ISSN 1853-709X

Fascículo 36

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

M. Cotlar

Factorización de Naimark-Stinespring y teoremas de extensión de formas de Hankel.

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 36

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Cursos y Seminarios

Fascículo 36

Factorización de Naimark-Stinespring y Teoremas de Extensión de Formas de Hankel

Mischa Cotlar

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Ciudad Universitaria - Pabellón I
1428 Buenos Aires, ARGENTINA

FACTORIZACION DE NAIMARK-STINESPRING Y TEOREMAS DE EXTENSION DE FORMAS DE HANKEL

Notas de un cursillo dictado por MISCHA COTLAR,
redactadas por VIVIAN CAHN y VERÓNICA DIMANT

Fascículo 36

Cursos y Seminarios del Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Octubre 1994

PREFACIO

El fascículo 5 de los Cursos de Matemática del IAM reproducía un curso que dicté en la Facultad de Ciencias Exactas de Buenos Aires como un complemento al curso regular de Análisis Funcional. Como en aquel curso no llegué a cubrir algunos aspectos importantes del tema, di más tarde unas clases complementarias, cuyas notas fueron redactadas por Vivian Cahn y Verónica Dimant y se reproducen aquí.

El presente artículo es prácticamente autocontenido y da una rápida idea de los espacios reproductivos, las factorizaciones de Naimark y Stinespring, los teoremas de Nehari y Adamjan-Arov-Krein sobre formas de Hankel, el teorema de Helson-Szegö y el teorema del conmutante de Sarason y Nagy-Foias.

Mucho agradezco al Dr. Gustavo Corach haberme invitado a dar el curso y publicar las notas, y a las Licenciadas V. Cahn y V. Dimant la colaboración prestada.

Mischa Cotlar

INDICE

Algunas notaciones y preliminares

En lo que sigue $\mathbb{D}$ designará el disco $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, $\mathbb{T} \sim [0, 2\pi)$ su frontera, dt la medida de Lebesgue, $L^p = L^p(\mathbb{T}, dt)$, $1 \le p \le \infty$.

Si E y F son espacios normados, L(E,F) designará el espacio de los operadores lineales acotados de E en F, donde L(E,E) se notará L(E) y se dirá que $A \in L(E, F)$ es una contracción si $\|A\| \le 1$. Por subespacio se entederá subespacio vectorial cerrado. Se supone conocida la definición de álgebra C*; si $\mathcal{A}$ es una tal álgebra y $f \in \mathcal{A}$, se escribe $f \ge 0$ si $f = g^* g$, $g \in \mathcal{A}$. En particular, si $C(\mathbb{T})$ es el álgebra de funciones continuas en $\mathbb{T}$ y $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $f \ge 0$ si y sólo si $f = \overline{g} g$, $g \in C(\mathbb{T})$, lo que equivale a $f(z) \ge 0$, $\forall z \in \mathbb{T}$. En este álgebra vale el lema de Fejer-Riesz: si $f \in C(\mathbb{T})$ es un polinomio trigonométrico, $f(z) = \sum_{-n}^{n} c_k z^k$, $z \in \mathbb{T}$, entonces $f \ge 0$ implica $f = \overline{g} g$, donde $g(z) = \sum_{0}^{n} d_k z^k$ es un polinomio analítico. En efecto, como para $z \in \mathbb{T}$, es f analítica en z y $f(z) \in \mathbb{R}$, del principio de simetría se sigue que $f(z^*) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, donde $z^* = 1/\overline{z}$ y resulta que el conjunto de los ceros de f se compone de n pares simétricos (z_k, z_k^*), $k = 1, \ldots, n$; luego basta poner $g(z) = C \prod_{1}^{n} (z - z_k)$, con C adecuado.

Si E y F son espacios de Hilbert (que siempre se supondrán separables) y $B: E \times F \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal tal que $|B(f, g)| \le M \|f\| \|g\|$, entonces se dice que B es acotada y que $\|B\| \le M$. En este caso, existe un operador $A \in L(E, F)$, llamado asociado de B, tal que $B(f, g) = \langle Af, g \rangle$ y $\|B\| = \|A\|$. Si E es un espacio vectorial y $B: E \times E \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal tal que $B \ge 0$ (es decir, $B(f, f) \ge 0$, $\forall f \in E$), entonces para todo sistema $f_1, \ldots, f_n \in E$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ es

$$\sum_{i,j=1}^{n} B(f_i, f_j) c_i \overline{c}_j = B\left(\sum_i c_i f_i, \sum_j c_j f_j \right) \ge 0.$$

Esto motiva la definición de núcleo definido positivo que se da más abajo.

I. ESPACIOS REPRODUCTIVOS - CONSTRUCCION DE GELFAND-NAIMARK-SEGAL

Si V_1 y V_2 son dos $\mathbb{C}$ – espacios vectoriales, se dice que $B: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ es una <u>forma sesquilineal</u> si

$$B(\sum_{i=1}^{n} c_i f_i , \sum_{j=1}^{m} d_j g_j) = \sum_{i,j} c_i \overline{d}_j B(f_i, g_j) \qquad \forall f_i \in V_1, g_j \in V_2, \forall c_i, d_j \in \mathbb{C}.$$

Si $\{e_x\}_{x \in X}$ es una base algebraica de V_1 y $\{e_y\}_{y \in Y}$ es una base algebraica de V_2, entonces toda $f \in V_1$ es de la forma $f = \sum_{i=1}^{n} c_i e_{x_i}$ y toda $g \in V_2$ es de la forma $g = \sum_{j=1}^{m} d_j e_{y_j}$. Luego, $B(f,g) = \sum_{i,j} c_i \overline{d}_j B(e_{x_i}, e_{y_j})$, de modo que B queda determinada por la función $K: X \times Y \to \mathbb{C}$ dada por $K(x,y) = B(e_x, e_y)$.

Recíprocamente, dados dos conjuntos X e Y cualesquiera definimos V_1 como el conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ a soporte finito y V_2 como el de las funciones $g : Y \to \mathbb{C}$ a soporte finito. Para cada $z \in X$, $u \in Y$, definimos

$$\delta_z x = \begin{cases} 1 & \text{si } x = z \\ 0 & \text{si } x \neq z \end{cases}, \forall x \in X \qquad \delta_u y = \begin{cases} 1 & \text{si } y = u \\ 0 & \text{si } y \neq u \end{cases}, \forall y \in Y.$$

Entonces, $\{\delta_z\}_{z \in X}$ es base algebraica de V_1 y $\{\delta_u\}_{u \in Y}$ es base algebraica de V_2.

Luego, hay una correspondencia biunívoca entre funciones K: $X \times Y \to \mathbb{C}$ y formas sesquilineales $B: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$, donde V_1 y V_2 son los espacios vectoriales asociados a X e Y respectivamente.

Si $V_1 = V_2 = V$, se dice que la forma sesquilineal B: $V \times V \to \mathbb{C}$ es <u>no negativa</u> ($B \geq 0$) si $B(f, f) \geq 0$, $\forall f \in V$. Si $\{e_x\}_{x \in X}$ es una base de V y K: $X \times X \to \mathbb{C}$ es la función asociada a B, se dice que K es un <u>núcleo definido positivo</u> si la forma B es no negativa, lo que equivale a

$$\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j K(x_i, x_j) = B(\sum_i c_i e_{x_i}, \sum_j c_j e_{x_j}) \geq 0 \qquad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in X, \ \forall\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}.$$

En general, si X es un conjunto no vacío cualquiera, el núcleo K: $X \times X \to \mathbb{C}$ es definido positivo si

$$\sum_{i,j} c_i \bar{c}_j K(x_i, x_j) \geq 0 \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in X, \forall\, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}. \qquad (1)$$

Si K es definido positivo, la forma B en el espacio V asociado es prácticamente un producto escalar, $B(f,g) = \langle f,g \rangle_B$, salvo que $\langle f,f \rangle_B = 0$ no implica $f = 0$, pero vale la Desigualdad de Schwartz $|B(f,g)| \leq B(f,f)^{1/2} B(g,g)^{1/2}$.

Sean $V_0 = \{h \in V\text{: } B(h,h) = \langle h,h \rangle_B = 0\}$ y Π: $V \to V/V_0$ la proyección al cociente. Definiendo $\langle \Pi f, \Pi g \rangle = B(f,g)$ resulta V/V_0 un espacio pre-Hilbert y su completado H_0 es de Hilbert.

Esta construcción tiene la desventaja de que, mientras las $f \in V$ eran funciones en X, Πf son clases de funciones y no está claro que los elementos de H_0 puedan realizarse como funciones en X.

Veamos entonces, una construcción equivalente que permita asociar a K un espacio de funciones H_K (Hilbert). Si K:$X \times X \to \mathbb{C}$ es definido positivo, para cada $y \in X$ sea $K_y: X \to \mathbb{C}$ dada por $K_y(x) = K(x,y) \quad \forall x \in X$. Llamemos V_K al espacio vectorial generado por $\{K_y\}_{y \in X}$ con producto escalar:

$$\left\langle \sum_i c_i K_{y_i}, \sum_j d_j K_{z_j} \right\rangle = \sum_{i,j} c_i \bar{d}_j K(z_j, y_i).$$

Es claro que $\langle , \rangle$ es sesquilineal no negativo. Para ver que $f = \sum_j c_j K_{y_j} \in V_K$ con $\langle f,f \rangle = 0$ implica $f = 0$, usaremos que V_K tiene la siguiente propiedad reproductiva:

$f(y) = \langle f, K_y \rangle \quad \forall f \in V_K, \ \forall y \in X.$ (2)

Entonces, si $\langle f,f \rangle = 0$, por la Desigualdad de Schwartz, $\langle f, K_y \rangle = 0 \quad \forall y \in X$, luego, por (2), $f(y) = 0 \ \ \forall y$. Más aún, de (2) se deduce que si $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en V_K, $\{f_n(y)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$, $\forall\, y \in X$. Luego, $f_n(y)$ converge a un límite f(y). De esto resulta que el completado de V_K es un espacio de Hilbert H_K cuyos elementos son funciones en X y sigue valiendo la propiedad (2).

Un espacio de Hilbert H es <u>reproductivo</u> con base X si sus elementos son funciones $f{:}X\to\mathbb{C}$ y si existe $K{:}X\times X\to\mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

1. $\forall\, y \in X$, $K_y : X\to\mathbb{C}$ pertenece a H.
2. $\forall\, f \in H, \forall\, y \in X$, vale $f(y) = \langle f, K_y\rangle$

En este caso, K se llama núcleo reproductivo.

Una definición equivalente es: H es un espacio de Hilbert reproductivo con base X si sus elementos son funciones en X y $\|f_n\|\to 0$ implica $f_n(y)\to 0$, $\forall y\in X$. En efecto, de esta definición resulta que, para cada y, $b_y{:}H\to\mathbb{C}$ dada por $b_y(f) = f(y)$ es una funcional lineal y continua, luego, $\exists\, K_y \in H \,/\, b_y(f) = f(y) = \langle f, K_y\rangle$. De aquí, existe $K{:}X\times X\to\mathbb{C}$ definido positivo que verifica la equivalencia.

Hemos probado que existe una correspondencia biunívoca entre núcleos $K{:}X\times X\to\mathbb{C}$ definido positivos y espacios de Hilbert H reproductivos sobre X.

En lo anterior, dado un núcleo K definido positivo construíamos de dos formas diferentes sendos espacios vectoriales V y V_K. Veamos que existe una "isometría" entre ambos. Si $f = \sum_i c_i \delta_{z_i} \in V$ le asociamos $f' = \sum_i \bar{c}_i K_{z_i} \in V_K$ y esta aplicación preserva la "norma" (recordar que V es semi-normado). Pero mientras $f\in V$ tiene soporte finito, $f' \in V_K$ puede no tenerlo. En algunos casos resulta cómodo usar el espacio V semi-normado y en otros el pre-Hilbert V_K cuyos elementos son funciones menos simples.

Observación: Como se mencionó en la página 5, si $B{:}\ V \times V \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal y $B \geq 0$, entonces B es un núcleo definido positivo. En este caso, $f \in V$ puede identificarse con $B_f \in H_B$ donde $B(f,g) = \langle B_g, B_f\rangle$ y $V \subset H_B$.

Ejemplo: Si $X=\mathbb{Z}$, los elementos de V son sucesiones finitas $\{c_n\}_{n\in Z}$ que pueden identificarse con los polinomios trigonométricos $f(t)=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$ que son funciones muy sencillas. De modo que todo núcleo definido positivo $K:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ se corresponde con un producto semi-escalar $B(f,g)=\langle f,g\rangle=\sum_{i,j} c_i \overline{d_j} K(n_i,m_j)$ en el espacio $\mathcal{P}\sim V$ de los polinomios trigonométricos. En cambio, el espacio V_K tiene como elementos a funciones $f'(t)=\sum c_n K_n(t)$ que no pueden pensarse como polinomios (ya que los $K_n:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ no tienen necesariamente soporte finito). Sin embargo, es un pre-Hilbert cuyo completado es un espacio reproductivo.

En este ejemplo, $\{K_n\}_n$, pensado desde el punto de vista de problemas estocásticos, puede considerarse como un proceso de Hilbert en H_K, o sea, como una función que asocia a todo $n\in\mathbb{Z}$ un elemento $K_n\in H_K$ que verifica $K(m,n)=\langle K_n,K_m\rangle$ (covarianza del proceso).

En el caso de X general, los $x\in X$ pueden considerarse como tiempos no discretos y $x\mapsto K_x$ como un proceso de Hilbert cuya covarianza es el núcleo K.

Anteriormente, vimos un criterio sencillo para saber si un espacio de Hilbert H cuyos elementos son funciones $f:X\to\mathbb{C}$, es reproductivo:

H es reproductivo si y sólo si $\|f_n\|\to 0$ implica $f_n(y)\to 0$, $\forall y\in X$

También hay una fórmula sencilla para encontrar al núcleo K de un espacio reproductivo H sobre X: si $\{e_n=e_n(x)\}$ es una base ortonormal de H, entonces $K(x,y)=\sum_n e_n(x)\overline{e_n(y)}$, (que converge para cada x, y). En efecto, para cada y, $K_y(\cdot)=K(\,\cdot\,,y)\in H$, entonces $K_y=\sum_n\langle K_y,e_n\rangle e_n$, luego $K_y(x)=\sum_n\langle K_y,e_n\rangle e_n(x)$ (pues la convergencia en H implica la convergencia puntual). Además, $\langle K_y,e_n\rangle=\overline{\langle e_n,K_y\rangle}=\overline{e_n(y)}$, de donde resulta el enunciado.

Ejemplo 1: Espacio $H^2(D)$

Sea D={ $z\in\mathbb{C}$: $|z|<1$ } el disco. Si $f:D\to\mathbb{C}$ es analítica, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, definimos $\|f\|=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sea $H^2(D)=\{f:D\to\mathbb{C}$, analíticas tal que $\|f\|<\infty\}$. $H^2(D)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle f,g\rangle=\sum a_n\overline{b_n}$, si $f=\sum a_n z^n$ y $g=\sum b_n z^n$.

Para todo $z=re^{it}\in D$, $0\le r<1$, resulta

$$|f(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}\right|\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}=\|f\|c(r).$$

Luego, $\|f_k\|\to 0\Rightarrow|f_k(z)|\to 0,\ \forall z\in D$. Por lo tanto, $H^2(D)$ es reproductivo. Como (z^n) es una base de $H^2(D)$, se tiene que su núcleo es

$$K(z,u)=\sum_0^{\infty} z^n\overline{u}^n=\frac{1}{1-z\overline{u}},$$ llamado <u>núcleo de Szegö</u>.

Ejemplo 2: Espacio A^2

Sea D={ $z\in\mathbb{C}$: $|z|<1$ } y $A^2=\{f:D\to\mathbb{C}$, analíticas tal que $\|f\|<\infty\}$, donde $\|f\|=\left(\int_D|f(z)|^2dz\right)^{\frac{1}{2}}$. A^2 es un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle f,g\rangle=\int_D f\overline{g}\,dz$.
Se comprueba fácilmente que:

- $\left\{e_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n\right\}$ es una base ortonormal de A^2

- $f(z)=\sum_0^{\infty} a_n z^n\Rightarrow a_n=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\langle f,e_n\rangle$

- $\|f\|^2 = \pi\sum_0^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1}$

Luego, A^2 es el espacio de las funciones $f = \sum_0^\infty a_n z^n$ tales que $\sum_0^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1} < \infty$.

