ISSN 1853-709X

Fascículo 29

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Susana Elena Trione

La integral de Riemann-Liouville

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 29

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 29

La integral de Riemann-Liouville

por

Susana Elena Trione

1981

Departamento de Matemática,
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales,
Universidad de Buenos Aires;

Instituto Argentino de Matemática,
Consejo Nacional de Investigaciones
Científicas y Técnicas,
Buenos Aires, Argentina.

Indice

Capítulo III

La integral de Riemann-Liouville en el caso unidimensional

Capítulo IV

La integral de Riemann-Liouville en el espacio euclídeo n-dimensional

Introducción

M'ilumino

d'immenso

Guiseppe Ungaretti

Este volumen reproduce un curso dictado en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires durante el primer cuatrimestre de 1979.

Trata principalmente el estudio de distribuciones dependientes de un parámetro, las distribuciones de Marcel Riesz y la integral de Riemann-Liouville. Para ello he seguido a Gelfand (cf. I. M. Gelfand and G. E. Shilov, Generalized Functions, Vol. I, Academic Press, New York, 1964), M. Riesz (cf. Marcel Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le probléme de Cauchy, Acta Mathematica (81), 1-223, 1949) y González Domínguez (Alberto González Domínguez, Notas manuscritas).

Considero conveniente para el lector exponer con detalle el contenido de esta monografía.

Capítulo I

Comienza con la definición y los principales conceptos de una distribución dependiente de un parámetro. Continúa con el estudio de las distribuciones x_+^λ, x_-^λ, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$, $x_+^\lambda \log^m x_+$, la evaluación de sus derivadas, sus desarrollos en series de Taylor y de Laurent y sus regularizaciones.

Luego se definen dos distribuciones $(x+i0)^\lambda$ y $(x-i0)^\lambda$ que tienen en común con las regularizaciones $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ y $\frac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ la importante propiedad de ser funciones enteras de α. Estas dos distribuciones tienen importantes aplicaciones en la solución de problemas de valores iniciales para ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes.

Veremos después que las distribuciones $\frac{x_\pm^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ y $(x\pm i0)^\lambda$ están íntimamente conectadas, vía las transformadas de Fourier o de Laplace.

Este capítulo finaliza con la observación que las distribuciones $(x\pm i0)^{-1}$ son nada más que las fórmulas de Plemelj trasladadas al lenguaje de las distribuciones y esto explica el por qué son tan importantes.

Capítulo II

Está dedicado a las distribuciones de Marcel Riesz. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto de R^n y $r = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. El capítulo empieza con el estudio de la distribución $r^{\alpha-n}$, donde α es un número complejo y n es la dimensión del espacio, en el parágrafo 2 se da la expresión de su residuo para $\alpha = -2m$, $m = 0,1, \ldots$. Como una consecuencia de esta fórmula se obtiene una generalización de una fórmula clásica debida a Pizetti.

El parágrafo 3 trata la distribución paramétrica $R_\alpha(x) = r^{\alpha-n}/H_n(\alpha)$ donde $H_n(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$, llamada"distribución elíptica de Marcel Riesz" y estudia sus importantes propiedades, a saber, $R_{-2m}(x) = (-1)^m \Delta^m \{\delta\}$, donde Δ^m es el operador de Laplace iterado m veces, $m = 0,1,\ldots$ y δ es la medida de Dirac; $R_{-2m} * f(x) = (-1)^m \Delta^m \{f(x)\}$ si $f(x)$ es una función perteneciente a $C^{2m}(R^n)$; $R_\alpha * R_\beta(x) = R_{\alpha+\beta}(x)$ si α, β y $\alpha+\beta$ son complejos diferentes de $n+2h$, $h = 0,1,\ldots$; $\Delta^k R_\alpha(x) = (-1)^k R_{\alpha-2k}(x)$, $k = 0,1,2, \ldots,$ $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$. Se prueba también que la transformada de Fourier de $R_\alpha(x)$ es, para $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1,\ldots,$ la distribución $|y|^{-\alpha}$, donde $|y|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

Finaliza el capítulo con la obtención del desarrollo de $R_\alpha(x)$ en un entorno del punto $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$ y se prueba que el residuo de $R_\alpha(x)$ en $\alpha = n+2h$ es solución de la ecuación homogénea de Laplace iterada $\frac{n+2h}{2}$ veces (n par, $h = 0,1,\ldots$) y que $(-1)^{\frac{n+2h}{2}}$ veces el término independiente del desarrollo en serie de Laurent (llamado "parte finita") de $R_\alpha(x)$ para $\alpha = n+2h$, m par, $h = 0,1,\ldots$ es una solución elemental de la ecuación de Laplace iterada de orden $\frac{n+2h}{2}$.

Capítulo III

Se estudia acá la integral de Riemenn-Liouville unidimensional definida por la convolución de una función $f(x)$ continua y nula para $x<0$ y el núcleo singular de Riemann-Liouville: $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ y denotada por $I^\alpha f$ (cf. parágrafos 1, 2, 3 y 7). $I^\alpha f$ es una función analítica de α si Re $\alpha > 0$. El hecho que $I^\alpha f$ pueda ser continuada analíticamente para otros valores de α desempeña un importante papel en las aplicaciones de la integral de Riemann-Liouville a la integración de ecuaciones diferenciables. Dicha continuación analítica puede realizarse de dos maneras diferentes. A ellas están dedicados los parágrafos 4 y 5. El parágrafo 6 da un ejemplo de la aplicación de $I^\alpha f$ a la solución de ecuaciones diferenciables con condiciones iniciales

El parágrafo 8 estudia las integrales y derivadas de orden racional, se observa que la integral indefinida, n veces i terada de una función $F(t)$ nula para $t < 0$, puede ser expresada por medio de una integral simple y ello permite introducir el importante concepto de integral iterada de orden racional, o más general, de integral de orden complejo arbitrario siempre que el complejo tenga parte real positiva.

Finaliza este capítulo con un teorema de aproximación que afirma la validez de la siguiente fórmula

$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^A f(t) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt = F(0)$, cuando α es un número positivo arbitrario, $F(t)$ es una función continua y $A > 0$.

<u>Capítulo IV</u>

La integral de Riemann-Liouville unidimensional puede generalizarse al espacio n-dimensional en dos direcciones: con la métrica euclídea y con la métrica lorentziana.

En el parágrafo 1 se trata la extensión euclídea n-dimensional. Vale la siguiente fórmula de composición $I_\alpha(I_\beta f(P)) = I_{\alpha+\beta} f(P)$ (cf. parágrafo 2), donde $I_\alpha f(P)$ es, por definición el potencial generalizado de orden α o potencial elíptico de orden racional de Marcel Riesz, definido por la fórmula

$I^\alpha f(P) = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{R^n} f(Q) \cdot r_{PQ}^{\alpha-n} dQ$, donde

$P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $Q = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ son dos puntos pe tenecientes a $\mathbf{R}^n$, $r_{PQ} = r_{QP} = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^2 \right]^{1/2}$,

$$H_n(\alpha) = \frac{2^{\alpha}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\, \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}, \quad y \quad \mathrm{Re}\,\alpha > 0.$$

El potencial newtoniano y el potencial logarítmico se estudian en los parágrafos 3 y 4.

Capítulo V

La generalización de la integral de Riemann-Liouville al espacio n-dimensional lorentziano, que origina la integración hiperbólica, es estudiada en este capítulo. La principal dificultad consiste en probar que $I_0 f(P)$ es el operador identidad. Damos acá una versión de ese hecho que simplifica considerablemente la demostración debida a M. Riesz, ello es debido a la adopción de un tipo particular de superficie de integración.

Agradezco afectuosamente a la señorita Claudia Clemares por su esmeradísimo trabajo de mecanografiado.

Susana Elena Trione

Buenos Aires, Argentina.

Noviembre de 1980.

Capítulo I

Distribuciones dependientes de un parámetro

I.1. Definiciones

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbf{R}^n$ y $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$.

Sea $\mathcal{D}$ el espacio vectorial de las funciones complejas $\phi(x)$, infinitamente derivables y con soporte compacto. Con $\mathcal{D}'$ denotamos el dual de $\mathcal{D}$, es decir, el espacio de las funcionales continuas en $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}'$ es, por definición, el espacio de las <u>distribuciones</u> en $\mathcal{D}$.

Sea $T(x) \in \mathcal{D}'$ y $\phi(x) \in \mathcal{D}$, con $< T, \phi >$ indicamos

$$< T, \phi > \triangleq \int_{\mathbf{R}^n} T(x)\phi(x)\, dx . \qquad (I,1;1)$$

Sea α un parámetro que toma valores en un conjunto abierto $\mathbf{A}$ del plano complejo $\mathbf{C}$.

A cada valor de $\alpha \in \mathbf{A}$ le hacemos corresponder una distribución $T_\alpha(x)$.

Para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$,

$$P_{\phi}(\alpha) \triangleq \langle T_{\alpha}, \phi \rangle, \tag{I,1;2}$$

define una <u>función ordinaria</u> de α .

Diremos entonces que $T_{\alpha}(x) \doteq T(\alpha)$ es una <u>distribución dependiente de un parámetro</u>.

Llamaremos L al <u>límite</u> de $T(\alpha)$ cuando $\alpha \to \alpha_0$, si

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} P_{\phi}(\alpha) = \langle L , \phi \rangle , \tag{I,1;3}$$

para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$.

Es decir, si para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$, es

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \langle T(\alpha), \phi \rangle = \langle \lim_{\alpha \to \alpha_0} T(\alpha), \phi \rangle. \tag{I,1;4}$$

$T(\alpha)$ es una distribución dependiente de un parámetro <u>continua</u> en $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{A}$, si la función ordinaria $P_{\phi}(\alpha)$ es continua en $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{A}$, para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$.

Equivalentemente, diremos que $T(\alpha)$ es continua en $\alpha = \alpha_0$ si

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} T(\alpha) = T(\alpha_0). \qquad (I,1;5)$$

Sea $T(\alpha)$ una distribución dependiente de un parámetro continua en $\alpha \in \mathbf{A}$ y sea α_0 un punto límite de $\mathbf{A}$ en el cual $T(\alpha)$ no está definida. Deseamos extender la definición de $T(\alpha)$ a α_0 usando la continuidad.

Vale la siguiente proposición (cf. [3], p. 147): "Una condición necesaria y suficiente para la extensión de $T(\alpha)$ a α_0 es que sea posible extender la definición de cada una de las funciones numéricas $P_\phi(\alpha)$ por continuidad a α_0."

$T(\alpha)$ es una distribución dependiente de un parámetro <u>derivable</u> en $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{A}$ si $P_\phi(\alpha)$ es derivable en $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{A}$, para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$.

O sea, $T(\alpha)$ es derivable en $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{A}$, si y sólo si existe el siguiente límite, para cada $\phi(x) \in \mathcal{D}$,

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{P_\phi(\alpha) - P_\phi(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} = \frac{d\, P_\phi(\alpha_0)}{d\alpha}. \qquad (I,1;6)$$

Llamaremos a

$$\frac{\partial T(\alpha_0)}{\partial \alpha} \triangleq \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{T(\alpha)-T(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0} \qquad (I,1;7)$$

la derivable de $T(\alpha)$ con respecto a $\alpha_0 \in A$. Las derivadas de mayor orden se definen de manera similar.

Si $\frac{\partial T(\alpha)}{\partial \alpha}$ existe para todo $\alpha \in \mathbf{A}$, diremos que $T(\alpha)$ es diferenciable con respecto a $\alpha \in A$.

Una distribución $T(\alpha)$ dependiente de un parámetro es analítica con respecto a $\alpha \in \mathbf{A}$ si y sólo si es diferenciable con respecto a $\alpha \in \mathbf{A}$.

De manera equivalente, $T(\alpha)$ es una distribución dependiente de un parámetro analítica de $\alpha \in \mathbf{A}$ si $P_\phi(\alpha)$ es una función analítica de $\alpha \in \mathbf{A}$, para toda $\phi(x) \in \mathcal{D}$.

Sea $T(\alpha)$ analítica de $\alpha \in \mathbf{A}$. Entonces la función ordinaria $P_\phi(\alpha)$ es analítica y, por lo tanto, podemos obtener su serie de Taylor en un entorno de $\alpha_0 \in \mathbf{A}$. Tenemos así

$$<T(\alpha), \phi> \; = \; P_{\phi}(\alpha) \; = \; P_{\phi}(\alpha_0) + (\alpha-\alpha_0)\, \frac{dP_{\phi}(\alpha_0)}{d\alpha} \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha_0)^2 \, \frac{d^2 P_{\phi}(\alpha_0)}{d\alpha^2} + \ldots \; =$$

$$= <T(\alpha_0), \phi> + \; (\alpha-\alpha_0) < \frac{\partial T(\alpha_0)}{\partial\alpha}, \phi > +$$

$$+ \; \frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha_0)^2 < \frac{\partial^2 T(\alpha_0)}{\partial\alpha^2}, \phi > + \; \ldots \; =$$

$$= < T(\alpha_0) + (\alpha-\alpha_0)\, \frac{\partial T(\alpha_0)}{\partial\alpha} \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha_0)^2 \, \frac{\partial^2 T(\alpha_2)}{\partial\alpha^2} + \; \ldots \; , \phi > .$$

Es decir,

$$T(\alpha) = T(\alpha_0) + (\alpha-\alpha_0)\, \frac{\partial T(\alpha_0)}{\partial\alpha} + \frac{1}{2}\,(\alpha-\alpha_0)^2\, \frac{\partial^2 T(\alpha_0)}{\partial\alpha^2} + \ldots, \qquad (I,1;8)$$

que es el <u>desarrollo en serie de Taylor</u> de $T(\alpha)$ en un entorno de $\alpha_0 \in$ **A**.

Sean $T(\alpha)$ y $S(\alpha)$ dos distribuciones analíticas dependientes de un parámetro definidas en **A**, que coinciden en algún subconjunto $A_1 \subset \mathbf{A}$ que tiene un punto límite en **A**, entonces coinciden para todo $\alpha \in \mathbf{A}$.

Efectivamente, las funciones $P_\phi(\alpha) = \langle T(\alpha), \phi \rangle$ y $R_\phi(\alpha) = \langle S(\alpha), \phi \rangle$, para cualquier $\phi(x) \in \mathcal{D}$, coinciden para todo $\alpha \in \mathbf{A}$ por la unicidad de la prolongación analítica.

Nos basaremos en la aserción anterior para introducir el <u>método de prolongación analítica</u> (cf. [3], p. 150):

"Sea $T(\alpha)$ analítica en **A** tal que todas las funciones ordinarias $P_\phi(\alpha) = \langle T(\alpha), \phi \rangle$ pueden ser prolongadas analíticamente a una región $B \supset \mathbf{A}$. Entonces, para cualquier $\alpha \in B$, $T(\alpha)$ puede ser prolongada analíticamente a B".

Observemos que la prolongación analítica de una distribución dependiente de un parámetro puede aplicarse también, como en el caso de la prolongación analítica de funciones ordinarias, o funciones con singularidades aisladas (polos o singularidades esenciales) o a funciones multiformes.

Sea $T(\alpha)$ una distribución <u>analítica</u> dependiente de un parámetro o sea α_0 un <u>punto singular aislado</u>.

La función ordinaria $P_\phi(\alpha) = \langle T(\alpha), \phi \rangle$ es, por lo tanto, a nalítica y tiene en α_0 un punto singular aislado, entonces, puede desarrollarse en serie de Laurent en un entorno de α_0. Resulta así

$$< T(\alpha), \phi > = P_\phi(\alpha) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu(\phi)(\alpha-\alpha_0)^\nu, \qquad (I,1;9)$$

donde los $A_\nu(\phi)$ están dados por las fórmulas integrales de Cauchy:

$$A_\nu(\phi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{P_\phi(\alpha)}{(\alpha-\alpha_0)^{\nu+1}}\, d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{<T(\alpha), \phi>}{(\alpha-\alpha_0)^{\nu+1}}\, d\alpha =$$

$$= < A_\nu, \phi > , \qquad (I,1;10)$$

$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

y Γ es una curva dentro de la región de analiticidad de $T(\alpha)$ con la singularidad α_0 contenida en su interior.

De (I,1;9) y (I,1;10), obtenemos

$$< T(\alpha), \phi > = < \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu(\alpha-\alpha_0)^\nu , \phi> , \qquad (I,1;11)$$

equivalentemente,

$$T(\alpha) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (\alpha - \alpha_0)^\nu , \tag{I,1;12}$$

donde los A_ν($\nu = 0, \pm 1, \ldots$) son funcionales fijos independientes de α , definidos por las fórmulas

$$A_\nu = \frac{1}{2\Pi i} \int_\Gamma \frac{T(\alpha)}{(\alpha-\alpha_0)^\nu} d\alpha . \tag{I,1;13}$$

La fórmula (I,1;12) es el desarrollo en serie de Laurent de la distribución dependiente de un parámetro $T(\alpha)$, en un entorno del punto singular aislado α_0.

El método de prolongación analítica permitirá ampliar el campo de definición de las distribuciones que estudiaremos en los capítulos siguientes.

I.2. La distribución $x_+^{\alpha-1}$

Sea x un punto de R^1 y λ un número complejo.

La función x_+^λ está definida por la fórmula

$$x_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (I,2;1)$$

Supongamos ahora que $\operatorname{Re}\lambda > -1$ y consideremos la correspondiente distribución dependiente de un parámetro λ definida por la fórmula

$$< x_+^\lambda , \phi > = \int_0^\infty x^\lambda \phi(x)\, dx = P_\phi(\lambda), \qquad (I,2;2)$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$.

$P_\phi(\lambda)$ es una función analítica de λ , su derivada respecto de λ es:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} P_\phi(\lambda) = \int_0^\infty x^\lambda \ln x\, \phi(x)\, dx. \qquad (I,2;3)$$

La distribución x_+^λ puede continuarse analíticamente a la región $\mathrm{Re}\,\lambda > -n-1$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots, -n$, ($n \in \mathbb{N}$, arbitrario: donde $\mathbb{N}$ designa, como es habitual, el conjunto de los enteros positivos) por medio de la fórmula, donde, por comodidad, escribimos $\lambda = \alpha -1$,

$$< x_+^{\alpha-1}, \ \phi > = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \ \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx \ +$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \ \phi(x) \ dx \ + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \ \frac{1}{\alpha+\nu} \ . \tag{I,2;4}$$

Esta fórmula es válida para $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$.

Supongamos ahora que

$$-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -(n-1) . \tag{I,2;5}$$

En este caso la fórmula (I,2;4) puede ser escrita de manera simple. En efecto, consideremos la integral

$$I = \int_1^{\infty} x^{\alpha+\nu-1} dx = -\frac{1}{\alpha+\nu} . \qquad (I,2;6)$$

Esta integral converge si

$$\alpha + \nu < 0. \qquad (I,2;7)$$

Si admitimos que vale (I,2;5), tenemos

$$\nu - n < \operatorname{Re}(\alpha+\nu) < \nu + 1 - n,$$

luego (I,2;6) vale si

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots , n-1. \qquad (I,2;8)$$

De (I,2;6) y (I,2;8) obtenemos, si (I,2;5) es válida que

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{1}{\alpha+\nu} = - \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(\nu)}(0) x^{\nu}}{\nu!} . \qquad (I,2;9)$$

Si reemplazamos (I,2;9) en (I,2;4) tenemos, para $-n < \operatorname{Re} \alpha < -n+1$,

$$< x_+^{\alpha-1}, \phi > = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\phi^{(\nu)}(0) x^\nu}{\nu!} \right\} dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu \phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \right\} dx. \tag{I,2;10}$$

Esta es la más simple expresión para $< x_+^{\alpha-1}, \phi(x) >$ que es válida cuando $-n < \operatorname{Re} \alpha < -n+1$.

I.3. Regularización de $x_+^{\alpha-1}$.

Expresaremos ahora la fórmula (I,2;10) de una manera diferente. La idea es obtener el desarrollo de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$ en el entorno del punto $\alpha = -(n-1)$.

Para ello procedemos como sigue. Escribamos (I,2;10) en la forma

$$<x_+^{\alpha-1}, \phi(x)> = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx -$$

$$- \int_1^\infty x^{\alpha-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) dx. \qquad (I,3;1)$$

Sabemos que

$$- \int_1^\infty x^{\alpha+(n-1)-1} dx = \frac{1}{\alpha+n-1}. \qquad (I,3;2)$$

Reemplazando (I,3;2) en (I,3;1), tenemos para

$$-n < \operatorname{Re} \alpha < -n+1,$$

$$< x_+^{\alpha} \,,\ \phi(x) > = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx \ +$$

$$+ \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^{\nu}}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx \ +$$

$$+ \frac{\dfrac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}}{\alpha + n - 1} \,. \qquad (I,3;3)$$

La fórmula (I,3;3) es el desarrollo de Laurent de la función $<x_+^{\alpha-1} \,,\ \phi(x)>$ en el entorno de $\alpha = -n+1$.

El primero y el segundo término del lado derecho de (I,3;3) convergen para $\alpha = -n+1$. Veamos ahora la región de convergencia de la parte regular, a saber,

$$\text{Reg}\ x_+^{\alpha-1} = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx \ +$$

$$+ \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^{\nu}}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx. \qquad (I,3;4)$$

COnsideremos el primer término del lado derecho de (I,3;4).

La integral es de la forma

$$\int_0^1 x^{\alpha+n-1}\, h(x)\, dx\,, \qquad \text{(I,3;5)}$$

donde $h(x)$ es finita en $x = 0$. Además, converge en el semiplano

$$\operatorname{Re} \alpha > -n. \qquad \text{(I,3;6)}$$

Ahora consideremos el dominio de convergencia del segundo término del lado derecho de (I,3;4).

Podemos escribir

$$\int_1^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^\nu}{\nu!}\, \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx =$$

$$= \int_1^\infty x^{\alpha-1}\, \phi(x)\, dx - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \int_1^\infty x^{\alpha+\nu-1}\, dx. \qquad \text{(I,3;7)}$$

El primer término del lado derecho de (I,3;7) converge para todo α , mientras que las integrales $\int_1^\infty x^{\alpha+\nu-1} dx$ ($\nu = 0,1,\ldots$ $\ldots, n-2$) convergen para

$$\mathrm{Re}\ \alpha < -\nu . \tag{I,3;8}$$

Luego el dominio común de las integrales es

$$\mathrm{Re}\ \alpha < -n+2. \tag{I,3;9}$$

La intersección de los hiperplanos (I,3;6) y (I,3;9) es la región de convergencia de $\mathrm{Reg}\ x_+^{\alpha-1}$, esto es,

$$-n < \mathrm{Re}\ \alpha < -n+2. \tag{I,3;10}$$

I.4. La distribución x_+^{-n}

Consideremos otra vez la funcional definida por la fórmula

(I,3;4). Podemos escribir esta funcional de modo un tanto diferente. Consideremos para ello la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \tag{I,4;1}$$

Escribamos

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx -$$

$$- \int_0^1 x^{\alpha-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0)\, dx. \tag{I,4;2}$$

Considerando (I,4;2) podemos escribir (I,3;4) como sigue

$$\operatorname{Reg} x_+^{\alpha-1} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx -$$

$$- \int_0^1 x^{\alpha-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \, dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-2} \frac{x^\nu}{\nu!} \phi^{(\nu)}(0) \right\} dx -$$

$$- \int_0^\infty x^{\alpha-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \, H(1-x) \, dx,$$

o; equivalentemente,

$$\operatorname{Reg} x_+^{\alpha-1} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0) - \dots - \frac{x^{n-2} \phi^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \right.$$

$$\left. - \frac{x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} H(1-x) \right\} dx. \qquad (I,4;3)$$

Esta es la expresión de $\operatorname{Reg} x_+^{\alpha-1}$ que deseábamos obtener

De particular interés es el valor de esta funcional para $\alpha = -n+1$:

$$\operatorname{Reg} x_+^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{Pf} \left\{ x_+^{\alpha-1} \right\}_{\alpha=-n+1} \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{Pf} x_+^{-n} , \qquad (I,4;4)$$

donde con Pf denotamos parte finita.

Poniendo $\alpha = -n+1$ en la fórmula (I,4;3) tenemos

$$\operatorname{Reg} x_+^{-n} = \operatorname{Pf} x_+^{-n} = \int_0^\infty x^{-n} \Big\{ \phi(x) - \phi(0) -$$

$$- x\,\phi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\,\phi^{(n-2)}(0) - \frac{x^{n-1}\,\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,H(1-x) \Big\}\, dx. \qquad (I,4;5)$$

Observemos que la distribución x_+^{-n}, $(n = 0,1,\ldots,)$ <u>no</u> es el valor de $x_+^{\alpha-1}$ para $\alpha = -n+1$; $x_+^{\alpha-1}$ tiene un polo en $\alpha = -n+1$ y entonces no existe en este punto.

Sin embargo, la distribución x_+^{-n} es, en cierto sentido, una generalización de la función ordinaria x_+^{-n}.

