ISSN 1853-709X

Fascículo 27

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

J. D. Álvarez Alonso

Temas de ecuaciones en derivadas parciales

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 27

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA
Fasciculo 27
Josefina D. Alvarez Alonso

Temas de ecuaciones en
derivadas parciales.

1979

Gran parte de lo que aquí figura, es tan sólo un volver a escribir apuntes de cursos dictados por el Prof. A.P.Calderón en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires. Desde luego, esto no significa responsabilizar al Prof. Calderón, de los posibles errores o interpretaciones inadecuadas que hayan podido deslizarse en este volver a escribir.
En cuanto a las notaciones y conocimientos previos, se suponen los que figuran en "Distribuciones y transformación de Fourier", publicado en el n° 25, de esta misma Colección. Las referencias a ese fascículo, serán indicadas DTF.

§1. Operadores en derivadas parciales lineales

Estos operadores tienen la forma

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

donde los coeficientes $a_\alpha(x)$ son funciones definidas en cierto abierto $U \subset R^n$, con valores complejos. Cuando los coeficientes $a_\alpha(x)$ con $|\alpha| = m$ no son todos nulos, se dice que el operador es de orden m. Cuando las funciones $a_\alpha(x)$ se reducen a constantes, se dice que el operador es de coeficientes constantes y se indica P(D).

La teoría general de los operadores P(x,D) y los distintos puntos de vista con que se los enfoca, pueden considerarse como elaboraciones del estudio de las teorías de operadores particulares, provenientes en su mayoría de la física.

Por ejemplo:

El operador de Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

El operador del calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

El operador de las ondas:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x, \qquad x \in R^n$$

El operador de Schrödinger:

$$-i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x, \qquad x \in R^n$$

Quizás sea el operador de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad z = x+iy \in C$$

el único no originado en aplicaciones de la física. Aparece al definir las funciones holomorfas de una variable compleja. Hasta aquí se han mencionado ejemplos, por así decirlo, escalares; o sea, que no involucran más que un operador. Pero también son importantes los sistemas de operadores:

Exactamente, se tienen $N_1 . N_2$ operadores $P_{jk}(x,D)$, $j = 1,\dots,N_1$, $k = 1,\dots,N_2$; de la misma manera que un operador $P(x,D)$ da origen a la ecuación diferencial $P(x,D)f = g$, donde g es el dato y f la incógnita, esa matriz de operadores $(P_{jk}(x,D))$, dará un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\sum_{k=1}^{N_2} P_{jk}(x,D)f_k = g_j \qquad j = 1,\dots,N_1$$

de N_1 ecuaciones con N_2 incógnitas.

Cuando $N_1 > N_2$, se dice que el sistema está sobredeterminado; si $N_1 = N_2$, se le llama determinado y si $N_1 < N_2$, se dice que es subdeterminado.

La teoría de los sistemas es más complicada que la de los operadores, especialmente cuando se trata de sistemas sobredeterminados.

Por ejemplo:

Un sistema sobredeterminado es el gradiente:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \qquad n > 1.$$

Da origen al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Suponiendo que este sistema ha sido planteado en un abierto U de R^n, que $g_j \in C^1(U)$ y que hay una solución $f \in C^2(U)$, si se deriva cada una de las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \ \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \ \partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$$

Es decir, los datos no pueden ser arbitrarios, deben cumplir <u>condiciones de compatibilidad</u>.

El operador de Cauchy-Riemann en $n > 1$ variables, es otro ejemplo de sistema sobredeterminado.

Las soluciones de clase C^1 de

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = 0 \end{array}\right.$$

son las funciones holomorfas de las n variables complejas $z_1,\ldots,z_n$.

La <u>divergencia</u>, $\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_n = f$, provee un ejemplo de un sistema subdeterminado. Si $\bar{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, suele indicarse $\operatorname{div} \bar{u} = f$.

Suponiendo f continua en cierto abierto $U \subset R^n$, una posible solución en U, es:

$$u_1 = \int_0^{x_1} f(t,x_2,\ldots,x_n)dt$$

$$u_j = 0 \quad \text{si} \quad u \neq 1$$

En general, un sistema subdeterminado puede reducirse a uno determinado, fijando los valores de N_2-N_1 incógnitas.

Naturalmente, las ecuaciones o sistemas diferenciales ordinarios, son tan sólo el caso particular que corresponde a trabajar con $n = 1$ variables.

Quizá la primera novedad que aparece al pasar de las ecuaciones diferenciales ordinarias a las ecuaciones en derivadas parciales es que estas últimas pueden tener infinitas soluciones linealmente independientes.

En efecto, si por ejemplo se considera un operador $P(D)$ de coeficientes constantes, fijado $z \in C^n$, $P(D)e^{xz} = P(z)e^{xz}$. Luego, e^{xz} será solución de la ecuación $P(D)f = 0$, cada vez que z sea raíz del polinomio $P(z)$, que se obtiene mediante el reemplazo formal $D^{\alpha} \to z^{\alpha}$.

Un polinomio en $n > 1$ variables, tiene infinitas raíces distintas; si $z,w \in C^n$ son raíces distintas de $P(z)$, las funciones e^{xz}, e^{xw} son linealmente independientes.

Bajo determinadas condiciones de regularidad, se sabe que una ecuación diferencial lineal ordinaria siempre admite solución y que ésta es única cada vez que se fijan los valores de ciertos parámetros.

En el caso de los operadores en derivadas parciales, ninguna de las dos cosas ocurre en general.

Por ejemplo, dada la ecuación $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, cualquier función $u(x_2,\ldots,x_n)$ o sea independiente de x_1, la verifica.

Por otra parte, hay ecuaciones lineales que no son resolubles, ni aún localmente.

Para aclarar esta afirmación, es necesario precisar el concepto de resolubilidad local.

Dado un operador $P(x,D)$ cuyos coeficientes $a_\alpha(x)$ se suponen de clase C^∞ en cierto abierto $U \subset R^n$, se dice que es localmente resoluble en $x_0 \in U$, si existe $V \subset U$, entorno abierto de x_0 tal que para cada $g \in \mathcal{D}(V)$, la ecuación

$$P(x,D)f = g$$

admite al menos una solución $f \in \mathcal{D}'(V)$.

Naturalmente, la condición $a_\alpha(x) \in C^\infty(U)$, se impuso para que tengan siempre sentido los productos $a_\alpha(x)D^\alpha f$.

H. Lewy (ver [1]), dio el primer ejemplo de un operador que no es localmente resoluble en ningún punto. El operador de Lewy es:

$$P(x,D) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Los coeficientes son de clase C^∞ en todo R^3, lo cual muestra que la resolubilidad local de un operador depende de algo más que de la regularidad de sus coeficientes.

L. Hörmander (ver [2]), ha probado una condición necesaria de resolubilidad local, que naturalmente no es verificada por el operador de Lewy.

Se conocen también, para ciertas clases de operadores, condiciones necesarias y suficientes de resolubilidad local.

En lo que sigue, salvo mención en contrario, se supondrá que los coeficientes del operador $P(x,D)$ están definidos y son de clase C^∞ en un abierto $U \subset R^n$.

Dada $f \in D(U)$, puede escribirse:

$$P(x,D)f(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha \int e^{-2\pi i x\xi}\, \hat{f}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int e^{-2\pi i x\xi} \left[\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha \right] \hat{f}(\xi)\,d\xi .$$

En esta representación integral del operador, aparece un polinomio en la variable ξ, cuyos coeficientes dependen de $x \in U$. Se lo obtiene haciendo en el operador $P(x,D)$ el reemplazo formal $D^\alpha \to (-2\pi i\xi)^\alpha$. Este polinomio $P(x;\ -2\pi i\xi)$, se llama el polinomio asociado al operador. Cuando se lo descompone en sus partes homogéneas,

$$P(x;\ -2\pi i\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} P_j(x;\ -2\pi i\xi),$$

a la de grado máximo, $P_m(x;-2\pi i\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha$, se la denomina polinomio característico del operador.

Definición 1.1

Se dice que el operador $P(x,D)$ es elíptico en $x_0 \in U$, si $P_m(x_0;\ -2\pi i\xi) \neq 0$ en $R^n \setminus 0$.

Por ejemplo, los operadores de Cauchy-Riemann y de Laplace son elípticos, naturalmente en todo el espacio, por tratarse de operadores de coeficientes constantes.

Los puntos de elipticidad de un operador $P(x,D)$, forman un subconjunto abierto de U: Esta afirmación se obtiene por compacidad de la esfera unitaria, a partir de observar que

$P_m(x_0; -\frac{2\pi i\xi}{|2\pi\xi|}) \neq 0$ para $\xi \in R^n \setminus 0$.

Lema 1.1

Dado un operador $P(x,D)$ de orden m, son equivalentes:

a) $P(x,D)$ es elíptico en cierto abierto $U \subseteq R^n$.

b) Para cada $K \subset U$ compacto, existe $C = C(K) > 0$ tal que

$$|P_m(x; -2\pi i\xi)| \geq C.|\xi|^m \qquad \text{para} \qquad x \in K, \quad \xi \in R^n,$$

Demostración

No hay dificultad en probar b) ⇒ a)

Recíprocamente, si $x \in K$, $\xi \in R^n \setminus 0$, es:

$$|2\pi\xi|^m \, |P_m(x; -\frac{2\pi i\xi}{|2\pi\xi|})| > 0.$$

Por compacidad, debe existir $C > 0$ tal que

$$|P_m(x; -\frac{2\pi i\xi}{|2\pi\xi|})| \geq C$$

allí. Esto concluye lo afirmado.

#

Corolario 1.1

Sea $P(x,D)$ un operador elíptico de orden m.

Dado $K \subset U$ compacto, existen $C = C(K) > 0$, $N = N(K) > 0$ tales que:

$$|P(x; -2\pi i\xi)| \geq C.(1+|\xi|)^m \qquad \text{para} \qquad x \in K, \quad |\xi| \geq N$$

Demostración

$$|P(x; -2\pi i\xi)| \geq |P_m(x; -2\pi i\xi)| - \sum_{j=0}^{m-1} |P_j(x; -2\pi i\xi)|$$

Para $x \in K$, $\xi \in R^n \setminus 0$, esto puede acotarse, por continuidad y por el lema anterior, como:

$$\geqslant C\,|\xi|^m - \sum_{j=0}^{m-1} C_j\,|\xi|^j = (C - \sum_{j=0}^{m-1} C_j\,|\xi|^{j-m}).|\xi|^m.$$

La expresión entre paréntesis $\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} C$; luego, existe $N > 0$ tal que, por ejemplo, es $> C/2$, si $|\xi| \geqslant N$.

Finalmente, para $|\xi| \geqslant N$, $(1+|\xi|)^m$ es equivalente a $|\xi|^m$.

Esto concluye el resultado.

#

Del corolario 1.1 se deduce que si el operador $P(x,D)$ es elíptico en el punto x_0, los ceros reales del polinomio asociado $P(x_0; -2\pi i\xi)$, están en un compacto. Más adelante se verá que la recíproca es en general falsa.

Hay una fuerte vinculación en un operador elíptico, entre el orden, la dimensión del espacio R^n y el ser sus coeficientes reales o complejos.

En efecto:

Teorema 1.1

Sea $P(D)$ un operador de coeficientes constantes, elíptico y de orden m.

Entonces:

a) Si sus coeficientes son reales y la dimensión n de R^n es $\geqslant 2$, m debe ser par.

b) Si $n \geqslant 3$, m debe ser par, cualesquiera sean los coeficientes del operador.

Para demostrar este resultado, es conveniente dar el siguiente:

Lema 1.2

Dado un polinomio $Q(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$, $a_j \in C$, de orden m, si $w \in C$ es raíz de Q, entonces se tiene:

$$|w| \leqslant \text{máx}\ (1;\ m.\max_{0\leqslant j\leqslant m-1} \frac{|a_j|}{|a_m|}).$$

Demostración

Es claro que la acotación se verifica si $|w| \leqslant 1$. Se supone entonces que $|w| > 1$.

Como $a_m w^m + \dots + a_1 w + a_0 = 0$, es:

$$|w|^m \leqslant \frac{|a_{m-1}|}{|a_m|} |w|^{m-1} + \dots + \frac{|a_1|}{|a_m|} |w| + \frac{|a_0|}{|a_m|}$$

O sea:

$$|w| \leqslant \frac{|a_{m-1}|}{|a_m|} + \dots + \frac{|a_1|}{|a_m|} \frac{1}{|w|^{m-2}} + \frac{|a_0|}{|a_m|} \frac{1}{|w|^{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant m.\ \max_{0\leqslant j\leqslant m-1} (\frac{|a_j|}{|a_m|}).$$

Esto concluye el lema.

#

Demostración del teorema 1.1

a) Si fuera m impar, para $\xi \in R^n \setminus 0$, sería $P_m(-\xi) = -P_m(\xi)$.

Sea $f(t): [0,1] \to R^n$ una función continua cuya imagen es una curva que une los puntos ξ y $-\xi$, sin pasar por el origen. Entonces, la composición $P_m \circ f(t): [0,1] \to R$, es una función continua que toma valores de signos opuestos en 0 y en 1. Luego, debe existir $0 < t_0 < 1$, cumpliendo $P_m \circ f(t_0) = 0$. Por lo tanto, se ha encontrado un punto $f(t_0) \in R^n \setminus 0$, que es raíz de P_m. Esto implica que el operador $P(D)$ no puede ser elíptico.

b) Se fija $\xi \in R^n \setminus 0$. Dado $\eta \in R^n$ linealmente independiente con ξ, se considera el polinomio en la variable compleja z, $P_m(\eta+z\xi)$. Al ser $P(D)$ elíptico y los vectores η, ξ linealmente independientes, el polinomio $Q_+(z) = P_m(\eta+z\xi)$, debe ser no nulo para $z \in R$. Lo mismo tiene que ocurrir con el polinomio $Q_-(z) = P_m(-\eta+z\xi)$.

O sea, que las raíces de los polinomios Q_+ y Q_-, pertenecen a $C\setminus R$. Por la homogeneidad del polinomio P_m, resulta además que w es raíz de Q_+ con multiplicidad $k \Rightarrow -w$ es raíz de Q_- con multiplicidad k.

Sea ahora N_η^+, el número de raíces de Q_+, con parte imaginaria > 0. Esto determina una función $\eta \to N_\eta^+$, cuyo dominio es el complemento en R^n de la recta $z\xi$, R_ξ y cuyo rango son los números naturales, N.

Si pudiera probarse que la función N_η^+ es constante, lo mismo pasaría con las raíces con parte imaginaria > 0 de Q_-.

Luego, se llegaría a que $N_\eta^+ = N_\eta^-$, siendo N_η^- el número de raíces con parte imaginaria < 0 de Q_+.

Por lo tanto, el número de raíces del polinomio Q_+, que es $N_\eta^+ + N_\eta^-$, debe ser par. Pero Q_+ tiene grado m, pues el coeficiente de z^m es $P_m(\xi)$, distinto de cero. Luego, puede concluirse que el operador $P(D)$ es de orden par.

El problema entonces, se ha reducido a probar que la función N_η^+ es constante. Si se probara que es continua, podría concluírse, en general, que debe ser constante en cada componente conexa de su dominio. Pero cuando la dimensión del espacio es

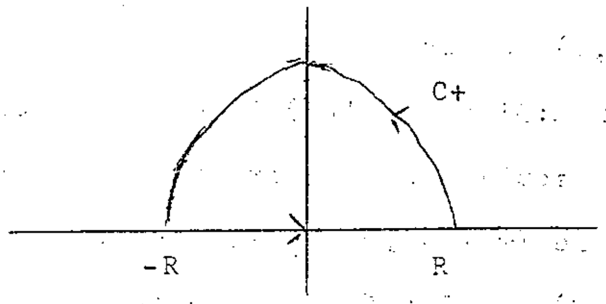
≥ 3, el complemento de una recta es un subconjunto conexo, con lo cual N_η^+ resulta constante.

Para probar, finalmente, la continuidad, se razona así:

Por el teorema de los residuos, es:

$$N_\eta^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{Q'(z)}{Q(z)}\, dz$$

donde puede tomarse como camino de integración:



para un R adecuado.

La continuidad de la función N_η^+ es clara si se muestra que cuando η se mueve en un entorno adecuadamente pequeño de un cierto η_0, sigue sirviendo la misma curva C^+.

Dicho de otra manera, es suficiente comprobar que las raíces de $P_m(\eta + z\xi)$ en el semiplano superior, se mantienen acotadas, cuando η se mueve en compactos, fuera de $R^n \setminus R_\xi$.

Esto se deduce inmediatamente del lema 1.2 aplicado al polinomio $Q_+(z)$, pues en sus coeficientes figura η. #

Observaciones 1.1

a) En dimensión 1, todos los operadores P(D) son elípticos.

En efecto, el polinomio característico, en este caso es:

$$P_m(\xi) = a_m \xi^m$$

b) En dimensión 2, el operador de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, muestra que hay operadores elípticos de orden 1. Desde luego, sus coeficientes no pueden ser todos reales.

c) Para un operador $P(x,D)$ elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$, el teorema 1.1 sigue siendo válido, pues las afirmaciones se hacen sobre la variable ξ en el polinomio $P_m(x, -2\pi i\xi)$, manteniendo x fijo.

Un operador diferencial $P(x,D)$ tiene la siguiente propiedad: Dada $T \in \mathcal{D}'(U)$, $\mathrm{sop}P(x,D)T \subset \mathrm{sop}T$

En general, un operador $K:\mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ lineal y continuo, se dice que es <u>local</u> si $\mathrm{sop}KT \subset \mathrm{sop}T$, para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$.

Un resultado de J. Peetre (ver [3]), afirma esencialmente que los operadores $P(x,D)$ son los únicos operadores lineales y continuos, locales.

Dada una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$, se sabe que su soporte puede definirse como:

$$\mathrm{sop}T = U \setminus \cup \{V \subset U \text{ abierto}/T/_V = 0\}.$$

Es correcto decir que sopT, es el complemento, respecto de U, del mayor abierto donde T se anula.

Se considera ahora

$$U \setminus \cup \{V \subset U \text{ abierto}/T/_V \in \mathcal{E}(V)\}.$$

Dados abiertos U_1, $U_2 \subset U$ tales que $T/_{U_1}$, $T/_{U_2}$ coinciden con funciones indefinidamente derivables, también $T/_{U_1 \cup U_2} \in \mathcal{E}(U_1 \cup U_2)$.

Luego, ese conjunto, cerrado en U, es el complemento del mayor abierto donde la distribución coincide con una función indefinidamente derivable. Se lo llama el <u>soporte singular</u> de T.

Por ejemplo, sop sing $\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

Dado ahora un operador lineal y continuo $K: \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$, se dice que es <u>seudolocal</u> si sop sing $KT \subset$ sop sing T, para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$.

Es decir, el operador K no "aumenta" las singularidades de las distribuciones a las que se lo aplica.

Por ejemplo, todo operador diferencial $P(x,D)$ de los que se están considerando, es seudolocal.

Como esta propiedad se define respecto de coincidir o no una distribución con una función de clase C^∞, basta que los coeficientes de $P(x,D)$ no sean indefinidamente derivables, para que el operador deje de ser seudolocal. Naturalmente, en este caso ya no tendrá sentido hacer actuar al operador sobre todo $\mathcal{D}'(U)$.

Por ejemplo, si $a_\alpha(x) \in C^{k+m}(U)$, se sabe que $P(x,D)$, operador de orden m, aplica $\mathcal{D}'^{(k)}(U)$ en $\mathcal{D}'^{(k+m)}(U)$.

Luego, este operador no es seudolocal, pensando a la propiedad enunciada en términos de los espacios de distribuciones adecuados; o sea, no es verdad que para toda $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(U)$, sop sing $P(x,D)T \subset$ sop sing T.

Se dice que un operador lineal y continuo $K: \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ es <u>hipoelíptico</u> si para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$ sop sing $T \subset$ sop sing KT.

Más adelante se darán ejemplos de estos operadores.

Lo mismo que con la propiedad de ser seudolocal, se adaptará el enunciado de la de hipoelipticidad, según los espacios de distribuciones entre los que sea correcto hacer actuar al operador en cuestión.

Otra manera de enunciar la noción de hipoelipticidad, es la siguiente:

Sean $S,T \in \mathcal{D}'(U)$, tales que $KT = S$.

El operador K es hipoelíptico si cada vez que dado $V \subset U$ abierto, $S \in \mathcal{E}(V)$, implica $T \in \mathcal{E}(V)$.

Pensando por ejemplo que K es un operador diferencial $P(x,D)$, el ser hipoelíptico da una posible respuesta a uno de los problemas fundamentales que pueden plantearse para un tal operador.

Se trata del <u>problema de regularidad</u> de soluciones:

Sean $S,T \in \mathcal{D}'(U)$ distribuciones que verifican

$P(x,D)T = S$ en U.

El problema es saber si determinada condición de regularidad que verifique S, puede asegurarse también sobre la solución T.

Por ejemplo, una propiedad típica a comprobar es precisamente la de hipoelipticidad.

Un operador $R:\mathcal{E}'(U) \to \mathcal{E}(U)$ lineal y continuo, se llama <u>regularizante</u>.

L. Schwartz ha demostrado (ver [4]), que todo regularizante es un operador integral con núcleo $k(x,y) \in \mathcal{E}(U\times U)$.

Se dirá que el operador R es un <u>regularizante analítico</u> si es lineal y continuo de $\mathcal{E}'(U)$ en $H(U)$, donde $H(U)$ indica las funciones analíticas en U, con la topología inducida por $\mathcal{E}(U)$.

El teorema de Paley-Wiener muestra que la transformación de Fourier es un regularizante analítico en todo R^n.

Sea ahora $K:\mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ un operador lineal y continuo.

Se dice que K es una <u>parametriz izquierda</u> para el operador $P(x,D)$, si existe R_1 regularizante, tal que

$$K\,P(x,D)T = T+R_1T, \qquad \text{para toda} \qquad T \in \mathcal{E}'(U)$$

Análogamente, K será una <u>parametriz derecha</u>, si existe R_2 regularizante, tal que

$$P(x,D)KT = T+R_2T, \qquad \text{para toda} \qquad T \in \mathcal{E}'(U)$$

Cuando una parametriz sea a la vez derecha e izquierda, se la llamará <u>bilátera</u>.

La parametriz se llama <u>analítica</u> cuando el regularizante R_1 o R_2, según corresponda, sea analítico.

<u>Lema 1,3</u>

Si $P(x,D)$ admite una parametriz izquierda seudolocal, entonces es hipoelíptico.