A^2 es reproductivo pues $\|f\| < \varepsilon \Rightarrow |a_n| \le \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\varepsilon \Rightarrow |f(z)| \le \sum_0^\infty \varepsilon\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}|z|^n \le \varepsilon c(z)$.

Su núcleo es $K(z,u) = \sum_0^\infty \frac{(n+1)}{\pi} z^n \bar{u}^n = \frac{1}{\pi(1-z\bar{u})^2}$, llamado <u>núcleo de Bergman</u>. En particular, $f(z) = \langle f, K_z\rangle = \frac{1}{\pi}\iint f(u)\frac{1}{(1-z\bar{u})^2}du$.

Ejemplo 3: Espacio F_1 de Fock

Sea F_1 el espacio de las funciones enteras F, es decir analíticas en todo el plano $\mathbb{C}$, con norma $\|F\|^2 = \int |F(z)|^2 e^{-\pi|z|^2} dz = \iint |F(x+iy)|^2 e^{-\pi(x^2+y^2)} dxdy < \infty$ y con producto escalar $\langle F, G\rangle = \int F(z)\overline{G(z)}e^{-\pi|z|^2} dz$. Se comprueba que:

- $\left\{ e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi^n}{n!}} z^n \right\}$ es base ortonormal
- $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \Rightarrow a_n = \langle F, e_n\rangle \sqrt{\frac{n!}{\pi^n}}$
- $|F(z)| \le e^{\frac{\pi}{2}|z|^2}\|F\|$

Luego, F_1 es reproductivo y su núcleo es $K(z,w) = \sum_0^\infty \frac{\pi^n}{n!}(z\bar{w})^n = e^{\pi z\bar{w}}$, de modo que $F(z) = \int F(w)e^{\pi z\bar{w}}e^{-\pi|w|^2} dw$.

Los espacios reproductivos de estos ejemplos tienen importantes aplicaciones en la teoría de funciones analíticas. (Ver [F])

Construcción de Gelfand-Naimark-Segal

Consideremos el caso particular en que X es un grupo abeliano con unidad e. $K: X \times X \to \mathbb{C}$ se dice de <u>Toeplitz</u> si $K(x,y) = k(x-y)$ con $k: X \to \mathbb{C}$, o sea $K(x+z, y+z) = K(x,y)\ \forall x,y,z \in X$. Si K es Toeplitz y definido positivo, entonces, en el espacio V_K se puede definir para cada $z \in X$ el operador isométrico U_z dado por $U_z K_x = K_{x-z}$. Por lo tanto, se extiende a un operador unitario $U_z: H_K \to H_K$. Resulta además que $z \mapsto U_z$ es una <u>representación unitaria</u> del grupo X, es decir $U_{x+z} = U_x U_z$, $U_e = I$, $U_{-z} = U_z^{-1}$. Más aún, K_e es un elemento <u>cíclico</u> de esta representación, o sea, los elementos $U_z K_e$ generan H_K.

Así pues, todo núcleo K de Toeplitz definido positivo origina una representación unitaria cíclica (H_K, U_z, K_e) del grupo X tal que $K(x,y) = \langle U_{-y} K_e, U_{-x} K_e \rangle = \langle U_{x-y} K_e, K_e \rangle$. Recíprocamente, si (H, U_z, ξ_0) es una representación unitaria de X en un espacio de Hilbert H con elemento cíclico ξ_0, el núcleo $K: X \times X \to \mathbb{C}$ dado por $K(x,y) = \langle U_{x-y}\xi_0, \xi_0 \rangle$ resulta definido positivo y de Toeplitz.

Finalmente, obtuvimos la siguiente

Construcción de Gelfand-Naimark-Segal

Existe una correspondencia (única salvo isomorfismos unitarios) $K \leftrightarrow (H, U_z, \xi_0)$ entre núcleos definido positivos de Toeplitz y representaciones unitarias cíclicas.

Desde el punto de vista de procesos, un núcleo K definido positivo es de Toeplitz si y sólo si el proceso de Hilbert $z \to K_z$ es estacionario, es decir, si existe un grupo de operadores unitarios $\{U_z\}_{z\in X}$ tales que $K_z = U_{-z}K_e$, o que la covarianza sólo dependa de y - x : $\langle K_x, K_y \rangle = \langle K_{x+z}, K_{y+z} \rangle$.

Observación: Como $e^{K(x,0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} K(x,0)^n$, si K es de Toeplitz definido positivo, e^K también lo es. Por lo tanto, e^K genera una representación cíclica $(\hat{H}, \hat{U}_z, \hat{\xi}_0)$ con $e^{K(x,y)} = \langle \hat{U}_{x-y}\hat{\xi}_0, \hat{\xi}_0 \rangle$. Existe además una relación entre las representaciones cíclicas de K y de e^K, vinculada a la teoría de espacios de Fock. (Ver [G])

Núcleos de operadores

Los resultados precedentes se extienden al caso en que K: X×X → L(N), con N Hilbert. En este caso, se asocia a K una forma sesquilineal B como sigue. Se considera el espacio V(N) de todas las funciones f: X→N a soporte finito, y para todo par z∈X, ξ∈N se define la función $\delta_{z\xi}: X \to N$ por

$$\delta_{z\xi}(x) = \begin{cases} \xi & \text{si } x = z \\ 0 & \text{si } x \neq z \end{cases}$$

De este modo, $\{\delta_{z\xi} : z \in X, \xi \in N\}$ generan V(N), o sea, toda f ∈ V(N) es de la forma $f = \sum \delta_{z_i\xi_i}$. Si $g = \sum \delta_{y_j\eta_j}$ es otro elemento de V(N), se define

$$B(f,g) = \langle f, g \rangle = \sum_{i,j} \langle K(y_j, z_i)\xi_i \ , \ \eta_j \rangle_N \tag{3}$$

Observemos que aquí en vez de sumas $\sum c_i \delta_{z_i}$, con $c_i \in \mathbb{C}$, tenemos sumas $\sum \xi_i \delta_{z_i}$, con $\xi_i \in N$, y en vez de $\sum K(y_j, z_i) c_i \overline{d}_j$ tenemos $\sum \langle K(y_j, z_i)\xi_i \ , \eta_j \rangle_N$.

Luego, K se dice definido positivo si B ≥ 0, es decir si B(f,f) ≥ 0, ∀ f, o sea si

$$\sum_{i,j} \langle K(z_j, z_i)\xi_i \ , \ \xi_j \rangle_N \geq 0 \quad \forall z_1, \ldots, z_n \in X, \ \forall \xi_1, \ldots, \xi_n \in N$$

También aquí puede ocurrir que $B(f,f) = 0$ para $f \neq 0$, o sea B es un producto semi-escalar. Para obtener un espacio de Hilbert H, se pasa a cociente ${}^{V(N)}\!/\!_{V(N)_0}$ y luego se completa, pero no está claro que los elementos de H sean funciones en X.

Veamos entonces el segundo procedimiento: a toda $\sum \delta_{z_i\xi_i} \in V(N)$ se le hace corresponder la suma $\sum K_{z_i}\xi_i : X \to N$ donde $\left(\sum K_{z_i}\xi_i\right)(x) = \sum K_{z_i}(x)\xi_i \in N$. Definimos pues, el espacio vectorial $V(N)_K$ cuyos elementos son las funciones $\sum K_{z_i}\xi_i$. Si $f = \sum K_{z_i}\xi_i$ y $g = \sum K_{y_j}\eta_j$, $\langle f,g\rangle_{V(N)_K} = B(f,g)$ está dado por la fórmula (3). Resulta la siguiente propiedad reproductiva: si $f \in V(N)_K$, $\xi \in N$, $y \in X$ entonces

$$\langle f(y),\xi\rangle_N = \langle f, K_y\xi\rangle_{V(N)_K}$$

De esto se sigue que $\langle f,g\rangle_{V(N)_K}$ es un producto escalar en $V(N)_K$ y al completarlo se obtiene un espacio de Hilbert H_K de funciones en X a valores en N que verifican la fórmula anterior.

Esto conduce a la siguiente definición: dado un conjunto X y un espacio de Hilbert N se dice que un espacio de Hilbert H es <u>N-reproductivo con base X</u> si los elementos de H son funciones f: $X \to N$ y si existe un núcleo $K: X \times X \to L(N)$ tal que:

1. $\forall\, y \in X$, $\forall\, \xi \in N$, la función $x \to K_y(x)\xi = K(x,y)\xi$ es un elemento de H (que se notará $K_y\xi$).
2. $\forall\, f \in H$, $\forall\, \xi \in N$, se verifica la propiedad reproductiva $\langle f(y),\xi\rangle_N = \langle f, K_y\xi\rangle_H$

Otra definición equivalente es: los elementos de H son funciones f: $X \to N$ y $\|f_n\|_H \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n(x)\|_N \to 0,\ \forall x \in X.$

Veamos la equivalencia entre las definiciones. Supongamos que vale la primera definición. Para cada $f \in H$ y $x \in X$, definimos la funcional $\ell_{xf} : N \to \mathbb{C}$ como $\ell_{xf}(\xi) = \langle \xi, f(x)\rangle_N$. Entonces $|\ell_{xf}(\xi)| = |\langle \xi, f(x)\rangle_N| = |\langle K_x\xi, f\rangle_H| \leq \|f\|\|K_x\xi\|$. Luego, el conjunto $\{\ell_{xf} : \|f\| \leq 1\}$ está puntualmente acotado, de donde, por Banach-Steinhauss, existe $c_x \geq 0$ tal que $\|\ell_{xf}\| \leq c_x$, $\forall \|f\| \leq 1$. Como $\|\ell_{xf}\| = \|f(x)\|$, resulta $\|f(x)\| \leq c_x\|f\|$, $\forall f \in H$, lo que equivale a la segunda definición. Supongamos ahora que vale la definición 2. Para cada $x \in X$, $\xi \in N$, definimos la funcional $b_{x\xi}: H \to \mathbb{C}$ como $b_{x\xi}(f) = \langle f(x), \xi \rangle_N$. $b_{x\xi}$ es continua pues de la definición 2 se deduce que $|b_{x\xi}(f)| \le \|f(x)\| \|\xi\| \le c_x \|f\| \|\xi\|$, $\forall f \in H$. Por lo tanto, existe $K_x\xi \in H$, tal que $b_{x\xi}(f) = \langle f, K_x\xi \rangle$. Para cada $x, y \in X$, sea $K(x,y): N \to N$ dada por $K(x,y)\xi = K_y\xi(x)$. Queremos ver que $K(x,y) \in L(N)$:

$$\|K(x,y)\xi\|^2 = \|K_y\xi(x)\|^2 \le c_x^2 \|K_y\xi\|^2 = c_x^2 \langle K_y\xi, K_y\xi \rangle = c_x^2 \langle K_y\xi(y), \xi \rangle \le c_x^2 \|K_y\xi(y)\| \|\xi\| \quad (*)$$

Análogamente, $\|K_y\xi(y)\|^2 \le c_y^2 \|K_y\xi(y)\| \|\xi\|$, de donde $\|K_y\xi(y)\| \le c_y^2 \|\xi\|$. Reemplazando en (*), resulta $\|K(x,y)\xi\|^2 \le c_x^2 c_y^2 \|\xi\|^2$. Luego $K(x,y) \in L(N)$ y además, $K: X \times X \to L(N)$ es definido positivo. Con lo cual queda probada la equivalencia.

Luego, todo núcleo definido positivo $K: X \times X \to L(N)$ origina un espacio de Hilbert H_K N-reproductivo con base X, y viceversa. Obsérvese que ahora los K_y no son elementos de H_K=H (K_y: $X \to L(N)$). Pero $K_y\xi \in$ H, luego podemos pensar a K_y como un operador, K_y: $N \to H$.

Una función que asigna a cada $y \in X$ un operador K_y: $N \to H$ se llama un <u>proceso de Kolmogorov</u>. Observemos que de la propiedad reproductiva resulta

$$\langle K(x,y)\xi, \eta \rangle_N = \langle K_y\xi, K_x\eta \rangle_H = \langle K_x^* K_y \xi, \eta \rangle_H$$

de donde $K(x,y) = K_x^* K_y$, llamada <u>factorización de Kolmogorov</u>, pues representa a la función K(x,y) de dos variables mediante el producto de funciones de una variable.

En el fondo, lo que hicimos en esta construción fue asociarle al núcleo $K: X \times X \to L(N)$ un núcleo escalar $K_1: Y \times Y \to \mathbb{C}$, con $Y = X \times N$ dado por $K_1((x,\xi),(y,\eta)) = \langle K(x,y)\eta, \xi \rangle_N$ y aplicamos la teoría conocida a K_1.

Sea ahora, X un grupo abeliano con unidad e y K: $X \times X \to L(N)$ un núcleo definido positivo de Toeplitz ($K(x,y) = k(x-y) \in L(N)$) y H_K=H el espacio de Hilbert asociado a K. Como antes asociamos a cada $z \in X$ un operador unitario $U_z: H \to H$ dado por $U_z(K_y\xi) = K_{y-z}\xi$. Sea $L \subseteq H$ el subespacio formado por los elementos

$K_e\xi,\ \ \xi \in N$. L es un subespacio cíclico, o sea, $\{U_z(K_e\xi):\ z \in X, \xi \in N\} = \{U_z L:\ z \in X\}$ genera H.

Ahora tenemos un espacio de Hilbert H, una representación unitaria $z \mapsto U_z$ del grupo X en H, con un conjunto cíclico $L = \{K_e\xi:\ \xi \in N\}$. Se verifica $\forall \xi, \eta \in N$,

$$\langle K(x,y)\xi, \eta\rangle_N = \langle U_{-y}(K_e\xi), U_{-x}(K_e\eta)\rangle_H = \langle U_{x-y}K_e\xi, K_e\eta\rangle_H = \langle K_e^* U_{x-y} K_e\xi, \eta\rangle_N$$

de donde $K(x,y) = K_e^* U_{x-y} K_e$.

Llamando $\Gamma = K_e : N \to L$, la fórmula anterior se escribe $K(x,y) = \Gamma^* U_{x-y} \Gamma$ lo que se denomina <u>factorización de Naimark</u>. Si además $K(e,e) = I_N$, entonces $\Gamma = K_e$ es isométrico, de modo que N puede identificarse con el subespacio $K_e N = L \subseteq H$, y en este caso tenemos que $N \subseteq H$, Γ es la inyección de N en H y $\Gamma^* = P_N$ es la proyección ortogonal de H sobre N. Por otra parte, toda función $s: X \to L(N)$ tiene un núcleo de Toeplitz asociado K definido por $K(x,y) = s(x-y)$ y s se dice definida positiva si lo es el núcleo K. Queda así probado el

Teorema de dilatación de Naimark
(Construcción de Gelfand-Naimark-Segal generalizada)

Si X es un grupo y $s: X \to L(N)$ es una función definida positiva con $s(e) = I_N$, entonces existen un espacio de Hilbert $H \supseteq N$ y una representación unitaria $x \mapsto U_x$ de X en H tal que $s(x) = P_N U_x|_N$ (compresión de U_x a N).

Un caso especial e importante es cuando $X = \mathbb{Z}$ y $s(n) = A^n$, $n \geq 0$; $s(n) = (A^{-n})^*$, $n < 0$, donde $A \in L(N)$ es una contracción. En este caso s es definida positiva y la dilatación de Naimark se reduce al teorema de dilatación de Nagy (ver [C]).

Por otra parte, Stinespring probó un teorema de factorización para funciones s de un álgebra C* $\mathcal{A}$ en $L(N)$, lo que condujo a importantes aplicaciones en álgebras C* que se explican más adelante. Para estudiar problemas de la Mecánica Cuántica Probabilista, Holevo dio una unificación de las factorizaciones de Nagy y Stinespring, para lo cual introdujo núcleos del tipo $\Phi: X \times X \to L(\mathcal{A}, L(N))$ que pasamos a definir.

II. FACTORIZACION DE STINESPRING - ARVESON - HOLEVO

Sean X un conjunto, N un espacio de Hilbert y $\mathcal{A} \subseteq L(N)$ un álgebra C*. Definamos $L(\mathcal{A},L(N)) = \{F: \mathcal{A} \to L(N)$ / F es lineal y acotado$\}$ y $\Phi: X \times X \to L(\mathcal{A},L(N))$ un núcleo que asocia a todo par $x, y \in X$ el operador $\Phi(x, y) \in L(\mathcal{A},L(N))$. Se dice que Φ es definido positivo si

$$\sum_{i,j} \left\langle \Phi(x_j, x_i)(A_j^* A_i)\xi_i, \xi_j \right\rangle_N \geq 0 \tag{5}$$

para todo $\{x_1,..,x_n\} \in X$, $\{\xi_1,..,\xi_n\} \in N$, $\{A_1,..,A_n\} \in \mathcal{A}$.

