ISSN 1853-709X

Fascículo 4

Cursos y seminarios de matemática

**Serie A**

*Alberto González Domínguez*

# Propiedades en el contorno de funciones analíticas

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2011

**Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A**

**Fascículo 4**



ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO 4

cursos
y seminarios
de matemática

# PROPIEDADES EN EL CONTORNO DE FUNCIONES ANALITICAS

Alberto González Domínguez





NIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
ULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES - DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

# PROPIEDADES EN EL CONTORNO DE FUNCIONES ANALITICAS

-----

Alberto Gonzáles Dominguez

## §1. ENFOQUE HISTORICO DEL PROBLEMA

$\boxed{\S 1.1}$ Sea dada una función analítica en un entorno del origen $f(z) = a_o/2 + \sum_1^{\infty} a_n z^n$ y su desarrollo se supondrá -sin restringir generalidad- que tiene radio de convergencia 1. Haciendo $z = \rho e^{i\theta}$ resulta:

$$f(z) = a_o/2 + \sum_1^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} \quad , \quad |\rho| < 1 \quad .$$

Haciendo ahora tender $z$ al contorno del círculo de convergencia, en forma radial, formalmente resulta:

$$f(e^{i\theta}) = a_o/2 + \sum_1^{\infty} a_n e^{in\theta} = a_o/2 + \sum_1^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \operatorname{sen} n\theta) +$$
$$+ \; i \sum_1^{\infty} (\alpha_n \operatorname{sen} n\theta - \beta_n \cos n\theta) \; ,$$

donde se hizo $a_n = \alpha_n - i \beta_n$ ;

La parte real del último miembro es una serie trigométrica y la parte imaginaria se llama serie (trigonométrica) conjugada de la anterior. El comportamiento de ambas series es distinto: la convergencia de la primera sólo depende de las propiedades locales de la $f$ (como se ve en la teoría de series de Fourier), mientras que la convergencia de la segunda depende de las propiedades globales de $f$ , en todo el intervalo $[0,2\pi]$ (1)

Es comprensible que si se estudia el comportamiento de ambas series, se podrá obtener información sobre el comportamiento de la función analítica que les da origen, en el contorno del círculo de convergencia. De este problema se ocupó Fatou (Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta Math., 1906), y más tarde Hardy - Littlewood (Proc. London Math. Soc., 1911) retomaron la cuestión, considerando una función analítica $f(z)$ en $|z| < 1$ y la expresión:

-------------
(1): Cf., por ej., Zygmund; Trigonometrical series, Cap. II, § 5

$$M_{\alpha}(r) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})| \quad d\theta \quad , \quad r < 1 \quad ,$$

que puede considerarse como un promedio de orden $\alpha$ de la función $f(z)$ en la circunferencia de radio $r$.

Se dice que $f \in H^{\alpha}$ (clase de Hardy-Littlewood de orden $\alpha$) si y sólo si existe una constante $M$ tal que, para todo $r < 1$ se cumple:

$$M_{\alpha}(r) \leq M \quad .$$

En particular, es importante la clase $H^2$. Se demuestra que si $f(z) \in H^2$ y se hace tender $|z| \to 1$ a lo largo de cualquier camino que no sea tangente a la circunferencia unidad, entonces existe $\lim_{|z| \to 1} f(z)$ y tal límite pertenece a $L^2$.

Designando con la misma letra $f$ a la función límite, se cumple además:

$$f(z) = f(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t|=1} \frac{f(t)\, dt}{t - z} \quad , \quad |z| = r < 1$$

es decir, $f$ es una integral de Cauchy.

Más adelante, F. Riesz (Uber die Randwerte der Analitische Funktionen, Math. Zeitsch, 1918) da una representación canónica de las funciones de $H^{\alpha}$. Considerando en particular el caso $\alpha = 2$, y si se designan con $z_i$ los ceros de $f(z)$ ordenados por módulo creciente, contados cada uno con su órden de multiplicidad, se cumple la igualdad.

$$f(z) = z^{\gamma} \prod_{i=1} \frac{z - z_i}{1 - z\bar{z}_i} \; \frac{\bar{z}_i}{|z_i|} \quad \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{i\theta}}{z - e^{i\theta}} \ln |f(e^{i\theta})| \, d\theta \right. +$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{z+e^{i\theta}}{z-e^{i\theta}}\; d\mu(\theta) \Bigg\}$$

donde $\gamma$ es el orden de multiplicidad del cero de $f(z)$ en el origen ($z^\gamma=1$, en particular si $f(0) \neq (0)$, $f(e^{i\theta})$ es el valor límite de $f(z)$ en la circunferencia unidad, y $\mu(\theta)$ es una función acotada, no decreciente y con derivada nula p.p.

Inversamente, si $z_i$ son números cualesquiera que satisfacen a la condición $\prod_i |z_i| < \infty$ y si $f \in L^2$ y $\ln|f| \in L^1$, entonces se verifica la fórmula indicada y $f(z) \in H^2$. En otras palabras, la fórmula de F. Riesz da todas las funciones de $H^2$.

Poco después F. y M. Riesz, en el Cuarto Congreso de Estocolmo de matemáticos escandinavos aplicaron los resultados anteriores a la representación conforme; Abraham Plessner (Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reichen, Mitt. math. Semin. Giessen, 1923; tesis) los aplica a la existencia de la función conjugada cuando $f \in L^1$; M. Riesz (Sur les fonctions conjugées, Math.Zeitsch, 1928) estudia las funciones conjugadas en $L^p$ (1).

$\boxed{\S 1.2}$ Más recientemente, Kolmogorov (1939) y Wiener (Sobre extrapolación y alisamiento de series temporales -"Libro amarillo"-, 1941) desarrollan una "teoría de la predicción". La base de los trabajos de Wiener es el siguiente teorema de

---

(1): Cf También: Zygmund; op. cit., Cap. VII.

factorización:

Si $f \in L^2(-\infty,\infty)$ , $f(\theta) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |f(\theta)|}{1+\theta^2}\, d\theta < \infty$ ,

$$\text{entonces se cumple} \quad f(\theta) = f_1(\theta) \cdot f_2(\theta) ,$$

donde $f_1$ y $f_2$ son límites de funciones analíticas en el semiplano superior e inferior, respectivamente.

Interesa un resultado análogo para varias variables, para un "vector aleatorio" $f(\theta) = \left\{ f_1(\theta), \ldots, f_n(\theta) \right\}$ ;

Wiener intentó su resolución, que fué lograda en 1958 por Wiener-Massani (The prediction theory of multiplicative stochastic processes, Acta Math.1958) e independientemente por Lowdenslager - Helson (Prediction Theory and Fourier Series in several variables, Acta Math., 1958)

La conexión entre esta teoría de la predicción de Wiener con lo anterior reside en el hecho de que para tal teoría es fundamental el estudio de las clases $H^\alpha$ de Hardy - Littlewood; esto está demostrado en el libro de Grenander - Szegö: The Teoplitz forms and their applications.

En particular, en las memorias citadas de Wiener - Massani y Lowdenslager Helson se extiende el concepto de clases $H^\alpha$ para matrices $(f_{ij}(z))$. En este caso las complicaciones aparecen sobretodo al tratar de dar sentido a la fórmula de representación canónica de F. Riesz, pues aparece un logarítmo y las matrices no son conmutativas, así como en el teorema de factorización.

Se concluye con esto la síntesis histórica, que puede considerarse como un bosquejo del programa del curso.

