ISSN 1853-709X

Fascículo 38

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

G. Keilhauer

Geometría diferencial

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 38

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Cursos y Seminarios

Fascículo 38

Geometría Diferencial I

Guillermo Keilhauer

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Ciudad Universitaria - Pabellón I
1428 Buenos Aires, ARGENTINA

Geometría Diferencial I

Guillermo Keilhauer

Agosto 1995

Prólogo

El presente fascículo contiene los temas que he desarrollado en el primer curso de Geometría Diferencial, que se dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, a partir del año 1992.

Los mismos han sido elegidos para que, independientemente del segundo curso de Geometría Diferencial cuyo programa incluye conexiones y métricas Riemannianas, permitan al alumno continuar con otros; por ejemplo, Análisis en Variedades o Control Geométrico no Lineal. Es por ello que he incluído integración en variedades y el teorema de Stokes y puesto cierto énfasis en el tema campos de vectores, con aplicación a una versión del Teorema de Frobenius.

El curso no requiere más que un conocimiento sólido de Cálculo Avanzado y de los conceptos topológicos que allí se utilizan. Para el desarrollo del curso me he basado — únicamente — en los siguientes resultados:

- El teorema de la función inversa local

  que a través de su consecuencia inmediata — el teorema de la función implícita en sus dos versiones posibles — es fuente generadora de ejemplos de subvariedades de $\mathbb{R}^n$.
- El teorema de existencia y unicidad de curvas integrales para campos de vectores en $\mathbb{R}^n$.
- El teorema de cambio de variables

  que permite generalizar a variedades el concepto de integración en $\mathbb{R}^n$.
- El resultado que afirma (ver apéndice) que toda función continua e inyectiva, de un abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, es abierta.

  que asegura la buena definición de la dimensión de variedades.

Se han intercalado, aproximadamente, noventa problemas a lo largo del texto, para que su resolución ayude a una mejor comprensión del mismo y cuarenta y cinco más, como ejercicios complementarios.

Agradezco a todos los que han colaborado en el dictado del curso, en los distintos períodos; al licenciado Héctor Pérez y a los alumnos, cuyas observaciones me han permitido mejorar día a día, la exposición de los temas.

En especial mi gratitud a la licenciada María del Carmen Calvo, por haber revisado el manuscrito, aportado ejercicios y por el entusiasmo y horas de trabajo empleados en el tipeo y diseño gráfico.

Buenos Aires, Julio de 1995

El tipeo de este fascículo ha sido parcialmente subsidiado por UBACYT 94 y por el Departamento de Matemática.

Contenido

Variedades Diferenciables

En lo que sigue, representaremos de manera indistinta con $(u^1, \ldots, u^n)$ a los puntos de $\mathbb{R}^n$ y con $u^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (1 \leq i \leq n)$ a la i-ésima proyección; i.e., a la base dual de la canónica de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es **diferenciable** *si las derivadas parciales de cualquier orden de f existen y son continuas en todo punto de A.*

De acuerdo con la definición, *diferenciable* es sinónimo de C^∞.

NOTACIONES

Con $\mathcal{F}(A)$ denotaremos al conjunto de todas las funciones diferenciables $f : A \to \mathbb{R}$.

Si $1 \leq j \leq n$, denotaremos con $D_j : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(A)$ y con $D_j|_p : \mathcal{F}(A) \to \mathbb{R}, (p \in A)$ a los operadores definidos por: $D_j f = \dfrac{\partial f}{\partial u^j}$ y $D_j|_p(f) = D_j f|_p$.

DEFINICIÓN

En general, una función $f : A \to \mathbb{R}^k$ con $f = (f^1, \ldots, f^k)$ se dirá **diferenciable**, *si cada $f^i \in \mathcal{F}(A)$.*

OBSERVACIÓN

Toda función diferenciable es continua.

DEFINICIÓN

Sean A y B abiertos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ y $f : A \to B$ una función. Diremos que f es un **difeomorfismo** *de A en B, si:*

a) f es diferenciable

b) f es una biyección con inversa f^{-1}

c) f^{-1} es diferenciable.

OBSERVACIÓN

Puede ocurrir que $f : A \to B$ sea un homeomorfismo con f diferenciable y que f^{-1} no sea diferenciable.

Por ejemplo, $A = B = \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función definida por: $f(u^1, \ldots, u^n) = ((u^1)^3, \ldots, (u^n)^3)$.

NOTA

El siguiente resultado, cuya demostración puede leerse en cualquier libro de *Cálculo Diferencial*, es de suma importancia.

Teorema de la Función Inversa Local

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, $f = (f^1, \ldots, f^n) : G \to \mathbb{R}^n$ diferenciable y supongamos que existe $p \in G$ tal que $det(D_j f^i|_p) \neq 0$. Entonces existe un abierto $A \subset G$ con $p \in A$, tal que $f(A)$ es abierto y $f : A \to f(A)$ es un difeomorfismo.

EJERCICIO 1.

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, $f : G \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que $det(D_j f^i|_p) \neq 0$ para todo $p \in G$. Probar:

a) $f(G)$ es abierto

b) Si f es inyectiva, entonces $f : G \to f(G)$ es un difeomorfismo.

CONVENCIÓN

Sea $f : A \to B$ un difeomorfismo entre abiertos. Como $B = f(A)$, convenimos en decir que el par (A, f) es una CARTA USUAL de $\mathbb{R}^n$.

Si $p \in A$, diremos que (A, f) es una CARTA ALREDEDOR DE p.

Como corolario del teorema anterior, tenemos la siguiente versión del teorema de la función implícita

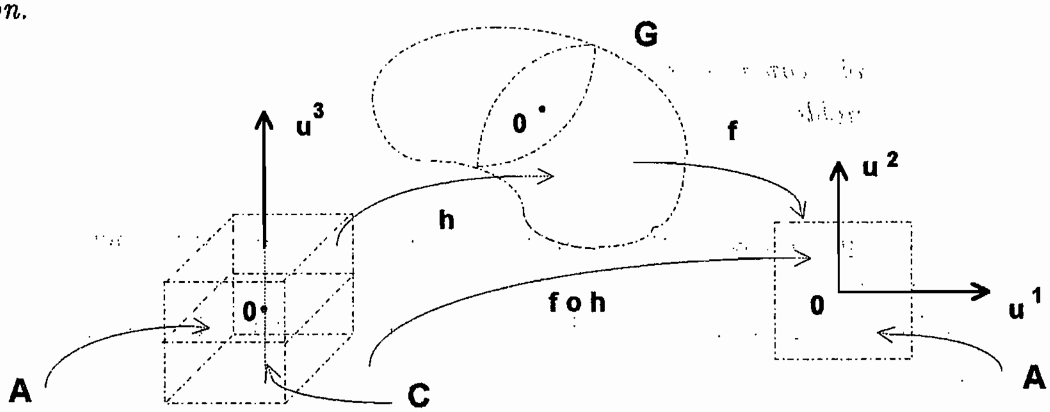
Teorema de la Función Implícita I

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al origen de $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^k$ con $n > k$, una función diferenciable que satisface $f(0) = 0$ y $det(D_j f^i|_0) \neq 0$, donde $1 \leq i, j \leq k$. Entonces existe una carta usual (D, h) de $\mathbb{R}^n$, alrededor del origen de $\mathbb{R}^n$, que satisface las siguientes propiedades:

a) $h(0) = 0$ y $h(D) \subset G$

b) $D = A \times C$, con A abierto en $\mathbb{R}^k$ y C abierto en $\mathbb{R}^{n-k}$

c) Si $u = (u^1, \ldots, u^n) \in D$, entonces $f(h(u)) = (u^1, \ldots, u^k)$. Es decir, $f \circ h$ es una proyección.



DEMOSTRACIÓN:

Sea $F : G \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(u) = (f^1(u), \ldots, f^k(u), u^{k+1}, \ldots, u^n)$, donde $u = (u^1, \ldots, u^k, u^{k+1}, \ldots, u^n)$. Luego, F es diferenciable y $det(D_j F^i|_0)_{1 \le i,j \le n} = det(D_j f^i|_0)$.

Debido al teorema anterior, existen abiertos $A' \subset \mathbb{R}^n$ y $B' \subset G$, ambos conteniendo al origen de $\mathbb{R}^n$, tales que $F : B' \to A'$ es un difeomorfismo.

Como $A' \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, existen abiertos $A \subset \mathbb{R}^k$ y $C \subset \mathbb{R}^{n-k}$, ambos conteniendo a los respectivos orígenes, tales que $A \times C \subset A'$. En consecuencia, si $B = F^{-1}(A \times C)$, es $F : B \to A \times C$ un difeomorfismo entre abiertos. Sea $D = A \times C$ y $h = F^{-1} : D \to B$; luego (D, h) es una carta usual de $\mathbb{R}^n$ alrededor del origen, que satisface las propiedades enunciadas.

DEFINICIÓN

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f = (f^1, \ldots, f^k) : G \to \mathbb{R}^k$ con $n \ge k$ diferenciable. Un punto $p \in G$ se denomina un **punto regular** *de f si $rango(D_j f^i|_p) = k$, donde $1 \le i \le k$ y $1 \le j \le n$. En caso contrario se denomina* **punto crítico** *de f.*

Un punto $q \in \mathbb{R}^k$ se denomina un **valor regular** *de f, si todo $p \in f^{-1}(q)$ es un punto regular. En caso contrario, se denomina un* **valor crítico** *de f.*

EJERCICIO 2

Sean $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$ con $a_{ij} = a_{ji}$ y sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la función cuadrática definida por

$$F(u^1, \ldots, u^n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u^i u^j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i u^i + c$$

Supongamos que $Q = F^{-1}(0)$ es no vacío; es decir, Q es una CUÁDRICA. *Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ se denomina un* CENTRO *de Q si para todo $x \in Q$ es $2p - x \in Q$. Verificar que si ningún punto de Q es centro de Q, entonces todo $p \in Q$ es un punto regular de F.*

Vamos a demostrar ahora una consecuencia importante del Teorema de la Función Implícita I, que junto con el resultado del ejercicio anterior, nos permitirá dotar a la mayoría de las cuádricas de una estructura diferenciable.

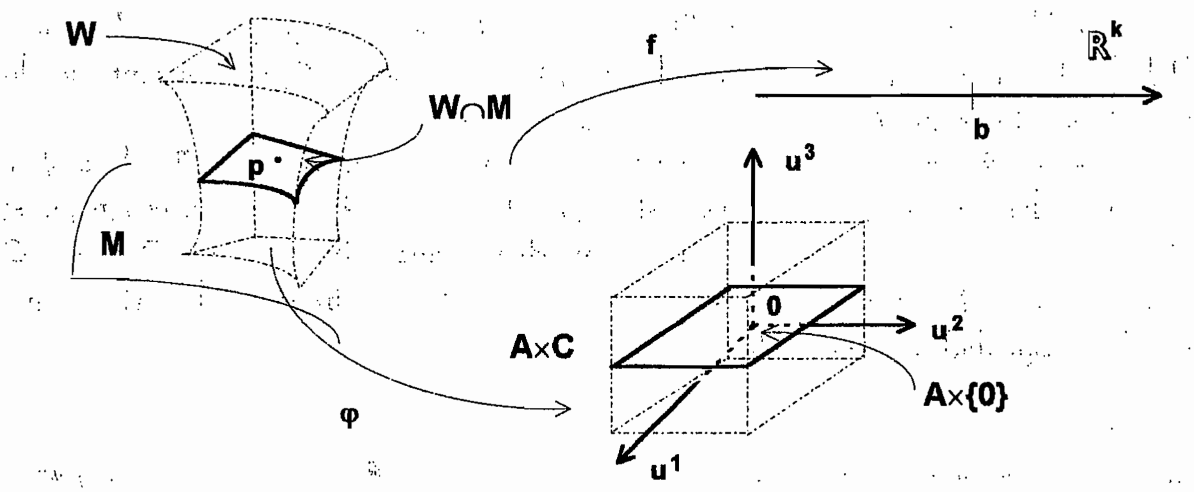
Corolario 1

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $m = n - k > 0$, una función diferenciable, $b \in f(\mathbb{R}^n)$ un valor regular y $M = f^{-1}(b)$.

Para cada $p \in M$ existe una carta usual (W, φ) de $\mathbb{R}^n$ alrededor de p, que satisface:

a) $\varphi(p) = 0$ *y* $\varphi(W) = A \times C$ *con A y C abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente.*

b) $\varphi(W \cap M) = A \times \{0\}$ *o, equivalentemente, si $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m, \varphi^{m+1}, \ldots, \varphi^n)$ es $W \cap M = \{q \in W \ / \ \varphi^{m+1}(q) = \ldots = \varphi^n(q) = 0\}$*



DEMOSTRACIÓN:

Dado $p \in M$, sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ definida por $g(u) = f(u+p) - b$; luego, $g(0) = 0$ y $D_j g^i|_0 = D_j f^i|_p$. Como p es un punto regular de f, es $rango(D_j g^i|_0) = k$, donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n$. Luego existen $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ tales que $det(D_{j_s} g^i|_0) \neq 0$, donde $1 \leq i, s \leq k$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $j_s = s$ si $s = 1, \ldots, k$; si no, definimos $\tilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ por $\tilde{g}(u^1, \ldots, u^n) = g(u^{\sigma(1)}, \ldots, u^{\sigma(n)})$ donde $\sigma : [1, \ldots, n] \to [1, \ldots, n]$ es una permutación que satisface $\sigma^{-1}(s) = j_s$ para $s = 1, \ldots, k$; y el razonamiento que prosigue se hace con $\tilde{g}$.

Siendo $det(D_j g^i|_0) \neq 0$, donde $1 \leq i, j \leq k$, por el Teorema de la Función Implícita I, existe una carta usual (D, h) de $\mathbb{R}^n$, alrededor del origen, con $h(0) = 0, D = C \times A$, donde C y A son abiertos de $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente, tal que

(1) $g \circ h(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^k)$ si $u \in D$

o, equivalentemente, que

(2) $f(h(u) + p) = b + (u^1, \ldots, u^k)$

Sea $W = h(D) + p$ y $\psi : W \to D = C \times A$ definido por $\psi(q) = h^{-1}(q - p)$.

Si $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^k, \psi^{k+1}, \ldots, \psi^n)$ se verifica

(3) $W \cap M = \{q \in W \ / \ \psi^1(q) = \ldots = \psi^k(q) = 0\}$

En efecto, si $q \in W$ es $q = h(u) + p$ con $u \in D$ y por (2) resulta

(4) $f(q) = b + (u^1, \ldots, u^k)$

Como $\psi(q) = h^{-1}(q - p) = h^{-1}(h(u)) = u$, es $\psi^i(q) = u^i$ si $i = 1, \ldots, n$. Luego,

(5) $f(q) = b + (\psi^1(q), \ldots, \psi^k(q))$

La igualdad (3) es inmediata a partir de la anterior. Siendo $m = n - k$, si definimos $\varphi : W \to A \times C$ por $\varphi(q) = (\psi^{k+1}(q), \ldots, \psi^n(q), \psi^1(q), \ldots, \psi^k(q))$, se cumplen las propiedades a) y b).

Observación

Si le damos a $M = f^{-1}(b) \subset \mathbb{R}^n$ la topología inducida por $\mathbb{R}^n$, entonces M es Hausdorff, con base numerable y la inclusión $i : M \to \mathbb{R}^n$ es continua. Sea $x : W \cap M \to A$ definida por $x(q) = (\varphi^1(q), \ldots, \varphi^m(q))$; luego x es una biyección con inversa $x^{-1}(u^1, \ldots, u^m) = \varphi^{-1}(u^1, \ldots, u^m, 0, \ldots, 0)$. La igualdad anterior muestra que x^{-1} es continua. Afirmamos que también x es continua, con lo cual x resulta un homeomorfismo entre el abierto $W \cap M$ de M y el abierto A de $\mathbb{R}^m$. Para ello basta observar que si $i|_{W\cap M} : W \cap M \to \mathbb{R}^n$ es la restricción de la inclusión a $W \cap M$ y $\Pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$ es la proyección $\Pi(u^1, \ldots, u^m, u^{m+1}, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^m)$, entonces $x = \Pi \circ \varphi \circ id|_{W\cap M}$.

Definición

Un espacio topológico M se denomina una **variedad topológica** *de dimensión $m \geq 1$, si satisface:*

a) M es Hausdorff y con base numerable

b) Para cada $p \in M$ existe un abierto U entorno de p, un abierto A de $\mathbb{R}^m$ y un homeomorfismo $x : U \to A$

Nota

El par (U, x) se denomina una **carta** de M alrededor de p. Si $u^i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección, sea $x^i = u^i \circ x$; luego $x(q) = (x^1(q), \ldots, x^m(q))$ si $q \in U$ y por lo tanto escribimos $x = (x^1, \ldots, x^m)$. La función $x^i : U \to \mathbb{R}$ se denomina la **componente** i-ésima de x y $x^i(q)$ la **coordenada** i-ésima de q respecto de x.

Ejemplos

1. $M = \mathbb{R}^m$ con la topología usual, tomando $U = A = \mathbb{R}^m$ y $x = id$.

2. Debido al corolario anterior, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $m = n - k > 0$ es diferenciable, $b \in f(\mathbb{R}^n)$ es un valor regular, entonces $M = f^{-1}(b)$ es una variedad topológica de dimensión m con la topología inducida por $\mathbb{R}^n$.

3. De acuerdo con el ejercicio 2, toda cuádrica $Q \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ sin puntos singulares, es decir, ningún punto de Q es centro de Q, es una variedad topológica de dimensión $n - 1$ con la topología inducida por $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2

Sea M una variedad topológica de dimensión m, $p \in M$ y supongamos que existe un abierto V de M, entorno de p, un abierto A de $\mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $y : V \to A$. Entonces $n = m$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea (U, x) una carta de M alrededor de p; luego $x(U \cap V)$ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m$ pues $p \in U \cap V$ e $y(U \cap V)$ es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

Siendo $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ un homeomorfismo entre abiertos no vacíos, resulta $n = m$ (ver apéndice).

EJERCICIO 3

Sean M y N variedades topológicas y $f : M \to N$ una función. Verificar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) f es continua en p

b) Si (p_n) es una sucesión en M que converge a p, entonces $(f(p_n))$ converge a $f(p)$.

EJERCICIO 4

Sean M y N variedades topológicas de la misma dimensión. Probar que si $f : M \to N$ es continua e inyectiva, entonces f es abierta.

EJERCICIO 5

Sea M una variedad topológica y A un abierto no vacío de M. Mostrar que A, con la topología inducida, es una variedad topológica de la misma dimensión que M.

EJERCICIO 6

Verificar que $\mathbb{R}^{n \times n}$ es, de manera natural, una variedad topológica de dimensión n^2. Deducir del ejercicio anterior, que $GL(n, \mathbb{R})$ es una variedad topológica de dimensión n^2.

DEFINICIÓN

Sea M una variedad topológica e I un conjunto de índices. Una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ se denomina un **atlas** *para M, si $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.*

OBSERVACIÓN

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ la variedad topológica de dimensión $m = n - k$, definida de acuerdo con el corolario 1. Si (W, φ) es una carta usual de $\mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades a) y b) del mismo, diremos que (W, φ) está **adaptada** a M.

Si (U,x) es la carta de M definida por $U = W \cap M$ y $x(q) = (\varphi^1(q), \ldots, \varphi^m(q))$, diremos que (U,x) es la **inducida** por (W,φ). Sea $\mathcal{A}$ la familia de todas las cartas de M inducidas por cartas usuales de $\mathbb{R}^n$ adaptadas a M. Afirmamos que el atlas $\mathcal{A}$ tiene la siguiente propiedad:

Si (U,x) , (V,y) pertenecen a $\mathcal{A}$, con $U \cap V$ no vacío, entonces $y \circ x^{-1} : x(U \circ V) \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

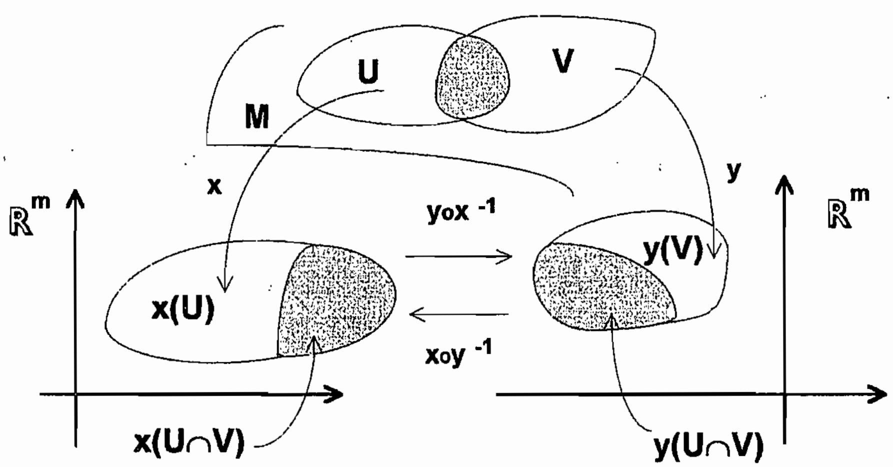
En efecto,

sean (W,φ) y (Ω,ψ) las cartas de $\mathbb{R}^n$ que inducen a (U,x) y a (V,y) respectivamente, con $W = A \times C$ y $\Omega = B \times D$. Tenemos que $x^{-1} : x(U) = A \to U$ e $y : V \to y(V) = B$ están definidas por $x^{-1}(u) = \varphi^{-1}(u,0)$ e $y(q) = (\psi^1(q), \ldots, \psi^m(q))$, donde 0 es el origen de $\mathbb{R}^k$.

Luego, si $u \in x(U \cap V)$ es $y \circ x^{-1}(u) = (\psi^1 \circ \varphi^{-1}(u,0), \ldots, \psi^m \circ \varphi^{-1}(u,0))$ y por lo tanto, $y \circ x^{-1}$ es diferenciable. Por la misma razón es $x \circ y^{-1}$ diferenciable, con lo cual $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ es un difeomorfismo con inversa $x \circ y^{-1}$.

Definición

Sea M una variedad topológica de dimensión m y $\mathcal{A}$ un atlas para M. Diremos que $\mathcal{A}$ es **diferenciable** *si para todo par de cartas (U,x) , (V,y) pertenecientes a $\mathcal{A}$ con $U \cap V$ no vacío, se verifica que $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ e $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ son diferenciables; es decir, $y \circ x^{-1}$ es un difeomorfismo con inversa $x \circ y^{-1}$.*



Observación

Sea $M = \mathbb{R}^n$ con la topología usual, $U = V = \mathbb{R}^n$, $x = id$ e $y(u) = ((u^1)^3, \ldots, (u^n)^3)$ si $u = (u^1, \ldots, u^n)$. Si $\mathcal{A} = \{(U,x),(V,y)\}$, entonces $\mathcal{A}$ es un atlas para M que no es diferenciable, pues $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es la función $x \circ y^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = (\sqrt[3]{u^1}, \ldots, \sqrt[3]{u^n})$ que *no* es diferenciable.

Definición

Sea M una variedad topológica y $\mathcal{A}$ un atlas diferenciable para M. Una carta (U,x) de M se dice **admisible** *para $\mathcal{A}$, si el atlas $\mathcal{A} \cup \{(U,x)\}$ es diferenciable.*

Observación

Con las notaciones de la observación anterior, si $\mathcal{A}_0 = \{(U,x)\}$, entonces (V,y) *no* es admisible con $\mathcal{A}_0$.

Definición

Una **estructura diferenciable** *para M, es un atlas diferenciable $\mathcal{D}$ para M con la propiedad de ser maximal. Es decir, si (U,x) es una carta admisible con $\mathcal{D}$, entonces $(U,x) \in \mathcal{D}$.*

Observaciones

1. Si $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable para M, entonces $\mathcal{A}$ genera una única estructura diferenciable $\mathcal{D}$ para M con $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$, definiendo a $\mathcal{D}$ como la familia de todas las cartas (U,x) de M que son admisibles para $\mathcal{A}$.
2. Una variedad topológica puede tener diferentes estructuras diferenciables. Por ejemplo, sea $M = \mathbb{R}^n$ con la topología usual y para cada $k = 0,1,\ldots$; sea $x_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ el homeomorfismo definido por $x_k(u) = ((u^1)^{2k+1}, \ldots, (u^n)^{2k+1})$ si $u = (u^1, \ldots, u^n)$. Sea $\mathcal{A}_k$ el atlas para $\mathbb{R}^n$ definido por $\mathcal{A}_k = \{(\mathbb{R}^n, x_k)\}$ y $\mathcal{D}_k$ la estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}_k$. Luego, $\mathcal{D}_k \neq \mathcal{D}_{k'}$ si $k \neq k'$.
3. Existen variedades topológicas que no admiten estructuras diferenciables (ver M. Kervaire, Comment Math. Helv.,34 (1960)).
4. La estructura diferenciable $\mathcal{D}_0$ se denomina la estructura diferenciable usual para $\mathbb{R}^n$. Por construcción de $\mathcal{D}_0$, se tiene que $(U,x) \in \mathcal{D}_0 \iff (U,x)$ es una carta usual de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Una **variedad diferenciable** *de dimensión $m \geq 1$, es una variedad topológica M de dimensión m, provista de una estructura diferenciable $\mathcal{D}$*

Nota

Las variedades diferenciables se suelen indicar en la forma $(M, \mathcal{D})$, o simplemente con M, si no hay confusión sobre la estructura diferenciable considerada.

EJERCICIO 7

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n \geq 1$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base. Sea $x : V \to \mathbb{R}^n$ definida por $x(v) = (a^1, \ldots, a^n)$ si $v = a^1.v_1 + \ldots + a^n.v_n$; es decir, si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ entonces $\{x^1, \ldots, x^n\}$ es la base dual de B.

Consideremos sobre V la única topología que hace a x un homeomorfismo.

a) Verificar que dicha topología no depende de B.

b) Sea $\mathcal{D}$ la estructura diferenciable generada por el atlas (V, x). Probar que $\mathcal{D}$ no depende de B.

NOMBRE: $\mathcal{D}$ se denomina la ESTRUCTURA DIFERENCIABLE USUAL para V.

EJERCICIO 8

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $A \subset M$ un abierto no vacío. Considerando en A la topología inducida por M, mostrar que A hereda, de manera natural, una estructura diferenciable que hace de A, una variedad diferenciable de dimensión m.

EJERCICIO 9

Deducir de los ejercicios anteriores, que $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ resulta, de manera natural, una variedad diferenciable de dimensión n^2.

DEFINICIÓN

Un subconjunto no vacío $M \subset \mathbb{R}^n$ se denomina una **subvariedad** *de dimensión $m = 1, \ldots, n$ de $\mathbb{R}^n$ si verifica las siguientes propiedades:*

S_1. M es una variedad diferenciable de dimensión m.

S_2. Para cada $p \in M$ existe una carta usual (W, φ) de $\mathbb{R}^n$ alrededor de p con $\varphi(p) = 0$, $\varphi(W) = A \times C$ donde A y C son abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n-m}$ respectivamente; tales que

a) $\varphi(W \cap M) = A \times \{0\}$

b) Si $U = W \cap M$ y $x : U \to A$ está definido por $x(q) = (\varphi^1(q), \ldots, \varphi^m(q))$, entonces (U, x) es una carta admisible.

EJEMPLO

De acuerdo con lo visto, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $m = n - k > 0$, es diferenciable y $b \in f(\mathbb{R}^n)$ es un valor regular, entonces $M = f^{-1}(b)$ admite, de manera natural, una estructura diferenciable que lo transforma en una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 10

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión m y sea $\mathcal{D}$ su estructura diferenciable. Si $\mathcal{D}'$ es una estructura diferenciable que hace a M, una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, probar que $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

Sugerencia: Utilizar la propiedad S_2 de la definición de subvariedad.

EJERCICIO 11

Sea $Q \subset \mathbb{R}^n$ una cuádrica sin puntos singulares. Verificar que Q es una subvariedad de dimensión $n-1$.

EJERCICIO 12

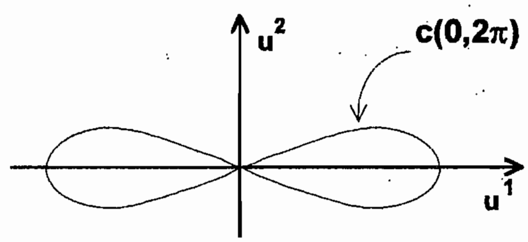
Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión n. Mostrar que M es abierto y la estructura diferenciable coincide con la heredada de $\mathbb{R}^n$ (ver, ejercicio 8).

EJERCICIO 13

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad de dimensión m. Probar que la topología de M coincide con la inducida por $\mathbb{R}^n$.

NOTA

Existen variedades diferenciables $M \subset \mathbb{R}^n$ que no son subvariedades. Por ejemplo, sea $c: (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la *lemniscata* o *moño* definida por $c(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(2t))$ y $M := c(0, 2\pi)$. La curva c es una biyección con su imagen; luego si le damos a M la única topología que hace a c un homeomorfismo, entonces M resulta una variedad topológica de dimensión 1.



Es claro que M no resulta compacto por ser homeomorfo a $(0, 2\pi)$ vía c. M resulta, de manera natural, una variedad diferenciable, considerando sobre M la estructura diferenciable generada por el atlas (M, c^{-1}). Debido al ejercicio anterior, M no puede ser una subvariedad de $\mathbb{R}^2$, pues si no, su topología sería la inducida y por lo tanto, M sería compacto.

EJERCICIO 14

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su estructura diferenciable.

i) *Sea V un abierto no vacío de M, $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto e $y: V \to A$ un homeomorfismo. Supongamos que si $p \in V$, existe una carta $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $p \in U$ tal que $x \circ y^{-1}: y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ es un difeomorfismo. Probar que $(V, y) \in \mathcal{D}$.*

ii) *Sea $(U, x) \in \mathcal{D}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto e $y: U \to A$ una biyección tal que las funciones $y \circ x^{-1}: x(U) \to A$, $x \circ y^{-1}: A \to x(U)$ son diferenciables. Utilizando i), mostrar que $(U, y) \in \mathcal{D}$.*

iii) *Si $p \in M$, probar que existe $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $x(p) = 0$ (origen).*

iv) *Si $p \in M$, sea $B(0, r)$ la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ con centro en el origen y radio $r > 0$. Construir $(U, x) \in \mathcal{D}$ tal que $x(p) = 0$ y $x(U) = B(0, r)$.*

v) Si $p \in M$, construir una $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $x(p) = 0$ y $x(U) = \mathbb{R}^n$.

Sugerencia: Si $\| \ \|$ denota a la norma usual de $\mathbb{R}^n$ considere la función $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(u) = \frac{u}{1-\|u\|^2}$.

EJERCICIO 15

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ un abierto no vacío y $f = (f^1, \ldots, f^n) : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciable, satisfaciendo las siguientes propiedades.

1. *Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(A) = \Omega \cap M$.*
2. *$f : A \to \Omega \cap M$ es un homeomorfismo, siendo la topología de $\Omega \cap M$ la inducida de $\mathbb{R}^n$ o, equivalentemente, la de M.*
3. *Para todo $u \in A$, es $rango(D_j f^i|_u) = m$; donde $1 \leq j \leq m$ y $1 \leq i \leq n$.*

Probar que si $V = \Omega \cap M$ e $y = f^{-1}$, entonces (V, y) es una carta admisible.

Sugerencia: Para cada $p \in V$, considere (U, x) con $p \in U$, inducida por cartas usuales (W, φ) de $\mathbb{R}^n$ adaptadas a M y aplique el ejercicio anterior parte ii).

NOTA

La definición de variedad diferenciable parte del supuesto que el conjunto M en cuestión es una variedad topológica.

En la práctica, es conveniente utilizar el siguiente criterio para construir variedades diferenciables.

Criterio

Sea M un conjunto, I un conjunto de índices y para cada $i \in I$, sea $U_i \subset M$ un subconjunto no vacío y $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ una función inyectiva.

Supongamos que la familia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ satisface las siguientes propiedades:

1. *$M = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$*
2. *$\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$, para todo $i, j \in I$.*
3. *Si $i, j \in I$ y $U_i \cap U_j$ es no vacío, entonces $\varphi_i o \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es diferenciable.*

Sea τ la topología definida como sigue: $A \in \tau$ si y sólo si $\varphi_i(A \cap U_i)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$ para todo $i \in I$. Entonces τ es la única topología sobre M que satisface que U_i es abierto para todo $i \in I$ y $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ son homeomorfismos.

Si τ resulta con base numerable (por ejemplo, si I es finito o numerable ¿por qué?) y Hausdorff, entonces M resulta una variedad topológica de dimensión n y $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable.

Luego, M resulta una variedad diferenciable con la estructura generada por $\mathcal{A}$.

Aplicaciones

Variedad Producto

Sean M, N variedades diferenciables de dimensión m, n y estructuras diferenciables $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$.

Consideremos el conjunto $M \times N = \{(p,q) \ / \ p \in M, q \in N\}$ y sea la familia $\mathcal{A} = \{(U \times V, x \times y) \ / \ (U,x) \in \mathcal{D}, (V,y) \in \mathcal{D}'\}$; donde $x \times y : U \times V \to x(U) \times y(V) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ está definido por $x \times y(p,q) = (x(p), y(q))$.

Entonces $\mathcal{A}$ satisface las propiedades del criterio anterior y define una topología que es Hausdorff y con base numerable; de hecho es la topología producto. Si $\mathcal{D}''$ es la estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}$, entonces $M \times N$ es una variedad diferenciable de dimensión $n + m$ con dicha estructura diferenciable, que se denomina la VARIEDAD PRODUCTO.

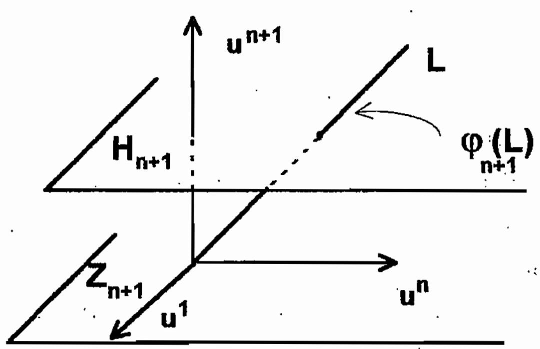
Espacio Proyectivo

Sea M el conjunto de todas las rectas L de $\mathbb{R}^{n+1}$ que pasan por el origen; que se denota usualmente con $M = \mathbf{P}_n(\mathbb{R}^{n+1})$.

Si representamos a los puntos $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $u = (u^1, \ldots, u^{n+1})$, sea Z_i el hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación $Z_i : u^i = 0$. Sea $H_i : u^i = 1$ y $U_i = \{L \in M \ / \ L \not\subset Z_i\}$ si $i = 1, \ldots, n+1$. Por construcción se verifica que $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ si $I = \{1, \ldots, n+1\}$.

En efecto,

dado $L \in M$ sea $u = (u^1, \ldots, u^{n+1}) \in L$ con $u \neq 0$; luego $u^i \neq 0$ para algún $i \in I$; ó sea $L \in U_i$.



Si $L \not\subset Z_i$, es $L \cap H_i$ =un punto. De hecho, si $u = (u^1, \ldots, u^{n+1})$ es base de L, entonces $L \cap H_i = (\frac{u^1}{u^i}, \ldots, \frac{u^{i-1}}{u^i}, 1, \frac{u^{i+1}}{u^i}, \ldots, \frac{u^{n+1}}{u^i})$. Sea $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi_i(L) = L \cap H_i$. Es claro que φ_i está bien definida y es una biyección. Si $\mathcal{A} = \{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$, entonces $\mathcal{A}$ satisface las propiedades del criterio. La topología que define tiene base numerable, pues $\mathcal{A}$ es finito.

Queda como ejercicio verificar que es Hausdorff; luego M es una variedad topológica de dimensión n.

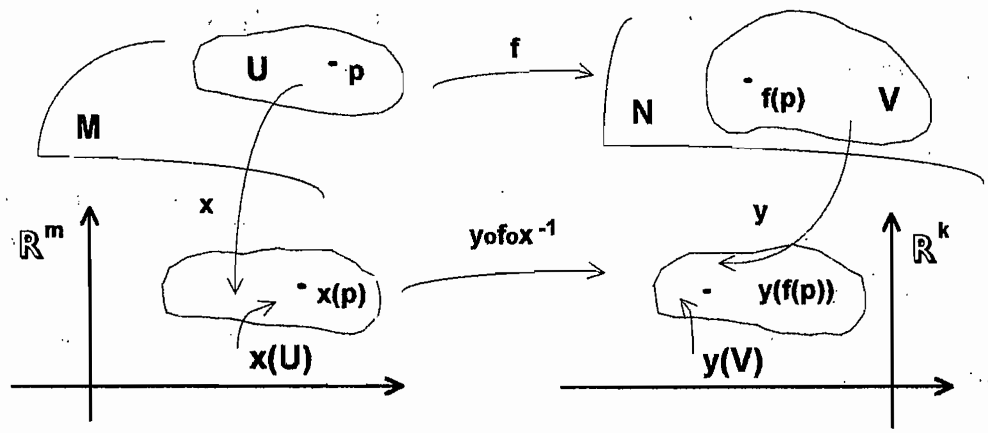
M con la estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}$ se denomina ESPACIO PROYECTIVO REAL DE DIMENSIÓN n.

NOTA

Pasamos ahora, a extender el concepto de función diferenciable a variedades diferenciables. En lo que sigue, si M es una variedad diferenciable y $\mathcal{D}$ es su estructura diferenciable, cuando digamos que (U, x) es una carta de M se entenderá que $(U, x) \in \mathcal{D}$.

DEFINICIÓN

Sean M y N variedades diferenciables de dimensiones m y k respectivamente y $f : M \to N$ una función. Diremos que f es **diferenciable** *y escribiremos $f \in C^{\infty}$, si para cada $p \in M$ existen cartas (U, x) de M y (V, y) de N con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}^k$ es diferenciable.*



EJERCICIO 16

Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una función diferenciable; probar:

a) *El concepto de diferenciabilidad de f no depende de las cartas (U, x) y (V, y) que satisfacen $f(U) \subset V$.*

b) *f es continua.*

c) *Si A es un abierto no vacío de M con la estructura diferenciable heredada de M e $i : A \to M$ es la inclusión, entonces i es diferenciable.*

d) *Si Q es una variedad diferenciable y $g : N \to Q$ es diferenciable, entonces $g \circ f : M \to Q$ es diferenciable.*

e) *Si A es un abierto no vacío de M, la restricción de f a A es diferenciable.*

Proposición 3

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Entonces i es diferenciable

DEMOSTRACIÓN:

Dado $p \in M$, sea (W, φ) una carta usual de $\mathbb{R}^n$ con $p \in W$, $\varphi(p) = 0$; $\varphi(W) = A \times C$ con A y C abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n-m}$ respectivamente y $\varphi(W \cap M) = A \times \{0\}$.

Luego, si $x : W \cap M \to A$ está definida por $x(q) = (\varphi^1(q), \dots, \varphi^m(q))$ entonces $(W \cap M, x)$ es una carta de M con $p \in W \cap M$ e $i(W \cap M) \subset W$.
Siendo, $\varphi \circ i \circ x^{-1}(u^1, \dots, u^m) = \varphi \circ i \circ \varphi^{-1}(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$, entonces i es diferenciable.

EJERCICIO 17

Construir una variedad diferenciable M de dimensión 2, tal que $M \subset \mathbb{R}^3$ y con la propiedad que la inclusión $i : M \to \mathbb{R}^3$ sea continua pero no diferenciable.

DEFINICIÓN

Una función $f : M \to N$ se denomina un **difeomorfismo**, *si f es diferenciable, f es una biyección con inversa f^{-1} y f^{-1} es diferenciable.*

EJEMPLOS

Sea $M = \mathbb{R}^n$ con la estructura usual $\mathcal{D}_0$ y $N = \mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable $\mathcal{D}_1$.

1. Si $f : M \to N$ está definida por $f(u^1, \dots, u^n) = (\sqrt[3]{u^1}, \dots, \sqrt[3]{u^n})$, entonces f es un difeomorfismo.
2. Si $f : M \to N$ es la identidad, entonces f no es un difeomorfismo, pues f^{-1} no es diferenciable.

NOTA

En lo que sigue, consideraremos, salvo mención explícita, únicamente la estructura diferenciable usual de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$.

NOTACIÓN

Sea M una variedad diferenciable y $U \subset M$ un abierto no vacío.

Denotaremos con $\mathcal{F}(U)$ al conjunto de las funciones diferenciables $f : U \to \mathbb{R}$.

EJERCICIO 18

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $U \subset M$ un abierto no vacío. Verificar:

1. *Si $f \in \mathcal{F}(M)$, entonces $f|_U \in \mathcal{F}(U)$; donde $f|_U$ denota la restricción de f a U.*
2. *Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$, entonces $f.g \in \mathcal{F}(U)$.*
3. *$\mathcal{F}(U)$ en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones naturales.*
4. *Si (U, x) es una carta de M con $x = (x^1, \dots, x^n)$, entonces $x^i \in \mathcal{F}(U)$.*

EJERCICIO 19

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y (U, x) una carta de M. Consideremos a U y a $x(U)$ como variedades diferenciables con las estructuras diferenciables inducidas de M y $\mathbb{R}^n$ respectivamente. Verificar que $x : U \to x(U)$ es un difeomorfismo.

NOTA

Los siguientes resultados serán luego, de mucha utilidad

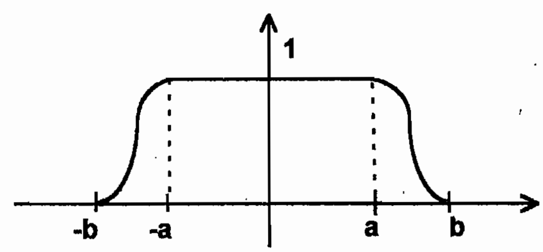
Lema 4

Si $0 < a < b$, existe $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(u) = 1$ si $\|u\| \leq a$, $g(u) = 0$ si $\|u\| \geq b$ y $0 < g(u) < 1$ si $a < \|u\| < b$

DEMOSTRACIÓN:

Si $\alpha = \sqrt{a}$, $\beta = \sqrt{b}$ definimos $f(t) = e^{\frac{1}{t-\beta} - \frac{1}{t-\alpha}}$ si $\alpha < t < \beta$ y $f(t) = 0$ en caso contrario; luego $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Sea ahora $F \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) = \dfrac{\int_x^\beta f(t)dt}{\int_\alpha^\beta f(t)dt}$. Luego, $F(x) = 1$ si $x \leq \alpha$, $F(x) = 0$ si $x \geq \beta$ y $0 < F(x) < 1$ si $\alpha < x < \beta$. Si se define $g(u) = F(\|u\|^2)$, entonces g satisface lo pedido.



DEFINICIÓN

Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, el **soporte** *de f se define como el conjunto*

$$sop(f) = \overline{\{p \in M \ / \ f(p) \neq 0\}}$$

Luego, $M - sop(f)$ es el abierto más grande en el cual f se anula.

Lema 5

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $W \subset M$ un abierto no vacío y $p \in W$. Existe una $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ y un entorno abierto U de p con $U \subset W$ que satisfacen:

1. $0 \leq \varphi(q) \leq 1$ *si* $q \in M$
2. $\varphi|_{\overline{U}} = 1$
3. $sop(\varphi)$ *es compacto y está contenido en W.*

DEMOSTRACIÓN:

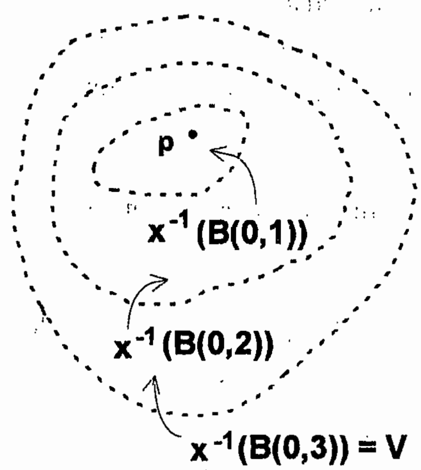
De acuerdo con el ejercicio 14, inciso iv); podemos construir una carta (V, x) de M con $p \in V \subset W$ tal que $x(p) = 0$ y $x(V) = B(0, 3)$.

Sea $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ la función construida en el lema anterior para $a = 1$ y $b = 2$.

Si se define

$$\varphi(p) = \begin{cases} g(x(q)) & \text{si } q \in V \\ 0 & \text{si } q \notin V \end{cases}$$

para $U = x^{-1}(B(0,1))$ se verifica: $\varphi(q) = 1$ si $q \in \overline{U} = x^{-1}(\overline{B(0,1)})$, $sop(\varphi) = x^{-1}(\overline{B(0,2)})$ y $0 \leq \varphi(q) \leq 1$ cualquiera sea $q \in M$. Claramente, φ es diferenciable.



Corolario 6

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $W \subset M$ un abierto no vacío y $p \in W$. Si $f \in \mathcal{F}(W)$, existe $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ y un entorno abierto U de p con $U \subset W$ tales que $\tilde{f}|_U = f|_U$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ y U satisfaciendo las condiciones del lema anterior.

Si $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ se define como $\tilde{f}(q) = \varphi(q).f(q)$ si $q \in W$ y $\tilde{f}(q) = 0$ en caso contrario, entonces $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ y satisface lo requerido.

DEFINICIÓN

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$; luego I es una variedad diferenciable con la estructura diferenciable heredada de la usual de $\mathbb{R}$.

Si M es una variedad diferenciable, una **curva en** *M es una función diferenciable $c : I \to M$.*

NOTACIÓN

Si $c : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva con $c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$, donde $c^i = u^i \circ c$, denotamos con $\frac{dc}{dt}\big|_t = \left(\frac{dc^1}{dt}\big|_t, \ldots, \frac{dc^n}{dt}\big|_t\right)$.

El vector $\frac{dc}{dt}\big|_t$ se denomina el **vector tangente** a la curva c en t.

OBSERVACIÓN

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. De acuerdo con la proposición 3, es i diferenciable. Luego, si $c : I \to M$ es una curva, entonces $i \circ c : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva y escribimos $\frac{dc}{dt}\big|_t = \frac{d(i \circ c)}{dt}\big|_t$.

