ISSN 1853-709X

Fascículo 31

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

J. Alvarez Alonso, J. Zilber

Cálculos funcionales en álgebras de Banach

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 31

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 31

CALCULOS FUNCIONALES EN ALGEBRAS DE BANACH

por

Josefina Alvarez Alonso

Jorge Zilber

1983

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
CIUDAD UNIVERSITARIA (NUÑEZ) PABELLON 1
C. P. 1428 - BUENOS AIRES - REP. ARGENTINA

[illegible]

[illegible]

§1. La integral de Bochner:

Sea X un espacio de Banach complejo. Su norma se indicará $\| \|_X$ o bien $\| \|$ cuando no haya posibilidad de confusión. Dado $U \subset R^n$ medible, se considerarán funciones $f: U \to X$; a algunas de estas funciones quiere asignársele una integral en U, relativa a la medida de Lebesgue; el valor de esa integral será un elemento de X. Cuando X sea el espacio de los números complejos C, se obtendrá la integral de Lebesgue usual.

Definición 1.1:

Una función $t: U \to X$ se llama función escalera si

$$t(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j \chi_{E_j}(x)$$

donde χ_{E_j} indica la función característica de subconjuntos medibles E_j de U, de medida finita, disjuntos y $v_j \in X$.

Puede pensarse que una función escalera está definida en todo R^n prolongándola por cero fuera de U.

Definición 1.2:

Una función $f: U \to X$ se llama fuertemente medible si existe una sucesión $\{t_m\}$ de funciones escalera tales que

$$t_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x) \quad \text{en } X, \text{ pp en } U.$$

Si X = C, esta noción de medibilidad fuerte coincide con la medibilidad usual de Lebesgue.

Una consecuencia sencilla de la definición 1.2 es que si f es fuertemente medible, entonces $\|f(x)\|$ como función de U en R es medible.

En efecto, basta observar que $\|f(x)\|$ es el límite pp de la sucesión de funciones escalera medibles

$$\|t_m(x)\| = \sum \|v_j^m\| \chi_{E_j^m}(x).$$

Por otra parte, al ser U un espacio de medida σ-finita, se tiene el siguiente

Lema 1.1:

Sea $f: U \to X$ una función que cumple:

Para cada subconjunto E de U de medida finita, existe una sucesión de funciones escalera que converge pp en E hacia f.

Entonces puede concluírse que existe una sucesión de funciones escalera que converge pp en U hacia f.

Demostración:

Puede escribirse $U = \bigcup_{k \geq 1} E_k$ subconjuntos medibles y disjuntos, de medida finita.

Por hipótesis, para cada k existe una sucesión $\{t_m^k\}$ de funciones escalera tal que

$$t_m^k(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x) \quad \text{en } E_k$$

Fijado m, sea

$$s_m(x) = t_m^1(x) + \ldots + t_m^m(x).$$

Es una función escalera. Además, dado $x \in U$, existe un único E_k tal que $x \in E_k$. Por lo tanto para $m < k$, $s_m(x) = 0$ y para $m \geq k$, $s_m(x) = t_m^k(x)$.

Luego $s_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x)$ en X, pp en U.

Esto concluye la demostración del lema 1.1. #

Otra manera de enunciar el lema 1.1 es diciendo que para que f sea fuertemente medible en U, basta con que lo sea en los subconjuntos de U de medida finita.

Dada una función escalera $t(x) = \sum v_j \chi_{E_j}$, se define

$$\int_U t(x)dx = \sum_j v_j \; |E_j|$$

donde $|E_j|$ indica la medida del conjunto E_j.

Las funciones escalera forman un espacio vectorial complejo; sobre él la integral que se acaba de definir es lineal.

En efecto, no hay dificultad en comprobar que

$$\int_U (\alpha t(x) + \beta s(x))dx = \alpha \int_U t(x)dx + \beta \int_U s(x)dx.$$

Por otra parte, también vale

$$\left\| \int_U t(x)dx \right\| \leq \int_U \|t(x)\| dx.$$

Se considera ahora $f:U \to X$ función fuertemente medible para la cual existe una sucesión $\{t_m\}$ de funciones escalera tal que

$$\lim_{m\to\infty} \int_U \|f(x)-t_m(x)\| \; dx = 0$$

Se afirma que entonces $\int_U t_m(x)dx$ forma una sucesión de Cauchy en X.

En efecto:

$$\left\|\int_U t_m(x)dx - \int_U t_k(x)dx\right\| \leq \int_U \|t_m(x) - t_k(x)\|dx \leq$$

$$\leq \int_U \|t_m(x) - f(x)\| dx + \int_U \|t_k(x) - f(x)\|dx \underset{m,k\to\infty}{\to} 0$$

Luego existe un elemento de X, que se indicará $\int_U f(x)dx$ tal que

$$\int_U t_m(x)dx \underset{m\to\infty}{\to} \int_U f(x)dx$$

En primer lugar $\int_U f\,dx$ no depende de la sucesión elegida. En efecto, si $\{t_m\}$, $\{s_m\}$ son sucesiones de funciones escalera tales que

$$\int_U \|t_m-f\|dx \underset{m\to\infty}{\to} 0, \int_U \|s_m-f\|dx \underset{m\to\infty}{\to} 0, \quad \text{entonces}$$

$$\int_U \|t_m-s_m\|dx \leq \int_U \|t_m-f\|dx + \int_U \|s_m-f\|dx \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

<u>Definición 1.3:</u>

Sea $f:U \to X$ una función fuertemente medible tal que $\exists$ $\{t_m\}$ sucesión de funciones escalera cumpliendo

$$\int_U \|t_m-f\|dx \underset{m\to\infty}{\to} 0$$

Se dice entonces que f es integrable Bochner y se llama a $\int_U f\,dx$ su integral de Bochner.

Lema 1.2:

1) Si f es integrable Bochner, entonces $\|f\|$ es integrable Lebesgue y además

$$\left\| \int_U f \, dx \right\| \leq \int_U \|f\| \, dx$$

2) Dadas $f,g:U \to X$ funciones integrables Bochner y $\alpha,\beta \in C$, se tiene que $\alpha f + \beta g$ también es integrable Bochner y vale

$$\int_U (\alpha f+\beta g) dx = \alpha \int_U f \, dx + \beta \int_U g \, dx.$$

Demostración:

1) Ya se sabe que $\|f\|$ es medible. Por otra parte, si

$$\int_U \|t_m - f\| dx \underset{m\to\infty}{\to} 0, \quad \text{entonces}$$

$$\int_U \|f\| dx \leq \int_U \|t_m\| dx + \int_U \|t_m - f\| dx$$

Para $m = m_0$ adecuado, se comprueba por ejemplo que

$$\int_U \|f\| dx \leq \int_U \|t_{m_0}\| dx + 1.$$

Por otra parte,

$$\left\| \int_U f \, dx \right\| = \lim_m \left\| \int_U t_m \, dx \right\| \leq \lim_m \int_U \|t_m\| dx \leq$$

$$\leq \lim_m \int_U \|t_m - f\| dx + \int_U \|f\| dx = \int_U \|f\| dx.$$

2) Se sabe que $\alpha f + \beta g$ es fuertemente medible. Por otra parte,

$$\alpha\int f\,dx + \beta\int g\,dx = \alpha \lim \int t_m\,dx + \beta \lim \int s_m\,dx =$$

$$= \lim \int (\alpha t_m + \beta s_m)dx = \int (\alpha f + \beta g)dx$$

porque

$$\int \|\alpha f + \beta g - (\alpha t_m + \beta s_m)\|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha| \int \|f-t_m\|\,dx + |\beta| \int \|g-s_m\|\,dx \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Esto concluye la prueba del lema 1.2.
#

Definición 1.4:

Se indicará

$$B^1(U;X) = \{f:U \to X/f \text{ es integrable Bochner}\}.$$

Cuando no haya lugar a confusión también se notará simplemente B^1.

Proposición 1.1:

B^1 es un espacio de Banach definiendo como norma

$$\|f\|_1 = \int_U \|f\|\,dx.$$

Demostración:

De acuerdo con lo probado en el lema 1.2, falta demostrar la completitud.

Sea $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy en B^1. O sea

$$\int_U \|f_m - f_k\|\,dx \underset{m,k\to\infty}{\to} 0$$

Por definición, para cada m existe una función escalera t_m tal que

$$\int_U \|f_m - t_m\| dx \leqslant \frac{1}{m}.$$

Entonces

$$\int_U \|t_m - t_k\| dx \leqslant \int_U \|t_m - f_m\| dx + \int_U \|t_k - f_k\| dx + \int_U \|f_m - f_k\| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{k} + \int_U \|f_m - f_k\| dx \underset{m,k\to\infty}{\to} 0$$

Por lo tanto, dado $\ell \geqslant 1$, $\exists\ m_\ell$ tal que para $m,k \geqslant m_\ell$, es

$$\int_U \|t_m - t_k\| dx \leqslant \frac{1}{2^\ell}$$

Entonces puede contruírse una sucesión $\{t_{m_\ell}\}$ tal que $m_\ell < m_{\ell+1}$, $\int_U \|t_{m_{\ell+1}} - t_{m_\ell}\| dx \leqslant \frac{1}{2^\ell}$

Por lo tanto,

$$\sum_{\ell\geqslant 1} \int_U \|t_{m_{\ell+1}} - t_{m_\ell}\| dx < \infty.$$

El lema de Fatou permite concluir que

$$\int_U \left(\|t_{m_1}\| + \sum_{\ell\geqslant 1} \|t_{m_{\ell+1}} - t_{m_\ell}\|\right) dx < \infty.$$

En consecuencia se tiene

$$\|t_{m_1}\| + \sum_{\ell\geqslant 1} \|t_{m_{\ell+1}} - t_{m_\ell}\| < \infty \qquad \text{pp en } U.$$

Al ser X un espacio de Banach se deduce que

$$t_{m_{L+1}} = t_{m_1} + \sum_{\ell=1}^{L} (t_{m_{\ell+1}} - t_{m_\ell})$$

converge pp en U, hacia una función $f:U \to X$, que es por lo tanto fuertemente medible.

Además

$$\int_U \|f-t_{m_{L+1}}\|dx = \int_U \|\sum_{\ell \geq L+1} (t_{m_{\ell+1}}-t_{m_\ell})\|dx \leq$$

$$\leq \int_U \sum_{\ell \geq L+1} \|t_{m_{\ell+1}}-t_{m_\ell}\| dx$$

Si se aplica el lema de Fatou, resulta que esto puede acotarse con

$$\sum_{\ell \geq L+1} \int_U \|t_{m_{\ell+1}}-t_{m_\ell}\|dx \underset{L\to\infty}{\to} 0.$$

Esto muestra que f es integrable Bochner.

Finalmente

$$\int_U \|f_m-f\|dx \leq \int_U \|f_m-t_m\|dx + \int_U \|t_m-t_{m_\ell}\|dx +$$

$$+ \int_U \|t_{m_\ell}-f\|dx$$

Con lo cual $f_m \to f$ en B^1.

Esto concluye la prueba de la proposición 1.1. #

<u>Proposición 1.2</u>: (Teorema de convergencia mayorada para la integral de Bochner).

Sea $\{f_m\}$ una sucesión en B^1 tal que

$\|f_m(x)\| \leq g(x)$, con $g:U \to R$ integrable.

Si $f_m(x) \to f(x)$ pp en U, entonces $f \in F^1$ y

$$\int_U \|f_m-f\|dx \to 0$$

En particular

$$\int_U f_m \, dx \to \int_U f \, dx.$$

Demostración:

Fijado k, se tiene

$$f_m(x)-f_k(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x)-f_k(x) \text{ pp en } U.$$

Por lo tanto,

$$\|f_m(x)-f_k(x)\| \underset{m\to\infty}{\to} \|f(x)-f_k(x)\|.$$

De aquí se deduce que las funciones $\|f(x)-f_k(x)\|$ son medibles Lebesgue.

Además, de acuerdo con las hipótesis, se tiene

$$\|f(x)-f_k(x)\| \underset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \text{pp en } U$$

$$\|f(x)-f_k(x)\| \leqslant 2g(x)$$

Se está entonces en las condiciones del teorema de convergencia mayorada de Lebesgue. Por lo tanto,

$$\exists \lim_{k\to\infty} \int_U \|f(x)-f_k(x)\| dx = 0.$$

Falta ahora comprobar que $f \in B^1$ y que $\int_U f_k \, dx \to \int_U f \, dx.$

De lo anterior se deduce que

$$\exists \lim_{k,m\to\infty} \int_U \|f_k-f_m\| dx$$

Según la proposición 1.1, debe existir $\tilde{f} \in B^1$ tal que

$$f_k \to \tilde{f} \quad \text{en } B^1.$$

O sea,

$$\int_U \|f_k-\tilde{f}\|dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Por lo tanto

$$\int_U \|f-\tilde{f}\|dx \leqslant \int_U \|f-f_k\|dx + \int_U \|\tilde{f}-f_k\|dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Es decir f y $\tilde{f}$ coinciden en casi todo punto de U.

Resulta entonces que $f \in B^1$ y además

$$\left\|\int_U f_k\, dx-\int_U f\, dx\right\| \leqslant \int_U \|f_k-f\|dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Esto concluye la prueba de la proposición 1.2.

#

Proposición 1.3:

Dada $f:U \to X$, son equivalentes

a) $f \in B^1$

b) f es fuertemente medible y $\|f\|$ es integrable Lebesgue.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b)

Por definición de pertenecer a B^1, es fuertemente medible.

En consecuencia, $\|f\|$ es medible Lebesgue.

Sea $\{t_m\}$ una sucesión de funciones escalera tal que

$$\int_U \|f-t_m\|dx \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Existe entonces m_0 tal que $\int_U \|f-t_{m_0}\|dx \leqslant 1.$

Por lo tanto,

$$\int_U \|f\|dx \leqslant \int_U \|t_{m_0}\|dx + 1 < \infty.$$

b) ⇒ a)

Por ser f fuertemente medible, ∃ una sucesión de funciones escalera $\{t_m\}$ tal que

$$t_m \to f \quad \text{pp en } U.$$

Sea ahora

$$C_m = \{x \in U / \|t_m(x)\| \leq 2\|f(x)\|\}$$

C_m es un subconjunto medible de U, para cada m.

Se considera

$$s_m(x) = \chi_{C_m}(x)\, t_m(x).$$

$\{s_m\}$ es una sucesión de funciones escalera que cumple

$\|s_m(x)\| \leq 2\|f(x)\|, \quad \forall\, m.$

Además

$$s_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} f(x) \quad \text{pp en } U.$$

En efecto, basta observar que a menos de un conjunto de medida nula, es

$$U = \bigcup_m C_m.$$

Entonces se está en condiciones de aplicar la proposición 1.2.

Resulta que $f \in B^1$.

Esto concluye la prueba de la proposición 1.3.

De la demostración de la proposición 1.3 resulta también que si $f \in B^1$ y $t_m(x) \to f(x)$ pp en U, entonces $s_m = \chi_{C_m} \cdot t_m$ cumple simultáneamente $s_m(x) \to f(x)$ pp en U.

$$\int_U \| s_m - f \| dx \to 0.$$

O sea hay una sucesión de funciones escalera que permite comprobar simultáneamente que f es fuertemente medible y que $f \in B^1$.

Corolario 1.1:

Si $f:U \to X$ es fuertemente medible y acotada, entonces pertenece a $B^1(V;X)$, para todo subconjunto V de U medible de medida finita.

Demostración:

Basta observar que $\chi_V f$ está en las condiciones de b) de la proposición 1.3.

#

Proposición 1.4:

Si $f:U \to X$ es fuertemente medible, $g:U \to C$ es medible en el sentido usual, entonces el producto multiplicativo $f.g:U \to X$ es fuertemente medible.

Demostración:

Sea $\{t_m\}$ sucesión de funciones escalera tal que

$$t_m(x) \to f(x) \quad \text{pp en } U, \text{ en } X.$$

Al ser g medible en el sentido usual, se sabe que existe una sucesión $\{s_m\}$ de funciones escalera "escalares", tal que

$$s_m(x) \to g(x) \quad \text{pp en } U, \text{ en } C.$$

Entonces $\{t_m \; s_m\}$ es una sucesión de funciones escalera tal que

$$t_m(x) \; s_m(x) \to f(x) \; g(x) \quad \text{pp en } U, \text{ en } X.$$

Esto concluye la prueba de la proposición 1.4.

#

Proposición 1.5:

Sea $\{f_m\}$ una sucesión de funciones $f_m : U \to X$ fuertemente medibles tal que $f_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x)$ pp en U.

Entonces f es también fuertemente medible.

Demostración:

Se sabe que f_m es fuertemente medible para cada m y por la proposición 1.4, también lo es $\dfrac{f_m}{1+\|f_m\|}$

Además

$$\frac{f_m}{1+\|f_m\|} \underset{m\to\infty}{\to} \frac{f}{1+\|f\|}$$

Por otra parte, es

$$\left\|\frac{f_m}{1+\|f_m\|}\right\| \leqslant 1, \quad \forall\ m.$$

De la proposición 1.2 resulta que $\dfrac{f}{1+\|f\|}$ es integrable Bochner en los subconjuntos de U de medida finita.

El lema 1.1 asegura que $\dfrac{f}{1+\|f\|}$ es fuertemente medible en U.

Finalmente, la proposición 1.4 permite concluir que f es fuertemente medible en U.

Esto concluye la prueba de la proposición 1.5.

#

Definición 1.4:

Dada $f: U \to X$ se dice que es débilmente medible si la función $\ell \circ f : U \to C$ es medible para cada forma ℓ perteneciente a X', dual topológico de X.

Es claro que toda función fuertemente medible es débilmente medible.

Dada $f:U \to X$ continua, resulta débilmente medible, pues para cada $\ell \in X'$, al ser $\ell \circ f:U \to C$ continua, se sabe que es medible Lebesgue.

Definición 1.5:

Una función $f:U \to X$ se llama separablemente valuada si la imagen $f(U)$ es un subespacio topológico separable de X.

Se dirá que f es casi separablemente valuada si existe un subconjunto E de U de medida cero tal que $f(U \setminus E)$ es separable.

Puede probarse que si $f:U \to X$ es continua, entonces es separablemente valuada. (Ver [1], p. 73).

Proposición 1.C: (Pettis)

Dada $f:U \to X$, son equivalentes:

a) f es fuertemente medible.

b) f es débilmente medible y casi separablemente valuada.

En la demostración de esta proposición se necesitan algunas nociones auxiliares que se dan a continuación.

Definición 1.6:

Un subconjunto $S \subset X'$ se dice que es determinante para X si para cada $v \in X$ vale

$$\|v\| = \sup_{\ell \in S} \{|\ell(v)|\}$$

Esta definición implica que $\|\ell\|_{X'} \leq 1, \quad \forall\ \ell \in S$.

En efecto:

Por definición es $\|\ell\|_{X'} = \sup\limits_{\|v\|=1} |\ell(v)|$. Si fuera $\|\ell\|_{X'} > 1$, debería existir $v \in X$ con $\|v\| = 1$, $|\ell(v)| > 1$, luego

$\sup\limits_{\ell \in S} |\ell(v)| > 1 = \|v\|$.

Ejemplo 1.1:

A partir de un subconjunto denso en X, puede contruírse un conjunto determinante.

En efecto, sea $\{x_i\}_{i\in I}$ un subconjunto denso en X. Fijado i, existe $\ell_i \in X'$ tal que $\ell_i(x_i) = \|x_i\|$, $\|\ell_i\|_{X'} = 1$.

Se afirma que $\{\ell_i\}_{i\in I}$ es un conjunto determinante para X.

En efecto:

Dado $x \in X$, es claro que $\|x\| \geq \sup_i |\ell_i(x)|$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, existe x_i tal que $\|x-x_i\|_X < \varepsilon$.

$$\|x\| \leq \|x-x_i\| + \|x_i\| = \varepsilon+\ell_i(x_i) \leq \varepsilon + |\ell_i(x)| + |\ell_i(x-x_i)| \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + |\ell_i(x)|.$$

Por lo tanto se tiene

$$\|x\| \leq 2\varepsilon + \sup_i |\ell_i(x)|.$$

Como consecuencia, si X es un espacio separable, entonces admite un conjunto determinante numerable.

Ya se observó que si f es fuertemente medible, entonces $\|f\|$ es medible en el sentido usual; respecto de las funciones débilmente medibles, se tiene el siguiente resultado:

Lema 1.3:

Si $f:U \to X$ es débilmente medible y X admite un conjunto determinante numerable S, entonces $\|f\|$ es medible.

Demostración:

Por definición, es $\|f(x)\| = \sup_{\ell\in S} |\ell\circ f(x)|$, para cada $x \in X$.

Como f es débilmente medible, cada función $\ell\circ f$ es medible y por lo tanto lo es $|\ell\circ f|$. El supremo tomado sobre una familia numerable también resulta entonces medible.

Esto concluye la prueba del lema 1.3.

#

De la prueba del lema resulta que basta saber que $\ell\circ f$ es medible para cada forma ℓ en el conjunto determinante numerable S.

Demostración de la proposición 1.6:

a) ⇒ b)

Falta mostrar que f debe ser casi separablemente valuada.

Por definición, existe una sucesión $\{t_m\}$ de funciones escalera y un subconjunto $E \subset U$ de medida nula tal que

$$t_m(x) \to f(x) \text{ en } X, \text{ para } x \in U\setminus E,$$

La $\bigcup_m t_m(U)$ es un conjunto numerable. Además $f(U\setminus E) \subset \overline{\bigcup_m t_m(U)}$.
Esto muestra que $f(U\setminus E)$ es separable.

b) ⇒ a)

Sea $E \subset U$ subconjunto de medida nula tal que $f(U\setminus E)$ es separable. Se reemplaza U por $U\setminus E$ y X por el subespacio cerrado Y de X generado por $f(U\setminus E)$. Y resulta un espacio separable. Por lo tanto admite un conjunto determinante S numerable, construído en el ejemplo 1.1 a partir de un subconjunto denso y numerable de Y. Se afirma que dada $\ell \in S$, $\ell\circ f$ es medible; en efecto, por el teorema de Hahn-Banach, existe $L \in X'$ que extiende a ℓ; luego $L\circ f$ es medible en U y en consecuencia,
$L\circ f/_{U\setminus E} = \ell\circ f/_{U\setminus E}$ es medible.

Por lo observado al final de la prueba del lema 1.3, resulta que para cada $v \in Y$, la función $\|f(x)-v\|$ es medible en $U\setminus E$.

Según el lema 1.1, basta mostrar que f es fuertemente medible en cada subconjunto V de $U\setminus E$ de medida finita.

Sea $\{v_m\}$ el denso D de Y.

Para cada $\varepsilon > 0$, se considera

$$E_m^\varepsilon = \{x \in V/f(x) \neq 0, \|f(x)-v_m\| < \varepsilon\}.$$

E_m^ε es medible y $\bigcup_m E_m^\varepsilon = \{x \in V/f(x) \neq 0\}$

Sea ahora

$$F_1^\varepsilon = E_1^\varepsilon$$

$$F_k^\varepsilon = E_k^\varepsilon \setminus \bigcup_{m<k} E_m^\varepsilon, \qquad k \geq 2.$$

$\{F_k^\varepsilon\}$ es una familia de subconjuntos de V medibles, disjuntos y de medida finita.

Sea $t_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \chi_{F_k^\varepsilon}(x)$

Esta función se expresa para cada $\varepsilon > 0$ como límite de la sucesión de funciones escalera

$$t_\varepsilon^N(x) = \sum_{k=1}^{N} v_k \chi_{F_k^\varepsilon}(x)$$

Por definición entonces, es $t_\varepsilon(x)$ fuertemente medible.

Finalmente se tiene

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} t_\varepsilon(x) \qquad x \in V.$$

De acuerdo con la proposición 1.5, se concluye que f es fuertemente medible en V.

Esto termina la prueba de la proposición 1.6.

#

De esta proposición y de lo mencionado antes resulta que toda función continua es fuertemente medible.

Una función $f:U \to X$ se llama débilmente continua si $\ell \circ f:U \to C$ es continua para cada $\ell \in X'$. Es claro que toda función débilmente continua es débilmente medible. También puede probarse que es separablemente valuada. (Ver [1], p. 73). En consecuencia, toda función débilmente continua es débilmente medible.

También resulta que si el espacio X es separable, entonces los conceptos de medibilidad fuerte y débil coinciden. Esto facilita notablemente el comprobar la medibilidad de una función. Por ejemplo, si X es un espacio de Hilbert separable, $f:U \to X$ será fuertemente medible si la función escalar $(f(x),v)_X$ es medible Lebesgue para todo $v \in X$, donde $(\,,)_X$ indica el producto escalar en X.

Como consecuencia de lo que se acaba de observar, de la proposición 1.2 y siguientes resultados, se tiene:

Sean $f_n:K \to X$, $K \subset R^n$ compacto, funciones continuas tales que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en K hacia $f:K \to X$.

Entonces $f_n, f \in B^1(K,X)$, además

$$\int_K f_n \, dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_K f \, dx$$

<u>Proposición 1.7</u>: (Teorema de Fubini para la integral de Bochner).

Sean $U \subset R^n$, $V \subset R^m$ subconjuntos medibles.

Dada $f:U\times V \to X$ perteneciente a $B^1(U\times V;X)$, se tiene que

$$\exists \int_U f(x,y)dx \in B^1(V,X)$$

$$\exists \int_V f(x,y)dy \in B^1(U;X)$$

y además valen las igualdades

$$\int_{U\times V} f(x,y)dx\ dy = \int_V [\int_U f(x,y)dx]\, dy = \int_U [\int_V f(x,y)dy]\, dx$$

Demostración:

Como el resultado se admite conocido para funciones escalares, también es cierto para funciones escalera, lo cual se comprueba sin dificultad. (Ver [2], p. 157).

Sea $\{t_m(x,y)\}$ una sucesión de funciones escalera tal que $\int_{U\times V} \|f-t_m\| dx\ dy \leqslant 1/2^m$.

Para cada $x \in U$, sea $g(x) = \sum_m \int_V \|f-t_m\| dy$.

Puesto que

$$\int_U g(x)dx \leqslant \sum_m \int_U [\int_V \|f-t_m\| dy]\, dx =$$

$$= \sum_m \int_{U\times V} \|f-t_m\| dx\ dy \leqslant \sum_m 1/2^m = 1,$$

se deduce que $g(x)$ es una función finita pp en U y por lo tanto existe $\lim_{m\to\infty} \int_V \|f-t_m\| dy = 0$ pp en U.

De la proposición 1.3 resulta que $\exists\ h(x) = \int_V f(x,y)dx$ pp en $x \in U$.

Además $h(x) = \lim_{m\to\infty} \int_V t_m(x,y)dy$ pp en $x \in U$.

O sea que h es fuertemente medible en U.

Por otra parte se tiene, (ver [2], p. 156)

$$\int_U \|h(x)-\int_V t_m(x,y)dx\| \leq \int_U [\int_V \|f-t_m\|dy]\,dx =$$

$$= \int_{U\times V} \|f-t_m\|dx\,dy \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Nuevamente por la proposición 1.3 se obtiene que

$$\exists \int_U h(x)dx = \int_U [\int_V f(x,y)dy]\,dx.$$

Además, es

$$\int_U [\int_V f(x,y)dy]\,dx = \int_U h(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_U [\int_V t_m(x,y)dy]\,dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_{U\times V} t_m(x,y)dx\,dy = \int_{U\times V} f(x,y)dx\,dy.$$

La otra integral iterada se estudia de igual forma, con lo cual se concluye la prueba de la proposición 1.7.

#

Es claro que $B^1(U;X)$ es el análogo del espacio L^1 de las funcio new integrables Lebesgue. También puede introducirse la versión vectorial de L^p, para $1 < p \leq \infty$.

<u>Definición 1.7:</u>

$$B^\infty(U,X) = \{f:U \to X \text{ fuertemente medible } / \|f(x)\|_X \leq M, \text{ pp en } x \in U\}.$$

Se considera en $B^\infty(U,X)$ la norma

$$\|f\|_\infty = \inf\{M/\|f(x)\|_X \leq M \text{ pp en } x \in U\}.$$

No hay dificultad en comprobar que $B^\infty(U;X)$ es un espacio de Banach.

<u>Definición 1.8:</u>

Dado $1 < p < \infty$, se considera

$B^p(U;X) = \{f:U \to X$ fuertemente medible/ $\exists$ $\{t_m\}$ funciones escalera cumpliendo $\int_U \|f-t_m\|^p dx \underset{m\to\infty}{\to} 0\}$.

De manera análoga a lo hecho en la proposición 1.3, puede probarse que $f:U \to X$ pertenece a $B^p(U;X)$ si y sólo si f es fuertemente medible y $\|f\|^p$ es integrable Lebesgue.

Con la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_U \|f\|^p dx\right)^{1/p}$$

puede probarse como en la proposición 1.1 que $B^p(U;X)$ es un espacio de Banach.

