ISSN 1853-709X

Fascículo 3

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Alberto Calderón

Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 3

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO 3 cursos y seminarios de matemática

INTEGRALES SINGULARES Y SUS APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBOLICAS

Seminario dirigido por
Alberto P. Calderón

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
1960

2 (5)

B I B L I O G R A F I A

La bibliografía fundamental es la siguiente:

(1) A. P. Calderon y A. Zygmund.- On the existence of certain singular integrals, Acta Mathematica, N° 88, 1952, pgs. 85 - 139 .

(2) M. Cotlar.- A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems, Revista Matemática Cuyana, Vol 1, pgs. 41 - 167 .

(3) Calderon y Zygmund .- On singular integrals, American Journal of Math., vol LXXVIII , N° 2 , 1956, pgs. 289 - 309 .

(4) Calderon y Zygmund .- Singular integral operators and differential equations , American Jour., vol. LXXIX , N° 4, 1957, pgs. 901 - 921 .

(5) . Calderon .- Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Am. Journal, vol. LXXX , N° 1 , 1958 , pgs. 16 - 36 .

(6) Laurent Schwartz.- Théorie des distributions , I, II, París, Hermann, 1951.

I N T R O D U C C I O N

N o t a c i o n e s:

Designaremos con $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, etc., puntos del espacio euclideo n-dimensional E^n , y se usarán las abreviaciones siguientes:

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \quad \lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \; ; \quad x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \; ;$$

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \; ; \quad \Sigma = \{x ; |x| = 1\}$$

El elemento de volumen en E^n será designado con dx , y el de area de Σ con $d\sigma$. Dada $f(t)$, $t \in E^n$, designaremos con $F f(x)$ la transformada de Fourier de f : $F f(x) = \int f(t) \, e^{2\pi i \, x.t} \, dt = \hat{f}(x)$

$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$; $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $p = (p_1, \ldots p_n)$; etc., indicarán n-uplas de enteros no negativos.

Otras abreviaciones: $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$; $x^{\alpha} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$; $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = D^{\alpha} =$

$$= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\, \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \quad ; \quad \alpha! = \alpha_1!\ \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

Notaremos con (C^{∞}) la familia de funciones indefinidamente diferenciables, con (D) el subespacio de las nulas fuera de un acotado, con (C^{n}) el de las funciones con n derivadas contínuas y con (D^{n}) el subespacio de las nulas fuera de un acotado.

(S) , (S') , (D') indicarán respectivamente la clase de funciones de $(C\ )$ a decrecimiento rápido, su dual y el de las distribuciones.

a) Toda función homogénea k de grado $-n$ (o sea, tal que para todo $a > 0$, $k(a\,x) = a^{-n} k(x)$) con integral nula sobre la esfera unitaria, define un operador singular de tipo convolución:

(1) $$K\, f(x) = \int_{E^n} k\,(x - y)\, f(y)\, dy = (k * f)\,(x)$$

donde la integral debe entenderse como valor principal. Para $n = 1$ el único operador de este tipo, salvo factor constante, es la transformada de Hilbert .

Estos operadores conmutan con las traslaciones, esto es, si designamos con : $t_a\, f(x) = f(x-a)$ resulta:

$$K\, t_a\, f = t_a\, K\, f$$

Formalmente obtenemos (mas adelante justificaremos estos resultados) que :

(2) $$F\,(K\, f) = F\,(k)\, F\,(f)$$

donde $F\,(k)$ es una función homogénea de grado cero.

Esto es consecuencia de la conocida fórmula siguiente, donde $k_{\lambda}(t) = k\,(\lambda t)$:

$$(F\, k_{\lambda})\,(y) = \lambda^{-n}\,(F\, k)\left(\frac{y}{\lambda}\right) ,$$

y del hecho que k es homogénea de grado $-n$.

Si se pide al núcleo k que pertenezca a C^{∞} en $E^n - \{0\}$, $F(k)$ también pertenecerá a C^{∞} allí y tendrá valor medio nulo en Σ . Recíprocamente, toda función homogénea de grado cero, con v. m. nulo en Σ y de C^{∞} es la transformada de Fourier de una función homogénea de grado $-n$, con v. m. en Σ nulo y de C^{∞} .

Núcleos con esas propiedades engendran operadores definidos por (1) los cuales al componerse no conservan su clase, en efecto :

(3) $$F(K_1 K_2 f) = F(k_1)\ F(K_2 f) = F(k_1)\,F(k_2)\,F(f)$$

y $F(k_1)\ F(k_2)$ es homogéneo de grado cero, perteneciente a C^∞ pero no necesaria - mente su media en Σ es cero.

Sin embargo : $F(k_1)\ F(k_2)$ - (v.m. $F(k_1)\ F(k_2)$ sobre Σ) , por lo antes dicho será un $F(k_3)$.

Luego, $F(k_1)\ F(k_2) = F(k_3) + C$, y anti transformando:

$$K_1\ K_2\ f = (C + K_3)\ f$$

Esto sugiere definir operadores K más generalmente por :

(4) $$K f(x) = C f(x) + \int_{E^n} k(x-y)\, f(y)\, dy$$

los que ahora evidentemente forman un álgebra.

Definiremos como <u>símbolo</u> de K a : $\sigma K = C + F(k)$, luego de (4) resultará : $F(K f) = (\sigma K)\, F(f)$, y de lo dicho anteriormente, que existe una correspon - dencia biunívoca entre símbolos y operadores .

b) Puesto que $F(k) \in C^\infty$ y es de grado cero, es acotada en E^n , luego para funciones $f \in L^2(E^n)$ obtenemos de (4) por una aplicación de Parseval :

$$\|K f\|_2 \leqslant (\|F(k)\|_\infty + |C|)\ .\ \|f\|_2$$

Más aún, como después veremos $K f$ es de tipo (p, p) para todo $p \in (1,\infty)$. El resultado es falso para $p = 1$, ∞ .

La continuidad del operador, K se manifiesta también en ciertos espacios de Orlicz.

Si f satisface una condición de Hölder α :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\ .\ |x-y|^\alpha$$

también K es contínuo con cierta norma sobre esas f , para $0 < \alpha < 1$. Resultado falso para $\alpha = 1$.

c) En lo que sigue nos atendremos a un cálculo formal, seguramente lícito para funciones de $(\mathcal{D})$. De la fórmula :

(5) $$\left(F \frac{\partial f}{\partial x_h} \right)(x) = -2\pi i\, x_h\, (F f)(x)$$

y definiendo el operador Λ por :

(6) $$F(\Lambda f) = 2\pi |x|\, F(f)$$

se obtiene que : $F\left(\frac{\partial f}{\partial x_h} \right)(x) = -i\, x_h\, |x|^{-1} (F \Lambda f)(x)$. La aplicación sucesiva de Λ da : $F(\Lambda \Lambda f) = 2\pi |x|\, F(\Lambda f) = 4\pi^2 |x|^2 F(f) = -F(\Delta f)$ de donde : $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$; además, de (5) y (6) sigue que el operador Λ conmuta con $\frac{\partial}{\partial x_h}$: $\Lambda \frac{\partial}{\partial x_h} = \frac{\partial}{\partial x_h} \Lambda$. La aplicación sucesiva de (5) da :

(7) $$F(D^p f) = (-i)^{|p|}\, x^p\, |x|^{-|p|}\, F(\Lambda^{|p|} f)$$

como $x^p |x|^{-|p|}$ es una función homogénea de grado 0 , y de C^∞ en $E^n - \{0\}$ por lo dicho en a) :

(8) $$D^p f = (-i)^{|p|}\, K\, \Lambda^{|p|} f$$

donde K es de la forma (4) , con $\sigma K = C + F(k) = x^p |x|^{-|p|}$.

De esta manera el operador D^p se redujo a la aplicación sucesiva de un único operador "malo" (Λ no es acotado, y está definido en un conjunto denso), seguido de la aplicación de un operador contínuo conocido como es el K .

d) Considerando ahora operadores diferenciales homogéneos a coeficientes constantes , vale:

(9) $$L f = \sum_{|p|=m} a_p D^p f = \left(\sum_{|p|=m} a_p (-i)^m K_p \right) \Lambda^m f = (-i)^m K \Lambda^m f$$

con $\sigma K = \sum_{|p|=m} a_p x^p |x|^{-m} = P_L(x) \,.\, |x|^{-m}$ donde $P_L(x) = \sum_{|p|=m} a_p x^p$ es el polinomio característico de L .

El op. dif. L es elíptico, si y sólo si $P_L(x) = 0$ implica $x = 0$. En este caso $(\sigma K)^{-1}$ es una función homogénea de grado cero, y de C^∞ en $E^n - \{0\}$ por lo cual es símbolo de un operador, que llamaremos K^{-1} .

Además : $K K^{-1} = K^{-1} K = I$, en efecto : $\sigma(K K^{-1}) = \sigma K\, \sigma K^{-1} = \sigma K . (\sigma K)^{-1} = 1 = \sigma I$.

Por ser L elíptico a coeficientes reales, se vé facilmente de $P_L(x)$ que m debe ser par, $m = 2r$. Luego, $L f = K \Delta^r f$ y la ecuación $L f = g$ se reduce a $\Delta^r f = K^{-1} g$, o sea a la resolución de $\Delta f = h$.

e) Generalizaremos ahora d) al caso de coeficientes variables, donde realmente el método es interesante. Sea $L = \sum_{|p|=m} a_p(x) D^p$, entonces

(11) $$L f = \Big(\sum_{|p|=m} (-i)^m a_p(x) K_p \Big) \Lambda^m f = (-i)^m K \Lambda^m f$$

Cada sumando de $K g$ es de la forma :

$$a_p(x) K_p g = a_p(x) C_p g(x) + \int a_p(x) k_p(x-y) g(y) dy ,$$

esto sugiere extender la definición de k dado en (4) a :

(12) $$K g = b(x) g + \int k(x, x-y) g(y) dy$$

donde $b(x)$ es acotada, y con propiedades que se especificarán más adelante, $K(x,z)$ es homogenea de grado $-n$ en z, para cada z acotada en x y para cada x integrable en la esfera $|z| = 1$ con integral 0.

Símbolo de K será ahora : $\sigma K = \sigma K(x,t) = b(x) + F_z(k(x,z))(t) = b(x) +$ (transformada de Fourier en z de $k(x,z)$)(t). Como el operador σ es lineal en factores dependientes sólo de x el símbolo de K dado por (11) es: $\sigma K =$ $= \sum a_p(x) \sigma K_p = \sum a_p(x) t^p . |t|^{-|p|}$, o sea, nuevamente el símbolo de K es el polinómio característico de L dividido por $|t|^{|p|}$

Si $k(x,z)$ es de C^∞ en z, junto con otras condiciones, K tiene propiedades de continuidad como en b).

Difiere de aquellos en que la composición no da un operador del mismo tipo, además de no ser conmutativa. Asimismo, como K es acotado en L^2, está bien definido el adjunto de K, K^*, por : $(K f, g) = (f, K^* g)$, $f, g \in L^2$, no siendo en general, K^* del mismo tipo que K (sí lo es v.b. cuando K está definido por (4)).

Como en a) vale que existe una correspondiencia biunívoca entre operadores y símbolos por lo que podemos definir el <u>seudoproducto</u> de K_1, con K_2, $K_1 \circ K_2$, por el operador cuyo símbolo es $\sigma(K_1 \circ K_2) = \sigma(K_1)\, \sigma(K_2)$. Con esta operación la familia de los K deviene un àlgebra conmutativa.

Analogamente, el <u>seudoadjunto</u> de K será el operador K^* cuyo símbolo es : $\sigma(K^*) = \overline{\sigma K}$. Es obvio que cuando : $|(\sigma K)(x,z)| > \varepsilon > 0$ existe el seudoinverso de K, ${}^{-1}K$, definido por : $\sigma({}^{-1}K) = (\sigma K)^{-1}$ y tal que : $K \circ {}^{-1}K = {}^{-1}K \circ K =$

$= I$.

Designando con $L^p_h = \{f;\ D^\alpha f \in L^p$ si $0 \leqslant |\alpha| \leqslant h\}$ con una norma que se definirá oportunamente, diremos que el operador R es <u>regularizante</u> si lleva L^p_h en L^p_{h+1} . Esta derivación debe entenderse en el sentido de las distribuciones.

Vale entonces que : $P = K_1 \circ K_2 - K_1 K_2$ y $A = K^* - K^*$ son regularizantes . En efecto, como veremos: ΛA , ΛP así como $A \Lambda$ y $P\Lambda$ son operadores acotados en todo L^p, $1 < p < \infty$, por lo cual :

$$\frac{\partial}{\partial x_h} P f = -i \left(K_{(h)} \Lambda \right) P f = -i K_{(h)} (\Lambda P) f$$

lo que prueba, por ejemplo, que P lleva L^p en L^p_1 .

Usando la seudocomposición por la composición, o el seudoadjunto por el adjunto, introducimos un "error" que es un operador regularizante, o sea, $P \equiv 0$ ó $K^* \equiv K^*$ módulo operadores regularizantes.

Respecto a la inversión del producto de composición podemos decir que si $\sigma K \neq 0$, si bien K no tiene un inverso, existe un R regularizante tal que $K + R$ sí lo posee.

§1.- TRANSFORMADA DE HILBERT EN 1 DIMENSION

Definiremos el operador H_ε , $\varepsilon > 0$ por: $H_\varepsilon f = \tilde{f}_\varepsilon = \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(t)}{x-t}\, dt$,
el cual, como permite ver una aplicación de la desigualdad de Hölder está bien definido para toda $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1:

Si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$; entonces:

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leq A_p \|f\|_p$ con A_p independiente de ε y f .

b) Existe el límite en L^p de $\tilde{f}_\varepsilon$ para $\varepsilon \to 0$, al cual llamaremos $\tilde{f}$.

c) $\|\tilde{f}\|_p \leq A_p \|f\|_p$ donde A_p es la misma constante (de a)

Demostración:

a) Por la linealidad de H_ε es suficiente demostrar a) para funciones no negativas.

Sea $f \geq 0$, $f_n(x)$ igual a $f(x)$ si $|x| \leq n$ y cero en otra parte ; obviamente $\tilde{f}_{n,\varepsilon}(x) \to \tilde{f}_\varepsilon(x)$ en todo punto. Luego del teorema de Fatou :

$$\int |\tilde{f}_\varepsilon|^p\, dx = \int \underline{\lim}_n |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p\, dx \leq \underline{\lim}_n \int |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p\, dx$$

de donde se desprende que es suficiente probar a) para funciones nulas fuera de un intervalo, pues en ese caso

$$\int |\tilde{f}_\varepsilon|^p\, dx \leq \underline{\lim}_n \int |\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p\, dx \leq \lim_n A_p \int |f_n|^p\, dx = A_p \|f\|_p^p$$

Sea entonces $f \geq 0$, $f \in L^p$, a soporte acotado y con integral no nula ($f=0$, c. t. x es trivial), $1 < p < \infty$. El parecido formal del núcleo de Hilbert con el de Cauchy nos invita a estudiar la siguiente integral:

$$F(z) = i \int \frac{f(t)}{z-t}\, dt$$

donde $I(z) > 0$, y la integración se realiza sobre el eje real .

Como es lícito derivar bajo el signo integral se vé que en esa región $F(z)$ es analítica.

Sea $z = x + iy$, $(y > 0)$, $R\,F(z) = R(x,y)$, $I\,F(z) = I(x,y)$, $|F(z)| = M(x,y)$, $\phi = \operatorname{Arg} F(z)$.

Luego : $R(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\, y}{(x-t)^2 + y^2}\, dt = f * \frac{y}{x^2 + y^2}$

y por la desigualdad de Young , para y fijo :

(1) $$\|R(x,y)\|_p \leqslant \|y(x^2+y^2)^{-1}\|_1 \cdot \|f\|_p = \pi \cdot \|f\|_p$$

Además $R(x,y) > 0$ y por lo tanto $-\pi/2 < \phi < \pi/2$.

Trataremos ahora de acotar $\|I(x,y)\|_p$ por $\|R(x,y)\|_p$.

Sea $F(z)^p = M^p \exp i p \phi$, de las hipótesis hechas sobre f se vé que $|F(z)| \sim |z|^{-1}$ para $z \to \infty$, luego $|F(z)^p| \sim |z|^{-p}$. Si $L = \{z;\ |R(z)| \leqslant a\ ,\ I(z) = y\}$ y $C = \{z = (u,v)\ ;\ v > y\ ,\ u^2 + v^2 = a^2\}$ por ser $F^p(z)$ analítica es $\int_{C \cup L} F^p(z)\, dz = 0$ y como para $a \to \infty$, $|\int_C F^p(z)\, dz| \leqslant \text{cte.}\ a^{-p+1} \to 0$,

resulta:(2) $\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z)^p\, dz = 0$, o sea : $0 = \int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x,y) \cos p\phi\, dx = \int M^p \operatorname{sen} p\phi\, dx$.

Dado p no impar, existe un $b > 0$ y un entorno de radio d de $\pi/2$ y de $-\pi/2$ en el cual $|\cos p\phi| > b$, y existe un $C > 0$ tal que en $(-\pi/2 + d\ ,\ \pi/2 - d)$, $\cos \phi > C$.

Luego : $|\operatorname{sen}\phi|^p < b^{-1}$ (sg cos p $\pi/2$) $\cos p\phi + (b^{-1}+1)\, a^{-p} \cos^p \phi = A \cos p\phi + B \cos^p \phi$. Entonces, para y fijo :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I(x,y)|^p\, dx = \int M^p\, |\operatorname{sen}\phi|^p\, dx \leqslant A \int M^p \cos p\phi\, dx + B \int R^p\, dx$$

y usando (2) :

(3) $$\int |I|^p\, dx \leqslant B \int R^p\, dx$$

La diferencia entre $I(x,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)\, f(t)}{(x-t)^2 + \varepsilon^2}\, dt$ y $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ viene dada por la convolución de f con el siguiente nùcleo:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2} - \dfrac{1}{x} & \text{si } |x| > \varepsilon \\[2ex] \dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2} & \text{si } |x| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Aplicando la desigualdad de Young y observando que $\|g_\varepsilon\|_1 < \pi$ tenemos:

(4) $$\|g_\varepsilon * f\|_p \leqslant \pi \cdot \|f\|_p$$

Luego, usando (3) y (4) :

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant \|I(x,\varepsilon)\|_p + \|I(x,\varepsilon) - \tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant B^{1/p} \cdot \|R(x,\varepsilon)\|_p + \pi \|f\|_p$$

y por (1) : $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p \leqslant A_p \cdot \|f\|_p$.

Para tener el teorema será suficiente demostrar b) , pues c) es consecuencia inmediata de a) y b) .

b) Sea $g(x)$ y $h(x) \in (D)$, $h(x)$ par y $h(0) = 1$; entonces :

$$\int_{|x-t|} \frac{h(x-t)}{x-t}\, dt = 0$$

Del hecho que $|g(t) - g(x)\, h(x-t)| < M|x-t|$ con M independiente de x y t , resulta:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-t|} \frac{g(t)}{x-t}\, dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-t|} \frac{g(t) - g(x)\, h(x-t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t) - g(x)\, h(x-t)}{x-t}\, dt$$

De lo dicho es fácil ver que $|\tilde{g}_\varepsilon(x)| < \frac{N}{|x|+1}$. Como $\frac{N}{|x|+1}$ es p integrable para $1 < p < \infty$, una aplicación del teorema de Lebesgue de paso al límite bajo la integral, prueba que $\{\tilde{g}_\varepsilon(x)\}$ es de Cauchy en L^p .

Si $f \in L^p$ y $||f - g||_p < \delta$ con $g_\varepsilon\ (\mathcal{D})$, supuesto a) , se tiene de la desigualdad de Minkowski:

$$||\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_\eta||_p \leqslant ||\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{g}_\varepsilon||_p + ||\tilde{g}_\varepsilon - \tilde{g}_\eta||_p + ||\tilde{g}_\eta - \tilde{f}_\eta||_p \leqslant 2\, A_p\, \delta + ||\tilde{g}_\varepsilon - g_\eta||_p$$

lo que prueba que $\{\tilde{f}_\varepsilon\}$ es de Cauchy en L^p , y converge a una $\tilde{f} \in L^p$.

§2.- T R A N S F O R M A D A   D E   H I L B E R T   E N n D I M E N S I O N E S

Sea $k(x)$ una función homogénea de grado $-n$, perteneciente a L^1 sobre la esfera unitaria y tal que : $k(x) = -k(-x)$.

Como k es absolutamente integrable sobre todo compacto que no contiene el origen, está bien definido el siguiente operador, sobre funciones f de (D):

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = (K_\varepsilon f)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy$$

<u>T e o r e m a</u> <u>2</u> :

Sea $k(x)$ una función con las propiedades enunciadas. Vale entonces: si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$:

a) $\|K_\varepsilon f\|_p \leqslant \frac{1}{2} A_p \|f\|_p \cdot \int_{|x|=1} |k(x)|\, d\sigma$ (A_p es la misma constante del teorema 1)

b) Existé una función $\tilde{f} = K f \in L^p$ tal que $\tilde{f}_\varepsilon$ converge en media p a $\tilde{f}$ para $\varepsilon \to 0$.

c) $\|K f\| \leqslant \frac{1}{2} A_p \|f\|_p \int_{|x|=1} |k(x)|\, d\sigma$.

<u>D e m o s t r a c i ó n:</u>

Para obtener el teorema, es suficiente probar a) y b) para funciones de (D), puesto que una familia de operadores con normas uniformemente acotadas, fuertemente convergentes en un conjunto denso define unívocamente un operador, que en nuestro caso llamaremos K. Si bien esto implica que para $f \in L^p$, $K_\varepsilon f$ es obtenido de la extensión contínua del mismo operador de (D) a L^p, veremos más adelante que, tanto K_ε como K, pueden definirse en L^p por convoluciones o límite de ellas.

Las demostraciones que siguen especulan con la idea de reducir el caso n dimensional al unidimensional. Sea entonces $f \in (D)$.

a) Fijado t' de Σ, e y del subespacio L, ortogonal a t', convendremos en llamar $g(\rho)$ a $g(\rho) = f(y + \rho t')$ o sea a la restricción de f a la recta que pasa por $y \in L$, paralela a t'. Entonces:

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p = \left(\int_{E^n} dx. \left| \int_\Sigma \frac{k(t')}{2}\, d\sigma \int_{|\rho|>\varepsilon} \frac{f(x-\rho t')}{\rho}\, d\rho \right|^p dx \right)^{1/p} \leqslant$$

$\leqslant$ (usando la desigualdad integral de Minkowsky) $\leqslant$

$$\leqslant \int_{\Sigma} \frac{|k(t')|}{2} \left[\int_{E^n} \left| \int_{|\rho|>\varepsilon} \frac{f(x-\rho t')}{\rho} \, d\rho \right|^p dx \right]^{1/p} d\sigma$$

La expresión entre corchetes, si $x = y + st'$, es igual a :

$$\int_L dy \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{|\rho|>\varepsilon} \frac{f(y+(s-\rho)t')}{\rho} \, d\rho \right|^p ds =$$

$$= \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_\varepsilon(s)|^p \, ds \leqslant A_p^p \cdot \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|^p \, ds =$$

$$= A_p^p \cdot \int_L dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(y+st')|^p \, ds = A_p^p \, ||f||_p^p$$

Luego:
$$||\tilde{f}_\varepsilon||_p \leqslant \frac{A_p}{2} \, ||f||_p \int_{\Sigma} |k(t')| \, d\sigma \quad .$$

b) Resulta del hecho que $\tilde{f}_\varepsilon$ converge para $1 \geqslant \varepsilon \longrightarrow 0$ puntualmente, y acotadamente por una función, del L^∞ en todo entorno del orígen y p integrable en el infinito.

Sea: $t = \rho t'$, $|t'| = 1$, entonces:

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|t|>\varepsilon} k(t)\, f(x-t)\, dt = \int_{\Sigma} k(t') \left[\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x-\rho t')}{\rho} \, d\rho \right] d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} k(-t') \left[\int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{f(x-\rho t')}{\rho} \, d\rho \right] d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} k(t') \left[\int_{|\rho|>\varepsilon} \frac{f(x-\rho t')}{\rho} \, d\rho \right] d\sigma$$

donde el término entre corchetes de la última integral es $H_\varepsilon \, g(0) = \tilde{g}_\varepsilon(0)$, con $g(\rho) = f(x+\rho t')$.

Como $f \in (D)$, $\tilde{g}_\varepsilon(x)$ está uniformemente acotada por una constante M que depende sólo de f (ver dem. teorema 1) y resulta: $|\tilde{f}_\varepsilon(x)| \leqslant M/2 \int_{\Sigma} |k(t')| \, d\sigma$.

Sea I el soporte de $f(x)$ y $\overline{X} = \{x;\, d(x, I) > 1\}$.

Si $x \in \overline{X}$ y $\varepsilon < 1$, $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ no depende de ε , luego allí $\tilde{f}_\varepsilon = \tilde{f}(x)$. Como las $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ están acotadas por N , y lejos del orígen todas coinciden para $\varepsilon < 1$, de a) y de la convergencia puntual resulta que constituyen una sucesión de Cauchy en ε.

c) se deja a cargo del lector.

<u>O b s e r v a c i o n e s</u>.

1) Al demostrar a) obramos como si $g(\rho)$ perteneciera al $L^p(E^1)$ si $f \in L^p(E^n)$; esto no es cierto necesariamente, aunque vale en casi todo y de L , por lo cual el resultado queda inalterado.

2) Demostramos que en (D) , $\{K_\varepsilon\}$ es una familia de operadores uniformemente acotados, y que $\{K_\varepsilon f\}$ es de Cauchy, lo cual permite extender por continuidad cada K_ε a un operador contínuo (uniformemente acotados) y verificar que para toda $f \in L^p$, $K_\varepsilon f$

es de Cauchy.

Demostraremos a continuación que : $\int_{|x-y|>\varepsilon} |k\ (x-y)|\,.\,|f\ (y)|\ dy$ es finita en casi todo punto, cualquiera sea $\varepsilon \to 0$,

y con ello no es difícil ver que $\int_{|x-y|>\varepsilon} k\ (x-y)\ f(y)\ dy = \tilde{f}_\varepsilon$ es igual p. p. a la función obtenida por extensión del K_ε .

Luego $\int k\ (x-y)\ f(y)\ dy$ es límite en norma para $\varepsilon \to 0$ de aquellas convoluciones.

<u>Lema 1</u>

k homogénea de grado $-n$, ≥ 0 , q integrable en Σ , $q \geq 1$, $f \geq 0$, $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, $y = \rho\, y'$, $|y'| = 1$.

Luego:

$$g\ (x) = \int_{|x|>\varepsilon} k\ (y)\ f\ (x-y)\ dy = \int_\Sigma k\ (y')\ d\sigma \int_\varepsilon^\infty \rho^{-1}\ f\ (x-\rho y')\ d\rho \quad , \text{ existe}$$

p. p. x .

Demostración

Esa integral es finita p. p. si es finita p. p en toda esfera S , en particular si es integrable sobre toda esfera S . Integrando esa expresión en x sobre S tenemos:

$$\int_\Sigma k\ (y')\ d\sigma \int_S dx \int_\varepsilon^\infty \rho^{-1}\ f\ (x-\rho\, y')\ d\rho \qquad ,$$

La integral interior, por ser ρ^{-1} fuera del origen p - integrable para todo $1 < p < \infty$, es salvo factor, menor o igual a :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^p\ (x-\rho y')\ d\rho \right)^{1/p}$$

e integrando en x sobre S y aplicando Hölder se vé que la integral doble interior , es salvo factor, menor o igual que:

$$|S|^{p/p-1} \left(\int_S dx \int_{-\infty}^{+\infty} f^p\ (x-\rho y')\ d\rho \right)^{1/p}$$

La integral respecto de x puede ser calculada primero a lo largo de líneas paralelas a y' y luego sobre el espacio de esas líneas, resultando evidente por ser S acotado que su valor no excede : $\text{cte.}\,||f||_p^p$.

Luego:

$$\int_S g\ (x)\ dx < \infty$$

§3.- CASO ESPECIAL . TRANSFORMADA DE RIESZ

Como $\frac{x_m}{|x|^{n+1}}$, con x_m = m - ésima componente de X , es un núcleo con las propiedades exigidas en el teorema precedente, el operador:

$$R_m f = \gamma_n \int \frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy \quad , \quad \gamma_n = -i\,\pi^{-(n+1)/2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

tiene las propiedades allí enunciadas.

Demostraremos al fin de este párrafo que, si

(1) $$f \in (\mathcal{D}) : \quad F(R_m f) = F(f)\,\frac{x_m}{|x|}$$

Esto nos permite sacar las siguientes consecuencias:

i) (1) vale para toda $f \in L^2$, pues R_m y la transformada de Fourier son operadores contínuos de L^2 en L^2 .

ii) $\sum_{m=1}^{n} R_m^2 = I$ sobre todo L^p , $1 < p < \infty$.

En efecto, de (1) y del hecho que si $f \in L^2$, $R_m f \in L^2$, resulta!

$$F(R_m^2 f) = \frac{x_m}{|x|}\,F(R_m f) = \frac{x_m^2}{|x|^2}\,F(f)$$

y

$$F\left(\sum_{m=1}^{n} R_m^2 f\right) = F(f)$$

lo que prueba que en L^2 : $\sum_{m=1}^{n} R_m^2 = I$. La continuidad de R_m en L^p , y la densidad de $L^2 \cap L^p$ allí, prueban la igualdad en ese espacio.

iii) Definiremos como $R\,g$ a la transformada vectorial de Riesz con dominio funciones y rango vector - funciones , de la siguiente manera:

(2) $$R\,g = (R_1 g, R_2 g, \ldots , R_n g)$$

y si $g = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $g_i \in L^p$, a :

(3) $$R \circledast g = \sum_{m=1}^{n} R_m g_m$$

O sea, en este caso transforma un vector - función en una función.

Con esas notaciones: $R_{\circledast}(R g) = \sum_{m=1}^{n} R_m^2 g = g$

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> <u>d e</u> <u>(1)</u>

Si $f \in (D)$, entonces la distribución (v. p. $\gamma_n \dfrac{x_m}{|x|^{n+1}}) * f$ coincide con la función $R_m f$. En efecto:

$$\left\langle \text{v. p. } \gamma_n \frac{x_m}{|x|^{n+1}} * f , \varphi \right\rangle = \left\langle \text{v. p. } \gamma_n \frac{x_m}{|x|^{n+1}} , \langle f(y), \varphi(x+y) \rangle \right\rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \gamma_n \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x_m}{|x|^{n+1}} \left(\int f(y)\, \varphi(x+y)\, dy \right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{E^n} dt \int_{|x|>\varepsilon} \frac{x_m}{|x|^{n+1}}$$

$$. f(x-t)\, \varphi(t)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle R_{m,\varepsilon} f , \varphi \rangle$$. Como $R_{m\varepsilon} f$ converge en L^p a $R_m f$ resulta el último miembro igual a $\langle R_m f , \varphi \rangle$, lo que prueba lo dicho.

Por otra parte, $|x|^{1-n}$ es una distribución de (S'), (temperada), luego, también sus derivadas lo son.

Veamos que

(4) $$\frac{\partial}{\partial x_m} |x|^{1-n} = (1-n) \text{ v. p. } \frac{x_m}{|x|^{n+1}}$$

lo que probará además que v. p. $\dfrac{x_m}{|x|^{n+1}}$ es temperada.

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_m} |x|^{1-n} , \varphi \right\rangle = -\left\langle |x|^{1-n} , \frac{\partial}{\partial x_m} \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x_m} .$$

$$. \varphi(x)\, dx = (\text{por T. de Gauss}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{1}{|x|^{n-1}} . \varphi(x)\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_{|x| = \varepsilon} \frac{1}{|x|^{n-1}} \varphi\, \nu_m\, d\sigma \right)$$ donde ν_m es la componente m-ésima del versor normal a $|x| = \varepsilon$.

Como la última integral tiende a cero con ε queda demostrada (4).

De : $F(R_m f) = F\left(\gamma_n \text{ v. p. } \dfrac{x_m}{|x|^{n+1}} * f \right) = F\left(\dfrac{\gamma_n}{1-n} \dfrac{\partial |x|^{1-n}}{\partial x_m} * f \right)$ y del hecho que $\dfrac{\partial |x|^{1-n}}{\partial x_m}$ pertenece a (S') y que $f \in (D)$ resulta:

(5) $$F(R_m f) = \frac{\gamma_n}{1-n} \; F\left(\frac{\partial |x|^{1-n}}{\partial x_m}\right) . F(f)$$

Como: $F\left(\frac{\partial T}{\partial x_m}\right) = -2\pi i \, x_m F(T)$ para $T \in (S')$ de (5) obtenemos:

(6) $$F(R_m f) = \frac{\gamma_n}{n-1} \; 2\pi i \, x_m F(|x|^{1-n}) . F(f)$$

El problema se ha reducido entonces a calcular $F(|x|^{1-n})$. Lo haremos en general calculando $F(|x|^{-\alpha})$, con $n/2 < \alpha < n$, $n \geq 2$.

Definimos <u>la operación π_λ por</u> :

$$< \pi_\lambda T, \varphi(x) > = < T, \lambda^{-n} \varphi(x.\lambda^{-1}) >$$

o sea, que si $T \in (D')$, $\pi_\lambda T$ también pertenece. Para distribuciones que son funciones localmente integrables, resulta: $\left[\pi_\lambda f\right](x) = f(\lambda x)$.

Se ve que, para $T \in (S')$,

(7) $$F(\pi_\lambda T) = \lambda^{-n} \pi_{1/\lambda} F(T) .$$

Una distribución T se dirá <u>homogénea de grado</u> <u>m</u> si $\pi_\lambda T = \lambda^m T$, que generaliza el concepto del mismo nombre para funciones.

$F(|x|^{-\alpha})$ es, bajo las hipótesis sobre α, una función, pues el transformando es suma de dos funciones : su restricción a la esfera unitaria que $\in L^1$, y su restricción al complemento de dicha esfera, que es de L^2.

De la fórmula (7) se deduce que $F(|x|^{-\alpha})$ es homogénea de grado $\alpha - n$.