## §2. TEOREMAS DE HELLY

**§2.1** Antes de entrar de lleno en materia, comenzaremos por ver dos teoremas clásicos de frecuente aplicación. Se trata de los teoremas de Helly.

Teorema 1. (Primer teorema de Helly) Sea $\{f(\theta)\}$ una familia de funciones de variación acotada, definidas en un intervalo cerrado $[a,b]$, que están uniformemente acotadas, tanto ellas como sus variaciones totales, es decir:

$$|f(\theta)| < M \quad , \quad \overset{b}{\underset{a}{V}} f(\theta) < M \quad , \quad (M \text{ indep. de } f \text{ y } \theta)$$

Entonces se puede extraer de la familia una sucesión $f_n(\theta)$ convergente hacia una función de variación acotada $f(\theta)$ en todo punto de $[a,b]$

No demostraremos este teorema, que suponemos conocido [1]. En cambio demostraremos el otro.

Teorema 2. (Segundo teoremo de Helly). Sea $g(\theta)$ una función real continua definida en el intervalo cerrado $[a,b]$, y $f_n(\theta)$ una sucesión de funciones de variación total uniformemente acotada: $\int_a^b |df_n(\theta)| < M$

que converge en todo punto: $f_n(\theta) \to f(\theta)$ Entonces se cumple:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(\theta)\, df_n(\theta) = \int_a^b g(\theta)\, df(\theta)$$

es decir, se puede pasar al límite bajo el signo de integral.

Puede observarse que este teorema es análogo, para integrales de Stielt

(1) Cf., por ej. Natanson: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen, Cap. VIII, §4. (Hay traducción al inglés), para la demostración.

al de Lebesgue de convergencia mayorada, y precisamente la demostración se efectuará reduciéndolo a este último caso. [1]

En un primer paso supondremos que $g(\theta)$ tiene derivada continua. En tal caso $g$ es absolutamente contínua y vale:

$$\int_a^b g(\theta)\, df_n(\theta) = g(\theta)\, f_n(\theta) \Big|_a^b - \int_a^b f_n(\theta)\, dg(\theta) =$$

$$= g(\theta)\, f_n(\theta) \Big|_a^b - \int_a^b f_n(\theta)\, g'(\theta)\, d\theta$$

Pasando al límite, en la integral del último término se puede aplicar el teorema de Lebesgue de convergencia mayorada - puesto que integrando es uniformemente acotado, - y se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(\theta)\, df_n(\theta) = g(\theta)\, f(\theta) \Big|_a^b - \int_a^b f(\theta)\, g'(\theta)\, d\theta$$

Volviendo ahora atrás ("desintegrando" por partes) resulta la tesis, para $g$ con derivada contínua.

Para extender el teorema a cualquier función $g$ continua se utiliza el conocido argumento de densidad, aproximando a $g$ por funciones con derivadas continuas.

En efecto, el teorema de aproximación de Weierstrass afirma que los polinomios $\{P(\theta)\}$ son densos en las continuas $\{g(\theta)\}$ con la topología del supre

(1) Cf. por ej.Natanson, op.cit.Cap.VIII, §7, para otra demostración.

mo (en un intervalo cerrado $[a,b]$ ), es decir: dada una $g$ continua y un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un polinomio tal que para todo $\theta \in [a,b]$ se cumple

$$|g(\theta) - P(\theta)| < \varepsilon \quad ,$$

o sea, hay aproximación uniforme:

Entonces:

$$\int_a^b g(\theta)\, d[f_n(\theta) - f(\theta)] =$$

$$= \int_a^b [\, g(\theta) - P(\theta)\,]\, d[\, f_n(\theta) - f(\theta)\,] + \int_a^b P(\theta)\, d[\, f_n(\theta) - f(\theta)\,]$$

La tesis equivale a afirmar que el primer miembro converge a cero. Y esto es así, puesto que el último término del segundo miembro converge a cero, porque $P'(\theta)$ en continua y ya se ha demostrado el teorema en este caso, y el primer término del segundo miembro es en valor absoluto menor que

$$\varepsilon \int_a^b |\, d\, [f_n(\theta) - f(\theta)\,]\,| \quad ,$$

y la integral está acotada por hipótesis, c.q.d.

Terminaremos este parágrafo dando una idea esquemática de la forma de aplicación de los teoremas de Helly al análisis, que será usada más adelante.

Supongamos que para cada término de una sucesión funcional $\{u_n(\theta)\}$ se conoce una representación como integral de Stieltjes.

$$u_n(\theta) = \int_a^b g(\varphi,\theta)\, df_n(\varphi) \quad ,$$

y supongamos también que se cumple $u_n(\theta) \to u(\theta)$ para $n \to \infty$. Se desea obtener una representación para $u(\theta)$.

Si las $f_n$ cumplen las hipótesis del primer teorema de Helly, entonces existirá una subsucesión convergente $f_{n_i} \to f$. Aplicando el segundo teorema se tendrá.

$$u_{n_i}(\theta) = \int_a^b g(\varphi,\theta)\, df_{n_i}(\varphi) \to \int_a^b g(\varphi,\theta)\, df(\varphi)$$

y como $u_{n_i}(\theta) \to u(\theta)$ por tratarse de una subsucesión, resulta le representación deseada:

$$u(\theta) = \int_a^b g(\varphi,\theta)\, df(\varphi)$$

## § 3. TEOREMA DE FATOU

$\boxed{\S 3.1}$ Un teorema clásico de H.A. Schwarz (1879) afirma que:

<u>Teorema 1</u>. (Schwarz) <u>Si $h(\theta)$ es una función continua, definida en la circunferencia unidad, su integral de Poisson</u>

$$\text{[1]} \qquad u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\, h(\varphi)\, d\varphi$$

<u>es una función armónica, y se cumple</u>

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = h(\theta)$$

Este teorema constituye pues una solución del problema de Dirichlet para el círculo. Su demostración es ahora muy sencilla. La función $u$ es armónica en el círculo unidad (es decir $\Delta u=0$ ) por ser armónico el núcleo de Poisson que aparece en el integrado.

$$P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

(se designan con $r$ y $\theta$ las coordenadas polares). Y como $P(r,\theta)$ es un núcleo singular positivo (1), resulta inmediatamente que $u \to h$ , c. q. d.

Fatou se propuso generalizar este teorema imponiendo a $h$ condiciones menos restrictivas que la continuidad. Supuso en cambio que $h \in L^1$. La función $u$ sigue siendo armónica, como es fácil ver, y se trata de investigar su límite para $r \to 1$ , así como su función conjugada (con el núcleo conjugado de Poisson)

Esto está relacionado con este otro problema: sea $h(\varphi) \geq 0$ ; entonces $u(r,\theta)$ tambien será $\geq 0$ (por ser positivo el núcleo); se trata de saber si toda función armónica positiva $u(r,\theta)$ es representable por una integral de Poisson(1), es decir, si existe alguna $h$ que verifique la igualdad. Es fácil ver que una respuesta afirmativa sería falsa: basta elegir como $u$ al mismo núcleo de Poisson P. En cambio sí es cierto este otro hecho: toda función $u(r,\theta)$ armónica positiva es representable mediante una integral de Poisson-Stieltjes.

[2] $$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\, d\, f(\varphi)$$

(1): Para las nociones de núcleos singulares: Natanson, op.cit.Cap.X, o en una forma más particular: Zygmund, op.cit.Cap.III., § 2 y 4.

donde f es no decreciente y de variación acotada(1). Es decir, dada una $u$ tal que $\Delta u=0$ en $r<1$ y $u \geq 0$ en $r \leq 1$ (círculo unidad), existe una f no decreciente y de variación acotada tal que se verifica [2]. (Por ejemplo: cuál será f en el caso mencionado, cuando $u = P$ ?)