<u>Demostración</u>

Sean $S,T \in \mathcal{D}'(U)$ tales que $P(x,D)T = S$.

Se sabe que S coincide con una función indefinidamente derivable en cierto abierto $U_1 \subset U$.

Quiere concluírse que también $T \in \mathcal{E}(U_1)$.

En primer lugar, como la propiedad a demostrar es de carácter local, es posible reducir la situación al caso de tener distribuciones de $\mathcal{E}'(U)$.

En efecto, dado $x_0 \in U_1$, sea $\varphi \in \mathcal{D}(U_1)$ que vale 1 en un entorno abierto U_2 de x_0.

Por ser $P(x,D)$ un operador local,

$$P(x,D)T\varphi = S_1 \in \mathcal{E}'(U)$$

Si se prueba que $T\varphi \in \mathcal{E}(U_1)$, como $T\varphi/_{U_2} = T/_{U_2}$, resultará que T coincide con una función indefinidamente derivable alrededor de x_0, que era un punto arbitrario de U_1.
Luego, $T \in \mathcal{E}(U_1)$.
Puede suponerse entonces que $T, S \in \mathcal{E}'(U)$.
Sea K la parametriz izquierda seudolocal que existe para $P(x,D)$, por hipótesis.

$$KS = KP(x,D)T = T + R_1T.$$

Al ser R_1 regularizante, $R_1T \in \mathcal{E}(U)$.
Como el operador K es seudolocal, $KS \in \mathcal{E}(U_1)$.
En consecuencia, $T \in \mathcal{E}(U_1)$.
Esto concluye lo afirmado. #

El lema 1.3 provee una condición suficiente de hipoelipticidad. Para un operador $P(x,D)$ de coeficientes variables, no se conocen condiciones de hipoelipticidad que sean a la vez necesarias y suficientes.
En cambio, es posible caracterizar a los operadores $P(x,D)$ elípticos, en términos de que admiten parametrices izquierdas seudolocales, que pertenecen a cierta clase de operadores llamados seudodiferenciales. (ver [5]).
Al tener un operador $P(x,D)$ elíptico parametrices izquierdas seudolocales, se deduce que todooperador elíptico debe ser también hipoelíptico.
En el caso de los operadores $P(D)$ de coeficientes constantes, es posible caracterizar completamente las propiedades de elipticidad e hipoelipticidad.

Antes de ver estos resultados, conviene introducir la noción de solución fundamental:

Una distribución $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ se llama una solución fundamental del operador $P(D)$ si verifica

$$P(D)G = \delta.$$

El nombre de fundamental alude al hecho de que si se tiene $S \in \mathcal{D}'(R^n)$ cumpliendo ciertas condiciones, puede conocerse mediante G, una solución de $P(D)T = S$. En efecto, basta tomar $T = G * S$; las condiciones que debe cumplir S son aquéllas que permitan definir la convolución; por ejemplo, si $S \in \mathcal{E}'(R^n)$, $G * S$ tiene sentido, cualquiera sea el comportamiento de la solución fundamental G; las condiciones sobre S podrán modificarse a medida que se conozcan propiedades de G, dependiendo del operador en cuestión.

De lo que acaba de decirse, resulta que el conocimiento de una solución fundamental, permite resolver, en ciertos casos, el problema de existencia de solución para la ecuación $P(D)T = S$, al menos cuando el abierto donde se trabaja es todo R^n.

Como se verá enseguida, la noción de solución fundamental, también es de suma utilidad para estudiar problemas de regularidad asociados al operador $P(D)$.

Todo operador diferencial $P(D)$, admite al menos una solución fundamental temperada.

En efecto, esta afirmación es consecuencia, vía transformación de Fourier, del siguiente resultado (ver [6]): Toda distribución temperada puede dividirse por cualquier polinomio en n variables no idénticamente nulo y al menos una solución de esa operación, es temperada.

Lema 1.4

Sea $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ una distribución que coincide con una función indefinidamente derivable fuera del origen.

Entonces, dada $T \in \mathcal{E}'(R^n)$, la distribución $G * T$ es indefinidamente derivable donde lo sea T.

Demostración

Sea $T \in \mathcal{E}'(R^n)$ y sea $U \subset R^n$ un abierto tal que $T \in \mathcal{E}(U)$; fijado $x_0 \in U$, se probará que $G * T$ es indefinidamente derivable en x_0.

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ que vale 1 en un entorno U_1 de x_0.

$G * T = G * \varphi T + G * (1-\varphi)T.$

$\varphi T \in \mathcal{D}(U)$; se sabe entonces que $G * T\varphi \in \mathcal{E}(U)$.

En cuanto al otro término:

sop $(1-\varphi)T \subset R^n \setminus \overline{U_1}$; sea U_2 entorno de x_0 tal que para cierto $\varepsilon > 0$, $\overline{\varepsilon\text{-ent } U_2} \subset U_1$.

Dada $\Psi \in \mathcal{D}(U_2)$, es:

$$(G * (1-\varphi)T, \Psi) = ((1-\varphi(x))T_x, (G_y, \Psi(x+y))).$$

Para $x \in R^n \setminus \overline{U_1}$, el cero no puede pertenecer a $\text{sop}_y\, \Psi(x+y)$, pues en caso contrario, $x \in U_2 \cap (R^n \setminus \overline{U_1})$ lo cual es un absurdo.

Como G coincide con una función indefinidamente derivable fuera del origen, puede escribirse:

$$(G_y, \Psi(x+y)) = \int G(y)\, \Psi(x+y)dy, \qquad \text{para } x \in R^n \setminus \overline{U_1}$$

Mediante el cambio de variable $x+y = z$, la integral anterior se escribe:

$$\int G(z-x)\, \Psi(z)dz = (\Psi(z), G(z-x)).$$

Reemplazando, queda:

$$(G * (1-\varphi)T, \Psi) = ((1-\varphi(x))T_x, (\Psi(z), G(z-x))) =$$

$$= (((1-\varphi(x))T_x, G(z-x)), \Psi(z)).$$

O sea, en U_2, entorno de x_0, $G * (1-\varphi)T$ coincide con la función, indefinidamente derivable allí, $((1-\varphi(x))T_x, G(z-x))$. Esto concluye lo afirmado.

#

Teorema 1.2

Sea P(D) un operador diferencial lineal con coeficientes constantes.

Entonces son equivalentes:

a) Existe una solución fundamental temperada de P(D), que coincide con una función indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$.

b) P(D) admite una parametriz izquierda seudolocal.

c) Si T,S son distribuciones en $\mathcal{D}'(U)$ que cumplen $P(D)T = S$, entonces:

Para cada abierto $U_1 \subset U$ tal que $S \in \mathcal{E}(U_1)$, también $T \in \mathcal{E}(U_1)$.

Demostración

a) ⇒ b)

Sea $G \in \mathcal{S}'(R^n)$ una solución fundamental temperada que coincide con una función indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$.

Se probará que el operador $K = G *$ es una parametriz izquierda seudolocal.

Por propiedades de la convolución, K es un operador lineal y continuo de $\mathcal{E}'(R^n)$ en $\mathcal{S}'(R^n)$.

Además,

$$P(D) \circ KT = P(D)\, G * T = \delta * T = T \qquad \text{para toda } T \in \mathcal{E}'(R^n)$$

Análogamente, $K \circ P(D)T = T$.

Luego, K no sólo es una parametriz bilátera, sino que en realidad es una inversa bilátera en $\mathcal{E}'(R^n)$.

En cuanto al hecho de ser K seudolocal, se deduce inmediatamente del lema 1.4.

b) ⇒ a)

Esta implicación fue probada en el lema 1.3.

c) ⇒ a)

Como la distribución δ coincide con una función indefinidamente derivable fuera del origen, cualquier solución $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ de la ecuación $P(D)G = \delta$, debe tener la misma propiedad.

#

Este teorema caracteriza la propiedad de ser un operador de coeficientes constantes hipoelíptico, en términos de parametrices y de soluciones fundamentales.

<u>Lema 1.5</u>

Dado $U \subset R^n$ abierto, sea $f \in \mathcal{E}(U)$.

Son equivalentes:

a) f es analítica en U.

b) Para cada $K \subset U$ compacto, existen $C = C(K) > 0$, $A = A(K) > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(x)| \leq C\, A^{|\alpha|}\, |\alpha|!, \quad \text{para } x \in K, \text{ para toda n-upla } \alpha.$$

Demostración

a) ⇒ b)

Dada una función F definida y analítica en un entorno de un punto $z_0 \in C^n$, se sabe, (ver [7]) que cerca de z_0, es posible representar la función y sus derivadas, mediante una integral del tipo de Cauchy:

$$D^{\alpha}F(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|w-z_0|=\delta} \frac{F(w)}{(w-z)^{\alpha+1}}\, dz$$

donde $\alpha+1 = (\alpha_1+1,\dots,\alpha_n+1)$ y $|z-z_0| < \delta$, para cierto δ adecuado.

A partir de esa fórmula, se obtienen estimaciones para las derivadas. En efecto, si $|F(w)| \leqslant M$ para $|w-z_0| \leqslant \delta$, es:

$$\sup_{|z-z_0|\leqslant\delta} |D^{\alpha}F(z)| \leqslant \frac{\alpha!}{(2\pi)^n}\, M \,.\, \frac{(2\pi\delta)^n}{\delta^{|\alpha|+n}} \leqslant C.A^{|\alpha|}\,|\alpha|!\ ,$$

con ciertos $C, A > 0$.

Si ahora se supone que F es analítica en cierto abierto $U \subset C^n$, dado $K \subset U$ compacto, se puede repetir lo anterior para cada punto de K.

Luego, por compacidad se deduce lo afirmado.

Sea ahora f una función definida y analítica en un abierto $U \subset R^n$. Como siempre puede extenderse f, a través de su serie de potencias, a una función F definida y analítica en un entorno abierto V de U, en C^n, resulta que es posible aplicar a f lo que acaba de hacerse.

b) $\Rightarrow$ a)

Fijado $x \in U$, se escribe f alrededor de ese punto como:

$$f(y) = \sum_{|\alpha| \leq N} D^{\alpha} f(x) \frac{(y-x)^{\alpha}}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=N} f_{\alpha}(x,y) \frac{(y-x)^{\alpha}}{\alpha!}$$

Para probar que f es analítica en x, habrá que probar que la serie de potencias $\sum_{\alpha} D^{\alpha} f(x) \frac{(y-x)^{\alpha}}{\alpha!}$, converge en cierto disco $|y-x| < \varepsilon$ contenido en U y que existe $\lim_{N\to\infty} \sum_{|\alpha|=N} f_{\alpha}(x,y)\frac{(y-x)^{\alpha}}{\alpha!} = 0$ y cerca de x.

Sea K un entorno compacto de x. Por hipótesis, existen $C = C(K) > 0$, $A = A(K) > 0$ tales que

$$|D^{\alpha} f(x)| \leqslant C.A^{|\alpha|} |\alpha|!$$

Luego, el término general de la serie, puede acotarse como:

$$\left|D^{\alpha} f(x) \frac{(y-x)^{\alpha}}{\alpha!}\right| \leqslant C \cdot \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (A|y-x|)^{|\alpha|}.$$

Resulta:

$$C \sum_{|\alpha|<N} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (A|y-x|)^{|\alpha|} = C \sum_{j=0}^{N-1} (A|y-x|)^{j} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}$$

Dada cualquier n-upla real $(a_1,\ldots,a_n) = a$, vale la fórmula de Euler:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{j} = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} a^{\alpha}.$$

Para comprobarla, basta observar que cada miembro es un polinomio homogéneo de grado j y que por lo tanto, coincidirán, si son iguales en el origen todas las derivadas de orden j.

Poniendo $a = (1,\ldots,1)$, se obtiene:

$$\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} = n^j.$$

O sea que la n-ésima suma parcial de la serie considerada, puede mayorarse con $C. \sum_{j=0}^{N-1} (An|y-x|)^j$.

Para $|y-x| < \frac{1}{An}$, esta serie geométrica converge, con lo cual se concluye que la serie de término general $D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$ converge absolutamente allí.

En cuanto al resto:

Usando la expresión integral, vale:

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 D^\alpha f(x+t(y-x)).(1-t)^{N-1}.dt.(y-x)^\alpha$$

Para y en un entorno compacto adecuado de x, puede acotarse lo anterior como:

$$C . \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} A^{|\alpha|} |\alpha|!|y-x|^{|\alpha|} = C.(A|y-x|)^N . \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} =$$

$$= C.(An|y-x|)^N.$$

Esto tenderá a cero cuando $N \to \infty$, si además de pertenecer al entorno de x elegido antes, y es tal que $An|y-x| < 1$.

En total, se ha probado que la función f es analítica en x. #

Lema 1.6

Sea $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ una distribución que coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$.

Entonces, dada $T \in \mathcal{E}'(R^n)$, la distribución $G * T$ es analítica donde lo sea T.

Demostración

Se supone que para cierto abierto $U \subset R^n$, T coincide con una función analítica en U. Se probará que $G * T$ tiene la misma propiedad.

Fijado $x_0 \in U$, sea U_1 un entorno abierto de x_0 tal que para cierto $\varepsilon > 0$, $\overline{\varepsilon\text{-ent } U_1} \subset U$ y sea $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ que vale 1 en U_1.

$$G * T = G * \varphi T + G * (1-\varphi)T.$$

Se sabe ya, según el lema 1.4, que ambos términos son indefinidamente derivables en U.

Además, para $x \in U_1$, vale:

$$[G * (1-\varphi)T](x) = ((1-\varphi(y))T_y, G(x-y)).$$

$[1-\varphi(y)]T_y$, es una distribución de soporte compacto contenido en $R^n \setminus \overline{\varepsilon\text{-ent } U_1}$.

Luego, puede escribirse en la forma $\sum_{|\alpha| \leqslant \rho} D^\alpha f_\alpha$, para cierto ρ y ciertas funciones f_α continuas y de soporte compacto arbitrariamente próximo al de la distribución.

Luego, para $x \in U_1$ vale:

$$([1-\varphi(y)]T_y, G(x-y)) = \sum_{|\alpha| \leqslant \rho} (-1)^{|\alpha|} \int f_\alpha(y)\, D_y^\alpha G(x-y)dy$$

Fijada una n-upla β y un compacto $K \subset U_1$, quiere estimarse en K la derivada:

$$D_x^\beta([1-\varphi(y)]T_y, G(x-y)) =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant \rho} \int f_\alpha(y)\, (D^{\alpha+\beta} G)(x-y)dy. =$$

$$= \sum_{|\alpha| \leqslant \rho} \int f_\alpha(x-y)\, D^{\alpha+\beta} G(y)dy.$$

Para $x \in K$, y se mueve en el conjunto

$$K_1 = \{y \in R^n / x-y \in \text{sop } f_\alpha, \text{ para algún } x \in K\}.$$

Este es un compacto. Además, según se eligieron las cosas, existe $\delta > 0$ tal que para $x-y \in$ sop $f\alpha$, $x \in K$, es $|y| \geq \delta$.

Allí, $G(y)$ es analítica por hipótesis.

Luego, de acuerdo con el lema 1.5, se tiene la acotación:

$$\left|\int f_\alpha(x-y)\, D^{\alpha+\beta} G(y)dy\right| \leq C.A^{|\alpha+\beta|}.|\alpha+\beta|!\int |f_\alpha(x-y)|\,dy$$

para $x \in K$.

De aquí se concluye sin dificultad, que la función $[1-\varphi(y)]\,T_y$ es analítica en U_1.

En cuanto al otro término:

Por comodidad, en lugar de D^α, una derivada de orden m se indicará $D_m.D_{m-1}\ldots D_1$, donde cada D_i es una derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$, para cierto $1 \leq j \leq n$.

Puede demostrarse por inducción, que para $m \geq 2$ vale:

$$D_m\, D_{m-1}\ldots D_2 D_1(G * \varphi T) = G * \varphi D_m\, D_{m-1}\ldots D_2 D_1 T +$$

$$+ D_m\, D_{m-1}\ldots D_2 G * (D_1\varphi).T + G * (D_m\varphi)(D_{m-1}\ldots D_2 D_1 T) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{m-1} D_m\ldots D_{l+1}\, G * (D_l\varphi)(D_{l-1}\ldots D_2 D_1 T).$$

$$G * \varphi\, D_m\ldots D_2 D_1 T = (G_y,\ \varphi(x-y).(D_m\ldots D_2 D_1 T)(x-y))$$

Se probará que esta función es entera.

Fijado $K \subset R^n$ compacto, importan los valores de y en el conjunto

$$K_1 = \{y \in R^n / x-y \in \text{sop}.\varphi \text{ para algún } x \in K\}.$$

Este conjunto es compacto.

Por definición de distribución, existen ρ, $C(K_1) = C > 0$ tales que:

$$|(G_y, \varphi(x-y)(D_m \dots D_2 D_1 T)(x-y))| \leqslant$$

$$\leqslant C \sup_{\substack{|\beta| \leqslant \rho \\ z \in R^n}} |D^\beta [\varphi(z).(D_m \dots D_2 D_1 T)(z)]| \qquad \text{para} \quad x \in K.$$

Usando la regla de Leibniz, esto puede acotarse con:

$$C \sup_{\substack{|\beta| \leqslant \rho \\ z \in R^n}} |D^\beta \varphi(z)| . \sup_{\substack{|\beta| \leqslant \rho \\ z \in \text{sop } \varphi}} |(D^\beta D_m \dots D_2 D_1 T)(z)|$$

Sobre el soporte de φ, por ser T analítica, vale: la estimación:

$$C.A^{|\beta|+m}(|\beta|+m)!$$

Esto puede acotarse finalmente con $C.A^m\, m!$

Se estudiará ahora, en general, un término de la forma

$$D_m \dots D_{l+1}\, G * (D_l \varphi).(D_{l-1} \dots D_1 T)$$

sop $D_l \varphi \subset U \setminus U_1$.

Luego, T es analítica en el sop $D_l \varphi$; además, dado $K \subset U_1$ compacto, para $x \in K$, $y \in$ sop $D_l \varphi$, es $|x-y| \geqslant \delta$ para cierto $\delta > 0$. O sea, $G(x-y)$ es una función analítica de $x-y$, allí.

Para $x \in K$, esa convolución puede escribirse

$$\int D_m \dots D_{l+1}\, G(x-y)\ (D_l \varphi)(y)(D_{l-1} \dots D_1 T)(y)dy.$$

Esto se acota, por todo lo dicho, con:

$$C\ A_l^{m-l}(m-l)!\ B_l^{l-1}(l-1)!$$

En total, hay m estimaciones así:

es

$$C \sum_{l=1}^{m} A_l^{m-l}(m-l)!\, B_l^{l-1} \leq C\, A^m\, m!$$

Esto concluye la demostración del lema.
#

Teorema 1.3

Sea P(D) un operador diferencial lineal con coeficientes constantes:

Entonces son equivalentes:

a) P(D) admite una solución fundamental temperada que coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$.

b) P(D) admite una parametriz izquierda analítica seudolocal K, que satisface además:

Si $T \in E'(R^n)$ coincide con una función analítica en cierto abierto $U \subset R^n$, KT tiene la misma propiedad.

c) Dadas distribuciones $T, S \in D'(U)$, $U \subset R^n$ abierto, tales que $P(D)T = S$, si S coincide con una función analítica en cierto abierto $U_1 \subset U$, entonces T también.

Demostración

a) ⇒ b)

Si G es una solución fundamental para P(D) con las propiedades que aparecen en a), se vio en el teorema 1.2, que el operador $K = G *$, es una parametriz bilátera seudolocal. Además, al cumplirse

$$K \circ P(D)T = T, \qquad P(D) \circ KT = T \qquad \text{para toda } T \in E'(R^n),$$

resulta también analítica.

En cuanto a las otra propiedad, resulta del lema 1.6.

b) $\Rightarrow$ c)

Al ser la analiticidad una propiedad local, como en el teorema 1.2, puede reducirse la situación a $T, S \in \mathcal{E}'(U)$.

Se tiene:

$$K \circ P(D)T = T + R_1 T$$

Como R_1 es un regularizante analítico, $R_1 T \in H(U)$.

$P(D)T = S \in H(U_1)$; luego, por hipótesis, $K \circ P(D)T \in H(U_1)$.

Se deduce entonces que $T \in H(U_1)$.

c) $\Rightarrow$ a)

Como la distribución δ coincide con una función analítica fuera del origen, cualquier solución $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ de la ecuación $P(D)G = \delta$, debe tener la misma propiedad.

Esto concluye la demostración del teorema.

#

Observación 1.2

Puede probarse, (ver [8]), que cualquiera de las afirmaciones hechas en el teorema 1.3, equivale al hecho de ser el operador $P(D)$ elíptico, o sea tal que su polinomio característico no se anula en $R^n \setminus 0$.

Es decir, que ese teorema da condiciones equivalentes de elipticidad para el operador $P(D)$, en términos de parametrices y soluciones fundamentales.

El lema 1.1 y el corolario 1.1, siguen siendo, naturalmente, válidos, cuando el operador diferencial en cuestión es de coeficientes constantes. Sus enunciados para un operador $P(D)$, son los siguientes:

Lema 1.1'

Dado un operador P(D) de orden m, son equivalentes:

a) P(D) es elíptico

b) Existe $C > 0$ tal que

$$|Pm(-2\pi i\xi)| \geqslant C|\xi|^m, \quad \text{para todo} \quad \xi \in R^n.$$

Corolario 1.1'

Sea P(D) un operador elíptico de orden m.

Existen $C,N > 0$ tales que:

$$|P(-2\pi i\xi)| \geqslant C\,(1+|\xi|)^m, \qquad \text{para} \quad |\xi| \geqslant N$$

Sobre la vinculación entre los teoremas 1.2 y 1.3 y la no anulación en $R^n \setminus 0$ del polinomio característico, se probarán ahora algunos resultados

Teorema 1.4

Todo operador P(D) elíptico es hipoelíptico.

Demostración

Según se dijo antes, esto ocurre con cualquier operador P(x,D) elíptico.

Lo que se hará aquí, es construir para el operador P(D), una solución fundamental temperada, indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$. Usando la transformación de Fourier, basta encontrar una distribución $S \in S'(R^n)$, cumpliendo:

$$\mathcal{F}[S] \in E(R^n \setminus 0), \ P(-2\pi i\xi)S = 1 \text{ en } R^n.$$

Sea $\chi \in D(R^n)$ que valga 1 en un entorno abierto del conjunto de los ceros reales de $P(-2\pi i\xi)$. Se buscan distribuciones adecuadas, S_1 y S_2, tales que

$$P(-2\pi i\xi)S_1 = \chi \qquad (1)$$

$$P(-2\pi i\xi)S_2 = 1-\chi \qquad (2)$$

Según un resultado que se mencionó al principio, se sabe que debe existir una distribución temperada S_1, cumpliendo (1).