Además se comprueba facilmente que la función $F(|x|^{-\alpha})$ es radial, por lo que :

(8) $$F(|x|^{-\alpha}) = C_\alpha . |x|^{\alpha - n}$$

Cálculo de C_α :

Como $F(e^{-\pi|x|^2}) = e^{-\pi|x|^2} \in (S)$, de la fórmula de Parseval se obtiene:

(9) $$< |x|^{-\alpha} , e^{-\pi|x|^2} > = < C_\alpha |x|^{\alpha-n} , e^{-\pi|x|^2} >$$

Teniendo en cuenta que para $\rho > -1$, vale:

(10) $$\int_0^\infty e^{-\pi\rho^2} . \rho^\rho \, d\rho = \tfrac{1}{2}\pi^{-(\rho+1)/2} \, \Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)$$

de (9) resulta que :

(11) $$C_\alpha = \pi^{\alpha-\left(\frac{n}{2}\right)} \, \Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Si $n \geq 3$, $n-1$ es un α que cumple las condiciones pedidas, y se obtiene de (6)

(8) y (11) :

$$F\,(R_m f) = \frac{x_m}{|x|}\,F\,(f)$$

Si $n = 2$, $1 = n-1 = n/2$ no es un α , pero es el límite de ellos.

Es evidente que las distribuciones temperadas $|x|^{-\alpha}$ tienden en (S') , para α tendiendo a 1 , a $|x|^{-1}$. Luego sus transformadas de Fourier tienden a $F(|x|^{-1})$, pero $F\,(|x|^{-\alpha}) = C_\alpha\,|x|^{-\alpha}$ converge en (S') , para $\alpha \to 1$, a $|x|^{-1} = C_1\,|x|^{-1}$, lo cual a su vez implica que (1) vale tambien en este caso.

§4.- INTEGRALES SINGULARES CON NUCLEO PAR

Sea ahora $k(x)$ una función homogénea de grado $-n$, par, con media nula sobre la esfera unitaria y tal que $\int_\Sigma |k(x)|^q \, d\sigma < \infty$ para algún $q > 1$.

Como fuera del orígen $k(x)$ es q integrable :

$$\int_{|x|>\varepsilon} |k(x)|^q \, dx = \int_\Sigma \left|k\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|^q d\sigma \int_\varepsilon^\infty |x|^{n-1-nq} \, d|x| = \int_\Sigma |k(x')|^q \, d\sigma \, .$$

$$. \frac{\varepsilon^{(1-q)n}}{(q-1)\,n} < \infty$$

, entonces $K_\varepsilon f(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy$, si $f \in (D)$, es, para ε fijo una función q integrable y acotada.

Nuestro objetivo es probar un teorema análogo al 2, y la idea de la demostración será reducir nuestro núcleo par a otro impar. Observemos que la convolución de dos funciones de igual o distinta paridad, es respectivamente, una función par o impar, y que la convolución de dos funciones homogéneas de grados s y t es una función homogénea de grado $s + t +$ + dim. del esp. .

Operando formalmente, vemos que aplicando el operador de Riesz a $K f = \int k(x-y)\, .f(y)\, dy$: $R_m K f = \gamma_m \frac{x_m}{|x|^{n+1}} * (k(x) * f(x)) = (\gamma_n \frac{x_m}{|x|^{n+1}} * k(x)) * f(x)$.

La última convolución entre paréntesis es por lo observado, un núcleo impar de grado $-n$, y por el teorema anterior definirá un operador acotado; luego también lo será:

$$\sum_{m=1}^{n} R_m (R_m K) f = K f$$

Pasemos ahora a la demostración rigurosa.

Teorema 3

Sea $k(x)$ una función homogénea de grado $-n$, par $(k(x) = k(-x))$ con media cero sobre la esfera unitaria Σ, y tal que existe $q > 1$ con $\int_\Sigma |k(x)|^q d\sigma < \infty$. Entonces vale que, para todo $f \in L^p$, $1 < p < \infty$:

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p = \|K_\varepsilon f\|_p \leq A_{p,q} \|f\|_p \, . \left(\int_\Sigma |k(x)|^q \, d\sigma \right)^{1/q}$

b) existe una función $\tilde{f} = K f \in L^p$, tal que $\tilde{f}_\varepsilon$ converge en media p a $\tilde{f}$ para $\varepsilon \to 0$.

c) $||\tilde{f}||_p \leqslant A_{p,q} \, ||f||_p \, \left(\int_{\Sigma} |k(x)|^q \, d\sigma \right)^{1/q}$.

D e m o s t r a c i ó n:

Usaremos la siguiente nomenclatura : $[g]_\delta = [g]_\delta(x)$, será la función igual a $g(x)$ para $|x| \geqslant \delta$ y cero para $|x| \leqslant \delta$; con $||g||_p$ (sub A) designaremos a $\left(\int_A |g|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ dónde μ será una medida en A que se conocerá en cada caso .

c, c_p , $c_{p,q}$ serán constantes que dependen del subíndice, pudiendo variar su significado a lo largo de una demostración, mientras que A , A_p , $A_{p,q}$ serán constantes especiales, que conservan su valor en una demostración.

Demostraremos a continuación las siguientes proposiciones: si $f \in (D)$ entonces:

i) $R_m(K_\varepsilon f) = (R_m [k]_\varepsilon) * f$

ii) Existe una función $\tilde{k}(x)$ impar, homogénea de grado $-n$, tal que

$$\int_{|x|=1} |\tilde{k}(x)| \, d\sigma = ||\tilde{k}||_{1,\Sigma} \leqslant c_q \, ||k||_{q,\Sigma}$$

iii) $[\tilde{k}]_\varepsilon - R_m [k]_\varepsilon = \delta_\varepsilon$ es del L^1 con : $||\delta_\varepsilon||_1 \leqslant c_q \, ||k||_{q,\Sigma}$.

Con estas proposiciones es ahora inmediato a) . En efecto : si $f \in (D)$, $R_m(K_\varepsilon f) = (R_m [k]_\varepsilon) * f = [\tilde{k}]_\varepsilon * f - \delta_\varepsilon * f$; el primer sumando del último miembro, por ii) , iii) y teorema 2 , es tal que:

$$||[\tilde{k}]_\varepsilon * f||_p \leqslant c_q \cdot A_{p/2} \, ||k||_{q,\Sigma} \cdot ||f||_p$$

si $1 < p < \infty$ y el segundo sumando, por iii) y la desigualdad de Young , es:

$$||\delta_\varepsilon * f||_p \leqslant c_q \, ||k||_{q,\Sigma} \cdot ||f||_p$$

luego

(1) $$||R_m(K_\varepsilon f)||_p \leqslant c_{p,q} \, ||k||_{q,\Sigma} \cdot ||f||_p$$

De (1) y de ii) del §3 , resulta:

$$||K_\varepsilon f||_p \leqslant A_{p,q} \, ||k||_{q,\Sigma} \cdot ||f||_p \qquad \text{c. q. d.}$$

Pasemos a la demostración de los puntos i) - iii)

i)

(2) $$R_{m\delta}(K_\varepsilon f) = \gamma_n \int \left[\frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} \right]_\delta dy \cdot \int [k]_\varepsilon (y-z) \, f(z) \, dz$$

La integral interior del módulo de su integrando es una función de L^q (desigualdad de Young), y como el módulo del núcleo de Riesz fuera del orígen pertenece a todo L^p , $p > 1$, la misma desigualdad permite verificar finalmente que la integral repetida de los módulos es finita, lo que implica que pueden conmutarse las integrales:

$$R_{m\delta} K_\varepsilon f = \gamma_n \int f(z) \left(\int \left[\frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} \right]_\delta \cdot [k]_\varepsilon (y-z)\, dy \right) dz$$

Efectuando en la última integral el cambio de variables $y = z - t$, tenemos

$$R_{m\delta} (K_\varepsilon f) = (R_{m\delta} [k]_\varepsilon) * f$$

Para δ tendiendo a cero, el primer miembro de esta igualdad converge en norma q a $R_m (K_\varepsilon f)$ y el segundo, también en norma q, a $(R_m [k]_\varepsilon) * f$, pues $[k]_\varepsilon \in L^q$ y $f \in L^1$, lo que demuestra i).

ii) Sea $x \neq 0$; $\varepsilon < \eta < |x|/2$. Estas dos condiciones, entendiendo límite en el sentido puntual, permiten escribir :

$$\{ R_m ([k]_\varepsilon - [k]_\eta) \} (x) = \lim_{\delta \to 0} \int \left[\frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} \right]_\delta (-[k]_\eta + [k]_\varepsilon)(y)\, dy =$$

$$= \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} \cdot k(y)\, dy = \text{(por tener } k(y) \text{ media nula en}$$

$$|y| = 1) = \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \left(\frac{x_m - y_m}{|x-y|^{n+1}} - \frac{x_m}{|x|^{n+1}} \right) k(y)\, dy$$

Aplicando al paréntesis en la última integral el teorema del valor medio, se obtiene que:

$$(3) \qquad \left| \{ R_m ([k]_\eta - [k]_\varepsilon) \} (x) \right| \leqslant \int_{\varepsilon<|y|<\eta} \frac{c.|y|}{|x|^{n+1}} |k(y)|\, dy = c.|x|^{-n-1} \int_\varepsilon^\eta d|y| \int_\Sigma |k(y)|\, d\sigma$$

$$\leqslant c \,.\, |x|^{-n-1} \,.\, \eta \,.\, \|k\|_{q,\Sigma}$$

De (3) se concluye que la sucesión $R_m [k]_\eta$ es de Cauchy en norma L^∞ sobre todo cerrado que no contiene el orígen. Luego está definida una función $k^*(x)$,tal que en $|x| > \alpha$, $\| R_m [k]_\eta (x) - k^*(x) \|_\infty \longrightarrow 0$.

Directamente de la definición resulta:

$$(4) \qquad R_{m\delta} [k]_\varepsilon (\lambda x) = \lambda^{-n} R_{m\,\delta/\lambda} [k]_{\varepsilon/\lambda} (x)$$

y

$$(5) \qquad R_{m\delta} [k]_\varepsilon (-x) = - R_m [k]_\varepsilon (x)$$

De lo expuesto y de (5) resulta que $k^*(x)$ es impar salvo medida 0 .

Supongamos haber modificado k^* como para que sea impar.

De (4) resulta que k^*, para cada λ y para casi todo x tiene la propiedad:

$$(6) \qquad k^*(\lambda x) = \lambda^{-n} k^*(x)$$

Pasando al espacio producto $(0,\infty) \times E^n$, como cada miembro de (6) es una función medible allí, se comprueba que para casi todo x, vale (6) para casi todo λ.

Sea B el conjunto de los tales que no es cierto que para casi todo λ vale (6).

Luego existe una esfera de radio ρ, Σ_ρ, tal que la medida sobre Σ_ρ de $\Sigma_\rho \cap B$ es cero.

Definimos $\tilde{k}(x) = \left(\frac{\rho}{|x|}\right)^n . k^*\left(\frac{x\rho}{|x|}\right)$ si $\frac{x}{|x|}\rho \notin B$ y cero en todo otro punto.

$\tilde{k}$ difiere de k^* en un conjunto de medida 0, como además es impar y homogénea de grado $-n$, tenemos la función buscada.

$$(\lg 2) \int_{\Sigma} |\tilde{k}(x)|\, d\sigma = \int_{1<|x|<2} |\tilde{k}(x)|\, dx$$

Como se vé, aplicando (3), si $|x| > 1$, $|(\tilde{k} - R_m k_{\frac{1}{2}})(x)| \leqslant C\, |x|^{-n-1} \|k\|_{1,\Sigma}$, y por lo tanto

$$\int_{1<|x|<2} |\tilde{k} - R_m k_{\frac{1}{2}}|\, dx \leqslant C\, \|k\|_{1,\Sigma} \leqslant C\, \|k\|_{q,\Sigma}$$

Por otro lado:

$$\int_{1<|x|<2} |R_m k_{\frac{1}{2}}|\, dx \leqslant C\, \|R_m k_{\frac{1}{2}}\|_q \leqslant C\, A_q\, \|k_{\frac{1}{2}}\|_q = C\, A_q\, \|k\|_{q,\Sigma} .$$

De estas tres relaciones obtenemos:

$$\int_{\Sigma} |\tilde{k}|\, d\sigma = (\lg 2)^{-1} \int_{1<|x|<2} |\tilde{k}|\, dx \leqslant (\lg 2)^{-1} \int_{1<|x|<2} \left(|\tilde{k} - R_m k_{\frac{1}{2}}| + |R_m k_{\frac{1}{2}}| \right) dx \leqslant$$

$$\leqslant C_q \cdot \|k\|_{q,\Sigma}$$

iii) Es suficiente demostrar que : $\|\delta_1\|_1 < \infty$, pues un cálculo simple muestra que $\delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\, \delta_1(x\,\varepsilon^{-1})$ y que tiene la misma norma que δ_1.

$$\int_{|x|<2} |\delta_1(x)|\, dx \leqslant \int_{|x|<2} |R_m k_1|\, dx + \int_{1<|x|<2} |\tilde{k}(x)|\, dx \leqslant C\, \|R_m k_1\|_q + C\, \|k\|_{1,\Sigma} \leqslant$$

$$\leqslant C\, A_q\, \|k_1\|_q + C_q\, \|k\|_{q,\Sigma} \leqslant C_q\, \|k\|_{q,\Sigma} \; ; \; \int_{|x|\geqslant 2} |\delta_1(x)|\, dx \leqslant \left(\int_{|x|\geqslant 2} C\, |x|^{-n-1}\, dx \right) .$$

$$. \|k\|_{1,\Sigma} \leqslant C_q\, \|k\|_{q,\Sigma}$$

y sumando se obtiene la tesis.

b) Sea $\rho(x)$ una función de (D), igual a 1 en un entorno del orígen, y radial; y sea f de (D).

Como $|f(y) - f(x)\ \rho(x-y)| \leq M\,.\,|x-y|$, e $\displaystyle\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\,\rho(x-y)\,dy = 0$

tenemos :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy = \int k(x-y)\,\left[f(y) - f(x)\,\rho(x-y)\right] dy$$

Se ve facilmente que este límite es uniforme y que $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ no depende de ε , si $|\varepsilon| < 1$, fuera de un compacto. Como $\tilde{f}_\varepsilon \in L^p$ queda probado que $\tilde{f}_\varepsilon$ converge en L^p c. q. d.

Razonando como en el párrafo anterior y utilizando el lema 1 se comprueba que para todo $f \in L^p$, $k(x-y)\, f(y)$ es en $|x-y| > \varepsilon$ absolutamente integrable para casi todo x y que existe una $\tilde{f}(x) = K f(x)$, que es límite en norma p de $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_{|x-y|>\varepsilon} k(x-y)\, f(y)\, dy$.

Resulta como corolario el siguiente :

<u>T e o r e m a</u> <u>4</u> :

Sea $k(x)$ homogénea de grado $-n$, con media nula en Σ , y tal que su parte impar, $\frac{1}{2}\{k(x) - k(-x)\}$, sea integrable en Σ , y su parte par q integrable allí, con $q > 1$. Entonces valen a) b) y c) del teorema precedente.

§5.- ESTUDIO DE LAS TRANSFORMADAS DE FOURIER DE LOS NUCLEOS

Teorema

Sea $k(x)$ un núcleo como en el teorema 4 , es decir tal que su parte impar es integrable sobre la esfera unitaria, y su parte par es q integrable $(q > 1)$ y de media nula sobre Σ Entonces $[vp.\ k]$ es una distribución temperada y $F[vp.\ k]$ es una función acotada, homogénea de grado cero y de valor medio nulo sobre la esfera unitaria. Además para toda $f \in (\mathcal{D})$ vale

a) $K f = (vp.\ k) * f$ b) $F[K f] = F(vp.\ k)\ F(f)$

Demostración

Que $[vp.\ k]$ es una distribución temperada se deduce del hecho que la distribución $[vp.\ k]\ (1 + |x|^2)^{-1}$ coincide en $|x| > 1$ con una función integrable y como toda distribución a soporte compacto es de (S') $[vp.\ k]\ (1 + x^2)^{-1}$ es temperada y lo mismo vale para $[vp.\ k]$.

La fórmula a) es consecuencia de la definición de $K f$ y la definición de convolución de una distribución temperada y una función de $(\mathcal{D})$. La identidad b) se obtiene del teorema sobre la transformada de Fourier de una convolución.

Pasemos a demostrar las propiedades de $F[vp.\ k]$. Sea $f \in (\mathcal{D})$ tal que $|F(f)| > 0$ sobre un abierto A dado, resulta que $F(f)\ F(vp.\ k)$ coincide en A con $F(K f)$ la cual como sabemos pertenece a L^2 ; Esto es, $F(vp.\ k)$ es una función que es localmente de L^2

De

$$||F(K f)||_2 = ||F(vp.\ k).F(f)||_2 \leqslant ||K f||_2 \leqslant A_{2q}\ ||f||_2$$

resulta

$$||F(vp.\ k).F(f)||_2 \leqslant A_{2q}\ ||F(f)||_2 ,$$

lo cual a su vez implica que $F(vp.\ k)$ es de L^∞ , pues $F(f)$ recorre un conjunto denso en L^2 , al variar f en (D) .

Es facil ver que $vp.\ k(x)$ es una distribución homogénea de grado $-n$. Luego, por (7) de §3 , su transformada de Fourier es una distribución homogénea de grado cero:

$$\Pi_\lambda F(vp.\ k) = F(vp.\ k)$$

De la definición de Π_λ y del hecho que F (vp. k) es una función, resulta:

$$\langle F(\text{vp. } k), \varphi \rangle = \langle \Pi_\lambda F(\text{vp. } k), \varphi \rangle = \langle F(\text{vp. } k), \lambda^{-n} \varphi(x.\lambda^{-1}) \rangle =$$

$$= \langle F(\text{vp. } k)(\lambda x), \varphi \rangle$$

Del primer y último miembro de esta igualdad, resulta que, dado λ, para casi todo x:

(1) $$F(\text{vp. } k)(\lambda x) = F(\text{vp. } k)(x)$$

Razonando como en la demostración de ii) del T. 3 en el § 4, resulta que es posible modificar la F (vp.k) en un conjunto de medida nula de tal manera que (1) valga en t o d o $x \neq 0$ y todo $\lambda > 0$. Trabajaremos siempre con esta función modificada. Veamos ahora que F (vp. k) tiene media nula en Σ:

De la definición de transformada de Fourier y de vp. k :

$$\int F(\text{vp. } k)(x) \exp(-\pi |x|^2)\, dx = \langle \text{vp. } k, \exp(-\pi |x|^2) \rangle =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} k(x) \exp(-\pi |x|^2)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty e^{-r^2 \pi} r^{-1}\, dr \int_\Sigma k(x')\, d\sigma = 0$$

Por otra parte, el primer miembro es igual a :

$$\int_0^\infty e^{-r^2\pi} r^{n-1}\, dr \int_\Sigma F(\text{vp. } k)(x')\, d\sigma \quad ,$$

lo cual implica que

$$\int_\Sigma F(\text{vp. } k)(x)\, d\sigma = 0 \quad , \text{ c. q. d.}$$

Exigiremos ahora que $k(x)$ pertenezca a C^∞ en $E^n - (0)$. Luego, salvo factor constante, la distribución

$$x_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} F(\text{vp. } k) \quad \text{es igual a} \quad F\left(\frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \text{ vp. } k) \right) .$$

Por otra parte si $\varphi \in (D)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j \text{ vp. } k), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} - \int_{|x|>\varepsilon} x_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} k(x)\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j k) \varphi\, dx + \int_{|x|=\varepsilon} x_j k \varphi . \frac{x_i}{|x|}\, d\sigma_\varepsilon \right] =$$

$$= \left\langle \text{vp. } \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j k), \varphi \right\rangle + \langle c\, \delta, \varphi \rangle .$$

Esto implica en particular que para C_1 constante, vale

(2) $$C_1\, x_i \frac{\partial}{\partial x_j} F\,(vp.\ k) = F\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ vp.\ k)\right] = F\left[vp.\ \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ k)\right] + C$$

Además:

$$\int_{1\leqslant |x|\leqslant 2}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ k)\ dx = \lg 2\int_{|x|=1}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ k)\ d\sigma \quad ,$$

e integrando por partes el primer miembro se obtiene:

$$-\int_{|x|=1} x_j \frac{x_i}{|x|}\ k\ (x)\ d\sigma_1 + \int_{|x|=2} x_j \frac{x_i}{|x|}\ k\ (x)\ d\sigma_2 = 0$$

pues ambas integrales son iguales.

De esto resulta que:

(3) $$\int_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ k)\ d\sigma = 0$$

y como el integrando es de C^{∞} y homogéneo de grado $-n$, es $F\,(vp.\ \frac{\partial}{\partial x_i}(x_j\ k)) \in L^{\infty}$.

Luego, $\partial/\partial x_j\ F\,(vp.\ k)$ coincide por (2) con una función acotada en todo compacto que no corta $x_i = 0$. Como esto pasa para todo $i = 1, \ldots, n$, la distribución mencionada coincide con una función localmente acotada en $E^n - (0)$.

El proceso puede repetirse probándose :

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_i}^{|\alpha|}}(x^{\alpha}\ vp.\ k) = vp\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_i}^{|\alpha|}}(x^{\alpha}\ k\ (x)) + a\,\delta,$$

y que

$$C\ x_i^{|\alpha|}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} F\,(vp.\ k) = F\left(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_i}^{|\alpha|}}(x^{\alpha}\, vp.\ k)\right) = F\,(vp.\ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_i}^{|\alpha|}}(x^{\alpha}\ k)) + a$$

donde a y c son constantes ; y razonando como antes, que $\partial^{|\alpha|}/\partial {x_i}^{|\alpha|}\ (x^{\alpha}\ k)$ es un núcleo de los considerados .

De estas proposiciones se deducirá , que $(\partial/\partial x)^{\alpha}\ F\,(vp.\ k)$ es acotada sobre todo cerrado que no contiene el origen. Esto demuestra la directa del

T e o r e m a 5

Si k es homogénea de grado $-n$, de C^{∞} en $E^n - (0)$ y de media nula en Σ, entonces $h = F\,(vp.\ k)$ es una función homogénea de grado cero, de C^{∞} en $E^n - (0)$ y de media nula en Σ. Recíprocamente, una función h, con estas propiedades es la transformada de Fourier del valor principal de algún k con aquellas propiedades.

Veamos la recíproca. Sea h, homogénea de grado cero, y de C^{∞} en $E^n - (0)$.

Por pertenecer a (S'), tiene una antitransformada de Fourier que , llamaremos H, tal que:

$$\frac{\partial^n h}{\partial x_i^{\,n}} = C\, F\,(x_i^n\, H) \quad ,$$

donde C es una constante.

Por otra parte $\partial^n h/\partial x_i^n$ es una función homogénea de grado $-n$, de C^∞ en $E^n - (0)$ y con media nula en Σ , esto último por un razonamiento analogo al de la demostración de (3) ; luego, como es facil ver: .

$$\frac{\partial^n h}{\partial x_i^{\,n}} = \text{vp.}\ \frac{\partial^n h}{\partial x_i^{\,n}} + \text{distribución con soporte en } (0) = C\, F\,(x_i^n\, H)$$

Antitransformando Fourier :

$$F^{-1}\,(\text{vp.}\ \frac{\partial^n h}{\partial x_i^{\,n}}) + F^{-1}\,(\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha\,(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha\,\delta\,) = C\, x_i^n\, H$$

Como por (1) H es una distribución homogénea de grado $-n$, $x_i^n\, H$ es de grado cero y el segundo sumando del primer miembro debe ser un polinomio de grado cero, pues él primer sumando es homogéneo de ese grado.

Luego $x_i^n\, H$ es una f u n c i ó n homogénea de grado cero,de C^∞ en $E^n - (0)$; dividiendo por x_i^n y repitiendo el argumento para $1 \leq i \leq n$ concluímos que H coincide en $E^n - (0)$ con una función G homogénea de grado $-n$. Veamos que su media es nula.

Sea $\varphi\,(t)$ una función radial, de (D) , nula en $|t| < 1$ y $|t| > 2$ y positiva en $1 < |x| < 2$, luego

$$< H\,,\varphi > \;=\; \int G\,(x)\,\varphi\,(x)\,dx \;=\; c \int_\Sigma G\,(x)\,d\sigma \quad , \quad c = \text{cte.} > 0$$

Por otra parte : $< H\,,\varphi > \;=\; < F^{-1}\,(h)\,,\varphi > \;=\; < h\,,F^{-1}\,(\varphi) >$,

como $F^{-1}\,(\varphi)$ es radial, el último miembro es salvo factor :

$$\int_\Sigma h\,(x)\,d\sigma = 0 \quad , \quad \text{c. q. d.}$$

Veamos ahora que H coincide con $\text{vp.}\ G$. La distribución $H - \text{vp.}\ G$ tiene soporte (0) , luego su transformada de Fourier $h - \widehat{\text{vp.}\ G}$ es un polinomio, que por ser ambos sumandos acotados debe ser una constante, y necesariamente nula pues ambas funciones tienen media cero. O sea, $F\,(H) = F\,(\text{vp.}\ G) = h$, c. q. d.

6.- ARMONICOS ESFERICOS n-DIMENSIONALES

Notaciones:

$P(x)$, $T(x)$, etc., indicarán polinomios a coeficientes reales, homogéneos de grado m , y $P(\frac{\partial}{\partial x})$ el operador diferencial asociado a $P(x)$, obtenido por reemplazo en $P(x)$ del monomio $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ por :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Llamaremos Π_m al espacio de todos los polinomios homogéneos de grado m .

Proposicion 1:

La dimensión lineal de los polinomios homogéneos de grado m es $g(m) = \binom{m+n-1}{n-1}$. En efecto, el número de monomios distintos de grado m es $g(m)$, y estos forman una base en el espacio de dichos polinomios.

Observemos que si P y $Q \in \Pi_m$, $P(\frac{\partial}{\partial x})\, Q(x) = \langle P , Q \rangle$ es una funcional bilineal en $\Pi_m \times \Pi_m$ y que si $P(x) \not\equiv 0$ entonces la funcional lineal $P(\frac{\partial}{\partial x})$, no es idénticamente nula, pues si $P(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha} x^{\alpha}$, $\langle P , P \rangle =$ $= \sum_{|\alpha|=m} \alpha!\, a_{\alpha}^2 > 0$.

Esto nos permite identificar cada polinomio diferencial con una funcional lineal. Más aún, vale la :

Proposición 2 :

Existe una correspondencia biunívoca y sobre, entre el dual algebraico de Π_m , y el espacio de los operadores diferenciales asociado a Π_m .

En efecto, en lo observado recientemente se demostró la biunivocidad. Veamos que la transformación es sobre.

La familia de los monomios diferenciales de grado m es linealmente independiente, y genera el espacio asociado a Π_m . Como su dimensión es $g(m)$, y esta es la dimensión del dual de Π_m , tenemos la tesis.

Por otra parte todo polinomio diferencial de grado $\ell < m$ es un operador lineal que lleva Π_m en $\Pi_{m-\ell}$.

La aplicación que define es también sobre , como lo prueba el :

Teorema 1

Si $R \in \Pi_{m-\ell}$, $P \not\equiv 0$, existe un $Q \in \Pi_m$ tal que: $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) . Q(x) = R(x)$.

Demostración:

En efecto, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \Pi_m$ es un subespacio de $\Pi_{m-\ell}$. Supongamos que sea propio, luego, existirá una funcional lineal sobre $\Pi_{m-\ell}$, nula en ese subespacio y no identicamente nula.

Por la proposición 2 , esa funcional es identificable a $S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ con $S(x) \in \Pi_{m-\ell}$, $S(x) \not\equiv 0$. Luego, para todo $Q \in \Pi_m$, vale:

$$S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) Q(x) = 0 .$$

Eligiendo $Q(x) = S(x) . P(x)$, tendremos $Q \equiv 0$ y como $P \not\equiv 0$ será $S \equiv 0$, absurdo .

Teorema de descomposición

Dado $P \in \Pi_m$, todo $T \in \Pi_\ell$, admite una descomposición única de la siguiente forma:

$$T(x) = \sum_k R_k(x) . P^k(x) ,$$

donde: $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) R_k(x) \equiv 0$, y la suma se extiende a todos los k tales que : $k.m \leqslant \ell$. Además, los R_k no son divisibles por P .

Demostración:

Mostraremos primero que : $T(x) = P(x)\, S_1(x) + R_o(x)$ donde $S_1 \in \Pi_{\ell-m}$ y $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) R_o = 0$ con descomposición única. En efecto, sea: $M = (PS \,/\, S \in \Pi_{\ell-m})$ y $N = (R \,/\, R \in \Pi_\ell$ y $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) R \equiv 0)$

Si $PS \in N$ entonces: $S\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) P(x)\, S(x) \equiv 0$, o sea, $PS \equiv 0$, lo que muestra que : $M \cap N = (0)$.

Luego $M \oplus N$ tiene dimensión : $\dim M + \dim N = g(\ell-m) + \left[g(\ell) - g(\ell-m) \right] = g(\ell)$, esto es, $M \oplus N = \Pi_\ell$ y $T = PS_1 + R_o$.

Como $M \cap N = (0)$ se vé de la definición de M y N , que R_o no es divisible por P .

Tratando a S_1 como se trató a T , tenemos : $S_1 = P\, S_2 + R_1$

El proceso de recurrencia termina al llegar a un S_k de grado menor que m , en cuyo caso coincide con el R_k .

Consideremos ahora el caso particular $P(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ cuyo operador diferencial asociado es el laplaciano:

(1) $$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Definición: llamaremos armónico sólido de grado m a todo polinomio homogéneo de grado m, solución de la ecuación $\Delta P = 0$; sus restricciones a la esfera unitaria se llamarán armónicos esféricos de grado m. La familia de los armónicos sólidos será designada con $\{O_m\}$ y la de sus restricciones con $\{Q_m\}$.

Proposición 3:

a) La dimensión lineal de $\{O_m\}$ es $(g(m) - g(m-2))$.

b) Todo polinomio P, homogéneo de grado ℓ, admite el siguiente, univocamente determinado, desarrollo finito:

$$P(x) = \sum_{\ell-2k \geq 0} |x|^{2k} O_k \quad \text{con} \quad O_k \in \{ O_{\ell-2k} \}$$

c) Si $Q_i \in \{Q_i\}$, entonces $\int_{\Sigma} Q_m . Q_k \, d\sigma = 0$ para $m \neq k$

d) Si $O_i \in \{O_i\}$, entonces $\int_{|x| \leq r} O_m . O_k \, dx = 0$ para $m \neq k$, $r \geq 0$

Demostración:

a) y b) resultan como casos particulares de Teorema 1 y Teorema de descomposición.

c) teniendo en cuenta la definición de $\{Q_m\}$, vemos que $|x|^i Q_i(x')$ es un armónico sólido O_i.

Aplicando la fórmula de Green resulta:

$$\int_{\Sigma} \left(O_m \frac{\partial}{\partial \nu} O_k - O_k \frac{\partial}{\partial \nu} O_m \right) d\sigma = \int_{|x| \leq 1} (O_m \Delta O_k - O_k \Delta O_m) \, dx = 0$$

Además como $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial |x|}$, es $\frac{\partial}{\partial \nu} O_i = i . |x|^{i-1} . Q_i(x')$, y reemplazando en la primera integral resulta:

$$\int_{\Sigma} (Q_m . k . Q_k - Q_k . m . Q_m) \, d\sigma = (k - m) . \int_{\Sigma} Q_m . Q_k \, d\sigma = 0 \qquad \text{c. q. d.}$$

d) es consecuencia de c) si se tiene en cuenta que $O_i(x) = |x|^i . Q_i(x')$.

Designaremos con $Y_{k,m}(x')$, $k = 1, 2, \ldots, (g(m) - g(m-2))$, una base ortonormal de $\{Q_m\}$.

Teorema 2:

La familia $\{Y_{k,m}\}$, $m = 0, 1, \ldots$ es completa en Σ.

D e m o s t r a c i ó n :

Usando el teorema de Weierstrass se puede demostrar que toda función contínua en Σ, se puede aproximar uniformemente por restricción de polinomios a Σ y estas a su vez son combinaciones lineales de armónicos esféricos. Luego sigue la completidad .

Sea $x_o \in \Sigma$; $\ell(Q) = Q(x_o)$ es entonces una funcional lineal sobre $[Q_m]$, y como este espacio es de Hilbert (con $(Q,Q') = \int_\Sigma Q.Q'\, d\sigma$) y de dimensión finita , del teorema de representación de Riesz obtenemos, que para todo $Q \in [Q_m]$:

$$(2) \qquad \ell(Q) = Q(x_o) = \int_\Sigma Q(y)\, Z_{x_o}(y)\, d\sigma \quad \text{con} \quad Z_{x_o} \in [Q_m]$$

A cada punto x de Σ está asociado así un armónico que llamaremos z o n a l d e p o l o x .

T e o r e m a 3 :

a) Si por ω designamos una rotación alrededor del orígen, entonces vale :

$$Z_{\omega x}(\omega y) = Z_x(y).$$

b) Para todo armónico zonal vale :

$$Z_x(y) = \sum_k Y_{km}(x)\; Y_{km}(y)$$

donde la suma se extiende sobre todos los elementos de una base de $[Q_m]$.

D e m o s t r a c i ó n :

Observemos en primer lugar que si $Q(x) \in [Q_m]$, $Q(\omega x)$ también, por la invariancia del laplaciano por rotaciones .

Aplicando la fórmula (2) a $Q(\omega x)$ obtenemos :

$$Q(\omega x) = \int_\Sigma Q(\omega y)\; Z_x(y)\, d\sigma \quad , \text{ y aplicada a } Q(x) :$$

$$Q(\omega x) = \int_\Sigma Q(y)\, Z_{\omega x}(y)\, d\sigma = \int_\Sigma Q(\omega y)\, Z_{\omega x}(\omega y)\, d\sigma \ .$$

Como esto pasa para todo Q , obtenemos a) .

b) Por ser Y_{km} una base en $[Q_m]$, vale para todo $Q \in [Q_m]$:

$$Q(x) = \sum_k a_k\, Y_{km}(x) \quad \text{con} \quad a_k = \int_\Sigma Q(y)\; Y_{km}(y)\, d\sigma \ ;$$

o sea

$$Q(x) = \int_{|y|=1} Q(y)\, \Big(\sum_k Y_{km}(y) \, . \, Y_{km}(x)\Big)\, d\sigma \qquad \text{c. q. d.}$$

C o r o l a r i o : a) Todo armónico zonal $Z_x(y)$ es constante sobre paralelos de eje O_x , como se ve de a) para una rotación tal que $\omega x = x$.

b) $\sum_k Y^2_{km}(y) = A_m = \text{cte.}$

En efecto: por b) : $\sum_k Y^2_{km}(x) = Z_x(x)$ y $\sum_k Y^2_{km}(\omega x) = Z_{\omega x}(\omega x)$. Como por a) los segundos miembros son iguales, y todo punto y es un ωx, sigue el Corolario.