Evidentemente, la [1] es un caso particular de [2], que se obtiene cuando f es absolutamente continua, y entonces $h = f'$.

Por las razones expuestas, y para abarcar el problema en forma más amplia tomaremos la [2] como punto de partida. Es decir, dada una función f no decreciente y de variación acotada, se define la función u mediante la [2], y es fácil comprobar que u es armónica.

Se trata de estudiar el comportamiento de la función así definida cuando $r \to 1$, es decir, al aproximarse al contorno.

Es fácil darse cuenta, comparando con el teorema de Schwarz, que tenderá a $f'(\theta)$ no es sin embargo trivial saber bajo qué condiciones ocurrirá eso. Para sugerirlas, consideremos el caso en que f es absolutamente continua y comparemos con el teorema de Lebesgue que afirma que la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{1/n} f(x+\theta)\, d\theta = f(x)$$

se cumple en casi todo punto. Pero esto no es más que la representación de f me-

(1): La demostración la daremos luego (§4.1, Teor.1) diante el núcleo singular "de Barrow":

$$K_n(\theta) = \begin{cases} n & \text{para} \quad \theta \in (0,1/n) \\ 0 & \text{"} \quad \theta \notin (0,1/n) \end{cases}$$

Esto permite aventurar la hipótesis de que también ocurre así con el núcleo de Poisson $P(r,\theta)$.

$\boxed{\S 3.2}$ Dejando ya de lado las consideraciones heurísticas pasaremos a demostrar el siguiente teorema, del cual resultará el de Fatou como corolario.

Teorema 2 (Herglotz, 1911). En todo punto donde $f$ sea derivable ( $f' < \infty$ se entiende), su integral de Poisson-Stieltjes tiende a $f'$, es decir:

$$\lim_{r \to 1} u(r,\theta) = \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, df(\varphi) = f'(\theta) \quad (1)$$

Supongamos pues que $f'(\theta)$ existe. Integrando por partes:

$$u(r,\theta) = P(r, \theta - \varphi)\, f(\varphi) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} P(r, \theta - \varphi)\, d\varphi$$

Es fácil ver que en el límite $r \to 1$, la parte integrada se anula. En efecto, ella se puede escribir:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \left[ f(2\pi - 0) - f(+0) \right]$$

(1): Como $f$ es de variación acotada, esto ocurre p.p.

Si $\theta = 0$ , se anula el corchete por hipótesis (existe $f'(0)$), y si $\theta \neq 0$ , al hacer $r \to 1$ tiende a cero el núcleo P.

En ambos casos pues se va la parte integrada, y el problema se reduce a calcular

$$\lim_{r \to 1} u\,(r,\theta) = \lim_{r \to 1} -\int_0^{2\pi} f\,(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial \varphi} P\,(r,\, \theta - \varphi)\; d\,\varphi$$

Haciendo $\varphi - \theta = u$ , y cambiando por comodidad los límites de la integral:

$$-\int_0^{2\pi} f\,(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial \varphi} P\,(r,\, \theta - \varphi)\, d\,\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\,\frac{2r\,(1-r^2)\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \theta)}{\left[1-2r\,\cos(\varphi-\theta)+r^2\right]^2}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+\theta)\,\frac{2r(1-r^2)\,\mathrm{sen}\,u}{|1-2r\,\cos u + r^2|^2}\,du$$

Ahora se procede con el método "standard" de estudio de los núcleos singulares: aislar el punto crítico ( $u = 0$ en este caso). Haciendo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{-\eta} + \int_{-\eta}^{\eta} + \int_{\eta}^{\pi} = I_1 + I_2 + I_3$$

y teniendo en cuenta que existe una cota de $f$ : $|f(u)| < M$ (pues $f$ era no decreciente y de variación acotada):

$$|I_1| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-\eta} f\,(\theta+u)\,\frac{2\,r\,(1-r^2)\,\mathrm{sen}\,u}{\left[1 - 2r\,\cos u + r^2\right]^2}\,du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\,M\,\frac{2\,(1-r^2)}{\left[\,1 - 2r\,\cos\eta + r^2\,\right]^2}\int_{-\pi}^{-\eta} du < \frac{M\,(1-r^2)}{\left[\,1 - 2r\,\cos\eta + r^2\,\right]^2}$$

En consecuencia, como $\cos \eta \neq 1$ , resulta $|I_1| \to 0$ para $r \to 1$. Análogamente se demuestra que $|I_3| \to 0$ .

Por consiguiente:

$$\lim_{r \to 1} u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1} \int_{-\eta}^{\eta} f(\theta + u) \frac{2r(1-r^2) \operatorname{sen} u}{(1 - 2r \cos u + r^2)^2} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1} \int_{0}^{\eta} [f(\theta + u) - f(\theta - u)] \frac{2r(1-r^2) \operatorname{sen} u}{(1 - 2r \cos u + r^2)^2} du .$$

Como estamos suponiendo que existe $f'(\theta)$ , por definición de derivada se puede escribir:

$$f(\theta + u) = f(\theta) + u f'(\theta) + u \rho(\theta,u) \quad \text{y}$$

$$f(\theta - u) = f(\theta) - u f'(\theta) - u \rho(\theta,-u)$$

con $\rho \to 0$ para $u \to 0$ .

Entonces, reemplazando:

$$\lim_{r \to 1} u(r,\theta) = \frac{f'(\theta)}{\pi} \lim_{r \to 1} \int_{0}^{\eta} u \frac{2r(1-r^2) \operatorname{sen} u}{(1 - 2r \cos u + r^2)^2} du +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1} \int_{0}^{\eta} u [\rho(\theta,u) + \rho(\theta,-u)] \frac{2r(1-r^2) \operatorname{sen} u}{(1 - 2r \cos u + r^2)^2} du =$$

$$= f'(\theta) \lim_{r \to 1} -2 \int_{0}^{\eta} u \frac{\partial}{\partial u} P(r,u) du - \lim_{r \to 1} \int_{0}^{\eta} [\rho(\theta,u) + \rho(\theta,-u)]$$

$$\cdot u \frac{\partial}{\partial u} P(r,u) du .$$

Eligiendo $\eta$ suficientemente pequeño, como $\rho(\theta,u) + \rho(\theta,-u) \to 0$ para $u \to 0$

el segundo término se puede hacer arbitrariamente pequeño. Respecto al factor de $f'(\theta)$, una integración por partes muestra inmediatamente que vale 1, pues

$$-2\int_0^{\eta} u \frac{\partial}{\partial u} P(r,u)\, du = -2u\,P(r,u)\Big|_0^{\eta} + 2\int_0^{\eta} P(r,u)\, du =$$

$$= -2\eta\, P(r,\eta) + \int_{-\eta}^{\eta} P(r,u)\, du \quad ,$$

y entonces $\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = f'(\theta)$ , que es la tesis, c.q.d.

$\boxed{\S 3.3}$ Como ya dijimos, de este teorema se deduce inmediatamente el siguiente

<u>Corolario 1</u> (Teorema de Fatou). <u>Si $h \in L^1$, su integral de Poisson</u>

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta-\varphi)\, h(\varphi)\, d\varphi$$

<u>converge, para $r \to 1$, hacia $h(\theta)$ en casi todo punto</u>.

