ISSN 1853-709X

Fascículo 30

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

D. Alvarez Alonso, J. E. Bouillet

Temas de ecuaciones en derivadas parciales

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 30

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 30

Temas de ecuaciones en derivadas parciales

por

Dolores Alvarez Alonso, Julio E. Bouillet

Primera Parte

1982

El material que constituye el N° 30 de "Cursos y Seminarios de Matemática", separado en dos partes es una versión corregida y ampliada del fascículo N° 27 de esta misma colección.

Los resultados sobre distribuciones y la notación empleados corresponden al fascículo N° 25, también de esta colección.

Marzo de 1982

§1. Operadores en derivadas parciales lineales

Estos operadores tienen la forma

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, D^\alpha$$

donde los coeficientes $a_\alpha(x)$ son funciones definidas en cierto abierto $U \subset R^n$, con valores complejos. Cuando los coeficientes $a_\alpha(x)$ con $|\alpha| = m$ no son todos nulos, se dice que el operador es de orden m. Cuando las funciones $a_\alpha(x)$ se reducen a constantes, se dice que el operador es de coeficientes constantes y se indica $P(D)$.

La teoría general de los operadores $P(x,D)$ y los distintos puntos de vista con que se los enfoca, pueden considerarse como elaboraciones del estudio de las teorías de operadores particulares, provenientes en su mayoría de la física.

Por ejemplo:

El operador de Laplace:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

El operador del calor:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x = \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$$

El operador de las ondas:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x, \qquad x \in R^n$$

El operador de Schrödinger:

$$-i\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x, \qquad x \in R^n$$

Quizás sea el operador de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad z = x+iy \in C$$

el único no originado en aplicaciones de la física. Aparece al definir las funciones holomorfas de una variable compleja. Hasta aquí se han mencionado ejemplos, por así decirlo, escalares; o sea, que no involucran más que un operador. Pero también son importantes los sistemas de operadores:

Exactamente, se tienen $N_1 \cdot N_2$ operadores $P_{jk}(x,D)$, $j = 1,\ldots,N_1$, $k = 1,\ldots,N_2$; de la misma manera que un operador $P(x,D)$ da origen a la ecuación diferencial $P(x,D)f = g$, donde g es el dato y f la incógnita, esa matriz de operadores $(P_{jk}(x,D))$, dará un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\sum_{k+1}^{N_2} P_{jk}(x,D) f_k = g_j \qquad j = 1,\ldots,N_1$$

de N_1 ecuaciones con N_2 incógnitas.

Cuando $N_1 > N_2$, se dice que el sistema está sobredeterminado; si $N_1 = N_2$, se lo llama determinado y si $N_1 < N_2$, se dice que es subdeterminado.

La teoría de los sistemas es más complicada que la de los operadores, especialmente cuando se trata de sistemas sobredeterminados.

Por ejemplo:

Un sistema sobredeterminado es el gradiente:

$$\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \qquad n > 1.$$

Da origen al sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j \qquad j = 1,\ldots,n.$$

Suponiendo que este sistema ha sido planteado en un abierto U de R^n, que $g_j \in C^1(U)$ y que hay una solución $f \in C^2(U)$, si se deriva cada una de las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \, \partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_k}$$

Es decir, los datos no pueden ser arbitrarios, deben cumplir condiciones de compatibilidad.

El operador de Cauchy-Riemann en $n > 1$ variables, es otro ejemplo de sistema sobredeterminado.

Las soluciones de clase C^1 de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} = 0 \end{cases}$$

son las funciones holomorfas de las n variables complejas $z_1, \ldots, z_n$.

La divergencia, $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} = f$, provee un ejemplo de un sistema subdeterminado. Si $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, suele indicarse $\operatorname{div} \bar{u} = f$.

Suponiendo f continua en cierto abierto $U \subset R^n$, una posible solución en U, es:

$$u_1 = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt$$

$$u_j = 0 \qquad \text{si} \qquad j \neq 1$$

En general, un sistema subdeterminado puede reducirse a uno determinado, fijando los valores de N_2-N_1 incógnitas.

Naturalmente, las ecuaciones o sistemas diferenciales ordinarios, son tan sólo el caso particular que corresponde a trabajar con n = 1 variables.

Quizá la primera novedad que aparece al pasar de las ecuaciones diferenciales ordinarias a las ecuaciones en derivadas parciales, es que estas últimas pueden tener infinitas soluciones linealmente independientes.

En efecto, si por ejemplo se considera un operador $P(D)$ de coeficientes constantes, fijado $z \in C^n$, $P(D)e^{xz} = P(z)e^{xz}$.

Luego, e^{xz} será solución de la ecuación $P(D)f = 0$, cada vez que z sea raíz del polinomio $P(z)$, que se obtiene mediante el reemplazo formal $D^\alpha \to z^\alpha$.

Un polinomio en $n > 1$ variables, tiene infinitas raíces distintas; si $z,w \in C^n$ son raíces distintas de $P(z)$, las funciones e^{xz}, e^{xw} son linealmente independientes.

Bajo determinadas condiciones de regularidad, se sabe que una ecuación diferencial lineal ordinaria siempre admite solución y que ésta es única cada vez que se fijan los valores de ciertos parámetros.

Concretamente,

Dado el operador

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) = a_m(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^m + \ldots + a_1(t)\left(\frac{d}{dt}\right) + a_0(t)$$

se supone que los coeficientes $a_j(t)$ son funciones continuas cerca de cierto punto $t_0 \in R$ y que $a_m(t_0) \neq 0$.

Sea $V = \{y(t)$, función definida cerca de t_0, derivable hasta el orden m, que cumple $P(\frac{d}{dt})y = 0\}$.

Se prueba que V es un espacio vectorial complejo de dimensión m.

O sea que si $y_1(t),\ldots,y_m(t)$ es una base para V, cualquier solución $y(t)$ de la ecuación $P(\frac{d}{dt})y = 0$, se expresa como $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j\ y_j(t)$, con ciertos $\alpha_j \in \mathbb{C}$.

El método de variación de los parámetros, provee entonces una solución particular $f(t)$ de la ecuación no homogénea $P(\frac{d}{dt})f = g$.

Por lo tanto, se concluye que dados números complejos $c_0,\ldots,c_{m-1}$, existe una y sólo una función $y(t)$ que verifica $P(\frac{d}{dt})y = g$, cerca de t_0 y cumple además las condiciones iniciales $y^{(j)}(t_0) = c_j$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$.

En el caso de los operadores en derivadas parciales, la situación es bien distinta.

Por ejemplo, dada la ecuación $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$, cualquier función $u(x_2,\ldots,x_n)$ o sea independiente de x_1, la verifica.

Por otra parte, hay ecuaciones lineales que no son resolubles, ni aún localmente.

Para aclarar esta afirmación, es necesario precisar el concepto de resolubilidad local.

Dado un operador $P(x,D)$ cuyos coeficientes $a_\alpha(x)$ se suponen de clase C^∞ en cierto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es localmente resoluble en $x_0 \in U$, si existe $V \subset U$, entorno abierto de x_0 tal que para cada $g \in C_0^\infty(V)$, la ecuación

$$P(x,D)f = g$$

admite al menos una solución $f \in \mathcal{D}'(V)$.

Naturalmente, la condición $a_\alpha(x) \in C^\infty(U)$, se impuso para que tengan siempre sentido los productos $a_\alpha(x)D^\alpha f$.

H. Lewy (ver [1]), dio el primer ejemplo de un operador que no es localmente resoluble en ningún punto. El operador de Lewy es:

$$P(x,D) = \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

Los coeficientes son de clase C^∞ en todo R^3, lo cual muestra que la resolubilidad local de un operador depende de algo más que de la regularidad de sus coeficientes.

Tratando de explicar el comportamiento del operador de Lewy, L. Hörmander obtuvo una condición necesaria de resolubilidad local (Ver [2]). Su enunciado requiere ciertas definiciones.

Sea $P(x,D)$ un operador de orden m con coeficientes indefinidamente derivables en un abierto $U \subset R^n$.

Dada $f \in C_0^\infty(U)$, puede escribirse:

$$P(x,D)f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha \int e^{-2\pi ix\xi}\, \hat{f}(\xi)d\xi =$$

$$= \int e^{-2\pi ix\xi} \cdot \{ \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha \}\, \hat{f}(\xi)d\xi .$$

En esta representación integral del operador, aparece un polinomio en la variable ξ, cuyos coeficientes dependen de $x \in U$. Se lo obtiene haciendo en el operador $P(x,D)$ el reemplazo formal $D^\alpha \to (-2\pi i\xi)^\alpha$.

Este polinomio $P(x; -2\pi i\xi)$ se llama polinomio asociado. Cuando se lo descompone en sus partes homogéneas,

$$P(x;-2\pi i\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha = \sum_{j=0}^{m} P_j(x;-2\pi i\xi)$$

a la de grado máximo, $P_m(x;-2\pi i\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)(-2\pi i\xi)^\alpha$, se la denomina polinomio característico.

Dado ahora un operador $P(x,D)$ de orden m con coeficientes indefinidamente derivables en un abierto $U \subset R^n$, se llama adjunto de $P(x,D)$, $P^*(x,D)$, al operador

$$\sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha[a_\alpha(x) \cdot]$$

Si se considera el conmutador

$$[P(x,D), P^*(x,D)] = P(x,D)\, P^*(x,D) - P^*(x,D)\, P(x,D),$$

se comprueba a partir de las definiciones que es un operador $C(x,D)$, de orden $\leq 2m-1$.

Sea $C_{2m-1}(x;-2\pi i\xi)$ su polinomio característico, mirado como operador de orden 2m-1.

La condición necesaria de resolubilidad local de Hörmander, es la siguiente:

En las hipótesis anteriores, si $P(x,D)$ es un operador localmente resoluble en el abierto U, entonces debe cumplir:

$C_{2m-1}(x,\xi)$ debe anularse en todo punto (x,ξ), $x \in U, \xi \in R^n$, donde se anula $P_m(x,\xi)$.

El operador de Lewy no cumple esta condición en ningún abierto de R^3, de donde resulta que ese operador no es localmente resoluble en ningún punto.

Con posterioridad al operador de Lewy, se han mostrado otros ejemplos de operadores no localmente resolubles. Por ejemplo, el operador de Garabedian-Grushin:

$$G = \frac{\partial}{\partial x} + ix\frac{\partial}{\partial y} \qquad (x,y) \in R^2$$

En todo punto de la forma (0,y), no se cumple la condición de Hormander y en consecuencia, ese operador no es localmente resoluble allí.

Se va aprobar ahora en forma directa, un resultado más restringido sobre el operador de Garabedian-Grushin:

Existe una función $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$ tal que para cierto entorno U del cero, no hay ninguna función $u \in C^1(U)$ cumpliendo

$$Gu = \varphi \quad \text{en} \quad U.$$

<u>Demostración:</u>

Sea $\{D_n\}_{n \geq 1}$, una sucesión de discos disjuntos de centro $(x_n,0)$ y radio r_n, con $x_n \searrow 0$.

Dada una función $\psi \in C_0^\infty(R^2)$ tal que sop $\psi \subset \{x^2+y^2 \leq 1\}$, $\int \psi(x,y)\,dx\,dy = 1$, se define

$$\varphi(x,y) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \psi\left(\frac{x-x_n}{r_n}, \frac{y}{r_n}\right) \qquad \text{si} \quad x \geq 0,$$

y se extiende al semiplano $x < 0$ poniendo $\varphi(-x,y) = \varphi(x,y)$.

Si la sucesión $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n > 0$, se elige convergiendo a cero con adecuada velocidad, puede lograrse que $\varphi \in C^\infty(R^2)$.

Además, en el semiplano $x \geq 0$, φ se anula fuera de UD_n y

$$\int_{D_n} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \alpha_n.$$

Lo que va a probarse ahora, es que no existe ninguna función u de clase C^1 en un entorno del cero, que sea solución de $G\ u = \varphi$.

Se razona por el absurdo, o sea se supone que sí existe un entorno abierto U de cero y una función $u \in C^1(V)$ tal que $Gu = \varphi$.

En primer lugar, puede suponerse que la función u cumple $u(-x,y) = -u(x,y)$, poque si no, se toma $\frac{1}{2}[u(x,y)-u(-x,y)]$.
Por la forma de los discos D_n, desde un n en adelante, deben estar contenidos en U. A partir de aquí se trabajará con esos discos.

En $\{x \geqslant 0\} \cap (U \setminus UD_n)$, la función u satisface

$$G u = 0$$

Si en $\{x \geqslant 0\}$ se hace el cambio de variable

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} = t \\ y = y \end{cases}$$

el operador G se escribe

$$\sqrt{2t}\ (\frac{\partial}{\partial t} + i\ \frac{\partial}{\partial y})$$

Por lo tanto, la función $v(t,y) = u(x(t),y)$ cumple:

Es continua en $\{t \geqslant 0\}$ y de clase C^1 en $\{t > 0\} \cap V$, siendo V la imagen de U por el cambio de variables antes mencionado.

$v(0,y) = 0$

$(\frac{\partial}{\partial t} + i\ \frac{\partial}{\partial y})\, v = 0$ en $\{t > 0\} \cap (V \setminus$ imagen de $UD_n)$

Luego, por el principio de simetría, (ver [18]), se concluye que $v(t,y)$ debe ser cero en $\{t \geqslant 0\} \cap (V$ imagen de $D_n)$.

Entonces $u(x,t)$ tiene que anularse en $\{x \geq 0\} \cap (U \setminus UD_n)$.

Pero sea ahora D_n uno de los discos contenidos en U y sea C_n su frontera.

Puede escribirse:

$$\alpha_n = \int_{D_n} \varphi(x,y)dx\,dy = \int_{D_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + ix\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy =$$

$$= \int_{D_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(ixu)\right)dx\,dy$$

Según el teorema de Green, esta última integral vale

$$\int_{C_n} (-ixu\,dx + u\,dy) = 0$$

Esta contradicción permite concluir el resultado.

#

En lo que sigue, salvo mención en contrario, se supondrá que los coeficientes del operador $P(x,D)$ están definidos y son de clase C^∞ en un abierto $U \subset R^n$.