Teorema de factorización de Stinespring-Arveson-Holevo

Si Φ: $X \times X \to L(\mathcal{A},L(N))$ es definido positivo, existen un espacio de Hilbert H, un proceso de Kolmogorov $x \mapsto K_x$ (donde $K_x: N \to H$, $\forall x \in X$) y una representación $\rho: \mathcal{A} \to L(H)$ del álgebra $\mathcal{A}$ por operadores en H tales que $\forall\ x, y \in X$, $A \in \mathcal{A}$

$$\Phi(x,y)A = K_x^* \rho(A) K_y$$

Demostración: Sean $Y = X \times \mathcal{A}$ y K: $Y \times Y \to L(N)$ el núcleo dado por:

$$K((x,A),(y,B)) = \Phi(x,y)(A^*B) \in L(N), \quad \forall\ (x,A),\ (y,B) \in Y$$

Como Φ es definido positivo, resulta K definido positivo. Luego, por la factorización de Kolmogorov es $K((x,A),(y,B)) = K^*_{(x,A)} K_{(y,B)}$, donde $K_{(x,A)} = K(\,\cdot\,,(x,A))$ es la función que asigna a cada $\xi \in N$ la función $K(\,\cdot\,,(x,A))\xi$: $Y \to N$. Entonces, si definimos el espacio de Hilbert H como el generado por las combinaciones lineales finitas $f = \sum_i K(\,\cdot\,,(y_i,A_i))\xi_i$, resulta $K_{(x,A)}: N \to H$.

Sea ρ: $\mathcal{A} \to L(H)$ definido por

$$\rho(C)\left(\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,A_i))\xi_i\right)=\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,CA_i))\xi_i \qquad \forall C\in\mathcal{A}$$

Se comprueba que ρ es una representación del álgebra $\mathcal{A}$ en $L(H)$, usando la definición de K y que el producto escalar en H es:

$$\left\langle \sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,A_i))\xi_i, \sum_j K\left(\ \cdot\ ,(x_j,B_j)\right)\eta_j \right\rangle_H = \sum_{i,j}\left\langle K\left((x_j,B_j)\ ,\ (y_i,A_i)\right)\xi_i\ ,\ \eta_j\right\rangle_N$$

Veamos solamente que $\rho(C)\in L(H)$, $\forall C\in\mathcal{A}$. Si $C\in\mathcal{A}$, sea $M\ /\ M\geq\|C\|$.

Entonces, $\exists\ D\in\mathcal{A}$ tal que $1-\dfrac{C^*C}{M^2}=D^*D$. Luego,

$$\left\|\rho(C)\left(\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,A_i))\xi_i\right)\right\|^2\leq M^2\left\|\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,A_i))\xi_i\right\|^2$$

pues:

$$\left\|\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,A_i))\xi_i\right\|^2-\frac{1}{M^2}\left\|\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,CA_i))\xi_i\right\|^2=\sum_{i,j}\left\langle \Phi(y_j,y_i)\left(A_j^*(1-\tfrac{1}{M^2}C^*C)A_i\right)\xi_i\ ,\xi_j\right\rangle$$

$$=\sum_{i,j}\left\langle \Phi(y_j,y_i)\left((DA_j)^*(DA_i)\right)\xi_i\ ,\xi_j\right\rangle=\left\|\sum_i K(\ \cdot\ ,(y_i,DA_i))\xi_i\right\|^2\geq 0.$$

Por lo tanto, $\|\rho(C)\|\leq M,\quad \forall M\geq\|C\|$, de donde $\|\rho(C)\|\leq\|C\|$.

Observemos que $\rho(A)K_{(x,I)}=K_{(x,A)}$, pues

$$\rho(A)K_{(x,I)}\xi=\rho(A)K(\ \cdot\ ,(x,I))\xi=K(\ \cdot\ ,(x,A))\xi=K_{(x,A)}\xi \qquad \forall\xi\in N$$

Por lo tanto,

$$\Phi(x,y)A=\Phi(x,y)(I^*A)=K\left((x,I),(y,A)\right)=K^*_{(x,I)}K_{(y,A)}=K^*_{(x,I)}\rho(A)K_{(y,I)}$$

Llamando $K_x=K_{(x,I)}$ resulta la tesis. ■

Si X es un grupo abeliano, el núcleo Φ: $X\times X\to L(\mathcal{A},L(N))$ se dice de Toeplitz si $\Phi(x,y)=\Phi(x+z,y+z) \qquad \forall x,y,z\in X$.

Teorema de factorización de Stinespring-Holevo para núcleos de Toeplitz

Si X es un grupo abeliano y Φ: $X \times X \to L(\mathcal{A}, L(N))$ es definido positivo y de Toeplitz, existen un espacio de Hilbert H, una representación ρ del álgebra $\mathcal{A}$ en $L(H)$, una representación unitaria de grupo X: $z \mapsto U_z \in L(H)$ y $\Gamma: N \to H$, tales que los operadores U_z conmutan con los $\rho(A)$. Además, $\forall x, y \in X$, $\forall A \in \mathcal{A}$ se verifica:

$$\Phi(x,y)A = \Gamma^* U_{x-y} \rho(A) \Gamma$$

Demostración: Sean H, K y ρ como en el teorema anterior. Definamos para cada $z \in X$, $U_z \in L(H)$ como

$$U_z\big(K(\,\cdot\,,(y,A))\xi\big) = K(\,\cdot\,,(y-z,A))\xi \quad \forall y \in X,\ \forall \xi \in N,\ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Usando que Φ es de Toeplitz, resulta U_z unitario con $U_z^* = U_{-z}$, $\forall z$. Claramente U_z conmuta con $\rho(A)$, $\forall z$, $\forall A$. Sea $\Gamma: N \to H$, $\Gamma = K_{(0,I)}$, entonces

$$U_{-z}\Gamma = U_{-z}K_{(0,I)} = K_{(z,I)}.$$

Por el teorema anterior,

$$\Phi(x,y)A = K^*_{(x,I)}\rho(A)K_{(y,I)} = (U_{-x}\Gamma)^*\rho(A)U_{-y}\Gamma = \Gamma^* U_x \rho(A) U_{-y}\Gamma = \Gamma^* U_{x-y}\rho(A)\Gamma. \quad \blacksquare$$

Casos particulares:

1- Si $\mathcal{A} = \{\lambda I,\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, $\Phi(x,y)$: $\mathcal{A} \to L(N)$ queda determinado por $K(x,y) = \Phi(x,y)I \in L(N)$ y las factorizaciones de Stinespring-Arveson-Holevo y Stinespring-Holevo se reducen a las de Kolmogorov y Naimark respectivamente, para núcleos K: $X \times X \to L(N)$.

2- Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C* general y X se compone de un solo punto x_0, entonces el núcleo Φ: $X \times X \to L(\mathcal{A}, L(N))$ puede identificarse con la aplicación $\Phi = \Phi(x_0, x_0) \in L(\mathcal{A}, L(N))$. En este caso la condición de ser Φ definido positivo se reduce a

$$\sum_{i,j} \left\langle \Phi(A_j^* A_i)\xi_i, \xi_j \right\rangle_N \geq 0 \quad \forall \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in N,\ \{A_1, \dots, A_n\} \in \mathcal{A} \qquad (6)$$

y la factorización de Stinespring-Holevo queda $\Phi(A) = \Gamma^* \rho(A) \Gamma$.

Una aplicación lineal acotada Φ: $\mathcal{A} \to L(N)$ que verifica (6) se llama completamente positiva. Tales Φ aparecen en tópicos importantes de la teoría de operadores. Recordemos algunas nociones pertinentes.

Si $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $|a| \leq 1$ si y sólo si $-1 \leq a \leq 1$, y análogamente si A es un operador en un espacio de Hilbert real, $\|A\| \leq 1$ si y sólo si $-I \leq A \leq I$. De modo que las propiedades de la norma de A pueden expresarse mediante las del orden.

Esto no es cierto si $a \in \mathbb{C}$ o si $A \neq A^*$. Sin embargo, el criterio de Sylvester dice que $\forall\ a \in \mathbb{C}$ vale que $|a| \leq 1$ si y sólo si la matriz $\begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix} \geq 0$, pues su deteminante es $1 - a\bar{a} = 1 - |a|^2 \geq 0$. Más generalmente, si $\mathcal{A}$ es un álgebra C* y $A \in \mathcal{A}$, se dice que $A \geq 0$ si $A = B^*B$ con $B \in \mathcal{A}$. Si $M_n(\mathcal{A})$ es el conjunto de todas las matrices de $n \times n$ $[A_{ij}]$, con $A_{ij} \in \mathcal{A}$, $M_n(\mathcal{A})$ es también un álgebra C*, de modo que se puede hablar de $[A_{ij}] \geq 0$. Se tiene entonces que $A \in \mathcal{A}$ verifica $\|A\| \leq 1$ si y sólo si $\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \geq 0$, o sea la noción de norma en $\mathcal{A}$ se puede reducir a la de orden en $M_2(\mathcal{A})$.

Del criterio de Sylvester se sigue la siguiente propiedad que se usará más adelante:

Proposición

Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales, $B_i: V_i \times V_i \to \mathbb{C}$, $B_i \geq 0$, i=1,2 y $B: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ formas sesquilineales. Entonces, son equivalentes:

(a) $|B(f_1, f_2)| \leq B_1(f_1, f_1)^{\frac{1}{2}} B_2(f_2, f_2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall (f_1, f_2) \in V_1 \times V_2$

(b) $B_1(f_1, f_1) + B(f_1, f_2) + \overline{B(f_1, f_2)} + B_2(f_2, f_2) \geq 0, \quad \forall (f_1, f_2) \in V_1 \times V_2$

Demostración:

$\Rightarrow$) (a) $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} B_1(f_1, f_1) & B(f_1, f_2) \\ \overline{B(f_1, f_2)} & B_2(f_2, f_2) \end{bmatrix} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 \quad \lambda_2)\begin{bmatrix} B_1(f_1,f_1) & B(f_1,f_2) \\ \overline{B(f_1,f_2)} & B_2(f_2,f_2) \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{pmatrix} \geq 0, \ \forall(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

Tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ resulta lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$) Si en (b) tomamos $\lambda_1 f_1$ y $\lambda_2 f_2$ en vez de f_1 y f_2, $\begin{bmatrix} B_1(f_1,f_1) & B(f_1,f_2) \\ \overline{B(f_1,f_2)} & B_2(f_2,f_2) \end{bmatrix} \geq 0.$ ■

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra C*, se puede probar que los elementos positivos de $M_n(\mathcal{A})$ cumplen la siguiente propiedad (ver [Ta, cap.4]):

$[A_{ij}]$ es un elemento positivo de $M_n(\mathcal{A})$ (es decir, $[A_{ij}] = [B_{ij}]^*[B_{ij}]$, $[B_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$)

$\Leftrightarrow$ $[A_{ij}]$ es suma finita de matrices de la forma $[C_i^* C_j]$, $C_i \in \mathcal{A}$

$$\Leftrightarrow \sum_{i,j} C_i^* A_{ij} C_j \geq 0 \text{ en } \mathcal{A}, \ \forall\, C_1,\ldots,C_n \in \mathcal{A} \tag{7}$$

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras C*. Una aplicación lineal Φ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ se dice <u>positiva</u> si $\forall A \geq 0$ en $\mathcal{A}$, $\Phi(A) \geq 0$ en $\mathcal{B}$. Φ se dice <u>completamente positiva</u> si $\forall n \in \mathbb{N}$, Φ_n: $M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$, definida por $\Phi_n([A_{ij}]) = [\Phi(A_{ij})]$, es positiva.

De las propiedades (7) se sigue que Φ: $\mathcal{A} \to L(N)$ es completamente positiva si y sólo si verifica (6). Luego, de la factorización Stinespring-Holevo resulta que si Φ es completamente positiva, $\forall\ A \in \mathcal{A}$, $\Phi(A) = \Gamma^*\rho(A)\Gamma$, donde $\Gamma: N \to H$, y ρ es una representación de $\mathcal{A}$ en $L(H)$, para H Hilbert. Esto se llama la **factorización de Stinespring**. Por otra parte, si vale $\Phi(A) = \Gamma^*\rho(A)\Gamma$, entonces Φ es completamente positiva pues

$$\sum_{i,j}\langle \Phi(A_j^* A_i)\xi_i,\xi_j\rangle = \sum_{i,j}\langle \Gamma^*\rho(A_j^* A_i)\Gamma\xi_i,\xi_j\rangle = \sum_{i,j}\langle \Gamma^*\rho(A_j)^*\rho(A_i)\Gamma\xi_i,\xi_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j}\langle \rho(A_i)\Gamma\xi_i, \rho(A_j)\Gamma\xi_j\rangle = \left\|\sum_i \rho(A_i)\Gamma\xi_i\right\|^2 \geq 0$$

Se prueba que si $\mathcal{A}$ o $\mathcal{B}$ es un álgebra conmutativa, entonces toda aplicación positiva es completamente positiva. Luego, la noción de completa positividad sólo tiene interés en álgebras no conmutativas. Esta noción tiene importantes aplicaciones en Mecánica Cuántica y en álgebras C*. Por ejemplo, el Teorema de Hahn-Banach dice que si V es un subespacio de un espacio normado W, entonces toda funcional lineal acotada $f: V \to \mathbb{C}$ se extiende a una funcional lineal acotada $\tilde{f}: W \to \mathbb{C}$ con igual norma. Este teorema se puede extender al caso $f: V \to E$, con E normado si y sólo si E es isométrico a $C(K)$ con K un espacio de Stone. Un Teorema de Krein dice que si S es un $*$-subespacio que contiene la identidad de un álgebra C* $\mathcal{A}$, entonces toda funcional positiva $\rho: S \to \mathbb{C}$ se extiende a una funcional positiva $\tilde{\rho}: \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. El Teorema de Krein es falso para aplicaciones positivas $\varphi: S \to L(N)$ con N Hilbert. Sin embargo, Arveson [Arv] probó que si $\varphi: S \to L(N)$ es completamente positiva, entonces existe una extensión $\tilde{\varphi}: \mathcal{A} \to L(N)$ completamente positiva. Teniendo en cuenta que las aplicaciones lineales positivas $\rho: S \to \mathbb{C}$ son completamente positivas, se ve que el Teorema de Arveson extiende al de Krein, y que la noción de completa positividad es esencial para generalizar el Teorema de Hahn-Banach a aplicaciones que "conservan el orden" (en vez de la norma).

El problema de cuándo es cierto el Teorema de Arveson si se reemplaza $L(N)$ por un $*$-subespacio V que contiene la identidad fue resuelto para álgebras de Von Neumann por A. Connes. Para enunciados más precisos y una exposición detallada del tema ver [E]. Para nociones básicas sobre completa positividad ver el capítulo 4 de [Ta].

La noción de completa positividad fue introducida en [St] y desarrollada en [Arv]. La factorización de Stinespring es esencialmente equivalente al "teorema principal" de [Na]. Para operadores acotados hay una noción análoga de completa acotación, ver [Arv], [P]. La teoría de espacios reproductivos fue profundizada en [Sc] a través de los núcleos positivos de Schwartz, con aplicaciones a ecuaciones diferenciales, teoría de distribuciones y probabilidades.

III. PROBLEMAS DE MOMENTOS Y FORMAS DE HANKEL

Sean $\mathbb{T} \sim [0,2\pi)$, $C(\mathbb{T})$ el espacio de las funciones continuas, $\mathcal{P}$ el espacio de los polinomios trigonométricos y $\mathcal{P}_1$ (respect. $\mathcal{P}_2$) el de los polinomios analíticos (antianalíticos), de modo que los elementos de $\mathcal{P}$ son combinaciones lineales finitas de las funciones e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$, y los de $\mathcal{P}_1$ ($\mathcal{P}_2$) son combinaciones lineales de e^{int}, $n \geq 0$ $(n < 0)$. Luego, toda forma sesquilineal B: $\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{C}$ está determinada por el núcleo K:$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $K(m,n) = B(e^{imt}, e^{int})$, $m,n \in\mathbb{Z}$, mientras que una forma sesquilineal B_0:$\mathcal{P}_1\times\mathcal{P}_2\to\mathbb{C}$ está determinada por el núcleo K_0:$\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{<0}\to\mathbb{C}$, $K_0(m,n) = B_0(e^{imt}, e^{int})$, $m \geq 0$, $n < 0$.