Espacio tangente a subvariedades de $\mathbb{R}^n$

Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad de dimensión m y $p \in M$, un vector tangente a M en p es, intuitivamente, un vector $v \in \mathbb{R}^n$ con la propiedad que existe una curva $c : I \to M$ con $0 \in I$, $c(0) = p$ y $v = \frac{dc}{dt}|_0$.
Denotemos con T_pM al conjunto de los vectores tangentes a M en p.
Afirmamos que T_pM es un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$.
En efecto,

sea (W, φ) una carta de $\mathbb{R}^n$ con $p \in W$, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(W) = A \times C$ con A y C abiertos de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^{n-m}$ respectivamente tal que $\varphi(W \cap M) = A \times \{0\}$. Sea $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m, \varphi^{m+1}, \ldots, \varphi^n)$ y $\psi = \varphi^{-1} : A \times C \to W$ con $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^m, \psi^{m+1}, \ldots, \psi^n)$.
Como $\varphi \circ \psi(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n)$ y $\psi(0) = p$, se deduce trivialmente que

$$\begin{pmatrix} D_1\varphi^1|_p & \cdots & D_n\varphi^1|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\varphi^n|_p & \cdots & D_n\varphi^n|_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D_1\psi^1|_0 & \cdots & D_n\psi^1|_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\psi^n|_0 & \cdots & D_n\psi^n|_0 \end{pmatrix} = \text{identidad} \tag{1}$$

Para $1 \leq j \leq n-m$, sea $grad(\varphi^{m+j})|_p = (D_1\varphi^{m+j}|_p, \ldots, D_n\varphi^{m+j}|_p)$ y S el subespacio de $\mathbb{R}^n$ definido según

$$S = \{u \in \mathbb{R}^n / < grad(\varphi^{m+j})|_p, u >= 0 \text{ si } j = 1, \ldots, n-m\} \tag{2}$$

Debido a (1), la dimensión de S es m y está generado por los vectores $D_\ell\psi|_0 = (D_\ell\psi^1|_0, \ldots, D_\ell\psi^n|_0)$ con $\ell = 1, \ldots, m$.
Mostramos en lo que sigue, que $T_pM = S$.
Sea $v \in T_pM$ y $c : I \to M$ una curva tal que $0 \in I, c(0) = p$ y $v = \frac{dc}{dt}|_0$ Como c es continua y $c(0) = p \in W \cap M$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $c(-\varepsilon, \varepsilon) \subset W \cap M$.
La condición $\varphi(W \cap M) = A \times \{0\}$, implica que $\varphi^{m+j}(c(t)) = 0$ si $|t| < \varepsilon$ y $1 \leq j \leq n-m$.
Derivando respecto de t y especializando en $t = 0$, se obtiene que $< grad(\varphi^{m+j})|_p, \frac{dc}{dt}|_0 >= 0$ si $1 \leq j \leq n-m$; luego $T_pM \subset S$.
Sea $v \in S$ y $a^1, \ldots, a^m \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{\ell=1}^{m} a^\ell D_\ell\psi|_0$. Denotemos con $a = (a^1, \ldots, a^m)$; luego, por ser A un abierto de $\mathbb{R}^m$ que contiene al origen, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t| < \varepsilon$, resulta $t.a \in A$.
Consideremos la carta $(W \cap M, x)$ de M inducida por (W, φ); esto es, $x : W \cap M \to A$ está definido como $x(q) = (\varphi^1(q), \ldots, \varphi^m(q))$.

Siendo $x(p) = 0$, si definimos $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ como $c(t) = x^{-1}(t.a)$, entonces c es una curva que satisface $c(0) = p$. Dado que para $u = (u^1, \ldots, u^m) \in A$ y $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$ es $x^{-1}(u) = \varphi^{-1}(u, 0) = \psi(u, 0)$, entonces $c(t) = \psi(t.a, 0)$.
En consecuencia, $c^i(t) = \psi^i(t.a, 0)$ si $1 \leq i \leq n$.
Derivando respecto de t y especializando en $t = 0$, se obtiene $\frac{dc^i}{dt}\big|_0 = \sum_{\ell=1}^{m} a^\ell . D_\ell \psi^i|_0$; luego $v = \frac{dc}{dt}\big|_0 \in T_pM$.

DEFINICIÓN

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $f = (f^1, \ldots, f^k) : A \to \mathbb{R}^k$ una función diferenciable. Si $p \in A$, la **diferencial** *de f en p se define como la aplicación lineal $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ tal que*

$$df_p(v^1, \ldots, v^n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} D_i f^1|_p . v^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} D_i f^k|_p . v^i \Big)$$

La matriz $\mathrm{J}(f, p) = (D_j f^i|_p) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ se denomina la **matriz jacobiana** *de f en p.*

Proposición 7

Sea $f = (f^1, \ldots, f^k) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ con $m = n - k > 0$ una función diferenciable y $b \in f(\mathbb{R}^n)$ un valor regular. Sea $M = f^{-1}(b)$ con la única estructura diferenciable que hace a M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ de dimensión m. Si $p \in M$ entonces $T_pM = ker(df_p) =$núcleo de df_p.

DEMOSTRACIÓN:

Como $p \in M$ y b es un valor regular, entonces $rango(\mathrm{J}(f, p)) = k$ o, equivalentemente, $dim(Im(df_p)) = k$; luego $dim(ker(df_p)) = m$.

Dado que T_pM y $ker(df_p)$ tienen la misma dimensión, basta comprobar que $T_pM \subset ker(df_p)$.
Sea $v = (v^1, \ldots, v^n) \in T_pM$ y $c : I \to M$ con $c = (c^1, \ldots, c^n)$ una curva que satisface $c(0) = p$ y $v = \frac{dc}{dt}\big|_0$. Entonces,

$$\begin{aligned} df_p(v) &= \Big(\sum_{i=1}^{n} D_i f^1\big|_p . v^1, \ldots, \sum_{i=1}^{n} D_i f^k\big|_p . v^i \Big) = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} D_i f^1\big|_p . \frac{dc^i}{dt}\big|_0, \ldots, \sum_{i=1}^{n} D_i f^k\big|_p . \frac{dc^i}{dt}\big|_0 \Big) = \\ &= \Big(\frac{d(f^1 \circ c)}{dt}\big|_0, \ldots, \frac{d(f^k \circ c)}{dt}\big|_0 \Big) = \frac{d(f \circ c)}{dt}\big|_0 \end{aligned}$$

Como $c(t) \in M$ y $f(c(t)) = b$ si $t \in I$, entonces $\frac{d(f \circ c)}{dt}\Big|_0 = 0$

EJERCICIO 20

En la situación de la proposición anterior, verificar que

$$T_pM = \{u \in \mathbb{R}^n \ / \ < grad(f^j)|_p, u >= 0 \ \ si \ \ i \leq j \leq k\}$$

COMENTARIOS

Hasta aquí, hemos definido vector tangente y espacio tangente a una subvariedad M, en términos de su espacio exterior $\mathbb{R}^n$.

Interesa ahora, extender dichos conceptos a variedades diferenciables que en principio no están contenidas en $\mathbb{R}^n$; por ejemplo, el espacio proyectivo. De acuerdo con la definición dada, se tiene que si $p \in \mathbb{R}^n$, entonces $T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

Veamos ahora cómo interpretar los vectores $v = (v^1, \ldots, v^n) \in T_p\mathbb{R}^n$ de manera de poder realizar la generalización deseada.

Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, podemos definir la **derivada direccional** de f en p en la dirección v como el número

$$v(f) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + t.v) - f(p)}{t} = \sum_{i=1}^{n} v^i.D_i f|_p =< v, grad(f)|_p > \qquad (1)$$

Luego, al vector $v \in T_p\mathbb{R}^n$ se lo puede interpretar como la función $v : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que a cada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ le asigna el número $v(f)$ según (1).

Como tal, v satisface evidentemente las siguientes propiedades:

$$v(a.f + b.g) = a.v(f) + b.v(g) \qquad (2)$$

$$v(f.g) = v(f).g(p) + f(p).v(g) \qquad (3)$$

si $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

Una función $v : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que safisface (3) se denomina una **derivación** sobre $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ en p.

La igualdad (2), dice naturalmente que v es $\mathbb{R}$-lineal.

Denotemos con $\mathbb{R}^n_p$ al conjunto de las funciones $v : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ que satisfacen (2) y (3). El conjunto es claramente un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con las operaciones naturales.

Es de hacer notar, que si $v \in \mathbb{R}^n_p$ y $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ es constante, entonces $v(f) = 0$.

En efecto,

por ser v lineal basta comprobar que $v(1) = 0$. Como v es una derivación, resulta $v(1) = v(1) + v(1)$; o sea, $v(1) = 0$.

Para cada $v \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, sea $\mathrm{J}_p(v) : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definida como $\mathrm{J}_p(v)(f) = \sum_{i=1}^{n} v^i . D_i f|_p$ si $v = (v^1, \ldots, v^n)$; luego $\mathrm{J}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_p$ es lineal.

Afirmamos que J_p es un isomorfismo; con lo cual $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^n_p$ resultan CANÓNICAMENTE ISOMORFOS (pues J_p no depende de bases).

Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota la base canónica de $\mathbb{R}^n$, se cumple

$$\mathrm{J}_p(e_i) = D_i|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}\Big|_p \text{ si } 1 \leq i \leq n \tag{4}$$

En consecuencia, es suficiente verificar que $\{D_1|_p, \ldots, D_n|_p\}$ es base de $\mathbb{R}^n_p$.

- Son independientes:

Sean $a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}$ tales que $a^1.D_1|_p + \ldots + a^n.D_n|_p = 0$; luego si $f = u^j$, es $(a^1.D_1|_p + \ldots + a^n.D_n|_p)(f) = a^j = 0$.

- Son generadores:

Sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), q = (q^1, \ldots, q^n) \in \mathbb{R}^n$, $c(t) = p + t(q-p)$ si $t \in \mathbb{R}$ y $g(t) = f(c(t))$. Luego,

$$f(q) - f(p) = g(1) - g(0) = \int_0^1 \frac{dg}{dt}\Big|_t . dt = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n} D_i f|_{c(t)} . (q^i - p^i)\Big) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (q^i - p^i). \int_0^1 D_i f|_{c(t)} . dt$$

Sea $h_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ definida por $h_i(q) = \int_0^1 D_i f|_{c(t)} dt$; luego $h_i(p) = D_i f|_p$.

De acuerdo con lo anterior, para $q \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (q^i - p^i).h_i(q)$$

Interpretando a $f(p)$ y a $p^i (1 \leq i \leq n)$ como funciones constantes y notando que $u^i(q) = q^i$, podemos escribir

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (u^i - p^i).h_i \tag{5}$$

Sea ahora $v \in \mathbb{R}^n_p$; luego por (2) y (3) y del hecho que anula a constantes se obtiene,

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(u^i) h_i(p) = \sum_{i=1}^{n} v(u^i) D_i f|_p$$

Como f es arbitrario, se deduce

$$v = \sum_{i=1}^{n} v(u^i) D_i|_p \tag{6}$$

Los vectores de $\mathbb{R}^n_p$ se demoninan también los **vectores tangentes** a la variedad diferenciable $\mathbb{R}^n$ en p y $\mathbb{R}^n_p$ se denomina también el **espacio tangente** a $\mathbb{R}^n$ en p.

La base $\{D_1|_p, \ldots, D_n|_p\}$ se denomina la **base** de $\mathbb{R}^n_p$ **inducida** por la carta $(\mathbb{R}^n, id)$; $id = (u^1, \ldots, u^n)$.

En particular, si $n = 1$, escribiremos indistintamente $D_1|_p = D|_p = \frac{d}{dt}|_p$

OBSERVACIÓN

Sea U un entorno abierto de p y denotemos con U_p al conjunto de las funciones $v : \mathcal{F}(U) \to \mathbb{R}$ que satisfacen (2) y (3) para $f, g \in \mathcal{F}(U)$.
Entonces U_p, con las operaciones naturales, resulta un $\mathbb{R}$-espacio vectorial canónicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n_p$.

Esto lo veremos en un contexto más general, pero esencialmente se debe a que, si dos funciones diferenciables coinciden en un entorno de p entonces sus derivadas parciales coinciden en p, y al corolario 6 aplicado a $\mathbb{R}^n$.

Espacio tangente a Variedades Diferenciables

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$.
Llamaremos VECTOR TANGENTE a M en p, a toda función $v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ que satisfaga las siguiente propiedades:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$ entonces

v$_1$) $v(a.f + b.g) = a.v(f) + b.v(g)$

v$_2$) $v(f.g) = v(f).g(p) + f(p).v(g)$

Una función v que satisface v$_2$) se denomina una DERIVACIÓN sobre $\mathcal{F}(M)$ en p.
Si denotamos con M_p al conjunto de los vectores tangentes a M en p, entonces con las operaciones naturales resulta un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
Como en el caso $\mathbb{R}^n$, si $v \in M_p$ y $f \in \mathcal{F}(M)$ es constante, entonces $v(f) = 0$.

Proposición 8

Sea V un abierto no vacío de M y $f, g \in \mathcal{F}(M)$

a) Si $f|_V = 0$ y $p \in V$, entonces $v(f) = 0$ para todo $v \in M_p$.

b) Si $f|_V = g|_V$ y $p \in V$, entonces $v(f) = v(g)$ para todo $v \in M_p$.

DEMOSTRACIÓN:

Por el lema 5 existe $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ con $\varphi(p) = 1$ y $sop(\varphi) \subset V$; luego $\varphi.f = 0$ pues $f|_V = 0$. Si $v \in M_p$ se verifica:

$$0 = v(0) = v(\varphi.f) = v(\varphi).f(p) + \varphi(p).v(f) = v(\varphi).0 + 1.v(f) = v(f)$$

La parte b) es consecuencia de a) y de la linealidad de v.

Corolario 9

Sea $W \subset M$ un abierto no vacío, con la estructura diferenciable heredada de M. Si $p \in W$, sea W_p el espacio tangente a W en p. Entonces W_p y M_p son CANÓNICAMENTE ISOMORFOS*; es decir, existe un isomorfismo $\mathrm{J} : M_p \to W_p$ que no depende de bases.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado $v \in M_p$, sea $\bar{v} : \mathcal{F}(W) \to \mathbb{R}$ definida por $\bar{v}(f) = v(\tilde{f})$, donde $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ y $\tilde{f}|_U = f|_U$ para algún entorno abierto U de p con $U \subset W$. La existencia de $\tilde{f}$ está asegurada por el corolario 6. Debido a la proposición anterior el valor $\bar{v}(f)$ no depende de la extensión $\tilde{f}$; luego $\bar{v}$ está bien definida y es claramente un vector tangente a W en p.

Si se define $\mathrm{J} : M_p \to W_p$ por $\mathrm{J}(v) = \bar{v}$, entonces J es lineal y tiene por inversa a $i : W_p \to M_p$ definida por $i(v)(f) = v(f|_W)$.

NOTA

En lo que sigue ignoraremos los isomorfismos J e i construidos anteriormente y escribiremos por lo tanto $W_p = M_p$, cualquiera sea el abierto W de M que contenga al punto p.

OBSERVACIÓN

Sea (U, x) con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M con $p \in U$; luego para cada $1 \le i \le n$ podemos definir $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ por

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f) = \frac{\partial f \circ x^{-1}}{\partial u^i}\Big|_{x(p)} = D_i(f \circ x^{-1})\big|_{x(p)}$$

o equivalentemente escribiremos

$$(2)\quad \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f)$$

La función $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$ es claramente lineal y una derivación sobre $\mathcal{F}(M)$ en p y por lo tanto, es un vector tangente a M en p.

Debido a la nota anterior, resulta $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \in U_p$ y como $x^j = u^j \circ x \in \mathcal{F}(U)$ se obtiene

$$(3)\quad \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial x^j \circ x^{-1}}{\partial u^i}\Big|_{x(p)} = \frac{\partial u^j}{\partial u^i}\Big|_{x(p)} = \delta_i^j \qquad \text{(delta de Krönecker)}$$

Proposición 10

Con las notaciones anteriores, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p\right\}$ *es una base de* M_p. *En particular,* $dim(M_p) = dim(M) = n$.

Demostración:

• Son linealmente independientes:

En efecto,

si $a^1, \ldots, a^n \in \mathbb{R}$ satisfacen $\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = 0$; para $1 \leq j \leq n$ se obtiene

$$0 = \Big(\sum_{i=1}^{n} a^i . \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\Big)(x^j) = \sum_{i=1}^{n} a^i . \frac{\partial x^j}{\partial x^i}\big|_p = a^j$$

• Son generadores:

Sea $u_0 = x(p)$, achicando U si fuera necesario, podemos suponer que $x(U) = B(u_0, r)$ es la bola abierta de $\mathbb{R}^n$ con centro en u_0 y radio $r > 0$.
Dado $f \in \mathcal{F}(M)$, consideremos la función $f \circ x^{-1} : B(u_0, r) \to \mathbb{R}$.
Utilizando el mismo artificio que en el caso $M = \mathbb{R}^n$, podemos construir funciones diferenciables $h_i : B(u_0, R) \to \mathbb{R}$ con $1 \leq i \leq n$, tales que

(1) $h_i(u_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p = D_i(f \circ x^{-1})\big|_{u_0}$

y

(2) $f \circ x^{-1} = f \circ x^{-1}(u_0) + \sum_{i=1}^{n}(u^i - u_0^i).h_i$

si $u_0 = (u_0^1, \ldots, u_0^n)$

Dado que $u_0^i = x^i(p), u^i = u^i \circ x \circ x^{-1} = x^i \circ x^{-1}$ y $h_i = h_i \circ x \circ x^{-1} = \bar{h}_i \circ x^{-1}$ con $\bar{h}^i = h_i \circ x \in \mathcal{F}(U)$, la igualdad (2) se escribe como

(3) $f = f(p) + \sum_{i=1}^{n}(x^i - x^i(p)).\bar{h}_i$ "igualdad sobre U"

En (3) se entiende que tanto $f(p)$ como las $x^i(p)$ representan a las correspondientes funciones constantes de $\mathcal{F}(U)$.

Sea $v \in M_p$; luego $v(f(p)) = v(x^i(p)) = 0$ y $v((x^i - x^i(p)).\bar{h}_i) = v(x^i).\bar{h}_i(p) = v(x^i).\frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p$.

Debido a (3) se obtiene,

$$v(f) = \sum_{i=1}^{n} v(x^i).\frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_p = \sum_{i=1}^{n}\Big(v(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\Big)(f) = \Big(\sum_{i=1}^{n} v(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\Big)(f)$$

Dado que f es arbitraria, resulta

$$(4)\quad v = \sum_{i=1}^{n} v(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$$

DEFINICIÓN

La base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$ *se denomina la* **base** *de* M_p*,* **inducida** *por la carta* (U, x).

OBSERVACIÓN

La igualdad (4) de la proposición anterior, muestra que la coordenada i-ésima de un vector $v \in M_p$ respecto a la base inducida por una carta (U, x), es v aplicado a la coordenada i-ésima de x.

Corolario 11

Sean (U, x) *y* (V, y) *cartas de* M*,* $p \in U \cap V, x = (x^1, \ldots, x^n)$ *e* $y = (y^1, \ldots, y^n)$*. Se verifica*

a) $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p.\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ *para* $1 \leq j \leq n$

donde $\frac{\partial y^i}{\partial x^f}\Big|_p = \frac{\partial(y^i \circ x^{-1})}{\partial u^j}\Big|_{x(p)} = = D_j(y^i \circ x^{-1})|_{x(p)}$

b) Si $v \in M_p$*, es*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}|_p & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n}|_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}|_p & \cdots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n}|_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(x^1) \\ \vdots \\ v(x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(y^1) \\ \vdots \\ v(y^n) \end{pmatrix}$$

DEMOSTRACIÓN:

Debido a la observación anterior, la coordenada i-ésima del vector $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p$ respecto de la base inducida por (U, y), es $\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p(y^i) = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p$.

La parte b) es consecuencia de a).

NOTA

De acuerdo con la definición de matriz jacobiana, se tiene que la matriz jacobiana de $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to \mathbb{R}^n$ en $x(p)$ es $\mathrm{J}(y \circ x^{-1}, x(p)) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p\right)$.

EJERCICIO 21

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $p, q \in M$ puntos distintos. Verificar que $M_p \cap M_q$ es vacío (ver nota al pie del corolario 9).

EJERCICIO 22

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de M_p. Construir una carta (U, x) de M con $p \in U$ tal que $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = v_i$ con $1 \leq i \leq n$, si $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Sugerencia: Construya una carta (U, y) con $p \in U$, $y(p) = 0$ e $y(U) = \mathbb{R}^n$. Construya un isomorfismo adecuado $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y defina $x = y \circ \varphi$.

EJERCICIO 23

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base. Considerando a V como una variedad diferenciable con la estructura usual (ver ejercicio 7), sea (V, x) la carta inducida por B. Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ y $u \in V$, se define $\mathrm{J}_u : V \to V_u$ por $\mathrm{J}_u\Big(\sum_{i=1}^{n} a^i.v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a^i.\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_u$.

Mostrar que el isomorfismo J_u no depende de la base B; es decir, es canónico.

EJERCICIO 24

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{D}$ su atlas maximal.
Sea TM la unión de todos los espacios tangentes; o sea, $TM = \bigcup_{p \in M} M_p$
Sea $\Pi : TM \to M$ definida por $\Pi(v) = p$ si $v \in M_p$.
Para cada $(U, x) \in \mathcal{D}$ con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, sea $TU = \bigcup_{p \in U} M_p \subset TM$ y $\bar{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$\bar{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), \ldots, v(x^n))$$

o, equivalentemente,

$$\bar{x}\Big(\sum_{i=1}^{n} v(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\Big) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), v(x^1), \ldots, v(x^n))$$

si $p \in U$ y $v \in M_p$.
Denotando con $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^{2n})$ será $\bar{x}^i(v) = x^i(\Pi(v)) = x^i \circ \Pi(v)$ y $\bar{x}^{n+i}(v) = v(x^i)$ si $1 \leq i \leq n$
Verificar:

1) $\bar{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa $\bar{x}^{-1} : x(U) \times \mathbb{R}^n \to TU$ definida por $\bar{x}^{-1}(a, b^1, \ldots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i.\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{x^{-1}(a)}$ si $a \in x(U)$

2) Si $(V,y) \in \mathcal{D}$ *y* $U \cap V$ *es no vacío, entonces* $\bar{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ *"un abierto de* $\mathbb{R}^{2n}$*"*

3) En la situación 2), la biyección $\bar{x} \circ \bar{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ *está dada por*
$$\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}(a,b) = \Big(x \circ y^{-1}(a), \sum_{i=1}^{n} b^i . \frac{\partial(x^1 \circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b^i . \frac{\partial(x^n \circ y^{-1})}{\partial u^i}\Big|_a\Big)$$
si $b = (b^1, \ldots, b^n)$*. Es decir,* $\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}$ *es diferenciable.*

4) Utilizando el criterio para construir variedades diferenciables deducir que TM *admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión* $2n$ *y para el cual las cartas* $(TU, \bar{x})$ *resultan admisibles.*

5) Verificar que con dicha estructura diferenciable, $\Pi : TM \to M$ *es diferenciable.*

DEFINICIÓN

TM con la estructura diferenciable construida en el ejercicio anterior, se denomina el **fibrado tangente** *a* M *y* $\Pi : TM \to M$ *se denomina la* **proyección**.

Las cartas $(TU, \bar{x})$ *se denominan las* **inducidas** *por* (U, x) *o* **cartas trivializadoras**

Diferencial de una aplicación

En lo que sigue, extendemos el concepto de diferencial de una función diferenciable definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ a valores en $\mathbb{R}^k$, a variedades diferenciables M y N de dimensión n y k respectivamente. Si $f : M \to N$ es diferenciable y $p \in M$, podemos construir una función $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ del siguiente modo:

Si $v \in M_p$, $f_{*p}(v) : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ se define para cada $\varphi \in \mathcal{F}(N)$ por
$$f_{*p}(v)(\varphi) = v(\varphi \circ f) \tag{1}$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}(N)$ se tiene:
$$\begin{aligned} f_{*p}(v)(a.\varphi_1 + b.\varphi_2) &= v((a.\varphi_1 + b.\varphi_2) \circ f) = v(a.\varphi_1 \circ f + b.\varphi_2 \circ f) = \\ &= a.v(\varphi_1 \circ f) + b.v(\varphi_2 \circ f) = a.f_{*p}(v)(\varphi_1) + b.f_{*p}(v)(\varphi_2) \end{aligned}$$
lo que muestra que $f_{*p}(v)$ es lineal. Además,
$$\begin{aligned} f_{*p}(v)(\varphi_1.\varphi_2) &= v((\varphi_1.\varphi_2) \circ f) = v((\varphi_1 \circ f).(\varphi_2 \circ f)) = \\ &= v(\varphi_1 \circ f).\varphi_2(f(p)) + \varphi_1(f(p)).v(\varphi_2 \circ f) = \\ &= f_{*p}(v)(\varphi_1).\varphi_2(f(p)) + \varphi_1(f(p)).f_{*p}(v)(\varphi_2) \end{aligned}$$
lo que muestra que $f_{*p}(v)$ es una derivación sobre $\mathcal{F}(N)$ en $f(p)$; luego $f_{*p}(v) \in N_{f(p)}$.

De (1) se deduce trivialmente que $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ es lineal.

La aplicación lineal f_{*p} se denomina la **diferencial** de f **en** p

OBSERVACIÓN

Sea V un abierto de N, entorno de $f(p)$, y U un entorno abierto de p con $f(U) \subset V$; por ejemplo, $U = f^{-1}(V)$.
Si $\varphi \in \mathcal{F}(V)$, resulta $\varphi \circ f \in \mathcal{F}(U)$ y como $v \in M_p = U_p$, podemos aplicar v a $\varphi \circ f$.
Por otro lado, $f_{*p}(v) \in N_{f(p)} = V_{f(p)}$; luego podemos aplicar $f_{*p}(v)$ a φ.
Afirmamos que se cumple

$$f_{*p}(v)(\varphi) = v(\varphi \circ f) \tag{2}$$

En efecto,

sea W un abierto de N con $f(p) \in W \subset V$ y $\tilde{\varphi} \in \mathcal{F}(N)$ tal que $\tilde{\varphi}|_W = \varphi|_W$.

Luego,

$$f_{*p}(v)(\varphi) = f_{*p}(v)(\tilde{\varphi}) = v(\tilde{\varphi} \circ f) = v(\varphi \circ f)$$

REPRESENTACIÓN EN COORDENADAS

La observación anterior permite representar a f_{*p} tomando coordenadas. Sean (U, x), (V, y) cartas de M y N respectivamente con $f(U) \subset V$.
Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, para $p \in U$ es $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p \right\}$ una base de M_p.
Si $y = (y^1, \ldots, y^k)$, entonces $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}\big|_{f(p)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^k}\big|_{f(p)} \right\}$ es una base de $N_{f(p)}$.
Si $v \in M_p$, la coordenada i-ésima de $f_{*p}(v)$ es $f_{*p}(v)(y^i) = v(y^i \circ f)$; luego,

$$f_{*p}(v) = \sum_{i=1}^{k} f_{*p}(v)(y^i).\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} = \sum_{i=1}^{k} v(y^i \circ f).\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} \tag{3}$$

En particular, para $v = \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ se tiene

$$\left.\begin{aligned} f_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p (y^i \circ f).\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (y^i \circ f)}{\partial x^j}\Big|_p.\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial (y^i \circ f \circ x^{-1})}{\partial u^j}\Big|_{x(p)}.\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} = \sum_{i=1}^{k} D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})\Big|_{x(p)}.\frac{\partial}{\partial y^i}\Big|_{f(p)} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Luego, si $v = \sum_{j=1}^{n} v(x^j).\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ será $f_{*p}(v) = \sum_{i=1}^{k} f_{*p}(v)(y^i).\frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{f(p)}$, con

$$\begin{pmatrix} D_1(y^1 \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} & \cdots & D_n(y^1 \circ f \circ x^{-1}|_{x(p)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1(y^k \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} & \cdots & D_n(y^k \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v(x^1) \\ \vdots \\ v(x^n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{*p}(v)(y^1) \\ \vdots \\ f_{*p}(v)(y^k) \end{pmatrix} \quad (5)$$

OBSERVACIÓN

Sea $g = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to \mathbb{R}^k$; luego por (4) la matriz de f_{*p} respecto de las bases inducidas por (U, x) y (V, y) es la matriz jacobiana $J(g, x(p))$. Debido a (5), la relación entre $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ y $dg_{x(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ es como sigue:

Dado $(v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, sea $v \in M_p$ definido por $v = \sum_{j=1}^{n} v^j . \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$.

Si $f_{*p}(v) = \sum_{i=1}^{n} w^i . \frac{\partial}{\partial y^i}|_{f(p)}$, entonces $dg_{x(p)}(v^1, \ldots, v^n) = (w^1, \ldots, w^k)$.

PROPIEDADES

1. Si $i : M \to M$ es la identidad, y $p \in M$, entonces $i_{*p} : M_p \to M_p$ es la identidad. Pues $i_{*p}(v)(\varphi) = v(\varphi \circ i) = v(\varphi)$ si $\varphi \in \mathcal{F}(M)$; luego $i_{*p}(v) = v$.
2. Sean M, N y Q variedades diferenciables, $f : M \to N$ y $g : N \to Q$ funciones diferenciables. Si $p \in M$, entonces $g \circ f : M \to Q$ satisface $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$.
   En efecto,
   $$(g \circ f)_{*p}(v)(\varphi) = v(\varphi \circ (g \circ f)) = v((\varphi \circ g) \circ f) = f_{*p}(v)(\varphi \circ g) = g_{*f(p)}(f_{*p}(v))(\varphi)$$
   si $\varphi \in \mathcal{F}(Q)$; luego $(g \circ f)_{*p}(v) = g_{*f(p)}(f_{*p}(v))$ cualquiera sea $v \in M_p$.
3. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $(f_{*p})^{-1} = (f^{-1})_{*f(p)}$.
   Es consecuencia de las propiedades anteriores.

NOTA

Recordemos que si $s \in \mathbb{R}$, con $D|_s \in \mathbb{R}_s$ denotamos a la base inducida por la carta $(\mathbb{R}, id)$. Luego, si A es un abierto de $\mathbb{R}$, entorno de s, y $g \in \mathcal{F}(A)$, es $D|_s(g) = Dg|_s = \frac{dg}{dt}|_s$.
Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y $p \in M$; luego $f_{*p} : M_p \to \mathbb{R}_{f(p)}$.
Si $v \in M_p$, es $f_{*p}(v) = f_{*p}(v)(id).D|_{f(p)} = v(id \circ f).D|_{f(p)} = v(f).D|_{f(p)}$.
Representando con $df_p : M_p \to \mathbb{R}$ a la función lineal definida por $df_p(v) = v(f)$, resulta $f_{*p}(v) = df_p(v).D|_{f(p)}$.

La aplicación df_p se denomina también la **diferencial** de f en p.

EJERCICIO 25

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $f \in \mathcal{F}(M)$. Se define la **diferencial** *de f por $df : TM \to \mathbb{R}$, donde $df(v) = df_p(v)$ si $v \in M_p$.*
Probar que df es diferenciable.

Sugerencia: Utilizar cartas trivializadoras.

OBSERVACIÓN

Sean M y N variedades diferenciables, $A \subset M$ un abierto no vacío y $f : A \to N$ diferenciable, donde en A se considera la estructura diferenciable heredada de M. Si $p \in A$, se tiene que $f_{*p} : A_p \to N_{f(p)}$. Siendo $A_p = M_p$, podemos escribir que $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$.

EJERCICIO 26

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, (U, x) con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M. Sea $A = x(U), p \in U$ y $a = x(p)$.
Probar que $(x^{-1})_{*a} : \mathbb{R}^n_a \to M_p$ satisface $(x^{-1})_{*a}(D_i|_a) = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ si $1 \leq i \leq n$.

Vector tangente a una curva

Si $c = (c^1, \ldots, c^n) : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva, el VECTOR TANGENTE a c en t es $\frac{dc}{dt}\Big|_t = (\frac{dc^1}{dt}\Big|_t, \ldots, \frac{dc^n}{dt}\Big|_t)$.

Interpretando a $\mathbb{R}^n$ como una variedad diferenciable tenemos, de acuerdo con el ejercicio 23, el isomorfismo canónico $J_{c(t)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_{c(t)}$; luego,

$$J_{c(t)}(\frac{dc}{dt}\Big|_t) = \frac{dc^1}{dt}\Big|_t D_1|_{c(t)} + \ldots + \frac{dc^n}{dt}\Big|_t . D_n|_{c(t)}$$

Por otro lado, si consideramos a $c_{*t} : \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}^n_{c(t)}$, utilizando las cartas (I, id) y $(\mathbb{R}^n, id)$ se obtiene que $c_{*t}(D|_t) = J_{c(t)}(\frac{dc}{dt}\Big|_t)$.

Esto nos dice que $c_{*t}(D|_t)$ y $\frac{dc}{dt}\Big|_t$ difieren formalmente y, por lo tanto, podemos redefinir a $c_{*t}(D|_t)$ como el VECTOR TANGENTE a c en t. La redefinición permite su generalización a variedades.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $c : I \to M$ una curva. El vector $\dot{c}(t) = c_{*t}(D|_t) \in M_{c(t)}$ se denomina el **vector tangente** a c en t.

Si $s \in I$ y U es un entorno abierto de $c(s)$, para $f \in \mathcal{F}(U)$ es $\dot{c}(s)(f) = c_{*t}(D|_s)(f) = D|_s(f \circ c) = \frac{d(f \circ c)}{dt}|_s$.

Si U es el dominio de una carta (U, x) de M con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, sea $J \subset I$ el entorno abierto de s definido por $J = c^{-1}(U)$. Para $t \in J$ es $c(t) \in U$; luego

$$\dot{c}(t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{c}(t)(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x^i \circ c)}{dt}|_t.\frac{\partial}{\partial x^i}|_{c(t)}$$

la igualdad anterior se denomina la **representación de $\dot{c}(t)$ respecto de** (U, x).

Proposición 12

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n, p \in M$ y (U, x) una carta de M con $p \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Si $(a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$, existe una curva $c : I \to M$ con $0 \in I$ y $c(0) = p$, tal que $\dot{c}(t) = a^1.\frac{\partial}{\partial x^1}|_{c(t)} + \ldots + a^n.\frac{\partial}{\partial x^n}|_{c(t)}$ si $t \in I$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $a = (a^1, \ldots, a^n)$; luego por ser $x(U)$ abierto con $x(p) \in x(U)$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $x(p) + t.a \in x(U)$ si $t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sea $c : I \to M$ definida por $c(t) = x^{-1}(x(p) + t.a)$. Como $x^i \circ c(t) = x^i(p) + t.a^i$, entonces $\frac{d(x^i \circ c)}{dt}|_t = a^i$.

Corolario 13

Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n, p \in M$ y $v \in M_p$.Existe una curva $c : I \to M$ con $0 \in I$ y $c(0) = p$ tal que $c(0) = v$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea (U, x) con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M con $p \in U$ y $a^i = v(x^i)$ si $1 \leq i \leq n$. El resultado es ahora consecuencia de la proposición anterior.

OBSERVACIÓN

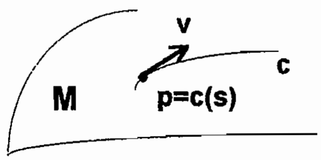
Sean M y N variedades diferenciables, $f : M \to N$ una función diferenciable y $p \in M$.

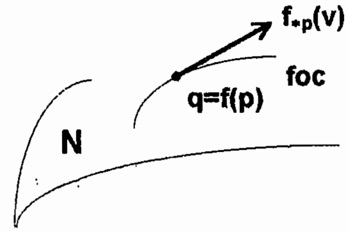
Utilizando el concepto de vector tangente a una curva, la diferencial $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ se interpreta geométricamente del siguiente modo:

Sea $v \in M_p$ y $c : I \to M$ una curva tal que v es vector tangente a c en $s \in I$, entonces $f_{*p}(v)$ es vector tangente a la curva $f \circ c : I \to N$ en $t = s$. Si $v = \dot{c}(s)$, hay que mostrar que $f_{*p}(v) = \dot{\widehat{f \circ c}}(s)$.

En efecto,

$$f_{*p}(v) = f_{*p}(\dot{c}(s)) = f_{*p}(c_{*s}(D|_s)) = (f \circ c)_{*s}(D|_s) = \widehat{f \circ c}(s)$$





NOTA

Enseguida mostraremos la vinculación entre el espacio tangente M_p a una subvariedad M de $\mathbb{R}^n$, al interpretarlo como una variedad diferenciable, con su espacio tangente T_pM que es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Proposición 14

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n, i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión y $p \in M$. Entonces se verifica:

a) $i_{*p} : M_p \to \mathbb{R}^n_p$ es un monomorfismo

b) $T_pM = \mathrm{J}_p^{-1} \circ i_{*p}(M_p)$, donde $\mathrm{J}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_p$ es el isomorfismo canónico.

DEMOSTRACIÓN:

- Parte a)

Sean (U, x) y (V, y) cartas de M y de $\mathbb{R}^n$ respectivamente, con $x = (x^1, \dots x^m)$ e $y = (y^1, \dots, y^n)$ tales que $p \in U \subset V$ e $y \circ i \circ x^{-1}(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$ si $(u^1, \dots, u^m) \in x(U)$. Por ejemplo, sean $(V, y) = (W, \varphi)$ y (U, x) las consideradas en la Proposición 3. Para $1 \leq j \leq m$ se verfica,

$$i_{*p}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) = \sum_{\ell=1}^{n} D_j(y^\ell \circ i \circ x^{-1})\big|_{x(p)} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\ell}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$$

Luego, i_{*p} es un monomorfismo.

- Parte b)

Debido a la parte anterior, los subespacios T_pM y $\mathrm{J}_p^{-1} \circ i_{*p}(M_p)$ tienen la misma dimensión.

En consecuencia, es suficente verificar que $\mathrm{J}_p^{-1} \circ i_{*p}(M_p) \subset T_pM$.

Sea $v \in M_p$ y $c : I \to M$ una curva que satisface $0 \in I, c0) = p$ y $\dot{c}(0) = v$. Para $1 \leq \ell \leq n$, sea $c^\ell = u^\ell \circ i \circ c$; luego, $i \circ c(t) = (c^1(t), \ldots, c^n(t))$ y por lo tanto $\tilde{v} = (\frac{dc^1}{dt}|_0, \ldots, \frac{dc^n}{dt}|_0) \in T_pM$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
i_{*p}(v) &= \sum_{\ell=1}^{n} i_{*p}(v)(u^\ell).D_\ell|_p = \sum_{\ell=1}^{n} v(u^\ell \circ i).D_\ell|_p = \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \dot{c}(0)(u^\ell \circ i).D_\ell|_p = \sum_{\ell=1}^{n} c_{*0}(D|_0)(u^\ell \circ i).D_\ell|_p = \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} D|_0(u^\ell \circ i \circ c).D_\ell|_p = \sum_{\ell=1}^{n} D|_0(c^\ell).D_\ell|_p = \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{dc^\ell}{dt}|_0.D_\ell|_p = \mathrm{J}_p(\tilde{v}).
\end{aligned}$$

Esto nos dice, que $\mathrm{J}_p^{-1} \circ i_{*p}(v) = \tilde{v}$

EJERCICIO 27

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Si (U, x) es una carta de M con $x(U) = A$, sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(u) = i \circ x^{-1}(u)$. Probar:

1. *Existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ tal que $U = \Omega \cap M$ y $f : A \to \Omega \cap M$ es una biyección*
2. *$f : A \to \Omega \cap M$ es un homeomorfismo*
3. *f es diferenciable*
4. *Si $a \in A$, entonces $rango(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}|_a) = m$, si $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$*

(Comparar con el ejercicio 15)

Sugerencia: Utilizar el hecho de que M tiene la topología inducida, i es diferenciable y que $i_{*p} : M_p \to \mathbb{R}^n_p$ es un monomorfismo, si $p \in M$.

DEFINICIÓN

Sea M una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^m$ un abierto no vacío. Una función $f = (f^1, \ldots, f^n) : A \to \mathbb{R}^n$ se denomina una **parametrización** *de M, si existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades:*

1. $f : A \to f(A) = \Omega \cap M$ *es una biyección*

2. $f : A \to \mathbb{R}^n$ *es diferenciable*

3. $f^{-1} : \Omega \cap M \to A$ *es continua; donde* $\Omega \cap M$ *se supone con la topología inducida por* $\mathbb{R}^n$.

4. Si $a \in A$, *es rango*$(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\big|_a) = m$, *si* $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Debido al ejercicio 15, es $(\Omega \cap M, f^{-1})$ una carta de M.

EJERCICIO 28

Sea M *una subvariedad de dimensión* m *de* $\mathbb{R}^n$ *y* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *una parametrización de* M. *Si* $a \in A$ *y* $p = f(a)$, *mostrar que* $df_a(\mathbb{R}^m) = T_pM$.

OBSERVACIÓN

Si M y N son variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente y $f : M \to N$ es una función diferenciable, se define la DIFERENCIAL de f como la función $f_* : TM \to TN$ que en cada $v \in TM$ vale $f_*(v) = f_{*p}(v)$ si $v \in M_p$.
La función f_* es diferenciable.
En efecto,
dado $v \in TM$ con $v \in M_p$, sean (U, x) y (V, y) cartas de M y N con $p \in U$ y $f(U) \subset V$.
Sean $(TU, \bar{x})$ y $(TV, \bar{y})$ las cartas de TM y TN, inducidas por las anteriores.
Si $w \in TU$, es $w \in M_q$ con $q \in U$; luego $f_*(w) = f_{*q}(w) \in N_{f(q)} \subset TV$ y por lo tanto, $f_*(TU) \subset TV$.
De acuerdo con lo anterior, se obtiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\bar{x}"'] & TV \arrow[d, "\bar{y}"] \\
x(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, "\bar{y} \circ f_* \circ \bar{x}^{-1}"'] & y(V) \times \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}$$

Luego, hay que verificar que $\bar{y} \circ f_* \circ \bar{x}^{-1}$ es diferenciable.

Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^k)$, para $(a, b) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$ con $b = (b^1, \ldots, b^n)$ y

$q \in U$ con $x(q) = a$ se tiene,

$$\bar{y} \circ f_* \circ \bar{x}^{-1}(a,b) = \bar{y} \circ f_*\Big(\sum_{j=1}^{n} b^j . \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_q\Big) = \bar{y}\Big(\sum_{j=1}^{n} b^j . f_{*q}\big(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_q\big)\Big)$$

$$= \bar{y}\Big(\sum_{j=1}^{n} b^j \Big\{ \sum_{i=1}^{k} f_{*q}\big(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_q\big)(y^i) \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{f(q)} \Big\}\Big)$$

$$= \bar{y}\Big(\sum_{i=1}^{k} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} b^j . f_{*q}\big(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_q\big)(y^i) \Big\} \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{f(q)}\Big)$$

$$= \bar{y}\Big(\sum_{i=1}^{k} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} b^j \ \frac{\partial(y^i \circ f \circ x^{-1})}{\partial u^j}\big|_a \Big\} \cdot \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{f(q)}\Big)$$

$$= \Big(y \circ f \circ x^{-1}(a) \ , \sum_{j=1}^{n} b^j \ \frac{\partial(y^1 \circ f \circ x^{-1})}{\partial u^j}\big|_a , \ldots , \sum_{j=1}^{n} b^j \ \frac{\partial(y^k \circ f \circ x^{-1})}{\partial u^j}\big|_a\Big)$$

En consecuencia, $\bar{y} \circ f_* \circ \bar{x}^{-1}$ es diferenciable.

Nota

El siguiente resultado, es la generalización a variedades diferenciables del teorema de la función inversa local.

Teorema 15

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión n y $f : M \to N$ una función diferenciable. Sea $p \in M$ para el cual $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ es un isomorfismo. Entonces existe un abierto U entorno de p y un abierto V entorno de $f(p)$ tal que $f : U \to V$ es un difeomorfismo.

Demostración:

Sean (U', x) con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ y (V', y) con $y = (y^1, \ldots, y^n)$ cartas de M y N tales que $p \in U'$ y $f(U') \subset V'$.

Como $f_{*p}\big(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\big) = \sum_{i=1}^{n} D_j(y^i \circ f \circ \bar{x}^{-1})|_{x(p)} . \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_{f(p)}$ si $1 \leq j \leq n$ y f_{*p} es un isomorfismo, entonces $det(D_j(y^i \circ f \circ x^{-1})|_{x(p)}) \neq 0$.

Luego, si consideramos la función $y \circ f \circ x^{-1} : x(U') \to y(V')$, por el teorema de la función inversa local existe un abierto $A \subset x(U')$ con $x(p) \in A$ y un abierto $B \subset y(V')$ con $y(f(p)) \in B$, para los cuales $y \circ f \circ x^{-1} : A \to B$ es un difeomorfismo. Si $U = x^{-1}(A)$ y $V = y^{-1}(B)$, entonces $p \in U$ y $f : U \to V$ es un difeomorfismo.

Inmersiones y Sumersiones

En lo que sigue, M y N son variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente.

Una función diferenciable $f : M \to N$ se denomina una **inmersión** si para todo $p \in M$ es $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ un monomorfismo; luego $n \leq k$.

EJEMPLOS

1. Toda curva $c : I \to M$ que satisface $\dot{c}(t) \neq 0$ si $t \in I$, es una inmersión.
2. La curva $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una inmersión no inyectiva.
3. Si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ e $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, entonces i es una inmersión debido a la proposición 14. Dado que M tiene la topología inducida, si le damos a $i(M)$ la topología inducida por $\mathbb{R}^n$, entonces $i : M \to i(M)$ es un homeomorfismo.
4. Sea $c : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la lemniscata $c(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t)$ y $M = c(0, 2\pi)$ con la estructura diferenciable generada por el atlas (M, c^{-1}) $\big($ver nota al pie del ejercicio 13$\big)$. La inclusión $i : M \to \mathbb{R}^2$ es diferenciable pues $i \circ x^{-1} = c$ lo es. Como $\dot{c}(t) \neq 0$ para todo $t \in (0, 2\pi)$, entonces i es una inmersión. Si le damos a $i(M)$ la topología inducida por $\mathbb{R}^2$, entonces $i : M \to i(M)$ *no* es un homeomorfismo, pues la topología de M no es la inducida por $\mathbb{R}^2$.

Los ejemplos anteriores, sugieren la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Una función diferenciable $f : M \to N$ se denomina una **sumersión** *si satisface*

s_1) f es una inmersión

s_2) f es inyectiva

s_3) Si $f(M)$ tiene la topología inducida por N, entonces $f : M \to f(M)$ es un homeomorfismo.