Definición 1.1

Se dice que el operador $P(x,D)$ es elíptico en $x_0 \in U$, si el polinomio característico, $P_m(x_0;\xi) \neq 0$ en $R^n \setminus 0$.

Por ejemplo, los operadores de Cauchy-Riemann y de Laplace son elípticos, naturalmente en todo el espacio, por tratarse de operadores de coeficientes constantes.

Los puntos de elipticidad de un operador $P(x,D)$, forman un subconjunto abierto de U: Esta afirmación se obtiene por compacidad de la esfera unitaria, a partir de observar que $P_m(x_0; \frac{\xi}{|\xi|}) \neq 0$ para $\xi \in R^n \setminus 0$.

Lema 1.1

Dado un operador $P(x,D)$ de orden m, son equivalentes:

a) $P(x,D)$ es elíptico en cierto abierto $U \subseteq R^n$.

b) Para cada $K \subset U$ compacto, existe $C = C(K) > 0$ tal que

$$|P_m(x;\xi)| \geq C.|\xi|^m \quad \text{para} \quad x \in K,\ \xi \in R^n.$$

Demostración

No hay dificultad en probar b) $\Rightarrow$ a).

Recíprocamente, si $x \in K$, $\xi \in R^n \setminus 0$, es:

$$|\xi|^m \ |P_m(x;\frac{\xi}{|\xi|})| > 0.$$

Por compacidad, debe existir $C > 0$ tal que

$$|P_m(x;\ \frac{\xi}{|\xi|})| \geq C$$

allí. Esto concluye lo afirmado. #

Corolario 1.1

Sea $P(x,D)$ un operador elíptico de orden m.

Dado $K \subset U$ compacto, existen $C = C(K) > 0$, $N = N(K) > 0$ tales que:

$$|P(x;\ -2\pi i\xi)| \geq C.(1+|\xi|)^m \quad \text{para} \quad x \in K,\ |\xi| \geq N$$

Demostración

$$|P(x;\ -2\pi i\xi)| \geq |P_m(x;\ -2\pi i\xi)| - \sum_{j=0}^{m-1} |P_j(x;\ -2\pi i\xi)|$$

Para $x \in K$, $\xi \in R^n \setminus 0$, esto puede acotarse, por continuidad y por el lema anterior, como:

$$\geq C\,|\xi|^m - \sum_{j=0}^{m-1} C_j\,|\xi|^j = (C - \sum_{j=0}^{m-1} C_j\,|\xi|^{j-m}).|\xi|^m.$$

La expresión entre paréntesis $\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{}$ C; luego, existe $N \geq 0$ tal que, por ejemplo, es $> C/2$, si $|\xi| \geq N$.

Finalmente, para $|\xi| \geq N$, $(1+|\xi|)^m$ es equivalente a $|\xi|^m$.

Esto concluye el resultado.

#

Del corolario 1.1 se deduce que si el operador $P(x,D)$ es elíptico en el punto x_0, los ceros reales del polinomio asociado $P(x_0;-2\pi i\xi)$, están en un compacto. Más adelante se verá que la recíproca es en general falsa.

Hay una fuerte vinculación en un operador elíptico, entre el orden, la dimensión del espacio R^n y el ser sus coeficientes reales o complejos.

En efecto:

Teorema 1.1

Sea $P(D)$ un operador de coeficientes constantes, elíptico y de orden m.

Entonces:

a) Si sus coeficientes son reales y la dimensión n de R^n es ≥ 2, m debe ser par.

b) Si $n \geq 3$, m debe ser par, cualesquiera sean los coeficientes del operador.

Para demostrar este resultado, es conveniente dar el siguiente:

Lema 1.2

Dado un polinomio $Q(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$, $a_j \in C$, de orden m, si $w \in C$ es raíz de Q, entonces se tiene:

$$|w| \leqslant \text{máx}\ (1, m.\max_{0\leqslant j\leqslant m-1} \frac{|a_j|}{|a_m|}).$$

Demostración

Es claro que la acotación se verifica si $|w| \leqslant 1$. Se supone entonces que $|w| > 1$.

Como $a_m\ w^m + \ldots + a_1\ w + a_0 = 0$, es:

$$|w|^m \leqslant \frac{|a_{m-1}|}{|a_m|}\ |w|^{m-1} + \ldots + \frac{|a_1|}{|a_m|}|w| + \frac{|a_0|}{|a_m|}$$

O sea:

$$|w| \leqslant \frac{|a_{m-1}|}{|a_m|} + \ldots + \frac{|a_1|}{|a_m|}\frac{1}{|w|^{m-2}} + \frac{|a_0|}{|a_m|}\ \frac{1}{|w|^{m-1}} \leqslant$$

$$\leqslant m.\ \max_{0\leqslant j\leqslant m-1} (\frac{|a_j|}{|a_m|}).$$

Esto concluye el lema.

#

Demostración del teorema 1.1

a) Si fuera m impar, para $\xi \in R^n \setminus 0$, sería $P_m(-\xi) = -P_m(\xi)$.

Sea $f(t) :[0,1] \to R^n$ una función continua cuya imagen es una curva que une los puntos ξ y $-\xi$, sin pasar por el origen. Entonces, la composición $P_m \circ f(t) :[0,1] \to R$, es una función continua que toma valores de signos opuestos en 0 y en 1.

Luego, debe existir $0 < t_0' < 1$, cumpliendo $P_m \circ f(t_0') = 0$.

Por lo tanto, se ha encontrado un punto $f(t_0') \in R^n \setminus 0$, que es raíz de P_m. Esto implica que el operador $P(D)$ no puede ser elíptico.

b) Dados $\xi,\eta \in R^n$, linealmente independientes, se considera el polinomio en la variable $z \in C$, $P_m(z\xi+\eta)$.

Como el coeficiente de z^m es $P_m(\xi)$, resulta un polinomio en z de grado m. Además, al ser ~~P(D) elíptico~~ y los vectores ξ,η linealmente independientes, no puede tener ninguna raíz real.

Fijados ξ,η, sea P_η el número de raíces con parte imaginaria > 0 y sea N_η el número de raíces con parte imaginaria < 0, contadas con su multiplicidad. Es $m = P_\eta + N_\eta$. Por otra parte, como $P_m(-z\xi+\eta) = (-1)^m P_m(z\xi-\eta)$, resulta que $P_{-\eta} = N_\eta$.

Si se admite por un momento que la función $\eta \to P_\eta$, definida en el complemento de la recta generada por ξ, R_ξ, es constante, deberá ser $P_{-\eta} = P_\eta$. En consecuencia, se concluye que $m = 2\,P_{-\eta}$.

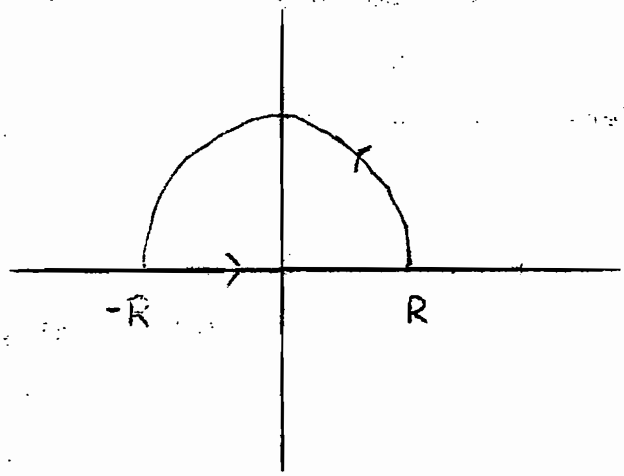
El problema entonces, se ha reducido a probar que la función P_η es constante. Si se probara que es continua, podría concluírse, en general, ~~que debe ser constante~~ en cada componente conexa de su dominio. Pero cuando la dimensión del espacio es ≥ 3, el complemento de una recta es un subconjunto conexo, con lo cual P_η resulta constante.

Para probar, finalmente, la continuidad, se razona así:

Por el teorema de los residuos, es:

$$P_\eta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{Q'(z)}{Q(z)}\,dz$$

donde $Q(z) = P_m(z\xi+\eta)$ y puede tomarse como camino de integración:



para un R adecuado.

La continuidad de la función P_η es clara si se muestra que cuando η se mueve en un entorno adecuadamente pequeño de un cierto η_0, sigue sirviendo la misma curva C. Dicho de otra manera, es suficiente comprobar que las raíces de $P_m(\eta+z\xi)$ en el semiplano superior, se mantienen acotadas, cuando η se mueve en compactos, fuera de $R^n \setminus R_\xi$. Esto se deduce inmediatamente del lema 1.2 aplicado al polinomio $Q(z)$, pues en sus coeficientes figura η.

#

<u>Observaciones 1.1</u>

a) En dimensión 1, todos los operadores P(D) son elípticos. En efecto, el polinomio característico, en este caso es:

$$P_m(\xi) = a_m \xi^m$$

b) En dimensión 2, el operador de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, muestra que hay operadores elípticos de orden 1. Desde luego, sus coeficientes no pueden ser todos reales.

c) Para un operador $P(x,D)$ elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$, el teorema 1.1 sigue siendo válido, pues las afirmaciones se hacen sobre la variable ξ en el polinomio $P_m(x,\xi)$, manteniendo x fijo.

Un operador diferencial $P(x,D)$ tiene la siguiente propiedad:

Dada $T \in \mathcal{D}'(U)$, $\operatorname{sop} P(x,D)T \subset \operatorname{sop} T$

En general, un operador $K: \mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ lineal y continuo, se dice que es local si $\operatorname{sop} KT \subset \operatorname{sop} T$, para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$. Un resultado de J. Peetre (ver [3]), afirma esencialmente que los operadores $P(x,D)$ son los únicos operadores lineales y continuos, locales.

Dada una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$, se sabe que su soporte puede definirse como:

$$\operatorname{sop} T = U \setminus \cup\{V \text{ abiertos} \subset U : T/_V = 0\}.$$

Es correcto decir que sopT, es el complemento, respecto de U, del mayor abierto donde T se anula.

Se considera ahora

$$U \setminus \cup\{V \subset U \text{ abierto}/T/_V \in C^\infty(V)\}.$$

Dados abiertos U_1, $U_2 \subset U$ tales que $T/_{U_1}$, $T/_{U_2}$ coinciden con funciones indefinidamente derivables, también $T/_{U_1 \cup U_2} \in C^\infty(U_1 \cup U_2)$.

Luego, ese conjunto, cerrado en U, es el complemento del mayor abierto donde la distribución coincide con una función indefinidamente derivable. Se lo llama el soporte singular de T.

Por ejemplo, sop sing $\delta_{x_0} = \{x_0\}$.

Dado ahora un operador lineal y continuo $K:\mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$, se dice que es <u>seudolocal</u> si sop sing $KT \subset$ sop sing T, para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$.

Es decir, el operador K no "aumenta" las singularidades de las distribuciones a las que se lo aplica.

Por ejemplo, todo operador diferencial $P(x,D)$ de los que se están considerando, es seudolocal.

Como esta propiedad se define respecto de coincidir o no una distribución con una función de clase C^∞, basta que los coeficientes de $P(x,D)$ no sean indefinidamente derivables, para que el operador deje de ser seudolocal. Naturalmente, en este caso ya no tendrá sentido hacer actuar al operador sobre todo $\mathcal{D}'(U)$.

Por ejemplo, si $a_\alpha(x) \in C^{k+m}(U)$, se sabe que $P(x,D)$, operador de orden m, aplica $\mathcal{D}'^{(k)}(U)$ en $\mathcal{D}'^{(k+m)}(U)$.

Luego, este operador no es seudolocal, pensando a la propiedad enunciada en términos de los espacios de distribuciones adecuados ; o sea, no es verdad que para toda $T \in \mathcal{D}'^{(k)}(U)$, sop sing $P(x,D)T \subset$ sop sing T.

Se dice que un operador lineal y continuo $K:\mathcal{D}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ es <u>hipoelíptico</u> si para toda $T \in \mathcal{D}'(U)$ sop sing $T \subset$ sop sing KT.

Más adelante se darán ejemplos de estos operadores.

Lo mismo que con la propiedad de ser seudolocal, se adaptará el enunciado de la de hipoelipticidad, según los espacios de distribuciones entre los que sea correcto hacer actuar al operador en cuestión.

Otra manera de enunciar la noción de hipoelipticidad, es la siguiente:

Sean $S, T \in \mathcal{D}'(U)$, tales que $KT = S$.

El operador K es hipoelíptico si cada vez que dado $V \subset U$ abierto, $S \in C^{\infty}(V)$, implica $T \in C^{\infty}(V)$.

Pensando por ejemplo que K es un operador diferencial $P(x,D)$, el ser hipoelíptico da una posible respuesta a una de las preguntas que pueden plantearse para un tal operador.

Se trata del <u>problema de regularidad</u> de soluciones:

Sean $S, T \in \mathcal{D}'(U)$ distribuciones que verifican

$$P(x,D)T = S \quad \text{en} \quad U.$$

El problema es saber si determinada condición de regularidad que verifique S, puede asegurarse también sobre la solución T.

Por ejemplo, una propiedad típica a comprobar es precisamente la de hipoelipticidad.

Un operador $R: \mathcal{E}'(U) \to C^{\infty}(U)$ lineal y continuo, se llama <u>regularizante</u>.

L. Schwartz ha demostrado (ver [4]), que todo regularizante es un operador integral con núcleo $k(x,y) \in C^{\infty}(U \times U)$.

Se dirá que el operador R es un <u>regularizante analítico</u> si es lineal y continuo de $\mathcal{E}'(U)$ en $H(U)$, donde $H(U)$ indica las funciones analíticas en U, con la topología inducida por $C^\infty(U)$.

El teorema de Paley-Wiener muestra que la transformación de Fourier es un regularizante analítico en todo R^n.

Sea ahora $K: \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$ un operador lineal y continuo.

Se dice que K es una <u>parametriz izquierda</u> para el operador $P(x,D)$, si existe R_1 regularizante, tal que

$$K.P(x,D)T = T+R_1T, \quad \text{para toda} \quad T \in \mathcal{E}'(U)$$

Análogamente, K será una <u>parametriz derecha</u>, si existe R_2 regularizante, tal que

$$P(x,D)KT = T+R_2T, \quad \text{para toda} \quad T \in \mathcal{E}'(U)$$

Cuando una parametriz sea a la vez derecha e izquierda, se la llamará <u>bilátera</u>.