El núcleo K es de Toeplitz, $K(m,n) = K(m+1,n+1)$, si y sólo si la forma B verifica $B(f,g) = B(e^{it}f, e^{it}g)$, $\forall f,g \in\mathcal{P}$, y en este caso B se dice de Toeplitz. Análogamente, K es definido positivo si y sólo si $B \geq 0$, es decir si $B(f,f) \geq 0$, $\forall f \in \mathcal{P}$.

Teorema de Herglotz-Bochner

Una forma sesquilineal acotada B: $\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{C}$ es de Toeplitz y positiva si y sólo si existe una medida positiva μ en $\mathbb{T}$ tal que $B(f,g) = \int f\bar{g}\,d\mu$. Equivalentemente, un núcleo K:$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ es de Toeplitz y definido positivo si y sólo si existe una medida positiva μ tal que $K(m,n) = \int e^{imt}\overline{e^{int}}\,d\mu = \hat{\mu}(n-m)$.

Vamos a ver dos demostraciones.

Demostración 1: Por el Lema de Fejer-Riesz (ver página 5), $f \in \mathcal{P}$ verifica que $f(t) \geq 0$, $\forall t \Leftrightarrow f = g\bar{g}$, $g \in \mathcal{P}_1$. Supongamos que B es de Toeplitz y $B \geq 0$.

Sea $\ell: \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ dada por $\ell(f) = B(f,1)$. Entonces, ℓ es una funcional lineal y $B(f,g) = B(f\overline{g},1) = \ell(f\overline{g})$. Además, ℓ es positiva pues $f \geq 0 \Rightarrow f = g\overline{g}$, entonces $\ell(f) = \ell(g\overline{g}) = B(g,g) \geq 0$.

Como ℓ es una funcional acotada y positiva en $\mathcal{P}$, ℓ se extiende a una funcional lineal acotada y positiva en $C(\mathbb{T})$. Por el Teorema de representación de Riesz, existe una medida μ (que resulta positiva) tal que $\ell(f) = \int f\, d\mu$. Luego, $B(f,g) = \int f\overline{g}\, d\mu$. ∎

Demostración 2: Si K es de Toeplitz y definido positivo, por Gelfand-Naimark-Segal existen un espacio de Hilbert H, un operador unitario $U: H \to H$ y $\xi \in H$ tales que $K(m,n) = \langle U^{m-n}\xi, \xi \rangle$. Si $E(\Delta)$ es la medida espectral de U y si $\mu(\Delta) = \langle E(\Delta)\xi, \xi \rangle$ entonces el Teorema espectral dice que $\langle U^{m-n}\xi, \xi \rangle = \int e^{i(m-n)t}\, d\mu(t)$, donde $\mu \geq 0$.

Luego, $K(m,n) = \int e^{imt}\, \overline{e^{int}}\, d\mu$, como queríamos probar. ∎

Recíprocamente, conociendo el Teorema de Herglotz-Bochner se puede probar el Teorema espectral, o sea, estos dos teoremas son lógicamente equivalentes.

Teorema de Herglotz-Bochner para núcleos de operadores

Sean N un espacio de Hilbert y $K: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to L(N)$ un núcleo. Si K es de Toeplitz y definido positivo existe una medida $\mu \geq 0$ a valores operadores, $\mu(\Delta) \in L(N)$ para $\Delta \subseteq \mathbb{T}$, tal que

$$K(m,n) = \int e^{i(m-n)t}\, d\mu(t) = \hat{\mu}(n-m)$$

Demostración: Por la Factorización de Naimark, existen un espacio de Hilbert H, un operador unitario U en H y una aplicación lineal acotada $\Gamma: N \to H$ tales que $K(m,n) = \Gamma^* U^{m-n} \Gamma$. Sea $\mu(\Delta) = \Gamma^* E(\Delta) \Gamma$, donde $E(\Delta)$ es la medida espectral de U.

Por el Teorema espectral, $U^{m-n} = \int e^{i(m-n)t}\, dE$, de donde resulta que

$$K(m,n) = \Gamma^* \left(\int e^{i(m-n)t}\, dE \right) \Gamma = \int e^{i(m-n)t}\, d\mu,$$

donde $\mu(\Delta)$ es un operador positivo en N (pero no necesariamente un proyector como $E(\Delta)$). ■

El teorema precedente resuelve el Problema básico de Momentos Trigonométricos: dada una sucesión $\{c_m\}$, $m \in \mathbb{Z}$, ¿cuándo existe una medida $\mu \geq 0$ tal que $c_m = \hat{\mu}(m)$, $\forall m \in \mathbb{Z}$? En efecto, existe $\mu \geq 0$ si y sólo si el núcleo de Toeplitz $K(m,n) = c_{n-m}$ es definido positivo. Es decir, existe $\mu \geq 0$ si y sólo si $\sum_{m,n} c_{n-m}\lambda_m\overline{\lambda_n} \geq 0$ para toda sucesión $\{\lambda_n\}$ a soporte finito.

Vemos pues que propiedades del orden del álgebra $\mathcal{P}$ y la factorización de Naimark proporcionan soluciones al Primer Problema de Momentos (aún si los $c_n \in L(N)$). En realidad, las nociones de núcleos reproductivos y propiedades de orden del álgebra se originaron en la teoría clásica de momentos que les precedió.

El siguiente problema que se presenta es el Problema truncado de Momentos: dados $s_n \in \mathbb{C}$, con $n \in [-N,N]$, ¿existe una medida en $\mathbb{T}$ $\mu \geq 0$ tal que $s_n = \hat{\mu}(n)$, $\forall n \in [-N,N]$?

Para resolverlo necesitamos los siguientes conceptos. Un operador U:H→H se dice semi-unitario si es lineal e isométrico, pero no necesariamente suryectivo. Se dice que U es una isometría en H, si el dominio de definición D y el rango R de U son subespacios cerrados de H y si U:D→R es lineal e isométrico.

Lema de extensión unitaria de una isometría

Sea U:D→R una isometría en H.

a) Si $\dim D^{\perp} = \dim R^{\perp}$, existe un operador unitario $U_1 : H \to H$ tal que $U_1|_D = U$ y $U_1^{-1}|_R = U^{-1}$

b) Si $\dim D^{\perp} \neq \dim R^{\perp}$, existen un espacio de Hilbert $\hat{H}$ y un operador unitario $\hat{U}: \hat{H} \to \hat{H}$ tales que H es subespacio de $\hat{H}$, $\hat{U}|_D = U$ y $\hat{U}^{-1}|_R = U^{-1}$.

Demostración:

a) Si $\dim D^{\perp} = \dim R^{\perp}$, existe un operador unitario $U_0 : D^{\perp} \to R^{\perp}$. Como $H = D \oplus D^{\perp} = R \oplus R^{\perp}$, si $x \in H$, $x = d + d_0$, $d \in D$, $d_0 \in D^{\perp}$. Definiendo $U_1 x = Ud + U_0 d_0$, resulta lo pedido.

b) Sea H_1 un espacio de Hilbert de dimensión infinita con $\dim H_1 \geq \dim H$ y sea $\hat{H} = H \oplus H_1$. Llamemos $\hat{D}$ al complemento ortogonal de D en $\hat{H}$ y $\hat{R}$ al complemento ortogonal de R en $\hat{H}$, entonces, $\hat{D} = D^{\perp} \oplus H_1$, $\hat{R} = R^{\perp} \oplus H_1$ y tienen la misma dimensión. Por a) queda demostrado b). ∎

Teorema de Herglotz-Bochner para sucesiones truncadas

Sean $s_n \in \mathbb{C}$, con $n \in [-N, N]$, $X = [0, N]$ y $K : X \times X \to \mathbb{C}$ el núcleo definido por $K(m,n) = s_{m-n}$, si $m, n \in X$. K es definido positivo si y sólo si existe una medida $\mu \geq 0$ en $\mathbb{T}$ tal que $s_n = \hat{\mu}(-n)$, $\forall n \in [-N, N]$.

Demostración: Si K es definido positivo existe un espacio de Hilbert H que tiene a K como núcleo reproductivo: cada función $K_n(m) = K(m,n)$ es un elemento de H, las K_n generan a H y $\forall m, n \in X$, $K(m,n) = \langle K_n, K_m \rangle_H$. Si D es el subespacio de H generado por $\{K_m : 0 \leq m \leq N-1\}$ y R es el subespacio de H generado por $\{K_m : 1 \leq m \leq N\}$, sea $U: D \to R$ lineal definido por $UK_m = K_{m+1}$, $\forall m \in [0, N-1]$, que resulta una isometría por ser K de Toeplitz.

Por el lema anterior, existen un espacio $\hat{H} \supseteq H$ y un operador unitario $\hat{U} : \hat{H} \to \hat{H}$ tales que $\hat{U}\big|_D = U$ y $\hat{U}^{-1}\big|_R = U^{-1}$. Luego, $\forall m \in [0, N-1]$, $\hat{U}K_m = UK_m = K_{m+1}$. Por lo tanto, $\forall m \in X$, $s_m = K(m,0) = \langle K_0, K_m \rangle = \langle K_0, \hat{U}^m K_0 \rangle$.

Como $\hat{U}$ es unitario, si $E(\Delta)$ es su medida espectral y $\mu(\Delta) = \langle K_0, E(\Delta) K_0 \rangle_{\hat{H}}$, se tiene que $s_m = \int_0^{2\pi} e^{imt}\, d\mu$, $\forall m \in X$. Veamos que esta fórmula también vale para $m \in [-N, 0]$. En efecto, $s_{-m} = \overline{s_m}$ si $m \geq 0$ pues, como K es definido positivo, es hermitiano. ∎

Problemas de Caratheodory y Schur

El problema de momentos está relacionado con problemas de interpolación de funciones analíticas. Si D es el disco, una función analítica f en D se dice de la clase C de Caratheodory si $\operatorname{Re} f(z) > 0,\ \forall z \in D$. f se dice de la clase S de Schur si $|f(z)| < 1,\ \forall z \in D$; en este caso existe el límite $f(e^{it}) = \lim_{r\to 1} f(re^{it})$ para casi todo $e^{it} \in \mathbb{T}$, y $f(e^{it}) \in H^\infty$, es decir $f \in L^\infty$ y $\hat{f}(n) = 0,\ \forall n < 0$. Luego, es lo mismo dar una función f: $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ con $f \in H^\infty$, $\|f\|_\infty \le 1$ $(|f| \not\equiv 1)$, que dar una función analítica $f{:}D \to \mathbb{C}$ de la clase S.

El Problema de Interpolación de Caratheodory es: dada una sucesión $\{c_n\}_{n\ge 0}$, ¿cuándo existe $f \in C$ tal que $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$?

El Problema de Schur (o Caratheodory-Fejer) es: dada una sucesión $\{s_n\}_{n\ge 0}$, ¿cuándo existe $f \in S$ tal que $f(z) = s_0 + s_1 z + \ldots + s_n z^n + \ldots$?

Como $f \in C \Leftrightarrow \dfrac{f-1}{f+1} \in S$, el problema de Schur puede deducirse del de Caratheodory y viceversa.

Sea μ una medida positiva. Si $c_n = \hat{\mu}(-n),\ n \ge 0$ y $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, entonces $f \in C$. En efecto, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int e^{int} z^n\, d\mu(t) = \int \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(t+\theta)}\, d\mu(t) = \int \frac{1}{1-re^{i(t+\theta)}}\, d\mu(t)$, y como $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i(t+\theta)}}\right) = \frac{1 - r\cos(t+\theta)}{\left|1-re^{i(t+\theta)}\right|^2} > 0$ se tiene que $\operatorname{Re} f(z) \ge 0$ si $z = re^{i\theta} \in D$.

Observemos además que si $c_n = \hat{\mu}(-n),\ n > 0$; $c_0 + \overline{c}_0 = \hat{\mu}(0)$ y $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(-n) z^n - \overline{c}_0$, de donde, si $z = re^{i\theta} \in D$,

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(-n) z^n\right) - \frac{\hat{\mu}(0)}{2} = \int \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-re^{i(t+\theta)}} - \frac{1}{2}\right) d\mu(t) \ge 0$$

con lo cual, también resulta $f \in C$.

Recíprocamente, si $f \in C$ con $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, veamos que existe una medida positiva μ tal que $\hat{\mu}(-n) = c_n$, $n > 0$; $\hat{\mu}(-n) = \overline{c}_{-n}$, $n < 0$; $\hat{\mu}(0) = c_0 + \overline{c}_0$. En efecto, definiendo $a_n = c_n$, $n > 0$; $a_n = \overline{c}_{-n}$, $n < 0$; $a_0 = c_0 + \overline{c}_0$, resulta

$$2 \operatorname{Re} f(re^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{int} \quad \forall\ 0 \le r < 1.$$

Por ser $f \in C$, para cada $0 \le r < 1$ y $g(e^{it}) = \sum_n \lambda_n e^{int} \in \mathcal{P}$, resulta

$$0 \le \int_0^{2\pi} 2 \operatorname{Re} f(re^{it})\, g(e^{it})\, \overline{g}(e^{it})\, dt = \sum_{n,m} a_{n-m}\, r^{n-m}\, \lambda_n\, \overline{\lambda}_m .$$

Tomando límite cuando r tiende a 1, resulta el núcleo $K(n,m) = a_{n-m}$ definido positivo. Por el Teorema de Herglotz-Bochner, existe una medida positiva que verifica lo pedido.

Luego, el problema de Caratheodory tiene solución si y sólo si los c_n dados verifican $c_n = \hat{\mu}(-n)$, $n > 0$; $c_0 + \overline{c}_0 = \hat{\mu}(0)$, para cierta $\mu \ge 0$, o sea si el problema de momentos correspondiente tiene solución (con $c_{-n} = \overline{c}_n$, $n > 0$).

Análogamente, se formulan los problemas de Caratheodory y Schur para sucesiones truncadas $\{c_n\}_{0 \le n \le N}$. El problema de Caratheodory para sucesiones truncadas tiene solución si y sólo si lo tiene el problema de momentos truncado. Además, el problema de Schur para la sucesión $\{s_n\}_{n \ge 0}$ tiene solución si y sólo si tienen solución todos los problemas de Schur truncados para $\{s_n\}_{n \le N}$, $\forall N \in \mathbb{N}$. En efecto, esto es una consecuencia inmediata de la propiedad de compacidad (teorema de Montel) de que si $f_n \in S$, entonces existe una subsucesión f_{n_k} tal que $f_{n_k}(z) \to f(z)$, $\forall z \in D$, $f \in S$.

Así pues, el problema de Schur se reduce al problema de Schur truncado que, por lo observado anteriormente (sobre la relación entre S y H^∞) equivale al siguiente: dados $s_0, \ldots, s_N$, ¿cuándo existe una función $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ con $|f(t)| \le 1$, $\forall t$ tal que $\hat{f}(n) = 0$ si $n < 0$ y $\hat{f}(n) = s_n$ si $0 \le n \le N$?

Como $\|f\|_\infty = \|e^{-i(N+1)t}f\|_\infty$, este problema equivale a: ¿cuándo existe una función $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, $\|f\|_\infty \le 1$ tal que $\hat{f}(n) = 0,\ n \le -N$ y $\hat{f}(n) = s_n,\ -N \le n \le -1$? O sea, se trata de hallar una función $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ con $\|f\|_\infty \le 1$ cuyos coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ están dados para todo $n < 0$ y además sólo un número finito de estos coeficientes son no nulos.

Por lo tanto, el problema truncado de Schur es un caso especial del siguiente <u>Problema de Nehari</u>: dados $\{s_n\}_{n<0}$, ¿cuándo existe una función f: $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$ tal que $\|f\|_\infty \le 1$ y $\hat{f}(n) = s_n$, $\forall n < 0$?

En lo que sigue vamos a dar la solución del problema de Nehari y veremos que el mismo está relacionado con la teoría de formas de Hankel.

