ISSN 1853-709X

Fascículo 32

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Graciela S. Birman

Introducción a la geometría diferencial

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 32

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 32

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL

por

Graciela Silvia Birman

1984

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CIUDAD UNIVERSITARIA (NUÑEZ) PABELLON 1

C.P. 1428 - BUENOS AIRES - REP. ARGENTINA

INDICE

INTRODUCCION

El presente fascículo de la serie de Cursos y Seminarios de Matemática tiene por principal objetivo satisfacer las necesidades del curso de Geometría Diferencial y el contenido de éste está basado en el material utilizando en el dictado de dicho curso durante el primer cuatrimestre de 1984.

El curso consta de dos grandes tópicos: 1) Curvas y superficies, 2) Variedades diferenciables.

La idea de satisfacer ambos temas en un sólo cuatrimestre es ilusoria, por lo que nos hemos visto precisados a enfocarlos austeramente y a la vez, hemos intentato darle cierto tono de continuidad, de modo que el segundo tema pueda verse como natural extensión del primero.

Curvas y Superficies tiene dos aspectos, uno es usualmente llamado Geometría diferencial clásica que es el que estudia propiedades locales de curvas y superficies, es decir, su comportamiento en un entorno de un punto. Se utiliza cálculo diferencial y las curvas y superficies se definen por funciones, un cierto número de veces, diferenciables.

El otro aspecto es llamado Geometría diferencial global, que estudia el comportamiento de las curvas y/o superficies en su totalidad. Este excede la intención del presente curso.

Variedades diferenciables es tema de prolífica bibliografía desde diversos puntos de vista, lo mismo que Formas diferenciables. Con objeto de ganar efectividad seguiremos distintas tendencias, según convenga a cada caso.

El curso concluye con temas de Geometría de Riemann.

Esperamos que el presente material y la bibliografía adjunta estimulen al lector a completar sus conocimientos.

Buenos Aires, Junio 1984.

CAPITULO 1

CURVAS EN R^3

1. Curvas parametrizadas

Con la intención de caracterizar curvas en R^3 tomemos la siguiente

Definición:

Una curva diferenciable parametrizada es una aplicación diferenciable $\alpha: I \to R^3$, donde $I = (a,b)$ (intervalo abierto de R).

Es decir, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que las funciones x,y,z son diferenciables, t es llamado parámetro de la curva; a,b pueden ser cualquier número real, incluso $\pm\infty$.

Demostramos con ' la derivada primera en t y el vector $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in R^3$ es llamado vector tangente de la curva α en t. La imagen $\alpha(I) \subset R^3$ es llamada la traza de α.

Observemos que la curva parametrizada es una aplicación mientras que la traza es un subconjunto de R^3. (Dos parametrizaciones diferentes deben dar la misma traza pero son diferentes aplicación).

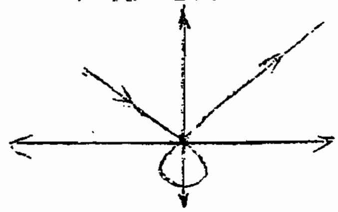
Ejemplo:

1. La curva diferenciable parametrizada dada por

$$\alpha(t) = (a \cos t,\ a \operatorname{sen} t,\ bt) \qquad t \in R$$

tiene como traza una hélice sobre el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$

2. La aplicación $\alpha(t) = (t^3-4t,\ t^2-4)$, $\alpha: R \to R^2$ es curva diferenciable parametrizada. Notar que



$\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$.

O sea, α no es 1 a 1.

3. Las curvas diferenciables parametrizadas

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

$$\alpha(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$$

donde $t \in (0-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Tienen la misma traza. El vector velocidad de $\beta(t)$ es el doble del de $\alpha(t)$.

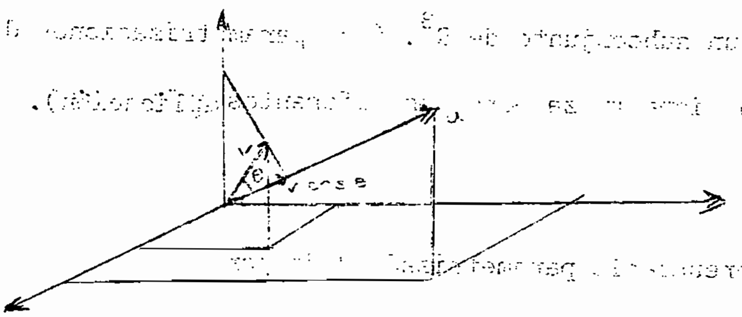
Si $u = (u_1,u_2,u_3)$ es un vector de R^3, su norma se define por

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

es decir, es la distancia del punto (u_1,u_2,u_3) al origen.

Si u, v son dos vectores de R^3 y θ el ángulo, $0 \leq \theta \leq \pi$, formado por los segmentos 0u, y 0v, el producto interno u.v está definido por

$$u.v = |u|.|v|.\cos\theta$$



Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. Si u, v son vectores no nulos, u.v = 0 si y sólo si u es ortogonal a v.
2. u.v = v.u
3. $\lambda(u.v) = \lambda u.v = u.\lambda v$

   $u(v+w) = u.v + u.w$

Si e_1, e_2, e_3 es la base canónica de R^3 y

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$$

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 \qquad \text{tenemos}$$

$$u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$ y si $u(t)$, $v(t)$ son funciones diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dt}(u(t).v(t)) = u'(t).v(t) + u(t).v'(t)$$

Ejercicios:

1. Si una curva parametrizada $\alpha(t)$ tiene su segunda derivada $\alpha''(t)$ identicamente nula, ¿qué puede decir de $\alpha(t)$?
2. Sea $\alpha: I \to R^3$ una curva parametrizada con $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Probar que $|\alpha(t)|$ es una constante no-nula si y sólo si $\alpha(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$, para todo $t \in I$.
3. Sea $\alpha: (-1, +\infty) \to R^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3}\right)$$

Esta curva es llamada Folium de Descartes.

Probar que

a) Para $t = 0$, la curva α es tangente al eje x.

b) $\lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = (0,0)$, $\lim_{t \to +\infty} \alpha'(t) = (0,0)$

c) La traza es simétrica respecto de la recta $y = x$.

2. Curvas regulares. Longitud de arco

Sea $\alpha: I \to R^3$ una curva diferenciable parametrizada. Para cada t tal que $\alpha'(t) \neq 0$, existe una línea recta la cual contiene el punto $\alpha(t)$ y el vector $\alpha'(t)$. Es llamada recta tangente a α en t.

Un punto t donde $\alpha'(t) = 0$, se llama punto singular de α; ejemplo: para la curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ en $t = 0$.

Definición:

Una curva diferenciable parametrizada $\alpha : I \to R^3$ se dice regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Dado $t \in I$, la longitud de arco de una curva parametrizada regular $\alpha : I \to R^3$, desde t_0 es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt \ , \qquad \text{donde}$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

es la longitud del vector $\alpha'(t)$. Ya que $\alpha'(t) \neq 0$, s es función diferenciable y

$$\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|.$$

Observar que haciendo $t = s$, nos dice que $|\alpha'(s)| = 1$.

Ejercicios:

1. Sea la curva $\alpha(t) = (a\,e^{bt} \cos t, a\,e^{bt} \operatorname{sen} t)$, $t \in R$, $a > 0$, $b < 0$ constantes. Esta curva es llamada espiral logarítmica

   a) Mostrar que para $t \to +\infty$, $\alpha(t)$ se aproxima al origen en espiral.

   b) Probar que $\lim_{t\to+\infty} \alpha'(t) = (0,0)$ y que $\lim_{t\to+\infty} \int_{t_0}^{t} |\alpha'(t)| dt$ es finita. Es decir, tiene longitud de arco finita en $[t_0, +\infty)$.

2. Sea $\alpha : I \to R^3$ una curva parametrizada. Sea $[a,b] \subset I$ tal que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$.

a) Probar que si v es un vector constante y $|v| = 1$ entonces

$$(q-p).v = \int_a^b \alpha'(t).v \, dt \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

b) Tomando $v = \frac{q-p}{|q-p|}$, probar que

$$|\alpha(b)-\alpha(a)| \leq \int_a^b |\alpha'(t)| dt;$$ es decir, la curva de longitud <u>más corta</u> que une $\alpha(a)$ con $\alpha(b)$ es el segmento de recta que une estoe puntos.

3. <u>Producto vectorial en R^3</u>

Notando $\det(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} u_1, u_2, u_3 \\ v_1, v_2, v_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{pmatrix}$ definimos producto vectorial de u por v al vector $u \wedge v$ tal que es el único que satisface

$$(u \wedge v).w = \det(u,v,w)$$

Es evidente que importa el orden de los vectores, y que tomando $w = e_i$ $(i = 1,2,3)$

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

Satisface las siguientes propiedades:

1) $u \wedge v = -v \wedge u$

2) $(au + bv) \wedge w = a.u \wedge w + b.v \wedge w$

3) $u \wedge v = 0$ si y sólo si u,v son linealmente dependientes

4) $(u \wedge v).u = 0$, $(u \wedge v).v = 0$

5) $(u \wedge v) \wedge w = (u.w)v - (v.w)u$

Ejercicios:

1. Sean $e = \{e_i\}$ y $f = \{f_i\}$ $i = 1,\dots,n$; dos bases ordenadas de un n-espacio vectorial V. Se dice que ambas bases tienen la misma orientación si la matriz de cambio de base tiene determinante positivo. Notamos esta relación por $e \sim f$.

   Probar que es una relación de equivalencia.

   Cada clase de equivalencia es llamada una orientación de V.

2. Si $V = R^3$, la orientación de la base canónica es llamada orientación positiva (o base positiva).

   Dados u,v vectores de R^3, probar que $\{u,v,u \wedge v\}$ es base positiva.

3. Un plano P contenido en R^3 está dado por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$.

   Probar que el vector $v = (a,b,c)$ es perpendicular al plano.

4. Probar que la ecuación del plano que pasa por tres puntos no colineales $P_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $P_2 = (x_2,y_2,z_2)$ y $P_3 = (x_3,y_3,z_3)$ está dada por

$$(P-P_1) \wedge (P-P_2) - (P-P_3) = 0$$

   donde P es un punto arbitrario del plano.

5. Hallar todos los vectores perpendiculares a (2,2,1) y paralelos al plano determinado por los puntos (0,0,0), (1,-2,1) y (-1,1,1).

6. Area orientada en R^2.

Sea A el área de un paralelogramo generado por dos vectores linealmente independientes u,v de R^2.

Respecto de la base canónica $\{e_i\}$, escribimos $u = u_1e_1 + u_2e_2$, $v = v_1e_1 + v_2e_2$. Observar que

$$\begin{pmatrix} u.u & u.v \\ v.u & v.v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{y concluir que}$$

$$A^2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

7. Volumen orientado en R^3.

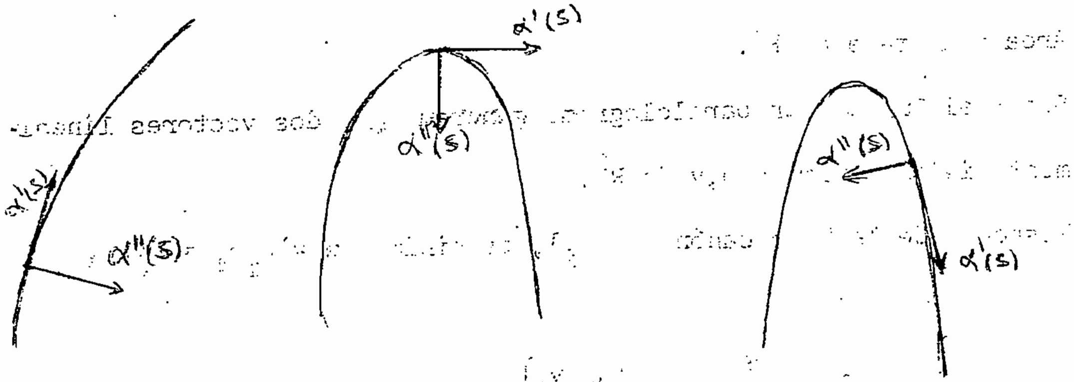
a) Mostrar que el volumen V de un paralelepípedo generado por tres vectores linealmente independientes u,v,w de R^3 está dado por $V = |(u \wedge v).w|$

b) Probar que

$$V^2 = \begin{vmatrix} u.u & u.v & u.w \\ v.u & v.v & v.w \\ w.u & w.v & w.w \end{vmatrix}$$

4. Teoría local de curvas parametrizadas por longitud de arco

Sea $\alpha : I \to R^3$ una curva parametrizada por longitud de arcos. Hemos visto que $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$, de donde haciendo $t = s$ queda $|\alpha'(s)| = 1$, es decir, el vector tangente tiene longitud unitaria y la norma $|\alpha''(s)|$ mide que rapidamente la curva se aleja de la recta tangente.



<u>Definición:</u>

Sea $\alpha : I \to R^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. El número $|\alpha''(s)| = k(s)$ es llamado <u>curvatura</u> de α en s.

La curvatura de una recta es cero.

De una circunferencia

$$\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \qquad t \in (0-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon)$$

$$\alpha'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$$

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\operatorname{sen} t); \qquad |\alpha''(t)| = 1 \Rightarrow$$

tiene curvatura constante.

El vector $\alpha''(s)$ es ortogonal a $\alpha'(s)$ porque $\alpha'(s).\alpha'(s) = 1$ entonces diferenciando $2\,\alpha'(s).\alpha''(s) = 0$

Si en un punto $k(s) \neq 0$ y el vector $n(s)$ en la dirección de $\alpha''(s)$ es <u>unitario</u>, entonces $n(s)$ está bien definido por

$$\alpha''(s) = k(s).n(s) \qquad (n.t') = 0$$

El vector $n(s)$ se <u>llama</u> <u>vector normal en s</u> y el <u>plano generado</u> por $\alpha'(s)$ y $n(s)$ es <u>llamado</u> <u>plano osculador en s.</u>

El vector <u>unitario</u>

$$\boxed{b(s) = \alpha'(s) \wedge n(s)}$$

es normal al plano osculador y se llama <u>vector binormal.</u>

Definición:

Sea $\alpha : I \to R^3$ una curva parametrizada por longitud de arco s tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. El número $\tau(s)$ definido por $b'(s) = \tau(s).n(s)$ es llamado torsion de α en s.

Proposición:

$b'(s)$ es normal a $b(s)$

$$b'(s) = \alpha''(s) \wedge n(s) + \alpha'(s) \wedge n'(s)$$

como $\alpha''(s)$ y $n(s)$ están en la misma dirección

$$b'(s) = \alpha'(s) \wedge n'(s) \qquad (1)$$

Así

$$b'(s).b(s) = \alpha'(s) \wedge n'(s).b(s)$$

$$b'(s).b(s) = (\alpha'(s) \wedge n'(s)).(\alpha'(s) \wedge n(s)) = 0$$

También de 1 obtenemos que $n'(s)$ es normal a $\alpha'(s)$ y paralelo $n(s)$ y podemos escribir

$$b'(s) = \tau(s).n(s) \qquad (2)$$

Ahora, computemos $n'(s)$. Llamando $T = \alpha'$

$$b = T \wedge n \quad \text{y} \quad b \wedge T = (T \wedge n) \wedge T$$

o sea,

$$b \wedge T = (T.T)n - \underbrace{(n.T)}_{0}T = T^2.n = n$$

De aquí, de (1) , (2)

$$n' = b' \wedge T + b \wedge T' = \tau(s).n(s) \wedge T + (T \wedge n) \wedge T'$$

$$= -\tau(s).b + \underbrace{(T.T')}_{0}n - (n.T').T$$

$$= -\tau.b - k(n.n).T$$

$$= -\tau.b - kT$$

Ahora todos los elementos obtenidos pueden ser reunidos en las llamadas fórmulas de Frenet. Para cada valor del parámetro s, tenemos asociados tres vectores ortogonales unitarios: $\alpha'(s)$, $n(s)$, $b(s)$.

Sus derivados $t'(s)$, $n'(s)$, $b'(s)$ pueden ser expresadas en términos de los anteriores que forman un triedro de referencia, (Triedro de Frenet), ésto da las fórmulas de Frenet, antes mencionadas:

$$T' = k.n$$

$$n' = -kT - \tau b$$

$$b' = \tau.n$$

Mencionemos ahora un importante resultado de la Teoría de curvas:

Teorema fundamental de la Teoría local de curvas:

Dadas las funciones diferenciables $k(s) > 0$ y $\tau(s)$, $s \in I$ existe una curva regular parametrizada $\alpha: I \to R^3$ tal que s es la longitud de arco, $k(s)$ es la curvatura y $\tau(s)$ la torsión de α.

Además, cualquier otra curva $\overline{\alpha}$, satisfaciendo las mismas condiciones, difiere de α en un movimiento rígido, es decir, $\overline{\alpha} = \rho.\alpha + c$ con ρ aplicación lineal ortogonal de R^3 y c un vector.

La prueba involucra el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y no será expuesta en el presente curso. Puede leerse en el libro de Do Carmo , "Differential Geometry of curves and surfaces".

Ejercicios:

1. Hallar la curvatura del Bolim de Descartes y de la espiral logarítmica.
2. Dada la curva $\alpha(s) = (a.\cos \frac{s}{c}, a \operatorname{sen} \frac{s}{c}, b \frac{s}{c})$ $s \in R$, y $c^2 = a^2 + b^2$
   a) Probar que s es el parámetro longitud de arco.
   b) Hallar el triedro de Frenet en s.
   c) Probar que las rectas tangentes a α tienen ángulo constante con el eje z.
3. Una curva regular α tiene la propiedad que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo.
   a) Probar que la traza de α es una recta ó un segmento de recta.
   b) ¿Cuál es la conclusión si α no es regular?
4. Dada una función diferencialbe $k(s)$, $s \in I$, probar que la curva plana teniendo a $k(s) = k$ como curvatura está dada por

$$\alpha(s) = \left(\int \cos \theta(s)ds + a, \int \operatorname{sen} \theta(s)ds + b\right)$$

   donde $\theta(s) = \int k(s)ds + \varphi$, y que la curva está determinada salvo traslación del vectos (a,b) y rotación del ángulo φ.
5. Supongamos $\tau(s) \neq 0$ y $k'(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Probar que una condición necesaria y suficiente para que $\alpha(s)$ esté sobre una esfera es que

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{cte.}$$

   donde $R = \frac{1}{k}$, $T = \frac{1}{\tau}$ y $R' = \frac{dR}{ds}$.

CAPITULO 2

SUPERFICIES

1. Superficies regulares

Intuitivamente, una superficie regular es una parte de un plano deformado de modo que no quedan puntos, lados filosos o autointersecciones.

Definición:

Un subconjunto $S \subset R^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in S$, existe un entorno V en R^3 y una aplicación $f:U \subset R^2 \to V \cap S$ con U abierto (de R^2), tal que

1. f es diferenciable, es decir, si $f(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ entonces las funciones x,y,z tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en V.
2. f es homeomorfismo. Como f es continua, por la condición 1, esto añade que $f^{-1}:V \cap S \to U$ es continua. Es decir, $f^{-1}:F|_W$, F continua y $F:W \subset R^3 \to R^2$ donde W es abierto de R^3 y $W \supset V \cap S$.
3. Para cada $q \in U$, la diferencial $df_q:R^2 \to R^3$ es 1 a 1. Es llamada condición de regularidad.

Esa función f es llamada una parametricación ó sistema local de coordenadas y el entorno $V \cap S$ de en S es llamado entorno coordenado.

Ejemplo:

La esfera unitaria $S^2 = \{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2+z^2 = 1\}$ es una superficie regular.

La aplicación $X_1 : U \subset R^2 \to R^3$ dada por

$$X_1(x,y) = (x,y,+\sqrt{1-(x^2+y^2)}) \quad \text{con} \quad R^2 = \{(x,y,z) \in R^3 / z = 0\}$$

y

$$(x,y) \in U = \{(x,y) \in R^2 / x^2+y^2 < 1\}$$

es una parametrización de S^2.

$X_1(U)$ es una parte abierta de S^2 sobre el plano xy.

Como $x^2+y^2 < 1$, la función $+\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ tiene todas las derivadas parciales continuas y X_1 es diferenciable.

Se verifica $\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \equiv 1$ lo que satisface la condición de regularidad.

Es fácil ver que X_1 es 1 a 1 y que X_1^{-1} es la restricción de la proyección (continua) $\Pi(x,y,z) = (x,y)$ al conjunto $X_1(U)$, entonces X_1^{-1} es continua en $X_1(U)$.

Tomando $X_2(x,y) = (x,y, -\sqrt{1-(x^2+y^2)})$ de manera totalmente análoga tenemos una parametrización para la hemiesfera "sur", pero estas dos aplicaciones no son suficientes para cubrir la esfera pues falta cubrir el ecuador. Con esta intención consideramos las siguientes aplicaciones sobre los planos yz y xz:

$$X_3(y,z) = (+\sqrt{1-(y^2+z^2)},y,z)$$

$$X_4(y,z) = (-\sqrt{1-(y^2+z^2)},y,z)$$

$$X_5(x,z) = (x,+\sqrt{1-(x^2+z^2)},z)$$

$$X_6(x,z) = (x,-\sqrt{1-(x^2+z^2)},z)$$

Ahora la esfera está cubierta totalmente y vemos que es una superficie regular.

<u>Proposición</u>:

Si $f:U \to R$ es una función diferenciable en un abierto U de R^2, entonces el gráfico de f, es decir, el subconjunto de R^3 dado por $(x,y,f(x,y))$

para $(x,y) \in U$, es una superficie regular.

Demostración:

Es suficiente probar que la aplicación $g:U \to R^3$ dada por $g(u,v) = (u,v,f(u,v))$ es una parametrización del gráfico cuyo entorno coordenado cubre cada punto del gráfico.

La condición 1 se satisface por hipótesis.

La condición 3 es facilmente verificable ya que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv 1$.

Por otra lado, cada punto del gráfico es la imagen por g de un único punto $(u,v) = (x,y)$ y por lo tanto, es 1 a 1. Como g^{-1} es la restricción al gráfico de f de la proyección (continua) de R^3 sobre el plano xy es, por lo tanto, continua.

Definición:

Sea $F:U \subset R^n \to R^m$ una aplicación diferenciable; decimos que p es un punto crítico de F si la diferencial $dF_p:R^n \to R^m$ no es suryectiva.

La imagen $F(p) \in R^m$ de un punto crítico se llama valor crítico de F. Un punto de R^m que no es valor crítico es llamado valor regular de F.

Para una mejor interpretación de esta definición recordemos que si $F:U \subset R^n \to R^m$ es una función diferenciable y a cada $p \in U$ asociamos una aplicación lineal $dF_p:R^n \to R^m$ (diferencial) definida por:

Si $w \in R^n$ y $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ es una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$, la curva $\beta = F\circ\alpha$ es diferenciable y $dF_p(w) = \beta'(0)$.

Así, si $f:U \subset R^3 \to R$ es diferenciable entonces df_p aplicado al vector $(1,0,0)$ se obtiene calculando el vector tangente en $f(p)$ de la curva $x \to f(x,y_0,z_0)$ y $df_p(1,0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = f_x$.

Así, $df_p(0,1,0) = f_y$ y $df_p(0,0,1) = f_z$

De donde df_p no es suryectiva si y sólo si $f_x = f_y = f_z = 0$.

Equivalentemente, a es valor regular si y sólo si f_x, f_y, f_z no se anulan simultaneamente en a.

Proposición:

Si $f:U \subset R^3 \to R$ es función diferenciable y $a \in f(U)$ es valor regular de f entonces $f^{-1}(a)$ es superficie regular de R^3.

Demostración:

Sea $p = (x_0,y_0,z_0)$ un punto de $f^{-1}(a)$. Ya que a es un valor regular de **f** es posible suponer (reordenando los ejes si fuese necesario) que $f_z \neq 0$ en p.

Tomamos la aplicación

$$F:U \subset R^3 \to R^3 \text{ dada por } F(x,y,z) = (x,y,f(x,y,z)).$$

La diferencial de F en p está dada por

$$dF_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}$$

por lo tanto, $\det(dF_p) = f_z \neq 0$.

Aplicando el teorema de la función inversa nos asegura la existencia de un entorno V de p y uno W de F(p) tal que $F:V \to W$ tiene inversa y $F^{-1}:V \to W$ es diferenciable.

Llamando (u,v,t) las coordenadas de un punto de R^3 donde F toma sus valores queda que las funciones coordenadas de F^{-1}, $x = u$, $y = v$, $z = g(u,v,t)$ son diferenciables.

En particular $z = g(u,v,a) = h(x,y)$ es función diferenciable definida en la proyección de V sobre el plano xy.

Se tiene que

$$F(f^{-1}(a) \cap V) = W \cap \{(u,v,t)/t = a\}.$$

Así, si $g(u,v,a) = h(x,y)$, el gráfico de h es $(x,y,h(x,y)) = F^{-1}(u,v,a) = f^{-1}(a) \cap V$, por proposición anterior $f^{-1}(a) \cap V$ es un entorno coordenado y $f^{-1}(a)$ es superficie regular.

Ejemplos:

1. El elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ es superficie regular.

   Resulta de considerar $f^{-1}(0)$ siendo $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1.$

2. El hiperboloide de dos hojas $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ es una superficie regular tomando $S = f^{-1}(0)$ pues 0 es valor regular de $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$.

   Esta superficie no es convexa, esto es, dado dos puntos en dos distintas hojas $(z > 0,\ z < 0)$ no es posible unirlos por una curva continua contenida en la superficie.

3. El toro T es una superficie generada por rotación de un círculo S^1 de radio r respecto de una línea recta perteneciente al plano del círculo a distancia $a > r$ del centro del círculo.

   Sea S^1 el círculo en el plano yz con centro $(0,a,0)$. La ecuación de S^1 será $(y-a)^2 + z^2 = r^2$ y los puntos de la figura T satisfarán la ecuación

$$z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2$$

   por lo tanto, T es también la imagen inversa de r^2 por la función

$$f(x,y,z) = z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - a)^2.$$

   Viendo que r^2 es valor regular de f, tenemos que T es una superficie regular.

Proposición:

Sea $S \subset R^3$ una superficie regular y $p \in S$. entonces existe un entorno V de p en S tal que V es el gráfico de una función diferenciable la cual tiene una de las tres formas:

$$z = f(x,y), \quad y = g(x,z) \quad ó \quad x = h(y,z)$$

Demostración:

Sea $t:U \subset R^2 \to S$ una parametrización de S en p, entonces escribimos

$$t(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \quad \text{con} \quad (u,v) \in U.$$

Por ser S superficie regular, la condición de regularidad dice que uno de los determinantes

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

es no-nulo en $t^{-1}(p) = q$. Supongamos que $(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)})(q) \neq 0$ y tomemos la aplicación $\Pi\circ t:U \to R^2$ donde Π es la proyección sobre las dos primeras coordenadas, así

$$\Pi\circ t(u,v) = (x(u,v),y(u,v)).$$

Hemos supuesto que su determinante jacobiano es no nulo, por lo que, el teorema de la función inversa nos asegura la existencia de dos entornos V_1 de q y V_2 de $\Pi\circ t(q)$ tal que $\Pi\circ t$ aplica V_1 en V_2 difeomorficamente.

Sea $V = t(V_1)$ y vemos que restringido a $t(V_1)$ es 1 a 1 y que existe $(\Pi\circ t)^{-1}:V_2 \to V_1$.

Como t es homeomorfismo, V es entonrno de p en S; si ahora componemos $(\Pi\circ t)^{-1}:(x,y) \to (u(x,y), v(x,y))$ con $(u,v) \to z(u,v)$ queda

$$z = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y) \quad \text{y V es el gráfico de } f(x,y).$$

Con esto se muestra el primer caso y se dejan los otros dos cuya demostración es enteramente análoga.

Ejemplo:

El cono de una hoja C, dado por $z = +\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in R^2$ no es una superficie regular. Observemos que la parametrización "natural" sería

$$(x,y) \to (x,y,+\sqrt{x^2+y^2})$$

que no es diferenciable.

De esto no podemos concluir nada pues podría haber otra parametrización que sí lo fuera.

Si C fuese una superficie regular, un entorno de $(0,0,0) \in C$ sería el gráfico de una función diferenciable de una de las tres formas: $x = h(y,z)$, $y = g(x,z)$ ó $z = f(x,y)$. Las dos primeras pueden ser descartadas por el hecho de que la proyección de C sobre los planos yz y xz no son 1 a 1. La última forma debería ser $z = +\sqrt{x^2+y^2}$ pero no es diferenciable en $(0,0)$.

Luego es imposible.

La siguiente proposición dice que si S es una superficie regular y tenemos una parametrización no es necesario comprobar que su inversa sea continua.

Proposición:

Sea $p \in S$ un punto de la superficie regular S y sea $f:U \subset R^2 \to R^3$ una aplicación con $p \in f(U) \subset S$ tal que f es diferenciable y df_p es 1 a 1. Si f es 1 a 1 entonces f^{-1} es continua.

La demostración, que obviaremos, es una aplicación más del teorema de la función inversa.

Veamos, en su lugar, el siguiente ejemplo:

Una parametrización para el toro T puede estar dada por

$$X(u,v) = ((r \cos u + a)\cos v, (r \cos u + a)\operatorname{sen} v, r \operatorname{sen} u)$$

con $0 < u < 2\Pi$, $\quad 0 < v < 2\Pi$.

La diferenciabilidad y la condición de regularidad de la parametrización se obtienen por simple cálculo.

Como sabemos que T es superficie regular, la condición 2 es equivalente a que X sea 1 a 1.

Veâmoslo.

Primero observemos que sen $u = \frac{z}{r}$ y que si $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant a$ entonces $\frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant \frac{3}{2}\pi$.