I.5. La derivada de x_+^{-n}

Calculemos al continuación la derivada de x_+^{-n}. Obtendremos

$$\frac{d}{dx}\, x_+^{-n} = -n\, x_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\, \delta^{(n)}(x). \tag{I,5;1}$$

En efecto, tenemos

$$< \frac{d}{dx}\, x_+^{-n},\ \phi(x) > = -< x_+^{-n},\ \phi'(x) > . \tag{I,5;2}$$

Además

$$< x_+^{-n},\ \phi'(x) > =$$

$$= \int_0^1 x^{-n} \left\{ \phi'(x) - \phi'(0) - x\,\phi''(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, \phi^{(n)}(0) \right\} dx +$$

$$+ \int_1^\infty x^{-n} \left\{ \phi'(x) - \phi'(0) - x\,\phi''(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\, \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx \stackrel{\Delta}{=}$$

$$\stackrel{\Delta}{=} I_1 + I_2 . \qquad (I,5;3)$$

Integremos por partes, primero I_1 , poniendo

$$x^{-n} = u \quad y \quad \left\{ \phi'(x) - \phi'(0) - , \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n)}(0) \right\} dx = dv,$$

y I_2 poniendo $x^{-n} = u$, $\Big\{ \phi'(x) - \phi'(0) - \dots -$

$$- \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \phi^{(n-1)}(0) \Big\} dx = dv.$$

Entonces

$$I_1 = uv\Big|_0^1 + \int_0^1 n\, x^{-n-1} \left\{ \phi(x) - \phi'(0)x - \dots , - \frac{x^n}{n!} \phi^{(n)}(0) \right\} dx$$

$$(I,5;4)$$

y

$$I_2 = uv\Big|_1^\infty + \int_1^\infty n\, x^{-n-1} \left\{ \phi(x) - \phi'(0)x - \dots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx$$

$$(I,5;5)$$

Luego

$$I_1 + I_2 = uv\Big|_0^1 + uv\Big|_1^\infty + \int_0^1 n x^{-n-1} \Big\{ \phi(x) - \phi(0) - \ldots - \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(0) \Big\} dx + \int_1^\infty n x^{-n-1} \Big\{ \phi(x) - \phi(0) - \ldots - \frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \Big\} dx = uv\Big|_0^1 + uv\Big|_1^\infty + \langle n\, x_+^{-n-1}, \phi(x) \rangle . \qquad (I,5;6)$$

Además

$$uv\Big|_0^1 = x^{-n} \Big\{ \phi(x) - \phi'(0)x - \ldots - \frac{1}{n!} x^n \phi^{(n)}(0) \Big\} \Big|_0^1 =$$

$$= \phi(1) - \phi'(0) - \ldots - \frac{1}{n!} \phi^{(n)}(0) \qquad (I,5;7)$$

y

$$uv\Big|_1^\infty = x^{-n} \Big\{ \phi(x) - \phi'(0)x - \ldots - \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0) \Big|_1^\infty =$$

$$= -\Big\{ \phi(1) - \phi'(0) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \Big\}. \qquad (I,5;8)$$

Sale de (I,5;7) y (I,5;8) que

$$uv\Big|_0^1 + uv\Big|_1^\infty = -\frac{1}{n!}\,\phi^{(n)}(0) = -<\frac{1}{n!}\,(-1)^n\,\delta^{(n)}(x),\ \phi(x)>. \qquad (I,5;9)$$

Substituyendo (I,5;9) en (I,5;6) resulta

$$I_1 + I_2 = < n\,x_+^{-n-1} - \frac{1}{n!}\,(-1)^n\,\delta^{(n)}(x),\ \phi(x)> . \qquad (I,5;10)$$

De donde, finalmente, tenemos de (I,5;2) y (I,5;10)

$$\frac{d}{dx}\,x_+^{-n} = -n\,x_+^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\,\delta^{(n)}(x),$$

que es, justamente, el resultado (I,5;1)▪

I.6. La distribución $x_+^{\alpha-1}\log x_+$

Partiremos de la fórmula

$$<x_+^{\alpha-1},\ \varphi(x)> = \int_0^1 x^{\alpha-1}\Big\{\varphi(x)-\varphi(0)-x\varphi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\phi^{(n-1)}(0) \Big\} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \phi(x)\, dx + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{1}{\alpha+\nu} , \qquad (I,6;1)$$

válida para $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Diferenciando ambos miembros de (I,6;1) con respecto a $\alpha(\neq 0, -1, \ldots)$, obtenemos

$$< x_+^{\alpha-1} \log x_+ , \phi(x) > = \int_0^1 x^{\alpha-1} \log x \Big\{ \phi(0) - \ldots -$$

$$- \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \Big\} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \log x \; \phi(x)\, dx +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1) \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{1}{(\alpha+\nu)^2} . \qquad (I,6;2)$$

Si diferenciamos m veces, con respecto a α , obtenemos

$$< x_+^{\alpha-1} \log^m x_+ , \phi(x) > = \int_0^1 x^{\alpha-1} \log^m x \left\{ \phi(x) - \phi(0) - \right.$$

$$\left. - x\phi'(0) - \ldots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1} \log^m x \, \phi(x) \, dx +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} (-1)^m m! \frac{1}{(\alpha+\nu)^{m+1}} . \qquad (I,6;3)$$

I.7. El desarrollo de Taylor de $x_+^{\alpha-1}$

Supongamos ahora que α_0 es un punto regular ($\neq 0,-1,-2,\ldots$).

La correspondiente expresión de Taylor de $x_+^{\alpha-1}$ en el entorno de α_0 es

$$x_+^{\alpha-1} = x_+^{\alpha_0-1} + (\alpha+\alpha_0)\frac{d}{d\alpha}\left\{x_+^{\alpha-1}\right\}_{\alpha=\alpha_0} + \frac{1}{2}(\alpha+\alpha_0)^2 \frac{d^2}{d\alpha^2}\left\{x_+^{\alpha-1}\right\}_{\alpha=\alpha_0} + \ldots$$

o,

$$x_+^{\alpha-1} = x_+^{\alpha_0-1} + (\alpha-\alpha_0) x_+^{\alpha_0-1} \log x_+ + \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2} x_+^{\alpha_0-1} \log^2 x_+ +$$

$$+\ldots+\frac{(\alpha-\alpha_0)^n}{m!}\ x_+^{\alpha_0-1}\ \log^m x_+ \ +\ \ldots\ , \qquad (I,7;1)$$

donde la nueva distribución $x_+^{\alpha_0-1}\ \log^m x_+$ está definida por la fórmula (I,6;3).

I.8. El desarrollo de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$

Pasaremos ahora a obtener la expresión de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$ en el entorno de un punto singular de $x_+^{\alpha-1}$ ($\alpha = 0,\ -1, \ldots$).

Partimos de la fórmula (I,3;3):

$$<x_+^{\alpha-1},\ \phi(x)> = \int_0^1 x^{\alpha-1}\left\{\phi(x)-\phi(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(0)\right\}dx\ +$$

$$+\int_1^\infty x^{\alpha-1}\left\{\phi(x)-\phi(0)-\ldots-\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\phi^{(n-2)}(0)\right\}dx\ +$$

$$+\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\ \frac{1}{\alpha+n-1}\ . \qquad (I,8;1)$$

Esta fórmula puede ser escrita

$$<x_+^{\alpha-1}, \phi(x)> = \text{Pf } x_+^{\alpha-1} + \frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\ \frac{1}{\alpha+n-1}\ . \qquad (I,8;2)$$

Observemos que podemos escribir (esta fórmula es completamente similar a la fórmula (I,4;5))

$$\text{Pf } x_+^{\alpha-1} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - \phi(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}\ \phi^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\ \phi^{(n-1)}(0)\ H(1-x) \right\} dx. \qquad (I,8;3)$$

Tenemos, si $-n < \text{Re } \alpha < -n+1$,

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \text{Pf } x_+^{\alpha-1} = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \log^m x \left\{ \phi(x) - \phi(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}\ \phi^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!}\ \phi^{(n-1)}(0)\ H(1-x) \right\} dx\ . \qquad (I,8;4)$$

Para $\alpha = -n+1$ obtenemos, de (I,8;4),

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \, \mathrm{Pf}\, x_+^{\alpha-1} \Big|_{\alpha=-n+1} \stackrel{\Delta}{=} x_+^{-m} \log^m x_+ . \qquad (I,8;5)$$

Resulta, fácilmente, que

$$< x_+^{-n} \log^m x_+ \, , \, \phi(x) > =$$

$$= \int_0^\infty x^{-n} \log^m x_+ \left\{ \phi(x) - \varphi(0) - \ldots - \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \varphi^{(n-2)}(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} H(1-x) \right\} dx. \qquad (I,8;6)$$

Obtenidas las expresiones de x_+^{-n}, $x_+^{-n} \log x_+$, ... , es fácil obtener la expresión de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$ en el entorno de $\alpha = -n+1$.

Para ello partamos de la fórmula (I,8;2).

Hemos demostrado que la función $\mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}$ (que aparece en el lado derecho de la fórmula (I,8;2)) es una función regular en la franja $-n< \mathrm{Re}\ \alpha<-n+2$. Para obtener el desarrollo de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$ en el entorno de $\alpha = -n+1$, nosotros desarrollaremos en serie de Taylor, en un entorno de $\alpha = -n+1$, la función regular de $\mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}$.

De la definición de x_+^{-n} y de (I,8;5) es

$$\mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1} = \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} + (\alpha-(-n+1))\left\{\frac{d}{d\alpha}\ \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}\right\}_{\alpha=-n+1} +$$

$$+\ \frac{(\alpha-(-n+1))^2}{2}\left\{\frac{d^2}{d\alpha^2}\ \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}\right\}_{\alpha=-n+1} + \ \dots\ ; \qquad \text{(I,8;7)}$$

o, equivalentemente,

$$\mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1} = x_+^{-n} + (\alpha+n-1)\ x_+^{-n}\log x_+ + \frac{(\alpha+n-1)^2}{2}\ x_+^{-n}\log x_+^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{(\alpha+n-1)^m}{m!} \; x_+^{-n} \; \log^m x_+ \; + \; \ldots . \qquad (I,8;8)$$

De (I,8;2) y (I,8;8) obtenemos finalmente

$$x_+^{\alpha-1} = \frac{(-1)^{n-1}\,\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}\;\frac{1}{\alpha-(-n+1)} + x_+^{-(n-1)-1} +$$

$$+ \; (\alpha-(-n+1)) \; x_+^{-n} \; \log x_+ \; + \frac{(\alpha-(-n+1))^2}{2} \; x_+^{-n} \; \log^2 x_+ \; + \ldots$$

(I,8;9)

Este es el desarrollo en serie de Laurent de $x_+^{\alpha-1}$ en el sentido de $\alpha = -n+1$.

I.9. La distribución $x_-^{\alpha-1}$.

Sra x un punto de $\mathbf{R}^1$ y λ un número complejo.

La función x_-^{λ} está definida por la fórmula

$$x_-^\lambda = \begin{cases} |x|^\lambda & \text{si} \quad x < 0, \\ 0 & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \tag{I,9;1}$$

Supongamos ahora que $\operatorname{Re}\lambda > -1$ y consideremos la correspondiente distribución dependiente de un parámetro λ definida por la fórmula

$$\langle x_-^\lambda , \phi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \phi(x)\, dx = F_\phi(\lambda), \tag{I,9;2}$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$.

Esta funcional puede ser prolongada al semiplano $\operatorname{Re}\lambda > -1$, del mismo modo que x_+^λ. Reemplazando x por $-x$ obtenemos:

$$\langle x_-^\lambda , \phi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{0} |x|^\lambda \phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} (-x)^\lambda \phi(x)\, dx =$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^\lambda \phi(-x)\, dx = \langle x_+^\lambda , \phi(-x)\rangle . \tag{I,9;3}$$

Hagamos, por comodidad, $\lambda = \alpha - 1$. De manera similar a lo realizado para $x_+^{\alpha-1}$ podemos desarrollar $x_-^{\alpha-1}$ en serie de Taylor o en serie de Laurent. Tenemos, si α_0 es un punto regular, $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$ el siguiente desarrollo de $x_-^{\alpha-1}$ en serie de Taylor:

$$x_-^{\alpha-1} = x_-^{\alpha_0-1} + (\alpha-\alpha_0)\, x_-^{\alpha_0-1} \log x_- + \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2}\, x_-^{\alpha_0-1} \log^2 x_- + \ldots \qquad (I,9;4)$$

Acá, las distribuciones $x_-^{\alpha_0-1} \log^m x_-$ están definidas por fórmulas completamente análogas a las fórmulas similares para las distribuciones $x_+^{\alpha-1} \log^m x_+$. Tenemos, a saber, la siguiente fórmula,

$$< x_-^{\alpha-1} , \phi(x) > \;=\; < x_+^{\alpha-1} , \phi(-x) > =$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - (-1)\, x\phi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\}$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \phi(-x)\, dx + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{(-1)^\nu \phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \frac{1}{\alpha+\nu}, \qquad (I,9;5)$$

Esta fórmula es válida para cada $\alpha \neq 0, -1, \ldots, -n, \ldots$.

En la franja $-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -n+1$ la siguiente fórmula es válida (esta fórmula es la análoga de la fórmula (I,4;3))

$$< x_-^{\alpha-1}, \phi(x) > = < x_+^{\alpha-1}, \phi(-x) > =$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(x) - (-1)^0 \phi(0) - (-1)^1 x \phi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right\} dx$$

$$(I,9;6)$$

Si diferenciamos ambos miembros de esta fórmula con respecto a α, obtenemos

$$< x_-^{\alpha-1} \log x_-, \phi(x) > = < x_+^{\alpha-1} \log x_+, \phi(-x) > =$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \log x \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \dots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx$$

(I,9;7)

Esta es la fórmula análoga de la fórmula (I,6;2).

Diferenciando m veces, obtenemos $(-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -n+1)$,

$$< x_-^{\alpha-1} \log^m x_- , \phi(x) > = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \log^m x \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx, \qquad \text{(I,9;8)}$$

Esta fórmula es la análoga de (I,6;3).

Definidas las distribuciones $x_-^{\alpha-1} \log^m x_-$ podemos desarrollar $x_-^{\alpha-1}$ en serie de Taylor en el entorno de un punto regular α_0.

Tenemos

$$x_-^{\alpha-1} = x_-^{\alpha_0-1} + (\alpha+\alpha_0)\, x_-^{\alpha_0-1} \log x_- + \frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2} x_-^{\alpha_0-1} \log^2 x_-$$

(I,9;9)

Esta es la fórmula análoga de (I,7;1).

Supongamos ahora que α_0 es un punto singular de $x_-^{\alpha-1}$ ($\alpha = 0, -1, \ldots$).

Desarrollaremos ahora $x_-^{\alpha-1}$ en serie de Laurent en el entorno de un polo. Procederemos de manera exactamente igual al caso $x_+^{\alpha-1}$.

Tenemos, si $-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -n+1$,

$$< x_-^{\alpha-1}, \phi(x)> = < x_+^{\alpha-1}, \phi(-x)> =$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - (-1)^0 \phi(0) - (-1) x \phi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1} \phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \right\} dx$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - (-1)^0 \phi(0) - (-1) x \phi'(0) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{n-2} \phi^{(n-2)}(0)}{(n-2)!} \right\} dx - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \int_1^\infty x^{\alpha-1+n-1} dx ;$$

(I,9;10)

Como

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha-1+n-1}\, dx = -\frac{1}{\alpha+n-1}, \qquad (I,9;11)$$

tenemos, equivalentemente,

$$< x_-^{\alpha-1}, \phi(x)> = < x_+^{\alpha-1}, \phi(-x) > =$$

$$= \int_0^1 x^{\alpha-1} \Big\{ \phi(-x) - (-1)^0 \phi(0) - (-1)\, x\, \phi^{(1)}(0) - \ldots -$$

$$- \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0) \Big\}\, dx +$$

$$+ \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \Big\{ \phi(-x) - (-1)^0 \phi(0) - (-1) x \phi^{(1)}(0) - \ldots -$$

$$- \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \phi^{(n-2)}(0) \Big\}\, dx + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \frac{1}{\alpha+n-1}.$$

$$(I,9;12)$$

Esta fórmula es la análoga de la fórmula (I,8;1). Puede escribirse equivalentemente (para $-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -n+1$)

$$< x_-^{\alpha-1} , \phi(x)> =$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - (-1)x\,\phi'(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} \phi^{(n-2)}(0) - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0)\, H(1-x) \right\} dx \,. \quad (I,9;13)$$

I.10. El desarrollo de Laurent de $x_-^{\alpha-1}$.

Para obtener el desarrollo de Laurent de $x_-^{\alpha-1}$ partiendo de la fórmula (I,9;12), procedemos exactamente igual al caso $x_+^{\alpha-1}$ (fórmula (I,8;9)). Los dos primeros términos de la fórmula (I, 9;12) constituyen la parte regular del desarrollo de Laurent de $x_-^{\alpha-1}$ en el entorno del polo $\alpha = -n+1$. Es una función holomorfa en la franja $-n < \mathrm{Re} < -n+1$. La llamaremos $\mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1}$. Tenemos entonces, por definición,

$$\mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1} = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - (-1)\, x\, \phi^{(1)}(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx \; +$$

$$+ \int_1^\infty x^{\alpha-1} \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - x\, \phi^{(1)}(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \phi^{(n-2)}(0) \right\} dx. \qquad (I,10;1)$$

Cuando $\alpha = -n+1$, tenemos

$$\mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} \doteq x_-^{-n} = \int_0^1 x^{-n} \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \ldots - \right.$$

$$- \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \Big\} dx + \int_1^{\infty} x^{-n} \Big\{ \phi(-x) - \phi(0) - \dots -$$

$$- \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \phi^{(n-2)}(0) \Big\} dx, \qquad (I,10;2)$$

Si diferenciamos ambos miembros de (I,10;1), m veces con respecto a α , obtenemos (para α satisfaciendo $-n < \mathrm{Re}\,\alpha < -n+1$)

$$\frac{d^m}{d\alpha^m} \mathrm{Pf}\, x_-^{\alpha-1} = \int_0^1 x^{\alpha-1} \log^m x_- \Big\{ \phi(-x) - \phi(0) - (-1) x \phi'(0) -$$

$$- \dots - \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \Big\} dx +$$

$$+ \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} \log^m x_- \Big\{ \phi(-x) - \phi(0) - (-1) x \phi'(0) -$$

$$- \dots - \frac{(-1)^{n-2} x^{n-2}}{(n-2)!} \phi^{(n-2)}(0) \Big\} dx. \qquad (I,10;3)$$

Para $\alpha = -n+1$, obtenemos de esta última fórmula

$$<\frac{d^m}{d\alpha^m} \operatorname{Pf} x_-^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1}, \phi(x)> \triangleq < x_-^{-n} \log^m x_- , \phi(x)> =$$

$$= \int_0^1 x^{-n} \log^m x_- \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \phi^{(n-1)}(0) \right\} dx$$

$$+ \int_1^\infty x^{-n} \log^m x_- \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \ldots - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} \phi^{(n-2)}(0) \right\} dx.$$

(I,10;4)

Observemos que la fórmula (I,10;3) puede escribirse

$$< x_-^{\alpha-1} \log^m x_- , \phi(x)> = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \log^m x \left\{ \phi(-x) - \phi(0) - \ldots - \right.$$

$$\left. - \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} \phi^{(n-2)}(0) - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \phi^{(n-1)}(0) \quad H(1-x) \right\} dx.$$

(I,10;5)

Obtenidas las definiciones de las nuevas distribuciones x_-^{-n}, $x_-^{-n}\log^m x_-$, es fácil obtener un desarrollo de Laurent para $x_-^{\alpha-1}$ en un entorno de un punto singular ($\alpha = 0,-1,-2,\ldots$).

Tenemos, de acuerdo con la fórmula (I,9;12)

$$x_-^{\alpha-1} = \mathrm{Pf}\; x_-^{\alpha-1} + \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\;\frac{1}{\alpha+n-1}\,, \qquad (\mathrm{I},10;6)$$

Entonces, para obtener un desarrollo de Laurent de $x_-^{\alpha-1}$ en el entorno de $\alpha = -n+1$, será suficiente desarrollar la fórmula $\mathrm{Pf}\; x_-^{\alpha-1}$ en serie de Taylor en el entorno de $\alpha = -n+1$,

Tenemos, según (I,10;1) y (I,10;2)

$$x_-^{\alpha-1} = x_-^{-n} + (\alpha-(-n+1))\; x_-^{-n}\log x_- \;+$$

$$+\;\frac{(\alpha-(-n+1))^2}{2}\; x_-^{-n}\log^2 x_- \;+\ldots+\; \frac{(\alpha-(-n+1))^m}{m!}\; x_-^{-n}\log^m x_- \;+$$

$$+ \ldots + \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \frac{1}{\alpha+n-1} . \qquad (I,10;7)$$

Este es el desarrollo de Laurent de $x_-^{\alpha-1}$ en el entorno del polo $\alpha = -n+1$.

I.11. Los residuos de $x_+^{\alpha-1}$, $x_-^{\alpha-1}$, $|x|^{\alpha-1}$ y $|x|^{\alpha-1}$ sgn x

De la fórmula (I,8;9) resulta que la distribución $x_+^{\alpha-1}$ tiene polos para $\alpha = 0, -1, \ldots, -n$ y su residuo (denotado por $\operatorname{Res}_{\alpha=-n}$) está dado por la fórmula:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} x_+^{\alpha} = \frac{(-1)^{n-1} \delta^{(r-1)}(x)}{n-1!} . \qquad (I,11;1)$$

Teniendo presente la fórmula (I,10;7) sabemos que la distribución $x_-^{\alpha-1}$ tiene polos para $\alpha = 0, -1, \ldots, -n$ y

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} x_{-}^{\alpha-1} = \frac{\delta^{(n)}(x)}{n!} \; . \qquad (I,11;2)$$

Consideremos ahora la nueva distribución definida por

$$|x|^{\alpha-1} \triangleq x_{+}^{\alpha-1} + x_{-}^{\alpha-1} \; . \qquad (I,11;3)$$

De (I,11;1) y (I,11;2) resulta que $|x|^{\alpha-1}$ tiene polos si $\alpha = 0,-1,\ldots,-n,$ y

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} |x|^{\alpha-1} = \left\{ \frac{(-1)^{n} + 1}{n!} \right\} \delta^{(n)}(x) \, . \qquad (I,11;4)$$

Si n es impar este residuo es cero y por lo tanto $|x|^{\alpha-1}$ es una distribución bien definida en estos puntos. Lo llamaremos naturalmente, x^{-n} .

Tenemos

$$|x|^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n=-(2m+1)} = |x|^{-2m-2} , \qquad (I,11;5)$$

$m = 0,1, \ldots$.

Si n es par, $n = 2m$, $|x|^{\alpha-1}$, $\alpha = -2m$, tiene polos de primer orden y

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} |x|^{\alpha-1} = \frac{2\ \delta^{(2m)}(x)}{(2m)!} . \qquad (I,11;6)$$

Consideremos finalmente la nueva distribución definida por

$$|x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x = x_+^{\alpha-1} - x_-^{\alpha-1} . \qquad (I,11;7)$$

Resulta de (I,11;1) y (I,11;2)

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} |x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x = \left\{\frac{(-1) \; -1}{n!}\right\} \delta^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; n = 2m, \\ & \quad m = 0,1, \ldots, \\ \dfrac{-2 \; \delta^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \text{si } \; n = 2m+1, \\ & \quad m = 0,1, \ldots \end{cases}$$

(I,11;8)

I.12. Regularización de $x_+^{\alpha-1}$, $x_-^{\alpha-1}$, $|x|^{\alpha-1}$ y $|x|^{\alpha-1}$ sgn x.

Comencemos por considerar la función $\Gamma(\alpha)$ definida por la fórmula

$$\Gamma(\alpha) \overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^\infty e^{-x} \, x^{\alpha-1} \, dx, \qquad \text{(I,12;1)}$$

cuando Re $\alpha > 0$.

Procediendo de la misma manera que para $x_+^{\alpha-1}$ y $x_-^{\alpha-1}$, se obtiene la expresión de $\Gamma(\alpha)$ para Re $\alpha \leq 0$, Re $\alpha > -n-1$, $\alpha \neq -1, -2, \ldots,$ resulta entonces

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \left\{ e^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \; x^k}{k!} \right\} dx \; +$$

$$+ \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{\alpha+k} , \tag{I,12;2}$$

De la fórmula (I,12;2) resulta que $\Gamma(\alpha)$ tiene polos simples en $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$;

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} \Gamma(\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!} , \tag{I,12;3}$$

$n = 0, 1, \ldots$.

Hemos visto que $x_+^{\alpha-1}$, $x_-^{\alpha-1}$, $|x|^{\alpha-1}$ y $|x|^{\alpha-1}$ sgn x tienen polos en $\alpha = 0, -1, \ldots, -n$, es natural intentar eliminarlos dividiendo cada una de estas distribuciones por una función ordinaria de α , que tenga polos simples en los mismos puntos.