La parametriz se llama <u>analítica</u> cuando el regularizante R_1 o R_2, según corresponda, es analítico.

<u>Lema 1.3:</u>

Si $P(x,D)$ admite una parametriz izquierda seudolocal, entonces es hipoelíptico.

<u>Demostración</u>

Sean $S,T \in \mathcal{D}'(U)$ tales que $P(x,D)T = S$.

Se sabe que S coincide con una función indefinidamente derivable en cierto abierto $U_1 \subset U$.

Quiere concluírse que también $T \in C^\infty(U_1)$.

En primer lugar, como la propiedad a demostrar es de carácter local, es posible reducir la situación al caso de tener distribuciones de $\mathcal{E}'(U)$.

En efecto, dado $x_0 \in U_1$, sea $\varphi \in C_0^\infty(U_1)$ que vale 1 en un entorno abierto U_2 de x_0.

Por ser $P(x,D)$ un operador local,

$$P(x,D)T\varphi = S_1 \in \mathcal{E}'(U)$$

Si se prueba que $T\varphi \in C^\infty(U_1)$, como $T\varphi/_{U_2} = T/_{U_2}$, resultará que T coincide con una función indefinidamente derivable alrededor de x_0, que era un punto arbitrario de U_1.

Luego, $T \in C^\infty(U_1)$.

Puede suponerse entonces que $T, S \in \mathcal{E}'(U)$.

Sea K una parametriz izquierda seudolocal que existe para $P(x,D)$, por hipótesis,

$$KS = KP(x,D)T = T + R_1T.$$

Al ser R_1 regularizante, $R_1T \in C^\infty(U)$.

Como el operador K es seudolocal, $KS \in C^\infty(U_1)$.

En consecuencia, $T \in C^\infty(U_1)$.

Esto concluye lo afirmado. #

El lema 1.3 provee una condición suficiente de hipoelipticidad.

Para el operador $P(x,D)$ de coeficientes variables, no se conocen condiciones de hipoelipticidad que sean a la vez necesarias y suficientes.

En cambio, es posible caracterizar a los operadores $P(x,D)$ elípticos, en términos de que admiten parametrices izquierdas seudolocales, que pertenecen a cierta clase de operadores llamados seudodiferenciales. (ver [5]).

Al tener un operador $P(x,D)$ elíptico parametrices izquierdas seudolocales, se deduce que todo operador elíptico debe ser también hipoelíptico.

En resumen, la existencia de ciertas paramétrices izquierdas ha permitido demostrar propiedades de regularidad sobre el operador $P(x,D)$.

Se verá ahora que si $P(x,D)$ admite una parametriz derecha en ciertas condiciones, se puede asegurar que el operador es localmente resoluble.

En primer lugar, si R es un operador regularizante en el abierto $U \subset R^n$, dado $V \subsetneq U$ abierto acotado tal que $\overline{V} \subset U$, R puede extenderse a un operador continuo de $L^2(V)$ en sí mismo.

En efecto, si $f \in C_0^\infty(V)$, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene:

$$|Rf(x)|^2 = \left|\int k(x,y)\ f(y)\,dy\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_V |k(x,y)|^2 dy \,.\, \|f\|^2_{L^2(V)}$$

O sea,

$$\|Rf\|_{L^2(V)} \leqslant \|k\|_{L^2(V\times V)} \|f\|_{L^2(V)}$$

De aquí se deduce que si V se elige adecuado, puede lograrse que la norma de R, como operador de $L^2(V)$ en sí mismo, sea tan pequeña como se quiera.

Sea ahora $P(x,D)$ un operador con coeficientes indefinidamente derivables en $U \subset R^n$; se supone que $P(x,D)$ admite una parametriz derecha K, en U.

O sea, existe R, regularizante en U, tal que

$$P(x,D)Kf = f + Rf, \qquad f \in \mathcal{E}'(U).$$

Se supone también que dado $V \subset U$ acotado con $\overline{V} \subset U$, K puede extenderse a un operador continuo de $L^2(V)$ en sí mismo.

Según acaba de verse, si se elige V suficientemente pequeño, puede lograrse que $\|R\| < 1$; luego la serie $\sum_{k\geq 0} (-R)^k$, converge en el espacio de los operadores lineales y continuos de $L^2(V)$ en sí mismo, hacia $(I+R)^{-1}$.

Por lo tanto, fijada $f \in L^2(V)$, resulta que la función $g = K(I+R)^{-1}f$ es solución en $L^2(V)$ de la ecuación $P(x,D)g = f$.

Esto muestra que P(x,D) es localemnte resoluble.

Cuando P(x,D) es elíptico, las paramétrices que pueden hallarse en la clase de los llamados operadores seudodiferenciales, son biláteras y cumplen la condición de continuidad en $L^2(V)$.

Luego, resulta que todo operador elíptico es localmente resoluble.

En el caso de los operadores P(D) de coeficientes constantes, es posible caracterizar completamente las propiedades de elipticidad e hipoelipticidad.

Antes de ver estos resultados, conviene introducir la noción de <u>solución fundamental</u>:

Una distribución $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ se llama una solución fundamental del operador $P(D)$ si verifica

$P(D)G = \delta$.

El nombre de fundamental alude al hecho de que si se tiene $S \in \mathcal{D}'(R^n)$ cumpliendo ciertas condiciones, puede conocerse mediante G, una solución de $P(D)T = S$. En efecto, basta tomar $T = G * S$; las condiciones que debe cumplir S son aquéllas que permitan definir la convolución; por ejemplo, si $S \in \mathcal{E}'(R^n)$, $G * S$ tiene sentido, cualquiera sea el comportamiento de la solución fundamental G; las condiciones sobre S podrán modificarse a medida que se conozcan propiedades de G, dependiendo del operador en cuestión.

De lo que acaba de decirse, resulta que el conocimiento de una solución fundamental, permite resolver, en ciertos casos, el problema de existencia de solución para la ecuación $P(D)T = S$, al menos cuando el abierto donde se trabaja es todo R^n.

Como se verá enseguida, la noción de solución fundamental, también es de suma utilidad para estudiar problemas de regularidad asociados al operador $P(D)$.

Todo operador diferencial $P(D)$, admite al menos una solución fundamental temperada.

En efecto, esta afirmación es consecuencia, vía transformación de Fourier, del siguiente resultado (ver [6]): Toda distribución temperada puede dividirse por cualquier polinomio en n variables no idénticamente nulo y al menos una solución de esa operación, es temperada.

Del hecho de que todo operador $P(D)$ de coeficientes constantes admita una solución fundamental G, se deduce que $P(D)$ es localmente resoluble en cualquier punto de R^n.

En efecto, dada $f \in C_0^\infty(R^n)$, la distribución $f * G$ es solución, en $C^\infty(R^n)$, de $P(D)u = f$.

Lema 1.4.

Sea $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ una distribución que coincide con una función indefinidamente derivable fuera del origen. Entonces, dada $T \in \mathcal{E}'(R^n)$, la distribución $G * T$ es indefinidamente derivable donde lo sea T.

Demostración

Sea $T \in \mathcal{E}'(R^n)$ y sea $U \subset R^n$ un abierto tal que $T \in C^\infty(U)$; fijado $x_0 \in U$, se probará que $G * T$ es indefinidamente derivable en x_0.

En primer lugar, sea $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ tal que sop $\varphi \subset \{|x| \leq \varepsilon\}$, $\varphi = 1$ en $\{|x| \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$, para cierto $\varepsilon > 0$. Se escribe entonces

$$G * T = \varphi G * T + (1-\varphi)G * T.$$

Como $(1-\varphi)G \in C^\infty(R^n)$ y $T \in \mathcal{E}'(R^n)$, resulta que el segundo término pertenece a $C^\infty(R^n)$. En cuanto al primero, sea $\psi \in C_0^\infty(U)$ tal que $\psi = 1$ en $\{|x-x_0| \leq \delta\}$, para cierto $\delta > \varepsilon$.

Se escribe

$$\varphi G * T = \varphi G * \psi T + \varphi G * (1-\psi)T.$$

Como $\psi T \in C_0^\infty(R^n)$, el primer término pertenece a $C^\infty(R^n)$.

En cuanto al segundo, se afirma que en un entorno del punto x_0, se anula.

En efecto,

$$\text{sop } \varphi G * (1-\psi)T \subset \text{sop } \varphi G + \text{sop } (1-\psi)T \subset$$

$$\subset \{|x| \leq \varepsilon\} + \{|x-x_0| \geq \delta\} \subset \{|x-x_0| \geq \delta-\varepsilon\}$$

Esto muestra que $G * T$ es indefinidamente derivable cerca de x_0, con lo cual se concluye lo afirmado.
#

Teorema 1.2.

Sea $P(D)$ un operador diferencial lineal con coeficientes constantes.

Entonces son equivalentes:

a) Existe una solución fundamental temperada de $P(D)$, que coincide con una función indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$.

b) $P(D)$ admite una parametriz izquierda seudolocal.

c) Si T,S son distribuciones en $\mathcal{D}'(U)$ que cumplen $P(D)T = S$, entonces:

Para cada abierto $U_1 \subset U$ tal que $S \in C^\infty(U_1)$, también $T \in C^\infty(U_1)$.

Demostración

a) $\Rightarrow$ b)

Sea $G \in \mathcal{S}'(R^n)$ una solución fundamental temperada que coincide con una función indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$.

Se probará que el operador $K = G *$ es una parametriz izquierda seudolocal.

Por propiedades de la convolución, K es un operador lineal y continuo de $\mathcal{E}'(R^n)$ en $\mathcal{S}'(R^n)$.

Además,

$$P(D) \circ KT = P(D)\, G * T = \delta * T = T \text{ para toda } T \in \mathcal{E}'(R^n)$$

Análogamente, $K \circ P(D)T = T$.

Luego, K no sólo es una parametriz bilátera, sino que en realidad es una inversa bilátera en $\mathcal{E}'(R^n)$.

En cuento al hecho de ser K seudolocal, se deduce inmediatamente del lema 1.4.

b) ⇒ a)

Esta implicación fue probada en el lema 1.3.

c) ⇒ a)

Como la distribución δ coincide con una función indefinidamente derivable fuera del origen, cualquier solución $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ de la ecuación $P(D) = \delta$, debe tener la misma propiedad.

#

Este teorema caracteriza la propiedad de ser un operador de coeficientes constantes hipoelíptico, en términos de parametrices y de soluciones fundamentales.

<u>Lema 1.5.</u>

Dado $U \subset R^n$ abierto, sea $f \in C^\infty(U)$.

Son equivalentes:

a) f es analítica en U.

b) Para cada $K \subset U$ compacto, existen $C = C(K) > 0$, $A = A(K) > 0$ tales que

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq C\, A^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \text{para } x \in K, \text{ para toda n-upla } \alpha$$

Demostración

a) $\Rightarrow$ b)

Dada una función F definida y analítica en un entorno de un punto $z_0 \in C^n$, se sabe, (ver [7]) que cerca de z_0, es posible representar la función y sus derivadas, mediante una integral del tipo de Cauchy:

$$D^{\alpha}F(z) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|w-z_0|=\delta} \frac{F(w)}{(w-z)^{\alpha+1}}\, dz$$

donde $\alpha+1 = (\alpha_1+1,\ldots,\alpha_n+1)$ y $|z-z_0| < \delta/2$, para cierto δ adecuado, entendiéndose $|z-z_0| < \delta/2$ como $|z^1-z_1^0| < \delta/2,\ldots,|z^n-z_0^n| < \delta/2$.

A partir de esa fórmula, se obtienen estimaciones para las derivadas. En efecto, si $|F(w)| \leq M$ para $|w-z_0| \leq \delta$, es:

$$\sup_{|z-z_0|\leq\delta} |D^{\alpha}F(z)| \leq \frac{\alpha!}{(2\pi)^n} M . \frac{(2\pi\delta)^n}{(\delta/2)^{|\alpha|+n}} \leq C.A^{|\alpha|}|\alpha|! \, ,$$

con ciertos $C, A > 0$.

Si ahora se supone que F es analítica en cierto abierto $U \subset C^n$, dado $K \subset U$ compacto, se puede repetir lo anterior para cada punto de K.

Luego, por compacidad se deduce lo afirmado.

Sea ahora f una función definida y analítica en un abierto $U \subset R^n$. Como siempre puede extenderse f, a través de su serie de potencias, a una función F definida y analítica en un entorno abierto V de U, en C^n, resulta que es posible aplicar a f lo que acaba de hacerse.

b) ⇒ a)

$$f(y) = \sum_{|\alpha|<N} D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x,y) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$$

Para probar que f es analítica en x, habrá que probar que la serie de potencias $\sum_\alpha D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$, converge en cierto disco $|y-x| < \varepsilon$ contenido en U y que existe

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{|\alpha|=N} f_\alpha(x,y) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} = 0,$$ y cerca de x.

Sea K un entorno compacto de x. Por hipótesis, existen $C = C(K) > 0$, $A = A(K) > 0$ tales que

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant C.A^{|\alpha|}|\alpha|!$$

Luego, el término general de la serie, puede acotarse como:

$$\left|D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\right| \leqslant C . \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (A|y-x|)^{|\alpha|}.$$

Resulta:

$$C \sum_{|\alpha|<N} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (A|y-x|)^\alpha = \sum_{j=0}^{N-1} (A|y-x|)^j \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!}$$

Dada cualquier n-upla real $(a_1,\ldots,a_n) = a$, vale la fórmula de Euler:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^j = \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} a^\alpha.$$

Para comprobarla, basta observar que cada miembro es un polinomio homogéneo de grado j y que por lo tanto, coincidirán, si son iguales en el origen todas las derivadas de orden j.

Poniendo a = (1,...,1), se obtiene:

$$\sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} = n^j.$$

O sea que la n-ésima suma parcial de la serie considerada, puede mayorarse con $C.\sum_{j=0}^{N-1} (An|y-x|)^j$.

Para $|y-x| < \frac{1}{An}$, esta serie geométrica converge, con lo cual se concluye que la serie de término general

$D^\alpha f(x)\ \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$ converge absolutamente allí.