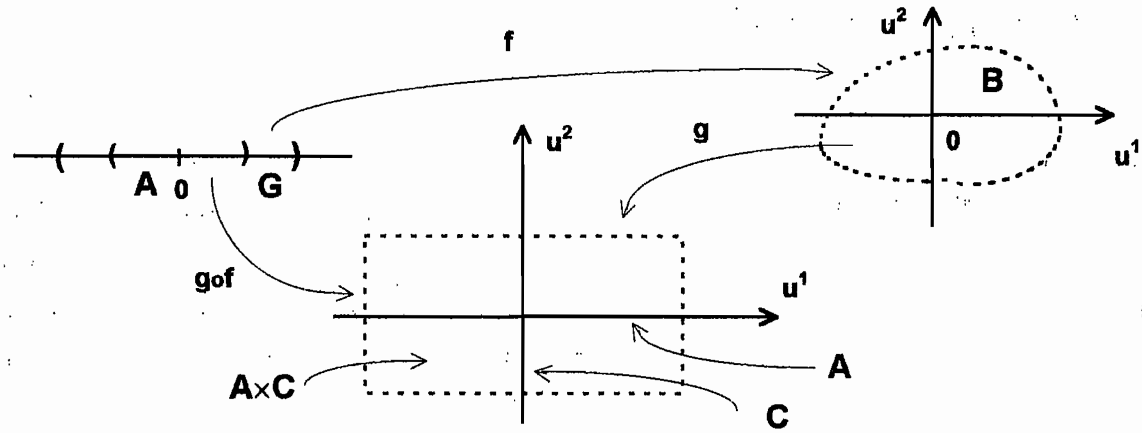
NOTA

El siguiente resultado es importante para el estudio de las inmersiones. Comparar con el Teorema de la Función Implícita I.

Teorema de la Función Implícita II

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto que contiene al origen de $\mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^k$ con $n < k$ una función diferenciable que satisface $f(0) = 0$ y $det(D_j f^i|_0) \neq 0$, donde $1 \leq i, j \leq n$.

Entonces existe una carta (B, g) de $\mathbb{R}^k$ con $0 \in B, g(0) = 0, g(B) = A \times C$ con $A \subset G$ abierto y $C \subset \mathbb{R}^{k-n}$ abierto, tales que $g \circ f(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$ si $(u^1, \ldots, u^n) \in A$. Es decir, $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ es la inclusión.



DEMOSTRACIÓN:

Sea $F : G \times \mathbb{R}^{k-n} \to \mathbb{R}^k$ definida por

$$F(u^1, \ldots, u^n, u^{n+1}, \ldots, u^k) = f(u^1, \ldots, u^n) + (0, \ldots, 0, u^{n+1}, \ldots, u^k)$$

Luego, $F(0) = 0$ y $det(D_j F^i|_0)_{1 \leq i,j \leq k} = det(D_j f^i|_0) \neq 0$

Por el teorema de la función inversa local, existen abiertos A' y B' de $\mathbb{R}^k$ tales que $0 \in A' \subset G \times \mathbb{R}^{k-n}$ y $F : A' \to B'$ es un difeomorfismo. Sean A y C abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{k-n}$ conteniendo a los orígenes con $A \times C \subset A'$. Si $B = F(A \times C)$, entonces $F : A \times C \to B$ es un difeomorfismo.

Si $g = F^{-1} : B \to A \times C$, entonces (B, g) es una carta de $\mathbb{R}^k$ que satisface lo pedido.

Teorema 16

Sea $f : M \to N$ una inmersión con $n < k$. Si $p \in M$, existe una carta (U, x) de M con $p \in U, x(p) = 0$ y una carta (V, y) de N con $f(U) \subset V$ e $y(f(p)) = 0$, tales que

i_1) Si $y = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^k)$ entonces $f(U) = \{q \in V / y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0\}$

i_2) Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces $x^j = y^j \circ (f|_U)$

i_3) $f : U \to N$ es una sumersión.

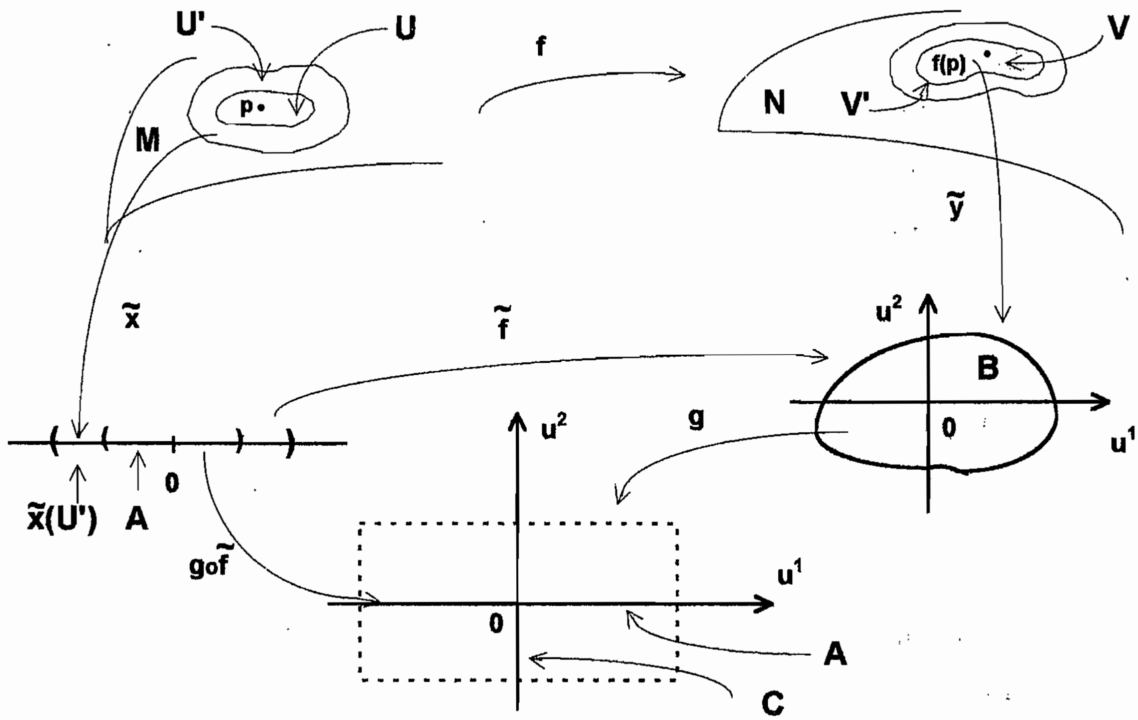
DEMOSTRACIÓN:

De acuerdo con el ejercicio 14, parte v), podemos construir una carta $(V', \tilde{y})$ de N tal que $\tilde{y}(f(p)) = 0$ e $\tilde{y}(V') = \mathbb{R}^k$.

Como $f^{-1}(V')$ es un abierto que contiene a p, existe una carta $(U', \tilde{x})$ de M con $\tilde{x}(p) = 0$ y $f(U') \subset V'$. Sea $\tilde{f} = \tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1} : \tilde{x}(U') \to \mathbb{R}^k$; luego por ser $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ un monomorfismo, es $rango(D_j(\tilde{y}^i \circ f \circ \tilde{x}^{-1})|_0) = n$ donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n$.

Cambiando $\tilde{y}$ por permutación de sus componentes $(\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^k)$, podemos suponer que $det(D_j(\tilde{y}^i \circ f \circ \tilde{x}^{-1})|_0 \neq 0$ si $1 \leq i, j \leq n$.

Debido al teorema anterior, existe una carta (B, g) de $\mathbb{R}^k$ con $0 \in B$, $g(0) = 0$, $g(B) = A \times C$ con $A \subset \tilde{x}(U')$ abierto y $C \subset \mathbb{R}^{k-n}$ abierto, tal que $g \circ \tilde{f}(u^1, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^n, 0, \ldots, 0)$ si $(u^1, \ldots, u^n) \in A$.



Sea $U = \tilde{x}^{-1}(A), x = \tilde{x}|_U$; luego, (U, x) es una carta de M que satisface $x(p) = 0$. Sea $V = \tilde{y}^{-1}(B)$ e $y = g \circ (\tilde{y}|_V) : V \to A \times C$; luego, (V, y) es una carta de N tal que $y(f(p)) = g \circ \tilde{y}(p) = g(0) = 0$. Si $u = (u^1, ..., u^n) \in A$, entonces $g \circ \tilde{f}(u) = g \circ \tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}(u) = y \circ f \circ x^{-1}(u)$; luego,

$$y \circ f \circ x^{-1}(u) = (u, 0), \quad \text{donde } \; 0 \in \mathbb{R}^{k-n} \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$f(U) = y^{-1}(A \times \{0\}) \subset V \tag{2}$$

• Parte i_1)

Si $q \in f(U) \subset V$, entonces $q = f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$; luego por (1) se cumple que $y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0$.
Recíprocamente, si $q \in V$ e $y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0$, entonces $y(q) = (u, 0) \in A \times C$; luego por (2) es $q \in f(U)$.

• Parte i_2)

Por (1) es $y^j \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = u^j = x^j \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$; luego, $x^j = y^j \circ (f|_U)$.

• Parte i_3)

Hay que verificar:
a) $f : U \to N$ es una inmersión
b) $f : U \to N$ es inyectiva
c) Si $f(U)$ tiene la topología inducida por N, entonces $f : U \to f(U)$ es un homeomorfismo

-Se cumple a)

Es obvio por ser $f : M \to N$ una inmersión

-Se cumple b)

Sean $q, q' \in U$; luego, $q = x^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$ y $q' = x^{-1}(v^1, \ldots, v^n)$ con $(u^1, \ldots, u^n) \in A$ y $(v^1, \ldots, v^n) \in A$.
Si $f(q) = f(q')$, entonces $f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = f \circ x^{-1}(v^1, \ldots, v^n)$.
Por (1) se obtiene que $(u^1, \ldots, u^n) = (v^1, \ldots, v^n)$, lo que implica que $q = q'$.

-Se cumple c)

Es claro que por ser $f : M \to N$ continua, entonces $f : U \to f(U)$ lo es.
Veamos entonces que $(f|_U)^{-1} : f(U) \to U$ es continua.
De hecho, son continuas la inclusión $i : f(U) \to N$, las funciones $y : V \to A \times C$, $x^{-1} : A \to U$ y la proyección $\pi : A \times C \to A$ en el primer factor. Luego, es continua la composición de las funciones

$$f(U) \xrightarrow{\quad i \quad} V \xrightarrow{\quad y \quad} A \times C \xrightarrow{\quad \pi \quad} A \xrightarrow{\quad x^{-1} \quad} U$$

Afirmamos que dicha composición es $(f|_U)^{-1}$.

Si $q \in f(U)$, es $q = f(q')$ con $q' = x^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$; luego, $x^{-1} \circ \pi \circ y \circ i(q) = x^{-1} \circ \pi \circ y(f(q')) = x^{-1} \circ \pi(u^1, \ldots, u^n, 0) = x^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = q'$.

En consecuencia, $x^{-1} \circ \pi \circ y \circ i \circ f(q') = q'$ si $q' \in U$; es decir, $(f|_U)^{-1} = x^{-1} \circ \pi \circ y \circ i$.

Corolario 17

Sea $f : M \to N$ una sumersión con $n < k$. Si $p \in M$, existen cartas (U, x) de M con $p \in U$ y $x(p) = 0$, (V, y) de N con $f(U) \subset V$ e $y(f(p)) = 0$, tales que

S_1) *Si $y = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^k)$ entonces*

$$f(U) = V \cap f(M) = \{q \in V / y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0\}$$

S_2) *Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces $x^j = y^j \circ (f|_U)$ si $1 \leq j \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN:

Como, en particular, es f una inmersión, por el teorema anterior existen cartas $(U', \tilde{x})$ de M con $p \in U'$, $\tilde{x}(p) = 0$ y $(V', \tilde{y})$ de N con $\tilde{y}(f(p)) = 0$, tales que

a) Si $\tilde{y} = (\tilde{y}^1, \ldots, \tilde{y}^n, \tilde{y}^{n+1}, \ldots, \tilde{y}^k)$, entonces

$$f(U') = \{q \in V' \;/\; \tilde{y}^{n+1}(q) = \ldots = \tilde{y}^k(q) = 0\}$$

b) Si $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$, entonces $\tilde{x}^j = \tilde{y}^j \circ (f|_{U'})$ si $1 \leq j \leq n$

Por ser $f : M \to f(M)$ un homeomorfismo, es $f(U')$ un abierto de $f(M)$; luego, $f(U') = W \cap f(M)$ con W abierto en N.
Sea $V = V' \cap W$; luego V es un abierto de N con $f(p) \in V$.
Las cartas (V, y) con $y = \tilde{y}|_V$, (U, x) con $U = U'$ y $x = \tilde{x}$ satisfacen lo requerido.

Subvariedades

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente, con $n \leq k$ y $M \subset N$. Sea $i : M \to N$ la inclusión que suponemos diferenciable.
M se denomina una **subvariedad inmersa** (respectivamente, **sumergida**) de N si i es una inmersión (respectivamente, una sumersión).

OBSERVACIONES

1. Toda subvariedad sumergida es inmersa.
2. Si M es una subvariedad sumergida, la topología de M coincide con la inducida por N. Esto se debe a que si dotamos a $i(M)$ con la topología inducida por N, entonces $i : M \to i(M)$ es un homeomorfismo.
3. Si M es una subvariedad inmersa y $n = k$, entonces es sumergida.
   En efecto,
   por el teorema de la función inversa local para variedades (Teorema 15)
   la inclusion $i : M \to N$ es una función abierta. Luego, i es una sumersión y M resulta un abierto de N.
4. Sea $c : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ la lemniscata y $M = c(0, \pi)$ con la estructura diferenciable generada por el atlas (M, c^{-1}). Luego, M es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^2$, pero no sumergida.
5. Si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, entonces M es una subvariedad sumergida de $\mathbb{R}^n$. †

NOTA

De acuerdo con el teorema 16, obtenemos

Corolario 18

Sea N una variedad diferenciable de dimensión k y $M \subset N$ una subvariedad inmersa de dimensión n, con $n < k$. Si $p \in M$, existe una carta (V, y) de N con $p \in V$ e $y(p) = 0$ tal que

a) Si $y = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^k)$ entonces el conjunto

$$U = \{q \in V \ / \ y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0\}$$

es un subconjunto de M que contiene a p y es abierto en M.

b) Si $x^j : U \to \mathbb{R}$ con $1 \leq j \leq n$ se define por $x^j = y^j|_U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces (U, x) es una carta de M alrededor de p.

---

† Ver proposición 14

En la situación anterior, la carta (V, y) de N se denomina una **carta adaptada a la subvariedad inmersa** M.

NOTA

Debido al corolario 17, resulta

Corolario 19

Sea N una variedad diferenciable de dimensión k y $M \subset N$ una subvariedad sumergida de dimensión n, con $n < k$. Si $p \in M$, existe una carta (V, y) de N con $p \in V$ e $y(p) = 0$ tal que

a) Si $y = (y^1, \ldots, y^n, y^{n+1}, \ldots, y^k)$, entonces

$$V \cap M = \{q \in V \,/\, y^{n+1}(q) = \ldots = y^k(q) = 0\}$$

b) Si $U = V \cap M$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$ se define por $x^j = y^j|_U$ con $1 \leq j \leq n$, entonces (U, x) es una carta de M alrededor de p.

En la situación anterior, la carta (V, y) de N se denomina una **carta adaptada a la subvariedad sumergida** M.

OBSERVACIONES.

1. Debido al corolario anterior, toda subvariedad sumergida de $\mathbb{R}^n$ es una subvariedad. Como la recíproca también es cierta, se tiene que las subvariedades de $\mathbb{R}^n$ $\big($según definición al pie del ejercicio 9$\big)$ son exactamente las subvariedades sumergidas de $\mathbb{R}^n$.
2. Sea M una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^n$, $p \in M$ e $i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ se dice TANGENTE a M en p, si existe una curva $c : I \to M$, con $0 \in I$, tal que $v = \dfrac{d(i \circ c)}{dt}\Big|_0$. Como en el caso *subvariedad* $\big($= subvariedad sumergida$\big)$, si denotamos con T_pM al conjunto de los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ que son tangentes a M en p, entonces $T_pM = \mathrm{J}_p^{-1} \circ i_{*p}(M_p)$, donde $\mathrm{J}_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n_p$ es el isomorfismo canónico.

EJERCICIO 29

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío, con la propiedad que para cada $p \in M$ existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ con $p \in \Omega$, un abierto $A \subset \mathbb{R}^m$ y una función $f = (f^1, \ldots, f^n) : A \to \mathbb{R}^n$ que satisface 1), 2), 3) y 4) de la definición al pie del ejercicio 27.

Probar que M, con la topología inducida por $\mathbb{R}^n$, es una subvariedad de dimensión m de $\mathbb{R}^n$.

Valores Regulares

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente, con $n \geq k$ y $f : M \to N$ una función diferenciable.

Un punto $p \in M$ se denomina un **punto regular** de f si $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$ es un epimorfismo; en caso contrario, se denomina un **punto crítico** de f. Un punto $q \in N$ se denomina un **valor regular** de f si todo $p \in f^{-1}(q)$ es un **punto regular** de f; en caso contrario se denomina un **valor crítico** de f.

NOTA

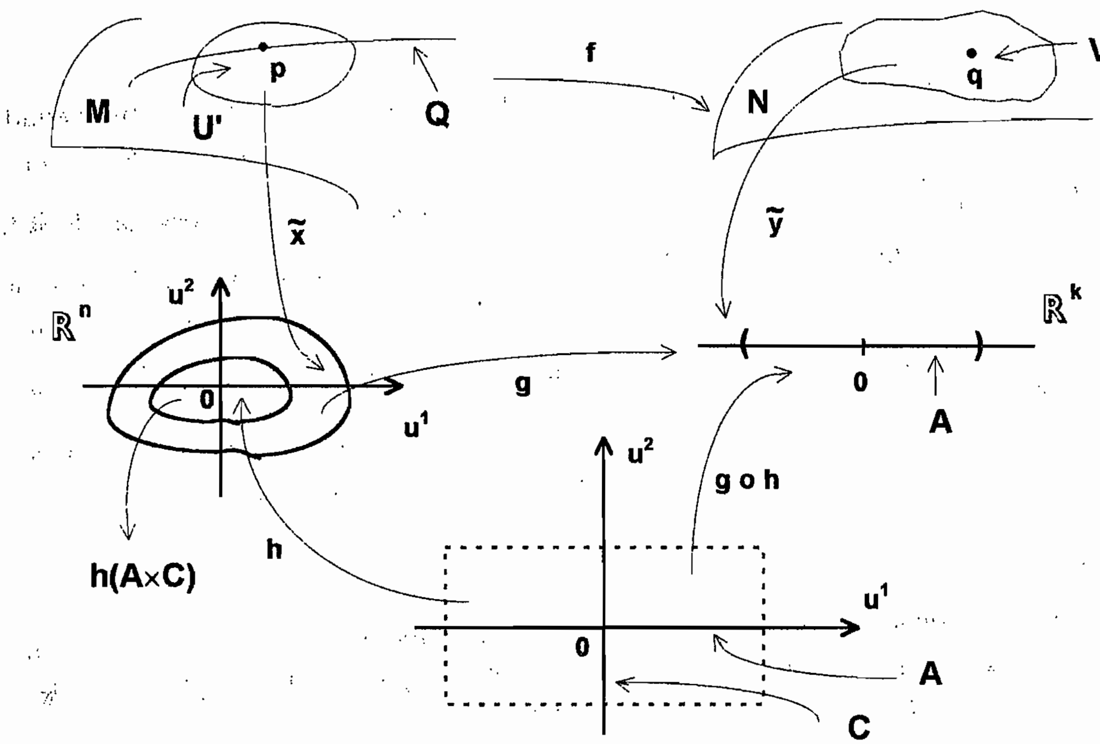
El siguiente resultado generaliza el corolario 1 a variedades.

Teorema 20

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente, con $n > k$ y $f : M \to N$ una función diferenciable.

Si $q \in f(M)$ es un valor regular, entonces $Q = f^{-1}(q)$ es una subvariedad sumergida de dimensión $m = n - k$ de M.

DEMOSTRACIÓN:



Sea $(V', \tilde{y})$ una carta de N con $q \in V'$ tal que $\tilde{y}(q) = 0$ e $\tilde{y}(V') = \mathbb{R}^k$. Fijado un

$p \in Q$, sea $(U', \tilde{x})$ una carta de M con $\tilde{x}(p) = 0, f(U') \subset V'$ y sea $g : \tilde{x}(U') \to \mathbb{R}^k$ definida por $g = \tilde{y} \circ f \circ \tilde{x}^{-1}$.

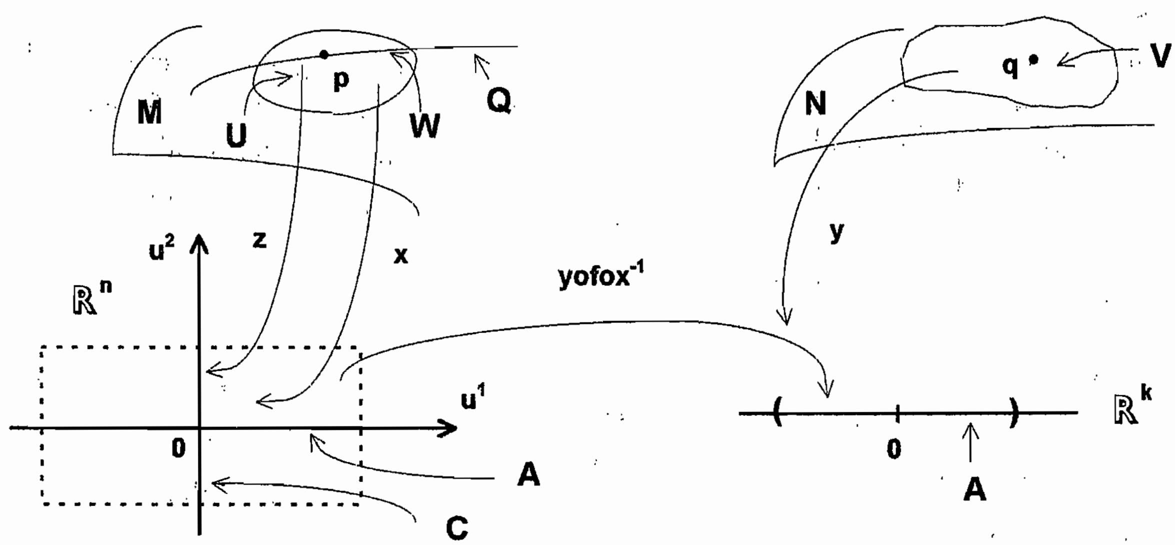
Como $f_{*p} : M_p \to N_q$ es un epimorfismo, es $rango(D_j g^i|_0) = k$; donde $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq n$. Permutando las componentes de $\tilde{x}$, si fuera necesario, podemos suponer que $det(D_j g^i|_0) \neq 0$,donde $1 \leq i, j \leq k$.

Debido al Teorema de la Función Implícita I, existe una carta (D, h) de $\mathbb{R}^n$ con $0 \in D$, $h(0) = 0$, $h(D) \subset \tilde{x}(U')$ y $D = A \times C$ con A abierto en $\mathbb{R}^k$ y C abierto en $\mathbb{R}^m$ tal que $g(h(u^1, \ldots, u^n)) = (u^1, \ldots, u^k)$.

Sea $V = \tilde{y}^{-1}(A), y = \tilde{y}|_V, U = \tilde{x}^{-1}(h(A \times C)), x = h^{-1} \circ (\tilde{x}|_U)$. Luego, (U, x) es una carta de M con $p \in U, x(p) = 0$ y (V, y) es una carta de N con $q \in V$ e $y(q) = 0$, que satisfacen

$$y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^k, u^{k+1}, \ldots, u^n) = (u^1, \ldots, u^k) \tag{1}$$

Considerando en Q la topología inducida por M, resulta Hausdorff y con base numerable, pues M lo es. Además, por ser U un abierto de M, es $W = U \cap Q$ un abierto de Q, entorno de p.



Afirmamos que $W = x^{-1}(\{0\} \times C)$.

En efecto,

si $p' \in W$ es $f(p') = q$; luego, $f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = q$ si $p' = x^{-1}(u^1, \ldots, u^n)$. En consecuencia, $y \circ f \circ x^{-1}(u^1, \ldots, u^n) = y(q) = 0$. Debido a (1) se tiene que $(u^1, \ldots, u^k) = 0$; luego, $W \subset x^{-1}(\{0\} \times C)$.

Recíprocamente, sea $p' \in x^{-1}(\{0\} \times C) \subset U$; entonces $x(p') = (0, u^{k+1}, \ldots, u^n)$.

Como $f(p') = f \circ x^{-1}(0, u^{k+1}, \dots, u^n)$, por (1) resulta $y(f(p')) = 0 = y(q)$; luego, $f(p') = q$ y por lo tanto, $x^{-1}(\{0\} \times C) \subset W$.

Sea $z : W \to C$ definida por $z(p') = u = (u^{k+1}, \dots, u^n)$ si $p' = x^{-1}(0, u)$. Siendo $z = (z^{k+1}, \dots, z^n)$ con $z^{k+i} = x^{k+i}|_W$ si $1 \leq i \leq n-k$, entonces z es continua. Sea $j : C \to \mathbb{R}^n$ la inclusión $j(u^{k+1}, \dots, u^n) = (0, u^{k+1}, \dots, u^n)$; luego, $x^{-1} \circ j : C \to U$ es continua.

Dado que $z^{-1} = x^{-1} \circ j$, entonces z es un homeomorfismo y por lo tanto, Q es una variedad topológica de dimensión m., Queda para verificar que el conjunto de cartas (W, z) constituye un atlas diferenciable. La estructura diferenciable generada por dicho atlas hace a Q una subvariedad sumergida.

EJERCICIO 30

Sean M y N variedades diferenciables de dimensión n y k respectivamente, con $n > k$ y $f : M \to N$ una función diferenciable. Sea $q \in f(M)$ un valor regular, $Q = f^{-1}(q)$ e $i : M \to N$ la inclusión. Verificar que si $p \in Q$, entonces $i_{*p}(Q_p) = Ker f_{*p}$.

EJERCICIO 31

Sea $\mathcal{O}(n)$ el grupo de matrices ortogonales. Probar que $\mathcal{O}(n)$ es una subvariedad, de dimensión $\frac{1}{2}n.(n-1)$, de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Sugerencia: Sea $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices simétricas dotado de la estructura diferenciable usual como espacio vectorial. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathcal{S}$ definida por $f(A) = A.A^t$. Mostrar que f es diferenciable y que la matriz identidad I es un valor regular de f. Verificar que si $\mathcal{T}$ es el subespacio de las matrices antisimétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $T_I(\mathcal{O}(n)) = \mathcal{T}$ $\big($ver, proposición 14$\big)$.

Grupos de Lie

Un GRUPO DE LIE es una variedad diferenciable G, provista de una operación $\cdot : G \times G \to G$, "$(a, b) \mapsto a.b$", que hace a G un grupo $\big($conmutativo o no$\big)$, con la propiedad que las funciones $\cdot : G \times G \to G$ y $\theta : G \to G$ donde $\theta(a) = a^{-1}$, son diferenciables.

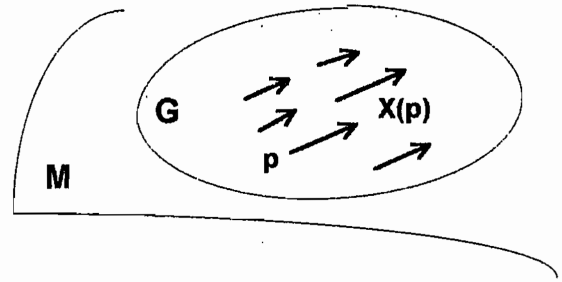
EJEMPLOS

1. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^{n\times m}$, con la estructura diferenciable usual y la operación suma, son grupos de Lie de dimensión n y $n.m$ respectivamente.
2. $GL(n, \mathbb{R})$ y $\mathcal{O}(n)$, con la operación producto de matrices, son grupos de Lie de dimensión n^2 y $\frac{1}{2}n.(n-1)$ respectivamente.
3. La circunferencia S^1 es un grupo de Lie de dimensión 1, con la operación $e^{i.x}.e^{i.y} = e^{i(x+y)}$ si $x, y \in \mathbb{R}$.
4. $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$ es un grupo de Lie de dimensión 1, con la operación producto.

Campos de Vectores

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $\Pi : TM \to M$ su fibrado tangente (ver ejercicio 24) y $G \subset M$ un abierto no vacío.
Un **campo de vectores** sobre G es una función $X : G \to TM$ que satisface $X(p) \in M_p$ si $p \in G$ o, equivalentemente, $\Pi \circ X = id_G$.

El campo se dice **diferenciable** si lo es como función entre las variedades diferenciables G y TM.



Con $\mathfrak{X}(G)$ denotamos al conjunto de todos los campos de vectores sobre G que son diferenciables.

Sea (U, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ y $U \subset G$, una carta de M y $(TU, \bar{x})$ la inducida. Recordamos que si $\bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{x}^{n+1}, \ldots, \bar{x}^{2n})$ y $v \in M_p$ con $p \in U$, entonces $\bar{x}^i(v) = x^i(\Pi(v)) = x^i(p)$ y $\bar{x}^{n+i}(v) = v(x^i)$ si $1 \leq i \leq n$.

Si $X : G \to TM$ es un campo de vectores, para cada $p \in U$, se tiene que $X(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, donde $\varphi^i(p) = X(p)(x^i)$.

Luego, $\bar{x}^i(X(p)) = x^i(p)$ y $\varphi^i(p) = \bar{x}^{n+i}(X(p))$; es decir, la función $\varphi^i : U \to \mathbb{R}$ está definida por $\varphi^i = \bar{x}^{n+i} \circ X|_U$ si $1 \leq i \leq n$.
Esto nos dice que si $X \in \mathfrak{X}(G)$, entonces $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$ para $1 \leq i \leq n$.
Recíprocamente, supongamos que $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$ para $1 \leq i \leq n$.
Para $p \in U$ es $X(p) \in M_p \subset TU$; luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\ X\ } & TU \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{x}} \\ x(U) & \xrightarrow[\ \tilde{X}\ ]{} & x(U) \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

donde $\tilde{X}(u) = (u, \varphi^1 \circ x^{-1}(u), \ldots, \varphi^n \circ x^{-1}(u))$ si $u \in x(U)$.

En consecuencia, $\tilde{X}$ es diferenciable o, equivalentemente, $X|_U$ lo es.

Resumiendo, hemos probado:

Proposición 21

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $X : G \to TM$ un campo de vectores: son equivalentes las afirmaciones:

a) $X \in \mathfrak{X}(G)$

b) Sea (U, x), con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M. Si para $p \in U$ es $X(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, entonces $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$ con $1 \leq i \leq n$.

EJEMPLOS

De acuerdo con la proposición anterior se tiene:

1. Sea (U, x) con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ una carta de M y sea $X_i : U \to TM$ definida por $X_i(p) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Entonces $X_i \in \mathfrak{X}(U)$ si $1 \leq i \leq n$.
2. En particular, para $M = \mathbb{R}^n$ y la carta $(\mathbb{R}^n, id)$, denotamos con $D_i = \frac{\partial}{\partial u^i} : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$ al campo de vectores definido por $D_i(p) = D_i|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$; luego $D_i \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq i \leq n$. Los mismos, se denominan los **campos canónicos** sobre $\mathbb{R}^n$.
3. Para $M = \mathbb{R}$ y la carta $(\mathbb{R}, id)$, denotamos con $D = \frac{d}{dt} : \mathbb{R} \to T\mathbb{R}$ al campo de vectores definido por $D(t) = D|_t = \frac{d}{dt}|_t$.

Corolario 22

Sea M una variedad diferenciable y $G \subset M$ un abierto no vacío.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}(G)$, entonces $a.X : G \to TM$, definida por $(a.X)(p) = a.X(p)$, satisface que $a.X \in \mathfrak{X}(G)$.

2. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, entonces $X + Y : G \to TM$ definida por $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$, satisface que $X + Y \in \mathfrak{X}(G)$.

3. Si $f \in \mathcal{F}(G)$ y $X \in \mathfrak{X}(G)$, entonces $f.X : G \to TM$ definida por $(f.X)(p) = f(p).X(p)$, satisface que $f.X \in \mathfrak{X}(G)$.

DEMOSTRACIÓN:

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

OBSERVACIONES

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subset M$ un abierto no vacío.

1. Debido a *1.* y *2.* del corolario anterior, $\mathfrak{X}(G)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

2. Si consideramos el conjunto de los campos de vectores sobre G, el mismo resulta un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con las operaciones definidas como en *1.* y *2.* del corolario. Luego, si $X : G \to TM$ es un campo de vectores, (U, x) es una carta de M con $U \subset G$ y $X(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(p).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$ si $p \in U$, podemos escribir $X|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i.\frac{\partial}{\partial x^i}$ que denominamos la REPRESENTACIÓN DE X SOBRE U RESPECTO DE x.
3. Los ejemplos al pie de la proposición 21, sugieren la siguiente definición para $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(G)$ con $m \leq n$.
   Los mismos se dicen **independientes**, si para cada $p \in G$ son linealmente independientes los vectores $X_1(p), \ldots, X_m(p)$ de M_p.
   Decimos que M es **paralelizable**, si existen $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{X}(M)$ independientes.

EJERCICIO 32

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subset M$ un abierto no vacío y $X_1, \ldots X_m \in \mathfrak{X}(G)$ independientes. Verificar que $X_1, \ldots, X_m$ son linealmente independientes como vectores del espacio vectorial $\mathfrak{X}(G)$. ¿Es cierta la recíproca?

EJERCICIO 33

Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $e \in G$ el elemento unidad. Para cada $h \in G$ se define $L_h : G \to G$ por $L_h(a) = h.a$ TRASLACIÓN A IZQUIERDA SEGÚN h.

a) Verificar que L_h es diferenciable.

b) Verificar que L_h es un difeomorfismo, cuya inversa es $L_{h^{-1}}$.

c) $X \in \mathfrak{X}(G)$ se dice **invariante a izquierda,** *si para todo h, $a \in G$ se cumple que $(L_h)_{*a}(X(a)) = X(L_h(a)) = X(h.a)$ Sea $v \in G_e$ y $X : G \to TG$ definido por $X(h) = (L_h)_{*e}(v)$. Mostrar que X es un campo invariante a izquierda, denominado el* GENERADO *por v.*

d) Sean $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(G)$ los campos de vectores invariantes a izquierda generados por $v_1, \ldots, v_m \in G_e$. Verificar que si $v_1, \ldots, v_m$ son linealmente independientes, entonces $X_1, \ldots, X_m$ son independientes. Deducir que G es paralelizable.

e) Sea $\mathcal{L}(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ el conjunto de los campos invariantes a izquierda. Verificar que $\mathcal{L}(G)$, con las operaciones naturales, es un subespacio de $\mathfrak{X}(G)$ y que la asignación $G_e \to \mathcal{L}(G)$, "$v \mapsto X =$ generado por v" es un isomorfismo.
En particular, $dim\mathcal{L}(G) = dimG = n$.

Curvas Integrales

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $c : I \to M$ una curva. Decimos que c es una **curva integral** de X si $\dot{c}(t) = X(c(t))$ para $t \in I$.
Si $p \in M$, decimos que c pasa por p, si $p = c(t)$ para algún $t \in I$.

EJEMPLOS

1. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definida por $X(u) = u^1.D_1|_u - u^2.D_2|_u$, si $u = (u^1, u^2)$. Si $p = (a, b)$, la curva $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $c(t) = (a.e^t, b.e^{-t})$ es una curva integral de X que satisface $c(0) = p$. En efecto, si $c^1(t) = a.e^t$ y $c^2(t) = b.e^{-t}$ es: $\dot{c}(t) = \frac{dc^1}{dt}|_t.D_1\big|_{c(t)} + \frac{dc^2}{dt}|_t.D_2|_{c(t)} = a.e^t.D_1|_{c(t)} - b.e^{-t}.D^2|_{c(t)} = c^1(t).D_1|_{c(t)} - c^2(t).D_2|_{c(t)} = X(c(t))$
2. Sea $M = \mathbb{R}$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ definida por $X(u) = u^2.D|_u$ si $u \in \mathbb{R}$. Para que una curva $c : I \to \mathbb{R}$ sea curva integral de X, debe verificarse que $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}|_t.D|_{c(t)} = c(t)^2.D|_{c(t)} = X(c(t))$. Luego, $\frac{dc}{dt}|_t = c(t)^2$. En consecuencia se tiene:
   i) Si $p = 0$, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $c(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}$, es una curva integral de X que pasa por p.
   ii) Si $p > 0$, $c : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ definida por $c(t) = -\frac{1}{t}$ es una curva integral de X que pasa por p.
   iii) Si $p < 0$, $c : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $c(t) = -\frac{1}{t}$ es una curva integral de X que pasa por p.

Proposición 23

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $c : I \to M$ una curva integral de X. Si $s \in \mathbb{R}$, sea I_s el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ definido por $I_s = \{t \in \mathbb{R}/t + s \in I\}$.
Si $g : I_s \to M$ es la curva $g(t) = c(t + s)$, entonces g es una curva integral de X.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\alpha_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la traslación $\alpha_s(t) = t + s$; luego $g(t) = c \circ \alpha_s(t)$ y por lo tanto. $\dot{g}(t) = \widehat{c \circ \alpha_s}(t) = (c \circ \alpha_s)_{*t}(D|_t) = c_{*t+s}((\alpha_s)_{*t}(D|_t)) = c_{*t+s}(D|_{t+s}) = \dot{c}(t + s) = X(c(t + s)) = X(g(t))$.

NOTA

Para estudiar con más detalle a las curvas integrales, es conveniente apelar a los siguientes resultados de la teoría de ecuaciones diferenciales, que puede encontrarse, por ejemplo, en: CODDINGTON, E.A., LEVINSON, N.: "Theory of Ordinary Differential Equations", Mc. Graw-Hill, 1955 o NARASIMHAN, R: "Analysis on Real and Complex Manifolds", Advanced Studies in Pure Mathematics (Vol. I), 1968.

Teorema de Existencia de Curvas Integrales

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $F : G \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Para cada $a \in G$, existe un abierto W con $a \in W \subset G$, un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$ y una función diferenciable $\psi : I \times W \to G$ que satisface

(1) $\psi(0,u) = u$ *si* $u \in W$

(2) Para $u \in W$, *sea* $\psi_u : I \to G$ *la curva* $\psi_u(t) = \psi(t,u)$. *Entonces* $\dfrac{d\psi_u}{dt}\Big|_t = F(\psi_u(t))$ *si* $t \in I$.

OBSERVACIÓN

Una curva $\psi : I \to G$ que satisface $F(\psi(t)) = \dfrac{d\psi}{dt}\Big|_t$ si $t \in I$, se denomina clásicamente una curva integral de F.

Luego, por *(2)* es $\psi_u : I \to G$ una curva integral de F que, por *(1)* satisface $\psi_u(0) = u$.

Teorema de Unicidad de Curvas Integrales

Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío y $F : G \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si $\psi_1, \psi_2 : I \to G$ son curvas integrales de F tales que $\psi_1(t_0) = \psi_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$, entonces $\psi_1 = \psi_2$.

NOTA

Las traducciones de los teoremas anteriores a variedades, son los siguientes:

Teorema 24

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $p \in M$, existe un intervalo abierto de $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$, un abierto V de M, entorno de p, y una función diferenciable $\varphi : I \times V \to M$ que satisface:

(1) $\varphi(0,q) = q$ *si* $q \in V$

(2) Para $q \in V$ *sea* $\varphi_q : I \to M$ *la curva* $\varphi_q(t) = \varphi(t,q)$. *Entonces* φ_q *es una curva integral de* X

DEMOSTRACIÓN:

Sea (U,x) con $x = (x^1,\dots,x^n)$ una carta de M alrededor de p; luego, $X|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i . \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ con $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$.

Sea $F : G = x(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la función diferenciable definida por $F(u) = (\varphi^1 \circ x^{-1}(u), \ldots, \varphi^n \circ x^{-1}(u))$.

Sea $a = x(p)$; luego, por el teorema de existencia, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ con $0 \in I$, un abierto W de $\mathbb{R}^n$ con $a \in W \subset G$ y una función diferenciable $\psi : I \times W \to G$ que satisface:

a) $\psi(0, u) = u$ si $u \in W$.

b) La curva $\psi_u : I \to G$ definida por $\psi_u(t) = \psi(t, u)$ verifica $\frac{d\psi_u}{dt}|_t = F(\psi_u(t))$ o, equivalentemente $\frac{d(u^i \circ \psi_u)}{dt}|_t = \varphi^i \circ x^{-1}(\psi_u(t))$ si $1 \leq i \leq n$.

Sea V el entorno abierto de p definido por $V = x^{-1}(W)$ y sea $\varphi : I \times V \to M$ la función diferenciable definida por $\varphi(t, q) = x^{-1}(\psi(t, x(q)))$.
Luego, $\varphi(0, q) = x^{-1}(\psi(o, x(q))) = q$ y la curva $\varphi_q : I \to M$ es una curva integral de X.

Teorema 25

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\varphi_1, \varphi_2 : I \to M$ curvas integrales de X tales que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$. Entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.

DEMOSTRACIÓN:

Como en el teorema anterior, se toman coordenadas locales y se aplica el teorema de unicidad.

DEFINICIÓN

En la situación del teorema 24, la función $\varphi : I \times V \to M$ se denomina un **flujo local** *de X alrededor de p.*

Corolario 26

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\varphi_1, \varphi_2 : I \times V \to M$, dos flujos locales de X. Entonces $\varphi_1 = \varphi_2$.

DEMOSTRACIÓN:

Si $q \in V$, las curvas integrales $(\varphi_1)_q, (\varphi_2)_q : I \to M$ definidas por $(\varphi_i)_q(t) = \varphi_i(t, q)$ satisfacen $(\varphi_1)_q(0) = (\varphi_2)_q(0) = q$; luego $\varphi_1 = \varphi_2$.

NOTA

Una aplicación interesante del flujo local asociado a un campo de vectores es el siguiente.

Teorema 27

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Si $p \in M$ y $X(p) \neq 0$, existe una carta (U, x) de M con $x(p) = 0$ tal que si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces $X(q) = \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_q$ si $q \in U$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\varphi : I \times V \to M$ un flujo local de X alrededor de p y $v_1 = X(p)$. Como $v_1 \neq 0$, podemos completar v_1 a una base $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de M_p. De acuerdo con el ejercicio 22, podemos construir una carta (W, y) de M con $p \in W \subset V$ tal que $y(p) = 0, y(W) = \mathbb{R}^n$ y $v_i = \frac{\partial}{\partial y^i}\big|_p$ si $1 \leq i \leq n$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

Sea $F : I \times R^{n-1} \to M$ definida por

$$F(t, u^1, \ldots u^n) = \varphi(t, y^{-1}(0, u^2, \ldots, u^n)) \tag{1}$$

Denotando con $(0, 0) \in I \times \mathbb{R}^{n-1}$ al origen de $\mathbb{R}^n$, afirmamos que

$$F_{*(0,0)}(D_1|_{(0,0)}) = v_1 \text{ y } F_{*(0,0)}(D_j|_{(0,0)}) = v_j \text{ si } 2 \leq j \leq n \tag{2}$$

En efecto, como $F(t, 0) = \varphi(t, p) = \varphi_p(t)$, resulta

$$F_{*(0,0)}(D_1|_{(0,0)}) = \dot{\varphi}_p(0) = X(p) = v_1$$

Si $u = (u^2, \ldots, u^n)$, se tiene que $F(0, u) = y^{-1}(0, u)$; luego, $F_{*(0,0)}(D_j|_{(0,0)}) = \frac{\partial}{\partial y^j}\big|_p = v_j$ si $2 \leq j \leq n$.

Debido a (2) es $F_{*(0,0)} : \mathbb{R}^n_{(0,0)} \to M_p$ un isomorfismo; luego por el teorema de la función inversa local (Teorema 15), existe un $\varepsilon > 0$ con $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset I$ tal que $F((-\varepsilon, \varepsilon)^n) = U$ es un entorno abierto de p y $F : (-\varepsilon, \varepsilon)^n \to U$ es un difeomorfismo.

Sea $x = F^{-1} : U \to (-\varepsilon, \varepsilon)^n$; luego$(U, x)$ es una carta de M con $x(p) = 0$. Veamos ahora que $X(q) = \frac{\partial}{\partial x^1}\big|_q$ si $q \in U$.

Por (1) es $x^{-1}(t, u) = \varphi(t, y^{-1}(0, u))$ si $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^n$; luego, $x^{-1}(0, u) = \varphi(0, y^{-1}(0, u)) = y^{-1}(0, u)$ y en consecuencia vale

$$x^{-1}(t, u) = \varphi(t, x^{-1}(0, u)) \qquad \text{si } (t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^n \tag{3}$$

Sea $q \in U$ con $q = x^{-1}(t_0, u_0)$ y sea $\rho > 0$ tal que si $|s| < \rho$ se cumple que $t_0 + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. La curva $c : (-\rho, \rho) \to M$ definida por $c(s) = x^{-1}(t_0 + s, u_0)$ satisface que $c(0) = q$ y

$\dot{c}(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q$. Por otro lado, como $c(s) = \varphi(t_0 + s, x^{-1}(0, u_0))$ es c una curva integral de X. Luego, $X(q) = X(c(0)) = \dot{c}(0) = \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q$.

OBSERVACIÓN

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$. Debido al teorema 24 podemos construir una curva integral $c : I \to M$ de X con $0 \in I$ y $c(0) = p$.

Sea $I_p \subset \mathbb{R}$ el intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que satisface

a) $I \subset I_p$

b) Existe una curva integral $\Phi_p : I_p \to M$ de X con $\Phi_p(0) = p$

c) I_p es el mayor intervalo abierto de $\mathbb{R}$ que satisface a) y b).

Debido al teorema 25, es $\Phi_p|_I = c$ y Φ_p resulta única.

La curva $\Phi_p : I_p \to M$ se denomina la **curva integral maximal** de X que satisface $\Phi_p(0) = p$.

Sea $W = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M$ y $\Phi : W \to M$ la función definida por $\Phi(t, p) = \Phi_p(t)$.

La función Φ se denomina el **flujo maximal** o **flujo** de X.

EJEMPLOS

1. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y $X(u) = u^1 D_1|_u - u^2 D_2|_u$ si $u \in \mathbb{R}^2$ Si $p = (a, b)$, entonces $I_p = \mathbb{R}$ y $\Phi_p(t) = (a.e^t, b.e^{-t})$
2. Sea $M = \mathbb{R}$ y $X(u) = u^2.D|_u$ si $u \in \mathbb{R}$.
   Si $p = 0$, es $I_0 = \mathbb{R}$ y $\Phi_p(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}$.
   Si $p > 0$, es $I_p = (-\infty, 0)$ y $\Phi_p(t) = -\frac{1}{t}$
   Si $p < 0$, es $I_p = (0, +\infty)$ y $\Phi_p(t) = -\frac{1}{t}$

OBSERVACIÓN

Volviendo a la observación anterior, por construcción de W es $0 \times M \subset W$ y por unicidad de las curvas integrales se tiene que si $\varphi : I \times V \to M$ es un flujo local de X, entonces $I \times V \subset W$ y $\varphi = \phi|_{I \times V}$.

Teorema 28

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Phi : W \to M$ su flujo. Entonces W es abierto en $\mathbb{R} \times M$ y Φ es diferenciable.