Formas de Hankel

Sean $H^2 = \{f \in L^2 \colon \hat{f}(n) = 0,\ \forall n < 0\}$ la clausura de $\mathcal{P}_1$ en L^2 y $H^2_- = \{f \in L^2 \colon \hat{f}(n) = 0,\ \forall n \ge 0\}$ la clausura de $\mathcal{P}_2$ en L^2, donde $L^2 = L^2(\mathbb{T})$. De modo que $H^2_- = (H^2)^\perp$ y $L^2 = H^2 \oplus H^2_-$. Sea $\sigma\colon L^2 \to L^2$ el operador "shift", $(\sigma f)(t) = e^{it} f(t)$. σ es un operador unitario en L^2, $\sigma L^2 = L^2$, pero $\sigma H^2 \subsetneq H^2$ y $\sigma^{-1} H^2_- \subsetneq H^2_-$. Luego, σ es semi-unitario en H^2 y σ^{-1} es semi-unitario en H^2_-. Las funciones { e^{int}: $n \in \mathbb{Z}$ } forman una base ortonormal de L^2, $\{e^{int}\colon n \ge 0\}$ una base de H^2 y $\{e^{int}\colon n < 0\}$ una base de H^2_-.

Una <u>forma de Hankel</u> es una forma sesquilineal $B\colon H^2 \times H^2_- \to \mathbb{C}$ que verifica $B(\sigma f, g) = B(f, \sigma^{-1} g),\ \forall f \in H^2,\ \forall g \in H^2_-$. (*)

Si $B\colon H^2 \times H^2_- \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal acotada, es decir $|B(f,g)| \le \|B\|\|f\|\|g\| = \|B\|\left(\int |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$, entonces B está determinada por el núcleo asociado K: $\mathbb{Z}_{\geq 0}\times\mathbb{Z}_{<0}\to\mathbb{C}$ dado por $K(m,n)=B(e^{imt},e^{int})$, $m\geq 0$, $n<0$, y son equivalentes las condiciones siguientes:

a) B es de Hankel.

b) La condición (*) se verifica $\forall f\in \mathcal{P}\cap H^2=\mathcal{P}_1$, $\forall g\in \mathcal{P}\cap H^2_-=\mathcal{P}_2$.

c) El núcleo K asociado a B es de Hankel, es decir existe una sucesión $\{s_n\}_{n>0}$ tal que $K(m,n)=s_{m-n}$ $\forall m\geq 0,\ n<0$.

d) Existe una funcional lineal $\ell: e^{it}\mathcal{P}_1\to\mathbb{C}$ tal que $B(f,g)=\ell(f\overline{g})$.

En este caso, $B(f,g)=\sum_{m,n} a_m\overline{b_n}K(m,n)$, si $f=\sum_{m\geq 0} a_m e^{imt}$, $g=\sum_{n<0} b_n e^{int}$.

Si $B_1(f,g)=B_2(f,g)=\int f\overline{g}\,dt$, la condición $\|B\|\leq 1$ se escribe como $|B(f,g)|\leq B_1(f,f)^{\frac{1}{2}}B_2(g,g)^{\frac{1}{2}}$. Luego por la Proposición de la página 22, si $\|B\|\leq 1$ entonces $\int f\overline{f}\,dt+B(f,g)+\overline{B(f,g)}+\int g\overline{g}\,dt\geq 0$, $\forall f\in H^2$, $g\in H^2_-$.

Teorema (análogo al Gelfand-Naimark-Segal para formas acotadas de Hankel)

Sean $B: H^2\times H^2_-\to\mathbb{C}$ una forma de Hankel con $\|B\|\leq 1$ y $K(m,n)=B(e^{imt},e^{int})$, $m\geq 0$, $n<0$ su núcleo asociado. Entonces, existen un espacio de Hilbert H, un operador unitario $U: H\to H$ y dos elementos $\xi_1,\xi_2\in H$ tales que:

a) $\forall\, m\geq 0, n<0,\ K(m,n)=\langle U^m\xi_1, U^{n+1}\xi_2\rangle$

$\forall\, m,n\geq 0,\ \int e^{imt}e^{-int}\,dt=\langle U^m\xi_1,U^n\xi_1\rangle$

$\forall\, m,n<0,\ \int e^{imt}e^{-int}\,dt=\langle U^{m+1}\xi_2,U^{n+1}\xi_2\rangle$

b) Si $f=\sum_{m\geq 0}\hat{f}(m)e^{imt}\in\mathcal{P}_1$, $g=\sum_{n<0}\hat{g}(n)e^{int}\in\mathcal{P}_2$:

$$B(f,g)=\sum_{m,n}\hat{f}(m)\overline{\hat{g}(n)}\langle U^m\xi_1,U^{n+1}\xi_2\rangle$$

Si f, g $\in\mathcal{P}_1$, $$\int f\overline{g}\,dt=\sum_{m,n}\hat{f}(m)\overline{\hat{g}(n)}\langle U^m\xi_1,U^n\xi_1\rangle$$

Si f, g $\in\mathcal{P}_2$, $$\int f\overline{g}\,dt=\sum_{m,n}\hat{f}(m)\overline{\hat{g}(n)}\langle U^{m+1}\xi_2,U^{n+1}\xi_2\rangle$$

Demostración: Sea E el espacio vectorial de los pares $\{f,g\}$, $f \in H^2$, $g \in H^2_-$ con producto semi-escalar $\langle\{f_1,g_1\},\{f_2,g_2\}\rangle = \int f_1\bar{f}_2\,dt + B(f_1,g_2) + \overline{B(f_2,g_1)} + \int g_1\bar{g}_2\,dt$. Por la observación de la página 9, existe un espacio de Hilbert $\overline{E}$ tal que para todo $\{f,g\} \in E$, $B_{\{f,g\}} \in \overline{E}$, o sea $\overline{E}$ contiene a E como subespacio denso. Además, H^2 puede identificarse con $H^2 \times \{0\} \subset E \subset \overline{E}$, H^2_- con $\{0\} \times H^2_- \subset E \subset \overline{E}$ y resulta $\langle\{f,0\},\{0,g\}\rangle = B(f,g)$, $\langle\{f,0\},\{f,0\}\rangle = \int f\bar{f}\,dt$, $\langle\{0,g\},\{0,g\}\rangle = \int g\bar{g}\,dt$.

Definamos $U_1\{f,g\} = \{\sigma f, \sigma g\} = \{e^{it}f, e^{it}g\}$. Como $\int e^{it}f_1\overline{e^{it}f_2}\,dt = \int f_1\bar{f}_2\,dt$ y $B(\sigma f, \sigma g) = B(f, \sigma^{-1}\sigma g) = B(f,g)$, resulta que U_1 es un operador isométrico en E, sólo que $U_1\{f,g\}$ no tiene sentido si $e^{it}g \notin H^2_-$. Por lo tanto U_1 es una isometría en E con dominio $D = H^2 \times \sigma^{-1}H^2_-$ y rango $R = \sigma H^2 \times H^2_-$.

Por el lema de extensión unitaria de una isometría, existen un espacio de Hilbert $H \supset \overline{E}$ y un operador unitario $U: H \to H$ tal que $U = U_1$ en D y $U^{-1} = U_1^{-1}$ en R.

Sean $\xi_1 = \{e^{i0t}, 0\} = \{1,0\}$ y $\xi_2 = \{0, e^{-it}\}$. Si $m \geq 0$ y $n < 0$,

$$K(m,n) = B(e^{imt}, e^{int}) = \langle\{e^{imt},0\},\{0,e^{int}\}\rangle = \langle U_1^m\xi_1, U_1^{n+1}\xi_2\rangle = \langle U^m\xi_1, U^{n+1}\xi_2\rangle.$$

Análogamente, se comprueban las demás afirmaciones de a).

La parte b) es consecuencia de a) y de la propiedad de sesquilinealidad de B(f,g) y de $\int f\bar{g}\,dt$. ∎

Teorema (Propiedad de levantamiento o extensión de formas de Hankel)

Si $B: H^2 \times H^2_- \to \mathbb{C}$ es una forma de Hankel acotada, existe una forma de Toeplitz $B': L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}$ acotada, tal que B' = B en $H^2 \times H^2_-$ y $\|B'\| = \|B\|$.

Demostración: Podemos suponer que $\|B\| = 1$. Por el teorema anterior, si $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$, $B(f,g) = \sum_{m,n} \hat{f}(m)\overline{\hat{g}(n)}\langle U^m\xi_1, U^{n+1}\xi_2\rangle$.

Definamos $\forall\, f,g \in \mathcal{P}$, $B'(f,g)=\sum_{m,n}\hat{f}(m)\overline{\hat{g}(n)}\left\langle U^m\xi_1, U^{n+1}\xi_2\right\rangle$. Resulta $\|B'\|\le 1=\|B\|$ pues

$$|B'(f,g)|=\left|\left\langle \sum_m \hat{f}(m)U^m\xi_1, \sum_n \hat{g}(n)U^{n+1}\xi_2\right\rangle\right|\le \left\|\sum_m \hat{f}(m)U^m\xi_1\right\|_H \left\|\sum_n \hat{g}(n)U^{n+1}\xi_2\right\|_H=(*)$$

Sea $r>0$ tal que $f_1=\sum_m \hat{f}(m)e^{i(m+r)t}\in\mathcal{P}_1$ y sea $s<0$ tal que $g_2=\sum_n \hat{g}(n)e^{i(n+1+s)t}\in\mathcal{P}_2$. Como U es unitario, de a) y b) del teorema precedente resulta

$$(*)=\left\|\sum_m \hat{f}(m)U^{m+r}\xi_1\right\|_H \left\|\sum_n \hat{g}(n)U^{n+1+s}\xi_2\right\|_H=\left(\int f_1\bar{f}_1\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int g_2\bar{g}_2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\int f\bar{f}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int g\bar{g}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}=\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

Por ser $\mathcal{P}$ denso en L^2 y B' acotada en $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$, B' se extiende a una forma sesquilineal $B'\colon L^2\times L^2\to\mathbb{C}$ de igual norma. Finalmente, como $(\sigma f)\hat{}\,(m)=\hat{f}(m-1)$,

$$B'(\sigma f,\sigma g)=\sum_{m,n}\hat{f}(m-1)\overline{\hat{g}(n-1)}\left\langle U^m\xi_1, U^{n+1}\xi_2\right\rangle=$$

$$=\sum_{m,n}\hat{f}(m-1)\overline{\hat{g}(n-1)}\left\langle U^{m-1}\xi_1, U^{n}\xi_2\right\rangle=B'(f,g)\quad \forall f,g\in L^2$$

de donde B' es de Toeplitz. ■

Teorema de Nehari para formas de Hankel

Si $B\colon H^2\times H^2_-\to\mathbb{C}$ es una forma de Hankel acotada, existe una función $\Phi\in L^\infty=L^\infty(\mathbb{T})$ tal que $\|\Phi\|=\|B\|$ y $B(f,g)=\int f(t)\bar{g}(t)\Phi(t)\,dt$, $\forall (f,g)\in H^2\times H^2_-$.

Demostración: Podemos suponer que $\|B\|=1$ y aplicar el Teorema anterior. Sea $\ell\colon L^2\to\mathbb{C}$, $\ell(f)=B'(f,1)$. ℓ es una funcional acotada en L^2 y por lo tanto $\exists\,\Phi\in L^2$ tal que $\ell(f)=\int f\Phi\,dt$, $\forall f\in L^2$.

Veamos que $\Phi\in L^\infty$. Por ser $B'(e^{it}f,e^{it}g)=B'(f,g)$, se ve fácilmente que $\forall\, f,g\in\mathcal{P}$, $B'(f,g)=\ell(f\bar{g})$. Sea f continua. Como $f(t)=|f(t)|^{\frac{1}{2}}|f(t)|^{\frac{1}{2}}\arg f(t)$, resulta $f=g\bar{h}$ con $|g|^2=|h|^2=|f|$.

Tomando sucesiones $g_n \in \mathcal{P}$, $h_n \in \mathcal{P}$ tales que $g_n \to g$ y $h_n \to h$ uniformemente, se tiene que $g_n\overline{h}_n \to g\overline{h} = f$ en L^2. Luego,

$$|\ell(f)| = \lim|\ell(g_n\overline{h}_n)| = \lim|B'(g_n,h_n)| \le \lim\left(\int|g_n|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|h_n|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\int|g|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|h|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int|f|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|f|\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^1}$$

Por lo tanto, $\left|\int f\Phi\,dt\right| = |\ell(f)| \le \|f\|_{L^1}$, $\forall f$ continua. Luego, ℓ es continua en L^1 y debe ser $\Phi \in L^\infty$ con $\|\Phi\|_\infty \le 1 = \|B'\| = \|B\|$. ■

Teorema (solución del Problema de Momentos de Nehari)

Dada la sucesión $\{s_n\}_{n>0}$, existe $\Phi \in L^\infty$ con $\|\Phi\|_\infty \le 1$ y $\hat{\Phi}(-n) = s_n$, $\forall n > 0$ si y sólo si

$$\left|\sum_{n\ge0,p>0} s_{n+p}a_n\overline{b}_p\right| \le \left(\sum_{n\ge0}|a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{p>0}|b_p|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (*)$$

para todo par de sucesiones $\{a_n\}_{n\ge0}$, $\{b_p\}_{p>0} \in \ell^2$.

Demostración: Supongamos que $\{s_n\}_{n>0}$ verifica (*). Para toda $f = \sum_{n\ge0} a_n e^{int} \in H^2$ y $g = \sum_{p>0} b_p e^{-ipt} \in H^2_-$ sea $B(f,g) = \sum_{n\ge0,p>0} s_{n+p}a_n\overline{b}_p$. B es de Hankel pues $e^{it}f = \sum_{n\ge1} a_{n-1}e^{int}$ y $e^{-it}g = \sum_{p>1} b_{p-1}e^{-ipt}$, entonces

$$B(e^{it}f,g) = \sum_{n\ge1,p>0} s_{n+p}a_{n-1}\overline{b}_p = \sum_{n\ge0,p>0} s_{n+p+1}a_n\overline{b}_p = \sum_{n\ge0,p>1} s_{n+p}a_n\overline{b}_{p-1} = B(f,e^{-it}g).$$

Además, por (*), $\|B\| \le 1$. Luego, por el teorema anterior, existe $\Phi \in L^\infty$ con $\|\Phi\|_\infty \le 1$ y $B(f,g) = \int f(t)\overline{g}(t)\Phi(t)\,dt$. Tomando $f = e^{int}$, $g = e^{-it}$ con $n > 0$, resulta $s_{n+1} = B(f,g) = \int e^{i(n+1)t}\Phi(t)\,dt = \hat{\Phi}(-(n+1))$, $\forall n+1 > 0$.

Recíprocamente, si existe $\Phi \in L^\infty$ con $\|\Phi\|_\infty \le 1$ y $\hat{\Phi}(-n) = s_n$, $\forall n > 0$; y si $f = \sum_{n\ge0} a_n e^{int}$ y $g = \sum_{p>0} b_p e^{-ipt}$ entonces,

$$\left|\sum_{n\ge0,p>0} s_{n+p} a_n \overline{b}_p\right| = \left|\int f\overline{g}\Phi\,dt\right| \le \|\Phi\|_\infty \|f\|_2^{\frac{1}{2}} \|g\|_2^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{n\ge0} |a_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p>0} |b_p|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \blacksquare$$

Como $\mathcal{P} \cap H^2 = \mathcal{P}_1$ es denso en H^2 y $\mathcal{P} \cap H^2_- = \mathcal{P}_2$ es denso en H^2_-, una forma de Hankel acotada B queda determinada por su restricción a $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$.

Se dice que una función $\Phi \in L^2$ es un <u>símbolo</u> de la forma de Hankel acotada B si $B(f,g) = \int f\overline{g}\Phi\,dt$ para todo $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$, o sea si $\forall\, m \ge 0,\ n > 0$, $B(e^{imt}, e^{-int}) = \int e^{i(m+n)t}\Phi(t)\,dt$.

Recíprocamente, si $\Phi \in L^2$, entonces $B_\Phi(f,g) = \int f\overline{g}\Phi\,dt$ está bien definida para $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$ y además, $B_\Phi(e^{it}f, g) = B_\Phi(f, e^{-it}g)$. Luego si $|B_\Phi(f,g)| \le c\|f\|_2\|g\|_2$, entonces B_Φ se extiende unívocamente a una forma de Hankel en $H^2 \times H^2_-$.

En particular, para toda $\Phi \in L^\infty$, $B_\Phi(f,g)$ es una forma de Hankel acotada con $\|B_\Phi\| \le \|\Phi\|_\infty$. Por otra parte, el Teorema de Nehari dice que si B es de Hankel acotada, existe $\Phi \in L^\infty$ tal que $B = B_\Phi$ y $\|\Phi\|_\infty = \|B\|$.

Si $\Phi \in L^2$ es símbolo de B y $h \in H^2$, entonces $\Phi + h$ también es símbolo de B, pues $B_h = 0$ ya que $\int e^{imt}e^{-int}h(t)dt = \hat{h}(n-m) = 0$, $\forall m \ge 0,\ n < 0$.