Si $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant a$ entonces $0 < u \leqslant \frac{\pi}{2}$ ó $\frac{3\pi}{2} \leqslant u < 2\pi$.

Así, dados (x,y,z) esto determina $0 < u < 2\pi$ univocamente. Conociendo u,x,y hallamos cos v y sen v y determinamos $0 \leqslant v < 2$, univocamente, o sea, X es 1 a 1.

Ejercicios:

1. Sea $f:R^3 \to R^3$ definida por $f(x,y,z) = (3x,4y,z)$. Probar que $f|_{S^2}:S^2 \to E$ (E elipsoide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{10} + z^2 = 1$) es homemmorfismo.

2. Sea $f:R^2 \to R^3$ dada por $f(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen}^2 v)$ con $(u,v) \in U$ abierto de R^2. Probar que t tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes para todo $(u,v) \in U$.

3. Probar que $f:R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ no es diferenciable en $(0,0)$.

4. El "toro" T es una superficie generada por rotación de un círculo S' de radio r alrededor de una línea recta perteneciente al plano del círculo y a distancia $a > r$ del centro del círculo. Una parametrización de T está dada por

$$X(u,v) = ((v \cos u + a)\cos v, (v \cos u + a)\operatorname{sen} v, v \operatorname{sen} u)$$

donde $0 < u < 2\pi$, $0 < v < 2\pi$. Probar que T es una superficie regular.

5. Sea C la figura "8" en el plano xy. Sea S la superficie cilíndrica sobre C. ¿Es S una superficie regular?

6. Sea $\pi: S^2-\{N\} \to R^2$ la proyección estereográfica

a) Probar que $\pi^{-1}: R^2 \to S^2$ está dada por

$$\pi^{-1} \begin{cases} x = \dfrac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \dfrac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = \dfrac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

b) Probar que por medio de la proyección estereográfica, es posible cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

7. Probar que la función definida en el ejercicio 1 es diferenciable.

8. Sea $S = \{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2+z^2 = 1\}$ y $A: S^2 \to S^2$ la aplicación antipodal dada por

$$A(x,y,z) = (-x,-y,-z)$$

Probar que A es un difeomorfismo.

2. Cambio de parámetro

De acuerdo a la definición de superficie regular, cada punto de ella pertenece a un entorno coordenado y los puntos de tal entorno están caracterizados por sus corrdenadas. Deberíamos por lo tanto, definir propiedades locales en términos de esas coordenadas.

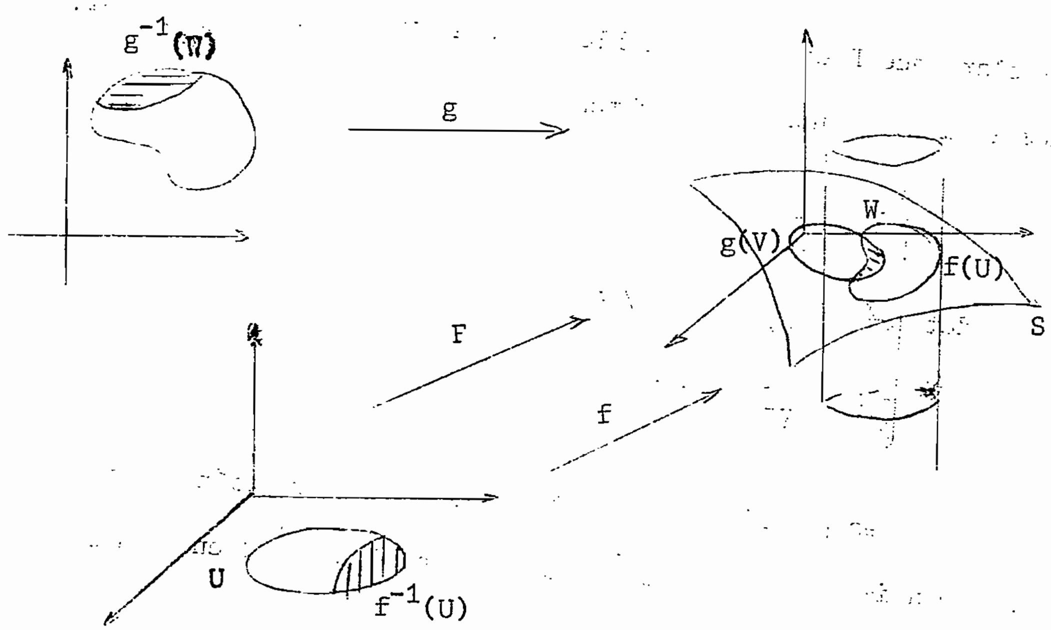
Teorema (Cambio de Variable):

Sea p un punto de una superficie regular S y sea $f:U \subset R^2 \to S$, $g:V \subset R^2 \to S$ dos parametrizaciones de S tal que $p \in f(U) \cap g(V) = W$.

Entonces el cambio de coordenadas.

$$h: f^{-1} o g: g^{-1}(W) \to f^{-1}(W)$$

es un difeomorfismo (h y h^{-1} son diferenciables).



Demostración:

La función $h = f^{-1} o g$ es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. No podemos usar el mismo argumento para la diferenciabilidad pues f^{-1} está definido en un subconjunto abierto de S y aún no sabemos que significa que una función sea diferenciable sobre una superficie regular.

Ahora, sea $r \in g^{-1}(W)$ y $q = h(r)$. Por ser $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ una parametrización podemos suponer, reordenando los ejes si fuera necesario, que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_q \neq 0$$

Definimos la aplicación

$F: U \times R \to R^3$ dada por

$F(u,v,t) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)+t)$ con $(u,v) \in U,\ t \in R$

Es claro que F es diferenciable y que la restricción $F|_{U\times\{0\}} = f$.
Calculemos el diferencial dF_q, obtenemos

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Es decir, es posible aplicar el teorema de la función inversa, el cual garantiza la existencia de un entorno M de f(q) en R^3 tal que F^{-1} existe y es diferenciable en M.

Por la continuidad de g, existe un entorno N de r en V tal que $g(N) \subset M$.

Pero $h|_N = F^{-1} o g|_N$ que es composición de funciones diferenciable, por la regla de la cadena, se obtiene que h es diferenciable en r. Como r es arbitrario, queda que h es diferenciable en $g^{-1}(W)$. Siguiendo un camino enteramente análogo se obtiene que h^{-1} es diferenciable.

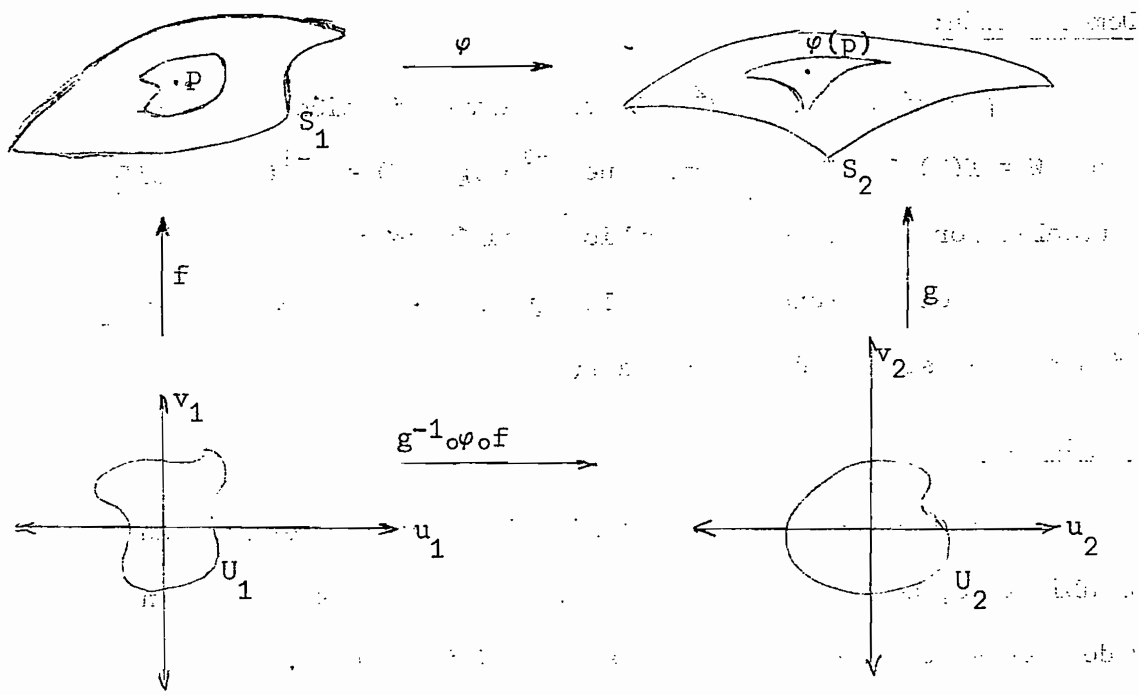
Ahora veremos que significa que una función sea diferenciable sobre una superficie regular.

<u>Definición:</u>

Sea $f: V \subset S \to R$ una función definida en un abierto V de una superficie regular S. Entonces f se dice diferenciable en $p \in V$ si para alguna parametrización $g:U \subset R^2 \to S$, con $p \in g(U) \subset V$, la composición $f{\circ}g:U \subset R^2 \to R$ es diferenciable en $g^{-1}(p)$.

f es diferenciable en V si lo es en todo punto de V.

La definición de diferenciabilidad se extiende a aplicación contínua entre superficies regulares S_1 y S_2, con V_1 abierto. Diremos que Y es diferenciable en $p \in V_1$ si dadas las parametrizaciones $f:U_1 \subset R^2 \to S_1$ y $g:U_2 \subset R^2 \to S_2$ con $p \in f(U_1)$ y $\varphi(f(U_1)) \subset g(U_2)$, la aplicación $g^{-1}{\circ}\varphi{\circ}f:U_1 \to U_2$ es diferenciable en $q = f^{-1}(p)$.



Ejemplos:

1. Sea $R_{z,\theta}:R^3 \to R^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z. Sea $S \subset R^3$ una superficie regular invariante por la rotación $R_{z,\theta}$, es decir si $p \in S$, $R_{z,\theta}(p) \in S$. La restricción $R_{z,\theta}\big|_S$ $R_{z,\theta}:S \to S$ es diferenciable.

2. Sea $\varphi:R^3 \to R^3$ dado por $\varphi(x,y,z) = (ax,by,zc)$ donde a,b,c son números reales no nulos. Esta aplicación es claramente diferenciable y la restricción $\varphi|_{S^2}$ es diferenciable de la esfera unitaria en el elipsoide $\{(x,y,z)/\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

Es fácil ver y se deja como ejercicio, que la definición es independiente de la parametrización elegida.

Lema:

Si $f:U \subset R^2 \to S$ es una parametrización entonces $f^{-1}:f(U) \to R^2$ es diferenciable.

Demostración:

Sea $p \in f(U)$ y $g:V \subset R^2 \to S$ otra parametrización en p. Tomamos $W = f(U) \cap g(V)$ y tenemos que $f^{-1}og:g^{-1}(W) \to f^{-1}(W)$ es diferenciable por el teorema del cambio de parámetros.

Como g es diferenciable resulta que f^{-1} lo es y para superficies regulares, U es difeomorfo a f(U).

Proposición:

Sea $f:U \subset R^2 \to R^3$ una aplicación diferenciable definida en un abierto U, sea $q \in U$ y df_q, 1 a 1. Entonces existe un entorno V de q en R^2 tal que $f(V) \subset R^3$, es superficie regular.

Demostración:

Escribimos $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Por la condición de regularidad, podemos suponer que

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \neq 0.$$

Tomamos la aplicación $F:U\times R \to R^3$ dada por

$F(u,v,t) = (x,(u,v), y(u,v), z(u,v)+t)$ con $(u,v) \in U$ y $t \in R$.

Es fácil verificar que

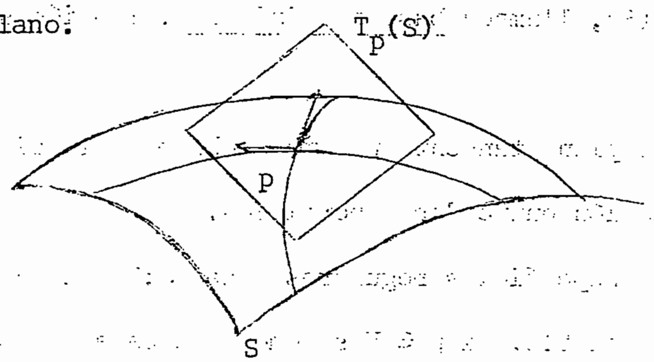
$$\det(dF_q) = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)(q) \neq 0.$$

Aplicando el teorema de la función inversa, existe un entorno W_1 de Q y W_2 de $F(q)$ tal que $F:W_1 \to W_2$ es difeomorfismo.

Tomando $V = U \cap W_1$ y observando que $F|_V = f|_V$ tenemos que $f(V)$ es difeomorfo a V y por lo tanto, una superficie regular.

3. Plano tangente. Diferencial de una aplicación:

Ahora veremos que la condición de regularidad asegura que en cada punto p de una superficie regular S, el conjunto de vectores tangentes a las curvas parametrizadas de la superficie S que pasan por p constituyen un plano:



Por vector tangente a S en un punto $p \in S$ entendemos el vector tangente $\alpha'(0)$ de una curva parametrizada $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S$ con $\alpha(0) = p$.

Proposición:

Sea $f:U \subset R^2 \to S$ una parametrización de una superficie regular S y sea $q \in U$. El subespacio vectorial de dimensión 2 $df_q(R^2) \subset R^3$ coincide con el conjunto de vectores tangentes a S en $f(q)$.

Demostración:

Sea w un vector tangente a S en $f(q)$, es decir, $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to f(U) \subset S$ diferenciable y $\alpha(0) = f(q)$.

La curva $\beta = f^{-1} \circ \alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ es diferenciable pues por una proposición anterior sabemos que f^{-1} lo es. Por definición de diferencial

$$df_q(\beta'(0) = (fo\beta)'(0) = (fof^{-1}o\alpha)'(0) = \alpha'(0) = w$$

entonces, $w \in df_q(R^2)$.

Recíprocamente, sea $w = df_q(v)$ para algún $v \in R^2$, v debe ser el vector velocidad de alguna curva γ, $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon) \to U$ dada por $\gamma(t) = vt+q$.

Tomando la curva $\alpha = fo\gamma$ satisface $\alpha'(0) = w$, lo que prueba que es un vector tangente.

Este plano, independiente de la parametrización f, es llamado plano tangente a S en p y se nota con $T_p(S)$.

Para cada parametrización f se tiene una base, $\{\frac{\partial f}{\partial u}(q), \frac{\partial f}{\partial v}(q)\}$ de $T_p(S)$, llamada base asociada a f. También se los llama $\{f_u, f_v\}$.

Con la noción de plano tangente podemos hablar de la diferencial de una aplicación entre dos superficies.

Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y sea $\varphi:V \subset S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable. Si $p \in V$ sabemos que cada vector tangente $w \in T_p(S_1)$ es el vector velocidad $\alpha'(0)$ de una curva diferenciable parametrizada $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to V$ con $\alpha(0) = p$.

La curva $\beta = \varphi o\alpha$ es tal que $\beta(0) = \varphi(p)$ y $\beta'(0)$ es un vector de $T_{\varphi(p)}(S_2)$.

Proposición:

La aplicación $d\varphi_p:T_p(S_1) \to T_{\varphi(p)}(S_2)$ definida por $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$ es lineal.

Demostración:

Sean $f(u,v)$ y $\overline{f}(\overline{u},\overline{v})$ parametrizaciones de entornos de p y $\varphi(p)$ respectivamente.

Supongamos que φ puede ser expresada en estas coordenadas por $\varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ y que α se expresa por $\alpha(t) = (u(t), v(t))$, $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$.

Entonces $\beta(t) = (\varphi_1(u(t), v(t)), \varphi_2(u(t), v(t)))$ y $\beta(0)$ en la base $\{\overline{f}_u, \overline{f}_v\}$ verifica

$$\beta'(0) = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}.u'(0) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}.v'(0), \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}.u'(0) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}.v'(0)\right)$$

Vemos que β' sólo depende de φ y de $(u'(0), v'(0))$ que son las coordenadas de w en la base $\{f_u,f_v\}$.

También podemos escribir

$$\beta'(0) = d\varphi_p(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

así, $d\varphi_p$ es lineal.

Ejemplo:

Sea S^2 la esfera unitaria y sea $R_{z,\theta}:R^3 \to R^3$ la rotación de ángulo θ alrededor del eje z. En la sección anterior se ejemplifica que esta aplicación restringida a S^2 es diferenciable sobre la esfera.

Ahora, calculemos $(dR_{z,\theta})(w)$, $p \in S^2$, $w \in T_p(S^2)$ y sea $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to S^2$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = w$. Entonces, ya que $R_{z,\theta}$ es lineal su diferencial es la misma función y tenemos

$$(dR_{z,\theta})(w) = (R_{z,\theta}\circ\alpha)'(0) = R_{z,\theta}(\alpha'(0)) = R_{z,\theta}(w)$$

Notemos que $R_{z,\theta}$ deja fijo el punto $(0,0,1) = N$ y que $(dR_{z,\theta})_N:T_N(S) \to T_N(S)$ es la rotación de ángulo 0 en el plano $T_N(S)$.

Ejercicios:

1. Sea $f:U \subset S \to R$, $p \in U$. Definir $df_p:T_p(S) \to R$ como una aplicación lineal.

2. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y $f:U \subset S_2 \to S_2$ una aplicación diferencial tal que df_p es isomorfismo para cada $p \in U$. Probar que f es difeomorfismo local en p.

3. Probar que la ecuación del plano tangente en (x_0,y_0,z_0) de una superficie regular de ecuación $f(x,y,z) = 0$, donde 0 es un valor regular de f, es

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + $$
$$+ f_z(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) = 0$$

4. Determinar los planos tangentes a $x^2+y^2-z^2 = 1$ en $(x,y,0)$ y probar que son paralelos al eje z.

5. (Regla de la cadena)

Probar que si $\varphi:S_1 \to S_2$ y $\psi:S_2 \to S_3$ son aplicaciones diferenciables y $p \in S_1$ entonces

$$d(\psi\circ\varphi)_p = d\psi_{\varphi(p)}\circ d\varphi_p.$$

4. <u>Primera forma fundamental</u>

El producto interior natural de R^3 ($R^3 \supset S$) induce un producto interior sobre cada plano tangente $T_p(S)$.

Si $w_1, w_2 \in T_p(S) \subset R^3$ entonces $\langle w_1,w_2\rangle_p$ es igual al producto interior de w_1, w_2 como vectores de R^3.

Este producto interior es bilineal y simétrico y le corresponde una forma cuadrática

$$I_p:T_p(S) \to R \quad \text{dada por}$$

(1) $$I_p(w) = \langle w,w\rangle_p = |w|^2 \geqslant 0.$$

<u>Definición</u>:

La forma cuadrática I_p sobre $T_q(S)$ definida por (1) es llamada la <u>primera forma fundamental</u> de la superficie regular $S \subset R^3$

en $p \in S$.

La primera forma fundamental permite medir longitud de curvas, ángulos entre vectores, áreas de regiones, sobre la superficie, sin referirse al espacio ambiente R^3 donde está la superficie.

Relacionemos la primera forma fundamental con la base $\{f_u, f_v\}$ asociada a una parametrización $f(u,v)$ en p.

Como un vector tangente $w \in T_p(S)$ es el vector tangente a una curva parametrizada

$$\alpha(t) = f(u(t), v(t)) \qquad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

con $\quad \alpha(0) = p = f(u_0, v_0)$ tenemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p = \\ &= \langle f_u . u'(t) + f_v . v'(t),\ f_u . u'(t) + f_v . v'(t) \rangle_p \\ &= \langle f_u, f_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle f_u, f_v \rangle_p (u').(v') + \langle f_v, f_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F.u'.v' + G(v')^2 \end{aligned}$$

donde

$$E(u_0, v_0) = \langle f_u, f_u \rangle_p, \ F(u_0, v_0) = \langle f_u, f_v \rangle_p,$$

$G(u_0, v_0) = \langle f_v, f_v \rangle_p$ son los coeficientes de la primera forma fundamental en la base $\{f_u, f_v\}$ de $T_p(S)$.

Variando p en un entorno coordenado correspondiente a $f(u,v)$ se obtiene que las funciones E, F, G son diferenciables en ese entorno.

Ejemplos:

1. Sea $P \subset R^3$ un plano pasando por p_0 y conteniendo los vectores ortogonales w_1, w_2. La ecuación de P está dada por

$$f(u,v) = p_0 + u.w_1 + v.w_2 \quad \text{con} \quad (u,v) \in R^2.$$

Para computar la primera forma fundamental vemos que $f_u = w_1$, $f_v = w_2$; como son unitarios y ortogonales entre sí se obtiene $E = 1$, $F = 0$, $G = 1$.

2. La hélice está dada por (cos u, sen u, au). Con ella construímos la helicoide que admite la siguiente parametrización

$$f(u,v) = (v \cos u,\ v \operatorname{sen} u,\ a\, u)$$

con $0 < u < 2\pi$, $-\infty < v < +\infty$.

Queda al lector verificar que el helicoide es una superficie regular y que los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$E = v^2 + a^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Anteriormente vimos que la longitud de arco de una curva parametrizada $\alpha : I \to S$ está dada por

$$S(t) = \int_0^t |\alpha'(t)|\,dt = \int_0^t \sqrt{I_p(\alpha'(t))}\,dt$$

Si $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$ en un entorno coordenado correspondiente a la parametrización $f(u,v)$, podemos computar la longitud de arco por

$$(2) \qquad s(t) = \int_0^t \sqrt{E(u')^2 + 2F\,u'.v' + G(v')^2}\;dt \qquad .$$

También si θ es el ángulo en que dos curvas regulares parametrizadas $\alpha : I \to S$, $\beta : I \to S$ se intersectan en $t = t_0$, está dado por

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0)\rangle}{|\alpha'(t_0)|\,.\,|\beta'(t_0)|} \qquad .$$

En particular, si φ es el ángulo de las curvas coordenadas de una paremætrización $f(u,v)$ tenemos:

$$\cos\varphi = \frac{\langle f_u, f_v\rangle}{|f_u|\cdot|f_v|} = \frac{F}{\sqrt{E.G}}$$

de donde:

Las curvas coordenadas de una parametrización son ortogonales si y sólo si $F = 0$.

Tal parametrización se llama ortogonal.

Debido a (2), es usual referirse al "elemento de arco" ds de S como

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,dy\,dv + G\,dv^2.$$

Ejemplo:

Tomemos la esfera y en ella un punto en un entorno coordenado dado por la parametrización

$$g(\theta,\varphi) = (\text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \cos\theta)$$

$$g_\theta = (\cos\theta\cos\varphi,\ \text{oos}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ -\text{sen}\,\theta)$$

$$g_\varphi = (-\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ \text{sen}\,\theta\cos\varphi,\ 0)$$

de donde,

$$E = 1,\quad F = 0,\quad G = \text{sen}^2\theta$$

Si w es un vector tangente a la esfera en el punto $g(\theta,\varphi)$, dado en la base asociada a $g(\theta,\varphi)$, entonces

$$w = a\,g_\theta + b\,g_\varphi$$

y el cuadrado de la longitud de w es:

$$|w|^2 = I_p(w) = E\,a^2 + 2F\,ab + g\,b^2 = a^2 + b^2\,\text{sen}^2\theta$$

Consideremos regiones $\mathcal{R}$ acotadas, contenidas en un entorno coordenado $f(U)$ de una parametrización $f: U \subset R^2 \to S$, es decir, $\mathcal{R}$ es la imagen por f de una región acotada $Q \subset U$.

La integral

$$\iint_Q |f_u \wedge f_v|\,du\,dv$$

no depende de la parametrización f.

Veámoslo: Sea $\overline{f}:\overline{U} \subset R^2 \to S$ otra parametrización con $R \subset \overline{f}(\overline{U})$ y sea $\overline{Q} = \overline{f}^{\,-1}(R)$.

El cambio de parámetros $h = f^{-1} \circ \overline{f}$ tiene jacobiano

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$$

y

$$\iint_{\overline{Q}} |\overline{f}_{\overline{u}} \wedge \overline{f}_{\overline{v}}| d\overline{u}\, d\overline{v} = \iint_{\overline{Q}} |f_u \wedge f_v| \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}\right| d\overline{u}\, d\overline{v} =$$

$$= \iint_{Q} |f_u \wedge f_v| \, du\, dv$$

Ahora podemos tomar la siguiente definición:

Sea $R \subseteq S$ una región acotada de una superficie regular contenida en un entorno coordenado de la parametrización $f:U \subset R^2 \to S$.

El número positivo

$$\iint_{Q} |f_u \wedge f_v| \, du\, dv = A(R) \qquad \text{con } Q = f^{-1}(R)$$

es llamado <u>área de R</u>.

Para expresar esta integral en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental vemos que los vectores f_u y f_v verifican

$$|f_u \wedge f_v|^2 + \langle f_u, f_v\rangle^2 + |f_u|^2\, |f_v|^2$$

Ahora, el integrando puede escribirse

$$|f_u \wedge f_v| = \sqrt{E\,G-F^2}\,.$$

<u>Ejemplo</u>:

Calculemos el área del toro T que en un ejemplo anterior parametrizamos por

$$f(u,v) = ((a + r\cos u)\cos v,\ (a + r\cos u)\operatorname{sen} v,\ r\operatorname{sen} u)$$

con $\quad 0 < u < 2\pi \quad , \qquad 0 < v < 2\pi$

que cubre el toro excepto para un meridiano y un paralelo.

Obtenemos

$$f_u = (-r\cos v\operatorname{sen} u,\ -r\operatorname{sen} v\operatorname{sen} u,\ r\cos u)$$

$$f_v = (-(a+r\cos u)\operatorname{sen} v,\ (a+r\cos u)\cos v,\ 0)\ .$$

y

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = (r\cos u + a)^2$$

por lo tanto

$$\sqrt{E\,G-F^2} = \sqrt{r^2(r^2(r\cos u + a)^2} = r(r\cos u + a).$$

Sea ε positivo y pequeño y llamemos R_ε a la región imagen por f de $Q_\varepsilon = \{(u,v) \in R^2/0+\varepsilon \leqslant u \leqslant 2\pi-\varepsilon,\ 0+\varepsilon \leqslant v \leqslant 2\pi-\varepsilon\}$.

Se obtiene

$$A(R_\varepsilon) = \iint_{Q_\varepsilon} r(r\cos u+a)du\,dv = \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} dv \int_{0+\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} (r^2\cos u+ra)du$$

$$= (2\pi-2\varepsilon)r^2\ (\operatorname{sen}(2\pi-\varepsilon)-\operatorname{sen}\varepsilon) + r\,a(2\pi-2\varepsilon)^2$$

Tomando límite se obtiene:

$$A(T) = \lim_{\varepsilon\to 0} A(R_e) = 4\pi^2 r\,a$$

<u>Ejercicios:</u>

1. El cilindro recto sobre el círculo $x^2+y^2 = 1$ puede ser parametrizado por $f:U \subset R^2 \to R^3$, donde

$$f(u,v) = (\cos u,\ \operatorname{sen} u, v) \quad y \quad U = \{(u,v) \in R^2/0 < u < 2\ ,\ -\infty < v < +\infty\}.$$

Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental.

2. a) Calcular el área de la esfera

   b) Calcular el área del elipsoide

CAPITULO 3

APLICACION DE GAUSS

1. Orientación de superficies

Veremos, ahora, que en cierto sentido es posible orientar superficies. Intuitivamente, para cada punto p de una superficie regular S hay un plano tangente $T_p(S)$, una orientación sobre dicho plano induce una orientación un entorno de p, es decir, una noción de movimiento positivo a lo largo de curvas cerradas suficientemente pequeñas alrededor de cada punto del entorno. Si es posible hacer una elección para cada $p \in S$ tal que en la intersección de dos entornos la orientación coincida entonces S se dirá orientable. Si no es posible, se dirá no-orientable.

En otros términos, tomemos una parametrización $g(u,v)$ de un entorno de un punto p de una superficie regular S y determinamos una orientación en el plano tangente $T_p(S)$ que llamamos orientación asociada a la base ordenada $\{g_u, g_b\}$.

Si p pertenece, también, al entorno coordenado de otra parametrización $\overline{g}(\overline{u},\overline{v})$, la nueva base $\{\overline{g}_{\overline{u}}, \overline{g}_{\overline{v}}\}$ se expresa en términos de la anterior por

$$\overline{g}_{\overline{u}} = g_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{u}} + g_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \overline{u}}$$

$$\overline{g}_{\overline{v}} = g_u \cdot \frac{\partial u}{\partial \overline{v}} + g_v \cdot \frac{\partial v}{\partial \overline{v}}$$

tomando $u = u(\overline{u},\overline{v})$, y $v = v(\overline{u},\overline{v})$.

Las bases $\{g_u, g_v\}$ y $\{\overline{g}_{\overline{u}}, \overline{g}_{\overline{v}}\}$ determinan la misma orientación de $T_p(S)$ si el jacobiano del cambio de coordenadas es positivo, es decir si

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{bmatrix} > 0.$$

Definición:

Una superficie regular S se dice orientable si es posible cubrirla con una familia de entornos coordenados de tal modo que si un punto $p \in S$ pertenece a dos entornos de esa familia, entonces el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo en p.

La elección de una tal familia se llama una orientación de S. Si tal elección no es posible, la superficie se dice no-orientable.

Ejemplos:

1. Una superficie que es el gráfico de una función diferenciable es una superficie orientable.

   Esto se debe a que estas superficies pueden ser cubiertas por un entorno coordenado y son trivialmente orientables.