A continuación construiremos las siguientes distribuciones enteras de α

$$\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} , \quad \frac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} , \quad \frac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{y} \quad \frac{|x|^{\alpha-1} \operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} ,$$

estas son las funciones regularizadas de $x_+^{\alpha-1}$, $x_-^{\alpha-1}$, $|x|^{\alpha-1}$ y $|x|^{\alpha-1}$ sgn x, respectivamente.

Los valores de estas nuevas distribuciones paramétricas en los puntos singulares del numerador y denominador se obtienen mediante el cociente de los correspondientes residuos. Así, pues para $n = 0, 1, 2, \ldots$, resulta (de (I,11;1) y (I,12;3))

$$\left.\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|_{\alpha=-n} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} x_+^{\alpha-1}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} \Gamma(\alpha)} = \frac{\dfrac{(-1)^n \delta^{(n)}(x)}{n!}}{\dfrac{(-1)^n}{n!}} = \delta^{(n)}(x), \qquad (I,12;4)$$

Esta es una fórmula fundamental debida a Marcel Riesz (cf. [6]).

De las fórmulas (I,11;2) y (I,12;3), $(n = 0,1,\ldots)$ resulta

$$\left.\frac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right|_{\alpha=-n} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} x_-^{\alpha-1}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} \Gamma(\alpha)} = \frac{\dfrac{\delta^{(n)}(x)}{n!}}{\dfrac{(-1)^n}{n!}} = (-1)^n \delta^{(n)}(x). \qquad (I,12;5)$$

Esta es otra fórmula fundamental (cf. [3]).

Teniendo presenta las fórmulas (I,11;4) y (I,12;3) obtenemos (n = 0,1, ...)

$$\left.\frac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right|_{\alpha=-2n} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2n} |x|^{\alpha-1}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-n} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\dfrac{2\,\delta^{(2n)}(x)}{(2n)!}}{\dfrac{2(-1)^n}{n!}} = \frac{(-1)^n\, n!\, \delta^{(2n)}(x)}{(2n)!},$$

(I,12;6)

Según (I,11;8) y (I,12;3) es (n = 0,1, ...)

$$\left.\frac{|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}\right|_{\alpha=-2n-1} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2n-1} |x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn} x}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2n-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{-2\,\delta^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!}}{\dfrac{(-1)^n\,2}{n!}} = \frac{(-1)^{n+1}\, n!\, \delta^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!}.$$

(I,12;7)

I.13. Las distribuciones $(x \pm i0)^{\lambda}$

Definiremos dos distribuciones, que tienen en común con $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $\frac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, la importante propiedad de ser funciones enteras de α . Estas dos nuevas distribuciones tienen importantes aplicaciones en la solución de problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con coeficientes constantes. Más adelante, parágrafo 15, veremos que las distribuciones $\frac{x_\pm^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ y $(x \pm i0)^{\lambda}$ están íntimamente conectadas, vía la transformada de Fourier (o Laplace).

Empezaremos por establecer la expresión

$$(x+iy)^{\alpha-1} = \exp\,[\,(\alpha-1)\,\log\,(x+iy)] =$$

$$= \exp\,[\,(\alpha-1)[\,\log\,|x+iy| + i\,\mathrm{Arg}\,(x+iy)]] \,. \tag{I,13;1}$$

Elegimos

$$\mathrm{Arg}\,(x+iy) = \arg\,(x+iy)$$

donde $-\pi < \arg z < \pi$. Entonces $(x + iy)^{\alpha-1}$ es una función analítica uniforme de la variable compleja $z = x + iy$ en el semiplano superior $y > 0$. De igual modo, $(x - iy)^{\alpha-1}$ es una función analítica uniforme en el semiplano inferior $y < 0$. Nos interesa el límite de estas dos funciones cuando nos aproximamos al eje real por arriba y por abajo. Es fácilmente calculable. En efecto,

$$(x + i0)^{\alpha-1} \triangleq \lim_{y\to 0} \left\{ \exp\,[(\alpha-1)\log(x + iy)] \right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left\{ \exp\,[(\alpha-1)\{\log|x+iy| + i\arg(x + iy)\}] \right\}$$

$$= \lim_{y\to 0} \left\{ |x + iy|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg(x + iy)} \right\} =$$

$$= \begin{cases} x^{\alpha-1} & \text{si } x > 0, \\ |x|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\pi} & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad (\mathrm{I},13;2)$$

Similarmente, tenemos

$$(x-i0)^{\alpha-1} \stackrel{\angle}{=} \lim_{y\to 0} \{\exp[(\alpha-1)\log(x-iy)]\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \{\exp[(\alpha-1)\{\log|x-iy| + i\arg(x-iy)\}]\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left\{|x-iy|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)\arg(x-iy)}\right\} =$$

$$= \begin{cases} x^{\alpha-1} & \text{si} \quad x > 0, \\ |x|^{\alpha-1} e^{-i(\alpha-1)} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases} \qquad (I,13;3)$$

Estas funciones están definidas para todos los valores complejos de α.

El problema es encontrar distribuciones correspondientes a estas funciones ordinarias.

Denenotaremos estas distribuciones también por $(x \pm i0)^{\alpha-1}$.

Es obvio que (I,13;2) y (I,13;3) pueden escribirse en términos de las funciones $x_+^{\alpha-1}$ y $x_-^{\alpha-1}$,

$$(x+i0)^{\alpha-1} = x_+^{\alpha-1} + e^{i(\alpha-1)\pi} x_-^{\alpha-1}, \qquad (I,13;4)$$

$$(x-i0)^{\alpha-1} = x_+^{\alpha-1} + e^{-i(\alpha-1)\pi} x_-^{\alpha-1} . \qquad (I,13;5)$$

Las fórmulas (I,13;4) y (I,13;5) son válidas para Re $\alpha > 0$.

Por prolongación analítica podemos asociar a las funciones ordinarias $(x \pm i0)^{\alpha-1}$ definidas por (I,13;2) y (I,13;3), las distribuciones que aparecen en los lados derechos de (I,13;4) y (I,13;5), para cada $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$.

Entonces, las distribuciones $(x \pm i0)^{\alpha-1}$ están definidas para cada α distinto de un entero positivo por las fórmulas (I,13;4) y (I,13;5).

En los puntos $\alpha = 0, -1, \ldots$, las distribuciones $x_+^{\alpha-1}$, $x_-^{\alpha-1}$ tienen singularidades. Entonces las distribuciones $(x \pm i0)^{\alpha-1}$ no están inmediatamente definidas por las fórmulas (I,13;4) y (I,13;5).

Procederemos a encontrar los valores de estas distribuciones en esos puntos.

Para ello usaremos las fórmulas (cf. fórmulas (I,8;9) y (I,10;7))

$$x_+^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+n-1}\,\frac{(-1)^{n-1}\,\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}\ , \qquad (I,13;6)$$

$$x_-^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+n-1}\,\frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1}\ . \qquad (I,13;7)$$

Usaremos también las identidades

$$e^{i(\alpha-1)\pi} = e^{i(\alpha-1+n-n)\pi} = e^{-in\pi}\, e^{i(\alpha+n-1)\pi}\ , \qquad (I,13;8)$$

$$e^{-i(\alpha-1)\pi} = e^{-i(\alpha-1+n-n)\pi} = e^{in\pi}\, e^{-i(\alpha+n-1)\pi}\ , \qquad (I,13;9)$$

o, también,

$$e^{i(\alpha-1)\pi} = (-1)^n \left\{ 1 + i(\alpha+n-1)\Pi + \ldots \right\} , \qquad (I,13;10)$$

$$e^{-i(\alpha-1)\pi} = (-1)^n \left\{ 1 - i(\alpha+n-1)\Pi + \ldots \right\} . \qquad (I,13;11)$$

Reemplazando (I,13;6) y (I,13;10) en (I,13;4), obtenemos

$$(x+i0)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+n-1} \frac{(-1)^{\alpha-1} \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha+n-1} \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} (-1)^n \left[1 + i(\alpha+n-1)\Pi + \ldots \right] +$$

$$+ \mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1} \left[(-1)^n + i(\alpha+n-1)\Pi + \ldots \right] ;$$

o, equivalentemente,

$$(x+i0)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+n-1} \frac{(-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1} +$$

$$+ \quad (-1)^n \frac{1}{\alpha+n-1} \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \ldots + \frac{i\Pi\,(-1)^n\,\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \ldots +$$

$$+ \quad (-1)^n \;\mathrm{Pf}\; x_-^{\alpha-1} \quad + \quad \ldots \quad , \qquad\qquad (\mathrm{I},13;12)$$

donde con los puntos suspensivos indicamos têrminos que tienden a cero cuando $\alpha = -n+1$. Equivalentemente,

$$(x+i0)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha+n-1} \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \left\{ (-1)^{n-1} + (-1)^n \right\} +$$

$$+ \;\mathrm{Pf}\; x_+^{\alpha-1} + (-1)^n \;\mathrm{Pf}\; x_-^{\alpha-1} + (-1)^{n-1} \frac{i\Pi \;\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + \ldots ,$$

$$(\mathrm{I},13;13)$$

donde otra vez los puntos suspensivos indican têrminos que tienden a cero cuando α tiende a $(-n+1)$.

Pasemos ahora al límite cuando α tiende a $(-n+1)$, obtenemos

$$(x+i0)^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} = (x+i0)^{-n} =$$

$$= \lim_{\alpha\to -n+1} \mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1} + (-1)^n \lim_{\alpha\to -n+1} \mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1} +$$

$$+ (-1)\ i\pi\ (-1)^{n-1}\ \frac{\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}\ . \qquad (I,13;14)$$

El lecho esencial es que, en vista de

$$\frac{1}{\alpha+n-1}\ \frac{\delta^{(n-1)}}{(n-1)!}\ \left\{ (-1)^{n-1} + (-1)^n \right\} \equiv 0,$$

las singularidades de $x_+^{\alpha-1}$ y $x_-^{\alpha-1}$ para $\alpha = 0, 1, \ldots,$ se anulan; como consecuencia de ello, las distribuciones $(x+i0)^{\alpha-1}$ está definida para $\alpha -1 = 0, -1, \ldots,$ ó , en otros términos: la distribución $(x+i0)^{\alpha-1}$ es una distribución de α para cada

α finito. Esto es, una distribución entera de α.

Procediendo de manera completamente similar con $(x-i0)^{\alpha-1}$ y teniendo en cuenta las siguientes fórmulas (ya probadas por nosotros),

$$\mathrm{Pf}\ x_+^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} \triangleq x_+^{-n} \quad , \tag{I,13;15}$$

y

$$\mathrm{Pf}\ x_-^{\alpha-1}\Big|_{\alpha=-n+1} \triangleq x_-^{-n} \quad ; \tag{I,13;16}$$

obtenemos finalmente,

$$(x+i0)^{-n} = x_+^{-n} + (-1)^n x_-^{-n} + \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} i\Pi , \tag{I,13;17}$$

$$(x-i0)^{-n} = x_+^{-n} + (-1)^n x_-^{-n} - \frac{(-1)^{n-1}\delta^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} i\Pi . \tag{I,13;18}$$

Simplificaremos estas fórmulas.

Si n es par $(n = 2m,\ m = 0,1,\ \dots\ )$, tenemos

$$x_+^{-n} + (-1)^n\ x_-^{-n} = x_+^{-2m} + x_-^{-2m} \triangleq |x|^{-2m} \triangleq$$

$$\triangleq \operatorname{Pf} x^{-2m} \triangleq x^{-2m}. \qquad (I,13;19)$$

Cuando n es impar ($n = 2m+1,\ m = 0,1,\ \dots$), tenemos

$$x_+^{-n} + (-1)^n\ x_-^{-n} = x_+^{-2m-1} - x_-^{-2m-1} =$$

$$\triangleq |x|^{\lambda} \operatorname{sgn} x \Big|_{\lambda=-2m-1} \triangleq \operatorname{Pf} x^{-2m-1} \triangleq$$

$$\triangleq x^{-2m-1}. \qquad (I,13;20)$$

Finalmente, obtenemos de (I,13;17), (I,13;18), (I,13;19) y (I,13;20),

$$\boxed{\begin{aligned} (x+i0)^{-n} &= \mathrm{Pf}\ x^{-n} - \frac{i\pi\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x), \\ (x-i0)^{-n} &= \mathrm{Pf}\ x^{-n} + \frac{i\pi\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n-1)}(x). \end{aligned}}$$

(I,13;21)

(I,13;22)

Estas fórmulas son especialmente importantes ya que establecen la conexión entre distribuciones y valores límites de funciones analíticas.

Comentaremos ahora las fórmulas fundamentales (I,13;21) y (I,13;22). Recordemos que ya hemos probado

$$\frac{d}{dx}\,x^{-n} = -n\,x^{-n-1}. \tag{I,13;23}$$

Si diferenciamos las fórmulas (I,13;21) y (I,13;22) obtenemos, teniendo en cuenta (I,13;23),

$$\frac{d}{dx}\,(x+i0)^{-n} = -n\,x^{-n-1} - \frac{i\pi\,(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,\delta^{(n)}(x) =$$

$$= -n \left\{ x^{-n-1} - \frac{i\Pi(-1)^{n}}{n!} \delta^{(n)}(x) \right\} =$$

$$= -n \ (x+i0)^{-n-1} \ . \qquad (I,13;24)$$

De modo similar obtenemos, diferenciando (I,13;22),

$$\frac{d}{dx} (x-i0)^{-n} = -n \ (x-i0)^{-n-1} \ . \qquad (I,13;25)$$

Escribamos otra vez las relaciones

$$(x+i0)^{\alpha-1} = x_{+}^{\alpha-1} + e^{i(\alpha-1)\pi} x_{-}^{\alpha-1} , \qquad (I,13;26)$$

$$(x-i0)^{\alpha-1} = x_{+}^{\alpha-1} + e^{-i(\alpha-1)\pi} x_{-}^{\alpha-1} , \qquad (I,13;27)$$

$\alpha \neq 0, -1, \ldots , -n.$

Por otra parte tenemos que

$$\frac{d}{dx}\, x_+^{\alpha-1} = (\alpha-1)\; x_+^{\alpha-2}\;, \qquad (I,13;28)$$

$$\frac{d}{dx}\, x_-^{\alpha-1} = -(\alpha-1)\; x_-^{\alpha-2}\;. \qquad (I,13;29)$$

Diferenciemos (I,13;26) con respecto a x. Obtenemos, teniendo en cuenta (I,13;28) y (I,13;29),

$$\frac{d}{dx}\,(x+i0)^{\alpha-1} = \frac{d}{dx}\, x_+^{\alpha-1} + e^{i(\alpha-1)\pi}\,\frac{d}{dx}\, x_-^{\alpha-1} =$$

$$= (\alpha-1)\; x_+^{\alpha-2} + (\alpha-1)\; e^{i(\alpha-2)\pi}\, x_-^{\alpha-2} =$$

$$= (\alpha-1)\,(x_+^{\alpha-2} + e^{i(\alpha-2)\pi}\, x_-^{\alpha-2}) =$$

$$= (\alpha-1)\,(x+i0)^{\alpha-2}\;. \qquad (I,13;30)$$

Similarmente,

$$\frac{d}{dx}(x-i0)^{\alpha-1} = (\alpha-1)(x-i0)^{\alpha-2} \qquad (I,13;31)$$

De (I,13;24), (I,13;25), (I,13;30) y (I,13;31) concluimos que la relación

$$\frac{d}{dx}(x \pm i0)^{\alpha-1} = (\alpha-1)(x \pm i0)^{\alpha-2} \qquad (I,13;32)$$

es válida <u>para todo α</u>.

Sacaremos consecuencias de la ecuación (I,13;32). Como la diferenciación decrece el exponente en una unidad, la ecuación (I,13;32) puede ser usada como una definición para las funciones generalizadas $(x+i0)^{\alpha-1}$, $(x-i0)^{\alpha-1}$ para $\alpha \neq 0, -1, -2, ...$ Por ejemplo, $(x+i0)^{-\frac{3}{2}}$ puede ser definida como $-2\frac{d}{dx}(x+i0)^{-\frac{1}{2}}$ donde $\frac{d}{dx}$ es una diferenciación en el sentido de las distribuciones y $(x+i0)^{-\frac{1}{2}}$ es la función localmente sumable definida por la ecuación

$$(x+i0)^{\alpha-1} = x_+^{\alpha-1} + e^{i(\alpha-1)\pi}\, x_-^{\alpha-1} , \qquad (I,13;33)$$

para $\alpha = -\frac{1}{2}$.

La ecuación (I,13;32) tiene otra importante consecuencia, En efecto, para $\alpha \neq 0, -1, \ldots$,

$$\lim_{y \downarrow 0} (x+iy)^{\alpha-1} = (x+i0)^{\alpha-1} \qquad (I,13;34)$$

en el sentido de las distribuciones.

En realidad (I,13;34) es cierta para α suficientemente grande y, como ya hemos probado, la derivada de una sucesión convergente es otra vez una sucesión convergente.

Para α no positivo, $(x \pm i0)^{-n}$ puede también ser defini da por diferenciación. Para ello introduzcamos la función localmente sumable log (x+i0) definida por

$$\log (x+i0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \downarrow 0} \log (x+iy) =$$

$$= \lim_{y \downarrow 0} \left\{ \log |x+iy| + i \arg (x+iy) \right\} =$$

$$= \log |x| + i\Pi H(-x). \qquad (I,13;35)$$

Esta función juega un importante papel en Físico-Matemática. Por diferenciación de (I,13;35), obtenemos

$$\frac{d}{dx} \log (x+i0) = \text{Pf} \frac{1}{x} - i\Pi\delta. \qquad (I,13;36)$$

Esta es una fórmula famosa debida a Dirac que pareció misteriosa durante un largo tiempo.

Escribamos otra vez la fórmula (I,13;21)

$$(x+i0)^{-n} = \text{Pf } x^{-n} - \frac{i\Pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(x). \qquad (I,13;37)$$

Si ponemos en esta fórmula $n = 1$, resulta

$$(x+i0)^{-1} = \text{Pf} \frac{1}{x} - i\Pi\delta(x). \qquad (I,13;38)$$

Luego de (I,13;36) y (I,13;38), obtenemos

$$\frac{d}{dx} \log (x+i0) = (x+i0)^{-1} \triangleq \frac{1}{x+i0} , \qquad (I,13;39)$$

Similarmente, tenemos

$$\log (x-i0) \triangleq \lim_{y \uparrow 0} \log (x-iy) =$$

$$= \lim_{y \uparrow 0} \left\{ \log |x-iy| + i \arg (x-iy) \right\}$$

$$= \log |x| - i \pi H(-x) . \qquad (I,13;40)$$

De acá, por diferenciación,

$$\frac{d}{dx} \log (x-i0) = \mathrm{Pf} \frac{1}{x} + i \pi \delta . \qquad (I,13;41)$$

De la fórmula (I,13;22), para n = 1, obtenemos

$$(x-i0)^{-1} = \mathrm{Pf}\,\frac{1}{x} + i\Pi\delta\,. \qquad (I,13;42)$$

De (I,13;41) y (I,13;42), resulta

$$\frac{d}{dx}\log(x-i0) = (x-i0)^{-1} \triangleq \frac{1}{x-i0}\,. \qquad (I,13;43)$$

Luego, las funciones generalizadas $(x \pm i0)^{-1}$ pueden ser bien definidas por las ecuaciones (I,13;39) y (I,13;43) y $(x \pm i0)^{-n}$ puede ser definida, para α = 1,2, ..., usando la fórmula general de diferenciación (I,13;32),

Ahora, los límites (I,13;35) y (I,13;40) son tomados en el sentido de las funciones generalizadas.

Esto implica que

$$\lim_{y\downarrow\uparrow 0}\,(x \pm iy)^{\alpha-1} = (x \pm i0)^{\alpha-1} \qquad (I,13;36)$$

converge, en el sentido de las distribuciones, para todo α .

I,14. Las distribuciones $(x \pm i0)^{-1}$.

Consideremos ahora las distribuciones $(x \pm i0)^{-1}$ desde otro punto de vista. Comencemos por recordar las clásicas fórmulas de Plemelj, a saber,

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-z}\, dt = \frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-x}\, dt,$$

$$z = x+iy \ , y > 0. \qquad (I,13;37)$$

$$\lim_{y \uparrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-z}\, dt = -\frac{\phi(x)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-x}\, dt,$$

$$z = x+iy, \ y < 0. \qquad (I,13;38)$$

Estas fórmulas son válidas bajo adecuadas hipótesis, por ejemplo, $\phi(t) \in L_1(-\infty,\infty)$, $\phi(t) \in C^1$.

En particular, cuando $x = 0$, las fórmulas de Plemelj son

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-iy}\, dt = \frac{\phi(0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \ \not{\int}_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}\, dt,$$

$$y > 0, \qquad (I,13;39)$$

$$\lim_{y\uparrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t-iy}\, dt = -\frac{\phi(0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}\, dt,$$

$$y < 0. \qquad (I,13;40)$$

(Acá con $\fint$ indicamos el valor principal de la integral).

La segunda fórmula ((I,13;40)) puede ser escrita, equivalentemente,

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t+iy}\, dt = -\frac{\phi(0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \fint_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}\, dt,$$

$$y > 0. \qquad (I,13;41)$$

En términos de distribuciones, esta fórmula puede escribirse,

$$\lim_{y\downarrow 0} \left< \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t+iy},\ \phi(t) \right> = \left< -\frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i}\, \mathrm{Pf}\, \frac{1}{t},\ \phi(t) \right>,$$

$$(I,13;42)$$

o, multiplicando ambos miembros por $2\pi i$,

$$\lim_{y\downarrow 0} < \frac{1}{t+iy}, \phi(t)> = < -\pi i \delta + \mathrm{Pf}\,\frac{1}{t}, \phi(t)> . \qquad (I,13;43)$$

Esta fórmula es, precisamente, la fórmula (I,13;21) para $n = 1$.

Similarmente, la fórmula (I,13;39) puede ser escrita de manera equivalente,

$$\lim_{y\uparrow 0} < \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{t-iy}, \phi(t)> = < \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Pf}\,\frac{1}{t}, \phi(t)>, \quad (I,13;44)$$

o, multiplicando ambos miembros por $2\pi i$,

$$\lim_{y\uparrow 0} < \frac{1}{t-iy}, \phi(t)> = < -\pi i \delta + \mathrm{Pf}\,\frac{1}{t}, \phi(t)> , \qquad (I,13;45)$$

Esta es, precisamente, la fórmula (I,13;22) para $n = 1$.

Vemos entonces que las distribuciones $(x \pm i0)^{-1}$ son nada más que las fórmulas de Plemelj trasladadas al lenguaje de las distribuciones. Ello explica que sean tan importantes.

I.5. La transformada de Fourier de $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

Primero calcularemos la integral de Laplace de $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ luego, por pasaje al límite, su transformada de Fourier. Consideremos $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ para Re $\alpha > 0$. Luego

$$\mathcal{L}\left[\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = \int_0^\infty e^{-x(\sigma+iy)} \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ix(y-i\sigma)} \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx,$$

que converge para $\sigma > 0$.

El resultado, conocido, es

$$\int_0^\infty e^{-x(\sigma+iy)} \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx = \frac{1}{(\sigma+iy)^\alpha} = \frac{1}{(i(y-i\sigma))^\alpha} =$$

$$= \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}\alpha}(y-i\sigma)^\alpha} = e^{-i\frac{\pi}{2}(y-i\sigma)^{-\alpha}} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ix(y-i\sigma)} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dx. \qquad (I,15;1)$$

Ambos miembros de (I,15;1) son funciones analíticas de α y obtenemos, pasando al límite para $\sigma \to 0$, la transformada de Fourier de $\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$:

$$F\left[\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = \left[\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^\wedge = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-ixy} dx =$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} (y-i0)^{-\alpha} . \qquad (I,15;2)$$

Poniendo $\alpha = 0$ en (I,15;2), obtenemos

$$\left[\delta\right]^\wedge = 1 , \qquad (I,15;3)$$

poniendo $\alpha = -1$ resulta,

$$\left[\delta^{(1)}\right]^\wedge = e^{i\frac{\pi}{2}} y = iy , \qquad (I,15;4)$$

finalmente, poniendo $\alpha = -n$, tenemos

$$\left[\delta^{(n)}\right]^{\wedge} = e^{i\frac{\pi}{2}n}\, y^{n} = (iy)^{n} \,. \qquad (I,15;5)$$

Capítulo II

Las distribuciones de Marcel Riesz

II.1. La distribución $r^{\alpha-n}$.

Sea $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punto del espacio euclí deo n-dimensional $\mathbf{R}^n$. Pongamos, por definición,

$$r \triangleq (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} . \qquad (II,1;1)$$

La distribución $r^{\alpha-n}$ está definida por la fórmula

$$< r^{\alpha-n}, \phi(x) > \triangleq \int_{\mathbf{R}^n} r^{\alpha-n} \phi(x) \, dx, \qquad (II,1;2)$$

donde $\phi(x)$ es una función de prueba, $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ y α es un parámetro complejo.