Pero más aún, debe ser de soporte compacto.

En efecto, sea $N > 0$ tal que sop $\chi \subset \{|x| < N\}$; dada $\varphi \in \mathcal{D}(R^n \setminus \{|x| < N\})$, es:

$$(S_1,\varphi) = (S_1,\ P(-2\pi i\xi)\ \frac{\varphi}{P(-2\pi i\xi)}) =$$

$$= (P(-2\pi i\xi)S_1,\ \frac{\varphi}{P(-2\pi i\xi)}) = (\chi,\ \frac{\varphi}{P(-2\pi i\xi)}) = 0$$

De acuerdo con el teorema de Paley-Wiener, resulta que $\overline{\mathcal{F}}[S_1]$ es una función entera, que pertenece a $\mathcal{O}_M$

En cuanto a (2), como $1-\chi$ se anula en un entorno de los ceros reales de $P(-2\pi i\xi)$, la función $\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}$ está bien definida; además, pertenece a $\mathcal{O}_M$ (ver ejercicio 1.10). Entonces, determina una distribución temperada.

En total, la distribución $\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] + \overline{\mathcal{F}}[S_1]$, resulta ser una solución fundamental temperada.

Se probará ahora que $\overline{\mathcal{F}}\ [\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] \in \mathcal{E}(R^n \setminus 0)$.

Sea $\eta \in \mathcal{D}(R^n)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(\xi) = \begin{cases} 0 & |\xi| \geq 2 \\ 1 & |\xi| \leq 1 \end{cases}$

Dado $0 < \varepsilon \leq 1$, se considera la función, de $\mathcal{S}(R^n)$,

$$\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\ \eta(\varepsilon\xi)] = f_\varepsilon(x)$$

Se afirma que $f_\varepsilon \to \overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$, en el sentido de $\mathcal{D}'(R^n)$

En efecto, dada $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, es:

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \left(\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\,\eta(\varepsilon\xi),\ \overline{\mathcal{F}}[\varphi]\right) =$$

$$= \int \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\,\eta(\varepsilon\xi)\ \overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)d\xi\,.$$

Puntualmente, el integrando converge a $\dfrac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\ \overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)$

Por otra parte, es:

$$\left|\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\,\eta(\varepsilon\xi)\ \overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\right| \leq C(1+|\xi|)^{-m}|\overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)|.$$

Como $\overline{\mathcal{F}}[\varphi] \in \mathcal{S}(R^n)$, esa función es integrable.

Luego, usando el teorema de convergencia mayorada, se obtiene el resultado.

Si se probara que existe $f \in \mathcal{E}(R^n\setminus 0)$ tal que la sucesión $\{f_\varepsilon\}$ converge hacia f, uniformemente en los compactos de $R^n\setminus 0$, esto implicaría que $f_\varepsilon \to f$ en el sentido de $\mathcal{D}'(R^n\setminus 0)$.

Luego, $\overline{\mathcal{F}}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ debe coincidir con f en $R^n\setminus 0$.

Fijado r = 0,1,... sea β una n-upla entera no negativa con $|\beta| \leq r$.

Dado k = 1,2,... y usando el hecho de que

$$(-\Delta_\xi)^k\ e^{-2\pi i x\xi} = (4\pi^2)^k\ |x|^{2k}\ e^{-2\pi i x\xi}$$

es:

$$(4\pi^2)^k\ |x|^{2k}\ D^\beta f_\varepsilon(x) =$$

$$= \int [(-\Delta_\xi)^k\ e^{-2\pi i x\xi}]\,.\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\ (-2\pi i\xi)^\beta\ \eta(\varepsilon\xi)d\xi\,.$$

Integrando por partes, esto puede escribirse:

$$\sum_{|\alpha+\gamma|=2k} (-1)^k \; C_{\alpha\gamma} \int e^{-2\pi i x\xi} . D^{\gamma}\left[\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)} (-2\pi i\xi)^{\beta}\right].$$

$$.\varepsilon^{|\alpha|} \; \overline{(D^{\alpha}\eta)(\varepsilon\xi)} d\xi$$

De acuerdo con el ejercicio 1.10, el integrando de cada têrmino se acota con:

$$C.(1+|\xi|)^{-m+r-|\gamma|}.\varepsilon^{|\alpha|}.|D^{\alpha}\eta)(\varepsilon\xi)|$$

El soporte de la funciôn $(D^{\alpha}\eta)(\varepsilon\xi)$, estâ contenido en $\{|\varepsilon\xi| \leqslant 2\}$.

Esto significa que en el soporte de esa funciôn, vale:

$$\varepsilon(1+|\xi|) \leqslant \varepsilon+2 \leqslant 3$$

O sea,

$$\varepsilon^{|\alpha|} \leqslant 3^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

Por lo tanto, puede acotarse:

$$\varepsilon^{|\alpha|}|(D^{\alpha}\eta)(\varepsilon\xi)| \leqslant C.(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

En total, cada uno de los integrandos en la suma anterior, resulta

$$\leqslant \; C.(1+|\xi|)^{-m+r-2k}$$

Fijado r, se elige k, tal que $-m+r-2k$ sea $< -n$.

Puede aplicarse entonces el teorema de convergencia mayorada; resulta por lo tanto, que existe una funciôn

$$f_{k,\beta}: R^n \to C \quad \text{tal que} \quad (4\pi^2)^k |x|^{2k} \; D^{\beta} f_{\varepsilon}(x)$$

converge puntualmente hacia $f_{k,\beta}(x)$.

Se afirma que la convergencia es uniforme en compactos.

Para verlo, fijados k,β, sea $g_{\varepsilon} = (4\pi^2)^k|x|^{2k} \; D^{\beta} f_{\varepsilon}$

No hay dificultad en comprobar que la familia $\{g_{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon\leqslant 1}$, es equicontinua en R^n. Esto permite concluir (ver [9]), que la función límite $f_{k,\beta}$ es continua y que la convergencia es uniforme en compactos de R^n.

Por lo tanto, $\{D^\beta f_\varepsilon\}$ converge hacia $\frac{f_{k,\beta}}{(4\pi^2)^k |x|^{2k}}$ uniformemente en los compactos de $R^n \setminus 0$.

$E(R^n \setminus 0)$ es completo con su topología natural, o sea la de la convergencia uniforme de cada derivada en los compactos; luego, si $f = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon$, se deduce que $f \in E(R^n \setminus 0)$ es que para cada n-upla β, $\{D^\beta f_\varepsilon\}$ converge hacia $D^\beta f$ uniformemente en los compactos de $R^n \setminus 0$.

Según lo dicho antes, puede concluírse que la distribución $\overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ coincide en $R^n \setminus 0$ con esa función f.

Luego, $G = \overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] + \overline{F}[S_1]$, es una solución fundamental tamperada, que pertenece a $E(R^n \setminus 0)$.

Esto muestra que el operador P(D) en consideración, es hipoelíptico.
#

Observación 1.2.

De acuerdo con lo demostrado en el teorema 1.2, el operador $G *$, resulta una parametriz bilátera seudolocal.

Por otra parte, el operador $\overline{F}[S_1] *$, es un regularizante y además analítico (ver ejercicio 1.13); en consecuencia, según el ejercicio 1.3, $\overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] *$, es también una parametriz del mismo tipo, para P(D).

Teorema 1.5.

Sea P(D) un operador elíptico.

Entonces, P(D) verifica las condiciones equivalentes del teorema 1.3.

Para demostrar el resultado que se acaba de enunciar, es conveniente dar un lema, que generaliza al lema 1.1' y al corolario 1.1'.

Tmabién es posible obtenerlo para un operador $P(x,D)$, elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$ (ver ejercicio 1.15)

Eema 1.7.

Sea $P(D)$ un operador elíptico de orden m.

a) Existen constantes, C, $\varepsilon > 0$ tales que

$$|P_m(-2\pi i(\xi+i\eta))| \geq C.|\xi|^m \quad \text{para} \quad \xi,\eta \in R^n \quad \text{con} \quad |\eta| \leq \varepsilon|\xi|$$

b) Existen constantes C,N, $\varepsilon > 0$ tales que

$$|P(-2\pi i(\xi+i\eta))| \geq C\ (1+|\xi|)^m \quad \text{para} \quad \xi,\eta \in R^n \quad \text{con} \quad |\xi| \geq N, |\eta| \leq \varepsilon|\xi|$$

Demostración

a) De acuerdo con el lema 1.1, existe $C > 0$ tal que

$$|P_m(-2\pi i\xi)| \geq C \quad \text{para} \quad |\xi| = 1.$$

Como el polinomio P_m es función continua de la variable compleja $\xi+i\eta$, resulta que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|P_m(-2\pi i(\xi+i\eta))| \geq C/2 \quad \text{para} \quad |\xi| = 1, |\eta| \leq \varepsilon$$

Si ahora es $\xi \neq 0$, puede escribirse, por la homogeneidad de P_m:

$$|P_m(-2\pi i(\xi+i\eta))| = |\xi|^m\ |P_m(-2\pi i(\frac{\xi}{|\xi|} + i\frac{\eta}{|\xi|}))|.$$

Usando lo que acaba de obtenerse, de deduce que cuando $|\eta| \leq \varepsilon|\xi|$ $\xi \neq 0$, es:

$$|P_m(-2\pi i(\xi+i\eta))| \geqslant C/2|\xi|^m$$

Finalmente, esta desigualdad también vale cuando $\xi = 0$, pues en ese caso es $\eta = 0$ y ambos miembros se anulan.

b) A partir de a) se obtiene la estimación para $P(-2\pi i(\xi+i\eta))$, de manera análoga a lo que se hizo en el corolario 1.1. #

Demostración del teorema 1.5

Se probará que $P(D)$ admite una solución fundamental temperada, que es analítica en $R^n \setminus 0$.

En el razonamiento que va a emplearse, juega un papel fundamental el orden del operador.

De acuerdo con el teorema 1.1, cuando la dimensión del espacio es $\geqslant 3$, todo operador $P(D)$ elíptico debe ser de orden par y en consecuencia, de orden $\geqslant 2$.

Según la observación 1,1, todo operador definido en R es elíptico y en R^2, hay operadores elípticos de primer orden.

Para los operadores elípticos de primer orden en R y en R^2, pueden construirse explícitamente soluciones fundamentales temperadas, que son analíticas en $R^n \setminus 0$; (ver ejercicio 1.8)

En lo que sigue, se supondrá por lo tanto que el operador $P(D)$ es de orden $\geqslant 2$.

De acuerdo con el razonamiento hecho en el teorema 1.4, para tener una solución fundamental temperada, analítica en $R^n \setminus 0$, falta demostrar que $\overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$; ya se sabe que es indefinidamente derivable allí.

Según el lema 1.5, para comprobar que esa función es analítica en $R^n \setminus 0$, habrá que estimar sus derivadas,

$D^\alpha \mathcal{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}(-2\pi i\xi)^\alpha\right]$, en los compactos de $R^n \setminus 0$.

$$(2\pi i x_j)^{n+|\alpha|-1}\ \mathcal{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}(-2\pi i\xi)^\alpha\right] =$$

$$= \mathcal{F}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}(-2\pi i\xi)^\alpha\right]\right\}.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}(-2\pi i\xi)^\alpha\right] =$$

$$= (1-\chi)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1}\frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\binom{n+|\alpha|-1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^k\chi.\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n+|\alpha|-k-1}\frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)} \tag{3}$$

En primer lugar, quiere acotarse $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^l\frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)}$ para ξ en el soporte de $1-\chi$ o de $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^k\chi$, $k \geq 1$.

Va a usarse el lema 1.7.

Se supondrá que la función χ ha sido elegida de tal manera que en esos soportes, valga la estimación que asegura la parte b) del lema 1.7.

Sea $\overline{\xi} = (\xi_1+i\eta_1, \xi_2,\dots,\xi_n) = (z, \xi_2,\dots,\xi_n)$, con $|\xi| \geq N$, $|\eta_1| \leq \varepsilon|\xi|$.

De acuerdo con el lema 1.7, es:

$$\left|\frac{(-2\pi i\overline{\xi})^\alpha}{P(-2\pi i\overline{\xi})}\right| \leq C.(2\pi)^{|\alpha|}.(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}$$

Para estimar las derivadas, va a usarse la fórmula de Cauchy:

Si

$$F(z) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|} z^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}}{P(-2\pi i z, -2\pi i \xi_2, \ldots, -2\pi i \xi_n)} \text{, es:}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^l F(z^0) = \frac{l!}{2\pi i} \int_{|z-z^0|=r} \frac{F(z)}{(z-z^0)^{l+1}}\, dz$$

donde $z^0 = \xi_1$, $r = \varepsilon|\xi|$.

Al ser $F(z)$ una función analítica en z^0, vale:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^l F(z^0) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^l \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)}$$

Luego, acotando la integral, se obtiene:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^l \frac{(-2\pi i\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\right| \leqslant C \frac{l!\ (2\pi)^{|\alpha|} (1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}}{(\varepsilon|\xi|)^l} \leqslant$$

$$\leqslant C.\frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^l} .\ l!\ (1+|\xi|)^{-m+|\alpha|-l} \qquad (4)$$

Cuando $l = n+|\alpha|-1$, resulta la estimación:

$$\left|(1-\chi).\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1} \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)}\right| \leqslant C.\frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|+n-1}}.(1+|\xi|)^{-m-n+1}.(|\alpha|+n-1)!$$

Como se está suponiendo en todo esto que el orden del operador es $\geqslant 2$, la función $(1-\chi)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1} \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)}$ es integrable, pudien<u>do</u> calcularse su antitransformada de Fourier mediante la integral; esta integral puede acotarse entonces con:

$$C\ .\ \frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{n+|\alpha|-1}} (|\alpha|+n-1)! \int_N^\infty \frac{dt}{(1+t)^{m-1}} \leqslant C.A^{|\alpha|}|\alpha|!$$

Fijado ahora un término cualquiera en la sumatoria que aparece en (3), como la función $(\frac{\partial}{\partial \xi_j})^k \chi$, $k \geq 1$, es de soporte compacto, también su antitransformada puede calcularse mediante la integral:

$$\int e^{-2\pi i x\xi} . (\frac{\partial}{\partial \xi_j})^k \chi . (\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{n+|\alpha|-k-1} \frac{(-2\pi i \xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i \xi)} d\xi$$

Integrando aquí por partes k-1 veces, se tiene:

$$(-1)^{k-1} \int (\frac{\partial}{\partial \xi_j}) \chi . (\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{k-1} [e^{-2\pi i x\xi} (\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{n+|\alpha|-k-1} \frac{(-2\pi i \xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i \xi)}] d\xi =$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} \int e^{-2\pi i x\xi} (-2\pi i x_j)^h . (\frac{\partial}{\partial \xi_j}) \chi .$$

$$. (\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{n+|\alpha|-h-2} \frac{(-2\pi i \xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i \xi)} d\xi .$$

Mediante la estimación (4), esto puede mayorarse con:

$$C \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} (2\pi)^{h+|\alpha|} |x_j|^h \frac{(n+|\alpha|-h-2)!}{\varepsilon^{n+|\alpha|-h-2}} . \int_N^M \frac{dt}{(1+t)^{m-h-1}}$$

En total, la sumatoria que figura en el segundo término de (3), resulta acotada en la siguiente forma:

$$C \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n+|\alpha|-1}{k} \binom{k-1}{h} (2\pi)^{h+|\alpha|} |x_j|^h . C^h . \frac{(n+|\alpha|-h-2)!}{\varepsilon^{n+|\alpha|-h-2}}$$

La acotación que se obtiene en la parte b) del lema 1.7 sigue valiendo si se supone $0 < \varepsilon \leq 1$.

Con esto, lo anterior puede acotarse con:

$$C . (2\pi)^{n+2|\alpha|-2} C^{n+|\alpha|-2} . \varepsilon^{-n-|\alpha|} C^{|\alpha|} .$$

$$. \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n+|\alpha|-1}{k} \binom{k-1}{h} |x_j|^h$$

En general, vale $\binom{p}{q} \leq 2^p$, pues:

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{s=0}^{p} \binom{p}{s} > \binom{p}{q}, \text{ para cada } 0 \leq q \leq p$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{n+|\alpha|-1}{k}\binom{k-1}{h} |x_j|^h \leq 2^{2n+2|\alpha|-3} \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} |x_j|^h$$

De todas las estimaciones hechas, se concluye que existen constantes C, $A > 0$ tales que:

$$|(2\pi i x_j)^{n+|\alpha|-1} D^\alpha \overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]| \leq$$

$$\leq C.A^{|\alpha|} |\alpha|! [1 + \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} |x_j|^h]$$

para $x \in R^n$, $j = 1,\ldots,n$.

Sumando estas estimaciones sobre j, queda:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{n+|\alpha|-1} . |D^\alpha \overline{F} \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]| \leq$$

$$\leq C.A^{|\alpha|} |\alpha|! [1 + \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^h].$$

Se fija ahora un compacto $K \subset R^n \setminus 0$.

Existen constantes δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que $\delta_1 \leq |x| \leq \delta_2$, para todo $x \in K$.

Luego, pueden hallarse constantes C_1, C_2, B_1, $B_2 > 0$ con

$$C_1 B_1^{n+|\alpha|-1} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^{n+|\alpha|-1}}{|x|^{n+|\alpha|-1}} \leq C_2 B_2^{n+|\alpha|-1} \quad \text{si} \quad x \in K$$

Luego, es:

$$|D^{\alpha}\ \overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]| \leq C.A^{|\alpha|}|\alpha|! \ \frac{\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\sum_{h=0}^{k-1}|x_j|^h}{|x|^{n+|\alpha|-1}}$$

para $x \in K$

Volviendo a operar en forma semejante con el miembro derecho de esta desigualdad, se concluye que $D^{\alpha}\ \overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ verifica en K la estimación requerida, para toda n-upla α.

Esto concluye la demostración del teorema. #

Observación 1.3.

Es posible demostrar, (ver [8]), que también vale la recíproca del teorema 1.5. O sea, que si P(D) es un operador que cumple las condiciones equivalentes del teorema 1.3, su polinomio característico $P_m(-2\pi i\xi)$, no se anula en $R^n \setminus 0$.

Es decir, que la propiedad de no anulación en $R^n \setminus 0$ del polinomio $P_m(-2\pi i\xi)$, caracteriza importantes propiedades del operador P(D); resulta muy apropiado entonces el nombre de característico, dado a ese polinomio.

De acuerdo con lo que acaba de decirse y con el ejercicio 1.6, la recíproca del teorema 1.4, no es cierta; en efecto, el ejercicio 1.6, muestra que el operador del calor es hipoelíptico; su polinomio característico, sin embargo, se anula en la recta $\xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = 0$.

Para los operadores no elípticos, el polinomio $P_m(-2\pi i\xi)$, ya no es tan característico de sus propiedades. En efecto, los operadores del calor y de Schrödinger, tienen el mismo polinomio característico; pero el primer operador es hipoelíptico y el segundo no (ver ejercicio 1.6). Puede caracterizarse la hipoelipticidad, en términos del polinomio $P(-2\pi i\xi)$, asociado al operador.

Concretamente, sea

$$V = \{z = \xi + i\eta \in C^n / P(-2\pi iz) = 0\}.$$

Entonces, $P(D)$ es hipoelíptico si y sólo si cada vez que para $z \in V$, sea $|z| \to \infty$, deberá tenerse $|\eta| \to \infty$ (ver [8]).

Esto implica que también para un operador hipoelíptico, los ceros reales del polinomio $P(-2\pi i\xi)$ están en un compacto.

De aquí se deduce otra manera de ver que el operador de Schrödinger no es hipoelíptico.

Con técnicas semejantes a las usadas en el teorema 1.4, es posible construir una solución fundamental temperada, indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$, para un dado operador hipoelíptico $P(D)$. Esta construcción se apoya en cierta desigualdad que verifica el polinomio $P(-2\pi i\xi)$, (ver ejercicio 1.12). Puede probarse que la desigualdad que aparece en ese ejercicio 1.12, es equivalente al hecho de ser el operador $P(D)$ hipoelíptico, (ver [8])

Del ejercicio 1.6, se concluye que todas las soluciones fundamentales de los operadores de Laplace y de Cauchy-Riemann, son funciones localmente integrables, en R^n.

Esta propiedad, en realidad, la cumple cualquier operador $P(D)$ elíptico.

En efecto:

Teorema 1.6.

Sea $P(D)$ un operador elíptico.

Entonces, admite una solución fundamental temperada, localmente integrable en R^n.

Demostración

De acuerdo con el ejercicio 1.8, puede suponerse que el orden del operador es ≥ 2,

Según lo hecho en los teoremas 1.4 y 1.5, basta demostrar que $\overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ es integrable alrededor de cero:

Fijado $j = 1,2,\ldots$ $(2\pi i x_j)^{n-1}\ \overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right] =$

$$= \overline{F}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n-1} \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$$

Como el orden de $P(D)$ es ≥ 2, se comprueba en la forma habitual que la función $\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n-1} \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}$ es integrable, con lo cual $(2\pi i x_j)^{n-1}\ \overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ coincide en el complemento del hiperplano $\{x_j = 0\}$ con la función continua $\frac{h_j}{(2\pi i x_j)^{n-1}}$

Sea $h(x) = \frac{h_j(x)}{(2\pi i x_j)^{n-1}}$ en el complemento de $\{x_j = 0\}$; $h(x)$ es una función definida y continua en $R^n\setminus 0$.

$\overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ coincide con h fuera del origen, de donde se deduce que h es no sólo continua, sino analítica en $R^n\setminus 0$.

Al tenerse $\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{n-1} \geq C|x|^{n-1}$ resulta

$$|h(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}} \qquad \text{en} \qquad R^n\setminus 0.$$

Luego, h es una función localmente integrable.

Además, por lo dicho antes, $\overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$-h es una distribución T, concentrada en el origen.

Sea $\Psi \in S(R^n)$ tal que Ψ vale 1 en un entorno del cero y $\hat{\Psi} \in D(R^n)$.