En cuanto al resto:

Usando la expresión integral, vale:

$$\sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 D^\alpha f(x+t(y-x)).(1-t)^{N-1}.dt.(y-x)^\alpha$$

Para y en un entorno compacto adecuado de x, puede acotarse lo anterior como:

$$C.\sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!} A^{|\alpha|}|\alpha|!\ |y-x|^{|\alpha|} = C.(A|y-x|)^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!} =$$

$$= C.(An|y-x|)^N.$$

Esto tenderá a cero cuando $N \to \infty$, si además de pertenecer al entorno de x elegido antes, y es tal que $An|y-x| < 1$.

En total, se ha probado que la función f es analítica en x.

#

Lema 1.6

Sea $G \in \mathcal{D}'(R^n)$ una distribución que coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$.

Entonces, dada $T \in \mathcal{E}'(R^n)$, la distribución $G * T$ es analítica donde lo sea T.

Demostración

Se supone que para cierto abierto $U \subset R^n$, T coincide con una función analítica en U. Se probará que $G * T$ tiene la misma propiedad.

Fijado $x_0 \in U$, sea U_1 un entorno abierto de x_0 tal que para cierto $\varepsilon > 0$, $\overline{\varepsilon\text{-ent } U_1} \subset U$ y sea $\varphi \in C_0^\infty(U)$ que vale 1 en U_1.

$$G * T = G * \varphi T + G * (1-\varphi)T.$$

Se sabe ya, según el lema 1.4, que ambos términos son indefinidamente derivables en U.

Además, para $x \in U_1$, vale:

$$[G * (1-\varphi)T](x) = ((1-\varphi(y))T_y, G(x-y)).$$

$[1-\varphi(y)]T_y$, es una distribución de soporte compacto contenido en $R^n \setminus \overline{\varepsilon\text{-ent } U_1}$.

Luego, puede escribirse en la forma $\sum_{|\alpha| \leq \rho} D^\alpha f_\alpha$, para cierto ρ y ciertas funciones f_α continuas y de soporte compacto arbitrariamente próximo al de la distribución.

Luego, para $x \in U_1$ vale:

$$([1-\varphi(y)]T_y, G(x-y)) = \sum_{|\alpha| \leq \rho} (-1)^{|\alpha|} \int f_\alpha(y)\, D_y^\alpha\, G(x-y)\, dy$$

Fijada una n-upla β y un compacto $K \subset U_1$, quiere estimarse en K la derivada:

$$D_x^\beta([1-\varphi(y)]T_y, G(x-y)) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant\rho} \int f_\alpha(y) \quad (D^{\alpha+\beta}G)(x-y)\,dy =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leqslant\rho} \int f_\alpha(x-y) \; D^{\alpha+\beta}G(y)\,dy.$$

Para $x \in K$, y se mueve en el conjunto

$$K_1 = \{y \in R^n / x-y \in \text{sop } f \text{ , para algún } x \in K\}.$$

Este es un compacto. Además, según se eligieron las cosas, existe $\delta > 0$ tal que para $x-y \in \text{sop } f_\alpha$, $x \in K$, es $|y| \geqslant \delta$. Allí, $G(y)$ es analítica por hipótesis.

Luego, de acuerdo con el lema 1.5, se tiene la acotación:

$$\left|\int f_\alpha(x-y) \; D^{\alpha+\beta}G(y)\,dy\right| \leqslant C.A^{|\alpha+\beta|}.|\alpha+\beta|!\int |f_\alpha(x-y)|\,dy$$

para $x \in K$.

De aquí se concluye sin dificultad, que la función $[1-\varphi(y)]T_y$ es analítica en U_1.

En cuanto al otro término:

Por comodidad, en lugar de D^α, una derivada de orden m se indicará $D_m . D_{m-1} \ldots D_1$, donde cada D_i es una derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$, para cierto $1 \leqslant j \leqslant n$.

Puede demostrarse por inducción, que para $m \geqslant 2$ vale:

$$D_m\, D_{m-1}\dots D_2 D_1(G * \varphi T) = G * \varphi D_m\, D_{m-1}\dots D_2 D_1 T +$$

$$+ D_m\, D_{m-1}\dots D_2 G * (D_1\varphi).T + G * (D_m\varphi)(D_{m-1}\dots D_2 D_1 T) +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{m-1} D_m\dots D_{\ell+1}\, G * (D_\ell\varphi)(D_{\ell-1}\dots D_2 D_1 T).$$

$$G * \varphi D_m\dots D_2 D_1 T = (G_y, \varphi(x-y).(D_m\dots D_2 D_1 T)(x-y))$$

Se probará que esta función es entera.

Fijado $K \subset R^n$ compacto, importan los valores de y en el conjunto

$$K_1 = \{y \in R^n / x-y \in \text{sop } \varphi \text{ para algún } x \in K\}.$$

Este conjunto es compacto.

Por definición de distribución, existen ρ, $C(K_1) = C > 0$ tales que:

$$|(G_y, \varphi(x-y).(D_m\dots D_2 D_1 T)(x-y))| \leq$$

$$\leq C \sup_{\substack{|\beta|\leq\rho \\ z\in R^n}} |D^\beta[\varphi(z).(D_m\dots D_2 D_1 T)(z)]| \qquad \text{para} \quad x \in K.$$

Usando la regla de Leibniz, esto puede acotarse con:

$$C \sup_{\substack{|\beta|\leq\rho \\ z\in R^n}} |D^\beta\varphi(z)| \;.\; \sup_{\substack{|\beta|\leq\rho \\ z\in \text{sop } \varphi}} |(D^\beta D_m\dots D_2 D_1 T)(z)|$$

Sobre el soporte de φ, por ser T analítica, vale: la estimación:

$$C.A^{|\beta|+m}(|\beta|+m)!$$

Esto puede acotarse finalmente con $C.A^m\, m!$

Se estudiará ahora, en general, un término de la forma

$$D_m \dots D_{\ell+1}\, G * (D_\ell \varphi) . (D_{\ell-1} \dots D_1 T)$$

sop $D_\ell \varphi \subset U \setminus U_1$.

Luego, T es analítica en el sop $D_\ell \varphi$; además, dado $K \subset U_1$ compacto, para $x \in K$, $y \in$ sop $D_\ell \varphi$, es $|x-y| \geq \delta$ para cierto $\delta > 0$. O sea, $G(x-y)$ es una función analítica de $x-y$, allí.

Para $x \in K$, esa convolución puede escribirse

$$\int D_m \dots D_{\ell+1} G(x-y) \quad (D_\ell \varphi)(y) (D_{\ell-1} \dots D_1 T)(y)\, dy.$$

Esto se acota, por todo lo dicho, con:

$$C\, A_\ell^{m-\ell} (m-\ell)!\; B_\ell^{\ell-1} (\ell-1)!$$

En total, hay m estimaciones así:

$$C \sum_{\ell=1}^{m} A_\ell^{m-\ell} \;(m-\ell)!\; B_\ell^{\ell-1} (\ell-1)! \leq C\, A^m\, m!$$

Esto concluye la demostración del lema. #

<u>Teorema 1.3</u>

Sea P(D) un operador diferencial lineal con coeficientes constantes:

Entonces son equivalentes:

a) P(D) admite una solución fundamental temperada que coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$.

b) P(D) admite una parametriz izquierda analítica seudolocal K, que satisface además:

Si $T \in \mathcal{E}'(R^n)$ coincide con una función analítica en cierto abierto $U \subset R^n$, KT tiene la misma propiedad.

c) Dadas distribuciones $T, S \in \mathcal{E}'(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, tales que $P(D)T = S$, si S coincide con una función analítica en cierto abierto $U_1 \subset U$, entonces T también.

Demostración

a) $\Rightarrow$ b)

Si G es una solución fundamental para $P(D)$ con las propiedades que aparecen en a), se vio en el teorema 1.2, que el operador $K = G *$, es una parametriz bilátera seudolocal. Además, al cumplirse

$$K \circ P(D)T = T, \quad P(D) \circ KT = T \quad \text{para toda} \quad T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

resulta también analítica.

En cuanto a la otra propiedad, resulta del lema 1.6.

b) $\Rightarrow$ c)

Al ser la analiticidad una propiedad local, como en el teorema 1.2, puede reducirse la situación a $T, S \in \mathcal{E}'(U)$.

Se tiene:

$$K \circ P(D)T = T + R_1 T$$

Como R_1 es un regularizante analítico, $R_1 T \in H(U)$.

$P(D)T = S \in H(U_1)$; luego, por hipótesis, $K \circ P(D)T \in H(U_1)$.

Se deduce entonces que $T \in H(U_1)$.

c) $\Rightarrow$ a)

Como la distribución δ coincide con una función analítica fuera del origen, cualquier solución $G \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación $P(D)G = \delta$, debe tener la misma propiedad.

Esto concluye la demostración del teorema

Observaciones 1.2

Puede probarse, (ver [8]), que cualquiera de las afirmaciones hechas en el teorema 1.3, equivale al hecho de ser el operador P(D) elíptico, o sea tal que su polinomio característico no se anula en $R^n \setminus 0$.

Es decir, que ese teorema da condiciones equivalentes de elipticidad para el operador P(D), en términos de parametrices y soluciones fundamentales.

El lema 1.1 y el corolario 1.1, siguen siendo, naturalmente, válidos, cuando el operador diferencial en cuestión es de coeficientes constantes. Sus enunciados para un operador P(D), son los siguientes:

Lema 1.1'

Dado un operador P(D) de orden m, son equivalentes:

a) P(D) es elíptico

b) Existe C > 0 tal que

$$|P_m(\xi)| \geq C|\xi|^m, \quad \text{para todo} \quad \xi \in R^n.$$

Corolario 1.1'

Sea P(D) un operador elíptico de orden m.

Existen C, N > 0 tales que:

$$|P(-2\pi i\xi)| \geq C(1+|\xi|)^m, \quad \text{para} \quad |\xi| \geq N$$

Sobre la vinculación entre los teoremas 1.2 y 1.3 y la no anulación en $R^n \setminus 0$ del polinomio característico, se probarán ahora algunos resultados.

Teorema 1.4

Todo operador $P(D)$ elíptico es hipoelíptico.

Demostración

Lo que se hará aquí, es construir para el operador $P(D)$, una solución fundamental temperada, indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$. Usando la transformación de Fourier, basta encontrar una distribución $S \in \mathcal{S}'(R^n)$, cumpliendo:

$$\mathcal{F}[S] \in C^\infty(R^n \setminus 0), \quad P(-2\pi i\xi)S = 1 \text{ en } R^n.$$

Sea $\chi \in C_0^\infty(R^n)$ que valga 1 en un entorno abierto del conjunto de los ceros reales de $P(-2\pi i\xi)$. Se buscan distribuciones adecuadas, S_1 y S_2, tales que

$$P(-2\pi i\xi)S_1 = \chi \qquad (1)$$

$$P(-2\pi i\xi)S_2 = 1-\chi \qquad (2)$$

Según un resultado que se mencionó al principio, se sabe que debe existir una distribución temperada S_1, cumpliendo (1).

Pero más aún, debe ser de soporte compacto.

En efecto, sea $N > C$ tal que sop $\chi \subset \{|x| < N\}$; dada $\varphi \in C_0^\infty(R^n \setminus \{|x| < N\})$, es:

$$(S_1, \varphi) = (S_1, P(-2\pi i\xi)\frac{\varphi}{P(-2\pi i\xi)}) =$$

$$= (P(-2\pi i\xi)S_1, \frac{\varphi}{P(-2\pi i\xi)}) = (\chi, \frac{\varphi}{P(-2\pi i\Xi)}) = 0$$

De acuerdo con el teorema de Paley-Wiener, resulta que $\overline{\mathcal{F}}[S_1]$ es una función entera, que pertenece a $\mathcal{O}_M$.

En cuanto a (2), como $1-\chi$ se anula en un entorno de los ceros reales de $P(-2\pi i\xi)$, la función $\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}$ está bien definida; además, pertenece a $\mathcal{O}_M$ (ver ejercicio 1.10). Entonces, determina una distribución temperada.

En total, la distribución $\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] + \overline{\mathcal{F}}[S_1]$, resulta ser una solución fundamental temperada.

Se probará ahora que $\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] \in C^{\infty}(R^n \setminus 0)$.

Sea $\eta \in C_0^{\infty}(R^n)$ tal que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta(\xi) = \begin{cases} 0 & |\xi| \geqslant 2 \\ 1 & |\xi| \leqslant 1 \end{cases}$

Dado $0 < \varepsilon \leqslant 1$, se considera la función, de $\mathcal{S}(R^n)$,

$$\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\eta(\varepsilon\xi)] = f_{\varepsilon}(x)$$

Se afirma que $f_{\varepsilon} \to \overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\ i\xi)}]$, en el sentido de $\mathcal{D}'(R^n)$

En efecto, dada $\varphi \in C_0^{\infty}(R^n)$, es:

$$(f_{\varepsilon},\varphi) = (\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\eta(\varepsilon\xi), \overline{\mathcal{F}}[\varphi]) =$$

$$= \int \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\eta(\varepsilon\xi)\overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)d\xi.$$

Puntualmente, el integrando converge a $\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)$

Por otra parte, es:

$$\left|\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)}\eta(\varepsilon\xi)\overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)\right| \leqslant C(1+|\xi|)^{-m}|\overline{\mathcal{F}}[\varphi](\xi)|.$$

Como $\overline{\mathcal{F}}[\varphi] \in \mathcal{S}(R^n)$, esa función es integrable.

Luego, usando el teorema de convergencia mayorada, se obtiene el resultado.

Si se probara que existe $f \in C^\infty(R^n \setminus 0)$ tal que la sucesión $\{f_\varepsilon\}$ converge hacia f, uniformemente en los compactos de $R^n \setminus 0$, esto implicaría que $f_\varepsilon \to f$ en el sentido de $\mathcal{D}'(R^n \setminus 0)$. Luego, $\mathcal{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ debe coincidir con f en $R^n \setminus 0$.

Fijado $r = 0,1,\ldots$ sea β una n-upla entera no negativa con $|\beta| \leq r$.