Proposición 1.8:(Desigualdad de Hölder, primera versión).

Sean $f:U \to X$ perteneciente a $B^p(U;X)$, $g:U \to C$ perteneciente a L^q, $1/_p + 1/_q = 1$.

Entonces $f.g:U \to X$ pertenece a $B^1(U;X)$ y además

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_p . \|g\|_q$$

Demostración:

Por la proposición 1.4 se sabe que fg es fuertemente medible.

Falta ver ahora que $\|fg\|$ es integrable Lebesgue.

$$\int_U \|fg\| dx = \int_U \|f\| \, |g| dx \leq \left(\int_U \|f\|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_U |g|^q dx\right)^{1/q} \quad \infty.$$

Es claro también el razonamiento cuando p o q es ∞.

Esto concluye la prueba de la proposición 1.8.

#

Proposición 1.9: (Desigualdad de Holder, segunda versión)

Sean $f:U \to X$ perteneciente a $B^p(U,X)$, $g:U \to X'$ perteneciente a $B^p(U;X')$, $1/p + 1/q = 1$.

Entonces :

$$(g,f)_{X'X}: U \to C$$

es una función integrable y además

$$\int_U |(g,f)_{X'X}|\,dx \leqslant \|g\|_{B^q(U,X')} \cdot \|f\|_{B^p(U,X)} .$$

Demostración:

Como la forma bilineal $(g,f)_{X'X}$ es continua, si $\exists$ funciones escalera $\{t_m\}$, $\{s_m\}$ tales que

$t_m \to f$ en X, pp en U

$s_m \to g$ en X', pp en U,

entonces $(s_m,t_m)_{X'X} \underset{m\to\infty}{\to} (g,f)_{X'X}$ pp en U.

Aplicando ahora la desigualdad de Hölder escalar se tiene:

$$\int_U |(g,f)_{X'X}|\,dx \leqslant \int_U \|g\|_{X'} \, \|f\|_X dx \leqslant \|g\|_{B^q(U;X')} \, \|f\|_{B^p(U;X)} .$$

El razonamiento a usar cuando p o q vale ∞, es claro.

Esto concluye la prueba de la proposición 1.9.

#

De esta proposición resulta que $B^q(U,X')$ está incluído en el dual de $B^p(U;X)$. La recíproca es también cierta para $1 \leqslant p < \infty$. (Ver [3], p. 384).

En el mismo espíritu de las proposiciones 1.3 y 1.9 pueden darse dos versiones del producto de convolución, obteniéndose también desigualdades del tipo de Young. (Ver [2], p. 228).

Con la misma técnica que en el caso escalar, se prueba que dado $U \subset R^n$ abierto, las funciones de $B^p(U;X)$, $1 \leqslant p < \infty$, que son continuas y de soporte compacto $\subset U$, forman un denso.

También

$$\exists \lim_{h\to 0} \int \|f(x+h)-f(x)\|^p dx = 0$$

para $f \in B^p(U;X)$, $1 \leqslant p < \infty$. (Ver [2], p. 228).

<u>Proposición 1.10:</u>

Sean X,Y dos espacios de Banach y sea $T:X \to Y$ un operador lineal y continuo.

Entonces la aplicación

$$B^p(U;X) \to B^p(U;Y)$$
$$f \to (Tf)(x) = T(f(x))$$

está bien definida, es lineal y continua.

En particular, cuando $p = 1$, vale

$$T(\int_U f(x)dx) = \int_U (Tf)(x)dx.$$

<u>Demostración:</u>

Cuando f es una función escalera, $\sum v_j \chi_{E_j}$, Tf resulta la función escalera $\sum Tv_j \chi_{E_j}$, para la cual vale:

$$\|Tf\|_p^p = \sum \|Tv_j\|_Y^p |E_j| \leqslant \|T\|^p \sum \|v_j\|_X^p |E_j| = \|T\|^p \|f\|_p.$$

Además

$$T(\int_U f\, dx) = T(\sum v_j |E_j|) = \sum Tv_j |E_j| = \int_U Tf\, dx$$

Si ahora f es cualquier función de $B^p(U;X)$, sea $\{t_m\}$ una sucesión de funciones escalera tal que

$$\int_U \|f-t_m\|_X^p dx \to 0, \quad t_m(x) \to f(x) \quad \text{pp en } U.$$

$\{Tt_m\}$ es una sucesión de funciones escalera en Y que converge en casi todo punto de U hacia Tf. Luego Tf es fuertemente medible.

Por otra parte,

$$\int_U \|Tf-Tt_m\|_Y^p \, dx \leq \|T\|^p \int_U \|f-t_m\|_X^p \, dx \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Luego $Tf \in B^p(U;Y)$. Además

$$\int_U \|Tf\|_Y^p \, dx \leq \|T\|^p \int_U \|f\|_X^p \, dx$$

O sea la aplicación es continua; es claro que también resulta lineal

Cuando p = 1, de $\int_U \|Tf-Tt_m\|_Y \, dx \to 0$, se deduce que

$$\int_U Tf \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_U Tt_m \, dx = \lim_{m\to\infty} T\left(\int_U t_m \, dx\right) =$$

$$= T\left(\lim_{m\to\infty} \int_U t_m \, dx\right) = T\left(\int_U f \, dx\right).$$

Esto concluye la prueba de la proposición 1.10.

#

Lema 1.4:

Sea $U = \bigcup_{m\geq 1} U_m$, unión creciente de subconjuntos medibles.

Si $f \in B^1(U;X)$ entonces $f \in B^1(U_m;X)$, $\forall$ m y además

$$\int_U f \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_{U_m} f \, dx$$

Demostración:

De acuerdo con la proposición 1.3, es claro que $f \in B^1(U_m;X)$.

Por otra parte, si X_m indica la función característica de U_m, es

$$\int_{U_m} f\, dx = \int_U \chi_m f\, dx,$$

$\|\chi_m f\| \leqslant \|f\|$, que es integrable en U, por hipótesis.

Además, $\chi_m f \underset{m\to\infty}{\to} f$ puntualmente.

Se está entonces en condiciones de aplicar el teorema de convergencia mayorada para la integral de Bochner.

Esto concluye la demostración del lema 1.4.#

Definición 1.9:

Dada f función definida en un entorno del punto $t_0 \in R$ con valores en un espacio de Banach X, se dice que es derivable en t_0 si existe $v_0 \in X$ tal que

$$\left\| \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - v_0 \right\|_X \underset{h\to\infty}{\to} 0$$

Se indica $v_0 = f'(t_0)$.

De manera análoga al caso escalar se comprueba que toda función derivable es continua y que valen las reglas habituales de derivación.

Lema 1.5:

Sea f derivable en t_0 y sea $T:X \to Y$ un operados lineal y continuo. Entonces Tf es derivable en t.

Demostración:

Basta observar que

$$\left\| \frac{Tf(t_0+h)-Tf(t_0)}{h} - Tv_0 \right\|_Y = \left\| T[\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - v_0] \right\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \|T\| \left\| \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - v_0 \right\|_X \underset{h\to 0}{\to} 0$$

De paso se comprueba que $(Tf)'(t_0) = T(f'(t_0))$. #

Más generalmente,

Lema 1.6:

Sea I un intervalo real y sean $f:I \to X$, $T(t):I \to L(X,Y)$ aplicaciones derivables en $t_0 \in I$, donde $L(X,Y)$ indica a los operadores lineales y continuos de X en Y.

Entonces $T(t)f(t):I \to Y$ es derivable en t_0 y vale

$$[T(t)f(t)]'(t_0) = T'(t_0)f(t_0) + T(t_0)f'(t_0)$$

Demostración:

$$\left\| \frac{T(t_0+h)f(t_0+h)-T(t_0)f(t_0)}{h} - T'(t_0)f(t_0)-T(t_0)f'(t_0)\right\|_Y \leq$$

$$\leq \left\| \left[\frac{T(t_0+h)-T(t_0)}{h} - T'(t_0)\right] f(t_0+h)\right\|_Y +$$

$$+ \left\| T(t_0)\left[\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'(t_0)\right]\right\|_Y + \| T'(t_0)[f(t_0+h)-f(t_0)]\|_Y$$

Como f es continua en t_0, es acotada en un entorno de ese punto. Entonces lo anterior puede estimarse con

$$M \left\| \frac{\|T(t_0+h)-T(t_0)\|}{h} - T'(t_0)\right\| + \|T(t_0)\| \left\| \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'(t_0)\right\|_X +$$

$$+ \|T'(t_0)\| \; \|f(t_0+h)-f(t_0)\|_X \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Esto concluye la prueba del lema 1.6. #

Proposición 1.11:

Sea $f:I\times U \to X$, I intervalo en R.

Se supone que para cada $x \in U$, f es continua en I y que para cada $t \in I$, $f \in B^1(U;X)$. Además, fijado $K \subset I$ compacto, existe $g_K:U \to R$ tal que

$$g_K \in L^1, \ \|f(t,x)\| \leqslant g_K(x) \quad \text{para} \quad t \in K.$$

En estas condiciones, $\int_U f(t,x)dx$ está definida como función de I en X y es continua.

Demostración:

Se fija $t_0 \in I$ y $K \subset U$ un entorno compacto. Por hipótesis, $\int_U f(t,x)dx$ está definida por cada $t \in K$; sea $\varphi(t)$ esa función.

Se considera una sucesión $t_m \to t_0$; para $m \geqslant m_0$, $t_m \in K$.

Entonces $\|f(t_m,x)\| \leqslant g_K(x)$, $\forall\ m \geqslant m_0$. Además $f(t_m,x) \underset{m\to\infty}{\to} f(t_0,x)$, para cada $x \in U$.

El teorema de convergencia mayorada muestra enntonces que

$$\varphi(t_m) \underset{m\to\infty}{\to} \varphi(t_0)$$

Esto concluye la prueba de la proposición 1.11.

#

Proposición 1.12:

Con la notación de la proposición anterior, se considera $f:I\times U \to X$ tal que es fuertemente medible en U para cada $t \in I$; existe $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$, $\forall\ (t,x) \in I\times U$; $f(t_0,x) \in B^1(U;X)$ para cierto $t_0 \in I$.

Fijado $K \subset I$ compacto, $\exists\ g_K:U \to R$ integrable tal que $\|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\| \leqslant g_K(x)$, para $t \in K$.

En estas condiciones se afirma que $f(t,x), \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \in B^1(U,X)$ para cada $t \in I$; además la función

$$\varphi(t) = \int_U f(t,x)dx$$

es derivable en I y

$$\varphi'(t) = \int_U \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx, \quad t \in I.$$

Demostración:

Fijado $t \in I$, sea $t_m \to t$, $t_m \neq t$, $\forall$ m.

Entonces es $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{f(t_m,x)-f(t,x)}{t-t_m}$

De acuerdo con la proposición 1.4, cada función $\frac{f(t_m,x)-f(t,x)}{t-t_m}$ es fuertemente medible en U. Luego, la proposición 1.5 permite concluir que $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ es también fuertemente medible en U, para cada $t \in I$.

La hipótesis de mayoración en compactos de I, asegura que esa función pertenece a $B^1(U;X)$, para cada $t \in I$.

Se fija ahora un intervalo $K = [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset I$.

Se sabe (Ver [4], p. 45) que

$$\|f(t,x)-f(t_0,x)\| \leq |t-t_0| . \sup_{t\in K} \|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\|$$

Por lo tanto, $\|f(t,x)\| \leq \varepsilon\, g_K(x) + \|f(t_0,x)\|$ lo cual muestra que $f(t,x) \in B^1(U,X)$ para cada $t \in I$.

Se considera ahora

$$\frac{\varphi(t,x)-\varphi(t_m,x)}{t-t_m} = \int_U \frac{f(t,x)-f(t_m,x)}{t-t_m}\, dx$$

Sea ahora $K = [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \subset I$, compacto al cual pertenece t_m para $m \geq m_0$.

El integrando converge puntualmente hacia $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ para $m \to \infty$.

Además vale

$$\left\| \frac{f(t,x)-f(t_m,x)}{t-t_m} \right\| \leq g_K(x) \quad \forall \quad m \geq m_0.$$

Puede aplicarse entonces el teorema de convergencia mayorada, con lo cual se concluye la demostración de la proposición 1.12.

#

Proposición 1.13:

Sea $f:R \to X$ una función continua. Entonces, dado $a \in R$, la función

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad x > a$$

es derivable y vale $\varphi'(x) = f(x)$.

Demostración:

Dado $h > 0$, es

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Si $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f en x, $\exists\ \delta > 0$ si $|h| < \delta$, vale $\|f(t)-f(x)\| < \varepsilon$.

Como es claro que $\int_x^{x+h} dt = h$, resulta

$$\left\|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - f(x)\right\| \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \|f(t)-f(x)\| dt < \varepsilon,$$

para $|h| < \delta$.

Esto concluye la demostración.

#

Proposición 1.14: (Regla de Barrow)

Si $f:R \to X$ es derivable con derivada continua, dados $a < b$, vale

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b)-f(a)$$

Demostración:

Dada $\ell \in X'$, según lo ya probado se tiene

$$\ell(\int_a^b f'(t)dt-f(b)+f(a)) = \int_a^b (\ell f)'(t)dt-\ell f(b) + \ell f(a)$$

Esto vale cero, pues se conoce la versión escalar de la regla. De aquí se deduce lo afirmado.

#

Debe observarse que al igual que en la integral usual de Lebesgue, se define

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

cuando $a > b$.

Una función $f:R \to X$ que admite k derivadas continuas se dirá que es de clase C^k.

En lo que sigue se verá una versión de integración por partes, que será empleada más adelante. (Ver §6).

Proposición 1.15:

Sea $f:R \to X$ una función de clase C^1 tal que f y f' tienen crecimiento polinomial en el ∞.

Sea $g:R \to C$ una función de clase C^1 tal que g y g' tienen crecimiento rápido en el ∞.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)g(t)dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g'(t)dt$$

Demostración:

Por hipótesis, $\|f(t)\| \leqslant P(t)$, $\|f'(t)\| \leqslant Q(t)$ para ciertos polinomios P, Q. Además

$$\|R(t)g(t)\| \leqslant C_R, \quad \|R(t)g'(t)\| \leqslant C_R,$$

para todos los polinomios R(t). Esto implica que R(t)g(t), R(t)g'(t) pertenecen a $B^1(R;X)$ para todo R y además que

$$\|R(t)g(t)\|, \ \|R(t)g'(t)\| \underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Entonces $f'(t)g(t)$, $f(t)g'(t)$ pertenecen a $B^1(R;X)$.

Además son ambas nulas en el ∞.

Entonces, dado $m \in N$, es:

$$f(m)g(m)-f(-m)g(-m) = \int_{-m}^{m} (fg)'(t)dt =$$

$$= \int_{-m}^{m} f'(t)g(t)dt + \int_{-m}^{m} f(t)g'(t)dt.$$

Tomando límite para $m \to \infty$, se concluye lo afirmado, de acuerdo con el lema 1.4.

#

Proposición 1.16: (Cambio lineal de variable)

Sea $f \in B^1(R^n;X)$ y sea $A:R^n \to R^n$ una transformación lineal inversible. Entonces $f(Ax) \in B^1(R^n;X)$ y se tiene la igualdad

$$\int_{R^n} f(Ax)dx = |\det A^{-1}| \int_{R^n} f(y)dy$$

Demostración:

Si f es una función escalera, $f(Ax)$ también es una función escalera.

Si $\{t_m\}$ es una sucesión de escaleras tal que

$$t_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x) \quad \text{pp en } R^n, \text{ en } X$$

entonces

$$t_m(Ax) \underset{m\to\infty}{\to} f(Ax) \quad \text{pp en } R^n, \text{ en } X.$$

Por lo tanto $f(Ax)$ es fuertemente medible.

Además, $\|f\|(Ax) \in L^1$, sabiendo que $\|f\|(x) \in L^1$.

En consecuencia $f(Ax) \in B^1(R^n;X)$.

Dada ahora $\ell \in X'$, por la proposición 1.10 se tiene que $(\ell f)(Ax) \in L^1$ y además

$$\ell\left(\int_{R^n} f(Ax)dx\right) = \int_{R^n} (\ell f)(Ax)dx$$

Como el resultado es conocido en el caso escalar, esta última integral vale

$$|\det A^{-1}| \int_{R^n} (\ell f)(y)dy = \ell[\,|\det A^{-1}| \int_{R^n} f(y)dy]$$

En definitiva, se obtiene la desigualdad del enunciado.

#

§2. Nociones sobre operadores lineales y acotados en espacios de Banach:

Dado un espacio de Banach complejo B, $L(B)$ indica el conjunto de los operadores $A:B \to B$ lineales y continuos; con $\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$, $L(B)$ es un espacio de Banach complejo, y como $\|A\circ B\| \leq \|A\|\,\|B\|$, $L(B)$

resulta un álgebra de Banach, con la composición como producto.

Se considera el conjunto $\mathcal{Y}$ de elementos inversibles en $L(B)$, o sea, el conjunto de operadores $A \in L(B)$ tales que $\exists\, A^{-1}$ y $A^{-1} \in L(B)$.

Proposición 2.1:

Si I es la identidad y $\|C\| < 1$, $I+C$ es inversible.

Demostración:

Sea $R = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j C^j$; $R \in L(B)$ está bien definido, pues

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|(-1)^j C^j\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \|C\|^j < +\infty.$$

Por la continuidad de la composición en $L(B)$, se obtiene:

$$R(I+C) = \lim_{k\to\infty} R_k(I+C) \text{ donde } R_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C^j.$$

Pero $R_k(I+C) = I+(-1)^{k+1} C^{k+1} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} I.$

Por lo tanto, $R(I+C) = I$. Como R es límite de polinomios de C, R conmuta con $I+C$; luego, $(I+C)R = I$.

Se concluye lo afirmado.

#

Corolario 2.1:

El conjunto $\mathcal{Y}$ de elementos inversibles en $L(B)$ es abierto.

Demostración:

Sea $A \in$, y sea $C \in L(B)$; $A+C = A(I+A^{-1}C)$; además,

$$\|A^{-1}C\| \leqslant \|A^{-1}\|\|C\| < 1 \quad \text{si} \quad \|C\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

Luego, por la proposición 2.1, $I+A^{-1}C$ es inversible; como además A es inversible, se deduce que $A+C$ es inversible (si $\|C\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$).

Esto concluye la demostración.

#

Definición 2.1:

Dado $A \in L(B)$, el conjunto $\rho(A)$ dado por:

$\rho(A) = \{\lambda \in C / A-\lambda I \in \mathcal{Y}\}$ se llama el conjunto resolvente de A,

y $\sigma(A) = C-\rho(A)$ se llama el espectro de A.

Como la aplicación:

$$\begin{aligned} \lambda &\to A-\lambda I \\ C &\to L(B) \end{aligned}$$

es continua, y como por el corolario 2.1 $\mathcal{Y}$ es abierto, se deduce que

$\rho(A)$ es abierto y $\sigma(A)$ es cerrado,

además, si $|\lambda| > \|A\|$ es $A-\lambda I = -\lambda(I-\frac{A}{\lambda})$ con $\|\frac{A}{\lambda}\| < 1$.

Por lo tanto, $A-\lambda I$ es inversible y $\lambda \in \rho(A)$.

Luego, $\sigma(A) \subset \{\lambda \in C / |\lambda| \leq \|A\|\}$, lo cual prueba que $\sigma(A)$ escompacto. Como se verá más adelante, $\sigma(A)$ nunca es vacío.

El conjunto de elementos λ del espectro de A tales que $A-\lambda I$ no es inyectivo, se llama el espectro puntual de A, y sus elementos se llaman autovalores de A. Cuando el espacio B es de dimensión finita, $\sigma(A)$ se reduce al espectro puntual de A.

Proposición 2.2:

Si P es un polinomio con coeficientes complejos, y si $A \in L(B)$, entonces

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$$

Demostración:

Si P es constante, $P(t) = \lambda$, entonces $P(A) = \lambda I$; por lo tanto,

$$\sigma(P(A)) = \{\lambda\} = P(\sigma(A))$$

Luego, se puede suponer $gr(P) = n \geq 1$.

Sea $\lambda \in \sigma(P(A))$. Como $P(t)-\lambda$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, es:

$$P(t)-\lambda = b.(t-\alpha_1)\ldots(t-\alpha_n), \text{ con } b \neq 0, \alpha_j \in C, 1 \leq j \leq n.$$

Luego, $P(A)-\lambda I = b.(A-\alpha_1 I)\ldots(A-\alpha_n I)$.

Como $P(A)-\lambda I \notin \mathcal{Y}$, debe existir un j, $1 \leq j \leq n$ tal que $A-\alpha_j I \notin \mathcal{Y}$.

Por lo tanto, $\alpha_j \in \sigma(A)$, y además, $P(\alpha_j) = \lambda$. Luego, $\lambda \in P(\sigma(A))$.

Sea ahora $\lambda \in P(\sigma(A))$; es $\lambda = P(\mu)$ con $\mu \in \sigma(A)$.

Como μ es raíz del polinomio $P(t)-\lambda$, se puede escribir:

$$P(t)-\lambda = (t-\mu).q(t). \text{ Por lo tanto, } P(A)-\lambda I = (A-\mu I)q(A).$$

Si $P(A)-\lambda I$ es inversible, sea C su inversa. Es:

$$I = (P(A)-\lambda I)C = (A-\mu I)q(A)C$$

Pero también:

$$P(A)-\lambda I = q(A)(A-\mu I); \text{ Luego: } I = C(P(A)-\lambda I) = Cq(A)(A-\mu I)$$

Por lo tanto, $A-\mu I$ tiene inversa a derecha y a izquierda en $L(B)$; entonces $A-\mu I$ es inversible en $L(B)$, con $\mu \in \sigma(A)$; absurdo.

Luego, $P(A)-\lambda I$ no es inversible, y entonces, $\lambda \in \sigma(P(A))$.

Esto concluye la prueba de la proposición 2.2.

#

Sea ahora H un espacio Hilbert complejo. Se considera H', su dual.

$$H' = \{\ell : H \to C / \ell \text{ es lineal y continua}\}.$$

El teorema de representación de Riez, asegura que dado $\ell \in H'$, existe un único $x \in H$ tal que $\ell(y) = (y,x)_H$ $\forall$ $y \in H$. Además, $\|\ell\|_{H'} = \|x\|$.

Sea $A \in L(H)$; fijado $y \in H$, se considera $\ell_y : H \to C$ dada por $\ell_y(x) = (Ax,y)$. $|\ell_y(x)| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|y\| \|x\|$. Por lo tanto, $\ell_y \in H'$ y además $\|\ell_y\|_{H'} \leq \|A\| \|y\|$.

Pero entonces, existe un único $z \in H$ tal que $\ell_y(x) = (x,z)_H$ $\forall\, x \in H$, o sea, $(Ax,y) = (x,z)$ $\forall\, x \in H$. Además, $\|z\| = \|\ell_y\|_{H'} \leq \|A\|\,\|y\|$

Esto define una aplicación:

$$y \to z$$

$$H \to H$$

a la cual se la llama el adjunto A^* de A. Por lo tanto, A^*y queda caractirizado por: $(Ax,y) = (x,A^*y)$ $\forall\, x \in H$.

Veamos que A^* es lineal.

$$(Ax,y1+y_2) = (Ax,y_1) + (Ax,y_2) = (x,A^*y_1)+(x,A^*y_2) =$$

$$= (x,A^*y_1+A^*y_2);$$

luego, por la unicidad, $A^*(y_1+y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$

$(Ax,\lambda y) = \overline{\lambda}(Ax,y) = \overline{\lambda}(x,A^*y) = (x,\lambda A^*y)$; luego, por la unicidad $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$. Además, $\|A^*y\| = \|z\| \leq \|A\|\,\|y\|$. Por lo tanto, A^* es continuo y $\|A^*\| \leq \|A\|$. Luego, $A^* \in L(H)$ y tiene sentido $(A^*)^* \in L(H)$. $(A^*)^*$ queda caracterizado por:

$$(A^*x,y) = (x,(A^*)^*y). \text{ Pero } (A^*x,y) = \overline{(y,A^*x)} = \overline{(Ay,x)} = (x,Ay)$$

$\forall\, x \in H$.

Por lo tanto, $Ay = (A^*)^*y$ $\forall\, y \in H$. Luego, $A = (A^*)^*$. Entonces: $\|A\| = \|(A^*)^*\| \leq \|A^*\|$. Se deduce entonces que $\|A\| = \|A^*\|$ $\forall\, A \in L(H)$.

Se verifican las siguientes propiedades, dados $\alpha,\beta \in C$, $A,B \in L(H)$:

1) $I^* = I$

2) $(\alpha A+\beta B)^* = \overline{\alpha}A^* + \overline{\beta}B^*$

3) $(AB)^* = B^*A^*$

Por lo tanto, A es inversible si y sólo si A^* es inversible, y en ese caso,

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}.$$

Definición 2.2:

Dado $A \in L(H)$, A se llama normal si $A^*A = AA^*$.

Si A es normal, $\|A^*x\|^2 = (A^*x, A^*x) = (x, AA^*x) = (x, A^*Ax) =$
$= (Ax,Ax) = \|Ax\|^2$. Por lo tanto, $\|A^*x\| = \|Ax\| \quad \forall\ x \in H$, si A es normal.

A se dice unitario si $A^*A = AA^* = I$

Si A es unitario, $\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (x,A^*Ax) = (x,Ix) = \|x\|^2$.

Por lo tanto, $\|Ax\| = \|x\| \ \forall\ x \in H$ y $\|A\| = 1$, si A es unitario.

Lema 2.1:

$\forall\ A \in L(H)$, vale $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$

Demostración:

$$\|A^*A\| \leqslant \|A^*\|\ \|A\| = \|A\|\ \|A\| = \|A\|^2$$
$$\|AA^*\| \leqslant \|A\|\ \|A^*\| = \|A\|\ \|A\| = \|A\|^2$$

Por otra parte: $\|A\|^2 = (\sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|)^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax,Ax) =$
$= \sup\limits_{\|x\|=1} (A^*Ax,x) \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \|A^*Ax\|\ \|x\| \leqslant \sup\limits_{\|x\|=1} \|A^*A\|\|x\|\ \|x\| = \|A^*A\|$

De manera análoga se tiene $\|A\|^2 \leqslant \|AA^*\|$.

Esto concluye la prueba del lema 2.1.
#

Lema 2.2:

Si $A \in L(H)$, $x,y \in H$, entonces:

$$4(Ax,y) = (A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y) +$$
$$+ i((A(x+iy),x+iy)-(A(x-iy),x-iy))$$

Demostración:

El miembro derecho es: $(Ax,x) + (Ay,y) + (Ax,y) + (Ay,x)$
$- ((Ax,x)+(Ay,y)-(Ay,x)-(Ax,y)) + i((Ax,x)-i(Ax,y)+i(Ay,x)+(Ay,y))$
$- i((Ax,x)-i(Ay,x)+i(Ax,y)+(Ay,y)) =$
$= 2(Ax,y)+2(Ay,x)+2(Ax,y)-2(Ay,x) = 4(Ax,y)$.

Esto concluye la prueba del lema 2.2.

Definición 2.3:

Se dice que A es autoadjunto si $A^* = A$.

Para $A \in L(H)$ autoadjunto, se define por analogía con la exponencial, $e^{iA} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n A^n}{n!}$. Como la aplicación: $\underset{L(H)\to L(H)}{B \to B^*}$ es antilineal y continua, se puede tomar adjunto en cada término, y resulta:

$$(e^{iA})^* = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{i^n A^n}{n!}\right)^* = \sum_{n\geq 0} \frac{\bar{i}^n A^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-i)^n A^n}{n!} = e^{-iA}$$

Pero como $e^{iA} e^{-iA} = e^{-iA} e^{iA} = I$, es $e^{-iA} = (e^{iA})^{-1}$.

Luego, e^{iA} es unitario; por lo tanto, $\|e^{iA}\| = 1$.

En particular, si $t \in \mathbb{R}$ y A es autoadjunto, $\|e^{itA}\| = 1$, ya que tA es autoadjunto.

Estas observaciones serán completadas más adelante (Ver §6).

Lema 2.3:

1) Si $A \in L(H)$, $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)|$

2) Si además A es autoadjunto, es $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$

Demostración:

1) Si $\|x\| = \|y\| = 1$, entonces $|(Ax,y)| \leq \|Ax\|\|y\| \leq \|A\|\|x\|\|y\| = \|A\|$.

Luego, $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)| \leq \|A\|$. Además, si $\|x\| = 1$, $Ax \neq 0$ entonces: $\|Ax\|^2 = (Ax,Ax) = (Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|}) \|Ax\|$. Por lo tanto $\|Ax\| = (Ax, \frac{Ax}{\|Ax\|})$.

Por lo tanto, $\|Ax\| \leq \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)|$ $\forall x/Ax \neq 0$, $\|x\| = 1$.