Se tiene:

$$\Psi\ \overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] - \Psi h = T$$

También vale

$$\Psi\ \overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] = \overline{F}[\hat{\Psi} * \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$$

Ψh es una función de $L^1(R^n)$. Por otra parte, se sabe que toda distribución concentrada en el origen, debe ser una combinación lineal de derivadas de la medida de Dirac, δ; luego, su transformada de Fourier resulta un polinomio, $P(\xi)$.

Puede escribirse entonces:

$$\hat{\Psi} * \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} - F\ [\Psi h] = P(\xi).$$

Cada uno de los términos en el miembro izquierdo, $\underset{|\xi|\to\infty}{\to} 0$.

Luego, $P(\xi)$ debe ser el polinomio nulo.

Esto muestra que $\overline{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ es integrable alrededor del origen, lo cual concluye la prueba del teorema. #

Hasta aquí se han tratado casi exclusivamente problemas de regularidad. Como surge del análisis de los resultados expuestos, la teoría para los operadores con coeficientes constantes está prácticamente completa. También en las cuestiones de resolubilidad, pocos son los problemas que quedan abiertos.

Si bien en esta parte no se hablará de existencia de soluciones, se enunciará un teorema que muestra el tipo de resultados conocidos sobre el tema, (ver [8]), para operadores con coeficientes constantes.

Teorema 1.7.

Sea $U \subset R^n$ un subconjunto abierto y convexo.

Entonces, las siguientes propiedades se verifican respecto de cualquier operador $P(D)$:

a) Si $\mathcal{D}'^{(f)}(U)$ indica las distribuciones de orden finito, en U,

$$P(D)\ \mathcal{D}'^{(f)}(U) = \mathcal{D}'^{(f)}(U)$$

b) $P(D)\ L^2_{loc}(U) \supset L^2_{loc}(U)$.

c) $P(D)\ \mathcal{E}(U) = \mathcal{E}(U)$.

Ejercicios

1.1. Escribir el polinomio característico y el polinomio asociado, para cada uno de los operadores de Laplace, Cauchy-Riemann, del calor, de Schrödinger y de las ondas.

Decir cuáles de ellos son elípticos.

1.2. Dado $h \in R^n$, mostrar que el operador de traslación τ_h, definido como:

$$(\tau_h T, \varphi) = (T_x, \varphi(x+h)) \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{D}'(R^n),\ \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

no es seudolocal.

1.3. Sea $P(x,D)$ un operador diferencial con coeficientes indefinidamente derivables en cierto abierto $U \subset R^n$; sea K una parametriz bilátera para $P(x,D)$.

Si R es un regularizante, probar que R+K es otra parametriz bilátera para el operador dado.

1.4. Sea $P(\frac{d}{dt}) = c_m(\frac{d}{dt})^m + \ldots + c_1(\frac{d}{dt}) + c_0$, un operador diferencial ordinario de orden m, con coeficientes constantes $c_j \in C$.

Mostrar que $P(\frac{d}{dt})$ admite una solución fundamental G de la forma

$$G = Hg$$

donde:

H(t) es la función de Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

g es la solución del problema:

$$P(\frac{d}{dt})g = 0$$

$$(\frac{d}{dt})^j g(0) = \begin{cases} 0 & 0 \leq j \leq m-2 \\ 1/c_m & j = m-1 \end{cases}$$

¿Qué puede decirse sobre la propiedad de ser G temperada? Dar ejemplos.

1.5.

a) Expresar el operador de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

b) Expresar el operador de Laplace en coordenadas esféricas en R^n.

1.6.

a) Obtener soluciones fundamentales temperadas para los operadores de Laplace, de Cauchy-Riemann, del calor y de Schrödinger.

b) De las distribuciones obtenidas en a), decir cuáles son funciones localmente integrables, cuáles coinciden con funciones indefinidamente derivables o analíticas en $R^n \setminus 0$.

1.7. Lo mismo que el ejercicio 1.6, para la ecuación de las ondas en una variable espacial.

1.8. Construir soluciones fundamentales temperadas para un operador elíptico P(D) de orden 1, en R y en R^2.
Comprobar que se obtienen funciones localmente integrables, que son analíticas fuera del origen.
Sugerencia: Para R^2, observar que mediante un cambio lineal de coordenadas, puede reducirse el operador al de Cauchy-Riemann.

1.9. Construir una solución fundamental del operador $\frac{\partial}{\partial x_1} + 1$, en R^n.
¿Es hipoelíptico? Mostrar que es inyectivo en $\mathcal{E}'(R^n)$. ¿Es siempre inyectivo?

1.10. Dado un operador P(x,D) de orden m, elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$, probar por inducción sobre el orden de derivación α, que dado $K \subset U$ compacto, α n-upla entera no negativa, existe $C=C(K,\alpha) > 0$ tal que

$$\left| D^{\alpha} \frac{1}{P(x;-2\pi i\xi)} \right| \leq C(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|} \quad \text{para} \quad x \in K,\ |\xi| \text{ grande.}$$

1.11.

a) Si C(D) indica el operador del calor, probar por inducción sobre el orden de derivación α, que dada una n-upla entera, no negativa α, existe $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$\left|D^{\alpha}\frac{1}{C(-2\pi i\xi)}\right| \leqslant C(1+|\xi|)^{-1-1/2|\alpha|} \quad \text{para} \quad |\xi| \quad \text{grande}$$

b) Construir una parametriz seudolocal para el operador C(D).

1.12.

a) Sea P(D) un operador cuyo polinomio asociado verifica:

Existen constantes $C, N, \varepsilon, \delta_1, \delta_1 > 0$ tales que

$$|P(-2\pi i(\xi+i\eta))| \geqslant C(1+|\xi|)^{\delta_1}$$

$$\text{para} \qquad |\xi| \geqslant N, \ |\eta| \leqslant \varepsilon|\xi|^{\delta_2}$$

Siguiendo el razonamiento hecho en el teorema 1.5, probar que P(D) es hipoelíptico.

b) Obtener la desigualdad que figura en a), para el operador del calor.

1.13. Sea G una función entera. Probar que el operador $G *$ es un regularizante analítico.

1.14. Dado k = 1,2,..., probar que existe m = 1, 2,... tal que las soluciones fundamentales del operador Δ^{m}, son de clase C^k en todo R^n.

1.15. Enunciar y demostrar el lema 1.7, para un operador P(x,D) de orden m, elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$.

1.6. Se considera el operador $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Mostrar una solución analítica, real, pero no analítica compleja, de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z} \text{ en } C\setminus 0.$$

1.17.

a) Considerar la ecuación del calor en una variable especial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (x,t) \in R^2.$$

Describir las soluciones de la forma

$$u(x,t) = v(x)w(t),$$

suponiendo $v,w \in \mathcal{E}(R)$.

b) Lo mismo que a) para la ecuación de Schrödinger

c) Comparar los resultados obtenidos.

1.18. Sea P(D) un operador cuyo polinomio asociado verifica la desigualdad del ejercicio 1.12.

¿Qué puede decirse de la integrabilidad local de la solución fundamental construída en ese ejercicio?

§2. El problema de Cauchy

En §1 se observó que no siempre una ecuación en derivadas parciales es resoluble, incluso localmente; además se vio que aún cuando una ecuación admita solución, ésta puede no ser única.

Se verá ahora que si a la ecuación en derivadas parciales se le agregan ciertas condiciones, el problema así planteado, puede tener una y sólo una solución, bajo determinadas hipótesis.

Un problema típico de los que se plantean, es el siguiente: Sea $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un punto en R^n. Se da una hipersuperficie S no singular que pasa por x^0; esto significa que en cierto entorno U de x^0, S puede describirse como $\{x \in U / \varphi(x) = 0\}$, para cierta función φ, en principio perteneciente a $C^1(U)$ y tal que grad $\varphi(x^0) \neq 0$.

Las hipótesis hechas sobre S permiten asegurar que alrededor de x^0, S coincide, por ejemplo, con $\{x / x_n = \Psi(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$, para una determinada función Ψ, de clase C^1 cerca de $(x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0)$.

Sean $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)$, funciones definidas en S, en un entorno de x^0. A la m-upla $\Phi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1})$, se la llama datos de Cauchy, datos iniciales o más precisamente, datos iniciales sobre S, relativos a un operador de orden m.

Dada ahora una función f(x) definida alrededor de x^0, se llama problema de Cauchy o problema de valores iniciales asociado a cierto operador P(x,D) de orden m, al problema de hallar una función $u(x)$ definida en cierto entorno de x^0, cumpliendo

$$\begin{cases} P(x,D)u = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u\Big|_S = \varphi_j \quad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

donde n es una dirección normal a S.

Con relación al problema así planteado, aparecen varias cuestiones: Si existe solución y si es única.

Si en caso de existir una solución, ésta es local o puede asegurarse a veces que existe solución global. Cómo depende la solución que eventualmente se encuentra, de los datos f, φ.

En lo que sigue, se analizarán estas preguntas.

En primer lugar, si bien el problema se ha planteado para un operador lineal de los que se estudiaron en §1, tiene sentido enunciarlo en condiciones más generales:

Sea $F(X_1,\ldots,X_N)$ una función definida en un subconjunto de C^N, con valores complejos. Mediante el reemplazo de las variables $X_1,\ldots,X_N$ por variables reales $x_1,\ldots,x_n$ y derivaciones D^α hasta un cierto orden m, se obtiene un operador en derivadas parciales general de orden m: $F(x;D^\alpha)$

Pueden tenerse también r operadores de este tipo, en cuyas variables aparezcan las derivadas hasta un cierto orden m, de r funciones $u^1,\ldots,u^r$; esto da origen a un sistema determinado de ecuaciones en derivadas parciales general de orden m:

$$\begin{cases} F_1(x,D^\alpha u^1,\ldots,D^\alpha u^r) = f^1 \\ \vdots \\ F_r(x,D^\alpha u^1,\ldots,D^\alpha u^r) = f^r \end{cases}$$

Entendiendo que la función F toma valores en C^r y que f, u son las r-uplas de funciones $(f^1,\ldots,f^r)$, $(u^1,\ldots,u^r)$ respectivamente, un sistema puede escribirse como si fuera una ecuación: $F(x,D^\alpha) = f$.

El planteo del problema de Cauchy para este sistema, tiene el mismo aspecto que cuando se hizo para un operador lineal:

$$\begin{cases} F(x,D^\alpha u) = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u\Big|_S = \varphi_j \end{cases}$$

La diferencia reside en que ahora cada dato φ_j, es un vector de r componentes, lo mismo que las funciones F, f y la incógnita u.

Por otra parte, puede incorporarse el dato f a la función $F(x,D^\alpha u)$, con lo cual es posible escribir el sistema: $F(x,D^\alpha u) = 0$.

Volviendo al planteo del problema, se dirá que la superficie S es de clase C^l o analítica alrededor de x^0, cuando la función φ lo sea. Se dirá que Φ es de clase C^l si S es de clase por lo menos C^l y todas las funciones $\varphi_0,\ldots,\varphi_{m-1}$ son de clase C^l. Cuando la función φ que define a S cerca de x^0 es analítica y también lo son las funciones $\varphi_0,\ldots,\varphi_{m-1}$, se dice que los datos Φ son analíticos.

Por comodidad para lo que sigue, se modificará la notación: De las n coordenadas de un punto en R^n, se destaca la última, a la que se llama t.

Se dice que un sistema de orden m está escrito en <u>forma normal</u>, cuando tiene el aspecto:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m - G(x,t,D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u) = 0$$

con $0 \leqslant |\alpha| + k \leqslant m$, $\quad 0 \leqslant k \leqslant m-1$

Por ejemplo, los operadores del calor y de las ondas están escritos en forma normal.

Teorema 2.1. (Cauchy-Kowalewski)

Sea $\Phi = (\varphi_0(x),\ldots,\varphi_{m-1}(x))$ un conjunto de datos de Cauchy analíticos, en R^{n-1}.

Se considera un sistema de orden m escrito en forma normal y tal que la función G es analítica en el punto $(0,0,D_x^{\alpha}\varphi_l(0))$

Entonces, existe una y sólo una función $u(x,t) =$
$= (u^1(x,t),\ldots,u^r(x,t))$ definida y analítica en cierto entorno U del origen en R^n, que es solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u(x,t) = G(x,t,D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u), & (x,t) \in U \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^t u(x,0) = \varphi_j(x), & x \in U \cap \{t = 0\} \qquad j \leqslant m-1 \end{cases}$$

Que de existir una solución analítica, ésta debe ser única, resulta de lo siguiente:

Si se plantea como posible solución

$$u(x,t) = \sum_{\beta,j} a_{\beta,j}\, x^{\beta}\, t^j$$

los coeficientes $a_{\beta,j}$ pueden ser calculados en función de elementos conocidos del problema.

En efecto, debe ser:

$$a_{\beta,j} = \left.\frac{D_x^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,t)}{\beta!\ \ j!}\right|_{(0,0)}$$

Para $0 \leqslant j \leqslant m-1$ y cualquier β, es:

$$a_{\beta,j} = \frac{D_x^{\beta}\,\varphi_j(0)}{\beta!\ \ j!}$$

Cuando $j \geq m$ y β es cualquier $(n-1)$-upla, primero se calcula $D_x^\beta(\frac{\partial}{\partial t})^j u(x,t)$, sabiendo que cerca del origen debe coincidir con $D_x^\beta(\frac{\partial}{\partial t})^{j-m} G(x,t,D_x^\beta(\frac{\partial}{\partial t})^k u)$; especializando en $(0,0)$, se obtiene el coeficiente $a_{\beta,j}$, usando los valores de los coeficientes ya conocidos.

Esto muestra la unicidad de solución analítica. Para probar la existencia de una tal solución, primero se harán algunas modificaciones en el sistema, para llevarlo a una forma en la cual se pueda mostrar más fácilmente la existencia de una solución analítica.

Sea el problema planteado, hallar u cumpliendo:

$$(I)\quad \begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t})^m u = G(x,t,D_x^\alpha(\frac{\partial}{\partial t})^k u) \\ (\frac{\partial}{\partial t})^j u(x,0) = \varphi_j(x) \qquad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

La <u>primera reducción</u>, consistirá en llevar (I) a un problema <u>equivalente</u> de primer orden:

Sea $w_{\alpha,k} = D_x^\alpha(\frac{\partial}{\partial t})^k u, \quad 0 \leq |\alpha| + k \leq m-1$

Dada una $(n-1)$-upla $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$, si $|\alpha| > 0$, algún α_j debe ser ≥ 1; luego, puede escribirse $\alpha = \alpha' + (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ con $\alpha'_i = \alpha_i$ si $i \neq j$, $\alpha'_j = \alpha_j - 1$.

Con esta notación se considera el sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\alpha,k} = w_{\alpha,k+1} \qquad |\alpha|+k < m-1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{\alpha,k} = \frac{\partial}{\partial x_j} w_{\alpha',k+1} \qquad |\alpha|+k = m-1, \qquad |\alpha| > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{0,m-1} = G(x,t,w_{\alpha,k},\frac{\partial}{\partial x_j} w_{\beta',h}) \qquad 0 \leq |\alpha|+k \leq m-1,$$
$$|\beta'|+h = m-1$$

En cuanto a las condiciones iniciales,

$$(\frac{\partial}{\partial t})^j u(x,0) = w_{0,j}(x,0) = \varphi_j(x), \quad 0 \leq j \leq m-1$$

O sea,

$$w_{\alpha,j}(x,0) = D_x^{\alpha} w_{0,j}(x,0) = D_x^{\alpha} \varphi_j(x), \quad |\alpha|+j \leq m-1.$$

Luego, se ha obtenido un problema de primer orden en las incógnitas $w_{\alpha,k}$, $|\alpha|+k \leq m-1$:

$$\text{(II)} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} w_{\alpha,k} = w_{\alpha,k+1} & |\alpha|+k < m-1 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_{\alpha,k} = \frac{\partial}{\partial x_j} w_{\alpha',k+1} & |\alpha|+k = m-1, \ |\alpha| > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} w_{0,m-1} = G(x,t,w_{\alpha,k},\frac{\partial}{\partial x_j} w_{\beta',h}) & \\ \qquad\qquad 0 \leq |\alpha|+k \leq m-1, \ |\beta'|+h = m-1 & \\ w_{\alpha,j}(x,0) = D_x^{\alpha} \varphi_j(x) & |\alpha|+j \leq m-1 \end{cases}$$

En primer lugar, el problema (II) es analítico en un entorno del origen. Además si el sistema que aparece en (I) es lineal o es lineal y homogéneo, también seguirá siéndolo el sistema de (II).

Por último, va a probarse que ambos problemas son equivalentes, en el siguiente sentido.

Sea u una función de clase C^m en un entorno del origen en R^n, que verifica el problema (I). Puede suponerse que ese entorno es de la forma $I \times U$, con I intervalo abierto en R que contiene al cero y U, entorno del cero en R^{n-1}, Es claro que definiendo:

$$w_{\alpha,k} = D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u, \qquad |\alpha|+k \leq m-1,$$

la función $w = (w_{\alpha,k})$, es una solución de clase C^1 del problema (II), en $I \times U$.

Recíprocamente, sea $w = (w_{\alpha,k})$ una solución de clase C^1 de (II), definida en cierto entorno abierto del origen, $I \times U$, en R^n. Se afirma que la función $u = (w_{0,0})$, es una solución de clase C^m en $I \times U$, de (I). Por la forma de (II), para comprobar esto, bastará ver que

$$w_{\alpha,k} = D_x^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k w_{0,0}, \qquad \text{para} \qquad |\alpha|+k \leq m-1$$

Si $k = 0$, a partir de la primera ecuación de (II), se comprueba sucesivamente, que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j w_{\alpha,0} = w_{\alpha,j}$, si $|\alpha|+j \leq m-1$.

Dado ahora α con $|\alpha| > 0$, quiere verse que $D_x^{\alpha} w_{0,0} = w_{\alpha,0}$, para $|\alpha| \leq m-1$. Para verlo, es suficiente demostrar que

$\frac{\partial}{\partial x_i} w_{\alpha',0} = w_{\alpha,0}$, si $|\alpha| > 0$:

Se considera la función $\Psi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i} w_{\alpha',0} - w_{\alpha,0}$. Quiere verse que $\Psi(x,t) = 0 \quad \forall\ (x,t) \in I \times Y$. Aquí es donde se notará la utilidad de haber elegido el entorno de esa forma.

Se fija $x \in U$. Puede escribirse el desarrollo:

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=0}^{m-|\alpha|-1} \frac{\Psi^{(j)}(x,0)}{j!}\, t^j - \frac{\Psi^{(m-|\alpha|)}(x,0)}{(m-|\alpha|)!}\, t^{m-|\alpha|},$$

$$0 < \theta < t$$

Pero,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-|\alpha|}\frac{\partial}{\partial x_i}\, w_{\alpha',0} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-|\alpha|} w_{\alpha,0} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-|\alpha|}\Psi(x,t) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-|\alpha|} w_{\alpha',0} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) w_{\alpha,m-|\alpha|-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\, w_{\alpha',m-|\alpha|} - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) w_{\alpha,m-|\alpha|-1} = 0,$$

esto válido para $t \in I$, según la segunda ecuación de (II).

Luego, el resto en el desarrollo de $\Psi(x,t)$, es cero.

Si $j < m-|\alpha|$, es:

$$^{(j)}(x,0) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j}\frac{\partial}{\partial x_i}\, w_{\alpha',0}(x,0) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j} w_{\alpha,0}(x,0) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\, w_{\alpha',j}(x,0) - w_{\alpha,j}(x,0) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\, D_x^{\alpha'}\varphi_j(x) - D_x^{\alpha}\varphi_j(x) = 0$$

Luego, se ha comprobado que para cada $x \in U$ fijo, $\Psi(x,t) = 0$ si $t \in I$, con lo cual $\Psi(x,t)$ es idénticamente cero en $I \times U$. Esto concluye la prueba de la equivalencia de (I) y (II). Simplificando un poco la notación, se ha obtenido entonces un problema

$$(II')\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = G(x,t,u,\dfrac{\partial}{\partial x_i}u) \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

donde naturalmente, la forma de las funciones G,φ y el número de funciones incógnita u, se han modificado al pasar de (I) a (II). Para continuar, se supondrá sin embargo que u es una r-upla $u = (u^1,\ldots,u^r)$.

Se hará ahora una <u>segunda reducción</u>:

Se quiere llevar (II') a otro problema de primer orden en el cual la función G no dependa de las variables independientes x,t. Para ello se considera el problema:

$$(\mathrm{III})\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = G(X,T,u,\dfrac{\partial u}{\partial x_i}) \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial t} = 1 \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial t} = 0 \\[2ex] u(x,0) = \varphi(x) \\[2ex] T(x,0) = 0 \\[2ex] X(x,0) = x \end{cases}$$

donde $X = (X^1,\ldots,X^n)$ y T es una función escalar.

Se conserva la analiticidad del problema (II'). Además (III) sigue siendo lineal o lineal homogéneo, si lo era (II').

Estos dos problemas son equivalentes:

Sea u una solución de clase C^1 en un entorno del origen, de (II'). Entonces, (u,x,t) es una solución de clase C^1 para (III), válida en ese entorno.

Recíprocamente, si (u,X,T) es solución de clase C^1 de (III) alrededor del origen, como $\frac{\partial T}{\partial t} = 1$, debe ser $T = t+f(x)$; por otra parte, es $0 = T(x,0) = f(x)$; o sea que $T = t$.

Como $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$, es $X = g(x)$; también vale $x = X(x,0) = g(x)$; es decir que $X = x$.

Entonces, u es solución de clase C^1 alrededor del cero, de (II')

Luego, en este paso se ha llevado el problema a la forma

$$
(\mathrm{III}') \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = G(u, \dfrac{\partial u}{\partial x_i}) \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}
$$

donde vale la misma advertencia anterior sobre G, φ y las incógnitas u.

En una <u>tercera</u> <u>y</u> <u>última reducción</u>, se quiere llevar el sistema $\frac{\partial u}{\partial t} = G(u, \frac{\partial u}{\partial x_i})$ a uno <u>casi lineal</u> y <u>homogénea</u>, o sea de la forma:

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}
$$

donde los coeficientes $A_i(u)$ son matrices de $r \times r$, cuyos elementos dependen sólo de la función incógnita u.

Para hacer esta última reducción, se deberán usar hipótesis de regularidad más precisas.

Se supone en (III'), que u es de clase C^2 en un entorno del origen, en R^n. Además, se necesitará que G sea de clase C^1 en un entorno del punto $(\varphi(0), \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0))$.

En la situación que se está estudiando, G es una función analítica, luego verifica abundantemente esa condición de ser de clase C^1. Pero es bueno notar que en las dos reducciones anteriores, no se necesitó ninguna regularidad en la función G.

o sea que el proceso de reducción puede aplicarse aún a problemas no analíticos.