Trataremos ahora de acotar los polinomios normalizados y sus derivadas.

Teorema 4:

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha} \left(|x|^m Y_{km}(x) \right) \right| \leqslant C . |x|^{m-|\alpha|} . m^{n/2 + |\alpha| - 1}$$

donde C designa una constante que sólo depende de la dimensión del espacio n, y del orden de derivación α.

Demostración :

Del Corolario y de la definición de los Y_{km} tenemos :

$$\int_{|x|=1} \sum_k Y^2_{km}(x)\, d\sigma = A_m . \omega_n = g(m) - g(m-2)$$

luego:

(3) $$| Y_{km}(x) | \leqslant \left(\frac{g(m) - g(m-2)}{\omega_n} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C . m^{n-2/2}$$

Sea $P = Y_{km}(x) . |x|^m$ y S la esfera unitaria. De la fórmula de Gauss :

$$\int_{\Sigma} P (\text{grad } P) \times d\sigma = \int_S (|\text{grad } P|^2 + P . \Delta P)\, dx = \int_S |\text{grad } P|^2\, dx =$$

$$= \int_0^1 |x|^{2m+n-3}\, d|x| \int_{\Sigma} |\text{grad } P|^2\, d\sigma$$, como de la fórmula de Euler logramos : $\text{grad } P \times d\sigma = m P\, d\sigma$ tenemos:

(4) $$m \int_{\Sigma} P^2\, d\sigma = m = \frac{1}{(2m+n-2)} \int_{\Sigma} |\text{grad } P|^2\, d\sigma .$$

Como $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ es homogéneo de grado $m-1$ y armónico, si a designa su norma -2 en Σ, de (3) obtenemos: $\left| \frac{\partial P}{\partial x_i} \right| \leqslant a . C . (m-1)^{n-2/2}$, y de (4) :

(4a) $$a^2 \leqslant \int_{\Sigma} \left| \sum_i \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2 \right| d\sigma = m\,(2m+n-2)$$

luego $\left| \frac{\partial P}{\partial x_i} \right| \leqslant m^{n/2} . C$ en los x con $|x| = 1$. La $m-1$ homogeneidad de $\frac{\partial P}{\partial x_i}$ dá la tesis para $|\alpha| = 1$. Iterando el proceso se obtiene el teorema en el caso gene ral.

N o t a : Observando la demostración se vé que las acotaciones n o dependen del sistema ortonormal particular, hecho que se usa al acotar $\frac{\partial P}{\partial x_i}$. Definiremos a continuación un operador L que conserva el grado de homogeneidad de una función :

$$L f = |x|^2 . \Delta f$$

P r o p o s i c i ó n 4 :

Si f y g tienen 2r derivadas contínuas y son homogéneas de grado cero, vale

$$\int_\Sigma f L^r g \, d\sigma = \int_\Sigma g L^r f \, d\sigma$$

D e m o s t r a c i ó n :

$$\int_{1-\varepsilon \leq |x| \leq 1+\varepsilon} (f . \Delta g - g . \Delta f) \, dx = \int_{sup} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) \, d\sigma = 0$$ pues de la homogeneidad resulta $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} = 0$. Como por la continuidad :

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{1-\varepsilon \leq |x| \leq 1+\varepsilon} (f \Delta g - g \Delta f) \, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_{|x|=1} (f. \Delta g - g. \Delta f) \, d\sigma$$

y Δg , Δf coinciden en Σ con Lg , Lf respectivamente, queda :

(5) $$\int_\Sigma (f L g - g L f) \, d\sigma = 0$$

Reemplazando en (5) g por L g : $\int_\Sigma (f L^2 g - g L^2 f) = 0$, e iterando obtenemos la tesis .

P r o p o s i c i ó n 5 :

Para todo $Y_{km}(x)$ y todo $r \geq 0$ vale

$$L Y_{km}(x) = (-m)^{-r} (m+n-2)^{-r} L^r Y_{km}$$

En efecto:

$$L Y_{km}(x) = |x|^2 . \Delta Y_{km}(x) = |x|^2 . \Delta (\frac{P(x)}{|x|^m})$$ donde $P(x) = |x|^m Y_{km}(x)$ es un armónico sólido .

$$\Delta |x|^{-m} P(x) = P \Delta |x|^{-m} + |x|^{-m} \Delta P + 2 \operatorname{grad} P \times \operatorname{grad} |x|^{-m} = P(x) (-m) (n-2-m) . |x|^{-2-m} + 0 + 2 (-m^2) P(x) |x|^{-m-2}$$

de donde $L Y_{km}(x) = -m (m+n-2) Y_{km}(x)$ lo que aplicado sucesivamente da la tesis .

Observemos que toda función f perteneciente a $L^2(\Sigma)$ admite por Teor. 2 un desarrollo de la forma $f(x) = \sum_{k,m} a_{km} Y_{km}(x)$ donde la convergencia debe entenderse en el sentido de la norma -2, y tal que

$$a_{km} = \int_\Sigma f(x)\, Y_{km}(x)\, d\sigma \quad , \quad \int_\Sigma |f|^2\, d\sigma = \sum_{k,m} a^2_{km} \quad .$$

Supongamos $f \in C^\infty$ sobre Σ. Esto equivale a decir que f es la restricción a Σ, de una función $g(x)$, homogénea de grado 0 y de C^∞ en $E^n - 0$, como es fácil comprobar. Identificaremos g con f, y quedará a cargo del lector verificar cuando se usa la función homogénea o su restricción.

Teorema 5:

Sea $f(x)$ a dominio Σ. Entonces $f(x) \in C^\infty$ implica que para todo r: $\sum_{k,m} m^r |a_{km}| < \infty$.

Recíprocamente dada una familia de coeficientes a_{km}, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, g(m) - g(m-2)$, con esta última propiedad, existe una f de C^∞ tal que $f(x) = \sum_{k,m} a_{km} Y_{km}(x)$.

Demostración:

Sea $f \in C^\infty$. De la definición de a_{km} y de la propiedad 5 tenemos:

$$a_{km} = \frac{1}{(-m)^r\,(m+n-2)^r} \int_{|x|=1} Y_{km}\, L^r f\, d\sigma$$

, aplicando la desigualdad de Schwarz:

$$|a_{km}| \leqslant m^{-2r} \cdot \|L^r f\|_{2,\Sigma} = C_r \cdot m^{-r} \quad ;$$

esto es, $|a_{km}|$ es de decrecimiento rápido, y vale la primera parte del teorema.

Sea ahora una familia a_{km} t.q. para todo r: $\sum_{k,m} m^r |a_{km}| < \infty$.

Como para m fijo el número de Y_{km} es por prop. 3 del orden de m^{n-2}, y por teor. 4 $|Y_{km}(x)| < C \cdot m^{n/2-1}$, resulta que la serie $\sum_{k,m} a_{km} Y_{km}(x)$ es, por la hipótesis sobre las a_{km} absoluta y uniformemente convergente a una $f(x)$. Las mismas consideraciones prueban que $\sum a_{km} \frac{\partial}{\partial x_i} Y_{km}(x)$ es absoluta y uniformemente convergente. Luego la función que ella define es $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Continuando el proceso vemos que la función $f \in C^\infty$.

Sabemos que $F(e^{-\pi|x|^2}) = e^{-\pi|x|^2}$; el siguiente lema generaliza este resultado:

Lema 1:

Si $P(x)$ es un armónico sólido de grado m, entonces $F(P(x)\, e^{-\pi|x|^2}) =$

$= i^m P(x)\, e^{-\pi|x|^2}$.

Demostración:

Designaremos con f a $\exp(-\pi|x|^2)$. Es fácil ver que :

(6) $$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f = P(-2\pi x)\, f + Q(x)\, f$$

donde Q es un polinomio de grado menor que m . Transformando Fourier (6) resulta

(7) $$P(-2\pi i x)\, f = F(P(-2\pi x).f) + F(Q(x).f)$$

Además :

(8) $$F(P(2\pi i x).f) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) f = P(-2\pi x)\, f + Q(x)\, f$$.

De (7) y (8) resulta :

(9) $$F(Q f) = -i^m Q f$$

De la fórmula de Parseval y de (7) y (9) :

$$(F(P(2\pi i x) f), F(Qf)) = ((P(-2\pi x) + Q) f, -i^m Q f) = (P(2\pi i x) f, Qf)$$

De los dos últimos miembros obtenemos:

(10) $$(-\tfrac{1}{2})(-2\pi)^{-m} . \int f^2(x)\; Q(x)^2\, dx = \int P(x)\; Q(x)\; f^2(x)\, dx$$

Aplicando el teorema de descomposición a cada parte homogénea de Q se tiene :

$$Q(x) = \sum_{1,k} R_{1,k}.|x|^{2k} ,$$

donde los R son armónicos sólidos y de grado menor que m . Reemplazando en (10) , vemos que $\int f^2 Q^2\, dx$, salvo factor cte. $\neq 0$, es igual a una suma de integrales de la forma : $\int P(x)\; R(x) . |x|^{2k} f^2\, dx$, donde R es un armónico de grado menor que m , y como $\int_\Sigma P(x')\; R(x')\, d\sigma = 0$, esas integrales serán nulas, por lo que : $Q f \equiv 0$. Reemplazando en (7) obtenemos la tesis .

Con este resultado, generalizaremos la fórmula (1) de §3 y lo haremos hallando la transformada de Fourier de vp $P_m(x)\,|x|^{-n-m}$.

Teorema 6

Sea $P(x)$ un armónico sólido de grado $m > 0$. Vale entonces :

$$F(\text{vp } P(x)\,|x|^{-n-m}) = \gamma_m\, P(x).|x|^{-m}$$

donde : $\gamma_m = i^m\, \pi^{n/2}\, \Gamma(\frac{m}{2})\, \Gamma^{-1}\left(\frac{n+m}{2}\right)$.

... tración :

De la ortogonalidad de los polinomios armónicos de diferente grado se deduce que P, (ortogonal a 1), tiene media nula, por lo cual $F\ (\mathcal{V}p\ P(x)\ |x|^{-n-m})$ es una función homogénea de grado cero y de valor medio cero en Σ, la llamaremos $V(x)$.

Sea $Q(x)$ un armónico sólido de grado $k > 0$.

Aplicando la fórmula de Parseval a : $\mathcal{V}p\ P.|x|^{-n-m}$ y $Q.\exp(-\pi|x|^2)$, se obtiene el lema 1 :

$$\langle \mathcal{V}p\ P.|x|^{-n-m}\ ,\ Q.\exp(-\pi|x|^2)\rangle = \langle V(x)\ ,\ (-i)^k Q.\exp(-\pi|x|^2)\rangle$$

de donde

$$\int_\Sigma V(x')\ Q(x')\ d\sigma = C \int_\Sigma P(x')\ Q(x')\ d\sigma \tag{11}$$

De la fórmula (11) se vé, que si Q ortog. a P en Σ, entonces : Q ort. a V allí. Como V es ortogonal a $Q(x) \equiv 1$, resulta que :

$$V(x) = \gamma_m . P(x) . |x|^{-m} . \tag{12}$$

D e t e r m i n a c i ó n d e γ_m. Aplicando Parseval a $P.\exp(-\pi|x|^2)$ y $\mathcal{V}p\ P.|x|^{-n-m}$ y usando el lema anterior, obtenemos

$$\gamma_m \int_0^\infty \rho^{m+n-1}.\exp(-\pi\rho^2)\ d\rho = i^m \int_0^\infty \rho^{m-1} \exp(-\pi\rho^2)\ d\rho$$

y aplicando (10) de §3, tenemos la tesis .

§7 ESPACIOS FUNCIONALES L^p_k

Designaremos L^p_k ; p real ≥ 1 , k entero ≥ 0 , al conjunto de todas las funciones $f \in L^p$, cuyas derivadas en el sentido de Schwartz , hasta la de orden k inclusive pertenecen al L^p , normado por :

$$||f|| = ||f||_{p,k} = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_p^2}$$

Otras normas equivalentes de este espacio son por ejemplo:

$$\sup_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_p \quad , \quad \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha f||_p$$

Enunciaremos a continuación, sin demostración, un teorema que usaremos mas adelante . Véase [1] pg.111-115, [2] pg. 84-88 .

Teorema 1 :

Sea $N(x)$ una función de (D) tal que $\int N\,dx = 1$. Si $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p$ vale :

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^n \int_{E^n} N\left[\lambda(x-y)\right] f(y)\,dy = f(x) \quad ,$$

donde el límite debe entenderse en norma $- p$.

Teorema 2 :

L^p_k es un espacio de Banach y (D) es denso en L^p_k .

Demostración :

Para la primera parte de la tesis es suficiente demostrar que L^p_k es completo :
Si (f_n) es de Cauchy en L^p_k , entonces $(D^\alpha f_n)$ es de Cauchy en L^p . Luego existe $g_\alpha \in L^p$ tal que $||g_\alpha - D^\alpha f_n||_p \to 0$. Basta probar que $g_\alpha = D^\alpha g_0$. Como para toda $\varphi \in (D)$ vale $\langle D^\alpha f_n , \varphi \rangle = (1)^{|\alpha|} \langle f_n , D^\alpha \varphi \rangle$, haciendo tender n a ∞ , obtenemos la tesis.

Mostraremos ahora que (D) es denso en L^p_k .

Sea $\varphi \in (D)$ igual a 1 en un entorno de $x = 0$, no negativa y con $\int \varphi\,dx = 1$. Por el teorema 1 precedente, sabemos que si $f \in L^p_k$:

$$h_\lambda(x) = \lambda^n \int f(x-y)\,\varphi(\lambda y)\,dy$$

converge en norma p a f. Además $h_\lambda(x)$ es indefinidamente diferenciable y pertenece a L^p_k como prueban las siguientes igualdades y la desigualdad de Young :

$$(2)\quad D^\alpha h_\lambda(x) = \lambda^n \int f(y).D^\alpha_x \varphi[\lambda(x-y)] = (-1)^{|\alpha|}\lambda^n \int f(y)\, D^\alpha_y \varphi[\lambda(x-y)]\, dy =$$

$$= \text{para } |\alpha| \leqslant k = \lambda^n \int D^\alpha f(y)\ \ \varphi[\lambda(x-y)]\, dy \ ,$$

de donde $||D^\alpha h_\lambda||_p \leqslant ||D^\alpha f||_p$, para $|\alpha| \leqslant k$.

Otra aplicación del teorema 1 a (2) muestra que $h_\lambda(x)$ converge en L^p_k a $f(x)$.

Definimos ahora :

$$g_\lambda(x) = \varphi\left(\frac{x}{r(\lambda)}\right).\, h_\lambda(x) \quad , \quad g_\lambda \in (D) \quad ,$$

siendo $r(\lambda)$ elegido de manera que :

$$(3)\qquad ||D^\alpha g_\lambda(x) - D^\alpha h_\lambda(x)||_p < \frac{1}{\lambda} \quad , \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k \quad ,$$

Esto es siempre posible puesto que :

$$D^\alpha(g_\lambda(x) - h_\lambda(x)) = D^\alpha\left[h_\lambda\left(\varphi\left(\frac{x}{r(\lambda)}\right) - 1\right)\right] = \sum_{\substack{|\gamma|+|\beta|=|\alpha| \\ |\gamma|\geqslant 1}} C_{\beta\gamma}\ D^\beta h_\lambda\, [D^\gamma\varphi](\tfrac{x}{r}).r^{-|\gamma|} +$$

$$+ D^\alpha h_\lambda \,.\, (\varphi(\tfrac{x}{r}) - 1) \quad ,$$

y cada sumando se puede hacer en norma p arbitrariamente pequeño tomando r suficientemente grande.

De (3) se deduce ahora que g_λ converge en L^p_k al mismo limite que h_λ .

<u>N o t a</u> : El L^2_k es un espacio de Hilbert, pues como es de Banach , condición nec. y suf. para que sea de Hilbert , es que valga $||f+g||^2 + ||f-g||^2 = 2||f||^2 + 2||g||^2$, lo que es fácil de probar puesto que el L^2 verifica esta igualdad .

Diremos, para $f \in L^p$, que existe $g = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ s e g ú n L^p si $\dfrac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}$ converge en L^p a g . Como siempre

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \cdot f\right)$$

<u>T e o r e m a 3</u> :

L^p_k es la familia de funciones f tales que para todo α , $0 \leqslant |\alpha| \leqslant k$, $D^\alpha f$ existe según L^p . Además $D^\alpha f$ según L^p coincide como distribución con la derivada α-esima en el sentido de Schwartz .

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> :

Es suficiente demostrarlo para el L_1^p .

Sea $g_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ según L^p . Luego :

$$\langle g_i , \varphi\rangle = \lim_{h_i \to 0} \left\langle \frac{f(x+h_i)-f(x)}{h_i}, \varphi \right\rangle = \lim \left\langle f , \frac{\varphi(x-h_i)-\varphi(x)}{h_i} \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

lo que prueba que $g_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ en el sentido de Schwartz .

Entenderemos, en lo que sigue de esta demostración las derivadas en el sentido de Schwartz. De

$$\frac{\varphi(x+h_i)-\varphi(x)}{h_i} = \frac{1}{h_i} \int_0^{h_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x+s_i)\, ds_i \qquad \text{donde} \quad \varphi \in (D) ,$$

por una aplicación de la desigualdad integral de Minkowsky al segundo miembro obtenemos

$$\left\| \frac{\varphi(x+h_i) - \varphi(x)}{h_i} \right\|_p \leqslant \| \varphi \|_{p,1}$$

Si la φ recorre una sucesión convergente a g en L_1^p se obtiene por paso al límite

(4) $$\left\| \frac{g(x+h_i) - g(x)}{h_i} \right\|_p \leqslant \|g\|_{p,1}$$

Si $f \in L_1^p$, $\Psi \in (D)$ y $f - \Psi = g$ con $\|g\|_{p,1} < \varepsilon$, entonces :

$$\left\| \frac{f(x+h_i) - f(x)}{h_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_p \leqslant \left\| \frac{\Psi(x+h_i) - \Psi(x)}{h_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right\|_p + \left\| \frac{g(x+h_i) - g(x)}{h_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_p$$

Como el segundo sumando es por (4) menor o igual que $\|g\|_{p,1} + \left\|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right\|_p \leqslant 2\|g\|_{p,1} < 2\varepsilon$, y el primer sumando es menor que ε si h_i es suficientemente pequeño, resulta que:

$$\left\| \frac{f(x+h_i) - f(x)}{h_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_p \leqslant 3\varepsilon \qquad \text{para} \quad |h_i| < \delta ,$$

lo que prueba que la derivada en el sentido de Schwartz es también según L^p . c.q.d.

Teorema 4 :

Si T es un operador lineal acotado de L^p en L^q , que conmuta con traslaciones, entonces para todo k , T es un operador acotado de L_k^p en L_k^q , y $\|T f\|_{q,k} \leqslant \|T\| \, \|f\|_{p,k}$ donde $\|T\|$ es la norma de T como operador de L^p a L^q . Además T conmuta con derivación.

Demostración :

T está bien definido en L_k^p pues para todo i y $j \geq 0$ L_i^p contiene L_{i+j}^p. Es suficiente demostrar el teorema para el caso $k = 1$. Sea $f \in L_1^p$. Luego, por conmutar T con traslaciones :

$$\frac{(Tf)(x+h_i) - Tf)(x)}{h_i} = T\left[\frac{f(y+h_i) - f(y)}{h_i} \right](x)$$

De la continuidad [illegible] del teorema 2 , el segundo miembro converge en L^q a $T\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$ [illegible] de la def[illegible] de derivada según L^q tendremos :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} T f(x) = T\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x) .$$

Además :

$$\|Tf\|_{q,1} = \sqrt{\sum \|D^\alpha Tf\|_q^2} = \sqrt{\sum \|T D^\alpha f\|_q^2} \leqslant \|T\| . \sqrt{\sum \|D^\alpha f\|_p^2} = \|T\| . \|f\|_{p,1}$$

c.q.d.

Nuestro próximo objetivo es demostrar que, para todo k , L_k^p es isomorfo a L^p . Pero antes probaremos algunos resultados auxiliares.

<u>L e m a 1</u> : $(1+|x|^2)^{-1}$ es la transformada de Fourier de una función $g(x) \in L_1^1$.

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> : Como $(1+|x|^2)^{-1} \in (S')$, existe $g \in (S')$ tal que $F(g) = (1+|x|^2)^{-1}$.

Veamos que g , como cualquiera de sus derivadas coincide con una función de decrecimiento rápido en $E^n - (0)$. En efecto, sea $g_\ell = D^\ell g$, luego :

$$(5) \qquad F(g_\ell) = \frac{(-2\pi i\, x)^\ell}{1+|x|^2} \quad \text{y} \quad D^\alpha F(g_\ell) = F\left[(2\pi i\, x)^\alpha g_\ell \right]$$

si $|\alpha|$ es bastante grande $D^\alpha F(g_\ell) \in L^1$, luego $x^\alpha . g_\beta$ es una función acotada.

Veremos ahora que g coincide con una función de L^1 tambien en un entorno del origen. De (5) obtenemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{n-1} . (1+|x|^2)^{-1} = F\left[(2\pi i\, x_j)^{n-1} g \right]$$

como el primer miembro está en L^1 , $x_j^{n-1} . g$ es una función acotada para todo j , esto a su vez implica que $|g| \leqslant M . |x|^{1-n}$ para $|x| \neq 0$. O sea g es, en $E^n-(0)$ una función f del L^1 . Veamos que $g - f = 0$ como distribución. En efecto, el soporte de $g - f$ es el orígen. Luego la transformada de Fourier de esta diferencia es un polinomio. Pero como $F(g-f) = (1+|x|^2)^{-1} - F(f)$ tiende a cero para $|x| \to \infty$, tenemos $g = f$.

Veamos ahora que $S = \frac{\partial g}{\partial x_k}$ es una función de L^1 para todo k . Ya vimos que S es integrable en $|x| > 1$. Por otro lado de la fórmula (5) obtenemos :

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^m . \frac{-2\pi i\, x_k}{1+|x|^2} = F\left[(2\pi i\, x_j)^m S \right]$$

Como siempre es posible elegir un p , $1 < p < 2$ tal que exista un entero $m > 0$, para el cual valga

$$(7) \qquad \frac{n}{p} > m > \frac{n}{p} - 1$$

vemos de (6) que el primer miembro, si m verifica esta última condición, es p inte grable . Antitransformando (6) se ve que si $q = \frac{p}{p-1}$, $x_j^m S$ es una función de L^q , como esto es para todo j , tambien $|x|^m S$ es una función h perteneciente a L^q . Sea $t(x)$ la función con la cual coincide S en $E^n - (0)$; luego

$$\int_{|x|<1} |t(x)|\, dx = \int_{|x|\leq 1} |h(x)|.|x|^{-m}\, dx \leq ||h||_q \left(\int_{|x|<1} |x|^{-mp}\, dx\right)^{1/p}$$

que por (7) es finito.

En definitiva $t \in L^1$ y $S - t$ es una distribución a soporte (0) , que, como antes se ve que es nula. c. q. d.

<u>Definición</u> : Si $f \in (S')$ definimos el operador S como:

$$F(Sf) = (1+|x|^2)^{-1} F(f) \quad (\text{o sea} : \; Sf = g * f)$$

Como el segundo miembro es una distribución temperada , $Sf \in (S')$.

<u>Teorema 5</u> :

Para todo $p > 1$, $k \geq 0$, si $f \in L_k^p$ entonces $Sf \in L_{k+2}^p$ y $||Sf||_{p,k+2} \leq$ $\leq C_p\, ||f||_{p,k}$.

<u>Demostración</u> :

Veamos el caso $k = 0$. Sea $\varphi \in (D)$. De : $\frac{\partial}{\partial x_j} S\varphi = \frac{\partial}{\partial x_j}(g * \varphi) = \frac{\partial g}{\partial x_j} * \varphi$ y el lema precedente obtenemos :

$$(8) \qquad ||S\varphi||_p \leq ||g||_1 . ||\varphi||_p \quad , \quad ||\frac{\partial}{\partial x_j}(S\varphi)||_p \leq ||\frac{\partial g}{\partial x_j}||_1 . ||\varphi||_p$$

Trataremos ahora de acotar : $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}(S\varphi) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} * \varphi$.

Transformando Fourier la última expresión :

$$F\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k}\right) F(\varphi) = -4\pi^2 x_j x_k\, F(g)\, F(\varphi) = -4\pi^2 \left(\frac{x_j x_k}{|x|^2} - \mu\right) |x|^2 F(g)\, F(\varphi) -$$

$$(9) \qquad - 4\pi^2 \mu |x|^2\, F(g)\, F(\varphi)$$

donde μ indica la media de $x_j x_k$ sobre la esfera unitaria.

Exceptuado el factor $-4\pi^2$ el primer sumando del último miembro de (9) puede escribirse como :

$F(\text{v.p. } k)\, |x|^2\, F(g)\, F(\varphi)$ con k = núcleo singular cuyo v.p. tiene por transformada de Fourier a la función homogénea de grado cero : $x_j x_k |x|^{-2} - \mu$.

Por otro lado como:

(10) $$|x|^2 F(g)\, F(\varphi) = (1-F(g))\, F(\varphi) = F\left[(\delta-g)*\varphi\right] = F\left[\varphi-g*\varphi\right]$$

tenemos :

(11) $$F(v.p.\ k)\ |x|^2 F(g)\, F(\varphi) = F(v.p.k)F\left[\varphi-g*\varphi\right] = F\left[K(\varphi-g*\varphi)\right]$$

donde K es el operador asociado a k .

Como $\varphi-g*\varphi\in L^p$ para $1<p<\infty$ y K es un operador acotado de L^p en L^p , para esos valores, de (9) , (10) y (11) , antitransformando, resulta :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\,\partial x_k}*\varphi = -4\pi^2\left[K(\varphi-g*\varphi)+\mu(\varphi-g*\varphi)\right] \quad \text{y}$$

(12) $$\left\|\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_k}*\varphi\right\|_p \leqslant c_p\,\|\varphi-g*\varphi\|_p \leqslant c_p\,\|\varphi\|_p$$

De (8) y (12) :

(13) $$\|S\varphi\|_{p,2} \leqslant c_p\,\|\varphi\|_p$$

Como (D) es denso en L^p , $S\varphi$ puede extenderse a todo ese espacio en forma continua.

Es fácil ver ahora que si $f\in L^p$ el valor dado por la extensión coincide con $g*f$. El caso $k>0$ resulta como corolario de lo demostrado y del teorema 4 .

Demostraremos a continuación que el operador S tiene inversa a izquierda y derecha, con lo cual podemos demostrar que él define un isomorfismo entre L^p_k y L^p_{k+2} .

<u>Teorema 6</u> :

i) D^α es un operador continuo de norma $\leqslant 1$, de $L^p_{k+|\alpha|}$ en L^p_k .

ii) $D^\alpha S = S D^\alpha$ sobre $L^p_{|\alpha|}$

iii) $(1-(2\pi)^{-2}\Delta)\,S = I$ sobre L^p

$S\,(1-(2\pi)^{-2}\Delta) = I$ sobre L^p_2

iv) S transforma biunivocamente y bicontinuamente L^p_k en L^p_{k+2}

<u>Demostración</u> :

i) resulta directamente de la definición de L^p_k .

ii) Sea $\varphi\in L^p_{|\alpha|}$. Entonces, como distribuciones vale:

$$F\,(D^{\alpha} S(\varphi)) = (-2\pi i\, x)^{\alpha}\; F\,(S(\varphi)) = (-2\pi i\, x)^{\alpha}\; (1+|x|^2)^{-1} F(\varphi) =$$

$$= (1+|x|^2)^{-1} F\,(D^{\alpha} \varphi) = F\,(S(D^{\alpha}\varphi)) \quad ,$$

y antitransformando se tiene la tesis.

iii) sea $f \in L^p$. Luego :

$$F\left[(1-(2\pi)^{-2}\Delta)\, Sf\right] = F\,(Sf) + |x|^2 F\,(Sf) = (1+|x|^2)(1+|x|^2)^{-1} F f = F\,(f)$$

Antitransformando tenemos la primera fórmula.

Analogamente se prueba la segunda fórmula.

iv) el teorema anterior y iii) prueban que S define una transformación contí - nua, biunívoca y sobre de L^p_k en L^p_{k+2} . El teorema de Banach de la transformación inversa nos dá la continuidad de S^{-1} .

Veamos algunas propiedades de la transformada de Riesz que usaremos mas adelante :

<u>Teorema 7</u> :

i) $R_j\, R_k = R_k\, R_j$ sobre L^p , $1 < p < \infty$

ii) $R_j \dfrac{\partial}{\partial x_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k} R_j$ sobre L^p_1

iii) $R_j \dfrac{\partial}{\partial x_k} = R_k \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ sobre L^p_1

<u>Demostración</u> :

iii) si $\varphi \in (D)$, sabemos que $F\,(R_j\ ) = \dfrac{x_j}{|x|}\, F\,(\varphi)$, luego:

$$F\left(R_j \frac{\partial}{\partial x_k}\varphi\right) = \frac{x_j}{|x|}\,.\,(-2\pi i\, x_k)\; F\,(\varphi) = F\left(\frac{\partial}{\partial x_k} R_j\,\varphi\right)$$

lo que prueba iii) en (D) ; como ambos operadores son contínuos tenemos la tesis.

i) y ii) se prueban analogamente.

Definiremos a continuación un operador Λ como $\Lambda = -i \sum_{j=1}^{n} R_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$; el teorema siguiente nos permitirá ver que Λ se comporta como $\sqrt{-\Delta}$.

<u>Teorema 8</u>

i) Λ es un operador contínuo de L^p_{k+1} en L^p_k y vale :

$$\Lambda R_j = R_j \Lambda \quad \text{en} \quad L_1^p$$

$$\Lambda \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \Lambda \quad \text{en} \quad L_2^p$$

ii) $R_j \Lambda = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ en L_1^p

iii) $\Lambda^2 = -\Delta$ en L_2^p

iv) $S\Lambda = \Lambda S$ en L_1^p

D e m o s t r a c i ó n :

i) es consecuencia de la definición de Λ y del teorema precedente.

ii) lo prueba la siguiente cadena de igualdades :

$$R_j \Lambda = -i \sum_k R_j R_k \frac{\partial}{\partial x_k} = -i \sum_k R_k R_j \frac{\partial}{\partial x_k} = -i \sum_k R_k^2 \frac{\partial}{\partial x_j} = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$$

iii) resulta de $\Lambda^2 = -i \sum_i R_k \dfrac{\partial}{\partial x_k} \Lambda = -i \sum R_k \Lambda \dfrac{\partial}{\partial x_k} = -i \sum \left(-i \dfrac{\partial}{\partial x_k}\right) . \dfrac{\partial}{\partial x_k}$

iv) resulta de ii) del teorema 6 y de que $S R_i = R_i S$ en L^p . Esto último es fácil verlo tomando transformadas de Fourier de $S R_i(\varphi)$ con $\varphi \in (D)$ y como los operadores son contínuos, la igualdad vale para $\varphi \in L^p$.

T e o r e m a 9

Para $k \geqslant 0$, L_k^p es isomorfo a L_{k+1}^p .

D e m o s t r a c i ó n :

Sea $T = (i + (2\pi)^{-1}\Lambda) S$. Es fácil ver que T es un operador acotado de L_k^p en L_{k+1}^p . Además el operador $(-i + (2\pi)^{-1}\Lambda)$ es inversa bilateral de T , veamos p. ej., que es inversa a izquierda :

$$(-i + (2\pi)^{-1}\Lambda) T = (-i + (2\pi)^{-1}\Lambda)(i + (2\pi)^{-1}\Lambda) S = (1 - (2\pi)^{-2}\Delta) S = I$$

Tenemos entonces que T es una transformacion contínua, biunívoca y sobre. La bicontinuidad resulta del teorema de Banach .

D e f i n i c i ó n 1: Sea $1 < p < \infty$, p' el exponente conjugado de p y k un entero no negativo, entonces L_{-k}^p será el espacio de las funcionales lineales contínuas sobre $L_k^{p'}$. Si $f \in L_{-k}^p$ y $g \in L_k^{p'}$, $\langle f , g \rangle$ indicará el valor de la funcional f en el punto g. Además, identificaremos L^p con el espacio L^p_{-0} de las funcionales lineales contínuas sobre $L^{p'}$ poniendo $\langle f , g \rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx$. Como $L^{p'}_k$ es isomorfó a $L^{p'}$ y éste es reflexivo, aquél es también reflexivo y es, por lo tanto, el dual de L^p_{-k} .

D e f i n i c i ó n 2 : Sean $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$, h y k enteros arbitrarios y T un operador lineal contínuo de L^p_h en L^q_k , entonces con T_t designaremos el operador contínuo de $L^{q'}_{-k}$ a $L^{p'}_{-h}$ dado por $\langle Tf , g \rangle = \langle f , T_t\, g \rangle$. Como se sabe, los operadores T y T_t tienen la misma norma.

D e f i n i c i ó n 3 : Sea $1 < p < \infty$, k entero no negativo . Definiremos el operador $\frac{\partial}{\partial x_i}$, con dominio L^p_{-k} , como el operador traspuesto de $-\frac{\partial}{\partial x_i}$ con dominio $L^{p'}_{k+1}$. O sea si $f \in L^p_{-k}$ y $g \in L^{p'}_{k+1}$

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} , g \right\rangle = \left\langle f , -\frac{\partial}{\partial x_i} g \right\rangle .$$

Entonces $\frac{\partial}{\partial x_i}$ resulta, para todo h entero, ser un operador contínuo de L^p_h en L^p_{h-1} , y con norma menor o igual a uno.

D e f i n i c i ó n 4 : Sea $k \geq 0$. Si $f \in L^p_k$ definimos el operador D como $D\,f(x) = f\,(-x)$, y si $f \in L^p_{-k}$ como el operador definido por : $\langle Df , g \rangle = \langle f , Dg \rangle$ donde $g \in L^{p'}_k$.

Para todo L^p_h resulta así : $||Df||_{p,h} = ||f||_{p,h}$ y $D^2 = I$.