Demostración:

Para cada $p \in M$, sea $J_p \subset I_p$ el conjunto de los $t \in I_p$ que satisfacen la siguiente propiedad:
"Existe un $\varepsilon > 0$ y un abierto U de M con $p \in U$, tales que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \subset W$ y $\Phi : (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \to M$ es diferenciable."

Debido a la observación anterior, J_p es no vacío pues $0 \in J_p$. Además, si $t \in J_p$ y ε satisface la propiedad anterior, entonces $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset J_p$. Luego, J_p es un abierto de $\mathbb{R}$ y por lo tanto, de I_p.

Como I_p es conexo, por ser un intervalo, si mostramos que J_p es cerrado en I_p, tendrá que ser $J_p = I_p$.
Siendo p arbitrario, se concluye que W es abierto en $\mathbb{R} \times M$ y Φ es diferenciable.
Sea entonces $t_0 \in I_p$ un punto de acumulación de J_p y mostremos que $t_0 \in J_p$.

Consideremos las siguientes construcciones:

(1) Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que $I(t_0, \varepsilon_0) = \{t \in \mathbb{R} \ / \ |t - t_0| < \varepsilon_0\} \subset I_p$. Luego, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ entonces $I(t_0, \varepsilon) \subset I_p$.

(2) Sea $\varphi : (\rho, \rho) \times V \to M$ un flujo local de X alrededor de $\Phi(t_0, p)$ con $\rho < \varepsilon_0$.

(3) Como $\Phi_p : I_p \to M$ es continua y $\Phi_p(t_0) = \Phi(t_0, p) \in V$, sea $\varepsilon < \dfrac{\rho}{2}$ tal que $\Phi_p(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset V$.

(4) Como t_0 es un punto de acumulación de J_p, sea $t_1 \in J_p$ con $t_1 \in I(t_0, \varepsilon)$.

(5) Como $t_1 \in J_p$, sea $\varepsilon_1 > 0$ y U un abierto con $p \in U$ tal que $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times U \subset W$ y $\Phi : (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \times U \to M$ es diferenciable. Como $t_1 \in I(t_0, \varepsilon)$, entonces $\Phi_p(t_1) \in V$; achicando ε_1 y U alrededor de p, si fuera necesario, podemos suponer que $\Phi\big((t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1) \times U\big) \subset V$.

Sea $I_0 = I(t_0, \varepsilon)$, afirmamos que $I_0 \times U \subset W$ y que $\Phi|_{I_0 \times U}$ es diferenciable.

En efecto,

si $t \in I_0$ es $|t - t_1| \leq |t - t_0| + |t_0 - t_1| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon < \rho$. Por (5), si $q \in U$ resulta $\Phi(t_1, q) \in V$; luego por (2), la función $\alpha : I_0 \times U \to M$ dada por $\alpha(t, q) = \varphi(t - t_1, \Phi(t_1, q))$ está bien definida. Debido a que tanto $\Phi|_{(t_1 - \varepsilon_1, t_1 + \varepsilon_1) \times U}$ como φ son diferenciables, resulta que α lo es.
Sea $\alpha_q : I_0 \to M$ la curva $\alpha_q(t) = \alpha(t, q)$; luego, α_q es una curva integral de X que satisface $\alpha_q(t_1) = \Phi(t_1, q) = \Phi_q(t_1)$.

Como Φ_q es una curva integral maximal de X, se obtiene que $I_0 \subset I_q$ y $\alpha_q(t) = \Phi_q(t)$ si $t \in I_0$. La inclusión $I_0 \subset I_q$, si $q \in U$, implica que $I_0 \times U \subset W$. La igualdad $\alpha_q(t) = \Phi_q(t)$, si $t \in I_0$ y $q \in U$, implica que $\alpha = \Phi|_{I_0 \times U}$.

Luego, $\Phi : I_0 \times U \to M$ es diferenciable y por lo tanto, $t_0 \in J_p$.

DEFINICIÓN

Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se dice **completo**, *si para todo $p \in M$ la curva integral maximal $\Phi_p : I_p \to M$ de X satisface que $I_p = \mathbb{R}$ o, equivalentemente, si $\Phi : W \to M$ es el flujo de X, entonces $W = \mathbb{R} \times M$.*

Considerando los ejemplos anteriores, se tiene que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ es completo, mientras que $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ no lo es.

NOTA

El siguiente criterio es útil para saber si una curva integral puede extenderse.

Teorema 29

Sea $c : I \to M$ una curva integral de X con $0 \in I$ y supongamos que $I \cap [0, +\infty) = [0, b)$ con $b < +\infty$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(1) c puede extenderse como curva integral de X a un intervalo $[0, b+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$.

(2) Existe una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenida en $[0, b)$ y convergente a b, tal que $(c(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $q \in M$.

Vale la equivalencia de las correspondientes afirmaciones para el caso $I \cap (-\infty, 0] = (b, 0]$ con $b > -\infty$.

DEMOSTRACIÓN:

• $(1) \Rightarrow (2)$

Por hipótesis existe un $\varepsilon > 0$ para el cual $c : [0, b+\varepsilon) \to M$ está definida y es una curva integral de X. Sea $q = c(b)$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en $[0, b)$, convergente a b. Por continuidad de c, se tiene entonces que la sucesión $(c(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a q.

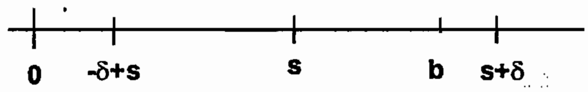
• $(2) \Rightarrow (1)$

Sea $\varphi : (-\delta, \delta) \times V \to M$ un flujo local de X, alrededor de q. Elegimos un $\delta > 0$ de modo que $\delta < \dfrac{b}{2}$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - \delta < t_n < b$ si $n \geq n_0$. Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c(t_n) \in V$ si $n \geq n_1$.

Luego, si $n \geq máx\{n_0, n_1\}$, $s = t_n$ y $p = c(s)$ se cumple que $s \in (b-\delta, b)$ y $p \in V$.

Sea $g : (-\delta + s, \delta + s) \to M$ la curva $g(t) = \varphi(t - s, p)$; luego g es una curva integral de X que satisface $g(s) = \varphi(0, p) = p = c(s)$. Como $b - \delta < s$, resulta $b < \delta + s$.
Afirmamos que $0 < -\delta + s < b$.
En efecto,

como $\delta < \dfrac{b}{2}$ es $2\delta < b$; luego, $\delta < b - \delta < s$ y por lo tanto $0 < -\delta + s$. Además, al ser $s < b$, es $s < b + \delta$, con lo cual $-\delta + s < b$.



Sea $J = (-\delta + s, b)$; luego, $g|_J, c|_J : J \to M$ son curvas integrales de X que coinciden en $t = s$; luego, $g|_J = c|_J$.

En consecuencia, g extiende a c "más allá" de b.

Corolario 30

Si M es compacta y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces X es completo.

DEMOSTRACIÓN:

Es obvio por el teorema anterior.

EJERCICIO 34

Sea G un grupo de Lie de dimensión n, $e \in G$ el elemento unidad y $X \in \mathfrak{X}(G)$ un campo invariante a izquierda. Para $h \in G$, sea $\Phi_h : I_h \to G$ la curva integral maximal de X que satisface $\Phi_h(0) = h$.

1. *Si $c : I \to G$ es una curva integral de X y $h \in G$, sea $g : I \to G$ la curva $g(t) = h.c(t)$. Verificar que g es una curva integral de X.*
2. *Deducir de 1. que $I_h = I_e$ para todo $h \in G$ y $\Phi_h(t) = h.\Phi_e(t)$.*
3. *Verificar que $I_e = \mathbb{R}$ y que si $c = \Phi_e$, entonces $c(s+t) = c(s).c(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Concluir que X es completo.*

EJERCICIO 35

Un **subgrupo uniparamétrico** *de un grupo de Lie G es una curva $c : \mathbb{R} \to G$ que satisface $c(s + t) = c(s).c(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Verificar:*

1. *$c(0) = e$*
2. *Si $v = \dot{c}(0) \in G_e$ y X es el campo invariante a izquierda generado por v, entonces c es una curva integral de X.*

Concluir que los subgrupos uniparamétricos de G están en correspondencia biunívoca con las curvas integrales maximales, de los campos invariantes a izquierda, que pasan por e.

EJERCICIO 36

Para cada uno de los siguientes casos, verificar que la curva $c_v : \mathbb{R} \to G$ *con* $v \in G_e$ *es un subgrupo uniparamétrico de* G *que satisface* $\dot{c}_v(0) = v$ *y que* $X \in \mathfrak{X}(G)$ *es el correspondiente campo invariante a izquierda generado por* v.

1. $G = \mathbb{R}^n$ *con la operación suma,* $\quad v = \sum_{i=1}^{n} v^i .\ D_i|_0 \ ,\quad c_v(t) = t.(v^1, \dots, v^n)\ ,$

   $X(u) = \sum_{i=1}^{n} v^i .\ D_i|_u$ *si* $u \in \mathbb{R}^n$.

2. $G = \mathbb{R}_{>0}$ *con la operación producto,* $\quad v = a.\ D|_1\ ,\quad c_v(t) = e^{a.t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(a.t)^k}{k!},$

   $X(u) = a.\ u.\ D|_u$ *si* $u \in G$.

EJERCICIO 37

Sea $G = S^1 \subset \mathbb{R}^2$ *la circunferencia unitaria con la operación:* $e^{ix}.\ e^{iy} = e^{i(x+y)}$, *donde* $e^{ix} = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. *En este caso, el elemento unidad es* $1 = (1, 0)$. *Si* $p = e^{ix}$ *interpretemos a* $(S^1)_p$ *como subespacio de* $\mathbb{R}^2_p$ *y definamos* $\partial_p \in (S^1)_p$ *por* $\partial_p = -\operatorname{sen} x\ .\ D_1|_p + \cos x\ .\ D_2|_p$. *Luego,* ∂_p *es una base de* $(S^1)_p$.

1. *Sea* ∂ *el campo de vectores sobre* S^1 *que, en cada* $p \in S^1$, *vale* ∂_p. *Verificar que* $\partial \in \mathfrak{X}(S^1)$.
2. *Sea* $v = a.\partial_1$, $a \in \mathbb{R}$ *y* X *el campo invariante a izquierda generado por* v. *Calcular la* $f \in \mathcal{F}(S^1)$ *que satisface* $X = f.\partial$

EJERCICIO 38

Para cada uno de los siguientes casos de $G \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, *verificar que la curva* $c_v : \mathbb{R} \to G$ *con* $v \in T_I(G) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ *es un subgrupo uniparamétrico de* G *que satisface* $\frac{dc_v}{dt}|_0 = v$; *donde* I *es la matriz identidad.*

1. $G = GL(n, \mathbb{R})\ ,\ v \in T_I(G) = \mathbb{R}^{n\times n}$ *y* $c_v(t) = e^{t.v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t.v)^k}{k!}$
2. $G = \mathcal{O}(n)\ ,\ v \in T_I(G) = \mathcal{T} =$ MATRICES ANTISIMÉTRICAS $\ , c_v(t) = e^{t.v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t.v)^k}{k!}$.

NOTA

Las siguientes propiedades que satisface el flujo y que resumimos en la próxima proposición, serán de utilidad.

Proposición 31

Sea M una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Phi : W = \cup_{p\in M} I_p \times \{p\} \to M$ su flujo. Para cada $t \in \mathbb{R}$, sea $M_t = \{p \in M \ / \ (t,p) \in W\} = \{p \in M \ / \ t \in I_p\}$. Valen las siguientes propiedades:

1. *M_t es abierto en M*
2. *Si $t \in I_p$ y $q = \Phi(t,p)$, entonces $I_q = \{s \in \mathbb{R} \ / \ s + t \in I_p\}$ y $\Phi(s,q) = \Phi(t+s,p)$ para todo $s \in I_q$*
3. *Si $p \in M_t$ entonces $\Phi(t,p) \in M_{-t}$*
4. *Si M_t es no vacío sea $\Phi_t : M_t \to M$ definida por $\Phi_t(p) = \Phi(t,p)$. Entonces Φ_t es diferenciable y $\Phi_t(M_t) = M_{-t}$*
5. *Si M_t es no vacío, entonces $\Phi_t : M_t \to M_{-t}$ es un difeomorfismo con inversa $\Phi_{-t} : M_{-t} \to M_t$*
6. *Sea $p \in M$ y $s,t \in \mathbb{R}$ tales que $p \in M_t$ y $\Phi(t,p) \in M_s$. Existe un abierto Ω de M con $p \in \Omega$ tal que $\Omega \subset M_{t+s}$, $\Omega \subset M_t$, $\Phi_t(\Omega) \subset M_s$ y $\Phi_{t+s}(q) = \Phi_s \circ \Phi_t(q)$ si $q \in \Omega$*

DEMOSTRACIÓN:

- Propiedad 1.

Supongamos que M_t es no vacío y sea $p \in M_t$. Como $(t,p) \in W$ y W es abierto en $\mathbb{R} \times M$, existe un $\varepsilon > 0$ y un abierto U de M con $p \in U$, tal que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \times U \subset W$. Luego, $p \in U \subset M_t$ y por lo tanto M_t es abierto en M.

- Propiedad 2.

Si definimos $I = \{s \in \mathbb{R} \ / \ s + t \in I_p\}$, entonces I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y entorno del origen. Sea $\varphi : I \to M$ definida por $\varphi(s) = \Phi(s+t,p)$; luego, φ es una curva integral de X que satisface $\varphi(0) = q$. En consecuencia, $I \subset I_q$ y $\varphi(s) = \Phi(s,q)$ si $s \in I$.

Queda por verificar que $I_q \subset I$. Como $-t \in I$, es $-t \in I_q$ y $p = \varphi(-t) = \Phi(-t,q)$. Luego, si definimos $J = \{\tau \in \mathbb{R} \ / \ \tau + (-t) \in I_q\}$, resulta J un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y entorno del origen.

Sea $\psi : J \to M$ definida por $\psi(\tau) = \Phi(\tau + (-t), q)$; luego, ψ es una curva integral de X que satisface $\psi(0) = p$. En consecuencia, $J \subset I_p$ y $\psi(\tau) = \Phi(\tau,p)$ si $\tau \in J$. La inclusión $J \subset I_p$ implica que $I_q \subset I$.

- Propiedad 3.

Como $p \in M_t$ es $t \in I_p$. Sea $q = \Phi(t,p)$; luego, por ser $-t + t \in I_p$, se tiene, por 2. que $-t \in I_q$ o, equivalentemente, que $q \in M_{-t}$.

• Propiedad 4.

Debido a la parte anterior, es $\Phi_t(M_t) \subset M_{-t}$ y Φ_t es diferenciable pues Φ lo es. Sea $q \in M_{-t}$ y veamos que $q \in \Phi_t(M_t)$. Si definimos $q' = \Phi(-t, q)$, por 3., resulta que $q' \in M_t$.

Por otro lado, en virtud de 2. es $I_{q'} = \{s \in \mathbb{R} \,/\, s+(-t) \in I_q\}$ y $\Phi(s, q') = \Phi(s+(-t), q)$ si $s \in I_{q'}$. Como $t \in I_{q'}$, es $\Phi(t, q') = \Phi(0, q) = q$ o, equivalentemente, que $\Phi_t(q') = q$.

• Propiedad 5.

Es consecuencia obvia de las anteriores.

• Propiedad 6.

Como $p \in M_t$ y $\Phi(t,p) \in M_s$, entonces $t \in I_p$ y $s \in I_{\Phi(t,p)}$. Debido a la parte 2. se cumple que $t+s \in I_p$ o, equivalentemente $p \in M_{s+t}$; luego, $p \in \Omega = \Phi_t^{-1}(M_s) \cap M_{t+s}$. Por construcción, Ω es un abierto que satisface $\Omega \subset M_t, \Omega \subset M_{t+s}$ y $\Phi_t(\Omega) \subset M_s$. Sea $q \in \Omega$; luego, $q \in M_t$ y $\Phi(t, q) \in M_s$.

Esto nos dice que $t \in I_q$ y $s \in I_{\Phi(t,q)}$; luego, por 2., es $\Phi(t+s, q) = \Phi(s, \Phi(t, q))$, o sea, $\Phi_{t+s}(q) = \Phi_s(\Phi_t(q))$.

Corolario 32

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\Phi : W \to M$ su flujo. Sea $p \in M$ y $\varphi : I \times V \to M$ un flujo local de X alrededor de p. Si para cada $t \in I$ se define $\varphi_t : V \to M$ por $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$, se cumple:

a) Si $s, t, s+t \in I, q \in V$ y $\varphi_t(q) \in V$, entonces $\varphi_s \circ \varphi_t(q) = \varphi_{s+t}(q)$.

b) Si $t \in I$, entonces $\varphi_t(V)$ es un abierto de M y $\varphi_t : V \to \varphi_t(V)$ es un difeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN:

Por hipótesis se verifica que $I \times V \subset W$ y $\varphi = \Phi|_{I\times V}$. Si $q' = \varphi_t(q) = \Phi(t, q)$, entonces $t \in I_q$ y $s \in I_{q'}$. Luego, a) es una consecuencia de la parte 2. de la proposición anterior.

Por otro lado, si $t \in I$ es $V \subset M_t$; luego, b) es consecuencia de la parte 5. de la misma proposición. En particular, si $-t \in I$ es $\varphi_{-t}|_{\varphi_t(V)}$ la inversa de φ_t.

Corolario 33

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores completo y $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ su flujo. Para $t \in \mathbb{R}$ se define $\Phi_t : M \to M$ por $\Phi_t(p) = \Phi(t, p)$. Entonces se verifica:

a) $\Phi_0 = id_M$

b) $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ si $s, t \in \mathbb{R}$

En particular, Φ_t es un difeomorfismo con inversa Φ_{-t}.

DEMOSTRACIÓN:

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

DEFINICIÓN

Una función diferenciable $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ *se denomina un* **grupo uniparamétrico de difeomorfismos sobre** M*, si para cada* $t \in \mathbb{R}$*, la función* $\Phi_t : M \to M$ *definida por* $\Phi_t(p) = \Phi(t,p)$ *satisface las propiedades a) y b) del corolario anterior.*

Corolario 34

Si M *es compacta, el flujo asociado a cualquier campo* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN:

Se debe al corolario 30.

EJERCICIO 39

Sea M *una variedad diferenciable y* $\Phi : \mathbb{R} \to M$ *un grupo uniparamétrico de difeomorfismos. Para cada* $p \in M$ *se define* $X_p = \dot{\Phi}_p(0) \in M_p$*, donde* $\Phi_p : \mathbb{R} \to M$ *es la curva* $\Phi_p(t) = \Phi(t,p)$*. Sea* X *el campo de vectores sobre* M *que en cada* $p \in M$ *vale* X_p*. Probar que* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *y que* Φ *es su flujo. Concluir que la correspondencia entre los campos de vectores completos sobre* M *y los grupos uniparamétricos de difeomorfismos sobre* M *es biunívoca.*

EJERCICIO 40

En cada uno de los siguientes casos, verificar que $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es el grupo uniparamétrico de difeomorfismos generado por* $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$.

a) $X(u) = u^1 .\, D_1|_u - u^2 .\, D_2|_u \ , \ u = (u^1, u^2) \quad y \quad \Phi(t,(a,b)) = (a \quad b) \, . \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$

b) $X(u) = u^2 .\, D_1|_u - u^1 .\, D_2|_u \ , \ u = (u^1, u^2) \quad y \quad \Phi(t,(a,b)) = (a \quad b) \, . \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$

(ROTACIONES EN EL PLANO)

EJERCICIO 41

Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$*, el campo nulo; es decir,* $X(p) = 0$ *para todo* $p \in M$*. ¿Es* X *completo? ¿Cuál es su grupo uniparamétrico de difeomorfismos?*

Derivaciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subset M$ un abierto no vacío. Hay una manera algebraica de describir a $\mathfrak{X}(G)$ y consiste en interpretar a los campos $X \in \mathfrak{X}(G)$ del siguiente modo:
Si $f \in \mathcal{F}(G)$, sea $\bar{X}(f) : G \to \mathbb{R}$ definida por

$$\bar{X}(f)(p) = X(p)(f) \qquad \text{si} \quad p \in G \tag{1}$$

Afirmamos que $\bar{X}(f) \in \mathcal{F}(G)$.
En efecto,
sea (U, x) una carta de M con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$; luego, $X|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ con $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$.
Debido a (1), para $p \in U$, se tiene

$$\bar{X}(f)(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p \tag{2}$$

La igualdad anterior muestra que $\bar{X}(f)|_U \in \mathcal{F}(U)$; luego, por ser (U, x) arbitraria, es $\bar{X}(f) \in \mathcal{F}(G)$. Luego, $X \in \mathfrak{X}(G)$ produce un operador $\bar{X} : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$ que satisface, para $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(G)$, las propiedades:
$d_1)$ $\bar{X}(a.f + b.g) = a.\bar{X}(f) + b.\bar{X}(g)$
$d_2)$ $\bar{X}(f.g) = \bar{X}(f).g + f.\bar{X}(g)$
Las propiedades $d_1)$ y $d_2)$ se deben a (1) y al hecho de que $X(p) \in M_p$ si $p \in G$.

Un operador $\bar{X} : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$ que satisface $d_1)$ y $d_2)$ se denomina una **derivación** sobre $\mathcal{F}(G)$.

Recíprocamente, si $\bar{X} : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$ es una derivación y definimos $X : G \to TM$ por

$$X(p)(f) = \bar{X}(f)(p) \tag{3}$$

entonces, $X \in \mathfrak{X}(G)$. De hecho, las propiedades $d_1)$ y $d_2)$ aseguran que para cada $p \in G$ es $X(p) \in M_p$. Queda por verificar que X es diferenciable.
Sea entonces (U, x) una carta de M con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$; luego, $X|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i . \dfrac{\partial}{\partial x^i}$
y X resultará diferenciable, probado que $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$ si $1 \le i \le n$.
Sea $p \in U$; como $x^i \in \mathcal{F}(U)$ existe $f^i \in \mathcal{F}(G)$ y un abierto V_i de M con $p \in V_i \subset U$ tal que $x^i|_{V_i} = f^i|_{V_i}$ (ver corolario 6).

Si V es la intersección de los V_i, con $1 \leq i \leq n$, se tiene que $p \in V \subset U$ y $x^i|_V = f^i|_V$ si $1 \leq i \leq n$.
Para $q \in V$ se cumple:

$$\varphi^i(q) = X(q)(x^i) = X(q)(f^i) = \bar{X}(f^i)(q) \tag{4}$$

siendo $\bar{X}(f^i) \in \mathcal{F}(G)$ y $\varphi^i|_V = \bar{X}(f^i)|_V$, entonces $\varphi^i|_V \in \mathcal{F}(V)$. Como $p \in U$ es arbitrario, resulta $\varphi^i \in \mathcal{F}(U)$.

Debido a la correspondencia biunívoca que existe entre los campos de vectores diferenciables y las derivaciones, interpretamos, cuando sea conveniente, a un campo $X \in X(G)$ como una derivación y viceversa. Es decir,

- si $X \in \mathfrak{X}(G)$ y escribimos $X(f)$, $f \in \mathcal{F}(G)$, se entiende que X se interpreta como una derivación y, por lo tanto, $X(f) \in \mathcal{F}(G)$ es la función definida por $X(f)(p) = X(p)(f)$.
- si X es una derivación sobre G y escribimos $X(p)$, $p \in G$, se entiende que X se interpreta como un campo de vectores y, por lo tanto, $X(p) \in M_p$ es el vector tangente definido por $X(p)(f) = X(f)(p)$.

Veamos ahora una aplicación de lo expuesto.
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$; interpretando a los mismos como derivaciones, podemos construir la composición $X \circ Y : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G)$. Dado que X e Y satisfacen d_1, entonces $X \circ Y$ también la satisface. Como X e Y satisfacen d_2, para $f, g \in \mathcal{F}(G)$, se cumple

$$\begin{aligned} X \circ Y(f.g) &= X(Y(f.g)) = X(Y(f).g + f.Y(g)) \\ &= X(Y(f)).g + Y(f).X(g) + X(f).Y(g) + f.X(Y(g)) \end{aligned} \tag{5}$$

La igualdad anterior implica que $X \circ Y$ no es una derivación; sin embargo, si en (5), permutamos X con Y y restamos, obtenemos

$$(X \circ Y - Y \circ X)(f.g) = (X \circ Y - Y \circ X)(f).g + f.(X \circ Y - Y \circ X)(g) \tag{6}$$

lo que implica que $X \circ Y - Y \circ X$ es una derivación.

Denotando con $[X, Y] \in \mathfrak{X}(G)$ al campo que define $X \circ Y - Y \circ X$, para $p \in G$ y $f \in \mathcal{F}(G)$ se tiene

$$\begin{aligned} [X,Y](p)(f) &= (X \circ Y - Y \circ X)(f)(p) = (X(Y(f)) - Y(X(f)))(p) \\ &= X(p)(Y(f)) - Y(p)(X(f)) \end{aligned} \tag{7}$$

Definición

Sea M una variedad diferenciable, $G \subset M$ un abierto no vacío y $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$. El **corchete de Lie** *entre X e Y es el campo $[X,Y] \in \mathfrak{X}(G)$ definido por $[X,Y](p)(f) = X(p)(Y(f)) - Y(p)(X(f))$ si $p \in G$ y $f \in \mathcal{F}(G)$.*

Si X e Y son derivaciones sobre G, el corchete de Lie entre X e Y es la derivación $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$.

Ejercicio 42

Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$. Verificar que el corchete de Lie satisface:

a) *Es $\mathbb{R}$-bilineal*
$[a.X + b.Y, Z] = a.[X,Z] + b.[Y,Z]$
$[X, a.Y + b.Z] = a.[X,Y] + b.[X,Z]$

b) *Es antisimétrica*
$[X,Y] = -[Y,X]$; *en particular*, $[X,X] = 0$

c) $[f.X, g.Y] = f.g.[X,Y] + f.X(g).Y - g.Y(f).X$

d) Identidad de Jacobi
$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$
Sugerencia: Interpretar a los campos como derivaciones.

Proposición 35

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, (U, x), con $x = (x^1, \dots, x^n)$, una carta de M y $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ si $1 \le i \le n$. Entonces $[X_i, X_j] = 0$ si $1 \le i, j \le n$.

Demostración:

Como $[X_i, X_j] \in \mathfrak{X}(U)$, entonces $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} \gamma^k . X_k$; donde $\gamma^k = [X_i, X_j](x^k)$.

Luego,

$\gamma^k(q) = [X_i, X_j](q)(x^k) = X_i(q)(X_j(x^k)) - X_j(q)(X_i(x^k)) = X_i(q)(\delta_j^k) - X_j(q)(\delta_i^k) = 0$

Definición

Sean N y M variedades diferenciables, $f : N \to M$ una función diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(N)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Los campos X e Y se dicen **f-relacionados** *y escribimos $X \underset{f}{\sim} Y$, si para cada $p \in N$ se verifica que $f_{*p}(X(p)) = Y(f(p))$.*

Proposición 36

Sea $f : N \to M$ una función diferenciable y, para $i = 1, 2$, sean $X_i \in \mathfrak{X}(N)$ e $Y_i \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_i \underset{f}{\sim} Y_i$. Entonces $[X_1, X_2] \underset{f}{\sim} [Y_1, Y_2]$.

Demostración:

Si $p \in N$, hay que verificar que $f_{*p}([X_1, X_2](p)) = [Y_1, Y_2](f(p))$; o, equivalentemente, que para $h \in \mathcal{F}(M)$ se verifica

$$[X_1, X_2](p)(h \circ f) = Y_1(f(p))(Y_2(h)) - Y_2(f(p))(Y_1(h)) \tag{1}$$

Por un lado se cumple,

$$[X_1, X_2](p)(h \circ f) = X_1(p)(X_2(h \circ f)) - X_2(p)(X_1(h \circ f)) \tag{2}$$

La función $X_2(h \circ f) : N \to \mathbb{R}$ satisface, para $q \in N$,

$$X_2(h \circ f)(q) = X_2(q)(h \circ f) = f_{*q}(X_2(q))(h) = Y_2(f(q))(h) = Y_2(h)(f(q)) = (Y_2(h) \circ f)(q)$$

Luego, $X_2(h \circ f) = Y_2(h) \circ f$. En consecuencia,

$$X_1(p)(X_2(h \circ f)) = X_1(p)(Y_2(h) \circ f) = f_{*p}(X_1(p))(Y_2(h)) = Y_1(f(p))(Y_2(h))$$

Análogamente, $X_2(p)(X_1(h \circ f)) = Y_2(f(p))(Y_1(h))$. Esto nos dice que vale (1).

Ejercicio 43

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $U \subset M$ un abierto no vacío. Entonces $[X|_U, Y|_U] = [X, Y]|_U$. Es decir, el corchete de Lie es compatible con restricciones.

Sugerencia: Considerar $N = U, i : U \to M$ la inclusión y aplicar la proposición anterior.

Proposición 37

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y (U, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M. Si $X|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi^i . \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y|_U = \sum_{i=1}^{n} \psi^i . \frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces

$$[X, Y]|_U = \sum_{i=1}^{n} \gamma^i . \frac{\partial}{\partial x^i}$$

donde $\gamma^i = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j . \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} - \psi^j . \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}$.

Demostración:

Si $\bar{X} = X|_U$ e $\bar{Y} = Y|_U$, es $\varphi^i = \bar{X}(x^i), \psi^i = \bar{Y}(x^i)$ y $\gamma^i = ([X, Y]|_U)(x^i)$.

Debido al ejercicio anterior se tiene que

$$\gamma^i = [\bar{X},\bar{Y}](x^i) = \bar{X}(\bar{Y}(x^i)) - \bar{Y}(\bar{X}(x^i)) = \bar{X}(\psi^i) - \bar{Y}(\varphi^i) = \sum_{j=1}^{n}\left(\varphi^j.\frac{\partial\psi^i}{\partial x^j} - \psi^j.\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right)$$

Corolario 38

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$ tal que $X(p) \neq 0$. Existe una carta (U, x) de M con $p \in U$ tal que si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $Y|_U = \sum_{i=1}^{n}\psi^i.\frac{\partial}{\partial x^i}$, entonces $[X,Y]|_U = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\psi^i}{\partial x^1}.\frac{\partial}{\partial x^i}$.

DEMOSTRACIÓN:

Debido al teorema 27, existe una carta (U, x) de M, con $p \in U$, tal que si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, se cumple que $X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}$.

El resultado es ahora consecuencia de la proposición anterior.

EJERCICIO 44

Sea G un grupo de Lie de dimensión n, $e \in G$ el elemento unidad y $\mathcal{L}(G)$ el espacio vectorial de los campos invariantes a izquierda (ver ejercicio 33).

1. *Probar que si $X, Y \in \mathcal{L}(G)$, entonces $[X,Y] \in \mathcal{L}(G)$. Concluir que $\mathcal{L}(G)$ es un álgebra de Lie, con la operación $[,]$.*
2. *Sea $\mathcal{G} = G_e$ y para $v, u \in \mathcal{G}$ definamos $[v,u] = w \in \mathcal{G}$, si $w = [X,Y](e)$ donde $X, Y \in \mathcal{L}(G)$ son los generados por v y u respectivamente. Verificar que $\mathcal{G}$, provisto del producto $[,]$, es un álgebra de Lie isomorfa a $\mathcal{L}(G)$, que se denomina:* **álgebra de Lie asociada** *a G.*

EJERCICIO 45

Sea $G = GL(n,\mathbb{R})$, $G_e = \mathbb{R}^{n\times n}$ y $A, B \in G_e$. Verificar que $[A,B] = A.B - B.A$.

EJERCICIO 46

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y consideremos sobre V la estructura diferenciable usual (ver ejercicio 7). Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $c : I \to V$ una curva.

1. *Si $c(t) = \sum_{i=1}^{n} c^i(t).e_i$, verificar que $c^i \in \mathcal{F}(I)$ para $1 \leq i \leq n$.*
2. *Para $s \in I$, sea $\frac{dc}{dt}\big|_s \in V$ definido por $\frac{dc}{dt}\big|_s = \sum_{i=1}^{n}\frac{dc^i}{dt}\big|_s.e_i$.*

   Si $J_{c(s)} : V \to V_{c(s)}$ es el isomorfismo canónico, mostrar que $J_{c(s)}\left(\frac{dc}{dt}\big|_s\right) = \dot{c}(s)$.

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, X , Y campos de $\mathfrak{X}(M)$ y $\Phi : W = \bigcup_{p \in M} I_p \times \{p\} \to M$ el flujo de X.

Sea $p \in M$ y $t \in I_p$; luego, $p \in M_t$ (ver proposición 31).

Consideremos el difeomorfismo $\Phi_t : M_t \to M_{-t}$, cuya inversa es $\Phi_{-t} : M_{-t} \to M_t$. Si $q = \Phi_t(p)$ es $Y(q) \in M_q$ y dado que $(\Phi_{-t})_{*q} : M_q \to M_p$, entonces $(\Phi_{-t})_{*q}(Y(q)) \in M_p$.

Sea $Y_p : I_p \to M_p$ la función definida por

$$Y_p(t) = (\Phi_{-t})_{*q}(Y(q)) \quad \text{si} \quad q = \Phi_t(p) \tag{1}$$

Como Φ es diferenciable, entonces Y_p lo es. Luego, Y_p es una curva en M_p que satisface $Y_p(0) = Y(p)$.

Sea $Z : M \to TM$ el campo de vectores definido por

$$Z(p) = \frac{dY_p}{dt}\Big|_0 = \lim_{t \to 0} \frac{Y_p(t) - Y(p)}{t} \tag{2}$$

Es claro que es suficiente considerar los flujos locales para la construcción de Z.

Teorema 39

Con las hipótesis y notaciones de la observación anterior se cumple:

a) Z *es diferenciable*

b) $[X, Y] = Z$

DEMOSTRACIÓN:

• Parte a)

Sea $p \in M$ y (U, x) una carta de M con $p \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$.

Como $\Phi : W \to M$ es continua, con $\Phi(0, p) = p$, existe $\varepsilon > 0$ y un abierto V de M, con $p \in V \subset U$, tal que $\Phi((-\varepsilon, \varepsilon) \times V) \subset U$.

Supongamos que $Y|_U = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$; luego, para $(t, q) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ se tiene que $\Phi_t(q) \in U$.

Sea $q' = \Phi_t(q)$; luego,

$$Y(q') = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j(q') . \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{q'} \tag{1}$$

Como $(\Phi_{-t})_{*q'} : M_{q'} \to M_q$, por (1), se tiene

$$\begin{aligned} Y_q(t) = (\Phi_{-t})_{*q'}(Y(q')) &= \sum_{i=1}^{n} (\Phi_{-t})_{*q'}(Y(q'))(x^i).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q = \\ &= \sum_{i=1}^{n} Y(q')(x^i \circ \Phi_{-t}).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q = \sum_{i=1}^{n} F^i(t,q).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \end{aligned} \tag{2}$$

Por definición de Z, es

$$Z(q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial t}\Big|_{(0,q)}.\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \tag{3}$$

donde

$$F^i(t,q) = \sum_{j=1}^{n} \varphi^j(\Phi_t(q)).\frac{\partial(x^i \circ \Phi_{-t})}{\partial x^j}\Big|_{\Phi_t(q)} \tag{4}$$

Luego, Z es diferenciable.

• Parte b)

Fijado $p \in M$, caben las siguientes posibilidades:

b_1) Existe un abierto U de M, con $p \in U$, tal que $X|_U = 0$

b_2) $X(p) \neq 0$

b_3) $X(p) = 0$ y existe una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M, convergente a p y $X(p_n) \neq 0$.

⋆ Caso b_1)

Si $X|_U = 0$, entonces $[X,Y]|_U = [X|_U, Y|_U] = 0$; luego, $[X,Y](p) = 0$.
Debemos mostrar que $Z(p) = 0$.
Sea $\varepsilon > 0$ y V un entorno abierto de p con $V \subset U$ tal que $\Phi((-\varepsilon,\varepsilon) \times V) \subset U$. Como las curvas $\Phi_q : (-\varepsilon,\varepsilon) \to U$, definidas por $\Phi_q(t) = \Phi(t,q)$, con $q \in V$, son curvas integrales de X, entonces $X(\Phi_q(t)) = \dot{\Phi}_q(t) = 0$; de donde, $\Phi(t,q) = q$ si $|t| < \varepsilon$.
Luego, para $|t| < \varepsilon$ es $(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)} = (\Phi_{-t})_{*p} : M_p \to M_p$ la identidad y, por lo tanto, $(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)}(Y(\Phi_t(p))) = Y(p)$.
Por definición de Z resulta $Z(p) = 0$.

⋆ Caso b_2)

De acuerdo con el teorema 27, existe una carta (U,x) de M, con $p \in U$, $x(p) = 0$ y tal que si $x = (x^1,\ldots,x^n)$, es $X|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$.

Luego, si $Y|_U = \sum_{j=1}^{n} \psi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, se tiene:

$$[X,Y](p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \psi^j}{\partial x^1}\Big|_p . \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \tag{1}$$

Siguiendo la demostración del teorema citado, podemos suponer que $x(U) = (-\varepsilon, \varepsilon)^n$ para algún $\varepsilon > 0$ y si $(t,u) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^n$, con $u = (u^2, \dots, u^n)$, entonces

$$x^{-1}(t,u) = \Phi(t, x^{-1}(0,u)) \tag{2}$$

Como $\Phi : W \to M$ es continua y $\Phi(0,p) = p \in U$, existe un $\delta > 0$, con $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, tal que $\Phi\big((-\delta,\delta) \times V\big) \subset U$; donde, $V = x^{-1}\big((-\delta,\delta)^n\big) \subset U$.
Sea $|t| < \delta$ y $q = x^{-1}(s, u^2, \dots, u^n) \in V$; luego,

$$\begin{aligned}\Phi_t(q) &= \Phi(t, x^{-1}(s,u^2,\dots,u^n)) = \Phi(t, \Phi(s, x^{-1}(0,u^2,\dots,u^n))) = \\ &= \Phi(t+s, x^{-1}(0,u^2,\dots,u^n)) = x^{-1}(t+s, u^2, \dots, u^n)\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$x^i \circ \Phi_t(q) = x^i \circ \Phi_t \circ x^{-1}(s,u^2,\dots,u^n) = \begin{cases} t+s & \text{si } i = 1 \\ u^i & \text{si } i \geq 2 \end{cases} \tag{3}$$

La igualdad anterior implica, para $|t| < \delta$ y $q \in V$,

$$\frac{\partial(x^i \circ \Phi_{-t})}{\partial x^j}\Big|_q = \delta^i_j \tag{4}$$

Para $|t| < \delta$ y $p' = \Phi_t(p)$ se tiene:

$$(\Phi_{-t})_{*p'}(Y(p')) = \sum_{i=1}^{n} (\Phi_{-t})_{*p'}(Y(p'))(x^i) . \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \tag{5}$$

donde,

$$(\Phi_{-t})_{*p'}(Y(p'))(x^i) = Y(p')(x^i \circ \Phi_{-t}) \tag{6}$$

y, por lo tanto,

$$(\Phi_{-t})_{*p'}(Y(p'))(x^i) = \sum_{j=1}^{n} \psi^j(p') . \frac{\partial(x^i \circ \Phi_{-t})}{\partial x^j}\Big|_{p'} \tag{7}$$

Siendo $p' = \Phi(t,p) = \Phi(t, x^{-1}(0)) = x^{-1}(t,0) \in V$ pues $|t| < \delta$, se obtiene, en virtud de (4), que (5) es equivalente a

$$(\Phi_{-t})_{*p'}(Y(p')) = \sum_{i=1}^{n} \psi^i(\Phi_t(p)).\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \tag{8}$$

Por definición de Z es

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(\psi^i \circ \Phi_t(p))\Big|_{t=0}.\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \tag{9}$$

Como $\psi^i \circ \Phi_t(p) = \psi^i \circ x^{-1}(t,0)$ si $|t| < \delta$, resulta

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi^i}{\partial x^1}\Big|_p.\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p = [X,Y](p) \tag{10}$$

* Caso b_3)

Para cada $n \in \mathbf{N}$, aplicando el caso anterior a p_n, se tiene que $[X,Y](p_n) = Z(p_n)$. Usando la continuidad de ambos miembros de esta igualdad y el hecho de que la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge a p, resulta $[X,Y](p) = Z(p)$.

Esto concluye la demostración del teorema.

Observación

Si $X \in X(M)$, queda definido un operador $L_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por $L_X Y = [X,Y]$, que se denomina la **derivada de Lie** de Y respecto de X.
Debido al teorema anterior, $L_X Y|_p$ es efectivamente una derivada.

Teorema 40

Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\Phi : W \to M$ el flujo de X y $\Psi : W' \to M$ el flujo de Y. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $[X,Y] = 0$ *"campo nulo"*

b) Para cada $p \in M$, existe un $\delta > 0$ y un entorno abierto V, de p, tal que $Y(\Phi_t(q)) = (\Phi_t)_{*q}(Y(q))$ si $|t| < \delta$ y $q \in V$.

c) Para cada $p \in M$, existe un $\varepsilon > 0$ y un abierto U entorno de p, tal que

c_1) $(-\varepsilon,\varepsilon) \times U \subset W \cap W'$, $(-\varepsilon,\varepsilon) \times \Phi\big((-\varepsilon,\varepsilon) \times U\big) \subset W \cap W'$, $(-\varepsilon,\varepsilon) \times \Psi\big((-\varepsilon,\varepsilon) \times U\big) \subset W \cap W'$

c_2) Si $t, s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ y $q \in U$, entonces $\Phi_t \circ \Psi_s(q) = \Psi_s \circ \Phi_t(q)$

DEMOSTRACIÓN:

- $a) \Rightarrow b)$

Sea $p \in M$; por ser W abierto en $\mathbb{R} \times M$, con $(0,p) \in W$, existe un $\varepsilon > 0$ y un abierto U de M, entorno de p, tal que $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \subset W$.
Además, como $\Phi : W \to M$ es continua y $\Phi(0,p) = p \in U$, existe un $0 < \delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y un abierto V de M, entorno de p, con $V \subset U$, tales que $\Phi\big((-\delta, \delta) \times V\big) \subset U$.

Sea $q \in V$ y $s, t \in (-\delta, \delta)$.
Por ser $(t,q) \in (-\delta,\delta) \times V \subset (-\varepsilon,\varepsilon) \times U \subset W$, se tiene que $t \in I_q$.
Siendo $\Phi\big((-\delta,\delta)\times V\big) \subset U$, es $\Phi(t,q) \in U$; luego, $(s, \Phi(t,q)) \in W$ y por lo tanto, $s \in I_{\Phi(t,q)}$.
Debido a la proposición 31, parte 2), se tiene que $s + t \in I_q$ y

$$\Phi(s+t, q) = \Phi(s, \Phi(t,q)) \tag{1}$$

o, equivalentemente, para $s, t \in I_q$ y $q \in V$, es

$$\Phi_{s+t}(q) = \Phi_s(\Phi_t(q)) \tag{2}$$

Sean ahora $t, s \in (-\delta, \delta)$ y $q \in V$, fijos.
Por definición de $Y_q(t+s)$ (ver observación precedente al teorema 39), es

$$Y_q(t+s) = (\Phi_{-(t+s)})_{*\Phi_{t+s}(q)}(Y(\Phi_{t+s}(q))) \tag{3}$$

Llamando $q' = \Phi_t(q)$ y debido a (2), en lugar de (3) podemos escribir

$$Y_q(t+s) = (\Phi_{-(t+s)})_{*\Phi_s(q')}(Y(\Phi_s(q'))) \tag{4}$$

Afirmamos que se verifica

$$(\Phi_{-(t+s)})_{*\Phi_s(q')} = (\Phi_{-t})_{*q'} \circ (\Phi_{-s})_{*\Phi_s(q')} \tag{5}$$

con lo cual, por (4), se obtiene

$$Y_q(t+s) = (\Phi_{-t})_{*q'}((\Phi_{-s})_{*\Phi_s(q')}(Y(\Phi_s(q'))) = (\Phi_{-t})_{*q'}(Y_{q'}(s)) \tag{6}$$

En efecto,

llamando $p' = \Phi_s(q')$, $t' = -s, s' = -t$, debemos verificar, reescribiendo la igualdad (5), que:

$$(\Phi_{s'+t'})_{*p'} = (\Phi_{s'})_{*q'} \circ (\Phi_{t'})_{*p'} \tag{5'}$$

De acuerdo con la proposición 31, parte $3\big)$, se tiene que $p' = \Phi_s(q') \in M_{-s} = M_{t'}$ y $\Phi(t', p') = \Phi_{-s}(p') = \Phi_{-s}(\Phi_s(q')) = q' = \Phi_t(q) \in M_{-t} = M_{s'}$
Debido a la misma proposición, parte $6\big)$, existe un abierto Ω de M, entorno de p', tal que $\Omega \subset M_{t'+s'}$, $\Omega \subset M_{t'}$, $\Phi_{t'}(\Omega) \subset M_{s'}$ y $\Phi_{s'+t'}|_\Omega = \Phi_{s'} \circ \Phi_{t'}|_\Omega$.
La igualdad (5') es ahora inmediata.
Volviendo a la igualdad (6), por ser $Y_q(t) = (\Phi_{-t})_{*q'}(Y(q'))$, resulta

$$Y_q(t+s) - Y_q(t) = (\Phi_{-t})_{*q'}(Y_{q'}(s)) - (\Phi_{-t})_{*q'}(Y(q')) = (\Phi_{-t})_{*q'}(Y_{q'}(s) - Y(q')) \qquad (7)$$

Luego,

$$\lim_{s\to 0} \frac{Y_q(t+s) - Y_q(t)}{s} = (\Phi_{-t})_{*q'}\left(\lim_{s\to 0} \frac{Y_{q'}(s) - Y(q')}{s}\right)$$

Siendo $[X,Y](q') = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{Y_{q'}(s) - Y(q')}{s}$, se obtiene que

$$\lim_{s\to 0} \frac{Y_q(t+s) - Y_q(t)}{s} = 0$$

Esto nos dice que la curva $Y_q : (-\delta, \delta) \to M_q$, para $q \in V$, satisface $\dfrac{dY_q}{dt}\Big|_t = 0$ si $|t| < \delta$.
Luego, $Y(q) = Y_q(0) = Y_q(t)$ si $|t| < \delta$.
Siendo $Y_q(t) = (\Phi_{-t})_{*\Phi_t(q)}(Y(\Phi_t(q)))$, se deduce b).