Entonces $\|A\| \leq \sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)|$

2) En principio vale $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)| \geq \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$

Pero por ser A autoadjunto, $(Ax,x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in H$. De acuerdo con el lema 2.2 es: Real $4(Ax,y) = (A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y)$. Por lo tanto,

$$|\text{Real } 4(Ax,y)| \leq |(A(x+y),x+y)| + |(A(x-y,x-y)| =$$

$$= \|x+y\|^2 \left|\left(A\left(\frac{x+y}{\|x+y\|}\right), \frac{x+y}{\|x+y\|}\right)\right| + \|x-y\|^2 \left|\left(A\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right), \frac{x-y}{\|x-y\|}\right)\right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| \ (\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, se obtiene:

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\text{Re } 4(Ax,y)| \leq 4 \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|, \text{ o sea:}$$

$$\sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\text{Re}(Ax,y)| \leq \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, es: $(Ax,y) = |(Ax,y)|e^{i\theta}$; por lo tanto, $|(Ax,y)| = (A\, e^{-i\theta} x,y)$.

Luego, $(A\, e^{-i\theta} x,y) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, y entonces: $|(Ax,y)| = (Ae^{-i\theta} x,y) =$ $= |\text{Re}(Ae^{-i\theta} x,y)|$ con $\|e^{-i\theta} x\| = \|y\| = 1$. Luego, $|(Ax,y)| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$, y entonces, $\sup\limits_{\|x\|=\|y\|=1} |(Ax,y)| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$.

Esto concluye la prueba del lema 2.3.

#

Lema 2.4:

Dado $A \in L(H)$, A es autoadjunto si y sólo si $(Ax,x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in H$.

Demostración:

Si $(Ax,x) \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in H$, a partir de la fórmula

$$4(Ax,y) = (A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y) +$$
$$+ i((A(x+iy),x+iy)-(A(x-iy),x-iy)),$$

intercambiando x con y y conjugando, se obtiene $\overline{4(Ay,x)} = 4(Ax,y)$ o sea $(x,Ay) = (Ax,y)$. Por lo tanto, A es autoadjunto.

Esto concluye la prueba del lema 2.4.

#

Definición 2.4:

Si $A \in L(B)$, B espacio de Banach, se define $\pi(A)$, llamado el espectro aproximado de A, como:

$$\pi(A) = \{\lambda \in C \text{ tales que } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x \text{ tal que } \|x\| = 1 \text{ y } \|(A-\lambda I)x\| < \varepsilon\}.$$

Lema 2.5:

Si $A \in L(B)$, entonces $\pi(A) \subset \sigma(A)$.

Demostración:

Si $\lambda \notin \sigma(A)$, $\exists\, (A-\lambda I)^{-1} \in L(B)$; por lo tanto, $\exists c > 0$ tal que $\|(A-\lambda I)^{-1}x\| \leq c\|x\|\ \forall\, x \in B$. Sea $y \in B$, y sea $x \in B$ tal que $y = (A-\lambda I)^{-1}x$

Se obtiene: $\|y\| \leq c\|(A-\lambda I)y\|$. En particular, si $\|y\| = 1$, es: $\|(A-\lambda I)y\| \geq \frac{1}{c} > 0$. Por lo tanto, $\lambda \notin \pi(A)$. Esto concluye la prueba del lema 2.5.

#

Lema 2.6:

Dado $A \in L(H)$ autoadjunto, son equivalentes:

1) $\lambda \in \sigma(A)$

2) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, x/\|x\| = 1$ y $\|(A-\lambda I)x\| < \varepsilon$.

Por lo tanto, $\sigma(A) = \pi(A)$ si A es autoadjunto.

Demostración:

2) $\Rightarrow$ 1) es por el lema 2.5.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $k > 0$ tal que $\|(A-\ I)x\| \geq k \quad \forall\ x \in H/\|x\| = 1$.

Por lo tanto, $\|(A-\lambda I)x\| \geq k\ \|x\| \quad \forall\ x \in H$.

Luego, si $(A-\lambda I)x = 0$, se deduce que $x = 0$. Entonces, $A-\lambda I$ es inyectivo.

Sea R el rango de $A-\lambda I$. Veamos que R es cerrado en H.

Si $(A-\lambda I)x_n \to y$, entonces $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{k}\|(A-\lambda I)(x_n - x_m)\| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$.

Por lo tanto, $\{x_n\}$ es de Cauchy en H; entonces, $\exists\ x \in H$ tal que $x_n \to x$.

Luego, $(A-\lambda I)x_n \to (A-\ I)x$; se deduce entonces que $y = (A-\lambda I)x$; por lo tanto, $y \in R$. Esto prueba que R es cerrado en H.

Veamos que R es denso en H.

Sea $x \in H$ tal que $(x,y) = 0\ \forall\ y \in R$; por lo tanto, $(x,(A-\lambda I)z) = 0$ $\forall\ z \in H$.

Como $(A-\lambda I)^* = A-\bar{\lambda}I$, se obtiene que $((A-\bar{\lambda}I)x,z) = 0 \quad \forall\ z \in H$.

Luego, $(A-\bar{\lambda}I)x = 0$; como $A-\lambda I$ es normal, pues su adjunto es $A-\bar{\lambda}I$, entonces $\|(A-\bar{\lambda}I)z\| = \|(A-\lambda I)^* z\| = \|(A-\lambda I)z\|\ \forall\ z \in H$; se deduce entonces que $(A-\lambda I)x = 0$. Luego, como $A-\lambda I$ es inyectivo, $x = 0$. Por lo tanto, R es denso en H.

Entonces $R = H$. Por lo tanto, $A-\lambda I$ es biyectivo, y existe $(A-\lambda I)^{-1}: H \to H$ lineal. Veamos que $(A-\lambda I)^{-1}$ es continuo. Sea $y \in H$, y sea $x = (A-\lambda I)^{-1}y$.

$$\|(A-\lambda I)^{-1}y\| = \|x\| \leq \frac{1}{k}\|(A-\lambda I)x\| = \frac{1}{k}\|y\|$$

Por lo tanto, $(A-\lambda I)^{-1}$ es continuo, y entonces $\lambda \notin \sigma(A)$.

Esto concluye la prueba del lema 2.6.

Observación 2.1:

Para la demostración anterior basta que A sea normal.

Lema 2.7:

Si A es autoadjunto, $\sigma(A) \subset R$.

Demostración:

Sea $\lambda \in \sigma(A)$. Por el lema 2.6, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $(A-\lambda I)x_n \to 0$. Por lo tanto,

$$\lambda-\bar{\lambda} = ((\lambda-\bar{\lambda})x_n,x_n) = ((A-\bar{\lambda}I)x_n,x_n)-((A-\lambda I)x_n,x_n).$$

Luego $|\lambda-\bar{\lambda}| \leqslant \|(A-\bar{\lambda}I)x_n\| + \|(A-\lambda I)x_n\|$ y como A es autoadjunto, $A-\lambda I$ es normal y su adjunto es $A-\bar{\lambda}I$. Entonces:

$$|\lambda-\bar{\lambda}| \leqslant 2\|(A-\lambda I)x_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Luego, $\lambda = \bar{\lambda}$.

Esto concluye la prueba del lema 2.7.

#

Lema 2.8:

Si A es autoadjunto existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$

Demostración:

De acuerdo con el lema 2.3, es $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(Ax,x)|$. Luego, existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $|(Ax_n,x_n)| \underset{n\to\infty}{\to} \|A\|$ y $\|x_n\| = 1$.

Como $\{(Ax_n,x_n)\}$ es una sucesión acotada de números reales, existe una subsucesión $(Ax_{n_k},x_{n_k}) \to \lambda$. Entonces $\lambda \in R$ y $|\lambda| = \|A\|$.

Veamos que $\lambda \in \sigma(A)$; por el lema 2.6, bastará probar que $\|(A-\lambda I)x_{n_k}\| \underset{k\to\infty}{\to} 0$

$$\|(A-\lambda I)x_{n_k}\|^2 = ((A-\lambda I)x_{n_k},(A-\lambda I)x_{n_k}) = \|Ax_{n_k}\|^2 + \lambda^2-2\lambda(Ax_{n_k},x_{n_k}) \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|^2 + \lambda^2-2\lambda(Ax_{n_k},x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \|A\|^2 +\lambda^2-2\lambda^2 = 0$$

Esto concluye la demostración del lema 2.8.

#

Proposición 2.3:

Si A es autoadjunto y P es un polinomio con coeficientes reales entonces

$$\|P(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |P(t)|$$

Demostración:

Por ser P(A) autoadjunto, $\exists\ \lambda \in \sigma(P(A))$ tal que $|\lambda| = \|P(A)\|$, de acuerdo al lema 2.8.

Además se sabe que $\sigma(P(A)) \subset \{|t| \leqslant \|P(A)\|\}$. Luego,

$$\sup_{\lambda\in\sigma(P(A))} |\lambda| = \|P(A)\|.$$

Como $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$, de acuerdo con la proposición 2.2, se obtiene:

$$\sup_{\lambda\in P(\sigma(A))} |\lambda| = \|P(A)\| \quad \text{o sea} \quad \sup_{t\in\sigma(A)} |P(t)| = \|P(A)\|$$

Esto concluye la prueba de la proposición 2.3.

#

Definición 2.5:

Dado $A \in L(H)$ autoadjunto, y dada una función f continua sobre $\sigma(A)$ a valores reales, puede definirse f(A) de la siguiente forma: Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios con coeficientes reales tales que $P_n \rightrightarrows f$ sobre $\sigma(A)$.

Resulta, de acuerdo a la proposición 2.3:

$$\|P_n(A)-P_m(A)\| = \|(P_n-P_m)(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |P_n(t)-P_m(t)| \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$$

Por lo tanto, $\{P_n(A)\}$ es de Cauchy en L(H). Luego, existe $\lim_{n\to\infty} P_n(A)$ en L(H). Se define $f(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$.

La definición es correcta, pues si también $Q_n \rightrightarrows f$ sobre $\sigma(A)$ (Q_n polinomio con coeficientes reales) entonces $Q_n-P_n \rightrightarrows 0$ sobre $\sigma(A)$, y por lo tanto de acuerdo a la proposición 2.3,

$$\|Q_n(A)-P_n(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |Q_n(t)-P_n(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 .$$

Luego, $\lim_{n\to\infty} Q_n(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$

Además, f(A) resulta ser autoadjunto por ser límite de operadores autoadjuntos, $\|P_n(A)\| \to \|f(A)\|$, $\sup_{t\in\sigma(A)} |P_n(t)| \to \sup_{t\in\sigma(A)} |f(t)|$. Pero nuevamente por la proposición 2.3, $\|P_n(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |P_n(t)|$. Luego $\|f(A)\| = \sup_{t\in\sigma(A)} |f(t)|$.

Por lo tanto, $f(A) = 0$ si y sólo si $f \equiv 0$ sobre $\sigma(A)$.

<u>Proposición 2.4:</u>

Dado $A \in L(H)$ autoadjunto, y dada f continua sobre $\sigma(A)$ con valores reales, entonces $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

<u>Demostración:</u>

Sea $\lambda \in f(\sigma(A))$. Por lo tanto, $\lambda = f(\mu)$ con $\mu \in \sigma(A)$. Si $\lambda \notin \sigma(f(A))$, entonces $f(A)-\lambda I$ es inversible. Sea $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios tal que $P_n \rightrightarrows f$ sobre $\sigma(A)$. Por definición, $f(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$ además, $P_n(\mu) \to f(\mu)$. Entonces, $P_n(A)-P_n(\mu)I \underset{n\to\infty}{\to} f(A)-f(\mu)I$ o sea, $P_n(A)-P_n(\mu)I \to f(A)-\lambda I$.

Como $f(A)-\lambda I$ es inversible y por el corolario 2.1, el conjunto de elementos inversible en $L(H)$ es abierto, se deduce que $\exists\ n_0$ tal que $P_n(A)-P_n(\mu)I$ es inversible $\forall\ n \geqslant n_0$. Por lo tanto, $P_n(\mu) \notin \sigma(P_n(A))$.

Como $\sigma(P_n(A)) = P_n(\sigma(A))$ por la proposición 2,2, entonces $P_n(\mu) \notin P_n(\sigma(A))$ y por lo tanto $\mu \notin \sigma(A)$, absurdo. Luego, $\lambda \in \sigma(f(A))$.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(f(A))$. Luego $f(A)-\lambda I$ no es inversible en $L(H)$.

Si $\lambda \notin f(\sigma(A))$, $f(t)-\lambda \neq 0\ \forall\ t \in \sigma(A)$; tiene sentido entonces $g(t) = \dfrac{1}{f(t)-\lambda}$ y g es continua sobre $\sigma(A)$, y queda definido $g(A) \in L(H)$.

Pero en general, si f y g son continuas sobre $\sigma(A)$ con valores reales, entonces $f(A)g(A) = (f.g)(A)$.

En efecto, si $P_n \rightrightarrows f$ sobre $\sigma(A)$, $Q_n \rightrightarrows g$ sobre $\sigma(A)$, donde P_n y Q_n son polinomios, entonces $P_n.Q_n \rightrightarrows f.g$ sobre $\sigma(A)$. Por lo tanto, $(f.g)(A) = \lim\limits_{n\to\infty} (P_n.Q_n)(A)$. Como P_n y Q_n son polinomios, $(P_n.Q_n)(A) = P_n(A).Q_n(A)$. Luego, $(f.g)(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(A).Q_n(A) = (\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A))(\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(A)) = f(A)g(A)$, donde se usó que si $C_n \to C$, $D_n \to D$ en $L(H)$, entonces $C_nD_n \to CD$ en $L(H)$, pues

$$\|CD-C_nD_n\| = \|C(D-D_n)+(C-C_n)D_n\| \leqslant \|C\|\|D-D_n\| + \|C-C_n\|\|D_n\|.$$

Por lo tanto, como $\|D_n\| < M\ \ \forall\ n$, se obtiene que $C_nD_n \to CD$.

En el caso particular de $g(t) = \dfrac{1}{f(t)-\lambda}$ es $g(t)(f(t)-\lambda) = 1$.

Por lo tanto $g(A)(f(A)-\lambda I) = I$, y como $(f(t)-\lambda)g(t) = 1$, también $(f(A)-\lambda I)g(A) = I$. Luego, $f(A)-\lambda I$ es inversible en $L(H)$. Absurdo.

Esto concluye la prueba de la proposición 2.4.
#

Definición 2.6:

Sea $A \in L(H)$ autoadjunto. A es positivo si $(Ax,x) \geqslant 0 \ \forall\ x \in H$; si $B \in L(H)$ es autoadjunto, $A \geqslant B$ si $A-B$ es positivo, o sea, si $(Ax,x) \geqslant (Bx,x) \quad \forall\ x \in H$.

Como $|(Ax,x)| \leqslant \|A\|\|x\|^2 = (\|A\|\ Ix,x) \quad \forall\ x \in H$, entonces

$$-\|A\|\ I \leqslant A \leqslant \|A\|\ I \qquad \forall\ A \in L(H) \text{ autoadjunto.}$$

Se define también $m = \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax,x)$; $M = \sup\limits_{\|x\|=1} (Ax,x)$

m y M suelen llamarse las cotas del operador autoadjunto A.

Resulta $(mI \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}) = m \leqslant (A(\frac{x}{\|x\|}), \frac{x}{\|x\|}) \quad \forall\ x \neq 0$. Por lo tanto, $(mIx,x) \leqslant (Ax,x) \quad \forall\ x \neq 0$, y entonces $mI \leqslant A$. Análogamente se puede probar que $A \leqslant MI$. Luego $mI \leqslant A \leqslant MI$, además, $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$. Pues si $\|x\| = 1$, $(Ax,x) \in [m,M]$, y por lo tanto $|(Ax,x)| \leqslant \max\{|m|, |M|\}$. Pero $m = \lim\limits_{n\to\infty} (Ax_n,x_n)$ con $\|x_n\| = 1$. Luego $|(Ax_n,x_n)| \to |m|$, con $|(Ax_n,x_n)| \leqslant \|A\|$. Entonces $|m| \leqslant \|A\|$; de manera análoga se puede probar que $|M| \leqslant \|A\|$. Por lo tanto $\max\{|m|, |M|\} \leqslant \|A\| =$

$$= \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)| \leqslant \max\{|m|, |M|\}.$$

Además, si α y μ verifican que $\alpha I \leqslant A \leqslant \mu I$, entonces, por definición resulta $\alpha \leqslant m \leqslant M \leqslant \mu$, o sea, $[m,M] \subset [\alpha,\mu]$.

Proposición 2.5:

Dado $A \in L(H)$ autoadjunto, se tiene $\sigma(A) \subset [m,M]$, $m \in \sigma(A)$, $M \in \sigma(A)$.

Demostración:

Si $\lambda > M$ es $\lambda = M+\varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$; por lo tanto, $((A-\lambda I)x,x) =$ $= (Ax,x)-\lambda\|x\|^2 \leqslant M\|x\|^2-\lambda\|x\|^2 = -\varepsilon\|x\|^2$. Luego:

$$\varepsilon\|x\|^2 \leqslant -((A-\lambda I)x,x) = |((A-\lambda I)x,x)| \leqslant \|(A-\lambda I)x\|\|x\| \qquad \forall\ x \in H.$$

Si $\|x\| = 1$, se obtiene $0 < \varepsilon \leq \|(A-\lambda I)x\|$. Luego, por el lema 2.6, $\lambda \notin \sigma(A)$.

Si $\lambda < m$, es $\lambda = m-\varepsilon$ para cierto $\varepsilon > 0$. Luego, $((A-\lambda I)x,x) = (Ax,x) - \lambda\|x\|^2 \geq m\|x\|^2 - \lambda\|x\|^2 = \varepsilon\|x\|^2$; por lo tanto

$$\varepsilon\|x\|^2 \leq ((A-\lambda I)x,x) = |((A-\lambda I)x,x)| \leq \|(A-\lambda I)x\|\,\|x\| \quad \forall\, x \in H.$$

Si $\|x\| = 1$, se obtiene:

$$0 < \varepsilon \leq \|(A-\lambda I)x\|.$$

Luego, nuevamente por el lema 2.6, $\lambda \notin \sigma(A)$.

Como por el lema 2.7, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, se deduce que $\sigma(A) \subset [m,M]$.

Se prueba ahora que $M \in \sigma(A)$, suponiendo que $A \geq 0$.

Por definición, $\exists \{x_n\} / \|x_n\| = 1$ y $(Ax_n,x_n) \to M$. Por lo tanto,

$$\|(A-MI)x_n\|^2 = ((A-MI)x_n,(A-MI)x_n) = \|Ax_n\|^2 + M^2 - 2M(Ax_n,x_n) \leq$$

$$\leq \|A\|^2 + M^2 - 2M(Ax_n,x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \|A\|^2 + M^2 - 2M^2 = \|A\|^2 - M^2.$$

Pero como $A \geq 0$, debe ser $0 \leq m \leq M$. Luego $\|A\| = \max\{|m|,|M|\} = M$.

Por lo tanto $\|(A-MI)x_n\| \underset{m\to\infty}{\to} 0$ con $\|x_n\| = 1$. Luego, por el lema 2.6, $M \in \sigma(A)$. Luego, se probó que si $A \geq 0$, $M \in \sigma(A)$.

Sea ahora nuevamente $A \geq 0$. Como $A \leq MI$ entonces $MI-A \geq 0$.

Por lo probado, $\sup\limits_{\|x\|=1} ((MI-A)x,x) \in \sigma(MI-A)$.

Pero $\sup\limits_{\|x\|=1} ((MI-A)x,x) = \sup\limits_{\|x\|=1} M-(Ax,x) = M- \inf\limits_{\|x\|=1} (Ax,x) = M-m$.

Por lo tanto, $M-m \in \sigma(-A+MI)$; sea $P(t) = -t+M$; entonces $P(A) = -A+MI$. Luego, $M-m \in \sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$. Por lo tanto, $\exists\, t \in \sigma(A) / M-m = P(t) = -t+M$; entonces $m = t \in \sigma(A)$.

Luego, se probó que si $A \geq 0$, entonces $M \in \sigma(A)$, $m \in \sigma(A)$.

Sea ahora $A \in L(H)$ autoadjunto cualquiera. Como $A-mI \geq 0$, por lo probado resulta

$$\sup_{\|x\|=1} ((A-mI)x,x) \in \sigma(A-mI)$$

$$\inf_{\|x\|=1} ((A-mI)x,x) \in \sigma(A-mI)$$

Por lo tanto,

$$\sup_{\|x\|=1} (Ax,x)-m \in \sigma(A-mI) \qquad \text{y también}$$

$$\inf_{\|x\|=1} (Ax,x)-m \in \sigma(A-mI)$$

o sea, $\quad M-m \in \sigma(A-mI)$, $0 \in \sigma(A-mI)$

Si $P(t) = t-m$, entonces $P(A) = A-mI$; como $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$, resulta $\sigma(A-mI) = P(\sigma(A))$.

Por lo tanto $M-m \in P(\sigma(A))$, y entonces $\exists\, t \in \sigma(A) / M-m = P(t) = t-m$

Luego $M = t \in \sigma(A)$.

También $0 \in P(\sigma(A))$, y entonces $\exists\, t \in \sigma(A) / 0 = P(t) = t-m$.

Luego $m = t \in \sigma(A)$.

Esto concluye la prueba de la proposición 2.5. #

<u>Corolario 2.2:</u>

Sea $A \in L(H)$ autoadjunto. Entonces $A \geq 0$ si y sólo si $\sigma(A) \in [0,+\infty)$.

<u>Demostración.</u>

Si $A \geq 0$, entonces $m \geq 0$. Pero $\sigma(A) \subset [m,M]$; luego $\sigma(A) \subset [0,+\infty)$.

Si $\sigma(A) \subseteq [0,+\infty)$, como $m \in \sigma(A)$, se deduce que $m \geq 0$; luego $A \geq 0$.

Esto concluye la prueba del corolario 2.2. #

Corolario 2.3:

Si $\alpha I \leqslant A \leqslant \beta I$ y f es una función continua en $[\alpha,\beta]$ con valores reales, entonces $\|f(A)\| \leqslant \sup\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |f(t)|$; en particular,

$\|f(A)\| \leqslant \sup\limits_{|t|\leqslant\|A\|} |f(t)|$.

Demostración:

Por definición de m y M, resulta $[m,M] \subset [\alpha,\beta]$. Como $\sigma(A) \subset [m,M]$, entonces $\sigma(A) \subset [\alpha,\beta]$. Por lo tanto, f es continua sobre $\sigma(A)$, y tiene sentido $f(A)$. Además $\|f(A)\| = \sup\limits_{t\in\sigma(A)} |f(t)| \leqslant \sup\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} |f(t)|$. #

Corolario 2.4:

Si f es continua en $\sigma(A)$ con valores reales, entonces $f(A) \geqslant 0$ si y sólo si $f \geqslant 0$ sobre el $\sigma(A)$.

Demostración:

$f(A) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sigma(f(A)) \subset [0,+\infty) \Leftrightarrow f(\sigma(A)) \subset [0,+\infty)$. #

Corolario 2.5:

Si f es continua en $\sigma(A)$ con valores reales, entonces

$$a \leqslant f(t) \leqslant b \quad \forall\, t \in \sigma(A) \quad \text{si y sólo si} \quad aI \leqslant f(A) \leqslant bI.$$

Demostración:

$a \leqslant f(t) \leqslant b$ en $\sigma(A) \Leftrightarrow f(t)-a \geqslant 0$, $b-f(t) \geqslant 0$ sobre $\sigma(A)$

$\Leftrightarrow f(A)-aI \geqslant 0$, $bI-f(A) \geqslant 0 \Leftrightarrow aI \leqslant f(A) \leqslant bI$. #

Corolario 2.6:

si $\tilde{m} = \inf\limits_{\|x\|=1} (f(A)x,x)$, $\tilde{M} = \sup\limits_{\|x\|=1} (f(A)x,x)$, entonces

$$\tilde{m} = \inf_{t\in\sigma(A)} f(t); \qquad \tilde{M} = \sup_{t\in\sigma(A)} f(t)$$

Demostración:

Por la proposición 2.5, $\sigma(f(A)) \subset [\tilde{m},\tilde{M}]$, $\tilde{m} \in \sigma(f(A))$; $\tilde{M} \in \sigma(f(A))$.

Por lo tanto, $\tilde{m} = \inf(\sigma(f(a)))$; $\tilde{M} = \sup(\sigma(f(A)))$.

Como $\sigma(f(A) = f(\sigma(A))$, es $\tilde{m} = \inf f(\sigma(A))$, $\tilde{M} = \sup\ (f(\sigma(A)))$, o sea, $\tilde{m} = \inf\limits_{t\in\sigma(A)} f(t)$, $\tilde{M} = \sup\limits_{t\in\sigma(A)} f(t)$.

#

Corolario 2.7:

Sea $A \in L(H)$ autoadjunto tal que $\alpha I \leqslant A \leqslant \mu I$, y sea

$$C(A) = \{t \in [\alpha,\mu] \text{ tales que } f(t) = 0 \quad \forall\, f \text{ continua en } [\alpha,\mu] \text{ con valores reales tal que } f(A) = 0\}.$$

Entonces, $C(A) = \sigma(A)$.

Demostración:

Sea $t \in \sigma(A)$. Sea f continua en $[\alpha,\mu]$ con valores reales tal que $f(A) = 0$.

Pero se sabe que $f(A) = 0$ si y sólo si $f \equiv 0$ sobre $\sigma(A)$. Luego, $f(t) = 0$.

Por lo tanto, $t \in C(A)$.

Reciprocamente, sea $t \in C(A)$; supongamos que $t \notin \sigma(A)$. Como $\sigma(A)$ es compacto y $\sigma(A) \subset [\alpha,\mu]$, y como $t \in [\alpha,\mu]$, existe una función f continua en $[\alpha,\mu]$ con valores reales tal que $f(t) = 1$ y $f \equiv 0$ sobre $\sigma(A)$. Pero entonces $f(A) = 0$ y $f(t) = 1$, con $t \in C(A)$. absurdo.

Esto concluye la prueba del Corolario 2.7.

#

Como aplicación de todo lo dicho, se menciona la construcción de la raíz cuadrada de un operador positivo.

Sea $A \in L(H)$ autoadjunto, $A \geqslant 0$, y sea $f(t) = \sqrt{t}$.

Como $\sigma(A) \subset [0,+\infty)$ de acuerdo con el corolario 2.2, y f es continua en $[0,+\infty)$, tiene sentido $f(A)$. Además, por lo observado en la proposición 2.4, es:

$$f(A)^2 = f(A)\,f(A) = (f.f)(A) = A \quad \text{pues} \quad f(t)^2 = t$$

y $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \subset [0,+\ )$. Por lo tanto, $f(A) \geqslant 0$.

Como $f(A)$ es límite de polinomios de A, $f(A)$ conmuta con cualquier operador C que conmuta con A.

Lema 2.9:

Si $B_1 \geqslant 0$, $B_2 \geqslant 0$, $B_1^2 = B_2^2$ y $B_1B_2 = B_2B_1$, entonces $B_1 = B_2$

Demostración:

Sea $y = (B_1-B_2)x$, donde $x \in H$.

$$((B_1+B_2)y,y) = ((B_1+B_2)(B_1-B_2)x,y) = ((B_1^2-B_2^2)x,y) = 0$$

donde se usó que $B_1B_2 = B_2B_1$. Por lo tanto, $(B_1y,y) + (B_2y,y) = 0$

Como $B_1 \geqslant 0$, $B_2 \geqslant 0$, se deduce que $(B_1y,y) = (B_2y,y) = 0$.

Sea $f(t) = \sqrt{t}$; sea $D_1 = f(B_1)$; $D_2 = f(B_2)$.

Entonces $D_1 \geqslant 0$; $D_2 \geqslant 0$; $D_1^2 = B_1$; $D_2^2 = B_2$. Pero entonces:

$$\|D_1y\|^2 = (D_1y,D_1y) = (D_1^2y,y) = (B_1y,y) = 0.$$

Entonces $D_1y = 0$.

Luego $B_1y = D_1^2y = 0$. Análogamente se puede probar que $B_2y = 0$.

Por lo tanto, $\|y\|^2 = (y,y) = (y,(B_1-B_2)x) = ((B_1-B_2)y,x) = 0$.

Luego, $y = 0$. Por lo tanto, $B_1 = B_2$.

Esto concluye la prueba del lema 2.9.

Corolario 2.8:

Si $B \geq 0$ y $B^2 = A$, entonces $B = f(A)$ donde $f(t) = \sqrt{t}$.

Demostración:

Se tiene $B^2 = f(A)^2 = A$; además, $BA = BB^2 = B^2B = AB$. Luego, B conmuta con A. Pero f(A) conmuta con cualquier operador que conmuta con A.

Por lo tanto, f(A) conmuta con B. Entonces, por el lema 2.9, es $B = f(A)$.