Se escribe el sistema (III') en coordenadas:

$$(1) \qquad \frac{u_j}{\partial t} = G_j\left(u_1,\ldots,u_r, \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)$$

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial G_j}{\partial u_h}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_l}\right)\frac{\partial u_h}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial G_j}{\partial\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right)} \cdot \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i\, \partial x_k}$$

Se introducen ahora las incógnitas $w_{hk} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k}$

En términos de w_{hk}, la ecuación (2) se escribe:

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{ji} = \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial G_j}{\partial u_h}(u,w,l)\, w_{hi} + \sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial G_j}{\partial w_{hk}}(u,w,l)\frac{\partial w_{hk}}{\partial x_i}$$

Como se quiere que el sistema sea homogéneo, hay que arreglar todavía la ecuación (1); se introduce una incógnita X y (1) se reemplaza por:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = G_j(u, w_{si}) \cdot \frac{\partial X}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = 0$$

Como se quiere que X actúe como 1, se pide que $X(x,0) = x_1$.

Por otra parte, $w_{\cdot s}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x_s}(x,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_s}(x)$

Luego, se ha obtenido el problema:

$$
(IV)\begin{cases}
\dfrac{\partial u_j}{\partial t} = G_j(u,w_{,l}) \cdot \dfrac{\partial X}{\partial x_1} \\[2ex]
\dfrac{\partial X}{\partial t} = 0 \\[2ex]
\dfrac{\partial w_{ji}}{\partial t} = \sum\limits_{h=1}^{r} \dfrac{\partial G_j}{\partial u_h}(u,w_{,l})\, w_{hi} + \sum\limits_{h=1}^{r}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{\partial G_j}{\partial w_{hk}}(u,w_{,l}) \dfrac{\partial w_{hk}}{\partial x_i} \\[2ex]
u(x,0) = \varphi(x) \\
w_{,s}(x,0) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_s}(x) \\
X(x,0) = x_1
\end{cases}
$$

Este problema (IV) es analítico y el sistema sigue siendo lineal y homogéneo, si lo era el del problema (III').

Además, ambos problemas son equivalentes:

Si u es solución de clase C^2 de (III') en un entorno del origen en R^n, entonces es claro que $(u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, x_1)$ es solución de clase C^1 de (IV) en ese entorno.

Recíprocamente, si $(u,w_{,s},X)$ verifica (IV) alrededor del y es de clase C^1 allí, como $\frac{\partial X}{\partial t} = 0$, $X(x,0) = x_1$, resulta que debe ser $X = x_1$. Para comprobar que u es solución de (III'), bastará ver que $\frac{\partial u_h}{\partial x_k} = w_{hk}$ para $1 \leq h \leq n$, $1 \leq k \leq n-1$. Esto se hace como antes:

Se supone $(u,w_{,s})$ definidas en un entorno del origen en R^n de la forma $I \times U$; se escribe $\Psi(x,t) = \frac{\partial u_h}{\partial x_k} - w_{hk}$

$$\Psi(x,t) = \Psi(x,0) + \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,\theta), \quad \text{fijado } x \in U, \text{ para cierto } 0 < \theta < t$$

Según las condiciones impuestas, $\Psi(x,0) = 0$.

Para $t \in I$, es:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial t} u_h - \frac{\partial}{\partial t} w_{hk} = \frac{\partial}{\partial x_k} G_h(u, w_{,s}) - \frac{\partial}{\partial t} w_{hk} = 0,$$

Pues haciendo esa derivada $\frac{\partial G_h}{\partial x_k}$, se obtuvo la ecuación para $\frac{\partial w_{hk}}{\partial t}$

En total, se ha reducido el problema inicial, al caso de un problema casi lineal homogéneo de primer orden, o sea de la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

<u>Definición 2.1.</u>

Dadas dos series de potencias

$$\sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in C \qquad (1)$$

$$\sum_{\alpha} b_\alpha x^\alpha, \quad b_\alpha \geq 0 \qquad (2)$$

se dice que la serie (2) <u>mayora</u> o es <u>mayorante</u> de la serie (1), si $|a_\alpha| \leq b_\alpha$, para todo α.

Es claro que si (2) converge absolutamente para $|x_j| \leq R$, $1 \leq j \leq n$, también en esa región debe converger absolutamente (1).

Sea ahora $\sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ una serie de potencias que converge absolutamente para $|x_j| \leq R$, $1 \leq j \leq n$, para cierto $R > 0$. Debe existir $C > 0$ tal que

$$\sum_{\alpha} |a_\alpha| \, |x^\alpha| \leq \sum_{\alpha} |a_\alpha| \, R^{|\alpha|} \leq C.$$

O sea,

$$|a_\alpha| \leqslant \frac{C}{R^{|\alpha|}}, \quad \text{para todo } \alpha.$$

Luego, la serie $\sum\limits_{\alpha} \frac{C}{R^{|\alpha|}} x^\alpha$, mayora a la serie dada. Lo que quiere hacerse, es modificarla para obtener una serie que siga siendo mayorante, pero que tenga una suma conocida. Esto se logra así:

$$\sum_{\alpha} \frac{C}{R^{|\alpha|}} x^\alpha = \sum_{k\geqslant 0} \frac{C}{R^k} \sum_{|\alpha|=R} x^\alpha$$

Esta serie está mayorada por $\sum\limits_{k\leqslant 0} \frac{C}{R^k} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^k = \sum\limits_{k\geqslant 0} C\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j}{R}\right)^k$

Si $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right| < R$, esa serie converge absolutamente hacia la función

$$\frac{C}{1-\frac{1}{R}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}$$

O sea que partiendo de saber que la serie $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ converge absolutamente para $|x_j| \leqslant R$, $1 \leqslant j \leqslant n$, se ha podido construir una mayorante sencilla, que converge absolutamente, por ejemplo, para $|x_j| \leqslant \rho$, dado $\rho < \frac{R}{n}$.

Es claro que si la serie $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$ cumple $a_0 = 0$, entonces admite como mayorante al desarrollo de la función

$$\frac{\frac{C}{R}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{1-\frac{1}{R}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}$$

<u>Lema 2.1.</u> Dadas dos series $\sum\limits_{\alpha} a_\alpha x^\alpha$, $\sum\limits_{\beta} b_\beta y^\beta$, si $b_0 = 0$, tiene sentido <u>sustituir</u> la segunda serie en la primera, o sea

$$\sum_{\alpha} a_\alpha \left(\sum_{\beta} b_\beta y^\beta\right)^\alpha = \sum_{\gamma} c_\gamma y^\gamma.$$

Demostración Basta observar que si $b_0 = 0$, sólo hay un número finito de posibilidades para formar el coeficiente c_γ, fijado γ.
#

Volviendo ahora al problema en estudio, mediante los cambios:

$$\overline{u}(x,t) = u(x,t) - \varphi(0)$$

$$\overline{A}_i(\overline{u}) = A_i(\overline{u} + \varphi(0))$$

siempre puede suponerse que las funciones a^i_{kl}, elementos de la matriz A_i y los datos φ_k, son analíticos en el correspondiente origen y que $\varphi(0) = 0$.

Esto muestra también que no hay restricción en trabajar alrededor del punto $(x^0,t^0) = (0,0)$.

Por comodidad, se volverá a indicar ~~la variable~~ x, en lugar de (x,t).

Se busca una función $u = (u_1,\dots,u_r)$ analítica en el cero, cumpliendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} A_i(u) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

y se sabe que $u(0,0) = \varphi(0) = 0$.

Bajo estas condiciones, según se hizo cuando se probó unicidad, pueden encontrarse r series formales:

$$u_k = \sum_{|\beta|+l\geq 1} b^k_\beta \; x^\beta$$

que lo verifican.

Los coeficientes de la serie para cada u_k, son polinomios, con coeficientes enteros no negativos, en los coeficientes de las series para a^i_{kl}, φ_k.

Luego, si se reemplazaran las series de estas funciones por mayorantes, éstas originarían mayorantes para las series de las funciones u_k. Si se probara que estas mayorantes convergen en algún dominio $|x_j| < R$, $1 \leq j \leq n$, se deduciría que también las series que definen las funciones u_k, convergen absolutamente en esa región.

Este es el llamado método de las mayorantes. El punto fundamental del método, consiste en reemplazar las series de a^i_{kl}, φ_k, por mayorantes cuyas sumas sean funciones para las cuales el problema planteado puede resolverse más o menos explícitamente.

Se supone que las series de a^i_{kl}, φ_k, convergen absolutamente para $|u_j| \leq R$, $1 \leq j \leq r$, $|x_j| \leq R$, $1 \leq j \leq n-1$, respectivamente.

Según se vio antes, la serie de cada $a^i_{k,l}$, puede mayorarse mediante el desarrollo de $\dfrac{C}{1-\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{r} u_j}$

Como $\varphi(0) = 0$, la serie de cada φ_k puede mayorarse con el desarrollo de

$$\frac{\frac{C}{R}\sum_{j=1}^{n-1} x_j}{1-\frac{1}{R}\sum_{j=1}^{n-1} x_j}$$

Estos desarrollo son válidos para ciertos valores de las variables y la constante $C > 0$, puede elegirse igual para todas las funciones.

Se ha obtenido entonces el problema mayorante, escrito en coordenadas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_k}{\partial x_n} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{s=1}^{r} \dfrac{C}{1-\frac{1}{R}\Sigma u_j} \dfrac{\partial u_s}{\partial x_i} & 1 \leqslant k \leqslant r \\ u_k(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = \dfrac{\frac{C}{R}\Sigma x_j}{1-\frac{1}{R}\Sigma x_j} & 1 \leqslant k \leqslant r \end{cases}$$

Si bien se ha mantenido la notación u para la función incógnita, es claro que se trata de otra función a determinar.

Según la forma del segundo miembro del sistema y la del dato, es razonable plantear una solución:

$$u(x) = (v(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n),\ldots,v(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n))$$

Sea $y = \sum\limits_{i=1}^{n=1} x_i$.

Cada ecuación se escribe entonces:

$$\frac{\partial v}{\partial x_n} = \frac{C}{1-\frac{rv}{R}} \cdot r \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rv}{R}} \frac{\partial v}{\partial y}$$

El dato correspondiente a la coordenada k-ésima, es:

$$v(y,0) = \frac{C\ y}{R\ (1-\frac{y}{R})}$$

En total, debe resolverse el problema:

Encontrar $v = v(y,x_n)$, analítica en un entorno de $(0,0)$ en R^2, tal que:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x_n} - \dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rv}{R}} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ v(y,0) = \dfrac{C\ y}{R(1-\frac{y}{R})} \end{cases}$$

Si se logra resolver esto, la función

$$(v(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n),\ldots,v(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n))$$

resultará una mayorante analítica alrededor del cero en R^n, de la solución del problema planteado; entonces, éste será resoluble analíticamente.

Se esboza ahora la manera de obtener una solución del problema (3):

Suponiendo que la función $v(y,x_n)$ puede despejarse de $f(y,x_n,w)=0$ para cierta función f definida y regular en un entorno del origen en R^3, quiere verse qué ecuación verificará $f(y,x_n,v(y,x_n))$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(y,x_n,v(y,x_n)) + \frac{\partial f}{\partial w}(y,x_n,v(y,x_n)) \cdot \frac{\partial v}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,x_n,v(y,x_n)) + \frac{\partial f}{\partial w}(y,x_n,v(y,x_n)) \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Si se supone que $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0$ no se anula, de estas ecuaciones pueden despejarse $\frac{\partial v}{\partial x_n}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Reemplazándolas en la ecuación de (3), se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(y,x_n,v(y,x_n)) - \frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rv(y,x_n)}{R}}\frac{\partial f}{\partial y}(y,x_n,v(y,x_n)) = 0.$$

Luego, si se encuentra $f(y,x_n,w)$ cumpliendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0 \neq 0$$

podrá despejarse $v(y,x_n)$, cumpliendo la ecuación de (3).

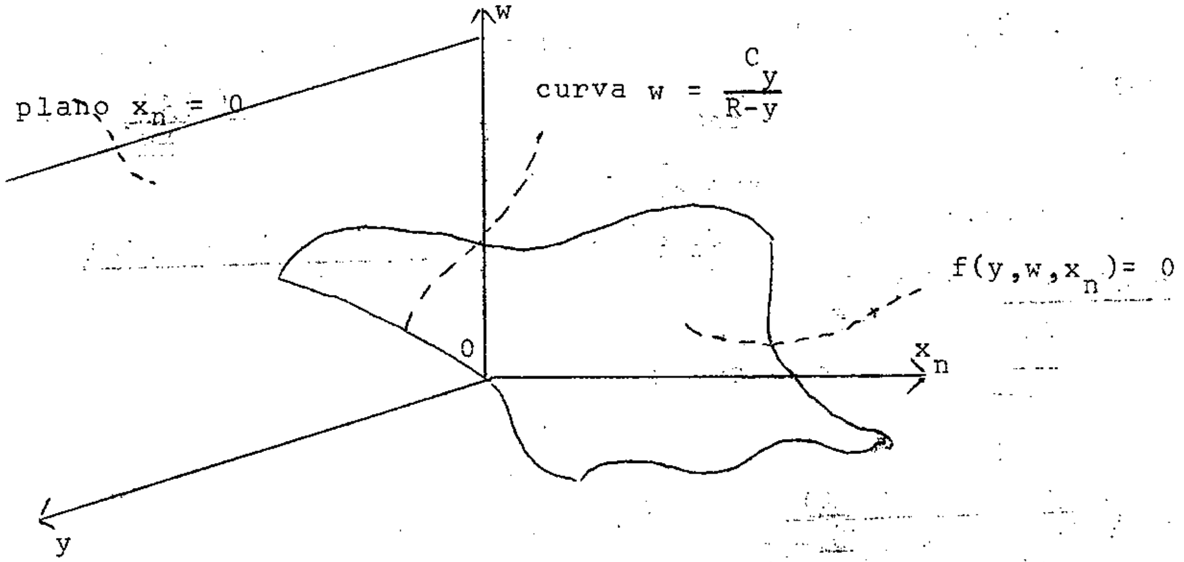
En cuanto a la condición que debe verificar $v(y,x_n)$, la cumplirá si se pide que $f(y,0,w) = w - \frac{C\ y}{R(1-\frac{y}{R})}$.

Luego, si se encuentra $f(y,x_n,w)$, analítica en un entorno del origen en R^3, cumpliendo:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}}\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\[2ex] f(y,0,w) = w - \dfrac{C\ y}{R(1-\frac{y}{R})} \end{cases}$$

la función $v(y,x_n)$ despejada de $f(y,x_n,w) = 0$, será solución analítica de (3) (ver ejercicio 2.4).

En realidad, no interesa encontrar f, sino la superficie $f(y,x_n,w) = 0$, que contendrá el gráfico de v.



Fijado un punto $P = (y,x_n,w)$ en la superficie $S = \{f(y,x_n,w) =$ que la función f verifique la ecuación de (4) en P, significa que allí debe valer cero el producto escalar de los vectores $\left(-\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}},1,0\right)$ y grad f. O sea, geométricamente, el vector $\left(-\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}},1,0\right)$ debe pertenecer al plano tangente a S en el punto P. En particular si $(y(s),x_n(s),w(s))$ indica una parametrización de cierta curva $\Gamma \subset S$, ese vector debe ser tangente a Γ en cada uno de sus puntos. Esto sugiere una manera de construir S: si pudieran hallarse todas las curvas cerca de cero en R^3 con la propiedad de que en cada uno de sus puntos el vector $(-\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}},1,0)$ es tangente y luego, reuniéndolas se obtuviera una superficie en R^3 conteniendo al cero; si además esas curvas pasaran por $(y,0,\frac{C\ y}{R-y})$, esa superficie sería S.

Para formalizar un poco esto, una función vectorial, como $(-\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}},1,0)$, se llama un <u>campo</u>; las curvas Γ que en cada punto tienen al campo por tangente, se llaman <u>trayectorias del campo</u>.

O sea, el problema ha quedado reducido a encontrar alrededor del cero en R^3, las trayectorias del campo $(-\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}},1,0)$ que pasan por la curva $x_n = 0$, $w = \dfrac{C\ y}{R-y}$

Esto significa que debe resolverse el <u>sistema diferencial ordinario</u>

$$\begin{cases} \dfrac{dx_n}{ds} = 1 & \text{(a)} \\[2ex] \dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}} & \text{(b)} \\[2ex] \dfrac{dw}{ds} = 0 & \text{(c)} \end{cases}$$

con la condición $w(s) = \dfrac{C\ y(s)}{R-y(s)}$ cuando $x_n(s) = 0$.

De (a), $x_n = s + A$,

De (c), $w = B$.

Luego, como w debe mantenerse constante, en (b) es:

$$y = -\frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}}\, s + D.$$

Tomando como nuevo parámetro $\overline{s} = s + A$, puede suponerse que $x_n = s$.

Luego,

$$y = -\frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}}\ x_n + D.$$

Quiere ahora obtenerse una expresión que vincule a y, x_n, w, en la cual hayan desaparecido B, D, s:

Cuando $x_n = 0$, debe ser $w = \frac{C\ y}{R-y}$, o sea $y = \frac{R\ w}{C+w} = D$

Queda entonces:

$$y = -\frac{C\ r(n-1)}{1-\frac{rw}{R}}\ x_n + \frac{R\ w}{C+w}$$

O de otra manera:

$$(C+w)(1-\frac{wr}{R})y + C\ r(n-1)(C+w)x_n - Rw(1-w\frac{r}{R}) = 0$$

Esta es la superficie $f(y, x_n, w) = 0$ que pasa por cero en R^3.

Claramente, f es analítica en el origen. Además $\left.\frac{\partial f}{\partial w}\right|_0 = -R$. Por construcción, cuando $x_n = 0$, vale $w = \frac{C\ y}{R-y}$.

Esto concluye la demostración del teorema 2.1. #

El teorema que se acaba de probar, muestra la existencia y unicidad de solución analítica del problema de Cauchy, planteado para un sistema escrito en forma normal.

Corresponde ahora buscar condiciones que aseguren que un sistema general, puede llevarse a forma normal.

En principio se tiene el problema

$$\begin{cases} F(x, D^\alpha u) = 0 \\ \left.(\frac{\partial}{\partial n})^j u\right|_S = \varphi_j \qquad 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

donde S es una hipersuperficie que pasa por cierto punto x^0 y que puede ser descripta alrededor de él como $\{x/\varphi(x) \neq 0\}$, con φ analítica, grad $\varphi(x^0) \neq 0$.

Sean $g_1(x),\dots,g_{n-1}(x)$ funciones analíticas en un entorno de x^0, nulas en ese punto y tales que poniendo $g_n(x) = \varphi(x)$, la aplicación

$$x \to y = (g_1(x),\dots,g_n(x)).$$

sea un cambio de variables analítico. O sea, $\det(\frac{\partial y}{\partial x})\Big|_{x=x^0} \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Luego, dada una n-upla α, es:

$$D_x^{\alpha} = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}\circ\dots\circ(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j})^{\alpha_i} \qquad (5)$$

donde la productoria debe entenderse como la composición de esos operadores diferenciales.

Si se pone $v(y) = u(x(y))$, se tiene:

$$F(x,D_x^{\alpha}u) = F(x(y),\Pi_i(\Sigma_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j})^{\alpha_i} v(y)) = F_1(y,D_y^{\alpha}v)$$

Para que pueda despejarse la variable cuyo lugar ocupa $(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v$, debe cumplirse:

$$\det(\frac{\partial F_1}{\partial(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v})\Big|_{y=0} \neq 0$$

Quiere darse ahora a esta condición una forma más explícita: En (5), aparecerá $(\frac{\partial}{\partial y_n})^m$ sólo cuando $|\alpha| = m$; además, en el desarrollo de D_x^{α} para esos valores de α, va a tenerse $(\frac{\partial}{\partial y_n})^m$, solamente en aquellos términos en que no se gasten derivadas en los coeficientes $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$.

O sea, fijados v_k, α con $|\alpha| = m$, $(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v_k$ tiene como coeficiente en $D_x^{\alpha}u$, $(\operatorname{grad} g_n)^{\alpha}$.

Luego, el elemento i,k en la matriz $\left(\frac{\partial F_1}{\partial(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v}\right)$, valdrá:

$$\frac{\partial F_{1i}}{\partial(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v_k} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F_{1i}}{\partial(D_x^\alpha u_k)} \cdot (\text{grad } g_n)^\alpha$$

Pero según la notación, usada, $g_n = \varphi$, función que describía la superficie S cerca de x^0.

La condición, entonces, para poder despejar $(\frac{\partial}{\partial y_n})^m v$, es:

$$\det\left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F_{1i}}{\partial(D_x^\alpha u)} (\text{grad } \varphi)_i^\alpha \right)\Bigg|_{x=x^0} \neq 0 \qquad (6)$$

Si el problema se hubiera planteado para un operador lineal $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$, ese determinante sería el polinomio característico, $P_m(x^0,\xi)$, especializado en el vector grad φ.

Por analogía con este caso, se llama en general <u>polinomio característico</u> del sistema a

$$\det\left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial F_{1i}}{\partial(D_x^\alpha u_k)} \xi^\alpha \right)$$

Es un polinomio homogéneo de grado m.r en la variable ξ, cuyos coeficientes dependen de x.

Es importante observar que en general la condición (6), depende no sólo del punto x^0 y la superficie S, sino también de los valores $D^\alpha u(x^0)$ para $|\alpha| \leq m$.

Como la función u es lo que se busca, estos valores para $0 < |\alpha| \leq m$ son en principio desconocidos. Empleando los datos de Cauchy, se verá enseguida que puede calcularse $D_u^\alpha(x^0)$ con $|\alpha| \leq m-1$. Admitiendo por un instante que estos números ya se han hallado, hay que obtener ahora $D_u^\alpha(x^0)$, para $|\alpha| = m$.