- $b) \Rightarrow c)$

Por hipótesis, existe un $\delta > 0$ y un abierto V, entorno de p, tal que

$$Y(\Phi_t(q)) = (\Phi_t)_{*q}(Y(q)) \qquad \text{si} \qquad |t| < \delta \quad \text{y} \quad q \in V \qquad (1)$$

Como $W \cap W'$ es un abierto de $\mathbb{R} \times M$ que contiene a $(0,p)$, achicando δ y V $\big($alrededor de $p\big)$, si fuera necesario, podemos suponer $(-\delta, \delta) \times V \subset W \cap W'$.
Además, por ser $\Phi : W \to M$ y $\Psi : W' \to M$ continuas, con $\Phi(0,p) = \Psi(0,p) = p$, existe un $0 < \varepsilon < \delta$ y un entorno abierto U , de p, con $U \subset V$, tales que $\Phi\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times U\big) \subset V$ y $\Psi\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times U\big) \subset V$.
Luego, ε y U satisfacen las propiedades de c_1)

Veamos que se cumple la propiedad c_2).
Sean $t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $q \in U$; luego $|t| < \delta$ y $\Psi_q(s) = \Psi(s,q) \in V$.
Debido a (1) se tiene:

$$Y(\Phi_t(\Psi_q(s))) = (\Phi_t)_{*\Psi_q(s)}(Y(\Psi_q(s))) = (\Phi_t)_{*\Psi_q(s)}(\dot{\Psi}_q(s)) = (\widehat{\Phi_t \circ \Psi_q})(s) \qquad (2)$$

La igualdad anterior nos dice que $\Phi_t \circ \Psi_q$ es una curva integral de Y que satisface $\Phi_t \circ \Psi_q(0) = \Phi_t(q)$. Por unicidad resulta $\Phi_t \circ \Psi_q(s) = \Psi_{\Phi_t(q)}(s)$, si $|s| < \varepsilon$ y $|t| < \varepsilon$.

En consecuencia, $\Phi_t \circ \Psi_s(q) = \Psi_s \circ \Phi_t(q)$ si $s, t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

- $c) \Rightarrow a)$

Sea $p \in M$ y mostremos que $[X,Y](p) = 0$.
Por hipótesis, existe un $\varepsilon > 0$ y un entorno abierto U de p, satisfaciendo las propiedades $c_1)$ y $c_2)$.
Para $|t| < \varepsilon$, fijo, sea $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ la curva $c(s) = \Phi_t \circ \Psi_s(p) = \Phi_t \circ \Psi_p(s)$.
Luego,

$$\dot{c}(s) = \dot{\widehat{\Phi_t \circ \Psi_p}}(s) = (\Phi_t)_{*\Psi_p(s)}(\dot{\Psi}_p(s)) = (\Phi_t)_{*\Psi_p(s)}(Y(\Psi_p(s)))$$

y por lo tanto,

$$\dot{c}(0) = (\Phi_t)_{*p}(Y(p)). \tag{1}$$

Por otro lado, $c(s) = \Phi_t \circ \Psi_s(p) = \Psi_s \circ \Phi_t(p) = \Psi_s(\Phi_t(p)) = \Psi_{\Phi_t(p)}(s)$; luego,

$$\dot{c}(0) = \dot{\Psi}_{\Phi_t(p)}(0) = Y(\Phi_t(p)) \tag{2}$$

Debido a (1) y (2), para $|t| < \varepsilon$ se tiene $(\Phi_t)_{*p}(Y(p)) = Y(\Phi_t(p))$ y, en consecuencia,

$$Y(p) = (\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)}(Y(\Phi_t(p))) = Y_p(t)$$

Por el teorema anterior resulta $[X,Y](p) = 0$.

NOTA
Como aplicación de lo anterior, se tiene la siguiente versión del **Teorema de Frobenius** que generaliza el teorema 27.

Teorema 41

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y sean $X_1, \ldots, X_m \in \mathfrak{X}(M)$, con $1 \leq m \leq n$, linealmente independientes en cada punto $p \in M$.
Son equivalentes las afirmaciones:

a) Para cada $p \in M$, existe una carta (U, x) de M, con $p \in U$, tal que si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, entonces $X_i|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ si $1 \leq i \leq m$.

b) $[X_i, X_j] = 0$ si $1 \leq i, j \leq m$

DEMOSTRACIÓN:

- $a) \Rightarrow b)$

Es la proposición 35.

- $b) \Rightarrow a)$

Si $m = 1$, es el teorema 27
Supongamos $m \geq 2$ y sea $\Phi^i : W_i \to M$ el flujo de X_i $(1 \leq i \leq m)$.
Fijado $p \in M$, sea $v_i = X_i(p)$; luego, por ser $v_1, \dots, v_m$ linealmente independientes, podemos completar a una base $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ de M_p. Por el ejercicio 22, podemos construir una carta (W, y), con $p \in W$, que satisface $y(p) = 0, y(W) = \mathbb{R}^n$ y $v_i = \dfrac{\partial}{\partial y^i}\Big|_p$ si $1 \leq i \leq n$.

De acuerdo con el teorema anterior, parte c), para $1 \leq i < j \leq m$ existe un $\varepsilon_{ij} > 0$ y un abierto U_{ij} de M con $p \in U_{ij}$, tales que

$$(-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}) \times U_{ij} \subset W_i \cap W_j \quad \text{y} \quad (-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}) \times \Phi^l\big((-\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}) \times U_{ij}\big) \subset W_i \cap W_j \qquad (1)$$

donde $l = i, j$.

$$\text{Si} \quad t, s \in (-\varepsilon_{ij}.\varepsilon_{ij}) \ \text{ y } \ q \in U_{ij}, \quad \text{entonces} \ \ \Phi_t^i \circ \Phi_s^j(q) = \Phi_s^j \circ \Phi_t^i(q) \qquad (2)$$

Sean: $\varepsilon_2 = \min\limits_{1 \leq i < j \leq m} \{\varepsilon_{ij}\}$, $U_2 = \bigcap\limits_{1 \leq i < j \leq m} U_{ij}$, $W = \bigcap\limits_{i=1}^{m} W_i$
Por (1) y (2) se tiene:

$$(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times U_2 \subset W \quad \text{y} \quad (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times \Phi^i\big((-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times U_2\big) \subset W \quad \text{si} \quad i = 1, \dots, m \quad (3)$$

$$\Phi_{t_1}^i \circ \Phi_{t_2}^j(q) = \Phi_{t_2}^j \circ \Phi_{t_1}^i(q) \quad \text{si} \quad t_1, t_2 \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \quad \text{y} \quad q \in U_2 \qquad (4)$$

Si $m = 2$, sea $0 < \delta < \varepsilon_2$ tal que $y^{-1}((-\delta, \delta)^n) \subset U$ y $f : (-\delta, \delta)^n \to M$ definida por

$$f(u^1, u^2, u^3, \dots, u^n) = \Phi_{u^1}^1 \circ \Phi_{u^2}^2(y^{-1}(0, 0, u^3, \dots, u^n)) \qquad \text{(D)}$$

Luego,

$$f(u^1, u^2, u^3, \dots, u^n) = \Phi_{u^2}^2 \circ \Phi_{u^1}^1(y^{-1}(0, 0, u^3, \dots, u^n)) \qquad \text{(D')}$$

Si $m \geq 3$, para cada $1 \leq i < j \leq m$, sea $F^{ij} : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)^2 \times U_2 \to M$ definida por

$$F^{ij}(t_1, t_2, q) = \Phi^i(t_1, \Phi^j(t_2, q)) = \Phi_{t_1}^i \circ \Phi_{t_2}^j(q) \qquad (5)$$

Por ser $F^{ij}(0,0,p)=p\in U_2$, existe un $0<\varepsilon_2^{ij}\le\varepsilon_2$ y un abierto U_2^{ij} de M, con $p\in U_2^{ij}$, tales que $F^{ij}\big((-\varepsilon_2^{ij},\varepsilon_2^{ij})^2\times U_2^{ij}\big)\subset U_2$.
Sea $\varepsilon_3=\min\limits_{1\le i<j\le m}\{\varepsilon_2^{ij}\}$ y $U_3=\bigcap\limits_{1\le i<j\le m}U_2^{ij}\subset U_2$

Por construcción de ε_3 y U_3 se cumple, en principio, que

$$\Phi^i\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times\Phi^j\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times U_3\big)\big)\subset U_2 \qquad \text{si} \qquad 1\le i<j\le m$$

Pero, de acuerdo con (4), para $i\neq j$ vale

$$\Phi^i\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times\Phi^j\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times U_3\big)\big)\subset U_2 \tag{6}$$

Debido a (3), para $i\neq j$ se cumple

$$(-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times\Phi^i\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times\Phi^j\big((-\varepsilon_3,\varepsilon_3)\times U_3\big)\big)\subset W \tag{7}$$

La igualdad anterior nos dice que cualquiera sea el subconjunto $i,j,k\in[1,\dots,m]$, con $i\neq j$, $i\neq k$, $j\neq k$ y cualesquiera sean $t_1,t_2,t_3\in(-\varepsilon_3,\varepsilon_3)$, está definida la función $\Phi^i_{t_1}\circ\Phi^j_{t_2}\circ\Phi^k_{t_3}:U_3\to M$, donde

$$\Phi^i_{t_1}\circ\Phi^j_{t_2}\circ\Phi^k_{t_3}(q)=\Phi^i\big(t_1,\Phi^j\big(t_2,\Phi^k(t_3,q)\big)\big)$$

Debido a (4) y (6) se cumple, para toda terna $1\le i<j<k\le m$, que $\Phi^i_{t_1}\circ\Phi^j_{t_2}\circ\Phi^k_{t_3}$ coincide con cualquier permutación entre ellos.
Si $m=3$, sea $0<\delta<\varepsilon_3$ tal que $y^{-1}\big((-\delta,\delta)^n\big)\subset U_3$ y sea $f:(-\delta,\delta)^n\to M$ definida por

$$f(u^1,u^2,u^3,u^4,\dots,u^n)=\Phi^1_{u^1}\circ\Phi^2_{u^2}\circ\Phi^3_{u^3}\big(y^{-1}(0,0,0,u^4,\dots,u^n)\big) \tag{D}$$

Luego,

$$f(u^1,u^2,u^3,u^4,\dots,u^n)=\Phi^{\sigma(1)}_{u^{\sigma(1)}}\circ\Phi^{\sigma(2)}_{u^{\sigma(2)}}\circ\Phi^{\sigma(3)}_{u^{\sigma(3)}}\big(y^{-1}(0,0,0,u^4,\dots,u^n)\big) \tag{D'}$$

para toda permutación $\sigma:[1,2,3]\to[1,2,3]$.
Si $m\ge 4$, para cada $1\le i<j<k\le m$ se define la función $F^{ijk}:(-\varepsilon_3,\varepsilon_3)^3\times U_3\to M$ por $F^{ijk}(t_1,t_2,t_3,q)=\Phi^i_{t_1}\circ\Phi^j_{t_2}\circ\Phi^k_{t_3}(q)$ y se procede como en el caso F^{ij}

En definitiva, esto nos dice que podemos construir un $\varepsilon_m>0$ y un abierto U_m de M, con $p\in U_m\subset U_{m-1}$, tales que si $t_1,\dots,t_m\in(-\varepsilon_m,\varepsilon_m)$ y $\sigma:[1,\dots,m]\to[1,\dots,m]$ es una permutación, la función $\Phi^{\sigma(1)}_{t_1}\circ\Phi^{\sigma(2)}_{t_2}\circ\dots\circ\Phi^{\sigma(m)}_{t_m}:U_m\to M$ está definida y

$$\Phi^1_{t_1}\circ\Phi^2_{t_2}\circ\dots\circ\Phi^m_{t_m}=\Phi^{\sigma(1)}_{t_{\sigma(1)}}\circ\Phi^{\sigma(2)}_{t_{\sigma(2)}}\circ\dots\circ\Phi^{\sigma(m)}_{t_{\sigma(m)}}$$

Sea $0 < \delta < \varepsilon_m$ tal que $y^{-1}\big((-\delta,\delta)^n\big) \subset U_m$ y $f : (-\delta,\delta)^n \to M$ definida por

$$f(u^1,\dots,u^m,u^{m+1},\dots,u^n) = \Phi^1_{u^1} \circ \dots \circ \Phi^m_{u^m}\big(y^{-1}(0,\dots,0,u^{m+1},\dots,u^n)\big) \qquad \text{(D)}$$

Luego,

$$f(u^1,\dots,u^m,u^{m+1},\dots,u^n) = \Phi^{\sigma(1)}_{u^{\sigma(1)}} \circ \dots \circ \Phi^{\sigma(m)}_{u^{\sigma(m)}}\big(y^{-1}(0,\dots,0,u^{m+1},\dots,u^n)\big) \qquad \text{(D')}$$

Si $u_0 = (u_0^1,\dots,u_0^n) \in (-\delta,\delta)^n$, para $1 \le i \le m$, sea

$$q_i = \Phi^1_{u_0^1} \circ \dots \circ \widehat{\Phi^i_{u_0^i}} \circ \dots \circ \Phi^m_{u_0^m}\big(y^{-1}(0,\dots,0,u_0^{m+1},\dots,u_0^n)\big)$$

donde el símbolo $\widehat{\ }$ sobre $\Phi^i_{u_0^i}$ indica que el mismo se omite.
Debido a (D'), para $|u^i| < \delta$, se cumple

$$f(u_0^1,\dots,u_0^{i-1},u^i,u_0^{i+1},\dots,u_0^n) = \Phi^i_{u^i}(q_i) = \Phi^i_{q_i}(u^i)$$

Luego, para $1 \le i \le m$, se tiene:

$$f_{*u_0}(D_i|_{u_0}) = \widehat{\dot{\Phi}^i_{q_i}}(u_0^i) = X_i\big(\Phi^i_{q_i}(u_0^i)\big) = X_i(f(u_0)) \qquad (8)$$

Además, $f(0) = y^{-1}(0) = p$ y si $1 \le j \le n-m$ y $|u^{m+j}| < \delta$, por (D), se tiene $f(0,\dots,0,0,\dots,u^{m+j},0,\dots,0) = y^{-1}(0,\dots,0,u^{m+j},0,\dots,0)$.
Luego,

$$f_{*0}(D_{m+j}|_0) = (y^{-1})_{*0}(D_{m+j}|_0) = \frac{\partial}{\partial y^{m+j}}\Big|_p = v_{m+j} \qquad (9)$$

Las igualdades (8) y (9), para $u_0 = 0$, nos dicen que $f_{*0} : \mathbb{R}^n_0 \to M_p$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existe un $0 < \varepsilon < \delta$, con $f\big((-\varepsilon,\varepsilon)^n\big) = U$ abierto en M, tal que $f : (-\varepsilon,\varepsilon)^n \to U$ es un difeomorfismo.

La carta (U,x), con $x = f^{-1}$, satisface lo pedido.
En efecto,

sea $q \in U$, con $q = f(u_0)$; luego, por (8), se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q = f_{*u_0}(D_i|_{u_0}) = X_i(f(u_0)) = X_i(q).$$

Fibrado Cotangente

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y, para cada $p \in M$, sea $M_p^* = \{\varphi : M_p \to \mathbb{R} \ / \ \varphi \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal}\}$ el epacio dual de M_p. Notar que, si $G \subset M$ es un abierto, con $p \in G$ y $f \in \mathcal{F}(G)$, entonces $df_p : M_p \to \mathbb{R}$, que está definida por $df_p(v) = v(f)$, es un elemento de M_p^*.

Sea $T^*M = \bigcup_{p\in M} M_p^*$ y $\Pi : T^*M \to M$ la proyección $\Pi(\gamma) = p$ si $\gamma \in M_p^*$.

Entonces, T^*M admite, de manera natural, una estructura diferenciable de dimensión $2n$, para la cual Π resulta diferenciable.

En efecto,

sea (U, x) una carta de M, con $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Siendo $x^i \in \mathcal{F}(U)$, resulta $dx_p^i \in M_p^*$, para cada $p \in U$. Como $dx_p^i(v) = v(x^i)$ si $v \in M_p$, entonces $dx_p^i(\frac{\partial}{\partial x^j}|_p) = \delta_j^i$; luego, $\{dx_p^1, \ldots, dx_p^n\}$ es la base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\right\}$.

Si $\gamma \in M_p^*$, es $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i . dx_p^i$, con $\gamma_i = \gamma(\frac{\partial}{\partial x^i}|_p)$.

Sea $T^*U = \bigcup_{p\in U} M_p^*$ y $\tilde{x} : T^*(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$\tilde{x}(\gamma) = (x^1(p), \ldots, x^n(p), \gamma(\frac{\partial}{\partial x^1}|_p), \ldots, \gamma(\frac{\partial}{\partial x^n}|_p)) \quad \text{si} \quad \gamma \in M_p^*$$

Luego, $\tilde{x}$ es un biyección.

Si $\mathcal{D}$ es la estructura diferenciable sobre M, sea $\mathcal{A} = \{(T^*U, \tilde{x}) \ / \ (U, x) \in \mathcal{D}\}$.

Luego, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable y la topología que define es Hausdorff y con base numerable. T^*M, con la estructura diferenciable generada por $\mathcal{A}$, se denomina el **fibrado cotangente** a M. Se deja como ejercicio verificar que Π resulta diferenciable.

1-formas

El concepto dual de campos de vectores es el de 1-formas.

Sea $G \subset M$ un abierto no vacío. Una función $\omega : G \to T^*M$, que satisface $\omega(p) \in M_p^*$ si $p \in G$, se denomina una **1-forma** sobre G.

El conjunto de las 1-formas sobre G constituye, con las operaciones naturales, un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Con $\mathfrak{X}^*(G)$ denotaremos al conjunto de todas las 1-formas sobre G que son diferenciables.

Como en el caso de campos de vectores $\left(\text{ver proposición } 21\right)$, se verifica

Proposición 42

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $\omega : G \to T^*M$, una 1-forma. Son equivalentes las afirmaciones:

a) $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$

b) Sea (U, x), con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M. Si para $p \in U$ es $\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p) dx_p^i$, entonces $\varphi_i \in \mathcal{F}(U)$ con $1 \leq i \leq n$.

EJEMPLOS

De acuerdo con la proposición anterior se tiene:

1. Sea (U, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M y sea $dx^i : U \to T^*M$ definida por $dx^i(p) = dx_p^i$. Entonces $dx^i \in \mathfrak{X}^*(U)$ si $1 \leq i \leq n$.

2. Sea $f \in \mathcal{F}(G)$ y $df : G \to T^*M$, definida por $df(p) = df_p$. Si (U, x) es una carta de M, con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, es $df(p) = df_p = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p) dx_p^i$, donde $\varphi_i(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p$.

   Luego, $df \in \mathfrak{X}^*(G)$ pues $\varphi_i \in \mathcal{F}(U)$ si $1 \leq i \leq n$.

Corolario 43

Sea M una variedad diferenciable y $G \subset M$ un abierto no vacío.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$, entonces $a.\omega : G \to T^*M$, definida por $(a.\omega)(p) = a.\omega(p)$, satisface que $a.\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$.

2. Si $\omega_1, \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(G)$, entonces $\omega_1 + \omega_2 : G \to T^*M$, definida por $(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$, satisface que $\omega_1 + \omega_2 \in \mathfrak{X}^*(G)$.

3. Si $f \in \mathcal{F}(G)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$, entonces $f.\omega : G \to T^*M$, definida por $(f.\omega)(p) = f(p).\omega(p)$, satisface que $f.\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$

DEMOSTRACIÓN:

Queda como ejercicio.

OBSERVACIÓN

Debido a *1.* y *2.* del corolario anterior, $\mathfrak{X}^*(G)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Si $\omega : G \to T^*M$ es una 1-forma, (U, x) es una carta de M, con $U \subset G$ y $\omega(p) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p) dx_p^i$

si $p \in U$, podemos escribir $\omega|_U = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . dx^i$, que denominamos la REPRESENTACIÓN de ω sobre U respecto de x. Si $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$, será $\varphi_i \in \mathcal{F}(U)$.

En lo que sigue, extendemos el concepto de campos de vectores y de 1-formas.

Tensores

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y $(r,s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Si $(r,s) \neq (0,0)$, definimos

$$\mathbf{T}^r_s(V) = \{T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{\text{r veces}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{s veces}} \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es multilineal}\}$$

Si $(r,s) = (0,0)$, definimos $\quad \mathbf{T}^0_0(V) = \mathbb{R}$

Luego, $\quad \mathbf{T}^0_1(V) = V^* \quad$ y $\quad \mathbf{T}^1_0(V) = V^{**} = V$

Con las operaciones naturales es $\mathbf{T}^r_s(V)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
Los elementos de $\mathbf{T}^r_s(V)$ se denominan **tensores del tipo** (r,s).
Hay una manera natural de construir tensores a partir de dos dados.

Sea $T \in \mathbf{T}^r_s(V)$, con $(r,s) \neq (0,0)$ y $U \in \mathbf{T}^l_m(V)$ con $(l,m) \neq (0,0)$.
Se define su **producto tensorial** $T \otimes U \in \mathbf{T}^{r+l}_{s+m}(V)$ por

$$T \otimes U(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r+l}, v_1, \ldots, v_{s+m}) = \\ = T(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, v_1, \ldots, v_s) \,.\, U(\gamma^{r+1}, \ldots, \gamma^{r+l}, v_{s+1}, \ldots, v_{s+m})$$

Ejercicio 47

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Verificar:

a) *El producto tensorial* **no** *es conmutativo, salvo el caso $T \otimes U$, con $T \in \mathbf{T}^0_s(V)$ y $U \in \mathbf{T}^r_0(V)$.*

b) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$

c) *Si* $a \in \mathbb{R}$, $(a.T) \otimes U = a.(T \otimes U) = T \otimes (a.U)$

d) *Si T_1, T_2 son del mismo tipo y U_1, U_2 son del mismo tipo, entonces* $(T_1 + T_2) \otimes U = T_1 \otimes U + T_2 \otimes U$ *y* $T \otimes (U_1 + U_2) = T \otimes U_1 + T \otimes U_2$

e) *Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de V y $\{e^1, \ldots, e^n\}$ su dual. Si $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in V^*$ y $v_1, \ldots, v_s \in V$, con*

$$\gamma^k = \sum_{i=1}^n b^k_i e^i \quad (1 \leq k \leq r) \qquad v_m = \sum_{j=1}^n a^j_m e_j \quad (1 \leq m \leq s)$$

se cumple

i) $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}\left(e^{j_1}, \ldots, e^{j_r}\right) = \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_r}_{i_r}$
$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}\left(\gamma^1, \ldots, \gamma^r\right) = b^1_{i_1} \ldots b^r_{i_r}$

ii) $e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}\right) = \delta^{j_1}_{i_1} \ldots \delta^{j_s}_{i_s}$
$e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\left(v_1, \ldots, v_s\right) = a^{j_1}_1 \ldots a^{j_s}_s$

iii) *Los tensores* $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}$, *con* $1 \leq i_k \leq n$, $1 \leq k \leq r$; $1 \leq j_m \leq n$, $1 \leq m \leq s$, *son linealmente independientes y, además*
$e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, v_1, \ldots, v_s) = b^1_{i_1} \ldots b^r_{i_r} \cdot a^{j_1}_1 \ldots a^{j_s}_s$

iv) *Si* $T \in \mathbf{T}^r_s(V)$, *entonces*

$$T(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, v_1, \ldots, v_s) = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \cdot b^1_{i_1} \ldots b^r_{i_r} \cdot a^{j_1}_1 \ldots a^{j_s}_s$$

donde $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} = T(e^{i_1}, \ldots, e^{i_r}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) \in \mathbb{R}$

v) $dim \mathbf{T}^r_s(V) = n^{r+s}$

vi) *Si* $\mathbf{T}^r_s(V)$, *entonces*

$$T = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \cdot e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1}, \ldots, e^{j_s}$$

NOMBRE: *La base* $\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_s}\}$ *de* $\mathbf{T}^r_s(V)$, *con* $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n$, *se denomina la* **base inducida** *por* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

EJERCICIO 48

Sea V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n *y* $s \geq 1$. *Sea*

$$\mathcal{L}^1_s(V) = \{T : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{\text{s veces}} \to V \ / \ T \text{ es multilineal}\}$$

a) *Probar que* $\mathcal{L}^1_s(V)$, *con las operaciones naturales, es un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n^{s+1}.

b) *Si* $T \in \mathcal{L}^1_s(V)$, *se define* $\overline{T} \in \mathbf{T}^1_s(V)$ *por* $\overline{T}(\gamma, v_1, \ldots, v_s) = \gamma(T(v_1, \ldots, v_s))$
Probar que la función $\Phi : \mathcal{L}^1_s(V) \to \mathbf{T}^1_s(V)$ *dada por* $\Phi(T) = \overline{T}$ *es un isomorfismo canónico.*

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n; luego, para cada $p \in M$, tenemos definido $\mathbf{T}^r_s(M) = \bigcup_{p \in M} \mathbf{T}^r_s(M_p)$ y $\Pi : \mathbf{T}^r_s(M) \to M$ la proyección $\Pi(T) = p$ si $T \in \mathbf{T}^r_s(M_p)$.

Luego, $\mathbf{T}^0_0(M) = \mathbb{R}$ $\quad \mathbf{T}^1_0(M) = TM$ $\quad \mathbf{T}^0_1(M) = T^*M$

Si $(r,s) \neq (0,0)$, el conjunto $\mathbf{T}^r_s(M)$ admite, de manera natural, una estructura diferenciable de dimensión $n + n^{r+s}$, para la cual Π resulta diferenciable.

Si (U, x) es una carta de M, con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, para cada $p \in U$ se tiene, por el ejercicio 47 que

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes_p \ldots \otimes_p \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_p \otimes_p dx^{j_1}_p \otimes_p \ldots \otimes_p dx^{j_s}_p$$

con $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s = 1, \ldots, n$, es base de $\mathbf{T}^r_s(M_p)$ y si $T \in \mathbf{T}^r_s(M_p)$, se tiene que

$$T = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes_p \ldots \otimes_p \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_p \otimes_p dx^{j_1}_p \otimes_p \ldots \otimes_p dx^{j_s}_p$$

donde,

$$T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = T\Big(dx^{i_1}_p, \dots, dx^{i_r}_p, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\Big|_p\Big)$$

Sea $\mathbf{T}^r_s(U) = \bigcup_{p\in M} \mathbf{T}^r_s(M_p)$ y $\tilde{x} : \mathbf{T}^r_s(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^{n^{r+s}}$ definida por $\tilde{x}(T) = \Big(x(p), \Big(T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\Big)_{1\le i_k, j_m \le n}\Big)$, si $T \in \mathbf{T}^r_s(M_p)$ y donde se supone que los $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$, con $1 \le i_k, j_m \le n$, se han dado en un cierto orden.

Si $\mathcal{D}$ es la estructura diferenciable sobre M, sea

$$\mathcal{A} = \Big\{\big(\mathbf{T}^r_s(U), \tilde{x}\big) \;/\; (U,x) \in \mathcal{D}\Big\}$$

Luego, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable y la topología que define es Hausdorff y con base numerable.
La estructura diferenciable natural sobre $\mathbf{T}^r_s(M)$ es la generada por $\mathcal{A}$. Verificar que Π es diferenciable.

Sea $G \subset M$ un abierto no vacío y $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Un **campo tensorial** (abreviadamente un **tensor**) del tipo (r,s) sobre G es una función $T : G \to \mathbf{T}^r_s(G)$ que satisface $T(p) \in \mathbf{T}^r_s(M_p)$, si $p \in G$.

El conjunto de tensores del tipo (r,s), con las operaciones naturales, constituye un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Con $\mathfrak{X}^r_s(G)$ denotaremos al conjunto de los tensores del tipo (r,s) sobre G que son diferenciables.
Por construcción, resulta $\mathfrak{X}^0_0(G) = \mathcal{F}(G)$, $\mathfrak{X}^1_0(G) = \mathfrak{X}(G)$ y $\mathfrak{X}^0_1(G) = \mathfrak{X}^*(G)$.

Como en los casos $\mathfrak{X}(G)$ y $\mathfrak{X}^*(G)$, aquí también se verifica:

Proposición 44

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $T : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$ un tensor del tipo (r,s) sobre G. Son equivalentes las afirmaciones:

a) $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$

b) Sea (U,x), con $U \subset G$ y $x = (x^1, \dots, x^n)$, una carta de M. Si, para $p \in U$, es

$$T(p) = \sum_{1\le i_k, j_m \le n} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}(p).\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\Big|_p \otimes_p \dots \otimes_p \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\Big|_p \otimes_p dx^{j_1}_p \otimes_p \dots \otimes_p dx^{j_s}_p$$

entonces $T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} \in \mathcal{F}(U)$, para $1 \le i_k, j_m \le n$

Demostración:

Queda como ejercicio.

Definición

Sean $T : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$ *y* $U : G \to \mathbf{T}^l_m(M)$ *tensores, con* $(r,s) \neq (0,0)$ *y* $(l,m) \neq (0,0)$. *Se define su* **producto tensorial** *por*

$$(T \otimes U)(p) = T(p) \otimes_p U(p)$$

Luego, $T \otimes U : G \to \mathbf{T}^{r+l}_{s+m}(M)$ *es un tensor.*

Corolario 45

Sea M *un variedad diferenciable y* $G \subset M$ *un abierto no vacío.*

1. *Si* $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$ *y* $U \in \mathfrak{X}^l_m(G)$ *con* $(r,s) \neq (0,0)$ *y* $(l,m) \neq (0,0)$, *entonces* $T \otimes U \in \mathfrak{X}^{r+l}_{s+m}(G)$.
2. *Si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, *entonces* $a.T : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$, *definida por* $(a.T)(p) = a.T(p)$, *satisface que* $a.T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$
3. *Si* $T_1, T_2 \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, *entonces* $T_1 + T_2 : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$, *definida por* $(T_1 + T_2)(p) = T_1(p) + T_2(p)$, *satisface que* $T_1 + T_2 \in \mathfrak{X}^r_s(G)$.
4. *Si* $f \in \mathcal{F}(G)$ *y* $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, *entonces* $f.T : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$, *definida por* $(f.T)(p) = f(p).T(p)$, *satisface que* $f.T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$.

Observación

Debido a *2.* y *3.* del corolario anterior, $\mathfrak{X}^r_s(G)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea (U, x) una carta de M, con $U \subset G$ y $x = (x^1, \dots, x^n)$. De acuerdo con el corolario anterior, parte *1.*, para $1 \leq i_k, j_m \leq n$, con $1 \leq k \leq r$ y $1 \leq m \leq s$, se verifica que

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \in \mathfrak{X}^r_s(U)$$

Si $T : G \to \mathbf{T}^r_s(M)$ es un tensor, para $p \in U$, es

$$T(p) = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(p) \cdot \Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}\Big)(p)$$

Luego,

$$T|_U = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

que se denomina la representación de T sobre U, respecto de x.

Si $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, entonces $T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \in \mathcal{F}(U)$.

EJERCICIO 49

Sea M un variedad diferenciable y $G \subset M$ un abierto no vacío. Verificar:

a) Si $f \in \mathcal{F}(G)$, $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$ y $U \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, entonces

$$(f.T)\otimes U = f.(T\otimes U) = T\otimes(f.U)$$

b) Si T_1, T_2 son del mismo tipo y U_1, U_2 son del mismo tipo, entonces

$$(T_1+T_2)\otimes U = T_1\otimes U + T_2\otimes U \text{ y } T\otimes(U_1+U_2) = T\otimes U_1 + T\otimes U_2$$

c) El producto tensorial $\otimes$ es asociativo.

Tensores Alternados

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Para $k \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{S}_k$ el conjunto de las permutaciones de $[1,\ldots,k]$.
Si $T \in \mathbf{T}^0_k(V)$ y $\sigma \in \mathcal{S}_k$, sea $T^\sigma \in \mathbf{T}^0_k(V)$ definido por $T^\sigma(v_1,\ldots,v_n) = T(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k)})$ si $v_1,\ldots,v_k \in V$.

Diremos que $T \in \mathbf{T}^0_k(V)$ es **alternado** si para todo $\sigma \in \mathcal{S}_k$ se cumple que $T = sg(\sigma).T^\sigma$.
Al conjunto de elementos alternados de $\mathbf{T}^0_k(V)$ lo denotaremos con $\Lambda^k(V)$.
Luego, $\Lambda^1(V) = \mathbf{T}^0_1(V) = V^*$.

EJERCICIO 50

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n.

a) Mostrar que $\Lambda^k(V)$ es un subespacio de $\mathbf{T}^0_k(V)$.

b) Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

(1) $T \in \Lambda^k(V)$

(2) Si $v_1,\ldots,v_k \in V$, $1 \le i < j \le n$, entonces

$$T(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k) = -T(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k)$$

(3) Si $v_1,\ldots,v_k \in V$ y $v_i = v_j$, para algún $1 \le i < j \le n$, entonces $T(v_1,\ldots,v_k) = 0$

c) Deducir de b) que $\Lambda^k(V) = 0$ si $k > n$.

EJERCICIO 51

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Si $k \in \mathbb{N}$, se define la **alternación** $\mathbf{A} : \mathbf{T}^0_k(V) \to \mathbf{T}^0_k(V)$ *por*

$$\mathbf{A}(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_k} sg(\sigma).T^\sigma$$

Probar:

a) $\mathbf{A}$ *es lineal*

b) *Si* $T \in \mathbf{T}^0_k(V)$, *entonces* $\mathbf{A}(T) \in \Lambda^k(V)$.

c) *Si* $T \in \Lambda^k(V)$, *entonces* $\mathbf{A}(T) = T$

d) *Si* $T \in \mathbf{T}^0_k(V)$, *entonces* $\mathbf{A}(\mathbf{A}(T)) = \mathbf{A}(T)$

e) *Si* $S \in \mathbf{T}^0_k(V)$ *y* $T \in \mathbf{T}^0_l(V)$, *con* $\mathbf{A}(S) = 0$, *entonces* $\mathbf{A}(S \otimes T) = \mathbf{A}(T \otimes S) = 0$

f) *Si* $S \in \Lambda^k(V)$, $T \in \Lambda^l(V)$ *y* $U \in \Lambda^m(V)$, *entonces*

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}(S \otimes T) \otimes U) = \mathbf{A}(S \otimes \mathbf{A}(T \otimes U)) = \mathbf{A}(S \otimes T \otimes U)$$

NOTA: $\mathbf{A}(T)$ se denomina el **alternado** de T.

EJERCICIO 52

Sea V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n. *Si* $S \in \Lambda^k(V)$ *y* $T \in \Lambda^l(V)$, *se define su* **producto exterior** $S \wedge T \in \Lambda^{k+l}(V)$ *por*

$$S \wedge T = \frac{(k+l)!}{k!\ l!} \ . \ \mathbf{A}(S \otimes T)$$

Verificar:

a) $(S_1 + S_2) \wedge T = S_1 \wedge T + S_2 \wedge T \qquad S \wedge (T_1 + T_2) = S \wedge T_1 + S \wedge T_2$

b) $(a.S) \wedge T = a.(S \wedge T) = S \wedge (a.T)$, *si* $a \in \mathbb{R}$

c) $S \wedge T = (-1)^{k.l} T \wedge S$

d) *Si* $U \in \Lambda^m(V)$, *entonces*

$$(S \wedge T) \wedge U = S \wedge (T \wedge U) = \frac{(k+l+m)!}{k!\ l!\ m!} \ . \ \mathbf{A}(S \otimes T \otimes U)$$

EJERCICIO 53

Analizar la validez de la siguiente afirmación

"$\alpha \wedge \alpha = 0$ *para todo* $\alpha \in \Lambda^k(V)$"

EJERCICIO 54

Sea V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de* V *y* $\{e^1, \ldots, e^n\}$, *la base dual. Sean* $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ *y* $1 \leq k \leq n$. *Probar:*

a) $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k} = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_k} sg(\sigma) \ . \ e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\sigma(k)}}$

b) Sean $v_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_i^j \ . \ e_j$, con $1 \leq i \leq k$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^1 & \cdots & a_k^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n} \qquad , \qquad A_{i_1 \ldots i_k} = \begin{pmatrix} a_1^{i_1} & \cdots & a_1^{i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_k^{i_1} & \cdots & a_k^{i_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

entonces $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}(v_1, \ldots, v_k) = det\big(A_{i_1 \ldots i_k}\big)$

c) *Si* $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$, *entonces*

$$e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}\big(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}\big) = \delta^{i_1}_{j_1} \ldots \delta^{i_k}_{j_k}$$

d) *Si* $k = n$, *entonces* $e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(e_1, \ldots, e_n) = 1$

e) *Si* $v_i = \sum_{j=1}^{n} a^j_i \,.\, e_j$, *con* $1 \leq i \leq n$, *entonces*

$$e^1 \wedge \ldots \wedge e^n(v_1, \ldots, v_n) = det\big(a^j_i\big)$$

EJERCICIO 55

Sea V *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial de dimensión* n, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base de* V *y* $\{e^1, \ldots, e^n\}$ *la base dual. Deducir de los ejercicios anteriores que si* $1 \leq k \leq n$, *entonces* $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}$ *es una base de* $\Lambda^k(V)$.

En particular, se obtiene que $dim\, \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$

EJERCICIO 56

Sean V *y* W $\mathbb{R}$*-espacios vectoriales de dimensión finita y* $f : V \longrightarrow W$ *lineal. Si* $k \geq 1$, *se define la* **adjunta** *de* f, $f^* : \Lambda^k(W) \to \Lambda^k(V)$ *por* $f^*(\omega)(v_1, \ldots, v_k) = \omega\big(f(v_1), \ldots, f(v_k)\big)$

a) *Verificar que* f^* *es lineal*

b) *Si* $\omega \in \Lambda^k(W)$, $\eta \in \Lambda^l(W)$, *probar que*

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\eta)$$

c) *Si* $V = W$, $dim\, V = n$, *mostrar que para todo* $\omega \in \Lambda^n(V)$ *se cumple que:* $f^*(\omega) = det(f).\omega$.

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n; luego, para cada $p \in M$ tenemos definido $\Lambda^k(M_p)$ si $1 \leq k \leq n$ y el producto exterior $\wedge_p$.

Sea $\Lambda^k(M) = \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(M_p)$ y $\Pi : \Lambda^k(M) \to M$, la proyección $\Pi(\omega) = p$ si $\omega \in \Lambda^k(M_p)$.

Luego, $\Lambda^1(M) = T^*M$.

El conjunto $\Lambda^k(M)$ admite, de manera natural, una estructura diferenciable de dimensión $n + \binom{n}{k}$, para la cual Π resulta diferenciable.

Si (U, x) es una carta de M, con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, se tiene, por el ejercicio 55, que $dx^{i_1}_p \wedge_p \ldots \wedge_p dx^{i_k}_p$, con $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, es base de $\Lambda^k(M_p)$ y si $\omega \in \Lambda^k(M_p)$ es

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1}_p \wedge_p \ldots \wedge_p dx^{i_k}_p$$

donde $\omega_{i_1 \ldots i_k} = \omega\Big(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\big|_p\Big)$

Sea $\Lambda^k(U) = \bigcup_{p\in U} \Lambda^k(M_p)$ y $\tilde{x} : \Lambda^k(U) \to x(U) \times \mathbb{R}^{n+\binom{n}{k}}$ definida por $\tilde{x}(\omega) = \Big(x(p), (\omega_{i_1\ldots i_k})_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\Big)$ si $\omega \in \Lambda^k(M_p)$ y donde se supone que los $\omega_{i_1\ldots i_k}$, con $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, se han dado en un cierto orden.

Si $\mathcal{D}$ es la estructura diferenciable sobre M, sea

$$\mathcal{A} = \left\{ (\Lambda^k(U), \tilde{x}) \ / \ (U, x) \in \mathcal{D} \right\}$$

Luego, $\mathcal{A}$ es un atlas diferenciable y la topología que define es Hausdorff y con base numerable.
La estructura diferenciable natural sobre $\Lambda^k(M)$ es la generada por $\mathcal{A}$. Dejamos como ejercicio verificar que Π es diferenciable y que $\Lambda^k(M)$ resulta una subvariedad sumergida de $\mathbf{T}^0_k(M)$.

Para $p \in M$, convenimos en definir $\Lambda^0(M_p) = \mathbb{R}$; luego, si $k \ge 0$, se tiene que $\Lambda^k(M_p) \subset \mathbf{T}^0_k(M_p)$, con $\Lambda^0(M_p) = \mathbf{T}^0_0(M_p) = \mathbb{R}$ y $\Lambda^k(M_p) = 0$ si $k > n$.

k-formas

Sea $G \subset M$ un abierto no vacío y $k \ge 0$.

Una **k-forma** sobre G es un tensor $\omega : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$ que satisface $\omega(p) \in \Lambda^k(M_p)$ si $p \in G$. El conjunto de las k-formas sobre G, con las operaciones naturales, constituye un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Con $\Omega^k(G)$ denotaremos al conjunto de las k-formas sobre G que son diferenciables.
Por construcción resulta : $\Omega^0(G) = \mathcal{F}(G)$, $\Omega^1(G) = \mathfrak{X}^*(G)$ y $\Omega^k(G) = 0$ si $k > n$.

Si $1 \le k \le n$, $\Omega^k(G)$ coincide con el conjunto de las funciones diferenciables $\omega : G \to \Lambda^k(M)$ que satisfacen $\omega(p) \in \Lambda^k(M_p)$ si $\mathbf{p} \in G$.
Como en el caso de los tensores, se tiene

Proposición 46

Sea M un variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $\Omega : G \to \Lambda^k(M)$, con $1 \le k \le n$, una k-forma. Son equivalentes las afirmaciones:

a) $\omega \in \Omega^k(G)$

b) Sea (U, x), con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M. Si para $p \in U$ es

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \omega_{i_1\ldots i_k}(p) dx_p^{i_1} \wedge_p \ldots \wedge_p dx_p^{i_k}$$

entonces $\omega_{i_1\ldots i_k} \in \mathcal{F}(U)$, para $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$.

DEMOSTRACIÓN:

Queda como ejercicio.

DEFINICIÓN

Sea $\omega : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$ una k-forma, con $k \geq 1$ y $\theta : G \to \mathbf{T}^0_l(G)$ una l-forma, con $l \geq 1$. Se define su **producto exterior** *por*

$$(\omega \wedge \theta)(p) = \omega(p) \wedge_p \theta(p)$$

Luego, $\omega \wedge \theta : G \to \mathbf{T}^0_{k+l}(M)$ es una (k+l)-forma

Corolario 47

Sea M una variedad diferenciable y $G \subset M$ un abierto no vacío.

1. *Si $\omega \in \Omega^k(G)$ y $\theta \in \Omega^l(G)$, con $k, l \geq 1$; entonces $\omega \wedge \theta \in \Omega^{k+l}(G)$*
2. *Si $a \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega^k(G)$, entonces $a.\omega : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$, definida por $(a.\omega)(p) = a.\omega(p)$, satisface que $a.\omega \in \Omega^k(G)$*
3. *Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(G)$, entonces $\omega_1 + \omega_2 : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$, definida por $(\omega_1 + \omega_2)(p) = \omega_1(p) + \omega_2(p)$, satisface que $\omega_1 + \omega_2 \in \Omega^k(G)$*
4. *Si $f \in \mathcal{F}(G)$ y $\omega \in \Omega^k(G)$, entonces $f.\omega : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$, definida por $(f.\omega)(p) = f(p).\omega(p)$, satisface que $f.\omega \in \Omega^k(G)$.*

OBSERVACIÓN

Debido a *2.* y *3.* del corolario anterior, $\Omega^k(G)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Sea (U, x) una carta de M, con $U \subset G$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$. De acuerdo con el corolario anterior, parte *1.*, para $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, se verifica que $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(U)$.

Si $\omega : G \to \mathbf{T}^0_k(M)$ es una k-forma, para $p \in U$, es

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1\ldots i_k}(p)\big(dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}\big)(p)$$

Luego,

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1\ldots i_k} \,.\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

que se denomina la REPRESENTACIÓN de ω sobre U, respecto de x.

EJERCICIO 57

Sea M una variedad diferenciable y $G \subset M$ un abierto no vacío. Si $\omega, \omega_i \in \Omega^k(G)$; $\theta, \theta_i \in \Omega^l(G)$; $\eta \in \Omega^m(G)$ y $f \in \mathcal{F}(G)$, verificar que:

a) $(f.\omega) \wedge \theta = f.(\omega \wedge \theta) = \omega \wedge (f.\theta)$

b) $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta = \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta \quad ; \quad \omega \wedge (\theta_1 + \theta_2) = \omega \wedge \theta_1 + \omega \wedge \theta_2$

c) $\omega \wedge \theta = (-1)^{k.l} \theta \wedge \omega$

d) $(\omega \wedge \theta) \wedge \eta = \omega \wedge (\theta \wedge \eta)$

DEFINICIÓN

Sean M y N variedades diferenciables y $f : N \to M$ una función diferenciable. Para $k \geq 0$, queda construída una función $f^* : \mathfrak{X}_k^0(M) \to \mathfrak{X}_k^0(M)$ del siguiente modo:

⋆ *Si $k = 0$, es $\mathfrak{X}_0^0(M) = \mathcal{F}(M)$ y $\mathfrak{X}_0^0(N) = \mathcal{F}(N)$. Luego, para $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ se define*

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

NOTA: $f^*(\varphi) \in \mathcal{F}(N)$

⋆ *Si $k \geq 1$, para $T \in \mathfrak{X}_k^0(M)$, $p \in N$ y $v_1, \ldots, v_k \in N_p$, se define*

$$f^*(T)(p)(v_1, \ldots, v_k) = T(f(p))\big(f_{*p}(v_1), \ldots, f_{*p}(v_k)\big)$$

NOTA: $f^*(T) \in \mathfrak{X}_k^0(N)$

En particular, si $T \in \Omega^k(M)$ resulta $f^*(T) \in \Omega^k(N)$.

Las funciones $f^* : \mathfrak{X}_k^0(M) \to \mathfrak{X}_k^0(N)$ o $f^* : \Omega^k(M) \to \Omega^k(N)$ se denominan, indistintamente, la **adjunta** *de f.*

EJERCICIO 58

Sea $f : N \to M$ una función diferenciable. Probar que f^* satisface:

a) Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$, entonces $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$

b) Si $g \in \mathcal{F}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces $f^*(g.\omega) = g \circ f \;.\; f^*(\omega)$

c) Si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\theta \in \Omega^l(M)$, entonces $f^*(\omega \wedge \theta) = f^*(\omega) \wedge f^*(\theta)$

EJERCICIO 59

Sean A y B abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f = (f^1, \ldots, f^n) : A \to B$ una función diferenciable. Probar:

a) $f^*(du^i) = df^i = \sum_{j=1}^{n} D_j f^i \;.\; du^j$

b) Si $g \in \mathcal{F}(B)$, entonces

$$f^*(g \;.\; du^1 \wedge \ldots \wedge du^n) = g \circ f \;.\; det\big(D_j f^i\big) \;.\; du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$$

Funciones $\mathcal{F}(M)$-multilineales

Hay una manera sencilla y cómoda de interpretar a los tensores diferenciables que permite operar con ellos de manera algebraica.

En lo que sigue, sea M una variedad diferenciable de dimensión n y consideremos los espacios $\mathcal{F}(M)$, $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathfrak{X}^*(M)$.