T e o r e m a 10 :

Sea $1 < p < \infty$, k entero Entonces

a) L^p_k contiene a L^p_{k+1} y $||f||_{p,k+1} \geq ||f||_{p,k}$.

b) $(\mathcal{D})$ es denso en L^p_k

c) L^p_k es denso en L^p_h si $h < k$

D e m o s t r a c i ó n :

a) es evidente si $k \geq 0$. Sea $k < 0$, $f \in L^p_{k+1}$. Entonces f es una funciónal lineal contínua sobre $L^{p'}_{-k-1}$, que restringida a $L^{p'}_{-k}$ da una funcional lineal contínua sobre este espacio. En efecto si $g \in L^{p'}_{-k}$ se tiene

$$|\langle f , g \rangle| \leq ||f||_{p,k+1}\, ||g||_{p',-k-1} \leq ||f||_{p,k+1}\, ||g||_{p',-k}$$

y de esto resulta además que $||f||_{p,k+1} \geq ||f||_{p,k}$.

b) ya ha sido demostrada para $k \geq 0$. Sea entonces $k < 0$. Si (D) no fuese denso en L^p_k existiría un g en $L^{p'}_{-k}$, $g \neq 0$ tal que $\langle f , g \rangle = 0$ para toda $f \in (D)$. Pero si $f \in (D)$ entonces $f \in L^p$ y $\langle f , g \rangle$ se obtiene restringiendo la funcional lineal sobre $L^{p'}$ dada por

$$\int f(x)\ h(x)\ dx \quad , \quad h \in L^{p'}$$

a $L^{p'}_{-k}$. Es :

$$\langle f , g \rangle = \int f(x)\ g(x)\ dx = 0$$

Pero como esto vale para toda $f \in (D)$ se concluye que $g = 0$, contrariamente a lo supuesto .

c) es consecuencia inmediata de b) .

Demostraremos a continuación algunos teoremas que son extensiones de otros ya demostrados en este párrafo.

<u>T e o r e m a</u> <u>11</u> :

Sea $1 < p < \infty$.

a) La transformada de Riesz R_j puede extenderse a un operador contínuo de L^p_k en L^p_k , para todo k entero. Su traspuesta es $-R_j$.

b) La transformación $T = i + \Lambda$ puede extenderse a una transformación contínua y biunívoca de L^p_k sobre L^p_{k-1} para todo k entero .

c) para todo k los L^p_k son isomorfos .

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> :

a) Es suficiente mostrar que la traspuesta de $-R_j$ es R_j para funciones de (D) .

Pues, por ser la traspuesta acotada, si coincide con R_j sobre (D) , ella es la extensión buscada .

Sean f y $g \in (D)$, luego:

$$\langle -R_j f , g \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle -R_{j\varepsilon} f , g \rangle = \lim \langle f , R_{j\varepsilon} g \rangle = \langle f , R_j g \rangle ,$$

c.q.d.

b) y c) Es fácil ver que si T define un isomorfismo entre los espacios de Banach X e Y , su traspuesta define también un isomorfismo entre sus duales.

Como $T = i + \Lambda$ define un isomorfismo de L^p_k sobre L^p_{k-1} $(k \geq 1)$ entonces su traspuesta T_t es un isomorfismo de $L^{p'}_{-k+1}$ sobre $L^{p'}_{-k}$ y los puntos c) y b) estarán demostrados si verificamos que sobre funciones de (D) $T_t = T$.

En efecto: sea $f , g \in (D)$.

$$\langle T f , g \rangle = i \left(\int f g\, dx - \sum_j \int \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (R_j f) \right) g\, dx \right) = \text{por def. 3 y a)} =$$

$$= i \left(\int f g\, dx - \sum_j \int f R_j \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \right) dx \right) = \langle f , T g \rangle \ . \quad \text{c. q. d.}$$

Lema 2 :

Sea n la dimensión del espacio, $1 < p < \infty$ y k entero positivo.

a) Si $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$ y $f \in L^p_k$, de soporte compacto, entonces $f \in L^r_{k-1}$ con $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ y vale $||f||_{r,k-1} \leq C\, ||f||_{p,k}$ donde C es una cte. que depende de r y del diámetro del soporte de f.

b) Si $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} < 0$ y $f \in L^p_k$, de soporte compacto, entonces $f \in L^\infty_{k-1}$ y vale : $||f||_{\infty,k-1} \leq C\, ||f||_{p,k}$ donde C depende de p y del diámetro del soporte de f. En este caso, todas las derivadas de f de orden $< k$ coinciden en casi todo punto con alguna función continua.

Demostración :

a) Si $\varphi \in (D)$, vale:

$$\varphi(x) = C \sum_i \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x-y) \frac{y_i}{|y|^n}\, dy \tag{14}$$

donde C es una cte. dependiente sólo de la dimensión. En efecto, la suma de la derecha es salvo cte. :

$$\sum_i \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{1}{|y|^{n-2}}, -\frac{\partial}{\partial y_i} \varphi(x-y) \right\rangle = \left\langle \Delta \frac{1}{|y|^{n-2}}, \varphi(x-y) \right\rangle =$$

$$= \langle C\, \delta_y, \varphi(x-y) \rangle = C\, \varphi(x) \quad .$$

La fórmula (14) vale en casi todo punto, si $f \in L^p_1$ y es a soporte compacto. En efecto, sea $N_i(x)$ la función coincidente con $x_i/|x|^n$ en $|x| \leq R$ y nula en todo otro punto, y φ_m una sucesión de (D), a soportes contenidos en una esfera de radio $R/2$ y convergente en L^p_1 a f. Entonces para toda φ_m y x con $|x| \leq R/2$:

$$\varphi_m(x) = C \sum_i \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} * N_i \tag{15}$$

Como φ_m converge en L^p_1 a f de (15) se obtiene :

$$f(x) = C \cdot \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} * N_i \tag{16}$$

en casi todo punto de $|x| \leq R/2$.

Si $R \to \infty$, (16) tiende a :

$$f(x) = C \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} * \frac{x_i}{|x|^n} \tag{17}$$

en casi todo punto.

De aquí obtenemos que si $f \in L^p_k$ y $|\alpha| \leq k-1$:

(18) $$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha f * \frac{x_i}{|x|^n} \qquad \text{p. p.}$$

Como f es de soporte acotado y $x_i/|x|^n \in$ localmente a L^S si $S < \frac{n}{n-1}$, de la fòrmula de Young , resulta :

(19) $$||D^\alpha f||_r \leq C \, || \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha f ||_p$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{S} - 1$ y C depende de r y del diámetro del soporte de f . Es decir r es cualquiera de los definidos por : $\frac{1}{p} \geq \frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{1}{n} > 0$.

De (6) resulta :

(20) $$||f||_{r,k-1} \leq C \, ||f||_{p,k}$$

b) Como ahora $\frac{1}{p} - \frac{1}{n} < 0$, existe un s , $1 \leq S < \frac{n}{n-1}$, para el cual $\frac{1}{p} + \frac{1}{S} = 1$ o sea $r = \infty$, entonces de (18) , por Young :

$$||D^\alpha f||_\infty \leq C. || \frac{\partial}{\partial x_1} D^\alpha f ||_p$$ lo cual implica que :

$$\sqrt{\sum_{|\alpha| < k} ||D^\alpha f||^2_\infty} \leq C. ||f||_{p,k}$$. La continuidad del segundo miembro de (18) es obvia .

<u>Lema 3</u> :

Sea k entero > 0 ; si $\frac{k}{n} > \frac{1}{p}$ y $f \in L^p_k$ entonces f coincide en casi todo punto con una función contínua.

<u>Demostración</u> :

Supongamos que f es de soporte compacto. Entonces de una aplicación reiterada de la parte a) del lema precedente se deduce que $f \in L^r_{k-j}$ siempre que $\frac{1}{r} > \frac{1}{p} - \frac{j}{n} \geq 0$. Tomando ahora j tal que $\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{j}{n} \geq 0$, se puede elegir $\frac{1}{r} < \frac{1}{n}$ y entonces aplicando la parte b) del lema 2 resulta que f coincide en casi todo punto con una función contínua.

Sea f de soporte cualquiera, $\in L^p_k$; $\varphi \in (D)$ e igual a 1 en $|x| \leq 1$. La función $f(x) \varphi(x-y) \in L^p_k$ y es a soporte acotado, coincide además con f en un entorno de y . De lo recién visto, $f(x) \varphi(x-y)$ coincide p.p. con una función contínua. La arbitrariedad de y , prueba que f es "contínua" , c. q. d.

Dejaremos a cargo del lector el siguiente <u>corolario</u> :

Sea k entero > 0 ; si $\frac{k-m}{n} > \frac{1}{p}$ y $f \in L^p_k$, entonces $D^\alpha f$ coincide en casi todo punto con una función contínua para $|\alpha| \leq m$.

<u>Definición</u> <u>5</u> : Designaremos con L^p_∞ , $1 < p < \infty$, a la intersección de todos los L^p_k .

Del corolario precedente se deduce que $f \in L^p_\infty$, sí y sólo si, es equivalente a una función indefinidamente diferenciable, tal que ella y todas sus derivadas pertenecen a L^p

<u>Definición</u> <u>6</u> : Definiremos el operador $\mathcal{T}_a$, traslación en a . Sea $k \geqslant 0$:

$\mathcal{T}_a f(x) = f(x - a)$ si $f \in L^p_k$ y si $f \in L^p_{-k}$, $\mathcal{T}_a f$ será la funcional definida por: $\langle \mathcal{T}_a f , g \rangle = \langle f , \mathcal{T}_{-a} g \rangle$ para todo $g \in L^{p'}_k$.

Se vé que para $k = 0$ ambas defininiciones coinciden. Hemos visto que si T es un operador acotado de L^p_k en L^q_k , $k \geqslant 0$, y conmuta con traslaciones, entonces , conmuta con derivaciones. Veamos que esto también es cierto para $k < 0$. En efecto, observemos en primer lugar que $\mathcal{T}_a$, para todo k , define una isometría de L^p_k en L^p_k . Luego, si $f \in L^p_k$, $\mathcal{T}_a f \in L^p_k$, $T \mathcal{T}_a f \in L^q_k$ y para $g \in L^{q'}_{-k}$ tenemos :

$$\langle T \mathcal{T}_a f , g \rangle = \langle f , \mathcal{T}_{-a} T_t g \rangle = \langle \mathcal{T}_a T f , g \rangle = \langle f , T_t \mathcal{T}_{-a} g \rangle$$

lo que prueba que T_t también conmuta con traslaciones. Como ademas T_t es acotado , opera de $L^{q'}_{-k}$ en $L^{p'}_{-k}$ $(k < 0)$ conmuta con derivadas y de :

$$\langle f , D^\alpha T_t g \rangle = \langle f , T_t D^\alpha g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T D^\alpha f , g \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle D^\alpha T f , g \rangle$$

se concluye que T conmuta con derivadas.

<u>Lema</u> <u>4</u>

Sea T un operador contínuo de L^p en L^q que conmuta con traslaciones. Vale entonces :

a) T admite una extensión S de L^p_{-k} en L^q_{-k} , para todo $k > 0$ y con $\|S\| \leqslant \|T\|$

b) para $g \in (D)$ vale : $T_t g = D T D g$

c) T restringido a (D) admite una extensión contínua de $L^{q'}$ en $L^{p'}$, con la misma norma. Esta extensión es única, conmuta con traslaciones y será designada tambien con T . Para ella vale b) para toda $g \in L^{q'}$.

d) sean T_1 y T_2 operadores que conmutan con traslaciones, y tal que T_1 transforma continuamente L^p en L^q y T_2 , L^q en L^r . Entonces $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

<u>Demostración</u> :

a) Hemos visto que bajo las hipótesis de este lema T es un operador acotado de L^p_k en L^q_k con $\|T\|_k \leqslant \|T\|$. Su transpuesto es un operador acotado de $L^{q'}$ en $L^{p'}$ con $\|T_t\| = \|T\|$ y por conmutar con traslaciones será también un operador acotado de $L^{q'}_k$ en $L^{p'}_k$ con $\|T_t\|_k \leqslant \|T_t\|$.

La traspuesta de la restricción de T_t a $L^{q'}_k$, es un operador acotado S que conmuta con traslaciones, y que transforma L^p_{-k} en L^q_{-k} . Además $\|S\| = \|T_t\|_k \leqslant$

$\leq \| T \|$. Habremos demostrado a) si comprobamos que para $f \in L^p$, $S f = T f$.

Sea $f \in L^p$ y $g \in L_{\gamma}^{q'}$ por definición de S : $\langle S f , g \rangle = \langle f , T_t g \rangle$

Como $g \in L^{q'}$, por definición de T_t : $\langle f , T_t g \rangle = \langle T f , g \rangle$, c. q. d.

b) Sea $g \in (D)$ y $f \in L^p$. Supondremos esta última finita en todo punto. Efectuando una partición Δ de E^n en cuadrados iguales $\Delta = \{ \Delta_i \}$, para $y_i \in \Delta_i$ tenemos :

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy = \sum_i f(x-y_i)\, g(y_i)\, |\Delta_i| + R_f \qquad \text{con}$$

$$R_f(x) = R(x) = \sum_i \int_{\Delta_i} \left(f(x-y) - f(x-y_i) \right) g(y_i)\, dy - \sum_i \int_{\Delta_i} f(x-y) \,.$$

$$.\left(g(y_i) - g(y) \right) dy$$

Aplicando a cada sumando de R , desigualdades de Minkowski , tenemos

$$(21) \qquad \| R(x) \|_p \leq \sum_i \sup_{y \in \Delta_i} \| f(x-y) - f(x-y_i) \|_p . |g(y_i)| . |\Delta_i| +$$

$$+ \sum_i \sup_{y \in \Delta_i} \| f(x-y) \|_p \int_{\Delta_i} |g(y) - g(y_i)|\, dy$$

Como :

$$(22) \qquad \| f(x-y) - f(x-y_i) \|_p = \| f(x) - f(x-y_i+y) \|_p \leq \sup_{|z| \leq \operatorname{diam} \Delta_i} \| f(x) - f(x-z) \|_p =$$

$$= \mathcal{E}(\Delta)$$

reemplazando en (21) tenemos :

$$(23) \qquad \| R(x) \|_p \leq \mathcal{E}(\Delta) . \sum |g(y_i)|\, |\Delta_i| + \| f \|_p \sum_i \int_{\Delta_i} |g(y) - g(y_i)|\, dy$$

Cuando el diámetro de la partición Δ tiende a cero, $\mathcal{E}(\Delta) \to 0$, y el primer sumando de (23) tiende a cero. El segundo factor del segundo sumando, por la continuidad uniforme de g , también tiende a cero, o sea : $\| R(x) \|_p \to 0$ si $\operatorname{diam} \Delta \to 0$.

Sean ahora f y g de (D) . Entonces si $f_z(x) = f(x-z)$:

$$(24) \quad T(f * g) = T\left(\sum f(x-y_i)\, g(y_i)\, |\Delta_i| + R_f \right) = \sum_i (T f_{y_i})(x)\, g(y_i)\, |\Delta_i| +$$

$$+ T(R_f) = \sum_i (T f)_{y_i}(x)\, g(y_i)\, |\Delta_i| + T(R_f) = (T f) * g - R_{Tf} + T(R_f)$$

Como : R_{Tf} y $T(R f)$ tienden en norma q a cero queda :

$$(25) \qquad T(f * g) - (T f) * g = 0 \qquad \text{p.p.}$$

Analogamente :

$$(26) \qquad T(f * g) - (T g) * f = 0 \qquad \text{p.p.}$$

De (25) y (26) : $(T\,f) * g = (T\,g) * f$ en todo punto por la continuidad de ambos miembros.

b) es consecuencia inmediata del resultado precedente. En efecto, si $f, g \in (D)$:

$$\langle T\,f\,, g \rangle = \left[(T\,f) * D\,g \right](0) = \left[f * T\,D\,g \right](0) = \langle D\,f\,, T\,D\,g \rangle =$$

$$= \langle f\,, D\,T\,D\,g \rangle = \langle f\,, T_t\,g \rangle$$

C) si $f \in (D)$, de b) tenemos :

(27) $$\|T\,f\|_{p'} = \|D\,T_t\,D\,f\|_{p'} = \|T_t\,D\,f\|_{p'} \leq \|T_t\| . \|D\,f\|_{q'} = \|T_t\| . \|f\|_{q'}$$

y de esta desigualdad y la densidad de (D) deducimos la existencia de la extensión contínua mencionada. Como $\|T_t\| = \|T\|$, resulta que :

(28) $$\|T\|_{(q',p')} \leq \|T\|_{(p,q)}$$

Cambiando en (28) , p con q' y q con p' ,tenemos :

$$\|T\|_{(q',p')} = \|T\|_{(p,q)}$$

Además, una inmediata aplicación del teorema de interpolación de Marcel Riesz , prueba que T es un operador contínuo de L^r en L^S con :

$$\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q'} \quad , \quad \frac{1}{S} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{p'} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Cualquiera de estas extensiones conmuta con traslaciones, como se vé de la continuidad y de que sobre funciones de (D) : $\tau_a\,T\,f = T\,\tau_a\,f$.

d) De la hipótesis se deduce que $T_2\,T_1$ es un operador contínuo de L^p en L^r y de c) que $T_1\,T_2$ lo es de $L^{r'}$ en $L^{p'}$. Si demostramos que para $f \in (D)$ $T_1\,T_2\,f = T_2\,T_1\,f$, la continuidad nos permitirá afirmar que $T_1\,T_2 = T_2\,T_1$. Y aquello es cierto, en efecto, de c) :

$$T_1\,T_2\,f = D\,(T_1\,T_2)_t\,D\,f = D\,T_{2,t}\,T_{1,t}\,D\,f = (D\,T_{2,t}\,D)\,(D\,T_{1,t}\,D)\,f = T_2\,T_1\,f$$

c. q. d.

Extenderemos ahora el teorema precedente :

<u>Teorema 12</u>

Sea $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ y T un operador lineal que conmuta con traslaciones y acotado de L^p_k en L^q_m , k y m enteros. Entonces :

a) Para todo entero s , existe un operador acotado de L^p_{k+s} en L^q_{m+s} que coincide sobre (D) con T .

Los designaremos también con T .

Lo mismo vale reemplazando p por q' y q por p' .

b) T transforma L^p_∞ en L^q_∞ y $L^{q'}_\infty$ en $L^{p'}_\infty$.

c) Vale para [illegible] f del dominio de T : $T_t\, f = D\, T\, D\, f$.

d) La [illegible] (D) admite una única extensión contínua de $L^{r_1}_{k+S}$ en $L^{r_2}_{m+S}$, [illegible] $S < \infty$ y

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q'} \quad , \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{p'} \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Lo mismo vale para T_t .

e) Sean T_1 un op. contínuo de L^p_k en L^q_h y T_2 de L^q_h en L^r_j . Entonces $T_1\, T_2 = T_2\, T_1$.

D e m o s t r a c i ó n :

a) Como $(i + \Lambda)$ define un isomorfismo de L^p_h sobre L^p_{h-1} , para todo h , el operador $\bar{T} = (i+\Lambda)^m\, T\, (i+\Lambda)^{-k}$ es contínuo de L^p en L^q . Evidentemente $\bar{T}$ conmuta con traslaciones y por la observación al pie de la definición 6 resulta que conmuta con derivadas. Por e) del teorema anterior conmuta con las transformadas de Riesz . Luego $\bar{T}$ conmuta con $i + \Lambda$, lo cual a su vez implica que conmuta con $(i + \Lambda)^{-1}$. En particular : $T = (i+\Lambda)^{k-m}\, \bar{T} = \bar{T}\, (i+\Lambda)^{k-m}$.

Por a) del lema anterior y por teorema 4 resulta que $\bar{T}$ transforma contínuamente L^p_S en L^q_S para todo S . Y como $(i+\Lambda)^{k-m}$ transforma L^q_S en L^q_{S+m-k} , T transforma L^p_S en L^q_{S+m-k} y acotadamente, como se vé de :

$$\|T f\|_{q,S+m-k} = \|(i+\Lambda)^{k-m}\, \bar{T} f\|_{q,S+m-k} \leq C\, \|\bar{T} f\|_{q,S} \leq A\, \|f\|_{p,S} \, .$$

La arbitrariedad de S prueba la primera parte de a) . Por c) del lema 4 $\bar{T}$ transforma $L^{q'}$ en $L^{p'}$ de lo cual se deduce la segunda parte.

b) es consecuencia de a) .

c) Sea $f \in (D)$. Luego, por ser $(i+\Lambda)_t = i + \Lambda$:

$$T_t\, f = (i+\Lambda)^{k-m}\, (\bar{T})_t\, f = (i+\Lambda)^{k-m}\, D\, \bar{T}\, D\, f \tag{29}$$

Es fácil ver que D conmuta con $i + \Lambda$, lo cual a su vez implica que conmuta con $(i+\Lambda)^{-1}$. De (29)

$$T_t\, f = D\, (i+\Lambda)^{k-m}\, \bar{T}\, D\, f = D\, T\, D\, f \qquad \text{c. q. d.}$$

d) Como $\bar{T}$ es un operador contínuo de L^p en L^q y de $L^{q'}$ en $L^{p'}$,por el teorema de Riesz es acotado de L^{r_1} en L^{r_2} , luego también lo será de $L^{r_1}_S$ en $L^{r_2}_S$ y $\bar{T}\, (i+\Lambda)^{k-m}$ será acotado de $L^{r_1}_S$ a $L^{r_2}_{S+m-k}$.
De c) deducimos esto mismo para T_t .

e) Como por d) del lema 4 , $\bar{T}_1\, \bar{T}_2 = \bar{T}_2\, \bar{T}_1$ al menos sobre (D) , de la definición de $\bar{T}_i$, resulta allí : $T_1\, T_2 = T_2\, T_1$, luego lo mismo valdrá para cualquier extensión.

Dejaremos a cargo del lector las siguientes observaciones :

i) Los operadores tipo convolución estudiados conmutan con traslaciones, luego les son aplicables los resultados del teorema 12 .

ii) Sea $k \geqslant 0$ y $\varphi \in L_k^\infty$ = la familia de funciones tales que ellas y sus derivadas en el sentido de Schwartz de orden $\leqslant k$ son funciones y de L^∞ .

Si $f \in L_k^p$, $k \geqslant 0$ entonces $\varphi . f \in L_k^p$.

Si $f \in L_{-k}^p$, $k \geqslant 0$ entonces definimos $\varphi . f$ por : $\langle \varphi f , g \rangle = \langle f , \varphi g \rangle$ para toda $g \in L_k^{p'}$.

En todo caso la transformación $f \to \varphi f$ es continua .

§8.- OPERADORES DE TIPO β .

Sea β un número real no negativo y sea r su parte entera. Llamaremos B_β a la clase de funciones acotadas cuyas derivadas de órdenes $\leqslant r$ son distribuciones que coinciden con funciones acotadas, y tales que las derivadas de orden r satisfacen a una condición de Hölder de orden $\beta - r$. Es decir, si $g(x)$ es una de estas derivadas, vale la desigualdad

$$| g(x+h) - g(x) | \leqslant M |h|^{\beta - r} , \quad M < \infty ,$$

para todo x y h . La norma $||f||_\beta$ de una función $f \in B_\beta$ es, por definición, la cota superior mínima de los valores absolutos de la función, sus derivadas de orden $\leqslant r$, y de las constantes de Hölder M de las derivadas de orden r .

Dejamos al lector, como ejercicio, la demostración del siguiente enunciado :

Teorema 1

Sean f y g funciones de clase B_β . Entonces $f + g$ y fg pertenecen a B_β y

$$||f + g||_\beta \leqslant ||f||_\beta + ||g||_\beta \quad ; \quad ||f\, g||_\beta \leqslant c\, ||f||_\beta \; ||g||_\beta$$

donde c es una constante que depende sólo de β .

Sea f una función de B_β , y g una función de L^p_k , $|k| \leqslant \beta$; entonces fg pertenece a L^p_k , y $||fg||_{p,k} \leqslant c\, ||f||_\beta \; ||g||_{p,k}$, donde c depende sólo de β .

Vamos a estudiar ahora operadores integrales del siguiente tipo:

$$K f = a(x)\, f(x) + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y)\, f(y)\, dy \tag{1}$$

donde $k(x,z)$ es, para cada x , una función homogénea de grado $-n$ de z , que es infinitamente derivable en $|z| \neq 0$, y que tiene valor medio nulo en $|z| = 1$.

Dadas las propiedades de $k(x,z)$, está definida la transformada de Fourier de esta función con respecto a z. Llamémosla $h(x,z)$. Entonces $h(x,z)$ es homogénea de grado 0 con respecto a z, es infinitamente derivable con respecto a z en $|z| \neq 0$ y tiene valor medio nulo en $|z| = 1$. Recíprocamente, toda función $h(x,z)$ con estas propiedades es la transformada de una $k(x,z)$ de aquél tipo. El símbolo de operador K, que designaremos con $\sigma(K)$ será, por definición, la función

$$\sigma(K) = a(x) + h(x,z) \quad . \tag{2}$$

La función $a(x)$ es precisamente el valor medio de $h(x,z)$ en $|z| = 1$. Es evidente entonces que toda función de x y z, que es infinitamente derivable y homogénea de grado 0 con respecto a z, es el símbolo de un operador como el (1).

Diremos que el operador K es de tipo β, si para cada z, $|z| = 1$ las funciones de x

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \sigma(K) \quad , \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2n$$

son de clase B_β. La norma $||K||_\beta$ de un operador de clase β será, por definición

$$||K||_\beta = \sup_{|z|=1} ||\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\beta} K||_\beta \quad , \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2n \quad .$$

Vamos a demostrar el siguiente teorema.

<u>Teorema 2</u>

Sea K un operador de tipo β. Entonces si $f \in L^p_k$, $1 < p < \infty$, $0 \leq k \leq \beta$, el segundo término del segundo miembro de (1) existe como límite en L^p_k. Además la siguiente desigualdad es válida

$$||K f||_{p,k} \leq C\, ||K||_\beta\, ||f||_{p,k} \quad , \quad |k| \leq \beta$$

donde la constante C depende sólo de β y de p.

<u>Demostración</u>

Sea $Y_{\ell m}(z)$ un sistema ortonormal completo de armónicas esféricas, donde m es el grado de $Y_{\ell m}(z)$. Llamemos $R_{\ell m}$ al operador integral singular de convolución cuyo núcleo está dado por $|z|^{-n} Y_{\ell m}(z)$. Como sabemos, la transformada de Fourier de este núcleo es $\gamma_m Y_{\ell m}(z)$ donde $\gamma_m = i^m \pi^{n/2}\, \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)^{-1}$.

Sean

$$\sum_{m\geq 1} a_{\ell m}(x)\, Y_{\ell m}(z)\, |z|^{-n} \qquad , \qquad a(x) + \sum_{m\geq 1} b_{\ell m}(x)\, Y_{\ell m}(z)$$

los desarrollos en serie de armónicas esféricas de $k(x,z)$ y $\sigma(K) = h(x,z)$ respectivamente. Entonces según se vió en el capítulo 5 ,

$$b_{\ell m}(x) = (-1)^r\, m^{-r}\, (m+n-2)^{-r} \int_{|z|=1} L^r(h)\, Y_{\ell m}(z)\, d\sigma \quad .$$

La variable x figura como un parámetro en la integral. Derivando con respecto a x bajo el signo de integración y acotando los incrementos con respecto a x de las derivadas de orden máximo, resulta la siguiente acotación

$$||b_{\ell m}||_\beta \leq C\, m^{-2r}\, ||K||_\beta \int_{|z|=1} |Y_{\ell m}(z)|\, d\sigma \quad , \quad 0 \leq r \leq n$$

y la desigualdad de Schwarz aplicada a esta integral nos da .

$$||b_{\ell m}||_\beta \leq C\, m^{-2n}\, ||K||_\beta \quad , \quad ||a||_\beta \leq C\, ||K||_\beta \quad . \qquad (3)$$

donde la constante C depende sólo de β (y de n). En el capítulo 6 se vió que $|Y_{\ell m}| \leq C\, m^{(n-2)/2}$, y que el número de armónicas de grado m es menor que $C\, m^{n-2}$; por lo tanto las desigualdades de (3) implican que la serie de $\sigma(K)$ converge uniformemente. Sea $\varphi(z)$ una función de prueba de decrecimiento rápido y $\hat{\varphi}(z)$ su transformada de Fourier , que supondremos real. Entonces

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|>\varepsilon} k(x,z)\, \bar{\varphi}(z)\, dz = \int \Big(\sum b_{\ell m}(x)\, Y_{\ell m}(z) \Big)\, \hat{\varphi}(z)\, dz =$$

$$= \sum b_{\ell m}(x) \int Y_{\ell m}(z)\, \hat{\varphi}(z)\, dz = \sum b_{\ell m}(x)\, \gamma_m^{-1} \lim_{\varepsilon\to 0} \int |z|^{-n}\, Y_{\ell m}(z)\, \varphi(z)\, dz \, ,$$

Como $\gamma_m^{-1} \leq C\, m^{n/2}$, y como las integrales en los términos de la última serie son , en valor absoluto, menores o iguales que $C\, m^{(n-2)/2}$, resulta que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|z|>\varepsilon} k(x,z)\, \varphi(z)\, dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \Big[\sum b_{\ell m}(x)\, \gamma_m^{-1}\, |z|^{-n}\, Y_{\ell m}(z) \Big]\, \varphi(z)\, dz \; ,$$

y de esto se deduce que

$$k(x,z) = \sum b_{\ell m}(x)\, \gamma_m^{-1}\, |z|^{-n}\, Y_{\ell m}(z) \quad ,$$

$$a_{\ell m} = b_{\ell m}\, \gamma_m^{-1} \quad ; \qquad (4)$$

$$||a_{\ell m}||_\beta \leq C\, m^{-(3/2)n}\, ||K||_\beta \quad .$$

Sea ahora $R_{\ell m \varepsilon}$ el operador

$$R_{\ell m\varepsilon} f = \int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{-n} Y_{\ell m}(x-y) f(y)\, dy ,$$

y

$$K_\varepsilon f = a(x) f(x) + \int_{|x-y|>\varepsilon} k(x,x-y) f(y)\, dy .$$

Como, según (4) , resulta que

$$\sum | a_{\ell m}(x) |z|^{-n} Y_{\ell m}(z) | \leq C \left(\sum_1^\infty m^{-3} \right) |z|^{-n} ,$$

desarrollando $k(x,x-y)$ en serie e integrando término a término, se deduce que si $f \in L^p$, $1 < p < \infty$,

$$K_\varepsilon f = a(x) f(x) + \sum a_{\ell m}(x) R_{\ell m\varepsilon} f$$

Si además $f \in L^p_k$, $1 < p < \infty$, $0 \leq k \leq \beta$, de acuerdo con el teorema (4) del capítulo 4

$$||R_{\ell m\varepsilon} f|| \leq C ||f||_p ,$$

o, más generalmente,

$$||R_{\ell m\varepsilon} f||_{p,k} \leq C ||f||_{p,k} ,$$

donde C depende sólo de p , y $R_{\ell m\varepsilon} f$ converge a $R_{\ell m} f$ en L^p_k cuando $\varepsilon \to 0$.

De ésto y del teorema 1 se deduce que

$$||K_\varepsilon f||_{p,k} \leq C \left(\sum ||a_{\ell m}||_\beta \right) ||f||_{p,k} \leq C ||K||_\beta ||f||_{p,k}$$

para todo k tal que $|k| \leq \beta$, donde C depende sólo de p y de β , y que $K_\varepsilon f$ converge en L^p_k cuando $\varepsilon \to 0$. Queda también demostrado el siguien te

Teorema 3.

Sea K un operador de tipo β . Sea $R_{\ell m}$ el operador

$$R_{\ell m} f = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} |x-y|^{-n} Y_{\ell m}(x-y) f(y)\, dy$$

donde $Y_{\ell m}(z)$ es un sistema ortonormal completo de armónicas esféricas, y sean $a_{\ell m}(x)$ los coeficientes del desarrollo en serie de armónicas $Y_{\ell m}(z)$ del núcleo $k(x,z)$ de K . Entonces la serie de operadores

$$a + \sum a_{\ell m} R_{\ell m} \tag{5}$$

converge a K en la norma de operadores de L_k^p , $1 < p < \infty$, $|k| \leq \beta$.

Ahora definiremos algunas operaciones entre operadores de tipo β . Dados K_1 y K_2 definiremos el seudoproducto $K_1 o K_2$ de K_1 y K_2 así:

$$\sigma(K_1 o K_2) = \sigma(K_1)\ \sigma(K_2) .$$

Es evidente que si K_1 y K_2 son de tipo β , $\sigma(K_1)\ \sigma(K_2)$ es el símbolo de un operador de tipo β . El seudoadjunto $K^{\#}$ de un operador K está dado por

$$\sigma(K^{\#}) = \bar{\sigma}(K) ,$$

es decir $\sigma(K^{\#})$ es el conjugado complejo de $\sigma(K)$. El adjunto K^* de un operador integral singular K se define, como es costumbre, mediante la identidad

$$\int_{E_n} f\,\overline{(K^* g)}\, dx = \int_{E_n} (K f)\, \bar{g}\, dx ,$$

donde f y g son funciones de $\mathcal{D}$. Si K es un operador de tipo β , $\beta \geq 0$, K^* es contínuo con respecto a las normas de L_k^p , $1 < p < \infty$, $|k| \leq \beta$, y se puede definir por continuidad en todos estos espacios. Ampliada de este modo la definición de K^* vale la identidad

$$\langle f , \overline{K^* g} \rangle = \langle K f , \bar{g} \rangle .$$

Salvo en el caso en que K es un operador de convolución, K^* no es un operador del tipo (1) . Tampoco es del tipo (1) la composición $K_1 K_2$ de dos operadores de tipo β . Sin embargo tanto K^* como $K_1 K_2$ son en cierto modo equivalentes a ciertos operadores de tipo β , como veremos a continuación.

<u>Teorema 4</u>

El espacio de los operadores integrales singulares de tipo β con la norma correspondiente es un espacio de Banach . Si K_1 y K_2 son operadores de tipo β

$$\|K_1 + K_2\|_\beta \leq \|K_1\|_\beta + \|K_2\|_\beta \quad ; \quad \|K_1 K_2\|_\beta \leq C\, \|K_1\|_\beta\, \|K_2\|_\beta$$

donde la constante C depende de β . Si $\beta > 1$ los operadores

$$K_1 K_2 - K_1 o K_2 \quad , \quad K_1^* - K_1^{\#}$$

transforman contínuamente L_k^p en L_{k+1}^p $1 < p < \infty$, $-\beta \leq k \leq \beta - 1$, con normas no mayores que $C\, \|K_1\|_\beta\, \|K_2\|_\beta$ y $C\, \|K_1\|_\beta$ respectivamente, donde la constante C depende sólo de β y p . Por último si K es de tipo β ,

$\beta > 1$ entonces el operador $K\Lambda - \Lambda K$ es acotado en L^p_k , $1 < p < \infty$, $|k| \leq \beta - 1$, y su norma es menor o igual que $C \, ||K||_\beta$ donde C depende sólo de β y de p

D e m o s t r a c i ó n

Que el espacio de los operadores de tipo β es completo con respecto a su norma, es una consecuencia inmediata de la definición. La acotación de la norma del seudoproducto resulta del teorema 1 y de la definición de norma.