2. La esfera es una superficie orientable.
3. La banda de Möbius es superficie no-orientable.

Dada una parametrización $f:U \subset R^2 \to S$ de una superficie regular S en $p \in S$, podemos elegir un vector unitario normal en cada punto de f(U).

El vector es

$$N(q) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}(q) \qquad \text{con} \quad q \in f(U).$$

Así tenemos una aplicación diferenciable $N:f(U) \to R^3$ que asocia a cada $q \in f(U)$ un vector $N(q)$ unitario y normal.

Generalizando, si $V \subset S$ y $N:V \to R^3$ es una aplicación diferenciable que asocia a cada $q \in V$ un vector unitario normal en q, decimos que N es un campo diferenciable de vectores unitarios normales sobre V.

No toda superficie admite un campo de vectores normales definidos sobre la superficie entera.

Proposición:

Una superficie regular $S \subset R^3$ es orientable si y solo si existe un campo de vectores normales unitarios diferenciable $N:S \to R^3$ sobre S.

Demostración:

Si S es orientable ($S \subset R^3$) es posible cubrirla con una familia de entornos coordenados tal que en la intersección de dos cualesquiera de ellos, el cambio de coordenadas tiene jacobiano positivo. En el punto $p = f(u,v)$ de cada entorno definimos

$$N(p) = N(u,v) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}(p).$$

N(p) está bien definido ya que si p pertenece a dos entornos coordenados con parámetros (u,v) y $(\bar{u},\bar{v})$, los vectores normales $N(u,v)$ y $N(\bar{u},\bar{v})$ satisfacen

$$\bar{f}_{\bar{u}} \wedge \bar{f}_{\bar{v}} = (f_u \wedge f_v)\frac{\partial(u,v)}{\partial(\bar{u},\bar{v})}$$

Además, por construcción $N(u,v)$ en R^3 es diferenciable de (u,v) y así la aplicación $N:S \to R^3$ es diferenciable.

Recíprocamente,

Sea $N:S \to R^3$ un campo de vectores unitarios normales diferenciable y consideremos una familia de entornos coordenados conexos cubriendo S.

Para el punto $p = f(u,v)$ de cada entorno coordenado $f(U)$, $U \subset R^3$, es posible, por la continuidad de N (si fuese necesario intercambiando u y v) arreglar que

$$N(p) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}$$

En realidad, como N es campo de vectores unitarios, el producto interior

$$\langle N(p), \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} \rangle = h(p) = \pm 1$$

es función continua en f(U).

Como f(U) es conexo el signo de h constante.

Si $h(p) = -1$, intercambiando u con v, se soluciona.

Procediendo de igual modo con todos los entornos coordenados, tenemos que en la intersección de cualquiera dos de ellos, por ejemplo, $f(u,v)$ y $\overline{f}(\overline{u},\overline{v})$, el jacobiano $\frac{\partial(u,v)}{\partial(\overline{u},\overline{v})}$ es positivo pues de otro modo tendríamos

$$\frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} = N(p) = \frac{-f_u \wedge f_v}{|\overline{f}_{\overline{u}} \wedge \overline{f}_{\overline{v}}|} = -N(p).$$

Contradicción.

Por lo tanto, la familia dada en entornos coordenados, acomodados convenientemente sus parámetros, satisface la definición de orientabilidad.

Proposición:

Si una superficie está dada por $S = \{(x,y,z) \notin R^3 / f(x,y,z) = a\}$

donde $f:U \subset R^3 \to R$ es diferenciable y a es valor regular de f entonces S es orientable.

Demostración:

Sea $p \in S$ y tomemos sobre S la curva parametrizada $(x(t),y(t),z(t))$, con $t \in I$, que pasa por p para $t = t_0$. Ya que la curva está sobre S tenemos

$$f(x(t),y(t),z(t)) = a \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

Diferenciando ambos lados de esta expresión con respecto a t, para $t = t_0$, queda

$$f_x(p).x'(t_0)+f_y(p).y'(t_0)+f_z(p).z'(t_0) = 0.$$

Es decir, que el vector tangente a la curva en $t = t_0$ es ortogonal al vector (f_x,f_y,f_z) en p. Como el punto p y la curva en S son arbitrarios, tomamos el siguiente campo de vectores unitarios diferenciable en S:

$$N(x,y,z) = \left(\frac{f_x}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}, \frac{f_z}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2}}\right)$$

y por la proposición anterior, la superficie S es orientable.

Ejercicios:

1. Sea $\varphi:S_1 \to S_2$ un difeomorfismo, y S_i, $i = 1,2$ superficies regulares. Probar que S_1 es orientable si y sólo si S_2 es orientable.

2. Sea S_2 una superficie regular orientable y $\varphi:S_1 \to S_2$ una aplicación diferenciable la cual es un difeomorfismo local en cada $p \in S_1$. Probar que S_1 es orientable.

2. Aplicación de Gauss

Acabamos de ver que dada una parametrización $f:U \subset R^2 \to S$ de una superficie regular S es un punto $p \in S$, podemos elegir un vector unitario normal en cada punto de f(U) por

$$N(q) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}(q) , \qquad q \in f(U)$$

Generalizando, tenemos que si $V \subset S$ es un abierto de la superficie regular y $N:V \to R^3$ es una aplicación diferenciable que asigna a cada $q \in V$ un vector normal unitario en q, entonces tenemos un campo de vectores normales unitarios diferenciable sobre V.

La existencia de tal campo de vectores sobre la superficie entera asegura que la superficie regular es orientable y la elección de tal campo N es llamada una orientación de S.

Una tal orientación N sobre S induce una orientación sobre cada espacio tangente $T_p(S)$, con $p \in S$. Veámoslo.

Se dice que una base $\{v,w\}$ de $T_p(S)$ es positiva si $\langle v \wedge w, N\rangle$ es positivo.

El conjunto de todas las bases positivas de $T_p(S)$ es una orientación de $T_p(S)$.

Definición:

Sea $S \subset R^3$ una superficie con una orientación N. La aplicación $N:S \to R^3$ toma sus valores en la esfera unidad S^2. La aplicación $N:S \to S^2$ es llamada la aplicación de Gauss de S.

Queda como ejercicio verificar que la aplicación de Gauss es diferenciable.

La aplicación lineal $dN_p:T_p(S) \to T_{N(p)}(S^2)$ puede ser pensada como de $T_p(S)$ sobre sí mismo ya que $T_p(S)$ y $T_{N(p)}(S^2)$

son planos paralelos.

Así, para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ en S con $\alpha(0) = p$ tomamos la curva parametrizada $N\circ\alpha(t) = N(t)$ sobre la esfera S^2.

Restringiendo el vector normal N a la curva α, el vector tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ es un vector en $T_p(S)$.

Podríamos pensar que dN_p mide cuánto se aleja N de N(p) en un entorno de p. Recordemos que en caso de curvas esto está dado por la curvatura.

Ejemplos:

1. Para el plano P de ecuación $ax+by+cz+d = 0$ resulta
   $N = \dfrac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, es decir, constante, luego, $dN \equiv 0$.

2. Sea S^2 la esfera unitaria y $\alpha(t) = (x(t),y(t),z(t))$ una curva parametrizada sobre S^2, entonces

   $$2x.x' + 2y.y' + 2z.z' = 0 = \langle (x,y,z),(x'.y'.z')\rangle$$

   de donde (x,y,z) es ortogonal a α' y por lo tanto, es normal a la esfera en el punto (x,y,z).

   Así, $\overline{N} = (x,y,z)$ y $N(-x,-y,-z)$ son campos de vectores normales unitarios en S^2. Fijamos una orientación en S^2 eligiendo $N = (-x,-y,-z)$ como campo normal.

   Notar que N apunta hacia el centro de la esfera.

   Restringiendo el vector normal a la curva $\alpha(t)$ queda $N(t) = (-x(t),-y(t),-z(t))$ y $dN(x'(t),y'(t),z'(t)) =$ $= N'(t) = (-x'(t),-y'(t),-z'(t))$ es decir,

   $dN_p(v) = -v$ para todo $p \in S^2$ y para todo $v \in T_p(S^2)$.

Si hubieramos elegido "la otra orientación" se tendría $d\overline{N}_p(v) = v$.

Proposición:

La diferencial de la aplicación de Gauss $dN_p : T_p(S) \to T_p(S)$ es una aplicación lineal autoadjunta.

El determinante de dN_p es la curvatura de Gauss K de S en p y el negativo de un medio de la traza de dN_p es llamado curvatura media H de S en p.

Demostración:

Ya que es lineal basta ver que $\langle dN_p(w_1), w_2\rangle =$
$= \langle w_1, dN_p(w_2)\rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de $T_p(S)$.

Sea g(u,v) una parametrización de S en p y sea $\{g_u\ g_v\}$ la base asociada.

Si $\alpha(t) = g(u(t),v(t))$ es una curva parametrizada en S con $\alpha(0) = p$ tenemos

$$
\begin{aligned}
dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(g_u.u'(0) + g_v.v'(0)) \\
&= \frac{d}{dt}(N(u(t),v(t)))\Big|_{t=0} \\
&= N_u.u'(0) + N_v.v'(0)
\end{aligned}
$$

de donde

$$N_u = dN_p(g_u) \quad y \quad N_v = dN_p(g_v).$$

Ahora, para probar que dN_p es autoadjunta es suficiente ver que

$$\langle N_u, g_v\rangle = \langle g_u, N_v\rangle$$

Para obtener esto, sabemos que $\langle N, g_u\rangle = 0$ y $\langle N, g_v\rangle = 0$; derivando respecto de u y de v respectivamente, se obtiene

$$\langle N_v, g_u\rangle + \langle N, g_{uv}\rangle = 0$$

$$\langle N_u, g_v\rangle + \langle N, g_{vu}\rangle = 0$$

de donde

$$\langle N_v, g_u\rangle = -\langle N, g_{uv}\rangle = \langle N_u, g_v\rangle .$$

Ejemplo:

Consideremos el cilindro

$$\{(x,y,z) \in R^3 / x^2+y^2 = 1\}.$$

Por derivación, vemos que los vectores $\overline{N} = (x,y,0)$ y $N = (-x,-y,0)$ son vectores unitarios normales en (x,y,z). Fijamos la orientación eligiendo $N = (-x,-y,0)$ como campo de vectores normales.

Considerando la curva $(x(t),y(t),z(t))$ sobre el cilindro, satisfará $(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$ y a lo largo de la curva $N(t) = (-x(t), -y(t), 0)$, por lo tanto

$$dN((x'(t),y'(t),z'(t)) = N'(t) = (-x'(t),-y'(t),0).$$

De esto concluímos que si v es un vector tangente al cilindro y paralelo al eje z, entonces

$$dN(v) = 0 = 0.v$$

Si w es un vector tangente al cilindro y paralelo al plano xy, entonces $dN(w) = -w$.

Por ser dN una aplicación autoadjunta, los vectores v y w son autovectores, los valores 0 y -1 son autovalores y la matriz dN en la base v,w es diagonal, dos valores sobre la diagonal serán los autovalores obtenidos.

Ejercicio:

Probar que la superficie parametrizada

$g(u,v) = (v \cos u,\ v \operatorname{sen} u,\ au)$, $a \neq 0$ es regular. Calcular su vector normal $N(u,v)$.

3. Segunda forma fundamental

Debido a que la diferencial de la aplicación de Gauss es autoadjunta, nos permite asociar a dN_p una forma cuadrática Q en $T_p(S)$ dada por

$$Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle \quad \text{con} \quad v \in T_p(S).$$

Definición:

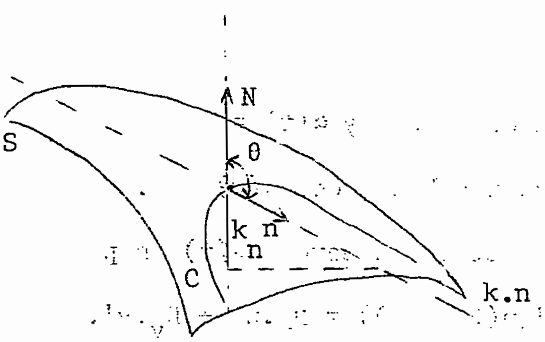
La forma cuadrática I_p definida en $T_p(S)$ por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \quad \text{es}$$

es llamada la segunda forma fundamental de S en p.

Definición:

Sea C una curva regular en S pasando por p; k la curvatura de C en p y $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ donde n es el vector normal a C y N el vector normal a S en p. El número $k_n = k.\cos \theta$ es llamado curvatura normal de $C \subset S$ en p.



Es decir, k_n es la proyección del vector k.n sobre la recta de acción del vector normal a la superficie en p.

Veamos una interpretación geométrica de la segunda forma fundamental:

Sea C una curva regular en S parametrizada por $\alpha(s)$ donde s es el parámetro longitud de arco y $\alpha(0) = p$. Denotamos $N(s)$ la restricción del vector N a la curva C y tenemos

$$\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0.$$

Derivando queda

$$\langle N'(s),\alpha'(s)\rangle = -\langle N(s),\alpha''(s)\rangle ,$$

por lo tanto,

$$II_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)),\alpha'(0)\rangle =$$

$$= -\langle N'(0),\alpha'(0)\rangle = \langle N(0),\alpha''(0)\rangle =$$

$$= \langle N,k.n\rangle(p) = k_n(p).$$

O sea, el valor de la segunda forma fundamental para un $v \in T_p(S)$ es igual a la curvatura normal de una curva regular de S en p y tangente a v.

En particular, se obtiene el

Teorema de Meusnier:

Toda curva sobre una superficie S, teniendo en un punto $p \in S$ la misma tangente, tiene la misma curvatura normal.

4. La aplicación de Gauss en coordenadas locales

Vamos a considerar parametrizaciones $f:U \subset R^2 \to S$ compatibles con la orientación N de S, es decir, dada en f(U) por

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}$$

Sea f(u,v) una parametrización en p de S y $\alpha(t) = f(u(t),v(t))$ una curva parametrizada sobre S con $\alpha(0) = p$.

Simplificando la notación, el vector tangente a $\alpha(t)$ en p es $\alpha' = f_u.u' + f_v.v'$ y $dN(\alpha') = N'(u(t),v(t)) = N_u.u' + N_v.v'$.

Como N_u y N_v pertenecen a $T_p(S)$ podemos escribir

$$N_u = a_{11} f_u + a_{21} f_v$$

$$N_v = a_{12} f_u + a_{22} f_v$$

llamadas ecuaciones de Weingarten, y por lo tanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11}.u'+a_{12}.v')f_u + a_{21}.u'+a_{22}.v')f_v$$

es decir,

$$dN\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

o sea, la matriz

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ representa la aplicación dN en la base $\{f_u, f_v\}$.

Por otro lado, la expresión de la segunda forma fundamental en términos de la base $\{f_u, f_v\}$ es

$$II_p(\alpha') = -\langle dN(\alpha), \alpha' \rangle = -\langle N_u.u'+N_v.v', f_u.u'+f_v.v' \rangle =$$

$$= e(u')^2+2f(u')(v')+g(v')^2$$

donde

$$e = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle$$

$$f = -\langle N_u, f_v \rangle = -\langle N_v, f_u \rangle = \langle N, f_{vu} \rangle = \langle N, f_{uv} \rangle$$

$$g = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

ya que

$$\langle N, f_u \rangle = \langle N, f_v \rangle = 0.$$

Relacionemos estos coeficientes con los de la primera forma fundamental; de las ecuaciones de Weingarten se tiene:

$$e = -\langle a_{11}f_u + a_{21}f_v, f_u \rangle = -a_{11}E - a_{21}F$$

$$f = -\langle a_{12}f_u + a_{22}f_v, f_u \rangle = -a_{12}E - a_{22}F$$

$$f = -\langle a_{11}f_u + a_{21}f_v, f_v \rangle = -a_{11}F - a_{21}G$$

$$g = -\langle a_{12}f_u + a_{22}f_v, f_v \rangle = -a_{12}F - a_{22}G$$

Nos queda

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Sabemos que

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

con esto es fácil obtener los coeficientes a_{ij} y se deja como ejercicio.

5. Curvaturas principales

Cuando fijamos un punto en la superficie regular, la curvatura normal es una función de la dirección. Es, por lo tanto, natural estudiar las direcciones para las cuales las curvaturas normales toman un extremo y los valores de estos extremos.

Tomando

$$u' = \frac{du}{ds} \quad y \quad v' = \frac{dv}{ds}$$

tenemos, de lo anterior,

$$k_n = e(u')^2 + 2\, f(u')(v') + g(v')^2$$

y

$$(1) \qquad 1 = E(u')^2 + 2\, F(u')(v') + G(v')^2$$

El problema es, entonces, determinar los extremos de

$k_n(u',v')$ donde las variables están relacionadas por (1). Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange introducimos una nueva variable λ y ponemos

$$P(u',v') = e(u')^2+2\, fu'.v'+g(v')^2-\lambda(E(u')^2+ 2\, Fu'.v'+G(v')^2-1).$$

Los extremos de $k_n(u',v')$ con la relación (1) son los mismos que los de $P(u',v')$ sin relación alguna sobre sus variables.

Para un extremo de P debemos tener

$$e(u') + fv'-\lambda(Eu' + Fv') = 0$$

$$f\, u' + g\, v' - \lambda(Fu' + Gv') = 0$$

que junto a (1) nos darán las soluciones buscadas. El signo de diferencial segunda de (1), es decir, si la forma cuádrática es positiva o nó, nos dirá la naturaleza de las soluciones obtenidas.

Definición:

La máxima curvatura normal k_1 y la mínima curvatura normal k_2 son llamadas curvaturas principales en p y las correspondientes direcciones (e_1,e_2) son llamadas direcciones principales.

Definición:

Si una curva regular C sobre S es tal que para todo $p \in C$, la recta tangente de C es una dirección principal en p, entonces C se dice ser una línea de curvatura de S.

Teorema de Olinde Rodrigues

Una condición necesaria y suficiente para que una curva regular C sobre S sea una línea de curvatura de S es que

$$N'(t) = \lambda(t).\alpha'(t)$$

para alguna parametrización $\alpha(t)$ de C donde $N(t) = N\circ\alpha(t)$ y $\lambda(t)$ una función diferenciable.

Demostración:

Si C es una línea de curvatura de S entonces $\alpha'(t)$ está contenida en una dirección principal y $\alpha'(t)$ es un autovector de $dN(dN:T_p(S) \to T_p(S))$ y $dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t) = N'(t)$.

Recíprocamente, si C es tal que satisface $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$, como $N'(t) = dN(\alpha'(t))$ resulta que $\alpha'(t)$ es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda(t)$ de dN, es decir, $\alpha(t)$ es línea de curvatura.

Ahora, las funciones curvatura de Gauss y curvatura media, en términos de las curvaturas principales, pueden escribirse, respectivamente

$$K = k_1.k_2 \qquad \text{y} \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Agreguemos, a título informativo, que un punto se dice elíptico, hiperbólico ó parabólico si K es > 0, < 0 ó $= 0$ respectivamente.

Un punto se dice umbílico si y sólo si $H^2-K = 0$. Todos los puntos de un plano ó una esfera son umbílicos.

Ejercicios:

En lo que sigue llamaremos S a una superficie regular orientable.

1\. a) Dada $z = y^2 - x^2$ la ecuación del hiperboloide parabólico, considerar la parametrización $f(u,v) = (u,v,v^2-u^2)$. Calcular el vector normal en $p = (0,0,0)$.

b) Sea $\alpha(t)$ una curva en la superficie dada con $\alpha(0) = p$. Calcular la diferencial de la aplicación de Gauss en p.

2. Escribir la curvatura normal en términos de la máxima y mínima curvatura normal en el mismo punto.

3. Sea $f:U \subset R^2 \to S$ una parametrización de S. A cada punto de f(U) asignamos de manera natural la base $\{f_u, f_v, N\}$.

Expresando las derivadas de los vectores de la base en términos de la base queda

$$\left.\begin{aligned} f_{uu} &= \Gamma^1_{11} f_u + \Gamma^2_{11} f_v + L_1 N \\ f_{uv} &= \Gamma^1_{12} f_u + \Gamma^2_{12} f_v + L_2 N \\ f_{vu} &= \Gamma^1_{21} f_u + \Gamma^2_{21} f_v + \overline{L}_2 N \\ f_{vv} &= \Gamma^1_{22} f_u + \Gamma^2_{22} f_v + L_3 N \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} N_u &= a_{11} f_u + a_{21} f_v \\ N_v &= a_{12} f_u + a_{22} f_v \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

El sistema de ecuaciones (2) es conocido como las ecuaciones de Weingarten.

Los coeficientes Γ^i_{jk} son llamados símbolos de Christoffel.

a) Hallar los coeficientes de las ecuaciones de Weingarten en términos de los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental.

b) Probar que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$. Siendo E, F, G los coeficientes de la primera forma fundamental de S, comprobar:

$$\Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F = \frac{1}{2} E_u$$

$$\Gamma^1_{12} F + \Gamma^2_{12} G = \frac{1}{2} G_u$$

c) Si f es una parametrización ortogonal ($F = 0$) verificar que

$$-K = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \{ (\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u \}$$

d) Siendo e,f,g los coeficientes de la segunda forma fundamental, verificar que $L_1 = e$, $L_2 = \bar{L}_2 = f$ y $L_3 = g$.

4. Usando la parametrización dada en el ejercicio 1 calcular :

a) Primera forma fundamental.

b) Segunda forma fundamental.

c) Curvatura de Gauss.

del hiperboloide parabólico.

5. Idem 4 para la superficie parametrizada

$$h(u,v) = (u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2v,\ u^2 - v^2)$$

6. a) Calcular los símbolos de Christoffel de la superficie parametrizada por

$$f(u,v) = (v \cos u,\ v \operatorname{sen} u,\ 3v)$$

b) Idem para la esfera S^2.

7. Probar que no existe una superficie $g(u,v)$ tal que $E = G = 1$, $F = 0$, $e = 1$, $f = 0$, $g = -1$.

CAPITULO 4

TEOREMA DE GAUSS-BONNET

El estudio de propiedades locales de una superficie, expresados en términos de la primera forma fundamental es llamado geometría intrínseca de la superficie.

1. Transporte paralelo. Geodésicas

Llamamos campo vectorial o campo de vectores (tangente) a una correspondencia ω

$$\omega : U \subset S \to T_p(S)$$

$$p \to \omega_p$$

donde U es un abierto y S una superficie regular.

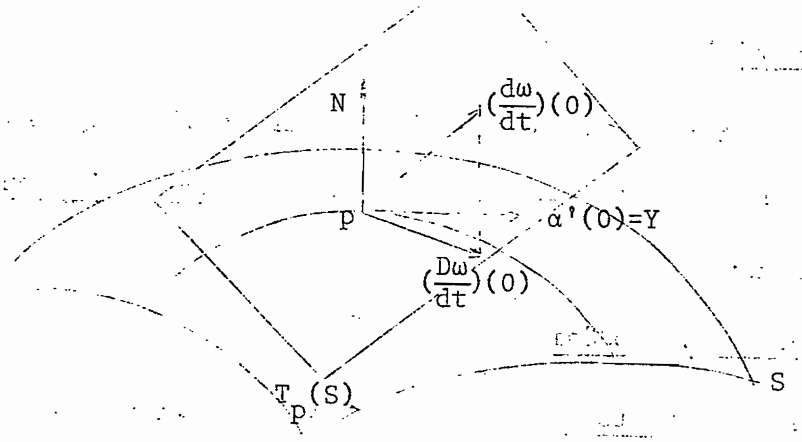
Un campo vectorial ω es diferenciable en p si para alguna parametrización $g(u,v)$ en p las componentes a,b de $\omega = a\, g_v + b\, g_v$ en la base $\{g_u, g_v\}$ son funciones diferenciable en p.

El campo ω es diferenciable en U si es diferenciable en cada $p \in U$.

Definición:

Sea ω un campo vectorial diferenciable en un conjunto abierto $U \subset S$ y $p \in U$.

Sea $Y \in T_p(S)$; consideremos la curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ con $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = Y$. Sea $\omega(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la restricción del campo vectorial ω a la curva α. El vector obtenido por la proyección normal de $(\frac{d\omega}{dt})(0)$ sobre el plano $T_p(S)$ es llamado derivada covariante en p del campo vectorial relativo al vector Y. Se denota por $(\frac{D\omega}{dt})(0)$ ó por $(D_Y \omega)(p)$.



Veamos que el concepto de derivada covariante es intrínseco y no depende de la curva α.

Para una parametrización $g(u,v)$, sea $g(u(t),v(t))$ la expresión de la curva α y sea

$$\omega(t) = a(u(t),v(t)).g_u + b(u(t),v(t)).g_v =$$

$$= a(t).g_u + b(t).g_v$$

la expresión de $\omega(t)$ en la parametrización $g(u,v)$.

Entonces

$$\frac{d\omega}{dt} = a'g_u + a(g_{uu}\, u'+g_{vu}\, v') + b'g_v + b(g_{vv}\, v'+g_{uv}v')$$

Como $\frac{D\omega}{dt}$ es la componente de $\frac{d\omega}{dt}$ en el plano tangente, usando los símbolos de Christoffel (ejercicio, parág. 5, cap. 3) queda

$$\frac{d\omega}{dt} = a'g_u + a(\Gamma^1_{11}g_u+\Gamma^2_{11}g_v+L_1N)u' +$$

$$+ a(\Gamma^1_{12}g_u+\Gamma^2_{12}g_v+L_3N)v' + b(\Gamma^1_{12}g_u+\Gamma^2_{12}g_v+L_3N)u'$$

$$+ b(\Gamma^1_{22}g_u+\Gamma^2_{22}g_v+L_3N)v' + b'g_v$$

$$= (a'+a\Gamma^1_{11}u'+a\Gamma^1_{12}v'+b\Gamma^1_{12}u'+b\Gamma^1_{22}v')g_u +$$

$$+ (b'+a\Gamma^2_{11}u'+a\Gamma^2_{12}v'+b\Gamma^2_{12}u'+b\Gamma^2_{22}v')g_v +$$

$$+ (aL_1u'+aL_3v'+bL_3u'+bL_3v')N$$

de donde,

$$\frac{D\omega}{dt} = (a'+\Gamma^1_{11}\ au'+\Gamma^1_{12}\ av'+\Gamma^1_{12}\ bu'+\Gamma^1_{22}\ bv')g_u +$$
$$+ (b'+\Gamma^2_{11}\ au'+\Gamma^2_{12}\ av'+\Gamma^2_{12}\ bu'+\Gamma^2_{22}\ bv')g_v$$

Está expresión muestra claramente, que $\frac{D\omega}{dt}$ depende de $(u',v') = Y$ y no de la curva α. También nos dice que la definición de derivada covariante puede ser extendida a un campo vectorial que esté definido solamente sobre una curva.

<u>Definición:</u>

Una curva parametrizada $\alpha:[0,\ell] \to S$ es la restricción a $[0,\ell]$ de aplicación diferenciable de $(0-\varepsilon,\ell+\varepsilon)$ en S, $\varepsilon > 0$. Si $\alpha(0) = p$ y $\alpha(\ell) = q$, decimos que α une p con q. Diremos que α es regular si $\alpha'(t) \neq 0$ para $t \in [0,\ell]$.

Llamaremos $I = [0,\ell]$.

<u>Definición:</u>

Un campo vectorial ω a lo largo de la curva parametrizada $\alpha:I \to S$ se dice <u>paralelo</u> si $\frac{D\omega}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

<u>Proposición:</u>

Sean ω y v campos vectoriales paralelos a lo largo de $\alpha:I \to S$. Entonces $\langle \omega(t),v(t)\rangle$ es constante. En particular, $|\omega(t)|$ y $|v(t)|$ son constantes y el ángulo entre $v(t)$ y $\omega(t)$ es constante.

<u>Demostración:</u>

Si el campo vectorial ω es paralelo entonces $\frac{d\omega}{dt}$ es normal al plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$, es decir, $\langle v(t),\omega'(t)\rangle = 0$. Analogamente para $v'(t)$, luego,

$$\frac{d}{dt}\langle v(t),\omega(t)\rangle = \langle v'(t),\omega(t)\rangle + \langle v(t),\omega'(t)\rangle = 0$$

entonces $\langle v(t),\omega(t)\rangle$ es constante.

Aceptemos, por poco tiempo, la existencia de un único campo vectorial paralelo a lo largo de una curva y continuemos.

Definición:

Sea $\alpha: I \to S$ una curva parametrizada y $\omega_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$.

Sea ω el campo vectorial paralelo a lo largo de α con $\omega(t_0) = \omega_0$. El vector $\omega(t_1)$, $t_1 \in I$, es llamado el transporte paralelo de ω_0 a lo largo de α en t_1.

Ejercicio:

1. Probar que si S es un plano, un campo paralelo a lo largo de una curva parametrizada se reduce a un campo constante a lo largo de la curva.

Definición:

Una curva parametrizada no constante $\gamma: I \to S$ se dice geodésica en $t \in I$ si el campo de sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ es paralelo a lo largo de γ en t, es decir, si $\frac{D\gamma'(t)}{dt} \equiv 0$.

Ejemplos:

1. Los grandes círculos de la esfera S^2 son geodésicas. Llamemos C a los grandes círculos, éstos se obtienen por intersección de la esfera por un plano que pasa por el centro 0 de dicha esfera. El campo vectorial tangente de C es un campo paralelo sobre S^2. Como la derivada de tal campo es normal a S^2, su derivada covariante es cero.

2. Los círculos obtenidos por intersección de un cilindro con planos perpendiculares al eje del cilindro son geodésicas.

Antes de continuar obteniendo información acerca de la derivada covariante consideramos que es útil volver a enfocar este concepto desde otro punto de vista y con una notación que nos será de utilidad al encarar variedades riemannianas.