Una función $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ se dice que es **$\mathcal{F}(M)$-lineal**, si $T(f.X + gY) = f.T(X) + g.T(Y)$ para $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Por ejemplo, si $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ y definimos $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ por $T(X)(p) = \omega(p)(X(p))$ si $p \in M$.

Una función $T : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathcal{F}(M)$ se dice que es **$\mathcal{F}(M)$-lineal**, si $T(f.\omega + g.\theta) = f.T(\omega) + g.T(\theta)$ para $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y $\omega, \theta \in \mathfrak{X}^*(M)$. Por ejemplo, si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y definimos $T : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathcal{F}(M)$ por $T(\omega)(p) = \omega(p)(X(p))$ si $p \in M$.

En general, si $(r, s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $(r, s) \neq (0, 0)$, una función

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{\text{r veces}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{s veces}} \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

se dice **$\mathcal{F}(M)$-multilineal** si es $\mathcal{F}(M)$-lineal respecto de cada una de sus variables.

Es claro que $\mathcal{F}(M)$-multilineal implica $\mathbb{R}$-multilineal.

La importancia de dichas funciones radica en el siguiente resultado.

Teorema 48

Sea $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $(r, s) \neq (0, 0)$ y

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{\text{r veces}} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{s veces}} \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

una función $\mathbb{R}$-multineal. Son equivalentes las afirmaciones:

a) T es $\mathcal{F}(M)$-multilineal

b) Sean $\theta^1, \ldots, \theta^r, \bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_s, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s \in \mathfrak{X}(M)$. Si para algún $p \in M$ se verifica $\theta^i(p) = \bar{\theta}^i(p)$, con $1 \leq i \leq r$ y $X_i(p) = \bar{X}_i(p)$, con $1 \leq i \leq s$, entonces

$$T(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T(\bar{\theta}^1, \ldots, \bar{\theta}^r, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s)(p)$$

DEMOSTRACIÓN:

- $a) \Rightarrow b)$

Para fijar ideas, supongamos que $r = s = 1$.
Sean $\theta, \bar{\theta} \in \mathfrak{X}^*(M)$; $X, \bar{X} \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$ tales que $\theta(p) = \bar{\theta}(p)$ y $X(p) = \bar{X}(p)$. Debemos mostrar que $T(\theta, X)(p) = T(\bar{\theta}, \bar{X})(p)$.

Sea (U, x) una carta de M, con $p \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$.
Debido al lema 5, podemos construir una $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\varphi(p) = 1$ y $sop(\varphi) \subset U$.
Para $1 \leq i \leq n$, construimos $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^i \in \mathfrak{X}^*(M)$ del siguiente modo:

$$X_i(q) = \varphi(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \quad \text{si} \quad q \in U \qquad , \qquad X_i(q) = 0 \quad \text{si} \quad q \notin U$$

$$\theta^i(q) = \varphi(q) \;.\; dx^i_q \quad \text{si} \quad q \in U \qquad , \qquad \theta^i(q) = 0 \quad \text{si} \quad q \notin U$$

Dado que para cada $q \in U$ se tiene:

$$X(q) = \sum_{i=1}^{n} X(q)(x^i) \;.\; \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \qquad , \qquad \theta(q) = \sum_{i=1}^{n} \theta(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \right) \;.\; dx^i_q$$

si definimos $\psi^i, \gamma_i \in \mathcal{F}(M)$ por

$$\psi^i(q) = \varphi(q) \;.\; X(q)(x^i) \quad \text{si} \quad q \in U \qquad , \qquad \psi^i(q) = 0 \quad \text{si} \quad q \notin U$$

$$\gamma_i(q) = \varphi(q) \;.\; \theta(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_q \right) \quad \text{si} \quad q \in U \qquad , \qquad \gamma_i(q) = 0 \quad \text{si} \quad q \notin U$$

obtenemos las siguientes igualdades sobre M

$$\varphi^2 .\, X = \sum_{i=1}^{n} \psi^i .\, X_i \qquad , \qquad \varphi^2 .\, \theta = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \;.\; \theta^j$$

Como $\varphi(p) = 1$, podemos escribir

$$T(\theta, X)(p) = \varphi^4(p) \;.\; T(\theta, X)(p) = (\varphi^4 .\, T(\theta, X))(p)$$

Ahora bien, como T es $\mathcal{F}(M)$-bilineal, se tiene:

$$\varphi^4 .\, T(\theta, X) = T(\varphi^2 .\, \theta, \varphi^2 .\, X) = T\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \;.\; \theta^j, \sum_{i=1}^{n} \psi^i .\, X_i \right) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j \;.\; \psi^i .\, T(\theta^j, X_i)$$

En consecuencia,

$$T(\theta, X)(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_j(p) \; . \; \psi^i(p) \; . \; T(\theta^j, X_i)(p) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \theta(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \right) \; . \; X(p)(x^i) \; . \; T(\theta^j, X_i)(p)$$

Análogamente se deduce que

$$T(\bar{\theta}, \bar{X})(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{\theta}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p \right) \; . \; \bar{X}(p)(x^i) \; . \; T(\theta^j, X_i)(p)$$

Por ser $\theta(p) = \bar{\theta}(p)$ y $X(p) = \bar{X}(p)$, se obtiene que $T(\theta, X)(p) = T(\bar{\theta}, \bar{X})(p)$.

- $b) \Rightarrow a)$

Para fijar ideas, supongamos que $r = s = 1$.

Por hipótesis sabemos que T es $\mathbb{R}$-bilineal; luego, para $f \in \mathcal{F}(M)$, $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$ es suficiente verificar que se cumple:

$$T(f \; . \; \theta, X) = f \; . \; T(\theta, X) \qquad \text{y} \qquad T(\theta, f \; . \; X) = f \; . \; T(\theta, X)$$

Si $p \in M$, sea $\lambda = f(p)$ y $\bar{\theta} = \lambda \; . \; \theta$; luego, $\bar{\theta}(p) = (f \; . \; \theta)(p)$.
La hipótesis b) nos dice, entonces, que $T(f \; . \; \theta, X)(p) = T(\bar{\theta}, X)(p)$ o, equivalentemente, $T(f \; . \; \theta, X)(p) = T(\lambda \; . \; \theta, X)(p)$.
Como T es $\mathbb{R}$-lineal respecto de la primera variable, resulta

$$\begin{aligned} T(f \; . \; \theta, X)(p) &= T(\lambda \; . \; \theta, X)(p) = (\lambda \; . \; T(\theta, X))(p) = \lambda \; . \; T(\theta, X)(p) \\ &= f(p) \; . \; T(\theta, X)(p) = (f \; . \; T(\theta, X))(p) \end{aligned}$$

Siendo p arbitrario, se concluye que $T(f \; . \; \theta, X) = f \; . \; T(\theta, X)$.

Análogamente se comprueba que $T(\theta, f \; . \; X) = f \; . \; T(\theta, X)$.

EJERCICIO 60

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $p \in M$, $v \in M_p$ y $\gamma \in M_p^*$. Probar que existen $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tales que $X(p) = v$ y $\theta(p) = \gamma$.

Sugerencia: Utilizar el lema 5.

EJERCICIO 61

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, W un abierto no vacío de M, $Z \in \mathfrak{X}(W)$ y $\omega \in \mathfrak{X}^*(W)$. Si $p \in W$, probar que existe un abierto U de M, con $p \in U \subset W$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ tales que $Z|_U = X|_U$ y $\omega|_U = \theta|_U$.

Sugerencia: Utilizar el corolario 6.

NOTACIÓN

Para abreviar, si $r, s \geq 1$, escribimos

$$\mathfrak{X}^*(M)^r = \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{\text{r veces}} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{X}(M)^s = \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M)}_{\text{s veces}}$$

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $(r, s) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con $(r, s) \neq (0, 0)$.

El conjunto de las funciones $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ que son $\mathcal{F}(M)$- multilineales, constituye un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con las operaciones naturales.

Corolario 49

$\mathfrak{X}^r_s(M)$ es canónicamente isomorfo al conjunto de las funciones $\mathcal{F}(M)$-multilineales $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$.

DEMOSTRACIÓN:

Si $T \in \mathfrak{X}^r_s(M)$ se construye la función $\bar{T} : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ definiendo, para $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$, $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ y $p \in M$

$$\bar{T}(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T(p)(\theta^1(p), \ldots, \theta^r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p))$$

Luego, $\bar{T}(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \in \mathcal{F}(M)$ pues T es diferenciable.
La $\mathcal{F}(M)$-multilinealidad se $\bar{T}$ se debe a que $T(p)$ es $\mathbb{R}$-multilineal, para cada $p \in M$.

Recíprocamente, si $\bar{T} : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ es una función $\mathcal{F}(M)$-multilineal, para cada $p \in M$, definimos

$$T(p) : \underbrace{M_p^* \times \ldots \times M_p^*}_{\text{r veces}} \times \underbrace{M_p \times \ldots \times M_p}_{\text{s veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

del siguiente modo:

Si $\gamma^1, \ldots, \gamma^r \in M_p^*$ y $v_1, \ldots, v_s \in M_p$, sean $\theta^1, \ldots, \theta^r \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $\theta^i(p) = \gamma^i$ si $1 \leq i \leq r$ y $X_j(p) = v_j$ si $1 \leq j \leq s$; entonces

$$T(p)(\gamma^1, \ldots, \gamma^r, v_1, \ldots, v_s) = \bar{T}(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) \tag{1}$$

Debido al teorema anterior, el valor $\bar{T}(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p)$ no depende de la elección de los θ^i y X_j.

Luego, la función $T(p)$ está bien definida y es $\mathbb{R}$-multilineal.

En consecuencia, queda definido $\big($según (1)$\big)$ el tensor $T : M \to \mathbf{T}^r_s(M)$. Resta sólo verificar que $T \in \mathfrak{X}^r_s(M)$; es decir, que T es diferenciable.

Sea (W, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M; luego

$$T|_W = \sum_{1 \leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$$

donde $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} : W \to \mathbb{R}$ está definido por

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(q) = T(q) \left(dx^{i_1}_q, \ldots, dx^{i_r}_q, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}\Big|_q \right) \tag{2}$$

Luego $T \in \mathfrak{X}^r_s(M)$, probado que $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \in \mathcal{F}(W)$.

Sea entonces $p \in W$ y mostremos que existe un abierto U, entorno de p, con $U \subset W$, tal que $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s} \in \mathcal{F}(U)$.

Como $dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_r} \in \mathfrak{X}^*(W)$ y $\dfrac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^{j_s}} \in \mathfrak{X}(W)$, por el ejercicio 61, existe un abierto U de M, con $p \in U \subset W$, 1-formas $\theta^{i_1}, \ldots, \theta^{i_r} \in \mathfrak{X}^*(M)$ y campos $X_{j_1}, \ldots, X_{j_s} \in \mathfrak{X}(M)$, tales que $\theta^{i_k}|_U = dx^{i_k}|_U$ si $1 \leq k \leq r$ y $X_{j_m}|_U = \dfrac{\partial}{\partial x^{j_m}}\Big|_U$ si $1 \leq m \leq s$.

Debido a (2), para $q \in U$, se cumple:

$$T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(q) = T(\theta^{i_1}, \ldots, \theta^{i_r}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_s})(q)$$

Luego, $T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}|_U = T(\theta^{i_1}, \ldots, \theta^{i_r}, X_{j_1}, \ldots, X_{j_s})|_U \in \mathcal{F}(U)$.

NOTA

Debido al corolario anterior, las funciones $T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$ que son $\mathcal{F}(M)$-multilineales, con $(r, s) \neq (0, 0)$, se denominan también TENSORES(DIFERENCIABLES) del tipo (r, s) sobre M.

EJERCICIO 62

*Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una función $T : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ se dice $\mathcal{F}(M)$-**lineal** si $T(f \cdot X + g \cdot Y) = f \cdot T(X) + g \cdot T(Y)$, para $f, g \in \mathcal{F}(M)$ y*

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Si* $s \geq 1$, *una función* $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *se dice* $\mathcal{F}(M)$-**multilineal**, *si es* $\mathcal{F}(M)$*-lineal respecto de cada una de sus variables.*

a) Verificar que el conjunto de las funciones $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *que son* $\mathcal{F}(M)$*-multilineales, constituye un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, con las operaciones naturales.*

b) Sea $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *una función* $\mathcal{F}(M)$*-multilineal. Verificar que la aplicación* $\bar{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathcal{F}(M)$, *definida por*

$$\bar{T}(\omega, X_1, \ldots, X_s) = \omega(T(X_1, \ldots, X_s))$$

es $\mathcal{F}(M)$*-multilineal.*

c) Probar que la correspondencia $T \mapsto \bar{T}$, *definida según b), es un isomorfismo canónico. Sugerencia: Ver ejercicio 48.*

d) Sean $X_1, \ldots, X_s, \bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s \in \mathfrak{X}(M)$ *y* $p \in M$ *con* $X_i(p) = \bar{X}_i(p)$ *si* $1 \leq i \leq s$. *Si* $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ *es* $\mathcal{F}(M)$*-multilineal, probar que* $T(X_1, \ldots, X_s)(p) = T(\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_s)(p)$.

NOTA

Debido al ejercicio anterior, las funciones $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ $\mathcal{F}(M)$-multilineales se denominan también TENSORES(DIFERENCIABLES) del tipo $(1, s)$ sobre M.

EJERCICIO 63

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, *sea* $\mathbf{L}_X Y = [X, Y]$. *¿Es* $\mathbf{L}_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ *un tensor(diferenciable) del tipo* $(1, 1)$*?*

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subset M$ un abierto no vacío. Como G es, en particular, una variedad diferenciable de dimensión n, el corolario anterior nos dice que todo tensor $T \in \mathfrak{X}^r_s(G)$, con $(r, s) \neq (0, 0)$, se lo puede interpretar como una función $T : \mathfrak{X}^*(G)^r \times \mathfrak{X}(G)^s \to \mathcal{F}(G)$ que es $F(G)$-multilineal y viceversa.

Veamos algunos casos particulares:

Campos de vectores

Por ser $\mathfrak{X}(G) = \mathfrak{X}^1_0(G)$, toda función $X : \mathfrak{X}^*(G) \to \mathcal{F}(G)$ que sea $\mathcal{F}(G)$-lineal, puede interpertarse como el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(G)$ definido, para cada $p \in G$ y $\gamma \in M^*_p$, por

$$X(p)(\gamma) = X(\theta)(p)$$

donde $\theta \in \mathfrak{X}^*(G)$ satisface que $\theta(p) = \gamma$.

Recíprocamente, todo campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(G)$ puede interpretarse como la función $X : \mathfrak{X}^*(G) \to \mathcal{F}(G)$, definida por

$$X(\omega)(p) = X(p)(\omega(p))$$

1-formas

Por ser $\mathfrak{X}^*(G) = \mathfrak{X}^0_1(G)$, toda función $\omega : \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$, que sea $\mathcal{F}(G)$-lineal, puede interpretarse como la 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$, definida para cada $p \in G$ y $v \in M_p$, por

$$\omega(p)(v) = \omega(X)(p)$$

donde, $X \in \mathfrak{X}(G)$ satisface que $X(p) = v$.

Recíprocamente, toda 1-forma $\omega \in \mathfrak{X}^*(G)$ puede interpretarse como la función $\omega : \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$, definida por

$$\omega(X)(p) = \omega(p)(X(p))$$

k-formas

Por ser $\Omega^1(G) = \mathfrak{X}^*(G)$ y $\Omega^k(G) \subset \mathfrak{X}^0_k(G)$ resulta que, para $k \geq 2$, toda función $\omega : \mathfrak{X}(G)^k \to \mathcal{F}(G)$ que sea

f_1) $\mathcal{F}(G)$-multilineal

f_2) alternada †

puede interpretarse como la k-forma $\omega \in \Omega^k(G)$ definida, para $p \in G$, $v_1, \ldots, v_k \in M_p$, por $\omega(p)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(X_1, \ldots, X_k)(p)$, donde $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(G)$ satisfacen $X_i(p) = v_i$ si $1 \leq i \leq k$.

Recíprocamente, toda k-forma $\omega \in \Omega^k(G)$ puede interpretarse como la función $\omega : \mathfrak{X}(G)^k \to \mathcal{F}(G)$, definida por

$$\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega(p)(X_1(p), \ldots, X_k(p))$$

y que, consecuentemente, satisface f_1) y f_2).

Producto tensorial - Producto exterior

El isomorfismo del corolario 49 traduce el producto tensorial

$$\otimes : \mathfrak{X}^r_s(G) \times \mathfrak{X}^l_m(G) \longrightarrow \mathfrak{X}^{r+l}_{s+m}(G)$$

en un producto tensorial para funciones $\mathcal{F}(G)$-multilineales, del siguiente modo:

Si $T : \mathfrak{X}^*(G)^r \times \mathfrak{X}(G)^s \to \mathcal{F}(G)$ y $U : \mathfrak{X}^*(G)^l \times \mathfrak{X}(G)^m \to \mathcal{F}(G)$ son $\mathcal{F}(G)$-multilineales, su PRODUCTO TENSORIAL

$$T \otimes U : \mathfrak{X}^*(G)^{r+l} \times \mathfrak{X}(G)^{s+m} \to \mathcal{F}(G)$$

† Si $\sigma \in \mathcal{S}_k$ y $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(G)$, entonces $\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) = sg(\sigma) . \omega(X_1, \ldots, X_k)$

queda definido por

$$T \otimes U(\theta^1, \dots, \theta^{r+l}, X_1, \dots, X_{s+m}) =$$
$$= T(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \; . \; U(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+s}, X_{s+1}, \dots, X_{s+m})$$

También traduce el producto exterior

$$\wedge : \Omega^k(G) \times \mathfrak{X}^l(G) \longrightarrow \Omega^{k+l}(G)$$

en un producto exterior para funciones $\mathcal{F}(G)$-multilineales y alternadas, del siguiente modo:

Si $\omega : \mathfrak{X}(G)^k \to \mathcal{F}(G)$ y $\theta : \mathfrak{X}(G)^l \to \mathcal{F}(G)$ son funciones $\mathcal{F}(G)$ -multilineales y alternadas, su PRODUCTO EXTERIOR

$$\omega \wedge \theta : \mathfrak{X}(G)^{k+l} \longrightarrow \mathcal{F}(G)$$

es la función $\mathcal{F}(G)$-multilineal alternada definida por

$$\omega \wedge \theta(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!\, l!} \cdot \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sg(\sigma) \; . \; (\omega \otimes \theta)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)})$$

Diferencial Exterior

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\star$ Si $f \in \mathcal{F}(G)$, su **diferencial exterior** $df : \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$ es la función $\mathcal{F}(G)$-lineal (y por lo tanto alternada), definida por

$$df(X)(p) = X(p)(f) \qquad \text{si } p \in G \text{ y } X \in \mathfrak{X}(G)$$

$\star$ Si $k \geq 1$ y $\omega : \mathfrak{X}(G)^k \to \mathcal{F}(G)$ es $\mathcal{F}(G)$-multilineal alternada, su **diferencial exterior** $d\omega : \mathfrak{X}(G)^{k+1} \to \mathcal{F}(G)$ es la función $\mathcal{F}(G)$-multilineal alternada, definida por:

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \; . \; X_j(\omega(X_1, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1})) +$$
$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \; . \; \omega\left([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{k+1}\right)$$

donde $\widehat{X}$ indica, como antes, que el campo X se omite.

EJEMPLO

Si $\omega : \mathfrak{X}(G) \to \mathcal{F}(G)$ es $\mathcal{F}(G)$-lineal (y por lo tanto alternada), entonces $d\omega : \mathfrak{X}(G)^2 \to \mathcal{F}(G)$ es la función $\mathcal{F}(G)$-multilineal alternada, definida por

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])$$

EJERCICIO 64

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $k = 0$, sea $\Omega^0(G) = \mathcal{F}(G)$.

Mostrar que el isomorfismo del corolario 49 traduce la diferencial exterior en un operador $d : \Omega^k(G) \to \Omega^{k+1}(G)$, que también se denomina DIFERENCIAL EXTERIOR, *que satisface:*

a) Si $f \in \mathcal{F}(G)$, entonces $df \in \Omega^1(G) = \mathfrak{X}_1^0(G)$ es la diferencial usual.

b) Sea (U,x) una carta de M, con $x = (x^1, \ldots, x^n)$ y $U \subset G$. Sea $\omega \in \Omega^k(G)$ tal que

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \ldots i_k} \, . \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

entonces

$$d\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

EJERCICIO 65

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $G \subset M$ un abierto no vacío. Verificar que la diferencial exterior satisface

a) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(G)$ y $k \geq 0$.

b) $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^k \, . \, \omega \wedge d\theta$ si $\omega \in \Omega^k(G)$

c) $d^2(\omega) = d(d(\omega)) = 0$ si $\omega \in \Omega^k(G)$ y $k \geq 0$

EJERCICIO 66

Sean M y N variedades diferenciables y $f : N \to M$ una función diferenciable. Verificar que $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^k(M)$ con $k \geq 0$.

NOTA

El siguiente teorema es importante pues permite globalizar objetos definidos localmente. Es, además, la razón por la cual pedimos que la topología de las variedades diferenciables sea Hausdorff y con base numerable.

Partición de la Unidad

DEFINICIÓN

Sea M una variedad diferenciable , A una familia arbitraria de índices y $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un cubrimiento de M por subconjuntos.

La familia $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ se dice **localmente finita**, *si para todo $p\in M$ existe un entorno U de p tal que $U\cap U_\alpha$ es vacío, salvo para un número finito de $\alpha\in A$.*

Teorema 50

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un cubrimiento por abiertos de M. Para cada $\alpha\in A$, existe $\varphi_\alpha\in\mathcal{F}(M)$, con $\varphi_\alpha(p)\geq 0$ si $p\in M$, que satisfacen:

1) Para cada $\alpha\in A$ es $sop(\varphi_\alpha)\subset U_\alpha$

2) $\{sop(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento localmente finito de M.

3) Para cada $p\in M$ es $\displaystyle\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(p)=1$ †

DEMOSTRACIÓN:

1^{er} Paso: Construimos un cubrimiento numerable $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, por abiertos de M, tal que para cada $i\in\mathbb{N}$, $\overline{G_i}$ (clausura de G_i) sea compacto.

Como por hipótesis M tiene base numerable, sea $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de la topología de M. Para cada $i\in\mathbb{N}$ y $p\in A_i$, sea (U,x) una carta de M, con $p\in U\subset A_i$, tal que $x(p)=0$ y $x(U)=B(0,1)=\{u\in\mathbb{R}^n\ /\ \|u\|<1\}$. Si $V_p=x^{-1}(B(0,\frac{1}{2}))$, entonces V_p es un entorno abierto de p contenido en A_i, con $\overline{V}_p=x^{-1}\left(\overline{B(0,\frac{1}{2})}\right)$ compacto y $A_i=\bigcup\limits_{p\in A_i}V_p$.

Ahora bien, como M tiene base numerable, todo cubrimiento por abiertos de un subconjunto de M tiene un subcubrimiento numerable. Luego, existe una subfamilia (numerable) $\{V_{i,j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{V_p\}_{p\in A_i}$ que cubren a A_i.

La familia $\{V_{i,j}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de M —por serlo $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$— con la propiedad que $\overline{V}_{i,j}$ es compacto.

2^{do} Paso: Con el cubrimiento numerable $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, construído en el paso anterior, fabricamos una sucesión creciente de compactos $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con la propiedad que $G_i\subset C_i$ y $C_i\subset\overset{\circ}{C}_{i+1}$ (interior de C_{i+1}) para todo $i\in\mathbb{N}$

† La propiedad *3)* tiene sentido pues, por *2)*, para cada $p\in M$ es $\varphi_\alpha(p)=0$, salvo un número finito de índices.

A tal efecto, sea $C_1 = \overline{G}_1$ (compacto) y $k_1 \in \mathbb{N}$ el menor que satisface $C_1 \subset \bigcup_{j=1}^{k_1} G_j$ y sea $V_1 = \bigcup_{j=1}^{k_1} G_j$.

Luego, $C_2 = \overline{V}_1 \cup \overline{G}_2$ es compacto, con $G_2 \subset C_2$ y $C_1 \subset \overset{\circ}{C}_2$.

En general, construído C_i, sea $k_i \in \mathbb{N}$ el menor que satisface $C_i \subset \bigcup_{j=1}^{k_i} G_j$ y sea $V_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} G_j$.

Luego, $C_{i+1} = \overline{V}_i \cup \overline{G}_{i+1}$ es compacto, con $G_{i+1} \subset C_{i+1}$ y $C_i \subset \overset{\circ}{C}_{i+1}$.

Puede ocurrir que exista un $k \in \mathbb{N}$ tal que $C_i = C_k$ si $i \geq k$. Por ejemplo, si M es compacta.

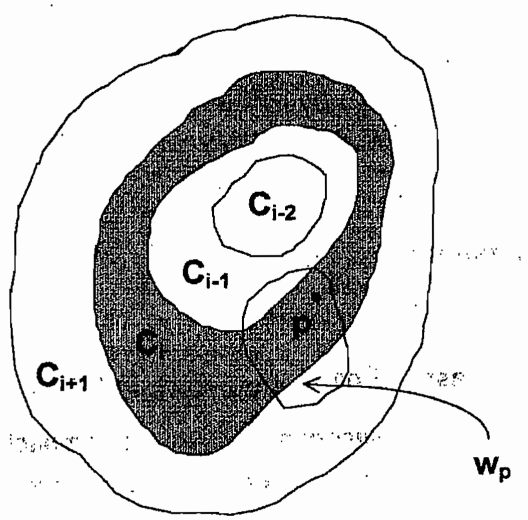
3^{er} Paso: Consideramos la sucesión de compactos $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, construída en el paso anterior, y el cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Sea $H \subset \mathbb{N}$ el conjunto de índices – i – para los cuales $C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1}$ es no vacío (C_j es vacío si $j \geq 0$). Fijado $i \in H$, si $p \in C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1}$, existe un $\alpha \in A$ con $p \in U_\alpha$, pues $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de M. Como el compacto $C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1}$ está contenido en el abierto $\overset{\circ}{C}_{i+1} - C_{i-2}$, podemos construir una carta (W_p, x_p) de M –con $p \in W_p$– que satisface $x_p(p) = 0$, $x_p(W_p) = B(0,3)$ y $W_p \subset (\overset{\circ}{C}_{i+1} - C_{i-2}) \cap U_\alpha$.

Luego, para cada $p \in C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1}$ es $C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1} \subset \bigcup V_p \subset \bigcup W_p$, donde $V_p = x_p^{-1}(B(0,1))$. Como $C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1}$ es compacto, existe una subfamilia finita de dichas cartas (W_p, x_p), digamos
$\{(W_{i1}, x_{i1}), \ldots, (W_{ir_i}, x_{ir_i})\}$
con la propiedad que

$$C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1} \subset \bigcup_{j=1}^{r_i} V_{ij} \subset \bigcup_{j=1}^{r_i} W_{ij}$$

donde
$V_{ij} = x_{ij}^{-1}(B(0,1))$ y $W_{ij} = x_{ij}^{-1}(B(0,3))$.



Siendo $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (C_i - \overset{\circ}{C}_{i-1})$, la familia de abiertos $\{V_{ij}\} = \{V_{ij}\}_{\substack{i\in H\\ j=1,\ldots,r_i}}$ es un cubrimiento de M y por lo tanto, $\{W_{ij}\} = \{W_{ij}\}_{\substack{i\in H\\ j=1,\ldots,r_i}}$ también lo es.

Como $W_{ij} \subset \overset{\circ}{C}_{i+1} - C_{i-2}$, resulta que cada W_{ij} interseca sólo a un número finito de los restantes miembros de $\{W_{ij}\}$; luego el cubrimiento es localmente finito.

Por otro lado, si $I = \{(i,j)/i \in H \text{ y } j = 1,\ldots,r_i\}$, para cada $(i,j) \in I$ existe un $\alpha \in A$ con $W_{ij} \subset U_\alpha$. Luego, existe una función $\mathbf{s} : I \to A$ (axioma de elección) tal que $W_{ij} \subset U_{\mathbf{s}(i,j)}$.

Para cada $\alpha \in A$, sea W_α el abierto definido por $W_\alpha = \bigcup_{(i,j)\in\mathbf{s}^{-1}(\alpha)} W_{ij}$.

Luego, $W_\alpha \subset U_\alpha$ y $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento localmente finito de M, pues $\{W_{ij}\}$ lo es.

Si $(i,j) \in I$, sea $f_{ij} \in \mathcal{F}(M)$ la función construída en el lema 5 que satisface $f_{ij}(q) = 1$ si $q \in V_{ij} = x_{ij}^{-1}(B(0,1))$ y $sop(f_{ij}) = x_{ij}^{-1}(\bar{B}(0,2)) \subset W_{ij} = x_{ij}^{-1}(B(0,3))$.

Para cada $\alpha \in A$, sea $f_\alpha : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_\alpha = \begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in\mathbf{s}^{-1}(\alpha)} f_{ij} & \text{si } \mathbf{s}^{-1}(\alpha) \neq \varnothing \\ 0 & \text{si } \mathbf{s}^{-1}(\alpha) = \varnothing \end{cases}$$

La buena definición y la diferenciabilidad de f_α es inmediata por el hecho que $\{W_{ij}\}$ es un cubrimiento localmente finito de M. Por construcción, es $f_\alpha \geq 0$ y $sop(f_\alpha) \subset W_\alpha$.

La familia $\{sop(f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es un cubrimiento de M por serlo $\{V_{ij}\}$ y además es localmente finito pues $\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ lo es.

Luego, $\varphi : M \to \mathbb{R}$ —dada por $\varphi = \sum_{\alpha\in A} f_\alpha$— está bien definida, es diferenciable y $\varphi(q) > 0$ para todo $q \in M$.

Finalmente, si definimos $\varphi_\alpha : M \to \mathbb{R}$ por $\varphi_\alpha = \dfrac{1}{\varphi} \cdot f_\alpha$, entonces $\varphi_\alpha \in \mathcal{F}(M)$, $sop(\varphi_\alpha) = sop(f_\alpha)$ y $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha = 1$.

La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ satisface las propiedades enunciadas.

Definición

Una familia de funciones $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ que satisface las propiedades del teorema anterior, para el cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M, se denomina una **partición diferenciable de la unidad para** M, **subordinada** *a* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Corolario 51

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, $G \subset M$ un abierto no vacío de M y $A \subset G$ un subconjunto no vacío y cerrado en M.

a) Existe $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\varphi|_A = 1$ y $\varphi|_{M-G} = 0$.

b) Si $f \in \mathcal{F}(G)$, existe $g \in \mathcal{F}(M)$ tal que $g|_A = f|_A$ y $g|_{M-G} = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Considerando el cubrimiento por abiertos $\{G, M - A\}$ de M, sea $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ una partición diferenciable de la unidad para M, subordinada a $\{G, M-A\}$, con $sop(\varphi_1) \subset G$ y $sop(\varphi_2) \subset M - A$.

• Parte a)

Afirmamos que la función $\varphi = \varphi_1$ sirve.

En efecto,

por ser $sop(\varphi_2) \subset M - A$, es $\varphi_2(p) = 0$ si $p \in A$; luego, como $\varphi_1(p) + \varphi_2(p) = 1$ si $p \in M$, se obtiene que $\varphi_1(p) = 1$ si $p \in A$. Por otro lado, la inclusión $sop(\varphi_1) \subset G$ implica que $\varphi_1(p) = 0$ si $p \in M - G$.

• Parte b)

Extendemos la función $f : G \to \mathbb{R}$ a una función $\bar{f} : M \to \mathbb{R}$ (no necesariamente diferenciable). Por ejemplo,

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} f(p) & \text{si } p \in G \\ 0 & \text{si } p \in M - G \end{cases}$$

Si se define $g : M \to \mathbb{R}$ por $g = \varphi_1 \,.\, \bar{f}$, se tiene que $g(p) = f(p)$ si $p \in A \subset G$ y $g(p) = 0$ si $p \in M - G$.

Además, $g \in \mathcal{F}(M)$.

En efecto,

de hecho $g \in \mathcal{F}(G)$ pues $g|_G = (\varphi_1|_G) \,.\, f$.

Ahora bien, como $sop(\varphi_1) \subset G$, es $g(p) = 0$ si $p \in M - sop(\varphi_1) \supset M - G$; luego, $g \in \mathcal{F}(M)$.

Variedades Orientables

Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n. Consideremos las bases *ordenadas* $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $E' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ de V.
Luego,

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \cdot e_j \qquad \text{si} \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

Decimos que las bases E y E' definen la **misma orientación** si $det(a_i^j) > 0$ y la **orientación opuesta** si $det(a_i^j) < 0$.

La relación: '$E \sim E'$ si y sólo si $det(a_i^j) > 0$' es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las bases de V.

Hay exactamente *dos* clases de equivalencia: si $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ define una clase, entonces $E' = \{e_2, e_1, \dots, e_n\}$ define la otra.

Cada clase de equivalencia se denomina una **orientación** para V. La orientación que contiene a $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ la denotamos con $[e_1, \dots, e_n]$.

Se puede demostrar † que $\{e_1, \dots, e_n\}$ *y* $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ ***definen la misma orientación si y sólo si existen funciones continuas*** $E_i : [0,1] \to V$, ***con*** $1 \leq i \leq n$, ***que satisfacen***

a) $E_i(0) = e_i$ *y* $E_i(1) = e'_i$ *si* $1 \leq i \leq n$

b) Para $t \in [0,1]$, $E_1(t), \dots, E_n(t)$ ***son linealmente independientes.***

En lo que sigue, sea M una variedad diferenciable de dimensión n.

Si (U, x) es una carta de M, con $x = (x^1, \dots, x^n)$ y $p \in U$, denotaremos con

$$\lambda_x(p) = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right] \tag{2}$$

a la orientación de M_p definida por la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p\right\}$.

Si (V, y) es una carta de M, con $U \cap V \neq \varnothing$, denotemos con $\mathrm{J}_{y \circ x^{-1}} : U \cap V \to \mathbb{R}$ a la función

$$\mathrm{J}_{y \circ x^{-1}}(p) = det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_p\right) = det\left(D_j(y^i \circ x^{-1})|_{x(p)}\right) \tag{3}$$

† ver Greub, W. : Linear Algebra

Luego, para $p \in U \cap V$ se verifica

$$\lambda_x(p) = \lambda_y(p) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(p) > 0 \tag{4}$$

DEFINICIÓN

Una **orientación** λ *para* M *es una función que a cada punto* $p \in M$ *le asigna una orientación* $\lambda(p)$ *para* M_p*, con la propiedad que si* $p \in M$*, existe una carta* (U, x) *de* M*, con* $p \in U$*, tal que* $\lambda(q) = \lambda_x(q)$ *si* $q \in U$.

M *se dice* **orientable** *si existe una orientación* λ *para* M.

OBSERVACIONES

Sea λ una orientación para M.

a) Si para $p \in M$, $(-\lambda)(p)$ representa a la orientación opuesta a $\lambda(p)$, entonces $-\lambda$ es una orientación para M.

b) Si M es conexo, $\pm\lambda$ son las únicas orientaciones posibles para M.

En efecto, si μ es una orientación para M, sean

$$\mu^+ = \{p \in M / \mu(p) = \lambda(p)\} \qquad \text{y} \qquad \mu^- = \{p \in M / \mu(p) = (-\lambda)(p)\}$$

Luego, μ^+ y μ^- son abiertos y disjuntos que cubren a M. Como M es conexo, uno de los dos es vacío; es decir, $\mu^+ = \lambda$ o $\mu^- = \lambda$.

c) Sean (U, x) y (V, y) cartas de M, con $U \cap V \neq \varnothing$. Sobre $U \cap V$ se tiene que $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$ se representa (con respecto a (U, x)) de la forma $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \omega_{12\ldots n} \cdot dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Como $(dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q \right) = 1$ si $q \in U$, para $q \in U \cap V$ es

$$\omega_{12\ldots n}(q) = (dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q \right) = det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\Big|_q \right) = \mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(q)$$

Luego,

$$dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n|_{U\cap V} = \mathrm{J}_{y\circ x^{-1}} \, . \, (dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n|_{U\cap V}) \tag{5}$$

DEFINICIONES

Sea M *una variedad diferenciable de dimensión* n.

⋆ *Un atlas* $\mathcal{A}$*, de* M*, se dice* **orientado** *si para* $(U, x) \in \mathcal{A}$ *y* $(V, y) \in \mathcal{A}$*, con* $U \cap V \neq \varnothing$*, se verifica que* $J_{y\circ x^{-1}}(p) > 0$ *si* $p \in U \cap V$.

⋆ *Una* n*-forma* $\omega \in \Omega^n(M)$ *se denomina un* **elemento de volumen** *para* M*, si para todo* $p \in M$ *es* $\omega(p) \neq 0$.

NOTA

El siguiente resultado es una aplicación importante del teorema 50.

Teorema 52

Son equivalentes las afirmaciones:

a) M es orientable

b) M admite un atlas orientado

c) M admite un elemento de volumen

DEMOSTRACIÓN:

- *a) $\Rightarrow$ b)*

Sea λ una orientación para M; luego, para $p \in M$, existe una carta (U, x) de M con $p \in U$, tal que $\lambda(q) = \lambda_x(q)$ si $q \in U$.

Sea $\mathcal{A}$ el atlas formado por las cartas de M que satisfacen la propiedad anterior. Afirmamos que $\mathcal{A}$ es orientado.
En efecto,

sean (U, x), (V, y) cartas de $\mathcal{A}$, con $U \cap V \neq \varnothing$; luego, si $q \in U \cap V$, se tiene que $\lambda_x(q) = \lambda(q) = \lambda_y(q)$.

Debido a (4), resulta $J_{y \circ x^{-1}}(q) > 0$.

- *b) $\Rightarrow$ c)*

Sea $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ un atlas orientado y $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Para cada $i \in I$, sea $\omega_i = dx_i^1 \wedge \ldots \wedge dx_i^n \in \Omega^n(U_i)$; luego, por ser $sop(\varphi_i) \subset U_i$, se tiene que $\varphi_i \,.\, \omega_i \in \Omega^n(M)$.
Como $\{sop(\varphi_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento localmente finito de M, para $p \in M$, la suma $\sum\limits_{i \in I}(\varphi_i \,.\, \omega_i)(p)$ es finita.

Luego, la función

$$\omega = \sum_{i \in I} \varphi_i \,.\, \omega_i : M \to \Lambda^n(M) \tag{1}$$

está bien definida y es diferenciable.
La diferenciabilidad es consecuencia del siguiente hecho:

Si $p \in M$, existe un abierto U de M con $p \in U$, tal que $sop(\varphi_i) \cap U$ es vacío salvo un número finito de índices.
Sea $I' = \{i \in I / sop(\varphi_i) \cap U \neq \varnothing\}$; luego, I' es no vacío y finito.
Siendo $\omega|_U = \sum\limits_{i \in I'}(\varphi_i \,.\, \omega_i)|_U$, entonces $\omega|_U$ es diferenciable y como p es arbitrario, resulta $\omega \in \Omega^n(M)$.

Afirmamos que $\omega(p) \neq 0$ si $p \in M$.

En efecto,

debido a (5) – parte c) de las observaciones anteriores – si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ es $\omega_j = \mathrm{J}_{x_j o x_i^{-1}} \,.\, \omega_i$ sobre $U_i \cap U_j$. Si denotamos con $d_{ij} = \mathrm{J}_{x_j o x_i^{-1}} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$, por hipótesis se tiene que $d_{ij} > 0$.

Luego,

$$\omega_j = d_{ij} \,.\, \omega_i \qquad \text{sobre} \quad U_i \cap U_j \quad \text{con} \quad d_{ij} > 0 \tag{2}$$

Si $p \in M$ es $\sum_{i \in I} \varphi_i(p) = 1$; luego, si $I_p = \{j \in I / \varphi_j(p) > 0\}$ es I_p no vacío y finito.

En consecuencia,

$$\omega(p) = \sum_{j \in I_p} \varphi_j(p) \,.\, \omega_j(p) \qquad \text{con} \quad \sum_{j \in I_p} \varphi_j(p) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi_j(p) > 0 \tag{3}$$

Si $i \in I_p$ (fijo), para $j \in I_p$ es $p \in sop(\varphi_i) \cap sop(\varphi_j)$.

Debido a (2), es $\omega_j(p) = d_{ij}(p) \,.\, \omega_i(p)$ con $d_{ij}(p) > 0$ y $d_{ii} = 1$.

Por (3), se tiene entonces que $\omega(p) = \left(\sum_{j \in I_p} \varphi_j(p) \,.\, d_{ij}(p) \right) \,.\, \omega_i(p)$.

Como $\omega_i(p) \neq 0$ y $\sum_{j \in I_p} \varphi_j(p) \,.\, d_{ij}(p) > 0$, resulta $\omega(p) \neq 0$.

Luego, ω es un elemento de volumen.

- *c)* $\Rightarrow$ *a)*

Sea $\omega \in \Omega^n(M)$ un elemento de volumen; luego, si $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de M_p, será $\omega(p)(e_1, \ldots, e_n) > 0$ o bien $\omega(p)(e_1, \ldots, e_n) < 0$.

Si $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ es otra base de M_p, con $e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \,.\, e_j$ $(1 \leq i \leq n)$ se cumple:

$$\omega(p)(e'_1, \ldots, e'_n) = det\left(a_i^j\right) \,.\, \omega(p)(e_1, \ldots, e_n) \tag{4}$$

La igualdad anterior muestra que si se define

$$\lambda(p) = \Big\{ \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ base de } M_p \;/\; \omega(p)(e_1, \ldots, e_n) > 0 \Big\} \tag{5}$$

entonces $\lambda(p)$ es una orientación para M_p.

Para ver que M es orientable es suficiente verificar que si $p \in M$, existe una carta (U, x) de M, con $p \in U$, tal que

$$\lambda(q) = \lambda_x(q) \qquad \text{si } q \in U \tag{6}$$

A tal efecto, consideremos una carta (U, x), con U conexo; por ejemplo, $x(U) = \{u \in \mathbb{R}^n / \|u\| < 1\}$.
Cambiando $x = (x^1, \ldots, x^n)$ por $y = (x^2, x^1, \ldots, x^n)$, si fuera necesario, podemos suponer que $\omega(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p\right) > 0$. Es decir, $\lambda(p) = \lambda_x(p)$.

Si definimos $F : U \to \mathbb{R}$ por $F(q) = \omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_q\right)$, entonces $F(q) \neq 0$ si $q \in U$, $F(p) > 0$ y $\omega = F \,.\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$, sobre U. Sean

$$U^+ = \{q \in U / F(q) > 0\} \qquad \text{y} \qquad U^- = \{q \in U / F(q) < 0\}$$

Luego, U^+ y U^- son disjuntos y abiertos por ser F continua. Además, $U = U^+ \cup U^-$ pues $F(q) \neq 0$ si $q \in U$. Como U es conexo, debe ser $U^+ = \varnothing$ ó $U^- = \varnothing$.
Siendo $p \in U^+$, resulta que $U = U^+$; luego, $F(q) > 0$ si $q \in U$ o, equivalentemente, se satisface (6).

DEFINICIONES

Sea M una variedad diferenciable y orientada de dimensión n.

1. *Sea λ una orientación para M y $\mathcal{A}$ un atlas orientado de M. Diremos que λ y $\mathcal{A}$ son* **compatibles**, *si para todo $(U, x) \in \mathcal{A}$ es $\lambda_x(q) = \lambda(q)$ si $q \in U$.*
2. *Sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado de M y ω un elemento de volumen para M. Diremos que $\mathcal{A}$ y ω son* **compatibles**, *si para $(U, x) \in \mathcal{A}$, con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, se verifica que*
$$\omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_q\right) > 0 \qquad si\ q \in U$$
Luego, el elemento de volumen construído en el teorema anterior, a partir del atlas orientado $\mathcal{A}$, es compatible con $\mathcal{A}$.
3. *Sea ω un elemento de volumen para M y λ una orientación para M. Diremos que ω y λ son* **compatibles**, *si para $q \in M$, se verifica:*
$$\lambda(q) = \Big\{\{e_1, \ldots, e_n\} \text{ base de } M_p \;/\; \omega(q)(e_1, \ldots, e_n) > 0\Big\}$$
Decimos en este caso que λ es la ORIENTACIÓN INDUCIDA *por ω.*
4. *Para el caso $M = \mathbb{R}^n$, con el atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$ donde $id = (u^1, \ldots, u^n)$ y $\omega = du^1 \wedge \ldots \wedge du^n \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$, la orientación inducida por ω se denomina la* **orientación usual** *de $\mathbb{R}^n$.*
Luego, si $p \in \mathbb{R}^n$, $\left\{\frac{\partial}{\partial u^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial u^n}\big|_p\right\}$ es una base orientada positivamente en $\mathbb{R}^n_p$.

NOTA

El siguiente resultado es útil para verificar la *no* orientabilidad de una variedad diferenciable.

Corolario 53

Sea M una variedad diferenciable y orientable de dimensión n. Si (U,x) y (V,y) son cartas de M, con U, V conexos y $U\cap V\neq\varnothing$, entonces $\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}: U\cap V\to\mathbb{R}$ tiene signo constante.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\omega\in\Omega^n(M)$ un elemento de volumen; luego, si $x=(x^1,\ldots,x^n)$ e $y=(y^1,\ldots,y^n)$, entonces $\omega|_U=f\,.\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$ y $\omega|_V=g\,.\,dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n$, donde $f\in\mathcal{F}(U)$ satisface que $f(q)=\omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}|_q,\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}|_q\right)$ y, por otro lado, también $g\in\mathcal{F}(V)$ satisface que $g(q)=\omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial y^1}|_q,\ldots,\frac{\partial}{\partial y^n}|_q\right)$.

Como U es conexo, el signo de f es constante y por la misma razón, el signo de g lo es. Sobre $U\cap V$ es $dy^1\wedge\ldots\wedge dy^n=\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}\,.\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$; luego, $f(q)=\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(q)\,.\,g(q)$ si $q\in U\cap V$.

Como f y g tienen el signo constante, $\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}$ tiene signo constante sobre $U\cap V$.

EJERCICIO 67

Mostrar que el espacio proyectivo $\mathbf{P}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ es orientable si n es impar y no orientable si n es par.

EJERCICIO 68

Sea $A=(0,2\pi)\times(-1,1)\subset\mathbb{R}^2$ y $f_1,f_2:A\to\mathbb{R}^3$, definidas por

$$f_1(u,v)=\left(\left(2-v.\ \mathrm{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right).\mathrm{sen}u,\left(2-v.\ \mathrm{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\right).\mathrm{cos}u,v.\ \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

$$f_2(u,v)=\left(\left(2-v.\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right).\mathrm{cos}u,-\left(2-v.\ \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right).\mathrm{sen}u,v.\ \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right)$$

Sea $M=f_1(A)\cup f_2(A)$.

a) *Probar que M es una superficie sumergida de $\mathbb{R}^3$ (= subvariedad sumergida de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$).*

   La misma se denomina CINTA DE MÖBIUS. †

b) *Mostrar que M no es orientable.*

---

† Se obtiene haciendo rotar el segmento de extremos $(0,2,-1)$ y $(0,2,1)$ alrededor de la circunferencia: $x^2+y^2=4, z=0$ (sentido horario), de modo tal que –habiendo rotado un ángulo u– dicho segmento se inclina en $\frac{u}{2}$, respecto de la vertical.