La fórmula (II,1;2) puede escribirse, equivalentemente, apelando al cambio de coordenadas,

$$< r^{\alpha-n}, \phi(x)> = \int_{\mathbf{R}^n} r^{\alpha-n} \phi(x) \, dr \, dS_r =$$

$$= \int_0^\infty r^{\alpha-n}\, dr \int_{S_r} \phi(x)\, dS_r =$$

$$= \int_0^\infty r^{\alpha-n}\, dr\, |S_r| \cdot \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \phi(x)\, dS_r\,, \qquad \text{(II,1;3)}$$

donde $d\,S_r$ designa el elemento de área de la esfera de radio r y $|S_r|$ el volumen de la esfera de radio r.

Escribimos (cf. [3], pp. 71-74)

$$\frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \phi(x)\, d\,S_r \triangleq F(r). \qquad \text{(II,1;4)}$$

Con esta notación (II,1;3) resulta

$$< r^{\alpha-n}, \phi(x) > = \int_0^\infty r^{\alpha-n}\, |S_r|\, F(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty r^{\alpha-n}\, \Omega_n\, r^{n-1}\, F(r)\, dr =$$

$$= \int_0^\infty r^{\alpha-1} \left\{ \Omega_n \; F(r) \right\} dr, \qquad \text{(II,1;5)}$$

donde Ω_n es el área de la esfera unitaria n-dimensional:

$$\Omega_n = \frac{2\,\Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \;. \qquad \text{(II,1;6)}$$

Poniendo

$$\Omega_n \, F(r) \triangleq \phi(r), \qquad \text{(II,1;7)}$$

tenemos en definitiva,

$$< r^{\alpha-n}, \; \phi(x) > \; = \; < x_+^{\alpha-1}, \; \Phi(x) > . \qquad \text{(II,1;8)}$$

En consecuencia, hemos reducido la distribución n-dimensional $r^{\alpha-n}$ a la distribución unidimensional $x_+^{\alpha-1}$.

La distribución que aparece en el segundo miembro de (II, 1;8) tiene (cf. (I,8;9)) polos simples en

$$\alpha = 0, -1, -2, \ldots, \qquad \text{(II,1;9)}$$

y los correspondientes residuos (cf. (I,11;2))

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-m} x_+^{\alpha-1} = \frac{(-1)^m \, \delta^{(m)}(x)}{m!} . \qquad \text{(II,1;10)}$$

Entonces, de (II,1;7), (II,1;8) y (II,1;10), resulta

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-m} < r^{\alpha-n} , \phi(x) > = \frac{\Phi^{(m)}(0)}{m!} = \Omega_n \frac{F^{(m)}(0)}{m!} . \qquad \text{(II,1;11)}$$

Por otra parte, escribamos

$$\Phi(r) \triangleq \Omega_n \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \phi(x) \, d\, S_r =$$

$$= \Omega_n \frac{1}{|S_r|} \int_{\Omega} \phi(r\omega)\, r^{n-1}\, d\Omega =$$

$$= \Omega_n \frac{r^{n-1}}{|S_r|} \int_{\Omega} \phi(r\omega)\, d\Omega\,, \qquad \text{(II,1;12)}$$

donde $d\Omega$ es el elemento de superficie de la esfera unidad.

Pongamos todavía

$$\Omega_n\, S_\phi(r) \triangleq \int_{\Omega} \phi(r\omega)\, d\Omega\,. \qquad \text{(II,1;13)}$$

$S_\phi(r)$ es el <u>valor medio de $\phi(x)$</u> en la esfera de radio r. $S_\phi(r)$ (definida para $r \geqslant 0$) tiene soporte acotado y es infinitamente diferenciable.

Desarrollando $\phi(x)$ en serie de Taylor, obtenemos

$$\phi(x) = \phi(0) + \frac{\partial\phi(0)}{\partial x_\nu} x_\nu + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2\phi(0)}{\partial x_\nu\, \partial x_\mu} x_\nu x_\mu +$$

$$+ \frac{1}{3!} \frac{\partial^3\phi(0)}{\partial x_\nu\, \partial x_\mu\, \partial x_\lambda} x_\nu x_\mu x_\lambda + \dots \,. \qquad \text{(II,1;14)}$$

Observemos que insertando (II,1;14) en (II,1;13) todas las potencias de orden impar desaparecen y resulta

$$\Omega_n \; S_\phi(r) = \int_\Omega \phi(0)\, d\,\Omega + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi(0)}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu} \iint x_\nu x_\mu \, d\Omega + \ldots$$

(II,1;15)

o, equivalentemente,

$$S_\phi(r) = \phi(0) + a_2 r^2 + a_4 r^4 + \ldots + a_n r^{2n} + 0(r^{2n}) ,$$

(II,1;16)

donde $0(r^{2n})$ es un infinitésimo de orden superior. La fórmula (II,1;16) muestra que $S_\phi(r)$ es una función par de la variable r.

Finalmente de (II,1;11) y (II,1;16) resulta

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\lambda=-n-2k \\ k=0,1,\ldots}} \langle r^\lambda, \phi(x)\rangle = \frac{\Omega n}{(2k)!} \langle \delta^{(2k)}(x), S_\phi(x)\rangle =$$

$$= \Omega_n \frac{S_\phi^{(2k)}(0)}{(2k)!} . \qquad \text{(II,1;17)}$$

Haciendo $k = 0$ en (II,1;17) obtenemos

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} \langle r^{\lambda}, \phi(x) \rangle = \Omega_n \langle \delta(x), S_{\phi}(x) \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \delta(x), S_{\phi}(x) \rangle &= S_{\phi}(0) \\ &= \phi(0) = \\ &= \delta(x). \end{aligned} \qquad (II,1;18)$$

Tenemos finalmente que r^{λ} tiene un polo simple cuyo residuo es

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=-n} r^{\lambda} = \Omega_n \ \delta(x) . \qquad (II,1;19)$$

II.2. La fórmula de Pizetti.

Consideremos nuevamente la distribución definida por la fórmula

$$< r^{\alpha-n} , \phi(x) > \ = \ < x_+^{\alpha-1} , \Phi(x) > , \qquad \text{(II,2;1)}$$

donde

$$\Phi(x) \triangleq \frac{\Omega_n}{|S_r|} \int_{S_r} \phi(x)\, d\, S_r \ . \qquad \text{(II,2;2)}$$

Sabemos (cf. parágrafo I) que $\Phi(x)$ es infinitamente diferenciable y que todas sus derivadas impares se anulan en el origen; por lo tanto, por la fórmula de Mc. Laurin, tenemos

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0)\, x^2 + \ldots + \frac{1}{(2m)!}\Phi^{(2m)}(0)\, x^{2m} + 0(x^2) . \qquad \text{(II,2;3)}$$

Deseamos transformar esta fórmula de modo que aparezca de manera explícita, en el segundo miembro, la función de prueba $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Para ello procederemos como sigue.

Por derivación directa se comprueba, para Re $\lambda>0$ (y luego, por prolongación analítica), que

$$\Delta \left\{ r^{\lambda+2} \right\} = (\lambda + 2)(\lambda + n)\, r^{\lambda} \ , \qquad \text{(II,2;4)}$$

donde

$$\Delta \triangleq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} . \qquad (II,2;5)$$

Iterando esta fórmula obtenemos:

$$r^{\lambda} = \frac{\Delta^m \left\{ r^{\lambda + 2m} \right\}}{(\lambda+2)(\lambda+2.2)+\ldots+(\lambda+2m)(\lambda+n)(\lambda+n+2)\ldots(\lambda+n+2m-2)} .$$

(II,2;6)

O sea, poniendo $\lambda = \alpha - n$,

$$r^{\alpha-n} = \frac{\Delta^m \left\{ r^{\alpha-n+2m} \right\}}{(\alpha-n+2)(\alpha-n+2.2)+\ldots+(\alpha-n+2m)\,\alpha(\alpha+2)\ldots(\alpha+2m-2)} ,$$

es decir,

$$r^{\alpha-n} = \frac{\Delta^m \left\{ r^{\alpha-n+2m} \right\}}{(\alpha+2.0)(\alpha+2.1)\ldots(\alpha+2(m-1))(\alpha-n+2.1)(\alpha-n+2.2)\ldots(\alpha-n+2m)}$$

(II,2;7)

Para calcular el residuo de $r^{\alpha-n}$ para $\alpha = 0,-2,-4,\ldots$; bastará calcular el residuo del segundo miembro.

COmo el denominador no se anula para $\alpha = -2m$, bastará calcular el residuo del numerador. Ahora bien, para toda función de prueba $\phi(x) \in \mathcal{D}$ se verifica

$$< \Delta^m\left\{r^{\alpha-n+2m}\right\}, \phi(x) > = < r^{\alpha-n+2m}, L^m\left\{\phi(x)\right\}>. \qquad (II,2;8)$$

Debemos calcular pues, el residuo del primer miembro (y por lo tanto del segundo) para $\alpha = -2m$; en otras palabras, debemos calcular el residuo de

$$<r^{-2m-n+2m}, \Delta^m \phi> = <r^{\alpha-n}, \Delta^m\{\phi\}>\Big|_{\alpha=0}. \qquad (II,2;9)$$

Pero este residuo ya lo hemos calculado (fórmula (II,1;11))

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=0}\left\{<r^{\alpha-n}, \Delta^m\phi>\right\} = \Omega_n\left[\Delta^m\left\{\phi(x)\right\}\right]_{x=0} =$$

$$= \Omega_n \Delta^m \left\{ \phi(0) \right\} = < \Delta^m \delta, \; \Omega_n \; \phi(x) > . \qquad \text{(II,2;10)}$$

En vista de la fórmula (II,2;7), tenemos

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} < r^{\alpha-n}, \phi(x) > =$$

$$= \frac{\Omega_n \; \Delta^m \left\{ \phi(0) \right\}}{(-2m+2.0)(-2m+2.1)\ldots(-2m+2(m-1))(-2m-n+2.1)\ldots(-2m-n+2m)} =$$

$$= \frac{\Omega_n \; \Delta^m \left\{ \phi(0) \right\}}{(2m-2.0)(2m-2.1)\ldots(2m-2(m-1))(2m+n-2)\ldots(2m+n-2m)} =$$

$$= \frac{\Omega_n \Delta^m \left\{ \phi(0) \right\}}{(2.4\ldots 2m)[n(n+2)(n+4)\ldots(n+2(m-1))]} =$$

$$= \frac{\Omega_n \Delta^m \left\{ \phi(0) \right\}}{2^m \; m! \; n(n+2)(n+4)\ldots \; (n+2(m-1))} =$$

$$= \frac{<\Delta^m \delta,\ \Omega_n\ \ \phi(x)>}{2^m\ \ m!\ \ (n+2.0)(n+2.1)\ldots(n+2m-1)}\ . \qquad \text{(II,2;11)}$$

Tenemos pues, en definitiva,

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} <r^{\alpha-1},\ \phi(x)> = \frac{<\Omega_n \Delta^m \delta,\ \ \phi(x)>}{2^m\ \ m!\ \prod_{\nu=0}^{m-1} (n+2\nu)}\ . \qquad \text{(II,2;12)}$$

O sea, que vale la siguiente fórmula

$$\boxed{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m}\ r^{\alpha-n} = \frac{\Omega_n}{2^m\ \ m!\ \prod_{\nu=0}^{m-1} (n+2\nu)}\ \Delta^m \delta\ .} \qquad \text{(II,2;13)}$$

Para $m = 0$ es $\alpha = 0$, y por lo tanto, se tiene

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=0}\ r^{\alpha-n} = \Omega_n\ \ \delta(x)\ , \qquad \text{(II,2;14)}$$

resultado ya obtenido (cf. fórmula (II,1;19)).

De las fórmulas (II,1;11) y (II,2;13) obtenemos en definitiva

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} \langle r^{\alpha-n}, \phi(x)\rangle = \frac{\Omega_n}{(2m)!} F^{(2m)}(0) =$$

$$= \frac{\Omega_n \Delta^m \phi(0)}{2^m\, m!\, \prod_{\nu=0}^{m-1} (n+2\nu)} .$$

O sea,

$$\boxed{F^{(2m)}(0) = \frac{(2m)!}{2^m\, m!\, \prod_{\nu=0}^{m-1} (n+2\nu)} \Delta^m \phi(0) .} \qquad (II,2;15)$$

El interés de esta fórmula es que hemos calculado explícitamente las derivadas de $F(r)$, de manera que resulta claramente la dependencia de $F(r)$ y sus derivadas con respecto a ϕ.

Recordemos ahora la fórmula ya vista, a saber, si $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ y

$$F(r) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \phi(x)\, d\, S_r, \qquad (II,2;16)$$

se tiene

$$F(r) = \phi(0) + a_1 r^2 + a_2 r^4 + \ldots + a_m r^{2m} + 0(r^{2m}) \; . \qquad (II,2;17)$$

Substituyendo en esta fórmula los coeficientes a_m por sus expresiones (II,2;15), obtenemos

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\Delta^{\nu} \phi(0)}{2^{\nu}\, \nu! \prod_{s=0}^{\nu-1} (n+2s)} r^{2\nu} + 0(r^{2k}), \qquad (II,2;18)$$

que concuerda con la fórmula de Pizetti. El caso particular $n = 3$ está consignado en [2] , p. 288, fórmula (33).

Vamos a volver a escribir la fórmula (II,2;18) desarrollando el producto que figura en el denominador:

$$F(r) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\Delta^{\nu} \phi(0)}{2^{\nu}\, \nu!\; n(n+2)\ldots(n+2(\nu-1))} r^{2\nu} + 0(r^{2k}), \qquad (II,2;19)$$

donde, para $\nu = 0$, el denominador debe entenderse como 1.

Para $n = 3$, obtenemos

$$F_3(r) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\Delta^{\nu} \phi(0)}{2^{\nu} \nu! \; 3(3+2)\ldots(3+2(\nu-1))} r^{2\nu} + 0(r^{2k}),$$

o sea,

$$F_3(r) = \phi(0) + \frac{\Delta^1 \phi(0)}{2^1 \; 1! \; 3} r^2 + \frac{\Delta^2 \phi(0)}{2^2 \; 2! \; 3(3+2)} r^4 + \ldots =$$

$$= \phi(0) + \frac{\Delta^1 \phi(0)}{3!} r^2 + \frac{\Delta^2 \phi(0)}{5!} r^4 + \ldots,$$

es decir,

$$F_3(r) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{\Delta^{\nu} \phi(0)}{(2\nu+1)!} r^{2\nu} + 0(r^{2k}) \qquad \text{(II,2;20)}$$

que es una clásica fórmula debida a Pizetti (cf. [2], loc. cit).

Volvamos ahora a la fórmula

$$< r^{\alpha-n} , \phi(x)> = < y^{\alpha-1} , \Omega_n F(y)> . \qquad \text{(II,2;21)}$$

Calculemos el segundo miembro, tenemos

$$\Omega_n \int_0^\infty y^{\alpha-1} F(y)dy = \Omega_n \int_0^1 \left[F(y) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{F^{(\nu)}(0) y^\nu}{\nu!} \right] y^{\alpha-1} dy +$$

$$+ \Omega_n \int_1^\infty y^{\alpha-1} F(y)dy + \Omega_n \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(0) \int_0^1 y^{\nu+\alpha-1} dy. \qquad \text{(II,2;22)}$$

O sea,

$$< r^{\alpha-1} , \phi(x)> = \Omega_n \int_0^1 \left[F(y) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{y^\nu}{\nu!} F^{(\nu)}(0) \right] y^{\alpha-1} dy +$$

$$+ \Omega_n \int_0^\infty F(y) y^{\alpha-1} dy + \Omega_n \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{F^{(\nu)}(0)}{\nu!(\nu+\alpha)} .$$

(II,2;23)

Como sabemos que las derivadas impares de $F(y)$ se anulan, escribiremos

$$<r^{\alpha-1}\,,\ \phi(x)> \;=\; \Omega_n \int_0^1 \left[F(y) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{F^{(2\nu)}(0)\ y^{2\nu}}{(2\nu)!} \right] y^{\alpha-1}\, dy \;+$$

$$+\ \Omega_n \int_1^{\infty} F(y)\ y^{\alpha-1}\, dy + \Omega_n \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{F^{(2\nu)}(0)}{(2\nu)!\,(\alpha+2\nu)}\,, \qquad (II,2;24)$$

o sea, teniendo en cuenta la fórmula (II,2;15),

$$<r^{\alpha-n}\,,\ \phi(x)> \;=\; \Omega_n \int_0^1 \left[F(y) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{y^{2\nu}\ \Delta^{\nu}\phi(0)}{2^{\nu}\,\nu!\,n(n+2)\ldots(n+2(\nu-1))} \right] y^{\alpha-1}\, dy \;+$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{\Delta^{\nu}\phi(0)}{2^{\nu}\,\nu!\,n(n+2)\ldots(n+2(\nu-1))}\ \frac{1}{\alpha+2\nu}\,. \qquad (II,2;25)$$

Esta fórmula coincide esencialmente con las fórmulas (II,3;5) y (II,3;6), de [8] , pp. 44 y 45.

II.3. La distribución elíptica de Marcel Riesz.

La distribución $R_\alpha(x)$, que llamaremos distribución elíptica de Marcel Riesz, está definida por

$$R_\alpha(x) \triangleq \frac{r^{\alpha-n}}{H_n(\alpha)}\ , \tag{II,3;1}$$

donde $r = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$, (II,3;2)

$$H_n(\alpha) \triangleq \frac{\Pi^{\frac{n}{2}}\ 2^\alpha\ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\ , \tag{II,3;3}$$

donde α es un parámetro complejo.

Demostraremos a continuación las siguientes propiedades de $R_\alpha(x)$:

Teorema 1

$R_\alpha(x)$ es una función meromorfa con polos simples en los puntos $\alpha = n+2h$, $h = 0,1,\ldots$.

Demostración

Teniendo en cuenta la fórmula (II,2;13), $r^{\alpha-n}$ tiene polos simples en $\alpha = -2m$, $m = 0,1,\ldots$:

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} r^{\alpha-n} = \frac{\Omega_n}{2^m\, m!\, \prod_{k=0}^{m-1} (n+2k)} \Delta^m \delta \,, \qquad \text{(II,3;4)}$$

donde

$$\Omega_n = \frac{2\,\Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \,. \qquad \text{(II,3;5)}$$

También sabemos, según fórmula (I,12;3), que $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ tiene polos simples en $\alpha = -2m$, $m = 0,1,\ldots$ y

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2(-1)^m}{m!} \,. \qquad \text{(II,3;6)}$$

También apelando a (I,12;3) observemos que $\Gamma(\alpha)$ tiene polos simples en $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$, por lo tanto, $\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$ tiene polos simples en los puntos α tales que $\frac{n-\alpha}{2} = -h$, $h = 0, \ldots$ o sea, cuando $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$. De modo que $\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$ es holomorfa cuando $\alpha = -2m$, $m = 0,1, \ldots$.

Por la observación anterior y las fórmulas (II,3;4) y

(II,3;6) deducimos que $R_\alpha(x)$ es una regularización de $r^{\alpha-n}$.
En efecto, los polos de $r^{\alpha-n}$ son los mismos que los de la función $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, de modo que $\dfrac{r^{\alpha-n}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ es una distribución entera para todo $\alpha \in C$.

Entonces los únicos puntos singulares de $R_\alpha(x)$ son los de $\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$.

Luego, $R_\alpha(x)$ es una función meromorfa con polos simples en los puntos $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$ ∎

Teorema 2

Sea $m = 0,1,2, \ldots$. Vale la siguiente fórmula

$$R_{-2m}(x) = (-1)^m \Delta^n \delta . \tag{II,3;7}$$

Demostración

Teniendo presente las fórmulas (II,3;4) y (II,3;6), obtenemos

$$R_\alpha(x)\Big|_{\alpha=-2m} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^\alpha \, \Pi^{\frac{n}{2}}}\Bigg|_{\alpha=-2m} = \frac{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} r^{\alpha-m}}{\operatorname*{Res}_{\alpha=-2m} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^m \, 2^m \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right) \, \Omega_n}{\prod_{k=0}^{m-1} (n+2k) \; 2 \; \Pi^{\frac{n}{2}}} \, \Delta^m \delta, \qquad \text{(II,3;8)}$$

donde $\Omega_n = \dfrac{2 \, \Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

O sea, equivalentemente,

$$R_\alpha(x)\Big|_{\alpha=-2m} = \frac{(-1)^m \, 2^m \, \Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\prod_{k=0}^{m-1} (n+2k) \, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, \Delta^m \delta. \qquad \text{(II,3;9)}$$

Si substituimos en la fórmula (II,3;9) $\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)$ por su expresión equivalente (cf.[1$^{(ii)}$], p.3, fórmula 21)

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{2}+(m-1)\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{m-1} (n+2k)\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m} . \qquad \text{(II,3;10)}$$

(Esta última fórmula sale por interación de la conocida propiedad $\Gamma(\beta+1) = \beta\,\Gamma(\beta)$), resulta finalmente

$$R_\alpha(x)\Big|_{\alpha=-2m} = (-1)^m \, \Delta^m \, \delta \, .$$

Teorema 3.

La siguiente fórmula es válida,

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x) = \frac{(-1)^{h+1} \, r^{2h}}{2^{n+2h-1} \, \pi^{\frac{n}{2}} \, h! \, \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} , \qquad \text{(II,3;11)}$$

donde $h = 0,1,2, \ldots$.

Demostración

Es inmediata teniendo en cuenta la fórmula (I,12;3). En efecto,

$$\operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x) = \operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \frac{r^{\alpha-n}}{2^\alpha \Pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Bigg|_{\alpha=n+2h}$$

$$= \frac{(-1)^{h+1} \, r^{2h}}{2^{n+2h-1} \, \Pi^{\frac{n}{2}} \, h! \, \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} \, .$$

II.4. La transformada de Fourier de $R_\alpha(x)$.

Teorema 1

$$\left[R_\alpha(x)\right]^{\wedge} = y^{-\alpha} \, , \qquad \text{(II,4;1)}$$

cuando $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$.

Demostración

La siguiente fórmula es válida (cf. [3] , p. 363, fórmula 4)

$$\left[r^{\alpha-n}\right]^{\wedge} = \frac{2^\alpha \, \Pi^{\frac{n}{2}} \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} \, |y|^{-\alpha} \, , \qquad \text{(II,4;2)}$$

cuando $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$, La fórmula (II,4;2) sigue siendo válida en la región en que $r^{\alpha-n}$ existe, es decir, para todo $\alpha \neq 2m$, $m = 0,1,2, \ldots$.

De las fórmulas definitorias de $R_\alpha(x)$ ((II,3;1) y (II,3;3)) y de (II,4;2), resulta

$$\left[R_\alpha(x)\right]^{\wedge} = |y|^{-\alpha} ,$$

fórmula válida para todo α salvo en los puntos singulares de $\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)$; es decir, salvo cuando $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$ ∎

Teorema 2

Sea $f(x) \in C^{2m}(\mathbf{R}^n)$, $m = 0,1, \ldots$, (es decir continua hasta el orden $2m$ en $\mathbf{R}^n$). Vale entonces la fórmula

$$R_{-2m} * f(x) = (-1)^m \Delta^m f(x). \qquad \text{(II,4;3)}$$

Demostración

Recordando la fórmula (II,3;7), sale inmediatamente que,

$$R_{-2m} * f(x) = (-1)^m \Delta^m \delta * f(x) = (-1)^m \Delta^m f(x) .$$

El Teorema 2 muestra que es posible reducir la convolución $R_{-2m} * f$, que es una operación de integración, por medio del laplaciano iterado de $f(x)$, a una operación de derivación. Esta propiedad coincide con otro resultado debido a Marcel Riesz (cf. [6]).

Teorema 3

Sean α, β y $\alpha+\beta$ números complejos diferentes de $n+2h$, $h = 0,1, \ldots,$ entonces la siguiente fórmula es válida

$$R_\alpha * R_\beta(x) = R_{\alpha+\beta}(x) . \qquad \text{(II,4;4)}$$

Demostración.

Teniendo presente las fórmulas (VII,8;8) p. 271 de [8] y

(II,4;1), tenemos

$$\left[R_\alpha * R_\beta(x)\right]^\wedge = \left[R_\alpha\right]^\wedge \left[R_\beta\right]^\wedge = |y|^{-\alpha} . |y|^{-\beta} =$$

$$= |y|^{-(\alpha+\beta)} = \left[R_{\alpha+\beta}\right]^\wedge , \qquad \text{(II,4;5)}$$

válida si α, β y $\alpha+\beta$ son complejos diferentes de $n+2h$, $h = 0,1, \ldots$.

La fórmula (II,4;4) corresponde a otra fórmula importante demostrada por M. Riesz (cf. [6] , fórmula (11), p. 20) con las hipótesis $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha + \beta < n$.

II.5. Las propiedades fundamentales de $R_\alpha(x)$.