§3. Definición de cálculo funcional

(Ver [5])

Sean $\mathcal{F}$ un álgebra de funciones $f:R \to R$, con la multiplicación como producto, y $\mathcal{P}$ el conjunto de polinomios con coeficientes reales; se supone que $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$.

Sea K un álgebra unitaria de operadores $A:X \to X$, donde X es un espacio vectorial topológico, con la composición como producto.

Definición 3.1:

Un cálculo funcional sobre K relativo a $\mathcal{F}$ es una aplicación $\theta:\mathcal{F}\times K \to K$ tal que:

1) $\theta(1,A) = I \quad \forall\ A \in K$

2) $\theta(t,A) = A \quad \forall\ A \in K$

3) $\theta(\alpha f+\beta g,A) = \alpha\theta(f,A)+\beta\theta(g,A) \quad \forall\ \alpha,\beta \in R,\ f,g \in \mathcal{F},\ A \in K$

4) $\theta(f.g,A) = \theta(f,A)\circ\theta(g,A) \quad \forall\ f,g \in \mathcal{F},\ A \in K.$

De estas propiedades se deduce que si P es un polinomio, $\theta(P,A) = P(A) \quad \forall\ A \in K.$

Si además $\mathcal{F}$ es cerrada por composición, y si $\theta(f\circ g, A) = \theta(f, \theta(g,A))$ $\forall\ f,g \in \mathcal{F}$, $A \in K$, entonces el cálculo funcional se llama completo.

Por ejemplo, si se tiene $\mathcal{F} = \mathcal{P}$ y $\theta(P,A) = P(A)$, se obtiene el llamado cálculo básico, que es completo.

Si $\mathcal{F}$ y K son álgebras de Fréchet, tales que $\mathcal{P}$ es denso en $\mathcal{F}$ y tales que para cada $A \in K$, la aplicación

$$\mathcal{P} \to K$$

$$P \to \theta(P,A) = P(A)$$

es continua, es claro entonces que existe un único cálculo funcional sobre K relativo a $\mathcal{F}$, continuo en la primera variable.

Si se supone además que la aplicación:

$$\mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$(f,g) \to f\circ g$$

está bien definida y es continua en cada variable, y que para cada $P \in \mathcal{P}$. la aplicación:

$$K \to K$$

$$A \to \theta(P,A) = P(A)$$

es continua, entonces la extensión resulta completa.

En efecto, sean f y $g \in \mathcal{F}$, $A \in K$. Sea $\{P_j\}$ una sucesión de polinomios tal que $P_j \to f$ en $\mathcal{F}$, y sea $\{Q_j\}$ otra sucesión de polinomios tal que $Q_j \to g$ en $\mathcal{F}$. Por ser P_j y Q_j polinomios, vale que:

$$(P_j\circ Q_k)(A) = P_j(Q_k(A)) \text{ o sea } \theta(P_j\circ Q_k, A) = \theta(P_j, \theta(Q_k,A))$$

Fijado j, se sabe que $P_j\circ Q_k \underset{k\to\infty}{\to} P_j\circ g$ por hipótesis.

Como θ es continuo en la primera variable, resulta

$\theta(P_j \circ Q_k, A) \underset{k\to\infty}{\to} \theta(P_j \circ g, A)$.

Por otra parte, $\theta(Q_k, A) \underset{k\to\infty}{\to} \theta(g,A)$. Luego, por la continuidad en la segunda variable, fijada en la primera un polinomio, se obtiene que

$$\theta(P_j, \theta(Q_k, A)) \underset{k\to\infty}{\to} \theta(P_j, \theta(g,A)).$$

Luego,

$$\theta(P_j \circ g, A) = \theta(P_j, \theta(g,A)) \quad \forall\ j.$$

Pero $P_j \circ g \underset{j\to\infty}{\to} f \circ g$ por hipótesis. Por la continuidad de θ en la primera variable, se obtiene que

$$\theta(P_j \circ g, A) \underset{j\to\infty}{\to} \theta(f \circ g, A), \text{ y también } \theta(P_j, \theta(g,A)) \underset{j\to\infty}{\to} \theta(f, \theta(g,A))$$

Luego, $\theta(f \circ g, A) = \theta(f, \theta(g,A))$; por lo tanto, el cálculo funcional es completo.

Si además, la aplicación $\mathcal{P} \to K$

$$P \to \theta(P,A) = P(A)$$

es continua uniformemente respecto de A cuando A varía en acotados de K, entonces para cada $f \in \mathcal{F}$, la aplicación: $K \to K$

$$A \to \theta(f,A)$$

es continua.

En efecto, sea $f \in \mathcal{F}$ fija. Es claro que también la extensión:

$\mathcal{F} \to K$

$g \to \theta(g,A)$

es continua erespecto de A cuando A varía en acotados de K.

Sea $\{P_k\}$ una sucesión de polinomios tal que $P_k \to f$ en $\mathcal{F}$, y sea $\| \ \|$ una seminorma en K. Sea $A \in K$, y sea $\{A_j\}$ una sucesión tal que $A_j \to A$ en K:

$$\|\theta(f,A_j)-\theta(f,A)\| \leqslant \|\theta(f,A_j)-\theta(P_k,A_j)\| + \|\theta(P_k,A_j)-\theta(P_k,A)\| + \|\theta(P_k,A)-\theta(f,A)\|$$

Como $\{A_j,A\}$ es un acotado de K, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, k_0$ tal que

$$\|\theta(f,A_j)-\theta(P_k,A_j)\| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant k_0, \quad \forall j$$

Por otra parte, como θ es continua en la primera variable, $\exists\, k_1$ tal que

$$\|\theta(P_k,A)-\theta(f,A)\| < \varepsilon \quad \forall k \geqslant k_1; \qquad \text{Sea } k_2 = \max\{k_0,k_1\}$$

Como θ es continua en la segunda variable cuando en la primera se fija un polinomio, es $\|\theta(P_{k_2},A_j)-\theta(P_{k_2},A)\| < \varepsilon$ si $j \geqslant j_0$.

Luego, $\|\theta(f,A_j)-\theta(f,A)\| < 3\varepsilon$ si $j \geqslant j_0$, lo cual prueba que

$$\theta(f,A_j) \underset{j\to\infty}{\to} \theta(f,A)$$

§4. Cálculo funcional relativo a funciones continuas:

Sea H un espacio de Hilbert. Dada una familia maximal de operadores autoadjuntos que conmutan, se considere el álgebra $\mathcal{A}$ autoadjunta, real y cerrada generada por esa familia. $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach, real, con la norma inducida por H.

Se toma $\mathcal{P}$ con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de R. El teorema de Weierstrass muestra que su clausura es C(R), las funciones f:R → R continuas, que es un espacio de Fréchet con las seminormas de la convergencia uniforme sobre compactos.

Proposición 4.1:

Existe un único cálculo funcional continuo en cada variable y completo relativo a $C(R)$ sobre A.

Demostración:

Fijado $A \in A$, la aplicación $P \to A$

$$P \to P(A)$$

es continua, ya que, según lo visto en el §2, $\|P(A)\| \leqslant \sup_{|t| \leqslant \|A\|} |P(t)|$, y por lo tanto, si $P_n \to P$ en P, entonces $P_n - P \to 0$ uniformemente sobre compactos, y en particular en $\{|t| \leqslant \|A\|\}$. Por lo tanto, existe un único cálculo funcional relativo a $C(R)$ sobre A, continuo en la primera variable. Para ver que es completo, hay que probar que la aplicación

$C(R)\ C(R) \to C(R)$

$(f,g) \to f \circ g$

es continua en cada variable, y que fijado $P \in P$, la aplicación

$$A \to P(A)$$

es continua.

Supongamos que $f_n \to f$ en $C(R)$, y sea $g \in C(R)$ fija.

Dado un compacto $K \subset R$, $\sup_K |f_n \circ g - f \circ g| = \sup_K |(f_n - f) \circ g| =$
$= \sup_{g(K)} |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, pues $g(K)$ es compacto y $f_n \to f$ uniformemente sobre cada compacto.

Luego, $f_n \circ g \to f \circ g$ en $C(R)$.

Sea ahora $f \in C(R)$ fija, y sea $g_n \underset{n\to\infty}{\to} g$ en $C(R)$. Sea K un compacto. Hay que probar que $f \circ g_n \to f \circ g$ uniformemente sobre K.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $g_n \to g$ uniformemente sobre K, $\exists$ n_0 tal que

$$|g_n(t)-g(t)| < 1 \qquad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall\, t \in K.$$

Sea $K_1 = \{t \in R/d(t,g(K)) \leqslant 1\}$. Como $g(K)$ es compacto, K_1 es compacto y $K_1 \supset g(K)$.

Por lo tanto, f es uniformemente continua en K_1. Luego, $\exists\ \delta > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| < \delta$ si $|x-y| < \delta$, $x \in K_1$ $y \in K_1$.

Es claro que si $n \geqslant n_0$ y $t \in K$, entonces $g_n(t) \in K_1$.

Por otra parte, $\exists n_1$ tal que $|g_n(t)-g(t)| < \delta \quad \forall n \geqslant n_1, \forall\, t \in K$.

Sea $n_2 = \max\{n_0,n_1\}$. Si $n \geqslant n_2$ y $t \in K$, entonces

$$g_n(t) \in K_1,\ g(t) \in K_1 \quad y \quad |g_n(t)-g(t)| < \delta$$

Por lo tanto, $|f(g_n(t))-f(g(t))| < \varepsilon$. Luego, $f\circ g_n \to f\circ g$ uniformemente sobre K.

Para probar que fijado P, la aplicación $A \to P(A)$ es continua, se puede suponer que $P(t) = t^k$; o sea, es $P(A) = A^k$.

En general, dados $A,B \in L(H)$ vale que $A^k-B^k = \sum\limits_{n=0}^{k-1} A^{k-n-1}\,(A-B)\,B^n$

Si $A_j \to A$ en $L(H)$, será

$$\|A^k-A_j^k\| = \|\sum_{n=0}^{k-1} A^{k-n-1}\,(A-A_j)\,A_j^n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|A\|^{k-n-1}\|A-A_j\|\,\|A_j\|^n$$

Sea C tal que $\|A\|, \|A_j\| \leqslant C \quad \forall j$.

Luego, $\|A^k-A_j^k\| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{k-1} C^{k-1}\,\|A-A_j\| = k\,C^{k-1}\,\|A-A_j\| \underset{j\to\infty}{\to} 0$.

Por lo tanto el cálculo funcional es completo.

Para ver la continuidad de θ en la segunda variable, hay que probar que la aplicación $\mathcal{P} \to \mathcal{A}$

$$P \to P(A)$$

es continua, uniformemente respecto de A cuando A varía en acotados de $\mathcal{A}$.

Si A varía en un acotado K, $\exists$ $C > 0$ tal que $\|A\| < C$ $\forall A \in K$. Por lo tanto, $\|P(A)\| \leq \sup_{|t|\leq\|A\|} |P(t)| \leq \sup_{|t|\leq C} |P(t)|$ si P es un polinomio.

Por lo tanto si $P_n \to P$ en $\mathcal{P}$, $P_n \to P$ uniformemente en $\{|t| \leq C\}$ y entonces $\sup_{|t|\leq C} |P_n(t)-P(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, y luego, dado $\varepsilon > 0$, $\|P_n(A)-P(A)\| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$, $\forall A \in K$.

Esto concluye la prueba de la prpposición 4.1.

#

<u>Observación 4.1:</u>

Se verifica que $\theta: C(R)\times\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es continua en ambas variables a la vez.

En efecto, supongamos que $f_n \to f$ en $C(R)$, y que $A_n \to A$ en $\mathcal{A}$.

Resulta:

$$\|\theta(f_n,A_n)-\theta(f,A)\| = \|f_n(A_n)-f(A)\| \leq \|f_n(A_n)-f(A_n)\| +$$

$$+ \|f(A_n)-f(A)\| = \|(f_n-f)(A_n)\| + \|f(A_n)-f(A)\|$$

Sea M tal que $\|A_n\| \leq M$ $\forall n$. Se puede acotar entonces el primer sumando por

$$\sup_{|t|\leq\|A_n\|} |f_n(t)-f(t)| \leq \sup_{|t|\leq M} |f_n(t)-f(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \text{pues} \quad f_n \to f$$

uniformemente sobre $\{|t| \leq M\}$.

Por otra parte, como θ es continua en cada variable, vale que $f(A_n) \to f(A)$ o sea $\|f(A_n)-f(A)\| \to 0$.

Luego $\theta(f_n,A_n) \underset{n\to\infty}{\to} \theta(f,A)$. #

Un enfoque bastante distinto de estos resultados puede verse en el apêndice I de [6].

Es interesante mencionar aquí la aplicación que se hace en [12], p, 461 y siguientes, de éste cálculo funcional relativo a funciones continuas, para construir una resolución de la identidad asociada a un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert. Con relación a este tema y a la posibilidad de definir funciones de operadores mediante la noción de medida espectral, ver también [25], p. 536 y siguientes.

§5. Nociones sobre funciones analíticas con valores en espacios de Banach Cálculo funcional relativo a funciones analíticas. El teorema de Wiener-Levy

Definición 5.1:

Sea $f:D \to X$ continua, donde D es un abierto en el plano complejo C, y X es un espacio de Banach. Se dice que f es analítica en D si $\forall\, \ell \in X'$, $\ell f:I \to C$ es analítica.

Proposición 5.1:

Dada $f:D \to X$ continua, son equivalentes:

1. f es analítica en D.
2. Si Γ es una curva simple cerrada tal que $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset D$, y si $z \in \Gamma^0$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \text{(Fórmula de Cauchy)}$$

3. Existe $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ en X, para cada $z_0 \in D$.
4. Para cada $z_0 \in D$, $\exists\, \{a_n\}_{n\geq 0} \subset X$, y $\exists\, R > 0$ tales que

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-a_0)^n \text{ para } |z-z_0| < R,\ z \in D; \text{ con convergencia absoluta.}$$

Demostración:

1) $\Rightarrow$ 2) por ser $\ell f:D \to C$ analítica, vale

$$\ell f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\ell f(w)}{w-z}\,dw$$

Es bueno observar aquí, sin entrar en detalles, que la integral vectorial $\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ se interpreta como la integral de Bochner $\int_a^b \frac{f(w(t))}{w(t)-z}\,w'(t)dt$ donde $w:[a,b] \to \Gamma$ es una parametrización de la curva Γ, por ejemplo de clase C^1 al menos por trozos.

De la proposición 1.10 se sabe entonces que

$$\ell\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{\ell f(w)}{w-z}\,dw$$

Por lo tanto, $\ell\left(f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right) = 0 \;\forall\, \ell \in X'$, lo cual implica que $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $z_0 \in D$, y sea r tal que $\{w/|w-z_0| \leq r\} \subset D$.

Si $\Gamma = \{w/|w-z_0| = r\}$, Γ es una curva simple cerrada y $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset D$.

Dado z tal que $|z-z_0| < \frac{r}{2}$, se verifica por 2),

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw; \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$$

Por lo tnato, $f(z)-f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(w)\left(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right)dw =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(w)\,\frac{z-z_0}{(w-z)(w-z_0)}\,dw$, con lo cual $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}\,dw$

Tomando límite para $z \to z_0$ en el integrando, un candidato a ser el límite del cociente incremental es

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw$$

Luego,

$$\left\|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} f(w)\left(\frac{1}{(w-z)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right)dw\right\|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,\text{long}\,\Gamma \sup_{w\in\Gamma}\|f(w)\| \sup_{w\in\Gamma}\left|\frac{1}{(w-z)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right|$$

Pero $\left|\frac{1}{(w-z)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right| = \frac{1}{|w-z_0|}\left|\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right| = \frac{|z_0-z|}{|w-z_0|^2|w-z|}$

Como $|w-z_0| = r$ y $|z-z_0| < \frac{r}{2}$, entonces es $|w-z| \geq \frac{r}{2}$.

Por lo tanto, lo anterior se acota con $\frac{|z_0-z|}{r^2\cdot\frac{r}{2}} = \frac{2}{r^3}\,|z_0-z|$.

Luego, es $\sup_{w\in\Gamma}\left|\frac{1}{(w-z)(w-z_0)} - \frac{1}{(w-z_0)^2}\right| \leq \frac{2}{r^3}\,|z_0-z| \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$

con lo cual $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw.$

3) ⇒ 1) Sean $\ell \in X'$ y $z_0 \in D$.

Por 3), $\exists \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$

De manera análoga al lema 1.5, se tiene

$$\frac{\ell f(z)-\ell f(z_0)}{z-z_0} = \ell\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} \ell f'(z_0)$$

Por lo tanto, $\exists\ (\ell\circ f)'(z_0) = \ell(f'(z_0))$.

Luego, $\ell\circ f$ es analítica $\forall\ \ell \in X'$, y por lo tanto, f es analítica en D.

2) $\Rightarrow$ 4). Sean $z_0 \in D$, y r tal que $\{|w-z_0| \leqslant r\} \subset D$. Sea $\Gamma = \{|w-z_0| = r\}$

Para z tal que $|z-z_0| < \frac{r}{2}$, es, por 2), $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$.

Para $w \in \Gamma$, $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{w-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$

Además, fijado z, $|z-z_0| < \frac{r}{2}$, la serie converge uniformemente para $w \in \Gamma$, ya que

$$\left|\frac{1}{w-z} - \sum_{n=0}^{k}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{(\frac{r}{2})^n}{r^n} = \sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

y por lo tanto, $\sup_{w\in\Gamma}\left|\frac{1}{w-z} - \sum_{n=0}^{k}\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\to} 0$

Como además f es continua en D, $\|f(w)\| \leqslant M\ \ \forall\ w \in \Gamma$.

Por lo tanto $\frac{f(w)}{w-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$ con convergencia uniforme para $w \in \Gamma$.

Luego, se puede integrar término a término, resultando:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(w)}{w-z}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw\right)$$

Si se toma $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$, entonces $a_n \in X$ y

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ para $|z-z_0| < \frac{r}{2}$ además,

$\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|\ |z-z_0|^n < \infty$. para $|z-z_0| < \frac{r}{2}$.

En efecto, $\|a_n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}$ (long Γ). $\sup\limits_{w\in} \frac{\|f(w)\|}{|w-z_0|^{n+1}} \leqslant r.\frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$

Por lo tanto, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|a_n\| \ |z-z_0|^n \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r^n} (\frac{r}{2})^n = M \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$

4) $\Rightarrow$ 3) Sea $z_0 \in D$, y sea $R > 0$ tal que $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n (z-z_0)^n$ para $|z-z_0| < R$, con convergencia absoluta.

El radio de convergencia de una serie de potencias con valores en X se define del mismo modo que en el caso de una serie de potencias de números complejos, y la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ a_n\ (z-z_0)^{n-1}$ tiene el mismo radio de convergencia que la anterior; del mismo modo que para el caso de funciones con valores complejos, se prueba que $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ a_n\ (z-z_0)^{n-1}$ tiene por suma $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, o sea, se prueba 3).

Esto concluye la demostración de la proposición 5.1.

#

Como ejemplo elemental importante, dado un elemento a en un álgebra de Banach X, la aplicación exponencial

$$\mathbb{C} \to X$$

$$z \to e^{za} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n a^n}{n!}$$

es analítica en todo $\mathbb{C}$, o sea es entera; e^{za} conmuta con a y vale

$$(\frac{d}{dz})^m e^{za} = a^m e^{za}$$

<u>Corolario 5.1</u> (Fórmula de Cauchy para las derivadas):

Si f es analítica en D, entonces f admite derivadas de tolos los órdenes en D y dado $z \in D$, $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$, donde Γ es una curva simple cerrada tal que $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset D$ y $z \in \Gamma^0$.

Demostración:

Basta derivar bajo el signo integral, usando la convergencia uniforme.

#

Proposición 5.2 (Teorema de Louville):

Si $f:C \to X$ es analítica y $\|f(z)\| \leq M \quad \forall\, z \in C$, entonces f es constante.

Demostración:

Se acaba de probar que vale $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw$;

Se toma $\Gamma = \{|w-z| = R\}$, dado $R > 0$, y resulta $\|f'(z)\| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R =$

$= \frac{M}{R} \underset{R\to\infty}{\to} 0$

Por lo tanto, $f'(z) = 0 \quad \forall\, z \in C$. Luego, dada $\ell \in X$, $(\ell f)'(z) =$ $= \ell(f'(z)) = 0 \quad \forall\, z \in C$, o sea ℓf es constante.

Luego, dados $z_1, z_2 \in C$, $\ell f(z_1) = \ell f(z_2)$, y entonces $\ell(f(z_1)-f(z_2)) = 0$ $(\forall\, \ell \quad X')$; por lo tanto $f(z_1) = f(z_2)$ y entonces f es constante.

Otra forma de probar que ℓf resulta constante es observar que $\ell f:C \to C$ es analítica y $|\ell f(z)| \leq \|\ell\| \, \|f(z)\| \leq \|\ell\|.M \quad \forall\, z \in C$.

Esto concluye la demostración de la proposición 5.2.

#

Proposición 5.3 (Teorema de Cauchy):

Si $f:D \to X$ es analítica y Γ es una curva cerrada tal que $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset D$, entonces $\int_{\Gamma^+} f(z)dz = 0$.

Demostración:

Si $\ell \in X'$, ℓf es analítica y por lo tanto $\int_\Gamma \ell f(z)dz = 0$.

Pero $\int_\Gamma \ell f(z)dz = \ell(\int_\Gamma f(z)dz)$. Luego $\ell(\int_\Gamma f(z)dz) = 0 \quad \forall\ \ell \in X'$ y

entonces $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ en X.

Esto concluye la prueba de la proposición 5.3.
#

Proposición 5.4 (Principio del módulo máximo):

Sea $U \subset C$ abierto acotado, y sea $f: \bar{U} \to X$ continua, analítica en U.

Entonces $\sup_{z\in\bar{U}} \|f(z)\| = \sup_{z\in\partial U} \|f(z)\|$.

Demostración:

Dado $z \in \bar{U}$, sea $\ell \in X'$ tal que $\ell(f(z)) = \|f(z)\|$ y $\|\ell\| = 1$.

Entonces, siendo ℓf analítica en U y continua en $\bar{U}$, vale:

$$\|f(z)\| = \ell(f(z)) \leqslant \sup_{w\in\bar{U}} |\ell f(w)| = \sup_{w\in\partial U} |\ell f(w)|$$

Pero como $\|\ell\| = 1$, $|\ell f(w)| \leqslant \|f(w)\| \quad \forall\ w \in U$.

Luego, $\|f(z)\| \leqslant \sup_{w\in\partial U} \|f(w)\|$, y esto vale $\forall\ z \in \bar{U}$; por lo tanto,

$\sup_{z\in\bar{U}} \|f(z)\| \leqslant \sup_{z\in\partial U} \|f(z)\|$.

Esto concluye la prueba de la proposición 5.4.
#

Es posible dar algunas extensiones del principio del módulo máximo, por ejemplo el:

Principio de Lindeloff

Sea B la banda en el plano complejo, $\{z/a < \mathrm{Re}\ z < b\}$.

Sea $f:\overline{B} \to X$ continua y analítica en B. Se supone además que $\exists\ M > 0$ tal que $\|f(z)\| \leq M \quad \forall\ z \in \overline{B}$.

Entonces,

$$\sup_{z\in\overline{B}} \|f(z)\| = \sup_{z\in\partial B} \|f(z)\|$$

La prueba se basa en el principio del módulo máximo y sigue los pasos del caso escalar. (Ver [7], p. 79).

Proposición 5.5 (Principio de prolongación analítica)

Sea U abierto conexo en C, y sea $f:U \to X$ analítica tal que $f = 0$ en un conjunto abierto contenido en U, o bien $f = 0$ en un conjunto con un punto de acumulación en U, o bien $f^{(n)}(z_0) = 0$, fijado $z_0 \in U$, $\forall\ n \geq 0$.

Entonces, $f = 0$ en U.

Demostración:

Si $f = 0$ en un conjunto con un punto de acumulación (en particular en un abierto), y si $\ell \in X'$, entonces $\ell f = 0$ en un conjunto con un punto de acumulación en U, y por lo tanto $\ell f = 0$ en U.

Luego, dado $z \in U$, $\ell(f(z)) = 0 \quad \forall\ \ell \in X'$ y entonces $f(z) = 0$.

Si $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall\ n$, entonces dado $\ell \in X'$, es:

$(\ell f)^{(n)}(z_0) = \ell(f^{(n)}(z_0)) = 0 \quad \forall\ n$; por lo tanto $\ell f = 0$ en U, $\forall\ \ell \in X'$, y nuevamente $f = 0$ en U.

Esto concluye la prueba de la proposición 5.5

#

En ocasiones puede resutar conveniente el comprobar la analiticidad de una función $f:D \to X$ sin necesidad de considerar todas las funciones lineales y continuas en X. Para ello se dará una noción de conjunto determinante para X, un poco más general que la enunciada en la definición 1.6.

Definición 5.2:

Dado S subconjunto de X', se dirá que es determinante para X si

$\ell(v) = 0 \quad \forall\, \ell \in S$, implica que $v = 0$

No hay dificultad en comprobar que si S es determinante según 1.6, también lo es según 5.2. Pero la recíproca no puede ser cierta, porque dado $\lambda \in C$, $\lambda \neq 0$, el conjunto $S = \{\lambda \ell / \ell \in S\}$ sigue siendo determinante según 5.2, pero no tiene porque serlo según 1.6, pues se había observado que si S cumple 1.6, debería ser $\|\ell\| \leq 1 \quad \forall\, \ell \in S$.

Proposición 5.6:

Dada $f: U \to X$ continua, son equivalentes:

1) f es analítica en U.

2) $\ell f: U \to C$ es analítica para cada $\ell \in S$, conjunto determinante para X.

Demostración:

Basta probar 2) ⇒ 1).

Si $\ell \in S$, se sabe que vale $\ell f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma^+} \dfrac{f(w)}{w-z}\, dw$, en las hipótesis usuales. Pero por ser S determinante, se concluye que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

La proposición 5.1 muestra entonces que f es analítica en U.

Esto concluye la prueba.

#

El hecho de que las funciones escalera formen un conjunto determinante para L^p, $1 < p < \infty$, resulta por ejemplo de utilidad en el desarrollo del método complejo de interpolación. (Ver [8]).

Definición 5.3:

Dado $A \in L(X)$ (X Banach), se define la función

$$\lambda \to (A-\lambda I)^{-1}$$

para $\lambda \in \rho(A)$. Esta función se llama la función resolvente de A.

Se quiere probar que esta función es analítica en $\rho(A)$ con valores en $L(X)$.

Lema 5.1:

Si $\mathcal{Y}$ es el conjunto de los elementos inversibles en $L(X)$, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &\to \mathcal{Y} \\ A &\to A^{-1} \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:

Supongamos que ya se probó que es continua en I.

Si $A_n \to A$, $A_n, A \in \mathcal{Y}$, entonces $A_n A^{-1} \to I$ en $\mathcal{Y}$.

Por lo tanto, $(A_n A^{-1})^{-1} \to I$, o sea $A A_n^{-1} \to I$; entonces $A_n^{-1} \to A$

Luego, basta probar que es continua en I.

En general, dados $A,B \in \mathcal{Y}$, $A^{-1}-B^{-1} = A^{-1}(I-AB^{-1}) = A^{-1}(B-A)B^{-1}$

Luego, si $A_n \to I$, $A_n \in \mathcal{Y}$, es $A_n^{-1}-I = A_n^{-1}(I-A_n)$.

Por lo tanto

$$\|A_n^{-1}-I\| = \|A_n^{-1}\| \, \|I-A_n\|, \text{ con } \|I-A_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Luego, basta probar que $\|A_n^{-1}\|$ es acotada.

Dado $0 < \varepsilon < 1$, se tiene $\|A_n-I\| \leq \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$

Por lo tanto, $A_n = I-(I-A_n)$, con $\|I-A_n\| \leq \varepsilon < 1$, si $n \geq n_0$.

Luego, $A_n^{-1} = \sum_{k\geq 0} (I-A_n)^k$; o sea, $\|A_n^{-1}\| \leq \sum_{k\geq 0} \|I-A_n\|^k \leq \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k = \frac{1}{1-\varepsilon}$

para $n \geq n_0$.

Esto concluye la demostración del lema 5.1.

#

Proposición 5.7:

La función resolvente es analítica en $\rho(A)$.

Demostración:

Sea $\lambda_0 \in \rho(A)$ fijo; para $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \neq \lambda_0$, es:

$$\frac{(A-\lambda I)^{-1}-(A-\lambda_0 I)^{-1}}{\lambda-\lambda_0} = \frac{(A-\lambda I)^{-1}(\lambda-\lambda_0)I(A-\lambda_0 I)^{-1}}{\lambda-\lambda_0} = (A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda_0 I)^{-1}$$

Por lo tanto

$$\frac{(A-\lambda I)^{-1}-(A-\lambda_0 I)^{-1}}{\lambda-\lambda_0} \underset{\lambda\to\lambda_0}{\to} ((A-\lambda_0 I)^{-1})^2$$

Luego, la función resolvente es derivable en cada punto de $\rho(A)$.