En efecto, si en el teorema 2 se elige $f$ absolutamente continua, es sabido que la integral de Stieltjes se convierte en una integral de Lebesgue, y entonces, para cualquier $h \in L^1$

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, h(\varphi)\, d\varphi = \lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, d\int_0^{\varphi} h(\alpha)\, d\alpha =$$

$$= \frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta} h(\alpha)\, d\alpha \quad .$$

en todo punto donde exista derivada, en virtud del teorema 1.

Pero $\frac{d}{d\theta}\int_0^{\theta} h(\alpha)d\alpha = h(\theta)$ en casi todo punto, por el teorema de Lebesgue, y resulta así demostrado el teorema de Fatou, s.q.d. (1)

El método utilizado aquí es suceptible de generalización, manteniendo su validez el teorema, bajo ciertas condiciones, para cualquier núcleo singular $k_n(\theta)$ , no necesariamente el de Poisson.

Observaremos por último lo siguiente: los teoremas elementales muestran que los núcleos singulares dan una representación de la función en sus puntos de continuidad o discontinuidades de primera especie; aquí se ha extendido esta propiedad a casi todo punto.

## §4. REPRESENTACION DE FUNCIONES ARMONICAS MEDIANTE INTEGRALES DE POISSON

§4.1 Sea la función u definida, como antes, por una integral de Poisson - Stieltjes

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, d f(\varphi) \tag{1}$$

pero ahora no supondremos a f no decreciente, sino simplemente de variación acotada. Evidentemente, u sigue siendo armónica. Como f es de variación acotada se la puede escribir $f(\varphi) = f_1(\varphi)-f_2(\varphi)$ donde $f_1$ y $f_2$ son no decrecientes y de variación acotada. Se tendrá entonces:

$$u(r,\theta) = u_1(r,\theta) - u_2(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, df_1(\varphi) - \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, df_2(\varphi)$$

donde $u_1$ y $u_2$ son armónicas positivas.

Por lo tanto, toda función f de variación acotada define mediante la [1]

(1): También es trivial demostrar ahora este otro teorema, también debido a Fatou: Si h es absolutamente continua, entonces $\partial/\partial\theta\, u(r,\theta) = \partial/\partial\theta\,.\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)h(\varphi)d\varphi \to h'(\theta)$ p.p. (Hágalo el lector).

una función armónica que es diferencia de dos armónicas positivas.

Este hecho sugiere el problema inverso: dada una función armónica diferencia de dos armónicas positivas (el conjunto de tales funciones no constituye ni mucho menos, la totalidad de las funciones armónicas); será posible encontrar una función de variación acotada f que la represente por la integral de Poisson-Stieltjes [1] ? Evidentemente, la respuesta afirmativa del problema equivale a demostrar que toda función armónica positiva en el circulo unidad (es decir $\Delta u = 0$ en $r < 1$ y $u \geq 0$ en $r \leq 1$) es representable con una función de variación acotada y no decreciente.

Para resolver la cuestión aplicaremos teoremas de Helly a la integral de Poisson-Stieltjes, en la manera descripta al final del §2.

Demostraremos entonces el teorema, ya mencionado en §3:

Teorema 1 (Plessner). Toda función armónica positiva es representable por una integral de Poisson-Stieltjes mediante una función acotada no decreciente f. Es decir, dada u que cumple $\Delta u = 0$ y $u \geq 0$ en el circulo unidad, existe acotada y no decreciente tal que

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ df(\varphi)$$

Sea pues $u(r,\theta)$ una función armónica positiva en el circulo unidad. Si existiere el límite $u(r,\theta) \rightarrow u(1,\theta)$ y fuese una función continua, el problema estaría resuelto por el teorema de Schwarz:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ u(1,\varphi)\ d\varphi$$

pero ahora nada se sabe sobre la existencia de $u(1,\theta)$.

Consideremos la función $u_n$ definida por

$$u_n(r,\theta) = u\left(\frac{n-1}{n} r , \theta\right)$$

Evidentemente $u_n$ es armónica, para cada $n$, y se cumple

$$\lim_{r \to 1} u_n(r,\theta) = u_n(1,r) = u\left(\frac{n-1}{n}, \theta\right)$$

puesto que $u$ es armónica en $r < 1$ y por consiguiente continúa.

Entonces, por el teorema de Schwarz, $u_n$ es representable mediante

$$u_n(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, u\left(\frac{n-1}{n}, \varphi\right) d\varphi .$$

Haciendo ahora $n \to \infty$, como $u_n(r,\theta) \to u(r,\theta)$ por la continuidad de $u$ en $r < 1$, se tiene:

$$u(r,\theta) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, u\left(\frac{n-1}{n}, \varphi\right) d\varphi .$$

Claro está que no se puede pasar inmediatamente el límite bajo el signo de integral, pues nada se sabe respecto a la convergencia de $u$ en el contorno. Es aquí donde usaremos integrales de Stieltjes, por la mayor flexibilidad que dan al paso al límite los teoremas de Helly.

Llamando
$$f_n(\varphi) = \int_0^{\varphi} u\left(\frac{n-1}{n}, \alpha\right) d\alpha ,$$

resulta
$$u_n(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta-\varphi)\, df_n(\varphi)$$

Pero los $f_n$ son positivas, no decrecientes y de variación acotada, como surge enseguida de su definición. Además están uniformemente acotadas, puesto que

$$f_n(\varphi) \leq f_n(2\pi) = \int_0^{2\pi} df_n(\varphi) = \int_0^{2\pi} u\left(\frac{n-1}{n}, \varphi\right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} P(0,0)\; u\left(\frac{n-1}{n}, \varphi\right)\; d\varphi = 2\pi\, u(0)$$

Y como son no decrecientes, también su variación total está uniformemente acotada. En resumen, satisfacen las hipótesis del primer teorema de Helly(§2,1) y por lo tanto existirá una subsucesión convergente $f_{n_i}(\varphi) \to f(\varphi)$ Entonces, de

$$u_{n_i}(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\; d\, f_{n_i}(\varphi)$$

resulta, aplicando el segundo teorema de Helly ( §2,2):

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\; d\, f(\varphi)$$

que es la representación buscada, c.q.d.

Antes de seguir, notaremos que, si $f_{n_i}$ es la subsucesión convergente de $f_n(\;) = \int_0^{\varphi} u\left(\frac{n-1}{n}, \alpha\right) d\alpha$ , la fórmula

$$f(\varphi) = \lim_{n_i \to \infty} \int_0^{\varphi} u\left(\frac{n_i - 1}{n_i}, \alpha\right)\; d\alpha \qquad (2)$$

es una fórmula de inversión de la integral de Poisson-Stieltjes, pues da f en función de u .

Es fácil ver también que es completamente inesencial haber elegido la sucesión $u(\frac{n-1}{n},\alpha)$ ; basta tomar cualquier sucesión $u(r_n, \alpha)$ con $r_n \to 1$ .

$\boxed{\S 4.2}$ El problema que examinaremos ahora es el de la unicidad de la representación. A cada función $f$ no decreciente y acotada la [1] le hace corresponder de manera única una función armónica positiva $u$ en el círculo unidad. Recíprocamente, el teorema [1] asegura que a cada $u$ le corresponde una $f$, y la [2] da una forma de calcularla (teóricamente al menos). Pero esto no asegura que $f$ esté determinada de manera única, puesto que $f_{n_i}$ es alguna subsucesión convergente y no sabemos si es única.

Es trivial comprobar que si $f$ es solución del problema, entonces también lo es $f + C$, donde C es cualquier constante. Esto se debe a una característica esencial de las integrales de Stieltjes y por lo tanto, en ese sentido, el problema de unidad debe ser contestado en forma negativa. Pero, salvo constantes aditivas, existirán dos funciones $f$ y $g$ soluciones? El problema así planteado cambia de aspecto, y a continuación veremos que en este sentido sí se puede asegurar la unicidad.