Teorema 1

La siguiente fórmula es válida:

$$\Delta R_{\alpha+2}(x) = - R_\alpha(x) , \qquad \text{(II,5;1)}$$

cuando α es un complejo diferente de $n+2h$, $h = 0,1, \dots$ y

$$\Delta \triangleq \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Demostración

Sabemos que (cf. (II,2;4))

$$\Delta r^{\alpha+2-n} = (\alpha+2-n)(\alpha)\, r^{\alpha-n} , \qquad \text{(II,5;2)}$$

es válida $\alpha \neq -2k$, $k = 0,1, \dots$ (puntos donde $r^{\alpha-n}$ tiene polos simples).

Entonces

$$\Delta R_{\alpha+2}(x) \triangleq \Delta \left\{ \frac{r^{\alpha+2-n}}{H_n(\alpha+2)} \right\} = \frac{\Delta \left\{ r^{\alpha+2-n} \right\}}{H_n(\alpha+2)} =$$

$$= \frac{(\alpha+2-n)\, \alpha\, r^{\alpha-n}}{H_n(\alpha+2)} , \qquad \text{(II,5;3)}$$

donde $H_n(\alpha)$ está dada por (II,3;3). Recordemos que $R_{\alpha+2}(x)$ carece de puntos singulares cuando $\alpha = -2k$.

La tesis sale inmediatamente de (II,3;3), (II,5;3) y (II,3;10), en efecto.

$$\Delta R_{\alpha+2}(x) = \frac{(\alpha+2-n)\,\alpha\, r^{\alpha-n}}{2^{\alpha+2}\,\Pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{n-\alpha-2}{2}\right), \qquad \text{(II,5;4)}$$

y

$$\Gamma\left(\frac{n-\alpha-2}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2} - 1\right) = -2\,\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)\frac{1}{(\alpha-n+2)},$$

luego, si $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots ,$ es

$$\Delta R_{\alpha+2}(x) = \frac{-\,r^{\alpha-n}}{2^{\alpha}\,\Pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\,\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) = -\,R_{\alpha}(x)\,\blacksquare$$

<u>Teorema 2</u>

Vale la siguiente fórmula:

$$\Delta^k R_\alpha(x) = (-1)^k R_{\alpha-2k}(x), \qquad (II,5;5)$$

cuando α es un complejo diferente de $n+2h$, $h = 0,1, \ldots$ y $k = 0,1, \ldots$.

El caso particular $k = 1$ corresponde al Teorema 1.

Demostración.

Probaremos este teorema por el método de inducción.

Supongamos primero $k = 1$, entonces nuestra tesis (II,5;5) es, para $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$,

$$\Delta R_\alpha(x) = - R_{\alpha-2}(x) , \qquad (II,5;6)$$

fórmula cierta por (II,5;1).

Sea ahora $k = s-1$, tenemos

$$\Delta^{s-1} R_\beta(x) = (-1)^{s-1} R_{\beta-2(s-1)}(x) , \qquad (II,5;7)$$

con $\beta \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$.

De (II,5;6) y (II,5;7) deducimos que

$$\Delta^{s} R_{\alpha}(x) = \Delta^{s-1} (\Delta R_{\alpha}(x)) = \Delta^{s-1} (-R_{\alpha-2}(x))$$

$$= - \Delta^{s-1} R_{\alpha-2}(x) , \qquad \text{(II,5;8)}$$

donde $\alpha \neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$.

Finalmente, de (II,5;7) y (II,5;8), resulta

$$\Delta^{s} R_{\alpha}(x) = - \Delta^{s-1} R_{\alpha-2}(x) = -(-1)^{s-1} R_{\alpha-2-2(s-1)}(x) =$$

$$= (-1)^{s} R_{\alpha-2s}(x) \blacksquare$$

La fórmula (II,5;5) es la fórmula (22), p. 25, de [6] .

Teorema 3.

Sea $2k \neq n+2h$, k y h enteros positivos, entonces

$$\Delta^k (-1)^k R_{2k}(x) = \delta . \qquad \text{(II,5;9)}$$

Demostración.

Poniendo $\alpha = 2k$ en (II,5;5), resulta, teniendo presente (II,3;7) con $m = 0$,

$$\Delta^k R_{2k}(x) = (-1)^k \delta ,$$

o equivalentemente,

$$\Delta^k (-1)^k R_{2k}(x) = \delta .$$

La tesis (II,5;9) del Teorema 3 expresa que $(-1)^k R_{2k}(x)$ es una solución elemental de la ecuación de Laplace iterada k veces: $\Delta^k u(x) = \delta$.

Observemos también que si n es <u>impar</u> la fórmula (II,5;9) es válida para todo k puesto que $2k \neq n+2h$.

Sabemos que (cf. Teorema 1, parágrafo 3) $R_\alpha(x)$ tiene polos simples en los puntos $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \dots$.

Consideremos el desarrollo en serie de Laurent de $R_\alpha(x)$ en un entorno del punto $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \dots$:

$$R_\alpha(x) = \frac{A_{-1}}{\alpha-n-2h} + A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(\alpha-n-2h)^\nu . \qquad \text{(II,5;10)}$$

Tenemos, por definición,

$$A_{-1} \triangleq \operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x) , \qquad \text{(II,5;11)}$$

$$A_0 \triangleq \operatorname*{Pf}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x) . \qquad \text{(II,5;12)}$$

A continuación demostraremos que el <u>residuo de $R_\alpha(x)$</u>, cuando $\alpha=n+2h$, $h = 0,1, \dots$ y n par, <u>es una solución de la ecuación</u>

de Laplace iterada k veces, $\left(k = \frac{n+2h}{2}\right)$.

Teorema 4.

Sea n par y $k = \frac{n+2h}{2}$, $h = 0, 1, \ldots$, entonces

$$\Delta^k A_{-1} = 0 , \qquad \text{(II,5;13)}$$

donde A_{-1} es el residuo de $R_\alpha(x)$, cuando $\alpha = n+2h$, dado por la fórmula (II,5;11).

Demostración.

De acuerdo con la fórmula (II,3;11) tenemos

$$A_{-1} = \operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x) = \frac{(-1)^{h+1} \, r^{2h}}{2^{n+2h-1} \, \pi^{\frac{n}{2}} \, h! \, \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} . \qquad \text{(II,5;14)}$$

Entonces

$$\Delta^k A_{-1} = \frac{(-1)^{h+1}}{2^{n+2h-1} \, \pi^{\frac{n}{2}} \, h! \, \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)} \Delta^k r^{2h} . \qquad \text{(II,5;15)}$$

Sabemos (cf. (II,2;6)) que

$$\Delta^k r^{\lambda+2k} = \prod_{i=1}^{k} (\lambda+2i) \prod_{i=0}^{k-1} (\lambda+n+2i)\, r^{\lambda} . \tag{II,5;16}$$

Haciendo $k = \frac{n+2h}{2}$, n par y $\lambda = -n$, en (II,5;16)

$$\Delta^k r^{2k} = \prod_{i=1}^{k} (2i-n) \prod_{i=0}^{k-1} (2i)\, r^{-n} = 0 . \tag{II,5;17}$$

De (II,5;15) y (II,5;17) resulta nuestra tesis ∎

El siguiente teorema muestra que si n es par y $k = \frac{n+2k}{2}$, entonces la <u>parte finita de $R_\alpha(x)$</u> por $(-1)^k$, para $\alpha = 2k = n+2h$, $h = 0,1,\ldots$; <u>es una solución elemental de la ecuación de Laplace iterada k veces</u>.

<u>Teorema 5.</u>

Sea n par y $k = \frac{n+2h}{2}$, $h = 0,1, \ldots$, entonces

$$\Delta^k (-1)^k A_0 = \delta , \tag{II,5;18}$$

donde A_0 es la parte finita de $R_\alpha(x)$, cuando $\alpha = n+2h$, dada por la fórmula (II,5;12).

Demostración.

Según la fórmula (II,5;10) es

$$A_0 = \lim_{\alpha \to n+2h} \left[R_\alpha(x) - \frac{A_{-1}}{\alpha - n - 2h} \right]$$

luego, teniendo presente (II,5;9), resulta

$$\Delta^k (-1)^k A_0 = \lim_{\alpha \to n+2h = 2k} \left[\Delta^k (-1)^k R_\alpha(x) \right] =$$

$$= \Delta^k (-1)^k R_{2k}(x) = \delta \blacksquare$$

II.6. Evaluación explícita de la parte finita de $R_\alpha(x)$, cuando $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$.

De acuerdo con la fórmula (II,5;10) A_0 puede obtenerse mediante la fórmula

$$\lim_{\alpha\to n+2h} \frac{d}{d\alpha} \Big[(\alpha-n-2h)\ R_\alpha(x) \Big] = A_0 \ . \qquad (II,6;1)$$

Teorema 1.

La parte finita de $R_\alpha(x)$, cuando $\alpha = n+2h$, $h = 0,1,\ldots$ está dada por la siguiente fórmula

$$\boxed{A_0 = \underset{\alpha=n+2h}{\mathrm{Pf}}\ R_\alpha(x) = r^{2h}\,(A + B \ln r)} \ , \qquad (II,6;2)$$

donde

$$A = (-1)^h \frac{h!\ \ln 2\ \Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[h!\ \Gamma'\left(h+\frac{n}{2}\right) + \Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)\Gamma'(h+1)\right]}{\pi^{\frac{n}{2}}\ 2^{n+2h-1}\ (h!)^2 \left[\Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)\right]^2} \qquad (II,6;3)$$

y

$$B = \frac{(-1)^{h+1}}{\pi^{\frac{n}{2}}\ 2^{n+2h-1}\ h!\ \Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)} \ . \qquad (II,6;4)$$

Demostración .

De acuerdo con (II,6;1) debemos calcular el siguiente límite:

$$A_0 \overset{L}{=} \underset{\alpha = n+2h}{\mathrm{Pf}} \ R_\alpha(x) = \lim_{\alpha \to n+2h} \frac{d}{d\alpha}\left[(\alpha - n - 2h)\ R_\alpha(x)\right] . \quad (II,6;5)$$

Equivalentemente (cf. (II,3;11)

$$A_0 = \lim_{\alpha \to n+2h} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{(\alpha - n - 2h)\ \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}}\ 2^\alpha\ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\ r^{\alpha - n} \right] . \quad (II,6;7)$$

Teniendo presente la fórmula (consecuencia de (II,3;10))

$$\frac{\Gamma(-z+\ell)}{\Gamma(-z)} = (-1)^\ell \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-\ell+1)} , \quad (II,6;8)$$

con ℓ entero positivo, la fórmula (II,6;7) puede escribirse

$$A_0 = \lim_{\alpha \to n+2h} \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{(-1)^{h+1} \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2} - h+1\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2} + h+1\right)}{\Pi^{\frac{n}{2}} \, 2^{\alpha-1} \, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \, \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2} + 1\right)} \, r^{\alpha-n} \right] . \tag{II,6;9}$$

Llamaremos, por comodidad para el cálculo,

$$K(\alpha) \triangleq \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2} - h+1\right) \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2} + h+1\right) , \tag{II,6;10}$$

$$L(\alpha) \triangleq 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2} + 1\right) , \tag{II,6;11}$$

y

$$M(\alpha) \triangleq \frac{K(\alpha)}{L(\alpha)} . \tag{II,6;12}$$

Con estas notaciones, tenemos,

$$A_0 = \frac{(-1)^{h+1}}{\Pi^{\frac{n}{2}}} \lim_{\alpha \to n+2h} \left[M'(\alpha) \, r^{\alpha-n} + M(\alpha) \frac{d}{d\alpha} r^{\alpha-n} \right] ; \tag{II,6;13}$$

Empezamos por calcular

$$M'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{K(\alpha)}{L(\alpha)}\right] = \frac{K'(\alpha)L(\alpha)-K(\alpha)L'(\alpha)}{\left[L(\alpha)\right]^2}, \qquad (II,6;14)$$

De (II,6;10) y (II,6;11), resulta

$$K'(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\Gamma'\left(\frac{\alpha-n}{2}-h+1\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}+h+1\right) - \right.$$

$$\left. - \Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}-h+1\right)\Gamma'\left(\frac{n-\alpha}{2}+h+1\right)\right], \qquad (II,6;15)$$

y

$$L'(\alpha) = 2^{\alpha-1}\left\{\ln 2\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\Gamma'\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right) + \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{\alpha-n}{2}+1\right)\right]\right\}. \qquad (II,6;16)$$

Poniendo $\alpha = n+2h$, $h = 0,1, \ldots$ en (II,6;10), (II,6;11), (II,6;15) y (II,6;16), resulta

$$K(n+2h) = \Gamma(1)\,\Gamma(1) = 1\,, \tag{II,6;1}$$

$$L(n+2h) = 2^{n+2h-1}\,\Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\Gamma(h+1)\,, \tag{II,6;1}$$

$$K'(n+2h) = \frac{1}{2}\Big[\Gamma'(1)\,\Gamma(1) - \Gamma(1)\,\Gamma'(1)\Big] = 0\,, \tag{II,6;1}$$

$$L'(n+2h) = 2^{n+2h-1}\left\{\ln 2\;\Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\Gamma(h+1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\Gamma'\left(\frac{n+2h}{2}\right)\Gamma(h+1) + \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\Gamma'(h+1)\right]\right\}. \tag{II,6;2}$$

En consecuencia,

$$M(n+2h) = \frac{K(n+2h)}{L(n+2h)} = \frac{1}{2^{n+2h-1}\,\Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\,\Gamma(h+1)}\,, \tag{II,6;2}$$

y

$$M'(n+2h) = \frac{L'(n+2h)}{\Big[L(n+2h)\Big]^2} =$$

$$= -\frac{h!\,\ln 2\,\Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\Gamma'\left(\frac{n+2h}{2}\right) h! + \Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\Gamma'(h+1)\right]}{2^{n+2h-1}\,(h!)^2\left[\Gamma\left(\frac{n+2h}{2}\right)\right]^2}\,. \tag{II,6;22}$$

Tenemos, además,

$$\frac{d}{d\alpha}\, r^{\alpha-n}\Big|_{\alpha=n+2h} = r^{2h}\ln r\,, \tag{II,6;23}$$

y

$$r^{\alpha-n}\Big|_{\alpha=n+2h} = r^{2h}, \tag{II,6;24}$$

De las fórmulas (II,6;13), (II,6;23) y (II,6;24), resulta

$$A_0 = \frac{(-1)^{h+1}}{\Pi^{\frac{n}{2}}}\left[M'(n+2h)\, r^{2h} + M(n+2h)\, r^{2h}\ln r\right]$$

$$= r^{2h}\left[\frac{(-1)^{h+1}}{\Pi^{\frac{n}{2}}}\, M'(n+2h) + \frac{(-1)^{h+1}}{\Pi^{\frac{n}{2}}}\, M(n+2h)\,\ln r\right]. \tag{II,6;25}$$

En virtud de (II,6;21) y (II,6;22) la fórmula (II,6;25) puede escribirse

$$A_0 = r^{2h}(A + B \ln r) , \qquad (II,6;26)$$

donde

$$A \triangleq \frac{(-1)^{h+1}}{\pi^{\frac{n}{2}}} M'(n+2h) =$$

$$= (-1)^h \frac{h! \ln 2 \quad \Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[h!\,\Gamma'\left(h+\frac{n}{2}\right) + \Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)\Gamma'(h+1)\right]}{\pi^{\frac{n}{2}}\, 2^{n+2h-1}\, (h!)^2 \left[\Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)\right]^2} .$$

y

$$B \triangleq \frac{(-1)^{h+1}}{\pi^{\frac{n}{2}}} M(n+2h) = \frac{(-1)^{h+1}}{\pi^{\frac{n}{2}}\, 2^{n+2h-1}\, h!\,\Gamma\left(h+\frac{n}{2}\right)} . \qquad (II,6;28)$$

Capítulo III.

La integral de Riemann-Liouville en el caso unidimensional.

Los resultados que aparecen en este capítulo fueron probados por Marcel Riesz (cf. [6]) mediante los métodos clásicos del Análisis.

Todo lo demostrado, de manera muy ingeniosa por M. Riesz, puede hacerse también usando la teoría de distribuciones. Esto permite que las demostraciones sean aún más elegantes y sencillas y queden así perfectamente justificadas todas las manipulaciones formales de Marcel Riesz.

Esta versión "distribucional" de la teoría de la integral de Riemann-Liouville se encuentra en [9].

III.1. La integral de orden α : $I^{\alpha}f$.

Sea $f(x)$ una función continua, nula para $x<0$ y sea $Y_{\alpha}(x)$ el núcleo singular de Riemann-Liouville, definido por la fórmula

$$Y_{\alpha}(x) \triangleq \frac{x_{+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} , \qquad \text{(III,1;1)}$$

donde $\frac{x_{+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ está dada por las fórmulas (I,2;1) y (I,12;4).

Llamaremos <u>integral de orden α</u> a la convolución de $f(x)$ con el núcleo singular de Riemann-Liouville, es decir,

$$I^{\alpha} f(x) \triangleq f(x) * Y_{\alpha}(x) = f(x) * \frac{x_{+}^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \text{(III,1;2)}$$

o sea,

$$I^{\alpha} f = \int_{0}^{x} f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt . \qquad \text{(III,1;3)}$$

$I^{\alpha}f$ en su expresión (III,1;3) es la forma más conocida de la <u>integral de Riemann-Liouville</u>.

$I^{\alpha}f$ existe para $\operatorname{Re} \alpha > 0$ y diverge para $\alpha = 0, -1, -2, \ldots$.

<u>Nota</u>. Marcel Riesz dice (cf. [6]) que es a partir de $I^{\alpha}f$, salvo el factor $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$, que Hadamard define la <u>parte finita</u> para valores negativos fraccionarios de α . La ausencia del factor $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ es el obstáculo para la extensión de esta noción

al valor cero y a los valores negativos enteros de α .

Se trata ahora de extender con condiciones de derivabilidad convenientes la definición de esta integral a los valores de α para los cuales no converge.

Hadamard llega a esta extensión para los valores negativos no enteros de α , suprimiendo en la integral divergente ciertas partes infinitas de orden fraccionario. Lo que resta es la parte finita de la integral.

Suponiendo la existencia de un número suficientemente grande de derivadas se puede obtener por prolongación analítica el mismo resultado para valores enteros negativos y el valor cero.

$I^{\alpha}f$ es una funcional dependiente de todos los valores que $f(t)$ admita entre 0 y x, mientras que para $\alpha = 0$ y α entero negativo tiene un valor de carácter local. Acá está en germen el principio de Huygens.

III.2. Casos particulares de $I^{\alpha}f$.

Poniendo $\alpha = 1$ y $\alpha = n$ en la fórmula (III,1;3), obtenemos, respectivamente,

$$I^{\alpha}f = I^{1}f = \int_{0}^{x} f(t)\, dt \,, \qquad \text{(III,2;1)}$$

$$I^{n}f = I^{n}f = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt\,. \tag{III,2;2}$$

III.3. Fórmula de composición de la integral de Riemann-Liouville.

Vale la siguiente fórmula de composición:

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f) = I^{\alpha+\beta}f\,, \tag{III,3;1}$$

para Re $\alpha > 0$ y Re $\beta > 0$.

En efecto, tenemos

$$I^{\beta}f(t) = \int_0^t f(v)\,\frac{(t-v)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,dv\,, \tag{III,3;2}$$

de acá, resulta

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f) = \int_0^x \left[I^{\beta}f(t)\right]\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt =$$

$$= \int_0^x \left[\int_0^t f(v) \frac{(t-v)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} dv \right] \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt . \qquad (III,3;3)$$

Haciendo $u = \frac{t-v}{x-v}$ en la fórmula (III,3;3), obtenemos

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(v)dv \int_v^x (x-t)^{\alpha-1} (t-v)^{\beta-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(v)(x-v)^{\alpha+\beta-1} dv \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du . \qquad (III,3;4)$$

Recordando que la función Beta es, por definición,

$$B(\alpha,\beta) \triangleq \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} , \qquad (III,3;5)$$

cuando $\mathrm{Re}\ \alpha>0$ y $\mathrm{Re}\ \beta>0$, de (III,3;4), resulta finalmente

$$I^{\alpha}(I^{\beta}f) = \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(v)(x-v)^{\alpha+\beta-1} dv =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x f(v)\,(x-v)^{\alpha+\beta-1}\,dv =$$

$$= I^{\alpha+\beta}(f) \, ,$$

válida si $\operatorname{Re}\alpha>0$ y $\operatorname{Re}\beta>0$ ∎

III.4. La continuación analítica de $I^{\alpha}f$.

$I^{\alpha}f$ es una función analítica de α, para $\operatorname{Re}\alpha>0$, si $f(x)$ es continua para $x\geq 0$.

Es importante el hecho de que, si $f(x)$ es suficientemente diferenciable, para $x\geq 0$, $I^{\alpha}f$ puede prolongarse analíticamente para otros valores de α; y este hecho desempeña importante papel en las aplicaciones de la integral de Riemann-Liouville a la integración de ecuaciones diferenciales. Usando integración por partes (para $\operatorname{Re}\alpha>0$), tenemos

$$I^{\alpha}f = \int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt = -f(t)\,\frac{(x-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\Bigg|_0^x +$$

$$+ \int_0^x f'(t) \frac{(x-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} dt =$$

$$= f(0) \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^x f'(t) \frac{(x-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} dt . \qquad (III,4;1)$$

Esta última fórmula es válida para $\operatorname{Re} \alpha > -1$.

Iterando el proceso, resulta

$$I^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \int_0^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+n)} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + I^{\alpha+n}(f^{(n)}) \qquad (III,4;2)$$

válida para $\operatorname{Re} \alpha > -n$.

El segundo miembro de (III,4;2) (y por lo tanto el primero) es analítico para $\operatorname{Re} \alpha > -n$. Si admitimos pues que $f(x) \in C^{\infty}(0,\infty)$, llegamos a la conclusión que $I^{\alpha} f$ es holomorfo en todo el plano.

En definitiva, la expresión $I^{\alpha}f$ es una función analítica de α para Re $\alpha > 0$, si $f(x) \in C^{0}(0,\infty)$ y si $f(x) \in C^{\infty}(0,\infty)$ podemos, por sucesivas integraciones por partes, prolongar analíticamente $I^{\alpha}f$ a todo el plano (abierto).

Poniendo $\alpha = 0$ en (III,4;2), resulta

$$I^{0} f \triangleq f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\, x^{k}}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\, dt . \qquad \text{(III,4;3)}$$

La fórmula (II,4;3) es la fórmula de Taylor en el origen con la forma integral del término complementario:

$$T_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\, dt , \qquad \text{(III,4;4)}$$

Si podemos $\alpha = -n$ en (III,4;2), tenemos

$$I^{-n} f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)\, x^{-n+k}}{\Gamma(-n+k+1)} + \lim_{\alpha \to -n} \int_{0}^{x} f^{(n)}(x)\, \frac{(x-t)^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+n)}\, dt. \qquad \text{(III,4;5)}$$

Notemos que, como consecuencia de que $\Gamma(\alpha+k+1)$, para $\alpha = -n$, tiende a infinito, el primer sumando de (III,4;5) es nulo y, por otra parte, sabemos que (cf. fórmula (I,12;4))

$\lim\limits_{\alpha\to -n} \dfrac{x_-^{\alpha+n-1}}{\Gamma(\alpha+n)} = \delta(x)$, obtenemos de (III,4;5) la siguiente fórmula

$$I^{-n} f = f^{(n)}(x) . \qquad \text{(III,4;6)}$$

La fórmula (III,4;2) que es muy cómoda cuando se trata de definir la prolongación analítica no lo es para las aplicaciones. Mostraremos a continuación el método de prolongación analítica debido a Gelfand-Hadamard que es más util en la práctica.

III.5. La continuación analítica vía el método de Gelfand--Hadamard.

Sea, para $\operatorname{Re} \alpha > 0$,

$$I^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t)-f(x)+ f(x)\right] (x-t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t)-f(x)\right] (x-t)^{\alpha-1} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(x)(x-t)^{\alpha-1} dt . \qquad (III,5;1)$$

Tenemos

$$\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} dt = \frac{x^\alpha}{\alpha} . \qquad (III,5;2)$$

Entonces, de (III,5;1) y (III,5;2), haciendo

$f(t) = f(x) + (t-x) f'(x)$, resulta

$$I^\alpha f = - \frac{f'(x)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^\alpha dt + f(x) \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} , \qquad (III,5;3)$$

válida para Re $\alpha > -1$ y $\alpha \neq -1$.

Pongamos ahora

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k . \qquad (III,5;4)$$

Suponiendo Re $\alpha > 0$, tenemos

$$I^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t)-P(t)+P(t) \right] (x-t)^{\alpha-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t)-P(t) \right] (x-t)^{\alpha-1} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x P(t)(x-t)^{\alpha-1} dt +$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t)-P(t) \right] (x-t)^{\alpha-1} dt +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k \right] (x-t)^{\alpha-1} \, dt \,. \tag{III,5;5}$$

Evaluaremos la integral que aparece en el segundo sumando de (III,5;5), tenemos

$$\int_0^x \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k \right] (x-t)^{\alpha-1} \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \int_0^x (x-t)^{\alpha+k-1} \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \frac{x^{\alpha+k}}{\alpha+k} \,. \tag{III,5;6}$$

Entonces, finalmente, de (III,5;5) y (III,5;6), es

$$I^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left[f(t) - P(t) \right] (x-t)^{\alpha-1} \, dt \quad +$$

$$+\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{f^{(k)}(x)}{(\alpha+k)k!} x^{\alpha+k} . \qquad (III,5;7)$$

Si $f^{(n)}(t)$ existe y es continua, $I^{\alpha}f$ converge si $\mathrm{Re}\ \alpha > -n$ y (III,5;7) define la prolongación analítica para todos estos valores. $I^{\alpha}f$ es entonces una función holomorfa de α, puesto que $\Gamma(\alpha)(\alpha+k) \neq 0$.