Dado $k = 1,2,\ldots$ y usando el hecho de que

$$(-\Delta_\xi)^k \, e^{-2\pi i x\xi} = (4\pi^2)^k \, |x|^{2k} e^{-2\pi i x\xi}$$

es:

$$(4\pi^2)^k \, |x|^{2k} \, D^\beta f_\varepsilon(x) =$$

$$= \int [(-\Delta_\xi)^k \, e^{-2\pi i x\xi}] \cdot \frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)} \, (-2\pi i\xi)^\beta \, \hat{\eta}(\varepsilon\xi)\, d\xi.$$

Integrando por partes, esto puede escribirse:

$$\sum_{|\alpha+\gamma|=2k} (-1)^k \, C_{\alpha\gamma} \int e^{-2\pi i x\xi} \cdot D^\gamma[\frac{1-\chi(\xi)}{P(-2\pi i\xi)} \quad (-2\pi i\xi)^\beta] \,.$$

$$\cdot \varepsilon^{|\alpha|} \, (D^\alpha \eta)(\varepsilon\xi)\, d\xi$$

De acuerdo con el ejercicio 1.10, el integrando de cada término se acota con:

$$C.(1+|\xi|)^{-m+r-|\gamma|} \cdot \varepsilon^{|\alpha|} \cdot |(D^\alpha \eta)(\varepsilon\xi)|$$

El soporte de la función $(D^\alpha \eta)(\varepsilon\xi)$, está contenido en $\{|\varepsilon\xi| \leq 2\}$.

Esto significa que en el soporte de esa función, vale:

$$\varepsilon(1+|\xi|) \leq \varepsilon+2 \leq 3$$

O sea,

$$\varepsilon^{|\alpha|} \leq 3^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-|\alpha|}.$$

Por lo tanto, puede acotarse:

$$\varepsilon^{|\alpha|}|(D^{\alpha}\eta)(\varepsilon\xi)| \leq C.(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

En total, cada uno de los integrandos en la suma anterior, resulta

$$\leq C.(1+|\xi|)^{-m+r-2k}$$

Fijado r, se elige k, tal que $-m+r-2k$ sea $<-n$.

Puede aplicarse entonces el teorema de convergencia mayorada; resulta por lo tanto, que existe una función

$f_{k,\beta}: R^n \to C$ tal que $(4\pi^2)^k|x|^{2k} D^{\beta} f_{\varepsilon}(x)$,

converge puntualmente hacia $f_{k,\beta}(x)$.

Se afirma que la convergencia es uniforme en compactos.

Para verlo, fijados k,β, sea $g_{\varepsilon} = (4\pi^2)^k|x|^{2k} D^{\beta} f_{\varepsilon}$

No hay dificultad en comprobar que la familia $\{g_{\varepsilon}\}_{0<\varepsilon\leq 1}$, es equicontinua en R^n. Esto permite concluir (ver [9]), que la función límite $f_{k,\beta}$ es continua y que la convergencia es uniforme en compactos de R^n.

Por lo tanto, $\{D^{\beta} f_{\varepsilon}\}$ converge hacia $\dfrac{f_{k,\beta}}{(4\pi^2)^k|x|^{2k}}$ uniformemente en los compactos de $R^n \setminus 0$.

$C^\infty(R^n \setminus 0)$ es completo con su topología natural, o sea la de la convergencia uniforme de cada derivada en los compactos; luego, si $f = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon$, se deduce que $f \in C^\infty(R^n \setminus 0)$ y que para cada n-upla β, $\{D^\beta f_\varepsilon\}$ converge hacia $D^\beta f$ uniformemente en los compactos de $R^n \setminus 0$.

Según lo dicho antes, puede concluírse que la distribución $\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ coincide en $R^n \setminus 0$ con esa función f.

Luego, $G = \overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] + \overline{\mathcal{F}}[S_1]$, es una solución fundamental temperada, que pertenece a $C^\infty(R^n \setminus 0)$.

Esto muestra que el operador P(D) en consideración, es hipoelíptico.

#

Observación 1.2.

De acuerdo con lo demostrado en el teorema 1.2, el operador $G *$, resulta una parametriz bilátera seudolocal. Por otra parte, el operador $\overline{\mathcal{F}}[S_1] *$, es un regularizante y además analítico (ver ejercicio 1.13); en consecuencia, según el ejercicio 1.3, $\overline{\mathcal{F}}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] *$, es también una parametriz del mismo tipo, para P(D).

Teorema 1.5.

Sea P(D) un operador elíptico.

Entonces, P(D) verifica las condiciones equivalentes del teorema 1.3.

Para demostrar el resultado que se acaba de enunciar, es conveniente dar un lema, que generaliza al lema 1.1' y al corolario 1.1'.

También es posible obtenerlo para un operador $P(x,D)$, elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$ (ver ejercicio 1.15).

Lema 1.7.

Sea $P(D)$ un operador elíptico de orden m.

a) Existen constantes, $C, \varepsilon > 0$ tal que

$$|P_m((\xi+i\eta))| \geq C.|\xi|^m \quad \text{para}$$

$$\varepsilon,\eta \in R^n \quad \text{con} \quad |\eta| \leq \varepsilon|\xi|$$

b) Existen constantes $C, N, \varepsilon > 0$ tales que

$$|P(-2\pi i(\xi+i\eta)) \geq C(1+|\xi|)^m \quad \text{para}$$

$$\xi,\eta \in R^n \quad \text{con} \quad |\xi| \geq N, |\eta| \leq \varepsilon|\xi|$$

Demostración

a) De acuerdo con el lema 1.1, existe $C > 0$ tal que

$$|P_m(\xi)| \geq C \quad \text{para} \quad |\xi| = 1.$$

Como el polinomio P_m es función continua de la variable compleja $\xi+i\eta$, resulta que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|P_m((\xi+i\eta))| \geq C/2 \quad \text{para} \quad |\xi| = 1, \quad |\eta| \leq \varepsilon$$

Si ahora es $\xi \neq 0$, puede escribirse, por la homogenei dad de P_m:

$$|P_m((\xi+i\eta))| = |\xi|^m \, |P_m(\frac{\xi}{|\xi|} + i\frac{\eta}{|\xi|}))| .$$

Usando lo que acaba de obtenerse, se deduce que cuando $|\eta| \leq \varepsilon|\xi|$, $\xi \neq 0$, es:

$$|P_m((\xi+i\eta))| \geq \frac{C}{2}.|\xi|^m$$

Finalmente, esta desigualdad también vale cuando $\xi = 0$, pues en ese caso es $\eta = 0$ y ambos miembros se anulan.

b) A partir de a) se obtiene la estimación para $P(-2\pi i(\xi + i\eta))$, de manera análoga a lo que se hizo en el corolario 1.1.

#

Demostración del teorema 1.5

Se probará que P(D) admite una solución fundamental temperada, que es analítica en $R^n \setminus 0$.

En el razonamiento que va a emplearse, juega un papel fundamental el orden del operador.

De acuerdo con el teorema 1.1, cuando la dimensión del espacio es $\geqslant 3$, todo operador P(D) elíptico debe ser de orden par y en consecuencia, de orden $\geqslant 2$.

Según la observación 1.1, todo operador definido en R es elíptico; en R^2, hay operadores elípticos de primer orden. Para los operadores elípticos de primer orden en R y en R^2, pueden construírse explícitamente soluciones fundamentales temperadas, que son analíticas en $R^n \setminus 0$; (ver ejercicio 1.8).

En lo que sigue, se supondrá por lo tanto que el operador P(D) es de orden $\geqslant 2$.

De acuerdo con el razonamiento hecho en el teorema 1.4, para tener una solución fundamental temperada, analítica en $R^n \setminus 0$, falta demostrar que $\overline{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ coincide con una función analítica en $R^n \setminus 0$; ya se sabe que es indefinidamente derivable allí.

Según el lema 1.5, para comprobar que esa función es analí tica en $R^n \setminus 0$, habrá que estimar sus derivadas, $D^\alpha \bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] = \bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} (-2\pi i\xi)^\alpha]$, en los compactos de $R^n \setminus 0$.

$$(2\pi i x_j)^{n+|\alpha|-1} \bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} (-2\pi i\xi)^\alpha] =$$

$$= \bar{F}\{(\frac{\partial}{\partial\xi_j})^{n+|\alpha|-1}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} (-2\pi i\xi)^\alpha]\}.$$

$$(\frac{\partial}{\partial\xi_j})^{n+|\alpha|-1}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} (-2\pi i\xi)^\alpha] =$$

$$= (1-\chi)(\frac{\partial}{\partial\xi_j})^{n+|\alpha|-1} \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \binom{n+|\alpha|-1}{k} (\frac{\partial}{\partial\xi_j})^k \chi . (\frac{\partial}{\partial\xi_j})^{n+|\alpha|-k-1} .$$

$$. \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)} \qquad (3)$$

En primer lugar, quiere acotarse $(\frac{\partial}{\partial\xi_j})^\ell \frac{(-2\pi i\xi)^\alpha}{P(-2\pi i\xi)}$ para ξ en el soporte de $1-\chi$ o de $(\frac{\partial}{\partial\xi_j})^k \chi$, $k \geq 1$.

Va a usarse el lema 1.7.

Se supondrá que la función χ ha sido elegida de tal manera que en esos soportes, valga la estimación que asegura la parte b) del lema 1.7.

Sea $\bar{\xi} = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (z, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, con $|\xi| \geq N$, $|\eta_1| \leq \varepsilon|\xi|$.

De acuerdo con el lema 1.7, es:

$$\left|\frac{(-2\pi i\bar{\xi})^{\alpha}}{P(-2\pi i\bar{\xi})}\right| \leq C_{\circ}(2\pi)^{|\alpha|}(1+\varepsilon)^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}$$

Para estimar las derivadas, va a usarse la fórmula de Cauchy:

Si

$$F(z) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|} z^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}}{P(-2\pi i z, -2\pi i\xi_2, \ldots, -2\pi i\xi_n)}, \text{ es:}$$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell} F(z^0) = \frac{\ell!}{2\pi i}\int_{|z-z^0|=r} \frac{F(z)}{(z-z^0)^{\ell+1}}dz$$

donde $z^0 = \xi_1$, $r = \varepsilon|\xi|$.

Al ser $F(z)$ una función analítica en z^0, vale:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell} F(z^0) = \left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{\ell}\frac{(-2\pi i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i\xi)}$$

Luego, acotando la integral, se obtiene:

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{\ell}\frac{(-2\pi i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i\xi)}\right| \leq C\,\frac{\ell!\,(2\pi)^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|}}{(\varepsilon|\xi|)^{\ell}} \leq$$

$$\leq C\,.\,\frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{\ell}}\,.\,\ell!\,(1+|\xi|)^{-m+|\alpha|-\ell} \qquad (4)$$

Cuando $\ell = n+|\alpha|-1$, resulta la estimación:

$$|(1-\chi)\,.\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1}\frac{(-2\pi i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i\xi)}| \leq C_{\circ}\frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{|\alpha|+n-1}}\,.$$

$$.\,(1+|\xi|)^{-m-n+1}\,.\,(|\alpha|+n-1)!$$

Como se está suponiendo en todo esto que el orden del operador es $\geqslant 2$, la función $(1-\chi)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-1} \frac{(-2\pi\, i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi i\xi)}$ es integrable, pudiendo calcularse su antitransformada de Fourier mediante la integral; esta integral puede acotarse entonces con:

$$C \cdot \frac{(2\pi)^{|\alpha|}}{\varepsilon^{n+|\alpha|-1}} (|\alpha|+n-1)! \int_N^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{m-1}} \leqslant C.A^{|\alpha|}|\alpha|!$$

Fijado ahora un término cualquiera en la sumatoria que aparece en (3), como la función $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^k \chi$, $k \geqslant 1$, es de soporte compacto, también su antitransformada puede calcularse mediante la integral:

$$\int e^{-2\pi\, ix\xi} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^k \chi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-k-1} \frac{(-2\pi\, i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi\, i\xi)}\, d\xi$$

Integrando aquí por partes k-1 veces, se tiene:

$$(-1)^{k-1} \int \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\chi \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{k-1} \left[e^{-2\pi\, ix\xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-k-1} \frac{(-2\pi\, i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi\, i\xi)}\right] d\xi =$$

$$= (-1)^{k-1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} \int e^{-2\pi\, ix\xi} (-2\pi\, ix_j)^h \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)\chi \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}\right)^{n+|\alpha|-h-2} \frac{(-2\pi\, i\xi)^{\alpha}}{P(-2\pi\, i\xi)}\, d\xi .$$

Mediante la estimación (4), esto puede mayorarse con:

$$C. \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k-1}{h} (2\pi)^{h+|\alpha|} |x_j|^h \frac{(n+|\alpha|-h-2)!}{\varepsilon^{n+|\alpha|-h-2}} \cdot \int_N^{M} \frac{dt}{(1+t)^{m-h-1}}$$

En total, la sumatoria que figura en el segundo término de (3), resulta acotada en la siguiente forma:

$$C.\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\ \sum_{h=0}^{k-1}\binom{n+|\alpha|-1}{k}\binom{k-1}{h}(2\pi)^{h+|\alpha|}\,|x_j|^h\,.$$

$$c^h\,.\,\frac{(n+|\alpha|-h-2)!}{\varepsilon^{n+|\alpha|-h-2}}$$

La acotación que se obtiene en la parte b) del lema 1.7. sigue valiendo si se supone $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

Con esto, lo anterior puede acotarse con:

$$C\,.\,(2\pi)^{n+2|\alpha|-2}\,C^{n+|\alpha|-2}\,.\,\varepsilon^{-n-|\alpha|}\,C^{|\alpha|}\,.$$

$$\cdot\ \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\ \sum_{h=0}^{k-1}\binom{n+|\alpha|-1}{k}\binom{k-1}{h}\,|x_j|^h$$

En general, vale $\binom{p}{q} \leqslant 2^p$, pues:

$$2^p = (1+1)^p = \sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s} > \binom{p}{q},\ \text{para cada } 0 \leqslant q \leqslant p$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\ \sum_{h=0}^{k-1}\binom{n+|\alpha|-1}{k}\binom{k-1}{h}\,|x_j|^h \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2n+2|\alpha|-3}\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\ \sum_{h=0}^{k-1}|x_j|^h$$

De todas las estimaciones hechas, se concluye que existen constantes C, $A > 0$ tales que:

$$\left|(2\pi i x_j)^{n+|\alpha|-1}\,D^\alpha\,\mathcal{F}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\,.\,A^{|\alpha|}\,|\alpha|!\,\left[1+\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1}\ \sum_{h=0}^{k-1}|x_j|^h\right]$$

para $x \in R^n$, $j = 1,\ldots,n$.