Así pues, toda forma de Hankel acotada tiene infinitos símbolos y entre ellos hay, por Nehari, por lo menos un símbolo acotado $\Phi \in L^\infty$ tal que $\|\Phi\|_\infty = \|B\|$.

Veamos que entre los símbolos de una forma de Hankel acotada B hay uno y solamente uno que pertence a H^2_-. Si $\Psi \in H^2_-$, $\Psi_1 \in H^2_-$ y $B_\Psi = B_{\Psi_1}$, entonces $\int e^{i(m-n)t}(\Psi - \Psi_1)(t)\,dt = 0,\ \forall m-n>0$; es decir, $(\Psi - \Psi_1)^\wedge(n) = 0,\ \forall n<0$, y como $\hat{\Psi}(n) = \hat{\Psi}_1(n) = 0,\ \forall n \geq 0$, resulta $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}_1$ y luego, $\Psi = \Psi_1$.

Además, si $\Phi \in L^2$ es símbolo de B y P_- es la proyección ortogonal de L^2 sobre H^2_-, entonces $P_-\Phi = \Phi_-$ es otro símbolo de B (pues $\Phi - \Phi_- \in H^2$). Por lo tanto, si Φ y Ψ son dos símbolos de B, $\Phi_- = \Psi_-$ se llama el símbolo antianalítico de B.

Dada una función $\Phi_- \in H^2_-$ es natural preguntarse cuándo será acotada la forma B_{Φ_-}. Por el Teorema de Nehari, esto ocurrirá si y sólo si existe una $\Psi \in L^\infty$ tal que $B_{\Phi_-}(f,g) = B_\Psi(f,g),\ \forall\ f \in \mathcal{P}_1\ ,\ g \in \mathcal{P}_2$. Esto equivale a que $\Phi_- = \Psi + h$ con $h \in H^2$, $\Psi \in L^\infty$. Luego, $\Phi_- = P_-\Phi_- = P_-\Psi + P_-h = \Psi_-$.

Por definición, $BMO = L^\infty + \tilde{L}^\infty = \{\Phi + \tilde{\Psi}:\ \Phi, \Psi \in L^\infty\}$, donde $\tilde{\Psi} = -i(\Psi_+ - \Psi_-)$ mientras que $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$, de donde $\Psi_- = \frac{1}{2}\Psi - \frac{i}{2}\tilde{\Psi} \in L^\infty + \tilde{L}^\infty = BMO$. Por lo tanto, $\Phi_- \in H^2_-$ verifica que la forma B_{Φ_-} es acotada si y sólo si $\Phi_- \in BMO$.

De lo dicho resulta:

Otra forma del Teorema de Nehari

Para toda $\Phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, $B_\Phi(f,g) = \int f\bar{g}\Phi\,dt$ es una forma de Hankel acotada de norma $\|B_\Phi\| = \inf\{\|\Phi - h\|_\infty:\ h \in H^\infty\}$. Además, $\Phi_- = P_-\Phi \in BMO$ es el único símbolo antianalítico de B_Φ.

Para un estudio profundo sobre las relaciones entre formas de Hankel, espacios funcionales, procesos gaussianos, teoría de aproximación y teoremas de interpolación de funciones analíticas de Caratheodory, Fejer, Nevalinna-Pick y Sarason, ver el libro de N. K. Nikolsky [Ni], y especialmente el apéndice de Kruchev y Peller en el mismo. Las demostraciones que dimos aquí, referentes a las formas de Hankel, son diferentes, con enunciados y motivaciones más detallados que siguen el enfoque de espacios reproductivos y factorización de núcleos.

En lo que sigue, probaremos que el Teorema de Levantamiento de formas de Hankel se extiende a una situación más abstracta, donde L^2 se cambia por un espacio de Hilbert H cualquiera, el operador shift σ de L^2 se cambia por un operador unitario $\sigma: H \to H$ cualquiera y H^2, H^2_- se cambian por subespacios W_1, W_2 de H tales que:

$$\sigma W_1 \subseteq W_1 \text{ y } \sigma^{-1} W_2 \subseteq W_2 \qquad (*)$$

Fijemos un sistema $[H, \sigma, W_1, W_2]$ que satisface (*), llamado de Lax-Phillips (generalizado). Una forma de Toeplitz en este sistema, es una forma sesquilineal $B: H \times H \to \mathbb{C}$ tal que $B(\sigma f, g) = B(f, \sigma^{-1} g)$, o equivalentemente $B(\sigma f, \sigma g) = B(f, g)$, $\forall\, f, g \in H$. Una forma de Hankel es una forma sesquilineal $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B(\sigma f, g) = B(f, \sigma^{-1} g)$, $\forall f \in W_1$, $\forall g \in W_2$.

Teorema de levantamiento de formas de Hankel generales

Sea $[H, \sigma, W_1, W_2]$ un sistema de Lax-Phillips generalizado y $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ una forma de Hankel acotada. Entonces, existe una forma de Toeplitz $B': H \times H \to \mathbb{C}$ tal que $B' = B$ en $W_1 \times W_2$ y $\|B'\| = \|B\|$.

Demostración: Usaremos la siguiente versión de la descomposición de Wold-Kolmogorov [C, pág. 79]: Sean H un espacio de Hilbert, $\sigma: H \to H$ un operador unitario y W un subespacio de H tal que $\sigma W \subseteq W$, de modo que $\sigma|_W$ es semi-unitario en W. Sea R el complemento ortogonal de σW en W. Como $W \supseteq \sigma W \supseteq \ldots \supseteq \sigma^n W \supseteq \ldots$, si $H' = \bigcap_{n \geq 0} \sigma^n W$, será $H' \subset W$ y $\sigma H' = H'$. Los subespacios $\{ \sigma^n R,\ n \in \mathbb{Z} \}$ son ortogonales dos a dos. Se tiene entonces la siguiente descomposición de H: $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^n R \oplus H' \oplus H^0$ con $\sigma H' = H'$, $\sigma H^0 = H^0$.

Por otra parte, como en la demostración del teorema de Gelfand-Naimark-Segal para formas de Hankel, suponiendo $\|B\| = 1$, se puede probar que existen un espacio de Hilbert $\widehat{H}$ y un operador unitario $U:\widehat{H} \to \widehat{H}$ tales que $W_1 \subset \widehat{H}$, $W_2 \subset \widehat{H}$, $U = \sigma$ en W_1, $U^{-1} = \sigma^{-1}$ en W_2 y $B(f_1, f_2) = \langle f_1, f_2 \rangle_{\widehat{H}}$, $\forall f_1 \in W_1, f_2 \in W_2$.

Sean $f_1, f_2 \in H$. Por la descomposición de Wold-Kolmogorov para $[H, \sigma, W_1]$, podemos escribir $f_1 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^n f_{n,1} \oplus f_1' \oplus f_1^0$ con $f_{n,1} \in R_1$, $f_1' \in H_1'$, $f_1^0 \in H_1^0$, y por Wold-Kolmogorov para $[H, \sigma^{-1}, W_2]$ resulta $f_2 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^{-n} f_{n,2} \oplus f_2' \oplus f_2^0$ con $f_{n,2} \in R_2$, $f_2' \in H_2'$, $f_2^0 \in H_2^0$.

Sean $J_1: H \to \widehat{H}$, $J_2: H \to \widehat{H}$ dados por

$$J_1 f_1 = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n f_{n,1} \oplus f_1', \qquad J_2 f_2 = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^{-n} f_{n,2} \oplus f_2'$$

y sea $B': H \times H \to \mathbb{C}$, $B'(f_1, f_2) = \langle J_1 f_1, J_2 f_2 \rangle_{\widehat{H}}$. Claramente B' es sesquilineal. Veamos que $B' = B$ en $W_1 \times W_2$. Si $f_1 \in W_1$, su descomposición es $f_1 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sigma^n f_{n,1} \oplus f_1'$ y si $f_2 \in W_2$, $f_2 = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n} f_{n,2} \oplus f_2'$, de modo que $J_1 f_1 = f_1$, $J_2 f_2 = f_2$ y $B'(f_1, f_2) = \langle f_1, f_2 \rangle_{\widehat{H}} = B(f_1, f_2)$.

Además, B' es Toeplitz, pues

$$B'(\sigma f_1, \sigma f_2) = \langle J_1 \sigma f_1, J_2 \sigma f_2 \rangle_{\widehat{H}} = \left\langle \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^{n+1} f_{n,1} \oplus \sigma f_1', \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^{-n+1} f_{n,2} \oplus \sigma f_2' \right\rangle_{\widehat{H}} =$$

$$= \left\langle U\left(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n f_{n,1} \oplus f_1' \right), U\left(\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^{-n} f_{n,2} \right) \oplus \sigma f_2' \right\rangle_{\widehat{H}} =$$

$$= \left\langle \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n f_{n,1} \oplus f_1', \bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^{-n} f_{n,2} \oplus U^{-1} \sigma f_2' \right\rangle_{\widehat{H}} =$$

$$= \langle J_1 f_1, J_2 f_2 \rangle_{\widehat{H}} = B'(f_1, f_2)$$

ya que, $\sigma f_2' \in W_2$ y $U^{-1} = \sigma^{-1}$ en W_2.

Finalmente,

$$|B'(f_1,f_2)| \le \langle J_1f_1\ ,\ J_1f_1\rangle_{\hat{H}}^{\frac{1}{2}} \langle J_2f_2\ ,\ J_2f_2\rangle_{\hat{H}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_n \langle U^n f_{n,1}, U^n f_{n,1}\rangle_{\hat{H}} + \langle f_1', f_1'\rangle_{\hat{H}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_n \langle U^{-n} f_{n,2}, U^{-n} f_{n,2}\rangle_{\hat{H}} + \langle f_2', f_2'\rangle_{\hat{H}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_n \langle f_{n,1}\ ,\ f_{n,1}\rangle_{\hat{H}} + \langle f_1'\ ,\ f_1'\rangle_{\hat{H}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_n \langle f_{n,2}\ ,\ f_{n,2}\rangle_{\hat{H}} + \langle f_2'\ ,\ f_2'\rangle_{\hat{H}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \langle f_1\ ,\ f_1\rangle_H^{\frac{1}{2}} \langle f_2\ ,\ f_2\rangle_H^{\frac{1}{2}}$$

pues si $f \in W_1$ o si $f \in W_2$, $\langle f,f\rangle_{\hat{H}} = \langle f,f\rangle_H$, de donde se deduce que $\|B'\| = \|B\|$. ■

Observación: Cuando $H = L^2$, $W_1 = H^2$, $W_2 = H^2_-$ y σ es el shift, resulta $R_1 = \{ce^{i0t} = c1\}$, $R_2 = \{ce^{-it}\}$, o sea R_1 está generado por 1 y R_2 por e^{-it}. Por lo tanto, la construcción del teorema anterior es un refinamiento de Gelfand-Naimark-Segal en L^2.

La demostración anterior se aplica igualmente si $[H,\sigma,W_1,W_2]$ se cambia por dos sistemas $[H_1,\sigma_1,W_1]$, $[H_2,\sigma_2,W_2]$ donde, para i=1,2, σ_i es un operador unitario en H_i, W_i es un subespacio de H_i, $\sigma_1 W_1 \subseteq W_1$ y $\sigma_2^{-1} W_2 \subseteq W_2$. Ahora, una forma de <u>Toeplitz</u> es una forma sesquilineal $B: H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B(\sigma_1 f_1, \sigma_2 f_2) = B(f_1,f_2)$, $\forall\ f_1 \in H_1$, $f_2 \in H_2$ y una forma de <u>Hankel</u> es una forma sesquilineal $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B(\sigma_1 f_1, f_2) = B(f_1, \sigma_2^{-1} f_2)$, $\forall\ f_1 \in W_1$, $f_2 \in W_2$.

Teorema

Si $[H_1,\sigma_1,W_1]$, $[H_2,\sigma_2,W_2]$ son dos sistemas, para toda forma de Hankel acotada $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ existe una forma de Toeplitz $B': H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B' = B$ en $W_1 \times W_2$ y $\|B'\| = \|B\|$.

Hagamos una generalización más. La condición $\sigma_1 W_1 \subseteq W_1$ implica $\sigma_1^{-1} W_1^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$. Luego, si $W_1^{+} = \{0\}$ y $W_1^{-} = W_1^{\perp}$, resulta

$$H_1 = W_1 \oplus W_1^+ \oplus W_1^- \text{ con } \sigma_1 W_1^+ \subseteq W_1^+ \text{ y } \sigma_1^{-1} W_1^- \subseteq W_1^-. \qquad (*)$$

Análogamente, llamando $W_2^+ = W_2^\perp$ y $W_2^- = \{0\}$, $\sigma_2^{-1} W_2 \subseteq W_2$ implica

$$H_2 = W_2 \oplus W_2^+ \oplus W_2^- \text{ con } \sigma_2 W_2^+ \subseteq W_2^+ \text{ y } \sigma_2^{-1} W_2^- \subseteq W_2^-. \qquad (**)$$

Consideremos pues, más generalmente, un par de sistemas $[H_1, \sigma_1, W_1]$, $[H_2, \sigma_2, W_2]$ que verifican (*) y (**) respectivamente. En este caso, no se puede hablar de formas de Hankel $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$. Diremos que $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ es una forma <u>esencialmente Hankel</u> si $B(P_1 \sigma_1 f_1, f_2) = B(f_1, P_2 \sigma_2^{-1} f_2)$, $\forall\, f_1 \in W_1, f_2 \in W_2$, donde P_i es la proyección de H_i sobre W_i, $i=1,2$.

Teorema

Si $[H_1, \sigma_1, W_1]$, $[H_2, \sigma_2, W_2]$ verifican (*) y (**) y si $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ es una forma esencialmente Hankel, entonces existe una forma de Toeplitz $B': H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B' = B$ en $W_1 \times W_2$, $\|B'\| = \|B\|$ y, además, $B' = 0$ en $W_1^+ \times W_2^-$, $W_1 \times W_2^-$ y $W_1^+ \times W_2$.

Demostración: Sean $V_1 = W_1 \oplus W_1^+$ y $V_2 = W_2 \oplus W_2^-$. Entonces, $\sigma_1 V_1 \subseteq V_1$ y $\sigma_2^{-1} V_2 \subseteq V_2$. Sea $B^\#: V_1 \times V_2 \to \mathbb{C}$ dada por $B^\#(f_1 + f_1^+, f_2 + f_2^-) = B(f_1, f_2)$, con $f_1 \in W_1$, $f_2 \in W_2$, $f_1^+ \in W_1^+$, $f_2^- \in W_2^-$.

Claramente, $B^\#$ es de Hankel, $B^\# = 0$ en $V_1 \times W_2^-$ y $W_1^+ \times V_2$, $B^\# = B$ en $W_1 \times W_2$ y $\|B^\#\| = \|B\|$. Por el teorema anterior, existe $B': H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ de Toeplitz tal que $B' = B^\#$ en $V_1 \times V_2$ y $\|B'\| = \|B^\#\|$; lo que demuestra la tesis. ∎

Para más detalles sobre los tres últimos teoremas ver [C-S.1] y [C-S.2].

Si W es un subespacio del espacio de Hilbert H y si $\sigma: H \to H$ es un operador acotado en H, entonces $\sigma|_W$ es un operador de W en H pero no necesariamente de W en W. Por eso, se considera el operador $A = P_W \sigma|_W : W \to W$ que se llama la compresión de σ a W.

Teorema de Nagy-Foias del conmutante

Sean, para i=1,2, $\sigma_i : H_i \to H_i$ un operador unitario, W_i un subespacio de H_i y $A_i : W_i \to W_i$ la compresión de σ_i a W_i, $A_i = P_i \sigma_i|_{W_i}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, A_i^n es la compresión de σ_i^n a W_i y si $C: W_1 \to W_2$ es un operador tal que $CA_1 = A_2 C$, $\|C\| \le 1$, entonces existe un operador $C': H_1 \to H_2$, $\|C'\| \le 1$ tal que $C'\sigma_1 = \sigma_2 C'$ y $C = P_2 C'|_{W_1}$.