En particular, como

$$\lim_{\alpha \to -k} (\alpha+k)k!\ \Gamma(\alpha) = (-1)^k , \qquad (III,5;8)$$

obtenemos,

$$I^{-k} f(x) = f^{(k)}(x) . \qquad (III,5;9)$$

Poniendo $\alpha = 0$ en (III,5;7), resulta,

$$I^{0} f(x) = f(x) . \qquad (III,5;10)$$

No es necesario para la validez de (III,5;9) y (III,5;10) que las derivadas $f^{(k)}(x)$ existan en sentido estricto. Es suficiente, por ejemplo, que exista un polinomio $P(t)$ tal que $\left[f(t)-P(t)\right](x-t)^{-n}$ permanezca acotado cuando $t \to x$.

Para las aplicaciones es útil, a menudo, tener la singularidad en el origen.

Para ello, definimos

$$J^{\alpha}f(0) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(t)\, t^{\alpha-1}\, dt . \qquad \text{(III,5;11)}$$

Poniendo entonces

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, t^k , \qquad \text{(III,5;12)}$$

se tiene

$$J^{\alpha}f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b \left[f(t)-P(t)+P(t)\right] t^{\alpha-1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b \left[f(t)-P(t) \right] t^{\alpha-1}\, dt \quad +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{(k+\alpha)k!}\, b^{k+\alpha}. \qquad (III,5;13)$$

En particular,

$$J^0 f(0) = f(0), \qquad (III,5;14)$$

y

$$J^{-k} f(0) = (-1)^k\, f^{(k)}(0). \qquad (III,5;15)$$

III.6. Aplicación a la integración de ecuaciones diferenciales.

Se trata de determinar una función $f(x)$ que satisfaga, para $0 \leqslant x \leqslant b$, la siguiente ecuación

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = A(x), \qquad (III,6;1)$$

con las condiciones

$$f(0) = f_0, \qquad \text{(III,6;2)}$$

y

$$f'(0) = f_1 . \qquad \text{(III,6;3)}$$

A(x) es una función de x conocida.

El primer paso es resolver la ecuación homogénea

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0 , \qquad \text{(III,6;4)}$$

cuya solución es

$$f(x) = Cx + C_1 , \qquad \text{(III,6;5)}$$

con C y C_1 constantes. De (III,6;2) y (III,6;3) resulta

$$C = f_1 \quad y \quad C_1 = f_0 \ . \qquad \text{(III,6;6)}$$

Para resolver la ecuación inhomogénea (III,6;1) bastará conocer alguna solución de la ecuación

$$\frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \delta \ . \qquad \text{(III,6;7)}$$

Consideremos para ello la función g(x) definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \text{(III,6;8)}$$

que en el origen no es diferenciable, pero sí lo es como distribución.

Tenemos

$$\frac{dg}{dx} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \text{(III,6;9)}$$

(función de Heaviside)

y

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \delta(x) . \qquad (III,6;10)$$

En consecuencia, la solución de la ecuación inhomogénea (III,6;1) es

$$f_{NH} \triangleq g(x) * A(x) = \int_0^x A(t)g(x-t)dt = \int_0^x A(t)(x-t)\, dt . \qquad (III,6;11)$$

Entonces finalmente de (III,6;5), (III,6;6) y (III,6;11), resulta

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \int_0^x f''(t)(x-t)\, dt , \qquad (III,6;12)$$

o sea, conociendo $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ queda determinada $f(x)$.

Por otra parte, poniendo $n = 2$ en la fórmula (III,4;2), con $f(x) \in C^2(0,\infty)$, $f(x) = 0$ si $x < 0$, resulta

$$I^{\alpha} f = \sum_{k=0}^{1} f^{(k)}(0) \frac{x^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + \int_0^x f^{(2)}(t) \frac{(x-t)^{\alpha+2-1}}{\Gamma(\alpha+2)} dt =$$

$$= f^{(0)}(0) \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{f^{(1)}(0)\, x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \int_0^x f^{(2)}(t) \frac{(x-t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} dt\ .$$

(III,6;13)

Haciendo $\alpha = 0$ en ambos miembros de (III,6;13), resulta

$$I^{0} f = f(x) = f(0)+f'(0)x + \int_0^x f''(t)(x-t)\, dt\ , \qquad \text{(III,6;14)}$$

resultado idéntico a (III,6;12)▪

III.7. Diferenciación bajo el signo de integral.

Por las reglas usadas de diferenciación se tiene, para $\mathrm{Re}\ \beta > 0$,

$$\frac{d}{dx} I^{\beta+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)(x-t)^{\beta} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^x f(t) \frac{d}{dx} (x-t)^{\beta} \, dt =$$

$$= \frac{\beta}{\Gamma(\beta+1)} \int_0^x f(t) \, (x-t)^{\beta-1} \, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x f(t)\,(x-t)^{\beta-1} \, dt \,. \qquad (III,7;1)$$

Es decir, en definitiva,

$$\frac{d}{dx} I^{\beta+1} f = I^{\beta} f \,, \qquad (III,7;2)$$

válida si Re $\beta > 0$ y por prolongación analítica si Re $\beta > -n$.

Más general todavía, vale la relación,

$$\frac{d^k}{dx^k} I^{\beta+k} = I^{\beta} \,, \qquad (III,7;3)$$

válida si Re $\beta > -n$.

Teniendo en cuenta la fórmula (III,5;9), la fórmula (III,7;3) puede escribirse, equivalentemente,

$$I^{-k}(I^{\beta}f) = I^{-k+\beta} f . \qquad \text{(III,7;4)}$$

III.8. Integrales y derivadas de orden fraccionario.

Partimos de la clásica expresión de la función Γ debida a Euler:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du , \qquad \text{(III,8;1)}$$

válida para $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Sea $x > 0$ y hagamos en (III,8;1) en cambio de variable

$$u = xt , \qquad \text{(III,8;2)}$$

obtenemos así,

$$\Gamma(\alpha) = x^{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\alpha-1} dt ,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{x^{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{\alpha-1} dt . \qquad (III,8;3)$$

La fórmula (III,8;3) es una de las transformadas de Laplace más importantes.

Hemos supuesto, para llegar a (III,8;3) partiendo de (1), $x > 0$. Pero ahora podemos hacer x complejo, pues, como es sabido la integral (III,8;3) converge, y define una función holomorfa, para $\mathrm{Re}\, x > 0$. Pongamos, para seguir la costumbre,

$$z = x + iy .$$

Tenemos, en definitiva la integral de Laplace

$$\frac{1}{z^{\alpha}} = \int_0^{\infty} e^{-zt} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \qquad (III,8;4)$$

convergente para $\text{Re } z > 0$, $\text{Re } \alpha > 0$.

Esta integral va a desempeñar papel fundamental en lo que sigue.

Sea la transformada de Laplace

$$f(z) = \mathcal{L}\left[F(t)\right] = \int_0^\infty e^{-zt} F(t)\, dt . \tag{III,8;5}$$

Para fijar las ideas, supongamos que la abscisa de convergencia absoluta de (III,8;5) es $x = 0$. Del teorema de intercambio de la convolución con el producto para transformadas de Laplace deducimos de (III,8;4) y (III,8;5),

$$\frac{f(z)}{z^\alpha} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ F(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} dt ,$$

o sea,

$$\frac{f(z)}{z^\alpha} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t F(\tau) \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \right\} dt , \tag{III,8;6}$$

válida para $\text{Re } z > 0$, $\text{Re } \alpha > 0$.

En particular, si $\alpha = n =$ entero positivo, obtenemos de (III,8;6),

$$\frac{f(z)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t F(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)} d\tau \right\} dt. \qquad (III,8;7)$$

Vamos ahora a obtener una expresión equivalente de la integral (III,8;7). Partamos para ello de la integral (III,8;7), para $n = 1$:

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t F(\tau)\, d\tau \right\} dt \qquad (III,8;8)$$

que, poniendo

$$\int_0^t F(\tau)\, d\tau = G(t) ,$$

escribimos

$$\frac{f(z)}{z} = \int_0^\infty e^{-zt}\, G(t)\, dt . \qquad (III,8;9)$$

Escribamos ahora la (III,8;4) para $\alpha = 1$:

$$\frac{1}{z} = \int_0^\infty e^{-zt} H(t)\, dt \,, \qquad \text{(III,8;10)}$$

donde H(t) es la función de Heaviside.

De (III,8;9) y (III,8;10), obtenemos

$$\frac{f(z)}{z} \cdot \frac{1}{z} = \frac{f(z)}{z^2} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ G(t) * H(t) \right\} dt \,, \qquad \text{(III;8;11)}$$

Pero

$$G(t) * H(t) = \int_0^t G(\tau)\, d\tau \,; \qquad \text{(III,8;12)}$$

por lo tanto, de (III,8;11) y (III,8;12),

$$\frac{f(z)}{z^2} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t G(\tau)\, d\tau \right\} dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t d\tau_2 \int_0^{\tau_2} F(\tau_1)\, d\tau_1 \right\} dt \; ; \qquad \text{(III,8;13)}$$

e iterando el procedimiento obtenemos, en definitiva,

$$\frac{f(z)}{z^n} = \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ \int_0^t d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_2} F(\tau_1)\, d\tau_1 \right\} dt \, . \qquad \text{(III,8;14)}$$

De (III,8;7) y (III,8;14) obtenemos, por aplicación del teorema de identidad para integrales de Laplace,

$$\int_0^t d\tau_{n-1} \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_2} F(\tau_1)\, d\tau_1 = \int_0^t F(\tau) \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)}\, d\tau \, . \qquad \text{(III,8;15)}$$

La (III,8;15) nos dice que, si $F(t) = 0$ para $t < 0$, la integral indefinida, n veces iterada de F(t), puede expresarse por la integral simple que figura en el segundo miembro de (III,8;15).

La (III,8;15) aparte de su interés para el cálculo efectivo de integrales iteradas, nos permite inmediatamente, siguien do a Riemann y a Liouville, introducir el concepto importante de <u>integral iterada de orden fraccionario</u> 0, más generalmente, de integral de orden complejo arbitrario, siempre que α sea > 0 ó, Re $\alpha > 0$.

Si designamos con $I^n[f(t)]$ la integral iterada de orden n de $F(t)$ (supuesta nula para $t<0$), la (III,8;15) puede escribirse

$$I^n[F(t)] = \int_0^t F(\tau)\, \frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)}\, d\tau = F(t) * \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} \, . \qquad \text{(III,8;16)}$$

La (III,8;16) nos sugiere inmediatamente la siguiente definición de integral iterada de orden α (Re $\alpha>0$) de la función $F(t)$ (recordemos que $F(t) = 0$ para $t< 0$):

$$\boxed{I^{\alpha}[F(t)] = \int_0^{\infty} F(\tau)\, \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, d\tau \, .} \qquad \text{(III,8;17)}$$

Esta es, precisamente, la definición de Riemann-Liouville, de integral iterada de orden fraccionario.

Para probar que la (III,8;17) es efectivamente una generalización útil habrá que comprobar que el símbolo $I^{\alpha}[F(t)]$ goza de las propiedades usuales de la integral iterada, cuando α es entero, es decir, habrá que probar que, si $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, vale la fórmula

$$I^{\beta}\left\{I^{\alpha}[F(t)]\right\} = I^{\alpha+\beta}[F(t)] . \tag{III,8;18}$$

Demostraremos que (III,8;18) es efectivamente válida. En efecto,

$$I^{\beta}\left\{I^{\alpha}[F(t)]\right\} = I^{\beta}\left\{F(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} =$$

$$= \left\{F(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right\} * \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = F(t) * \left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\right\} . \tag{III,8;19}$$

Calculemos la convolución

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\alpha-1} (t-x)^{\beta-1}\, dt \,. \qquad (III,8;20)$$

Haciendo el cambio de variable $\frac{x}{t} = u$, obtenemos (cf. (III,3;5))

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (i-u)^{\beta-1}\, du =$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, B(\alpha,\beta) =$$

$$= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \,. \qquad (III,8;20)$$

De (III,8;19) y (III,8;20), resulta

$$I^{\beta}\left\{I^{\alpha}\left[F(t)\right]\right\} = F(t) * \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = I^{\alpha+\beta}\left[F(t)\right],$$

válida si $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $\operatorname{Re}\beta > 0$ ■

III.9. Un teorema de aproximación

Consideremos la función $Y_\alpha(t)$, de la variable t y del parámetro α, definida por la fórmula (III,1;1). Sea $\alpha > 0$, $F(t)$ una función continua y $A > 0$. Vale entonces el siguiente

Teorema 1

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^A F(t)\, Y_\alpha(t)\, dt = \lim_{\alpha\to 0} \int_0^A F(t) \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt = F(0). \tag{III,9;1}$$

Demostración

Escribamos

$$I(\alpha) \overset{\Delta}{=} \int_0^A F(t)\, Y_\alpha(t)\, dt = \int_0^A \left[F(t)-F(0)+F(0)\right] Y_\alpha(t)\, dt$$

$$= \int_0^A \left[F(t)-F(0)\right] Y_\alpha(t)\, dt + F(0)\int_0^A Y_\alpha(t)\, dt =$$

$$= \int_0^A \left[F(t)-F(0)\right] \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt + F(0)\int_0^A \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt \overset{\Delta}{=}$$

$$\stackrel{L}{=} \quad I_1(\alpha) + I_2(\alpha). \qquad \text{(III,9;2)}$$

Se verifica en seguida que $I_2(\alpha) \to F(0)$. En efecto,

$$\int_0^A \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left.\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\right|_0^A = \frac{A}{\Gamma(\alpha+1)} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1. \qquad \text{(III,9;3)}$$

Para demostrar el teorema bastará pues mostrar que $I_1(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$. Para hacerlo, elegimos $\varepsilon > 0$, arbitrario, $I_1(\alpha)$ puede escribirse

$$I_1(\alpha) = \int_0^{\delta}\left[F(t)-F(0)\right]\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt + \int_{\delta}^{A}\left[F(t)-F(0)\right]\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt\,.$$

(III,9;4)

La (III,9;4) vale para todo δ tal que $0 < \delta < A$. Fijemos δ por la condición

$$|F(t) - F(0)| < \varepsilon\,, \qquad \text{(III,9;5)}$$

si $t \leqslant \delta$, Esto puede hacerse, en virtud de la supuesta continuidad de F en el origen.

Escribamos ahora

$$|I_1(\alpha)| \leqslant \left| \int_0^{\delta} [F(t) - F(0)] \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \right| +$$

$$+ \left| \int_{\delta}^{A} [F(t) - F(0)] \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\delta} | F(t) - F(0)| \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \quad +$$

$$+ \int_{\delta}^{A} |F(t) - F(0)| \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \quad \stackrel{\Delta}{=}$$

$$\stackrel{\Delta}{=} I_3(\alpha) + I_4(\alpha) . \qquad (III,9;6)$$

Vamos a demostrar que tanto $I_3(\alpha)$ como $I_4(\alpha)$ pueden hacerse arbitrariamente pequeños, eligiendo α suficientemente pequeño, con ello el teorema quedará demostrado.

En efecto,

$$I_3(\alpha) \leqslant \varepsilon \int_0^{\delta} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt < \varepsilon \int_0^{1} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt =$$

$$= \varepsilon \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \varepsilon \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} < \varepsilon , \qquad \text{(III,9;7)}$$

Por otra parte,

$$I_4(\alpha) = \int_{\delta}^{A} |F(t) - F(0)| \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\delta}^{A} \left[|F(t)| + |F(0)| \right] t^{\alpha-1}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2 \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant A} |F(t)|}{\Gamma(\alpha)\alpha} \left\{ A^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right\} \leqslant 2 \max_{0 \leqslant t \leqslant A} |F(t)| \; .$$

$$. \left\{ A^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right\} . \qquad \text{(III,9;8)}$$

Como el factor $\left\{ A^{\alpha} - \delta^{\alpha} \right\}$ puede hacerse arbitrariamente peque_ño, eligiendo α suficientemente pequeño, el teorema queda demostrado ∎

Teorema 2

Sea, por definición,

$$I(x,\alpha) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^x F(t)\,\frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt \quad , \qquad \text{(III,9;9)}$$

con $x > 0$. Si $F(t)$ es continua para $t \geqslant 0$, se verifica

$$\lim_{\alpha \to 0} I(x,\alpha) = F(x) \; . \qquad \text{(III,9;10)}$$

Demostración

Es inmediata con el cambio de variable

$$x - t = u \; . \qquad \text{(III,9;11)}$$

En efecto, con el cambio de variable (III,9;11), obtenemos

$$I(x,\alpha) = -\int_x^0 F(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du =$$

$$= \int_0^x F(x-u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du, \qquad \text{(III,9;12)}$$

que también puede escribirse

$$I(x,\alpha) = \int_0^x \phi(u)\frac{u^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,du, \qquad \text{(III,9;13)}$$

poniendo

$$F(x,u) = \phi(u). \qquad \text{(III,9;14)}$$

Notemos que, en virtud de la supuesta continuidad de F, la función $\phi(u) = \phi_x(u)$ es función continua de u (y del parámetro x).

Por lo tanto, aplicando a (III,9;13) el Teorema 1, obtenemos

$$\lim_{\alpha\to 0} I(x,\alpha) = \phi(0) = F(x-0) = F(x),$$

y el Teorema 2 está demostrado ∎

Introduzcamos ahora la distribución analítica $R_-(x,\alpha)$ definida por la fórmula

$$R_-(x,\alpha) \triangleq \frac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 0 \,, \\ \dfrac{|x|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{si} \quad x \leq 0 \,. \end{cases} \qquad \text{(III,9;15)}$$

Pongamos

$$I_-^{\alpha}\left[f(x)\right] \triangleq f(x) * R_-(x,\alpha) \,. \qquad \text{(III,9;16)}$$

En esta fórmula $f(x)$ es una función localmente integrable (o más generalmente una distribución) y entonces la convolución (III,9;16) tiene sentido. Puede suceder que la (III,9;16) no tenga sentido debido al insuficiente decrecimiento de la distribución f en el infinito. Tales convoluciones divergentes juegan un papel fundamental en teoría cuántica de campos. En conexión con este tema ver [10].

Tenemos, por definición (III,9;16),

$$I_-^{\alpha}\left[f(x)\right] = f(x) * R_-(x,\alpha) = \int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x-t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(x+t)\,dt . \qquad \text{(III,9;17)}$$

Vamos a escribir $I_-^{\alpha} f(x)$ de otra manera.

Pongamos

$$I_-^{\alpha} f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \frac{(x-t)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt + \int_{x}^{\infty} f(t) \frac{(x-t)_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt ;$$

o sea, por definición de $\dfrac{x_-^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$,

$$I_-^{\alpha} f(x) = \int_{x}^{\infty} f(t) \frac{|x-t|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt ;$$

en definitiva,

$$I_-^{\alpha}\left[f(x)\right] = \int_{x}^{\infty} f(t) \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,dt . \qquad \text{(III,9;18)}$$

El segundo miembro de (III,9;18) es la llamada <u>integral de Weyl</u> de $f(x)$.

Vale la siguiente fórmula de composición:

$$I_-^{\alpha}\left\{ I_-^{\beta}\left[f(x)\right]\right\} = I_-^{\alpha+\beta}\left[f(x)\right] , \qquad \text{(III,9;19)}$$

si $f(x) = 0$ para $x \geqslant 0$.

Tenemos, por definición,

$$R_-(x,\alpha) * R_-(x,\beta) = \int_x^0 \frac{|t|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{|t-x|^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_x^0 |t|^{\alpha-1} \Big[-|t| - (-|x|)\Big]^{\beta-1} dt =$$

$$= \frac{(-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{-x}^0 |t|^{\alpha-1} \Big[|x| - |t|\Big]^{\beta-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{-x} |t|^{\alpha-1} \Big[|x| - |t|\Big]^{\beta-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^{|x|} t^{\alpha-1} (|x| - t)^{\beta-1} dt . \qquad (III,9;20)$$

Con el cambio de variable

$$\frac{t}{|x|} = u ,$$

obtenemos de (III,9;20) la expresión equivalente

$$R_-(x,\alpha) * R_-(x,\beta) = \frac{(|x|)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du ,$$

o sea, por la fórmula de la Beta (cf. (III,3;5)), es

$$R_-(x,\alpha) * R_-(x,\beta) = \frac{|x|^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = R_-(x,\alpha+\beta) . \qquad (III,9;21)$$

Tenemos también

$$I_-^{\alpha}\left\{ I_-^{\beta}\ \left[f(x) \right] \right\} = I_-^{\alpha}\left\{ f(x) * R_-(x,\beta) \right\} =$$

$$= \left\{ f(x) * R_-(x,\beta) \right\} * R_-(x,\alpha) = f(x) * \left\{ R_-(x,\beta) * R_-(x,\alpha) \right\}.$$

(III,9;22)

De (III,9;21) y (III,9;22), resulta

$$I_-^{\alpha}\left\{ I_-^{\beta}\ \left[f(x) \right] \right\} = f(x) * R_-(x,\alpha+\beta) =$$

$$= I_-^{\alpha+\beta}\left[f(x) \right], \qquad \text{(III,9;23)}$$

válida para $\operatorname{Re}\alpha > 0$ y $\operatorname{Re}\beta > 0$.

Capítulo IV.

La integral de Riemann-Liouville en el espacio euclídeo n-dimensional.

IV.I. Evaluación de una constante

En este capítulo extenderemos al caso n-dimensional la integral de Riemann-Liouville unidimensional, estudiada en el Capítulo III.

La extensión de $I^{\alpha} f$ a n dimensiones puede hacerse en dos direcciones: usando la métrica euclídea, que da lugar a la integración elíptica o bien, la métrica lorentziana, que origina la integración hiperbólica.

Sean $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $Q = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dos puntos del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbf{R}^n$.

Sean

$$r_{PQ} = r_{QP} = r = \left[\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{(IV,1;1)}$$

la distancia euclídea de los puntos P y Q.

Definamos, para $\operatorname{Re} \alpha > 0$,

$$I^{\alpha}[f(P)] \triangleq \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{R^n} f(Q)\, r_{PQ}^{\alpha-n}\, dQ \;, \qquad (IV,1;2)$$

donde $H_n(\alpha)$ es una constante dependiente de α y de n y $dQ = d\xi_1\, d\xi_2 \;\ldots\; d\xi_n$ es el elemento de volumen de $\mathbf{R}^n$. $I^{\alpha}f(P)$ es, por definición, el potencial generalizado de orden α o potencial elíptico de orden fraccionario de Marcel Riesz.

Notemos que si $n = 1$, $I^{\alpha}f(P)$ no da la integral de Riemann-Liouville para el caso unidimensional pues en (IV,1;2) la integral varía de $-\infty$ a $+\infty$, mientras que en (III,1;3) la integral varía de 0 a ∞.

$H_n(\alpha)$ desempeña acá el papel que en una dimensión tenía $\Gamma(\alpha)$ y se determina de modo tal que valgan las relaciones siguientes:

$$I^{\alpha}\left\{ I^{\beta}\left[f(P)\right] \right\} = I^{\alpha+\beta}\left[f(P)\right] \;, \qquad (IV,1;3)$$

y

$$\Delta\, I^{\alpha+2}\left[f(P)\right] = -I^{\alpha}\left[f(P)\right] \;, \qquad (IV,1;4)$$

donde, como es usual,

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\,, \qquad \text{(IV,1;5)}$$

es el operador de Laplace.

Es evidente que las (IV,1;3) y (IV,1;4) exigen una condición suplementaria: continuidad en general, determinando $H_n(\alpha)$ de manera única, salvo un factor $e^{in\alpha\pi}$, n entero.

Elijamos, para evaluar $H_n(\alpha)$, la función $f(P) = e^{ix_1}$. Tenemos así

$$I^{\alpha} e^{ix_1} = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{R_n} e^{i\xi_1} \left[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - x_k)^2 \right]^{\frac{\alpha-n}{2}} d\xi_1\, d\xi_2 \ldots\, d\xi_n\,, \qquad \text{(IV,1;6)}$$

Haciendo $\xi_k - x_k = \eta_k$, obtenemos

$$I^{\alpha} e^{ix_1} = \frac{1}{H_n(\alpha)}\, e^{ix_1} \int_{R^n} e^{i\eta_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \right)^{\frac{\alpha-n}{2}} d\eta_1\, d\eta_2 \ldots\, d\eta_n\,. \qquad \text{(IV,1;7)}$$

Si ponemos

$$H_n(\alpha) = \int_{R^n} e^{i\eta_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \right)^{\frac{\alpha-n}{2}} d\eta_1 , d\eta_2 \dots d\eta_n , \qquad (IV,1;8)$$

obtenemos

$$I^\alpha e^{ix_1} = e^{ix_1} . \qquad (IV,1;9)$$

Luego se verifican las relaciones (IV,1;3) y (IV,1;4) para la función particular elegida.