Teorema 2 (Unicidad de la representación). La representación de una función armónica positiva $u$ en el círculo unidad, mediante una integral de Poisson-Stieltjes, es única, salvo constantes aditivas en la $f$ correspondiente.

En efecto, supongamos que además de

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta - \varphi) \; d\, f(\varphi)$$

sea válida la representación

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta - \varphi) \; d\, g(\varphi)$$

De la última obtenemos, integrando por partes:

$$u(r,\alpha) = \int_0^{2\pi} P(r,\alpha-\varphi)\,dg(\varphi) = P(r,\alpha-\varphi)\,g(\varphi)\Big|_0^{2\pi} -$$

$$-\int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}P(r,\alpha-\varphi)\,d\varphi = P(r,\alpha)\,u(0) - \int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}P(r,\alpha-\varphi)\,d\varphi\,,$$

puesto que

$$g(2\pi-0) - g(+0) = \int_0^{2\pi} d\,g(\varphi) = \int_0^{2\pi} P(0)\,d\,g(\varphi) = u(0)$$

Integremos ahora respecto de $\alpha$ :

$$\int_0^{\theta} u(r,\alpha)\,d\alpha = u(0)\int_0^{\theta} P(r,\alpha)\,d\alpha - \int_0^{\theta} d\alpha \int_0^{2\pi} g(\varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}P(r,\alpha-\varphi)\,d\varphi\,.$$

Como se verifica $\frac{\partial}{\partial\varphi}P(r,\alpha-\varphi) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}P(r,\alpha-\varphi)$ ,reemplazando en la última integral y aplicando el teorema de Fubini - lo cual puede hacerse porque el integrando es positivo -, resulta

$$\int_0^{\theta} u(r,\alpha)\,d\alpha = u(0)\int_0^{\theta} P(r,\alpha)\,d\alpha + \int_0^{2\pi} g(\varphi)\left[P(r,\theta-\varphi)-P(r,\varphi)\right]d\varphi$$

Demos ahora, por ejemplo, valores $r=r_n = \frac{n-1}{n}$

(esto último no es esencial, como aclaramos ya); existirá una subsucesión convergente $r_{n_i}$ (primer teorema de Helly) de manera que pasando al límite resulta

$$f(\theta) = \tfrac{1}{2}\,u(0) + g(\theta) - g(0)$$

Como $\frac{1}{2}u(0) - g(0) = C$ , constante, resulta la tesis, c.q.d.

$\boxed{\S 4.3}$ Los teoremas 1 y 2 muestran por consiguiente que coinciden las siguientes familias de funciones:

a) las funciones armónicas en el círculo unidad, diferencia de armónicas positivas: y

b) las funciones armónicas en el círculo unidad que son integrales de Poisson-Stieltjes de funciones de variación acotada.

Consideremos ahora esta otra familia:

c) funciones armónicas $u$ en el círculo unidad tales que existe una constante $M$ que verifica para todo $r<1$:

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\theta)| \, d\theta < M \tag{3}$$

Demostraremos que esta familia coincide también con las anteriores, es decir:

<u>Teorema 3.</u> <u>Son idénticas las subfamilias de las funciones armónicas del círculo unidad constituidas por las funciones siguientes</u>:

a) <u>diferencia de dos funciones armónicas positivas</u>;

b) <u>integrales de Poisson-Stieltjes de funciones de variación acotada</u>; y

c) <u>funciones que verifican [3]</u>.

Como dijimos antes, ya está demostrada la identidad de las primeras dos clases. Supongamos ahora que $u$ es una integral de Poisson-Stieltjes (y por lo tanto armónica):

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi) \, d\,f(\varphi)$$

y demostraremos que $u$ cumple la condición [3]. En efecto, como $P \geqslant 0$ :

$$|u(r,\theta)| \leq \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ d\,v(\varphi)$$

donde V es la variación total de f:

$$v(\varphi) = \int_0^{\varphi} |d\,f(\varphi)|$$

Teniendo ahora en cuenta que el integrando es positivo:

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\theta)|\,d\theta \leq \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ d\,v(\varphi) = \int_0^{2\pi} d\ v(\varphi)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ d\theta = \int_0^{2\pi} d\ v(\varphi) \quad ,$$

y el último término es finito, por ser f de variación acotada, y además independiente de $r$ .

Recíprocamente, supongamos que u satisface [3] y es armónica. Para demostrar que u es una integral de Poisson-Stieltjes, seguiremos la misma línea de razonamiento que emplea Plessner en su tesis ('):

Introduzcamos las funciones

$$f_r(\theta) = f(r,\theta) = \int_0^{\theta} u(r,\alpha)\,d\alpha$$

Tales $f_r$ están uniformemente acotadas, pues

$$|f_r(\theta)| \leq \int_0^{\theta} |u(r,\alpha)|\,d\alpha \leq \int_0^{2\pi} |u(r,\alpha)|\,d\alpha < M$$

por hipótesis

(') Mencionada en §1.

Además tienen variación uniformemente acotada. En efecto, cada $f_r$ es de variación acotada, por ser una integral, y para toda partición del intervalo $[0,2\pi]$ :

$$\sum_{k=1}^{n} | f_r(\theta_k) - f_r(\theta_{k-1}) | = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} u(r,\alpha)\, d\alpha \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} | u(r,\alpha) | \, d\alpha = \int_0^{2\pi} | u(r,\alpha) | \, d\alpha < M .$$

Elijamos, entre las $f_r$ , la subfamilia compuesta por la sucesión

$f_{n-1/n}(\theta) = f(\frac{n-1}{n}, \theta)$ : en virtud de lo que antecede esta sucesión satisface a las hipótesis del primer teorema de Helly. Existe entonces una subsucesión parcial convergente $f_{n_i} \to f$ . Como no hay peligro de confusión, la volvemos a designar con $f_n$, y se cumplirá, para $r_n > r$ :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r_n^2 - r^2}{r_n^2 - 2\, r_n r \cos(\varphi - \theta) + r^2} \, u(r_n, \varphi)\, d\varphi ,$$

que es el teorema de Schwarz con el núcleo de Poisson $P_{r_n}(r, \varphi - \theta)$ del círculo de radio $r_n$ . Esto es lo mismo que:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P_{r_n}(r, \theta - \varphi) \, d f_n(\varphi)$$

Se puede ahora pasar al límite $n \to \infty$ (y $\therefore r_n \to 1$ ) aplicar el segúndo teorema de Helly modificado, con el integrando que también depende de $n$ . A pesar de esto el teorema conserva su validez (') y resulta:

('): Se comprueba de inmediato, de manera similar al 2º teorema de Helly original demostrado en § 2.

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, df(\varphi)$$

Es decir, u es una integral de Poisson-Stieltjes. Con esto ya quedan identificadas las tres clases mencionadas, c.q.d.

**§4.4** Ahora trataremos de caracterizar la clase de funciones armónicas en el círculo unidad representables por una integral de Poisson-Lebergue:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, h(\varphi)\, d\varphi \quad .$$

Evidentemente, tales funciones formarán un subconjunto del anterior, puesto que la última fórmula es un caso particular de la [1], tomando f absolutamente continua, y entonces $h = f'$

Es necesario recordar en primer lugar la definición de continuidad absoluta y uniforme de un conjunto de funciones $\{f_r(\theta)\}$ - r es el parámetro del conjunto -, que se enuncia diciendo que para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que para todo conjunto de intervalos disjuntos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ del dominio de definición que cumple

$$\sum_{k=1}^{n} | b_k - a_k | < \delta$$

se verifica

$$\sum_{k=1}^{n} | f_r(b_k) - f_r(a_k) | < \varepsilon$$

La diferencia con la continuidad absoluta de cada $f_r$ estriba en que ahora se exige que $\delta$ sea independiente de $r$.