Sea $R = R_{\ell m}$ uno de los operadores que introdujimos en la demostración del teorema 2 y sea $a(x)$ una función de B_β , $\beta > 1$, y f una función de $\mathcal{D}$ Consideremos el operador

$$(aR - Ra)\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} Y(x-y) \left\{ a(x) - a(y) \right\} f_i(y)\, dy$$

donde $Y(z) = |z|^{-n} Y_{\ell m}(z)$ y $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Si llamamos $a_i(x)$ a $\dfrac{\partial a}{\partial x_i}$, como $a \in B_\beta$, $\beta > 1$, resulta

$$a(x) - a(y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, a_i(x) + b(x,y)$$

donde $|b(x,y)| \leq n \, ||a||_\beta \, |x-y|^\alpha$, y $\alpha = \beta$ si $\beta \leq 2$ ó $\alpha = 2$ si $\beta > 2$. Reemplazando esta expresión en la integral precedente e integrando por partes resulta

$$\int_{|x-y|>\varepsilon} Y(x-y) \left\{ a(x) - a(y) \right\} f_i(y)\, dy =$$

$$= \int_{|x-y|>\varepsilon} Y(x-y)\, a_i(y)\, f(y)\, dy + \int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} \sum_j (x_j - y_j)\, a_j(x)\, Y_i(x-y)\, f(y)\, dy +$$

$$+ \int_{|x-y|>1} \left\{ a(x) - a(y) \right\} Y_i(x-y)\, f(y)\, dy + \int_{\varepsilon<|x-y|\leq 1} b(x,y)\, Y_i(x-y)\, f(y)\, dy +$$

$$+ \int_{|x-y|=\varepsilon} \left\{ a(x) - a(y) \right\} Y(x-y)\, f(y)\, \gamma_i\, d\sigma \qquad (6)$$

donde la última integral está tomada sobre la esfera $|x-y| = \varepsilon$, γ_i es el i-ésimo coseno director de la normal interior y $d\sigma$ es el elemento de área. Vamos a acotar las normas en L^p_k de las integrales precedentes. Para esto es menester tener presente las desigualdades siguientes

$$|Y(x-y)| \leq C\, m^{(n-2)/2}\, |x-y|^{-n} \quad , \quad |Y_i(x-y)| \leq C\, m^{n/2}\, |x-y|^{-n-1} \qquad (7)$$

y observar que los núcleos $z_j Y_i(z)$ son homogéneos de grado $-n$ y tienen valor medio nulo sobre la esfera $|z| = 1$. En efecto, si $f \in \mathcal{D}$, cualquiera que sea la función a de B_β todos los términos de la ecuación (6), excepto tal vez el tercero del segundo miembro, convergen cuando $\varepsilon \to 0$. Pero entonces también el tercer término converge, cualquiera que sea la función a, y ésto es posible sólo si los núcleos $z_i Y_i(z)$ tienen valor medio nulo sobre $|z| = 1$.

Volvamos a la ecuación (6). Por el teorema 4 del capítulo 4 la norma en L^p de las dos primeras integrales del segundo miembro es menor o igual que $C \,||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_p$, donde C depende sólo de p. En virtud de las acotaciones (7) las dos integrales siguientes están dominadas por

$$C \,||a||_\beta\, m^{n/2} \int_{|x-y|>1} |x-y|^{-n-1}\, |f(y)|\, dy$$

y

$$C \,||a||_\beta\, m^{(n-2)/2} \int_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{-n+\alpha}\, |f(y)|\, dy$$

y del teorema de Young sobre convoluciones resulta que la norma en L^p de estas integrales es menor o igual que $C \,||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_p$.

Por último, como $|a(x) - a(y)| \leq n\, |x-y|\, ||a||_\beta$, y en virtud de (7), el límite de la última integral cuando ε tiende a cero es menor o igual que $C \,||a||_\beta\, m^{(n-2)/2}\, |f(x)|$.

Resumiendo, hemos demostrado que

$$||(aR - Ra) \frac{\partial f}{\partial x_i}||_p \leq C \,||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_p$$

donde C depende sólo de β y de p. De esto se deduce que

$$|| \frac{\partial}{\partial x_i} (aR - Ra)\, f||_p \leq ||(\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i})\, f||_p + ||(aR - Ra) \frac{\partial f}{\partial x_i}||_p \leq$$

$$\leq C \,||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_p$$

donde nuevamente C sólo depende de β y p. Como además

$$||(aR - Ra)\, f||_p \leq C \,||a||_\beta\, ||f||_p$$

resulta que

$$||(aR - Ra)\, f||_{p,1} \leq C \,||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_p$$

Ahora demostraremos por inducción que

$$||(aR - Ra)\, f||_{p,k+1} \leqslant C\, ||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_{p,k} \quad . \tag{8}$$

si $0 \leqslant k \leqslant \beta - 1$. Supongamos válida la desigualdad para $0 \leqslant k \leqslant r - 1$. Sea f una función de L_r^{-p} .

Entonces si $\beta \geqslant r + 1$

$$|| \frac{\partial}{\partial x_i} (aR - Ra)\, f||_{p,r} \leqslant ||(\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i})\, f\, ||_{p,r} + ||(aR - Ra) \frac{\partial f}{\partial x_i}||_{p,r} \leqslant$$

$$\leqslant C\, ||a||_\beta\, ||f||_{p,r} + C\, ||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||\frac{\partial f}{\partial x_i}||_{p,r-1}$$

y de esto se deduce que

$$||(aR - Ra)\, f||_{p,r+1} \leqslant C\, ||a||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_{p,r} \quad .$$

Sean f y g funciones de $\mathcal{D}$ y $0 \leqslant k \leqslant \beta$. Entonces si $q = \frac{p}{p-1}$

$$||(aR - Ra)\, f||_{p,-k+1} \leqslant C \sup |\langle (aR - Ra)\, f\, ,\, g\rangle|\ ||g||^{-1}_{q,k-1} =$$

$$= C \sup |\langle f\, ,\, (Ra - aR) g\rangle|\ ||g||^{-1}_{q,k-1} \leqslant C\, ||f||_{p,-k}\, ||(Ra - aR) g||_{q,k} ||g||^{-1}_{q,k-1} \leqslant$$

$$\leqslant C\, ||f||_{p,-k}\, ||a||_\beta\, m^{n/2} \quad .$$

Asi pues queda demostrada la desigualdad (8) para $-\beta \leqslant k \leqslant \beta - 1$, donde C depende de p y de β .

Sean ahora K_1 y K_2 dos operadores de tipo β , $\beta > 1$. Entonces según el teorema 3 , K_1 y K_2 se pueden expresar así

$$K_1 = \sum_{m \geqslant 0} a_{\ell m} R_{\ell m} \qquad\qquad K_2 = \sum b_{\ell m} R_{\ell m}$$

donde, para abreviar, hemos incluido los primeros términos de las series en las sumatorias, escribiendo $a = a_{00}$ y $R_{00} = I$, donde I es el operador identidad, etc. Según (3) , y con esta convención, tenemos

$$||a_{\ell m}|| \leqslant C\, (m+1)^{-2n}\, ||K_1||_\beta \quad , \quad ||b_{\ell m}|| \leqslant C\, (m+1)^{-2n}\, ||K_2||_\beta \quad . \tag{9}$$

Ahora bien

$$K_1 K_2 = \sum a_{\ell m} R_{\ell m} b_{\lambda\mu} R_{\lambda\mu} \quad .$$

y desarrollando en serie de armónicas esféricas los símbolos de K_1 y K_2 , se ve inmediatamente que

$$K_1 \circ K_2 = \sum a_{\ell m}\, b_{\lambda\mu}\, R_{\ell m}\, R_{\lambda\mu} \quad .$$

Por lo tanto

$$K_1 K_2 - K_1 \circ K_2 = \sum a_{\ell m}\,(R_{\ell m}\, b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}\, R_{\ell m})\, R_{\lambda\mu}$$

y entonces si $-\beta \leq k \leq \beta - 1$, y $f \in \mathcal{D}$,

$$||(K_1K_2 - K_1 o K_2)\, f||_{p,k+1} \leq \sum ||a_{\ell m}\,(R_{\ell m}\, b_{\lambda\mu} - b_{\lambda\mu}\, R_{\ell m})\, R_{\lambda\mu}\, f||_{p,k+1} \leq$$

$$\leq C \sum ||a_{\ell m}||_\beta\, ||b_{\lambda\mu}||_\beta\, \mu^{n/2}\, ||R_{\lambda\mu}\, f||_{p,k} \leq C \sum ||a_{\ell m}||_\beta\, ||b_{\lambda\mu}||_\beta\, \mu^{n/2}\, ||f||_{p,k}$$

donde C depende sólo de p y β . Sumando y usando las desigualdades (9) resulta que

$$||(K_1K_2 - K_1 o K_2)\, f||_{p,k+1} \leq C\, ||K_1||_\beta\, ||K_2||_\beta\, ||f||_{p,k}$$

donde C depende de β y p .

Ahora pasemos a estudiar el operador $K^* - K^{\#}$. Por un lado es evidente que

$$K_1^* = \sum (-1)^m\, R_{\ell m}\, \bar{a}_{\ell m}$$

donde $\bar{a}_{\ell m}$ es el conjugado complejo de $a_{\ell m}$. Además desarrollando $\sigma(K_1)$ en serie de armonicas esféricas se ve que

$$K_1^{\#} = \sum (-1)^m\, \bar{a}_{\ell m}\, R_{\ell m}$$

Por lo tanto, si $-\beta \leq k \leq \beta - 1$, $\beta > 1$, y $f \in \mathcal{D}$

$$||(K_1^* - K_1^{\#})\, f||_{p,k+1} \leq \sum ||(R_{\ell m}\, \bar{a}_{\ell m} - \bar{a}_{\ell m}\, R_{\ell m})\, f\, ||_{p,k+1} \leq$$

$$\leq \sum C\, ||a_{\ell m}||_\beta\, m^{n/2}\, ||f||_{p,k} \quad .$$

y en virtud de las desigualdades (9) se obtiene

$$||(K_1^* - K_1^{\#})\, f\, ||_{p,k+1} \leq C\, ||K||_\beta\, ||f||_{p,k}$$

donde C depende de β y p . Por último consideremos el operador $K\Lambda - \Lambda K$. Según se vió en el capítulo 8 , $\Lambda = -i \sum_{j=1}^{n} R_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ donde R_j son las transformaciónes de Riesz . Entonces si $f \in \mathcal{D}$, y $|k| \leq \beta - 1$ se tiene

$$||(K\Lambda - \Lambda K)\, f||_{p,k} \leq \sum_{j=1}^{n} ||\, \frac{\partial}{\partial x_j}\,(R_jK - KR_j)\, f||_{p,k} + \sum_{j=1}^{n} ||(\frac{\partial}{\partial x_j}K - K\frac{\partial}{\partial x_j})R_j f||_{p,k} \quad .$$

Ahora bien, la primera suma es menor o igual que

$$\sum_{j=1}^{n} \|(R_j K - K R_j) f\|_{p,k+1} \leq C \|K\|_\beta \|f\|_{p,k}$$

donde C depende de β y p. Para acotar la segunda suma desarrollemos K en serie y entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} K - K \frac{\partial}{\partial x_j} \right) R_j = \sum \frac{\partial a_{\ell m}}{\partial x_j} R_{\ell m} R_j$$

y de esto, como $|k| \leq \beta - 1$ y $\|R_{\ell m} R_j f\|_{p,k} \leq \|f\|_{p,k}$ se deduce que

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x_j} K - K \frac{\partial}{\partial x_j} \right) R_j f\right\|_{p,k} \leq C \sum \left\| \frac{\partial a_{\ell m}}{\partial x_j} \right\|_{\beta-1} \|f\|_{p,k}$$

pero $\|(\partial/\partial x_j) a_{\ell m}\|_{\beta-1} \leq \|a_{\ell m}\|$, y en virtud de (9) resulta que

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x_j} K - K \frac{\partial}{\partial x_j} \right) R_j f\right\|_{p,k} \leq C \|K\|_\beta \|f\|_{p,k}$$

Combinando estos resultados se obtiene, en definitiva

$$\|(K\Lambda - \Lambda K) f\|_{p,k} \leq C \|K\|_\beta \|f\|_{p,k}$$

donde C depende sólo de p y β. El teorema queda entonces demostrado.

Teorema 5

Sea K un operador integral singular de tipo β, $\beta \geq 1$. Entonces $(\partial/\partial x_i) K - K (\partial/\partial x_i)$ coincide con un operador integral singular de tipo $\beta - 1$ en L^p_{-k}, $0 \leq k \leq \beta - 1$. El símbolo de este operador es $\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma(K)$.

Demostración

En virtud del teorema 3, si $f \in L^p_{-k}$, $K f \in L^p_{-k}$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K f - K \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (a f) - a \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{\ell m} R_{\ell m} f) - a_{\ell m} \frac{\partial}{\partial x_i} (R_{\ell m} f)$$

pero como $\frac{\partial}{\partial x_i}(af) = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + a \frac{\partial f}{\partial x_i}$ para toda a de B_β y toda f de L^p_{-k} resulta que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} K - K \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f = \frac{\partial a}{\partial x_i} f + \sum \frac{\partial a_{\ell m}}{\partial x_i} R_{\ell m} f .$$

Pero $\partial a/\partial x_i$ y $\partial a_{\ell m}/\partial x_i$ son los coeficientes del desarrollo en serie del operador cuyo símbolo es $(\partial/\partial x_i)\, \sigma(K)$. El teorema queda entonces demostrado.

Teorema 6

Sea P un producto finito de operadores integrales singulares de tipo β, $\beta > 1$, y de adjuntos de tales operadores, y P_o el seudoproducto de los mismos operadores o sus seudoadjuntos, según sea el caso. Entonces $\Lambda(P-P_o)$ y $(P-P_o)\Lambda$ son operadores acotados en L_k^p, $1 < p < \infty$, $|k| \leq \beta - 1$, y sus normas son menores o iguales que una constante, que sólo depende del número de factores, de β y de p, por el producto de las normas β de los factores.

Demostración

Supongamos demostrado el enunciado para productos P de a lo sumo $r-1$ factores. Entonces si K es un operador integral singular de tipo β

$$(PK - P_o oK)\Lambda = (P-P_o)K\Lambda + (P_oK - P_o oK)\Lambda$$

$$\Lambda(PK - P_o oK) = \Lambda(P-P_o)K + \Lambda(P_oK - P_o oK)$$

y como Λ es un operador continuo de L_k^p a L_{k-1}^p se ve inmediatamente que en virtud del teorema 4 el enunciado vale para el producto PK

Por otro lado

$$(PK^* - P_o oK^*)\Lambda = P(K^* - K^\#)\Lambda + (P-P_o)K^\#\Lambda + (P_oK^\# - P_o oK^\#)\Lambda$$

$$\Lambda(PK^* - P_o oK^\#) = \Lambda P(K^* - K^\#) + \Lambda(P-P_o)K^\# + \Lambda(P_oK^\# - P_o oK^\#)$$

y la conclusión buscada se deduce de esta identidad como en el caso anterior.

Teorema 7

Sea P un producto finito de operadores integrales singulares de tipo β, $\beta > 1$, y de adjuntos de tales operadores. Entonces $\Lambda P - P\Lambda$ es un operador acotado en L_k^p, $1 < p < \infty$, $|k| \leq \beta - 1$, cuya norma es menor o igual que una constante, que sólo depende de β, p y del número de factores, por el producto de las normas β de los factores.

Demostración

En efecto, se tiene que $\Lambda P - P\Lambda = \Lambda(P-P_o) - (P-P_o)\Lambda + (P_o\Lambda - \Lambda P_o)$ donde P_o es el operador que se introdujo en el enunciado del teorema 6, y la conclusión buscada se deduce inmediatamente de esta identidad y los teoremas 4 y 6.

Matrices de operadores integrales de tipo β .

Más adelante será necesario considerar funciones u cuyos valores son vectores $(f_1, f_2, \dots, f_\ell)$ de componentes f_1 , f_2 , ... , f_ℓ . Para abreviar diremos que u pertenece a L^p_k (o a cualquier otro espacio funcional) si cada una de sus componentes pertenece a L^p_k . Dadas dos funciones $u \in L^p_k$, $v \in L^q_{-k}$, $q = p/(p-1)$, definimos la forma bilineal $\langle u , v \rangle$ mediante

$$\langle u , v \rangle = \sum_1^\ell \langle f_\ell , g_\ell \rangle$$

donde $u = (f_1, f_2, \dots, f_\ell)$ y $v = (g_1, g_2, \dots, g_\ell)$.

Toda operación lineal K entre funciones cuyos valores son vectores de ℓ componentes está dada por una matriz de ℓ^2 operadores K_{ij} que operan funciones ordinarias (es decir, de valores numéricos). Diremos que K es un operador integral singular de tipo β si cada uno de los K_{ij} lo son, y $\|K\|_\beta$ será la suma $\sum \|K_{ij}\|_\beta$.

Definiendo la norma $\|u\|$ de $u = (f_1, f_2, \dots, f_\ell)$ así

$$\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{\ell} \|f_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

se ve facilmente que el teorema 2 vale también para K . Si además llamamos $\sigma(K)$ a la matriz cuyos elementos son $\sigma(K_{ij})$ y definimos K^* mediante la identidad $\langle Ku , \overline{v} \rangle = \langle u , \overline{(K^* v)} \rangle$, y $K_1 o K_2$ y $K^\#$ por las fórmulas

$$\sigma(K_1 o K_2) = \sigma(K_1)\ \sigma(K_2) \quad , \quad \sigma(K^\#) = \sigma(K)^*$$

donde $\sigma(K)^*$ es la adjunta de la matriz $\sigma(K)$, es fácil ver que los teoremas 4 , 5 , 6 y 7 valen también para estos operadores. Sólo cabe destacar dos diferencias. Primera, en este caso el seudoproducto, estando dado por el producto de dos matrices, no es conmutativo. Segunda, las constantes que aparecen en los teoremas dependerán ahora también del número de componentes de las funciones .

§9.- E C U A C I O N E S   T O T A L M E N T E   H I P E R B O L I C A S

En este capítulo expondremos la teoría de existencia de soluciones de ecuaciones totalmente hiperbólicas según J. Neuwirth (tesis presentada al M. I. T. en 1959, aún inédita). Comenzaremos con el estudio de ciertos espacios funcionales introducidos por L. Gärding.

L O S   E S P A C I O S $\mathcal{L}$.

Sea, como siempre, E_n el espacio euclídeo n - dimensional y R la recta $-\infty < t < \infty$. En el producto cartesiano $E_n \times R$ de puntos (x,t) , $x \in E_n$, $t \in R$, consideraremos funciones medibles de valores complejos $f(x,t)$ que para casi todo t son de cuadrado sumable en E_n Con $||f|| = ||f(x,t)||$ designaremos la norma de $f(x,t)$ en $L^2(E_n)$, es decir

$$||f|| = \left(\int |f(x,t)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \tag{1}$$

esta norma es, por lo tanto, una función medible de t . Dadas dos funciones f , g de este tipo, (f,g) designará su producto interno como funciones de x , ó, expresado en símbolos,

$$(f,g) = \int f(x,t) \, \overline{g}(x,t) \, dx \quad . \tag{2}$$

Este producto interno es entonces también una función medible de t . Con $\mathcal{L}^p$ designaremos el espacio de las funciones $f(x,t)$ talesque $||f|| \in L^p(R)$. La norma de f en $\mathcal{L}^p$ será, por definición, la norma de $||f||$ en $L^p(R)$. Por último, $\mathcal{C}$ será el espacio de las funciones "continuas" de $\mathcal{L}^\infty$, es decir, de las funciones $f(x,t)$ que son de cuadrado sumable en x para cada t y tales que

$$|| f(x,t+h) - f(x,t) || \longrightarrow 0 \quad \text{con} \quad h \longrightarrow 0$$

$$|| f(x,t) || \longrightarrow 0 \quad \text{con} \quad |t| \longrightarrow \infty$$

También será necesario considerar funciones diferenciables en la teoría. Con $\mathcal{L}^p_k$ designaremos el espacio de funciones cuyas derivadas de órdenes $\leq k$, son distribuciones que coinciden con funciones de $\mathcal{L}^p$ La norma de $f \in \mathcal{L}^p_k$ será la suma de las normas en $\mathcal{L}^p$ de f y sus derivadas de orden $\leq k$. En forma análoga se definen los espacios $\mathcal{E}_k$.

Los exponentes que interesan en esta teoría son $p = 1, 2, \infty$. Por lo tanto a continuación nos limitaremos a estudiar sólo los espacios correspondientes.

Teorema 1 :

Los espacios $\mathcal{L}^p$, $p = 1, 2, \infty$, y $\mathcal{E}$ son espacios completos.

Demostración :

Sea f_m una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^1$. Entonces para cada $\rho > 0$ se tiene

$$\int_{|x|\leq\rho} |f_\ell(x,t) - f_m(x,t)|\, dx\, dt \leq (\omega_n \rho^n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{|x|\leq\rho} |f_\ell - f_m|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq (\omega_n \rho^n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} ||f_\ell - fm||\, dt$$

donde ω_n es el volúmen de la esfera $|x| \leq 1$. Pero por hipótesis la última integral tiende a cero cuando $\ell, m \to \infty$, es decir, la sucesión de funciones $f_m(x,t)$ converge en promedio de orden 1 en cada cilindro $|x| \leq \rho$. Existe por lo tanto una sucesión parcial f_{m_i} que converge en casi todo punto de $E_n \times R$ a una función f . Ahora bien, fijando m y haciendo tender $\ell = m_i$ a infinito, se tiene por el lema de Fatou

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int |f_m - f_\ell|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \int_{-\infty}^{\infty} dt \lim_{\ell\to\infty} \left(\int |f_m - f_\ell|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geq \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int |f_m - f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

De esto se deduce que $f \in \mathcal{L}^1$, y como el primer miembro de estas desigualdades tiene a cero cuando $m \to \infty$, resulta que $f_m \to f$ en $\mathcal{L}^1$

Que el espacio $\mathcal{L}^2$ es completo resulta evidente si se observa que $\mathcal{L}^2$ es precisamente el espacio de funciones de cuadrado sumable en $E_n \times R$.

Sea ahora f_m una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^\infty$. El mismo razonamiento anterior demuestra que existe una sucesión parcial f_{m_i} que converge en casi todo punto de $E_n \times R$. Entonces para todo t fuera de un conjunto de medida nula en R , $f_{m_i}(x,t)$ converge a un límite $f(x,t)$ para casi todo x , y por el lema de Fatou resulta que para cada m

$$\lim_{m_i\to\infty} ||f_m - f_{m_i}|| \geq ||f_m - f|| \quad ;$$

por lo tanto, como por hipótesis el primer miembro de esta desigualdad tiende uniforme - mente a cero cuando $m \to \infty$, f_m converge a f en $\mathcal{L}^{\infty}$.

Por último sea f_m una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}$. Escogiendo una sucesión parcial podemos suponer que $||f_{m+1} - f_m|| \leq 2^{-m}$ y entonces para cada t , $f_m(x,t)$ converge para casi todo x . Sea f la función límite; como en el caso anterior se demuestra que $||f_m - f|| \to 0$ uniformemente en t , de lo cual se deduce que $||f(x,t)|| \to 0$ si $|t| \to \infty$, y como

$$||f(x,t+h) - f(x,t)|| \leq ||f_m(x,t+h) - f_m(x,t)|| + 2 \sup_t ||f(x,t) - f_m(x,t)|| ,$$

resulta que

$$\overline{\lim_{h \to 0}} ||f(x,t+h) - f(x,t)|| \leq 2 \sup_t ||f(x,t) - f_m(x,t)||$$

y haciendo tender m a infinito se deduce que

$$||f(x,t+h) - f(x,t)|| \to 0$$

cuando $h \to 0$. Es decir $f \in \mathcal{E}$.

<u>Teorema 2</u> :

Sea f una función de $\mathcal{E}$. Entonces

$$||f(x,t+h) - f(x,t)|| \to 0$$

uniformemente en t cuando h tiende a cero.

<u>Demostración</u> :

Si el enunciado fuese falso existirían dos sucesiones t_n y h_n , $h_n \to 0$, tales que

$$||f(x,t_n+h_n) - f(x,t_n)|| \geq \varepsilon > 0 .$$

Como $||f(x,t)|| \to 0$ cuando $t \to \infty$, la sucesión t_n es acotada, y escogiendo una sucesión parcial podemos suponer que t_n converge a un límite que llamaremos t. Entonces

$$||f(x,t_n+h_n) - f(x,t_n)|| \leq ||f(x,t_n+h_n) - f(x,t)|| + ||f(x,t_n) - f(x,t)||$$

Como también $t_n+h_n \to t$, el miembro derecho tiende a cero lo que contradice la des - igualdad anterior

<u>Teorema 3</u> :

Toda funcional lineal continua en $\mathcal{L}^1$ es de la forma

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (f,g)\, dt$$

donde $g \in \mathcal{L}^{\infty}$. La norma de la funcional es igual a la norma de g en $\mathcal{L}^{\infty}$. Recíprocamente, dada una g de $\mathcal{L}^{\infty}$ la integral anterior representa una funcional lineal contínua en $\mathcal{L}^{1}$.

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> :

Consideremos el espacio de funciones de cuadrado sumable en el conjunto de (x,t) dado por $|t| \leq \rho$. Evidentemente estas funciones pertenecen a $\mathcal{L}^{1}$, de modo que si M es la norma de la funcional ℓ se tiene

$$|\ell(f)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} ||f||\, dt \leq M\sqrt{2\rho}\, \left(\int_{-\rho}^{\rho} ||f||^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} ;$$

es decir ℓ es una funcional lineal contínua en este espacio, y por lo tanto es de la forma

$$\ell(f) = \int f(x,t)\, g(x,t)\, dx\, dt$$

donde $g(x,t) = 0$ en $|t| > \rho$ y

$$\int |g(x,t)|^2\, dx\, dt < \infty .$$

Sea ahora E un conjunto de valores de t para los cuales $||g(x,t)|| > M+\varepsilon$, y $f(x,t)$ una función tal que $f(x,t) = \bar{g}(x,t)$ si $t \in E$ y $f(x,t) = 0$ en caso contrario. Entonces

$$\ell(f) = \int_E ||g||^2\, dt \geq (M+\varepsilon)^2\, |E|$$

donde $|E|$ es la medida de E. Por otra parte

$$|\ell(f)|^2 \leq M^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||f||\, dt \right)^2 = M^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} ||g||\, dt \right)^2 \leq M^2\, |E| \int_E ||g||^2\, dt = |\ell(f)| M^2 |E|$$

y de esto se deduce que $|\ell(f)| \leq M^2\, |E|$ lo cual contradice la desigualdad anterior $|\ell(f)| \geq (M+\varepsilon)^2\, |E|$, a menos que $|E| = 0$. Es decir, $||g|| \leq M$ para casi todo t. También es evidente que g no depende de ρ.

Dada $f \in \mathcal{L}^{1}$ sea $f_m(x,t) = f(x,t)$ si $|t| \leq m$ y $||f(x,t)|| \leq m$, y $f_m(x,t) = 0$ en caso contrario. Entonces

$$\ell(f_m) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_m, g)\, dt$$

y pasando al límite se obtiene la representación buscada de $\ell(f)$. La recíproca es inmediata.

T e o r e m a 4 :

El espacio $\mathcal{D}$ de funciones infinitamente derivables de soporte compacto es denso en $\mathcal{L}^1$.

D e m o s t r a c i ó n :

Como $\mathcal{D}$ es un espacio lineal, si $\mathcal{D}$ no fuese denso en $\mathcal{L}^1$ existiría una funcional lineal continua ℓ en $\mathcal{L}^1$

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (f,g)\, dt \quad , \quad g \in \mathcal{L}^{\infty}$$

no idénticamente nula, tal que $\ell(f) = 0$ para toda f de $\mathcal{D}$. Pero esto implica, evidentemente, que $g = 0$ en casi todo punto, lo cual contradice la hipótesis de que ℓ no es idénticamente nula.

T e o r e m a 5 :

El espacio $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{L}^1_k$

D e m o s t r a c i ó n :

Sean $\Psi(x)$ y $\varphi(t)$ dos funciones definidas en E_n y R respectivamente. Supongamos que $\Psi \geqslant 0$ y $\varphi \geqslant 0$ son infinitamente derivables, de integral igual a 1 y de soporte compacto. Designemos con Ψ_λ y φ_λ a las funciones $\lambda^n \Psi(\lambda x)$ y $\lambda \varphi(\lambda t)$ respectivamente. Dada una función $f(x,t)$ localmente integrable se ve inmediatamente que la convolución $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * f$ se puede expresar también así : $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * f = \Psi_\lambda * (\varphi_\lambda * f)$. Entonces, si $f \in \mathcal{L}^1$ de la desigualdad integral de Minkowski se deduce que $\| \varphi_\lambda * f \| \leqslant \varphi_\lambda * \|f\|$, y como por el teorema de Young sobre convoluciones se tiene que

$$\| \Psi_\lambda * (\varphi_\lambda * f) \| \leqslant \| \varphi_\lambda * f \| \quad ,$$

resulta en definitiva que

$$\| (\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * f \| \leq \varphi_\lambda * \|f\| \quad ,$$

e integrando con respecto a t y aplicando nuevamente el teorema de Young a la integral de la derecha se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| (\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * f \|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|f\|\, dt \quad .$$

Sea ahora g una función de $\mathcal{D}$ tal que la norma $f - g$ en $\mathcal{L}^1$ es menor que un número prefijado $\mathcal{E}$. Como $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * g$ converge uniformemente a g cuando $\lambda \longrightarrow \infty$, y como $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * g$ se anula identicamente fuera de un compacto si $\lambda \geqslant 1$, resulta que $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda) * g$ converge a g en $\mathcal{L}^1$.

Pero de la desigualdad precedente se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f - f\|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \|(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*(f-g) - (f-g)\|\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} \|(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*g - g\|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \|(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*g - g\|\, dt ,$$

y haciendo tender λ a infinito resulta que

$$\overline{\lim_{\lambda\to\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \|(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f - f\|\, dt \leqslant 2\varepsilon .$$

Como ε es un número arbitrario esto significa que $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f$ converge a f en $\mathcal{L}^1$ cuando $\lambda \to \infty$.

Ahora, si $f \in \mathcal{L}^p_k$ y D es un monomio diferencial de orden $\leqslant k$, entonces

$$D\left[(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f\right] = (\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*(Df) ,$$

y por lo visto recientemente, se deduce que $D\left[(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f\right]$ converge a f en $\mathcal{L}^1$. Es decir $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f$ converge a f en $\mathcal{L}^1_k$ cuando $\lambda \to \infty$. Evidentemente las funciones $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f$ son infinitamente derivables.

Sea por último $\eta(x,t)$ una función de $\mathcal{D}$ igual a 1 en un entorno del origen. Derivando se ve fácilmente que cuando $\mu \to 0$, la función

$$\eta(\mu x, \mu t)\left[(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f\right]$$

converge a $(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f$ en $\mathcal{L}^1_k$. Por lo tanto es posible aproximar f tanto como se quiera en $\mathcal{L}^1_k$ mediante funciónes de la forma $\eta(\mu x, \mu t)\left[(\Psi_\lambda \varphi_\lambda)*f\right]$ que evidentemente, pertenecen a $\mathcal{D}$. El enunciado queda entonces demostrado.

<u>T e o r e m a</u> <u>6</u> :

El espacio $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{L}^2_k$ y en $\mathcal{C}_k$

<u>D e m o s t r a c i o n</u> :

Como $\mathcal{L}^2_k$ es el espacio $L^2_k(E_n \times R)$, y ya sabemos que las funciones infinitamente derivables de soporte compacto forman un subconjunto denso de éste, sólo tenemos que demostrar que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{C}_k$

Sea f una función de $\mathcal{C}_k$ y φ , Ψ , φ_λ , Ψ_λ las funciones que introdujimos en la demostración del teorema anterior. Supondremos además que $\varphi(0)=1$ y $\Psi(0) = 1$. Entonces se verifica fácilmente que $\varphi(\lambda t)\,\Psi(\lambda x) f$ tiende a f

en $\mathcal{E}_k$ cuando $\lambda \to 0$. Por lo tanto bastará suponer que f tiene soporte compacto. En este caso $(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f = \varphi_\lambda * (\psi_\lambda * f)$ también tiene soporte compacto. Dado un número positivo $\mathcal{E}$ elegimos un número finito de valores t_i de t de modo que $\|f(x,t) - f(x,t_i)\| < \mathcal{E}/2$ para $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$. Entonces para λ suficientemente grande y $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, de

$$\psi_\lambda * f - f \leqslant \psi_\lambda * \left(f(x,t) - f(x,t_i)\right) + \left(\psi_\lambda * f(x,t_i) - f(x,t_i)\right) + \left(f(x,t_i) - f(x,t)\right)$$

y del teorema de Young sobre convoluciones se deduce que $\|\psi_\lambda * f - f\| < \mathcal{E}$, y como esta desigualdad se puede satisfacer simultáneamente para todos los valores de i resulta que $\|\psi_\lambda * f - f\| \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$ uniformemente en t . Por otra parte de la desigualdad integral de Minkowski se deduce que

$$\|\varphi_\lambda * f - f\| = \left\|\int \lambda^n \varphi(\lambda s)\left(f(x,t-s) - f(x,t)\right) ds\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup \|f(x,s) - f(x,t)\| \quad , \quad |t - s| \leqslant \frac{d}{\lambda}$$

donde d es tal que $\varphi(t) = 0$ para $|t| \geqslant d$; y como $f \in \mathcal{E}$ resulta que $\|\varphi_\lambda * f - f\| \to 0$ uniformemente en t cuando $\lambda \to \infty$. De todo esto se deduce que

$$\|(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f - f\| \leqslant \|\varphi_\lambda * (\psi_\lambda * f - f)\| + \|\varphi_\lambda * f - f\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_\lambda * f - f\| + \sup_t \|\psi_\lambda * f - f\|$$

converge uniformemente a cero cuando $\lambda \to \infty$. Si D_α indica un monomio diferencial de orden $\leqslant k$, como $D_\alpha(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f = (\varphi_\lambda \psi_\lambda) * D_\alpha f$ se concluye ~~que también~~ $\|D_\alpha(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f - D_\alpha f\|$ tiende a cero uniformemente en t . Es decir $(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f$ converge a f en $\mathcal{E}_k$. Como $(\varphi_\lambda \psi_\lambda) * f$ pertenece a $\mathcal{D}$, el teorema queda demostrado.