Demostración: Por el Lema de Sarason [C, pág. 77], si A_i^n es la compresión de σ_i^n, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $H_1 = W_1 \oplus W_1^+ \oplus W_1^-$, $H_2 = W_2 \oplus W_2^+ \oplus W_2^-$ y se verifican (*) y (**). Sea $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ dada por $B(f_1, f_2) = \langle Cf_1, f_2 \rangle_{W_2}$, $f_1 \in W_1$, $f_2 \in W_2$. Como $CA_1 = A_2 C$, resulta B esencialmente Hankel y por lo tanto existe una forma de Toeplitz $B': H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ tal que $B' = B$ en $W_1 \times W_2$, $\|B'\| = \|B\| \le 1$. Si $C': H_1 \to H_2$ es el operador asociado a B', $B'(f_1, f_2) = \langle C'f_1, f_2 \rangle$, entonces, por ser B' de Toeplitz, $C'\sigma_1 = \sigma_2 C'$ y como $B' = B$ en $W_1 \times W_2$ resulta $C = P_2 C'|_{W_1}$. ■

Observación: Dado un espacio W de Hilbert y una contracción $A: W \to W$, es decir un operador lineal de norma menor o igual que 1, el Teorema de Nagy [C, pág. 79] dice que existen un espacio de Hilbert H tal que W es subespacio de H y un operador unitario σ en H tal que A^n es la compresión de σ^n a W, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema anterior, si $A_i : W_i \to W_i$, $i = 1,2$ son dos contracciones y $\sigma_i : H_i \to H_i$, $H_i \supset W_i$ son sus dilataciones Nagy, entonces todo $C: W_1 \to W_2$ con $\|C\| \le 1$ que verifica $CA_1 = A_2 C$, es la compresión de $C': H_1 \to H_2$, $\|C'\| \le 1$ con $C'\sigma_1 = \sigma_2 C'$. Por lo tanto, este teorema constituye un importante complemento al Teorema de dilatación de Nagy.

Teorema de interpolación de Sarason

Sea W un subespacio de $H^2 = H^2(\mathbb{T})$ tal que $\sigma W = e^{it} W \subset W$ y sean $V = W^{\perp}$ y $T = P_V \sigma|_V$. Si $A: V \to V$, $\|A\| \le 1$ y A conmuta con T, entonces existe una función $a \in H^\infty$ tal que $\|a\|_\infty \le 1$ y $Af = P_V(af)$, $\forall f \in V$.

Demostración: Sean $H_1 = H_2 = L^2(\mathbb{T})$, $W_1 = W_2 = V$, $W_1^+ = W_2^+ = W$, $W_1^- = W_2^- = H_-^2$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ y $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ definida por $B(f_1, f_2) = \langle Af_1, f_2 \rangle_{W_2}$, $\forall f_1, f_2 \in V$. Entonces se verifican (∗) y (∗∗), B es esencialmente Hankel y $\|B\| \leq 1$. Luego existe $B': L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}$ de Toeplitz, $\|B'\| \leq 1$ tal que $B' = B$ en $V \times V$, $B' = 0$ en $H^2 \times H_-^2$ y $W \times V$. Como vimos en la demostración del Teorema de Nehari para formas de Hankel, $\ell: L^2 \to \mathbb{C}$, $\ell(f) = B'(f, 1)$ es una funcional lineal acotada, $\ell(f_1 \bar{f}_2) = B'(f_1, f_2)$ y existe $a \in L^\infty$, $\|a\|_\infty \leq 1$ tal que $B'(f_1, f_2) = \int f_1 \bar{f}_2 a \, dt$. Como $\langle a1, f \rangle_{L^2} = B'(1, f) = 0$, $\forall f \in H_-^2$ (pues $B' = 0$ en $H^2 \times H_-^2$), $a1 = a \in H^2 \cap L^\infty = H^\infty$. ■

Los teoremas clásicos de interpolación de Caratheodory, Schur y Nevalinna-Pick pueden obtenerse como corolarios del Teorema de Sarason, el cual a su vez puede deducirse del de Nehari (ver [Ni]).

En el Teorema de Nehari se suponía que la forma de Hankel B verificaba la condición de acotación $|B(f,g)| \leq c\left(\int |f|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ donde dt es la medida de Lebesgue. El Teorema general de levantamiento permite extender el Teorema de Nehari al caso en que B verifique $|B(f,g)| \leq c\left(\int |f|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu_2\right)^{\frac{1}{2}}$, donde $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ son dos medidas finitas cualesquiera en $\mathbb{T}$.

Teorema generalizado de Nehari

Sean $\mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0$ dos medidas finitas en $\mathbb{T}$, y sea $B: \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal que verifica $|B(f,g)| \leq \|B\| \left(\int |f|^2 d\mu_1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu_2\right)^{\frac{1}{2}}$ y $B(\sigma f, g) = B(f, \sigma^{-1} g)$ para todo $f \in \mathcal{P}_1$, $g \in \mathcal{P}_2$. Entonces, existe una medida μ_0 en $\mathbb{T}$ (en general compleja) tal que $B(f,g) = \int f \bar{g} \, d\mu_0$, $\forall (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ y $|\mu_0(\Delta)| \leq \|B\| \mu_1(\Delta)^{\frac{1}{2}} \mu_2(\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $\forall \Delta \subseteq \mathbb{T}$ boreliano.

Demostración: Sean $H_1 = L^2(\mu_1)$, $H_2 = L^2(\mu_2)$, σ_i el shift en H_i, $i = 1, 2$ y W_i la clausura de $\mathcal{P}_i$ en H_i. Como B es acotada en $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, la podemos extender por densidad a $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ que seguirá siendo una forma de Hankel acotada en $W_1 \times W_2$. Además, es evidente que se verifica $\sigma_1 W_1 \subseteq W_1$ y $\sigma_2^{-1} W_2 \subseteq W_2$. Por el Teorema general de levantamiento, existe una forma de Toeplitz $B': H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ que verifica $|B'(f,g)| \leq \|B\| \|f\|_{H_1} \|g\|_{H_2}$, $\forall (f,g) \in H_1 \times H_2$ y $B' = B$ en $W_1 \times W_2$.

Sea $\ell: C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ la funcional lineal dada por $\ell(f\overline{g}) = B'(f,g)$, $\forall f,g \in C(\mathbb{T})$. Luego, $|\ell(f\overline{g})| \leq \|B\| \|f\|_{H_1} \|g\|_{H_2}$. Tomando $g = 1$, resulta $|\ell(f)| \leq \text{cte.}\|f\|_\infty$, de modo que ℓ es una funcional lineal acotada en C($\mathbb{T}$). Por el Teorema de representación de Riesz, existe una medida regular μ_0 tal que $\ell(f) = \int f\, d\mu_0$, $\forall f \in C(\mathbb{T})$. Luego, $\left|\int f\overline{g}\, d\mu_0\right|^2 = |\ell(f\overline{g})|^2 \leq \|B\|^2 \|f\|_{H_1}^2 \|g\|_{H_2}^2$. Aproximando la característica de un compacto Δ por funciones continuas, obtendremos $|\mu_0(\Delta)| \leq \|B\| \mu_1(\Delta)^{\frac{1}{2}} \mu_2(\Delta)^{\frac{1}{2}}$ y por ser μ_0 regular, esto también se verifica para todo boreliano. Además, como $B' = B$ en $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, es evidente que $B(f,g) = \int f\overline{g}\, d\mu_0$, $\forall (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. ■

Observación: Si $d\mu_1 = d\mu_2 = dt$, este teorema se reduce al de Nehari. En efecto, como en este caso $|\mu_0(\Delta)| \leq \|B\| \mu(\Delta)$, resulta μ_0 absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue y, por Radon-Nikodym, existe $\Phi \in L^1(dt)$ tal que

$\mu_0(\Delta) = \int_\Delta \Phi(t)\, dt$. Luego, $\left|\frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta \Phi(t)\, dt\right| \leq \|B\|$.

Si $\Delta = B(x,\delta)$, $\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\mu(\Delta)} \int_\Delta \Phi(t)\, dt = \Phi(x)$ p.p. y entonces, $|\Phi(x)| \leq \|B\|$ p.p. Así pues, $\Phi \in L^\infty$, $\|\Phi\|_\infty \leq \|B\|$ y $B(f,g) = \int f\overline{g}\Phi(t)\, dt$.

El teorema que precede puede formularse también como un Teorema de Bochner para "núcleos de Toeplitz generalizados" y puede extenderse también a $\mathbb{R}$ (ver los artículos de R. Bruzual, cap.3, y de M. Dominguez, cap. 5, en [3°Esc]).

Vamos a deducir ahora, del teorema anterior, un célebre teorema de Helson-Szegö, que jugó un importante papel en la Teoría de espacios BMO.

Todo $f \in \mathcal{P}$ se escribe en forma única como $f = f_1 + f_2$ con $f_i \in \mathcal{P}_i$. La transformada de Hilbert es la función T: $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ dada por $Tf = \tilde{f} = -i(f_1 - f_2)$. T se extiende a un operador acotado en $L^2 = L^2(dt)$. Queremos determinar cuáles son las medidas $\mu \geq 0$ en $\mathbb{T}$ tales que el operador T de Hilbert se extiende a un operador acotado en $L^2(\mu)$, o sea, cuándo existe una constante M tal que $\int |Tf|^2 d\mu \leq M^2 \int |f|^2 d\mu$, $\forall f \in \mathcal{P}$. Este problema fue resuelto por Helson-Szegö.

Teorema de Helson-Szegö

Sea μ una medida positiva. Entonces, $\int |Tf|^2 d\mu \leq M^2 \int |f|^2 d\mu$, $\forall f \in \mathcal{P}$ si y sólo si μ es absolutamente continua, $d\mu = \omega(t)dt$ con $\omega \in L^1(dt)$, $\omega(t) \geq 0$, $\omega = e^{\varphi + \tilde{\psi}}$ donde $\varphi, \psi \in L^\infty$, $\|\psi\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$. En este caso, $\log \omega = \varphi + \tilde{\psi} \in BMO$.

Demostración: Sea $f = f_1 + f_2$, $f_i \in \mathcal{P}_i$. Por hipótesis, $\int |f_1 - f_2|^2 d\mu \leq M^2 \int |f_1 + f_2|^2 d\mu$, o equivalentemente

$$(M^2 - 1)\mu(f_1\bar{f}_1) + (M^2 + 1)\mu(f_1\bar{f}_2) + (M^2 + 1)\mu(\bar{f}_1 f_2) + (M^2 - 1)\mu(f_2\bar{f}_2) \geq 0$$

Reemplazando f_i por $\lambda_i f_i$, $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, resulta

$$(M^2 - 1)\mu(f_1\bar{f}_1)\lambda_1\bar{\lambda}_1 + (M^2 + 1)\mu(f_1\bar{f}_2)\lambda_1\bar{\lambda}_2 + (M^2 + 1)\mu(\bar{f}_1 f_2)\bar{\lambda}_1\lambda_2 + (M^2 - 1)\mu(f_2\bar{f}_2)\lambda_2\bar{\lambda}_2 \geq 0$$

Como ésta es una forma cuadrática, la última condición es equivalente a que su determinante sea positivo, o sea $(M^2 - 1)^2 \mu(|f_1|^2)\mu(|f_2|^2) - (M^2 + 1)^2 |\mu(f_1\bar{f}_2)|^2 \geq 0$.

Luego, $|\mu(f_1\bar{f}_2)| \leq \frac{(M^2-1)}{(M^2+1)} \mu(|f_1|^2)^{\frac{1}{2}} \mu(|f_2|^2)^{\frac{1}{2}}$. Sea $B(f, g) = \int f\bar{g}\, d\mu = \mu(f\bar{g})$, entonces $|B(f, g)| \leq \frac{(M^2-1)}{(M^2+1)} \left(\int |f|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall f, g \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. Por lo tanto, B: $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \to \mathbb{C}$ es una forma de Hankel acotada con $\|B\| \leq \frac{(M^2-1)}{(M^2+1)} < 1$.

Aplicando el teorema anterior al caso $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, resulta que existe μ_0 tal que $B(f,g) = \int f\overline{g}\,d\mu_0 = \int f\overline{g}\,d\mu$, $\forall(f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ y $|\mu_0(\Delta)| \leq (1-\varepsilon)|\mu(\Delta)|$ donde $1-\varepsilon = \|B\|$.

Si $f(t) = e^{imt}$, $g(t) = e^{-int}$, $m \geq 0$, $n > 0$, $\hat{\mu}(-n-m) = \hat{\mu}_0(-n-m)$, $\forall(-n-m) < 0$, lo que implica por un Teorema de F. y M. Riesz (ver [Ni]) que $\mu - \mu_0 = h(t)\,dt$ con $h \in H^1$. Por lo tanto, la desigualdad anterior se escribe $|(\mu - h\,dt)(\Delta)|^2 \leq (1-\varepsilon)^2 \mu(\Delta)^2$, o sea

$\left|\mu(\Delta) - \int_\Delta h(t)\,dt\right|^2 \leq (1-\varepsilon)^2 \mu(\Delta)^2$. Si $|\Delta| = \int_\Delta dt = 0$, $\int_\Delta h(t)\,dt = 0$, entonces $\mu(\Delta) = 0$. Luego, μ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, $d\mu = \omega(t)\,dt$

con $\omega \in L^1(dt)$, $\omega(t) \geq 0$ y $\left|\int_\Delta \omega(t)\,dt - \int_\Delta h(t)\,dt\right|^2 \leq (1-\varepsilon)^2 \left|\int_\Delta \omega(t)\,dt\right|^2$. Entonces,

$$|\omega(t_0) - h(t_0)|^2 = \lim_{|\Delta|\to 0} \frac{1}{|\Delta|^2}\left|\int_\Delta \omega(t)\,dt - \int_\Delta h(t)\,dt\right|^2 \leq (1-\varepsilon)^2 \omega(t_0)^2 \quad \text{p.p.}(t_0).$$

Luego, $h(t) = \sigma(t)\omega(t)$ con $\|1-\sigma\|_\infty \leq 1-\varepsilon$. Como $\omega \geq 0$ resulta $\arg(\omega) = 0$ y $\arg(\sigma) = \arg(h)$. Además, $|1-\sigma(t)| < 1-\varepsilon$ implica que $|\arg(h)| = |\arg(\sigma)| < \frac{\pi}{2}$. Por otra parte, $\log(h) = \log|h| + i\arg(h)$, de modo que si $\psi = -\arg(h)$, resulta $\tilde{\psi} = \log|h|$. Entonces, $\|\psi\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ y existe $\varphi \in L^\infty$ tal que

$$\omega(t) = e^{\log|h|}\left|\sigma(t)^{-1}\right| = e^{\varphi + \tilde{\psi}} \qquad \blacksquare$$

El Teorema de Helson-Szegö tuvo importantes aplicaciones en la teoría de predicción de procesos aleatorios. Toda medida $\mu \geq 0$ en $\mathbb{T}$ define un espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{T},\mu)$; y $X\colon \mathbb{Z} \to H$ definido por $X(n) = e^{int}$ se llama <u>proceso aleatorio</u> asociado a μ. El subespacio $\mathcal{P}_1$ generado por $\{X(n)\colon n \geq 0\}$ se llama el <u>futuro</u> del proceso y el subespacio $\mathcal{P}_2$ generado por $\{X(n)\colon n < 0\}$ se llama el <u>pasado</u> del proceso. Se dice que el proceso es <u>determinista</u> si $\mathcal{P}_1$ está contenido en la clausura de

$\mathcal{P}_2$, lo que implica que $\rho = 1$ donde $\rho = \sup\left\{ \frac{|\mu(f\bar{g})|}{\mu(|f|^2)^{\frac{1}{2}}\mu(|g|^2)^{\frac{1}{2}}} : (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \right\}$ es el coseno del ángulo entre $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$. Interesa especialmente el caso fuertemente <u>indeterminista</u> donde $\rho < 1$. Tomando $\rho = 1-\varepsilon$, resulta $\left|\int f\bar{g}\,d\mu\right| \leq (1-\varepsilon)\|f\|_\mu \|g\|_\mu$, que por Helson-Szegö equivale a que $\mu = \omega(t)\,dt$, $\omega = e^{\varphi+\tilde{\psi}}$ con $\varphi, \psi \in L^\infty$, $\|\psi\|_\infty < \frac{\pi}{2}$.