De acuerdo con la proposición 5.1, se concluye lo afirmado.

#

Se va a mostrar ahora que $\rho(A)$ no puede ser todo C.

En efecto, si $|\lambda_n| \to \infty$, entonces $|\lambda_n| \geq \|A\|$ $\forall$ $n \geq n_0$; por lo tanto $\lambda_n \in \rho(A)$ y $(A-\lambda_n I)^{-1} = (\lambda_n(\frac{A}{\lambda_n} - I))^{-1} = \frac{1}{\lambda_n}(\frac{A}{\lambda_n} - I)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, ya que $(\frac{A}{\lambda_n} - I)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} -I$.

Luego, la función resolvente tiende a cero en el infinito, y por lo tanto, es acotada en un entorno del infinito.

Luego, $\exists$ $M > 0$ tal que en $\{|\lambda| > M\}$, la función resolvente está acotada

Si $\rho(A) = \mathbb{C}$, la resolvente es analítica en todo $\mathbb{C}$. Por la continuidad, también estará acotada en $\{|\lambda| \leq M\}$. Por lo tanto, la resolvente es una función acotada en todo C; el teorema de Liouville muestra que entonces la función resolvente debe ser constante, lo cual es un absurdo.

Luego, $\sigma(A) \neq \emptyset$ para todo $A \in L(X)$.

Definición 5.4:

Dado $A \in L(X)$, se define el radio espectral de A, por:

$$r_\sigma(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$$

Proposición 5.8:

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r_\sigma(A)$$

Demostración:

$$r_\sigma(A^n) = \sup_{\lambda\in\sigma(A^n)} |\lambda| = \sup_{\lambda\in(\sigma(A))^n} |\lambda| = \sup_{\mu\in\sigma(A)} |\mu^n| = (\sup_{\mu\in\sigma(A)} |\mu|)^n =$$

$= (r_\sigma(A))^n$.

Por otra parte, se sabe que $r_\sigma(A) \leq \|A\|$ $\forall A \in L(X)$.

Luego, $r_\sigma(A)^n = r_\sigma(A^n) \leq \|A^n\|$, o sea $r_\sigma(A) \leq \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, $r_\sigma(A) \leq \underline{\lim} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Se tendrá el resultado deseado, si se prueba que $\overline{\lim} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r_\sigma(A)$

Para ello se estudia la serie de potencias $- \sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$

En primer lugar se observa que para cada $\lambda \neq 0$ tal que la serie converja, representa a la función $(A-\lambda I)^{-1}$.

En efecto:

$$-(A-\lambda I)\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}=\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{\lambda^n}-\sum_{n=0}^{N}\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}}=I-\frac{A^{N+1}}{\lambda^{N+1}}\underset{N\to\infty}{\to} I$$

análogamente,

$$-\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}(A-\lambda I)\underset{N\to\infty}{\to} I.$$

Para $|\lambda|>r_\sigma(A)$, la función $(A-\lambda I)^{-1}$ está definida y es analítica.

Por lo tanto admite un desarrollo de potencias

$$(A-\lambda I)^{-1}=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{1}{\lambda^n}, \quad a_n\in L(X)$$

válido en ese entorno del infinito.

Por otra parte la serie $-\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ converge absolutamente en $|\lambda|>\|A\|$ y representa allí una función analítica, que por lo dicho debe ser $(A-\lambda I)^{-1}$.

El principio de prolongación analítica asegura entonces que

$$(A-\lambda I)^{-1}=-\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \text{ con convergencia absoluta en } |\lambda|>r_\sigma(A).$$

Si $\exists\ \lambda_0$ tal que $0<|\lambda_0|<r_\sigma(A)$ donde $-\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$ converge, por propiedad de las series de potencias, esta serie debe converger absolutamente para $\left|\frac{1}{\lambda}\right|<\left|\frac{1}{\lambda_0}\right|$; pero esto no puese ser, porque implicaría que todos los valores λ con $|\lambda_0|<|\lambda|$ están en $\rho(A)$, lo cual contradice la definición de $r_\sigma(A)$.

O sea, si $|\lambda|<r_\sigma(A)$, la serie diverge.

Esto muestra que $\frac{1}{r_\sigma(A)}$ es el radio de convergencia de la serie

$$-\sum_{n\geq 0}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

Debe ser entonces $\frac{1}{r_\lambda(A)}=\dfrac{1}{\overline{\lim}\,\|A^n\|^{\frac{1}{n}}}$

lo cual concluye la prueba de la proposición 5.8. #

Puede probarse (Ver [9], p. 419) que dados $A,B \in L(X)$, que conmutan, vale

$$r_\sigma(AB) \leq r_\sigma(A)\, r_\sigma(B)$$

$$r_\sigma(A+B) \leq r_\sigma(A) + r_\sigma(B)$$

La primera de estas desigualdades es sencilla de obtener; para la segunda se requiere un cálculo más cuidadoso.

Se está ahora en condiciones de exponer un cálculo funcional relativo a funciones analíticas. (Ver [9], p. 424).

Este cálculo fue propuesto por Fréderique Riesz (1913) y desarrollado por N. Dunford (1943). (Ver también [9] para otras referencias).

<u>Definición 5.5:</u>

Sea $A \in L(X)$, X espacio de Banach; se considera:

- $I(A) = \{u:U \to C / u$ es analítica en U, donde U es un abierto tal que $U \supset \sigma(A)\}$

$I(A)$ se llama el conjunto de funciones admisibles para A.

Dada $u \in I(A)$, $u:U \to C$ analítica, se considera una curva simple cerrada Γ tal que $\sigma(A) \subset \Gamma^0$ y $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset U$, y se define:

$$u(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} u(z).(zI-A)^{-1}\, dz$$

Esta fórmula explícita del cálculo funcional fue dada por F.Riesz.

La integral está bien definida, pues la función $u(z).(zI-A)^{-1}$ es analítica con valores en $L(X)$ para $z \in U-\sigma(A)$ y es por lo tanto continua sobre Γ.

Además, la integral no depende de la curva Γ elegida, ya que si Γ_1 y Γ_2 son curvas que satisfacen lo pedido, las integrales sobre una y otra coinciden por el teorema de Cauchy.

Se verá ahora porque llamar u(A) a esa integral.

Si $u(z) = z^n$, entonces

$$u(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} z^n(zI-A)^{-1}\,dz, \text{ y se puede elegir } \Gamma = \{|z| = R\}$$

con $R > r_c(A)$.

Para $z \in \Gamma$ es $|z| > r_c(A)$ y por lo tanto vale $(zI-A)^{-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{z^{k+1}}$

Además esta serie converge uniformemente para $|z| \geq R$, ya que su radio de convergencia, como serie de potencias en $\frac{1}{z}$ es $\frac{1}{r_\sigma(A)}$. Luego, se puede integral en Γ término a término la serie de $(zI-A)^{-1}$, resultando

$$u(A) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} z^{n-k-1} A^k\,dz = \sum_{k\geq 0} A^k \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} z^{n-k-1}\,dz$$

$$\text{Pero } \int_{\Gamma^+} z^{n-k-1}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n-k-1 \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n-k-1 = -1 \end{cases}$$

Luego, $u(A) = A^n$.

En particular, para $n = 0$ y $n = 1$, se obtienen:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} (zI-A)^{-1}\,dz = I; \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} z.(zI-A)^{-1}\,dz = A.$$

y para todo polinomio P(z), por linealidad resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} P(z).(zI-A)^{-1}\,dz = P(A)$$

donde Γ es cualquier curva simple cerrada tal que $\sigma(A) \subset \Gamma^0$.

Lema 5.2:

Si $u_n : U \to C$ es analítica, donde $U \supset \sigma(A)$, y si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ uniformemente sobre los compactos de U, entonces

$$u(A) = \lim_{n\to\infty} u_n(A)$$

Demostración:

En primer lugar, se sabe que u es analítica en U. Sea Γ una curva simple cerrada tal que $\sigma(A) \subset \Gamma^0$, $\Gamma^0 \cup \Gamma \subset U$.

Como Γ es un compacto de U, $u_n \to u$ uniformemente sobre Γ.

Además, la función $(zI-A)^{-1}$ es acotada en Γ, pues es continua sobre el compacto Γ.

Luego, $u_n(z)(zI-A)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} u(z)(zI-A)^{-1}$ uniformemente sobre Γ.

Pero entonces $\|u_n(A)-u(A)\| = \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\Gamma^+} (u_n(z)-u(z))(zI-A)^{-1}\, dz \right\| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{z\in\Gamma} \|(u_n(z)-u(z))(zI-A)^{-1}\| \text{ long } \Gamma \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Esto concluye la prueba del lema 5.2.

#

Lema 5.3:

Si u es admisible para el operador A, entonces u(A) conmuta con cualquier operador que conmuta con A.

Demostración:

Se usará el siguiente resultado:

Teorema de Mergelyan: (Ver [10], p. 367, [11]).

Sea E un compacto de C; toda función continua en E y analítica en E^0 se puede aproximar uniformemente en E por polinomios $\Leftrightarrow$ C-E es conexo.

Considerando una curva Γ tal que $\sigma(A) \in \Gamma^0$, $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset U$, se toma el compacto $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma^0$, cuyo complemento es conexo.

Luego, existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tal que $P_n \to u$ uniformemente en Γ. Luego, al igual que en el lema anterior, resulta que $P_n(A) \to u(A)$ en $L(X)$. Por lo tanto, $u(A)$ conmuta con cualquier operador que conmuta con A.

Esto concluye la prueba del lema 5.3.

Se quiere estudiar ahora la continuidad de la aplicación $A \to u(A)$:

Supongamos que $A_n \to A$ en $L(X)$. Sea M tal que $\|A\|, \|A_n\| \leqslant M \quad \forall\, n$ y sea $U = \{z/|z| < M+\varepsilon\}$, donde $\varepsilon > 0$.

Si u es analítica en U, se toma $\Gamma = \{|z| = M+\varepsilon', \text{ con } 0 < \varepsilon' < \varepsilon\}$

Entonces $\sigma(A_n) \subset \{|z| \leqslant \|A_n\|\} \subset \{|z| \leqslant M\} \subset \Gamma^0$ y también $\sigma(A) \subset \Gamma^0$, $\Gamma^0 \cup \Gamma \subset U$, $U \supset \sigma(A_n)$, $U \supset \sigma(A)$. Por lo tanto $u \in I(A_n)$, $I(A)$ y se tiene:

$$u(A_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} u(z)(zI-A_n)^{-1}\, dz;$$

$$u(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} u(z)(zI-A)^{-1}\, dz$$

Para $z \in \Gamma$ es $\|(zI-A_n)^{-1}\| = \|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_n^k}{z^{k+1}}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{(M+\varepsilon')^k} = C < +\infty.$

Luego, $\exists\ C > 0$ tal que $\|(zI-A_n)^{-1}\| \leqslant C$, $\forall z \in \Gamma$, $\forall n$.

$\|(zI-A)^{-1}\| \leqslant C$

además, $\|(zI-A_n)^{-1}-(zI-A)^{-1}\| = \|(zI-A_n)^{-1}(A_n-A)(zI-A)^{-1}\| \leqslant$

$$\leqslant \|(zI-A_n)^{-1}\|\|A_n-A)\|\|(zI-A)^{-1}\| \leqslant c^2\|A_n-A\| \qquad \forall\, z\in\Gamma$$

Entonces, $\sup\limits_{z\in\Gamma} \|(zI-A_n)^{-1}-(zI-A)^{-1}\| \leqslant c^2\|A_n-A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Por lo tanto, $(zI-A_n)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} (zI-A)^{-1}$ uniformemente sobre Γ.

Como u es acotada en Γ, $u(z)\,(zI-A_n)^{-1} \underset{n\to\infty}{\to} u(z)(zI-A)^{-1}$ uniformemente sobre Γ. En consecuencia,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} u(z)(zI-A_n)^{-1}dz \underset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} u(z)(zI-A)^{-1}dz$$

o sea:

$$u(A_n) \underset{n\to\infty}{\to} u(A)$$

Proposición 5.9:

Si $u,v \in I(A)$, entonces $(u.v)(A) = u(A).v(A)$.

Demostración:

Se sabe que u y v son analíticas en un abierto U tal que $U \supset \sigma(A)$.

Vale

$$u(A)v(A) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} u(z)(zI-A)^{-1}dz\right).\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} v(w)(wI-A)^{-1}dw\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+}\int_{\Gamma_v^+} u(z)v(w)(zI-A)^{-1}(wI-A)^{-1}\,dz\,dw$$

donde la integral doble existe pues el integrando es continuo en $\Gamma_u \times \Gamma_v$.

Se tiene:

$$(zI-A)^{-1}-(wI-A)^{-1} = (zI-A)^{-1}(w-z)I\ (wI-A)^{-1}$$

Por lo tanto:

$$(zI-A)^{-1}(wI-A)^{-1} = \frac{(zI-A)^{-1}-(wI-A)^{-1}}{w-z} \qquad \text{si } w \neq z.$$

Se eligen Γ_u y Γ_v de manera que satisfagan todo lo pedido y además $\Gamma_u \subset \Gamma_v^0$.

Resulta:

$$u(A)v(a) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} \frac{u(z)v(w)}{w-z}\,(zI-A)^{-1}\,dw\,dz$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+}\int_{\Gamma_v^+} \frac{u(z)v(w)}{w-z}\,(wI-A)^{-1}\,dw\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} u(z)(zI-A)^{-1}dz\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+}\frac{v(w)}{w-z}\,dw\ +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} v(w)(wI-A)^{-1}\,dw\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+}\frac{u(z)}{z-w}\,dz$$

Pero, de acuerdo con la fórmula y el teorema de Cauchy, es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+}\frac{v(w)}{w-z}\,dw = v(z) \qquad \text{pues } z \in \Gamma_u \subset \Gamma_v^0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+}\frac{u(z)}{z-w}\,dz = 0$$ pues w está fuera de la región que encierra Γ_u.

Así, $u(A)v(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} u(z)v(z)(zI-A)^{-1}\, dz = (u.v)(A)$

Esto concluye la prueba de la proposición 5.9.

#

Puede demostrarse empleando el teorema de Mergelyan.

En efecto, se sabe que existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tal que $P_n \to u$ uniformemente sobre $\Gamma \cup \Gamma^0$, donde Γ es una curva simple cerrada tal que $\sigma(A) \subset \Gamma^0$, $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset U$; análogamente, $\exists$ una sucesión $\{Q_n\}$ de polinomios tal que $Q_n \to v$ uniformemente sobre $\Gamma \cup \Gamma^0$.

Por lo probado antes, $P_n(A) \to u(A)$, $Q_n(A) \to v(A)$. Pero como $P_nQ_n \to u.v$ uniformemente en $\Gamma \cup \Gamma^0$, resulta $(P_n.Q_n)(A) \to (u.v)(A)$.

Por otra parte $(P_n.Q_n)(A) = P_n(A).Q_n(A) \to u(A).v(A)$.

Luego, $(u.v)(A) = u(A).v(A)$.

Lema 5.4:

Si $u \in I(A)$, es $\sigma(u(A)) = u(\sigma(A))$

Demostración:

Sea $z_0 \in \sigma(A)$ y sea $v(z) = \begin{cases} \dfrac{u(z)-u(z_0)}{z-z_0} & z \in U,\ z \neq z_0 \\ u'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$

v es analítica en $U-\{z_0\}$ y continua en z_0; luego v es analítica en U, o sea $v \in I(A)$.

Además, $(z-z_0)v(z) = u(z)-u(z_0)$ $\forall z \in U$. Evaluando en A, se obtiene,

$$(A-z_0I)v(A) = u(A)- u(z_0)I, \text{ con } u(z_0) \in u(\sigma(A))$$

Si $u(z_0) \notin \sigma(u(A))$, $u(A)-u(z_0)I$ es inversible en $L(X)$; por lo tanto $(A-z_0I)v(A)$ es inversible en $L(X)$. Si C es su inversa, se obtiene:

$$(A-z_0I)v(A)\ C = I,\quad C(A-z_0I)v(A) = I$$

Pero $v(A)$ conmuta con $A-z_0I$, luego $C\ v(A)(a-z_0I) = I$.

O sea, $A-z_0I$ tiene inversa a derecha y a izquierda. Por lo tanto, $A-z_0I$ es inversible en $L(X)$, lo cual es un absurdo.

Luego, $u(z_0) \in \sigma(u(A))$; por lo tanto, $u(\sigma(A)) \subset \sigma(u(A))$.

Recíprocamente, sea $\lambda \in \sigma(u(A))$; supongamos que $\lambda \notin u(\sigma(A))$.

Como $u(\sigma(A))$ es compacto, existe un entorno abierto V de $u(\sigma(A))$ tal que $\lambda \notin V$.

Sea $U_1 = u^{-1}(V)$. Entonces U_1 es abierto, $U_1 \subset U$, $U_1 \supset \sigma(A)$.

Para $z \in U_1$, tiene sentido $\frac{1}{u(z)-\lambda}$ y es una función analítica en U_1.

Como $U_1 \supset \sigma(A)$, tiene sentido $(\frac{1}{u(z)-\lambda})(A) \in L(X)$.

Se sabe que $(u(z)-\lambda)(\frac{1}{u(z)-\lambda}) = (\frac{1}{u(z)-\lambda})(u(z)-\lambda) = 1 \quad \forall\ z \in U_1$; evaluando en A se obtiene:

$$(u(A)-\lambda I)(\frac{1}{u(z)-\lambda})(A) = (\frac{1}{u(z)-\lambda})(A)(u(A)-\lambda I) = I$$

Por lo tanto, $u(A)-\lambda I$ es inversible en $L(X)$, lo cual es un absurdo.

Luego, $\lambda \in u(\sigma(A))$; entonces, $\sigma(u(A)) \subset u(\sigma(A))$.

Esto concluye la prueba del lema 5.4.

#

Lema 5.5:

Si $u \in I(A)$ y $v \in I(u(A))$ entonces $v \circ u \in I(A)$ y vale

$$(v \circ u)(A) = v(u(A))$$

Demostración:

v es analítica en un abierto V, con $V \supset \sigma(u(A))$.

u es analítica en un abikrto U, con $U \supset \sigma(A)$.

Sea $U_1 = u^{-1}(V) = \{z \in U/u(z) \in V\}$; U_1 es abierto, $U_1 \subset U$.

Si $z \in \sigma(A)$, entonces $u(z) \in u(\sigma(A)) = \sigma(u(A)) \subset V$. Por lo tanto, $z \in U_1$. Luego, $U_1 \supset \sigma(A)$.

O sea, se tiene $u:U_1 \to V$ y $v:V \to C$ analíticas, donde $U_1 \supset \sigma(A)$ y $V \supset \sigma(u(A)) = u(\sigma(A))$.

Por lo tanto, tiene sentido $v \circ u$ y es analítica en U_1. Entonces, $v \circ u \in I(A)$.

Por otra parte, es:

$$v(u(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} v(z)(zI-u(A))^{-1}\, dz$$

donde Γ_v es cualquier curva simple cerrada tal que $\sigma(u(A)) = u(\sigma(A)) \subset \Gamma_v^0$, $\Gamma_v^0 \cup \Gamma_v \subset V$.

Se elige Γ_v de la siguiente forma:

Sea Γ_u una curva simple cerrada tal que $\sigma(A) \subset \Gamma_u^0$, $\Gamma_u^0 \cup \Gamma_u \subset U_1$.

Sea $\bar{\Gamma}_u = \Gamma_u^0 \cup \Gamma_u$; $u(\bar{\Gamma}_u)$ es un compacto conexo contenido en V. Por lo tanto, existe una curva simple cerrada Γ_v tal que $u(\bar{\Gamma}_u) \subset \Gamma_v^0$ y $\Gamma_v^0 \cup \Gamma_v \subset V$.

Pero entonces $\Gamma_v^0 \supset u(\bar{\Gamma}_u) \supset u(\Gamma_u^0) \supset u(\sigma(A)) = \sigma(u(A))$.

Sea $U_2 = \{w \in U_1/u(w) \in \Gamma_v^0\}$. U_2 es abierto y además $U_2 \supset \bar{\Gamma}_u \supset \Gamma_u^0 \supset \sigma(A)$.

Para $z \in \Gamma_v$, tiene sentido $\frac{1}{z-u(w)}$ para $w \in U_2$, y es una función analítica de w para $w \in U_2$. Además, como $U_2 \supset \sigma(A)$, tiene sentido $\left(\frac{1}{z-u(w)}\right)(A) = (zI-u(A))^{-1}$.

Pero $(\frac{1}{z-u(w)})(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} \frac{1}{z-u(w)}(wI-A)^{-1}\,dw.$

Por lo tanto:

$$v(u(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} v(z).(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} \frac{(wI-A)^{-1}}{z-u(w)}\,dw)\,dz$$

Como la integral doble existe, porque el integrando es continuo en $\Gamma_u \times \Gamma_v$, se pueden intercambiar las órdenes de integración, resultando,

$$v(u(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} (wI-A)^{-1}\,(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} \frac{v(z)}{z-u(w)}\,dz)dw$$

Para $w \in \Gamma_u$, $u(w) \in \Gamma_v^0$. Por lo tanto, por la fórmula de Cauchy, es $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_v^+} \frac{v(z)}{z-u(w)}\,dz = v(u(w))$.

Luego, $v(u(A)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} (wI-A)^{-1}\,v(u(w))dw = (v\circ u)(A)$

Esto concluye la prueba del lema 5.5.

#

Es bueno hacer aquí un comentario con relación a las nociones introducidas en el §3. No se ha construido en rigor un cálculo funcional en el sentido allí definido, porque la clase de funciones admisibles I(A) depende del operador A. Esto también ocurrió en el §4. Sin embargo puede decirse que fijado A, la aplicación

$$I(A) \to L(X)$$

cumple:

$$1 \to I$$

$$z \to A$$

$$u(z)v(z) \to u(A).v(A)$$

$$u(v(z)) \to u(v(A))$$

Esto puede resumirse diciendo que la aplicación es un cálculo funcional completo en la primera variable. Además es continua tomando en I(A) la convergencia uniforme en los compactos del abierto de definición

Por otra porte, dado un acotado $\mathcal{A} \subset L(X)$, puede encontrarse un espacio de funciones admisibles común a todos los operadores de $\mathcal{A}$, sea $I(\mathcal{A})$. Entonces paara cada $u \in I(\mathcal{A})$, la aplicación:

$$\mathcal{A} \to L(X)$$

$$A \to u(A)$$

es continua.

Se verá ahora como depende el cálculo funcional u(A) cuando en u hay algún parámetro.

Sea $U \subset C$ un abierto tal que $U \supset \sigma(A)$ y sea $u:U\times U \to C$ continua tal que pora cada $w \in U$ fijo, $u(z,\underline{\underline{w}})$ es analítica en U.

Tiene sentido entonces, para cada $w \in U$, $u(A;w) \in L(X)$.

Por lo tanto, se tiene una función

$$U \to L(X)$$

$$w \to u(A;w)$$

Se afirma que esta función es contiua.

En efecto, $u(A;w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int u(z,w)(zI-A)^{-1}dz$ con $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset U$, $\Gamma^c \supset \sigma(A)$, para todo $w \in U$. Γ^+

Se fija $w_0 \in U$.

$$\|u(A;w)-u(A;w_0)\| = \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} (u(z,w)-u(z,w_0))(zI-A)^{-1}\,dz\|$$

Sea $C > 0$ tal que $\{|w-w_0| \leq C\} \subset U$.

La función u es uniformemente continua en $\Gamma \times \{|w-w_0| \leq C\}$.

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|u(z,w)-u(z,w_0)| < \varepsilon$ si $z \in \Gamma$, $|w-w_0| < \delta$, $|w-w_0| \leq C$.

Por lo tanto,

$$\|u(A,w)-u(A,w_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \sup_{z\in\Gamma} \|(zI-A)^{-1}\| \text{ long } \Gamma, \text{ si } |w-w_0| < \min\{\delta, C\}.$$

Esto muestra que la función es continua.

Se supone ahora que, además, u es analítica en la variable w, fijado $z \in U$.

Se probará que entonces la función $w \to u(A;w)$ es analítica en U.

Para $w \neq w_0$, es:

$$\frac{u(A;w)-u(A;w_0)}{w-w_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_u^+} \left(\frac{u(z,w)-u(z,w_0)}{w-w_0}\right).(zI-A)^{-1}\,dz$$

$$\text{Se define } v(z,w) = \begin{cases} \dfrac{u(z,w)-u(z,w_0)}{w-w_0} & \text{si } w \neq w_0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial w}(z,w_0) & \text{si } w = w_0 \end{cases}$$

Se sabe (ver [12], p. 2) que al ser u continua y analítica en cada variable separadamente, debe ser analítica en $U \times U$, lo cual significa que para cada punto $(z_0,w_0) \in U \times U$, vale un desarrollo:

$$u(z,w) = \sum_{j,\ell\geq 0} a_{j\ell}(z-z_0)^j (w-w_0)^\ell \quad \text{en } |z-z_0| < r,\ |w-w_0| < r.$$

Por lo tanto, la función $\frac{\partial u}{\partial w}(z,w)$ es analítica en U (fijado w) y tiene sentido $\frac{\partial u}{\partial w}(A;w)$. Además, v es continua en U × U.

Por lo tanto es uniformemente continua en $\Gamma \times \{|w-w_0| \leq C\}$ donde $\{|w-w_0| \leq C\} \subset U$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{u(z,w)-u(z,w_0)}{w-w_0} - \frac{\partial u}{\partial w}(z,w_0)\right| < \varepsilon \text{ si } |w-w_0| \leq \delta,\ |w-w_0| \leq C,$$

$$z \in \Gamma.$$

Luego,

$$\left\|\frac{u(A;w)-u(A;w_0)}{w-w_0} - \frac{\partial u}{\partial w}(A;w_0)\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\left(\frac{u(z,w)-u(z,w_0)}{w-w_0} - \frac{\partial u}{\partial w}(z,w_0)\right)(zI-A)^{-1}\,dz\right\|$$

$$\frac{1}{2\pi}\varepsilon \sup_{z\in\Gamma}\|(zI-A)^{-1}\| \text{ long } \Gamma, \text{ si } |w-w_0| \leq \min\{\delta, C\}.$$

Por lo tanto, $\exists \lim\limits_{w\to w_0}\frac{u(A;w)-u(A;w_0)}{w-w_0} = \frac{\partial u}{\partial w}(A;w_0)$

o sea, $\exists\ \frac{\partial}{\partial w}(u(A;w)) = \frac{\partial u}{\partial w}(A;w)$.

como aplicación de estos resultados, se obtendrá ahora el teorema de Wiener-Levy (Ver [9], p. 428 y sus referencias).

Sea $X = \{f:R \to C$ continuas, 1-periódicas, con serie de Fourier absolutamente convergente$\}$.

Es decir, toda $f \in X$ tiene asociada una serie de Fourier $\sum_{n\in Z} a_n e^{2\pi inx}$ con $\sum_{n\in Z}|a_n| < +\infty$.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n\in Z} a_n e^{2\pi inx}$ converge uniformemente en todo R; luego, necesariamente $f(x) = \sum_{n\in Z} a_n e^{2\pi inx}$ $\forall x \in R$,

Se define $\|f\|_X = \sum_{n\in Z} |a_n|$; por lo que se acaba de decir, es una norma en el espacio X.

Se afirma que $(X, \| \|_X)$ es un álgebra de Banach con la multiplicación punto a punto como producto.

En efecto, si f y g $\in$ X, es $f(x) = \sum a_n e^{2\pi inx}$; $g(x) = \sum b_n e^{2\pi inx}$ y ambas series son absolutamente convergentes. Luego:

$f(x).g(x) = \sum_{\ell\in Z} (\sum_{n+m=\ell} a_n b_m) e^{2\pi i\ell x}$ y esta serie converge absoluta y uniformemente, ya que:

$$\sum_{\ell\in Z} | \sum_{n+m=\ell} a_n b_m| \leq \sum_{\ell} \sum_{n+m=\ell} |a_n||b_m| = \sum_n |a_n| \sum_m |b_m|$$

Por lo tanto, esta es la serie de Fourier de f.g; entonces

$f.g \in X$ y $\|f.g\|_X \leq \|f\|_X.\|g\|_X$.