Con esto ya se puede enunciar el teorema de Vitali de paso al límite bajo el signo de integral, del cual se obtendrá la caracterización deseada.

Teorema 4. (Vitali). Sea $f_n$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo $[a,b]$, no negativas, y convergente p.p. hacia f. Entonces es condición necesaria y suficiente para que se pueda pasar al límite bajo el signo de integral:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(\theta)\, d\theta = \int_a^b f(\theta)\, d\theta$$

que las funciones $\int_a^t f_n(\theta)\, d\theta \quad , \quad t \in |a,b|$ sean absolutamente continuas uniformemente.

No daremos aquí la demostración de este teorema (['); tan solo señalaremos que la ventaja respecto a los demás teoremas de paso al límite estriba en que no sólo da una condición suficiente, sino también necesaria. Claro está que la verificación de la continuidad absoluta uniformemente puede resultar más complicada que la verificación de las hipótesis de los otros teoremas, por ej., el de mayoración de Lebesgue. Hacemos también hincapié en que la condición $f_n(\theta) \geqslant 0$ es esencial; de lo contrario se obtendría una condición necesaria.

Ahora podemos encararnos con nuestro objetivo, que fué logrado por Evans y Bray, y simlutáneamente por Plessner.

Teorema 5 (Evans - Bray - Plessner). Es condición necesaria y suficiente para que una función armónica u en el círculo unidad sea representable por una integral de Poisson-Lebesgue

---

('): Cf., por ej., Natanson, op.cit.,Cap.VI, §3, aunque el teorema está expresado en términos algo diferentes

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,(\theta-\varphi))\ h(\varphi)\, d\varphi \quad ,$$

que, $f_r(\theta) = \int_0^{\theta} u(r,\alpha)\,d\alpha$ sea absolutamente continua uniformemente. En tal caso $h \in L^1\ (0,2\pi)$

Se vió ya §4.1 que existe una subsucesión $f_{r_n}$ con $r_n \to 1$ tal que

$$f_{r_n} \to f$$

con $f$ de variación acotada; que por el teorema de descomposición de Lebesgue (') se puede escribir de manera única

$$f(\theta) = a(\theta) + \sigma(\theta) + s(\theta) = \int_0^{\theta} a'(\alpha)\, d\alpha + \sigma(\theta) + s(\theta)$$

donde $a(\theta)$ es absolutamente continua, $r(\theta)$ a saltos y $s(\theta)$ singular.

Por otra parte ( §4.1) Teor.1; y §3.2, Teor.2) se cumple:

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\ d\,f(\varphi) \to f'(\theta)$$

en todo punto donde exista $f'$, es decir p.p., por ser $f$ de variación acotada.

El teorema quedaría demostrado pues, si se prueba que $f$ es absolutamente continua (es decir $\sigma = s = 0$), y como

$$u(r,\theta) \to f'(\theta) \quad , \ p.\ p.$$

esto equivale a mostrar que se cumple

---

('): Cf., por ej., Natanson, op.cit., Cap. IX, §6.

$$\lim_{r_n \to 1} \int_0^{\theta} u(r_n, \alpha)\, d\alpha = \int_0^{\theta} a'(\alpha)\, d\alpha$$

o sea, que se puede pasar al límite bajo el signo de integral. Por el teorema 4 de Vitali esto es posible si y sólo si $f_r(\theta)$ es absolutamente continua uniformemente, y esta es precisamente la condición impuesta a la hipótesis.

Además, como $f$ es absolutamente continua: $h = f'$ y

$$f(\varphi) = \int_0^{\varphi} h(\alpha)\, d\alpha$$

Es decir, $h \in L^1$ c.q.d.

Inmediatamente se deduce el siguiente corolario, como caso particular:

<u>Corolario 1.</u> <u>Si $u(r,\theta)$ está uniformemente acotada en el círculo unidad, es representable por una integral de Poisson-Lebesgue</u>

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, h(\varphi)\, d\varphi ,$$

con $h \in L^1$

En efecto, llamando $M$ a una cota de $u$, se obtiene:

$$| f_r(\theta) | \leq M\theta$$

y entonces para toda partición de medida $< \delta$ :

$$\sum_k | f_r(\theta_k) - f_r(\theta_{k-1}) | \leq M \sum_k (\theta_k - \theta_{k-1}) = M\delta$$

que es la absoluta continuidad uniforme. Entonces, por el teor. 5 vale la representación de Poisson - Lebesgue, y $h \in L^1$, c. q. d.

- - - - -

$\boxed{\S 4.5}$ De los teoremas anteriores obtendremos dos importantes consecuencias. En primer lugar el:

Teorema 6. (Fatou). Si $F(z)$ es una función holomorfa y acotada en el interior del círculo unidad, entonces tiene límite radial para $|z| \to 1$ en casi todo punto.

En efecto: haciendo $F = u + iv$ tanto $u$ como $v$ son armónicas acotadas, y por lo tanto admiten una presentación como integral de Poisson - Lebesgue, por el corolario 1. del teorema 5. Entonces, por el teorema de Fatou ( § 3.3, Cor. 1) ambas tendrán límite radial p.p., para $|z| \to 1$, y por consiguiente tambien $F$, c.q.d.

Para obtener la otra consecuencia, recordemos que se llama función conjugada armónica $v$ de una función armónica $u$ a la que se obtiene mediante las condiciones de Cauchy-Riemann $u_r = \frac{1}{r} v_\theta$, $v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$, $v$ será armónica, determinada salvo una constante aditiva (compruébese), y $u+iv$ será holomorfa.

Otra definición equivalente de conjugada armónica, mediante el núcleo de Poisson, la daremos poco más adelante ( § 5.1)

El resultado que enunciaremos ahora fué obtenido por Plessner en su tesis.

Teorema 7 (Plessner, 1923). Si $U$ es una función armónica en el círculo unidad $r < 1$, representable por una integral de Poisson-Lebesgue, entonces la conjugada armónica $V$ tiene límite radial p.p. para $r \to 1$.

Por hipótesis existe $h \in L^1$ tal que

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\; h(\varphi)\, d\varphi \,, \quad y$$

$$\lim_{r\to 1} u(r,\theta) = h(\theta) \,. \quad p.\ p.$$

Si $v$ fuese acotada en $r < 1$, podríamos aplicar el cor. 1 del teor. 5,pe ro como nada sabemos acerca de eso, hay que proceder de distinta manera.

Supondremos que h es no negativa, pues de lo contrario, como $h \in L^1$ , se la podría escribir $h = h_1 - h_2$ con $h_1$ y $h_2$ integrables y no negativas y razonaríamos separadamente con cada una .

Como $h(\varphi) \geqslant 0$ , es $u(r,\theta) \geqslant 0$ y por lo tanto

$$\omega(z) = \omega(r,\theta) = e^{-(u+iv)}$$

es holomorfa y acotada: $|\omega(z)| \leqslant 1$. Por lo tanto en virtud del teorema 6, tendrá límite radial p.p. para $|z|\to 1$, y entonces también lo tendrá el exponente $u + iv$ . Y como ya sabemos que $u \to h$ , también existirá p.p. el límite

$$\bar{h}(\theta) = \lim_{r\to 1} v(r,\theta) \,, \quad c.\ q.\ d.$$

A la función límite $\bar{h}$ se la llama simplemente función conjugada de $h$ .