EJERCICIO 69

Sean $a, r \in \mathbb{R}$, con $a > r > 0$ y $T \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$T = \left\{ (u^1, u^2, u^3) \ / \ (u^3)^2 = r^2 - \left(\sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} - a \right)^2 \right\}$$

Probar que T es una superficie sumergida y orientable de $\mathbb{R}^3$. Se denomina TORO.

EJERCICIO 70

Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, $b \in f(\mathbb{R}^{n+1})$ un valor regular y M la hipersuperficie sumergida (= subvariedad sumergida de dimensión n de $\mathbb{R}^{n+1}$) definida por $M = f^{-1}(b)$. Probar que M es orientable.

Sugerencia: Sea $\omega = du^1 \wedge \ldots \wedge du^{n+1} \in \Omega^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$. Construya un elemento de volumen $\theta \in \Omega^n(M)$ utilizando ω.

EJERCICIO 71

Mostrar que si una variedad diferenciable M admite un atlas constituído por dos cartas –tales que la intersección de sus dominios es un conexo– es orientable.

EJERCICIO 72

Deducir de los ejercicios 70 ó 71 que la n-esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es orientable.

EJERCICIO 73

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Probar:

a) *TM es orientable.*

b) *T^*M es orientable.*

c) *Si M es paralelizable, entonces M es orientable.*

EJERCICIO 74

Probar que todo grupo de Lie de dimensión n es orientable.

EJERCICIO 75

Sean M, N variedades diferenciables de dimensión n y k, respectivamente. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) *M y N son orientables.*

b) *$M \times N$ es orientable.*

EJERCICIO 76

Sea M una variedad diferenciable orientable de dimensión n y $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^n(M)$ dos elementos de volumen. Probar:

a) *Si $\omega \in \Omega^n(M)$, entonces existe una única $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\omega = f \ . \ \omega_0$.*

b) *Son equivalentes las afirmaciones:*

(i) ω_0, ω_1 *inducen la misma orientación en* M.

(ii) $\omega_1 = f \,.\, \omega_0$, *con* $f(q) > 0$ *para todo* $q \in M$.

c) *Si* M *es conexo y* $\omega_1 = f \,.\, \omega_0$, *entonces* $f(q) > 0$ *para todo* $q \in M$, *o bien,* $f(q) < 0$ *para todo* $q \in M$.

Integración en Variedades Orientables

En lo que sigue, M es una variedad diferenciable de dimensión n.

Si ω es una n-forma sobre M, el **soporte** de ω se define por

$$sop(\omega) = \overline{\{p \in M \ / \ \omega(p) \neq 0\}}$$

Denotaremos con $\Omega_0^n(M)$ (respectivamente con: $\Gamma_0^n(M)$) al conjunto de las n-formas sobre M que son diferenciables (respectivamente: continuas) con soporte compacto.

Claramente, $\Omega_0^n(M)$ es un subespacio del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\Gamma_0^n(M)$.

Sea $C_0^0(M)$ el conjunto de las funciones continuas $f : M \to \mathbb{R}$ que tienen soporte compacto. Luego, si $f \in C_0^0(M)$ y $\omega \in \Omega^n(M)$, entonces $f \,.\, \omega \in \Gamma_0^n(M)$.

Si M es orientable y λ es una orientación para M, queda definida una aplicación lineal

$$I^\lambda : \Gamma_0^n(M) \to \mathbb{R}$$

cuyo valor en $\omega \in \Omega_0^n(M)$ se denomina la **integral** de ω **respecto** de λ.

Si no hay confusión con respecto a la elección de λ, dicho valor se denota usualmente como

$$I^\lambda(\omega) = \int_M \omega \tag{1}$$

Antes de pasar a su construcción, recordemos el siguiente resultado cuya demostración se encuentra, por ejemplo en NARASIMHAN, R.: "Analysis on Real and Complex Manifolds", Advanced Studies in Pure Mathematics (Vol. I), 1968 o en cualquier texto serio de Cálculo Avanzado.

Teorema de Cambio de Variables

Sean Ω y Ω' abiertos de $\mathbb{R}^n$, $h : \Omega' \to \Omega$ un difeomorfismo de clase C^1 y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua con soporte compacto. Si $h = (h^1, \ldots, h^n)$, sea $\mathrm{J}_h(u) = det\,(D_j h^i|_u)$, entonces

$$\int_\Omega f(v) \,.\, dv^1 \ldots dv^n = \int_{\Omega'} f(h(u)) \,.\, |\mathrm{J}_h(u)| \,.\, du^1 \ldots du^n \tag{2}$$

Construcción de I^λ

Sea $\mathcal{A}$ un atlas orientado y compatible con λ. Si $(U, x) \in \mathcal{A}$, $(V, y) \in \mathcal{A}$, con $U \cap V \neq \varnothing$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$ se tiene la siguiente igualdad sobre $U \cap V$

$$dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \mathrm{J}_{y \circ x^{-1}} \,.\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{3}$$

con

$$\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(q) > 0 \qquad\qquad \text{si } q \in U \cap V \tag{4}$$

Sea entonces $\omega \in \Gamma_0^n(M)$

$\star$ CASO PARTICULAR: *"Existe $(U,x) \in \mathcal{A}$ tal que sop$(\omega) \subset U$"*

Si $f : U \to \mathbb{R}$ se define por $f(q) = \omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\big|_q\right)$, entonces $f \in C_0^0(U)$ y $\omega|_U = f \,.\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

En este caso definimos

$$I^\lambda(\omega) = \int_{x(U)} f \circ x^{-1}(u) \,.\, du^1 \ldots du^n \tag{5}$$

La definición *no* depende de la elección de $(U,x) \in \mathcal{A}$.
En efecto,

supongamos que $sop(\omega) \subset V$, con $(V,y) \in \mathcal{A}$. Si $g : V \to \mathbb{R}$ se define por $g(q) = \omega(q)\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^n}\big|_q\right)$, entonces $g \in C_0^0(V)$ y $\omega|_V = g \,.\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n$.

Debemos mostrar la igualdad

$$\int_{x(U)} f \circ x^{-1}(u) \,.\, du^1 \ldots du^n = \int_{y(V)} g \circ y^{-1}(v) \,.\, dv^1 \ldots dv^n \tag{6}$$

o, equivalentemente, por ser $sop(\omega) \subset U \cap V$, la igualdad

$$\int_{x(U\cap V)} f \circ x^{-1}(u)\, du^1 \ldots du^n = \int_{y(U\cap V)} g \circ y^{-1}(v)\, dv^1 \ldots dv^n \tag{7}$$

Sean $\Omega = y(U \cap V), \Omega' = x(U \cap V)$ y $h = y \circ x^{-1} : \Omega' \to \Omega$.
Si $h = (h^1, \ldots, h^n)$, para $q \in U \cap V$, resulta

$$\mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(q) = det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\big|_q\right) = det\left(\frac{\partial(y^i \circ x^{-1})}{\partial u^j}\big|_{x(q)}\right) = det\left(D_j h^i|_{x(q)}\right)$$

En consecuencia, por (2) y (4), se tiene

$$\int_{y(U\cap V)} g \circ y^{-1}(v)\, dv^1 \ldots dv^n = \int_{x(U\cap V)} g \circ y^{-1}(h(u)) \,.\, \mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(x^{-1}(u)) \,.\, du^1 \ldots du^n \tag{8}$$

o, equivalentemente, por ser $g \circ y^{-1}(h(u)) = g \circ x^{-1}(u)$

$$\int_{y(U\cap V)} g \circ y^{-1}(v)\, dv^1 \ldots dv^n = \int_{x(U\cap V)} g \circ x^{-1}(u) \,.\, \mathrm{J}_{y\circ x^{-1}}(x^{-1}(u)) \,.\, du^1 \ldots du^n \tag{9}$$

Ahora bien, sobre $U \cap V$, es $\omega = g \, . \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = f \, . \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$; luego, por (3) es $f = g \, . \, \mathrm{J}_{yox^{-1}}$.

Esto nos dice que (7) es consecuencia de (9).

Por construcción, si ω_1 y ω_2 tienen soporte contenido en el dominio de una carta $(U, x) \in \mathcal{A}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_M (\alpha \, . \, \omega_1 + \beta \, . \, \omega_2) = \alpha \, . \int_M \omega_1 \; + \; \beta \, . \int_M \omega_2 \tag{10}$$

⋆ Caso general

Sean $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ y $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$.

Como $\omega \in \Gamma_0^n(M)$ es $\varphi_i \, . \, \omega \in \Gamma_0^n(M)$ con $sop(\varphi_i \, . \, \omega) \subset U_i$. Además, de acuerdo con el caso particular, se tiene definido $I^\lambda(\varphi_i \, . \, \omega) = \int_M \varphi_i \, . \, \omega$ y como el soporte de ω es compacto, la suma $\displaystyle\sum_{i \in I} \int_M \varphi_i \, . \, \omega$ es finita.

Definimos entonces

$$I^\lambda(\omega) = \int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_M \varphi_i \, . \, \omega \tag{11}$$

Hay que verificar que la definición de I^λ no depende de $\mathcal{A}$ ni de la partición diferenciable de la unidad elegida.

En efecto,

sea $\mathcal{A}' = \{(W_j, y_j)\}_{j \in J}$ otro atlas orientado compatible con λ y $\{\psi_j\}_{j \in J}$ una partición diferenciable de la unidad subordinada a $\{W_j\}_{j \in J}$.

Debido a (10) y al hecho de ser $\displaystyle\sum_{i \in I} \varphi_i = 1 = \sum_{j \in J} \psi_j$, se tiene:

$$\sum_{i \in I} \int_M \varphi_i \, . \, \omega = \sum_{i \in I} \int_M \left(\sum_{j \in J} \varphi_i \, . \, \psi_j \right) \, . \, \omega = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_M (\varphi_i \, . \, \psi_j) \, . \, \omega =$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_M (\varphi_i \, . \, \psi_j) \, . \, \omega = \sum_{j \in J} \int_M \left(\sum_{i \in I} \varphi_i \, . \, \psi_j \right) \, . \, \omega = \sum_{j \in J} \int_M \psi_j \, . \, \omega$$

NOTA

Si $\omega \in \Omega^n(M)$ es un elemento de volumen, queda definida –de manera natural– una aplicación lineal $I_\omega : C_0^0(M) \to \mathbb{R}$ cuyo valor en $f \in C_0^0$ se denota con

$$I_\omega(f) = \int_M f \,.\, \omega \tag{12}$$

y se denomina la **integral** de f **respecto** de ω.

La misma se define como $I_\omega(f) = I^\lambda(f \,.\, \omega)$, donde λ es la orientación compatible con el elemento de volumen ω.

EJEMPLO

Si $M = \mathbb{R}^n$ y $\omega = du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$, entonces I_ω es la integral usual de las funciones continuas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que tienen soporte compacto.

Variedades con Borde

En lo que sigue, denotaremos con $\mathbb{R}^n_+$ al semiespacio de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{R}^n \; / \; u^n \geq 0\}$$

y consideramos sobre el mismo la topología inducida por $\mathbb{R}^n$.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n_+$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ una función. Diremos que f es **diferenciable** $\left(= C^\infty\right)$ si para cada $u \in \Omega$ existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$, con $u \in U$ y una función diferenciable $\tilde{f} : U \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{f}|_{U \cap \Omega} = f|_{U \cap \Omega}$.

Proposición 54

Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n_+$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable.

b) Existe un abierto Ω' de $\mathbb{R}^n$, con $\Omega = \Omega' \cap \mathbb{R}^n_+$ y una función diferenciable $\tilde{f} : \Omega' \to \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{f}|_\Omega = f$

DEMOSTRACIÓN:

• b) $\Rightarrow$ a)

Es obvio

• a) $\Rightarrow$ b)

Por hipótesis, podemos construir una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{R}^n$, con $U_i \cap \Omega \neq \varnothing$, $\Omega \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ y funciones diferenciables $\tilde{f}_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ tales que $\tilde{f}_i|_{U_i \cap \Omega} = f|_{U_i \cap \Omega}$.

Como Ω es abierto en $\mathbb{R}^n_+$, existe un abierto W de $\mathbb{R}^n$ tal que $\Omega = W \cap \mathbb{R}^n_+$. Sea $V_i = W \cap U_i$ y $f_i = \tilde{f}_i|_{V_i}$. Si $\Omega' = \bigcup_{i \in I} V_i$, entonces Ω' es un abierto de $\mathbb{R}^n$ que satisface $\Omega = \Omega' \cap \mathbb{R}^n_+$ y $f_i|_{V_i \cap \Omega} = f|_{V_i \cap \Omega}$.

Debido al teorema 50, aplicado a la variedad diferenciable Ω', podemos construir, para cada $i \in I$, una función $\varphi_i \in \mathcal{F}(\Omega')$, con $\varphi_i \geq 0$, tal que $sop(\varphi_i) \subset V_i$, $\{sop(\varphi_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento localmente finito de Ω' y $\sum_{i \in I} \varphi_i = 1$

Sea W_i un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $sop(\varphi_i) \subset W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i$. De acuerdo con el corolario 51, aplicado a la variedad diferenciable Ω', al abierto W_i y al cerrado $sop(\varphi_i)$, podemos construir funciones $h_i \in \mathcal{F}(\Omega')$ tales que $h_i|_{sop(\varphi_i)} = 1$ y $h_i|_{\Omega' - W_i} = 0$.

Si definimos $g_i : \Omega' \to \mathbb{R}^m$ por

$$g_i(u) = \begin{cases} h_i(u).f_i(u) & \text{si } u \in V_i \\ 0 & \text{si } u \notin V_i \end{cases}$$

entonces, $g_i \in \mathcal{F}(\Omega')$.

Procedemos ahora a construir $\tilde{f}$.
Como $\{sop(\varphi_i)\}_{i\in I}$ es un cubrimiento localmente finito de Ω', para $u \in \Omega'$, se tiene que la suma $\sum_{i\in I} \varphi_i(u).g_i(u)$ es finita.

Definimos $\tilde{f} : \Omega' \to \mathbb{R}^m$ por $\tilde{f}(u) = \sum_{i\in I} \varphi_i(u).g_i(u)$.
La función $\tilde{f}$ es diferenciable pues, para cada $u \in \Omega'$, la suma resulta finita en un entorno de u.

Veamos ahora que $\tilde{f}|_\Omega = f$.
Si $u \in \Omega$, sea $J \subset I$ el conjunto *finito* constituído por los $i \in I$ tales que $u \in sop(\varphi_i)$.
Luego, $\sum_{i\in J} \varphi_i(u) = 1$ y $\tilde{f}(u) = \sum_{i\in J} \varphi_i(u).g_i(u)$.
Si $i \in J$, es $u \in sop(\varphi_i) \cap \Omega \subset V_i \cap \Omega$; entonces, $g_i(u) = f_i(u) = f(u)$.

Luego, $\tilde{f}(u) = f(u)$.

Proposición 55

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n_+$, Ω' un abierto de $\mathbb{R}^n$, con $\Omega = \Omega' \cap \mathbb{R}^n_+$ y $\varphi : \Omega' \to \mathbb{R}$ una función diferenciable que satisface $\varphi(u) = 0$ si $u \in \Omega$. Entonces, $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\big|_u = 0$ si $u \in \Omega$ y $1 \le j \le n$.

DEMOSTRACIÓN:

–Si $u = (u^1, \ldots, u^n)$ satisface $u^n > 0$, existe un abierto U de $\mathbb{R}^n$, entorno de u, con $U \subset \Omega$ y no hay nada que probar.

–Si $u^n = 0$, sea $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de Ω, con $u_i^n > 0$, tales que $u_i \to u$.
Como $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\big|_{u_i} = 0$, por continuidad, resulta $\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}\big|_u = 0$.

DEFINICIÓN

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n_+$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Para cada $u \in \Omega$ y $1 \leq j \leq n$ definimos la **derivada parcial** *de f* **respecto** *de u^j como $\dfrac{\partial f}{\partial u^j}\Big|_u = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u^j}\Big|_u$, donde $\tilde{f} : \Omega' \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable —con Ω' abierto en $\mathbb{R}^n$—que satisface $\Omega' \cap \mathbb{R}^n_+ = \Omega$ y $\tilde{f}|_\Omega = f$.*

La definición no depende de $\tilde{f}$, en virtud de la proposición anterior.

DEFINICIÓN

Una **variedad con borde** *de dimensión n es un espacio topológico M, con base numerable y Hausdorff, provisto de una familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, donde U_i es un abierto de M, φ_i es un homeomorfismo de U_i sobre un abierto de $\mathbb{R}^n_+$ que satisface las siguientes propiedades:*

a) $M = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$

b) Para $i, j \in I$, con $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \mathbb{R}^n$, es diferenciable.

c) La familia $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ es maximal con respecto a las propiedades anteriores.

Los miembros (U_i, φ_i) se denominan **cartas** *de M.*

EJEMPLO

$\mathbb{R}^n_+$ es una variedad con borde de dimensión n.

Proposición 56

Sea M una variedad con borde de dimensión n, U un abierto no vacío de M y Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m_+$. Si $\psi : U \to \Omega$ es un homeomorfismo, entonces $m = n$.

DEMOSTRACIÓN:

Achicando U, si fuera necesario, podemos suponer que U es el dominio de una carta (U, φ). Sea $\varphi(U) = W \subset \mathbb{R}^n_+$; luego, $f = \psi \circ \varphi^{-1} : W \to \Omega$ es un homeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n_+$ y $\mathbb{R}^m_+$.

Sea $u \in W$, con $u^n > 0$; achicando W alrededor de u, podemos suponer que W es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Sea $H^m = \{(u^1, \ldots, u^m) \in \mathbb{R}^m \;/\; u^m > 0\}$. Como Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m_+$, resulta $H^m \cap \Omega$ un abierto no vacío de $\mathbb{R}^m$.

Luego, $f : f^{-1}(H^m \cap \Omega) \to H^m \cap \Omega$ es un homeomorfismo entre un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$; luego, $m = n$.

Definición

Sea M una variedad con borde de dimensión n. Un punto $p \in M$ se dice **interior** *a M si existe una carta (U, φ), con $p \in U$, tal que $\varphi(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$; es decir, $\varphi(U)$ no interseca al hiperplano $u^n = 0$.*

El conjunto de puntos interiores se denota con $int(M)$ y admite –de manera natural– una estructura diferenciable de dimensión n, cuya topología es la inducida.

El **borde** *de M, que se denota con ∂M, se define como $\partial M = M - int(M)$.*

Proposición 57

Con las notaciones e hipótesis anteriores, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

a) $p \in \partial M$

b) Si (U, φ) es una carta de M, con $p \in U$, entonces $\varphi^n(p) = 0$

c) Existe una carta (U, φ), de M con $p \in U$, tal que $\varphi^n(p) = 0$

Demostración:

- $\big.a\big) \Rightarrow b\big)$

Sea (U, φ) una carta con $p \in U$ y $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^n)$. Si $\varphi^n(p) > 0$, podemos achicar U $\big($alrededor de $p\big)$ de modo que $\varphi(U)$ sea un abierto de $\mathbb{R}^n$. Esto nos dice que $p \in int(M)$, lo que es absurdo por hipótesis; luego, $\varphi^n(p) = 0$

- $\big.b\big) \Rightarrow c\big)$

Es obvio.

- $\big.c\big) \Rightarrow a\big)$

Supongamos que p es interior; luego, existe una carta (V, ψ), con $p \in V$, tal que $\psi(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^n$.
Por otro lado, por hipótesis, existe una carta (U, φ) con $p \in U$, tal que $\varphi^n(p) = 0$
Si $W = V \cap U$, entonces $\psi(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\varphi(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n_+$ que tiene intersección no vacía con el hiperplano $u^n = 0$ y, consecuentemente, $\varphi(W)$ no es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Sea $f = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(W) \to \mathbb{R}^n$; luego, f es continua e inyectiva.
Como $\psi(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces $f(\psi(W)) = \varphi(W)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$.

Esto es una contradicción y la misma provino de suponer que $p \in int(M)$; luego, $p \in \partial M$.

OBSERVACIÓN
Consideremos en ∂M la topología inducida por M. De acuerdo con la proposición anterior, para toda carta (U,φ) de M, se tiene que $\varphi(U\cap\partial M)=\varphi(U)\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})$

Luego, si consideramos el homeomorfismo $\pi:\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}\to\mathbb{R}^{n-1}$ definido por $\pi(u^1,\ldots,u^{n-1},0)=(u^1,\ldots,u^{n-1})$, resulta que $\pi(\varphi(U\cap\partial M)$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$.
Suponiendo que $U\cap\partial M\neq\varnothing$, obtenemos un homeomorfismo $\psi:U\cap\partial M\to\pi(\varphi(U\cap\partial M))$, definido por $\psi(p)=(\varphi^1(p),\ldots,\varphi^{n-1}(p))=\pi\circ\varphi(p)$.

La inversa de ψ es claramente $\psi^{-1}:\pi(\varphi(U\cap\partial M))\to U\cap\partial M$, definida por $\psi^{-1}(u^1,\ldots,u^{n-1})=\varphi^{-1}(u^1,\ldots,u^{n-1},0)$.
Esto nos dice que ∂M es una variedad topológica de dimensión $n-1$, provista del atlas $\mathcal{A}$, formado por las cartas $(U\cap\partial M,\pi\circ\varphi|_{U\cap\partial M})$, con (U,φ) carta de M y $U\cap\partial M\neq\varnothing$.

Es más, el atlas $\mathcal{A}$ es diferenciable.
En efecto,

sean (U,φ) y (U',φ') cartas con $U\cap U'\cap\partial M$ no vacío.

Las correspondientes cartas $(U\cap\partial M,\psi)$ y $(U'\cap\partial M,\psi')$ satisfacen, en $U\cap U'\cap\partial M$, que $\psi'\circ\psi^{-1}:\psi(U\cap U'\cap\partial M)\to\psi'(U\cap U'\cap\partial M)$ está definido por $\psi'\circ\psi^{-1}(u^1,\ldots,u^{n-1})=\pi\circ\varphi'\circ\varphi^{-1}(u^1,\ldots,u^{n-1},0)$.

Ahora bien, como $\varphi'\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap U')\subset\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}^n$ es diferenciable, –por la proposición 54– existe un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$, con $\varphi(U\cap U')=\Omega\cap\mathbb{R}^n_+$, y una función diferenciable $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ tal que $f|_{\varphi(U\cap U')}=\varphi'\circ\varphi^{-1}$.
Si $f=(f^1,\ldots,f^n)$, entonces

$$\psi'\circ\psi^{-1}(u^1,\ldots,u^{n-1})=(f^1(u^1,\ldots,u^{n-1},0),\ldots,f^{n-1}(u^1,\ldots,u^{n-1},0))$$

Lo que prueba la diferenciabilidad de $\psi'\circ\psi^{-1}$.

Como el mismo argumento vale para $\psi\circ(\psi')^{-1}$, resulta $\mathcal{A}$ diferenciable.

Si (U,φ) es una carta de M, con $U\cap\partial M$ no vacío, la carta $(U\cap\partial M,\pi\circ\varphi|_{U\cap\partial M})$ se denomina la **carta inducida** por (U,φ).

Resumiendo, hemos probado

Proposición 58

Si M es una variedad con borde de dimensión n, entonces ∂M es una variedad diferenciable, - sin borde -de dimensión $n-1$.

EJERCICIO 77

Sea N una variedad diferenciable de dimensión n y $\Omega\subset N$ un abierto no vacío con la siguiente propiedad:

"Si $p \in \overline{\Omega} - \Omega$, existe un abierto U de N, entorno de p y una función $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $df_p \neq 0$ y $\Omega \cap U = \{q \in U \ / \ f(q) > 0\}$"

Probar que $M = \overline{\Omega}$ es una variedad con borde de dimensión n y $\partial M = \overline{\Omega} - \Omega$.

DEFINICIÓN

Si M y N son variedades diferenciables con o sin borde y $f : M \to N$ es una función, la **diferenciabilidad** † *de f se define igual que en el caso sin borde.*

EJERCICIO 78

Sea M una variedad con borde de dimensión n y consideremos sobre ∂M, la estructura diferenciable inducida por M.
Verificar que la inclusión $i : \partial M \to M$ es diferenciable.

NOTACIÓN

Como en el caso sin borde, si M es una variedad con borde, denotamos con $\mathcal{F}(M)$ al conjunto de las funciones diferenciables $f : M \to \mathbb{R}$.

NOTA

Modificando ligeramente la demostración del lema 5, se obtiene:

Proposición 59

Sea M una variedad con borde de dimensión n, $W \subset M$ un abierto y $p \in W$.

a) Existe $\varphi \in \mathcal{F}(M)$ y un entorno abierto U de p, con $U \subset W$, que satisfacen
  (i) $0 \leq \varphi(q) \leq 1$ si $q \in M$
  (ii) $\varphi|_{\overline{U}} = 1$
  (iii) $sop(\varphi)$ es compacto y está contenido en W

b) Si $f \in \mathcal{F}(W)$, existe $\tilde{f} \in \mathcal{F}(M)$ y un entorno abierto U de p, con $U \subset W$, tales que $f|_U = \tilde{f}|_U$.

OBSERVACIÓN

Sea M una variedad con borde de dimensión n, $p \in M$ y $W \subset M$ un abierto que contiene al punto p. El **espacio tangente** a W en p, que también denotamos con W_p, se define como en el caso sin borde.

Debido a la proposición anterior, resulta que M_p y W_p son canónicamente isomorfos. En consecuencia, ignoraremos dicho isomorfismo y escribimos $M_p = W_p$. Si (U, x) es una

---

† C^∞

carta de M, con $p \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, queda definida la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_p \right\}$ de M_p, definiendo –para $f \in \mathcal{F}(W)$–

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}\Big|_x(p) \quad \dagger$$

Si M y N son variedades con o sin borde y $f : M \to N$ es una función diferenciable, la **diferencial** $f_{*p} : M_p \to N_{f(p)}$, para $p \in M$, se define igual que en el caso sin borde.

EJERCICIO 79

Sea M una variedad con borde de dimensión n e $i : \partial M \to M$ la inclusión.

a) *Verificar que si $p \in \partial M$ y (U, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, es una carta de M con $p \in U$, entonces $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\Big|_p \right\}$ es una base de $i_{*p}\left((\partial M)_p\right) \subset M_p$.*

b) *Deducir de a) que i_{*p} es un monomorfismo.*

DEFINICIÓN

Sea M una variedad con borde de dimensión n y $p \in \partial M$. Un vector $v \in M_p$ se dice **positivo** *o* **interior** *si, para toda $f \in \mathcal{F}(M)$, con $f(p) = 0$ y $f \geq 0$, se verifica que $v(f) \geq 0$ y existe alguna $f \in \mathcal{F}(M)$, con $f(p) = 0$ y $f \geq 0$ tal que $v(f) > 0$.*

Un vector $v \in M_p$ se dice **exterior** *si $-v$ es interior.*

Proposición 60

Sea M una variedad con borde de dimensión n y $p \in \partial M$. Sea $v \in M_p$ y (U, x), con $x = (x^1, \ldots, x^n)$, una carta de M con $p \in U$. Si $v = \sum_{i=1}^{n} a^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p$, son equivalentes las afirmaciones

a) *v es interior*

b) *$a^n > 0$*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x(p) = (b, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ y W el abierto de $\mathbb{R}^{n-1}$ y entorno de b, definido por $W = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \;/\; (u, 0) \in x(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\}$.

Para $f \in \mathcal{F}(M)$ con $f(p) = 0$ y $f \geq 0$, la función $g : W \to \mathbb{R}$ definida por $g(u) = f \circ x^{-1}(u, 0)$, tiene un mínimo local en b; luego, $\frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}\Big|_{(b,0)} = \frac{\partial g}{\partial u^i}\Big|_b = 0$ si $1 \leq i \leq n-1$.

† definida en página 115

En consecuencia, $v(f) = a^n \cdot \frac{\partial f}{\partial x^n}\big|_p$.

Debido a la proposición anterior, podemos construir $h \in \mathcal{F}(M)$ con $h(p) = 0$, $h \geq 0$ y un abierto V de M, con $p \in V \subset U$, tal que $h|_V = x^n|_V$. En este caso es $v(h) = v(x^n) = a^n$.

• a) $\Rightarrow$ b)

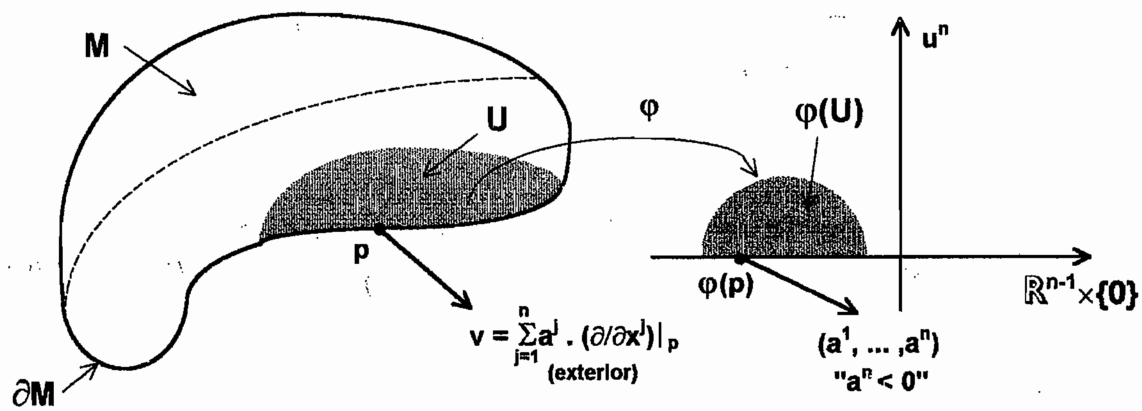
Si v es interior, para la h construída, se tiene que $a^n = v(h) \geq 0$. Si fuese $a^n = 0$, sería $v(f) = 0$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$ con $f(p) = 0$ y $f \geq 0$.

Luego, $a^n > 0$

• b) $\Rightarrow$ a)

Si $a^n > 0$, para la h construída, se obtiene que $v(h) > 0$. Falta verificar que si $f \in \mathcal{F}(M)$ satisface $f(p) = 0$ y $f \geq 0$, entonces $v(f) \geq 0$.
En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x^n}\Big|_p = \lim_{t \to 0+} \frac{f \circ x^{-1}(b,t) - f \circ x^{-1}(b,0)}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{f \circ x^{-1}(b,t)}{t} \geq 0$$



EJERCICIO 80

Sea M una variedad con borde de dimensión n y para cada $p \in M$ y $k \geq 1$, sean $\mathbf{T}^0_k(M_p)$ y $\Lambda^k(M_p)$ los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales definidos como en el caso sin borde.

Para $m = n + n^k$, consideremos el semiespacio de $\mathbb{R}^m$ formado por las m-uplas $(u^1, \ldots, u^m)$ que satisfacen $u^n \geq 0$.

Haciendo las modificaciones obvias a las definiciones dadas, verificar que

a) $\mathbf{T}^0_k(M) = \bigcup\limits_{p\in M} \mathbf{T}^0_k(M_p)$ *resulta –de manera natural– una variedad con borde de dimensión m.*

b) $\Lambda^k(M) = \bigcup\limits_{p\in M} \Lambda^k(M_p)$, *con* $1 \leq k \leq n$, *es una variedad con borde de dimensión* $n + \binom{n}{k}$

c) *la proyección* $\Pi : \Lambda^k(M) \to M$ *es diferenciable.*

NOTA

◇ Si M es una variedad con borde, una **k-forma** ω sobre M es una función $\omega : M \to \mathbf{T}^0_k(M)$ tal que $\omega(p) \in \Lambda^k(M_p) \subset \mathbf{T}^0_k(M_p)$ si $p \in M$; siendo $\Lambda^k(M_p) = \{0\}$ si $k > n$.

◇ Como en el caso sin borde, denotamos con $\Omega^k(M)$ al conjunto de las k-formas sobre M que son diferenciables y con $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$.

◇ La **diferencial exterior** $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ se define como en el caso sin borde.

◇ El teorema 50 (Partición diferenciable de la unidad) vale también para las variedades con borde.

EJERCICIO 81

Sea M una variedad con borde, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un cubrimiento por abiertos de M y $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ una partición diferenciable de la unidad para M subordinada a $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Si $B = \{\alpha \in A \ / \ sop(\varphi_\alpha) \cap \partial M \neq \varnothing\}$ y $V_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$, $\psi_\alpha = \varphi_\alpha|_{\partial M}$ si $\alpha \in B$.

Verificar que $(\psi_\alpha)_{\alpha\in B}$ es una partición diferenciable de la unidad para ∂M subordinada a $(V_\alpha)_{\alpha\in B}$.

OBSERVACIÓN

Elemento de volumen, **orientación** y **atlas orientado** se definen –en variedades con borde– del mismo modo que en las sin borde.

EJERCICIO 82

Sea M una variedad con borde. Verificar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

a) *M es orientable*

b) *M admite un atlas orientado*

c) *M admite un elemento de volumen.*

EJERCICIO 83

Sea M una variedad con borde de dimensión n e $i : \partial M \to M$ la inclusión. Si $p \in \partial M$, sea $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ una base de $i_{*p}\left((\partial M)_p)\right)$ y $\eta, \eta' \in M_p$ vectores exteriores.

Probar que las bases de M_p definidas por $\{\eta, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ y $\{\eta', w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ definen la misma orientación.

Sugerencia: usar la proposición 60.

Proposición 61

Sea M una variedad con borde de dimensión n. Si M es orientable, entonces ∂M también lo es.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $i : \partial M \to M$ la inclusión y λ una orientación para M.
Si $p \in \partial M$, sea $\eta(p) \in M_p$ un vector exterior. Si $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base de $(\partial M)_p$, con la propiedad que

$$\lambda(p) = [\eta(p), i_{*p}(v_1), \ldots, i_{*p}(v_{n-1})]$$

definimos la orientación $\partial\lambda(p)$ –para $(\partial M)_p$– como

$$\partial\lambda(p) = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$$

Es claro que $\partial\lambda(p)$ está bien definida y, por un ejercicio anterior no depende del vector exterior $\eta(p)$ elegido.

Falta verificar que existe una carta (V, y) de ∂M, con $p \in V$, tal que

$$\partial\lambda(q) = \left[\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}\Big|_q\right]$$

si $q \in V$ e $y = (y^1, \ldots, y^{n-1})$.

Sea (U, x) una carta de M, con $p \in U$ y $x = (x^1, \ldots, x^n)$, tal que

$$\lambda(q) = \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q\right]$$

si $q \in U$; luego,

$$\lambda(q) = \left[(-1)^{n-1}.\ \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\Big|_q\right]$$

Sea $q \in V = U \cap \partial M$ y $\eta(q) = -\dfrac{\partial}{\partial x^n}\Big|_q$; luego, $\eta(q) \in M_q$ es un vector exterior y

$$\lambda(q) = \left[(-1)^n.\ \eta(q), \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_q, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\Big|_q\right]$$

Sea (V, y) con $y = (y^1, \ldots, y^{n-1})$ definido por

$$y^j = \begin{cases} (-1)^n.\ x^1|_V & \text{si } j = 1 \\ x^j|_V & \text{si } 2 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Entonces (V, y) satisface lo requerido.

DEFINICIÓN

En la situación anterior, $\partial\lambda$ se denomina la **orientación inducida** *por λ.*

NOTA

$\diamond$Si M es una variedad con borde de dimensión n, denotaremos con $\Omega_0^n(M)$ (respectivamente: $\Gamma_0^n(M)$) al conjunto de las n-formas sobre M que son diferenciables (respectivamente: continuas) con soporte compacto.

$\diamond$Como en el caso sin borde, si M es orientable y λ es una orientación para M, queda definida una aplicación lineal $I^\lambda : \Gamma_0^n(M) \to \mathbb{R}$, cuyo valor en $\omega \in \Gamma_0^n(M)$ se denomina la **integral** de ω **respecto** de λ. Si no hay confusión con respecto a la elección de λ, dicho valor se denota como

$$I^\lambda(\omega) = \int_M \omega$$

Teorema de Stokes

Sea M una variedad con borde de dimensión n e $i : \partial M \to M$ la inclusión. Si $\omega \in \Omega_0^{n-1}(M)$ es $i^*(\omega) \in \Omega_0^{n-1}(\partial M)$ y $d\omega \in \Omega_0^n(M)$. Si M es orientable y λ s una orientación para M, consideramos en ∂M la orientación inducida $\partial\lambda$.

Sea $\int_M d\omega$ la integral de $d\omega$ respecto de λ y $\int_{\partial M} i^*(\omega)$ la integral de $i^*(\omega)$ respecto de $\partial\lambda$. Se verifica:

$$\int_{\partial M} i^*(\omega) = \int_M d\omega \qquad \text{(STOKES)}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\mathcal{A}$ un atlas de M compatible con λ.

$\star$ CASO PARTICULAR: *Existe $(U, x) \in \mathcal{A}$ con $sop(\omega) \subset U$*

Si $x = (x^1, \ldots, x^n)$, sean $f_k \in \mathcal{F}(U)$ las únicas que satisfacen

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}.\ f_k.\ dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad (1)$$

donde el símbolo $\widehat{\ }$ sobre dx^k indica que el mismo se omite.

Luego, $d\omega = \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f_k}{\partial x^k}\right).\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ sobre U y $sop(\omega) \subset U$.

Para $q \in U$, es $\dfrac{\partial f_k}{\partial x^k}\Big|_q = \dfrac{\partial (f_k \circ x^{-1})}{\partial u^k}\Big|_{x(q)}$; luego,

$$\int_M d\omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{x(U)} \frac{\partial(f_k \circ x^{-1})}{\partial u^k} \, . \, du^1 \dots du^n \qquad (2)$$

Caben las siguientes posibilidades

◇ **Posibilidad 1**: *"$U \cap \partial M$ es vacío"*

Por ser $sop(\omega) \subset U$ y $U \cap \partial M$ vacío, resulta $i^*(\omega) = 0$; luego, $\int_{\partial M} i^*(\omega) = 0$. En consecuencia, debemos verificar que $\int_M d\omega = 0$.

Como $U \cap \partial M$ es vacío, entonces $x(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ lo es y por lo tanto, $x(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.

Para $k = 1, \dots, n$ se tiene que $sop(f_k \circ x^{-1})$ es un compacto contenido en $x(U)$.

Luego, si definimos $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$g_k(u) = \begin{cases} f_k \circ x^{-1}(u) & \text{si } \; u \in x(U) \\ 0 & \text{si } \; u \notin x(U) \end{cases}$$

se tiene que $g_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ y

$$\begin{aligned} \int_{x(U)} \frac{\partial(f_k \circ x)}{\partial u^k} \, . \, du^1 \dots du^n &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} \, . \, du^1 \dots du^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} \, du^k \right) \, . \, du^1 \dots \widehat{du^k} \dots du^n \end{aligned}$$

Ahora bien, como $sop(g_k)$ es compacto, entonces $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} \, du^k = 0$

Esto muestra que cada sumando en (2) es nulo; luego, $\int_M d\omega = 0$.

◇ **Posibilidad 2** : *"$U \cap \partial M$ es no vacío"*

En este caso $x(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ es no vacío.

Nuevamente, para $k = 1, \dots, n$, tenemos que $sop(f_k \circ x^{-1})$ es un compacto contenido en $x(U) \subset \mathbb{R}^n_+$.

Luego, si definimos $g_k : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ por

$$g_k(u) = \begin{cases} f_k \circ x^{-1}(u) & \text{si } \; u \in x(U) \\ 0 & \text{si } \; u \notin x(U) \end{cases}$$

se tiene que $g_k \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n_+)$ y

$$\int_{x(U)} \frac{\partial(f_k \circ x^{-1})}{\partial u^k} \, . \, du^1 \dots du^n = \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} \, . \, du^1 \dots du^n$$

Como $sop(g_k)$ es compacto, para $k = 1, \dots, n-1$, resulta $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} \, du^k = 0$ y por consiguiente es $\int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial g_k}{\partial u^k} du^1 \dots du^n = 0$

En consecuencia, por (2), se obtiene

$$\int_M d\omega = \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{\partial g_n}{\partial u^n} \, . \, du^1 \dots du^n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_k}{\partial u^n} \, du^n \right) du^1 \dots du^{n-1} \tag{3}$$

Debido a que g_n tiene soporte compacto, resulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial g_n}{\partial u^n}\Big|_{(u^1,\dots,u^{n-1},u^n)} du^n = -g_n(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)$$

Luego,

$$\int_M d\omega = -\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_n(u^1, \dots, u^{n-1}, 0) \, du^1 \dots du^{n-1} \tag{4}$$

Debido a (1), sobre $U \cap \partial M$, se tiene la igualdad

$$i^*(\omega) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \, . \, f_k \circ i \, . \, i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n) \tag{5}$$

Siendo $x^n \circ i = 0$, es $i^*(dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n) = 0$ si $1 \leq k \leq n-1$
Luego,

$$i^*(\omega) = (-1)^{n-1} \, . \, f_n \circ i \, . \, d(x^1 \circ i) \wedge \dots \wedge d(x^{n-1} \circ i) \tag{6}$$

Sea $V = U \cap \partial M$ e $y = (y^1, \dots, y^{n-1})$ definida por

$$y^k = \begin{cases} (-1)^n \, . \, x^1 \circ i & \text{si } \; k = 1 \\ x^k \circ i & \text{si } \; 2 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Entonces, (V, y) es una carta de ∂M que satisface $\partial\lambda(q) = \left[\frac{\partial}{\partial y^1}\Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n-1}}\Big|_q \right]$ si $q \in V$.
Por ser $i^*(\omega) = -f_n \circ i \, . \, dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-1}$ sobre V, con $sop(i^*(\omega)) \subset V$, se tiene

$$\int_{\partial M} i^*(\omega) = -\int_{y(V)} f_n \circ i \circ y^{-1}(v^1, \dots, v^{n-1}) \, dv^1 \dots dv^{n-1} \tag{7}$$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ el abierto definido como

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^{n-1} \ / \ (u,0) \in x(U) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\}$$

Si (V,z) es la carta de ∂M definida por $z(q) = (x^1(q), \dots, x^{n-1}(q))$, entonces $z(V) = \Omega$. Considerando el difeomorfismo $h = y \circ z^{-1} : \Omega \to y(V)$, por el teorema de cambio de variables, obtenemos

$$\int_{y(V)} f_n \circ i \circ y^{-1}(v) \ . \ dv^1 \dots dv^{n-1} = \int_\Omega f_n \circ i \circ y^{-1}(h(u)) \ . \ |\mathrm{J}_h(u)| \ du^1 \dots du^{n-1} \tag{8}$$

Si $u = (u^1, \dots, u^{n-1})$, es $h(u) = ((-1)^n . \ u^1, \dots, u^{n-1})$; con lo cual $|\mathrm{J}_h(u)| = |(-1)^n| = 1$.
Por otro lado,

$$f_n \circ i \circ y^{-1}(h(u)) = f_n \circ i \circ z^{-1}(u) = f_n \circ x^{-1}(u^1, \dots, u^{n-1}, 0)$$

Luego, por (7) y (8), resulta

$$\int_{\partial M} i^*(\omega) = -\int_\Omega f_n \circ x^{-1}(u^1, \dots, u^{n-1}, 0) \ du^1 \dots du^{n-1} \tag{9}$$

Por construcción de g_n, el miembro derecho de (4) coincide con el miembro derecho de (9); luego

$$\int_{\partial M} i^*(\omega) = \int_M d\omega$$

⋆ Caso general

Si $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, sea φ_α una partición diferenciable de la unidad para M subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$.
Para $\alpha \in I$, sea $\omega_\alpha = \varphi_\alpha . \ \omega$; luego, $\omega_\alpha \in \Omega_0^{n-1}(M)$ con $sop(\omega_\alpha) \subset U_\alpha$.
De acuerdo con el caso particular es

$$\int_{\partial M} i^*(\omega_\alpha) = \int_M d\omega_\alpha \tag{10}$$

Como $\omega = \sum_{\alpha \in I} \omega_\alpha$ (suma finita), entonces $d\omega = \sum_{\alpha \in I} d\omega_\alpha$ e $i^*(\omega) = \sum_{\alpha \in I} i^*(\omega_\alpha)$.

La igualdad deseada es ahora consecuencia de (10).

NOTA:

El concepto de inmersión o sumersión para variedades con borde es análogo al caso sin borde.

DEFINICIÓN

Sea $n \geq 2$ y consideremos a $\mathbb{R}^n$ con la estructura diferenciable usual. Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ se denomina una **subvariedad con borde** *de dimensión $2 \leq k \leq n$ de $\mathbb{R}^n$, si M es una variedad con borde de dimensión k y la inclusión $i : M \to \mathbb{R}^n$ es una sumersión.*

EJERCICIO 84

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con borde de dimensión k. Verificar que ∂M es una subvariedad (sin borde) de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $k-1$.

EJERCICIO 85

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde de dimensión n y sea $\omega = du^1 \wedge \ldots \wedge du^n$ el elemento de volumen usual de $\mathbb{R}^n$.
Si $i : M \to \mathbb{R}^n$ es la inclusión, verificar que $dV_M = i^*(\omega) \in \Omega^n(M)$ es un elemento de volumen para M.

El mismo se denomina el **elemento de volumen usual** para M y la orientación que induce se llama la **orientación usual** de M.

EJERCICIO 86

Sea $M \subset \mathbb{R}^2$ una subvariedad compacta con borde de dimensión 2. Sea D un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene a M y $F_1, F_2 : D \to \mathbb{R}$ diferenciables.
Interpretar (notación) y verificar el

Teorema de Green

$$\int_{\partial M} F_1 \, . \, du^1 + F_2 \, . \, du^2 = \int_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial u^1} - \frac{\partial F_1}{\partial u^2} \right) \, . \, du^1 \wedge du^2$$

EJERCICIO 87

Para $p \in \mathbb{R}^n$, sea $<,>: \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$ el producto interno definido por:

$$< v, w >= \sum_{j=1}^{n} a^j . \, b^j$$

si $v = \sum_{j=1}^{n} a^j . \, \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p$ y $w = \sum_{j=1}^{n} b^j . \, \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p$.

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde e $i : M \to \mathbb{R}^n$ la inclusión. Para $p \in M$, definimos el producto interno

$$<,>_p: M_p \times M_p \to \mathbb{R} \qquad \text{por} \qquad <v,w>_p = <i_{*p}(v), i_{*p}(w)>$$

Probar:

a) Si para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ se define la aplicación $<X,Y>: M \to \mathbb{R}$ como $<X,Y>(p) = <X(p), Y(p)>_p$, entonces $<X,Y> \in \mathcal{F}(M)$.

b) La aplicación $<,>: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$ –definida según a)– es un tensor.