Veamos que X es un espacio de Banach: Sea $\{f^{(\ell)}\}$ una sucesión de Cauchy en X.

$$\|f^{(\ell)}-f^{(\ell')}\|_X = \sum_{n\in Z} |a_n^{(\ell)}-a_n^{(\ell')}| \underset{\ell,\ell'\to\infty}{\to} 0.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n^{(\ell)}\}_\ell$ es de Cauchy en ℓ^1, entonces $\exists$ $\{a_n\} \in \ell^1$ tal que $\{a_n^{(\ell)}\} \underset{\ell\to\infty}{\to} \{a_n\}$ en ℓ^1, o sea $\sum_{n\in Z} |a_n^{(\ell)}-a_n| \underset{\ell\to\infty}{\to} 0$

Sea $f(x) = \sum_{n\in Z} a_n e^{2\pi inx}$; como esta serie converge uniformemente, es la serie de Fourier de f; por lo tanto f $\in$ X. Además:

$\|f^{(\ell)}-f\|_X = \sum_{n\in Z} |a_n^{(\ell)}-a_n| \underset{\ell\to\infty}{\to} 0$; por lo tanto, $f^{(\ell)} \underset{\ell\to\infty}{\to} f$ en X.

Luego X es un álgebra de Banach.

Para cada $f \in X$, se define el operador $T_f : X \to X$ como $T_f(g) = f.g$.

T_f es lineal y además, $\|T_f(g)\|_X = \|f.g\|_X \leq \|f\|_X \|g\|_X$.

Por lo tanto $T_f \in L(X)$ y $\|T_f\| \leq \|f\|_X$.

La función $g_0 \equiv 1$ pertenece a X y $\|g_0\|_X = 1$. Pero $T_f(g_0) = f$.

Luego $\|T_f\| = \sup\limits_{\|g\|_X=1} \|T_f(g)\|_X \geq \|f\|_X$. O sea, $\|T_f\| = \|f\|_X$.

además, $T_f \circ T_g = T_{f.g}$; $\alpha T_f + \beta T_g = T_{\alpha f+\beta g}$, si $f,g \in X$, $\alpha,\beta \in C$.

Por lo tanto si P es un polinomio, vale $P(T_f) = T_{P(f)}$.

En particular, $T_f^n = T_{f^n}$, $\forall\, n \in N$.

De acuerdo con la proposición 5.8, se tiene entonces

$$r_\sigma(T_f) = \sup_{\lambda\in\sigma(T_f)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} (\|T_f^n\|^{\frac{1}{n}}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \|T_{f^n}\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_X^{\frac{1}{n}} \quad \text{o sea:}$$

$$r_\sigma(T_f) = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|_X^{\frac{1}{n}} \qquad \forall\, f \in X.$$

Pero más aún, puede demostrarse lo siguiente:

<u>Proposición 5.10:</u>

Si $f \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} |f^n|_X^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty$

<u>Demostración:</u>

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in R} |f(x)| = \sup_{x\in R} (|f(x)|^n)^{\frac{1}{n}}$$

Ahora si $g \in X$, es $|g(x)| \leq \|g\|_X$ $\forall\, x \in R$, ya que si

$g(x) = \sum\limits_{n\in Z} a_n e^{2\pi inx}$ entonces $|g(x)| \leq \sum\limits_{n\in Z} |a_n| = \|g\|_X$.

Como $f^n \in X$, $\sup\limits_{x\in R} |f(x)|^n \leq \|f^n\|_X$ con lo cual $\|f\|_\infty \leq \|f^n\|_X^{\frac{1}{n}}$, $\forall\, n$.

O sea $\|f\|_\infty \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\|f^n\|_X^{\frac{1}{n}}) = r_\sigma(T_f) \quad \forall\, f \in X$.

Por otra parte, dada $f \in X$, $f(x) = \sum a_n e^{2\pi inx}$ con $\sum |a_n| < \infty$.

Por lo tanto, $\{\sum_{-N}^{M} a_n e^{2\pi inx}, N,M \in N\}$ es un subconjunto denso en X.

Estas sumas se llaman polinomics trigonométricos; en primer lugar se probará la desigualdad buscada cuando f es uno de esos polinomios.

Si P es un polinomio trigonométrico de la forma $P(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{2\pi ijx}$, entonces

$$P(x)^n = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_N^{\alpha_N} e^{2\ ix(\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+N\alpha_N)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{R} d_k^{(n)} e^{2\pi ikx}$$

Pero $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+N\alpha_N \leqslant (\sum_1^N \alpha_j)(\sum_1^N j) \leqslant n \frac{N(N+1)}{2}$ o sea $R \leqslant n \frac{N(N+1)}{2}$

además, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz, se tiene:

$$\|P^n\|_X = \sum_{k=0}^{R} |d_k^{(n)}| \leqslant (\sum_{k=0}^{R} |d_k^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}} (R+1)^{\frac{1}{2}}$$

De la igualdad de Bessel, es:

$$\int_0^1 |P(x)|^{2n} dx = \int_0^1 P(x)^n \overline{P(x)^n} dx = \sum_{k=0}^{R} |d_k^{(n)}|^2$$

Luego,

$$(\sum_{k=0}^{R} |d_k^{(n)}|^2)^{\frac{1}{2}} = (\int_0^1 |P(x)|^{2n} dx)^{\frac{1}{2}} \leqslant \|P\|_\infty^n$$

Una estimación grosera permite decir que

$$R \leqslant nN^2;\ R+1 \leqslant 2R \leqslant 2nN^2; \text{ por lo tanto } (R+1)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2n}\ N$$

Luego, $\|P^n\|_X \leqslant \|P\|^n \sqrt{2n}\ N$. Entonces $\|P^n\|_X^{\frac{1}{n}} \leqslant (\sqrt{2n}\ N)^{\frac{1}{n}} \|P\|_\infty$, $\forall\ n \in N$. O sea $\lim_{n\to\infty} \|P^n\|_X^{\frac{1}{n}} \leqslant \|P\|_\infty$, o dicho de otro modo, $r_\sigma(T_p) \leqslant \|P\|_\infty$.

Si $P(x) = \sum_{j=-M}^{N} a_j e^{2\pi ijx}$, puede escribirse como

$e^{-i2\pi iMx} \sum_{j=0}^{N+M} a_{j-M} e^{2\pi ijx}$, o sea $P(x) = e^{-2\pi iMx} Q(x)$, con Q de

la forma anterior, y ya se sabe que $r_\sigma(T_Q) \leq \|Q\|_\infty$.

Además, $P(x)^n = e^{-2\pi i Mnx} Q(x)^n$.

Luego,

$$\|P^n\|_X \leq \|e^{-2\pi iMnx}\|_X \|Q^n\|_X = \|Q^n\|_X$$

o sea

$$r_\sigma(T_P) = \lim_{n\to\infty} \|P^n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \|Q^n\|_X^{\frac{1}{n}} = r(T_Q) \leq \|Q\|_\infty = \|P\|_\infty.$$

Luego, $\forall$ polinomio trigonométrico P, es $r(T_P) =$

$= \lim_{n\to\infty} \|P^n\|_X^{\frac{1}{n}} \leq \|P\|_\infty$.

Sea ahora $f \in X$ cualquiera; dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ P polinomio trigonométrico tal que $\|f-P\|_X < \varepsilon$.

Sea $h = f-P$, entonces $\|h\|_X < \varepsilon$ y $T_f = T_h + T_P$.

Se tiene

$r_\sigma(T_f) \leq r_\sigma(T_h) + r_\sigma(T_P)$; como P es polinomio trigonométrico, $r_\sigma(T_P) \leq \|P\|_\infty = \|f-h\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|h\|_\infty$.

Por lo tanto, $r_\sigma(T_f) \leq \|f\|_\infty + \|h\|_\infty + r_\sigma(T_h)$

Pero se probó que $\forall\, h \in X$, $\|h\|_\infty \leq r_\sigma(T_h)$. O sea:

$$r_\sigma(T_f) \leq \|f\|_\infty + 2\, r_\sigma(T_h)$$

Como $r_\sigma(T_h) \leq \|T_h\| = \|h\|_X < \varepsilon$,

se deduce que $r_\sigma(T_f) \leq \|f\|_\infty + 2\varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

O sea: $r_\sigma(T_f) \leq \|f\|_\infty$. Esto concluye la prueba de la proposición 5.10

#

Proposición 5.11:

Si $f \in X$, $\sigma(T_f) = \mathrm{Im}(f)$.

Demostración:

Sea $\lambda \in \rho(T_f)$; $T_f-\lambda I$ es inversible en $L(X)$.

En particular, $\exists\, g \in X/(T_f-\lambda I)(g) = 1$ o sea $(f-\lambda).g \equiv 1$; por lo tanto, $f(x)-\lambda \neq 0 \quad \forall\, x \in R$. Luego, $\lambda \notin \mathrm{Im}(f)$.

Recíprocamente, si $\lambda \notin \mathrm{Im}(f)$, sea $\delta = \inf\limits_{x\in R} |\lambda-f(x)| = d(\lambda,\mathrm{Im}(f))$.

Como $\mathrm{Im}(f)$ es compacto, pues al ser f periódica, es $\mathrm{Im}(f) = f([0,1])$, es $\delta > 0$.

Sea $\Delta = \sup\limits_{x\in R} |\lambda-f(x)|$. Entonces $\Delta < +\infty$.

Se considera $\tilde{f}(x) = |f(x)-\lambda|^2 - \frac{1}{2}(\Delta^2+\delta^2)$;

$\tilde{f} \in X$ pues $|f(x)-\lambda|^2 = (f(x)-\lambda)(\overline{f(x)-\lambda}) \in X$.

Además,

$$\sup_{x\in R} \tilde{f}(x) = \Delta^2 - \frac{1}{2}(\Delta^2+\delta^2) = \frac{1}{2}(\Delta^2-\delta^2);$$

$$\inf_{x\in R} \tilde{f}(x) = \delta^2 - \frac{1}{2}(\Delta^2+\delta^2) = \frac{1}{2}(\delta^2-\Delta^2).$$

Por lo tanto:

$$\sup_{x\in R} |\tilde{f}(x)| = \frac{1}{2}(\Delta^2-\delta^2)$$

Luego, $r_\sigma(T_{\tilde{f}}) = \|\tilde{f}\|_\infty = \frac{1}{2}(\Delta^2-\delta^2)$

Sea $\mu = -\frac{1}{2}(\Delta^2+\delta^2)$; $|\mu| = \frac{1}{2}(\Delta^2+\delta^2) > r_\sigma(T_{\tilde{f}})$. Entonces, $\mu \notin \sigma(T_{\tilde{f}})$.

Luego, $T_{\tilde{f}}-\mu I = T_{\tilde{f}-\mu} = T_{(f-\lambda)} \circ T_{(\overline{f-\lambda})}$ es inversible, y como estos operadores conmutan, se deduce que $T_{f-\lambda}$ es inversible.

Luego, al ser $T_{f-\lambda} = T_f-\lambda I$, resulta que $\lambda \in \rho(T_f)$.

Esto concluye la prueba de la demostración 5.11.

#

Corolario 5.2:

Si $f \in X$ y $f(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in R$, entonces $\frac{1}{f} \in X$.

Demostración:

Por hipótesis, $0 \notin Im(f) = \sigma(T_f)$; luego, T_f es inversible en $L(x)$.

En particular, $1 \in Im(T_f)$; o sea $\exists\, g \in X / T_f(g) = f.g = 1$.

Luego

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \in X.$$

Esto concluye la prueba

#

Lema 5.6:

Sea $h: I \to X$ continua, donde I es un intervalo finito en $\mathbb{R}$.
Entonces $\left(\int_I h(t)dt\right)(x) = \int_I h(t)(x)dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Por definición, $\int_I h(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \sigma_n(t)dt$ donde $\{\sigma_n\}$ es una sucesión de funciones escalera con valores en X tal que

$$\int_I \|\sigma_n(t)-h(t)\|_X dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Fijado n,

$$\sigma_n(t) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{E_j}(t)\, g_j,$$ con E_j subconjuntos de I, medibles y disjuntos y con $g_j \in X$.

Se sabe que

$$\int_I \sigma_n(t)dt = \sum_{j=1}^{k} |E_j| g_j$$

o sea

$$\left(\int_I \sigma_n(t)dt\right)(x) = \sum_{j=1} |E_j| g_j(x) =$$

$$\left(\int_I \sigma_n(t)dt\right)(x) = \sum_{j=1}^{k} |E_j| g_j(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_I \chi_{E_j}(t)dt.g_j(x) = \sum_{j=1}^{k} \int_I \chi_{E_j}(t).g_j(x)dt =$$

$$= \int_I \left(\sum_{j=1}^{k} \chi_{E_j}(t)g_j(x)\right)dt = \int_I \sigma_n(t)(x)dt$$

Ahora, en general si $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ en X, entonces $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ uniformemente en R.

Por lo anto, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ para cada $x \in R$.

En particular, $\left(\int_I \sigma_n(t)dt\right)(x) \underset{n\to\infty}{\to} \left(\int_I h(t)dt\right)(x)$ para cada $x \in R$.

Luego, $\left(\int_I h(t)dt\right)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_I \sigma_n(t)(x)dt$

Pero para cada n, $\sigma_n(t)(x)$ es unaafunción escalera con valores en C.

Además,

$$\int_I |\sigma_n(t)(x)-h(t)(x)|dt = \int_I |(\sigma_n(t)-h(t))(x)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_I \|\sigma_n(t)-h(t)\|_\infty dt \leqslant \int_I \|\sigma_n(t)-h(t)\|_X dt \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Por lo tanto, $\int_I h(t)(x)dt = \lim_{n\to\infty} \int_I \sigma_n(t)(x)dt$

o sea,

$$\left(\int_I h(t)dt\right)(x) = \int_I h(t)(x)dt$$

Esto concluye la prueba del lema 5.6.

#

Proposición 5.12:

Sea $f \in X$ y sea u una función analítica en un abierto U tal que $U \supset Im(f)$ con valores complejos; entonces $uof \in X$ y $u(T_f) = T_{uof}$

Demostración:

u es analítica en un abierto U que contiene a $Im(f) = \sigma(T_f)$.

Por lo tanto, u es admisible para T_f y tiene sentido $u(T_f)$.

Si Γ es una curva simple cerrada tal que $\sigma(T_f) = Im(f) \subset \Gamma^0$ y $\Gamma \cup \Gamma^0 \subset U$, resulta:

$$u(T_f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} u(z).(zI-T_f)^{-1}\,dz$$

Pero $(zI-T_f)^{-1} = (T_{z-f})^{-1} = T_{\frac{1}{z-f}}$ por el corolario 5.2, para $z \in \Gamma$.

Entonces, $u(z).(zI-T_f)^{-1} = T_{\frac{u(z)}{z-f}}$.

Luego, $u(T_f) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma^+} T_{\frac{u(z)}{z-f}}\,dz$

Pero el operador $T: X \to L(x)$ definido como $T(f) = T_f$ es lineal y continua, pues $\alpha T_f + \beta T_g = T_{\alpha f+\beta g}$ $\forall\, \alpha,\beta \in C$, $f,g \in X$, y $\|T_f\| = \|f\|_X$.

Por lo tanto, de la proposición 1.10 es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} T_{\frac{u(z)}{z-f}}\,dz = T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\,dz\right)$$

donde tiene sentido $\displaystyle\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\,dz$, pues se afirma que la función

$$z \to \frac{u(z)}{z-f}$$

$$\Gamma \to X$$

es continua.

Para probar esto, basta ver que la función $f \to \frac{1}{f}$ es continua sobre $\{f \in X/f(x) \neq 0\}$ $\forall\, x \in R$ con valores en X. En efecto:

Si $f_n \to f$ en X, $f_n(x) \neq 0$ $\forall\, x \in R$, $f(x) \neq 0$ $\forall\, x \in R$, es:

$$\left\|\frac{1}{f_n} - \frac{1}{f}\right\|_X = \left\|T_{\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}}\right\| = \left\|T_{\frac{1}{f_n}} - T_{\frac{1}{f}}\right\| = \|(T_{f_n})^{-1}-(T_f)^{-1}\|$$

Como $f_n \to f$ en X, se tiene que $T_{f_n} \to T_f$ en $L(x)$, y por lo tanto, $(T_{f_n})^{-1} \to (T_f)^{-1}$ en $L(x)$.

O sea, $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ en X.

En consecuencia

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\, dz \in X.$$

y

$$u(T_f) = T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\, dz\right)$$

a partir del lema 5.6, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\, dz\right)(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \left(\frac{u(z)}{z-f}\right)(x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f(x)}\, dz$$

Pero $f(x) \in \Gamma^0$ pues $Im(f) \subset \Gamma^0$. Luego, por la fórmula integral de Cauchy, es:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f(x)}\, dz = u(f(x))$$

Por lo tanto, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\, dz = u\circ f$, de donde resulta que $u\circ f \in X$.

Además,

$$u(T_f) = T\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{u(z)}{z-f}\, dz\right) = T(u\circ f) = T_{u\circ f}$$

Esto concluye la demostración de la proposición 5.12. #

Es posible demostrar versiones de las proposiciones 5.10 y 5.12 para la transformada de Fourier.

Concretamente:

Proposición 5.13:

Dada $f \in L^1$, existe $\lim_{n\to\infty} \|f^{(n)}\|_1^{\frac{1}{n}} = \|\hat{f}\|$ donde $f^{(n)}$ indica la convolución de f consigo misma n veces.

Proposición 5.14:

Dada $f \in L^1$, sea U un entorno abierto $\subset C$ de la imagen $\hat{f}(R^n)$ y sea $F:U \to C$ una función analítica tal que $F(0) = 0$. Entonces $\exists\, g \in L^1$ tal que

$$\hat{g}(x) = F(\hat{f}(x)),\ x \in R^n.$$

§6. LA FORMULA DE H. WEYL:

(Ver [13], [14], [15] y referencias que allí se dan).

Se comenzará estudiando un caso particular pero significativo.

Dado un espacio de Hilbert H y un operador $A \in L(H)$ autoadjunto, ya se observó en el §2 que $e^{-2\pi itA}$, $t \in R$, es un operador unitario. Por lo tanto, si $f \in L^1$ y también $\hat{f} \in L^1$, está seguramente definida en $L(H)$ la integral de Bochner

$$W(f,A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\, \hat{f}(t)dt$$

y vale

$$\|W(f,A)\| \leq \|\hat{f}\|_1 .$$

Por ahora no hay nada que justifique el llamar a esa integral f(A). Los resultados que se van a dar proveerán sin embargo una justificación, incluso para funciones f en otras clases.

En lo que sigue se emplearán algunas nociones muy básicas de la teoría de distribuciones. (Ver, por ejemplo, [7]).

Proposición 6.1:

Sea $P(\xi)$ un polinomio y sea $\chi \in \mathcal{S}$, función que vale 1 en $\xi = 0$. Entonces,

$$\lim_{j\to\infty} W(P(\xi)\chi(\xi/_j),A) = P(A), \text{ en } L(H).$$

Demostración:

Por la linealidad de la expresión W en f, basta probar lo afirmado cuando $P(\xi) = \xi^m$, m = 0,1,2,...

Si m > 0, se tiene:

$$\mathcal{F}[\xi^m\chi(\xi/_j)](t) = \frac{1}{(2\pi i)^m}\, j\,\left(\frac{d}{dt}\right)^m \hat{\chi}(jt).$$

Reemplazando, la proposición 1.15 permite integrar por partes y se obtiene:

$$A^m\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\, j\,\hat{\chi}(jt)dt.$$

Cuando m = 0, esto se reduce a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\, j\,\hat{\chi}(jt)dt.$

Como $\chi(0) = 1$, vale $1 = \int_{-\infty}^{\infty} j\,\hat{\chi}(jt)dt.$

Por lo tanto, se tendrá lo afirmado si se prueba que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi itA} - I)j\,\hat{\chi}(jt)\,dt \underset{j\to\infty}{\to} 0 \quad \text{en } L(H).$$

Fijado $M > 0$ que luego se elegirá, se escribe esa integral como

$$\int_{|t|\leq M} + \int_{|t|>M}$$

Para el primer término: A partir de la definición se comprueba sin dificultad que

$$\| e^{-2\pi itA} - I \| \leq 2\pi |t| \|A\| e^{2\pi |t| \|A\|}, \; \forall t$$

Luego, la norma de la primera integral puede acotarse con

$2\pi \|A\| \|\hat{\chi}\|_1 \; M \, e^{2\pi M \|A\|}$, que $\underset{M\to 0}{\to} 0$, independientemente de j.

En cuanto al segundo término, su norma se acota con

$2 \displaystyle\int_{|t| \geq M/_j} |\hat{\chi}(t)| dt$, que $\underset{j\to\infty}{\to} 0$, fijado M.

Esto concluye la prueba de la proposición 6.1. #

Proposición 6.2:

Existe $M > 0$ tal que si $\varphi \in C_0^\infty$, $\mathrm{sop}(\varphi) \subset \{|\xi| > M\}$, entonces

$$W(\varphi, A) = 0.$$

Demostración:

Dada $\chi \in S$ tal que $\chi(0) = 1$, el teorema de convergencia mayorada permite escribir, para cada $\varphi \in C_0^\infty$:

$$W(\varphi, A) = \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA} \chi(t/_j) \, \hat{\varphi}(t) dt.$$

Fijado j, es

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA} \chi(t/_j) \, \hat{\varphi}(t) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t/_j) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it(sI-A)} \varphi(s) ds \right] dt$$

Por la proposición 1.7, esto es igual a

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_j(s)\, \varphi(s)ds, \text{ donde } u_j(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it(sI-A)}\, \chi(t/_j)dt$$

Se tendrá lo afirmado entonces, si se prueba que existe $M > 0$ independiente de j tal que $u_j(s) = 0$ para $|s| > M$. Esto se hará con una elección adecuada de la función χ.

Sea $\rho \in C_0^\infty$ tal que $0 \leq \rho \leq 1$, $\mathrm{sop}(\rho) \subset \{|s| \leq 1\}$, $\int \rho\, ds = 1$.

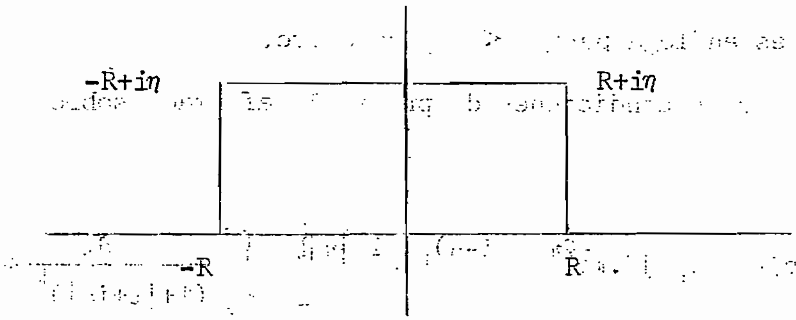
Se elige $\chi = \hat{\rho}$. O sea $\chi(^t/_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi its}\, j\, \rho(js)ds$

En primer lugar, χ puede extenderse a C como función entera, simplemente reemplazando t por una variable $z = t+iy$. Esto se debe a que la integral se hace en un compacto y por lo tanto la exponencial real $e^{-2\pi ty}$ no afecta la convergencia.

Se afirma que dado $k = 1,2,\ldots,$ existe $C_k > 0$ tal que $|\chi(^z/_j)| \leq C_k\, j^k\, (1+|z|)^{-k}\, e^{2\pi |y|/j}$.

En efecto, basta observar que $(2\pi iz)^k\, e^{2\pi izs} = (\frac{d}{dz})^k\, e^{2\pi izs}$, reemplazar en la expresión de $(2\pi iz)^k\, \chi(^z/_j)$ e integrar por partes.

Fijados ahora $\eta > 0$, $R > 0$, se considera la curva Γ:



Como la función $e^{2\pi iz(sI-A)}\, \chi(^z/_j)$ es entera, la proposición 5.3 asegura que

$$\int_\Gamma e^{2\pi iz(sI-A)}\, \chi(^z/_j)dz = 0.$$

Se probará ahora que la integral sobre los segmentos verticales $\underset{R\to\infty}{\to} 0$, con lo cual resultará que $u_j(s)$ también puede expresarse mediante la integral en la recta compleja $t \to t+i\eta$.

El tratamiento de las dos integrales es análogo y se considerará sólo una de ellas:

$$\int_0^{\eta} e^{2\pi i(R+iy)(sI-A)} \, \chi\left(\frac{R+iy}{j}\right) \, i dy$$

De acuerdo a la estimación obtenida para $\chi(z/_j)$ y teniendo en cuenta que

$$e^{2\pi i(R+iy)(sI-A)} = e^{2\pi iR(sI-A)} \, e^{-2\pi y(sI-A)}$$

porque los exponentes conmutan, la integral anterior puede acotarse con

$$C\, j \int_0^{\eta} e^{2\pi y\|sI-A\|} \, (1+|R+iy|)^{-1} . e^{2\pi y/_j} \, dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C\, j \; e^{2\pi y(\|sI-A\|+1/_j)}}{1+R} \underset{R\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

Entonces

$$u_j(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(t+i\eta)(sI-A)} . \chi\left(\frac{t+i\eta}{j}\right) dt$$

La prueba es análoga para $\eta < 0$ y se omite.

Ahora se está en condiciones de probar lo afirmado sobre la función u_j:

$$\|u_j(s)\| \leqslant C_k \, j^k . \|e^{-2\pi\eta(sI-A)}\| \; e^{2\pi|\eta|/_j} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t+i\eta|)^k} \leqslant$$

$$\leqslant C_k \, j^k . e^{2\pi(|\eta|\,\|A\|-\eta s+|\eta|/j)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+|t|)^k}$$

Para que la integral converja basta tomar $k = 2$.

Fijado s, se elige ahora $\eta = \ell\, s$, $\ell = 1,2,\ldots$. La exponencial que aparece en la estimación se escribe entonces

$$e^{2\pi \ell |s|(\|A\|+1/j-|s|)} \underset{\ell\to\infty}{\to} 0, \text{ si } |s| > \|A\|+1/j.$$

Luego, $u_j(s) = 0$ si $|s| > \|A\|+1/j$.

Es decir, puede tomarse $M = \|A\|+1$.

Pero, en realidad, basta considerar $M = \|A\|$. En efecto, si $\varphi \in C_0^\infty$, $sop(\varphi) \subset \{|s| > \|A\|\}$, por la compacidad del soporte debe existir j_0 tal que $sop(\varphi) \subset \{|s| > \|A\|+1/j_0\}$.

Se acaba de probar que $u_j(s) = 0$ si $|s| > \|A\|+1/j_0$, para $j \geq j_0$.

Luego, $W(\varphi,A) = \lim_{j\to\infty} \int u_j(s)\, \varphi(s)ds = 0$.

Este concluye la prueba de la proposición 6.2.

#

Observación 6.1:

Usando el lenguaje de las distribuciones, la expresión $W(\varphi,A)$, $\varphi \in \mathcal{S}$, no es otra cosa que la transformada de Fourier de la distribución con valores en $L(H)$, dada por la función de crecimiento lento

$$R \to L(H)$$
$$t \to e^{-2\pi itA}$$

Esta función se extiende al campo complejo como función entera cumpliendo la estimación evidente

$$\|e^{-2\pi i(t+iy)A}\| \leq e^{2\pi |y| \|A\|}$$

El teorema de Paley-Wiener (Ver [16], p. 21) asegura entonces que su transformada de Fourier es una distribución de soporte compacto contenido en la bola $\{|t| \leq \|A\|\}$.

La proposición 6.2 es la prueba directa de este hecho.

Puede probarse, (Ver [15], p. 250) que el soporte de esa distribución es exactamente el espectro del operador A.

A partir de esta proposición, es posible extender la definición de $W(\varphi,A)$ a C^∞, en la siguiente forma:

Dada $\chi \in C_0^\infty$ que vale 1 en un entorno de la bola $\{|t| \leq \|A\|\}$ y dada $\varphi \in C^\infty$, se considera $W(\chi\varphi, A)$.

La proposición 6.2 muestra que esta expresión no depende de la función $\chi \in C_0^\infty$ elegida valiendo 1 en un entorno de $\{|t| \leq \|A\|\}$. Si $\varphi \in C_0^\infty$, puede elegirse χ valiendo 1 a la vez en un entorno de esa bola y del sop(φ), con lo cual se ha obtenido una extensión a C^∞ de la fórmula de Weyl, que seguirá indicándose $W(\varphi, A)$.

Proposición 6.3:

Dado un polinomio $P(\xi)$, se tiene

$$W(P,A) = P(A).$$

Demostración:

Dada $\chi \in C_0^\infty$, que vale 1 en un entorno del origen, la proposición 6.1 asegura que $W(\chi(\xi/j)P,A) \underset{j\to\infty}{\to} P(A)$.

Por otra parte, para $j \geq j_0(\|A\|)$, $\chi(\xi/j)$ vale 1 en un entorno de $\{|\xi| \leq \|A\|\}$; luego

$$W(\chi(\xi/j)\, P,A) = W(\chi(\xi/j_0)P,A), \quad \forall\, j \geq j_0.$$

Esto concluye la demostración.