<u>T e o r e m a   7</u> :

Toda función $f(x,t)$ de $\mathcal{L}^1_k$, $k \geqslant 1$, coincide en casi todo punto con una función de $\mathcal{E}_{k-1}$, y la norma de ésta en $\mathcal{E}_{k-1}$ es menor que la de aquella en $\mathcal{L}^1_k$. Si f y g son funciones de $\mathcal{L}^1_1$ la función (f,g) coincide para casi todo t con una función absolutamente contínua cuya derivada está dada por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) .$$

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> :

Dadas f y g en $\mathcal{L}^1_1$ sean f_m y g_m funciones de $\mathcal{D}$ que cuando

$m \to \infty$ convergen en $\mathcal{L}_1^1$ a f y g respectivamente. Como

$$f_m(x,t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial t} f_m(x,s)\, ds \quad .$$

aplicando la desigualda integral de Minkowski se obtiene

$$\|f_m\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial t} f_m \right\| dt \quad ; \tag{3}$$

de esto se deduce que f_m también converge en $\mathcal{C}$.

Sea $\bar{f}$ el límite de f_m en $\mathcal{C}$. Entonces $\|\bar{f} - f_m\| \to 0$ uniformemente en t , y como también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|f_m - f\|\, dt \to 0$$

resulta que $\|\bar{f} - f\| = 0$ para casi todo t . Es decir $\bar{f} = f$ en casi todo punto. Pasando al límite en (3) resulta que

$$\|\bar{f}\| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\partial}{\partial t} f \right\| dt \quad ,$$

es decir la norma de $\bar{f}$ en $\mathcal{C}$ es menor o igual que la norma de f en $\mathcal{L}_1^1$.

La primera parte del enunciado se demuestra ahora razonando del mismo modo con cada una de las derivadas de una función de $\mathcal{L}_k^1$

Volviendo a las funciones f y g , llamemos $\bar{f}$ y $\bar{g}$ a los límites de f_m y g_m en $\mathcal{C}$ respectivamente. Entonces $(\bar{f},\bar{g}) = (f,g)$ para casi todo t. Además

$$(f_m,g_m) = \int_{-\infty}^{t} \left\{ \left(\frac{\partial f_m}{\partial t}, g_m\right) + \left(f_m, \frac{\partial g_m}{\partial t}\right) \right\} ds \tag{4}$$

y como

$$\int_{-\infty}^{t} \left(\bar{f}, \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}\right) ds = \int_{-\infty}^{t} \left(f_m, \frac{\partial}{\partial t} g_m\right) + \int_{-\infty}^{t} \left\{ (\bar{f}-f_m), \frac{\partial}{\partial t} g_m \right\} ds + \int_{-\infty}^{t} \left\{ \bar{f}, \frac{\partial}{\partial t}(\bar{g}-g_m) \right\} ds \quad ,$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^{t} \left(f, \frac{\partial}{\partial t} g\right) ds = \int_{-\infty}^{t} \left(\bar{f}, \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}\right) ds = \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{t} \left(f_m, \frac{\partial}{\partial t} g_m\right) ds \quad .$$

y pasando al límite en (4) , se deduce que

$$(\bar{f},\bar{g}) = \int_{-\infty}^{t} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial t}, g\right) + \left(f, \frac{\partial g}{\partial t}\right) \right\} ds \quad ,$$

y como $(f,g) = (\bar{f},\bar{g})$ en casi todo punto, el teorema queda demostrado.

L O S   E S P A C I O S $\bar{\mathcal{L}}$.

Vamos ahora a considerar unos espacios más generales que los precedentes. Llamaremos $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ al espacio de las funciones de (x,t) que en cada conjunto $\{(x,t)\ ,\ |t| \leq a\}$, $a < \infty$, coinciden con una función de $\mathcal{L}^p_k$. La topología de $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ está dada por la siguiente base de entornos del cero: dado el entero m el entorno U_m de la base será el conjunto de todas las funciones de $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ que coinciden en $\{(x,t)\ \big|\ |t| \leq m\}$ con una función de $\mathcal{L}^p_k$ de norma menor que $1/m$. En forma semejante se definen los espacios $\bar{\mathcal{C}}_k$. Estos espacios son entonces localmente convexos con una base numerable de entornos del cero, es decir son metrizables. Dejamos a cargo del lector el verificar que los teoremas 1 , 4 , 5 , 6 y 7 valen tambien para estos espacios, salvo la aseveración del teorema 7 sobre las normas que debe ser reemplazada por: la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ es más fina que la inducida en él por $\bar{\mathcal{C}}_{k-1}$. Dejamos también a cargo del lector el demostrar la siguiente versión del teorema 3 .

T e o r e m a 8 :

Sea I un intervalo finito de la recta real. Consideremos el espacio de las restricciones de funciones de $\bar{\mathcal{L}}^1$ al conjunto $\{(x,t)\ ,\ t \in I\}$, o sea el cociente de $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ por el subespacio de funciones que se anulan en este conjunto. Entonces toda funcional lineal continua sobre este espacio es de la forma

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (f,g)\ dt$$

donde g es una función de $\mathcal{L}^\infty$ que se anula fuera de $\{(x,t)\ ;\ t \in I\}$.

Toda funcional lineal continua sobre $\bar{\mathcal{L}}^1$ es de la forma

$$\ell(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (f,g)\ dt$$

donde $g \in \mathcal{L}^\infty$ y $g(x,t) = 0$ si t está fuera de un compacto.

Operadores lineales en los espacios $\bar{\mathcal{L}}$.

Vamos a estudiar ciertos operadores lineales en los espacios $\bar{\mathcal{L}}$. Es evidente que $\partial/\partial t$ y $\partial/\partial x_i$ transforman continuamente $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ y $\bar{\mathcal{C}}_k$ en $\bar{\mathcal{L}}^p_{k-1}$ y $\bar{\mathcal{C}}_{k-1}$, respectivamente.

Diremos que un operador A es de clase k si tiene las siguientes propiedades:

i) A es una operación continua de $\bar{\mathcal{L}}_r^1$ a $\bar{\mathcal{L}}_r^1$, $0 \leq r \leq k$.

ii) Si $\varphi(t)$ es una función infinitamente derivable de t y φ es la operación multiplicación por $\varphi(t)$, entonces $\varphi A = A \varphi$.

iii) Si $k \geqslant 1$ los operadores $\frac{d}{dt} A - A \frac{d}{dt}$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} A - A \frac{\partial}{\partial x_i}$ coinciden en $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ con operadores de clase $k-1$.

Teorema 9 :

Sea A un operador de clase k , y $a > 0$, entonces existe una constante M tal que $||Af|| \leq M \,||f||$ en casi todo punto del intervalo $|t| \leq a$.

Demostración:

Sea $\eta(t)$ una función medible acotada de t y $\varphi_m(t)$ una sucesión acotada de funciones infinitamente derivables tal que $\varphi_m \to \eta$ para casi todo t . Entonces si $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$, $\varphi_m f$ converge a ηf en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Por lo tanto

$$\eta A f = \lim_{m \to \infty} \varphi_m A f = \lim_{m \to \infty} A \varphi_m f = A \eta f .$$

Sean ahora f_m una sucesión de funciones de $\bar{\mathcal{L}}^1$, E_m una sucesión de conjuntos de medida positiva contenidos en el intervalo $|t| \leq a$, y λ_m una sucesión de números positivos tales que $\lambda_m \to \infty$. Sean η_m las funciones características de los conjuntos E_m . Entonces si $||Af_m|| \geqslant \lambda_m \,||f_m||$ para casi todo t de E_m , resulta que las funciones

$$g_m = \eta_m f_m \left(\sqrt{\lambda_m} \int ||\eta_m f_m|| \, dt \right)^{-1}$$

tienen la siguiente propiedad

$$\int ||g_m|| \, dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \quad , \quad \int ||A \, g_m|| \, dt \geqslant \sqrt{\lambda_m}$$

lo cual es incomplatible con la continuidad de A en $\bar{\mathcal{L}}^1$.

Teorema 10 :

Sea A un operador de clase k . Entonces A transforma continuamente los espacios $\bar{\mathcal{L}}_r^p$ y $\bar{\mathcal{E}}_s$ en sí mismos, a condición que $r \leq k$, $s \leq k-1$.

Demostración :

Si $k = 0$, el enunciado es consecuencia inmediata del teorema 8 y de la definición de los espacios $\bar{\mathcal{L}}^p$. En el caso general, demostraremos la parte del enunciado referente a los espacios $\bar{\mathcal{L}}_k^p$, por inducción. Suponiendo válido el enunciado para $k-1$, bastará demostrar que $\frac{d}{dt} A$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} A$ transforman continuamente $\bar{\mathcal{L}}_k^p$ en $\bar{\mathcal{L}}_{k-1}^p$, y esto resulta inmediatamente de

$$\frac{d}{dt}A = A\frac{d}{dt} + \left(\frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt}\right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_i}A = A\frac{\partial}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

que vale en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$, y de la hipótesis inductiva.

Como $\bar{\mathcal{E}}_s$, con su norma, es un subespacio cerrado de $\bar{\mathcal{L}}^\infty_s$ que, como vimos, A transforma continuamente en sí mismo, sólo falta demostrar que $A\bar{\mathcal{E}}_s \subset \bar{\mathcal{E}}_s$.

En efecto, como $\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{L}}^1_{s+1}$, resulta que $A\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{L}}^1_{s+1} \subset \bar{\mathcal{E}}_s$ si $s+1 \leq k$. Como por otra parte $\mathcal{D}$ es denso en $\bar{\mathcal{E}}_s$, de $A\mathcal{D} \subset \bar{\mathcal{E}}_s$ pasando al límite , resulta $A\bar{\mathcal{E}}_s \subset \bar{\mathcal{E}}_s$.

<u>Teorema 11</u> :

El producto AB de dos operadores A y B de clase k es de clase k. Si además A tiene un inverso A^{-1} de clase 0 que transforma $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ en sí mismo, A^{-1} es de clase k .

<u>Demostración</u> :

Es evidente que AB satisface las condiciones i) , ii) de la definición de los operadores de clase k . Bastará entonces mostrar que AB también satisface la condición iii) , y esto resulta para operadores de clase k de

$$\frac{d}{dt}AB - AB\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt}\right)B + A\left(\frac{d}{dt}B - B\frac{d}{dt}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}AB - AB\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i}\right)B + A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}B - B\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

si se supone válido el teorema para operadores de clase $k-1$, puesto que los operadores de los miembros derechos son de clase $k-1$

En lo que se refiere a A^{-1} , razonaremos también por inducción. Sea A un operador de clase $k \geq 1$ y

$$A_o = \frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt} \quad , \quad A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i}$$

multiplicando a la derecha y a lá izquierda por A^{-1} resulta que en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$

$$\frac{d}{dt}A^{-1} - A^{-1}\frac{d}{dt} = -A^{-1}A_oA^{-1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i}A^{-1} - A^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i} = -A^{-1}A_iA^{-1} ,$$

y se supone válido el teorema para $k-1$, A^{-1} es de clase $k-1$, y estos operadores son entonces de clase $k-1$. Por lo tanto A^{-1} satisface la condición

iii) . Como de $\varphi A = A\varphi$, multiplicando a la derecha e izquierda por A^{-1} , resulta $A^{-1}\varphi = \varphi A^{-1}$, también se cumple la condición ii) . Por último, para demostrar que A^{-1} transforma $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ continuamente en sí mismo basta demostrar que los operadores $\frac{d}{dt} A^{-1}$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} A^{-1}$ transforman $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ continuamente en $\bar{\mathcal{L}}^1_{k-1}$.

Esto se deduce, como en el teorema 10 , de

$$\frac{d}{dt} A^{-1} = A^{-1}\frac{d}{dt} - A^{-1}A_o A^{-1} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A^{-1} = A^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i} - A^{-1}A_i A^{-1} \ ,$$

que vale en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$, y de la hipótesis inductiva.

<u>Teorema 12</u> :

Sea A un operador de clase k , entonces A tiene un adjunto A^* , es decir, existe un operador tal que si f y g son funciones de $\bar{\mathcal{L}}^1$

$$(A\ f,g) = (f,A^*g)$$

para casi todo t . El adjunto A^* de A es único y es también un operador de clase k .

<u>Demostración</u> :

Consideremos el conjunto de funciones de cuadrado sumable tales que $f(x,t) = 0$ si $\|t\| > a$. Como éstas pertenecen a $\bar{\mathcal{L}}^1$, las funciones Af están definidas. Como además $\varphi Af = A\varphi f$ para toda $\varphi(t)$ infinitamente derivable, Af debe anularse fuera del intervalo $|t| \leqslant a$. Por otro lado, de acuerdo con el teorema 9 , existe una constante M tal que $||Af|| \leqslant M\ ||f||$ y por lo tanto

$$\int ||Af||^2\ dt \leqslant M^2 \int ||f||^2\ dt \ ,$$

es decir A es un operador acotado sobre el espacio de estas funciones. De esto resulta que existe un operador A^* tal que

$$\int (Af,g)\ dt = \int (f,A^*g)\ dt$$

para todo par de funciones de cuadrado sumable que se anulan fuera de $|t| \leqslant a$. Ahora bien, si φ es una función infinitamente derivable de t que se anula fuera de $|t| \leqslant a$ y f es una función cualquiera de cuadrado sumable resulta que

$$\int \varphi(Af,g)\ dt = \int (\varphi Af,g)\ dt = \int (A\varphi f,g)\ dt = \int (\varphi f,A^*g)\ dt = \int \varphi(f,A^*g)\ dt$$

es decir

$$\int \varphi(Af,g)\ dt = \int \varphi(f,A^*g)\ dt \ .$$

Como esto vale para cualquier función φ que se anula fuera de $|t| \leqslant a$, de esto se deduce que $(Af,g) = (f,A^*g)$ para casi todo t del intervalo $|t| \leqslant a$. Como por otro lado g y A^*g se anulan fuera de $|t| \leqslant a$ resulta que $(Af,g) = (f,A^*g)$ para casi todo t , cualquiera que sea la función f de cuadrado sumable.

Veamos ahora que la función A^*g está unívocamente definida, independientemente de la elección del número a . En efecto si eligiendo dos valores de a distintos se obtuvieran dos funciones distintas h_1 y h_2 resultaría que

$$(Af,g) = (f,h_1) = (f,h_2)$$

para casi todo t y toda f de cuadrado sumable. Integrando tendríamos:

$$\int (f,h_1)\, dt = \int (f,h_2)\, dt \quad .$$

para toda f de cuadrado sumable, y esto es imposible si $h_1 \neq h_2$. De este modo tenemos el operador A^* definido para toda función de cuadrado sumable que se anula fuera de un intervalo de valores de t .

Sean de nuevo f y g dos funciones de cuadrado sumable que se anulan fuera de $|t| \leqslant a$, y $\varphi(t)$ una función infinitamente derivable de t . Entonces

$$\int (f,A^*\varphi g)\, dt = \int (\varphi Af,g)\, dt = \int (A\varphi f,g)\, dt = \int (f,\varphi A^*g)\, dt$$

y de esto se deduce que $\varphi A^* = A^*\varphi$. Además, sea M un número positivo tal que $||Af|| \leqslant M\, ||f||$ para casi todo t , $|t| \leqslant a$ y toda f . Entonces

$$\int_{-a}^{a} \varphi^2 ||A^*f||^2\, dt = \int_{-a}^{a} (A^*\varphi f, A^*\varphi f)\, dt = \int_{-a}^{a} (AA^*\varphi f, \varphi f)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M \int_{-a}^{a} \varphi^2 ||A^*f||\; ||f||\, dt \quad .$$

a condición que f se anule fuera de un intervalo finito de valores de t . Como φ es arbitraria,de la última desigualdad se deduce que

$$||Af||^2 \leqslant M\, ||A^*f||\; ||f||$$

y por lo tanto $||Af|| \leqslant M\, ||f||$ para casi todo t , $|t| \leqslant a$. Pero esto significa que A^* es continuo con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$, y por lo tanto se puede extender a un operdor continuo en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Esta extensión será el adjunto de A , que designaremos también con A^* . Que este operador es único se deduce del hecho que A^* está unívocamente determinado sobre las funciones de cuadrado sumable que se anulan fuera de un intervalo $|t| < a$. Como además $\varphi A^* = A^*\varphi$ en el espacio de estas funciones, se deduce por continuidad que esto vale también para el adjunto A^* de A. Más generalmente, si $\eta(t)$ es una función medible acotada de t, por un paso al límite resulta que $\eta A^* = A^*\eta$. Sean ahora f y g dos funciones cualesquiera de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $\eta_m(t) = 0$ si $||f||+||g|| \geq m$ o si $|t| > m$ y $\eta_m(t) = 1$ en caso contrario. Entonces $\eta_m f$ y $\eta_m g$ son funciones de cuadrado sumable que se anulan fuera de un intervalo de valores de t, y por lo tanto

$$\eta_m(Af,g) = (A\eta_m f, \eta_m g) = (\eta_m f, A^*\eta_m g) = \eta_m(f,A^*g) \quad ,$$

para casi todo t. Como m es arbitrario resulta que $(Af,g) = (f,A^*g)$ para casi todo t. Como A^* es continuo en $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $\varphi A^* = A^*\varphi$ queda también demostrado que A^* es de clase 0.

Para demostrar que si A es de clase k, A^* también lo es, razonaremos por inducción. Supongamos que el enunciado es válido para $k = r-1$. Sean f una función de $\mathcal{D}$ y g una función de $\bar{\mathcal{L}}^1_r$. Entonces

$$\int\left(f,(\frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt})^* g\right) dt = \int\left((\frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt})f,g\right) dt =$$

$$= \int(f,A^*\frac{d}{dt}g)\,dt - \int(\frac{d}{dt}f\, ,\, A^*g)\,dt$$

y esto significa que A^*g tiene una derivada con respecto a t, y por lo tanto, $\frac{d}{dt}A^*$ está definido en $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ y

$$\frac{d}{dt}A^* = A^*\frac{d}{dt} - (\frac{d}{dt}A - A\frac{d}{dt})^* \quad .$$

Análogamente, se deduce que $\frac{\partial}{\partial x_i}A^*$ está definido en $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ y

$$\frac{\partial}{\partial x_i}A^* = A^*\frac{\partial}{\partial x_i} - (\frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i})^* \quad .$$

Ahora bien, los miembros derechos de estas ecuaciones son operadores que por la hipótesis inductiva transforman continuamente $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ en $\bar{\mathcal{L}}^1_{r-1}$. Por lo tanto $\frac{d}{dt}A^*$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}A^*$ tienen la misma propiedad y esto implica que A^* transforma $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ continuamente en sí mismo. Por lo tanto A^* satisface la condición i). Por último, que A^* satisface la condición iii) resulta de las ecuaciones precedentes y de la hipótesis inductiva.

Diremos que un operador N es autoadjunto si $N = N^*$. Diremos que N es positivo si para cada a, $a > 0$ existe un ε, $\varepsilon > 0$ tal que $(Nf,f) \geq \varepsilon(f,f)$ para casi todo t de $|t| < a$ y toda f de $\bar{\mathcal{L}}^1$.

T e o r e m a 13 :

Sea N un operador autoadjunto positivo de clase O. Entonces N tiene un inverso que es autoadjunto positivo y de clase O.

D e m o s t r a c i ó n :

Sea a un número positivo dado y ε, $\varepsilon > 0$, tal que $(Nf,f) \geq \varepsilon(f,f)$ para casi todo t de $|t| \leq a$. Entonces $||Nf|| \, ||f|| \geq (Nf,f) \geq \varepsilon ||f||^2$ y por lo tanto $||Nf|| \geq \varepsilon ||f||$ para casi todo t de $|t| \leq a$. Como a es arbitrario de esto se deduce que si $Nf = 0$ entonces $f = 0$; además, si f_m es una sucesión de funciones de $\bar{\mathcal{L}}^1$ tal que Nf_m converge en $\bar{\mathcal{L}}^1$, la sucesión f_m misma converge. Por lo tanto N transforma $\bar{\mathcal{L}}^1$ biunivoca y bicontinuamente en un subespacio cerrado de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Vamos a demostrar que este subespacio coincide con $\bar{\mathcal{L}}^1$. Sea a un número positivo cualquiera y consideremos el subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\bar{\mathcal{L}}^1$ formado por las funciones que se anulan si $|t| \geq a$. Sea g una función de $\mathcal{L}^\infty$ ortogonal a $N\mathcal{M}$, espacio este que, como sabemos es cerrado. Entonces

$$\int (Nf,g)\, dt = \int (f,N^*g)\, dt = \int (f,Ng)\, dt = 0$$

para toda f que se anula si $|t| \geq a$. Pero esto implica que $Ng = 0$ para casi todo t de $|t| < a$ y de esto, a su vez, se deduce que $g = 0$ para casi todo t, $|t| < a$. Por consiguiente g es ortogonal a $\mathcal{M}$, y de esto resulta $\mathcal{M} \subset N\mathcal{M}$. Por consiguiente dada una función g cualquiera de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y un entero positivo m existe una función f_m de $\bar{\mathcal{L}}^1$ que se anula si $|t| \geq m$ y tal que $Nf_m = g$ en $|t| \leq m$. Como Nf_m también se anula fuera de $|t| \leq m$ la sucesión Nf_m converge a g en $\bar{\mathcal{L}}^1$ cuando $m \to \infty$. Por lo tanto f_m también converge, y si f es su límite, obtenemos $Nf = g$.

Por lo tanto N tiene un inverso continuo N^{-1}. Veamos ahora que N^{-1} es de clase O. La condición i) se satisface puesto que N^{-1} transforma $\bar{\mathcal{L}}^1$ en sí mismo; y de $N\varphi = \varphi N$, multiplicando a la derecha e izquierda por N^{-1} resulta $N^{-1}\varphi = \varphi N^{-1}$. Por lo tanto N^{-1} es de clase O.

Sean ahora f y g dos funciones cualesquiera de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y sea $f_1 = Nf$, $g_1 = Ng$. Entonces de $(Nf,g) = (f,Ng)$ se deduce que $(f_1,N^{-1}g_1) = (N^{-1}f_1,g_1)$ para casi todo t. Por lo tanto N^{-1} es autoadjunto. Sea por otro lado a un número positivo y ε un número tal que

$$(Nf,f) \geq \varepsilon (f,f) \qquad ; \qquad ||Nf|| \leq \frac{1}{\varepsilon} ||f||$$

para casi todo t de $|t| \leq a$. Entonces

$$(f_1,N^{-1}f_1) \geq \varepsilon(N^{-1}f_1,N^{-1}f_1) = \varepsilon ||N^{-1}f_1||^2 \geq \varepsilon^3 ||f_1||^2 = \varepsilon^3(f_1,f_1)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Consideremos ahora el espacio $\overline{B}_\beta$ de las funciones de (x,t) que coninciden con funciones de B_β en cada conjunto $\{(x,t)\ ,\ |t| < a\}$, $a < \infty$.

<u>Teorema 14</u> :

Sea $a(x,t)$ una función de $\overline{B}_k$. Entonces la operación $Af = af$ es de clase k .

<u>Demostración</u> :

Para $k = 0$ el enunciado es evidente. Supongamos que el enunciado es válido para $k = r - 1$. Sea f una función de $\overline{\mathcal{L}}^1_1$ g una función de $\mathcal{D}$ y f_m una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ que converge a f en $\overline{\mathcal{L}}^1_1$. Entonces si $a \in \overline{B}_r$

$$\int (af_m\ ,\ \frac{\partial g}{\partial x_i})\ dt = -\int (a\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\ ,\ g)\ dt - \int (\frac{\partial a}{\partial x_i} f_m\ ,\ g)\ dt$$

y pasando al límite resulta

$$\int (af\ ,\ \frac{\partial g}{\partial x_i})\ dt = -\int (a\frac{\partial f}{\partial x_i}\ ,\ g)\ dt - \int (\frac{\partial a}{\partial x_i} f\ ,\ g)\ dt$$

es decir

$$\frac{\partial af}{\partial x_i} = a\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\frac{\partial a}{\partial x_i}$$

es decir

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A - A\frac{\partial}{\partial x_i} = A_i$$

donde $A_i f = \frac{\partial a}{\partial x_i} f$. Del mismo modo se demuestra que $\frac{\partial}{\partial t} A - A\frac{\partial}{\partial t} = A_o$

donde $A_o f = \frac{\partial a}{\partial t} f$. En virtud de la hipótesis inductiva, y como $\frac{\partial a}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial a}{\partial t}$ pertenecen a $\overline{B}_{r-1}$, resulta que A satisface la condición iii) . Por otro lado

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A = A_i + A\frac{\partial}{\partial x_i}\ ;\ \frac{\partial}{\partial t} A = A_o + A\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

y como los miembros derechos de estas ecuaciones transforman $\overline{\mathcal{L}}^1_{r-1}$ continuamente en si mismo, lo mismo puede decirse de $\frac{\partial}{\partial x_i} A$ y $\frac{\partial}{\partial t} A$. Pero esto implica que A transforma $\overline{\mathcal{L}}^1_r$ continuamente en si mismo. Por lo tanto A satisface la condición i) .

<u>Teorema 15</u> :

Sea A un operador acotado sobre $L^2(E_n)$ que conmuta con las traslaciones. Entonces dada $f \in \mathcal{D}$ existe una única función g infinitamente derivable con respecto a todas las variables tal que $g = Af$ para cada t ; y el operador A

así definido en $\mathcal{D}$ se extiende unívocamente por continuidad a un operador A sobre $\bar{\mathcal{L}}^1$ que es de clase k para todo $k \geq 0$.

<u>Demostración</u> :

Como A conmuta con las traslaciones A es continuo con respecto a la norma de $L^2_r(E_n)$ $0 \leq r < \infty$ y transforma estos espacios en sí mismos, por lo tanto si $f \in \mathcal{D}$ para cada valor de t $f(x,t)$ pertenece a todos los $L^2_r(E_n)$, $0 \leq r < \infty$ y lo mismo vale para $Af(x,t)$. Pero toda función que pertenece a todos los $L^2_r(E_n)$ coincide en casi todo punto con una función infinitamente derivable. Por lo tanto existe una función $g(x,t)$ que es infinitamente derivable con respecto a x tal que $g(x,t) = Af(x,t)$. Además

$$\frac{g(x,t+h) - g(x,t)}{h} = A\left[\frac{f(x,t+h) - f(x)}{h}\right] .$$

Pero como el cociente incremental de f converge a $\frac{\partial f}{\partial t}$ con respecto a todas las normas de $L^2_r(E_n)$ resulta que el cociente incremental de g converge uniformemente. Por lo tanto $\frac{\partial g}{\partial t}$ existe, es continua con respecto a x y

$$\frac{\partial g}{\partial t} = A\frac{\partial f}{\partial t} .$$

Además como A conmuta con las traslaciones

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g = A\frac{\partial f}{\partial x_i} .$$

Repitiendo este razonamiento se ve que g tiene infinitas derivadas continuas con respecto a todas las variables. Además resulta que $\frac{\partial}{\partial t}A - A\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$
Por otro lado, si M es la norma de A como operador en $L^2(E_n)$, entonces $\|Af\| \leq M\|f\|$ para toda f de $\mathcal{D}$ y todo t . Es decir A es continuo con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Como $\mathcal{D}$ es denso en $\bar{\mathcal{L}}^1$, A tiene una única extensión continua a $\bar{\mathcal{L}}^1$. Pero como $\frac{\partial}{\partial t}A - A\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i}A - A\frac{\partial}{\partial x_i}$ en $\mathcal{D}$, resulta que A es también continuo con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1_1$.
Sea entonces f una función de $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ y f_m una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ que converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$. Como f_m también converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1$ resulta que Af_m converge a Af en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Pero Af_m también converge en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ y por lo tanto Af es también el límite de Af_m en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ y Af pertenece a $\bar{\mathcal{L}}^1_1$. Además de la identidad

$$\frac{\partial}{\partial t}A f_m = A\frac{\partial f_m}{\partial t} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}A f_m = A\frac{\partial}{\partial x_i}f_m$$

pasando al límite resulta que

$$\frac{\partial}{\partial t}A = A\frac{\partial}{\partial t} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}A = A\frac{\partial}{\partial x_i}$$

en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ Por lo tanto el operador A satisface la condición iii) . Como la condición ii) se satisface en $\mathcal{D}$, por la continuidad de A en $\bar{\mathcal{L}}^1$, se concluye que la condición también se satisface en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Por último demostraremos que A transforma $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ continuamente en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ para todo $k \geq 0$. Supongamos haber demostrado esto para todo k menor o igual que $r - 1$. Entonces como

$$\frac{\partial}{\partial t} A = A \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A = A \frac{\partial}{\partial x_i}$$

se ve que los operadores $\frac{\partial}{\partial t} A$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} A$ transforman $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ continuamente en $\bar{\mathcal{L}}^1_{r-1}$, y esto significa que A transforma $\bar{\mathcal{L}}^1_r$ continuamente en $\bar{\mathcal{L}}^1_r$.

<u>Teorema 16</u> :

Sea K_t un operador integral singular de tipo β que opera sobre funciones de E_n y que depende de un parámetro t. Diremos que K_t es de clase β si $\sigma(K_t)$ es una función medible de todas sus variables, incluyendo t, y $||K_t||_\beta$ es una función de t que está acotada en cada intervalo finito de valores de t. Si $\beta \geq 1$ suponemos además que existe un operador H_t de clase $\beta-1$, tal que la función de h y t $||\frac{1}{h}(K_{t+h}-K_t) - H_t||$ está acotada en cada conjunto acotado de valores de h y t y tiende a cero con h para casi todo t. Esto define por inducción los operadores de clase β. Entonces si K_t es de clase β, K_t se puede extender unívocamente a un operador de clase A de clase k, $k \leq \beta$, de tal modo que para toda f de $\bar{\mathcal{L}}^1$,

$$A f = K_t f(x,t)$$

para casi todo t.

<u>Demostración</u> :

Usando el desarrollo en serie del teorema 3 del capítulo 8 y el teorema anterior se ve que si $f \in \mathcal{D}$ existe una función $g(x,t)$ medible tal que $g(x,t) = K_t f(x,t)$. Además

$$||g|| = ||K_t f|| \leq C ||f|| \, ||K_t||_\beta$$

donde C depende sólo de β. Por lo tanto este operador sobre $\mathcal{D}$ es continuo con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Sea f ahora una función cualquiera de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y f_m una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ tal que $f_m \to f$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Entonces definiremos $A f$ como el límite de $K_t f_m$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Es decir $A f$ será tal que

$$\int_{-a}^{+a} ||Af - K_t f_m|| \, dt \longrightarrow 0$$

para cada $a > 0$. Ahora bien, eligiendo una sucesión parcial adecuada f_{m_i} de

f_m se puede conseguir que $\|Af - K_t f_{m_i}\| \to 0$ y $\|f - f_{m_i}\| \to 0$ para casi todo t . Para cada uno de estos valores de t se tiene entonces que

$$A f = \lim K_t f_{m_i} = K_t f(x,t)$$

donde el límite está tomado en $L^2(E_n)$. Como A es continuo en $\bar{\mathcal{L}}^1$ y además, evidentemente $\varphi A = A\varphi$ queda demostrado el teorema en el caso en que $\beta < 1$.

Pasemos al caso general. Vamos a demostrar que si el teorema vale para $\beta = s-1 \geq 0$ vale para $\beta = s$. Sea pues K_t un operador de tipo $\beta = s$. De acuerdo al teorema 5 del capítulo anterior existen operadores integrales singulares $K_t^{(i)}$ de tipo $\beta - 1$ tales que para toda f de $\mathcal{D}$ vale

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} K_t - K_t \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f = K_t^{(i)} f \quad .$$

Además para casi todo t

$$\frac{1}{h} \left[K_{t+h} f(x,t+h) - K_t f(x,t) \right] = \left[\frac{1}{h}(K_{t+h} - K_t) - H_t \right] f(x,t+h) + H_t f(x,t+h) + $$
$$+ K_t \left[\frac{f(x,t+h) - f(x,t)}{h} \right]$$

y cuando h tiende a cero el miembro derecho converge a $H_t f(x,t) + K_t \frac{\partial f}{\partial t}$ en $L^2(E_n)$. Como además la norma en $L^2(E_n)$ del cociente incremental anterior está uniformemente acotada en t , el cociente incremental converge a $H_t f + K_t \frac{\partial f}{\partial t}$ en $\mathcal{L}^2$. Por lo tanto $K_t f$ tiene una derivada respecto de t y

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} K_t - K_t \frac{\partial}{\partial t} \right) f = H_t f$$

para toda f de $\mathcal{D}$. Como

$$\frac{\partial}{\partial t} K_t = H_t + K_t \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} K_t = K_t^{(i)} + K_t \frac{\partial}{\partial x_i}$$

se ve que K_t es continuo con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ en $\mathcal{D}$. Ahora bien, si extendemos K_t a $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ por continuidad con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ o de $\bar{\mathcal{L}}^1$ obtendremos el mismo resultado. Por lo tanto la extensión A de K_t transforma $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ continuamente en sí mismo, y si llamamos B y B_i a las extensiones de H_t y $K_t^{(i)}$ respectivamente resultará que

$$\frac{\partial}{\partial t} A = B + A \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_i} A = B_i + B \frac{\partial}{\partial x_i}$$

De acuerdo a la hipótesis inductiva los miembros derechos de estas ecuaciones transforman $\bar{\mathcal{L}}_s^1$ continuamente en $\bar{\mathcal{L}}_{s-1}^1$, por lo tanto lo mismo vale para $\frac{\partial}{\partial t} A$ y $\frac{\partial}{\partial x_i} A$ y esto implica que A transforma $\bar{\mathcal{L}}_s^1$ continuamente en sí mismo.

Las ecuaciones anteriores también demuestran que A satisface la condición iii), con lo cual el teorema queda demostrado.