2. Conexión usual de R^n

La noción clásica de un vector X en R^3 como un segmento de recta dirigido, nos permite escribirlo $X = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ y si x,y,z es un sistema coordenado alrededor de un punto también podemos escribir

$$X = a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + c\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

y si f es una función real, diferenciable sobre R^3, la derivada de f en la dirección X es

$$X.f = X.\nabla f = a\,\frac{\partial f}{\partial x} + b\,\frac{\partial f}{\partial y} + c\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

Observemos que no hemos pedido que X sea unitario y cuando a,b,c son funciones diferenciables sobre R^3 se tiene que X es un campo diferenciable y que Xf es una función real diferenciable sobre R^3 dada por

$$(Xf)(p) = X_p f = a(p)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p + b(p)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p + c(p)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p .$$

Todo lo anterior nos permite escribir $X = (a,b,c)$, es decir, dar X dando las funciones coeficientes respecto de un campo base global

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \text{ de } R^3.$$

Ahora definiremos la derivada de un campo vectorial Y en la dirección X.

Sea X un vector en $p \in R^n$ y sea $Y = (y_1,\ldots,y_n)$ un campo diferenciable en un entorno de p, es decir, cada y_i es una función real diferenciable sobre el dominio de Y.

Definición:

La <u>derivada covariante de Y en la dirección X</u> es el vector

$$D_X Y = (X_p.y_1, \ldots, X_p.y_n)$$

como vector en p.

Si X e Y son campos diferenciables con el mismo dominio A, entonces $D_X Y$ es un campo diferenciable con dominio A.

<u>Ejemplo</u>:

Tomemos en R^3, $X = (a,b,c)$ e $Y = (xy^2-4z,\ y^2-x,\ x+z^3)$. Entonces

$$D_X Y = [\, X_p y_1,\ X_p y_2,\ X_p y_3] =$$
$$= [\, X_p \nabla y_1,\ X_p \nabla y_2,\ X_p \nabla y_3] =$$
$$= [\, X.(y_2^2 2xy_1 4),\ X.(-1,2y_1 0),\ X.(1,0,3z^2)]$$
$$= (ay^2+2xyb+4c,\ -a2yb,\ a+3z^2c)$$

donde a,b,c son funciones (tal vez, constantes).

Las propiedades de D son las siguientes:

si X y W son vectores en $p \in R^n$, Z e Y campos diferenciable en un entorno de p, y f una función real diferenciable en un entorno de p, se cumple:

1) $D_X(Y+Z) = D_X Y + D_X Z$

2) $D_{X+W}(Y) = D_X Y + D_W Y$

3) $D_{f(p)X} Y = f(p).D_X Y$

4) $D_X(fY) = (Xf)Y_p + f(p)D_X Y$

Todas ellas se prueban directamente aplicando la definición.

Mediante el operador D podemos definir campos de vectores paralelos a lo largo de una curva y geodésicas.

Definición:

Sea σ una curva diferenciable en R^n con tangente T y sea Y un campo de vectores de R^n que es diferenciable sobre σ. El campo Y es paralelo a lo largo de σ si $D_T Y \equiv 0$ a lo largo de σ.

La curva es uno geodésica si $D_T T \equiv 0$, es decir, si su tangente T es paralela a lo largo de σ.

Por último, a modo de ejemplo, veamos que si

$$\sigma(t) = (a_1(t),\dots,a_n(t)) \text{ y } Y_{\sigma(t)} = (y_1(t),\dots,y_n(t))$$

cada $y_i(t)$ es una función constante de t, o sea, si Y es un campo de vectores constante sobre σ.

La curva σ es una geodésica si y sólo si $D_T T = (\frac{d^2a_1}{dt^2},\dots,\frac{d^2a_n}{dt^2}) = 0$.

Esto implica $a_i(t) = c_i t + d_i$ o sea σ es la parametrización lineal de una recta.

La diferenciación covariante es también llamada conexión en R^n.

3. Existencia y unicidad del transporte paralelo

Para un campo diferenciable de vectores unitarios ω a lo largo de una parametrizada α, se sabe que

$$\langle \omega,\omega\rangle = 1 \quad \text{entonces} \quad 2\langle \frac{d\omega}{dt},\omega\rangle = 0,$$

es decir, $\frac{d\omega}{dt}$ es normal a $\omega(t)$, por lo tanto:

Definición:

En las condiciones anteriores se verifica

$$\frac{D\omega}{dt} = \lambda(N \wedge \lambda(t)).$$

El número real $\lambda = \lambda(t)$, notado por $[\frac{D\omega}{dt}]$ es llamado valor algebraico de la derivada covariante de ω en t.

Observamos que el signo de $[\frac{D\omega}{dt}]$ depende de la ofientación de S y que

$$\langle \frac{d\omega}{dt}, N \wedge \omega(t) \rangle = [\frac{D\omega}{dt}]$$

Análogamente a la noción de curvatura de curvas planas tenemos

Definición:

Sea $\alpha(s)$ la parametrización de una curva regular orientada, donde s es el parámetro longitud de arco, dada sobre una superficie orientada S, en un entorno de p de S.

El valor algebraico de la derivada covariante $[\frac{D\,\alpha'(s)}{ds}] = k_g$ de $\alpha'(s)$ en p es llamado curvatura geodésica de α en p.

Trivialmente, las geodésicas tienen curvatura geodésica cero.

Veamos, ahora, como obtener una expresión del valor algebraico de una derivada covariante.

Sean V y W dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de una curva parametrizada $\alpha: I \to S$ con $|v(t)| = |\omega(t)| = 1$, $t \in I$.

Queremos definir una función diferenciable $\varphi: I \to R$ tal que $\varphi(t)$ para $t \in I$ exprese el ángulo entre V(t) y W(t) compatible con la orientación de S. Para esto definimos un campo vectorial diferenciable $\overline{v}$ a lo largo de α definido por la condición de que $\{V(t), \overline{V}(t)\}$ es una base ortonormal positiva para cada t. Entonces $\omega(t)$ puede ser expresado

$$\omega(t) = a(t)\, v(t) + b(t)\, \overline{v}(t)$$

donde a y b son funciones diferenciables y es fácil verificar que $a^2 + b^2 = 1$.

Lema 1:

Sean a y b funciones diferenciable en I con $a^2 + b^2 = 1$ y φ_0 tal que $a(t_0) = \cos\varphi_0$, $b(t_0) = \operatorname{sen}\varphi_0$ para $t_0 \in I$. Entonces la función diferenciable

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (ab'-a'b)dt$$

es tal que $\cos\varphi(t) = a(t)$, $\operatorname{sen}\varphi(t) = b(t)$ para $t \in I$ (y $\varphi(t_0) = \varphi_0$).

Demostración:

Es suficiente probar que

$$(a-\cos\varphi(t))^2 + (b-\operatorname{sen}\varphi(t))^2 = 2 - 2(a\cos\varphi(t)+b\operatorname{sen}\varphi(t))$$

es identicamente nula ó que

$$A = a\cos\varphi(t) + b\operatorname{sen}\varphi(t) = 1.$$

De $a^2 + b^2 = 1$ tenemos que $aa' = -bb'$ y queda

$$A' = a'.\cos\varphi(t)-a\operatorname{sen}\varphi(t).\varphi'+b'.\operatorname{sen}\varphi(t)+b\cos\varphi(t).\varphi'.$$

De la definición de $\varphi(t)$ tenemos que

$$\varphi'(t) = ab'-a'b,$$

reemplazando se obtiene

$$A' = a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi - \varphi'(a\operatorname{sen}\varphi - b\cos\varphi) =$$

$$= a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi\ a^2b'\operatorname{sen}\varphi + b\,aa'\operatorname{sen}\varphi - a'b^2\cos\varphi +$$

$$+ abb'\cos\varphi =$$

$$= a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi - a^2b'\operatorname{sen}\varphi - b^2b'\operatorname{sen}\varphi +$$

$$+ a^2a'\cos\varphi - b^2a'\cos\varphi =$$

$$= a'\cos\varphi + b'\operatorname{sen}\varphi - (a^2+b^2)(b'\operatorname{sen}\varphi)-(a^2+b^2)a'\cos\varphi =$$

$$= a'\cos\varphi(1-(a^2+b^2)) + b'\operatorname{sen}\varphi(a-(a^2+b^2)) = 0.$$

Por lo tanto, $A(t)$ es constante. Como $A(t_0) = 1$ tenemos que $A(t) = 1$ para todo $t \in I$.

Ahora relacionemos la derivada covariante de dos campos vectoriales unitarios a lo largo de una curva con la variación del ángulo que ellos forman.

Lema 2:

Sean v y ω dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de la curva $\alpha:I \to S$ con $|\omega(t)| = |v(t)| = 1$ para $t \in I$, entonces

$$\left[\frac{D\omega}{dt}\right] - \left[\frac{Dv}{dt}\right] = \frac{d\varphi}{dt}$$

donde φ es una determinación diferenciable del ángulo entre $v(t)$ y $\omega(t)$ (Lema 1).

Demostración:

Tomamos los vectores $\overline{v} = N \wedge v$ y $\overline{\omega} = N \wedge \omega$. Podemos tomar

$$\omega = \cos\varphi . v + \operatorname{sen}\varphi . \overline{v} \qquad (*)$$

$$\overline{\omega} = N \wedge \omega = \cos\varphi . N \wedge v + \operatorname{sen}\varphi . N \wedge \overline{v}$$

$$= \cos\varphi . \overline{v} - \operatorname{sen}\varphi . v$$

Diferenciando $(*)$ queda

$$\omega' = \cos\varphi . v' - v . \operatorname{sen}\varphi . \varphi' + \cos\varphi . \overline{v}\varphi' + \operatorname{sen}\varphi . \overline{v}'$$

Como $\langle v,\overline{v}\rangle = \langle v,v'\rangle = 0$ tenemos

$$\langle \omega',\overline{\omega}\rangle = \cos^2\varphi \langle v',\overline{v}\rangle + \operatorname{sen}^2\varphi . \varphi' + \cos^2\varphi . \varphi' -$$

$$- \operatorname{sen}^2\varphi \langle \overline{v}',v\rangle = \varphi' + \cos^2\varphi \langle v',\overline{v}\rangle -$$

$$- \operatorname{sen}^2\varphi \langle \overline{v}',v\rangle$$

También de $\langle v,\overline{v}\rangle = 0$ queda

$$\langle v', \overline{v}\rangle = -\langle v, \overline{v}'\rangle \quad \text{y}$$

$$\langle \omega', \overline{\omega}\rangle = \varphi' + (\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)\langle v', \overline{v}\rangle = \varphi' + \langle v', \overline{v}\rangle$$

Ahora

$$\left[\frac{D\omega}{dt}\right] = \langle \omega', \overline{\omega}\rangle = \varphi' + \langle v', \overline{v}\rangle = \frac{d\varphi}{dt} + \left[\frac{Dv}{dt}\right]$$

Observar que en el caso de una geodésica se verifica

$k_g(s) = \left[\frac{D\alpha'(s)}{ds}\right] = \frac{d\varphi}{ds}$ donde s indica longitud de arco.

Veamos ahora, la relación entre el valor algebraico de la derivada covariante y los coeficientes de la primera forma fundamental.

Proposición:

Sea $f(u,v)$ una parametrización ortogonal ($F = 0$) de un entorno una superficie orientada S y $\omega(t)$ un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de la curva $f(u(t),v(t))$. Entonces

$$\left[\frac{D\omega}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u\frac{dv}{dt} - E_v\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

donde $\varphi(t)$ es el ángulo desde f_u a $\omega(t)$ en la dada orientación.

Demostración:

Sean $e_1 = \frac{f_u}{\sqrt{E}}$, $e_2 = \frac{f_v}{\sqrt{G}}$ vectores unitarios tangentes a las curvas coordenadas.

Sabemos que $e_1 \wedge e_2 = N$, donde N es la orientación de S. Por el Lema 2 tenemos

$$\left[\frac{D\omega}{dt}\right] = \left[\frac{De_1}{dt}\right] + \frac{d\varphi}{dt}$$

donde $e_1(t) = e_1(u(t),v(t))$ es el campo e_1 restringido a la curva $f(u(t),v(t))$.

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = \left\langle \frac{de_1}{dt}, N \wedge e_1\right\rangle = \left\langle \frac{de_1}{dt}, e_2\right\rangle =$$

$$= \langle (e_1)_u, e_2\rangle \frac{du}{dt} + \langle (e_1)_v, e_2\rangle \frac{dv}{dt}$$

Tenemos que

$$(e_1)_{uu} = \left(\frac{f_u}{\sqrt{E}}\right)_u = \frac{f_{uu}\sqrt{E}}{E} - \frac{f_u E_u}{2\,E^{3/2}}$$

entonces

$$\langle (e_1)_u, e_2\rangle = \langle \frac{f_{uu}}{\sqrt{E}}, \frac{f_v}{\sqrt{G}}\rangle - \langle \frac{f_u E_u}{2\,E^{3/2}}, \frac{f_u}{\sqrt{G}}\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E\,G}} \langle f_{uu}, f_v\rangle$$

Como $F = 0$, $\langle f_u, f_v\rangle_u = \langle f_{uu}, f_v\rangle + \langle f_u, f_{uv}\rangle = 0$

Recordemos que $E = \langle f_u, f_u\rangle$, luego

$E_v = \langle f_{vu}, f_u\rangle + \langle f_u, f_{vu}\rangle = 2\langle f_{vu}, f_v\rangle$ y ya que

$$\langle f_{vu}, f_u\rangle = \langle f_{uu}, f_v\rangle \qquad \text{queda}$$

$$\langle f_{uu}, f_v\rangle = -\frac{1}{2} E_v$$

Analogamente, $\langle f_{vu}, f_v\rangle = \frac{1}{2} G_u$, entonces

$$\langle (e_1)_u, e_2\rangle = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \quad y \quad \langle (e_1)_v, e_2\rangle = \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}$$

Reemplazando

$$\left[\frac{De_1}{dt}\right] = -\frac{1}{2}\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\frac{dv}{dt} \qquad y$$

$$\left[\frac{D\omega}{dt}\right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{G_u \cdot \frac{dv}{dt} - E_v\frac{du}{dt}\right\} + \frac{d\varphi}{dt}$$

Las dos proposiciones siguientes son aplicaciones del resultado recién obtenido.

<u>Proposición:</u>

Sea $\alpha: I \to S$ una curva parametrizada en S y sea $\omega_0 \in T_{\alpha(t_0)}(S)$, $t_0 \in I$.

Entonces existe un único campo vectorial paralelo $\omega(t)$ a lo largo de $\alpha(t)$ con $\omega(t_0) = \omega_0$.

Demostración

Primeramente supondremos que la curva α está contenida en un entorno coordenada de una parametrización ortogonal $f(u,v)$. Entonces, con la notación de la proposición anterior, el campo ω será paralelo si $[\frac{D\omega}{dt}] = 0$ ó equivalentemente si

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\{G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt}\} = B(t).$$

Llamando φ_0 a una determinación del ángulo orientado desde f_u a ω_0, queda determinada por

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} B(t)dt$$

lo que asegura la existencia y unicidad de tal campo ω en este caso.

Si α no está contenido en un entorno coordenado, por la compacidad de I y, por lo tanto, de $\alpha(I)$ la dividimos en un número finito de partes, cada una contenida en un entorno coordenado.

En cada entorno vale el primer caso; aplicando la unicidad, ya probada, a cada intersección no vacía de esos entornos, se extiende el resultado a este caso.

Veamos la fórmula de Liouville.

Proposición:

Sea S una superficie regular orientada y en ella, C una curva regular orientada parametrizada por $\alpha(s)$, s longitud de arco, en un entorno de $p \in S$. Sea $f(u,v)$ una parametrización ortogonal de S en p y $\varphi(s)$ el ángulo que f_u hace con $\alpha'(s)$ en la dada orientación. Entonces

$$_g = (k_g)_1 \cos\varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen}\varphi + \frac{d\varphi}{ds}$$

donde $(k_g)_1$, $(k_g)_2$ son las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas v = constante, y u = constante, respectivamente.

Demostración:

Fué demostrado que

$$\frac{D\omega}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt}\} + \frac{d\varphi}{dt} ,$$

donde ω era el campo de vectores tangente unitario diferenciable a lo largo de la curva $f(u(t),v(t))$.

Tomamos, ahora, $\omega = \alpha'(s)$ y queda

$$k_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds}\} + \frac{d\varphi}{ds}$$

Tomando la curva coordenada $u = u(s)$ y $v =$ constante, obtenemos $\frac{dv}{ds} = 0$ y por estar parametrizada por longitud de arco se verifica $\langle f_u \frac{du}{ds}, f_u \frac{du}{ds}\rangle = 1$, de donde $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{E}}$. Por lo tanto,

$$(k_g)_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{-\frac{E_v}{\sqrt{E}}\} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}}$$

y analogamente

$$(k_g)_2 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{\frac{G_u}{\sqrt{G}}\} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} .$$

Reemplazando estas relaciones en la expresión k_g queda

$$k_g = (k_g)_1 \sqrt{E}\frac{du}{ds} + (k_g)_2 \sqrt{G}\frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds}$$

Como $\alpha'(s) = f_u \frac{du}{ds} + f_v \frac{dv}{ds}$, obtenemos

$$\langle \alpha'(s), \frac{f_u}{\sqrt{E}}\rangle = \frac{\langle f_u,f_u\rangle}{\sqrt{E}} \frac{du}{ds} = \sqrt{E}\frac{du}{ds} = \cos\varphi ,$$

analogamente, $G\frac{dv}{ds} = \operatorname{sen}\varphi$ y finalmente

$$k_g = (k_g)_1 \cos\varphi + (k_g)_2 \operatorname{sen}\varphi + \frac{d\varphi}{ds} .$$

4. Ecuación diferencial de las geodésicas de S.

Sea $\gamma : I \to S$ una curva parametrizada de S y sea $f(u,v)$ una parametrización de S en un entorno V de $\gamma(t_0)$, con $t_0 \in I$. Sea

$J \subset I$ un intervalo abierto conteniendo t_0 y tal que $\gamma(J) \subset V$.

Sea $f(u(t),v(t))$ para $t \in J$, la parametrización $\gamma:J \to S$. Entonces el campo vectorial tangente $\gamma'(t)$, para $t \in J$, está dad- por

$$\omega = u'(t).f_u + v'(t).f_v$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\omega}{dt} = u''.f_u+u'.f_{uu}.u'+u'.f_{uv}.v'+v''.f_v+v'.f_{uv}.u'+v'.f_{vv}.v'$$

y

$$\frac{D\omega}{dt} = (u''+\Gamma^1_{11}(u')^2+\Gamma^1_{12}u'v'+\Gamma^1_{12}v'u'+\Gamma^1_{22}(v')^2)f_u +$$

$$+ (v''+\Gamma^2_{11}(u')^2+\Gamma^2_{12}u'v'+\Gamma^2_{12}v'u'+\Gamma^2_{22}(v')^2)f_v$$

La condición de paralelismo sobre ω es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales

$$(*)\begin{cases} u''+\Gamma^1_{11}(u')^2+2\Gamma^1_{12}u'.v'+\Gamma^1_{22}(v')^2 = 0 \\ v''+\Gamma^2_{11}(u')^2+2\Gamma^2_{12}u'.v'+\Gamma^2_{22}(v')^2 = 0 \end{cases}$$

es decir, podemos enunciar:

$\gamma:I \to S$ es una geodésica si y sólo si el sistema $(*)$ se satisface para cada intervalo $J \subset I$ tal que $\gamma(J)$ está contenido en un entorno coordenado.

Ejercicios:

1. Un campo vectorial tangente a un gran círculo (meridiano) de S^2 es un campo paralelo sobre S^2. Probar que su derivada covariante es cero.

2. Por la esfera, por cada punto y cada dirección tangente elegida, pasa una única geodésica.

3. Probar que las líneas rectas son las geodésicas del plano.

4. Sea S una superficie regular orientada y $\alpha:I \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco. En el punto $p = \alpha(s)$ consideramos tres vectores

unitarios (triedro de Darboux) $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s) =$ el vector normal a S en p, $V(s) = N(s) \wedge T(s)$.

a) Probar que si

$$\frac{dT}{ds} = aV+bN,\ \frac{dV}{ds} = -aT+cN,\ \frac{dN}{ds} = -bT-cN$$

donde a,b,c son funciones de s,

$c = -\langle \frac{dN}{ds}, V \rangle$, b es la curvatura normal de $\alpha(s)$ en S en p y a es la curvatura geodésica de $\alpha(t)$ en S.

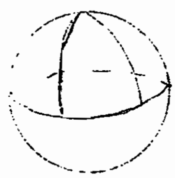
5. Teorema de Gauss-Bonnet

Este es uno de los teoremas más importantes en la geometría diferencial de superficies.

La primera versión fué presentada por Gauss y trata de triángulos geodésicos sobre superficies. Es decir, si un triángulo de lados geodésicos T tiene $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ como ángulos interiores, el exceso sobre Π de su suma es igual a la integral de la curvatura de Gauss K sobre el triángulo T. Escribimos

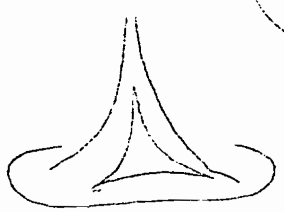
$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \Pi = \iint_T K \, d\sigma.$$

Si $K \equiv 0$, en el plano euclídeo, la $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i = \Pi$.



Si $K \equiv 1$, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \Pi > 0$.

Si $K \equiv -1$, $\sum_{i=1}^{3} \varphi_i - \Pi < 0$.



La extensión de este resultado a una región acotada por una curva simple no-geodésica se debió a O. Bonnet.

La demostración involucra ciertos conceptos y resultados topológicos que no serán demostrados.

Definición:

Sea $\alpha:[0,\ell] \to S$ una aplicación continua y S una superficie regular. Decimos que α es una curva parametrizada simple, cerrada, regular por partes si

1) $\alpha(0) = \alpha(\ell)$

2) Si $t_1 \neq t_2$, $t_1, t_2 \in [0,\ell] \Rightarrow \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$

3) Existe una subdivisión $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t_{k+1} = \ell$ del intervalo $[0,\ell]$ tal que α es diferenciable regular en cada $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,\ldots,k$.

Los puntos $\alpha(t_i)$ se llaman vértices de α.

Ejercicio:

La condición de regularidad asegura la existencia de los límites a derecha y a izquierda para cada vértice, es decir,

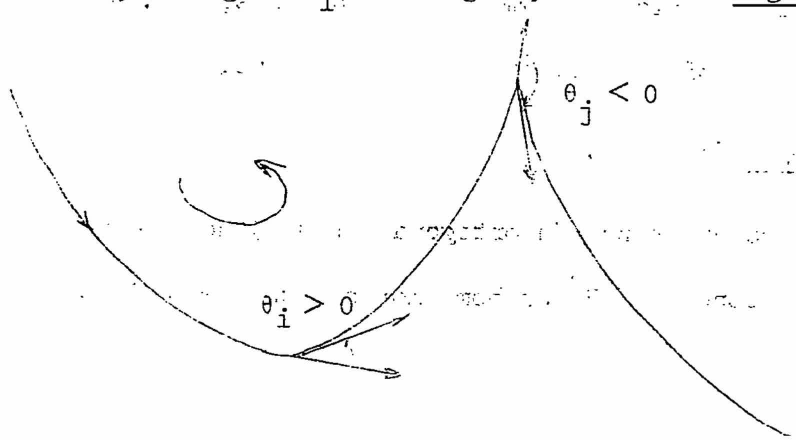
$$\lim_{\substack{t\to t_i \\ t<t_i}} \alpha'(t) = \alpha'(t_i-0) \neq 0$$

$$\lim_{\substack{t\to t_i \\ t>t_i}} \alpha'(t) = \alpha'(t_i+0) \neq 0.$$

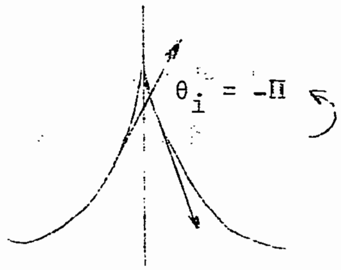
Supongamos que S es una superficie orientada y $|\theta_i|$ con $0 < |\theta_i| \leq \Pi$, es la menor determinación entre $\alpha'(t_i-0)$ y $\alpha'(t_i+0)$.

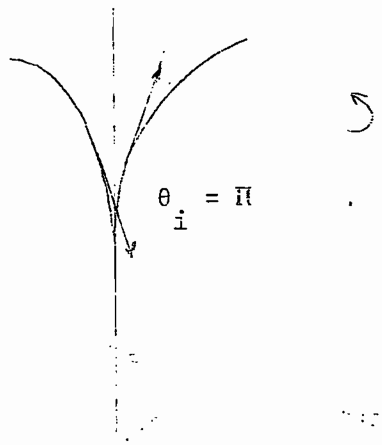
Si $|\theta_i| \neq \Pi$, damos a θ_i el signo del determinante $(\alpha'(t_i-0), \alpha'(t_i-0), N)$.

Ahora, el ángulo θ_i (con signo), es llamado ángulo externo.



Para un punto vértice (cuspidal)





Teorema (de turning tangents)

Sea $f:U \subset R^2 \to S$ una parametrización de S compatible con su orientación. (Supondremos que U es homeomorfo a un disco abierto del plano). Sea $\alpha:[0,\ell] \to f(U) \subset S$ una curva parametrizada, simple, cerrada, regular por partes y θ_i los ángulos externos, $i = 0,\ldots,k$;

Sea $\varphi_i:[t_i,t_{i+1}] \to R$ una función diferenciable, la cual mide para cada $t \in [t_i,t_{i+1}]$ el ángulo positivo desde f_u a $\alpha'(t)$ (lema 2).

Entonces, se verifica

$$\sum_{i=0}^{k} (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = \pm 2\Pi$$

donde el signo depende de la orientación de α.

El teorema dice que la variación total de los ángulos de los vectores tangentes a α con una dada dirección más los "saltos" es los vértices es igual a 2Π.

La demostración se debe a H. Hopf y puede hallarse en H. Hopf, Compositio Mathematica, 2, (1935). 50-62.

También en Studies in Global geometry and analysis, vol. 4, página 16, S.S.Chern nos ofrece una versión en el plano.

Teorema de Gauss-Bonnet (local)

Sea $f:U \to S$ una parametrización ortogonal $(F = 0)$ de una superficie S orientada, donde $U \subset R^2$ es homeomorfo a un disco abierto y f es compatible con la orientación de S. Sea $\mathcal{R} \subset f(U)$ $(\ast)$ una región simple de S y sea $\alpha: I \to S$ tal que $\alpha(I) = \partial\mathcal{R}$ (borde de $\mathcal{R}$). Supongamos que α es positivamente orientada, parametrizada por longitud de arco s y $\alpha(s_0),\ldots,\alpha(s_k)$, $\theta_0,\ldots,\theta_k$, vértices y ángulos externos de α, respectivamente. Entonces

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \iint_{\mathcal{R}} K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\Pi$$

donde k_g es la curvatura geodésica de los arcos regulares de α y K es la curvatura de Gauss de S.

Observación:

La condición $(\ast)$ tiene por objeto aliviar la demostración.

Demostración:

Sea $u = u(s)$, $v = v(s)$ la expresión de α en la parametrización f. Por una proposición anterior tenemos

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\{G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds}\} + \frac{d\varphi_i}{ds}$$

donde las funciones diferenciables $\varphi_i(s)$ miden el ángulo positivo desde f_u a $\alpha'(s)$ en $[s_i,s_{i+1}]$.

Integrando ambos miembros y sumando se obtiene

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds}\right)ds + $$

$$+ \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds$$

Recordemos que el teorema de Gauss-Green dice que en el plano u,v, si $P(u,v)$ y $Q(u,v)$ son funciones diferenciables en una región simple $A \subset R^2$ y el borde de A está dado por $u = u(s)$ y $v = v(s)$, entonces

$$\sum \int_{s_i}^{s_{i+1}} (P \frac{du}{ds} + Q \frac{dv}{ds}) ds = \sum \iint_A (\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}) du\, dv$$

Aplicándolo a la expresión anterior, queda

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \{(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}})_u = (\frac{E_v}{2\sqrt{EG}})_v\} du\, dv +$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dds}$$

De la definición de curvatura de Gauss y su relación con los símbolos de Christoffel se tiene

$$K = \frac{eg-f^2}{Eg-F^2} = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \{\frac{\partial}{\partial v} (\frac{E_v - F_u}{\sqrt{Eg-F^2}}) - \frac{\partial}{\partial u} (\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG-F^2}})\}$$

En nuestro caso, la parametrización es ortogonal y se cumple

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \{(\frac{E_v}{\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{\sqrt{EG}})_u\}$$

y por lo tanto

$$\iint_{f^{-1}(R)} \{(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}})_v + (\frac{G_u}{2\sqrt{EG}})_u\} du\, dv = - \iint_{f^{-1}(R)} K\sqrt{EG}\, du\, dv$$

$$= - \iint_{f^{-1}(R)} K.\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = -\iint_R K\, d\sigma$$

según la definición de área.

Por otro lado, por el teorema de "turning tangents", se tiene que

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i) = \pm 2\Pi - \sum_{i=0}^{k} \theta_i$$

Reuniendo los resultados obtenidos, ya que la curva fue orientada positivamente, se tiene

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s)ds + \iint_R K\, d\sigma + \sum_{i=0}^{k} \theta_i = 2\Pi.$$

La versión global de este resultado depende de nociones topológicas como triangulación y característica de Euler-Poincaré de una triangulación y sus propiedades. La inclusión de estos conceptos excede la intensión y posibilidades de este curso.