Reemplazando en el sistema todo lo conocido, quedan r ecuaciones en las incógnitas $D^{\alpha}u(x^0)$, $|\alpha| = m$:

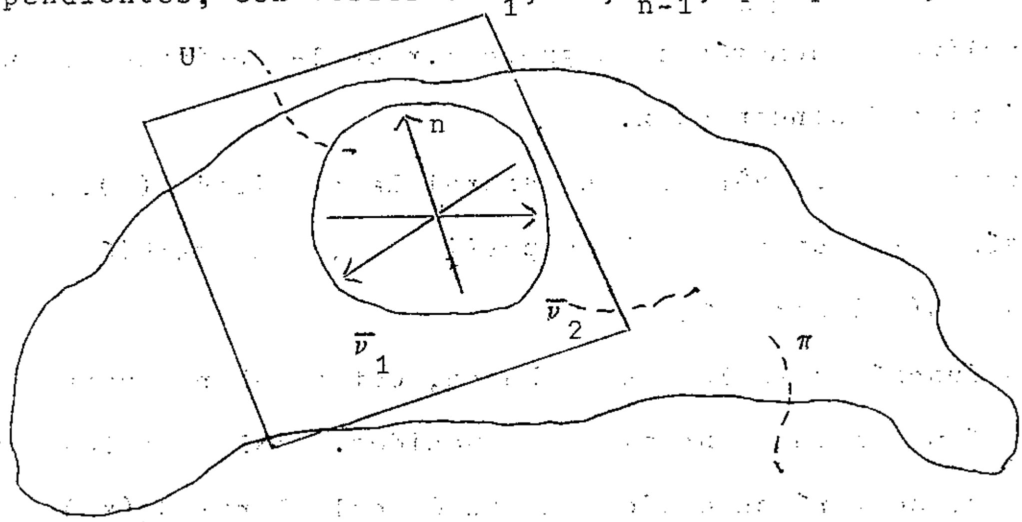
$$F_i(x^0, D^{\beta}u(x^0), D^{\alpha}u(x^0)) = 0 \qquad \begin{array}{l} |\beta| \leqslant m-1 \\ |\alpha| = m \\ 1 \leqslant i \leqslant r \end{array}$$

Entonces, el primer paso para saber si el sistema puede llevarse a forma normal, será poder despejar ahí valores para los números $D^{\alpha}u(x^0)$.

Se verá ahora cómo obtener las otras derivadas, empleando los datos de Cauchy:

En lo que sigue, se trabajará sobre la superficie S, en un entorno U de x^0, en el cual S puede ser representada mediante la función φ y grad $\varphi(x) \neq 0$, para todo $x \in U$.

Fijado $x \in U \cap S$, se considera el hiperplano π tangente a S en x, y sobre él un conjunto de n-1 rectas de direcciones independientes, con versores $\overline{\nu}_1, \ldots, \overline{\nu}_{n-1}$, que pasan por x.



Sea $\overline{\nu}_j = (\nu_j^1, \ldots, \nu_j^n)$

La dirección de un versor normal

$n = (n^1, \ldots, n^n)$, está dada por $\dfrac{\text{grad } \varphi(x)}{|\text{grad } \varphi(x)|}$

Sean ahora $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_{n-1}(t)$ curvas contenidas en S, que pasan por x y cuyas tangestes en ese punto tienen direcciones respectivamente $\overline{\nu}_1, \ldots, \overline{\nu}_{n-1}$.

De acuerdo con los datos de Cauchy,

$$u^k(\gamma_j(t)) = \varphi_0^k(\gamma_j(t)) \qquad 1 \leq k \leq r$$

Fijado k, esto permite obtener las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_1}(x)\nu_j^1 + \ldots + \frac{\partial u^k}{\partial x_n}(x)\nu_j^n = \frac{d}{dt}\, \varphi_0^k(\gamma_j(t)). \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

Por otra parte, es:

$$\frac{\partial u^k}{\partial x_1}(x)\, n^1 + \ldots + \frac{\partial u^k}{\partial x_n}(x)\, n^n = \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \varphi_1(x)$$

Se tiene así un sistema de n ecuaciones con las n incógnitas $\dfrac{\partial u^k}{\partial x_j}(x)$ $1 \leq j \leq n$, el cual es resoluble, pues las direcciones $(\nu_1, \ldots, \nu_{n-1}, n)$ son independientes.

Una vez conocidas las funciones $\dfrac{\partial u^k}{\partial x_j}$ en $U \cap S$, se las emplea de la misma manera para hallar $\dfrac{\partial^2 u^k}{\partial x_i\, \partial x_j}$; así, por pasos sucesivos, pueden calcularse en $U \cap S$ todas las derivadas $D_x^\alpha u$, con $|\alpha| \leq m-1$.

<u>Observación 2.1.</u>

El hecho de que a partir de los datos de Cauchy puedan conocerse en S, cerca de x^0, todas las derivadas $D^\alpha u$ de la función incógnita, con $|\alpha| \leq m-1$ muestra que el problema de Cauchy admite el siguiente planteo <u>equivalente</u>:

$$\begin{cases} F(x,D^{\alpha}u) = 0 \\ D^{\alpha}u\big|_S = \varphi_{\alpha} \quad |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

Los datos de Cauchy son en este caso, las funciones φ_{α}. Aquí hay que imponer la condición de que estos datos sean compatibles.

Definición 2.2.

Se dice que la superficie S es no característica para el sistema $F(x,D^{\alpha}u) = 0$, en el punto $(x^0, D^{\alpha}u(x^0))_{|\alpha|\leq m}$, si el polinomio característico no se anula en el punto $(x^0, \text{grad}\,\varphi(x^0))$. En caso contrario se dirá que es característica.

Como acaba de observarse, en general el hecho de que una superficie sea o no característica en un punto, depende no sólo del punto sino de los valores $D^{\alpha}u(x^0)$.

En el caso en que el sistema sea lineal, o sea de la forma:

$$F(x,D^{\alpha}u) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} A_{\alpha}(x).D^{\alpha}u + B(x)$$

con A_{α}, B, matrices que sólo dependen de x, el polinomio característico vale: $\det\left(\sum_{|\alpha|=m} A_{\alpha}(x)\,\xi^{\alpha}\right)$.

O sea, el que una superficie sea característica o no, sólo depende del punto x^0.

En particular, cuando se trata de una ecuación lineal de primer orden, $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + b(x)$, el ser una superficie característica o no en un punto, tiene una sencilla formulación geométrica:

S será no característica en x^0 si $\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \neq 0$

o sea, si el vector $(a_1(x^0),\ldots,a_n(x^0))$ es <u>transversal</u> a la superficie en el punto x^0.

El concepto de superficie característica, es independiente de la manera de describir la superficie S alrededor del punto x^0.

En efecto, sean φ_1, φ_2 funciones de clase C^1 alrededor de x^0, tales que grad $\varphi_1(x^0) \neq 0$, $S = \{x/\varphi_i(x) = 0\}$, cerca de x^0, $i = 1,2$.

Debe ser entonces $\varphi_2(x^0) = \lambda\varphi_1(x^0)$, para cierto $\lambda \neq 0$

Luego, como el polinomio característico $P_m(x,\xi)$ es homogéneo en ξ, resulta que $P_m(x^0, \text{grad}\,\varphi_1(x^0)) \neq 0$ si y sólo si $P_m(x^0, \text{grad}\,\varphi_2(x^0)) \neq 0$.

Con la noción de superficie característica que se ha introducido, puede decirse, un poco vagamente, que si la superficie es no característica para el sistema en el punto x^0 y se verifican ciertas condiciones de analiticidad, el problema de Cauchy admite localmente una y sólo una solución analítica.

Una pregunta que surge entonces, con relación a las cuestiones planteadas al comienzo, es si podrá existir solución global.

El ejemplo, debido a Hadamard, que se incluye ahora, muestra que en general, la solución local hallada no puede extenderse a una solución global:

Dado $a > 0$, la función $u(x,y) = \dfrac{x-a}{(x-a)^2 + y^2}$, es solución de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$$

Además, los valores iniciales $u(0,y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)$ son funciones analíticas de y. Pero debido a la singularidad de la función

$u(x,y)$ en el punto $(a,0)$, no puede considerársela solución global en $x \geq 0$, pues como se vio en §1, cualquier distribución T verificando $\Delta T = 0$, debe ser una función analítica.

Otra pregunta que puede hacerse, es si todavía habrá solución local del problema de Cauchy, cuando se reemplazan las hipótesis de analiticidad por otras.

Por ejemplo, se considera el operador de Laplace y se busca una solución del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{cerca del origen en } R^n \\ u(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = \varphi_0(x_1,\ldots,x_{n-1}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x_1,\ldots,x_{n-1},0) = \varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-1}) \end{cases}$$

Según se acaba de mencionar, cualquier solución de $\Delta u = 0$, debe ser una función analítica; luego, el problema planteado no tendrá solución a menos que los datos φ_0, φ_1 sean funciones analíticas alrededor del cero en R^{n-1}.

Es decir, que el problema de Cauchy para el operador de Laplace no es resoluble, ni aún localmente, cuando se sale del marco de las funciones analíticas.

En cambio, para el operador de las ondas, puede mostrarse el siguiente resultado de resolubilidad global (ver [10]):

Sean φ_0, φ_1, funciones en R^n de clase C^∞ y sea f una función continua en R^{n+1}.

Entonces existe una y sólo una solución u del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u = f(x,t) & \text{en} \quad R^{n+1} \\ u(x,0) = \varphi_0(x) & \\ & \text{en} \quad R^n \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi_1(x) & \end{cases}$$

la cual es de clase C^∞.

Otra de las cuestiones que se plantearon antes, fue la manera en que una solución del problema depende de los datos.

El ejercicio 2.3 muestra un caso de sistemas diferenciales ordinarios, en el cual hay dependencia analítica de los datos.

Sin embargo, cuando se pasa a ecuaciones en derivadas parciales, no siempre se puede esperar que la solución dependa, ni aún continuamente, de los datos del problema.

Por ejemplo, se considera en R^2:

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = A_n \text{ sen } nx \qquad n \in N, \ A_n \in R. \end{cases}$$

Planteando una solución de variables separadas, $u(x,t) = v_1(x) . v_2(t)$, se ve que la solución de este problema, que resulta además global, es:

$$u_n(x,t) = A_n \text{ sen h } nt . \text{sen } nx$$

Si por ejemplo, se elige $A_n = \frac{1}{n}$ resulta que $\| A_n \text{ sen } nx \|_{L^\infty} \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Sin embargo, $\| u_n(x,t) \|_{L^\infty} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

En efecto, si fijado n, se elige $(x_n, t_n) = (\pi/_{2n}, k/_n)$, vale $u_n(x_n, t_n) = \frac{1}{n}(e^k - e^{-k}) \underset{k\to\infty}{\to} \infty$.

Se conocen resultados, que aseguran en algunos casos una buena dependencia de la solución respecto de los datos (ver [11]).

El ejercicio 2.7, muestra que cuando la superficie es característica, ya no es dable esperar unicidad de solución del problema de Cauchy.

El teorema 4.1, asegura la unicidad de solución analítica del problema de Cauchy analítico, con datos sobre una superficie no característica.

En lo que sigue, se verán otros resultados que también aseguran unicidad del problema no característico, en condiciones más generales. Para ello, será necesario primero analizar el planteo del problema de Cauchy.

Hasta aquí, el estudio de este problema se ha hecho en el sentido de las funciones. Cabe preguntar ahora, cómo podrá formularse el problema de Cauchy, en el sentido de las distribuciones.

El primer inconveniente que aparece, es que cuando se piensan las incógnitas $u^1, \ldots, u^r$ como distribuciones, si la función F que da el sistema no es lineal en las variables $D_x^\alpha u$, no tendrá sentido, en general, reemplazar en ellas distribuciones. Se considera entonces un sistema lineal:

$$F(x, D^\alpha u) = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) . D^\alpha u + v = 0$$

O escrito en coordenadas:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \sum_{j=1}^{r} a_{\alpha}^{ij}(x)\, D^{\alpha} u_j + v_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Para que tengan sentido los productos $a_{\alpha}^{ij}(x).D^{\alpha}u_j$ si u_j es una distribución en cierto entorno abierto U del origen en R^n, se pedirá que a_{α}^{ij} sea de clase C^{∞} en U; finalmente, $v_i \in D'(U)$. La igualdad T = S cuando T y S son r-uplas (T_j), (S_j) de distribuciones se interpreta así:

Para toda r-upla $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_r)$, $\varphi_j \in D$, debe valer:

$$(T,\varphi) = \sum_{j=1}^{r} (T_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{r} (S_j, \varphi_j) = (S, \varphi)$$

El segundo problema aparece cuando se intenta dar sentido a las condiciones iniciales; en efecto, dada una distribución T, en general no tiene sentido hablar de su restricción a una superficie.

Luego, los datos da Cauchy, tal cual aparecen en el problema que se ha estudiado hasta ahora, no pueden plantearse. Lo que se hará entonces, es modificarlos de tal manera, que sean adecuados para distribuciones y que en el caso de trabajarse con funciones, resulten equivalentes a los otros. Para hacerlo, se comenzará razonando con funciones:

Se supone que existe $u = (u^1,\dots,u^r)$, de clase C^m en un entorno del origen en R^n, cumpliendo:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} A_{\alpha}(x)\, D^{\alpha} u + v = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u\Big|_S = 0 \qquad 0 \leq j \leq m-1$$

Esto implica que v también es de clase C^m cerca del origen. Además, se supone que v se anula en un entorno del origen.

Sea φ una función analítica que describe la superficie S cerca del origen y tal que grad $\varphi(0) \neq 0$

Se considera ahora la función:

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \varphi(x) > 0 \\ 0 & \varphi(x) < 0 \end{cases} \qquad x \text{ cerca de } 0$$

$\overline{u}$ es solución de clase C^m alrededor del origen, del problema anterior.

Pero más aún, $\overline{u}$ es solución de clase C^m, alrededor del origen, del problema:

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x)\, D^\alpha \overline{u} + v = 0 \\ D^\alpha \overline{u}(x) = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \varphi(x) < 0, \ |\alpha| \leq m-1 \end{cases}$$

Como la recíproca es cierta también, resulta que ambos problemas son equivalentes.

Además, si $\overline{u}(x) = 0$ para $\varphi(x) < 0$, también se anulará allí cualquier derivada de la función. En total, se ha obtenido la siguiente formulación del problema:

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x)\, D^\alpha \overline{u} + v = 0 \\ \overline{u}(x) = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

la cual es equivalente a la inicial.

Pero ahora, esta formulación tiene sentido cuando se piensa en el lugar de $\overline{u}$, una r-upla de distribuciones. Se ha llegado entonces al planteo siguiente:

Encontrar $u = (u^1,\ldots,u^r)$, $u^j \in \mathcal{D}'$ en un entorno del origen en R^n, cumpliendo:

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x)\, D^\alpha u + v = 0 \\ u = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

El problema así planteado en el sentido de las distribuciones, suele llamarse <u>problema de Cauchy modificado</u>.

Se dará ahora un resultado de unicidad de este problema.

<u>Teorema 2.2.</u> (Hölmgren)

Sea $u = (u^1,\ldots,u^r)$, $u^j \in \mathcal{D}'$, una solución cerca del origen en R^n, del problema:

$$\begin{cases} {}_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x)\, D^\alpha u + v = 0 \\ u = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

donde φ es una función analítica que describe cierta superficie S no característica para el sistema en el origen y que cumple grad $\varphi(0) \neq 0$

Se supone que los elementos $a_\alpha^{ij}(x)$ de las matrices $A_\alpha(x)$, son funciones analíticas en cero.

Además la r-upla $v = (v^1,\ldots,v^r)$, $v^j \in \mathcal{D}'$, cumple que v^j es cero en un entorno del origen.

Bajo todas estas condiciones, se concluye que u también debe anularse cerca del cero.

Demostración

Por todo lo supuesto, el problema puede llevarse a formar normal; se cambia la notación, indicando las variables $(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)$.

Se tiene así el problema:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u - \sum_{\substack{k+|\alpha|\leq m \\ k \leq m-1}} A_{k,\alpha}(x,t)\, D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k u = v. \\ u = 0 \quad \text{cuando} \quad t < 0 \end{cases}$$

Todas las hipótesis de analiticidad se conservan.

Como se hizo en el teorema 4.1, se va a reducir el problema a otro, equivalente, de primer orden.

Sea $f_{\alpha,k} = D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^t u, \qquad 0 \leq |\alpha|+k \leq m-1$

Estas distribuciones verifican el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha,k} = f_{\alpha,k+1} & |\alpha|+k \leq m-1 \\ \frac{\partial}{\partial t} f_{\alpha,k} = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\alpha',k+1} & |\alpha|+k = m-1, |\alpha| > 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} f_{0,m-1} = \sum_{|\alpha|+k\leq m-1} A_{k,\alpha}(x,t) . f_{\alpha,k} + & \end{cases}$$

$$+ \sum_{|\beta'|+k=m-1} A_{\beta',h}(x,t) \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\beta',h} + v$$

Además, $f_{\alpha,k} = 0$ para $t < 0$, $k+|\alpha| \leq m-1$

El problema ha quedado entonces reducido a:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f - \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t) \frac{\partial f}{\partial x_j} + B_0(x,t) f = g \\ f = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Se sabe que las componentes de g son distribuciones que se anulan en un entorno del origen. Se sabe también que B_j, B_0, son matrices analíticas cerca del cero. Se tiene una solución $f = f^1,\ldots,f^r)$ $f^j \in \mathcal{D}'$, solución de ese problema en un entorno del origen y se quiere concluir que también f es cero cerca del cero.

En primer lugar, se hará un cambio de variables que lleve el hiperplano $t = 0$, al paraboloide $\overline{t} = |\overline{x}|^2$.

Para ello, se toma:

$$\begin{cases} \overline{t} = t + |x|^2 \\ \overline{x} = x \end{cases}$$

Es un cambio de variables, pues $\left.\frac{\partial(\overline{t},\overline{x})}{\partial(t,x)}\right|_{(0,0)} \neq 0$ y además es analítico. Es posible hacer este cambio de variable, no sólo en los coeficientes del sistema, sino también en las distribuciones f,g. (ver DTF ejercicio 2.10)

Manteniendo la notación, resulta que f cumple, cerca del cero:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t)\,\dfrac{\partial f}{\partial x_j} + B_0(x,t)f = g \\ g = 0 \quad \text{si} \quad t < |x|^2 \end{cases}$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, tal que

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \leqslant \varepsilon/_2 \\ 0 & t \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Se considera $f.\varphi(t)$; si se elige ε suficientemente pequeño, puede asegurarse que $\operatorname{sop}(f.\varphi)$ está contenido en $\{t \leqslant \varepsilon\} \cap \{t \geqslant |x|^2\}$, intersección el entorno de cero donde se supone definida f.

En el entorno donde está planteado el problema, $f.\varphi$ verifica el sistema:

$$\frac{\partial}{\partial t}(f.\varphi) - \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j}(f.\varphi) + B_0(x,t)f.\varphi = g + f \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Quiere extenderse este sistema a todo R^n.

Para ello, se extiende $f.\varphi$, definiéndola como cero fuera del entorno de definición de f; resulta que $f.\varphi \in E'$. Por otra parte, los elementos de las matrices B_j, B_0, también pueden extenderse a todo R^n, no ya como funciones analíticas, pero sí como funciones de E. Finalmente, el segundo miembro se toma como el resultado de calcular

$$\frac{\partial}{\partial t}(f.\varphi) - \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j}(f.\varphi) + B_0(x,t)f.\varphi$$

donde ya se han colocado las distribuciones y matrices extendidas.

En total, volviendo a la notación anterior, se tiene en todo R^n el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t) \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + B_0(x,t)f = g \\ \\ f = 0 \qquad \text{si} \qquad t < |x|^2 \end{cases}$$

con $f_j \in E'$.

Si se indica $L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n-1} B_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j} + B_0(x,t)$, dada $\Psi = (\Psi_1,\dots,\Psi_r)$, $\Psi_j \in E$, es:

$$(g,\Psi) = (Lf,\Psi) = \left(f, -\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j}[B_j^t(x,t)\Psi] + \right.$$

$$\left. + B_0^t(x,t)\Psi\right) = \left(f, L^t\Psi\right),$$

donde B_j^t, B_0^t, indican las matrices traspuestas.

Por la propiedad que tenía inicialmente g y por la manera de hacer las extensiones, se sabe que si $\delta \geq \delta_0$, para cierto $\delta_0 > 0$, $\mathrm{sop}(g_j) \cap \{t < \delta\} = \emptyset$.

Luego, si se toman funciones $\Psi_j \in \mathcal{E}$ con $\mathrm{sop}(\Psi_j) \subset' \{t < \delta\}$, será $(g,\Psi) = 0$. O sea, $(f, L^t\Psi) = 0$ para toda r-upla Ψ así.

Al ser las distribuciones f_j, g_j de soporte compacto, tienen orden finito; luego, pueden extenderse a las funciones de clase C^N, para cierto N; por lo tanto, para toda r-upla Ψ con $\Psi_j \in C^N$, $\mathrm{sop}(\Psi_j) \subset' \{t < \delta\}$, será $(f, L^t\Psi) = 0$.

Lo que quiere probarse ahora es que las r-uplas $L^t\Psi$ con Ψ en esas condiciones, son lo suficientemente numerosas como para poder concluir que $f = 0$ para $t < \delta$. Una vez probado esto, como f ya se anulaba en $t < |x|^2$, resultará que $f = 0$ es un entorno del origen. Aquí se advierte la utilidad de haber cambiado el hiperplano por un paraboloide.

Dada ahora $\Psi = (\Psi_1,\ldots,\Psi_r)$ con $\Psi_j \in C^N$, $\mathrm{sop}(\Psi_j) \subset' \{t< \delta\}$, la función $\dfrac{\Psi}{(\delta-t)^{N+1}}$ es de clase C^N. Luego existen r sucesiones de polinomios $\{P_h^j\}_h$, tales que $\{P_h^j\}_h$ converge uniformemente con todas las derivadas de orden $\leq N$, hacia $\dfrac{\Psi_j}{(\delta-t)^{N+1}}$, en un entorno compacto de $\mathrm{sop}(f_j)$.

Si $H(\delta-t)$ indica la función de Heaviside,

$$H(\delta-t) = \begin{cases} 0 & \delta < t \\ 1 & \delta > t \end{cases}$$

la sucesión $\{P_h^j . H(\delta-t)(\delta-t)^{N+1}\}_h$, converge uniformemente hacia Ψ_j, con todas sus derivadas de orden $\leq N$, en un entorno de $sop(f_j)$.

Se supone por un momento que existe una r-upla φ de clase C^N, tal que $sop(\varphi_j) \subset \{t < \delta\}$, verificando:

$$\begin{cases} L^t\varphi = P(x,t).(t-\delta)^{N+1} \\ \varphi(x,\delta) = 0 \end{cases}$$

fijada una r-upla de polinomios, $P(x,t)$.

Con esto, ya puede concluirse el teorema.