Más generalmente, se define $\rho_n = \sup\left\{ \frac{|\mu(e^{int}f\bar{g})|}{\mu(|f|^2)^{\frac{1}{2}}\mu(|g|^2)^{\frac{1}{2}}} : (f,g) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \right\}$ y el proceso se dice <u>completamente regular</u> si $\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. El método usado para probar el Teorema de Helson-Szegö permite también probar los teoremas siguientes:

a) Teorema de Helson-Sarason: $\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ si y sólo si $\mu = \omega(t)\,dt$ donde $\omega(t) = |P(t)|^2 e^{\varphi(t)}$, con $\varphi \in V.M.O. = \{f + \tilde{g} : f, g \in C(\mathbb{T})\}$ y P es polinomio analítico con raices en $\mathbb{T}$.

b) Teorema de Ibrahimov: $\rho_n \leq \frac{cte}{(1+n)^\alpha}$, $\alpha > 0$ si y sólo si $\mu = \omega(t)\,dt$ donde $\omega(t) = |P(t)|^2 e^{\varphi(t)}$, con φ perteneciente a la Clase de Lipschitz Δ_α.

c) Teorema de Peller: Si P_1, P_2 son las proyecciones de H sobre las clausuras de $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ respectivamente, entonces P_1P_2 pertenece a la Clase S_p de Schatten si y sólo si $\mu = \omega(t)\,dt$ con $\omega(t) = |P(t)|^2 e^{\varphi(t)}$ y $\varphi \in B_p^{\frac{1}{p}}$.

Para más detalles ver [I-R], [A-C-S] y para resultados más recientes el apéndice por Kruchev y Peller de [Ni] y el artículo de M. Dominguez en [3°Esc].

En el Teorema de Nehari la medida μ en general no es única, y existen teoremas de parametrización y unicidad que describen todas las soluciones μ y condiciones de unicidad. Tales teoremas pueden verse en el célebre trabajo de Adamjan-Arov-Krein [A-A-K] y generalizaciones de éstos, para el caso del Teorema generalizado de Nehari, en [Aro], en el artículo de Alegría en [3°Esc, cap.6] y en [Al].

Números singulares de Schmidt

Sean $T: E \to F$ es un operador acotado, E, F Hilbert. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, definimos

$$s_n(T) = \inf \{\|T - S\|: \ S: E \to F, \ r(S) \le n\}$$

llamados <u>números singulares o de Schmidt</u> de T. En particular, $s_0(T) = \|T\|$ y $\{s_n(T)\}$ es decreciente. Más detalles sobre los números singulares pueden verse en [G-K].

Proposición: Si $T: E \to F$ es un operador acotado, E, F Hilbert, entonces

$$s_n(T) = \inf \left\{ \left\| T|_{E_n} \right\|: \ E_n \text{ subespacio de } E \text{ de codimensión} \le n \right\}$$

Demostración: Como $\operatorname{cod} \operatorname{Ker}(S) = r(S)$, $\forall S \in L(E,F)$, entonces

$$\inf\left\{ \left\| T|_{E_n} \right\|: \ \operatorname{cod}(E_n) \le n \right\} \le \left\| T|_{\operatorname{Ker}(S)} \right\| \le \|T - S\| \quad \forall S \in L(E,F), \ r(S) \le n.$$

Recíprocamente, si $\operatorname{cod}(E_n) \le n$, llamando $S_n = TP_{E_n^{\perp}}$, resulta $r(S_n) \le n$, entonces

$$\inf \{\|T - S\|: \ r(S) \le n\} \le \|T - S_n\| = \left\| T|_{E_n} \right\| \qquad \blacksquare$$

Proposición: Sean E, F Hilbert, $M \subset E$ un subespacio, $\dim M > n$. Si $T \in L(E,F)$ verifica $\|Tx\| \ge a\|x\| \ \ \forall x \in M$, entonces $s_n(T) \ge a$.

Demostración: Sea $E_n \subset E$ un subespacio, $\operatorname{cod} E_n \le n$. Veamos que $E_n \cap M \ne \{0\}$. Supongamos que no y sea $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ linealmente independiente en M. Por ser $E_n \cap M = \{0\}$, resulta $\{x_1 + E_n, \ldots, x_{n+1} + E_n\}$ linealmente independiente en E/E_n. Entonces, $\dim E/E_n = \operatorname{cod} E_n \ge n + 1$, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, $\left\| T|_{E_n} \right\| \ge \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|}: \ x \in E_n \cap M, \ x \ne 0 \right\} \ge a \ \ \forall E_n, \ \operatorname{cod} E_n \le n$, de donde $s_n(T) \ge a$. $\blacksquare$

Proposición: Sean H Hilbert y $T \in L(H)$. Definamos $A \in L(H)$ como $A = s_n^2(T) - T^*T$. Sea $E(\lambda)$ la función espectral del operador autoadjunto A. Si $E = E(0)H$, entonces $\dim E \leq n$.

Demostración: Para cada $\varepsilon > 0$, sea $E_\varepsilon = E(-\varepsilon)H$. Por propiedades de la función espectral, si $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $E(-\varepsilon_1)E(-\varepsilon_2) = E(-\varepsilon_1)$ y $\lim_{\varepsilon \to 0^+} E(-\varepsilon) = E(0)$. Entonces, E_ε tiende en forma creciente a E cuando $\varepsilon \to 0^+$.

Por consiguiente, para probar que $\dim E \leq n$, basta ver que $\dim E_\varepsilon \leq n \quad \forall \varepsilon > 0$. Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Si $x \in E_\varepsilon$, entonces

$$\langle Ax, x \rangle = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda \, d\langle E(\lambda)x, x \rangle \leq -\varepsilon \langle E(-\varepsilon)x, x \rangle \leq -\varepsilon \|x\|^2$$

de donde resulta $\|Tx\| \geq \left(s_n^2(T) + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} \|x\| \quad \forall x \in E_\varepsilon$.

Si fuera $\dim E_\varepsilon > n$, entonces, por la proposición anterior, se tendría $s_n(T) \geq \left(s_n^2(T) + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}$, lo cual es absurdo. Luego, $\dim E_\varepsilon \leq n \quad \forall \varepsilon > 0$. ■

La teoría de los números singulares está vinculada al siguiente:

Teorema de punto fijo de Ky Fan - Iohvidov

Sean X e Y espacios de Banach, $M \subset L(X, Y)$ un conjunto convexo, débilmente compacto, $\Phi: M \to L(X, X)$ y $\Psi: M \to L(X, Y)$ dos aplicaciones tales que:

1) $\forall T \in M$, $\exists S \in M$ con $S\Phi(T) = \Psi(T)$

2) la aplicación $F: M \times M \to L(X, Y)$ definida por $F(T, S) = S\Phi(T) - \Psi(T)$ es continua en las dos variables, en la topología débil.

Entonces, existe $T_0 \in M$ tal que $T_0\Phi(T_0) = \Psi(T_0)$.

En efecto, de las tres proposiciones anteriores y de este Teorema de punto fijo, se deduce el siguiente Teorema de Treil. La demostración de estos dos teoremas puede verse en [Tr]; este trabajo está en ruso y una exposición en español puede verse en el artículo de J. Gimenez en [3°Esc, cap.2].

Toda forma sesquilineal acotada $B: E \times F \to \mathbb{C}$ tiene un operador asociado $\Gamma: E \to F$ tal que $B(f,g) = \langle \Gamma f, g \rangle_F$ y $\|B\| = \|\Gamma\|$. Se define entonces, $s_n(B) = s_n(\Gamma)$, $\forall n \geq 0$.

Como $s_0(\Gamma) = \|\Gamma\|$, $\{f \in E: \|\Gamma f\| \leq s_0 \|f\|\} = E$. Sin embargo, si $n \geq 1$, $K_n = \{f \in E: \|\Gamma f\| \leq s_n \|f\|\}$ es un cono generalizado que contiene un subespacio vectorial E_n de E de codimensión $\leq n$.

Si $\sigma: E \to E$ es un operador unitario tal que $\sigma K_n \subset K_n$, no se puede asegurar que todo subespacio $E_n \subset K_n$ de codimensión $\leq n$ verifique $\sigma E_n \subset E_n$.

Sin embargo se tiene el siguiente teorema:

Teorema de S.Treil

Sean $\Gamma: E \to F$, E, F Hilbert, K_n definido como antes y $\sigma: E \to E$ un operador unitario tal que $\sigma K_n \subset K_n$. Entonces existe un subespacio E_n de E tal que $E_n \subset K_n$, codimensión de $E_n \leq n$ y $\sigma E_n \subset E_n$.

A partir del Teorema de Treil y del Teorema de levantamiento de formas de Hankel generales (visto anteriormente), demostraremos el siguiente:

Teorema de levantamiento condicional de formas de Hankel

Sea $[H, \sigma, W_1, W_2]$ un sistema de Lax-Phillips generalizado y $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ una forma de Hankel acotada. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces, existen una forma de Toeplitz $B': H \times H \to \mathbb{C}$ y un subespacio $E \subset W_1$, $\operatorname{cod} E \leq n$ tales que $B' = B$ en $E \times W_2$ y $\|B'\| \leq s_n(B)$. En este caso, se dice que B' es un <u>levantamiento condicional-n</u> de B.

Demostración: Sea $K_n = \{f \in H: \|\Gamma f\| \le s_n(B)\|f\|\}$, donde Γ es el operador asociado a B. Veamos que $\sigma K_n \subset K_n$. Si $f \in K_n$,

$$|\langle \Gamma\sigma f, g\rangle| = |\langle \Gamma f, \sigma^{-1} g\rangle| \le s_n(B)\|f\|\|\sigma^{-1}g\| = s_n(B)\|f\|\|g\| \qquad \forall g \in W_2.$$

luego, $\|\Gamma\sigma f\| \le s_n(B)\|f\|$.

Por el Teorema de Treil existe un subespacio $E \subset K_n$, $\operatorname{cod} E \le n$. Si $B_1 = B|_{E\times W_2}$, resulta B_1 de Hankel y $\|B_1\| \le s_n(B)$. Por el Teorema de levantamiento de formas de Hankel generales, existe $B': H \times H \to \mathbb{C}$ que extiende a B_1 con igual norma. Por lo tanto $B' = B$ en $E \times W_2$ y $\|B'\| \le s_n(B)$. ■

Teorema de Adamjan-Arov-Krein (primera versión)

Sea $[H, \sigma, W_1, W_2]$ un sistema de Lax-Phillips generalizado y $B: W_1 \times W_2 \to \mathbb{C}$ una forma de Hankel acotada con Γ el operador asociado a B. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces,

$$s_n(B) = \inf\{\|\Gamma - S\|: \ S: W_1 \to W_2 \text{ de Hankel, } r(S) \le n\}$$

y el ínfimo se realiza.

Demostración: Por el Teorema de levantamiento condicional, existen una forma de Toeplitz $B': H \times H \to \mathbb{C}$ y un subespacio $E \subset K_n$, $\operatorname{cod} E \le n$, $\sigma(E) \subset E$ tales que $B' = B$ en $E \times W_2$ y $\|B'\| \le s_n(B)$. Sea $\Gamma': H \to H$ el operador asociado a B'. Definamos $S = P_{W_2}\Gamma'|_{W_1} - \Gamma$. Como $S|_E = 0$, resulta $r(S) \le n$. Además S es de Hankel pues, si $E^\perp$ es el complemento ortogonal de E en W_1 y $f \in E$, $\tilde f \in E^\perp$, $g \in W_2$,

$$\begin{aligned}\langle S\sigma(f+\tilde f)\ ,\ g\rangle &= \langle S\sigma\tilde f\ ,\ g\rangle = \langle P_{W_2}\Gamma'\sigma\tilde f\ ,\ g\rangle - \langle \Gamma\sigma\tilde f\ ,\ g\rangle = \langle \Gamma'\sigma\tilde f\ ,\ g\rangle - \langle \Gamma\sigma\tilde f\ ,\ g\rangle \\ &= \langle \Gamma'\tilde f\ ,\ \sigma^{-1}g\rangle - \langle \Gamma\tilde f\ ,\ \sigma^{-1}g\rangle = \langle S\tilde f\ ,\ \sigma^{-1}g\rangle = \langle S(f+\tilde f)\ ,\ \sigma^{-1}g\rangle\end{aligned}$$

ya que Γ es de Hankel, Γ' es de Toeplitz y $\sigma^{-1}W_2 \subset W_2$.

Como $\|\Gamma + S\| = \|P_{W_2}\Gamma'|_{W_1}\| \le \|\Gamma'\| = \|B'\| \le s_n(B) \le \|\Gamma + S\|$, resulta la tesis. ■

Un teorema clásico de Kronecker caracteriza los símbolos de los operadores de Hankel de rango finito. Combinando el teorema de Kronecker con la primera versión del teorema de Adamjan-Arov-Krein se obtiene una segunda versión del teorema de Adamjan-Arov-Krein que da una fórmula para los números $s_n(B_\Phi)$ de una forma de Hankel de símbolo Φ. Para $n = 0$ esta fórmula se reduce a la versión del Teorema de Nehari dada en la página 37. Ver [Tr] y [C-S.1], así como el artículo mencionado de J. Gimenez en [3°Esc].

Para un estudio profundizado de la teoría de interpolación y del Teorema de Nagy-Foias, con aplicaciones a la geofísica, ver el reciente tratado [F-F] y las monografías de [D] y de [D-F-K].

BIBLIOGRAFIA

[3°Esc] *Extensión y representación de formas invariantes en la teoría de interpolación, predicción y dilatación*, 3° Escuela Venezolana de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, (1991).

[A-A-K] V. Adamjan, D. Arov, M. Krein, *Infinite Hankel matrices and generalized problems of Caratheodory-Fejer and I.Schur*, Func. Anal. i Prilozen, **2** (1968), 1-19 (en ruso).

[Al] P. Alegria, *Schur Algorithm for Lacunary Hankel forms*, Zeitschrift fur Analysis undihre Anw., (1993), 491-509.

[Aro] R. Arocena, *Generalized Toeplitz Kernels and their relation to a paper of Adamjan-Arov-Krein*, North Holl. Math. St., **86** (1984), 1-22.

[A-C-S] R. Arocena, M. Cotlar, C. Sadosky, *Weighted inequalities in L^2 and lifting properties*, Adv. in Math., (1981), 95-128.

[Arv] W. B. Arveson, *Subalgebras of C*-algebras I*, Acta Math., **123** (1969), 141-224.

[C] M. Cotlar, *Teoremas espectrales, modelos funcionales y dilataciones de operadores en Espacios de Hilbert*, Cursos de Matemática, IAM, **5** (1991).

[C-S.1] M. Cotlar, C. Sadosky, *Abstract, weighted, and multidimentional Adamjan-Arov-Krein Theorems*, Integral Equat. Oper. Th., **17** (1993), 169-201.

[C-S.2] M. Cotlar, C. Sadosky, *Tranference of Metrics Induced by Unitary Couplengs*, J. Func. An., **111**, 2 (1993), 473-488.

[D] H. Dym, *J Contractive Matrix Functions, Reproducing Kernel, Hilbert Spaces and Interpolation*, CBMS Regional Conference Series, AMS, **71** (1989).

[D-F-K] Dubovoj, Fritzsche, Kirstein, *Matricial Version of the Classical Schur Problem*, Teubner-Texte, Leipzig, **129** (1992)

[E] E. Effros, *Aspects of non-conmutative order*, Lect. Notes in Math., **650** (1978), 1-40.

[F] V. A. Fucks, *Special Chapters in the Theory of Analytic Functions*, AMS Trasl., **14** (1965).

[F-F] C. Foias, A. Frazho, *The commutant Lifting Approach to Interpolation*, Birkhäuser Verlag, (1990).

[G] A. Guichardet, *Symmetric Hilbert Spaces*, Lecture Notes, Springer, **261** (1972).

[G-K] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien*, Dunod, (1971).

[H] A. Holevo, *Conditionally positive definite functions in quantum probability*, Proc. Int. Congress of Math., Berkley, (1987), 1011-1020.

[I-R] Ibrahimov, Rosanov, *Gaussian Random Processes*, Springer, (1979).

[Na] B. Sz-Nagy, *Extensions of Linear Tranformations in Hilbert Space which exteds beyond the space*, Apéndice al libro *Functional Analysis* de F. Riesz y B. Sz-Nagy, (1960).

[Ni] N. K. Nikolsky, *Lectures on the Shift Operator*, Spinger, (1987).

[P] G. Pisier, *Completely bounded maps between sets of Banach space operators*, Ind. Univ. Math. J., **39**, 1 (1990), 249-277.

[Sc] L. Schwartz, *Sous-espaces Hilbertiens d' espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Analyse Math., **13** (1964), 115-256.

[St] W. Stinespring, *Positive functions on C*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 211-216.

[Ta] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer, (1968).

[Tr] S. Treil, *Teorema de Adamjan-Arov-Krein, variante vectorial*, Seminario de LOMI, Leningrado, **141** (1986), 56-72 (en ruso).