CAPITULO 5

VARIEDADES DIFERENCIABLES EN R^n

1. Definiciones. Ejemplos

La noción de variedades diferenciables es necesaria para extender los métodos de cálculo diferencial a espacios más generales que R^n.

Definición:

Sea M un conjunto. Un n-par coordenado (ó carta local) sobre M es un par (U,ϕ) formado por un subconjunto U de M y ϕ es una aplicación 1 a 1 de U sobre un conjunto abierto de R^n.

Un n-par coordenado (U,ϕ) está C^r-relacionado con otro par (V,θ) si las aplicaciones $\phi\circ\theta^{-1}$ y $\theta\circ\phi^{-1}$ son C^r en todo lugar donde estén definidas.

Un C^r n-subatlas sobre M es una colección de n-pares coordenados (U_h, ϕ_h) cada una de las cuales está C^r-relacionado con todo otro miembro de la colección, y la unión de los conjuntos U_h es M.

Una tal colección maximal A se llama un C^r n-atlas.

Finalmente, una variedad C^r, n dimensional es un conjunto M con un C^r n-atlas.

Ejemplos:

1. $M = R^n$, (R^n,ϕ) con ϕ = identidad.
2. $M = S^2$, (U_h,ϕ_h) = (casquetes, proyección estereográfica)
3. M = GL(n,R) = grupo de transformaciones R-lineales n-singulares de R^n.

M puede ser aplicado inyectivamente sobre un conjunto abierto de R^{n^2} y luego usar la identidad. Veámoslo.

Si (a_{ij}) es una matriz que representa un elemento de M, entonces escribimos la n^2-upla.

$$(a_{11},\ldots,a_{1n},a_{21},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{n1},\ldots,a_{nn}).$$

El conjunto imagen de esta aplicación es abierto ya que es la imagen inversa de un conjunto abierto por la función determinante, que es continua.

4. $M = P^n(R)$, el espacio proyectivo real.

Indicaremos por $P^n(R)$ al conjunto de las rectas de R^{n+1} que pasan por el origen $0 = (0,\ldots,0) \in R^{n+1}$. Es decir, $P^n(R)$ es el conjunto de las direcciones de R^{n+1}.

Daremos a $P^n(R)$ un atlas diferenciable. Con este fin observemos qu $P^n(R)$ es el espacio cociente de $R^{n+1}-\{0\}$ por la relación de equivalencia:

$$(x_1,\ldots,x_{n+1}) \sim (\lambda x_1,\ldots,\lambda x_{n+1}),\ \lambda \in R,\ \lambda \neq 0$$

Indicaremos por $[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ los puntos de $P^n(R)$.

Vemos que si $x_i \neq 0$ entonces

$$[x_1,\ldots,x_{n+1}] = [\frac{x_1}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},1,\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_{n+1}}{x_i}]$$

Tomamos en $P^n(R)$ subconjuntos $V_1,\ldots,V_{n+1}$ dados por

$$V_i = \{[x_1,\ldots,x_{n+1}];\ x_i \neq 0\} \quad \text{para } i = 1,\ldots,n+1$$

y aplicaciones ϕ_i dadas por

$$\phi_i : R^n \to V_i,\ \phi_i(y_1,\ldots,y_n) = [y_1,\ldots,y_{i-1},1,y_{i+1},\ldots,y_n].$$

Geométricamente, V_i es el conjunto de las rectas de R^{n+1} que pasan por el origen y no pertenecen al hiperplano $x_i = 0$.

Veamos que

$$\{V_i,\phi_i^{-1}\} \quad \text{con} \quad i = 1,\ldots,n+1$$

es un atlas diferenciable de $P^n(R)$.

Es trivial verificar que $\bigcup_{i=1}^{n+1}(V_i) = P^n(R)$ y que ϕ_i^{-1} es 1 a 1.

Además, $\phi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ es un abierto de R^n y supongamos que $i > j$, entonces

$$\phi_j^{-1} o \phi_i(y_1,\ldots,y_n) = \phi_j^{-1}[y_1,\ldots,y_{i-1},1,y_{i+1},\ldots,y_n] =$$

$$= \phi_j^{-1}[\frac{y_1}{y_j},\ldots,\frac{y_{j-1}}{y_j},1,\frac{y_{j+1}}{y_j},\ldots,\frac{y_{i-1}}{y_j},\frac{1}{y_j},\frac{y_{i+1}}{y_j},\ldots,\frac{y_n}{y_j}]$$

$$= (\frac{y_1}{y_j},\ldots,\frac{y_n}{y_j})$$

y análogamente si $i < j$. Es decir, $\phi_j^{-1} o \phi_i$ es diferenciable.

Ejercicios:

1. Sean (M,A) y (N,B) variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Entonces $M\times N$ es una variedad diferenciable (llamada variedad producto) de dimensión $m+n$ con atlas dado por $\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta);\ \varphi_\alpha\times\psi_\beta : U_\alpha\times V_\beta \to R^m\times R^n,\ (U_\alpha,\varphi_\alpha)\in A,\ (V_\beta,\psi_\beta)\in B\}$.

2. Sean las C^1 variedades unidimensionales con atlas y subatlas (R,x), (R,x^3), respectivamente, donde x indica la aplicación identidad. Mostrar que son diferentes.

3. Probar que S^n tiene estructura de variedad diferenciable usando las proyecciones estereográficas desde los polos.

2. Partición de la unidad

Para expresarnos con mayor generalidad necesitamos definiciones de algunos conceptos topológicos.

Una topología es una familia $\mathcal{T}$ de conjuntos que satisface las dos condiciones siguientes:

1. La intersección de dos miembros cualesquiera de $\mathcal{T}$ es un miembro de $\mathcal{T}$.

2. La unión de los miembros de cualquier subfamilia de $\mathcal{T}$ es miembro de $\mathcal{T}$.

Así, el conjunto $X = \bigcup_{U \in \mathcal{T}} U$ es miembro de $\mathcal{T}$.

Los miembros de la topología $\mathcal{T}$ se llaman abiertos.

El par $(X,\mathcal{T})$ es un espacio topológico.

También a X se lo llamará de ese modo cuando se sobreentienda la topología.

Los cerrados de X serán los conjuntos complementos de abiertos respecto de X.

Se llamará clausura de un conjunto $A \subseteq X$, y se notará $\overline{A}$, al menor cerrado que contiene a A.

Un conjunto U de un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ es un entorno de un punto x si y sólo si U contiene un conjunto abierto al cual x pertenece. Como todo conjunto abierto es entorno de cada uno de sus puntos, cada entorno de un punto contiene un entorno abierto de ese punto.

El sistema de entornos de un punto es la familia de todos los entornos de ese punto.

Una subfamilia $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$ si y sólo si cada miembro de $\mathcal{T}$ es unión de miembros de $\mathcal{B}$.

Un espacio cuya topología tiene alguna base numerable se dice que satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Es frecuente definir variedad diferenciable como un espacio topológico, localmente compacto, con base numerable, de dimensión n, Hausdorff (dos puntos distintos tienen entornos disjuntos) junto con un atlas de clase C^r.

Una colección $\{A_\alpha\}$ de subconjuntos de M es localmente finita si para cualquier $m \in M$ existe un entorno W_m de m tal que $W_m \cap A_\alpha \neq \phi$ sólo para un número finito de α.

Una partición de la unidad de M es una colección $\{\phi_i, i \in I\}$ de funciones diferenciables sobre M tal que:

a) La colección de soportes $\{\text{sop}\ \phi_i, i \in I\}$ es localmente finita.

b) $\sum_{i\in I} \phi_i(p) = 1$ para todo $p \in M$ y $\phi_i(p) \geqslant 0$ para todo $p \in M$ e $i \in I$.

Con objeto de demostrar la existencia de una partición de la unidad necesitamos previamente un par de lemas.

Lema 1:

Sea X un espacio topológico, localmente compacto (cada punto tiene al menos un entorno compacto), Hausdorff, que satisface el segundo axioma de numerabilidad. Entonces X es paracompacto (cada cubrimiento por abiertos tiene un refinamiento numerable, localmente finito de abiertos con clausura compacta).

Demostración:

En primer lugar probaremos que existe una sucesión $\{G_i\}$ $i = 1,2,\ldots,$ de conjuntos abiertos tal que

$$(1) \quad \begin{cases} \overline{G}_i \text{ es compacto} \\ \overline{G}_i \subset G_{i+1} \\ X = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i \end{cases}$$

Sea $\{U_i\}$ $i = 1,2,\ldots,$ una base numerable de la topología de X donde U_i son abiertos con clausura compacta. Esta base se obtiene de una arbitraria, seleccionando una subcolección con tal propiedad.

El hecho de que X sea Hausdorff y localmente compacto implica que la subcolección es también una base.

Ahora, tomemos $G_1 = U_1$.

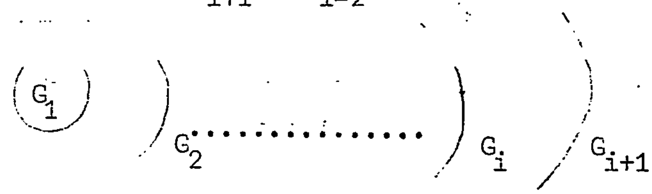
Supongamos que $G_k = U_1 \cup \ldots \cup U_{j_k}$; sea j_{k+1} el menor entero positivo mayor que j_k tal que

$\overline{G}_k \subset \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$ y definimos $G_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{j_{k+1}} U_i$.

Esto define (inductivamente) la sucesión $\{G_k\}$ satisfaciendo (1).

Sea, ahora, $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ un cubrimiento por abiertos arbitrario.

El conjunto $\overline{G}_i - G_{i-1}$ es compacto, por ser cerrado en un compacto, y está contenido en el abierto $G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}$



Vemos que

$\{U_\alpha \cap (G_{i+1} - \overline{G}_{i-2}), \alpha \in A\}$ es un subcubrimiento abierto de $\overline{G}_i - G_{i-1}$, $i \geq 3$.

Tomamos un subcubrimiento finito de ese conjunto y un subcubrimiento finito de $\{U_\alpha \cap G_3, \alpha \in A\}$ que cubre $\overline{G}_2$.

Es fácil ver que este subcubrimiento es numerable y tiene clausura compacta.

Ahora sabemos que las variedades diferenciables son paracompactas.

<u>Lema 2:</u>

Sea $C(r) = \{a \in R^n / |a_i| < r$, para todo $i\}$ (cubo abierto alrededor del origen de lado 2r). Existe una función φ, diferenciable no-negativa sobre R^n que vale 1 en $\overline{C(1)}$ y se anula en el complemento de $C(2)$.

<u>Demostración:</u>

Tomemos la función no-negativa y diferenciable

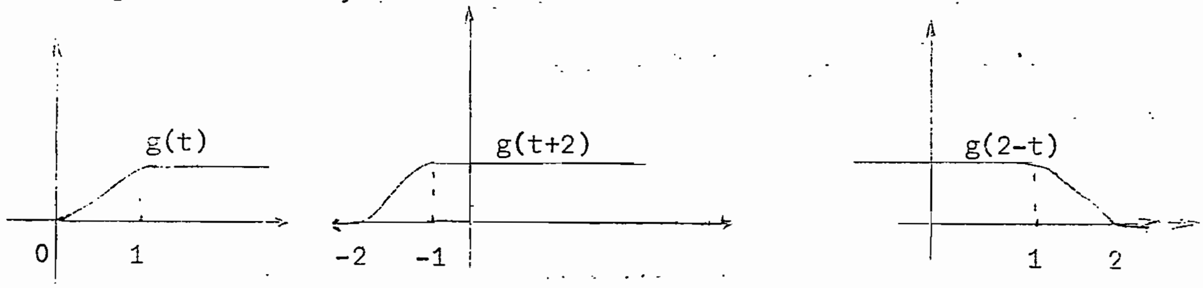
$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

Ahora,

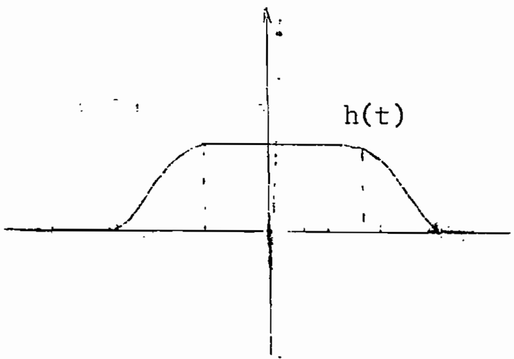
$g(t) = \dfrac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}$ es diferenciable, no-negativa y vale

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Aproximadamente,



Sea $h(t) = g(t+2)g(2-t)$



Si llamamos r_i a la i-ésima proyección tenemos que la función φ buscada es el producto

$$\varphi = (h \circ r_1), \ldots, (h \circ r_n)$$

Teorema de existencia de partición de la unidad

Sea M una variedad diferenciable y $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ un cubrimiento abierto de M. Entonces existe una partición numerable de la unidad $\{\varphi_i\}$ subordinada al cubrimiento de $\{U_\alpha\}$ (es decir, para cada i existe un α tal que sop $\varphi_i \subset U_\alpha$) con sop φ_i compacto para cada i.

Si no se pide que el sop φ_i sea compacto entonces existe una partición de la unidad $\{\varphi_\alpha\}$ subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}$, (es decir, sop $\varphi_\alpha \subset U_\alpha$) con a lo sumo una cantidad numerable de funciones φ_α no identicamente nulas.

Demostración:

Tomamos la sucesión $\{G_i\}$ que cubre M del lema 1 y "agregamos" $G_0 = \phi$.

Para cada $p \in M$, sea i_p el mayor entero tal que $p \in M - \overline{G_{i_p}}$.

Elegimos α_p tal que $p \in U_{\alpha_p}$ y (V,τ) un par coordenado tal que

$$V \subset U_{\alpha_p} \cap \{G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}}\}$$

$$\tau(V) \supset \overline{C_{(2)}}$$

Definimos

$$\psi_p = \begin{cases} \psi o \tau & \text{sobre } V \\ 0 & \text{sobre } V. \end{cases}$$

donde φ es la función del lema 2.

Es fácil ver que ψ_p es diferenciable sobre M y toma el valor 1 en algún entorno W_p de p.

La función ψ_p tiene soporte compacto contenido en

$$V \subset U_{\alpha_p} \cap \{G_{i_p+2} - \overline{G_{i_p}}\}$$

pues si $\varphi o \tau(x) \neq 0$ entonces $\tau(x) \in C(2)$ entonces $x \in \tau^{-1}(C(2))$.

Así,

$$\text{sop } \psi_p = \overline{\{x/\varphi o \tau(x) \neq 0\}} \subset \overline{\tau^{-1}(C(2))}$$

Afirmación: $\overline{\tau^{-1}(C(2))} = \tau^{-1}\overline{(C(2))}$

Recordemos que la clausura de un conjunto $A = \overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

Ahora bien, $\overline{C(2)}$ es compacto en R^n, por lo tanto, es cerrado, $\tau^{-1}\overline{(C(2))}$ es cerrado entonces $\overline{\tau^{-1}(C(2))} \subset \tau^{-1}\overline{(C(2))}$.

Por otro lado, $\tau(\overline{\tau^{-1}(C(2))}$ es compacto en R^n, por lo tanto, es cerrado y contiene a $C(2)$, de donde $\overline{C(2)}$ es el menor cerrado que contiene a $C(2)$ y $\overline{C(2)} \subset \tau(\overline{\tau^{-1}(C(2))})$.

Para cada $i \geqslant 1$ elegimos un conjunto finito de puntos de M cuyos correspondientes W_p cubran $\overline{G_i} - G_{i-1}$.

Podemos, ahora, ordenar las funciones ψ_p según una sucesión ψ_j, $j = 1,2,\ldots$. El soporte de estas funciones forman una familia localmente finita de subconjuntos de M y por lo tanto, la función

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j$$

está bien definida, es diferenciable y $\psi_{(p)} > 0$ para todo $p \in M$.

Sea, ahora, $\varphi_i = \frac{\psi_i}{\psi}$ $i = 1,2,\ldots$; éstas funciones forman una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ pues $\operatorname{sop} \varphi_i \subset \operatorname{sop} \psi_i$. Además satisfacen que $\operatorname{sop} \varphi_i$ es compacto para cada i.

Si consideramos

$$\varphi_\alpha \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \operatorname{sop} \varphi_i \not\subset U_\alpha, \ \forall i \\ \sum \varphi_i & \text{si} \quad \operatorname{sop} \varphi_i \subset U_\alpha \end{cases}$$

entonces, $\{\varphi_\alpha\}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$ con, a lo sumo, una cantidad numerable de φ_α no identicamente nulas.

Corolario:

Sea G un abierto de M y A un cerrado en M con $A \subset G$. Entonces existe una función φ diferenciable, $\varphi : M \to R$ tal que

1) $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ para todo $p \in M$.

2) $\varphi(p) = 1$ si $p \in A$

3) $\operatorname{sop} \varphi \subset G$.

Demostración:

Existe una partición de la unidad (φ,ψ) subordinada al cubrimiento $\{G, M-A\}$ de M son $\operatorname{sop} \varphi \subset G$, $\operatorname{sop} \psi \subset M-A$. Como $\psi/_A \equiv 0$ entonces $\varphi/_A \equiv 1$ y φ es la función buscada.

3. Aplicaciones (diferenciables) entre variedades diferenciables

El atlas hace que las variedades diferenciables tengan, localmente, algunas de las propiedades de los espacios R^n. Veamos el caso de aplicaciones entre conjuntos abiertos de R^m y R^n.

Sean M y M' dos variedades diferenciables de clase C^r y dimensión n y m respectivamente.

Definición:

Una aplicación $\phi: M \to M'$ se dice de clase C^r si para todos los pares coordenados (U_α, ϕ_α) de M y los (U'_β, ϕ'_β) de M' tales que $\phi(U_\alpha) \subset U'_\beta$, se cumple que

$$\phi'_\beta \circ \phi \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha) \to \phi'_\alpha(\phi(U\ )) \qquad (1)$$

son de clase C^r.

Por lo tanto, diremos que $\phi: M \to M'$ es un difeomorfismo si las aplicaciones (1) lo son.

Esto implica que m = n, que las funciones son "al menos" C^1 y que el jacobiano $(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}) \neq 0$ donde y_i son las coordenadas locales de M' y x_i las de M.

4. Espacio vectorial tangente

Desearíamos extender a las variedades diferencialbes una noción de vector tangente. En las superficies de R^3, un vector tangente en un punto p de ella es el vector velocidad de una curva de la superficie que pasa por p.

Ahora necesitamos hallar una propiedad que sustituya la noción de valocidad.

Sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to R^n$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$.

Podemos escribir

$$\alpha(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t)), \quad t \in (-\varepsilon,\varepsilon), \ (x_1,\dots,x_n) \in R^n$$

$$\alpha'(0) = (x_1'(0),\dots,x_n'(0)) = v \in R^n.$$

Sea f una función diferenciable definida en un entorno de p. Restringiendo f a la curva α, escribimos la derivada direccional respecto del vector $v \in R^n$ como

$$\left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left.\frac{dx_i}{dt}\right|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)f$$

Por lo tanto, la derivada direccional según un vector $v \in R^n$ es un operador sobre funciones diferenciables que depende exclusivamente de v.

<u>Definición</u>:

Sea M una variedad diferenciable. Una aplicación diferenciable $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ es llamada una <u>curva(diferenciable) en M</u>.

Supongamos que $\alpha(0) = p \in M$ y llamemos $\mathcal{D}$ al conjunto de funciones de M diferenciables en p (a veces, para ser más explícitos diremos $\mathcal{D}(p)$).

El <u>vector tangente a la curva α</u> en t = 0 es una función $\alpha'(0):\mathcal{D} \to R$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\right|_{t=0} , \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Un <u>vector tangente</u> en p es un vector tangente en t = 0 de <u>alguna</u> curva $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = p$.

Supongamos que dim M = n y tomemos $g:U\subset R^n \to M$ una parametrización de $p = g(0)$, podemos escribir una función f y la curva α en esta parametrización por

$$f\circ g(q) = f(x_1,\dots,x_n), \quad g(q) = (x_1,\dots,x_n) \in U$$

y

$$g^{-1}\circ\alpha(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$$

respectivamente.

Por lo tanto, obtendremos

$$\alpha'(0).f = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f(x_1(t),\ldots,x_n(t))\Big|_{t=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} = (\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\,(\frac{\partial}{\partial x_i})_0\,)f.$$

Es decir, el vector $\alpha'(0)$ en términos de la parametrización g se expresa por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$$

Recordemos que $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ es el vector tangente en p a la curva coordenada

$$x_i \to g(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)$$

Debido a que la parametrización, la función y la curva son diferenciables, la definición es independiente de la parametrización elegida. Con la misma notación y haciendo abstracción de la curva α, es usual encontrar la siguiente

Definición:

Se llama vector tangente a M en p a toda aplicación $X:\mathcal{D} \to R$ tal que:

a) Es lineal, es decir

$$X(a.f+b.g) = aX(f) + bX(g), \quad a,b \in R, \quad f,g \in \mathcal{D}$$

b) Es una derivación,

$$X(f.g) = X(f).g + f.X(g), \qquad f,g \in \mathcal{D}.$$

Escribiremos, indistintamente, Xf ó X(f).

Si X,Y son vectores tangentes en p de M, definimos las siguientes operaciones

$$(X+Y)f = Xf + Yf$$

$$(\lambda X)f = \lambda(Xf) \qquad \lambda \in R$$

con lo que los vectores tangentes en $p \in M$ forman un espacio vectorial real que se llama espacio vectorial tangente a M en p y se nota T_p (a veces M_p ó $T_p(M)$).

Veremos, a continuación, que T_p tiene igual dimensión que la variedad M.

Lema :

Sea $x_1,\ldots,x_n$ un sistema coordenado alrededor de un punto m de una variedad diferenciable M, con dim M = n.

Supongamos que $x_i(m) = 0$ para todo i. Entonces para cada función $f \in \mathcal{D}(m)$ existen n funciones $f_i \in \mathcal{D}(m)$ con $f_i = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_m$ y $f = f(m) + \sum_{i=1}^{n} f_i . x_i$ en un entorno de m.

Demostración:

Sea (U,ϕ) un par coordenado tal que $m \in U$ y correspondiente a las coordenadas $x_1,\ldots,x_n$. Tomemos $F = f\circ\phi^{-1}$; siempre podemos considerar a F definido en un entorno alrededor del origen de R^n con $\phi(m) = 0$.

Entonces, sea $B = \{p \in R^n / \text{dist}(P,0) < r\}$ y sea $(a_1,\ldots,a_n) \in B$.

Ahora,

$$\begin{aligned} F(a_1,\ldots,a_n) &= F(a_1,\ldots,a_n) - F(a_1,\ldots,a_{n-1},0) + \\ &+ F(a_1,\ldots,a_{n-1},0) - F(a_1,\ldots,a_{n-2},0,0) + \ldots + \\ &+ F(a_1,0,\ldots,0) - F(0,\ldots,0) + F(0,\ldots,0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(a_1,\ldots,a_{i-1},ta_i,0,\ldots,0)\Big|_0^1 + F(0,\ldots,0) = \\ &= F(0,\ldots,0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 (\frac{\partial F}{\partial u_i})(a_1,\ldots,a_{i-1},ta_i,0,\ldots,0) . \\ &\quad . (\frac{\partial u_i}{\partial t})_{a_i}\, dt \end{aligned}$$

donde $\frac{\partial F}{\partial u_i}$ es la derivada parcial de F respecto de "su" i-ésima coordenada, u_i, ya que $x_i = u_i \circ \phi$; de otro modo expresado

$$F_i(a_1,\dots,a_n) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial u_i}(a_1,\dots,a_{i-1},ta_i,0,\dots,0)dt$$

recordando que $(\frac{\partial F}{\partial u_i})\phi(m) = \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial u_i}(\phi(m)) = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_i$, de donde $f_i = F_i \circ \phi$ y queda

$$f = f(m) + \sum (F_i \circ \phi).x_i = f(m) + \sum f_i.x_i.$$

Teorema:

Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y sea $x_1,\dots,x_n$ un sistema coordenado en un entorno de $m \in M$. Entonces, si $X \in T_m$, $X = \sum (X x_i)(\frac{\partial}{\partial x_i})_m$ y los vectores tangentes a las funciones coordenadas forma una base de T_m, el cual tiene dimensión n.

Demostración:

Tomemos X en T_m y $f \in \mathcal{D}(m)$. Si $x_i(m) \neq 0$, tomamos $y_i = x_i - x_i(m)$, ahora podemos aplicar el lema anterior a f con respecto del sistema de coordenadas $y_1,\dots,y_n$; observemos que $(\frac{\partial f}{\partial y_i})_m = (\frac{\partial f}{\partial x_i})_m$ y que si c es la aplicación constante, entonces

$$X(c) = c(X(1)) = c(1.X(1) + 1.X(1)) = 2c\, X(1) = 2X(c) \text{ y } X(c) = 0$$

Ahora,

$$Xf = X(f(m) + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X(y_i).f_i(m) + \sum_{i=1}^{n} y_i(m).X(f_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X(x_i).f_i(m) = \sum_{i=1}^{n} X(x_i)(\frac{\partial}{\partial x_i})_m (f)$$

Esto prueba lo afirmado, y si $Y = \sum a_i(\frac{\partial}{\partial x_i}) = 0$ entonces, aplicado a las funciones coordenadas queda

$Y \cdot x_i = a_i = 0,$

con lo que los vectores coordenados son base de T_m.

Si M es de clase C^r, con r finito, la definición no sirve. Una buena definición con esas características puede hallarse en el libro Variedades diferenciables de Noriega-Santaló. La dificultad proviene de que se deben tomar funciones C^r, es decir, $\mathcal{D}^r$ y no bastan las condiciones de linealidad y derivación para asegurar que el espacio vectorial de los vectores tangentes es de dimensión n.

Más aún, Walker y Newns, en el Journal London Mathematical Society, 1956, pag. 400-407, han demostrado que en tal caso el espacio vectorial tangente es de dimensión infinita.

Ejercicios:

1. Sean M y N variedades diferenciables. Si $A \subset M$ y $f:A \to N$ es diferenciable y (U,ϕ) es una carta sobre M, entonces $f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable sobre $\phi(A \cap U)$.
2. Para cualquier vector tangente X y cualquier constante k, $X(k) = 0$.
3. Si $f \in \mathcal{D}(p)$ es nula en un entorno U_p de p, entonces $X(f) = 0$. (Usar partición de la unidad).

5. Espacio tangente dual

Continuando con variedades diferenciables, tenemos en cada punto $p \in M$ el espacio vectorial tangente T_p de dimensión n.

Consideremos, ahora, el espacio dual T_p^* (también M_p^*) conjunto de las aplicaciones lineales $T_p \to R$.

Sus elementos se llaman covectores. Por lo tanto, los covectores aplican linealmente los vectores en los números reales.

Para buscar una base se sigue el método usual. La base dual de la $\{X_i\}$ de T_p está formada por los covectores ϕ^i definidos por

$$\phi^i(X_h) = \delta^i_h \qquad \text{(delta de Kronecker)}$$

Un covector será de la forma $\phi = \sum_{i=1}^{n} u_i\, \phi^i$ siendo u_i las componentes relativas y el resultado de aplicar ϕ al vector $X = \sum \lambda^h X_h$ es el número real

$$\phi(X) = \sum_{i,h=1}^{n} = 1\, \mu_i\, \lambda^h\, \phi^i(X_h) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, \lambda^i$$

También se lo llama producto escalar de X y ϕ.

Vemos que $\phi^i(X) = \lambda^i$. Por un cambio de coordenadas $x_i \to x'_i$ resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x'_j} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} \qquad \text{entonces}$$

$$Xf = \sum_i (X\, x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i \lambda^i \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x'_j} \cdot \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_j \left(\sum_i \lambda^i \frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right) \frac{\partial f}{\partial x'_j} \text{, es decir,}$$

$$\lambda'_j = \sum_i \lambda^i \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right)$$

Siendo $\phi(X)$ independiente del sistema de coordenadas debe ser

$$\phi(X) = \sum_h \mu'_h . \lambda'^h = \sum_i \mu_i\, \lambda_i = \sum_{h,i} \mu_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}\right) \lambda'^h,$$

debe ser

$$\mu'_h = \sum_i \mu_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_h}\right)$$

que son las fórmulas de transformación para las componentes de los covectores.

En el cálculo tensorial clásico, estas fórmulas se tomaban como definición del covector ó <u>vector covariante</u>.

Ejercicios:

1. Sean

$$w_1(x_1,x_2) = (x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$w_2(x_1,x_2) = (x_2^2+1)\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

para todo $(x_1,x_2) \in R^2$.

a) Probar que son linealmente independientes

b) Sea $w(x_1,x_2) = (x_1^2+x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1^2-x_2^2)\frac{\partial}{\partial x_2}$ sobre R^2. Hallar funciones b_1, b_2 tales que $w = b_1w_1 + b_2w_2$.

2. Sea $M\times N$ la variedad producto obtenida en un ejercicio anterior. Probar que si $(p,q) \in M\times N$, entonces $T_{(p,q)}(M\times N)$ es isomorfo a $T_p(M)\times T_q(N)$.

3. Sea $(U, x_1,\dots,x_n)$ una carta local sobre la variedad diferenciable M. Entonces $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ sobre U.

8. Diferencial de una función

Definición:

Sea $f \in \mathcal{D}_{(p)}$, el covector $(df)_p$ definido en p por la relación

$$(df)_p X = X_p f$$

se llama diferencial de f en el punto p.