Calculemos

$$H_n(\alpha) = \int_{R^n} e^{i\eta_1} \left(\sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \right)^{\frac{\alpha-n}{2}} d\eta_1 \ d\eta_2 \dots d\eta_n . \qquad (IV,1;10)$$

La función a integrar es constante sobre la esfera $\eta_2^2 + \eta_3^2 + \dots$ $\dots + \eta_n^2 = \rho^2$, entonces tenemos

$$d\eta_1 \ d\eta_2 \dots d\eta_n = d\eta_1 \ d\rho \ dS_{n-1}(\rho) =$$

$$= d\eta_1 \ d\rho \ \rho^{n-2} \ S_{n-1}(1) , \qquad (IV,1;11)$$

donde

$$S_n(1) = \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,, \tag{IV,1;12}$$

es el área de la esfera unidad.

De (IV,1;10), (IV,1;11) y (IV,1;12), tenemos

$$H_n(\alpha) = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta_1} (\rho^2+\eta_1^2)^{\frac{\alpha-n}{2}} \rho^{n-2} d\eta_1\, d\rho. \tag{IV,1;13}$$

Haciendo en (IV,1;13)

$$\begin{aligned} \eta_1 &= r\ \cos\Theta\,, \\ \rho &= r\ \operatorname{sen}\Theta\,, \end{aligned} \tag{IV,1;14}$$

resulta

$$H_n(\alpha) = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} e^{ir\cos\Theta}\, r^{\alpha-n}\, r^{n-2} \operatorname{sen}^{n-2}\Theta\ r\ dr =$$

$$= \frac{2\Pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{n-2}\Theta \, d\Theta \int_0^{\infty} e^{ir\cos\Theta} r^{\alpha-1} \, dr \, . \tag{IV,1;15}$$

Evaluaremos ahora la segunda integral del segundo miembro de (IV,1;15):

$$L(\alpha,\Theta) \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{\infty} e^{ir\cos\Theta} r^{\alpha-1} \, dr \, . \tag{IV,1;16}$$

Pongamos $r \cos \Theta = r$ en (IV,1;16), tenemos

$$L(\alpha,\Theta) = \frac{1}{|\cos\Theta|^{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{ir} r^{\alpha-1} \, dr \, . \tag{IV,1;17}$$

Usando el teorema de Cauchy referente a la integral de una función holomorfa a lo largo de un contorno cerrado, obtenemos,

$$L(\alpha,\Theta) = e^{\pm\frac{i\pi\alpha}{2}} |\cos\Theta|^{-\alpha} \Gamma(\alpha) \, , \tag{IV,1;18}$$

donde el signo $\mp$ del exponente de $e^{\pm i \frac{\pi}{2} \alpha}$ depende de cos θ . Primero suponemos Re $\alpha > 1$, luego por prolongación analítica la fórmula es válida para todo α .

Usando los siguientes resultados conocidos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} \theta \cos^{-\alpha} \theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} , \qquad (IV,1;19)$$

$$\Gamma(\alpha) = 2^{\alpha-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) , \qquad (IV,1;20)$$

y

$$\Gamma(\alpha) \quad (1-\alpha) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi \alpha} ; \qquad (IV,1;21)$$

tenemos, en definitiva,

$$\boxed{H_n(\alpha) = \frac{2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)} .} \qquad (IV,1;22)$$

IV.2. La fórmula de composición.

Sea

$$I^{\alpha}\left\{I^{\beta}\left[f(P)\right]\right\} = \frac{1}{H_n(\alpha)}\int_{R^n}\left\{\frac{1}{H_n(\beta)}\int_{R^n} f(S)\ r_{QS}^{\beta-n}\ dS\right\} r_{PQ}^{\alpha-n}\ dQ =$$

$$= \frac{1}{H_n(\alpha)H_n(\beta)}\int_{R^n} f(S)\ dS \int_{R^n} r_{PQ}^{\alpha-n}\ r_{QS}^{\beta-n}\ dQ\ . \qquad (IV,2;1)$$

Suponemos que todas las integrales que figuran en el cálculo son absolutamente convergentes.

Por una translación, la última integral se reduce primero a una integral de la misma forma donde P es reemplazado por el origen y S por un punto cuya distancia al origen es r_{PS}. Por una homotecia se llega a

$$\int_{R^n} r_{PQ}^{\alpha-n}\ r_{QS}^{\beta-n}\ dQ = r_{PS}^{\alpha+\beta-n}\int_{R^n} r_{OT}^{\alpha-n}\ r_{1T}^{\beta-n}\ dT\ , \qquad (IV,2;2)$$

donde r_{OT} y r_{1T} son las distancias del punto T al origen y a un cierto punto a distancia 1 del origen.

Evidentemente, la última integral

$$B_n(\alpha,\beta) \triangleq \int_{\mathbf{R}^n} r_{OT}^{\alpha-n}\, r_{1T}^{\beta-n}\, dT, \qquad \text{(IV,2;3)}$$

depende sólo de α, β y n y converge si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\alpha + \beta < n$.

De (IV,2;2) y (IV,2;3), resulta

$$\int_{\mathbf{R}^n} r_{PQ}^{\alpha-n}\, r_{QS}^{\beta-n}\, dQ = r_{PS}^{\alpha+\beta-n}\, B_n(\alpha,\beta). \qquad \text{(IV,2;4)}$$

Poniendo $f(P) = e^{ix_1}$ en (IV,2;1) y teniendo presente (IV,2;4), obtenemos

$$I^{\alpha}\left\{ I^{\beta}\left[e^{ix_1}\right]\right\} = \frac{B_n(\alpha,\beta)}{H_n(\alpha)H_n(\beta)} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix_1}\, r_{PS}^{\alpha+\beta-n}\, dS \,. \qquad \text{(IV,2;5)}$$

Resulta entonces,

$$I^{\alpha}\left\{I^{\beta}\left[e^{ix_1}\right]\right\}= B_n(\alpha,\beta)\,\frac{H_n(\alpha+\beta)}{H_n(\alpha)H_n(\beta)}\,I^{\alpha+\beta}\cdot\left[e^{ix_1}\right]. \qquad (IV,2;6)$$

De acuerdo con (IV,1;3), el factor que acompaña a $I^{\alpha+\beta}\left[e^{ix_1}\right]$ debe ser igual a 1, es decir, debe verificarse,

$$B_n(\alpha,\beta)\,\frac{H_n(\alpha+\beta)}{H_n(\alpha)H_n(\beta)} = 1\,, \qquad (IV,2;7)$$

o sea, equivalentemente,

$$B_n(\alpha,\beta) = \frac{H_n(\alpha)H_n(\beta)}{H_n(\alpha+\beta)}\,. \qquad (IV,2;8)$$

De (IV,2;6) y (IV,2;8) obtenemos, finalmente,

$$I^{\alpha}\left\{I^{\beta}\left[e^{ix_1}\right]\right\}= I^{\alpha+\beta}\left[e^{ix_1}\right]. \qquad (IV,2;9)$$

IV.3. El potencial newtoniano

La función $r^{\alpha+2-n}$ pertenece a C^2 cuando $\mathrm{Re}\,\alpha$ es suficientemente grande, tenemos entonces,

$$\Delta r^{\alpha+2-n} = \alpha(\alpha+2-n)\, r^{\alpha-n} , \qquad (IV,3;1)$$

Recordando la fórmula (IV,1;2) obtenemos, luego de cálculos largos pero elementales,

$$\frac{\Delta r^{\alpha+2-n}}{H_n(\alpha+2)} = -\frac{r^{\alpha-n}}{H_n(\alpha)} . \qquad (IV,3;2)$$

La fórmula (IV,3;2) que fue demostrada para $\operatorname{Re}\alpha > 0$ es válida, por el principio de prolongación analítica, para todo valor de α .

Es decir, hemos probado la fórmula (IV,1;4), a saber,

$$\Delta I^{\alpha+2}[f(P)] = -I^{\alpha}[f(P)] , \qquad (IV,3;3)$$

válida para todo α .

Poniendo $\alpha = 0$ en (IV,3;3), resulta

$$\Delta I^2 \left[f(P) \right] = - I^0 f(P) \triangleq - f(P). \qquad \text{(IV,3;4)}$$

La fórmula (IV,3;4) expresa que el operador I^2 es, excepto un signo, el operador inverso de Δ. Podemos escribir, formalmente,

$$\boxed{I^2 = - \Delta^{-1}.} \qquad \text{(IV,3;5)}$$

De la fórmula (IV,1;2), poniendo $\alpha = 2$ $(n \neq 2)$, resulta

$$I^2 \left[f(P) \right] = \frac{1}{H_n(2)} \int_{R^n} f(Q)\, r_{PQ}^{2-n}\, dQ \,, \qquad \text{(IV,3;6)}$$

donde (cf.(IV,1;12))

$$H_n(2) = \frac{4 \Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} . \qquad \text{(IV,3;7)}$$

Tenemos así la expresión del llamado potencial newtoniano, a saber,

$$\boxed{I^{2}\left[f(P)\right] = \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\,\Pi^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} f(Q)\, r_{PQ}^{2-n}\, d\,Q\,.} \qquad (IV,3;8)$$

IV.4. El potencial logarítmico

Si ponemos $n = 2$ en (IV,3;8), el factor que aparece delante de la integral del segundo miembro se hace infinito y la expresión carece de sentido.

Con la condición adicional que la integral de $f(Q)$ extendida a todo el espacio se anule, más aún, que sea nula la masa total:

$$\int_{R^n} f(Q)\, dQ = 0\,, \qquad (IV,4;1)$$

se puede poner la siguiente definición

$$I^2\left[f(P)\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} I^{2-\varepsilon}\left[f(P)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi\, 2^{2-\varepsilon}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{R^2} f(Q)\, r_{PQ}^{-\varepsilon}\, dQ =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\pi\, 2^{2-\varepsilon}\, \Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)} \int_{R^2} f(Q) \left(r_{PQ}^{-\varepsilon} - 1\right) dQ \,. \qquad (IV,4;2)$$

Obtenemos, de (IV,4;2), la siguiente fórmula

$$\boxed{I^2\left[f(P)\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}}\, dQ \,.} \qquad (IV,4;3)$$

el segundo miembro de la fórmula (IV,4;3) es el llamado <u>potencial logarítmico</u> .

El caso más general, cuando la masa total M es diferente de cero, se puede obtener desarrollando $I^{\alpha}[f(P)]$ en serie de Laurent en un entorno del punto $\alpha = 2$ $(n = 2)$.

Resulta así

$$I^{\alpha}\left[f(P)\right] = \frac{A_{-1}}{\alpha-2} + A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\alpha-2)^k , \qquad (IV,4;4)$$

donde

$$A_{-1} = - \frac{M}{\Pi}$$

y

$A_0 \stackrel{\Delta}{=}$ potencial logarítmico, a menos de una constante aditiva.

Podemos escribir entonces,

$$\frac{1}{2\Pi} \int_{R^2} f(Q) \log \frac{1}{r_{PQ}} dQ = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left(I^{2-\varepsilon}\left[f(P)\right] + I^{2+\varepsilon}\left[f(P)\right] \right).$$

(IV,4;4)

El cálculo explícito de A_0 aparece en el Capítulo II, parágrafo 6.

En efecto, A_0 no es más que la parte finita, para $\alpha = 2$ $(n = 2)$ de $\frac{r^{\alpha-2}}{H_2(\alpha)}$.

Es en la expresión de A_0 donde aparece $\log \frac{1}{r_{PQ}}$ que da nombre al operador $I^{\alpha}\left[f(P)\right]$ cuando $\alpha = 2$, $n = 2$.

Capítulo V.

La integral de Riemann-Liouville en el caso hiperbólico.

En 1949, Marcel Riesz publicó en el Acta Matemática, volúmen 81, (loc. cit.) un largo trabajo sobre la integral de Riemann-Liouville y el problema de Cauchy.

En este trabajo introdujo integrales múltiples del tipo Riemann-Liouville y dió la solución del problema de Cauchy para la ecuación de las ondas por una fórmula única, la misma para un número par o impar de dimensiones, mediante una prolongación analítica con respecto al parámetro α .

La principal dificultad consistía en probar que I^0 es el operador identidad.

En 1959, Marcel Riesz publica un trabajo en el Canadian Journal, titulado "The analytic continuation of the Riemann--Liouville integral in the hyperbolic case" (cf. [7]). El principal aporte de esta Nota consiste en dar una demostración más satisfactoria del hecho, ya probado de modo "ni simple ni elegante", según dice M. Riesz en [6], que I^0 es el operador identidad.

En este capítulo daremos una nueva versión, siguiendo [7], cuya simplificación consiste en la elección de una superficie especial de integración.

V.I. Notaciones

Sea X un punto del espacio n-dimensional de Lorentz (espacio-tiempo)

$$X = \left(x^0,\ x^1,\ \ldots,\ x^{n-1}\right). \tag{V,1;1}$$

La forma métrica del espacio de Lorentz está definida por el producto escalar

$$(X,X) = (x^0)^2 - (x^1)^2 - \ldots - (x^{n-1})^2 . \tag{V,1;2}$$

El cuadrado de la distancia de dos puntos X, Y está dado por la fórmula

$$R_{XY} = r^2_{XY} = (x-y,\ x-y) = (x^i - y^i,\ x^k - y^k). \tag{V,1;3}$$

El producto escalar (a,b) de dos vectores a y b, con las respectivas componentes a^k, b^k viene dado por

$$(a,b) = (a^0 b^0)-(a^1 b^1)-\ldots-(a^{n-1} b^{n-1}). \qquad (V,1;4)$$

Dos vectores cuyo producto escalar es nulo se llaman <u>ortogonales</u> . Será equivalente en lo que sigue normalidad y ortogonalidad.

Si el producto escalar (a,a) es positivo, se dice que a es un vector de tipo tiempo o, más brevemente, <u>de tiempo</u>, si $(a,a) = 0$ se dice que es un vector <u>luz</u> o vector <u>nulo</u>, si $(a,a) < 0$, a es un vector de tipo espacio, o más brevemente, <u>de espacio</u>.

Un vector a de tiempo o de luz se dice positivo o negativo, según que su componente temporal a^0 sea positiva o negativa.

Resumiendo,

$$\begin{array}{c} (a,a) > 0 \\ \\ a \ \underline{\text{vector tiempo}} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} a^0 > 0 & \text{vector tiempo positivo,} \\ \\ a^0 < 0 & \text{vector tiempo negativo.} \end{array} \right.$$

(V,1;5)

$$(a,a) = 0 \qquad \begin{cases} a^0 > 0 & \text{vector luz positivo,} \\ a^0 < 0 & \text{vector luz negativo.} \end{cases}$$

a vector luz

(V,1;6)

Ahora definimos si

$(u,u) = 1$, u vector de tiempo unitario.

(V,1;7)

$(v,v) = -1$, v vector de espacio unitario.

El cono de ondas o cono de luz o cono característico del vértice a está dado por la ecuación

$$(x-a,\ x-a) = 0 . \qquad (V,1;8)$$

Los semiconos positivos y negativos están definidos por las fórmulas:

$$(x-a,\ x-a) = 0 \quad \begin{cases} x^0 - a^0 > 0 & \text{semicono } \underline{\text{directo}} \text{ o positivo } \Gamma^+, \\ & \qquad\qquad (V,1;9) \\ x^0 - a^0 < 0 & \text{semicono retrógado o negativo } \Gamma^- . \end{cases}$$

Estos semiconos serán llamados conos de luz positivos y negativos en lo que sigue.

Consideremos una variedad (curva) S p-dimensional. Individualizaremos sus puntos $Q(\xi_k)$ por medio de p parámetros

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

Designemos por ξ al vector de componentes ξ_k, el elemento de volumen dS de S o elemento de superficie en caso de ser $1 < p < n$ por

$$d\,S = |\gamma|^{\frac{1}{2}}\ d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots\ d\lambda_p \qquad (V,1;10)$$

donde

$$\gamma = |\gamma_{ik}| = \left| \left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda_i}\ ,\ \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_k} \right) \right| \qquad (i,k = 1,2,\ \ldots,\ p\ )$$

$$= \Sigma\, \varepsilon_t\, \varepsilon_\mu \left| \begin{matrix} \frac{\partial \xi_t}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \lambda_1} & \cdots \\ \frac{\partial \xi_t}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \lambda_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right|^2 , \qquad (V,1;11)$$

donde $\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_r = -1.$

El elemento de arco $d\sigma$ está definido por

$$d\sigma^2 = |(d\xi, d\xi)| = \left| \left(\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_k} d\lambda_k ,\ \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \lambda_k} d\lambda_k \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{i,k=1}^{n} \gamma_{ik}\, d\lambda_i\, d\lambda_k \right| . \qquad (V,1;12)$$

Una (hiper) <u>superficie</u> (n-1)-dimensional se dice que es de ti<u>po espacio</u> si su normal es una vector tiempo.

Sea S una superficie de tipo espacio.

Supongamos que el cono negativo o cono retrógado C^x con vértice x y la superficie S delimiten un dominio acotado D_s^x.

Consideremos funciones definidas en dominios que comprendan a D^x y hagamos la hipótesis de que existen y son continuas todas las derivadas de las funciones que intervengan (explícita o implícitamente) en nuestros cálculos.

Diremos que tales funciones tienen un buen comportamiento o que son "buenas" (es decir, que $f(P) \to 0$ rápidamente en la parte infinita del cono).

Lo mismo sucederá si hablamos de la superficie S y las funciones definidas en S.

Formemos el potencial de volumen

$$I^{\alpha}[f(X)] = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{D_S^x} f(\gamma)\, r_{XY}^{\alpha-n}\, dV , \qquad (V,1;13)$$

donde $dV = dy^0\, dy^1 \ldots dy^{n-1}$ es el elemento de volumen de Lorentz n dimensional y

$$H_n(\alpha) = \Pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\alpha-1}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right) . \qquad (V,1;14)$$

La integral (V,1;13) converge para $\operatorname{Re} \alpha > n-2$.

Con S_+ designamos la distancia lorentziana del punto X al origen, o sea, de acuerdo con (V,1;3)

$$S_+^2 \overset{\Delta}{=} R_{XO} = r_{XO}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - \ldots - \left(x^{n-1}\right)^2 \qquad (V,1;15)$$

El objetivo de este capítulo es demostrar, con adecuadas hipótesis sobre $f(x)$, la fórmula

$$I^{\alpha}[f(X)] \xrightarrow[\alpha \to 0]{} f(x) . \qquad (V,1;16)$$

La fórmula (V,1;16) es la fórmula fundamental de la memoria de M. Riesz ([6]).

La siguiente elegante demostración es la que figura en [7].

La simplificación de esta demostración si se la compara con la primera demostración de [6] se debe a la introducción, por parte de Marcel Riesz, de un adecuado sistema de coordenadas.

V,2. Un sistema coordenado

Colocaremos el origen 0 en el punto X y eventualmente nos referiremos al dominio D_S^0 cuyas coordenadas serán introducidas acá.

Denotaremos por $\underline{a}$ un vector de tiempo unitario, negativo, fijo y por $\underline{v}$ un vector de espacio unitario, variable, ortogonal a a.

En una referencia de Lorentz adecuada puede escribirse:

$$a = (-1, 0, \ldots, 0)\ , \tag{V,2;1}$$

$$v = (0, v^1, \ldots, v^{n-1})\ , \tag{V,2;2}$$

con

$$\sum_{k=0}^{n-1} (v^k)^2 = 1\ . \tag{V,2;3}$$

Si el vector v tiene su origen en el origen de coordenadas, describe la esfera unitaria S_{n-2} que yace en el (n-1) plano ortogonal a a.

Escribamos explícitamente que

$$(a,a) = 1 \text{ (a vector de tiempo unitario)}, \tag{V,2;4}$$

$$(v,v) = -1 \text{ (v vector del espacio unitario)},$$

$$(a,v) = 0 \text{ (a ortogonal a v)}.$$

Un vector arbitrario y puede escribirse

$$Y = ta + \rho v\ , \quad \rho \geqslant 0\ , \tag{V,2;5}$$

(recordemos que v es variable).

Admitamos que siempre se verifique $t \geq 0$.

Esta desigualdad se verifica siempre en el dominio $\overset{0}{D_s}$ (o sea si $y \in \Gamma^+$).

La relación (V,2;5) puede también ser escrita

$$Y = \frac{1}{2}(t+\rho)(a+v) + \frac{1}{2}(t-\rho)(a-v). \qquad (V,2;6)$$

Pongamos ahora

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(a+v) \ , \\ c &= \frac{1}{2}(a-v) \ . \end{aligned}\right\} \qquad (V,2;7)$$

De (V,2;6) y (V,2;7), obtenemos

$$Y = (t+\rho)\, b + (t-\rho) c = (t+\rho)\left(b + \frac{t-\rho}{t+\rho}\, c\right) . \qquad (V,2;8)$$

Introduzcamos todavía las nuevas notaciones:

$$\frac{t-\rho}{t+\rho} = \tau \;, \qquad\qquad t+\rho = \sigma \;. \tag{V,2;9}$$

Obtenemos

$$Y = \sigma(b + \tau\, c) \;, \tag{V,2;10}$$

donde $\underline{\sigma}$ y $\underline{\tau}$ son escalares y $\underline{b}$, $\underline{c}$ e Y vectores.

Las fórmulas inversas de (V,2;9) son

$$\rho = \frac{1}{2}\,\sigma(1-\tau) \;, \qquad\qquad t = \frac{1}{2}\,\sigma(1+\tau) \;. \tag{V,2;11}$$

De (V,2;4) y (V,2;7) sale que b y c son vectores negativos nulos, en efecto,

$$b = \frac{1}{2}\,(a+v) = \left(-\,\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}v^{1},\ \ldots\ ,\ \frac{1}{2}v^{n-1}\right) , \tag{V,2;12}$$

$$c = \frac{1}{2}(a-v) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}v^1, \ldots, -\frac{1}{2}v^{n-1}\right), \qquad (V,2;13)$$

$$(b,b) = \left[\frac{1}{2}(a+v), \frac{1}{2}(a+v)\right] = 0, \qquad (V,2;14)$$

$$(c,c) = \left[\frac{1}{2}(a-v), \frac{1}{2}(a-v)\right] = 0. \qquad (V,2;15)$$

(V,2;12) y (V,2;13) dicen que b y c son vectores negativos y (V,2;14) y (V,2;15) dicen que b y c son vectores de luz.

Finalmente,

$$(b,c) = \left[\frac{1}{2}(a+v), \frac{1}{2}(a-v)\right] = \frac{1}{2}. \qquad (V,2;16)$$

Nuestras variables serán $\underline{\tau}$ y $\underline{\sigma}$ y la variable angular $\underline{v}$ que varía en la esfera S_{n-2} y determina los vectores b y c.

Algunas de las razones por las cuales las nuevas coordenadas nos resultarán tan útiles son las siguientes:

Teorema 1.

El cuadrado de la distancia lorentziana de un punto al origen, puede expresarse, por medio de $\underline{\tau}$ y $\underline{\sigma}$, estando las variables separadas.

Demostración

De acuerdo con (V,2;4), (V,2;5) y (V,2;9) se verifica

$$
\begin{aligned}
(Y,Y) &= (ta + \rho v, ta + \rho v) = \\
&= t^2(a,a) + t\rho(a,v) + \rho t(v,a) + \rho^2(v,v) = \\
&= t^2 - \rho^2 = (t+\rho)(t-\rho) = \\
&= (t+\rho)^2 \frac{t-\rho}{t+\rho} = \sigma^2 \tau .
\end{aligned}
\qquad (V,2;17)
$$

Agreguemos que (V,2;17) es también consecuencia de

$$y = \sigma(b+\tau c),\ (b,b) = 0,\ (b,c) = \frac{1}{2}\ \text{y}\ (c,c) = 0 .$$

En efecto,

$$
\begin{aligned}
(Y,Y) &= \left[\sigma (b+\tau c) , \sigma (b+\tau c)\right] = \\
&= \sigma^2\left[(b,b) + \tau (c,b)+ \tau (b,c)+ \tau^2(c,c)\right] = \\
&= \sigma^2 \tau \ .
\end{aligned}
$$

Teorema 2

El vértice del cono directo está dado por la ecuación

$$\sigma = 0 \ . \tag{V,2;18}$$

Demostración

El cono C^0 tiene por ecuación $(Y,Y) = 0$, o sea de acuerdo con el Teorema 1,

$$\sigma^2\tau = 0 \ .$$

Como es

$$Y = ta + \rho v$$

será (en el vértice)

$$0 = 0a + 0v ,$$

o sea,

$$t + \rho = 0 = \sigma .$$

Es decir , $\sigma = 0$.