Sumando estas estimaciones sobre j, queda:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^{n+|\alpha|-1} |D^{\alpha}\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]| \leqslant$$

$$\leqslant C.A^{|\alpha|} \; |\alpha|! \; [1 + \sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} |x_j|^h].$$

Se fija ahora un compacto $K \subseteq R^n \setminus 0$.

Existen constantes δ_1, $\delta_2 > 0$ tales que $\delta_1 \leqslant |x| \leqslant \delta_2$, para todo $x \in K$.

Luego, pueden hallarse constantes C_1, C_2, B_1, $B_2 > 0$ con

$$C_1 \, B_1^{n+|\alpha|-1} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \frac{|x_j|^{n+|\alpha|-1}}{|x|^{n+|\alpha|-1}} \leqslant C_2 \, B_2^{n+|\alpha|-1}$$

si $x \in K$

Luego, es:

$$|D^{\alpha} \bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]| \leqslant C.A^{|\alpha|} \; |\alpha|! \; \frac{\sum_{k=1}^{n+|\alpha|-1} \sum_{h=0}^{k-1} |x_j|^h}{|x|^{n+|\alpha|-1}}$$

para $x \in K$

Volviendo a operar en forma semejante con el miembro derecho de esta desigualdad, se concluye que $D^{\alpha}\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ verifica en K la estimación requerida, para toda n-upla α.

Esto concluye la demostración del teorema.

#

Observación 1.3.

Es posible demostrar, (ver [8]), que también vale la recíproca del teorema 1.5. O sea, que si P(D) es un operador que cumple las condiciones equivalentes del teorema 1.3, su polinomio característico $P_m(\xi)$, no se anula en $R^n \setminus 0$. Es decir, que la propiedad de no anulación en $R^n \setminus 0$ del polinomio $P_m(\xi)$, caracteriza importantes propiedades del operador P(D); resulta muy apropiado entonces el nombre de característico, dado a ese polinomio.

De acuerdo con lo que acaba de decirse y con el ejercicio 1.6, la recíproca del teorema 1.4, no es cierta; en efecto, el ejercicio 1.6, muestra que el operador del calor es hipoelíptico; su polinomio característico, sin embargo, se anula en la recta $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$.

Para los operadores no elípticos, el polinomio $P_m(\xi)$, ya no es tan característico de sus propiedades. En efecto, los operadores del calor y de Schrödinger, tienen el mismo polinomio característico; pero el primer operador es hipoelíptico y el segundo no (ver ejercicio 1.6). Puede caracterizarse la hipoelipticidad, en términos del polinomio $P(-2\pi i\xi)$, asociado al operador.

Concretamente, sea

$$V = \{z = \xi + i\eta \in C^n / P(-2\pi i z) = 0\}.$$

Entonces, P(D) es hipoelíptico si y sólo si cada vez que para $z \in V$ sea $|z| \to \infty$, deberá tenerse $|\eta| \to \infty$ (ver [8]).

Esto implica que también para un operador hipoelíptico, los ceros reales del polinomio $P(-2\pi i\xi)$ están en un compacto.

De aquí se deduce otra manera de ver que el operador de Schrödinger no es hipoelíptico.

Con técnicas semejantes a las usadas en el teorema 1.4, es posible construir una solución fundamental temperada, indefinidamente derivable en $R^n \setminus 0$, para un dado operador hipoelíptico $P(D)$. Esta construcción se apoya en cierta desigualdad que verifica el polinomio $P(-2\pi i\xi)$, (ver ejercicio 1.12). Puede probarse que la desigualdad que aparece en ese ejercicio 1.12, es equivalente al hecho de ser el operador $P(D)$ hipoelíptico, (ver [8]).

Del ejercicio 1.6, se concluye que todas las soluciones fundamentales de los operadores de Lapalce y de Cauchy-Riemann, son funciones localmente integrables, en R^n.

Esta propiedad, en realidad, la cumple cualquier operador $P(D)$ elíptico.

En efecto:

Teorema 1.6.

Sea $P(D)$ un operador elíptico.

Entonces, admite una solución fundamental temperada, localmente integrable en R^n.

Demostración

De acuerdo con el ejercicio 1.8, puede suponerse que el orden del operador es ≥ 2.

Según lo hecho en los teoremas 1.4 y 1.5, basta demostrar que $\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ es integrable alrededor de cero.

Fijado $j = 1,2,\dots,(2\pi i x_j)^{n-1}\,\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] =$

$$= \bar{F}\,[\,(\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{n-1}\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$$

Como el orden de $P(D)$ es $\geqslant 2$, se comprueba en la forma habitual que la función $(\frac{\partial}{\partial \xi_j})^{n-1}\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}$ es integrable, con lo cual $(2\pi i x_j)^{n-1}\,\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] = h_j$, función continua y nula en el infinito.

Entonces, es $\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] = \frac{h_j}{(2\pi i x_j)^{n-1}}$ para $x_j \neq 0$.

Sea la función $h(x) = \frac{h_j}{(2\pi i x_j)^{n-1}}$ para $x_j \neq 0$

Esta función es continua en $R^n \setminus 0$ y además $\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}]$ coincide con ella en $R^n \setminus 0$.

Por otra parte, es $(2\pi i x_j)^{n-1}\, h = h_j$ en $R^n \setminus 0$ de donde $|2\pi x_j)|^{n-1}\,|h| = |h_j|$ allí. Sumando en j, queda

$$(2\pi)^{n-1}\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{n-1}|h| = \sum_{j=1}^{n}|h_j|$$

Como $\sum_{j=1}^{n}|x_j|^{n-1}$ y $|x|^{n-1}$ son cantidades equivalentes, resulta que $|h(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^{n-1}}$

Luego, h es una función localmente integrable.

Además, por lo dicho antes, $\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] - h$ es una distribución T, concentrada en el origen.

Sea $\Psi \in \mathcal{S}(R^n)$ tal que $\hat{\Psi} \in C_0^\infty(R^n)$

Se tiene:

$$\Psi\bar{F}[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}] - \Psi h = T\Psi$$

También vale

$$\Psi \overline{\mathcal{F}}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right] = \overline{\mathcal{F}}\left[\hat{\Psi} * \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$$

Ψh es una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, se sabe que toda distribución concentrada en el origen, debe ser una combinación lineal de derivadas de la medida de Dirac, δ; luego, su transformada de Fourier resulta un polinomio, $P(\xi)$.

Puede escribirse entonces:

$$\hat{\Psi} * \frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)} - \mathcal{F}[\Psi h] = P(\xi).$$

Cada uno de los términos en el miembro izquierdo, $\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0$.

Luego, $P(\xi)$ debe ser el polinomio nulo.

Por lo tanto, $T\Psi = 0 \; \forall \; \Psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $\hat{\Psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Se concluye que T es la distribución cero.

Esto muestra que $\overline{\mathcal{F}}\left[\frac{1-\chi}{P(-2\pi i\xi)}\right]$ es integrable alrededor del origen, lo cual termina la prueba del teorema.

#

Hasta aquí se han tratado casi exclusivamente problemas de regularidad.

Se enunciará ahora un teorema que muestra el tipo de resultados conocidos sobre el problema de existencia de solución (ver [8]), para operadores con coeficientes constantes.

Teorema 1.7.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y convexo.

Entonces, las siguientes propiedades se verifican respecto de cualquier operador P(D):

a) Si $\mathcal{D}'^{(f)}(U)$ indica las distribuciones de orden finito, en U,

$$P(D)\,\mathcal{D}'^{(f)}(U) = \mathcal{D}'^{(f)}(U)$$

b) $P(D)\,L^2_{loc}(U) \supset L^2_{loc}(U)$.

c) $P(D)\,C^\infty(U) = C^\infty(U)$.

Los resultados que se incluyen a continuación, permitirán probar la parte c) de este teorema, suponiendo dimensión $n \geq 2$. El caso de operadores diferenciales ordinarios es conocido.

En primer lugar, dado $M \subseteq R^n$, se llama cápsula convexa de M, lo cual se indica $C_c(M)$, a $\overline{\cap\{C/C \text{ convexo } \supset M\}}$.

Si M es compacto, $C_c(M)$ también lo es.

<u>Teorema 1.8.</u>

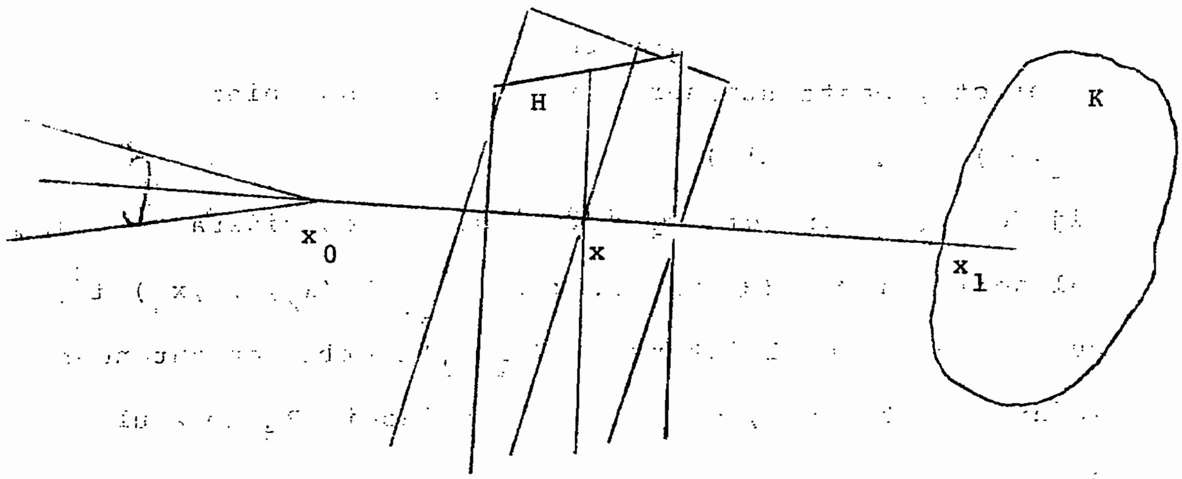
Dada la ecuación $P(D)f = g$, $f,g \in \mathcal{E}'$, vale

$$\text{sop } f \subset C_c(\text{sop } g).$$

En este resultado, es esencial saber de antemano que la distribución f tiene soporte compacto. Por ejemplo, cualquier constante es solución de $\frac{\partial}{\partial x_1} u = 0$.

Para demostrar el teorema 1.8, se harán primero un par de observaciones.

a) Sean K un compacto convexo $\subset R^n$, $n \geq 2$, $x_0 \notin K$



Existe entonces un punto $x_1 \in K$ tal que

$$d(x_0, K) = |x_1 - x_0|$$

Dado ahora cualquier punto x del segmento (x_0, x_1) "abierto", el hiperplano H ortogonal a la recta que pasa por x_0 y x_1, divide a R^n en dos semiespacios, uno de los cuales contiene al compacto, mientras que x_0 pertenece al otro. Es decir, H separa a x_0 y K. Pero más aún, H puede "inclinarse" un poco respecto a la recta y seguir separando a x_0 y K.

O sea, que existe un cono de direcciones con vértice en x_0, tal que el hiperplano ortogonal por x a cada dirección de ese cono, separa a x_0 y K.

Se omitirá la demostración de estas afirmaciones, que son evidentes en R^2 o R^3. (Ver [17]).

b) Si $P = P(x_1, \ldots, x_n)$ es un polinomio en n variables, que se anula en un abierto $U \subset R^n$, entonces P debe ser idénticamente nulo.

En efecto, basta suponer que U es un cubo abierto, $(a_1,b_1)\times\dots\times(a_n,b_n)$.

Fijados $x_2,\dots,x_n$ con $a_j < x_j < b_j$, se considera el polinomio en t $P(t;x_2,\dots,x_n) = \sum_{j=0}^{k} P_j(x_2,\dots,x_n)\, t^j$, que se anula en el intervalo (a_1,b_1). Debe ser entonces idénticamente nulo; o sea, cada polinomio P_j se anula para $a_j < x_j < b_j$.

Si se repite con cada uno de esos polinomios este razonamiento y así sucesivamente, se llega a la afirmación hecha.

Demostración del teorema 1.8.

Primeramente se considera el caso en que las distribuciones f,g pertenecen a C_0^∞. Se supone además que el operador P(D) de orden m, se escribe en la forma

$$P(D) = a_0\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j\left(\frac{\partial}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j$$

$$a_0 \neq 0. \qquad (1)$$

Se indicará con $\sim$, la transformada de Fourier respecto de la variable $\bar{x} = (x_2,\dots,x_n)$

$$\tilde{P}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\tilde{f} = \widetilde{P(D)f} = a_0\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^m\tilde{f} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j(-2\pi i\bar{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^j\tilde{f} = \tilde{g}$$

Sean K_1 = sop f; K_2 = sop g y sea K_i' la proyección sobre el eje x_1 del compacto K_i.

Finalmente, sea $I_i = [a_i,b_i]$, el mínimo intervalo que contiene a K_i'.

Como $K_2 \subset K_1$, debe ser $I_2 \subset I_1$. Lo que quiere probarse es que $I_2 = I_1$.

Fijados $\bar{x} \in R^{n-1}$, $a < a_1$, se plantea el problema diferencial ordinario

$$\begin{cases} \tilde{P}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) h = 0 & x_1 < a_2 \\ \\ h^{(j)}(a) = 0 & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

Se sabe que este problema tiene una y sólo una solución, que es la función idénticamente nula.

Como la función $\tilde{f}(x_1, \bar{x})$ también lo satisface, debe ser $\tilde{f}(x_1, \bar{x}) = 0$ para $x_1 < a_2$.

Por otra parte, dado $b > b_1$, puede plantearse el problema

$$\begin{cases} \tilde{P}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) h = 0 & x_1 > b_2 \\ \\ h^{(j)}(b) = 0 & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

También aquí es el cero la única solución, de donde se deduce que $\tilde{f}(x_1, \bar{x}) = 0$ para $x_1 > b_2$.