Fijando un sistema local de coordenadas x_i que contenga a p, tomando $f = x_i$, se tiene

$$(dx_i)_p X = X_p(x_i) = \lambda^i = \phi^i(X)$$

entonces, cualquier covector ϕ puede escribirse $\phi = \sum_{i=1}^{n} u_i\,(dx_i)_p$, o sea, $\{(dx_i)_p\}$ forman una base de T_p^*.

Sea, ahora, $f:M \to N$ una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables. Sea $m \in M$.

La diferencial de f en m es la aplicación lineal $d\psi:M_m \to N_{\psi(m)}$ dada por, si $v \in M_m$ entonces $d\psi(v)$ es un vector tangente en $\psi(m)$ que sobre las funciones opera de la siguiente manera:

Sea g una función diferenciable en un entorno de $\psi(m)$, definimos

$$d\psi(v)(g) = v(g \circ \psi)$$

Es fácil comprobar que es una aplicación lineal.

Ejercicios

1. Sean M y N variedades diferenciables con M conexa y $f:M \to N$ diferenciable. Entonces para cada $p \in M$, $(df)_p \equiv 0$ si y sólo si f es la aplicación constante.

2. Sea $\psi:M \to N$ diferenciable, $m \in M$, y $d\psi:M_m \to N_{\psi(m)}$ la aplicación diferencial de ψ en m.

   La aplicación dual $\delta\psi:N^*_{\psi(m)} \to M^*_m$ se define por $\delta\psi(w)(v) = w(d\psi(v))$ para $w \in N^*_{\psi(m)}$ y $v \in M_m$.

   a) Escribir $(d\psi)_m$ y $(\delta\psi)_{\psi(m)}$ en forma matricial y compararlas.

   b) Si $(d\psi)_m$ es suryectiva entonces $(\delta\psi)_{\psi(m)}$ es inyectiva.

   c) Si $(d\psi)_m$ es inyectiva entonces $(\delta\psi)_{\psi(m)}$ es suryectiva.

7. Subvariedades

Definición:

Sea $\phi:M \to N$ una aplicación diferenciable. Se llama rango de ϕ en $x_0 \in M$ al rango de la matriz jacobiana de $g\circ\phi\circ f^{-1}$ en $f(x_0)$, donde (U,f) es una carta local diferenciable en x_0 y (V,g) una carta local diferenciable en $\phi(x_0)$ tal que $g\circ\phi\circ f^{-1}$ es diferenciable en $f(x_0)$.

Si el rango es el mismo (r) es todo punto, se dice que la aplicación es <u>regular</u>.

<u>Definición:</u>

a) Sean M y N variedades diferenciables de dimensión m y n respectivamente. Toda aplicación $\phi: M \to N$ regular de clase C^r y rango n (si $n \leq m$) se llama <u>inmersión</u>.

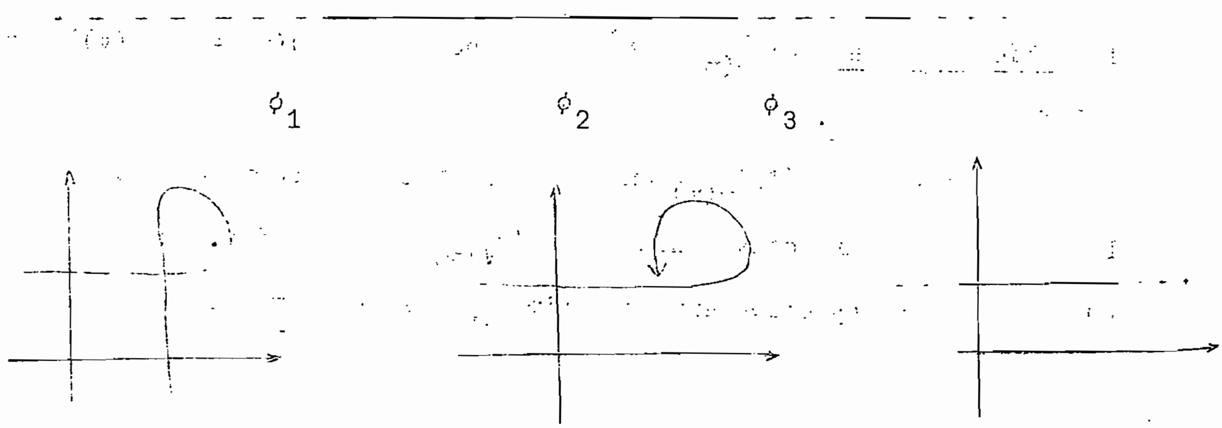
b) Si, además, la aplicación de a) es un homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$, donde $\phi(M)$ tiene la topología inducida por N, se dice que ϕ es una <u>sumersión</u> (imbedding).

<u>Definición:</u>

Si $\phi: M \to N$ es diferenciable y ϕ es una inmersión 1 a 1, se dice que (M, ϕ) es una <u>subvariedad</u> diferenciable de N.

<u>Ejemplos:</u>

$\phi: R \to R^2$



Inmersión
no subvariedad

Subvariedad
no-sumersión

Sumersión

Decimos que una aplicación diferenciable $\phi: M \to N$ es un <u>difeomorfismo</u> si ϕ es 1 a 1 y suryectiva y ϕ^{-1} es diferenciable.

Si ϕ es un difeomorfismo, entonces para $m \in M$ $(d\phi)_m$ es un isomorfismo ya que $(d\phi \circ d\phi^{-1})_{\phi(m)}$ y $(d\phi^{-1} \circ d\phi)_m$ son, ambas, la transformación identidad. El teorema de la función inversa nos da una recíproca local de este hecho.

Teorema de la función inversa

Sea $U \subset R^n$ un conjunto abierto y $f:U \to R^n$ una aplicación diferenciable. Si la matriz jacobiana $\left(\frac{\partial r_i of}{\partial r_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ es no-singular en $p \in U$, entonces existe un conjunto abierto V con $p \in V \subset U$ tal que $f|_V$ es 1 a 1 y sobreyectiva y $(f|_V)^{-1}$ es diferenciable.

Este resultado, muy conveniente en geometría, es de cálculo avanzado y el lector interesado podrá hallar una demostración en, por ejemplo, el libro de W.H.Fleming, Functions of several variables, Reading, Mass. Addison-Wesley, 1965.

De este importante teorema obtenemos los siguientes corolarios:

a) *Supongamos que $\phi:M \to N$ es diferenciable, $m \in M$ y que $d\phi:M_m \to N_{\phi(m)}$ es un isomorfismo. Entonces hay un entorno U de m tal que $\phi:U \to \phi(U)$ es un difeomorfismo (sobre $\phi(U)$ en N).*

Demostración:

Las variedades M y N son de igual dimensión n; tomando (A,α), (B,β) cartas locales alrededor de m y $\phi(m)$ respectivamente se tiene

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & N \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ R^n & & R^n \end{array} \qquad \text{con } d(\beta \circ \phi \circ \alpha^{-1}) \text{ no-singular}$$

Por el teorema de la función inversa, existe un entorno $V \subset \alpha(A)$ tal que $\beta \circ \phi \circ \alpha^{-1}|_V$ es un difeomorfismo, entonces, haciendo $U = \alpha^{-1}(V)$ se tiene que $\phi|_{\alpha^{-1}(V)}$ es difeomorfismo sobre $\phi(\alpha^{-1}(V))$.

b) *Si $\dim M = n$ y las funciones $y_1,\ldots,y_n$ son independientes en $m_0 \in M$ (es decir, los covectores $dy_1,\ldots,dy_n$ forman un conjunto independiente) entonces las funciones $y_1,\ldots,y_n$ forman un sistema de coordenadas en un entorno de m_0.*

Demostración:

Supongamos que los y_i están definidos en un entorno U de m_0. Sea $\psi:U \to R^n$ definida por $\psi(m) = (y_1(m),\ldots,y_n(m))$ para $m \in U$.

Esta aplicación es diferenciable. Si r_i es la proyección sobre la i-ésima componente, tenemos

$$\delta\psi(dr_i) = d(r_i \circ \psi) = dy_i \ , \quad \text{o sea,} \quad \delta\psi$$

aplica bases en bases y se obtiene que $(d\psi)_{m_0}$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa se tiene que ψ es un difeomorfismo sobre un entorno $V \subset U$ de m_0 y consecuentemente, las funciones $y_1,\ldots,y_n$ restringidas a V son un sistema coordenado.

c) *Si dim M = n e $y_1,\ldots,y_\ell$ con $\ell < n$ es un conjunto de funciones independientes en m, entonces ellas forman parte de un sistema coordenado en un entorno de m.*

d) *Sea $\psi:M \to N$ una aplicación diferenciable y supongamos que $d\psi:M_m \to N_{\psi(m)}$ es suryectiva. Sea $x_1,\ldots,x_\ell$ parte de un sistema coordenado sobre algún entorno de $\psi(m)$. Entonces $x_1\circ\psi,\ldots,x_\ell\circ\psi$ forma parte de un sistema coordenado de algún entorno de m.*

Demostración:

Por ser $(d\psi)_m$ suryectiva se tiene que $(\delta\psi)_{\psi(m)}$ es inyectiva y por ser $\delta\psi(dx_i) = d(x_i \circ \psi)$, estos diferenciales son independientes y por definición, las funciones $\{x_i\circ\psi,\ i = 1,\ldots,\ell\}$ son independientes. Ahora aplicamos el corolario anterior.

e) *Supongamos que $y_1,\ldots,y_k$ es un conjunto de funciones diferenciables cuyos diferenciales generan M^*_m, entonces un subconjunto de y_i forma un sistema coordenado sobre un entorno de m.*

Demostración:

Se elige un subconjunto cuyas formas diferenciales formen base de M_m^* y se aplica el corolario b).

f) *Sea $\psi:M \to N$ diferenciable y supongamos que $d\psi:M_m \to N_{\psi(m)}$ es inyectiva. Sea $x_1,\ldots,x_k$ parte de un sistema coordenado en un entorno de $\psi(m)$. Entonces, un subconjunto de las funciones $\{x_i \circ \psi\}$ forma un sistema coordenado sobre un entorno de m. En particular, ψ es 1 a 1 sobre un entorno de m.*

Demostración:

Ya hemos visto que $\delta\psi(dx_i) = d(x_i \circ \psi)$, y por ser $(d\psi)_m$ inyectiva se obtiene que $(\delta\psi)_{\psi(m)}$ es suryectiva y el conjunto $\{d(x_i \circ \psi),\ i = 1,\ldots,k\}$ genera M_m^*. Aplicamos el corolario anterior y se obtiene lo afirmado.

Teorema:

Sea $\psi:N \to M$ diferenciable, (P,φ) una subvariedad de M tal que $\psi(N) \subset \varphi(P)$. Ya que φ es inyectiva, existe una única aplicación ψ_0 de N en P tal que $\varphi \circ \psi_0 = \psi$.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi_0"'] & M \\ & P \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

a) Si ψ_0 es continua entonces es diferenciable.

b) Si φ es una sumersión entonces ψ_0 es continua.

Demostración:

La parte b) sigue de la definición de sumersión y la hipótesis.

Supongamos que ψ_0 es continua. Sea $p \in P$ y sea (V,γ) un sistema coordenado en un entorno de $\varphi(p)$ en M. Por el corolario f, del teorema de la función inversa, existe la proyección π de R^m ($\dim M = m$) tal que la aplicación

$\tau = \pi \circ \gamma \circ \varphi$ forma un sistema coordenado sobre un entorno U de p. Entonces,

$$\tau \circ \psi_0 \Big|_{\psi_0^{-1}(U)} = \pi \circ \gamma \circ \varphi \circ \psi_0 \Big|_{\psi_0^{-1}(U)} = \pi \circ \gamma \circ \psi \Big|_{\psi_0^{-1}(U)}$$

es decir, $\tau \circ \psi_0$ restringida al abierto $\psi_0^{-1}(U)$ es diferenciable.

Como P puede ser cubierto por pares coordenados (U,τ), tenemos que para cada $p \in P$, existe un par coordenado que verifica lo anterior y ψ_0 es diferenciable.

Ejercicios:

1. ¿Para qué valores de c es $\{(x,y) | x^2-y^2 = c\}$ subvariedad de R^2?

2. Sea $f:R^2 \to R$ definida por $f(x,y) = x^3+xy+y^3+1$. Para cada $p = (0,0)$, $p = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es $f^{-1}(f(p))$ una subvariedad inmersa en R^2?

3. Sea (U,φ) una carta local sobre la variedad diferenciable M, con funciones coordenadas $x_1,\ldots,x_d$. Sea c un entero tal que $0 \leq c \leq d$. Sea $a \in \varphi(U)$ y $r_i(a) = a_i$. Llamamos

$$S = \{q \in U | x_i(q) = r_i(a),\ i = c+1,\ldots,d\}.$$

Probar que S con el sistema coordenado $x_j\big|_S$ $j = 1,\ldots,c$ es una subvariedad de M.

4. El toro es la variedad $S^1 \times S^1$. Consideremos a S^1 como el círculo unitario en el plano complejo. Definimos la aplicación $\varphi:R \to S^1 \times S^1$ por $\varphi(t) = (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t})$ siendo α un número irracional. Probar que (R,φ) es una subvariedad (densa) de $S^1 \times S^1$.

8. Fibrado tangente y cotangente

Sea M una variedad diferenciable con $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ su atlas.

Sean

$$T(M) = \bigcup_{p\in M} T_p = \bigcup_{p\in M} M_p$$

y

$$T^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^* = \bigcup_{p\in M} M_p^*$$

Tenemos las proyecciones naturales

$$\pi : T(M) \to M \text{ dada por } \pi(v) = m \text{ si } v \in T_m$$

$$\pi^* : T^*(M) \to M \text{ dada por } \pi^*(\tau) = m \text{ si } \tau \in T_m^*$$

Sea (U,φ) una carta local, con $x_1,\ldots,x_n$ funciones coordenadas. Definimos $\tilde{\varphi}:\pi^{-1}(U) \to R^{2n}$ por

$$\tilde{\varphi}(v) = (x_1(\pi(v)),\ldots,x_n(\pi(v)),\ dx_1(v),\ldots,dx_n(v))$$

y

$$\tilde{\varphi}^* : \pi^{*-1} \to R^{2n} \text{ por}$$

$$\varphi^*(v) = (x_1(\pi^*(\tau)),\ldots,x_n(\pi^*(\tau)),\ \tau(\frac{\partial}{\partial x_1}),\ldots,\tau(\frac{\partial}{\partial x_n}))$$

para todo $v \in \pi^{-1}(U)$, $\tau \in \pi^{*-1}(U)$.

Se dejan como ejercicio las siguientes afirmaciones:

a) Si (U,φ) y (V,ψ) pertenecen al atlas de M, entonces $\tilde{\psi}\circ\tilde{\varphi}^{-1}$ es diferenciable.

b) $\tilde{\varphi}$ y $\tilde{\varphi}^*$ son 1 a 1 y aplican en conjuntos abiertos de R^{2n}.

c) La colección maximal

$$\tilde{F} = \{(\pi^{-1}(U),\tilde{\varphi}) \text{ con } (U,\varphi) \in \text{atlas de } M\}$$

forman un atlas de T(M).

Análogos resultados pueden enumerarse para $T^*(M)$.

Así contruídas estas variedades se llaman fibrado tangente y fibrado cotangente respectivamente.

CAPITULO 6

FORMAS DIFERENCIALES

Las formas diferenciales serán encaradas breve y sintéticamente a lo largo de este capítulo.

Una importante aplicación geométrica de este tema es integración en variedades; como éste tema está fuera de programa, esperamos se encuentren aquí los elementos necesarios para una posterior y personal lectura del lector interesado.

1. Tensores covariantes y tensores contravariantes

Sea M una variedad diferenciable n dimensional, $m \in M$ e, indistintamente, $T_m = M_m$ su espacio tangente en m, que hemos visto en el capítulo anterior, es un espacio vectorial de dimensión n.

Definición:

Un tensor p-covariante en un $(p > 0)$ es una aplicación p-lineal de

$$\underbrace{T_m \times \ldots \times T_m}_{\text{p-veces}} \to R$$

Para el conjunto de tensores p-covariantes se acostumbra usar la notación $T_m^{0,p}$ ó $T^{0,p}(M_m)$.

Cuando $p = 1$, también se nota T_m^* y se llama conjunto de tensores 1-covariantes.

Definición:

Un tensor p-contraviriante en m $(p > 0)$ es una aplicación p-lineal de $\underbrace{T_m^* \times \ldots \times T_m^*}_{\text{p-veces}} \to R.$

El conjunto de tensores p-contravariantes en m usualmente se nota $T_m^{p,0}$ ó $T^{p,0}(M_m)$. Se completa la definición con $T_m^{0,0} \equiv R$.

Finalmente, un tensor p-covariante, q-contravariante en m es una aplicación (p+q)-lineal de $\underbrace{T_m \times \ldots \times T_m}_{p} \times \underbrace{T_m^* \times \ldots \times T_m^*}_{q} \to R$

y se denota por $T_m^{q,p}$ ó $T^{q,p}(M_m)$ al conjunto de tales tensores.

Ejemplos:

1. Si q = 1, p = 0, es un vector
2. Si q = 0, p = 1 es un covector, a veces llamado 1-forma en m.

Definición:

Un tensor es simétrico si y sólo si su valor no cambia para toda posible permutación de sus argumentos. Así, sólo $T_m^{0,p}$ y $T_m^{p,0}$ pueden ser simétricos.

Definición:

Un tensor es casi-simétrico ó alternado si y sólo si, después de cualquier permutación, su valor es igual al producto de su valor antes de la permutación por el signo de ella.

Ejemplo:

Tomemos α un tensor 3-covariante en $m \in M$ y π una permutación en el conjunto {1,2,3}

$$\alpha^{\pi}(X_1, X_2, X_3) = \alpha(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, X_{\pi(3)}) =$$

$$= sg(\pi)\, \alpha(X_1, X_2, X_3) \quad , \quad X_i \in T_m.$$

Definición:

Una p-forma en m (ó una forma de grado p) $p > 0$, es un tensor p-covariante alternado en m. El conjunto de las p-formas se nota $F^p(T_m)$.

Decimos que una 0-forma en m es un número real, es decir, $F^0(T_m) = R$.

2. Campor de tensores diferenciales

Definición:

Un campo vectorial (de vectores) X sobre un conjunto A es una aplicación que asigna a cada punto $p \in A$, un vector $X_p \in T_p$.

Sean A y B abiertos y para cada función f a valores reales diferenciable sobre B, se dice que el campo de vectores X es diferenciable si la función $(Xf)_{(p)} = X_p(f)$ es diferenciable sobre $A \cap B$.

Si X, Y son campos de vectores diferenciables sobre A, definimos la derivada de Lie: $[X,Y]$ como

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y f) - Y_p(Xf)$$

También se lo nombra como corchete de Lie.

Es fácil verificar y queda como ejercicio que si X,Y son campos diferenciables y f y g funciones diferenciables entonces:

a) $[X,Y](f+g) = [X,Y]f + [X,Y]g$

b) $[X,Y](af) = a[X,Y]f \quad , \quad a \in R$

c) $[X,Y](f.g) = f.[X,Y](g) + g.[X,Y](f)$

d) $[X,Y]$ es diferenciable

e) $[X,Y] = -[Y,X]$

f) $[X_1+X_2,Y] = [X_1,Y] + [X_2,Y]$

$[X,Y_1 + Y_2] = [X,Y_1] + [X,Y_2]$

g) $[fX,gY] = f(X g)Y - g(Y f)X + fg[X,Y]$

h) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

(identidad de Jacobi)

Veamos la propiedad c)

$$[X,Y](f.g) = XY(f.g) - YX(f.g) =$$

$$= X(fY(g) + gY(f)) - Y(gX(f) + fX(g)) =$$

$$= (Xg)(Yf) + g.XY(f) + (Xf)(Yg) + fXY(g) - fYX(g) -$$

$$- (Yf)(Xg) - (Yg)(Xf) - gYXf = f.[X,Y](g) = g[X,Y](f)$$

El conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M con las operaciones de suma, producto por un escalar y el corchete de Lie como composición interna, constituyen un âlgebra, conocida como <u>algebra de Lie</u>.

Hemos visto que los vectores son un caso particular de tensores y con esta idea, generalizando, definimos campos de tensores.

<u>Definición</u>:

Un <u>campo de tensores</u> p-covariante sobre un conjunto U es una aplicación que a cada $m \in U$ asigna un tensor p-covariante en m.

Un tal campo de tensores p-covariante α sobre el conjunto U es <u>diferenciable</u> si y sólo si U es abierto y para todo conjunto de campos de vectores diferenciables $X_1, \ldots, X_p$ sobre U, la función

$$[\alpha(X_1, \ldots, X_p)](m) = \alpha_m(X_1(m), \ldots, X_p(m))$$

es diferenciable sobre U.

Un campo p-forma diferenciable, se dice una <u>p-forma diferenciable</u> ó <u>forma diferencial de grado p</u>.

3. Producto Tensorial. Producto exterior

El <u>producto tensorial</u> de tensores covariantes se define como sigue: Si $\alpha \in T_m^{0,p}$ y $\beta \in T_m^{0,q}$ entonces $\alpha \otimes \beta \in T_m^{0,p+q}$ dada por

$$(\alpha \otimes \beta)(X_1, \ldots, X_{p+q}) = \alpha(X_1, \ldots, X_p).\beta(X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$$

con $X_i \in T_m$ para $i = 1, \ldots, p+q$.

Satisface las propiedades:

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \otimes \beta = \alpha_1 \otimes \beta + \alpha_2 \otimes \beta$$

$$\alpha \otimes (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \otimes \beta_1 + \alpha \otimes \beta_2$$

$$(r.\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes (r.\beta) = r(\alpha \otimes \beta)$$

En general, el producto tensorial no es conmutativo, pero si es asociativo.

De manera análoga se define el producto tensorial de tensores contravariantes o mixtos.

Si α y β son formas de grado p y q respectivamente, el producto exterior ó de Grassman, $\alpha \wedge \beta$, se define por la (p+q)-forma dada por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{p!\, q!} \sum_{H} sg\, \pi . (\alpha \otimes \beta)^{\pi}$$

La suma se extiende sobre H que es el conjunto de todas las permutaciones del conjunto $\{1,2,\ldots,p+q\}$.

Se deja como ejercicio verificar las siguientes propiedades del producto exterior:

1) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{p.q} (\beta \wedge \alpha)$

2) $\alpha \wedge (\beta_1+\beta_2) = (\alpha \wedge \beta_1) + (\alpha \wedge \beta_2)$ β_i $i = 1,2$, el grado de las formas es el mismo.

3) asociatividad

Así, una 2-forma puede obtenerse como producto exterior de dos 1-formas. Tomando un sistema local de coordenadas $\{x_1,\ldots,x_p\}$, una base del conjunto de 2-formas diferenciables está dada por los productos exteriores $dx_i \wedge dx_j$ con $i \neq j$, e $i,j = 1,\ldots,p$.

Del mismo modo, una base del conjunto de las r-formas diferenciables, es el conjunto de los productos exteriores $dx_{i_1} \wedge\ldots\wedge dx_{i_r}$ con $i_t \neq i_s$ para $i_t,i_s = 1,\ldots,p$ y $r \leqslant p$.

Supongamos que $w = \sum_{i=1}^{n} w_i\, dx_i$ es una 1-forma en R^n y w resulta ser igual a $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

Podemos suponer que $f(0) = 0$ y aplicando que

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df}{dt} (tx)dt \qquad \text{se tiene}$$

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) . \frac{\partial (tx_i)}{t} . dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} w_i(tx).x_i.dt$$

Esto sugiere que para encontrar f, dada w, se debe considerar la integral

$$I\ w(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} w_i(tx).x_i.dt$$

la cual tiene sentido, sólo, si está definida en un conjunto abierto de R^n con la siguiente propiedad: si $x \in U$, el segmento de recta de 0 a x está en U.

Un conjunto abierto de R^n con esta propiedad se dice que tiene forma de estrella o que es estrellado.

4. Diferencial exterior

Del mismo modo en que definimos diferencial de una función, trataremos de generalizar este concepto a diferencial de una p-forma.

Sea $p \geqslant 0$, y $F^p(A)$ el conjunto de las p-formas diferenciales sobre A. Definimos la aplicación diferenciación exterior, d, como la aplicación

$$d: F^p(A) \to F^{p+1}(A)$$

si $f \in f^0(A)$ y X es un campo diferenciable sobre A entonces

$$df(X) = Xf$$

si $p > 1$, si w es una (p-1)-forma sobre A y $X_1,\ldots,X_p$ son campos diferenciables sobre A entonces

$$dw(X_1,\ldots,X_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1}\, w(X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p) +$$

$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\, w([X_i,X_j],\, X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_p)$$

$\hat{X}$ significa que X fue omitido.

Proposición:

El operador d tiene las siguientes propiedades:

1) $f(w+v) = dw + dv$

2) $d(w \wedge v) = (dw \wedge v) + (-1)^p (w \wedge dv)$ si $w \in F^p(A)$.

Esta propiedad es llamada antiderivación

3) $d^2 = d \circ d = 0$

Demostración:

Recordemos que si $x_1,\dots,x_p$ es un sistema coordenado sobre un conjunto abierto U, entonces, la $(p-1)$-forma w sobre U puede escribirse

$$w = \sum_{\substack{1 \leq i_j \leq p-1 \\ i_j < i_{j+1}}} a_{i_1 \dots i_{p-1}} \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

donde $a_{i_1 \dots i_{p-1}} = w(X_{i_1},\dots,X_{i_{p-1}})$.

También escribimos

$$dw = \sum_{\substack{1 \leq i_j \leq p-1 \\ i_j < i_{j+1}}} da_{i_1 \dots i_{p-1}} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}}$$

como se ve aplicando ambos miembros a $(X_{k_1},\dots,X_{k_p})$ para $k_1 < \dots < k_p$.

Con esto la propiedad 1) es facilmente verificable.

Por lo tanto, usando 1) para obtener 2) es suficiente mostrarla para formas del tipo

$$w = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p \quad \text{y} \quad v = g\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_2$$

con y_i, x_i funciones miembros de los sistemas coordenados.

Así

$$w \wedge v = f.g\, dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_p \wedge dy_1 \wedge\ldots\wedge dy_r$$

y

$$d(w \wedge v) = d(f.g)dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_p \wedge dy_1 \wedge\ldots\wedge dy_r$$

$$= [g(df)+f(dg)] \wedge (dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_p) \wedge (dy_1 \wedge\ldots\wedge dy_r) =$$

$$= df \wedge dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_p \wedge g dy_1 \wedge\ldots\wedge dy_r +$$

$$+ (-1)^p f dx_1 \wedge\ldots\wedge dx_p \wedge dg \wedge dy_1 \wedge\ldots\wedge dy_r =$$

$$= dw \wedge v + (-1)^p w \wedge dv.$$

Para la propiedad 3) veamos previamente que $d^2f = 0$ para $f \in F^0(A)$, diferenciable.

<u>Localmente</u>,

$$df = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)dx_j \qquad \text{y}$$

$$d^2f = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j}\right)dx_i \wedge dx_j =$$

$$= \sum_{i<j} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j . \partial x_i}\right]dx_i \wedge dx_j = 0.$$

Ahora, para cualquier forma w podemos representar localmente dw como una suma de productos de diferenciales de funciones f. Aplicando la propiedad 2), cada término de dw tendrá un factor $d^2f = 0$ y será $d^2w = 0$.

En muchas cuestiones de Geometría diferencial es importante el siguiente "<u>Lema de Cartan</u>".

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Si $w_1,\ldots,w_2$, $n \geq r$, son 1-formas linealmente independientes sobre M y existen otras $\phi_1,\ldots,\phi_r$ 1-formas tal que

(1) $\quad w_1 \wedge \phi_1 +\ldots+ w_r \wedge \phi_r = 0$

entonces existen funciones A_{ij} tales que

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, w_j \quad \text{con} \quad A_{ij} = A_{ji}$$

Demostración:

Como las formas w_i son linealmente independientes, existen otras 1-formas $\psi_{r+1},\ldots,\psi_n$ que junto con la w_i forman una base de $F^1(M)$

Por lo tanto, se podrá escribir

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{r} A_{ij}\, w_j + \sum_{h=r+1}^{n} B_{ih}\, \psi_h$$

Reemplazando en (1) queda

$$\sum_{j=1}^{r} A_{1j}\, w_1 \wedge w_j + \sum_{j=1}^{r} A_{2j}\, w_2 \wedge w_j + \ldots + \sum_{j=1}^{r} A_{rj}\, w_r \wedge w_j +$$

$$+ \sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq h\leq n}} B_{ih}\, w_i \wedge \psi_h = 0.$$

es decir,

$$\sum_{1\leq i<j\leq r} (A_{ij}-A_{ji}) w_i \wedge w_j + \sum_{\substack{1\leq i\leq r\\ r+1\leq h\leq n}} B_{ih}\, w_i \wedge \psi_h = 0.$$

Como las formas w_i, ψ_h son linealmente independientes entonces las 2-formas $w_i \wedge w_j$, $w_i \wedge \psi_h$ lo son, queda como ejercicio, y se deduce que

$$A_{ij} = A_{ji} \quad \text{y} \quad B_{ih} = 0.$$

Ejercicios:

1. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y M_m su espacio tangente en $m \in M$. Probar que $T^{(1,0)}(M_m)$ es isomorfo a M_m. Probar que $\dim T^{(p,q)}(M_m) = (p+q)n$.

2. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Sean (U,x) y (V,y) dos sistemas de coordenadas en M y $g\,dx^1 \wedge\ldots\wedge dx^n = f\,dy^1 \wedge\ldots\wedge dy^n$, entonces $g = f\circ J(y\circ x^{-1})$.