#

Lema 6.1: (L.Tartar, comunicación personal)

Dados $A,B \in L(H)$, operadores autoadjuntos,

$$\|e^{iA} - e^{iB}\| \leq \|A-B\|$$

Demostración:

Fijado $n = 1,2,\ldots$, se escribe

$$e^{iA} - e^{iB} = (e^{iA/n})^n - (e^{iB/n})^n =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} e^{iA/n(n-j-1)} \left(e^{iA/n} - e^{iB/n}\right) e^{iB/nj}$$

Por lo tanto

$$\|e^{iA}-e^{iB}\| \leqslant m\|e^{iA/n}-e^{iB/n}\| = n\|\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}[(\frac{iA}{n})^k-(\frac{iB}{n})^k]\| =$$

$$= n\|\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!}(\frac{i}{n})^k \sum_{\ell=0}^{k-1} A^{k-\ell-1}(A-B)\, B^{\ell}\|.$$

Sea $C = \max(\|A\|,\|B\|)$. Lo anterior puede acotarse entonces con

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{n^{k-1}}\, k\, C^{k-1}\,\|A-B\| = e^{C/n}\|A-B\|.$$

Tomando $\lim_{n\to\infty}$, se concluye lo afirmado. #

<u>Proposición 6.4:</u>

Sea A un álgebra real, cerrada, autoadjunta de $L(H)$.

Sea $C^{\infty}_{R} = \{\varphi : R \to R$ de clase $C^{\infty}\}$.

Entonces $W(\varphi,A)$ es un cálculo funcional sobre A relativo a C^{∞}_{R}, que es completo, continuo en ambas variables simultáneamente y que es extensión del cálculo funcional básico.

<u>Demostración:</u>

Es claro que $W(\varphi,A)$ extiende explícitamente al cálculo funcional básico, como lo muestra la proposición 6.3.

Dadas $\varphi,\psi \in C^{\infty}_{R}$, $\chi \in C^{\infty}_{0}$ valiendo 1 en un entorno de $\{|\xi| \leqslant \|A\|\}$, se tiene

$$W(\varphi\psi,A) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\,\widehat{\chi\varphi\chi\psi}(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\,(\widehat{\chi\varphi} * \widehat{\chi\psi})dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\,[\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\chi\varphi}(s)\,\widehat{\chi\psi}(t-s)ds]\,dt =$$

$$= \int e^{-2\pi itA}\,\widehat{\chi\varphi}(s)\,\widehat{\chi\psi}(t-s)ds\,dt$$

Mediante el cambio de variable $t \to r = t-s$, la integral anterior se escribe

$$\int e^{-2\pi i(s+r)A} \widehat{\chi\varphi}(s)\ \widehat{\chi\psi}(r)ds\,dr = W(\varphi,A).W(\psi,A),$$

porque los operadores $-2\pi isA$, $-2\pi irA$ conmutan.

Dadas ahora $\varphi,\psi \in C_R^\infty$, $A,B \in \mathcal{A}$, se tiene

$$\|W(\varphi,A)-W(\psi,B)\| \leqslant \|W(\varphi-\psi,A)\| + \|W(\psi,A)-W(\psi,B)\|$$

Se estudia cada término:

Para $\chi \in C_0$ adecuada, es

$$\|W(\varphi-\psi,A)\| \leqslant \int_{\infty}^{\infty} |\widehat{\chi(\varphi-\psi)}(t)|dt \leqslant \|C\ (1+t^2)\widehat{\chi(\varphi-\psi)}\| \leqslant$$

$$\leqslant C.\ \sup_{\substack{x\in \mathrm{sop}\ \chi \\ 0\leqslant k\leqslant 2}} \left|(\frac{d}{dx})^k\ (\varphi-\psi)\right|$$

Si χ se elige ahora valiendo 1 en un entorno de la bola de radio $\max(\|A\|,\|B\|)$, el segundo término se acota con

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|e^{-2\pi itA}-e^{-2\pi itB}\|.|\widehat{\chi\psi}(t)|dt$$

De acuerdo con el lema 6.1, esta integral puede mayorarse como

$$2\pi\|A-B\| \int_{-\infty}^{\infty} |t|\ |\widehat{\chi\psi}(t)\ dt| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi C\ \|A-B\|\ \sup_{\substack{x\in \mathrm{sop}\ \chi \\ 0\leqslant k\leqslant 3}} \left|(\frac{d}{dx})^k\ \psi\right|$$

Estas dos estimaciones muestran entonces que si $\varphi_n \to \varphi$ en C_R^∞, o sea convergencia uniforme de las derivadas en compactos de R y si $A_n \to A$ en $\mathcal{A}$, se tiene

$$W(\varphi_n,A_n) \to W(\varphi,A) \text{ en } \mathcal{A}.$$

En cuanto a la completitud del cálculo, se pueden comprobar las hipótesis del §3 o bien observar lo siguiente:

De acuerdo con la proposición 6.3,

$$W(P,A) = P(A), \quad \forall\, P \in \mathcal{P}.$$

Por otra parte, dada $\varphi \in C_R^{\infty}$, existe una sucesión de polinomios $\{P_k\}$ tal que $P_k \to \varphi$ en C_R^{∞}. Por lo tanto, $P_k \to \varphi$ en $C(R)$, según la notación usada en el §4.

Se deduce entonces que

$$W(\varphi,A) = \lim_k\,(P_k,A) = \lim_k\, P_k(A) = \varphi(A), \text{ donde } \varphi(A)$$

se interpreta en el sentido del §4.

La completitud se obtiene entonces de la completitud del cálculo funcional contruído en el §4.

Esto concluye la prueba de la proposición 6.4.

#

Es bueno observar que para definir $\hat{W}(\varphi,A)$ y obtener la continuidad en ambas variables, no se necesita que la función φ tome valores reales. En este sentido, se tiene el siguiente resultado:

<u>Lema 6.2:</u>

$$W(\varphi,A)^{*} = W(\overline{\varphi},A).$$

<u>Demostración:</u>

De acuerdo con el §2, la asignación $A \to A^{*}$ es un operador continuo antilineal de $L(H)$ en sí mismo. Entonces, la proposición 1.10, sin modificaciones en la demostración, permite escribir

$$W(\varphi,A)^{*} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\, \hat{\chi\varphi}(t)dt^{*} = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2\pi itA})^{*}\, \overline{\hat{\chi\varphi}(t)}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi itA}\, \overline{\hat{\chi\varphi}(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi itA}\, \overline{\hat{\chi\varphi}(-t)}dt$$

Pero $\overline{\widehat{\chi\varphi}(-t)} = \overline{F}[\chi\overline{\varphi}](-t) = \widehat{\chi\overline{\varphi}}(t)$, pues se puede tomar la función χ real.

Entonces se comprueba lo afirmado.

#

La fórmula de Weyl que acaba de estudiarse en una particular situación, admite generalizaciones en diversos sentidos.

Puede pensarse en el siguiente planteo:

Se tiene un álgebra de Banach compleja A. Por lo tanto, dado $a \in A$, la función analítica $e^{-2\pi ita}$ está definida para cada $t \in R$, con valores en A. Si $\| \ \|$ indica la norma de A, una estimación evidente es

$$\|e^{-2\pi ita}\| \leqslant e^{2\pi |t| \|a\|}$$

Luego, si f es una función integrable tal que $e^{2\pi |t| \|a\|} \hat{f}$ también es integrable, se sabe que la integral de Bochner

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ita} \hat{f}(t)dt$$

existe. Naturalmente, la estimación poco fina que se ha empleado para la exponencial, hace que se restrinjan mucho las funciones f para las cuales esa integral existe. El problema es entonces estimar de la mejor manera posible $\|e^{-2\pi ita}\|$ en función de t. Por ejemplo, una situación deseable sería la siguiente:

Existen, $C,\mu > 0$ tales que

$$\|e^{-2\pi ita}\| \leqslant C(1+|t|)^{\mu}, \quad t \in R.$$

Esto permite asegurar que la integral anterior, que está definida para $f \in S$, es la transformada de Fourier de la función de crecimiento lento $e^{-2\pi ita}$; por lo tanto tiene soporte compacto y además puede extenderse a funciones f definidas en un entorno de ese soporte, con cierto número de derivadas continuas.

No es en general fácil el obtener para una dada álgebra A, una estimación polinomial del tipo escrito antes; en algunos casos incluso, el problema de saber si efectivamente puede tenerse, está abierto. (Ver [17] y las referencias que allí figuran).

Como ejemplo de aplicación se dará ahora una clase de operadores para la cual puede llevarse a cabo el esquema que se esbozó antes.

Dada una función $m:R^n \to C$ que pertenece a L^∞, está definido para $f \in S$ el operador

$$T_m f = \overline{F}[m\hat{f}]$$

Dado $1 \leq p \leq \infty$, se dice que m es un multiplicador de L^p si T_m se extiende a un operador acotado de L^p en sí mismo. Por ejemplo, la sola hipótesis $m \in L^\infty$ es necesaria y suficiente para que m sea un multiplicador en L^2. Para $p \neq 2$, eso no es suficiente, como lo muestra el hecho de que la función característica de la bola unitaria en R^n no define un operador acotado en L^p para ningún $p \neq 2$. (Ver [18]).

Hay varios teoremas que dan condiciones suficientes para que la función m sea un multiplicador en L^p. (Ver [19], p. 94 y siguientes). De entre ellos se empleará sin demostración, el que se enuncia a continuación:

<u>Proposición 6.5:</u>

Sea $m:R^n \to C$ una función de clase C^N, donde $N = [n/2]+1$. Se supone además que

$$\sup_{0 \leq |\alpha| \leq N} \frac{|D^\alpha m(\xi)|}{(1+|\xi|)^{-|\alpha|}} = B < \infty$$

Entonces m es un multiplicador de L^p para cada $1 < p < \infty$ y además fijado p, existe una constante $A = A(p,n) > 0$ tal que

$$\|T_m f\|_p \leq AB\|f\|_p, \quad f \in S.$$

Sean

$\mathcal{M}$ = {$m:R^n \to C$ que cumple las hipótesis de la propo sición 6.5}.

$\mathcal{T}$ = {$T_m / m \in \mathcal{M}$}.

Con la multiplicación punto a punto como producto y definiendo $\|m\| = B$, $\mathcal{M}$ es un álgebra de Banach compleja.

Dados $T_{m_1}, T_{m_2} \in \mathcal{T}$, $\alpha, \beta \in C$, se comprueba de inmediato que

$$\alpha T_{m_1} + \beta T_{m_2} = T_{\alpha m_1 + \beta m_2}$$

$$T_{m_1} \circ T_{m_2} = T_{m_1 m_2}$$

$\mathcal{T}$ es entonces un álgebra de Banach compleja con la composición como producto, definiendo $\|T_m\| = \|m\|$.

Se afirma que en esta álgebra $\mathcal{T}$ se da la situación mencionada antes, respecto de la fórmula de Weyl.

En rigor, deberán considerarse los operadores asociados a multiplicadores reales.

Concretamente, dado $m:R^n \to R$, $m \in \mathcal{M}$, a partir de las operaciones definidas resulta que $e^{-2\pi i t T_m}$ es el operador asociado al multiplicador $e^{-2\pi i t m}$.

Luego, se tiene

$$\|e^{-2\pi i t T_m}\| = \|e^{-2\pi i t m}\| \leq C(1+|t|)^N.$$

donde C es una constante que depende de n,B, pero no de t.

Entonces, si f es una función de clase C^{N+2}, está definido $f(T_m) \in \mathcal{T}$, que corresponde al multiplicador fom.

El haber considerado multiplicadores m reales, equivale a considerar operadores T_m que son autoadjuntos como operadores lineales y continuos de L^2 en sí mismo.

Una propiedad esencial de la fórmula de Weyl, que constituye otra de las direcciones en que puede generalizarse su estudio, es que admite extensiones muy naturales considerando n-uplas de operadores y lo que es fundamental, sin imponer ninguna hipótesis de conmutatividad entre ellos.

Para concretar esto, se vuelve al caso de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H.

Sean entonces $A_1,\dots,A_n \in L(H)$ autoadjuntos; para $(t_1,\dots,t_n) = t \in R^n$, la combinación $t_1A_1+\dots+ t_nA_n$ vuelve a ser autoadjunta y en consecuencia

$$\| e^{2\pi i(t_1A_1+\dots+t_nA_n)} \| = 1, \quad \forall\, t \in R^n$$

Además esa función exponencial es entera con valores en L(H).

Dada $f \in L^1$ tal que $\hat{f} \in L^1$, está definida entonces la integral de Bochner

$$\int_{R^n} e^{-2\pi it.A}\, \hat{f}(t)dt$$

donde por brevedad se ha indicado $t.A = t_1A_1 +\dots+ t_nA_n$.

Vale también en este caso un análogo de la observación 6.1, con lo cual la integral anterior representa una distribución de soporte compacto. Pero es posible dar una demostración directa de este hecho, lo cual se hará ahora.

En primer lugar, si los operadores $A_1,\dots,A_n$ conmutan, la prueba es una copia del caso de una variable.

En efecto, con la notación de la proposición 6.2, se puede escribir

$$u_j(s) = \int e^{2\pi it.(sI-A)}\, \chi(t_1/j)\dots\chi(t_n/j)dt =$$

$$= \prod_{\ell=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi it_\ell(s_\ell I-A_\ell)}\, \chi(t_\ell/j)dt_\ell = \prod_{\ell=1}^{n} u_j^{(\ell)}(s)$$

Entonces $u_j(s)$ es una función de variables separadas y puede aplicarse a cada componente la proposición 6.2, resultando que $u_j(s) = 0$ si $|s_\ell| > \|A_\ell\|$, $\ell = 1,\dots,n$.

El resto de la demostración sigue de forma análoga.

Si $A_1,\dots,A_n$ no conmutan, este razonamiento ya no es aplicable y no podrá asegurarse que la función $u_j(s)$ sea de variables separadas. De todos modos conviene seguir considerando la misma función de truncación $\chi({}^{t_1}/_j)\dots\chi({}^{t_n}/_j)$.

En primer lugar, es necesaria una desigualdad que se prueba en el siguiente lema (Ver [20], apéndice B):

<u>Lema 6.3:</u>

Dados A,B operadores autoadjuntos en $L(H)$, vale

$$\|e^{A+iB}\| \leq \|e^{A}\|$$

<u>Demostración:</u>

Para $b > \|A\|$, se considera el operador $A_b = A-bI$.

$$\|e^{A_b}\| = e^{-b}\,\|e^{A}\| \leq e^{-b+\|A\|} \leq 1.$$

Se afirma que

$$\exists \lim_{n\to\infty} (e^{A_b/n}\, e^{iB/n})^n = e^{A_b+iB}$$

En efecto,

$$(e^{A_b/n}\, e^{iB/n})^n - e^{A_b+iB} = (e^{A_b/n}\, e^{iB/n})^n - (e^{(A_b+iB)/n})^n$$

Por brevedad esto se escribe como

$$M^n - N^n = \sum_{k=0}^{n-1} M^{n-k-1}\,(M-N)N^k$$

Si se observa que $\|M\| \leq 1$, puede estimarse:

$$\|M^n-N^n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \|M-N\|\,\|N^k\| \leq n\, e^{\|A_b+iB\|}\,\|M-N\|.$$

Por otra parte,

$$M-N = \sum_{\ell\geq 0} ({}^{A_b}/n)^{\ell} \frac{1}{\ell!} \sum_{h\geq 0} ({}^{iB}/n)^h \frac{1}{h!} - \sum_{k\geq 0} \frac{(A_b+iB)^k}{n^k} \frac{1}{k!} =$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{n^k} [\sum_{\ell+h=k} \frac{1}{\ell!\ h!} \cdot A_b^{\ell} (iB)^h - \frac{(A_b+iB)^k}{k!}].$$

En este desarrollo, los términos correspondientes a $k = 0$, $k = 1$ se anulan, con lo cual puede escribirse

$$M-N = \frac{1}{n^2} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{n^k} [\sum_{h+\ell=k+2} \frac{1}{\ell!\ h!} A_b^{\ell} (iB)^h - \frac{(A_b+iB)^{k+2}}{(k+2)!}]$$

Por lo tanto, se estima

$$\| M-N\| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k\geq 0} [\sum_{h+\ell=k+2} \frac{1}{\ell!\ h!} \|A_b\|^{\ell} \|B\|^h + \frac{\| A_b+iB\|^{k+2}}{(k+2)!}] =$$

$$= \frac{1}{n^2} C(\|A_b\|,\|B\|)$$

En consecuencia se prueba que

$$\|(e^{A_b/n} e^{iB/n})^n - e^{A_b+iB}\| \leq \frac{1}{n} e^{\|A_b+iB\|} C(\|A_b\|,\|B\|) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

A partir de aquí puede completarse la demostración del lema en la siguiente forma:

$$\|e^{A_b+iB}\| = \lim_{n\to\infty} \|(e^{A_b/n} e^{iB/n})^n\|$$

Fijado n, esta última norma puede estimarse con $\|e^{A_b/n}\|^n$.

Si se elige $n = 2^k$, $k = 1,2,...,$ como $e^{A_b/n}$ es un operador autoadjunto, el lema 2.1 asegura que

$$\|e^{A_b}\| = \|e^{A_b/2}\|^2 = \|e^{A_b/4}\|^4 = \ldots = \|e^{A_b/2^k}\|^{2^k}.$$

Por lo tanto, con esa elección de n se tiene

$$\|e^{A_b+iB}\| \leq \|e^{A_b}\|.$$

O bien

$$e^{-b}\,\|e^{A+iB}\| \leqslant e^{-b}\,\|e^{A}\|.$$

Esto concluye la prueba del lema 6.3. #

Se vuelve entonces a la función $u_j(s)$.

Fijado en R^n un vector de la forma ηe_k, donde $e_k = (0,\dots,0,\underset{k}{1},0,\dots,0)$, se afirma que

$$\int_{R^n} e^{2\pi i t.(sI-A)}\,\chi(t_1/_j)\dots\chi(t_n/_j)\,dt =$$

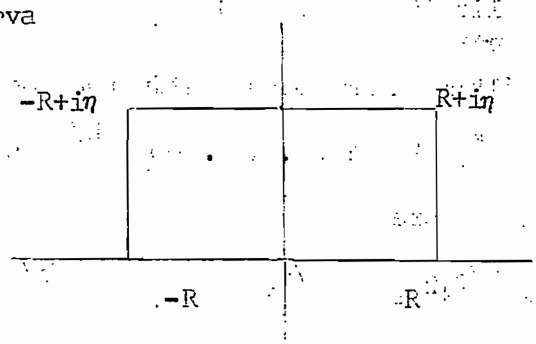
$$= \int_{R^n} e^{2\pi i(t+i\eta e_k)(sI-A)}\,\chi(t_1/_j)\dots\chi(t_k+i\eta\,/_j)\dots\chi(t_n/_j)\,dt \qquad (1)$$

En efecto, como la integral existe, basta demostrar que para $t_1,\dots,t_{k-1},t_{k+1},\dots,t_n$ fijos, se tiene la igualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(t+i\eta e_k).(sI-A)}\,\chi({}^{t_k+i\eta}/_j)\,dt_k =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t.(sI-A)}\,\chi({}^{t_k}/_j)\,dt_k$$

Como en la proposición 6.2, se emplea el teorema de Cauchy con la curva



suponiendo $\eta > 0$ y la función entera

$$F(z) = e^{2\pi i t'.(s'I-A')+2\pi i z(s_kI-A_k)}\,\chi({}^{z}/_j)$$

donde con primas se indican las n-1-uplas a las que les falta la k-ésima coordenada y $z = t_k + iy$.

Lo que quiere probarse es que para $R \to \infty$, las integrales sobre los segmentos verticales $\to 0$. Bastará comprobarlo con una de ellas.

Se emplea el lema 6.3 y las acotaciones obtenidas en la proposición 6.2. Con todo esto resulta:

$$\left\| \int_0^{\eta} F(R+iy)\,idy \right\| \leq C\; j\; e^{2\pi\eta \| s_k I - A_k \|}\; e^{2\pi\eta} \cdot \frac{\eta}{1+R} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Análogamente se obtiene lo afirmado cuando $\eta < 0$.

La prueba entonces continúa así:

Como $2\pi i(t+i\eta e_k).(sI-A) = 2\pi i(t+i\eta e_k).sI - 2\pi i(t+i\eta e_k).A$ y los dos términos conmutan, la exponencial puede escribirse

$$e^{2\pi i(t+i\eta e_k).s}\; e^{2\pi i(t+i\eta e_k).A} =$$

$$= e^{2\pi it.s}\; e^{-2\pi\eta s_k}\; e^{2\pi it.A + 2\pi\eta A_k}$$

Volviendo a emplear el lema 6.3 y las acotaciones de la proposición 6.2, el integrando de (1) puede estimarse como:

$$C_{\ell,n}\; j^{\ell n} = e^{-2\pi\eta s_k}\; e^{2\pi|\eta|\,\|A_k\|}\; e^{2\pi|\eta|/j}\; (1+|t|)^{-\ell}$$

Basta tomar $\ell = 2$ para que se obtenga la siguiente estimación:

$$\|u_j(s)\| \leq C_n\; j^{2n}\; e^{2\pi(|\eta|\,\|A_k\| + |\eta|/j - \eta s_k)}$$

Se elige ahora $\eta = p.s_k$, $p = 1,2,\ldots$

La exponencial se reduce a

$$e^{2\pi|s_k|p(\|A_k\| + 1/j - |s_k|)}$$

Por lo tanto, si se toma $\lim_{p\to\infty}$, resulta que $u_j(s) = 0$ si $|s_k| > \|A_k\| + 1/j$, para algún $k = 1,\ldots,n$.

En definitiva, se ha probado la siguiente

Proposición 6.6:

Dada una n-upla $A = (A_1,\dots,A_n)$ de operadores autoadjuntos en $L(H)$, la integral de Bochner

$$W(\varphi,A) = \int_{R^n} e^{-2\pi it.A}\,\hat{\varphi}(t)dt$$

se anula cuando $\varphi \in C_0^\infty$, $\operatorname{sop} \varphi \subset \bigcup_k \{|t_k| > \|A_k\|\}$. #

A partir de esta proposición, resulta como en el caso de una variable, que la fórmula de Weyl $W(\varphi,A)$ puede extenderse a C^∞.

Proposición 6.7:

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra real, cerrada, autoadjunta de $L(H)$. Entonces la aplicación

$$C^\infty \times \mathcal{A}^n \to L(H)$$

$$(\varphi,A) \to W(\varphi,A) \qquad A = (A_1,\dots,A_n)$$

es continua en ambas variables simultáneamente.

Demostración:

La prueba es análoga al caso de una variable. Dadas n-uplas A,B, funciones $\varphi,\psi \in C^\infty$, se puede escribir:

$$\|W(\varphi,A)-W(\psi,B)\| \leq \|W(\varphi-\psi,A)\| + \|W(\psi,A)-W(\psi,B)\|$$

Si $\chi \in C_0^\infty$ es una función de truncación adecuada, el primer término se acota con

$$\int |\widehat{\chi(\varphi-\psi)}|(t)dt \leq C. \sup_{\substack{\operatorname{sop}\chi \\ |\alpha|\leq n+1}} |D^\alpha(\varphi-\psi)|$$

En cuanto al segundo, de acuerdo con el lema 6.1, se tiene

$$\int \|2\pi t.(A-B)\| \, |\widehat{\chi\psi}|(t)dt \leq C\|A-B\| \sup_{\substack{\text{sop}\\ |\alpha|\leq n+2}} |D^{\alpha}\psi|.$$

donde $\|A-B\| = (\sum_{j=1}^{n} \|A_j-B_j\|^2)^{1/2}$.

Esto concluye la prueba de la proposición 6.7.

#

Dada una función $\varphi \in C^{\infty}$, puede ser que dependa efectivamente de menos que las n variables $t_1,\ldots,t_n$; luego, si t' indica el grupo de variables de que realmente depende, pueden considerarse seguramente dos expresiones, $W(\varphi,A)$, $W(\varphi,A')$; para la primera, se emplea una truncación y una integral en todas las variables t; para la segunda en cambio, se considera la fórmula de Weyl en la variable t' y en la correspondiente upla de operadores, que se nota con A'.

El resultado que se prueba a continuación muestra que ambas expresiones coinciden, con lo cual hay compatibilidad entre dimensiones diferentes.

<u>Proposición 6.8:</u>

Dada $t \in R^n$, se escribe $t=(t',t'')$, donde t' es una k-upla, $k < n$, formada por k de las variables $t_1,\ldots,t_n$.

Dada una n-upla $(A_1,\ldots,A_n)$, se la escribe correspondientemente como (A',A'').

Entonces, si $\varphi = \varphi(t') \in C^{\infty}(R^k)$, se tiene la igualdad

$$W(\varphi,A) = W(\varphi,A')$$

<u>Demostración:</u>

Para una función de truncación radial $\chi(|t|)$ adecuada y para $j = 1,2,\ldots$, puede escribirse

$$W(\varphi,A) = \int e^{-2\pi it.A}\, \mathcal{F}[\varphi(s')\chi(|s'|)\,\chi(|s''|/_j)](t)dt =$$

$$= \int_{R^k} \hat{\varphi}\hat{\chi}[\int_{R^{n-k}} e^{-2\pi i(t'.A'+t''.A'')}\, j^{n-k}\, \hat{\chi}(j|t''|)dt'']\,dt'$$

Se estudia ahora la integral en R^{n-k}, que depende del pará metro $t' \in R^k$. Mediante el cambio de variable $jt'' = r''$, se escribe:

$$\int_{R^{n-k}} e^{-2\pi i(t'.A'+r''/_j.A'')}\, \hat{\chi}(|r''|)dr''$$

El integrando está acotado por $|\hat{\chi}(|r''|)$, independientemente de j. Además,

$$e^{-2\pi i(t'.A'+r''/_j.A'')} \underset{j\to\infty}{\to} e^{-2\pi it'.A'} \quad \text{en} \quad L(H),$$

como se ve por ejemplo aplicando el lema 6.1.

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de convergencia mayorada para la integral de Bochner, se tiene que

$$\int_{R^{n-k}} e^{-2\pi i(t'.A'+r''/j.A'')}\, \hat{\chi}(|r''|)dr'' \underset{j\to\infty}{\to} e^{-2\pi it'.A'} \quad \text{en } L(H),$$

pues $\chi(0) = 1$.

Por otra parte,

$$\left\| \int_{R^{n-k}} e^{-2\pi i(t',A'+r''/_j.A'')}\hat{\chi}(|r''|)dr'' \right\| \leq \int_{R^{n-k}} |\hat{\chi}(|r''|)\, dr'',$$

constante independiente de j.

Entonces puede volver a aplicarse el teorema de convergencia mayorada, esta vez a la integral en R^k, obteniéndose la igualdad planteada.

Esto concluye la prueba de la proposición 6.8.

#

Corolario 6.1:

Si $P(t_k)$ es un polinomio en la variable t_k, se tiene

$$W(P,A) = P(A_k).$$

Demostración:

Es inmediata a partir de las proposiciones 6.8 y 6.3. #

Proposición 6.9:

Dado un polinomio $P(t)$ en las variables $t_1,\ldots,t_n$, $P(D)$ indica el polinomio diferencial que se obtiene mediante el reemplazo $t_k \to -\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t_k}$

Entonces vale:

$$W(P,A) = P(D)\, e^{-2\pi it.A}\Big|_{t=0}$$

Demostración:

Por la linealidad de $W(P,A)$ en la primera variable, basta considerar el caso de un monomio $P(t) = t^{\alpha}$.

Si $\chi \in C_0^{\infty}$ es una función de truncación adecuada, se escribe:

$$W(t^{\alpha},A) = \int e^{-2\pi it.A}\, \widehat{s^{\alpha}\chi(s/j)}dt = \int e^{-2\pi it.A}\, D^{\alpha}\, \hat{\chi}(jt)j^n\, dt$$

donde

$$D^{\alpha} = \left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\alpha_n}$$

Se afirma que puede integrarse por partes y que los términos integrados se anulan.

De acuerdo con la proposición 1.16, basta probar que cualquier derivada $\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n} e^{-2\pi it.A}$ es una función de t de crecimiento lento.

Para ello se emplea la fórmula de Cauchy en su versión n-dimensional, (Ver [12], p.3),

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n} e^{-2\pi it.A} =$$

$$= \frac{\beta_1!\cdots\beta_n!}{(2\pi i)^n}\int_{|z_k-t_k|=1}\frac{e^{-2\pi iz.A}}{(z_1-t_1)^{\beta_1+1}\cdots(z_n-t_n)^{\beta_n+1}}\,dz$$

que resulta de aplicar el corolario 5.1 coordenada a coordenada.

Si $z_k = x_k+iy_k$, a partir de $|z_k-t_k| = 1$, $t_k \in R$, se deduce que $|y_k| \leqslant 1$. Por lo tanto, se obtiene la estimación

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial t_n}\right)^{\beta_n} e^{-2\pi it.A}\right\| \leqslant \beta_1!\cdots\beta_n!\, e^{2\pi(\|A_1\|+\cdots+\|A_n\|)}$$

Lo cual prueba que la función es acotada.