Ahora vamos a estudiar las propiedades de $S = 1 + \Lambda$ como operador en los espacios $\bar{\mathcal{L}}$. Según vimos Λ opera en funciones de E_n y está definido por

$$\Lambda = -i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} R_j$$

donde los R_j son los operadores de Riesz. También sabemos que $\frac{\partial}{\partial x_j} = i\Lambda R_j$. Por el teorema 15 podemos extender el espacio de definición de R_j a $\bar{\mathcal{L}}^1$ y definir de este modo los operadores Λ y S para toda función de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Naturalmente, los valores de Λ y S en $\bar{\mathcal{L}}^1$ son, en general, distribuciones. Si consideramos a S como operador en $L_1^2(E_n)$, tomando transformadas de Fourier y aplicando el teorema de Plancherel es fácil ver que S tiene un inverso que llamaremos S^{-1}. También extenderemos S^{-1} a todo el espacio $\bar{\mathcal{L}}^1$. El enunciado siguiente resume las propiedades de S y S^{-1} como operadores en $\bar{\mathcal{L}}^1$ que necesitaremos más adelante.

<u>Teorema 17</u> :

a) El operador S^{-1} es de clase k, para todo $k \geqslant 0$; y S transforma continuamente $\bar{\mathcal{L}}_k^p$ en $\bar{\mathcal{L}}_{k-1}^p$, $p = 1,2,\infty$, y $\bar{\mathcal{E}}_k$ en $\bar{\mathcal{E}}_{k-1}$

b) S^{-1} es el inverso de S en el siguiente sentido: si $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$ entonces $f = S(S^{-1}f)$; si además $Sf \in \bar{\mathcal{L}}^1$ entonces $f = S^{-1}(Sf)$

c) S^{-1} es autoadjunto en el sentido del teorema 12, y S es autoadjunto del modo siguiente: si f, g, Sf y Sg pertenecen a $\bar{\mathcal{L}}^1$ entonces $(Sf,g) = (f,Sg)$ para casi todo t.

d) S y S^{-1} conmutan con $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ y con la multiplicación por funciones de t.

e) Para toda $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$ vale $i(S-1)R_j f = \frac{\partial}{\partial x_j} f$.

f) Si f, $\frac{\partial f}{\partial t}$ y Sf pertenecen a $\bar{\mathcal{L}}_k^p$ entonces $f \in \bar{\mathcal{L}}_{k+1}^p$. Si f, $\frac{\partial f}{\partial t}$ y Sf pertenecen a $\bar{\mathcal{E}}_k$ entonces $f \in \bar{\mathcal{E}}_{k+1}$.

<u>Demostración</u> :

Los enunciados a) y d) son evidentes. Por otro lado es fácil ver que si S^{-1} es autoadjunto en el sentido del teorema 12, y que $S^{-1}S\,g = SS^{-1}g = g$ para toda función g de $\mathcal{D}$. También es inmediato comprobar que si g es una fun -

ción de $\mathcal{D}$ y f una función de $\bar{\mathcal{L}}^1$, el valor de la distribución Sf en la función de prueba g, que designaremos con $(Sf)(g)$, es una funciónal lineal de f continua con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Por lo tanto $(SS^{-1} f)(g)$ es una funcional lineal continua de f con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Como $SS^{-1} f = f$ cuando f pertenece a $\mathcal{D}$ resulta que si $f \in \mathcal{D}$

$$(SS^{-1} f)(g) = \int (f,\bar{g})\, dt \quad ;$$

pero por la continuidad de ambos miembros con respecto a f, esto vale para toda f de $\bar{\mathcal{L}}^1$. Por lo tanto $S(S^{-1}f) = f$.

Supongamos ahora que $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$ y $Sf = 0$. Entonces es inmediato verificar que si $g \in \mathcal{D}$

$$\int (f,Sg)\, dt = 0 \quad .$$

Ahora como esta integral es una funcional lineal de g que es continua con respecto a la convergencia en $\mathcal{L}_1^\infty$ de funciones que se anulan fuera de un conjunto $\{(x,t),\ |t| < a\}$ fijo, esto vale también para toda $g \in \mathcal{E}_1$ que se anula si $|t|$ es suficientemente grande. Luego si h es una función cualquiera de $\mathcal{D}$, $S^{-1} h \in \mathcal{E}_1$ y por lo tanto, reemplazando g por $S^{-1} h$ en la identidad anterior resulta que

$$\int (f,h)\, dt = 0$$

para toda h de $\mathcal{D}$. Por lo tanto $f = 0$.

Supongamos ahora que f y Sf pertenecen a $\bar{\mathcal{L}}^1$. Llamemos h a la función $S^{-1}(Sf)$. Entonces, según vimos $S\,h = S\{S^{-1}(Sf)\} = Sf$ y por lo tanto $S(h-f) = 0$ es decir $h = S^{-1}(Sf) = f$. El enunciado b) queda demostrado.

Para demostrar c) llamemos $\bar{f}$ y $\bar{g}$ a las funciones Sf y Sg respectivamente. Entonces según acabamos de demostrar $f = S^{-1}\bar{f}$, $g = S^{-1}\bar{g}$, y como S^{-1} es autoadjunto en el sentido del teorema 12, resulta que

$$(Sf\ ,\ g) = (\bar{f}\ ,\ S^{-1}\bar{g}) = (S^{-1}\bar{f}\ ,\ \bar{g}) = (f,Sg)$$

para casi todo t.

Para demostrar e) consideremos el valor de la distribución $i(S-1)\,R_j\, f$, $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$ sobre la función de prueba g de $\mathcal{D}$, valor éste que designaremos con $(i(S-1)\,R_j\, f)(g)$, y que es, como es fácil comprobar, una funcional lineal de f que es continua con respecto a la topología de $\bar{\mathcal{L}}^1$. También es fácil ver que

$$i(S-1)\,R_j\, f = i\Lambda f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

para toda f de $\mathcal{D}$ Por lo tanto para toda f de $\mathcal{D}$ se tiene

$$(i\,(S-1)\,R_j\,f)\,(g) \;=\; \int \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\,,\,\bar{g}\right) dt \;=\; -\int \left(f\,,\,\frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j}\right) dt \quad ;$$

pero entonces, por la continuidad con respecto a f , resulta que

$$(i\,(S-1)\,R_j\,f)\,(g) \;=\; -\int \left(f\,,\,\frac{\partial \bar{g}}{\partial x_j}\right) dt$$

para toda $f \in \bar{\mathcal{L}}^1$, y esto implica que $i(S-1)\,R_j\,f = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$.

Por último si f , $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y Sf pertenecen a $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ resulta que, según acabamos de demostrar, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \in \bar{\mathcal{L}}^p_k$ y entonces $f \in \bar{\mathcal{L}}^p_{k+1}$. Análogamente se demuestra la parte de f) que se refiere a los espacios $\bar{\mathcal{C}}_k$.

<u>Teorema 18</u> :

Sea A un operador de clase k , $k \geqslant 1$. Entonces existe un operador $\bar{A}$ de clase k tal que $SA - \bar{A}S$ y $AS - S\bar{A}$ coinciden con operadores de clase $k-1$ en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$. Sea A un operador integral singular de clase β , $\beta \geqslant 1$. Entonces $AS - SA$ coincide con un operador de clase 0 en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$.

<u>Demostración</u> :

Como sabemos existen operadores B_j de clase $k-1$ que coinciden con $\dfrac{\partial}{\partial x_j}A - A\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$. Entonces de la identidad $\dfrac{\partial}{\partial x_j} = i\,R_j\,(S-1)$ que vale en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$, mediante un cálculo sencillo resulta que si $\bar{A} = \sum_{j=1}^{n} R_j\,A\,R_j$ entonces

$$SA - \bar{A}S = A - \bar{A} - i\sum_1^n R_j\,B_j$$

$$AS - S\bar{A} = A - \bar{A} - i\sum_1^n R_j\,B_j \quad .$$

Sea A ahora un operador integral singular de clase β , $\beta > 1$. Entonces $AS - SA = A\Lambda - \Lambda A$ y entonces en virtud del teorema 4 del capítulo 8 resulta que si $f \in \bar{\mathcal{L}}^1_1$ entonces para cada $a > 0$, existe una constante M tal que

$$\|(A\Lambda - \Lambda A)\,f\| \leqslant M\,\|f\|$$

para casi todo t , $|t| < a$.

<u>ESPACIOS $\bar{\mathcal{L}}$ DE FUNCIONES DE VALORES VECTORIALES</u>.

Los resultados sobre los espacios $\bar{\mathcal{L}}$ que hemos demostrado se pueden extender a espacios de funciones de valores vectoriales. Sea u , $u = (f_1, f_2, \ldots, f_\ell)$

una función cuyos valores son vectores de ℓ componentes, las cuales a su vez son funciones de $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ o $\bar{\mathcal{C}}_k$. Diremos entonces que u pertenece a $\bar{\mathcal{L}}^p_k$ o $\bar{\mathcal{C}}_k$ respectivamente. Dadas dos funciones de este tipo $u = (f_1, f_2, \ldots, f_\ell)$ y $v = (g_1, g_2, \ldots, g_\ell)$ definiremos (u,v) por la fórmula

$$(u,v) = \sum_{j=1}^{\ell} (f_j, g_j)$$

y $||u||$ por

$$||u|| = (u,u)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{j=1}^{\ell} (f_j, f_j) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Con esto y la noción de matriz de operadores integrales singulares que se introdujo en el capítulo 8 , las definiciones y teoremas de este capítulo se extienden a estos espacios más generales.

ECUACIONES HIPERBOLICAS DE EVOLUCION.

Sea $\mathcal{H}$ un operador en el espacio $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ de funciones de valores vectoriales dado por

$$\mathcal{H} u = \frac{du}{dt} + i\, HSu + Bu \quad .$$

donde H y B son operadores de clase 1 y 0 respectivamente. Diremos que $\mathcal{H}$ es un operador hiperbólico de evolución si dado un número positivo a cualquiera existe un operador N dado de clase 1 con las siguientes propiedades

i) N es autoadjunto positivo y su inverso N^{-1} (ver teorema 13) es de clase 1

ii) existe un número M tal que para cada u de $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ y casi todo t de $|t| \leq a$

$$||(NHS - SH^*N)\, u|| \leq M\, ||u||$$

El adjunto formal $\mathcal{H}^*$ de $\mathcal{H}$ se define así

$$-\mathcal{H}^* u = \frac{du}{dt} + i\, SH^* u - B^* u$$

Teorema 19 :
Si $\mathcal{H}$ es hiperbólico, $-\mathcal{H}^*$ lo es también .

Demostración :
Como H^* es también de clase 1 , de acuerdo con el teorema 18 podemos reemplazar SH^* por $\bar{H}S + \bar{B}$ donde $\bar{H}$ y $\bar{B}$ son de clase 1 y 0 respectivamente y así resulta que

$$-\mathcal{H}^* u = \frac{du}{dt} + i\, \bar{H}Su + B_1 u \quad .$$

donde $B_1 = \bar{B} - B^*$. Como $SH^* = \bar{H}S + \bar{B}$ también $HS = \bar{SH^*} + \bar{B}^*$. Por lo tanto, dado un número positivo a , si N es el operador que satisface las condiciones i) , ii) de la definición de operador hiperbólico

$$-NHS + SH^*N = \bar{H}SN - N\bar{SH}^* + \bar{B}N - N\bar{B}^* ,$$

y de esto se deduce

$$(N^{-1}\bar{H}S - SH^*N^{-1}) = (\bar{B}^*N^{-1} - N^{-1}\bar{B}) - N^{-1}(NHS - SH^*)N^{-1} .$$

Como N^{-1} es un operador de clase 1 , resulta que

$$||(N^{-1}\bar{H}S - SH^*N^{-1})u|| \leqslant M_1 ||u||$$

para toda función u de $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ y casi todo t de $|t| \leqslant a$. El teorema queda entonces demostrado

Sea v una función de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y consideremos la ecuación $\mathcal{H}u = v$ con la condición inicial $u(x,0) = w(x)$ donde $w(x)$ es una función dada de $L^2(E_n)$. Diremos que $u \in \bar{\mathcal{C}}$ es una solución fuerte de la ecuación si existe una sucesión $u_m \in \bar{\mathcal{L}}_1^1$ tal que $u_m(x,0) \to w(x)$ en $L^2(E_n)$, $u_m \to u$ en $\bar{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{H}u_m \to v$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Diremos que $u \in \bar{\mathcal{C}}$ es una solución débil de la ecuación si $u(x,0) = w(x)$ y para toda función φ de $\mathcal{D}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, u)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi, v)\,dt$$

Es fácil comprobar que toda solución fuerte es también una solución debil.

Ahora vamos a estudiar la existencia, unicidad y propiedades de las soluciones de las ecuaciones hiperbólicas de evolución..

Empezaremos demostrando la desigualdad fundamental de la teoría, que es semejante a las desigualdades obtenidas por Petrowsky , Leray y Gårding .

<u>Teorema 20</u> :

Sea $\mathcal{H}$ un operador hiperbólico de evolución, $t_1 < t_2$ dos números reales dados y N un operador autoadjunto positivo de clase 1 tal que

$$||(NHS - SH^*N)u|| \leqslant M ||u|| , \quad M < \infty$$

para toda función u de $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ y casi todo t , $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Sea

$$K = \frac{1}{2}(NHS - SH^*N) + \tfrac{1}{2}(NB + B^*N) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}N - N\frac{d}{dt}\right) ;$$

y λ y $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} > 0$, dos números reales tales que

$$(Ku,u) \geqslant \lambda(Nu,u) , \quad (Nu,u) \geqslant \mathcal{E}(u,u) , \quad ||u|| \geqslant \mathcal{E}||Nu||$$

para todo u y casi todo t del intervalo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Entonces si $u \in \bar{\mathcal{L}}_1^1$ y $v = \mathcal{H}u$

$$\varepsilon^2 \,||u(x,t)||\, e^{\lambda t} \leqslant ||u(x,t_1)||\, e^{\lambda t_1} + 2\int_{t_1}^{t_2} ||v||\, e^{\lambda t}\, dt \, ..$$

para $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

<u>D e m o s t r a c i ó n</u> :

De acuerdo con lo postulado se tiene que

$$e^{2\lambda t}\left[(Nu,v) + (v,Nu) \right] = e^{2\lambda t}\left[(Nu,\mathcal{H}u) + (\mathcal{H}u,Nu) \right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(u,Nu)\, e^{2\lambda t} \right] + 2\left[(Ku,u) - \lambda(u,Nu) \right] e^{2\lambda t} \geqslant \frac{d}{dt}\left[(u,Nu)\, e^{2\lambda t} \right] ,$$

e integrando entre t_1 y t resulta , $t_1 < t \leqslant t_2$

$$(u,Nu)\, e^{2\lambda t} \leqslant (u,Nu)\, e^{2\lambda t_1} + 2\int_{t_1}^{t} |(Nu,v)|\, e^{2\lambda t}\, dt$$

donde (u,Nu) en los miembros izquierdo y derecho está calculado en los puntos t y t_1 respectivamente. Como $\varepsilon\,(u,u) \leqslant (u,Nu)$ y $||Nu|| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,||u||$, llamando M al máximo de $||u||\, e^{\lambda t}$ en $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, de lo anterior se deduce que

$$\varepsilon M^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, ||u(x,t_1)||^2\, e^{2\lambda t_1} + \frac{2M}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2} ||v||\, e^{\lambda t}\, dt$$

multiplicando por ε , dividiendo por M y teniendo en cuenta que

$$||u(x,t_1)||\, e^{\lambda t_1} \leqslant M$$

se obtiene la desigualdad buscada.

<u>C o r o l a r i o</u>:

Sea u una función en $\bar{\mathcal{L}}_1^1$ tal que $\mathcal{H}u = 0$ en $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ y $u(x,t_1) = 0$ ó $u(x,t_2) = 0$ entonces $u(x,t) = 0$ para todo t de $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$.

Que $u(x,t)$ se anula si $u(x,t_1) = 0$, es consecuencia inmediata de la desigualdad del teorema precedente. Si $u(x,t_2) = 0$, se obtiene la misma conclusión por reducción al caso anterior mediante la sustitución de variable $t = -\tau$.

<u>T e o r e m a 21</u> :

Sea $\mathcal{H}$ un operador hiperbólico de evolución, v una función de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $w(x)$ una función de $L^2(E_n)$. Entonces la ecuación

$$\mathcal{H}u = v$$

con la condición $u(x,0) = w(x)$ tiene una solución fuerte u en $\bar{\mathcal{C}}$.

D e m o s t r a c i ó n :

Estudiaremos primero el caso en que $w(x) = 0$. Veremos que basta demostrar que para cada número positivo a existe una sucesión u_n de $\mathcal{D}$ tal que $u_n(x,t) = 0$ para $t \leqslant 0$, u_n converge en $\mathcal{E}$ y

$$\int_0^a \|v - \mathcal{H}u_n\| \, dt \rightarrow 0$$

El caso de intervalos $(-a,0)$, $a > 0$ se reduce al anterior por el cambio de variable $t = -\tau$. Fijemos entonces, el número a , y consideremos el operador $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H} + (\lambda-1)B$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Entonces el teorema 20 nos asegura que existe un número positivo ε tal que para toda función u de $\mathcal{D}$ tal que $u(x,0) = 0$ y todo λ , $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$\varepsilon \|u(x,t)\| \leqslant \int_0^a \|\mathcal{H}_\lambda u\| \, dt \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant a \tag{5}$$

Vamos a demostrar que las funciones $\mathcal{H}_0 u$, $u \in \mathcal{D}$ y $u(x,0) = 0$, restringidas al conjunto $\{(x,t) \, , \, 0 \leqslant t \leqslant a\}$, son densas en el espacio de las funciones de $\mathcal{L}^1$ restringidas al mismo conjunto. Si esto no fuese así, existiría una funcional lineal continua sobre este espacio, no idénticamente nula y ortogonal a todas aquellas funciones. Toda funcional lineal de este tipo es expresable así

$$\ell(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u,f) \, dt$$

donde $f \in \mathcal{L}^\infty$ y $f(x,t) = 0$ si t está fuera del intervalo $0 \leqslant t \leqslant a$. Por lo tanto se tendría

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}_0 u,f) \, dt = 0 \quad ,$$

para toda u de $\mathcal{D}$ tal que $u(x,t) = 0$ si $t \leqslant 0$. Por un paso al límite se concluye que esto valdría también para toda u de $\mathcal{L}_1^1$ que se anula en $t \leqslant 0$. Consideremos ahora la función $g = S^{-1} f \in \mathcal{L}^\infty$. Entonces $f = Sg$ y

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{du}{dt}, Sg\right) + i(HSu,Sg) \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(S \frac{du}{dt}, g\right) + i(HSu,Sg) \right] dt \quad ,$$

para toda u de $\mathcal{L}_2^1$ que se anula en $t \leqslant 0$. Sea φ ahora una función cualquiera de $\mathcal{D}$ que se anula en $t \leqslant 0$. Entonces $S^{-1}\varphi \in \mathcal{L}_2^1$ y reemplazando en la ecuación precedente se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{d\varphi}{dt}, g\right) - (\varphi, iH^* Sg) \right] dt = 0$$

Como $H^* Sg = H^* f \in \mathcal{L}^\infty$ esto significa que g tiene una derivada con respecto a t en $t > 0$. Como por otra parte también $Sg \in \mathcal{L}^\infty$ resulta que $g \in \mathcal{L}_1^\infty$ en en $t > 0$. Integrando por partes, y dado que $\varphi(x,0) = 0$ y $g = S^{-1}f = 0$ si $t > a$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{dg}{dt} + iH^*Sg , \varphi\right) dt = 0$$

y esto implica que

$$\frac{dg}{dt} + iH^*Sg = 0$$

si $t > 0$. Como ademas $g = S^{-1}f = 0$ si $t > a$ del corolario del teorema anterior se deduce que $g = 0$ en $t > 0$ y por lo tanto $f = 0$ en $t > 0$, contrariamente a lo supuesto.

Ahora vamos a demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que, si las funciones $\mathcal{H}_\lambda u$, $u \in \mathcal{D}$, $u(x,t) = 0$ en $t \leqslant 0$, restringidas al conjunto $\{(x,t) , 0 \leqslant t \leqslant a\}$ son densas en el espacio de las funciones de $\mathcal{L}^1$ restringidas al mismo conjunto, esto también vale para todo $\mathcal{H}_\mu$, $\lambda \leqslant \mu \leqslant \lambda + \delta$. Como, según acabamos de ver, $\mathcal{H}_0$ tiene esta propiedad resultará que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ también la tiene, que es lo que queremos demostrar. Supongamos que $\mathcal{H}_\mu$ no tiene la propiedad deseada. Entonces existe una función $f \in \mathcal{L}^\infty$ que se anula para valores de t fuera de $0 \leqslant t \leqslant a$, tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}_\mu u,f)\, dt = 0$$

para toda u de $\mathcal{D}$ que se anula para $t \leqslant 0$. Sea M_1 tal que $||Bu|| \leqslant M_1 \, ||u||$ para toda u en $0 \leqslant t \leqslant a$. Entonces

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}_\mu u,f)\, dt = \int_0^a (\mathcal{H}_\lambda u,f)\, dt + (\mu - \lambda) \int_0^a (Bu,f)\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int_0^a (\mathcal{H}_\lambda u,f)\, dt \right| - (\mu - \lambda)\, M_2 M_1 \int_0^a ||u||\, dt$$

donde $M_2 = \sup_t ||f||$, y según (5)

$$\int_0^a ||u||\, dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_0^a ||\mathcal{H}_\lambda u||\, dt \quad .$$

Llamemos g a la función $\mathcal{H}_\lambda u$, y reemplacemos en las desigualdades anteriores. Entonces resulta que

$$0 \geqslant \left| \int_0^a (g,f)\, dt \right| - \frac{\mu - \lambda}{\varepsilon} M_1 M_2 \int_0^a ||g||\, dt$$

y si hacemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2M_1}$, $0 \leqslant \mu - \lambda \leqslant \delta$ se deduce que

$$\left| \int_0^a (g,f)\, dt \right| \leqslant \tfrac{1}{2} M_2 \int_0^a ||g||\, dt \quad .$$

Pero por hipótesis las funciones $g = \mathcal{H}_\lambda u$ pueden aproximar funciones de $\mathcal{L}^1$ tanto como se quiera en $0 \leqslant t \leqslant a$, y esto implica que para algunas funciones g,

$$\left| \int_0^a (g,f)\, dt \right| > \tfrac{1}{2} (\sup_t ||f||) \int_0^a ||g||\, dt$$

lo que contradice la desigualdad anterior. Queda pues demostrado el teorema en el caso $w = 0$. Supongamos ahora que $w(x) \neq 0$ y sea δ un número positivo arbitrario. Entonces existe una función u_0 de $\mathcal{D}$ tal que $||u_0(x,0)-w|| < \delta$. Por otra parte según acabamos de ver dado un número positivo a existen dos funciones u_1 y u_2 de $\mathcal{D}$ tales que $u_1(x,t) = 0$ si $t \leqslant 0$ y $u_2(x,t)=0$ si $t \geqslant 0$ y que

$$\int_{-a}^{0} ||\mathcal{H}u_2 - (v-\mathcal{H}u_0)||\, dt + \int_0^a ||\mathcal{H}u_1 - (v-\mathcal{H}u_0||\, dt < \delta .$$

De esto se deduce que la función $u = u_0 + u_1 + u_2$ satisface las condiciones

$$||u(x,0) - w|| < \delta \qquad , \qquad \int_{-a}^{a} ||\mathcal{H}u - v||\, dt < \delta$$

Con esto el teorema queda completamente demostrado.

Teorema 22 :

Sea $\mathcal{H}$ un operador hiperbólico de evolución y $u \in \bar{\mathcal{C}}$ una solución débil de la ecuación $\mathcal{H}u = v$, $v \in \bar{\mathcal{L}}^1$. Entonces u satisface la desigualdad del teorema 20 . Por consiguiente u está unívocamente determinada por $u(x,0)$ y es, también, una solución fuerte de la ecuación.

Demostración :

Sea $\bar{u} \in \mathcal{C}$ una solución fuerte de la ecuación $\mathcal{H}\bar{u} = v$ con la condición $\bar{u}(x,0) = u(x,0)$. Entonces $w = u - \bar{u}$ es una solución débil de $\mathcal{H}w = 0$ que satisfece la condición $w(x,0) = 0$. Vamos a demostrar que $w = 0$. Sea $\eta(t)$ una función infinitamente derivable de t , no decreciente y tal que $\eta(t) = 0$ si $t \leqslant 0$, $\eta(t) = 1$ si $t \geqslant 1$. Sea $\eta_m(t) = \eta(mt)$. Entonces $\eta_m(t) \longrightarrow 1$ cuando $m \longrightarrow \infty$ si $t > 0$, y $\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta_m'|\, dt = 1$. Sea φ ahora una función cualquiera de $\mathcal{D}$. Entonces

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}^* \eta_m \varphi, w)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, \eta_m w)\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi\, \eta_m', w)\, dt \quad ,$$

y por lo tanto, como $\eta_m' = 0$ fuera de $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{m}$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, \eta_m w)\, dt \right| \leqslant \int_0^{1/m} |\eta_m'|\, |(\varphi, w)|\, dt \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1/m} ||\varphi||\ ||w|| \quad .$$

Como $w \in \mathcal{C}$ y $||w(x,0)|| = 0$, resulta que

$$\int_0^{\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, w)\, dt = \lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, \eta_m w)\, dt = 0$$

para toda φ de $\mathcal{D}$. Sea f ahora una función cualquiera de $\bar{\mathcal{L}}_1^1$. Dado un a positivo sabemos que existe una sucesión φ_m de funciones de $\mathcal{D}$ tal que $\varphi_m(x,t) = 0$ si $t \geqslant a$ y que

$$\int_0^a \|f - \mathcal{H}^*\varphi_m\|\, dt \longrightarrow 0$$

cuando $m \longrightarrow \infty$. Reemplazando en

$$\int_0^{\infty} (\mathcal{H}^*\varphi, w)\, dt = 0$$

y pasando al límite resulta que

$$\int_0^a (f, w)\, dt = 0$$

para toda f de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y todo $a > 0$. De esto se deduce que $w = 0$ si $t \geqslant 0$. En forma semejante se demuestra que $w = 0$ si $t \leqslant 0$. Por lo tanto $u - \bar{u} = w = 0$, es decir, la solución débil u conincide con la solución fuerte $\bar{u}$, es decir, existe una sucesión de funciones u_m de $\mathcal{D}$, tal que $u_m \longrightarrow u$ en $\bar{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{H}u_m \longrightarrow v$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$. Como la desigualdad del teorema 20 vale para cada una de las u_m , pasando al límite se ve que también vale para u El teorema pues, queda demostrado.

<u>Teorema 23</u> :

Sea $\mathcal{H}$ un operador hiperbólico de evolución tal que H y B son de clase $k \geqslant 1$, y $HS - SH$ coincide con un operador de clase 0 en $\bar{\mathcal{L}}_1^1$. Entonces si $v \in \bar{\mathcal{L}}_k^1$ y $w \in L_k^2(E_n)$, la solución fuerte u de la ecuación $\mathcal{H}u = v$ con la condición $u(x,0) = w$, pertenece a $\bar{\mathcal{C}}_k$ y es una solución estricta. Además si $\mathcal{H}u_m = v_m \in \bar{\mathcal{L}}_k^1$, $u_m(x,0) = w_m \in L_k^2(E_n)$, $w_m \rightarrow 0$ en $L_k^2(E_n)$ y $v_m \rightarrow 0$ en $\bar{\mathcal{L}}_k^1$, entonces $u_m \rightarrow 0$ en $\bar{\mathcal{C}}_k$.

<u>Demostración</u> :

De acuerdo al teorema 18 existen operadores $\bar{H}$, $\bar{B}$ de clase k y T_1, T_2 de clase $k-1$ tales que

$$SH = \bar{H}S + T_1 \qquad , \qquad SB = \bar{B}S + T_2$$

Consideremos el operador

$$\bar{\mathcal{H}}u = \frac{du}{dt} + \bar{H}Su + (T_1 + \bar{B} + T_2 S^{-1})\, u \quad .$$

Vamos a demostrar que este operador es hiperbólico. En efecto, sea N el operador autoadjunto constante, tal que $\|(NHS - SH^*N)\, u\| \leq M\|u\|$ en $|t| \leq a$. Entonces como

$$N\bar{H}S - S\bar{H}^*N = (NHS - SH^*N) + N\,(SH - HS - T_1) - (H^*S - SH^* - T_1^*)\,N$$

y los dos últimos términos del miembro derecho son de clase 0 , resulta que $\|(N\bar{H}S - S\bar{H}^*N)\, u\| \leq M_1\, \|u\|$ en $|t| \leq a$. Consideremos ahora una solución fuerte de

$$\bar{\mathscr{H}}\,\bar{u} = S\,v$$

con la condición $\bar{u}(x,0) = S\,w$. Si hacemos una hipótesis inductiva y suponemos demostrado el teorema para $k-1$, podremos afirmar que $\bar{u} \in \bar{\mathscr{C}}_{k-1}$. Supongamos que las funciones $\bar{u}_m$ de $\mathscr{D}$ son tales que $\bar{u}_m \to \bar{u}$ en $\bar{\mathscr{C}}$, $\bar{\mathscr{H}}\,\bar{u}_m \to Sv$ en $\bar{\mathscr{L}}^1$ y $\bar{u}_m(x,0) \to S\,w$ en $L^2(E_n)$, y sea

$$u_m = S^{-1}\,\bar{u}_m \qquad , \qquad \bar{u}_m = S\,u_m \quad .$$

Entonces $u_m(x,0) \to w$ en $L^2(E_n)$. Además

$$\mathscr{H}u_m = S^{-1}\frac{d\bar{u}_m}{dt} + H\,\bar{u}_m + BS^{-1}\bar{u}_m = S^{-1}\left[\frac{d\bar{u}_m}{dt} + SH\bar{u}_m + SBS^{-1}\bar{u}_m\right] = S^{-1}\bar{\mathscr{H}}\,\bar{u}_m$$

y por lo tanto $\mathscr{H}u_m$ converge a v en $\bar{\mathscr{L}}^1$. De todo esto se deduce que u_m converge a u en $\bar{\mathscr{C}}$, y como $S^{-1}\bar{u}_m = u_m$ pasando al límite resulta que $S^{-1}\,\bar{u} = u$ y $Su = \bar{u}$. Además como

$$\frac{du_m}{dt} = \mathscr{H}u_m - H\bar{u}_m - Bu_m \quad , \tag{6}$$

también $\frac{du_m}{dt}$ converge a un límite, que llamaremos g , en $\bar{\mathscr{L}}^1$. Si φ es una función cualquiera de $\mathscr{D}$ vale entonces que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{du_m}{dt}, \varphi\right) dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u_m, \frac{d\varphi}{dt}\right) dt$$

y pasando al límite resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(g, \varphi)\; dt = -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(u, \frac{d\varphi}{dt}\right) dt \quad .$$

es decir $\frac{du}{dt} \in \bar{\mathscr{L}}^1$. Pasando al límite en (6) se deduce que

$$\frac{du}{dt} = v - H\bar{u} - Bu \quad . \tag{7}$$

Ahora bien, como $u = S^{-1}\,\bar{u} \in \bar{\mathscr{C}}_{k-1}$ y $v \in \bar{\mathscr{L}}^1_k \subset \bar{\mathscr{C}}_{k-1}$ también $\frac{du}{dt} \in \bar{\mathscr{C}}_{k-1}$. Por lo tanto u , $\frac{du}{dt}$, y $Su = \bar{u}$, pertenecen a $\bar{\mathscr{C}}_{k-1}$, y por el teorema 17 resulta que $u \in \bar{\mathscr{C}}_k$. Por otro lado, como $\bar{u} = Su$ la ecuación (7) muestra que u es una solución estricta de $\mathscr{H}u = 0$.

Sean ahora $\mathcal{H} u_m = v_m$; $u_m(x,0) = w_m$ y supongamos que $v_m \to 0$ en $\mathcal{L}^1_k$ y $w_m \to 0$ en $L^2_k(E_n)$. Entonces si $\bar{u}_m = S\, u_m$ y $\bar{u}_m(x,0) = \bar{w}_m = S\, w_m$ resulta que $\mathcal{H}\bar{u}_m = S\, v_m \to 0$ en $\mathcal{L}^1_{k-1}$ y $\bar{w}_m \to 0$ en $L^2_{k-1}(E_n)$. Por lo tanto si hacemos una hipótesis inductiva (el caso $k = 0$ es consecuencia del teorema 22) resulta que $\bar{u}_m = S\, u_m \to 0$ en $\mathcal{E}_{k-1}$ y de la ecuación (7) resulta también $\frac{du_m}{dt} \to 0$ en $\mathcal{E}_{k-1}$. Pero de acuerdo con el enunciado e) del teorema 17 , $S\, u_m \to 0$ en $\mathcal{E}_{k-1}$, implica que $(\frac{\partial}{\partial x_j})\, u_m \to 0$ en $\mathcal{E}_{k-1}$. Por lo tanto $u_m \to 0$ en $\mathcal{E}_k$.

<u>Teorema 24</u> :

Sean H y K dos matrices de operadores integrales singulares de clase β , $\beta > 1$ (ver teorema 16) tales que: i) $\sigma(K)$ es una matriz autoadjunta positiva y para cada $a > 0$ existe un $\mathcal{E} > 0$, tal que $\sigma(K) \geqslant \mathcal{E}\, I$ si $|t| \leqslant a$, donde I es la matriz unidad ; ii) $\sigma(K)\,\sigma(H)$ es una matriz autoadjunta. Entonces el operador $\frac{d}{dt} + i\, HS$ es hiperbólico.

<u>Demostración</u> :

Bastará demostrar que para cada $a > 0$ existe el operador N que satisface las condiciones i) , ii) de la definición de operador hiperbólico. Para abreviar el símbolo de un operador A lo designaremos con $\bar{A}$, y su norma $\|A\|_\beta$ la designaremos también con $\|\bar{A}\|_\beta$. Como sabemos esta norma se expresa directamente en función de $\bar{A}$.

Como se sabe, toda matriz autoadjunta positiva tiene una raíz cuadrada positiva única, y los elementos de ésta son funciones analíticas de las de aquella. Además $\mathcal{E}\, I$ es una cota inferior de la matriz, $\sqrt{\mathcal{E}}\, I$ es una cota inferior de su raiz cuadrada positiva. Por lo tanto existe una matriz $\bar{A}$ autoadjunta positiva tal que $\bar{A}^2 = \bar{K}$ y A es una matriz de operadores de clase β en el sentido del teorema 16 .