O sea que $f(x_1, \bar{x}) = 0$, $\forall\ \bar{x} \in R^n$, $x_1 \notin I_2$. De aquí se deduce que $I_1 = I_2$.

Se ha probado entonces que sop f está ontenido en B_{x_1}, banda mínima perpendicular al eje x_1 que contiene sop g, suponiendo que el operador $P(D)$ tiene la forma (1).

Dado un operador $P(D)$ de orden m cualquiera, se verá ahora qué cambios de coordenadas permiten expresarlo en la forma (1).

Sea entonces $y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$, un cambio de coordenadas.

Se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

Es decir,

$$P(D) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right) = P\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{j1} \frac{\partial}{\partial y_j},\ldots,\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

Para no complicar la notación, se hace el reemplazo formal

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \to y_j$$

Lo que se busca es poder elegir la matriz (α_{ij}) no singular, de tal manera que en $P(\sum_j \alpha_{j1} y_j,\ldots,\sum_j \alpha_{jn} y_j)$, aparezca $b_0 y_1^m$, para cierto $b_0 \neq 0$.

Si se escribe el polinomio P como suma de sus partes homogéneas, $P = P_m + P_{m-1} + \ldots + P_0$, y_1^m sólo puede aparecer en la parte homogénea de grado máximo, P_m. Además y_1^m tendrá como coeficiente, $P_m(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n})$.

Luego, el cambio de coordenadas $x \to y$ permitirá llevar el operador a la forma (1) si $P_m(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n}) \neq 0$.

Por la homogeneidad del polinomio P_m, basta considerar entonces cualquier vector unitario $(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1n})$ que no sea raíz de P_m y completarlo a una rotación, para obtener un cambio de coordenadas que permita llevar el operador a la forma (1).

Con todo esto, el teorema se concluye cuando $f,g \in C_0^\infty$, del siguiente modo:

Dado $x_0 \notin C_c(\text{sop } g)$, por la compacidad de la cápsula convexa, existe $x_1 \in C_c(\text{sop } g)$ que realiza la distancia de x_0 a ese conjunto.

De acuerdo con lo observado antes, si x es cualquier punto del segmento abierto (x_0,x_1), hay un cono de direcciones con vértice en x_0, tal que el hiperplano ortogonal a cada una de ellas por x, separa a x_0 y $C_c(\text{sop } g)$.

También fue observado antes que un polinomio no idénticamente nulo no puede anularse en un abierto; si se trata de un polinomio homogéneo, esto implica que no puede anularse en ningún abierto de la esfera unitaria; aplicando esto al polinomio P_m, resulta que en el cono de direcciones por x_0 antes fijado, debe haber alguna dirección $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ tal que $P_m(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \neq 0$. Entonces llamando $y_1 = \sum \alpha_j x_j$, puede completarse a nuevas coordenadas $(y_1,\dots,y_n)$, en las cuales el operador $P(D)$ tiene la forma (1).

De acuerdo con lo probado al comienzo, sop f está contenido en B_{y_1}, banda mínima perpendicular al eje y_1, que contiene sop g. Pero si el hiperplano ortogonal por x a $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ separa a x_0 de $C_c(\text{sop } g)$, también debe separar a x_0 de B_{y_1}; luego $x_0 \notin$ sop f.

Esto concluye la prueba del teorema cuando $f,g \in C_0^\infty$.

Se demuestra el caso general, $f,g \in \mathcal{E}'$, por regularización.

Sea $\{\rho_k\}$ una sucesión regularizante y sean $f_k = f*\rho_k$, $g_k = g*\rho_k$. Se sabe que $f_k,g_k \in C_0^\infty$, $f_k \to f$, $g_k \to g$ en $\mathcal{E}'$.

Además

$$P(D)f_k = P(D)f * \rho_k = g_k.$$

$$\text{sop } f_k \subset 1/k\text{-ent sop } f$$

$$\text{sop } g_k \subset 1/k\text{-ent sop } g$$

$$\forall\ k \geq 1$$

De acuerdo con lo que acaba de probarse, para $k \geq j$, es:

$$\text{sop } f_k \subset C_c(\text{sop } g_k) \subset C_c(1/k\text{-ent sop } g) \subset$$

$$\subset C_c(1/j\text{-ent sop } g).$$

Tomando límite para $k \to \infty$, se tiene

$$\text{sop } f \subset C_c(1/j\text{-ent sop } g), \quad \forall\ \ j \geq 1.$$

Se deduce entonces que $\text{sop } f \subset C_c(\text{sop } g)$.

Esto concluye la demostración del teorema. #

Teorema 1.9.

Sean $U \subset V$ abiertos de R^n y sea $f \in C^\infty(U)$ tal que $P(D)f = 0$ en U.

Entonces, dados $K \subset U$ compacto, convexo, $\varepsilon > 0$, $N \geq 0$, existe una función $g \in C^\infty(R^n)$ cumpliendo

$$P(D)g = 0 \text{ en } V$$

$$\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha(f-g)(x)| < \varepsilon.$$

Antes de demostrar este resultado, se harán algunas observaciones:

Dado un compacto $K \subset R^n$, se define

$$C^\infty(K) = \{f: K \to C / \exists\ g \in C^\infty(R^n) \text{ cumpliendo } g/K = f.\}$$

O sea, $C^\infty(K)$ indica el espacio de las restricciones a K de las funciones de $C^\infty(R^n)$.

Si $N = \{f \in C^\infty(R^n)/f/_K = 0\}$, $C^\infty(K)$ se identifica con el cociente $\frac{C^\infty(R^n)}{N}$.

Con la topología de la convergencia uniforme de cada derivada sobre los compactos de R^n, $C^\infty(R^n)$ es un espacio de Fréchet, (ver [15]), del cual N es un subespacio cerrado. Por lo tanto, la topología cociente da a $C^\infty(K)$ estructura de espacio de Fréchet.

En un espacio de Fréchet, subsiste la caracterización de la clausura en términos de la anulación de funcionales continuos. En efecto, dados un espacio de Fréchet F, un subespacio H y un $x \in F$, se comprueba que $x \in \overline{H}$ si y sólo si para cada funcional $\ell \in F^*$, $\ell/_H = 0$ implica $\ell(x) = 0$.

<u>Demostración del teorema 1.9.</u>

Se distinguirán dos casos, según que el abierto V sea o no acotado.

a) V es acotado.

Fijado $K \subset U$ compacto, se considera

$\mathcal{V} = \{\overline{g} \in C^\infty(K)/\overline{g} = g/_K$, siendo $g \in C^\infty(R^n)$ solución de $P(D)g = h$ en R^n, con $h \in C_0^\infty(R^n)$ tal que sop $h \cap \overline{V} = \emptyset\}$.

Se admite por un momento que $\overline{f} = f/_K$ pertenece a la clausura de $\mathcal{V}$ en $C^\infty(K)$. Esto permite concluir el resultado de la siguiente forma:

Si $\overline{f} \in \overline{V}$, existe una sucesión $\{\overline{g}_j\} \subset V$ tal que $\overline{g}_j \to \overline{f}$ en $C^\infty(K)$.

Esto implica que existen funciones g_j, h_j en las condiciones de la definición de V y que para cada n-upla α, es

$$\sup_K |D^\alpha(g_j - f)| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

Luego, dados $\varepsilon > 0$, $N \geq 0$, existe $j_0 = j_0(\varepsilon)$ tal que

$$\sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha(g_{j_0} - f)| < \varepsilon.$$

La función g_{j_0} cumple todo lo pedido.

Falta ahora probar que $\overline{f} \in \overline{V}$.

En primer lugar, $\overline{f} \in C^\infty(K)$.

En efecto, dado un abierto U_1 tal que $K \subset U_1 \subset \overline{U}_1 \subset U$ y dada $\varphi \in C_0^\infty(U)$ que vale 1 en U_1, se define

$$\tilde{f} = \begin{cases} f.\varphi & \text{en } U \\ 0 & \text{en } R^n \setminus U \end{cases}$$

$\tilde{f} \in C^\infty(R^n)$ y además $\tilde{f}/_K = f/_K = \overline{f}$.

Por lo dicho antes, para ver que $\overline{f} \in \overline{V}$, basta comprobar que si $\ell \in C^\infty(K)^*$ se anula en V, entonces $\ell(\overline{f}) = 0$.

Sea ℓ una forma lineal y continua sobre $C^\infty(K)$, que se anula en V.

ℓ puede extenderse a una forma $L \in \mathcal{E}'(R^n)$, definiendo $L(\varphi) = \ell(\varphi/_K)$.

Se sabe que las formas lineales y continuas sobre $C^\infty(R^n)$ son exactamente las distribuciones de soporte compacto.

Además, sop $L \subset K$. En efecto, si $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ y sop $\varphi \subset R^n \setminus K$, entonces $L(\varphi) = \ell(\varphi/_K) = 0$.

Sea ahora $G \in \mathcal{S}'$, una solución fundamental del operador $P(D)$.

Definiendo $(G_-,\varphi(x)) = (G,\varphi(-x))$, resulta que G_- es solución fundamental temperada del operador $P(-D) = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha$.

En efecto, si $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$, es

$$(P(-D)G_-,\varphi) = (G_-,P(D)\varphi) = (G,[P(D)\varphi](-x)) =$$

$$= (G,P(-D)[\varphi(-x)]) = (P(D)G,\varphi(-x)) = \varphi(0).$$

La distribución $M = G_-*L$, satisface entonces $P(-D)M = L$.

Se afirma que sop$M \subset \overline{V}$. En efecto, dada $\varphi \in C_0^\infty(R^n \setminus \overline{V})$, es

$$(M,\varphi) = (G_-*L,\varphi) = (L_x, (G_y, \varphi(x-y))) = (L, G*\varphi)$$

La función $G*\varphi/_K$ pertenece a $\mathcal{V}$ porque $G*\varphi \in C^\infty(R^n)$ y satisface $P(D)(G*\varphi) = 0$ en V.

Luego $(L, G*\varphi) = \ell(G*\varphi/_K) = 0$;

Entonces, al tener la ecuación $P(-D)M = L$ y saber que M,L son distrbuciones de soporte compacto, por el teorema 1.8, se puede concluir que sop $M \subset C_c$ (sop L) $\subset K$, porque K es un compacto convexo que contiene a sop L.

Sea ahora $\varphi \in C_0^\infty(U)$ que vale 1 en un entorno K_ε de K.

Es:

$$\ell(f/K) = (L,\tilde{f}) = (L,f) = (P(-D)M,f) =$$

$$= (P(-D)M, \varphi f) = (M,P(D)(\varphi f))$$

$P(D)(\varphi f)$, es igual a $\varphi P(D)f$ + términos en los que se deriva al menos una vea la función φ.

Como M tiene soporte contenido en K, lo anterior vale entonces $(M, \varphi P(D)f) = (M, P(D)f) = 0$ porque por hipótesis, $P(D)f = 0$ en U, abierto que contiene a K.

Esto concluye la prueba del caso a).

b) V es un abierto cualquiera.

Bastará entonces suponer que $V = R^n$.

Sea $B_k = \{x \in R^n / |x| \leq k\}$; existe k_0, tal que $K \subset B_{k_0}$.

Por comodidad, se supone que $k_0 = 1$.

De acuerdo con la parte a), existe $g_1 \in C^\infty(B_2)$ tal que

$$P(D)g_1 = 0 \quad \text{en} \quad B_2$$

$$\sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha(g_1 - f)| < \varepsilon$$

Volviendo a aplicar esa parte, existe $g_2 \in C^\infty(B_3)$ tal que

$$P(D)g_2 = 0 \quad \text{en} \quad B_3$$

$$\sup_{\substack{\bar{B}_1 \\ |\alpha| \leq N+1}} |D^\alpha(g_1 - g_2)| < \varepsilon/2$$

Razonando así sucesivamente, se construye $g_k \in C^\infty(B_{k+1})$ tal que

$$P(D)g_k = 0 \quad \text{en} \quad B_{k+1}$$

$$\sup_{\substack{\bar{B}_{k-1} \\ |\alpha| \leq N+k-1}} |D^\alpha(g_{k-1} - g_k)| < \varepsilon/2^{k-1}$$

Fijada ahora una N-upla β, sea $k_0 / |\alpha| \leq N + k_0 - 1$, se tiene entonces, $\forall\ k \geq k_0$, $p \geq 1$,

$$\sup_{\overline{B}_k} |D^\beta (g_{k+p} - g_k)| \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \sup_{\overline{B}_k} |D^\beta (g_j - g_{j-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \varepsilon / 2^{j-1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Como $\cup \overline{B}_k = R^n$, resulta que la sucesión $\{D^\beta g_k\}$ es de Cauchy en $C^\infty(R^n)$, para cada n-upla β. Por la completitud de ese espacio, debe existir $g \in C^\infty(R^n) / g_k \to g$ en $C^\infty(R^n)$.

Entonces g cumple $P(D)g = 0$ en R^n.

En efecto, si $k \geq m$, se tiene por construcción que $P(D)g_k = 0$ en $\overline{B}_m$. Luego, tomando límite para $k \to \infty$, es $P(D)g = 0$ en $\overline{B}_m$, $\forall\ m \geq 1$.

En consecuencia, $P(D)g$ vale cero en todo R^n.

Para concluir el teorema, falta ver que g aproxima a f en K, como se afirma:

$$\sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha (g-f)| \leq \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha (g-g_k)| +$$

$$+ \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha (g_k - g_1)| + \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha (g_1 - f)|$$

Por construcción de g_1, el último término puede hacerse $< \varepsilon$.

El segundo se acota con

$$\sum_{j=2}^{k} \sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha (g_j - g_{j-1})| \leq \sum_{j=2}^{k} \varepsilon / 2^{j-1} < \varepsilon .$$

En cuanto al primero, por la convergencia de la sucesión $\{g_k\}$ hacia g, puede hacerse arbitrariamente pequeño, si se toma k adecuado.

Esto concluye la prueba del teorema. #

Demostración del teorema 1.7. c)

Lo que primero va a hacerse, es obtener un cubrimiento y una partición de la unidad subordinada, adecuados.