3. Sea $M = R^2-\{0\}$ y w la 1-forma

$$w = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

a) Probar que $dw = 0$

b) ¿Existe una función f diferenciable en $R^2-\{0\}$ tal que $df = w$? (no)

4. Sean $w_1 = e^{x_2}\,dx_1$, $w_2 = e^{x_3}\,dx_2$, $w_3 = e^{x_1}\,dx_3$ sobre R^3. Probar que son linealmente independientes sobre R^3.

CAPITULO 7

GEOMETRIA RIEMANNIANA

1. Métricas riemannianas

Una variedad riemanniana (o de Riemann) es una variedad diferenciable M, la cual tiene en cada punto $p \in M$, un producto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ definido sobre pares de vectores tangentes que satisface las siguientes propiedades:

Si $X, Y, Z \in M_p$

a) (simetría) $\quad \langle X,Y\rangle_p = \langle Y,X\rangle_p$

b) (bilineal) $\quad \langle X+Y,Z\rangle_p = \langle X,Z\rangle_p + \langle Y,Z\rangle_p$

$\langle X,Y+Z\rangle_p = \langle X,Y\rangle_p + \langle X,Z\rangle_p$

$\langle aX,Y\rangle_p = a\langle X,Y\rangle_p = \langle X,aY\rangle_p$

c) (definido positivo) $\langle X,X\rangle_p > 0 \quad$ para todo $X \neq 0$

d) (diferenciabilidad) Si X,Y son campos vectoriales diferenciables con dominio A, entonces $\langle X,Y\rangle_p = \langle X_p,Y_p\rangle_p$ es función diferenciable en A.

Es usual expresar la diferenciabilidad en términos de coordenadas locales de la siguiente manera:

si $f:U \subset R^n \to M$ es un sistema de coordenadas locales alrededor de p, con $f(x_1,\ldots,x_n) = q \in f(U)$ y $(\frac{\partial}{\partial x_i})_q\ f = df(0,\ldots,0,\frac{1}{i},0,\ldots,0)$ entonces

$$\langle(\frac{\partial}{\partial x_i})(q),\ (\frac{\partial}{\partial x_j})(q)\rangle_q = g_{ij}(x_1,\ldots,x_n)$$

es función diferenciable en U.

Es fácil verificar que ésta definición no depende del sistema de coordenadas elegido. Esas funciones g_{ij} determinan la métrica riemanniana.

Si la condición c) de la definición se reemplaza por c') si $\langle X,Y\rangle = 0$ para todo X implica $Y = 0$, estamos en presencia de una pseudométrica riemanniana.

En lo que sigue, cuando no sea confuso, obviaremos el punto de aplicación.

Desde otro punto de vista vemos que la métrica de Riemann es un tensor G de tipo (0,2) (o sea, 2-covariante) llamado tensor métrico. En términos de un sistema de coordenadas locales como el considerado anteriormente, será

$$G(p) = \sum_{i,j} g_{ij}(p)\, dx_i(p) \otimes dx_j(p)$$

donde $g_{ij}: U \to R$ son funciones diferenciables.

Para obtenerlas basta hacer

$$g_{ij}(p) = G(p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$$

La simetría se traduce en la igualdad $g_{ij} = g_{ji}$ y si $v = \sum_{i=1}^{n} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ se tiene

$$G(p)(v,v) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v^i\, v^j \qquad \text{por lo tanto,}$$

$$\sum_{i,j} g_{ij}(p) v^i\, v^j > 0.$$

Ejemplo:

Si M es una variedad diferenciable de dimensión 2, en términos de las coordenadas u,v, el tensor métrico $G(p) = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$ se expresa $G(p) = g_{11}\, du^2 + 2\, g_{12}\, du\, dv + g_{22}\, dv^2$ y usualmente se nota $g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$.

El tensor métrico nos permite definir longitudes, ángulos y distancias del mismo modo que lo hace la primera forma fundamental en superficies de R^3.

Definición:

Si $X \in M_m$, definimos longitud de $X = |X| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$.

Definición:

Si $X,Y \in M_m$, ambos no nulos, definimos ángulo θ entre X e Y por

$$\langle X,Y \rangle = |X|.|Y|. os\ \theta \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$$

Notar que esto es posible por la desigualdad de Schwartz.

También, si σ es una curva diferenciable en la variedad M, definida en un intervalo $[a,b]$, con campo vectorial tangente T, se tiene:

Definición:

La longitud de σ entre a y b está dada por

$$\text{long}\ \sigma\Big|_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle T(t),T(t)\rangle}dt$$

Al igual que al estudiar superficies en R^3, si llamamos

$s(t) = \text{long}\ \sigma\Big|_a^t$ queda

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \langle T,T \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{d(x_i o\sigma)}{dt} \frac{d(x_j o\sigma)}{dt}$$

y obtenemos la expresión clásica de la métrica de Riemann

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx_i \otimes dx_j$$

Ejemplos:

1. $M = R^n$, $ds^2 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2$ da al espacio euclideano de dimensión n, estructura de variedad de Riemann.

2. $M = \{(x,y) \in R^2 / y > 0\}$, $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ (métrica no-euclideana de Lobachewski).

Esta variedad riemanniana es conocida como el semiplano de Poincaré.

Definición:

Sean M y N variedades riemannianas Un difeomorfismo $f: M \to N$ se dice una isometría si para todo $p \in M$ y $X,Y \in M_p$ se verifica

$$\langle X,Y\rangle_p = \langle (df)_p X, (df)_p Y\rangle_{f(p)} \qquad (1)$$

Si (1) se satisface sólo para $p \in U$, con U abierto en M $(f:U \to f(U))$ entonces se dice que f es <u>isometría local</u>.

Ejemplo importante: <u>Grupos de Lie</u>.

Un <u>grupo de Lie</u> es un grupo G tal que sus elementos son, también, punto de una variedad diferenciable que satisface que la aplicación $G\times G \to G$ dada por $(x,y) \to x.y^{-1}$ es diferenciable.

La dimensión del grupo será la dimensión como variedad diferenciable.

A partir de la aplicación antes mencionada, están definidas otras dos aplicaciones importantes: <u>Traslaciones a izquierda</u>, L_x, y <u>a derecha</u>, R_x, dadas por

$$L_x : G \to G, \qquad L_x(y) = x.y$$

$$R_x : G \to G, \qquad R_x(y) = y.x.$$

Estas traslaciones son difeomorfismos pues $(L_x)^{-1} = L_{x^{-1}}$ ya que $(L_x)^{-1} o L_x(y) = x^{-1}.xy = y$ $\quad L_x o (L_x)^{-1}(y) = x.x^{-1}.y = y$; ahora, $L_{x^{-1}}(y) = x^{-1}.y$ es diferenciable pues x,y pertenecen a un grupo de Lie.

Diremos que una métrica riemanniana es <u>invariante a izquierda</u> si L_x es una isometría, es decir, si

$$\langle X,Y\rangle_y = \langle (dL_x)_y X, (dL_x)_y Y\rangle_{L_x(y)}$$

para todo $x,y \in G$, $X,Y \in G_y$.

Analogamente, se define <u>métrica riemanniana invariante a derecha</u>.

Si la métrica satisface ser invariante a derecha y a izquierda, se dirá <u>bi-invariante</u>.

Para introducir en G una métrica invariante a izquierda se toma un producto interno cualquiera $\langle\ ,\ \rangle_e$ en el G_e, con e elemento neutro de G, y se define

$$\langle X,Y\rangle_x = \langle (dL_{x^{-1}})_x X, (dL_{x^{-1}})_x Y\rangle_e$$

para todo $x \in G$, $X,Y \in G_x$; como $L_{x^{-1}}$ es un difeomorfismo, nos queda una métrica riemanniana invariante a izquierda.

Es decir, que dado un vector tangente X_e, en la identidad e, se puede obtener el campo de vectores

$$X_y = dL_y(X_e) \tag{2}$$

que es invariante a izquierda.

Reciprocamente, todo campo de vectores invariante a izquierda determina el vector X_e del campo correspondiente al elemento neutro.

Es decir, que los campos vectoriales de G invariantes a izquierda se pueden representar por los vectores del espacio vectorial tangente en la identidad e, o sea, G_e.

Si $X,Y \in G_e$, mediante (2) se puede extender a dos campos de vectores diferenciables sobre G y por lo tanto se puede calaular el corchete $[X_x, Y_x]$ que, para $x = e$ nos dará el vector tangente $[X,Y] \in G_e$.

De este modo, se define en G_e un <u>álgebra de Lie de G.</u>

A fin de obtener como actúa la diferencial de la traslación respecto del corchete veamos previamente la siguiente propiedad.

Si φ es un difeomorfismo entre las variedades M y N se puede considerar la siguiente igualdad como aplicación entre funciones en un entorno de $p \in M$ a valores reales

$$(d\varphi)X(f_o\varphi) = X(f_o\varphi).$$

Teniendo esto presente se obtiene

$$\begin{aligned} d\varphi[X,Y](f) &= [X,Y](fo\varphi) = XY(fo\varphi)-YX(fo\varphi) \\ &= X\, d\varphi(Y)(fo\varphi)-Y\, d\varphi\, X(fo\varphi) \\ &= d\varphi(X)\, d\varphi(Y)(fo\varphi)-d\varphi(Y)d\varphi(X)(fo\varphi) \\ &= [d\varphi(X),\, d\varphi(Y)](fo\varphi) \end{aligned}$$

Recordando que las traslaciones son difeomorfismos, tenemos que

$$dL_x[X,Y] = [(dL_x)X,(dL_x)Y] \quad \text{y}$$

por tanto, si X,Y son campos invariantes a izquierda, el corchete también lo es.

Así, con las operaciones de suma, producto por un escalar y el corchete, el conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda forma un álgebra que es, obviamente, isomorfa a la anterior y nos da otra interpretación del álgebra de Lie del grupo G.

La dimensión del álgebra de Lie es la dimensión de G_e, y por lo tanto, igual a la dimensión de G.

Proposición:

Una variedad diferenciable M (Hausdorff y base numerable) posee una métrica riemanniana.

Demostración:

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una partición de la unidad de M subordinada al cubrimiento de M por entornos coordenados $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Hemos visto que este cubrimiento es localmente finito.

Sobre cada entorno V_α podemos definir una métrica riemanniana $\langle\ ,\rangle^\alpha$: la inducida por el sistema de coordenadas.

Por lo tanto, tomando $X,Y \in M_p$ para $p \in M$ se verifica que

$$\langle X,Y\rangle_p = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha(p)\langle X,Y\rangle_p^\alpha$$

es métrica riemanniana en M.

Ejercicios:

1. Probar que la aplicación antípoda $A:S^n \to S^n$ dada por $A(p) = -p$ es una isometría de S^n.
2. Dar una métrica riemanniana al espacio proyectivo real $P^n(R)$ tal que la proyección natural $\Pi:S^n \to P^n(R)$ sea una isometría local (Sugerencia: usar ejercicio 1).

3. Demostrar que el grupo $GL(n,R)$ es grupo de Lie. Hallar su dimensión y su álgebra de Lie.
4. Idem 3) para el grupo ortogonal $O(n)$

2. Conexiones riemannianas

Indicaremos con $\mathcal{X}(M)$ al conjunto de campos de vectores diferenciables en M y con $\mathcal{D}(M)$ al conjunto de las funciones reales diferenciables definidas sobre M.

Definición:

Una conexión afín ∇ en una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M) \qquad \text{que notaremos}$$

$$\nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

tal que satisface, para $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$, $f,g \in \mathcal{D}(M)$,:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

Deseamos destacar que esta aplicación generaliza la que en la página 56 fue notada $D_X Y$

La parte 3) de la definición de conexión afín nos dice que es una noción local, por lo tanto, tomando un sistema de coordenadas $x_1,\dots,x_n$ alrededor de p y escribiendo

$$X = \sum_i x_i\, X_i, \qquad Y = \sum_j y_j\, X_j \qquad \text{donde} \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

queda

$$\nabla_X Y = \sum_i x_i\, \nabla_{X_i}\Big(\sum_j y_j\, X_j\Big) = \sum_{i,j} x_i\, y_j\, \nabla_{X_i} X_j +$$

$$+ \sum_{i,j} x_i\, X_i(y_j) X_j$$

Escribimos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$, tenemos que las funciones Γ^k_{ij} son diferenciables y que

$$\nabla_X Y = \sum_k \Big(\sum_{i,j} x_i\, y_j\, \Gamma^k_{ij} + X(y_k)\Big) X_k$$

lo que muestra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ y de las derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k respecto de X.

Proposición:

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Entonces existe una única aplicación que asigna a un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $c:I \to M$, otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de c, llamado derivada covariante de V a lo largo de c tal que:

a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$; donde W es un campo vectorial a lo largo de c.

b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$ con $f \in \mathcal{D}(M)$

c) Si V es la restricción de un campo vectorial Y a la curva c, es decir, $V(t) = Y(c(t))$, entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Demostración:

Supongamos que existe tal aplicación satisfaciendo a), b) y c). Sea $f:U \subset R^n \to M$ un sistema de coordenadas con $c(I) \cap f(U) \neq \emptyset$ y sea $(x_1(t),\ldots,x_n(t))$ la expresión local de $c(t)$.

Sea $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y el campo de vectores V puede ser expresado como $V = \sum_j v^j X_j$ donde $v^j = v^j(t)$ y $X_j = X_j(c(t))$.

Por a) y b) se tiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}$$

Por c) y 1) de la definición,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla_{\left(\sum_i \frac{dx_i}{dt} X_i\right)} X_j =$$

Por lo tanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dV^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \nabla_{X_i} X_j \qquad (1)$$

Es decir, si existe tal aplicación, es única.

Respecto de la existencia, tomamos $\frac{DV}{dt}$ en f(U) como (1) ; queda como ejercicio verificar que satisface a), b) y c) enunciados.

Si g(W) es otro entorno coordenado tal que $f(W) \cap f(U) \neq \emptyset$ y definimos $\frac{DV}{dt}$ por (1) en g(W). La unicidad asegura que las definiciones concuerdan en $g(W) \cap f(U)$ y así puede ser extendido a todo M.

Esta proposición muestra que la conexión afín nos proporciona una manera de derivar vectores a lo largo de curvas; en particular, es posible hablar de la aceleración de una curva en M.

Definición:

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Un campo vectorial V a lo largo de una curva c, $c:I \to M$ se dice paralelo si $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Proposición:

Sea M una variedad diferenciable con una conexión afín ∇. Sea $c:I \to M$ una curva diferenciable en M y V_0 un vector tangente a M en $c(t_0)$, $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores V paralelo a lo largo de c tal que $V(t_0) = V_0$. V(t) es llamado transporte paralelo de $V(t_0)$ a lo largo de c.

Demostración:

Supongamos, por un momento, que c(I) está contenido en un entorno coordenado f(U) de un sistema coordenado $f:U \subset R^n \to M$, alrededor de c(I). Sea $f^{-1}(c(t)) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ la expresión local de c(t) y sea $V_0 = \sum_j V_0^j X_j$, donde $X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(c(t_0))$.

Si existe V en f(U) que es paralelo a lo largo de c con $V(t_0) = V_0$ entonces $V = \sum_j V^j X_j$ satisface

$$0 = \frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dV^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \nabla_{X_i} X_j$$

Como anteriormente, tomamos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$ queda,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dV^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k,$$

que podemos escribir

$$\frac{DV}{dt} = \sum_k \{\frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \Gamma^k_{ij}\} X_k = 0$$

Nos queda un sistema de n ecuaciones diferenciales en $V^k(t)$.

$$0 = \frac{dV^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} V^j \Gamma^k_{ij} = 0 \qquad k = 1,\dots,n.$$

que tiene solución única satisfaciendo la condición inicial $V^k(t_0) = V^k_0$.

Hemos obtenido que, si existe V entonces es único. Además, como el sistema es lineal, la solución está definida para todo $t \in I$, lo que asegura la existencia de un único V con las propiedades deseadas.

Como el segmento $c([t_0,t_1]) \subset M$ es compacto, para todo $t_1 \in I$, puede ser cubierto por un número finito de entornos coordenados, en cada uno de los cuales, V puede ser definido por lo ya visto. Por la unicidad, las definiciones coinciden en las intersecciones no vacías y permite definir V para $[t_0,t_1]$.

Definición:

Sea M una variedad riemanniana con métrica $\langle\,,\rangle$ y conexión afín ∇; una conexión se dice compatible con la métrica $\langle\,,\rangle$ si para toda curva diferenciable c y cualquier par de campos de vectores paralelos V, V' a lo largo de c, se tiene $\langle V,V'\rangle$ = constante.

Recordemos que ésta propiedad la cumplen los campos vectoriales a lo largo de una curva sobre una superficie regular, (página 53).

Proposición:

Sea M una variedad riemanniana con una conexión ∇ compatible con la métrica. Sean V y W campos de vectores a lo largo de una curva diferenciable $c:I \to M$. Entonces

$$\frac{d}{dt}(\langle V,W\rangle) = \langle \frac{DV}{dt},W\rangle + \langle V,\frac{DW}{dt}\rangle, \quad t \in I$$

Demostración:

Sea $\{P_1(t_0),\ldots,P_n(t_0)\}$ una base ortogonal de $M_{c(t_0)}$, $t_0 \in I$.

Por la proposición anterior, extendemos paralelamente cada uno de los vectores $P_j(t_0)$, $j = 1,\ldots,n$.

Como la conexión ∇ es compatible con la métrica tenemos que $\{P_1(t),\ldots,P_n(t)\}$ es base ortogonal de $M_{c(t)}$, para todo $t \in I$.

Por lo tanto, ahora podemos escribir

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i$$

donde v^i, w^i son funciones diferenciables, $i = 1,\ldots,n$.

Se obtiene

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv^i}{dt} P_i, \qquad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i$$

por lo tanto,

$$\langle \frac{DV}{dt},W\rangle + \langle V,\frac{DW}{dt}\rangle =$$

$$= \sum_i \{\langle \frac{dv^i}{dt},w^i\rangle + \langle v^i,\frac{dw^i}{dt}\rangle\}\langle P_i,P_i\rangle$$

$$= \frac{d}{dt}\{\sum_i \langle v^i,w^i\rangle \langle P_i,P_i\rangle\} = \frac{d}{dt}\langle V,W\rangle.$$

Corolario:

Una conexión afín ∇ en una variedad riemanniana M es compatible con la métrica si y sólo si

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle$$

para X,Y,Z campos de vectores diferenciables a lo largo de una curva.

Demostración:

Si $p \in M$ y ∇ es compatible con la métrica; sea $c:I \to M$ una curva diferenciable con $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$, y $\left.\frac{dc}{dt}\right|_{t=t_0} = X(p)$.

Entonces, para todo $p \in M$,

$$X(p)\langle Y,Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle_{c(t_0)} = \langle \frac{D}{dt} y,Z\rangle_p + \langle Y, \frac{D}{dt} Z\rangle_p =$$

$$= \langle \nabla_X Y,Z\rangle_p + \langle Y,\nabla_X Z\rangle_p$$

Reciprocamente, si Y y Z son campos paralelos a lo largo de c sabemos que

$$\frac{D}{dt} Y(c(t)) = 0 = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y \quad \text{y} \quad \frac{D}{dt} Z(c(t)) = 0 = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Z.$$

Nos queda

$$\frac{d}{dt}\langle Y,Z\rangle = 0, \text{ entonces } \langle Y,Z\rangle = \text{constante}.$$

Definición:

Una conexión afín ∇ es una variedad diferenciable M se dice <u>simétrica</u> si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \text{para todo} \quad X,Y \in \mathcal{X}(M)$$

Notemos que, para un sistema coordenado $x_1,\dots,x_n$, la simetría implica que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i,X_j] = 0 \quad \text{ó equivalentemente } \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

El siguiente teorema caracteriza la llamada <u>conexión de Levi-Civita</u> (o riemanniana) de M.

<u>Teorema</u>(<u>Levi-Civita</u>)

Dada una variedad riemanniana M existe una única conexión afín ∇ en M satisfaciendo:

a) ∇ es compatible con la métrica riemanniana

b) ∇ es simétrica.

<u>Demostración</u>:

Supongamos, inicialmente, la existencia de tal conexión ∇.

Por el corolario de la proposición anterior tenemos

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$
$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$
$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

De donde,

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle &= \\ &= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle Z, \nabla_Y X\rangle = \\ &= \langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X\rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_Y X, Z\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \\ - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\} \end{aligned} \qquad (3)$$

Esta expresión muestra que ∇ está determinada por $\langle\ ,\ \rangle$ y en caso que exista, es única.

Para la existencia, tomamos la expresión (3) como definición de ∇ y queda como ejercicio verificar que satisface las condiciones pedidas.

Pensemos, nuevamente, en términos de un sistemas de coordenadas $x_1,\dots,x_n$; ya hemos visto que podemos escribir $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, donde las funciones diferenciables Γ^k_{ij} son los coeficientes de la conexión ∇ ó los <u>símbolos de Christoffel de la conexión</u>.

De la expresión (3) se obtiene que si $X = X_i$, $Y = X_j$, $Z = X_k$ y $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ entonces

$$\sum_{\ell} \Gamma^{\ell}_{ij} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \}$$

Llamamos (g^{km}) a la matriz inversa de (g_{km}) y nos queda

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \} g^{km}$$

que es la expresión clásica de los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana en términos de los g_{ij} dados por la métrica.

<u>Ejercicios:</u>

1. Hallar los símbolos de Christoffel de la conexión riemanniana compatible con la métrica $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = 0$.
2. Mostrar que en los espacios euclídeos R^n se verifica $\Gamma^k_{ij} = 0$.

3. Geodésicas

En lo que sigue, M será una variedad riemanniana con una conexión riemanniana.

<u>Definición:</u>

Una curva parametrizada $\gamma : I \to M$ es una <u>geodésica en $t_0 \in I$</u> si $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ en t_0. Si γ es geodésica en cada $t \in I$ diremos que γ es una <u>geodésica</u>.

Si $[a,b] \subset I$ y $\gamma : I \to M$ es una geodésica, la restricción $\gamma /_{[a,b]}$ se llama <u>geodésica ligando $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$</u>.

Si $\gamma : I \to M$ es una geodésica entonces, por una proposición anterior

$$\frac{d}{dt} \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle = 2 \langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle = 0.$$

Se obtiene que $|\frac{d\gamma}{dt}|$ es constante; sea $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$, es decir, excluímos las geodésicas que se reducen a un punto.

La longitud de arco a partir de un punto t_0 está dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\frac{d\gamma}{dt}| dt = c.(t-t_0)$$

Obtenemos que el parámetro de una geodésica es proporcional a la longitud de arco y para $c = 1$, diremos que la geodésica está normalizada.

Las ecuaciones de las geodésicas de superficies de la forma $f(x,y,z) = 0$ son conocidas desde 1732, a partir de un trabajo de Euler.

Veamos ahora, localmente, las ecuaciones satisfechas por una geodésica γ es un sistema de coordenadas $x_1,\ldots,x_n$. En un entorno U podemos escribir

$$\gamma(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

y γ será geodésica si y sólo si

$$0 = \frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = \sum_k \left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Luego, el sistema de ecuaciones diferenciales de 2° orden

$$(1) \qquad \frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \qquad k = 1,\ldots,n$$

caracteriza una geodésica.

Hemos visto en el capítulo anterior, que TM, el conjunto de los pares (q,v) con $q \in M$ y $v \in M_q$ tiene estructura de variedad diferenciable.

Cualquier curva diferenciable $t \to \gamma(t)$ en M determina una curva en TM por

$$t \to (\gamma(t), \frac{d\gamma}{dt}(t)).$$

Sea (U,φ) una carta local alrededor de $q \in M$ tal que $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ es sistema de coordenadas de (g,v) en TU. Si γ es geodésica entonces, en TU, la curva

$$t \to \left(x_1(t),\dots,x_n(t), \frac{dx_1}{dt},\dots,\frac{dx_n}{dt}\right)$$

satisface el sistema

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_k}{dt} = y_k & k = 1,\dots,n \\[2ex] \dfrac{dy_k}{dt} = -\displaystyle\sum_{i,j} \Gamma^k_{ij}\, y_i\, y_j \end{cases}$$

en términos de las coordenadas $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ de TU.

Se obtiene que los sistemas de ecuaciones (1) y (2) son equivalentes.

Teorema:

Sea $m \in M$, $X \in M_m$. Entonces para cada número real b existe un número real $r > 0$ y una única curva σ definida sobre $[b-r, b+r]$ tal que $\sigma(b) = m$, $\sigma'(b) = X$ y σ es geodésica.

Demostración:

Con la notación anterior, debemos hallar funciones diferenciales $g_i(t)$ que satisfagan, por ejemplo, el sistema

$$\frac{d^2 g_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma^k_{ij} \frac{dg_i}{dt}\frac{dg_j}{dt} = 0 \qquad k = 1,\dots,n$$

con las condiciones iniciales $g_i(b) = x_i(m)$ y $X = \sum_i g_i'(b) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias asegura la existencia de $r > 0$ y de las funciones $g_i(t)$.

En realidad, esta teoría nos da más resultados, escribiendo a la función σ hallada como $\sigma(t;m,X,b)$ se obtiene que es diferenciable respecto de todos sus parámetros, es decir, de t, m, X y b.

A fin de enfatizar ésta propiedad respecto de dos de esos parámetros, t y X, se acostumbra notar a σ como $\sigma_X(t)$.

Así, $\sigma_X(t)$ es la única geodésica, respecto de la conexión ∇ tal que $\sigma_X(0) = m$ y su tangente en $t = 0$ es X.

Lema (homogeneidad de una geodésica)

Si la geodésica $\sigma_X(t)$ está definida en el intervalo $(-a,a)$ y s es un número real positivo tal que $\sigma_{sX}(t)$ está definida en $(-\frac{a}{s}, \frac{a}{s})$ entonces

$$\sigma_{sX}(t) = \sigma_X(st).$$

Demostración:

Sea $h:(-\frac{a}{s}, \frac{a}{s}) \to M$ una curva dada por $h(t) = \sigma_X(s.t)$. Entonces $h(0) = m$ y $\frac{dh}{dt}(0) = sX$.

Además,

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dh}{dt}\right) = \nabla_{h'(t)}h'(t) = \nabla_{\sigma'_X(s.t)}\, \sigma'_X(s.t) =$$

$$= s^2.\nabla_{\sigma'_X(t)}\, \sigma'_X(t) = 0$$

pues ∇ es conexión riemanniana.

De esto se deduce que h es geodésica que para $t = 0$ pasa por m con velocidad sX. Por unicidad,

$$* \qquad h(t) = \sigma_X(st) = \sigma_{sX}(t)$$

Definición:

Sea $Y \in M_m$; si existe $\sigma_Y(1)$ definimos la aplicación exponencial

$$\exp_m : M_m \to M \text{ como}$$

$$\exp_m Y = \sigma_Y(1).$$

Se utiliza el nombre aplicación exponencial por que en el caso especial del grupo lineal general $GL(n,R)$ llega a ser la clásica aplicación

$$A \to e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

del conjunto de todas las matrices reales nxn en el conjunto de matrices no singulares.

El conjunto

$$\nu = \{(q,v)/q \in V \subset M, \text{ abierto, } v \in M_q, |v| < \varepsilon\}$$

en un abierto de TM, en realidad, de TV.

Definimos aplicación exponencial en ν como

$$\exp(q,v) = \exp_q(v) = \sigma_v(1)$$

Es claro que exp es diferenciable.

En lo que sigue usaremos la restricción de exp a un abierto del espacio M_q, es decir, la proyección de ν sobre M_q que es una bola abierta centrada en el origen 0 de M_q y de radio ε. La notaremos $B_\varepsilon(0)$.

Queda como ejercicio verificar que $\exp_q$ es diferenciable y $\exp_q(0) = q$.

Geometricamente, $\exp_q(v)$ es un punto de M obtenido recorriendo a partir de q una geodésica que pasa por q con velocidad $\frac{v}{|v|}$ y longitud $|v|$.

<u>Proposición:</u>

Dado $q \in M$, con la notación anterior, existe un $\varepsilon > 0$ tal que

$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset M_q \to M$ es un difeomorfismo de $B_\varepsilon(0)$ sobre un abierto de M.

<u>Demostración:</u>

Se deja como ejercicio.

Sugerencia: Verificar que $d(\exp_q)_0$ es la identidad y aplicar el teorema de la función inversa.

Definición:

Una curva diferenciable por partes es una aplicación continua $c:[a,b] \to M$ tal que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ tal que las restricciones $c/_{[t_i,t_{i+1}]}$ $i = 0,\ldots,k-1$ son diferenciables.

Definición:

Un segmento de geodésica $\gamma:[a,b] \to M$ se dice minimizante si $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ donde ℓ indica la longitud de la curva y c es cualquier curva diferenciable por partes ligando $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$.

Definición:

Una superficie parametrizada en M es una aplicación diferenciable $s:A \subset R^2 \to M$ con A abierto.

Y, un campo de vectores V a lo largo de s es una aplicación que asigna a cada $q \in A$ un vector $V_{(q)} \in M_{s(q)}$ que es diferenciable en el siguiente sentido:

Si $f \in \mathcal{D}(M)$ entonces $q \to V_q(f)$ es diferenciable.

Si (u,v) son las coordenadas cartesianas de R^2, para $v = v_0$ fijo, la aplicación

$$u \to s(u,v_0)$$

es una curva en M y $ds(\frac{\partial}{\partial u})$ es un campo de vectores a lo largo esta curva. Escribiremos $ds(\frac{\partial}{\partial u}) = \frac{\partial s}{\partial u}$.

Analogamente, tenemos $ds(\frac{\partial}{\partial v}) = \frac{\partial s}{\partial v}$ para $u = u_0$ fijo.