Entonces integrando por partes se tiene:

$$W(t^\alpha,A) = (-1)^{|\alpha|}\int D^\alpha e^{-2\pi it.A}\,\hat{\chi}(jt)\,j^n\,dt$$

De manera completamente análoga a lo hecho en la proposición 6.1, se prueba aquí que

$$\exists \lim_{j\to\infty}\int D^\alpha e^{-2\pi it.A}\,\hat{\chi}(jt)\,j^n\,dt = D^\alpha e^{-2\pi it.A}\Big|_{t=0}$$

Esto concluye la prueba de la proposición 6.9. #

Por lo tanto, $W(P,A)$ es el polinomio simetrizado que se obtiene a partir de P, evaluado en la n-upla $A_1,\ldots,A_n$.

De manera análoga a lo discutido en el caso unidimensional, puede plantearse aquí el problema general de darle sentido a la fórmula de Weyl cuando se tiene una n-upla de elementos $a_1,\ldots,a_n$ en un álgebra de Banach A. Nuevamente, el punto central es estimar de la mejor manera $\|e^{-2\pi i(t_1a_1+\cdots+t_na_n)}\|$ en términos de t. Pero este problema queda reducido al caso unidimensional, de la siguiente forma:

Si $|t| \leqslant 1$, es claro que puede estimarse con $e^{2\pi(\|a_1\|+\ldots+\|a_n\|)}$

Si $|t| \geqslant 1$, se escribe:

$$e^{-2\pi i(t_1a_1+\ldots+t_na_n)} = e^{-2\pi i|t|(t_1/|t|a_1+\ldots+t_n/|t|a_n)}$$

$t_1/|t|a_1+\ldots+t_n/|t|a_n$ es un elemento de A que depende de n parámetros de módulo $\leqslant 1$. El que interesa ahora es el parámetro unidimensional $|t|$. (Ver [17]).

Apéndice: El problema de Cauchy para una ecuación diferencial ordinaria con valores en un espacio de Banach. El teorema de Ovcyannikov.

Estos temas fueron incluídos en el curso como aplicación de los resultados expuestos sobre funciones con valores vectoriales.

Sea I un intervalo real y sea $A(t):I \to L(X)$ una aplicación continua, donde X es un espacio de Banach.

Se consideran también una función $f(t):I \to X$ continua y $u_0 \in X$, $t_0 \in I$ fijos.

El problema de Cauchy o de valores iniciales consiste entonces en encontrar un intervalo $J \subset I$ tal que $t_0 \in J$ y una función $u(t):J \to X$ de clase C^1 cumpliendo

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + f(t) & t \in J \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \qquad (1)$$

Lema 1:

u(t) es solución de (1) si y sólo si

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \quad t \in J.$$

Demostración:

Es inmediata, a partir de las proposiciones 1.13 y 1.14. #

<u>Proposición 1</u>:

El problema (1) admite solución, que es única localmente.

<u>Demostración</u>:

Unicidad:

Si $u:J \to X$ es solución de

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\, u(t) \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$$

por el lema 1 puede escribirse

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, u(s)ds, \qquad t \in J$$

Si se supone J intervalo compacto, existe $M > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq M$, $t \in J$.

O sea, se obtiene

$$\sup_{t\in J} \|u(t)\| \leq M.\sup_{t\in J} |t-t_0|.\sup_{t\in J} \|u(t)\|.$$

Si se elige J tal que $M \sup_{t\in J} |t-t_0| < 1$, se concluye que debe ser $u(t) = 0$, $\forall\ t \in J$.

Existencia:

Se va a construir una sucesión de funciones que convergerán, en un intervalo adecuado, hacia una solución del problema:

Se define:

$$u_0(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\, u_0(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

$$\vdots$$

$$u_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\, u_{k-1}(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \qquad (2)$$

$k = 1,2,\ldots,\quad t \in I.$

Cada una de estas funciones es de clase C^1 en I.

Sea ahora J un subintervalo compacto de I que contiene a t_0. Existe $M > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq M$, $\forall\ t \in J$.

Se afirma que

$$\|u_{k+1}(t)-u_k(t)\| \leq \frac{(M|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad t \in J.$$

En efecto:

$$\|u_{k+1}(t)-u_k(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} A(s)\,[u_k(s)-u_{k-1}(s)]\,ds\right\|$$

Usando la hipótesis inductiva, esto puede acotarse con

$$M.\left|\int_{t_0}^{t} \frac{(M|s-s_0|)^k}{k!}\,ds\right| = \frac{(M|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}$$

A partir de la igualdad

$$u_{k+1}(t) = u_0(t) + \sum_{\ell=0}^{k} [u_{\ell+1}(t)-u_\ell(t)] \tag{3}$$

la estimación anterior muestra que existe una función $u(t):J \to X$ tal que

$$u_k \rightrightarrows u \quad \text{en} \quad J.$$

Pasando al límite en (2), se tiene que u(t) satisface en J la igualdad

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)\,u(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

De acuerdo con el lema 1, u(t) debe ser solución del problema (1). Esto concluye la prueba de la proposición 1.

#

Es bueno observar que si existe $M > 0$ tal que $\|A(t)\| \leq M$ $\forall\ t \in I$, entonces hay solución del problema definida en todo el intervalo I. Además, por un argumento de conexión, esta solución global es única a partir del resultado de unicidad local.

Cuando X es un espacio de dimensión finita, la proposición abarca el caso de sistemas de ecuaciones, los cuales, por reducción del orden incluyen ecuaciones o sistemas de orden superior a 1.

Lema 2:

Sea $\varphi(t):[a,b] \to R$ una función que toma valores no negativos Se supone que para ciertas constantes $C_1, C_2 > 0$ cumple la desigualdad

$$\varphi(t) \leqslant C_1(t-a) + C_2 \int_a^t \varphi(s)ds, \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Entonces

$$\varphi(t) \leqslant \frac{C_1}{C_2}\left(e^{C_2(t-a)} - 1\right), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

Demostración:

Sea $\psi(t) = \int_a^t \varphi(s)ds$. La desigualdad que figura en la hipótesis de escribe

$$\psi'(t) \leqslant C_1(t-a) + C_2\,\psi(t)$$

Si fuera una ecuación diferencial en lugar de una inecuación, una manera de resolverla es plantear

$$\psi(t) = e^{C_2 t}\,\lambda(t),$$

con $\lambda(t)$ función incógnita. Se hace lo mismo en este caso; se tiene

$$\lambda'(t) = -C_2\, e^{-C_2 t}\,\psi(t) + e^{-C_2 t}\,\psi'(t) \leqslant C_1(t-a)\, e^{-C_2 t}$$

Como $\lambda(a) = 0$, resulta

$$\lambda(t) \leq C_1 \int_a^t (s-a)\, e^{-C_2 s}\, ds = C_1 [-\frac{t-a}{C_2} e^{-C_2 t} - \frac{1}{C_2^2} (e^{-C_2 t} - e^{-C_2})]$$

$$= C_1 [-\frac{t-a}{C_2} e^{-C_2 t} - \frac{1}{C_2^2} (e^{-C_2 t} - e^{-C_2 a})]$$

Por lo tanto,

$$\psi(t) = -\frac{C_1}{C_2}(t-a) - \frac{C_1}{C_2^2} + \frac{C_1}{C_2^2} e^{C_2(t-a)}$$

En definitiva se obtiene

$$\varphi(t) \leq C_1(t-a) - C_1(t-a) - \frac{C_1}{C_2} + \frac{C_1}{C_2} e^{C_2(t-a)} = \frac{C_1}{C_2} (e^{C_2(t-a)} - 1)$$

que es lo que se quería probar.

A partir de este lema puede obtenerse la dependencia de la solución del problema (1) de los datos.

<u>Proposición 2:</u>

Con las hipótesis y notaciones anteriores, vale la siguiente estimación

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|\, e^{M|t-t_0|} + \|f\|_1 (e^{M|t-t_0|} - 1) +$$

$$+ \|\int_{t_0}^t f(s)ds\|, \qquad t \in J$$

donde $\|f\|_1$ indica $\int_J \|f(t)\|dt$.

<u>Demostración:</u>

De acuerdo con el lema 1, es

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t A(s)\, u(s)ds + \int_{t_0}^t f(s)ds$$

O sea,

$$u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s)ds = \int_{t_0}^{t} A(s)[u(s)-u_0-\int_{t_0}^{s} f(r)dr]\,ds +$$

$$+\int_{t_0}^{t} A(s)[u_0+\int_{t_0}^{s} f(r)dr]\,ds.$$

Se tiene, para $t \in J$, $t \geq t_0$,

$$\|u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s)ds\| \leq M.\int_{t_0}^{t} \|u(s)-u_0-\int_{t_0}^{s} f(r)dr\|ds +$$

$$+ M(\|u_0\| + \|f\|_1)(t-t_0).$$

De acuerdo con el lema 2, debe ser

$$\|u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s)ds\| \leq (\|u_0\| + \|f\|_1)(e^{M(t-t_0)}-1).$$

Por lo tanto,

$$\|u(t)\| \leq \|u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s)ds\| + \|u_0\| + \|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\| \leq$$

$$\leq \|u_0\|e^{M(t-t_0)} + \|f\|_1(e^{M(t-t_0)}-1)+\|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\|.$$

Esto concluye la prueba de la proposición.

#

Cuando la aplicación $A(t)$ no depende de t, se obtiene una expresión explícita para la solución $u(t)$.

En efecto, $u(t)$ puede hallarse como una suma $v(t) + w(t)$, donde cada función es solución de un problema de Cauchy particular.

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + f(t) \\ v(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w'(t) = Aw(t) \\ w(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Resulta de inmediato que debe ser $w(t) = e^{(t-t_0)A} u_0$, solución definida en todo R, como función entera.

Para hallar $v(t)$, se parte de la solución general de la ecuación homogénea, que es $v(t) = e^{tA}c$. Se plantea una solución particular de la forma $e^{tA}c(t)$, que deberá cumplir entonces:

$$e^{tA}c'(t) + Ae^{tA}c(t) = Ac(t)e^{At} + f(t).$$

O sea, queda $c'(t) = e^{-tA} f(t)$, ahora definida en el intervalo I donde se supone definida la función $f(t)$.

Por lo tanto, puede tomarse $c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} f(s)ds.$

En total se obtiene

$$v(t) = e^{tA}c + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds$$

Al imponer la condición inicial $v(t_0) = 0$, resulta finalmente,

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds.$$

En definitiva, la solución del problema es entonces

$$u(t) = e^{(t-t_0)A} u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} f(s)ds, \quad t \in I$$

Es interesante observar que el problema de Cauchy puede plantearse y resolverse en condiciones más generales que las de considerar funciones con valores en un espacio de Banach.

A este planteo más general apunta el teorema de Ovcyannikov. (Ver [22] y [23]).

Definición 1:

Una familia $\{X_\rho\}_{\rho>0}$ se dice que es una escala de espacios de Banach si para cada $\rho > 0$, X_ρ es un espacio de Banach y dados $\rho > \rho'$, hay una inclusión continua $X_\rho \subset X_{\rho'}$ cumpliendo $\|x\|_{\rho'} \leq \|x\|_\rho$, $\forall\, x \in X_\rho$.

Se dice que un operador lineal A actúa en la escala, si dados $\rho > \rho'$, A aplica continuamente X_ρ en $X_{\rho'}$.

Sea $N(\rho,\rho')$ la norma del operador.

Puede escribirse entonces

$$\|Ax\|_{\rho'} \leq N(\rho,\rho')\, \|x\|_\rho, \quad \forall\, \rho > \rho',\ x \in B_0.$$

Definición 2:

Se dice que el operador A es acotado en la escala, si existe una constante $N > 0$ tal que $N(\rho,\rho') \leq N$, $\forall\, \rho > \rho'$.

En cambio se dirá que el operador es singular en la escala si existe una constante $N > 0$ tal que

$$(\rho-\rho')N(\rho,\rho') \leq N, \quad \forall\, \rho > \rho'.$$

Según se muestra en [22], las anteriores definiciones son motivadas por la siguiente situación:

Dados $U \subset R^n$ abierto, $\rho > 0$, se considera

$$X_\rho = \{f:U \to C / f \in C^\infty,\ \sup_{\substack{x\in U\\ \alpha}} \frac{\rho^{|\alpha|}}{\alpha!} \left|D^\alpha f(x)\right| < \infty\}$$

donde α es una n-upla de números enteros no negativos y como es usual, D^α indica $(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$.

Se sabe (Ver por ejemplo [24], p. 20) que X consiste de funciones analíticas en U; más aún esas funciones pueden prolongarse analíticamente a un dominio de C^n que contiene a $\overline{U}$.

Definiendo

$$\|f\|_{\rho} = \sup_{\substack{x\in U\\ \alpha}} \frac{\rho^{|\alpha|}}{\alpha!} |D^{\alpha} f(x)|$$

no hay dificultad en comprobar que $\{X_{\rho}\}_{\rho>0}$ es una escala de espacios de Banach. Con estas definiciones se tiene:

Lema 3:

Fijados $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 < \rho_0 < \rho_1$, existe una constante $N > 0$ tal que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ es un operador lineal y acotado de X_{ρ} en $X_{\rho'}$, para todo $\rho_0 \leqslant \rho' < \rho \leqslant \rho_1$ y además

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_j} f\right\|_{\rho'} \leqslant \frac{N}{\rho-\rho'} \|f\|_{\rho}, \quad \forall\, f \in X_{\rho}$$

Demostración:

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_{\rho'} = \sup_{x\in U} \frac{\rho'^{|\alpha|}}{\alpha!} \left|D^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right| =$$

$$= \sup_{\substack{x\in U\\ \alpha}} \frac{\rho^{|\alpha|+1}}{(\alpha+e_j)!} \left|D^{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right| \cdot \frac{\rho'^{|\alpha|}}{\rho^{|\alpha|+1}} \cdot \frac{(\alpha+e_j)!}{\alpha!} \leqslant$$

$$\sup_{\alpha} \left[(\rho'/\rho)^{|\alpha|} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{(\alpha+e_j)!}{\alpha!} \right] \cdot \|f\|_{\rho}$$

donde $e_j = (0,\ldots,\overset{1}{j},\ldots,0)$.

Se estima ahora el supremo de la expresión entre corchetes:

$$\sup_{\alpha} \left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{|\alpha|} \frac{1}{\rho} \frac{(\alpha+e_j)!}{\alpha!} \right] = \sup_{\alpha} \left[\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{|\alpha'|} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{\alpha_j+1} \frac{1}{\rho'} (\alpha_j+1) \right] -$$

donde $\alpha' = (\alpha_1,\ldots,\hat{\alpha}_j,\ldots,\alpha_n)$.

Como $\rho' < \rho$, lo anterior puede estimarse como

$$\frac{1}{\rho'} \sup_{k\geqslant 1} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{k} k.$$

Un cálculo elemental permite mayorar esto con

$$\frac{1}{e\,\rho'}\,\frac{1}{\ln \rho/_{\rho'}} = \frac{1}{e}\,\frac{1}{\rho-\rho'}\,\frac{\rho/_{\rho'}-1}{\ln \rho/_{\rho'}} \leqslant \frac{N}{\rho-\rho'}\,, \qquad \text{si}$$

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho' < \rho \leqslant \rho_1.$$

Esto concluye la prueba del lema A.3. #

Otras situaciones en las que aparece un operador singular en una escala de espacios de Banach, se encuentran en [23].

Volviendo al caso general que aparece en las definiciones 1 y 2, el problema de Cauchy puede plantearse así:

Sea $\{X_\rho\}_{\rho>0}$ una escala de espacios de Banach. Para cierto intervalo I real, A(t) es una aplicación continua y singular en la escala, uniformemente respecto de $t \in I$.

Eso significa que existe una constante $N > 0$ tal que dados $0 < \rho' < \rho$, A(t) aplica continuamente I en $L(B_\rho, B_{\rho'})$ y además $\|A(t)\| \leqslant \frac{N}{\rho-\rho'}$, $\forall\ t \in I$.

Fijado X_{ρ_0}, se dan también $f: I \to X_{\rho_0}$, continua e integrable, $u_0 \in X_{\rho_0}$, $t_0 \in I$.

En estas condiciones, se tiene:

Proposición 3:

Bajo todas las hipótesis anteriores, fijado $0 < \rho < \rho_0$, existen un intervalo $J = J(\rho) \subset I$, al cual pertenece t_0 y una función $u: J \to X_\rho$ de clase C^1, tales que

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t)+f(t) & \text{en } X_{\rho'},\ \rho' > \rho,\ t \in J. \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Además hay unicidad local de la solución

Demostración:

Existencia:

De manera análoga al lema 1, si se encuentran J y $u:J \to X_\rho$ cumpliendo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \quad t \in J$$

en el sentido de $X_{\rho'}$, $\rho' > \rho$, entonces u es solución del problema planteado.

Como en la proposición 1, se define una sucesión de funciones por recurrencia

$$u_0(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)u_0(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

$$\vdots$$

$$u_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)u_{k-1}(s)ds + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \qquad k = 1,2,\dots, \ t \in I.$$

Se afirma que $u_k(t)$ es una función de clase C^1 de I con valores en X_ρ, $\forall \rho < \rho_0$.

Esto no hay dificultad de comprobarlo inductivamente, partiendo de que $u_0:I \to X_{\rho_0}$ es de clase C^1.

Fijados ahora $k \geq 1$, $\rho < \rho_0$, se consideran números reales positivos $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_k$, que luego se elegirán convenientemente, tales que

$\rho < \rho+\varepsilon_1 < \rho+\varepsilon_1+\varepsilon_2 < \dots < \rho+\varepsilon_1+\varepsilon_2 +\dots + \varepsilon_k < \rho_0$

De acuerdo con la hipótesis sobre la aplicación A(t), puede escribirse:

$$\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\|_\rho \leq \frac{N}{\varepsilon_1} |t-t_0| \sup_{s\in I} \|u_{k-1}(s)-u_{k-2}(s)\|_{\rho+\varepsilon_1}$$

Si se reitera esta estimación, se obtiene

$$\frac{N^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\frac{|t-t_0|^2}{2}\sup_{s\in I}\|u_{k-2}(s)-u_{k-3}(s)\|_{\rho+\varepsilon_1+\varepsilon_2}$$

En total, resulta:

$$\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\|_\rho \leq C\,\frac{N^k}{\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_k}\,\frac{|t-t_0|^k}{k!} \qquad k = 1,2,\ldots$$

donde $C = \|u_0\|_{\rho_0} + \int_I \|f(s)\|_{\rho_0}\, ds$

Si en particular se elige $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = \frac{\rho_0-\rho}{k}$, se obtiene

$$\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\|_\rho \leq C\,\frac{N^k\,|t-t_0|^k}{(\rho_0-\rho)^k}\,\frac{k^k}{k!}$$

Si ahora se escribe

$$u_k(t) = u_0(t) + \sum_{\ell=0}^{k-1}[u_{\ell+1}(t)-u_\ell(t)]$$

el criterio del cociente permite asegurar que la serie con término general $u_{\ell+1}(t)-u_\ell(t)$ convergerá en X_ρ, absoluta y uniformemente si

$$\frac{N\,e\,|t-t_0|}{\rho_0-\rho} < 1.$$

Aparece entonces la condición sobre el intervalo J de definición de la solución, que depende en principio de ρ.

El resto de la prueba sigue como en la proposición A.1.

Unicidad:

Si fijado X_ρ, $u(t): J_\rho \to X_\rho$ es una función de clase C^1 solución de

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$$

Se verá que u debe anularse alrededor de t_0.

Fijado $0 < \rho' < \rho$, en $X_{\rho'}$, puede escribirse

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)u(s)ds$$

Fijado k, sea $\rho_j = \rho' + \frac{j}{k}(\rho-\rho') \quad 0 \leq j \leq k$.

Se tiene

$$\|u(t)\|_{\rho'} \leq \frac{N\, k}{\rho-\rho'}\, |t-t_0| \sup_{s\in J} \|u(s)\|_{\rho_1}, \qquad t \in J$$

Aplicando sucesivamente la desigualdad a los pares $X_{\rho_j}, X_{\rho_{j+1}}$, se obtiene

$$\|u(t)\|_{\rho'} \leq \frac{(N|t-t_0|\, k)^k}{(\rho-\rho')^k\, k!} \sup_{t\in J} \|u(t)\|_{\rho}.$$

Con la condición $\frac{N\, e|t-t_0|}{\rho-\rho'} < 1$, la serie de término general $\frac{(N|t-t_0|k)^k}{(\rho-\rho')^k\, k!}$ converge; por lo tanto $\frac{(N|t-t_0|\, k)^k}{(\rho-\rho')^k\, k!} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Luego $u(t)$ se anula cerca de t_0.

Es bueno observar que como ρ' es tan solo un índice auxiliar, puede tomarse, par ejemplo, $\rho' = \rho/2$.

Esto concluye la prueba de la proposición 3.

#

Observación 1:

Nuevamente por argumentos de conexión, puede obtenerse un resultado de unicidad global.

Sea el caso en que la aplicación $A(t)$ es continua y acotada en la escala, uniformemente respecto de $t \in I$; o sea existe una constante $N > 0$ tal que fijados $0 < \rho' < \rho$, $A(t): I \to L(X_\rho, X_{\rho'})$ es continua y además $\|A(t)\| \leq N$, $\forall\ t \in I$.

En este caso, la estimación que se obtiene es

$$\|u_k(t)-u_{k-1}(t)\|_\rho \leq C\,\frac{(N|t-t_0|)^k}{k!}$$

con lo cual la solución $u(t)$ está definida en todo el intervalo I, independientemente de ρ.

Cuando la aplicación $A(t)$ no depende de t, es bueno observar que la exponencial e^{tA} estará definida $\forall\, t \in R$, si A es un operador acotado en la escala, como aplicación analítica de R con valores en $L(X_\rho, X_{\rho'})$, dados $\rho > \rho'$.

En cambio cuando A es singular en la escala, lo que se puede decir es que dados $\rho > \rho'$, e^{tA} es analítica como función de t con valores en $L(X_\rho, X_{\rho'})$, si $|t| < \frac{\rho-\rho'}{N\,e}$.

Estas dos últimas afirmaciones surgen de estimar $\|(tA)^n\|$ como operador de X_ρ en $X_{\rho'}$. Considerando la partición usual del intervalo $[\rho',\rho]$, se obtiene

$$\|(tA)^n\| \leq (N\,|t|)^n,$$

si el operador es acotado en la escala,

$$\|(tA)^n\| \leq \frac{(N\,|t|n)^n}{(\rho-\rho')^n},$$

si el operador es singular en la escala.

Observación 2:

Con respecto a cómo depende de los datos la solución hallada en la proposición 3, a partir de la expresión

$$u_k(t) = u_0(t) + \sum_{\ell=0}^{k-1} [u_{\ell+1}(t)-u_\ell(t)]$$

tomando límite en X_ρ para $k \to \infty$, se tiene

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{\ell\geq 0} [u_{\ell+1}(t)-u_\ell(t)]$$

si $\dfrac{N\,e|t-t_0|}{\rho_0-\rho} < 1$.

Se recuerda que $u_0(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)ds$, con lo cual puede estimarse

$$\|u(t)-u_0-\int_{t_0}^{t} f(s)ds\|_\rho \leqslant C \sum_{\ell\geqslant 1} \frac{N^\ell \, |t-t_0|^\ell \, \ell^\ell}{(\rho_0-\rho)^\ell \, \ell!}$$

Si se indica con α_ℓ el término general de la serie, se probó en la proposición 3 que

$$\alpha_{\ell+1} \leqslant \frac{N\, e|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\, \alpha_\ell$$

Por recurrencia se comprueba entonces que

$$\alpha_{\ell+1} \leqslant q^\ell \, \alpha_1 = \left(\frac{N\, e|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^\ell \cdot \frac{N|t-t_0|}{\rho_0-\rho}$$

O sea, la serie anterior se mayora con

$$\frac{C.N|t-t_0|}{\rho_0-\rho} \sum_{\ell\geqslant 1} \left(\frac{N\, e|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^\ell = C\, e\left(\frac{N|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^2 \sum_{\ell\geqslant 0} \left(\frac{N\, e|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^\ell =$$

$$= C\, e\left(\frac{N|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{N\, e\,|t-t_0|}{\rho_0-\rho}}$$

En total se obtiene la estimación

$$\|u(t)\|_\rho \leqslant \|u_0\|_{\rho_0} + \|\int_{t_0}^{t} f(s)ds\|_{\rho_0} + C\, e\left(\frac{N|t-t_0|}{\rho_0-\rho}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{N\, e|t-t_0|}{\rho_0-\rho}}$$

donde $C = \|u_0\|_{\rho_0} + \int_I \|f(s)\|_{\rho_0} ds$.

Observación 3:

La proposición 3 da solución al problema de Cauchy planteado para un operador singular en la escala. Este es un caso particular de operador que actúa en una escala de espacios de Banach. Puede preguntarse qué pasa con el problema cuando la norma $N(\rho,\rho')$ es otra función, no necesariamente acotada por $\frac{N}{\rho-\rho'}$. Esta es una cuestión casi totalmente abierta.

Una situación que se vincula a ésta es la de plantear el problema de Cauchy en espacios no ya de Banach sino de Fréchet.

Por ejemplo, una pregunta para la cual no se conoce respuesta es la siguiente:

Sea X un espacio de Fréchet, cuya topología está dada por la familia de seminormas crecientes $\{\| \|_m\}$.

Sea $A:X \to X$ un operador lineal y continuo cumpliendo, por ejemplo

$$\|Ax\|_m \leq \|x\|_{m+1}, \quad \forall\, x \in X,\ m = 1,2,\ldots$$

Dado $x_0 \in X$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ¿existe un intervalo I alrededor de t_0 y una función $u:I \to X$ de clase C^1 tal que

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) & t \in I \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

?

Referencias:

[1] E.Hille, R.Phillips: "Functional analysis and semigroups". A.M.S., Coll. Publ. nº 31, (1957).

[2] A.C.Zaanen: "Integration". North Holland, (1967).

[3] F.Trèves: "Basic linear partial differential equations". Academic Press, (1975).

[4] H.Cartan: "Calcul différentiel". Hermann, (1967).

[5] J.Alvarez Alonso: "Existence of a functional calculus over some algebras of pseudo-differential operators". Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 29, nº 1, (1979), p. 55-76.

[6] S.Lang: "Introduction aux variétés différentiables". Dunod, (1967).

[7] J.Alvarez Alonso: "Distribuciones y transformación de Fourier". Cursos y Seminarios de Matemática, nº 25, (1977). FCEN.

[8] A.P.Calderón: "Intermediate spaces and interpolation, the complex method". Studia Mathematica, vol. 24, (1964), p. 113-190.

[9] F.Riesz, B.Sz-Nagy: "Leçons d'Analyse fonctionnelle". Academia de Ciencias de Hungría, (1955).

[10] J.L.Walsh: "Interpolation and approximation". A.M.S. Coll. Publ. nº 20, (1969).

[11] F.E.Browder: "On the proof of Mergelyan's approximation theorem". Amer. Math. Monthly, Vol. 67, (1960), p. 442-444.

[12] R.Gunning, H.Rossi: "Analytic functions of several complex variables". Prentice-Hall, (1965).

[13] H.Weyl: "The theory of groups and quantum mechanics". Dover, (1931).

[14] M.E.Taylor: "Functions of several self-adjoint operators". Proc. Am. Math. Soc., vol. 19, (1968), p. 91-98.

[15] R.F.V.Anderson: "The Weyl functional calculus". J. of Funct. Anal., vol. 4, nº 2, (1969), p. 240-267.

[16] L.Hörmander: "Linear partial differential operators". Springer, (1969).

[17] J.Alvarez Alonso: "Functions of L^p-bounded pseudo-differential operators". Proccedings of the Seminar on Fourier Analysis held at El Escorial, (1983) (Por aparecer).

[18] C.Fefferman: "The multiplier problem for the ball". Ann. of Math., vol. 94, (1971), p. 330-336.

[19] E.M.Stein: "Singular integrals and differentiability properties of functions". Princeton University Press, (1970).

[20] E.Nelson: "Feynman integrals and the Schrödinger equation". J. of Math. Phys., vol. 5, n°3, (1964), p. 332-343.

[21] G.Bachmann, L.Narici: "Functional analysis". Academic Press, (1966).

[22] L.V.Ovcyannikov: "Singular operators in Banach spaces scales". Doklady Akad. Nauk., vol. 163, n° 4, (1965), p. 819-822.

[23] F.Trèves: "Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators". Notas de Matemática n° 46, IMPA, (1968), Brasil.

[24] J.Alvarez Alonso: "Temas de ecuaciones en derivadas parciales". Cursos y Seminarios de Matemática, n° 27, (1979), FCEN.

[25] M.Cotlar, R.Cignoli: "Nociones de espacios normados". Eudeba, (1971). Tomo II.