Observaremos que, contrariamente a lo que ocurre con $h$ , no hemos representado a $\bar{h}$ como integral de Poisson-Lebesgue, y ni siquiera demostramos que sea integrable. Tal afirmación sería falsa, en general.

El caso $h \in L^p$ , $p > 1$, será considerado más adelante.

- - - - -

§5. <u>REPRESENTACION CANONICA DE CLASES DE FUNCIONES HOLOMORFAS</u>

§5.1 Ya en §4.5 hemos hablado algo sobre funciones analíticas, En este parágrafo nos dedicaremos a ellas.

Comencemos por señalar que si $u$ y $v$ son dos funciones armónicas, entonces $u+iv$ sera armónica compleja, puesto que el laplaciano es un operador lineal. Por otra parte, como se ve en la teoría elemental, toda función analítica es armónica compleja (esto surge inmediatamente de las condiciones de Cauchy-Riemann). En consecuencia, las funciones analíticas constituyen una subclase de las armónicas complejas, a saber, aquella cuyos elementos verifican las condiciones de Cauchy-Riemann.

Consideremos ahora la función

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega + z}{\omega - z}$$

donde $\omega = e^{i\varphi}$ es un parámetro (número complejo del círculo unidad) y $z = e^{i\theta}$. Tal función es holomorfa en $|z| < 1$.

Demostraremos que el núcleo de Poisson $P(r, \theta - \varphi)$ es la parte real de $H(z)$. En efecto:

$$H(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega + z}{\omega - z} = \frac{1}{2\pi} \frac{(\omega+z)(\bar{\omega} + \bar{z})}{(\omega - z)(\bar{\omega} - \bar{z})} = \frac{1}{2\pi} \frac{|\omega|^2 - |z|^2 + \bar{\omega}z - \omega\bar{z}}{|\omega - z|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2 + r\, e^{i(\theta-\varphi)} - r\, e^{-i(\theta-\varphi)}}{|e^{i\varphi} - r\, e^{i\theta}|^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} + i \frac{1}{\pi} \frac{r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2} =$$

$$= P(r, \theta - \varphi) + i\, Q(r, \theta - \varphi)$$

La parte imaginaria

$$Q(r, \theta - \varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{r \operatorname{sen}(\theta - \varphi)}{1 - 2r\cos(\theta - \varphi) + r^2}$$

se llama núcleo conjugado de Poisson (del círculo unidad).

Con estas consideraciones, a partir de una función armónica en el círculo unidad dada por una integral de Poisson-Stieltjes de una función de variación acotada

$$u(z) = u(r e^{i\theta}) = u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, d f(\varphi) \quad ,$$

podemos hallar directamente su conjugada mediante

$$v(z) = v(r e^{i\theta}) = v(r,\theta) = \int_0^{2\pi} Q(r, \theta - \varphi)\, d f(\varphi)$$

En efecto: como P y Q satisfacen a las condiciones de Cauchy-Riemann, por provenir de una función analítica H, es inmediato comprobar que u y v también las satisfacen.

En consecuencia, la función

$$F(z) = u(z) + i\, v(z) = \int_0^{2\pi} \left[ P(r, \theta - \varphi) + i\, Q(r, \theta - \varphi) \right] df(\varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi} H(z)\ d f(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\ d f(\varphi)$$

- - - - - -

$\boxed{\S\,5.2}$ Es nuestro objetivo inmediato dar representaciones integrales de funciones analíticas que cumplen determinadas exigencias, tal como se hizo en §4 para las armónicas.

En las consideraciones preliminares del §5.1 ya están los ingredientes necesarios para demostrar el importante

Teorema 1 (Herglotz, 1911). Toda función $F(z)$ holomorfa en el círculo unidad y de parte real no negativa en esa región, es representable mediante la fórmula

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\ d f(\varphi) + i\, C \qquad [1]$$

donde $f$ es una función acotada no decreciente, y $C$ un número real. Recíprocamente, para todas $f$ y $C$ que cumplan estas condiciones, $F(z)$ tendrá las características enunciadas.

El significado del teorema es que variando los dos parámetros $f$ y $C$ se obtienen todas las funciones holomorfas $F(z)$ de las características indicadas.

Para demostrarlo, hay que recordar ( § 4.1. teor. 1) que todas las funciones armónicas del círculo unidad, con parte real no negativa, están dadas por

$$u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, d f(\varphi)$$

donde f es acotada no decreciente, Pero las analíticas son una subclase de las armónicas complejas, y $u+iv$ será analítica si y sólo si v es la conjugada de u. Entonces todas las funciones holomorfas del círculo unidad de parte real no negativa en ese círculo, estarán dadas por tales $u+iv$ ; como v está determinada salvo una constante aditiva ( § 4.5), será de la forma ( por § 5.1):

$$v(r,\theta) = \int_0^{2\pi} Q(r, \theta - \varphi)\, d f(\varphi) + \text{Cte.}$$

Llamando iC a la constante, resulta la tesis. Y C debe ser real, puesto que:

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\left[ f(2\pi - 0) + f(+0) \right] + iC = u(0) + i\, v(0) \quad ,$$

resultando precisamente $C = v(0)$, el valor de la parte imaginaria de F en el origen, c,q,d.

Como consecuencia sencilla se obtiene el

Corolario 1. Toda función holomorfa F(z) en el círculo unidad y de parte imaginaria no negativa en esa region es representable mediante la fórmula

$$f(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\,f(\varphi) + C$$

<u>donde f es una función acotada no decreciente y C un número real. Recíprocamente, para todas f y C que cumplan estas condiciones, F (z ) tendrá las características enunciadas</u>.

Basta multiplicar la [1] por i:

$$i\,F(z) = i\,u(z) - v(z) \quad , \quad u \geqslant 0$$

y tener en cuenta que si las F dan todas las funciones holomorfas de parte real no negativa, entonces las iF dan también todas las funciones holomorfas de parte imaginaria no negativa, c.q.d.

\- - - - - - -

$\boxed{\S 5.3}$ Habiendo dado ya una fórmula de representación para ciertas funciones del círculo unidad, es posible extender esto a otros recintos del plano complejo, mediante transformaciones conformes. Nos ocuparemos a continuación de funciones holomorfas de parte imaginaria no negativa en el semiplano superior, pero señalando que el procedimiento es aplicable a cualquier otra región.

Consideremos entonces la función analítica

$$z = \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \qquad [2]$$

que transforma conformemente el semiplano superior del plano $\zeta$ en el círculo unidad del plano z .

La inversa es

$$\zeta = i\,\frac{1+z}{1-z}$$

Además, los puntos de la circunferencia unidad $z=e^{i\varphi}$ corresponden a los del eje real $\zeta = t$ mediante

$$e^{i\varphi} = \frac{t-i}{t+i} \quad , \quad t = i\,\frac{1+e^{i\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$$

de donde resulta

$$t = -\operatorname{cotg} \frac{\varphi}{2}$$

A base de esto, demostraremos el siguiente

Teorema 2 (Nevanlinna) Toda función holomorfa en el semiplano superior, de parte imaginaria no negativa en ese semiplano, es representable mediante la fórmula

$$G(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\, d\,g(t) + A\zeta + C \qquad [5]$$

donde $g$ es una función acotada no decreciente en $(-\infty, \infty)$, A un número real no negativo, y C un número real. Recíprocamente, para todas $g$, A y C que cumplan estas condiciones, $G(\zeta)$ tendrá las características enunciadas.