Definición:

Si V es un campo a lo largo de s, $s:U \to M$, definimos derivadas covariantes: $\frac{DV}{\partial u}$, $\frac{DV}{\partial v}$ del siguiente modo:

$\frac{DV}{\partial u}(u,v_0)$ es la derivada covariante a lo largo de la curva $u \to s(u,v_0)$ de la restricción de V a esta curva.

Analogamente se define $\frac{DV}{\partial v}$

Lema (de simetría):

Si M es una variedad diferenciable con una conexión simétrica, y $s:A \to M$ es una superficie parametrizada entonces

$$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = \frac{D}{\partial u}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)$$

Demostración:

Sea (V,f) una carta local alrededor de un punto de s(U), con U abierto de R^2.

Podemos escribir $f\circ s(u,v) = (x_1(u,v),\ldots,x_n(u,v))$.

Se tiene

$$\frac{D}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial u}\right) = \frac{D}{\partial v}\left(\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}{\partial v} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j}\frac{\partial x_i}{\partial u}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial v}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

pues

$$\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)}{\partial v} = \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Si, ahora, calculamos $\frac{D\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)}{\partial u}$, usando que $\frac{\partial^2 x_i}{\partial v\,\partial u} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}$ y que

$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x_j}$ se obtiene la misma expresión y esto prueba el lema.

Lema (de Gauss):

Sea $p \in M$, $v \in M_p$ tal que $\exp_p v$ está definida. Sea $w \in M_p$ y $M_p \approx T_v(M_p)$. Entonces

$$\langle (d\exp_p)_v\, v, (d\exp_p)_v\, w\rangle = \langle v,w\rangle$$

Demostración:

Sea $w = w_T + w_N$ donde w_T es paralelo a v y w_N normal a v.

Considerando la identificación $M_p \approx T_v(M_p)$ y la definición de $\exp_p$ se tiene

$$\langle (d\exp_p)_v\, v, (d\exp_p)_v\, w_T\rangle = \langle v,w_T\rangle$$

Ahora, por la linealidad de $d\exp_p$ basta probar la tesis para $w = w_N$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $w_N \neq 0$.

Nuevamente, usamos la identificación $M_p \approx T_v(M_p)$ y para $v \in M_p$, sea $v(s)$ una curva en M_p con $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ y $|v(s)| =$ constante.

Como $\exp_p v$ está definida, también lo está $\exp_p u$ para $u = t.v(s)$ con $0 \leqslant t \leqslant 1$; $-\varepsilon < s < \varepsilon$.

Por lo tanto, podemos considerar la superficie parametrizada

$$f: A \to M,\ A = \{(t,s):\ 0 \leqslant t \leqslant 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

dada por $f(t,s) = \exp_p t.v(s)$.

Queda como ejercicio mostrar que las curvas $t \to f(t,s_0)$ son geodésicas.

Observemos que

$$\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle(1,0) = \langle (d\exp_p)_v\, w_N, (d\exp_p)_v\, v\rangle$$

y por una proposición anterior,

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = \langle \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle + \langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}\rangle$$

Como $\frac{\partial f}{\partial t}$ es tangente a la geodésica, el segundo término del miembro derecho es cero.

Aplicando el lema de simetría al primer término queda

$$\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = \langle \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\frac{D}{ds}\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = 0$$

Hemos obtenido que

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle = 0$$

y por lo tanto, $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\rangle$ es independiente de t, es decir, constante respecto de t.

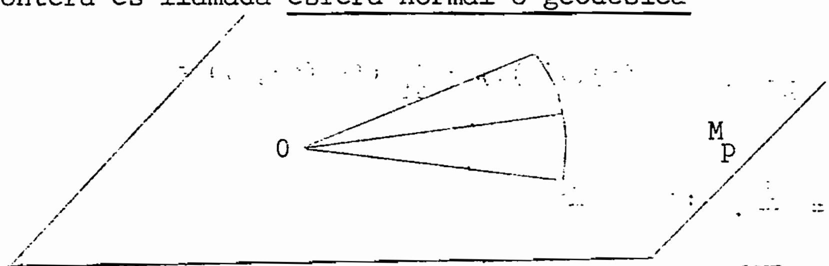
Para determinar dicha constante tomamos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = (d\ \exp_p)_v\ tw_N \qquad y$$

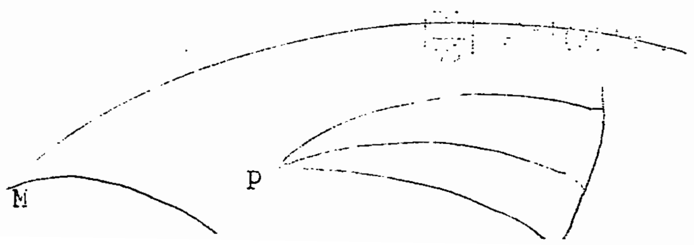
$$\lim_{t\to 0}\frac{f}{s}(t,0) = \lim_{t\to 0}(d\ \exp_p)_v\ tw_N = 0$$

con lo que concluye la demostración.

Supongamos que la $\exp_p$ es un difeomorfismo en un entorno V del origen de M_p, el entorno $U = \exp_p V$ es llamado entorno normal de p. Si $B_\varepsilon(0) \subset V$, a $\exp_p B_\varepsilon(0) = B(p)$ se lo llama bola normal o geodésica y su frontera es llamada esfera normal o geodésica



$\exp_p$



Las geodésicas en $B_\varepsilon(p)$ que parten de p son llamadas geodésicas radiales.

Proposición:

Sea $p \in M$, U entorno normal de p y $B \in U$, una bola normal de centro p. Sea $\gamma:[0,1] \to B$ una geodésica con $\gamma(0) = p$. Si $c:[0,1] \to M$ es una curva diferenciable por partes ligando $\gamma(0)$ y $\gamma(1)$ entonces $\ell(\gamma) \leqslant \ell(c)$ y si vale la igualdad entonces

$$\gamma|_{[0,1]} = c|_{[0,1]}$$

Demostración:

Supongamos, por el momento, que $c([0,1]) \subset \overline{B}$. Recordemos que $B \subset U$ y $\exp_p$ es un difeomorfismo sobre U.

Sea $t \to v(t)$ una curva en M_p con $|v(t)| = 1$ y sea $r:(0,1] \to R$ una función diferenciable por partes. Si $t \neq 0$, la curva c(t) puede ser escrita univocamente, por

$$\exp_p(r(t).v(t)) = f(r(t),t).$$

Podemos suponer que para $t_1 \in (0,1]$, $c(t_1) \neq p$, de lo contrario, sacamos el intervalo $[0,t_1)$.

Luego, salvo para un número finito de puntos,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d}{dt}(\exp_p(r(t).v(t))) = \frac{d}{dt}(f(r(t),t)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} . r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t} .$$

Por el lema de Gauss,

$$\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle = 0 \qquad \text{y}$$

$$\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = \left|\frac{\partial f}{\partial r} . r'(t)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2$$

Ya que $\frac{\partial f}{\partial r} = (d\ \exp_p)\ v(t)$ y

$$\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \rangle = \langle (d\ \exp_p)v(t),\ (d\ \exp_p)v(t) \rangle =$$

$$= \langle v(t),\ v(t) \rangle = 1$$

se tiene que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| = 1 \qquad \text{y}$$

$$\left|\frac{dc}{dt}\right|^2 = |r'(t)|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|^2 \geqslant |r'(t)|^2$$

Así,

$$\int_\varepsilon^1 \left|\frac{dc}{dt}\right| dt \geqslant \int_\varepsilon^1 |r'(t)|\,dt \geqslant \int_\varepsilon^1 r'(t)dt = r(1)-r(\varepsilon)$$

y tomando límite para $\varepsilon \to 0$ queda

$\ell(c) \geqslant \ell(\gamma)$. Ya que $r(1) = \ell(\gamma)$ y $r(\varepsilon) \to 0$

Veremos que si $\ell(c) = \ell(\gamma)$, debe ser $\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| = 0$ y por lo tanto, $r(t).v(t)$ es constante y $r'(t) < 0$.

Es decir, obtenemos que c es una reparametrización monótona de γ, ambas c y γ definidas sobre $[0,1]$.

Si $c([0,1])$ no está contenido en $\overline{B}$, consideramos al primer punto $t_1 \in (0,1)$ para el cual $c(t_1)$ pertenece a la frontera de $\overline{B}$.

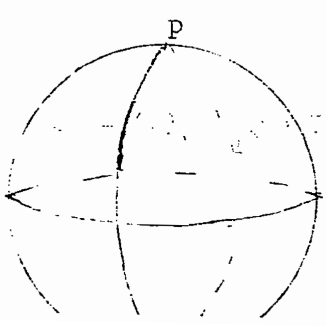
Si p es radio de la bola geodésica B queda

$$\ell(c) \geqslant \ell_{[0,t]}(c) \geqslant 2p \geqslant \ell(\gamma).$$

Este es una propiedad local, no global.

Si consideramos un arco suficientemente grande de geodésica puede dejar de ser minimizante.

Por ejemplo, las geodésicas de una esfera que parten de un punto p no son minimizantes después que pasan por el punto antípoda de p.



Teorema:

Para cada $p \in M$ existe un entorno W de p y un número real $\delta > 0$ tal que, para cada $q \in W$, $\exp_p$ es un difeomorfismo en $B_\delta(0) \subset M_q$ y $\exp_p(B_\delta(0)) \supset W$, es decir, W es entorno normal de cada uno de sus puntos.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$, V un entorno de p y

$$\nu = \{(q,w) \in TM;\ q \in V,\ w \in M_q,\ |w| < \varepsilon\}.$$

Definimos la aplicación $F:\nu \to M\times M$ dada por $F(q,w) = (q, \exp_q w)$.

Observemos que si (U,f) es una carta local de p tal que $V \subset U$, entonces, $\nu \subset TU$.

Consideremos en $F(p,0) = (p,p) \in M\times M$ el sistema de coordenadas $(U\times U, (f,f))$.

Ahora, la matriz de $dF_{(p,0)}$ es $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ pues $(d\exp_p)_0$ es la identidad.

Así, F es un difeomorfismo local en un entorno de $(p,0)$. Esto significa que existe un entorno $\nu' \subset \nu$ de $(p,0)$ en TM tal que F aplica ν' difeomorficamente sobre un entorno W' de (p,p) en $M\times M$.

Tomando $V' \subset V$ entorno de p, es posible elegir ν' de la siguiente manera:

$$\nu' = \{(q,v);\ q \in V',\ v \in M_q,\ |v| < \delta\}$$

Eligiendo un entorno W de p tal que $W\times W \subset W'$ afirmamos que W y δ así obtenidos satisface el teorema. Veámoslo:

Si $q \in W$ y $B_\delta(0) \subset M_q$ entonces, como F es un difeomorfismo sobre ν', se tiene,

$$F(\{q\}\times B_\delta(0)) \supset q\times W \text{ y por definición de } F\ \exp_p B_\delta(0) \supset W.$$

Este teorema junto con la propiedad minimizante de las geodésicas nos dice que dados dos puntos q_1, $q_2 \in W$ existe una única geodésica minimizante γ, de longitud menor que δ, ligando q_1 y q_2. Dicho entorno W será llamado <u>entorno totalmente normal de p $\in$ M.</u>

<u>Corolario:</u>

Si una curva diferenciable por partes $\gamma:[a,b] \to M$, con parámetro proporcional a la longitud de arco, tiene longitud menor ó igual que la longitud de cualquier otra curva diferenciable por partes ligando $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, entonces γ es una geodésica.

En particular, γ es regular ($\gamma'(t) \neq 0$) para todo $t \in [a,b]$.

<u>Demostración:</u>

Sea $t \in [a,b]$ y W un entorno totalmente normal de $\gamma(t)$. Existe un intervalo cerrado $I \subset [a,b]$ con interior no vacío, $t \in I$, tal que $\gamma(I) \subset W$.

$\gamma: I \to W$ es entonces una curva diferenciable por partes ligando dos puntos de una bola normal. Por hipótesis y por la propiedad minimizante de las geodésicas, $\ell(\gamma)$ es igual a la longitud de una geodésica

Nuevamente, por la propiedad minimizante y ya que γ está parametrizada proporcionalmente a la longitud de arco, se tiene que γ es una geodésica en I y por lo tanto en t.

<u>Ejemplo:</u>

Geodésicas del plano de Lobatchewski.

Sea G el semiplano superior, es decir,

$$G = \{(x,y) \in R^2 / y > 0\}$$

con la métrica riemanniana $g_{11} = g_{22} = \dfrac{1}{y^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$.

Veremos que $\gamma:[a,b] \to G$ con $a > 0$, dada por $\gamma(t) = (0,t)$ es una geodésica. Tomemos cualquier curva $c:[a,b] \to G$, $c(t) = (x(t),y(t))$ con $c(a) = (0,a)$, $c(b) = (0,b)$. Entonces

$$\ell(c) = \int_a^b \left|\frac{dc}{dt}\right| dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{y} \geq$$

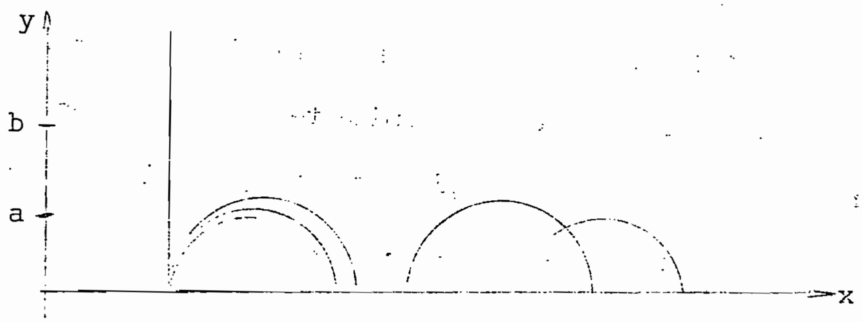
$$\geq \int_a^b \left|\frac{dy}{dt}\right| \frac{dt}{y} \geq \int_a^b \frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ell(\gamma).$$

Queda como ejercicio verificar que las isometrías de G son las aplicaciones

$$z \to \frac{az+b}{cz+d} \qquad z = x+iy, \qquad ad-bc = 1$$

y que transforman el eje Oy en semicírculos superiores o semirectas de la forma $x = x_0$, $y > 0$.

Teniendo en cuenta que las isometrías de una variedad riemanniana llevan geodésicas en geodésicas, tenemos que las geodésicas de G son dichos semicírculos y semirectas.



En realidad, éstas son todas las geodésicas pues para cada $p \in G$ y cada dirección en G_p pasa un tal círculo con centro sobre el eje x. Las rectas son casos límites de esos círculos.

Ejercicios:

1. a) Sea M variedad diferenciable y sea $Y \in M_m$. Con la notación del texto, mostrar que la aplicación $\exp_m : M_m \to M$ dada por $\exp_m Y = \sigma_Y(1)$ es diferenciable.

b) Probar que la aplicación $\exp_q$ definida sobre un abierto convenientemente elegido, es un difeomorfismo.

2. Si u y v son coordenadas ortonormales con dominio A sobre una 2-variedad (es decir, $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ son ortonormales), mostrar que las curvas coordenadas son geodésicas.

3. Demostrar que los círculos máximos de la esfera son sus geodésicas.

Curvatura

Anteriormente vimos que Gauss dió una noción de curvatura para las superficies regulares de R^3. A partir de esta idea, Riemann generaliza el concepto de curvatura a variedades diferenciables y Christoffel, años más tarde, calcula la curvatura en términos de una métrica riemanniana.

Definición:

Una curvatura R de una variedad riemanniana M es una ley que asocia a cada par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ una aplicación $R(X,Y):\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

siendo ∇ conexión riemanniana de M.

Observemos que si $M = R^n$ entonces $R(X,Y)Z = 0$ para todo $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$.

De este modo, podemos pensar que la curvatura (o tensor de curvatura) mide cuan euclideana es M.

Desde otro punto de vista, si tomamos un sistema de coordenadas $(x_1,\ldots,x_n)$ alrededor de $p \in M$, sabemos que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ por lo tanto,

$$R(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Es común caracterizar la curvatura de la siguiente manera:

Proposición:

Una curvatura R de una variedad riemanniana M satisface las siguientes propiedades: Para $f,g \in \mathcal{D}(M)$,

a) R es bilineal en $\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)$, es decir

$$R(fX_1+gX_2,Y) = f\,R(X_1,Y) + g\,R(X_2,Y)$$

$$R(X,fY_1+yY_2) = f\,R(X,Y_1) + g\,R(X,Y_2)$$

si $X_1,X_2,Y_1,Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$.

b) Para todo par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, el operador de curvatura $R(X,Y)$ es lineal en $\mathfrak{X}(M)$, es decir,

$$R(X,Y)fZ = f\,R(X,Y)Z$$

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$$

con $W \in \mathfrak{X}(M)$

Demostración:

La verificación de a) depende de las propiedades de la conexión que ya hemos visto por lo que se deja a cargo del lector.

Respecto de b), la segunda parte es obvia.

Veamos la propiedad del operador de curvatura aplicado al producto fZ.

$$\nabla_Y \nabla_X fZ = \nabla_Y\{(Xf)Z + f\,\nabla_X Z\} =$$

$$= (Y(Xf))Z + (Xf)\,\nabla_Y Z + (Yf)\,\nabla_X Z + f\,\nabla_Y \nabla_X Z.$$

Análogamente obtenemos $\nabla_X \nabla_Y fZ$ y podemos escribir

$$\nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_X \nabla_Y fZ =$$

$$= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z) + (YXf - XYf)Z$$

de donde,

$$R(X,Y)fZ = f\,\nabla_Y \nabla_X Z - f\,\nabla_X \nabla_Y Z +$$

$$+ (YXf-XYf)Z + ([X,Y]f)Z+f(\nabla_{[X,Y]} Z) = f\,R(X,Y)Z.$$

Podríamos agregar que el término $\nabla_{[X,Y]} Z$ en la definición es "necesario" para la linealidad del operador.

Proposición: (Identidad de Bianchi)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

Demostración:

Como la conexión es simétrica vale que $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$. Así

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$$

$$= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z +$$

$$= \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{[Y,Z]} X +$$

$$+ \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z,X]} Y =$$

$$= \nabla_Y [X,Z] + \nabla_Z [Y,X] + \nabla_X [Z,Y] -$$

$$- \nabla_{[X,Z]} Y - \nabla_{[Z,Y]} X - \nabla_{[Y,X]} Z =$$

$$= [Y,[X,Z]] + [X,[Z,Y]] + [Z,[Y,X]] = 0$$

En lo sucesivo notaremos

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle = (X,Y,Z,T)$$

Proposición:

a) $(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$

b) $(X,Y,Z,T) = -(Y,X,Z,T)$

c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$

d) $(X,Y,Z,T) = (Z,T,X,Y)$

Demostración:

a) Es una aplicación directa de la identidad de Bianchi.

b) Se obtiene de aplicar la definición de curvatura

c) $(X,Y,Z,T) = -(X,Y,T,Z)$ si y sólo si $(X,Y,Z+T,Z+T) = 0$

Por lo tanto, es equivalente probar que

$$(X,Y,Z,Z) = 0.$$

Veámoslo.

$$(X,Y,Z,Z) = \langle \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

Según el corolario de una proposición anterior (pág. 117) se tiene:

$$\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle,$$

$$\langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$$

y

$$X\langle Z,Z\rangle = 2\langle \nabla_X Z, Z\rangle$$

Luego,

$$(X,Y,Z,Z) = Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle$$

$$= \frac{1}{2} Y(X\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2} X(Y\langle Z,Z\rangle) +$$

$$+ \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0$$

d) Usando a) escribimos

$$(X,Y,Z,T) + (Y,Z,X,T) + (Z,X,Y,T) = 0$$

$$(Y,Z,T,X) + (Z,T,Y,X) + (T,Y,Z,X) = 0$$

$$(Z,T,X,Y) + (T,X,Z,Y) + (X,Z,T,Y) = 0$$

$$(T,X,Y,Z) + (X,Y,T,Z) + (Y,T,Z,X) = 0$$

Sumando y aplicando b) y c) queda

$$2(Z,X,Y,T) + 2(T,Y,Z,X) = 0$$

o sea

$$(Z,X,Y,T) + (Y,T,Z,X)$$

Veamos, ahora, estos resultados en términos de un sistema de coordenadas (U,f) alrededor de un punto p de M. Como anteriormente, notaremos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Podemos escribir

$$R(X_i,X_j)X_k = \sum_{\ell} R_{ijk}\; X_{\ell}$$

y así, R_{ijk} son las componentes de la curvatura R en (U,f).

Si $X = \sum_i u^i\; X_i$, $Y = \sum_j v^j\; X_j$, $Z = \sum_k w^k\; X_k$

por linealidad se obtiene

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k,\ell} R^{\ell}_{ijk}\; u^i\; v^j\; w^k\; X_{\ell}$$

Ya que la curvatura se define en función de la conexión riemanniana es interesante obtener su expresión en términos de los coeficientes de la conexión.

$$\begin{aligned}
R(X_i,X_j)X_k &= \nabla_{X_j}\nabla_{X_i}X_k - \nabla_{X_i}\nabla_{X_j}X_k \\
&= \nabla_{X_j}\sum_{\ell}\Gamma^{\ell}_{ik}\; X_{\ell} - \nabla_{X_i}\sum_{\ell}\Gamma^{\ell}_{jk}\; X_{\ell} = \\
&= \sum_{\ell}\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^{\ell}_{ik}.X_{\ell} + \sum_{\ell,s}\Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma^{s}_{j\ell}\; X_s - \\
&\quad - \sum_{\ell}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^{\ell}_{jk}\; X_{\ell} - \sum_{\ell,s}\Gamma^{\ell}_{ik}\Gamma^{s}_{i\ell}\; X_{\ell}
\end{aligned}$$

De donde,

$$R^s_{ijk} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} + \sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}\Gamma^s_{j\ell} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{ik} -$$

$$- \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\Gamma^s_{i}$$

Si tomamos

$$\langle R(X_i,X_j)X_k,X_s\rangle = \langle \sum_\ell R^\ell_{ijk}\; X_\ell , X_s\rangle =$$

$$= \sum_\ell R^\ell_{ijk}\; g_{\ell s} = R_{ijks}$$

las identidades de la proposición anterior pueden escribirse

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kijs} = 0$$

$$R_{ijks} = -R_{jiks}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijsk}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}$$

Para lo que sigue conviene indicar que notaremos por $|x \Lambda y|$ la expresión

$$\sqrt{|x|^2\; |y|^2 - \langle x,y\rangle^2}$$

que representa el área del paralelogramo de dimensión 2 determinado por los vectores x,y.

<u>Proposición:</u>

Sea $\sigma \subset M_p$ un subespacio bidimensional del espacio tangente M_p y sean x,y dos vectores linealmente independientes. Entonces,

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x\Lambda y|^2}$$

no depende de la elección de los vectores $x,y \in \sigma$.

<u>Demostración:</u>

Observemos que podemos pasar de la base {x,y} a cualquier otra {x',y'} por acción de las siguientes transformaciones elementales:

$\{x,y\} \to \{y,x\}$, $\{x,y\} \to \{\lambda x,y\}$, $\{x,y\} \to \{x+\lambda y,y\}$

Ahora, sólo basta verificar que $K(x,y)$ es invariante por estas transformaciones, lo que se deja a cargo del lector.

Definición:

Sea $p \in M$ y σ un subespacio bi-dimensional de M_p. Se llama curvatura seccional de σ en p al número real $K(x,y) = K(\sigma)$, donde $\{x,y\}$ es una base de σ en p.

Lema:

Sea V un espacio vectorial de dimensión $\geqslant 2$, junto con un producto interno $\langle\ ,\rangle$. Sean

$$R: V\times V\times V \to V \quad \text{y} \quad R': V\times V\times V \to V$$

aplicaciones tri-lineales que satisfacen las condiciones a), b), c) y d) de la proposición de página 135 para

$$\langle R(x,y)z,t\rangle = (x,y,z,t)$$

$$\langle R'(x,y)z,t\rangle = (x,y,z,t)'$$

Si x, y son dos vectores linealmente independientes, escribimos

$$K(\sigma) = \frac{(x,y,x,y)}{|x\wedge y|^2}, \qquad K'(\sigma) = \frac{(x,y,x,y)'}{|x\wedge y|^2}.$$

donde σ es el subespacio bi-dimensional generado por x,y. Si para todo $\sigma \subset V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$ entonces $R = R'$.

Demostración:

Basta probar que, en las condiciones del lema, $(x,y,z,t) = (x,y,z,t)'$ para todo $x,y,z,t \in V$.

Por hipótesis, tenemos que $(x,y,x,y) = (x,y,x,y)'$ entonces

$$(x+z,y,x+z,y) = (x+z,y,x+z,y)'$$

de donde,

$$(x,y,x,y) + 2\,(x,y,z,y) + (z,y,z,y) =$$

$$= (x,y,x,y)' + 2\,(x,y,z,y)' + (z,y,z,y)'$$

por lo tanto,

$$(x,y,z,y) = (x,y,z,y)'$$

para todo $x,y,z \in V$.

A partir de lo probado, tenemos que

$$(x,y+t,z,y+t) = (x,y+t,z,y+t)'$$

donde

$$(x,y,z,t) + (x,t,z,y) = (x,y,z,y)' + (x,t,z,y)'$$

Podemos reescribirlo como:

$$(x,y,z,t) - (x,y,z,t)' = (y,z,x,t) - (y,z,x,t)',$$

lo que nos dice que la expresión

$$(x,y,z,t) - (x,y,z,t)'$$

es invariante por permutaciones cíclicas de los tres primeros elementos, y como consecuencia de la identidad de Bianchi, queda

$$(x,y,z,t) - (x,y,z,t)' = 0.$$

Hemos obtenido que conociendo $K(\sigma)$, para todo σ, queda determinada la curvatura R.

<u>Proposición</u>:

Sea M una variedad riemanniana, de dimensión n, $p \in M$, y $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base de M_p. Llamamos $R_{ijk\ell} = \langle R(e_i,e_j)e_k,e_\ell \rangle$, $i,j,k,\ell = 1,\ldots,n$.

Entonces $K(p,\sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset M_p$ si y sólo si

$$R_{ijk\ell} = K_0(\delta_{ik}\ \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\ \delta_{jk}),\ \text{donde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Es decir, $K(p,\sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset M_p$ si y sólo si

$$R_{ijij} = K_0 \quad \text{y} \quad R_{ijk\ell} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k,\ j \neq \ell.$$

Demostración:

Sean $X = \sum x_i\ e_i$, $Y = \sum y_i\ e_i$ vectores linealmente independientes de M_p. Entonces

$$|X \wedge Y|^2 = |X|^2\ |Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2 =$$

$$= \sum_{i,j,k,\ell} (\delta_{ik}\ \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\ \delta_{jk}) x_i\ y_j\ x_k\ y_\ell$$

Suponga que $K(p,\sigma) = K_0$ para todo $\sigma \subset M_p$. Definimos la relación

$$R' : M_p \times M_p \times M_p \to M_p \quad \text{por}$$

$$\langle R'(X,Y)Z, e_\ell\rangle = K_0 \sum_{i,j,k} (\delta_{ik}\ \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\ \delta_{jk}) x_i\ y_j\ z_k,$$

donde $Z = \sum_k z_k\ e_k$. Es inmediato verificar que R y R' satisfacen las hipótesis del lema anterior. Por lo tanto $R = R'$, es decir,

$$R_{ijk\ell} = K_0(\delta_{ik}\ \delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\ \delta_{ik})$$

Reciprocamente, como $K(p,\sigma)$ es invariante por las transformaciones definidas sobre la base en la proposición anterior, basta tomar

$$K(p,\sigma) = (e_i, e_j, e_i, e_j) \qquad i,j = 1,\dots,n$$

y sigue de manera obvia.

Algunas combinaciones de las curvaturas seccionales aparecen con frecuencia. Son ellas la curvatura de Ricci y la curvatura media (ó escalar). Veámoslas

Sea $x = z_n$ un vector unitario de M_p y $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ una base ortonormal del hiperplano de M_p ortogonal a x. Con esta notación,

$$\mathrm{Ric}(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x,z_i)x, z_i \rangle$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Ric}(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_i,z_j)z_i, z_j \rangle$$

Ejercicios:

1. a) El operador $R(X,Y): \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$; para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, dado por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

es lineal

b) Fijando Z, el operador R definido en la parte a) es bilineal en $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$.

2. Si $M = R^n$ entonces $R(X,Y)Z = 0$.

3. Sea G un grupo de Lie con una métrica $\langle \, , \rangle$ bi-invariante. Sean $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(G)$ campos unitarios e invariantes a izquierda en G. Probar que $R(X,Y)Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z]$.

Sugerencia: Muestre que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]$. A continuación, muestre que $\langle [X,Y], Z \rangle = \langle X, [Y,Z] \rangle$.

BIBLIOGRAFIA

1. do Carmo, M. Differential geometry of curves and surfaces. Prentice-Hall. 1976.

2. Geometría Riemanniana. IMPA. 1979.

3. Helgason, S. Differential geometry and symmetric spaces. Academic Press, New York. 1962.

4. Hicks, N. Notes on differential geometry. Van Nostrand Math. Studies #3. 1965.

5. Hu, S.I. Differentiable manifolds, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

6. Kelley, John L. Topología general. Eudeba. 1955.

7. Noriega, R. y Santaló, L. Variedades diferenciables. Cursos y seminarios de Matemática. 1978.

8. Spivak, M. Cálculo en variedades. Ed. Reverté. 1979.

9. Struik, D.J. Lectures on classical differential geometry, Addison-Wesley. Reading, Mass. 1950.

10. Warner, F. Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups. Scott, Foresman, Gleuview. Ill. 1971.