibujado sobre ella, (6.77) nos dice que V-L+C es independiente de este reticulado. Es un número entero que se llama el <u>número de Euler</u> χ de la superficie M. Observemos también, que una vez dibujado el reticulado y por tanto, una vez determinado el número $\chi(M) = V-L+C$, por cualquier homeomorfismo se conservan los números V,L,C y por tanto: <u>el número de Euler es un invariante topológico</u>.

Dibujando reticulados cualesquiera y contando V,L,C probar que

$$\chi(\text{esfera}) = 2, \qquad \chi(\text{toro}) = 0,$$
$$\chi(\text{esfera} + p \text{ asas}) = 2(1-p)$$

Se llama asa a un toro añadido a la esfera por una cara, tal como se indica en la figura 6.6. El número p se llama género de la superficie M. En la figura 6.5. es p = 2.

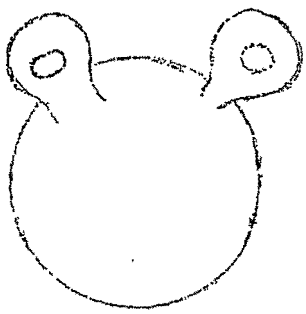


fig. 6.5

<u>La torsión geodésica</u>. Consideremos una curva C sobre una superficie y sean e_1^*, e_2^* dos versores ortogonales, tangentes a la superficie, tales que e_1^* sea tangente a C en el punto x. Considerando la referencia móvil $(x;e_1^*,e_2^*,e_3^*)$, la torsión geodésica de C en x, según (6.61) es $\tau_g = \omega_{23}/ds$, siendo $\omega_{23} = -e_2^*.de_3$. Si e_1, e_2 son versores tangentes a las direcciones principales y φ es el ángulo entre e_1^* y e_1, será $e_2^* = -\text{sen}\,\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2$ y como, según la fórmula de O.Rodrigues (6.39) se tiene $de_3 = \kappa_1\omega_1 e_1 + \kappa_2\omega_2 e_2$, resulta $\omega_{23} = \kappa_1\,\text{sen}\,\varphi\,\omega_1 - \kappa_2 \cos\varphi\,\omega_2$. Según (6.66) es $\omega_1 = \cos\varphi\, ds$, $\omega_2 = \text{sen}\,\varphi\, ds$ y por tanto

$$\kappa_g = (\kappa_1 - \kappa_2)\,\text{sen}\,\varphi \cos\varphi$$

que es una importante expresión de la torsión geodésica.

Consecuencias inmediatas son:

a) La torsión geodésica según las direcciones principales es nula;

b) La torsión geodésica de las curvas esféricas es nula en todos sus puntos.

1. AP
2. AUS
3. BIS
4. CHE
5. DE K
6. FENC
7. GREE.
8. HIRS
9. HOCKI

BIBLIOGRAFIA

1. APOSTOL, T.M. Mathematical Analysis. A modern approach to Advanced Calculus, Addiso-Wesley, Reading, 1952.

2. AUSLANDER, L. MAC KENZIE, R.E. Introduction to Differentiable Manifolds, Mc Graw Hill, New York, 1963.

3. BISHOP, R. CRITTENDEN, R.J. Geometry of Manifolds, Academic Press, New York, 1964.

4. CHEVALLEY, C. Theory of Lie Groups, Princeton University Press, 1946.

5. DE RHAM, G. Variétés Differentiables, Hermann, Paris, 1960.

6. FENCHEL, W. Elementare Beweise and Anwendungen einiger Fixtpunktsatze, Mat. Tidsskrift, B, Nº 3-4, 1932, 66-87.

7. GREENBERG, M. Lectures on Algebraic Topology, W.A. Benjamín, New York, 1967.

8. HIRSCH, M.W. On imbedding differentiable manifolds in euclidean space, Annals of Mathematics, 73, 1961, 566-571.

9. HOCKING, J.G. YOUNG, G.S. Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1961.

10.- HODGE, W.V.D. PEDOE, B.A. Methods of Algebraic Geometry I, Cambridge University Press, 1947.

11. HU, S.T. Differentiable Manifolds, Horlt, Rineahrt, Wintson, New York, 1969.

12. JAMES, I.M. Some embeddings of projective space, Proc. Cambridge Phil. Soc. 55, 1959, 294-298.

13. KELLEY, J.C. Topologia General, Ed. castellana, EUDEBA, Buenos Aires, 1969.

14. LANG, S. Differentiable Manifolds, Addison-Wesley, Reading, 1962.

15. LASHOF, R.H. SMALE, S. On the immersion of manifolds in euclidean space, Annals of Mathematics, 68, 1958,

16. LEFSCHETZ, S. Algebraic Topology. American Math. Soc, Colloquium Publ. 27, New York, 1942.

17. LICHNEROWICZ, A. Thêorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Dunod, Paris, 1955.

18. MILNOR, J. On the immersion of manifolds in (n+1)-space, Comm. Mathem. Helvetici, 30, 1956, 275-284.

19. NAVEIRA, A.M. Sobre la clasificación de algunas apli caciones entre variedades diferenciables, Rev. mat. Hispano-Americana (4), 26, 1966, 73-87.

20. NEWMAN, Elements of the Topology of Plane Sets of Points, Cambridge, at the University Press, 1954.

21. PALAIS, R.S. A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mem. Amer. Math. Soc, Nº 22, 1957.

22. QUAN, PHAM MAU, Introduction a la géométrie des varietés differentiables. Dunod, Paris, 1969.

23. REY PASTOR, PI CALLEJA, TREJO,C. Análisis Matemático, Ed. Kapelusz, Buenos Aires, 1952.

24. SAMELSON, H. Ueber die Sphäre die als gruppenräume auftreten, Comm. Math. Helvetici, 13, 1940, 144-155.

25. SEGRE, B. Some properties of Differentiable Varietes and Transformations, Ergebnisse der Math. Springer, Berlin 1957.

26. SPIVAK, M. A comprehensive introduction to Differential Geometry, Vol. I,II, Publish or Perish, Inc., Boston, Mass., 1970.

27. STEEN, L.A. SEEBACH, J.A. Counterexamples in Topology, Holt, Rinehart and Wintson, New York, 1970.

28. STTENROD, J. Topology of Fiber Bundles, Princeton University Press, 1951.

29. STERNBERG, S. Lectures on Differential Geometry, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1964.

30. THOMAS, E. Vector fields on Manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1969, 643-683.

31. WALKER, A.G. NEWNS, W.F. Tangent planes to a differentiable manifold, Journal London Math. Soc. 1956, 400-407.

32. WHITNEY, H. Differentiable Manifolds, Annals of Math. 37, 1936, 645-680.

33. WILLARD, S. General Topology, Addison-Ewsley, Reading, 1970.