En efecto:

Para una φ en esas condiciones, es:

$$(f, L^t\varphi) = 0 = (f, P(x,t)\ H(\delta-t)\ (\delta-t)^{N+1})$$

Dada ahora cualquier r-upla Ψ de clase C^N con $sop(\Psi_j) \subset \{t < \delta\}$, acaba de probarse que existe una sucesión de la forma $\{P_h(x,t).H(\delta-t)\ (\delta-t)^{N+1}\}_h$, que converge uniformemente con sus derivadas de orden $\leq N$, hacia Ψ, en un entorno compacto de $sop(f)$.

Para cada h, se supone entonces que existe una r-upla φ^h en las condiciones anteriores, solución del problema con segundo miembro $P_h(x,t)\ H(\delta-t)\ (\delta-t)^{N+1}$.

Tomando límite para $h \to \infty$, resulta que $(f,\Psi) = 0$, de donde se deduce que $\text{sop}(f) \subset \{t \geq \delta\}$.

Falta entonces resolver el problema anterior.

Desde luego, interesa que las funciones φ estén definidas en un entorno del origen en R^n, independiente del segundo miembro. Este segundo miembro, $P(x,t)\cdot(\delta-t)^{N+1}$, es una r-upla de funciones enteras. Además los coeficientes del sistema L^t, provienen de extender en forma C^∞, a todo R^n, matrices que inicialmente eran analíticas en un entorno del origen.

Volviendo a ese entorno del origen y eventualmente tomando un δ menor, se busca $\tilde{\varphi}$ de clase C^N, verificando:

$$\begin{cases} L^t\tilde{\varphi} = P(x,t).(\delta-t)^{N+1} \\ \tilde{\varphi}(x,\delta) = 0 \end{cases}$$

en un entorno del origen en R^n, independiente del segundo miembro.

Si se pudiera encontrar $\tilde{\varphi}$ así, entonces de la condición inicial se tiene: $D_x^\alpha\tilde{\varphi}(x,\delta) = 0$ para $|\alpha| \leq N$.

A partir de que $\tilde{\varphi}(x,\delta) = 0$, reemplazando en el sistema resulta que $\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi}(x,\delta) = 0$. Sucesivamente se obtiene así: $(\frac{\partial}{\partial t})^j D_x^\alpha\tilde{\varphi}(x,\delta) = 0$ cuando $|\alpha|+j \leq N$.

Por lo tanto, definiendo

$$\varphi(x,t) = \begin{cases} \tilde{\varphi} & t < \delta \\ 0 & t \geq \delta \end{cases}$$

se obtiene para cada $P(x,t)$, la r-upla de clase C^N que se estaba buscando.

Queda sólo por hallar $\tilde{\varphi}$.

Para poder encontrarla definida en un entorno del origen que no dependa del segundo miembro, se va a considerar un problema auxiliar, en el que se reemplaza δ por una nueva variable.

Sea $\bar{t} = t-\delta$; con este cambio de variable, resulta:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{\varphi} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{\partial}{\partial x_j}[B_j^t(x,\bar{t}+\delta)\,\tilde{\varphi}(x,\bar{t}+\delta)] + \\ \qquad + B_0^t(x,\bar{t}+\delta)\,\tilde{\varphi}(x,\bar{t}+\delta) - P(x,\bar{t}+\delta)\bar{t}^{N+1} \\ \tilde{\varphi}(x,\delta) = 0 \end{cases}$$

Se busca $\tilde{\varphi}$ de clase C^N cumpliendo esto, definida en un entorno $|x| < \eta$, $|\delta| < \eta$, $|\bar{t}| < \eta$, del origen en R^{n+1}, independiente del segundo miembro.

Como este sistema depende linealmente de $\tilde{\varphi}$, puede reemplazarse $\tilde{\varphi}$ por $\lambda\tilde{\varphi}$, con $\lambda \in R$ tal que todos los coeficientes en cada polinomio $\dfrac{P_j(x,\bar{t}+\delta)}{\lambda}$, sean, en módulo, ≤ 1.

Según se vio en el teorema 4.1, puede mayorarse el j-ésimo segundo miembro con $\dfrac{1}{1-(x_1+\ldots+x_{n-1}+\bar{t}+\delta)}$

En el entorno adecuado del origen elegido antes, los elementos de las matrices B_j^t, B_0^t, $\dfrac{\partial}{\partial x_j} B_j^t$, pueden mayorarse con funciones del mismo tipo, cuyo dominio de validez es independiente de P.

Por el teorema de Cauchy-Kowalewski, este problema mayorante admite una solución analítica en un entorno $|x| < \eta$, $|\bar{t}| < \eta$, $|\delta| < \eta$, del origen.

Luego, variando P, esa familia de problemas admitirá soluciones $\tilde{\varphi}(x,\overline{t},\delta)$, analíticas en ese entorno del origen.

Entonces, fijado δ con $0 < \delta < \eta$, la función $\tilde{\varphi}(x,t+\delta,\delta)$, es solución analítica del problema planteado, válida para $|x| < \eta$, $|t| < \eta-\delta$.

Esto concluye el teorema.#

El teorema de Hölmgren, da unicidad de solución del problema de Cauchy analítico, en la clase de las funciones C^m.

Más precisamente:

Teorema 2.3

Se considera un sistema lineal escrito en su forma normal:

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m - \sum_{\substack{|\alpha|+k\leqslant m \\ k\leqslant m-1}} A_{\alpha,k}(x,t)\, D_x^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k.$$

Se supone que los elementos de las matrices $A_{\alpha,k}$, son funciones analíticas en un entorno del origen en R^n.

Entonces, no puede haber más de una solución u de clase C^m en un entorno del cero en R^n, del problema:

$$\begin{cases} Lu = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,0) = \varphi_j(x) & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

dados f de clase C^m en un entorno del origen en R^n, φ_j de clase C^{m-j} cerca del cero en R^{n-1}.

Demostración

Si u^1, u^2 son soluciones de clase C^m del problema planteado, la r-upla $v = u^1-u^2$ verificará:

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j v(x,0) = 0 & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

Definiendo

$$v^1 = \begin{cases} v & t > 0 \\ 0 & t \leqslant 0 \end{cases}$$

v^1 es solución de clase C^m del problema de Cauchy modificado:

$$\begin{cases} Lv^1 = 0 \\ v^1(x,t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

El teorema 4.2, permite concluir que v^1 debe anularse en un entorno del origen. #

Es posible obtener la misma conclusión del teorema 2.3, exigiendo mucha menos regularidad a los coeficientes del sistema.

En efecto, A.P.Calderón ha demostrado (ver [12]), que hay unicidad del problema de Cauchy, bajo las siguientes hipótesis:

Los coeficientes de mayor orden, $a^{ij}_{\alpha,k}(x,t)$, $|\alpha|+k = m$, toman valores reales y son de clase $C^{1+\sigma}$ $(\sigma > 0)$, en un entorno U del origen.

Los otros coeficientes son funciones medibles y acotadas en U.

Fijado $\xi \in R^n \setminus 0$, el polinomio característico calculado en el origen, $\lambda^{mr} + \sum_{\substack{|\nu|+j=rm \\ j<rm}} b_{\nu j}(0,0)\, \xi^\nu \lambda^j$, tiene mr raíces $\lambda_i(\xi)$, reales y distintas.

Ejercicios

2.1. Aplicar el método de reducción del orden a los operadores de Laplace en n variables y de las ondas en n variables espaciales.

2.2. Sean $f_i(x,t)$ funciones analíticas en un entorno del punto (x^0,t^0) en R^{n+1}.

Probar por el método de los amyorantes que el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\, x_1(t) = f_1(x(t),t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}\, x_n(t) = f_n(x(t),t) \end{cases}$$

admite una y sólo una solución $x(t)$ analítica en un entorno del punto t^0, que cumple la condición inicial $x(t^0) = x^0$.

2.3. Si $g(t)$ es la solución del problema

$$\begin{cases} (\frac{d}{dt})^m g + \dots + c_1 \frac{d}{dt} g + c_0 g = 0 \\ g^{(j)}(0) = \alpha_j \qquad\qquad 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

probar que g es función entera de la variable t, de los datos α_j y de los coeficientes c_j del operador.

Sugerencia: Por reducción del orden, basta estudiar el caso de un sistema de primer orden

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\, u = Au \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

Dar sentido a la exponencial e^{At}.

2.4. (Teorema de las funciones implícitas analíticas).

a) Sean $F_1(z,w),\dots,F_n(z,w)$ funciones analíticas en un entorno de cierto punto $(z^0,w^0) \in C^{n+m}$, tales que

$$F_j(z^0,w^0) = 0 \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\det\left(\frac{\partial F_j}{\partial z_k}\right)(z^0,w^0) \neq 0$$

Probar que existen entonces funciones $z_k = \varphi_k(w)$, analíticas en un entorno de w^0, tales que $F_j(\varphi(w),w)$ está definida y vale cero en ese entorno, para $1 \leq j \leq n$.

b) Deducir el teorema para funciones analíticas reales.

2.5. Dar superficies características para los operadores del calor, de las ondas, de Schrödinger.

2.6. Para el operador Rotor:

$$\mathrm{Rot}(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

escribir su polinomio característico y determinar qué superficies son no características.

2.7. Se considera en R^2 el operador $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$.

a) Determinar qué rectas r son no características para ese operador en el origen.

b) Estudiar qué ocurre con la existencia y unicidad de solución alrededor del origen del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)u(x_1,x_2) = 0 \\ \\ u/_r = \varphi \end{cases}$$

según que la recta r sea o no característica.

<u>2.8.</u> Se considera el operador

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x,t) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde los coeficientes $\alpha_j(x,t)$ son funciones con valores reales, de clase C^∞ en un abierto U de R^{n+1}.

a) Mostrar que todo punto (x_0,t_0) de U, tiene un entorno abierto V_0 donde el problema de ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{ds} = -\alpha_j(x,s) \\ \\ x_j(t_0) = y_j \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

tiene una única solución $x = x(y,s)$, donde y es un punto de R^n cercano a x_0.

b) Probar que $x = x(y,s)$, $t = s$, define un cambio de coordenadas de clase C^∞, cerca de (x_0,t_0).

c) Aplicar estos hechos para resolver el problema de Cauchy

$$(*)\begin{cases} Lu = 0 \\ \\ u(x,t_0) = u_0(x) \end{cases}$$

cerca de (x_0,t_0) donde $u_0(x)$ es una función suficientemente regular en un entorno de x_0, en R^n.

Resolver el mismo problema con $Lu = f$, en lugar de $Lu = 0$, siendo f una función adecuadamente regular en un entorno de (x_0,t_0) en R^{n+1}.

d) Sea u_j la solución de (*) con la condición $u_j(t_0) = x_j$. Relacionar $u = (u_1,\dots,u_n)$, con la transformación considerada en b).

2.9. Aplicar lo hecho en el ejercicio anterior, a la resolución del problema de Cauchy planteado alrededor del origen para los operadores:

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$$

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t} - (x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1})$$

2.10.

a) Transformando formalmente Fourier en la variable x, resolver en $R^{n+1}_+ = \{(x,t) \in R^{n+1}/t > 0\}$, el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0$$

con la condición inicial $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t) = f$ en $L^1(R^n)$ dada $f \in L^1(R^n)$

b) Probar que en cada punto x de continuidad de f, existe

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$$

2.11. Usando el ejercicio anterior, resolver en $B_T = \{(x,t) \in R^{n+1}/0 < t < T\}$, el problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x) \end{cases}$$

siendo $f:R^4 \to C$ una función continua tal que para cierta $C > 0, \alpha > 0$ adecuada, cumple:

$$|f(x)| \leqslant C\, e^{\alpha |x|^2} \qquad \text{para todo} \qquad x \in R^n.$$

<u>2.12.</u> Sea θ la variable angular en la circunferencia unitaria Γ, o sea, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Usando series de Fourier, resolver el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2}, & t \in R \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ u(\theta,0) = u_0(\theta) & \\ & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(\theta,0) = u_1(\theta) & \end{cases}$$

dados datos u_0, u_1 de clase C^∞.

§3. Algo sobre los espacios de Sobolev y sus aplicaciones

En §1, se mencionó en qué consiste, en general, un problema de regularidad:

Dadas distribuciones $f,g \in \mathcal{D}'(U)$, tales que

$$P(x,D)f = g \text{ en } U,$$

quiere saberse si determinada condición de regularidad que verifique g, también podrá asegurarse sobre f.

Esencialmente, se estudió en §1, la hipoelipticidad de operadores con coeficientes constantes.

O sea, si $P(D)f = g$ en U y si g coincide con una función indefinidamente derivable en $U_1 \subset U$, saber si también $f \in \mathcal{E}(U_1)$.

Por otra parte, hacia el final de §1, se enunció un teorema de existencia que entre otras cosas, afirmaba que dado un abierto convexo $U \subset R^n$ y dada $g \in \mathcal{E}(U)$, existe $f \in \mathcal{E}(U)$ con $P(D)f = g$ en U.

Será interesante poder estudiar ahora propiedades de existencia y regularidad de soluciones en clases de funciones que admitan un número finito de derivadas.

Para analizar algún resultado de este tipo, se introducirán primero ciertos espacios, cuya utilidad surgirá un poco más adelante.

Definición 3.1.

Dado $s \in R$, se define el espacio de Sobolev de orden s, H^s, como:

$$\{f \in \mathcal{S}'/(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f} \in L^2\}.$$

Se da al espacio H^s una estructura de espacio prehilbertiano, definiendo:

$$(f,g)_{H^s} = ((1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f},\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{g})_{L^2}$$

Es claro que H^0 coincide con L^2.

Teorema 3.1.

$(H^s, (\,,\,)_{H^s})$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 3.2.

$\mathcal{S}$ es un subespacio de H^s denso, para todo s.

Las demostraciones de estos dos resultados, se obtienen sin dificultades de la siguiente

Observación 3.1.

Por definición del espacio H^s, dada $f \in H^s$ resulta que $\overline{\mathcal{F}}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}] \in L^2$.

Sea U^s el operador

$$H^s \to L^2$$

$$f \to \overline{\mathcal{F}}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}]$$

U^s es una isometría suryectiva, cuyo inverso es U^{-s}; además U^s aplica exactamente $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}$.

Teorema 3.3.

Si $(H^s)'$ indica el dual del espacio H^s, hay una isometría antilineal suryectiva entre $(H^s)'$ y H^{-s}.

Demostración

Dada $L \in (H^s)'$, $L.U^{-s}$ pertenece a $(L^2)'$. Existe entonces una y sólo una función $f_L \in L^2$ tal que $L.U^{-s}f = \int f(x)\,\overline{f_L(x)}\,dx$, lo cual se notará $(f, \overline{f_L})$.

Entonces, si $h_L = U^s f_L$, dada $h \in H^s$, se tiene:

$$L(h) = (U^s h, \overline{U^{-s} h_L}).$$

No hay dificultad en comprobar que la aplicación $L \to h_L$ es antilineal y suryectiva de $(H^s)'$ en H^{-s}.

También es una isometría:

$$\|L\| = \sup_{\|h\|_{H^s}=1} |L(h)| = \sup_{\|h\|_{H^s}=1} |(U^s h, \overline{U^{-s} h_L})| =$$

$$= \sup_{\|f\|_{L^2}=1} |(f, \overline{U^{-s} h_L})| = \|U^{-s} h_L\|_{L^2} = \|h_L\|_{H^{-s}}$$

Esto concluye el resultado #

Teorema 3.4.

Sea $C_0 = \{f:R^n \to C$, continuas y nulas en el infinito$\}$

En C_0 se considera la norma del supremo, $\| \|_{L^\infty}$.

Entonces, si $s > n/2$, hay una inyección continua de H^s en C_0.

Demostración

Dada $f \in H^s$, para ver que f es una función continua y nula en el infinito, bastará comprobar que $\hat{f} \in L^1$.

$$|\hat{f}| = (1+|\xi|^2)^{-s/2} (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}.$$

Por hipótesis, $(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f} \in L^2$. Al ser $s > n/2$, también $(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in L^2$. Aplicando entonces la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se concluye lo afirmado.

Además, $\|\hat{f}\|_{L^1} \leq \left(\int (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \|f\|_{H^s}$, de donde resulta la continuidad de la inyección.#

Corolario 3.1.

Dado m = 1,2,..., sea

$$\mathcal{C}_0^m = \{f: R^n \to C \text{ de clase } \mathcal{C}^m, \text{ tales que } D^\alpha f \text{ es nula en el infinito para } |\alpha| \leq m\}$$

En $\mathcal{C}_0^m$ se considera la norma:

$$\| f\| = \sum_{|\alpha| \leq m} \| D^\alpha f\|_{L^\infty}$$

Entonces, si $s-m > n/2$, hay una inyección continua de H^s en $\mathcal{C}_0^m$

Demostración

Se obtiene del teorema 3.4, observando que según el ejercicio 3.3.b), D^α determina una aplicación continua de H^s en H^{s-m} si $|\alpha| \leq m$.
#

Este corolario muestra ya la utilidad que podrán prestar estos espacios H^s, en el estudio de problemas de existencia y regularidad de soluciones, fuera del ambiente $\mathcal{C}^\infty$.

Teorema 3.5.

Sean s = 1,2,..., $f \in \mathcal{S}'$.

a) Son equivalentes:

i) $f \in H^s$

ii) $D^\alpha f \in L^2$ para $|\alpha| \leq s$.

Además, existen constantes, C_1, $C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \| f\|_{H^s} \leq \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \| D^\alpha f\|_{L^2} \leq C_2 \| f\|_{H^s}$$

b) Son equivalentes:

iii) $f \in H^{-s}$

iv) Existen funciones $f_\alpha \in L^2$, tales que

$$f = \sum_{|\alpha|\leq s} D^\alpha f_\alpha, \text{ en el sentido de } \mathcal{S}'.$$

Además, existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1 \|f\|_{H^{-s}} \leq \inf \sum_{|\alpha|\leq s} \|f_\alpha\|_{L^2} \leq C_2 \|f\|_{H^{-s}}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles familias $\{f_\alpha\}$ de representaciones.

<u>Demostración</u>

a) i) $\Rightarrow$ ii)

Dada una n-upla α con $|\alpha| \leq s$, $D^\alpha f \in L^2$ si y sólo si $\mathcal{F}[D^\alpha f] \in L^2$.

$$\mathcal{F}[D^\alpha f] = (-2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}.$$

Luego, es:

$$|\mathcal{F}[D^\alpha f]| \leq C.(1+|\xi|^2)^{|\alpha|/2}|\hat{f}| \leq (1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{f}|.$$

Por lo tanto, $D^\alpha f \in L^2$.

Además,

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \|D^\alpha f\|_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq s} \|\mathcal{F}[D^\alpha f]\|_{L^2} \leq C.\|f\|_{H^s}$$

ii) $\Rightarrow$ i)

$$(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}|^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} C_\alpha \xi^{2\alpha}|\hat{f}|^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} C_\alpha |\widehat{D^\alpha f}|^2$$

Esto muestra que $f \in H^s$.

Además, es:

$$\|f\|_{H^s} \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant s} \|D^\alpha f\|_{L^2}$$

Esto concluye la prueba de a).

b) iii) $\Rightarrow$ iv)

Se considera la aplicación

$$H^s \xrightarrow{\theta} \pi L^2$$

$$\varphi \to (D^\alpha \varphi)_{|\alpha|\leqslant s}$$

De acuerdo con a), θ es una inyección continua; además, su imagen es un subespacio cerrado V de πL^2.

Dada $f \in H^{-s}$, según el teorema 3.3, f define una forma lineal y continua sobre H^s, L_f, como:

$$L_f(\varphi) = (U^s\varphi, \overline{U^{-s}f})$$

Si θ^{-1} significa la inversa de la aplicación θ, definida sobre V, resulta que $L_f \; \theta^{-1}$ es lineal y continua de V en C; por el teorema de Hahn-Banach, puede extenderse a una forma lineal continua definida en todo πL^2.

Mediante la identificación $(\pi L^2)' = \pi(L^2)'$, resulta que existen funciones $g_\alpha \in L^2$ tales que $L_f(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leqslant s} (D^\alpha\varphi, \overline{g_\alpha})$, para $\varphi \in H^s$.

Dada ahora $\varphi \in S$, se tiene:

$$L_f(\varphi) = (U_s\varphi, \overline{U^{-s}f}) = \int \mathcal{F}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi}]\,\overline{\mathcal{F}[(1+|\xi|^2)^{-s/2}\hat{f}]}\,d\xi$$

$$= \int \hat{\varphi}\,\overline{\hat{f}}\,d\xi = \int \hat{f}\;\overline{\mathcal{F}[\overline{\varphi}]}\;d\xi = (f,\overline{\varphi}) = (\overline{F},\varphi)$$

De lo que se obtuvo resulta que también para $\varphi \in S$, es:

$$L_f(\varphi) = \sum_{|\alpha|\leq s} (-1)^{|\alpha|} (D^{\alpha}\overline{g_{\alpha}}, \varphi)$$

Por lo tanto, en el sentido de S', vale:

$$f = \sum_{|\alpha|\leq s} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} g_{\alpha}$$

En cuanto a la equivalencia de las normas, es:

$$\| f\|_{H^{-s}} = \| L_f\| = \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|L_f(\varphi)|}{\|\varphi\|_{H^s}} \leq$$

$$\leq C \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|L_f(\varphi)|}{\Sigma\| D^{\alpha}\varphi\|_{L^2}} = C \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|\Sigma(f_{\alpha}, D^{\alpha}\varphi)|}{\Sigma \| D^{\alpha}\varphi\|_{L^2}}$$

$$\leq C \sum_{|\alpha|\leq s} \| f_{\alpha}\|_{L^2}$$

También vale:

$$\| f\|_{H^{-s}} \geq C \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|L_f(\varphi)|}{\Sigma\| D^{\alpha}\varphi\|_{L^2}} = C \sup_{\varphi\neq 0} \frac{|\Sigma(f_{\alpha}, D^{\alpha}\varphi)|}{\Sigma\| D^{\alpha}\varphi\|_{L^2}} \geq$$

$$\geq C \sum_{|\alpha|\leq s} \| f_{\alpha}\|_{L^2}$$

iv) $\Rightarrow$ iii)

Resulta de inmediato a partir del ejercicio 3.3 #

Definición 3.2.

Un espacio A de distribuciones sobre un abierto $U \subset R^n$, se llama <u>local</u> si para cada $\varphi \in D(U)$, la aplicación

$$\begin{aligned} A &\to A \\ f &\to \varphi f \end{aligned}$$

está definida y es continua.