Se afirma que existe una familia $\{K_j\}$ de compactos convexos tal que

$$K_j \subset \mathring{K}_{j+1};\ \cup K_j = U.$$

En efecto, si U es todo R^n, basta tomar $K_j = \{|x| \leq j\}$. Si $R^n \setminus U$ es no vacío, esa sucesión $\{K_j\}$ puede construírse así: Como U es abierto, existe una bola cerrada B contenida en U; sea $K_1 = B$.

Para cada $x \in \partial B$, sea $d_x = d(x, R^n \setminus U)$.

Se toma entonces $K_2 = C_c(B \cup \bigcup_{x \in \partial B} |y-x| \leq \frac{d_x}{2}\})$

K_3 se construye de la misma manera a partir de K_2 y así sucesivamente.

La partición de la unidad $\{\varphi_j\}$ subordinada al cubrimiento $\{K_j\}$, se pide que cumpla lo siguiente: $\varphi_j \in C_0^\infty(U)$; sop $\varphi_1 \subset K_3$; sop $\varphi_j \subset K_{j+2}-K_j$, $j \geq 2$; $\sum_j \varphi_j = 1$ en cada compacto de U.

Estas funciones φ_j se obtienen así:

Sea $\Phi_j \in C_0^\infty$ tal que

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_j \\ 0 & x \in U-K_{j-1} \end{cases}$$

La sucesión $\{\Phi_j\}$ converge hacia 1 en $C^\infty(U)$.

Luego, tomando $\varphi_j = \Phi_{j+1}-\Phi_j$, se comprueba que la sucesión $\{\varphi_j\}$ tiene las propiedades pedidas.

Dada ahora una función $g \in C^\infty(U)$, se escribe

$$g = \sum_j g\,\varphi_j = \sum_j g_j$$

Quieren hallarse funciones f_j en $C^\infty(U)$ tales que

$$P(D) f_j = g_j$$

$$\sum f_j \text{ converge hacia cierta } f \text{ en } C^\infty(U).$$

En estas condiciones, será $P(D)f = g$.

En primer lugar, como $g_j \in C_0^\infty(U)$, mediante una solución fundamental para $P(D)$, se puede encontrar $\overline{f}_j \in C^\infty(U)$ tal que $P(D)\,\overline{f}_j = g_j$.

Falta ahora modificar esas funciones $\overline{f}_j$ para que sigan siendo solución, pero con $\sum \overline{f}_j$ convergente.

Como sop $g_j \subset K_{j+1}-K_j$, es $P(D)g_j = 0$ en $\overset{\circ}{K}_j$; luego, aplicando el teorema 1.9, existe h_j en $C^\infty(R^n)$ tal que $P(D)h_j = 0$ en R^n y además $\sup\limits_{\substack{K_{j-1}\\ |\alpha|\leq j}} |D^\alpha(h_j-g_j)| \leq 1/_{2^j}$, $j \geq 2$.

Se consideran ahora las funciones f_j definidas como

$$f_j = \begin{cases} \overline{f}_j & j = 1 \\ \overline{f}_j - h_j & j \geq 2 \end{cases}$$

Se tiene:

$$P(D)f_j = P(D)\overline{f}_j = g_j \quad \text{en } U.$$

Además, se afirma que la serie $\sum\limits_j f_j$ converge en $C^\infty(U)$.

En efecto, dados un compacto $K \subset U$ y un número natural $k \geq 0$, existe j_0 tal que $K \subset K_{j_0-1}$, $k \leq j_0$. Entonces, para $j \geq j_0$, es

$$\sup_{\substack{K \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha(\bar{f}_j - h_j)| \leq \frac{1}{2^j}$$

Luego, la serie de término general $D^\alpha(\bar{f}_j - h_j)$ converge uniformemente en K.

Esto muestra que $\sum_j f_j = f$ en $C^\infty(U)$.

Finalmente, $P(D)f = g$.

Se concluye así la pruebe del teorema 1.7. c)

#

Corolario 1.2.

Todo operador $P(D)$ de coeficientes constantes, es inyectivo en $\mathcal{E}'$.

Demostración

Sea $T \in \mathcal{E}'$ tal que $P(D)T = 0$; dada $\varphi \in C^\infty(R^n)$, por el teorema 1.7. c), existe $\psi \in C^\infty(R^n)$ tal que $P(-D)\psi = \varphi$.

Entonces, $(T,\varphi) = (T, P(-D)\psi) = (P(D)T, \psi) = 0$.

Luego se concluye que $T = 0$.

#

Observación 1.4.

Cuando se habló antes de la condición necesaria de resolubilidad local, se introdujo la noción de adjunto para un operador $P(x;D)$. Ese operador adjunto, $P^*(x,D)$, cumple que dadas $\varphi, \psi \in C_0^\infty(R^n)$, es

$$(P(x,D)\varphi, \psi)_2 = (\varphi, P^*(x,D)\psi)_2$$

donde $(\ ,\ )_2$ indica el producto escalar en $L^2(R^n)$.
El operador $P(-D)$, que ya apareció en la prueba del teorema 1.9, para el caso de coeficientes cualesquiera se define como $\sum(-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha}\ .)$; o sea que en el adjunto aparece el conjugado de los coeficientes y en el operador $P(x,-D)$, llamado <u>traspuesto</u> y notado $P^t(x,D)$, no.
Dadas $T \in \mathcal{D}'(R^n)$, $\varphi \in C_0^{\infty}(R^n)$, se tiene

$$(P(x,D)T,\varphi) = (T,P^t(x,D)\varphi).$$

O sea, P^t juega respecto de la forma bilineal $(\ ,\ )$ entre $\mathcal{D}'$ y C_0^{∞}, el mismo papel que P^* respecto de la forma sesquilineal $(\ ,\ )_2$.
Lo importante de recalcar en el corolario 1.2, es que un resultado de inyectividad sobre el operador P, se obtuvo conociendo un resultado de suryectividad sobre el operador transpuesto P^t.
Por otra parte, ese corolario 1.2 puede obtenerse también empleando el teorema de Paley-Wiener.

<u>Ejercicios</u>

<u>1.1.</u> Escribir el polinomio característico y el polinomio asociado, para cada uno de los operadores de Laplace, Cauchy-Riemann, del calor, de Schrödinger y de las ondas. Decir cuáles de ellos son elípticos.

<u>1.2.</u> Dado $h \in R^n$, mostrar que el operador de traslación τ_h, definido como:

$$(\tau_h T,\varphi) = (T_x,\varphi(x+h)) \quad \text{para} \quad T \in \mathcal{D}'(R^n), \varphi \in \mathcal{D}(R^n)$$

no es seudolocal.

1.3. Sea $P(x,D)$ un operador diferencial con coeficientes indefinidamente derivables en cierto abierto $U \subseteq R^n$; sea K una parametriz bilátera para $P(x,D)$.

Si R es un regularizante, probar que $R+K$ es otra parametriz bilátera para el operador dado.

1.4. Sea $P(\frac{d}{dt}) = C_m (\frac{d}{dt})^m + \ldots + C_1(\frac{d}{dt}) + C_0$, un operador diferencial ordinario de orden m, con coeficientes constantes $C_j \in C$.

Mostrar que $P(\frac{d}{dt})$ admite una solución fundamental G de la forma

$$G = Hg$$

donde:

$H(t)$ es la función de Heaviside,

$$H(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

g es la solución del problema:

$$\begin{cases} P(\frac{d}{dt})g = 0 \\ \\ (\frac{d}{dt})^j g(0) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant j \leqslant m-2 \\ \\ 1/C_m & j = m-1 \end{cases} \end{cases}$$

¿Qué puede decirse sobre la propiedad de ser G temperada? Dar ejemplos.

1.5.

a) Expresar el operador de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

b) Expresar el operador de Laplace en coordenadas esféricas en R^n, aplicado a una función radial.

1.6.

a) Obtener soluciones fundamentales temperadas para los operadores de Laplace, de Cauchy-Riemann, del calor y de Schrödinger.

b) De las distribuciones obtenidas en a), decir cuáles son funciones localmente integrables, cuáles coinciden con funciones indefinidamente derivables o analíticas en $R^n \setminus 0$.

1.7. Lo mismo que el ejercicio 1.6, para la ecuación de las ondas en una variable espacial.

1.8. Construir soluciones fundamentales temperadas para un operador elíptico P(D) de orden 1, en R y en R^2.

Comprobar que se obtienen funciones localmente integrables, que son analíticas fuera del origen.

Sugerencia: Para R^2, observar que mediante un cambio lineal de coordenadas, puede reducirse el operador al de Cauchy-Riemann.

1.9. Construir una solución fundamental del operador $\frac{\partial}{\partial x_1}+1$, en R^n.

¿Es hipoelíptico? Mostrar que es inyectivo en $E'(R^n)$. ¿Es siempre inyectivo?

1.10. Emplear el teorema de Paley-Wiener para mostrar que todo operador P(D) de coeficientes constantes es inyectivo en $E'(R^n)$.

¿Qué puede decirse si P es un operador de coeficientes variables?

1.11. Mostrar que el operador de rotación

$$R = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \qquad (x,y) \in R^2$$

no es resoluble en ninguna corona centrada en el cero. Concluir que este operador no es localmente resoluble en el origen. ¿Es localmente resoluble en algún otro punto? ¿Cumple la condición necesaria de resolubilidad local de Hörmander en el cero?

1.12. Estudiar la resolubilidad local del operador

$$S = x\frac{\partial}{\partial y} - i\, y\frac{\partial}{\partial x} \qquad (x,y) \in R^2.$$

1.13. Dado un operador $P(x,D)$ de orden m, elíptico en cierto abierto $U \subseteq R^n$, probar por inducción sobre el orden de derivación α, que dado $K \subset U$ compacto, α n-upla entera no negativa, existe $C = C(K,\alpha) > 0$ tal que

$$\left|D^\alpha \frac{1}{P(x;-2\pi i\xi)}\right| \leq C(1+|\xi|)^{-m-|\alpha|} \quad \text{para} \quad x \in K, \quad |\xi| \text{ grande.}$$

1.14.

a) Si C(D) indica el operador del calor, probar por inducción sobre el orden de derivación α, que dada una n-upla entera, no negativa α, existe $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$\left|D^\alpha \frac{1}{C(-2\pi i\xi)}\right| \leq C(1+|\xi|)^{-1-\frac{1}{2}|\alpha|} \quad \text{para} \quad |\xi| \text{ grande}$$

b) Construir una parametriz seudolocal para el operador C(D).

a) Sea P(D) un operador cuyo polinomio asociado verifica:

Existen constantes $C, N, \varepsilon, \delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|P(-2\pi i(\xi + i\eta))| \geq C(1+|\xi|)^{\delta_1}$$

para $\quad |\xi| \geq N, \quad |\eta| < \varepsilon|\xi|^{\delta_2}$

Siguiendo el razonamiento hecho en el teorema 1.5, probar que P(D) es hipoelíptico.

b) Obtener la desigualdad que figura en a), para el operador del calor.

1.16. Sea G una función entera. Probar que el operador G* es un regularizante analítico.

1.17. Dado k = 1,2,..., probar que existe m = 1,2,... tal que las soluciones fundamentales del operador Δ^m, son de clase C^k en todo R^n.

1.18. Enunciar y demostrar el lema 1,7, para un operador P(x,D) de orden m, elíptico en cierto abierto $U \subset R^n$.

1.19. Se considera el operador $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$

Mostrar una solución analítica, real, pero no analítica compleja, de la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{z} \text{ en } C \setminus 0.$$

1.20.

a) Considerar la ecuación del calor en una variable espacial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (x,t) \in R^2.$$

Describir las soluciones de la forma

$$u(x,t) = v(x)\,w(t),$$

suponiendo $v, w \in C^{\infty}(R)$.

b) Lo mismo que a) para la ecuación de Schrödinger

c) Comparar los resultados obtenidos.

1.21. Sea $P(D)$ un operador cuyo polinomio asociado verifica la desigualdad del ejercicio 1.12.

¿Qué puede decirse de la integrabilidad local de la solución fundamental construída en ese ejercicio?

Referencias

[1] Lewy, H.: "An example of a smooth linear partial differential equation without solution". Annals of Math., vol. 66 (1957), pp. 155-158.

[2] Hörmander, L.: "Linear partial differential operators". Springer-Verlag, (1963).

[3] Peetre, J.: "Rectification a l'article: Une caracterisation abstraite des opérateurs différentiels". Math. Scandinavica, vol. 8 (1960), pp. 116-120.

[4] Schwartz, L.: "Théorie des noyaux". Proc. International Congress of Mathematicians, (1950) EE.UU, pp. 220-230.

[5] Nirenberg, L.: "Pseudo-differential operators". Proc. Symp. Pure Math. AMS, vol. 16, (1968), pp. 149-167.

[6] Hörmander, L.: "On the division of distributions by polynomials". Ark. Mat. vol. 3 (1958), pp. 555-568.

[7] Gunning, H.; Rossi, R.: "Analytic functions of several complex variables". Prentice Hall, (1965).

[8] Trèves, F.: "Linear partial differential equations with constants coefficients". Gordon and Breach, (1966).

[9] Dieudonné, J.: "Foundations of modern analysis". Academic Press, (1960).

[10] Trèves, F.: "Basic linear partial differential equations". Academic Press, (1975).

[11] Mizohata, S.: "The theory of partial differential equations". Cambridge, (1973).

[12] Calderón, A.P.: "Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations". Amer. J. of Math., vol. 80 (1958), pp. 16-36.

[13] Calderón, A.P.: "Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions". Proc. of Symp. Pure Math. AMS, vol. 4 (1961), pp. 33-49.

[14] Lions. J.L.; Magenes, E.: "Problemes aux limites non homogenes et applications", vol. 1. Dunod, (1968).

[15] Garsoux, J.: "Espaces vectoriels topologiques et distributions". Dunod, (1963).

[16] Treves, F.: "Introduction to the theory of pseudo differential operators and Fourier integrals". Simposio de análisis reunido en la Universidad Federal de Pernambuco, (1972).

[17] Cotlar, M.; Cignoli, R.: "Nociones de espacios normados". Tomos I y II. EUDEBA, (1967).

[18] Ahlfors, L.: "Complex analysis". Mc Graw-Hill, (1966).