Sea ahora a un número positivo dado, y sea $\bar{A}_1 = \varphi\bar{A} + (1-\varphi)\, I$ donde I es la matriz unidad y φ es una función infinitamente derivable de t que vale 1 en $|t| \leqslant a$, se anula fuera de un compacto y $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Evidentemente existe un número positivo $\mathcal{E}$ tal que $\mathcal{E} \leqslant \bar{A}_1 \leqslant \frac{1}{\mathcal{E}}\, I$ para todos los valores de las variables de $\bar{A}_o$. Consideremos ahora la matriz $A_\lambda = \frac{1}{\mathcal{E}}\, I + \lambda\, (\bar{A}_o - \frac{1}{\mathcal{E}}\, I)$ y sea $\bar{Q}_{\lambda h} = \bar{A}_\lambda (\bar{A}_{\lambda-h})^{-1}$. Entonces un cálculo elemental demuestra que $\|Q_{\lambda h} - I\|_\beta$ y $\|\frac{\partial}{\partial t}\, Q_{\lambda h}\|_{\beta-1}$ convergen uniformemente a cero en t y λ , $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, cuando $h > 0$ tiende a cero. De esto se deduce fácilmente (ver la demostración del teorema 16) que las normas del operador $Q_{\lambda h} - I$ en $L^2(E_n)$ $\mathcal{L}^1$ y $\mathcal{L}^1_1$, tienden a cero uniformemente en $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Por lo tanto para $h = \frac{1}{r}$, donde r es un entero suficientemente grande, estas normas serán menores que $\frac{1}{2}$. Fijemos r y consideremos los operadores $Q_j = Q_{\lambda h}$ donde $h = \frac{1}{r}$ y $\lambda = 1 - \frac{j-1}{r}$, $1 \leq j \leq r$. Entonces resulta que: Q_j tiene un inverso en $L^2(E_n)$ en $\mathcal{L}^1$ y en $\mathcal{L}^1_1$, y por lo tanto también en $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $\bar{\mathcal{L}}^1_1$; Q_j^{-1} es por lo tanto de clase 1 (ver teorema 11) ;

$$\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \dots \bar{Q}_r = \mathcal{E} \bar{A}_1 .$$

Ahora definimos

$$N = (Q_1 Q_2 \dots Q_r)(Q_1 Q_2 \dots Q_r)^*$$

y se comprueba inmediatamente que N es de clase 1, es autoadjunto, positivo y tiene un inverso de clase 1.

Ahora vamos a demostrar que N satisface la condición ii) de la definición de operador hiperbólico. En efecto

$$NHS - SH^*N = NH\Lambda - \Lambda H^*N + NH - H^*N \quad ;$$

y entonces, si llamamos P al operador que se obtiene reemplazando la multiplicación por seudomultiplicación y adjuntos por seudoadjuntos en NH resulta que

$$NHS - SH^*N = (P\Lambda - \Lambda P^{\#}) + (NH - P)\Lambda - \Lambda(H^*N - P^{\#}) + (NH - H^*N) .$$

Pero según el teorema 6 del capítulo 8, el segundo y tercer término de la derecha representan para cada t un operador acotado en $L^2(E_n)$ cuya norma es una función acotada de t. Además, es evidente que esto también vale para el último término. Por lo tanto, todos los términos menos tal vez el primero representan operadores en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ que coinciden en este espacio con un operador de clase 0.

Veamos ahora qué ocurre con el término $P\Lambda - \Lambda P^{\#}$. Según la definición de P

$$\bar{P} = (\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \dots \bar{Q}_r)(\bar{Q}_1 \bar{Q}_2 \dots \bar{Q}_r)^* \bar{H} = \mathcal{E}\bar{A}_1 . \mathcal{E}\bar{A}_1^* . \bar{H}$$

pero como $\bar{A}_1$ es una matriz autoadjunta $\bar{A}_1\bar{A}_1^* = \bar{A}_1^2$, y como $\bar{A}_1^{-2} = \bar{K}$ y además $\bar{K}\bar{H}$ se supuso ser una matriz autoadjunta resulta en definitiva que $P = P^{\#}$, y según el teorema 4 del capítulo 8, $P\Lambda - \Lambda P$ es un operador acotado en $L^2(E_n)$ cuya norma es una función acotada de t. Por lo tanto $P\Lambda - \Lambda P^{\#} = P\Lambda - \Lambda P$ coincide en $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ con un operador de clase 0, con lo cual el teorema queda demostrado.

<u>Teorema 25</u> :

Sea H una matriz de operadores integrales singulares de clase $\beta > 1$ en el sentido del teorema 16 tal que los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ del símbolo $\sigma(H)$ de H son reales en cada punto y que el discriminante $\prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$

de la ecuación característica de $\sigma(H)$ admite una cota inferior positiva si $|t|\leq a$ para cada $a > 0$. Entonces el operador $\mathcal{H} = \frac{d}{dt} + HS$ es hiperbólico.

D e m o s t r a c i ó n :

Vamos a reducir este teorema al anterior. Sea X una matriz cuadrada de orden dado de valores propios reales y $d(X)$ el discriminante de su ecuación característica. Si suponemos $d(X) \neq 0$ entonces la adjunta X^* de X tiene también valores propios reales distintos entre sí que son funciones analíticas de sus elementos. Llamemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$ a estos autovalores y sea $A = (a_{ij})$ una matriz tal que para cada j, a_{ij} son las componentes de un vector propio correspondiente al valor propio λ_j. Si suponemos además que este vector es unitario, es decir que $\sum_j |a_{ij}|^2 = 1$, el vector está completamente determinado a menos de un factor de módulo 1. Como los valores propios son distintos, los vectores a_{ij} son linealmente independientes y la matriz A tiene determinante distinto de cero. Dada una matriz X_0 es posible elegir los a_{ij} correspondientes a las matrices X de un entorno suficientemente pequeño de X_0, de modo que resulten ser funciones analíticas de los elementos de X^* y sus conjugados complejos. Sea D ahora la matriz diagonal cuyos elementos diagonales son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell$. Entonces es fácil ver que $X^*A = A\,D$. Como los λ_j son reales $D = D^*$ y tomando adjuntos resulta $A^*X = D\,A^*$ y multiplicando a la izquierda por A resulta $AA^* = A\,D\,A^*$. Ahora bien, la matriz A está unívocamente determinada a menos de una permutación y multiplicación de sus columnas por complejos de módulo 1, lo cual, según se comprueba fácilmente, no altera el producto AA^*. Por lo tanto AA^* está determinada sin ambigüedad por X. Llamemos $Y(X)$ a esta función de X y recapitulemos sus propiedades. En primer lugar $Y = Y^*$; $Y = AA^* > 0$ puesto que el determinante de A es distinto de cero; $YX = A\,D\,A^*$ y esta matriz es autoadjunta puesto que los elementos de la matriz diagonal D son reales; y por último, los elementos de Y son funciones analíticas de los elementos de X y de sus conjugados complejos. De esto se deduce que para todo conjunto de matrices de elementos acotados y tales que $d(X)$ tiene una cota inferior positiva, existirá un ε positivo tal $Y(X) > \varepsilon I$ para toda X del conjunto.

Dado el operador H de la hipótesis del teorema sea K el operador dado por $\sigma(K) = Y\left[\sigma(H)\right]$ y entonces se vé inmediatamente que, dadas las propiedades de la función $Y(X)$ el operador K satisface las condiciones del teorema 24. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es hiperbólico.

ECUACIONES DIFERENCIALES TOTALMENTE HIPERBOLICAS

Ahora vamos a aplicar los resultados obtenidos al estudio de la existencia y unicidad . Las soluciones del problema de Cauchy de sistemas de ecuaciones totalmente hiperbólicas.

Vamos a considerar sistemas de ℓ ecuaciones lineales con ℓ funciones incógnitas definidas en el espacio $E_n \times R$ de puntos (x,t) , $x \in E_n$ $t \in R$. Supondremos que los hiperplanos t = constante son no característicos, es decir, que si m es el orden de las ecuaciones del sistema, es posible despejar las derivadas

$$\frac{\partial^m f_1}{\partial t^m} , \frac{\partial^m f_2}{\partial t^m} , \ldots , \frac{\partial^m f_\ell}{\partial t^m} .$$

Usaremos nuevamente la notación $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \; x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ donde $x = (x_1,x_2,\ldots \ldots,x_n)$ es un punto de E_n y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n)$ es un índice múltiple de enteros no negativos α_j ; y análogamente

$$(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} (\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} .$$

Además usaremos también las abreviaturas $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, $|x| = \left[x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Resulta conveniente considerar las funciones f_1, f_2, ..., f_ℓ como las componentes de una función f de valores vectoriales. Con esta notación y después de despejar las derivadas respecto de t de orden máximo de las funciones f_j , podremos escribir el sistema de ecuaciones así

$$(\frac{\partial}{\partial t})^m f + \sum a_{\alpha,r} (x,t)(\frac{\partial}{\partial x})^\alpha (\frac{\partial}{\partial t})^r f = g$$

donde g es también una función vector de ℓ componentes, los $a_{\alpha,r}$ son matrices de $\ell \times \ell$ elementos, y la suma está extendida a todos los índices (α,r) , $r < m$, $|\alpha| + r \leq m$.

Conviene agrupar todos los términos de orden m , y entre éstos los términos con el mismo orden de derivación respecto de t , y entonces las ecuaciones toman la forma

$$(\frac{\partial}{\partial t})^m f + \sum_{j=1}^{m} A_j (\frac{\partial}{\partial t})^{m-j} f + B f = g \tag{8}$$

donde A_j es una matriz de operadores diferenciales lineales de orden homogéneo j que sólo contienen derivaciones con respecto a las variables x_1 , x_2 , ... , x_n , y cuyos coeficientes son funciones de x y t , y B es un operador diferencial lineal de orden $\leq$ m-1 .

Si en el operador

$$(\frac{\partial}{\partial t})^m + \sum_{j=1}^{m} A_j (\frac{\partial}{\partial t})^{m-j}$$

reemplazamos $\frac{\partial}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por las variables τ y z_i, obtenemos una matriz de polinomios homogéneos de grado m en (z,τ) cuyos coeficientes son funciones de (x,t). Esta matriz puede también interpretarse como un polinomio homogéneo de grado m en (z,τ) cuyos coeficientes son matrices que dependen de las variables (x,t), o más explícitamente

$$\Pi(x, t, z, \tau) = \tau^m I + \sum A_j(x, t, z)\, \tau^{m-j}$$

donde $A_j(x, t, z)$ es un polinomio homogéneo de grado j en z cuyos coeficientes son matrices que dependen de (x,t). La matriz Π es la llamada matriz característica del sistema de ecuaciones, y las $A_j(x,t,z)$ son las matrices características de los operadores A_j. El polinomio característico P del sistema es el determinante de Π. Evidentemente $P(x, t, z, \tau)$ es un polinomio homogéneo de grado $m\ell$ en (z,τ). El sistema se dice hiperbólico si para cada (x,t,z), $|z| \neq 0$ la ecuación algebráica $P(x, t, z, \tau) = 0$ en τ sólo tiene raíces reales.

La llamada matriz asociada al sistema está dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -I \\ B_m & B_{m-1} & \cdots & \cdots & B_1 \end{bmatrix} = \bar{H}(x, t, z)$$

donde I es la matriz unitaria de $\ell \times \ell$ elementos y $B_j = A_j(x, t, z)|z|^{-j}$. Esta matriz tiene entonces ℓm filas y ℓm columnas.

<u>Teorema</u> <u>25</u> :

Si $|z| = 1$ la ecuación característica de la matriz $-\bar{H}$ es $P(x,t,z,\tau)=0$.

<u>Demostración</u> :

Para formar la ecuación característica de $-\bar{H}$ basta sumar τI a los elementos de la diagonal principal de $\bar{H}$ y formar el determinante de la matriz así obtenida. Para calcular este determinante se multiplican las sucesivas columnas por 1, $\tau, \tau^2, \ldots, \tau^{m-1}$ y se suma a cada columna todas las anteriores, con lo cual se anulan todos los elementos que están sobre la diagonal principal. Luego se desarrolla por menores de las últimas ℓ filas y se ve fácilmente que los complementarios de todos los menores son nulos menos el del formado por las últimas ℓ filas y ℓ columnas que es justamente

$$\det\left[\tau^m + B_1\tau^{m-1} + \ldots + B_{m-1}\tau + B_m\right] = P(x, t, z, \tau)$$

y cuyo menor complementario es una potencia de τ por la cual hay que dividir el resultado para compensar la multiplicación de las columnas por potencias de τ que efectuamos al principio.

Pasemos ahora a especificar en detalle las propiedades que postularemos de nuestro sistema de ecuaciones.

<u>Definición</u> :

Diremos que el sistema (8) es totalmente hiperbólico si se cumplen las siguientes condiciones

a) los coeficientes de las derivadas de orden máximo son funciones de $\bar{B}_\beta$, $\beta > 1$,

b) los coeficientes de todos los términos son de clase $\bar{B}_k$, $k \geq 0$ (ver la definición de estas clases en el teorema 14) .

c) existe una matriz K de operadores integrales singulares de ℓm filas y ℓm columnas y de clase $\beta > 1$, tal que: $\sigma(K)$ es autoadjunta positiva; para cada $a > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma(K) > \varepsilon I$ si $|t| < a$; $\sigma(K)\bar{H}$, donde $\bar{H}$ es la matriz asociada al sistema, es autoadjunta.

<u>Teorema 27</u> :

Si los coeficientes de las ecuaciones del sistema satisfacen las condiciones anteriores y si la ecuación en τ $P(x, t, z, \tau) = 0$ tiene raíces reales y su discriminante admite una cota inferior positiva en cada conjunto $\left\{(x, t, z), |z|=1, |t|<a<\infty\right\}$ el sistema es totalmente hiperbólico.

<u>Demostración</u> :

Como $P = 0$ es la ecuación característica de la matriz $-\bar{H} = -\sigma(H)$, se ve inmediatamente que H satisface las hipótesis del teorema 25 . Pero entonces, según se vió al demostrar aquél teorema, existe una matriz de operadores K tal que $\sigma(K)$ y $\sigma(H)$ satisface las hipótesis del teorema 25 . Por lo tanto el sistema es totalmente hiperbólico.

Cabe destacar aquí que la noción de hiperbolicidad total que hemos introducido no excluye necesariamente multiplicidades en las raíces de la ecuación característica, $P(x, t, z, \tau) = 0$, salvo en el caso en que el sistema se reduce a una sola ecuación.

La existencia y unicidad de las soluciones del problema de Cauchy de las ecuaciones totalmente hiperbólicas está dada por el siguiente teorema

Teorema 28 :

Sea

$$L f = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m f + \sum_{j=1}^{m} A_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-j} f + B f = g \qquad (9)$$

un sistema totalmente hiperbólico de ℓ ecuaciones con ℓ incógnitas. Sea g una función de $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $h_j(x) \in L^2_{m-1-j}(E_n)$ $j = 0,1,2,\ldots,m-1$. Entonces existe una sucesión de funciones f_ν de $\mathcal{D}$ que convergen a un límite f de $\mathcal{E}_{m-1}$ y tales que $L f_\nu$ converge a g en $\bar{\mathcal{L}}^1$ y $(\frac{\partial}{\partial t})^j f(x,0) = h_j$, $j=0,1,\ldots$ $\ldots,m-1$. Si los coeficientes de la ecuación pertenecen a $\bar{B}_k$, $k \geqslant 1$, $g \in \bar{\mathcal{L}}^1_k$ y $h_j \in L^2_{m-j+1+k}(E_n)$, entonces la ecuación tiene una solución $f \in \bar{\mathcal{E}}_{m-1+k}$ tal que $(\frac{\partial}{\partial t})^j f(x,0) = h_j$, $j = 0,1,\ldots,m-1$. La solución f es única en ambos casos.

Demostración :

Sea f una función de $\bar{\mathcal{L}}^1_m$ de modo que la función $g = L f$ está definida. Entonces reemplazando $\frac{\partial}{\partial x_j}$ por $i(S-1) R_j$ en la ecuación $L f = g$ resulta

$$L f = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m f + \sum_{j=1}^{m} H_j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-j} (iS)^j f + \sum_{\mu+\nu<m} B_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\mu} (iS)^{\nu} f = g \qquad (10)$$

donde H_j es un operador integral singular cuyo símbolo es $A_j(x,t,z)|z|^{-j}$ y es de clase β , $\beta > 1$, y $B_{\mu\nu}$ es un operador integral singular de clase k si los coeficientes de L pertenecen a $\bar{B}_k$. Sea $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ la función dada por

$$u_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} (i\, S)^{m-j} f \quad . \qquad (11)$$

Entonces $u \in \bar{\mathcal{L}}^1_1$ y reemplazando en (10) se obtiene

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + i \sum_{j=1}^{m} H_j\, S\, u_{m-j+1} + \sum B_{\mu\nu} (i\, S)^{-m+\mu+\nu+1} u_{\nu+1} = g$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_j - i\, S\, u_{j+1} = 0 \quad . \quad j = 1,2,\ldots,m-1 \qquad (11')$$

Por lo tanto, si $f \in \bar{\mathcal{L}}^1_m$ y satisface la ecuación (10) con las condiciones iniciales $(\frac{\partial}{\partial t})^j f = h_j$, la función u pertenece a $\bar{\mathcal{L}}^1_1$ y satisface el sistema (11) y la condición inicial $u(x,0) = w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ $w_j = (i\, S)^{m-j} h_{j-1}$.

Recíprocamente, supongamos que $u \in \bar{\mathcal{E}}_k$, $k \geqslant 1$ satisface el sistema (11) y las condiciones $u(x,0) = w$ $w_j = (i\, S)^{m-j} h_{j-1} \in L^2_k(E_n)$. Entonces $f=(iS)^{-m+1} u_1$ satisface (9) y las condiciones iniciales $(\frac{\partial}{\partial t})^j f = h_j$. Para comprobar ésto basta verificar que de la segunda ecuación del (11) por el teorema 17 se deduce sucesivamente que $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} f = (i\,S)^{-m+j} u_j$ y $v_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} (i\,S)^{m-j} f$. Por lo tanto $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\mu} (i\,S)^{\nu} f \in \mathscr{C}_k$ si $\mu + \nu \leq m - 1$, y esto implica sucesivamente que si $\mu + \nu = m - r$, $r = 1, 2, \ldots, m$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\mu} (i\,S)^{\nu} f \in \bar{\mathscr{C}}_{k+r-1}$. Por lo tanto $f \in \bar{\mathscr{C}}_{m+k-1}$. Reemplazando f en (9) y como $v_j = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} (i\,S)^{m-j} f$, resulta que $L\,f$ es igual al segundo miembro de la primera ecuación del (11) , es decir $Lf = g$ y $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j} f(x,0) = h_j$. Pero volvamos al sistema (11) que podemos escribir abreviadamente así:

$$\mathscr{H} u = \frac{du}{dt} + i\,H\,S\,u + B\,u = v \tag{12}$$

donde H y B son matrices de operadores de ℓm filas y ℓm columnas, H y B son de clase k , H es de clase β , $\beta > 1$, y $v = (0,0,\ldots,g)$. Los operadores de H son operadores integrales singulares y es fácil ver que el símbolo de H es la matriz asociada al sistema (9) . Por lo tanto, de acuerdo con nuestra definición de hiperbolicidad total resulta que H satisface las condiciones del teorema 24 . Por lo tanto la ecuación (12) es una ecuación hiperbólica de evolución. Supongamos que $k \geq 1$, que $g \in \bar{\mathscr{L}}^1_k$ y $h_j \in L^2_{m-j+k+1}(E_n)$. Entonces $v \in \bar{\mathscr{L}}^1_k$ y $w_j = (iS)^{m-j} h_{j-1} \in L^2_k(E_n)$, es decir $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in L^2_k(E_n)$, y existe una solución $u \in \mathscr{C}_k$ de la ecuación $\mathscr{H} u = v$ tal que $u(x,0) = w$, según los teoremas 23 y 18 . Por lo tanto la función $f = (i\,S)^{-m+1} u$, pertenece a $\bar{\mathscr{C}}_{m+k-1}$ y satisface el sistema (9) y las condiciones iniciales $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j} f = h_j$. El teorema queda entonces demostrado en este caso. Sólo falta considerar el caso $g \in \bar{\mathscr{L}}^1$, $h_j \in L^2_{m-j+1}(E_n)$ y $k = 0$. Volviendo a la ecuación (12) sabemos que existe una sucesión $u^{(\nu)} \in \mathscr{D}$ tal que $u^{(\nu)}$ converge en $\bar{\mathscr{C}}$ a un límite u que satisface la condición $u(x,0) = w$, $w_j = (i\,S)^{m-j} h_{j-1}$ y $\mathscr{H} u^{(\nu)}$ converge a v . Consideremos la ecuación

$$\bar{\mathscr{H}}\, \bar{u}^{(\nu)} = \mathscr{H} \bar{u}^{(\nu)} - B\,\bar{u}^{(\nu)} = \bar{v}^{(\nu)}$$

donde $\bar{v}^{(\nu)} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_j^{(\nu)} - (i\,S)\, u_{j+1}^{(\nu)}$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, y $\bar{v}_m^{(\nu)} = 0$, con la condición inicial $\bar{u}^{(\nu)}(x,0) = 0$. Como $u^{(\nu)} \in \mathscr{D}$ resulta que $\bar{v}^{(\nu)}$ pertenece ciertamente a $\bar{\mathscr{L}}^1_1$. Además el operador $\bar{\mathscr{H}}$ satisface las condiciones del teorema 23 , y por lo tanto la solución $\bar{u}^{(\nu)}$ de la ecuación pertenece a $\bar{\mathscr{C}}_1$, y como además $\bar{v}^{(\nu)}$ tiende a cero en $\bar{\mathscr{L}}^1$, resulta que $\bar{u}^{(\nu)}$ converge a cero en $\bar{\mathscr{C}}$ según el teorema 20 , y $\mathscr{H} \bar{u}^{(\nu)} = \bar{\mathscr{H}} \bar{u}^{(\nu)} + B\,\bar{u}^{(\nu)}$ converge a cero en $\bar{\mathscr{L}}^1$. Consideremos ahora la sucesión $\tilde{u}^{(\nu)} = u^{(\nu)} - \bar{u}^{(\nu)}$. Entonces $\tilde{u}^{(\nu)}$ tiende a u en $\bar{\mathscr{C}}$, $\mathscr{H} \tilde{u}^{(\nu)}$ tiende a v en $\bar{\mathscr{L}}^1$, y además

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \tilde{u}_j^{(\nu)} - (i\,S)\, \tilde{u}_{j+1}^{(\nu)} = 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1 .$$

Sea ahora $\bar{f}_\nu = (i\,S)^{-m+1}\tilde{u}^{(\nu)}$. Entonces con el mismo razonamiento que usamos anteriormente resulta $\bar{f}_\nu \in \bar{\mathcal{E}}_m$, $L\bar{f}_\nu \to g$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$, $\bar{f}_\nu \to f = (i\,S)^{-m+1}u$ en $\bar{\mathcal{E}}_{m-1}$ y $(\frac{\partial}{\partial t})^j f(x,0) = h_j$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. Por fin, como $\mathcal{D}$ es denso en $\bar{\mathcal{E}}_m$ podemos aproximar cada $\bar{f}_\nu$ arbitrariamente en $\bar{\mathcal{E}}_m$ con una función f_ν de $\mathcal{D}$ y aproximar simultaneamente $L\bar{f}_\nu$ con $L f_\nu$ en $\bar{\mathcal{L}}^1$, y de este modo podemos reemplazar la sucesión $\bar{f}_\nu$ por la f_ν cuyos términos son funciones de $\mathcal{D}$. La unicidad de las soluciones en este caso es de nuevo consecuencia del teorema 20 . El enunciado está entonces demostrado.

Teorema 29 :

Si los coeficientes de la ecuación (9) pertenecen a $\bar{B}_k$, $Lf_\nu = g_\nu \in \bar{\mathcal{L}}^1_k$, $(\frac{\partial}{\partial t})^j f_\nu(x,0) = h_j^{(\nu)}$, y si $g_\nu \to 0$ en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ y $h_j^{(\nu)} \to 0$ en $L^2_{m-j+k+1}(E_n)$, entonces f_ν tiende a cero en $\bar{\mathcal{E}}_{m+k-1}$.

Demostración :

Como en la demostración del teorema 28 , consideremos la función $u^{(\nu)} = (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_m^{(\nu)})$ donde $u_j^{(\nu)} = (\frac{\partial}{\partial t})^{j-1}(i\,S)^{m-j} f_\nu$ entonces $u^{(\nu)}$ satisface la ecuación (12) con segundo miembro $v^{(\nu)} = (0,0,\ldots g_\nu)$. Ahora bien, se comprueba inmediatamente que $u^{(\nu)}(x,0)$ tiende a cero en $L^2_k(E_n)$, y como $v^{(\nu)}$ tiende a cero en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ resulta que de acuerdo con el teorema 23 , $u^{(\nu)}$ tiende a cero en $\bar{\mathcal{E}}_k$. Como $\frac{\partial}{\partial x_j} = i\,R_j\,(S-1)$ de esto se deduce sucesivamente que $(\frac{\partial}{\partial t})^j (i\,S)^h f_\nu$, $j+h=m-r$, $r = 1,2,\ldots,m$, converge en $\bar{\mathcal{E}}_{k+r-1}$. Por lo tanto f_ν converge en $\bar{\mathcal{E}}_{m+k-1}$.

Teorema 30 :

Si las funciones h_j del enunciado del teorema 28 son nulas y si $g(x,t) = 0$ para $t \geq 0$ (o para $t \leq 0$) , entonces también $f(x,t) = 0$ para $t \geq 0$ (o para $t \leq 0$) .

Demostración :

El caso en que $g(x,t) = 0$ para $t \leq 0$ se reduce al otro por el cambio de variable $t = -\tau$. Supongamos entonces que $g(x,t) = 0$ para $t \geq 0$, y sea u la función que se introdujo en la demostración del teorema 28 . Entonces $u(x,0) = 0$, $\mathcal{H}u = v$ y $v(x,t) = 0$ si $t \geq 0$, y según el teorema 22 , u satisface la desigualdad del teorema 20 con $t_1 = 0$. Por lo tanto $u(x,t) = 0$ si $t \geq 0$ y de ésto se deduce que tambien $f(x,t) = 0$ si $t \geq 0$.

Ahora vamos a estudiar la solución de la ecuación (9) cuando el segundo miembro es una distribución.

Definición :

Llamaremos $(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$ al espacio de distribuciones ℓ que tiene la siguiente propiedad: si f_ν es una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ cuyos soportes están todos contenidos en algún conjunto $\{(x,t)\ ,\ t < a < +\infty\}$, y si $f_\nu \to f$ en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ entonces $\ell(f_\nu)$ converge. El valor $\ell(f)$ de ℓ en $f \in \bar{\mathcal{L}}^1_k$ será, por definición, el límite de $\ell(f_\nu)$

En forma análoga se define $(\bar{\mathscr{C}}_k)^*_+$

T e o r e m a 31 :

$(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$ está contenido en $(\bar{\mathscr{C}}_k)^*_+$. Toda distribución ℓ de $(\bar{\mathscr{C}}_k)^*_+$ tiene su soporte contenido en algún conjunto $\{(x,t)\ ,\ t > a > -\infty\}$.

D e m o s t r a c i ó n :

La inclusión $(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+ \subset (\bar{\mathscr{C}}_k)^*_+$ es consecuencia inmediata del hecho de que si φ_ν converge en $\bar{\mathscr{C}}_k$ también converge en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$, al mismo límite. Sea ahora ℓ una distribución de $(\bar{\mathscr{C}}_k)^*_+$, y supongamos que no existe ningún conjunto $\{(x,t), t > a > -\infty\}$ que contiene el soporte de ℓ. Entonces para cada entero $\nu > 0$ existe una función f_ν de $\mathcal{D}$ tal que $f_\nu(x,t) = 0$ si $t > -\nu$ y $\ell(f_\nu) = c_\nu \neq 0$. Entonces se ve facilmente que la sucesión $(-1)^\nu\ c_\nu^{-1}\ f_\nu$ tiende a cero en $\bar{\mathscr{C}}_k$. Pero $\ell\left[(-1)^\nu\ c_\nu^{-1}\ f_\nu\right] = (-1)^\nu$ no tiende a cero, es decir, tenemos una contradicción.

T e o r e m a 32 :

Si $\ell \in (\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$, $\ell(f)$ está definida para toda f de $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ cuyo soporte está contenido en algún conjunto $\{(x,t)\ ,\ t < a < \infty\}$. Si f_ν es una sucesión de funciones de $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ cuyos soportes están contenidos en uno de tales conjuntos, y f_ν converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$, entonces $\ell(f_\nu)$ converge a $\ell(f)$.

D e m o s t r a c i ó n :

Que $\ell(f)$ está definida para toda función f de $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ que satisface las condiciones del enunciado, resulta de que existe una sucesión g_ν de funciones de $\mathcal{D}$ con soporte en un conjunto $\{(x,t)\ ,\ t < a < \infty\}$ tal que g_ν converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ (ver teorema 5) . Por otro lado si f_ν converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$ y los soportes de f_ν están contenidos en $\{(x,t)\ ,\ t < a < \infty\}$ existe una sucesión g_ν de funciones cuyos soportes están contenidos en un conjunto semejante tales que $\|\ell(f_\nu - g_\nu)\| \leq \frac{1}{\nu}$ y que g_ν converge a f en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$. De esto resulta inmediantamente que $\ell(f_\nu)$ converge a $\ell(f)$.

Dado un operador diferencial L como el de la ecuación (9) , el adjunto L^* de L está dado por la ecuación

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (L\,f\ ,\ g)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f\ ,\ L^* g)\ dt$$

que debe valer para todo par de funciones f y g de $\mathcal{D}$. Si los coeficientes de las derivadas de orden r de L pertenecen a $\bar{B}_r$, el adjunto L^* existe y se puede calcular integrando por partes el primer miembro de la identidad precedente. Si π y P son la matriz y polinomio característicos de L, π^* y $\bar{P}$, es decir el conjugado complejo de P, son los correspondientes de L^*. El transpuesto L_t de L se obtiene de L^* reemplazando sus coeficientes por sus conjugados complejos. Si L satisface las hipótesis del teorema 27, tanto L como L^* y L_t son totalmente hiperbólicos.

Supongamos que los coeficientes de L_t pertenecen a $\bar{B}_k$. Sea f un elemento de $(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$, y g una función de $\mathcal{D}$. Entonces $L_t\, g \in \bar{\mathcal{L}}^1_k$ y la funcional f está definida en $L_t\, g$. Sea $f(L_t\, g)$ su valor. Entonces $f(L_t\, g)$ depende linealmente de g, y si g_ν es una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ que convergen en $\bar{\mathcal{L}}^1_{k+m}$ y cuyos soportes están contenidos en algún conjunto $\{(x,t)\ ,\ t < a < \infty\}$, entonces si m es el orden del operador L_t, $L_t\, g_\nu$ converge en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$, y como los soportes de las funciones $L_t\, g_\nu$ también están contenidos en ese conjunto, según el teorema 32, $f(L_t g_\nu)$ converge. Por lo tanto existe una distribución h de $(\bar{\mathcal{L}}^1_{k+m})^*_+$ tal que $f(L_t g)=h(g)$. Esta h será por definición el valor de $L\, f$.

El enunciado siguiente da la existencia de soluciones de la ecuación $L\, f = h$ si h es una distribución.

<u>Teorema 33</u> :

Sea L un operador diferencial de orden m cuyo transpuesto L_t existe, tiene coeficientes en $\bar{B}_k$, y es totalmente hiperbólico. Entonces si h es una distribución de $(\bar{\mathcal{C}}_{k+m-1})^*_+$ la ecuación $L\, f = h$ tiene una solución única f en $(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$. Todo conjunto $\{(x,t)\ ,\ t \geq a\}$ que contiene el soporte de h, contiene también el soporte de f.

<u>Demostración</u> :

Dada una función g de $\mathcal{D}$ cuyo soporte está contenido en $\{(x,t)\ ,\ t \leq a\}$ sea $k = Ag$ la solución de la ecuación $L_t k = g$ con la condición $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j k(x,a) = 0$, $j = 0,1,2,\ldots,m-1$. Por el teorema 28 k pertenece a $\bar{\mathcal{C}}_{m+k-1}$, y por el teorema 30, $k(x,t) = 0$ si $t \geq a$. De esto resulta que esta función k está unívocamente determinada por g y no depende de la elección de a, siempre que el conjunto $\{(x,t)\ ,\ t < a\}$ contenga el soporte de g. Sea ahora g_ν una sucesión de funciones de $\mathcal{D}$ que converge en $\bar{\mathcal{L}}^1_k$. Entonces según el teorema 29 Ag_ν converge en $\bar{\mathcal{C}}_{k+m-1}$. Por lo tanto si h es una distribución de $(\bar{\mathcal{C}}_{k+m-1})^*_+$ y $h(Ag)$ es su valor en Ag, como $h(Ag)$ es una funcional lineal de g, resulta que $h(Ag)=f(g)$ donde f es una distribución de $(\bar{\mathcal{L}}^1_k)^*_+$. Pero la igualdad $h(Ag) = f(g)$ se puede extender por continuidad a todas las funciones g de $\bar{\mathcal{L}}^1$. En particular reemplazando g por $L_t k$, donde k es una función cualquiera de $\mathcal{D}$, resulta que $h(k) = f(L_t k)$, es decir $h = Lf$. Ahora bien, si el conjunto $\{(x,t)\ ,\ t \geq a\}$ contiene el soporte de h , y g es una función cualquiera de $\mathcal{D}$ cuyo soporte está contenido en $\{(x,t)\ ,\ t < a\}$, este conjunto también contiene el soporte de Ag , y por lo tanto $h(Ag) = f(g) = 0$. De esto se deduce que $\{(x,t)\ ,\ t \geq a\}$ también contiene el soporte de f .

Por último, para demostrar la unicidad de la solución f , basta observar que si f_1 y f_2 son dos soluciones de la ecuación, entonces $L(f_1-f_2) = 0$ y como el segundo miembro tiene soporte vacío, tambien f_1-f_2 tiene soporte vacío, es decir $f_1-f_2 = 0$.

Í N D I C E

N O T A : La página 67 sigue a la 56 , por error de numeración.