Teorema 3.6.

El espacio H^s es local.

Demostración

De acuerdo con la desigualdad de Peetre (ver DTF, ejercicio 2.5 i)), es:

$$(1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{\varphi}(\eta)|.|\hat{f}(\xi-\eta)| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{|s|/2}\,(1+|\eta|^2)^{|s|/2}|\hat{\varphi}(\eta)|.(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}|\hat{f}(\xi-\eta)|$$

Usando la desigualdad de Young (ver DTF), resulta que $\varphi f \in H^s$; además vale:

$$\|\varphi f\|_{H^s} \leqslant 2^{|s|/2}\,\|(1+|\eta|^2)^{|s|/2}\hat{\varphi}\|_{L^1}.\|f\|_{H^s}$$

Del teorema 3.2 se concluye de inmediato que D también es denso en H^s, para todo s.

Los dos resultados que siguen, permitirán construir para cada $f \in H^s$, una sucesión en D que la aproxime.

Teorema 3.7.

Dada $\theta \in D$ tal que

$0 \leqslant \theta \leqslant 1$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1/2 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

se considera $\theta_j(x) = \theta(x/j)$, $j = 1,2,...$

Entonces, si $f \in H^s$, la sucesión de truncaciones $\{\theta_j f\}_j$, converge hacia f en H^s.

Demostración

Dada $f \in H^s$ y dado $\varepsilon > 0$, sea $g \in D$ tal que $\| f-g\|_{H^s} < \varepsilon$.

Fijada g, existe j_0, que depende del soporte de g, cumpliendo:

$$\theta_j g = g \qquad \text{para} \qquad j \geqslant j_0$$

Si $j \geqslant j_0$, puede escribirse entonces:

$$\| f-\theta_j f\|_{H^s} \leqslant \| f-g\|_{H^s} + \| \theta_j (g-f)\|_{H^s}.$$

De acuerdo con el teorema 3.6, el último término se acota con:

$$2^{|s|/2} \| (1+|\eta|^2)^{|s|/2} \hat{\theta}_j\|_{L^1} \| g-f\|_{H^s}$$

No hay dificultad en comprobar que $\| (1+|\eta|^2)^{|s|/2} \hat{\theta}_j\|_{L^1}$ se acota con una constante $C > 0$, independiente de j.

Por lo tanto se tiene

$$\| f-\theta_j f\|_{H^s} \leqslant C.\| f-g\|_{H^s}$$

Esto concluye el resultado.

#

Teorema 3.8.

Dada $\rho \in D$ tal que $\rho \geqslant 0$, $\int \rho \, dx = 1$, se considera $\rho_j(x) = j^n \rho(jx)$, $j = 1,2,...$

Entonces, si $f \in H^s$, la sucesión de regularizaciones $\{\rho_j * f\}$, converge hacia f en H^s.

Demostración

El razonamiento es semejante al del teorema anterior.

Si $f \in \mathcal{D}$, se sabe que $\rho_j * f \to f$ en $\mathcal{D}$ (ver DTF, ejercicio 2.8). Por lo tanto $\rho_j * f \to f$ en H^s.

Dada ahora $f \in H^s$ y dado $\varepsilon > 0$, sea $g \in \mathcal{D}$, tal que $\|f-g\|_{H^s} < \varepsilon$. Se tiene:

$$\|f-\rho_j * f\|_{H^s} \leqslant \|f-g\|_{H^s} + \|g-\rho_j * g\|_{H^s} + \|\rho_j * (f-g)\|_{H^s}$$

De acuerdo con el ejercicio 3.7, como $\rho_j \in \Lambda^0$, el último término puede acotarse con

$$\leqslant \|\hat{\rho}_j\|_{L^\infty} \|f-g\|_{H^s} \leqslant \|\rho_j\|_{L^1} \|f-g\|_{H^s} = \|f-g\|_{H^s}$$

Luego, resulta:

$$\|f-\rho_j * f\|_{H^s} \leqslant 2\|f-g\|_{H^s} + \|g-\rho_j * g\|_{H^s}$$

Para $j \geqslant j_0(\varepsilon)$, esto es $\leqslant 3\varepsilon$.

Queda entonces probado el teorema.

#

Corolario 3.2.

Si $f \in H^s$, la sucesión $\{\theta_j f * \rho_j\}_j$, contenida en $\mathcal{D}$, converge hacia f en H^s.

Demostración

En primer lugar, si $f \in \mathcal{D}$, es $\theta_j f = f$ para $j \geqslant j_0$. Luego, del teorema 3.8, se deduce que la afirmación es cierta, en ese caso.

Si ahora $f \in H^s$, dada $g \in \mathcal{D}$, se tiene:

$$\|\theta_j f * \rho_j - f\|_{H^s} \leqslant \|\theta_j f * \rho_j - \theta_j g * \rho_j\|_{H^s} +$$

$$+ \|\theta_j g * \rho_j - g\|_{H^s} + \|g-f\|_{H^s}$$

De acuerdo con el teorema 3.6 y el ejercicio 3.7, es:

$$\|\theta_j(f-g) * \rho_j\|_{H^s} \leq \|\theta_j(f-g)\|_{H^s} \leq C\|f-g\|_{H^s},$$

con $C > 0$ independiente de j.

En total resulta, para $j \geq j_0$,

$$\|\theta_j f * \rho_j - f\|_{H^s} \leq (1+c)\|f-g\|_{H^s} + \|g * \rho_j - g\|_{H^s}.$$

De aquí se concluye enseguida lo afirmado. #

El teorema 3.6, es insuficiente en cuanto a la cantidad de funciones por las que asegura que puede multiplicarse el espacio H^s.

Por ejemplo, sea $P(x,D)$ un operador diferencial con coeficientes $a_\alpha(x)$ que son funciones indefinidamente derivables en todo R^n. Cabe preguntarse si podrá aplicarse $P(x,D)$ a distribuciones de H^s y si el resultado pertenecerá a algún otro H^t. En principio, si los coeficientes son funciones indefinidamente derivables cualesquiera, eso no siempre ocurrirá:

Sea $P(x,D) = e^{x^2} \frac{d}{dx}$, en R.

Como $e^{-x^2} \in S$, esa función pertenece a todos los espacios H^s; $P(x,D)e^{-x^2} = 2x$. Pero $2x$, no puede pertenecer a ningún espacio H^s (ver ejercicio 3.3. c)).

Agregando una hipótesis a las funciones a_α, es posible obtener la misma conclusión del teorema 3.6:

<u>Teorema 3.9.</u>

Si $[|s|]$ indica la parte entera de $|s|$, dada una función φ que admite derivadas continuas y acotadas en R^n de órdenes

$\leqslant [|s|] + 1$, la aplicación

$$H^s \to H^s$$
$$f \to \varphi f$$

Está definida y es continua. Exactamente, verifica la acotación:

$$\|\varphi f\|_{H^s} \leqslant C \sup_{\substack{x\in R^n \\ |\alpha|\leqslant[|s|]+1}} |D^\alpha \varphi(x)| . \|f\|_{H^s}$$

Demostración

Cuando s es un entero, el resultado se prueba usando la caracterización del espacio H^s que provee el teorema 3.5 (ver ejercicio 3.6).

El caso general puede obtenerse mediante un resultado de interpolación que será omitido (ver [13]). #

Del teorema 3.9, resulta que si los coeficientes del operador de orden m $P(x,D)$, son indefinidamente derivables, con derivadas acotadas en R^n hasta un orden adecuado, la aplicación

$$H^s \to H^{s-m}$$
$$f \to P(x,D)f$$

está definida y es continua.

Otra situación que falta contemplar, es que, en general, un operador diferencial $P(x,D)$, está definido sólo en cierto abierto $U \subset R^n$. Habrá que definir entonces los espacios de Sobolev sobre abiertos para poder trabajar con esos operadores.

Definición 3.3.

Dados $U \subset R^n$ abierto, $l = 1,2,\ldots$, se define

$$H^{l}(U) = \{f \in L^2(U)/D^{\alpha}f \in L^2(U) \quad \text{para} \quad |\alpha| \leq l\}$$

$H^{l}(U)$ resulta un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f,g)_{H^{l}(U)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq l} (D^{\alpha}f, D^{\alpha}g)_{L^2(U)}$$

(Ver ejercicio 3.8.)

También se define el espacio de Sobolev $H^s(U)$, de orden $s \in R$. Esto puede hacerse, por ejemplo, mediante técnicas de interpolación, que serán omitidas (ver [14]).

Definición 3.4.

Dados $U \subset R^n$ abierto, $s \in R$, se define

$$H^s_{loc}(U) = \{f \in \mathcal{D}'(U)/\varphi f \in H^s, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U)\}.$$

Es posible dar a $H^s_{loc}(U)$ una estructura de espacio de Fréchet, mediante la familia de seminormas

$$P_{\varphi}(f) = \|\varphi f\|_{H^s}, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

(ver ejercicio 3.11)

Definición 3.5.

Dados $U \subset R^n$ abierto, $s \in R$, se define

$$H^s_{comp}(U) = \{f \in \mathcal{E}'(U)/f \in H^s\}.$$

Si para cada $K \subset U$ compacto se considera

$$H^s(K) = \{f \in H^s_{comp}(U)/\text{sop } f \subset K\},$$

$H^s(K)$ resulta un subespacio cerrado de H^s, con lo cual sobre $H^s(K)$ se tiene una estructura de espacio de Hilbert, que es simplemente la inducida por H^s.

Es claro que $H^s_{comp}(U) = \bigcup_K H^s(K)$, $K \subset U$ compacto.
Puede darse a $H^s_{comp}(U)$ la estructura topológica de límite inductivo de la de los espacios $H^s(K)$, de manera análoga a lo que se hace con $\mathcal{D}(U)$, a partir de sus subespacios $\mathcal{D}(K)$ (ver [ ]).
Así, una sucesión $\{f_j\} \subset H^s_{comp}(U)$ será convergente, hacia cierta $f \in H^s_{comp}(U)$, si $f_j, f \in H^s(K)$, para algún K y $f_j \to f$ en H^s.
Tanto $H^s_{comp}(U)$ como $H^s_{loc}(U)$, resultan espacios reflexivos; usando la dualidad entre H^s y H^{-s}, puede probarse que $H^{-s}_{comp}(U)$ y $H^s_{loc}(U)$, son duales uno del otro.
De la misma manera que en el caso de $\mathcal{D}(U)$, para probar que una aplicación definida sobre $H^s_{comp}(U)$ es continua, bastará comprobar que restringida a cada subespacio $H^s(K)$, lo es.
Hasta aquí se dio algo sobre la teoría hilbertiana de los espacios de Sobolev, en el sentido de que todas las propiedades se apoyaron en el espacio de Hilbert L^2. También es posible definir esos espacios a partir de L^p (ver ejercicio 2.15).
Para la teoría de los espacios de Sobolev, ver [10], [13], [14], por ejemplo.
En lo que sigue, se darán algunos resultados sobre operadores diferenciales, en los cuales se emplean los espacios de Sobolev.
Según se mencionó en §1, todo operador $P(x,D)$ elíptico en cierto abierto U, admite allí una parametriz bilátera seudolocal, que pertenece al espacio de los operadores llamados seudodiferenciales.
Si K es esa parametriz, se tiene:

$$KP(x,D)f = f + Rf, \quad f \in \mathcal{E}'(U),$$

donde R es un operador regularizante.

Puede probarse (ver [16]), que los operadores K y R tienen las siguientes propiedades:

Si $P(x,D)$ es de orden m, K aplica continuamente $H^{s}_{loc}(U)$ en $H^{s+m}_{loc}(U)$.

R aplica $H^{t}_{loc}(U)$ en $H^{r}_{loc}(U)$, para $t,r \in R$ cualesquiera

De esta situación, se deduce el siguiente resultado de regularidad:

Sean $f,g \in \mathcal{D}'(U)$, tales que

$$P(x,D)f = g \quad \text{en} \quad U.$$

Se sabe que $g \in H^{s}_{loc}(U)$, para cierto $s \in R$. Entonces, puede concluirse que $f \in H^{s+m}_{loc}(U)$.

En particular, de acuerdo con el corolario 3.1, resulta que si $g \in C^{k+[n/2]+1}(U)$, entonces f debe pertenecer a $C^{k+m}(U)$.

Para obtener estas conclusiones, no es necesario que el operador $P(x,D)$ sea elíptico; basta que admita parametrices izquierdas seudolocales que sean operadores seudodiferenciales.

En el caso de operadores con coeficientes constantes, los resultados vistos en §1, permitirán demostrar algún resultado del tipo anterior.

En efecto, dado un operador $P(D)$ de orden m elíptico, se construyó una parametriz K de la forma $\overline{\mathcal{F}}\left[\dfrac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right] *$.

De acuerdo con los ejercicios 1.10 y 3.7, resulta que $\mathcal{F}\left[\dfrac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right] \in A^{m}$. Por lo tanto, según ese ejercicio 3.7, K se extiende a una aplicación continua de H^s en H^{s+m}, $s \in R$.

Por otra parte, dada $f \in E'$, es:

$$K\,P(D)f = f - \overline{\mathcal{F}}[\chi] * f.$$

$-\overline{\mathcal{F}}[\chi] *$, es un regularizante analítico. Además, como $\chi \in \mathcal{D}$, resulta que $\overline{\mathcal{F}}[\chi] \in A^t$, para todo $t \in R$.

En consecuencia, $-\overline{\mathcal{F}}[\chi] *$ puede extenderse a una aplicación continua de H^s en H^r, para $s, r \in R$ cualesquiera.

Esto permite concluir el siguiente resultado de regularidad:

Sean f, g distribuciones tales que

$$P(D)f = g \quad \text{en} \quad R^n$$

Entonces, si $g \in H^s$, se concluye que $f \in H^{s+m}$.

En particular, si $s > n/2$, con lo cual g será continua y nula en el infinito, resulta que f debe admitir m derivadas continuas y nulas en el infinito.

También es posible obtener en estos espacios, resultados de existencia (ver [8], capítulo 5), para operadores $P(D)$.

Finalmente, se hará una brevísima referencia sobre la aplicación de estos espacios de Sobolev, a la resolución de ciertos problemas asociados a operadores diferenciales.

En §2, se trató el problema de Cauchy o de valores iniciales; no es éste, por cierto el único de interés que se plantea.

Por ejemplo, puede mencionarse el <u>problema de Dirichlet</u> o de <u>valores en el contorno</u>.

Vagamente enunciado, consiste en hallar una solución de la ecuación $P(x,D)f = g$ en cierto abierto U, conocidos los valores que debe tomar f en la frontera de U.

En §2, se observó que dado un operador elíptico, los datos debían ser analíticos, para que el problema de Cauchy asociado a ese operador, admitiera solución. Esto muestra que en cierto sentido, no es un problema natural de ser planteado para operadores elípticos, pues requiere datos con mucha regularidad. En cambio, teniendo en cuenta las propiedades de existencia, unicidad y regularidad de la solución, dependencia de los datos, etc. que se conocen, puede decirse que el problema de Dirichlet y otros de formulación semejante, son los problemas naturales que pueden asociarse a un operador elíptico. Precisamente, uno de los métodos conocidos para el estudio de estos problemas, es el empleo de técnicas de espacios de Hilbert, las cuales incluyen el uso de los espacios de Sobolev (ver, por ejemplo, [10], [14]).

Ejercicios

3.1.

Probar que la inclusión de $\mathcal{S}$ en H^s es continua.

3.2.

Dado m = 1,2,...., demostrar que

$$H^m = \{f \in L^2 / D^\alpha f \in L^2 \quad \text{para} \quad |\alpha| = m\} =$$

$$= \{f \in H^{m-1} / \frac{\partial}{\partial x_j} f \in H^{m-1} \quad \text{para} \quad 1 \leq k \leq n\},$$

con normas equivalentes:

$$|\| f \||_{H^m} = \| f \|_{L^2} + \sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha f \|_{L^2}$$

$$|\| f \||_{H^m} = \| f \|_{H^{m-1}} + \sum_{j=1}^{n} \| \frac{\partial f}{\partial x_j} \|_{H^{m-1}}$$

3.3.

a) Si $s_1 \geq s_2$, probar que hay una inyección continua y densa $H^{s_1} \subset H^{s_2}$, que es estricta si $s_1 > s_2$.

b) Demostrar que la aplicación

$$H^s \xrightarrow{D^\alpha} H^{s-|\alpha|}$$

$$f \rightarrow D^\alpha f$$

está definida y es continua.

c) Si P(x) es un polinomio no nulo, probar que no puede pertenecer a ningún espacio H^s.

3.4.

Dada $f \in \mathcal{E}'$, si el orden de T es $\leq m$ y $s < -n/2$, probar que $T \in H^{s-m}$.

Concluir que $\mathcal{E}'$ está contenido en $\bigcup_s H^s$.

3.5.

En las condiciones del corolario 3.1, probar que la inclusión de H^s en $\mathcal{C}_0^m$ es densa.

3.6.

Demostrar el teorema 3.9 para s entero.

3.7.

Sea $A^t = \{f \in \mathcal{S}'/(1+|\xi|^2)^{t/2} \hat{f} \in L^\infty\}$, dado $t \in R$.

Probar que la aplicación bilineal

$$\mathcal{D} \times A^t \rightarrow H^{s+t}$$

$$(f,g) \rightarrow f * g$$

está definida y puede extenderse a una aplicación θ de $H^s \times A^t$ en H^{s+t} que cumple:

$$\|\theta(f,g)\|_{H^{s+t}} \leqslant \|(1+|\xi|^2)^{t/2}\hat{g}\|_{L^\infty} \cdot \|f\|_{H^s}$$

3.8.

a) Probar que el espacio $H^l(U)$ introducido en la definición 3.3, es un espacio de Hilbert, con el producto escalar allí indicado.

b) Demostrar que $H^l(U)$ es un espacio local.

3.9.

Si los coeficientes del operador $P(x,D)$ de orden m, admiten derivadas continuas y acotadas en el abierto $U \subset R^n$ hasta el orden $l \geqslant m$, probar que $P(x,D)$ define una aplicación continua de $H^l(U)$ en $H^{l-m}(U)$

3.10.

Para m = 0,1,2,..., comparar los espacios $H^m(U)$, $H^m_{loc}(U)$ y $H^m_{comp}(U)$.

3.11.

Probar que $(H^s_{loc}(U), \{P_\varphi\})$, es un espacio de Fréchet.

Sugerencia

Sea $K_j \subset U$ compacto, tal que $K_j \subset \overset{o}{K}_{j+1}$, $\bigcup_j K_j = U$.

Sea $g_j \in \mathcal{D}(U)$ con $g_j = 1$ en K_j, $0 \leqslant g_j \leqslant 1$.

Considerar la familia de seminormas $\{P_{g_j}\}_j$

3.12.

Probar que los espacios $H^s_{loc}(U)$ y $H^s_{comp}(U)$ son locales

3.13.

Sea $P(x,D)$ un operador diferencial de orden m, con coeficientes indefinidamente derivables en cierto abierto $U \subset R^n$.

Probar que $P(x,D)$ aplica continuamente $H^s_{comp}(U)$ en $H^{s-m}_{comp}(U)$ y $H^s_{loc}(U)$ en $H^{s-m}_{loc}(U)$.

3.14.

Probar que hay una inyección continua y densa de $C^k(U)$ en $H^s_{loc}(U)$ para $k \geq s$, dando a $C^k(U)$ la topología de la convergencia uniforme de cada derivada de orden $\leq k$, en los compactos de U.

3.15.

Dados $s \in R$, $1 < p < \infty$, se define el espacio $H^{s,p}$ como

$$\{f \in S'/\overline{F}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}] \in L^p\}.$$

Probar que $H^{s,p}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|f\|_{H^{s,p}} = \|\overline{F}[(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}]\|_{L^p}$$

3.16.

Dados $s \in R$, $1 < p < \infty$, obtener un análogo del teorema 3.3 para el espacio $H^{s,p}$

3.17.

Dados $m \in Z$, $1 < p < \infty$, obtener un análogo del teorema 3.5 para el espacio $H^{m,p}$

3.18.

Probar las siguientes igualdades

$$\mathcal{D}(U) = \bigcap_s H^s_{comp}(U)$$

$$\mathcal{E}(U) = \bigcap_s H^s_{loc}(U)$$

$$\mathcal{E}'(U) = \bigcup_s H^s_{comp}(U)$$

$$\mathcal{D}'^{(f)}(U) = \bigcup_s H^s_{los}(U)$$

donde $\mathcal{D}'^{(f)}(U)$ indica las distribuciones sobre el abierto U, de orden finito.

Referencias

[1]. Lewy, H.: "An example of a smooth linear partial differential equation without solution". Annals of Math., vol.66 (1957), pp. 155-158.

[2]. Hörmander, L.: "Linear partial differential operators". Springer-Verlag, 1969.

[3]. Peetre, J.: "Rectification a l'article: Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels" Math. Scandinavica, vol. 8 (1960), pp. 116-120.

[4]. Schwartz, L.: "Théorie des noyaux". Proc. International Congress of Mathematicians, (1950) EEUU, pp. 220-230.

[5]. Nirenberg, L.: "Pseudo-differential operators". Proc. Symp. Pure Math. AMS, vol. 16, (1968), pp. 149-167.

[6]. Hörmander, L.: "On the division of distribubtions by polynomials". Ark. Mat. vol. 3 (1958), pp. 555-568.

[7]. Gunning, H; Rossi, R.: "Analytic functions of several complex variables". Prentice-Hall, 1965.

[8]. Trèves, F.: "Linear partial differential equations with constants coefficients". Gordon and Breach, 1966.

[9]. Dieudonné, J.: "Foundations of modern analysis". Academic Press, 1960.

[10]. Trèves, F.: "Basic linear partial differential equations" Academic Press, 1975.

[11]. Mizohata, S.: "The theory of partial differential equations". Cambridge, 1973.

[12]. Calderón, A.P.: "Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations". Amer. J. of Math., vol 80 (1958), pp. 16-36

[13]. Calderón,A.P.: "Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions". Proc. of Symp. Pure Math. AMS, vol. 4 (1961), pp. 33-49.

[14]. Lions,J.L.; Magenes,E.: "Problemes aux limites non homogenes et applications", vol. 1. Dunod, 1968.

[15]. Garsoux,J.: "Espaces vectoriels topologiques et distributions". Dunod, 1963.

[16]. Treves,F.: "Introduction to the theory of pseudo-differential operators and Fourier integrals". Simposio de análisis reunido en la Universidad Federal de Pernanbuco, 1972.