En el vértice $\sigma = 0$, mientras τ es indeterminado, en efecto,

$$\tau = \frac{t-\rho}{t+\rho} = \frac{0}{0} \text{ (en el vértice) indeterminado.}$$

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación $y = ta + \rho v$ en el cono, excepto en el vértice es

$$t = \rho \ ,$$

o sea,

$$t - \rho = 0 \ .$$

Es decir,

$$\tau = \frac{t-\rho}{t+\rho} = 0 \ ,$$

$$\sigma = t + \rho > 0. \qquad (V,2;19)$$

Por otra parte, de la ecuación

$$\tau = \frac{t-\rho}{t+\rho} \ ,$$

se deduce que, en el interior del cono es $0 < \tau \leqslant 1$.

En particular, se deduce que será $\tau = 1$ en el eje y (porque $\rho = 0$) o, equivalentemente,

$$y = \sigma a.$$

De acuerdo con (V,2;19) y las inecuaciones $t \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$, tenemos siempre $\sigma \geqslant 0$.

La ecuación $\sigma = cte = \gamma > 0$, la cual en virtud de (V,2;9), es equivalente a

$$t + \rho = \gamma > 0 \qquad \text{(V,2;20)}$$

es la ecuación del cono de luz positivo C_{γ_a}, con vértice en γ_a.

Es claro que las inecuaciones $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ y $0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma$ caracterizan el interior y la frontera de un doble cono $\overset{o}{D}_{\gamma a}$ limitado por el cono de luz negativo $\overset{o}{C}$ y el cono de luz positivo $C_{\gamma a}$.

Supondremos de aquí en adelante que la función $f(x)$ es "buena" (en realidad, $f(x) \in \mathcal{D}$).

Tenemos

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\sigma (b + \tau c) \right] = \sigma c ,$$

$$\frac{\partial^p Y}{\partial \tau^p} = 0 , \qquad p = 2,3, \ldots \quad . \tag{V,2;21}$$

Recordemos que la ecuación (V,2;21) es una ecuación vectorial equivalente al sistema

$$\frac{\partial Y_\nu}{\partial \tau} = \sigma c_\nu ; \quad \nu = 0,1, \ldots , n-1,$$

por lo tanto, derivando,

$$\frac{\partial^p Y_\nu}{\partial \tau^p} = 0 ; \quad p = 2,3, \ldots \quad .$$

Sea ahora una función $f(x) \in \mathcal{D}$.

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \cdot \frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} .$$

Substituyendo en esta fórmula $\frac{\partial x_\nu}{\partial \tau}$ por su valor (V,2;21) obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \sigma c_\nu = c \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} .$$

Análogamente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \sigma \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} \right\} =$$

$$= \sigma^2 \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\mu c_\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} ,$$

y, en general,

$$\frac{\partial^p f}{\partial \tau^p} = \sigma^p \left(\Sigma\, c_\nu \, \partial_\nu \right)^p f \,. \qquad (V,2;22)$$

De

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} = \sigma^2 \sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\mu \, c_\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} \,,$$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} \right| \leqslant \sigma^2 \sum_{\mu,\nu=0}^{n-1} |c_\mu| \; |c_\nu| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right| \leqslant \sigma^2 M \,,$$

y, análogamente,

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial \tau^p} \right| \leqslant \sigma^p N \,. \qquad (V,2;23)$$

Recordemos ahora la ecuación (V,2;18) que nos dice que el vértice del cono directo tiene por ecuación $\sigma = 0$.

De (V,2;18) y (V,2;22) se deduce la siguiente proposición:

Teorema 3

Las derivadas $\frac{\partial^p f}{\partial \tau^p}$ se anulan en el vértice del cono.

Los Teoremas 1, 2 y 3 nos muestran el por qué las nuevas coordenadas definidas por (V,2;5) son tan útiles .

V.3. El potencial de volumen

Llamaremos dS_{n-2} al elemento de área de la esfera S_{n-2}. El elemento de volumen $dX = dx^0 dx^1 \dots dx^{n-1}$, puede escribirse en las nuevas coordenadas ρ, t :

$$dV = \rho^{n-2} \, d\rho \, dt \, dS_{n-2} . \qquad (V,3;1)$$

Recordemos las fórmulas

$$\rho = \frac{\sigma}{2} (1-\tau) \ ,$$

$$t = \frac{\sigma}{2} (1+\tau) \ .$$

Calculemos el jacobiano de la transformación

$$\frac{d(\rho,t)}{d(\sigma,\tau)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(1-\tau) & -\frac{\sigma}{2} \\ \frac{1}{2}(1+\tau) & \frac{\sigma}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sigma}{2} . \qquad (V,3;2)$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (V,2;5), (V,2;10), (V,2;17) y (V,3;1), obtenemos

$$\frac{1}{H_n(\alpha)} f(Y) r^{\alpha-n} dV = \frac{1}{H_n(\alpha)} f(ta+\rho v) .$$

$$. \left\{ \left[(t+\rho)^2 \frac{t-\rho}{t+\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\alpha-n} \rho^{n-2} d\rho \, dt \, d S_{n-2} =$$

$$= \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} f[\sigma(b+\tau c)] \sigma^{\alpha-1} \tau^{\frac{\alpha-n}{2}} (1-\tau)^{n-2} d\tau \, d\sigma \, dS_{n-2} .$$

(V,3;3)

A fin de obtener $I^0[f(X)]$ integramos esta expresión sobre el dominio D_s^0 .

Es conveniente dividir el dominio en dos partes, estudiándolas separadamente.

Primero elegimos γ suficientemente pequeño, de modo tal que el doble cono $D_{\gamma a}^0$ estará contenido en D_s^0. Luego dividiremos el resto del dominio en $D_{\gamma a}^0$ y $D_s^0 - D_{\gamma a}^0$ y mostraremos por diferentes caminos que las correspondientes partes de la integral I^α denotadas por I_I^α y I_{II}^α son holomorfas para $\alpha > -1$ y que $I_I^0[f(x)] = f(0)$, $I_{II}^0[f(x)] = 0$ lo cual da

$$I^0[f(x)] = I_I^0[f(x)] + I_{II}^0[f(x)] = f(0).$$

Comenzaremos por evaluar I_I^α .

Ahora se va a ver la extraordinaria simplificación que trae aparejado el utilizar las coordenadas τ y σ .

En efecto, de acuerdo con las fórmulas $0 < \tau \leqslant 1$, $\tau = 1$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma$, el dominio de integración $D_{\gamma a}^0$ tiene por ecuación, en las variables σ, τ,

$$0 \leqslant \tau \leqslant 1, \qquad\qquad 0 \leqslant \sigma \leqslant \gamma . \qquad (V,3;4)$$

Es decir, los límites de integración con respecto a τ y σ son <u>fijos</u>, lo cual simplifica extraordinariamente la evaluación de la integral.

Tenemos pues, de acuerdo con (V,3;4),

$$I_1^{\alpha} [\, f(X)] = \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_{D_s^x} f(Y)\, r_{XY}^{\alpha-n} \, d\,V =$$

$$= \int_{S_{n-2}} dS_{n-2} \int_0^{\nu} d\sigma \int_0^1 \ldots \, d\tau \qquad (V,3;5)$$

donde los puntos suspensivos denotan el integrando del segundo miembro de (V,3;3).

Recordemos la definición

$$H_n(\alpha) = \Pi^{\frac{n-2}{2}} \; 2^{\alpha-1} \; \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right) , \qquad (V,3;6)$$

y la fórmula conocida

$$B(r,s) = \int_0^1 t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt = \frac{\Gamma(r)\,\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}, \qquad (V,3;7)$$

y la "clásica fórmula de duplicación de la función Γ":

$$\Gamma(r) = \Pi^{-\frac{1}{2}}\, 2^{r-1}\, \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right). \qquad (V,3;8)$$

Además necesitamos la fórmula que da el área total de la esfera S_{n-2}:

$$|S_{n-2}| = \frac{2\,\Pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}. \qquad (V,3;9)$$

Vamos a calcular primero la integral interior de $I^{\alpha}[f(0)]$, o sea,

$$A(\alpha) = \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \int_0^1 \phi[\sigma(b+\tau c)]\, \tau^{\frac{\alpha-n}{2}} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau . \qquad (V,3;10)$$

Un paso importante es desarrollar por la fórmula de Mc.

Laurin con la forma integral del resto.

Tenemos

$$\phi(X) = \phi[\sigma(b+\tau c)] = \Phi(\tau) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\tau^{\nu}}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(0) + R_N(\tau) , \qquad (V,3;11)$$

donde

$$\Phi^{(\nu)}(0) = \left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial\tau^{\nu}} \Phi[\sigma(b+\tau c)] \right]_{\tau=0} \qquad (V,3;12)$$

y

$$R_N(\tau) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^{\tau} \Phi^{(N)}(t) \, (\tau - t)^{N-1} d\tau . \qquad (V,3;13)$$

En esta fórmula, N es un entero suficientemente grande que luego fijaremos.

Es evidente que $R_N(\tau) = 0(\tau^N)$.

Observemos también que la integral $A(\alpha)$ es convergente para

$$\alpha > n-2 . \qquad (V,3;14)$$

Por substitución de (V,3;11) en (V,3;10), obtenemos

$$A(\alpha) = \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \int_0^1 R_N(\tau)\ \tau^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau \ +$$

$$+ \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \int_0^1 \left\{ \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{\tau^\nu}{\nu!}\ \Phi^{(\nu)}(0) \right\} \tau^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau$$

$$\triangleq c(\alpha) + E(\alpha) \ . \qquad (V,3;15)$$

$E(\alpha)$ puede escribirse equivalentemente

$$E(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{N-1} \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \frac{\Phi^{(\nu)}(0)}{\nu!} \int_0^1 \tau^{\nu+\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} A_\nu(\alpha)\ \Phi^{(\nu)}(0) \ , \qquad (V,3;16)$$

donde

$$A_\nu(\alpha) = \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \frac{1}{\nu!} \int_0^1 \tau^{\nu+\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau \ . \qquad (V,3;17)$$

Por otra parte,

$$\int_0^1 \tau^{\nu+\frac{1}{2}(\alpha-n)}(1-\tau)^{n-2}\, d\tau = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(\alpha-n+2)+\nu\right]\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\alpha+n)+\nu\right)} \; . \qquad (V,3;18)$$

Substituyendo (V,3;18) en (V,3;17), obtenemos

$$A_\nu(\alpha) = \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \frac{1}{\nu!} \frac{\Gamma(n-1)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+\nu\right)} \; . \qquad (V,3;19)$$

Por lo tanto, para $\nu = 0$,

$$A_0(\alpha) = \frac{2^{1-n}\;\Gamma(n-1)}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}\; 2^{\alpha-1}\;\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)} \; . \qquad (V,3;20)$$

Por otra parte, de (V,3;8), resulta

$$A_0(\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \quad K_0(\alpha) \; , \qquad (V,3;21)$$

donde hemos puesto,

$$K_0(\alpha) = \frac{2^{1-n}\,\Gamma(n-1)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)} . \qquad (V,3;22)$$

Por lo tanto, poniendo $\alpha = 0$,

$$K_0(0) = \frac{2^{1-n}\,\Gamma(n-1)}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} , \qquad (V,3;23)$$

o, equivalentemente, usando otra vez la fórmula (V,3;8),

$$K_0(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{2\,\Pi^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{1}{|S_{n-2}|} . \qquad (V,3;24)$$

Volvamos ahora a la expresión (V,3;16) que escribimos

$$E(\alpha) = A_0(\alpha)\,\Phi(0) + \sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu(\alpha)\,\Phi^{(\nu)}(0) . \qquad (V,3;25)$$

De (V,3;21),

$$E(\alpha) = K_0(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(0) + \sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu(\alpha) \phi^{(\nu)}(0) . \qquad (V,3;26)$$

De acuerdo con (V,3;12), tenemos

$$E(\alpha) = K_0(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \phi(b\sigma) + \sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu(\alpha) \phi^{(\nu)}(0) . \qquad (V,3;27)$$

Volvamos ahora a la fórmula (V,3;5). De acuerdo con (V,3;3) deberemos substituir (V,3;27) en la integral con respecto a $d\sigma$ que figura en el segundo miembro de (V,3;5) y después de calcular esta integral, calcular finalmente la integral con respecto al dS_{n-2} y finalmente pasar al límite cuando $\alpha \to 0$.

Comencemos por substituir (en la integral con respecto a $d\sigma$) el primer sumando del segundo miembro de (V,3;27).

Consideremos pues la integral

$$K_0(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\nu \phi(b\sigma) \sigma^{\alpha-1} d\sigma . \qquad (V,3;28)$$

Integrando ahora con respecto a dS_{n-2} , obtenemos

$$\int_{S_{n-2}} dS_{n-2} \left\{ K_0(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\nu} \phi(b\sigma)\, \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma \right\} . \qquad (V,3;29)$$

La integral interior, en virtud de (III,9;1), converge uniformemente hacia $\phi(0)$.

Por lo tanto llegamos a la conclusión, de acuerdo con (V,3;24), de que el límite de la expresión que precede es

$$\lim_{\alpha\to 0} K_0(\alpha) \left| S_{n-2} \right| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\nu} \phi(b\,\nu)\, \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma = \phi(0). \qquad (V,3;30)$$

La integral (V,3;28) converge para $\alpha > 0$ y de acuerdo con lo sabido para el caso unidimensional, la continuación analítica de (V,3;28) es holomorfa para $\alpha > -1$.

Para $\alpha = -1$, la función $\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$ tiene un polo.

Procedamos ahora a substituir el segundo sumando del segundo miembro de (V,3;27) en nuestra integral.

Es decir, debemos cálcular la integral

$$\int_0^{\nu} \sigma^{\alpha-1}\left[\sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu(\alpha) \quad \phi^{(\nu)} \quad (0)\right] d\,\sigma = \sum_{\nu=1}^{N-1} A_\nu(\alpha)\int_0^{\nu} \sigma^{\alpha-1} \phi^{(\nu)}(0) \;\; d\sigma .$$

(V,3;31)

Observemos que se verifica, por fórmula clásica:

$$\Gamma\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n) + \nu\right] = \Gamma\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n)\right] .$$

$$\cdot\left\{\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n)\right]\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n) + 1\right] \ldots \left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n) + \nu - 1\right]\right\} =$$

$$= \Gamma\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n)\right] \quad P_\nu(\alpha) \; , \qquad \text{(V,3;32)}$$

donde

$$P_\nu(\alpha) = \left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n)\right]\left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n) + 1\right] \ldots \left[\frac{1}{2}(\alpha + 2-n) + \nu - 1\right] .$$

(V,3;33)

Es decir, que $P_\nu(\alpha)$ es un polinomio en α , de grado ν . Substituyendo (V,3;32) en (V,3;19), obtenemos

$$A_\nu(\alpha) = \frac{2^{1-n} \;\; \Gamma(n-1) \;\; \Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right)}{H_n(\alpha) \;\; \nu! \;\; \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2} + \nu\right)} \;\; P_\nu(\alpha) . \qquad \text{(V,3;34)}$$

Recordando la fórmula de duplicación (V,3;8), resulta

$$A_\nu(\alpha) = K_\nu(\alpha)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\,, \qquad (V,3;35)$$

donde hemos puesto

$$K_\nu(\alpha) = \frac{2^{1-n}\,\Gamma(n-1)\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}\,\nu!\,\Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}+\nu\right)}\,P_\nu(\alpha). \qquad (V,3;36)$$

Empecemos ahora por recordar que, de acuerdo con la fórmula (V,3;19) y la fórmula (V,3;12), todas las integrales que figuran en el segundo miembro de (V,3;31) contienen el factor σ^ν, con $\nu \geqslant 1$.

Por tal razón, todas las integrales son convergentes si $\alpha > -1$.

Por otra parte, de acuerdo con (V,3;36)

$$K_\nu(0) = \frac{2^{1-n}\,\Gamma(n-1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Pi^{\frac{n-2}{2}}\,\nu!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+\nu\right)}\,P_\nu(0) = \text{cantidad finita.}$$

Por otra parte $\frac{1}{\Gamma(0)} = \frac{1}{\infty} = 0$, por lo tanto el segundo miembro de (V,3;31) se anula para $\alpha = 0$, o sea,

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_0^{\nu} \left[\sum_{\nu=1}^{N-1} A_{\nu}(\alpha) \; \sigma^{\alpha-1} \; \phi^{(\nu)}(0) \right] d\sigma = 0. \qquad (V,3;37)$$

Debemos ahora calcular, de acuerdo con (V,3;14) y (V,3;15), el siguiente límite

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{S_{n-2}} d\, S_{n-2} \int_0^{\nu} \sigma^{\alpha-1} \, C(\sigma, \alpha) \, d\sigma \,, \qquad (V,3;38)$$

donde

$$C(\sigma, \alpha) = \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} \int_0^1 R_N(\tau) \; \tau^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} \; (1-\tau)^{n-2} \; d\tau \quad (V,3;39)$$

y las fórmulas (V,3;11) y (V,3;13).

Observemos que, de acuerdo con (V,2;22), $\phi^{(N)}(t,\sigma)$ contiene un factor σ^N.

De acuerdo con (V,3;13) y (V,2;23) podemos escribir

$$R_N(\tau) \leqslant \frac{c\,\sigma^N}{(N-1)!} \int_0^{\tau} (\tau - t)^{N-1} \; dt \,. \qquad (V,3;40)$$

Con el cambio de variable $\tau - t = \lambda$, tenemos

$$\int_0^\tau (\tau-t)^{N-1}\, dt = -\int_\tau^0 \lambda^{N-1}\, d\lambda = \int_0^\tau \lambda^{N-1}\, d\lambda = \frac{\tau^N}{N} . \qquad (V,3;41)$$

Por substitución de (V,3;41) en (V,3;40), obtenemos

$$R_N(\tau) \leqslant \frac{C}{N!}\, \sigma^N \tau^N . \qquad (V,3;42)$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{S_{n-2}} dS_{n-2} \int_0^\nu \sigma^{\alpha-1}\, d\sigma \int_0^1 \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)}\, R_N(\tau)\, \tau^{\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{N!} \int_{S_{n-2}} dS_{n-2} \int_0^\nu \sigma^{\alpha+N-1}\, d\sigma \int_0^1 \frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)}\, \tau^{N+\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau .$$

(V,3;43)

Por otra parte,

$$\int_0^1 \tau^{N+\frac{1}{2}(\alpha-n)} (1-\tau)^{n-2}\, d\tau = \frac{\Gamma\left(N+\frac{\alpha-n+2}{2}\right)\Gamma(n-1)}{\Gamma\left(N+\frac{\alpha+n}{2}\right)} . \qquad (V,3;44)$$

Además

$$\frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)} = \frac{2^{1-n}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+2-n}{2}\right)\Gamma(\alpha)} . \qquad (V,3;45)$$

De (V,3;43), (V,3;44) y (V,3;45), obtenemos (si $\alpha>-1$)

$$\frac{C}{N!}\int_{S_{n-2}} dS_{n-2}\int_0^{\nu}\sigma^{N+\alpha-1}\,d\sigma\int_0^1\frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)}\,\tau^{N+\frac{1}{2}(\alpha-n)}(1-\tau)^{n-2}\,d\tau =$$

$$= \frac{C}{N!}\,\frac{2^{1-n}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma(n-1)}{\Pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(N+\frac{\alpha+n}{2}\right)}\,P_N(\alpha)\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)} .$$

$$, \int_0^{\nu}\sigma^{N+\alpha-1}\,d\sigma \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0 . \qquad (V,3;46)$$

De (V,3;43) y (V,3;46) se deduce

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{S_{n-2}} dS_{n-2}\int_0^{\nu}\sigma^{\alpha-1}\,d\sigma\int_0^1\frac{2^{1-n}}{H_n(\alpha)}\,R_N(\tau)\,\tau^{\frac{1}{2}(\alpha-n)}(1-\tau)^{n-2}\,d\tau = 0.$$

(V,3;47)

Estudiaremos ahora $I^{\alpha}_{II} f$.

Para hacerlo dividiremos el dominio $D^{0}_{s} - D^{0}_{\gamma^a}$ en dos partes de acuerdo con $0 \leqslant \tau \leqslant \delta$ y $\delta < \tau \leqslant 1$.

El potencial de volumen correspondiente a $\delta < \tau \leqslant 1$ es una función entera que se anula para todos los enteros pares $\leqslant 0$.

Para estudiar $I^{\alpha}_{II} f$ en la primera parte, consideramos

$$I^{\alpha}_{II} f = \frac{2^{1-n}}{L_n(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{S_{n-2}} dS_{n-2} \int_0^{\delta} F(\tau, \nu, \alpha)\, t^{\beta-1} (1-\tau)^{n-2} d\tau, \tag{V,3;48}$$

donde hemos puesto, por definición,

$$L_n(\alpha)\Gamma(\beta) = H_n(\alpha) ,$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\alpha - n) + 1 ,$$

y

$$F(\tau, \nu, \alpha) = \int_{\gamma}^{\sigma} f[\sigma(b + \tau c)]\, \sigma^{\alpha-1} d\sigma . \tag{V,3;49}$$

Entonces, recordando el caso unidimensional, $I_{II}^{\alpha} f$ es una función holomorfa de α .

Finalmente, debido a la presencia del factor $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ que aparece en $L_n(\alpha)$, $I_{II}^{\alpha} f$ se anula para $\alpha = 0$ y esto prueba que

$$\lim_{\alpha \to 0} I_{II}^{\alpha} f = 0 . \tag{V,3;50}$$

Las fórmula (V,3;30), (V,3;37), (V,3;47) y (V,3;50) prueban que

$$\lim_{\alpha \to 0} I^{\alpha} [f(X)] = f(0) \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Bateman Manuscript Project, (i) Tables of Integral Transforms, Vol. II, Mc. Graw-Hill, New York, 1954; (ii) Higher Transcendental Function, Vol. I, Mc. Graw-Hill, New York, 1953.

[2] R. Courant y D. Hilbert, Méthodes Mathemátiques de la Physique, tome II, Interscience Publishers, 1962.

[3] I. M. Gelfand y G. E. Shilov, Generalized Functions, Vol. I, Academic Press, New York, 1964.

[4] A. González Domínguez y S.E. Trione, On the Laplace transforms of retarded Lorentz invariant functions, Trabajos de Matemática (preprint), Serie 1, 13, I.A.M., CONICET, 1977 y Advances in Mathematics, Volumen 31, Número 1, 51-62, 1979.

[5] J. Hadamard, Le probléme de Cauchy et les équations aux dérriveés partielles linéaires hyperboliques, Paris, 1932.

[6] M. Riesz, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Mathematica (81), 1-223, 1949.

[7] M. Riesz, The analytic continuation of the Riemann-Liouvi lle integral in the hyperbolic case, Canadian Journal, vol. XIII, N°1, 37-47, 1961.

[8] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

[9] S.E. Trione, Sopra alcune convoluzioni divergenti, Rend. Classe Sci., fis., mat., e nat., Accad. Naz. del Lincei, Serie VIII, vol. LVII, fasc. 3-4, Settembre-ottobre, 143--146, 1974.

Notaciones

Principales operaciones

Entrada Nº	Operación	Página	Fórmula
1	$\frac{d}{dx}\, x_+^{-n}$	20	(I,5;1)
2	$\frac{d}{dx}\, (x+i0)^{-n}$	60	(I,13;24)
3	$\frac{d}{dx}\, (x\pm i0)^{\alpha-1}$	62	(I,13;32)
4	$\left[\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right]^{\wedge}$	71	(II,15;2)
5	$\Delta^m\left\{r^{\lambda+2m}\right\}$	81	(II,2;26)
6	$\operatorname*{Res}_{\alpha=n+2h} R_\alpha(x)$	94	(II,3;11)
7	$[R_\alpha(x)]^{\wedge}$	95	(II,4;1)
8	$R_{-2m} * f(x)$	96	(II,4;3)
9	$R_\alpha(x) * R_\beta(x)$, $\alpha+\beta\neq n+2h$, $h = 0,1, \ldots$	97	(II,4;4)

Entrada Nº	Operación	Página	Fórmula
10	$[R_\alpha * R_\beta(x)]\hat{}$	98	(II,4;5)
11	$\Delta\ R_{\alpha+2}(x)$	98	(II,5;1)
12	$\Delta^k R_\alpha(x)$	101	(II,5;5)
13	$Pf\ R_{n+2h}(x)$	108	(II,6;2)
14	$I^\alpha(I^\beta f(x))$	119	(III,3;3)
15	$\frac{d^k}{dx^k}\ I^{\beta+k}$	134	(III,7;3)
16	$\lim_{\alpha\to 0}\ I^\alpha f(x)$	144	(III,9;1)
17	$I_-^\alpha(I_-^\beta\ f(x))$	152	(III,9;19)
18	$I^\alpha(I^\beta f(P))$	156	(IV,1;3)

Algunos símbolos adicionales

ε perteneciente a.

$\triangleq$ igualdad por definición.

▪ Fin de la demostración.