El mismo se denomina la **métrica** de M **inducida** por la euclídea de $\mathbb{R}^n$.

EJERCICIO 88

Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una variedad con o sin borde de dimensión k, con $k \geq 2$ si M tiene borde y con $k \geq 1$ si no lo tiene. Se supone M orientable y sea λ una orientación para M. Si $\omega \in \Omega^k(M)$ es un elemento de volumen, probar:

a) Si $p \in M$, sean $\{e_1, \ldots, e_k\}$, $\{e'_1, \ldots, e'_k\}$ dos bases ortonormales de M_p (respecto de $<,>_p$) orientadas positivamente; es decir, $[e_1, \ldots, e_k] = [e'_1, \ldots, e'_k] = \lambda(p)$
Entonces, $\omega(p)(e_1, \ldots, e_k) = \omega(p)(e'_1, \ldots, e'_k)$

b) Sea $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(p) = \omega(p)(e_1, \ldots, e_k)$, donde $\{e_1, \ldots, e_k\}$ es una base ortonormal de M_p, orientada positivamente. Entonces $f \in \mathcal{F}(M)$.

c) Sea $\theta \in \Omega^k(M)$ definida por $\theta = (1/f)\,.\,\omega$. Entonces θ es el único elemento de volumen para M que satisface $\theta(p)(e_1, \ldots, e_k) = 1$, cualquiera sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base ortonormal de M_p orientada positivamente.

d) Si $k = n$, entonces $\theta = dV_M$, si λ es la orientación usual (ejercicio 85)

e) Si $k = n - 1$, existe una única función diferenciable $\mathbf{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ que, en cada $p \in M$, satisface

(i) $\mathbf{N}(p) \in \mathbb{R}^n_p$

(ii) $<\mathbf{N}(p), v> = 0$ si $v \in i_{*p}(M_p)$ $\quad$ (i =inclusión)

(iii) $<\mathbf{N}(p), \mathbf{N}(p)> = 1$

(iv) Si $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ es una base de M_p orientada positivamente, entonces

$$\{\mathbf{N}(p), i_{*p}(e_1), \ldots, i_{*p}(e_{n-1})\}$$

es una base orientada positivamente de $\mathbb{R}^n_p$ (orientación usual).

Sugerencia: Sea $p \in M$ y $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal de M_p orientada positivamente. Considerar la aplicación lineal $\mathrm{T}(p) : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mathrm{T}(p)(v) = (du^1 \wedge \ldots \wedge du^n)(p)\,(v, i_{*p}(e_1), \ldots, i_{*p}(e_{n-1}))$$

Es decir,

$$\mathrm{T}(p)(v) = det \begin{pmatrix} v^1 & \cdots & v^n \\ e_1(u^1 \circ i) & \cdots & e_1(u^n \circ i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n-1}(u^1 \circ i) & \cdots & e_{n-1}(u^n \circ i) \end{pmatrix}$$

si $v = \sum_{j=1}^{n} v^j . \frac{\partial}{\partial u^j}|_p$

Verificar que $\mathrm{T}(p)$ no depende de la base ortonormal –orientada positivamente– elegida y además que $\mathrm{T}(p) \neq 0$.

Sea $\eta(p) \in \mathbb{R}^n_p$ el único que satisface $\mathrm{T}(p)(v) = < \eta(p), v >$ para todo $v \in \mathbb{R}^n_p$. Mostrar que $\eta : M \to T\mathbb{R}^n$ es diferenciable y definir $\mathbf{N} : M \to T\mathbb{R}^n$ por

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\eta(p)}{< \eta(p), \eta(p) >^{\frac{1}{2}}}$$

DEFINICIÓN

Con las hipótesis y notaciones del ejercicio anterior, la k-forma construída en c) –que denotamos con $\theta = dv_M$– se denomina el **elemento de volumen inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$ y la orientación λ**.

Si $k = 1$ (respectivamente $k = 2$), dV_M se denomina el **elemento de arco** *(respectivamente* **elemento de área***).*

La función $\mathbf{N} : M \to T\mathbb{R}^n$, construída en e), se denomina la **normal exterior a M asociada a λ**.

EJERCICIO 89

Con las hipótesis del ejercicio anterior para $k = n - 1$, sea $p \in M$ y $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de M_p. Verificar que:

$$dV_M(p)(v_1, \ldots, v_{n-1}) = (du^1 \wedge \ldots \wedge du^n)(p)\,(\mathbf{N}(p), i_{*p}(v_1), \ldots, i_{*p}(v_{n-1}))$$

DEFINICIÓN

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un abierto no vacío y $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} F^i . \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(D)$.

La **divergencia** *de* **F** *se define como*

$$div(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial u^i}$$

perteneciente al espacio $\mathcal{F}(D)$.

Si $n = 3$, el **rotor** *de* **F** *se define como*

$$rot(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial F^3}{\partial u^2} - \frac{\partial F^2}{\partial u^3}\right) . \frac{\partial}{\partial u^1} + \left(\frac{\partial F^1}{\partial u^3} - \frac{\partial F^3}{\partial u^1}\right) . \frac{\partial}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial u^1} - \frac{\partial F^1}{\partial u^2}\right) . \frac{\partial}{\partial u^3}$$

EJERCICIO 90

Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ *una subvariedad compacta con borde de dimensión* $m = 2, 3$ *y sean* $i : \partial M \to M$, $j : M \to \mathbb{R}^3$ *las inclusiones. Sea* $D \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto que contiene a* M *y* $\mathbf{F} \in \mathfrak{X}(D)$ *con* $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{3} F^i . \frac{\partial}{\partial u^i}$.

a) *Si* $m = 3$, *sea* λ *la orientación usual de* M *y* $dV = dV_M$ *el elemento de volumen usual. Sea* $\mathbf{N} : \partial M \to T\mathbb{R}^3$ *la normal exterior a* ∂M *asociada a* $\partial\lambda$ *y* $dA = dV_{\partial M}$ *el elemento de volumen (área) de* ∂M *inducido por la métrica euclídea de* $\mathbb{R}^3$ *y la orientación* $\partial\lambda$. *Sea* $\theta \in \Omega^2(D)$ *definida por*
$$\theta = F^1 . du^2 \wedge du^3 + F^2 . du^3 \wedge du^1 + F^3 . du^1 \wedge du^2$$
y $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^2(M)$.
Utilizando el ejercicio anterior, verificar que $i^*(\omega) = < \mathbf{F}, \mathbf{N} > . dA$

b) *En la situación de a), verificar (usando Stokes) el*
Teorema de la Divergencia
$$\int_{\partial M} < \mathbf{F}, \mathbf{N} > . dA = \int_M div(\mathbf{F}). dV$$

c) *Si* $m = 2$, *sea* λ *una orientación para* M *y* $dA = dV_M$ *el elemento de volumen (área) de* M *inducido por la métrica euclídea de* $\mathbb{R}^3$ *y la orientación* $\partial\lambda$. *Sea* $\mathbf{N} : M \to T\mathbb{R}^3$ *la normal exterior a* M *asociada a* λ *y* $dS = dV_{\partial M} \in \Omega^1(M)$ *el elemento de volumen (arco) inducido por la métrica euclídea de* $\mathbb{R}^3$ *y la orientación* $\partial\lambda$.
   (i) *Mostrar que existe un único* $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$ *que satisface* $dS(p)(X(p)) = 1$ *para todo* $p \in \partial M$.
   (ii) *Sea* $\theta \in \Omega^1(D)$ *la 1-forma definida por* $\theta = F^1 . du^1 + F^2 . du^2 + F^3 . du^3$ *y* $\omega = j^*(\theta) \in \Omega^1(M)$. *Utilizando el ejercicio anterior, verificar que*
$$d\omega = < rot(\mathbf{F}), \mathbf{N} > . A$$

d) *En la situación de c), sea* $T : \partial M \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(p) = (j \circ i)_{*p}(X(p))$ *si* $p \in \partial M$. *Verificar (usando Stokes) el*
Teorema del Rotor
$$\int_{\partial M} < \mathbf{F}, T > ds = \int_M < rot(\mathbf{F}), \mathbf{N} > . dA$$

EJERCICIO 91

Enunciar y probar el teorema de la divergencia para $M \subset \mathbb{R}^n$, *con* $n \geq 2$.

Ejercicios Complementarios

1. Sea $S_r^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x^2+y^2+z^2 = r^2\}$ y sea $\mathcal{A}$ el atlas diferenciable sobre S_r^2 dado por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur † . Sea $\mathcal{C}$ el semimeridiano de S_r^2 de extremos (incluídos): polo norte $\mathbf{N} = (0,0,r)$ y polo sur $\mathbf{S} = (0,0,-r)$ que pasa por el oeste $\mathbf{O} = (r,0,0)$.
   a) Verificar que $S_r^2 - \mathcal{C}$ es un abierto de S_r^2 respecto de la topología inducida por $\mathbb{R}^3$.
   b) Sea $f : (0,2\pi) \times (0,\pi) \to S_r^2 - \mathcal{C}$ el homeomorfismo definido por
   $$f(\alpha,\theta) = (r\,\mathrm{cos}\alpha\mathrm{sen}\theta, r\,\mathrm{sen}\alpha\mathrm{sen}\theta, r\,\mathrm{cos}\theta)$$
   Mostrar que $(S_r^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ es una carta admisible para $\mathcal{A}$.

2. Sea $M = S^2$ y $g \in \mathcal{F}(S)$ definida por $g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Sea $(S^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ la carta de S^2 definida en el ejercicio anterior, para el caso $r = 1$. Si $U = S^2 - \mathcal{C}$ y $f^{-1} = (u^1 \circ f^{-1}, u^2 \circ f^{-1}) = (\alpha,\theta)$, calcular:
   $$\frac{\partial g}{\partial \alpha}\Big|_p \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial \theta}\Big|_p$$
   para cada $p \in U$

3. Sean M, N variedades diferenciables. Probar que las proyecciones $\Pi_1 : M \times N \to M$ y $\Pi_2 : M \times N \to N$ son diferenciables.

4. Sea $M = S^n$ y $N = S_r^n$ $(r > 0)$ y $f : M \to N$ definida por $f(u) = ru$. Probar que f es difeomorfismo.

5. a) Considerando la variedad diferenciable producto $\mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times s}$, verificar que la función producto
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{n\times s} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m\times s} \\ (A,B) & \longrightarrow & AB \end{array}$$
   es diferenciable.
   b) Sea $GL(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de matrices inversibles.

† $\{(Ux),(V,y)\}$, donde: $U = S_r^2 - \mathbf{N}, V = S_r^2 - \mathbf{S}$, $x : U \to \mathbb{R}^2$ e $y : V \to \mathbb{R}^2$ dadas por: $x(a_1,a_2,a_3) = \left(\frac{ra_1}{r-a_3}, \frac{ra_2}{r-a_3}\right)$, $y(a_1,a_2,a_3) = \left(\frac{ra_1}{r+a_3}, \frac{ra_2}{r+a_3}\right)$

Demostrar que $GL(n,\mathbb{R})$ resulta –de manera natural– una variedad diferenciable de dimensión n^2

c) Probar que las siguientes funciones son diferenciables

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ A & \longrightarrow & A^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{R})\times GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longrightarrow & AB \end{array}$$

6. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria y (U,x) , (V,y) las cartas de S^2 dadas por las proyecciones estereográficas desde los polos **N** y **S**.

a) Si $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$ y $p \in U \cap V$, calcular las coordenadas de los vectores tangentes : $\dfrac{\partial}{\partial y^1}\Big|_p$ y $\dfrac{\partial}{\partial y^2}\Big|_p$ respecto de la base $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^1}\Big|_p, \dfrac{\partial}{\partial x^2}\Big|_p \right\}$ de S^2_p.

b) Sea $(S^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ la carta de S^2 definida en el ejercicio 1 para el caso $r = 1$. Siendo $f^{-1} = (u^1 \circ f^{-1}, u^2 \circ f^{-1}) = (\alpha, \theta)$, calcular – para $p \in U \cap (S^2 - \mathcal{C})$ – las coordenadas de $\dfrac{\partial}{\partial \alpha}\Big|_p$ y de $\dfrac{\partial}{\partial \theta}\Big|_p$ respecto de la base de S^2_p asociada a la carta (U,x).

7. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial de dimensión n.

a) Si $u \in \mathbb{E}$ y $\mathrm{J}_u : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_u$ es el isomorfismo canónico (ejercicio 23), mostrar que J_u es un difeomorfismo, considerando sobre $\mathbb{E}$ y $\mathbb{E}_u$ las estructuras diferenciables naturales como espacios vectoriales.

b) Si $v \in \mathbb{E}$, sea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{E}$ la curva (recta) $c(t) = u + t.v$. Verificar que $\mathrm{J}_u(v) = \dot{c}(0)$.

Nota : esto muestra –una vez más– que J_u es canónico.

8. Sea M una variedad diferenciable , $p \in M$, (U,x) una carta de M con $p \in U$, $x = (x^1, \dots, x^n)$.

a) Considerando en M_p la estructura diferenciable natural, mostrar que $(M_p, \tilde{x})$, con $\tilde{x} : M_p \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\tilde{x}(v) = \big(v(x^1), \dots, v(x^n)\big)$$

es una carta en M_p.

b) Si $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}\Big|_v, \dots, \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\Big|_v \right\}$ es la base de $(M_p)_v$ asociada a la carta $(M_p, \tilde{x})$ definida en a), mostrar que $\mathrm{J}_v : M_p \to (M_p)_v$ satisface : $\mathrm{J}_v\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\Big|_v$.

9. Sea S^2 la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{P}_2(\mathbb{R}^3)$ el plano proyectivo con sus estructuras diferenciables usuales Sea $\beta : S^2 \to \mathbf{P}_2(\mathbb{R}^3)$ la función definida por $\beta(v) = [v] =$ subespacio de dimensión 1 generado por v.

a) Mostrar que β es suryectiva pero no inyectiva.

b) Probar que β es diferenciable.

c) Deducir que $\mathbf{P}_2(\mathbb{R}^3)$ es compacta.

10. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n.

a) Verificar que $TTM = T(TM)$ es una variedad diferenciable de dimensión $4n$.

b) Sea $(TTU, \bar{\bar{x}})$ la carta de TTM asociada a la carta $(TU, \bar{x})$ de TM (asociada, a su vez, a la carta (U, x) de M). Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^{2n}$, calcular: $\bar{\bar{x}}^{-1}(a, b, c)$.

11. Para cada $a, b > 0$ sea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la HÉLICE O ESPIRAL definida por

$$c(t) = (a.\text{cos}t, a.\text{sen}t, b.t)$$

a) Calcular las coordenadas de $\dot{c}(t)$ respecto de la base de $\mathbb{R}^3_{c(t)}$ asociada a la carta $(\mathbb{R}^3, id)$.

b) Calcular $\mathrm{J}^{-1}_{c(t)} \circ \dot{c}(t) \in \mathbb{R}^3$.

12. Sea $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por $c(t) = (e^t, t, t + \text{cos}t)$.

a) Si $p = (1, 0, 1)$, calcular las coordenadas de $\dot{c}(0)$ respecto de la base de $\mathbb{R}^3_p$ asociada a la carta $(\mathbb{R}^3, id)$.

b) Calcular $\dot{c}(0)f$ para $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_3$$

13. Sea $\mathbb{E}$ un espacio vectorial real de dimensión n, $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base de $\mathbb{E}$ y $(\mathbb{E}, x)$ la carta de $\mathbb{E}$ inducida por B. Sea $\Pi : T\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ la proyección natural del fibrado tangente y $\mathbf{J} : T\mathbb{E} \to \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{J}(v) = (\Pi(v), v(x^1), \ldots, v(x^n))$. Mostrar:

a) Si $u \in \mathbb{E}$, $\mathbf{J}|_{\mathbb{E}_u} : \mathbb{E}_u \to \{u\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo.

b) $\mathbf{J} : T\mathbb{E} \to \mathbb{E} \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

14. Calcular f_{*p} para:

a) $f : M \times N \to M$	$f = \Pi_1$	$p = (r, s) \in M \times N$
b) $f : M \times N \to N$	$f = \Pi_2$	$p = (r, s) \in M \times N$
c) $f : S^n \to S^n_r$	$f(u) = r.u$	$p \in S^n$, $r > 0$
d) $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$	$f =$ transf. lineal	$p \in \mathbb{E}$, $dim\mathbb{E}, dim\mathbb{F} < +\infty$

15. a) Sean M, N variedades diferenciables y $f : M \to N$ constante. Probar que $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.

b) Sean M, N variedades diferenciables, M conexa, $f : M \to N$ diferenciable y tal que $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$. Probar que f es constante.

16. Considerando a cada una de las variedades con la estructura diferenciable anteriormente definida sobre ella, analizar si las siguientes inclusiones son inmersiones o sumersiones

a) $i : S^2 \to \mathbb{R}^3$

b) $i : \mathbb{S} \to \mathbb{E}$, $\mathbb{S}$ subespacio del espacio vectorial $\mathbb{E}$, $dim\mathbb{E} < +\infty$

c) $i : A \to M$, $A \subset M$ abierto , M variedad diferenciable

d) $i : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n \times n}$

e) $i : M_p \to TM$, M variedad diferenciable , $p \in M$

17. Sea $c : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (t^2, t^3)$. Mostrar que :

a) c es inyectiva

b) c es diferenciable , $\dot{c}(0) = 0$

c) considerando a $M = c(-1, 1)$ con la estructura diferenciable generada por (M, g), $g = c^{-1} : M \to (-1, 1)$, se tiene que:

(i) $i : M \to i(M)$ es un homeomorfismo diferenciable

(ii) M *no* es una subvariedad inmersa de $\mathbb{R}^2$

18. Sea $\beta : S^2 \to \mathbf{P}_2(\mathbb{R}^3)$ la aplicación diferenciable definida por $\beta(p) = [p]$ (cf. ejercicio 9). Probar que $\beta_{*p} : S^2_p \to (\mathbf{P}_2(\mathbb{R}^3))_{\beta(p)}$ es un isomorfismo cualquiera sea $p \in S^2$.

19. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\Pi : TM \to M$ la proyección natural del fibrado tangente.

a) Si (U, x) es una carta en M con $p = \Pi(v) \in U$, $v \in TM$ y $(TU, \bar{x})$ es la carta en TM asociada a la dada, calcular $\Pi_{*v}\left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\Big|_v\right)$ para cada $1 \leq i \leq 2n$.

b) Probar que $\Pi_{*v} : (TM)_v \to M_{\Pi(v)}$ es epimorfismo.

20. Probar que $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, es una inmersión no inyectiva. ¿Quién es f si se identifica $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$?

21. Sea $f : (0,2\pi) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $f(s,t) = (\text{sen}t, \text{sen}(2t), s)$ y $M = f((0,2\pi) \times (0,1))$

a) Graficar M

b) ¿Es M una superficie inmersa o sumergida de $\mathbb{R}^3$?

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x+y, (x+y)^2)$. Mostrar que todo punto de $\mathbb{R}^2$ es un punto crítico de f.

23. PROYECCIÓN MERCATOR - PLANISFERIO

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las superficies:

$$S^2 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \qquad \text{ESFERA UNITARIA}$$
$$M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1^2 + x_2^2 = 1\} \qquad \text{CILINDRO}$$

Sea L la recta de $\mathbb{R}^3$ definidas por las ecuaciones:

$$L : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

y sea $\mathcal{C}$ el semimeridiano de extremos incluídos: polo norte $\mathbf{N} = (0,0,1)$ y polo sur $\mathbf{S} = (0,0,-1)$ que pasa por el oeste $\mathbf{O} = (1,0,0)$.

a) Probar que $\mathbf{h} : S^2 - \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\} \to M$ definida por

$$\mathbf{h}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (x_1,x_2,x_3) \qquad \text{PROYECCIÓN MERCATOR}$$

es un difeomorfismo. Interpretar geométricamente.

b) Verificar que $\mathbf{h}(S^2 - \mathcal{C}) = M - L$ y deducir que $\mathbf{h} : S^2 - \mathcal{C} \to M - L$ es un difeomorfismo entre abiertos de S^2 y de M.

c) Sea $\mathbf{g} : (0,2\pi) \times (0,\pi) \to M - L$ definida por

$$\mathbf{g}(\alpha,\theta) = (\cos\alpha, \text{sen}\alpha, \text{cotg}\theta)$$

Probar que $\mathbf{g}$ es un difeomorfismo, o sea, $(M - L, \mathbf{g}^{-1})$ es una carta de M.

d) Sea $\boldsymbol{P} : S^2 - \mathcal{C} \to (0,2\pi) \times (0,\pi)$ definida por $\boldsymbol{P} = \mathbf{g}^{-1} \circ \mathbf{h}$. Deducir de los incisos anteriores que $\boldsymbol{P}$ es un difeomorfismo.

NOTA : la aplicación $\boldsymbol{P}$ construye, salvo escalas, el planisferio o mapa mundial.

e) Sea $(S^2 - \mathcal{C}, f^{-1})$ la carta de S^2 definida en el ejercicio 1. Probar que $\boldsymbol{P} = f^{-1}$.

24. Sean N y M variedades diferenciables y $f : N \to M$ una función diferenciable. Una función $Y : N \to TM$ se denomina **campo de vectores a lo largo de** f, si

$Y(p) \in M_{f(p)}$ para todo $p \in N$. Denotemos con $\mathfrak{X}_f$ al conjunto de todos los campos de vectores a lo largo de f que son diferenciables. Probar

a) Si $A \in \mathfrak{X}(N)$ entonces $f_*(A) \in \mathfrak{X}_f$

b) $\mathfrak{X}_f$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, con las operaciones naturales

c) Si $h \in \mathcal{F}(N)$ e $Y \in \mathfrak{X}_f$, entonces $h.Y \in \mathfrak{X}_f$, donde $h.Y : N \to TM$ está definida como $(h.Y)(p) = h(p).Y(p)$ si $p \in N$

d) Sea f una inmersión, $h \in \mathcal{F}(N)$ y $p \in N$. Entonces existe un $\tilde{h} \in \mathcal{F}(M)$ y un abierto U de N, entorno de p, tal que $h|_U = \tilde{h} \circ f|_U$

e) Sea f una inmersión, $Y \in \mathfrak{X}_f$ y $p \in N$. Entonces existe un $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un abierto U de N, entorno de p, tal que $Y|_U = X \circ f|_U$

Sugerencia : Para d) y e), ver Teorema 16.

25. Sea $G = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(t) = y.t + x, \text{ con } x, y \in \mathbb{R} \text{ e } y \neq 0\}$

a) Probar que $(G, \circ)$ es un grupo. $\big(\circ = \text{composición}\big)$

b) Definir en G una estructura diferenciable que lo convierta en un grupo de Lie.

26. Probar que $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \ / \ det(A) = 1\}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n^2 - 1$. Si I es la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$, calcular $(SL(n, \mathbb{R}))_I$.

27. Probar que cada uno de los siguientes grupos es un grupo de Lie.

a) $(\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$

b) $(S^1, \cdot)$

c) $(G \times H, \odot)$ con G, H grupos de Lie, $(g, h) \odot (g', h') = (g.g', h.h')$

d) $\mathcal{T}_s = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ / \ A \text{ es triangular superior}\}$ con el producto usual.

e) $\mathcal{K} = \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R}$ con la siguiente operación

$$(s_1, t_1) \diamond (s_2, t_2) = (s_1.s_2, s_1.t_2 + t_1)$$

GRUPO DE MOVIMIENTOS AFINES DE LA RECTA

f) $\mathcal{K} = GL(n\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n\times 1}$ con la siguiente operación

$$(A_1, v_1) \diamond (A_2, v_2) = (A_1 A_2, A_1 v_2 + v_1)$$

GRUPO DE MOVIMIENTOS AFINES DE $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

28. Sea G un grupo de Lie de dimensión n y $X \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda. Probar que para todo $h \in G$ se verifica $X \underset{L_h}{\sim} X$.

29. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ dado por $X(u) = (u^1)^2 D_1|_u + u^3 D_2|_u - u^2 D_3|_u$. Calcular su flujo y decidir si es o no completo.

30. Sea N una variedad diferenciable de dimensión k, $M \subset N$ una subvariedad de N de dimensión n e $i : M \to N$ la inclusión. Sea $X \in \mathfrak{X}(N)$ tal que $X(p) \in i_{*p}(M_p) \subset N_p$ para todo $p \in M$.

   a) Si se definen $Y : M \to TM$ por $Y(p) =$ único vector de M_p que satisface $i_{*p}(Y(p)) = X(p)$, probar que $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

   b) Deducir de a) que $Y \underset{i}{\sim} X$ y que Y es único.

   c) Si $p \in M$, sean $\Phi_p : I_p \to N$ la curva integral maximal de X, con $\Phi_p(0) = p$ y $\Psi_p : J_p \to M$ la curva integral maximal de Y, con $\Psi_p(0) = p$. Probar que $J_p \subset I_p$ y que $\Psi_p = \Phi_p|_{J_p}$.

31. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\alpha : (a,b) \to M$ una curva integral de X. Sea $\varphi : (c,d) \to (a,b)$ un difeomorfismo y $\beta = \alpha \circ \varphi$. ¿Bajo qué condiciones es β una curva integral de X?

32. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X(u) = u^2 D_2|_u$, $Y(u) = u^1 D_2|_u$ donde u representa al par $(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$. Mostrar que $[X, Y] = -Y$.

33. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por: $X(p) = D_1|_p$, $Y(p) = \cos(p_1) D_1|_p + \operatorname{sen}(p_2) D_2|_p$, $p = (p_1, p_2)$. Si $G = \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ p_1^2 + p_2^2 < 1, p_2 > 0\}$, probar

   a) $\{X(p), Y(p)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2_p$ para todo $p \in G$

   b) para ningún $p \in G$ existe una carta (U, x) de $\mathbb{R}^2$ con $p \in U \subset G$ tal que si $x = (x^1, x^2)$, es $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$ e $Y = \dfrac{\partial}{\partial x^2}$ sobre U.

34. Sea $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$, $\omega \neq 0$ y $\alpha \in \Lambda^q(\mathbb{R}^n)$. Probar que : $\omega \wedge \alpha = 0$ si y sólo si existe $\beta \in \Lambda^{q-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\alpha = \omega \wedge \beta$.

35. Si $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ con $F = F^1 \dfrac{\partial}{\partial x} + F^2 \dfrac{\partial}{\partial y} + F^3 \dfrac{\partial}{\partial z}$, se definen las formas

$$\omega_F^1 = F^1 . \, dx + F^2 . \, dy + F^3 . \, dz$$
$$\omega_F^2 = F^1 . \, dy \wedge dz + F^2 . \, dz \wedge dx + F^3 . \, dx \wedge dy$$
$$\omega_F^3 = (F^1 + F^2 + F^3) \ . \ dx \wedge dy \wedge dz$$

a) Probar que:

(i) $df = \omega^1_{\nabla f}$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$

(ii) $d\omega^1_F = \omega^2_{rot(f)}$

(iii) $d\omega^2_F = \omega^3_{\left(\frac{\partial F^1}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial y}, \frac{\partial F^3}{\partial z}\right)}$

b) Usar a) para probar que:

(i) $rot(grad((f))) = 0$

(ii) $div(rot(F))) = 0$

36. Sea G un grupo de Lie de dimensión n

a) Definir sobre G una n-forma $\omega \in \Omega^n(G)$ nunca nula e invariante a izquierda. †

b) Hallar todas las $g \in \mathcal{F}(G)$ tales que $g.\omega$ es invariante a izquierda.

c) Para cada $b \in G$, sea $\omega_b = R_b^*\omega$ ††. Probar que para todo $b \in G$ existe $\lambda_b \in \mathbb{R}_{\neq 0}$: $\omega_b = \lambda_b \,.\, \omega$

d) Sea $\varphi : G \to \mathbb{R}_{\neq 0}$ definida por $\varphi(b) = \lambda_b$. Probar que:

(i) φ es diferenciable

(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ para todo $a, b \in G$ y calcular $\varphi(e)$

e) Deducir de los incisos anteriores que si G es compacto y conexo, toda $\eta \in \Omega^n(G)$ invariante a izquierda también es invariante a derecha.

37. Sea G un grupo de Lie de dimensión n. Probar:

a) $\omega \in \Omega^1(G)$ invariante a izquierda $\Rightarrow$ $d\omega$ invariante a izquierda

b) $\omega \in \Omega^1(G)$ invariante a izquierda, $X \in \mathcal{L}(G)$ $\Rightarrow$ $\omega(X)$ constante

c) $\omega \in \Omega^1(G)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$, todos invariantes a izquierda, entonces

$$d\omega(X,Y) = -\omega[X,Y]$$

d) $\psi(a) = a^{-1}$ $\Rightarrow$ $\psi \circ L_a = R_{a^{-1}} \circ \psi$

e) $\psi_{*e}(v) = -v$ para todo $v \in G_e$

f) $\omega \in \Omega^k(G)$ invariante a izquierda (derecha) $\Rightarrow$ $\psi^*\omega$ invariante a derecha (izq.)

g) $\omega \in \Omega^k(G)$ bi-invariante $\Rightarrow$ $\psi^*\omega = (-1)^k\omega$

h) $\omega \in \Omega^k(G)$ bi-invariante $\Rightarrow$ $d\omega = 0$

† $\omega \in \Omega^k(G)$ se dice **invariante a izquierda** si para todo $a \in G$ se cumple que $L_a^*\omega = \omega$

†† $R_b : G \to G$ se define por $R_b(a) = ab$: TRASLACIÓN A DERECHA SEGÚN b

ii) $\sigma \in \Omega^n(G)$ invariante a izquierda $\Rightarrow$ $\sigma \equiv 0$ ó σ es nunca nula.

38. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n, orientable y N una subvariedad de M de dimensión $k < n$, orientable. Probar que existe $\mathcal{A}$, atlas orientado de M y $\mathcal{B}$, atlas orientado de N, tales que para todo $p \in M$ existen $(U,x) \in \mathcal{B}$ y $(\tilde{U},\tilde{x}) \in \mathcal{A}$ con

$$i_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \qquad 1 \leq j \leq k$$

39. Sean $(M,\mathcal{A})$, $(N,\mathcal{B})$ variedades diferenciables orientadas, de dimensión n. Sean $\omega \in \Omega^n(N)$, con soporte compacto y $\varphi : M \to N$ un difeomorfismo que PRESERVA LA ORIENTACIÓN (i.e., para toda carta $(U,x) \in \mathcal{A}$ se tiene que $(\varphi(U), x \circ \varphi^{-1}) \in \mathcal{B}$). Probar que:

$$\int_M \varphi^*(\omega) = \int_N \omega$$

40. Sea G un grupo de Lie y $f \in \mathcal{F}(G)$ de soporte compacto. Probar que:

$$\int_G f(ba)da = \int_G f(a)da$$

para todo $b \in G$.
NOTA : 'da' indica una n-forma invariante a izquierda que induce la orientación de G.

41. Decidir si los siguientes conjuntos admiten –de manera natural– estructura de variedad con borde
   a) $[a,b] \subset \mathbb{R} \quad (a < b)$
   b) $E = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ \|x\| \leq r\} \quad (r > 0)$
   c) $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \quad (a < b, c < d)$

42. EL DETERMINANTE DE GRAM
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, provisto de un producto interno $<,>$. Si $1 \leq k \leq n$ y $v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{V}$, se define el **determinante de Gram** de $v_1,\ldots,v_k$, como el número

$$\mathbf{G}(v_1,\ldots,v_k) = det(< v_i, v_j >)$$

Sea $\{e_1,\ldots,e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$ tal que el subespacio generado por los vectores $e_1,\ldots,e_k$ contenga a $v_1,\ldots,v_k$. Probar que si $\{e^i\}$ es la base dual de $\{e_j\}$, entonces

$$\mathbf{G}(v_1,\ldots,v_k) = \left(e^1 \wedge \ldots \wedge e^k(v_1,\ldots,v_k)\right)^2$$

Deducir que $\mathbf{G}(v_1, \ldots, v_k) > 0$ si y sólo si los $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes.

43. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, provisto de un producto interno $<,>$. Si $P, Q \in \mathbb{V}$ la **distancia entre** P **y** Q es el número

$$d(P,Q) =< P - Q, P - Q >^{\frac{1}{2}}$$

Si $\mathbb{S}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ y $P \in \mathbb{V}$, la **distancia de** P **a** $\mathbb{S}$ se define como el número

$$d(P,\mathbb{S}) = inf\{d(P,Q) \ / \ Q \in \mathbb{S}\}$$

a) Probar que si $\mathbb{S}^{\perp}$ es el complemento ortogonal de $\mathbb{S}$, existe un único $Q \in \mathbb{S}$, con $Q - P \in \mathbb{S}^{\perp}$ y el mismo satisface que: $d(P,\mathbb{S}) = d(P,Q)$

b) Si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de $\mathbb{S}$, entonces:

$$d(P,\mathbb{S}) = \left[\frac{\mathbf{G}(v_1, \ldots, v_k, P)}{\mathbf{G}(v_1, \ldots, v_k)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

44. Volumen de Paralelepípedos
Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n, provisto de un producto interno $<,>$. Para $1 \leq k \leq n$, sean $v_1, \ldots, v_k$ vectores linealmente independientes. El conjunto

$$\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_k) = \left\{v \in \mathbb{V} \ / \ v = \sum_{i=1}^{k} t^i v_i \quad \text{con} \quad 0 \leq t^i \leq 1\right\}$$

se denomina el **paralelepípedo de dimensión** k de $\mathbb{V}$, generado por $v_1, \ldots, v_k$. En particular, $\mathbf{P}(v_i)$ se denomina un **segmento** y $\mathbf{P}(v_1, v_2)$ se denomina un **paralelogramo**.
El **volumen del paralelepípedo** —$vol\,(\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_k))$— se define de manera inductiva sobre k (como base por altura) del siguiente modo:
$\star$ si $k = 1$: $vol(\mathbf{P}(v_1)) =< v_1, v_1 >^{\frac{1}{2}}$
$\star$ si $k > 1$: $vol(\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_k) = vol(\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_{k-1}) \, . \, d(v_k, \mathbb{S})$, donde $\mathbb{S}$ es el subespacio generado por $v_1, \ldots, v_{k-1}$.
Probar que :

$$vol(\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_k) = \mathbf{G}(v_1, \ldots, v_k)^{\frac{1}{2}}$$

45. Elemento de Volumen 'versus' Volúmenes
Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una subvariedad con o sin borde, orientable, de dimensión k. Sea dV_M el elemento de volumen inducido por la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$ y la orientación en M considerada. Mostrar que si $p \in M$ y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de M_p orientada positivamente, entonces:

$$dV_M|_p(v_1, \ldots, v_k) = vol(\mathbf{P}(v_1, \ldots, v_k))$$

Apéndice

En $\mathbb{R}^n$ la distancia usual está definida por $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x^i - y^i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, si $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

Si $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, la **bola abierta** con **centro** en p y **radio** $r > 0$ es $B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(p,x) < r\}$.

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es **abierto** en $\mathbb{R}^n$, si A es vacío o bien para todo $p \in A$ existe un $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset A$.

Si denotamos con $\mathcal{T}$ a la familia de todos los abiertos de $\mathbb{R}^n$, se verifica que tanto el vacío como $\mathbb{R}^n$ pertenecen a $\mathcal{T}$; la intersección de dos abiertos pertenece a $\mathcal{T}$ y la unión arbitraria de abiertos pertenece a $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ se denomina la **topología usual** de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN

Sea M un conjunto cualquiera y $\mathcal{T}$ una familia de subconjuntos de M. La misma se denomina una **topología** *para M si satisface:*

T_1. $\varnothing, M \in \mathcal{T}$

T_2. *Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$*

T_3. *La unión arbitraria de elementos de $\mathcal{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$.*

El par $(M, \mathcal{T})$ se denomina un **espacio topológico** *y los elementos de $\mathcal{T}$ se denominan los* **abiertos** *de $(M, \mathcal{T})$.*

NOTA

De acuerdo con lo anterior, todo abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ es unión de bolas abiertas. Es decir, las bolas abiertas construyen a los abiertos de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN

Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset \mathcal{T}$ una subfamilia de $\mathcal{T}$. Decimos que $\mathcal{B}$ es una **base** *de $\mathcal{T}$, si todo $U \in \mathcal{T}$ $(U \neq \varnothing)$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.*

OBSERVACIONES

1. En la situación anterior, $\mathcal{B}$ satisface las siguientes propiedades:

   b_1) $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

   b_2) Si $\alpha, \beta \in A$ y $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, existe $\gamma \in A$ tal que $p \in U_\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$.

2. Si $\mathcal{B}$ es una subfamilia de subconjuntos de M que satisface b_1) y b_2), entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ para M que tiene a $\mathcal{B}$ como base. Basta definir $\mathcal{T}$ del siguiente modo:

$$A \in \mathcal{T} \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = \varnothing \quad \text{o} \quad A \quad \text{es unión de elementos de} \quad \mathcal{B}$$

EJEMPLO

$\mathcal{B} = \{B(p,r) \ / \ p \in \mathbb{R}^n \text{ y } r > 0\}$ es una base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$. Es más, si $\tilde{\mathcal{B}} = \{B(p,r) \ / \ p \in \mathbb{Q}^n \text{ y } r \in \mathbb{Q}_{>0}\}$, entonces $\tilde{\mathcal{B}}$ es una familia numerable que es base de la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

NOTA

Si $p, q \in \mathbb{R}^n$, $p \neq q$, $r = d(p,q)$, entonces $B(p, \frac{r}{2}) \cap B(q, \frac{r}{2}) = \varnothing$

DEFINICIONES

Sea $(M, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. *$(M, \mathcal{T})$ se dice con* **base numerable** *si existe una base numerable $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$.*
2. *$(M, \mathcal{T})$ se dice* **Hausdorff** *si para todo $p, q \in M$, con $p \neq q$, existen abiertos A y B, con $p \in A$ y $q \in B$, tales que $A \cap B = \varnothing$.*
3. *Sea $S \subset M$ $(S \neq \varnothing)$ y $\mathcal{T}_S = \mathcal{T} \cap S = \{A \subset S$ / existe $U \in \mathcal{T}$ con $A = U \cap S\}$. Entonces $\mathcal{T}_S$ es una topología para S, denominada la* **topología inducida** *por $\mathcal{T}$.*

OBSERVACIÓN

◇ Si $(M, \mathcal{T})$ posee una base numerable, entonces $(S, \mathcal{T}_S)$ también.

◇ Si $(M, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces $(S, \mathcal{T}_S)$ también lo es

NOTA

Si sobre M se considera una topología $\mathcal{T}$ fija, el espacio topológico $(M, \mathcal{T})$ se denota simplemente con M.

DEFINICIONES

Sea M un espacio topológico.

1. *$A \subset M$ se dice* **cerrado** *si $M - A$ es abierto.*

2. *Sea $p \in M$ y $U \subset M$, con $p \in U$. El conjunto U se denomina un* **entorno** *de p si existe un abierto A con $p \in A \subset U$. En particular, todo abierto no vacío es entorno de cada uno de los puntos que contiene.*
3. *Un punto $p \in M$ se dice* **punto interior** *a un subconjunto U de M, si U es entorno de p. El conjunto de todos los puntos interiores a un subconjunto U de M se denota con $\mathring{U}$ y se llama* **interior** *de U. Por construcción, $\mathring{U}$ es el abierto más grande contenido en U.*
4. *Un punto $p \in M$ se denomina un* **punto de acumulación** *de un subconjunto U de M, si cada entorno de p contiene puntos de U diferentes de p. La unión de U con sus puntos de acumulación se denomina la* **clausura** *de U y se representa con $\overline{U}$. Por construcción, $\overline{U}$ es el cerrado más chico que contiene a U.*
5. *Una sucesión de puntos $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M se dice que* **converge** *a un punto $p \in M$, si para todo entorno U de p, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \in U$ si $n \geq m$. Escribimos $p_n \to p$.*
6. *Una familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de subconjuntos de M se denomina un* **cubrimiento** *de un subconjunto $S \subset M$, si $S \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$. $\mathcal{U}$ se denomina un* **cubrimiento abierto** *si todo U_α es abierto. Un* **subcubrimiento** *de $\mathcal{U}$ es una subfamilia que también es cubrimiento de S.*
7. *M se dice* **conexo** *si la igualdad $M = A \cup B$, con A y B abiertos y no vacíos, implica que $A \cap B$ es no vacío. En consecuencia, M es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de M que son –a la vez– abiertos y cerrados son $\varnothing$ y M.*
8. *M se dice* **compacto** *si todo cubrimiento abierto de M contiene un subcubrimiento finito.*

Propiedad

Si M es compacto y $S \subset M$ es cerrado, entonces S –con la topología inducida– es compacto.

NOTA

Los compactos de $\mathbb{R}^n$ –con la topología usual– son los cerrados y acotados.

Propiedad

Sea M un espacio topológico con base numerable. Son equivalentes las afirmaciones:

c_1) *M es compacto*

c_2) *Toda sucesión en M tiene un punto de acumulación.*

c_3) *Toda sucesión en M tiene una subsucesión convergente a un punto de M.*

Funciones Continuas

Sean M y M' espacios topológicos y $f : M \to M'$ una función.

Decimos que f es **continua en un punto** $p \in M$, si para todo entorno U de $f(p)$ es $f^{-1}(U) = \{q \in M \;/\; f(q) \in U\}$ un entorno de p. Decimos que f es **continua** si lo es en cada punto $p \in M$.

Por ejemplo, sea $S \subset M$ con la topología inducida y sea $i : S \to M$ la inclusión. Entonces i es continua.

Propiedad

$f : M \to M'$ es continua si y sólo si para todo abierto U de M' es $f^{-1}(U')$ un abierto de M.

NOTA

Debido a la propiedad anterior, se deduce inmediatamente que si M, M', M'' son espacios topológicos, $f : M \to M'$ y $g : M' \to M''$ son continuas, entoces la composición $g \circ f : M \to M''$ es continua.

DEFINICIONES

Sean M y M' espacios topológicos y $f : M \to M'$ una función.

1. *f se denomina un* **homeomorfismo** *si satisface*
   - h_1) *f es continua*
   - h_2) *f es una biyección*
   - h_3) *la inversa $f^{-1} : M' \to M$ es continua.*
2. *f se dice* **abierta** *si para todo abierto A de M es $f(A)$ abierto de M'.*

NOTA

La condición h_3) puede reemplazarse por la condición de ser f abierta.

Resultado (importante)

Sea U un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva. Entonces, para todo abierto $A \subset U$ es $f(A)$ abierto en $\mathbb{R}^n$.

Consecuencia (importante)

Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos no vacíos con $n \neq m$. Entonces, no existe ningún homeomorfismo $f : U \to V$, donde U y V se entienden con la topología inducida.

En efecto,

sea $m < n$ y $W = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n \;/\; x^{m+1} = \ldots = x^n = 0\}$.

Si W tiene la topología inducida, entonces la aplicación $i : \mathbb{R}^m \to W$, definida por $i(x^1, \ldots, x^m) = (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$ es continua e inyectiva. Supongamos que existe un homeomorfismo $f : U \to V$; luego, la composición

$$U \xrightarrow{\quad f \quad} V \xrightarrow{\quad i \quad} i(V) \subset W \subset \mathbb{R}^n$$

es continua e inyectiva.
Debido al resultado anterior, $i(V)$ es abierto y no vacío en $\mathbb{R}^n$. Luego, W tiene interior no vacío.

Esto es absurdo y es consecuencia de suponer que U y V son homeomorfos con $n \neq m$.

Bibliografía

Greub, W.H. : Linear Algebra, Springer-Verlag, 3^aed., 1967

Larotonda, A.R. : Álgebra Lineal y Geometría, EUDEBA, 1977

Narasimhan, R. : Analysis on Real and Complex Manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics (Vol. I), 1968

Gromoll, D. - Klingenberg, W. - Meyer, W. : Riemannsche Geometrie im Großen, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1975

O'Neill, B. : Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, 1983

Spivak, M. : A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish or Perish, Inc., Berkeley, 1979

Símbolos

Indice Alfabético

Fe de Erratas

PÁG./LÍN.	ERROR	CORRECCIÓN
4/12	C y A abiertos de $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^n$	C y A abiertos de $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^m$
11/1	una (U, x)	una carta (U, x)
11/8	la inducida de $\mathbb{R}^n$	la inducida por $\mathbb{R}^n$
12/26	$\mathcal{A} = \{U_i, \varphi_i\}_{i\in I}$	$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$
19/4	$i \leq j \leq k$	$1 \leq j \leq k$
24/14	donde $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^f}$	donde $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$
25/9	y defina $x = y \circ \varphi$	y defina $x = \varphi \circ y$
32/2	$c0) = p$	$c(0) = p$
44/14	$i : M \to N$	$i : Q \to M$
48/última	que puede encontrarse	que pueden encontrarse
51/11	$F(t, u^1, \dots, u^n)$	$F(t, u^2, \dots, u^n)$
53/16	$\varphi : (\rho, \rho) \times V \to M$	$\varphi : (-\rho, \rho) \times V \to M$
56/7	$c_v(t) = e^{at} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(a.t)^k}{k!}$	$c_v(t) = e^{at} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(a.t)^k}{k!}$
61/8	$X \in X(G)$	$X \in \mathfrak{X}(G)$
79/9	$\sum\limits_{1\leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \dots e^{j_s}$	$\sum\limits_{1\leq i_k, j_m \leq n} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$
82/4	$U \in \mathfrak{X}^r_s(G)$	$U \in \mathfrak{X}^k_m(G)$
87/6	$f^* : \mathfrak{X}^0_k(M) \to \mathfrak{X}^0_k(M)$	$f^* : \mathfrak{X}^0_k(M) \to \mathfrak{X}^0_k(N)$
91/21	La $\mathcal{F}(M)$-multilinealidad se T	La $\mathcal{F}(M)$-multilinealidad de T
92/18 y 19	$= T(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, X_{j_1}, \dots, X_{j_s})$	$= \bar{T}(\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_r}, X_{j_1}, \dots, X_{j_s})$
95/5	$\wedge : \Omega^k(G) \times \mathfrak{X}^l(G) \to \Omega^{k+l}(G)$	$\wedge : \Omega^k(G) \times \Omega^l(G) \to \Omega^{k+l}(G)$
123/14	λ s una	λ es una
124/12	$\int_{x(U)} \dfrac{\partial f_k \circ x}{\partial u^k} du^1 \dots du^n$	$\int_{x(U)} \dfrac{\partial (f_k \circ x^{-1})}{\partial u^k} du^1 \dots du^n$
129/9	con $\theta = dv_M$	con $\theta = dV_M$
144/9	$f^{-1}(U')$	$f^{-1}(U)$
147/7	Springer-Verlag, 1975	Springer-Verlag, 1968