De manera similar al teorema 1, esto quiere decir que variando los tres parámetros g, A y C, se obtienen todas las funciones G de las características indicadas.

Para demostrarlo, partamos del resultado del corolario1, escribiendo en la forma

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\left\{ \int_0^{+0} + \int_{+0}^{2\pi-0} + \right.$$

$$\int_{2\pi-0}^{2\pi} \left.\right\} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\, f\,(\varphi) + C = I_1 + I_2 + I_3 + C$$

Consideremos la segunda integral y hagamos el cambio de variables dado por la [2] :

$$I_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{+0}^{2\pi-0} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\, f(\varphi) =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \lim_{\delta \to 0} \int_{-\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}}^{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}} \frac{\frac{t-i}{t+i} + \frac{\zeta-i}{\zeta+i}}{\frac{t-i}{t+i} - \frac{\zeta-i}{\zeta+i}} \, d\, f(2 \text{ arc cotg } (-t))$$

La función g (t) = f ( arc cotg (-t)) será acotada no decreciente en $(-\infty, \infty)$ por serlo la f y la función arc cotg (-t).

Haciendo las operaciones indicadas, resulta:

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t\zeta}{t - \zeta} \, d\, g(t)$$

Por otra parte por una propiedad de la integral de Stieltjes:

$$I_1 = \frac{i}{2\pi} \int_{0}^{+0} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\, f(\varphi) = \frac{i}{2\pi} \, \frac{1+z}{1-z} \left[ f\,(+0) - f\,(0) \right] ;$$

$$I_2 = \frac{i}{2\pi} \int_{2\pi-0}^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\, f(\varphi) = \frac{i}{2\pi} \, \frac{1+z}{1-z} \left( f\,(2\pi) - f\,(2\pi-0) \right),$$

que con la nueva variable se expresa así:

$$I_2 + I_3 = \frac{1}{2\pi}\left( f(+0) - f(0) + f(2\pi) - f(2\pi-0) \right) \zeta .$$

Llamando $G(\zeta) = F(\frac{\zeta - i}{\zeta + i}) = F(z)$ , es evidente que G es holomorfa en el semiplano superior y con parte imaginaria no negativa en ese semiplano, puesto que F tiene esas propiedades en el círculo unidad y $z = z(\zeta)$ es conforme. Entonces:

$$G(\zeta) = I_1 + I_2 + I_3 + C =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\zeta}{t-\zeta} \, dg(t) + \frac{1}{2\pi}\left( f(+0) - f(0) + f(2\pi) - f(2\pi-0) \right) \zeta + C$$

Llamando:

$$\frac{1}{2\pi}\left( f(+0) - f(0) + f(2\pi) - f(2\pi-0) \right) = A \qquad [3a$$

resulta la representación buscada.

Faltaría ver que las G así obtenidas son todas las funciones requeridas, y esto es inmediato, puesto que se obtienen de todas las funciones F con la transformación [2] , c.q.d.

Existe una forma equivalente para escribir la fórmula [3] de Nevalinna, que a veces puede ser más cómoda.

Teniendo en cuenta la identidad

$$\frac{1 + t\xi}{t - \xi} = \left( \frac{1}{t - \xi} - \frac{t}{1 + t^2} \right) ( 1 + t^2) \quad ,$$

la fórmula [3] se convierte en

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - \xi} - \frac{t}{1 + t^2} \right) (1+t^2)\, dg(t) + A\xi + C \quad .$$

Introduciendo ahora la función no decreciente (pero no necesariamente acotada)

$$S(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 + \alpha^2)\, dg(\alpha) \quad ,$$

resulta:

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t - \xi} - \frac{t}{1 + t^2} \right) ds(t) + A\xi + C$$

Como g es acotada, S debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(t)}{1 + t^2} < \infty$$

Entonces, el teorema 2 se puede enunciar en la siguiente forma equivalente.

<u>Teorema 2a</u>(Nevanlinna). <u>Toda función holomorfa en el semiplano superior, de parte imaginaria no negativa en ese semiplano, es representable mediante la fórmula</u>

$$G(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{t-\xi} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\, s(t) + A\xi + C \quad , \qquad [4]$$

<u>donde S(t) es una función no decreciente en $(-\infty, \infty)$ y tal que</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\, s(t)}{1 + t^2} < \infty$$

A es un número real no negativo, y C un número real. Recíprocamente, para todas S, A y C que cumplan estas condiciones, $G(\zeta)$ tendrá las características enunciadas.

El camino seguido para caracterizar las funciones $G(\zeta)$ ha sido pues el siguiente: partiendo del núcleo de Poisson del círculo unidad, y de su conjugado, caracterizamos las funciones $F(z)$ (teor, de Herglotz) y luego por representación conforme pasamos al semiplano superior.

Podría tratar de ensayarse un camino más directo [1], partiendo del núcleo de Poisson del semiplano superior:

$$P(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Entonces, toda función

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - t, y)\, d\, g(t) \qquad |5|$$

es armónica no negativa en el semiplano superior, siempre que $g(t)$ sea no decreciente y de execimiento suficientemente lento como para que la integral converja.

La armónica conjugada de $P(X,Y)$ es

$$Q(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

y como

---

(1): Advertimos desde ya que no resolverá completamente el problema.

$$P(x,y) + Q(x,y) = \frac{1}{\pi} \frac{i}{x+iy} = \frac{1}{\pi} \frac{i}{\zeta}$$

resulta que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big( P(x-t,y) + iQ(x-t,y) \Big)\, d\, g(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\, g(t)}{(x-t)+iy} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\, g(t)}{\zeta - t}$$

es holomorfa en el semiplano superior y de parte real no negativa en ese semiplano. Entonces

$$G^{*}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\, g(t)}{t-\zeta} + \text{Cte. real}$$

será holomorfa en el semiplano superior y de parte imaginaria no negativa en ese semiplano.

Comparando esta última con la [4] , y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\, ds(t)}{1+t^2} = \text{Cte. real}$$

resulta:

$$G(\zeta) = G^{*}(\zeta) + A\zeta$$

Hemos demostrado que las $G(\zeta)$ son todas las funciones holomorfas en el semiplano superior de parte imaginaria no negativa; entonces las $G^{*}(\zeta)$ representan sólo algunas funciones de esta clase, pues carecen del término $A\zeta$ Este proviene del hecho que las funciones U dadas por la [5] no son todas las funciones armónicas no negativas en el semiplano superior. En efecto, para determinar tal conjunto, tomemos la parte imaginaria en la fórmula [4] de Nevan linna:

$$\mathcal{I}G(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{I}\frac{1}{t-\xi}\,ds(t)+Ay = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,ds(t) + A\,y \quad .$$

Como puede observarse, la fórmula anterior carecía del término $A\,y$.

Una última observación: si se desea resolver el problema de Dirichlet para el semiplano superior:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \\ u\,(x,0) = \phi\,(x) \end{cases}$$

se obtendrá -aparentemente- la solución:

$$u\,(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}\,\phi(t)\,dt + A\,y$$

(suponemos por simplicidad a $\phi$ continua y tal que la integral converja). Como $A$ es cualquier constante, el problema no tendría solución única. Lo que sucede es que el eje X no es un contorno del semiplano superior: falta el punto del infinito. Si se prefija $\phi$ también en ese punto, entonces, sí habrá solución única. Por ejemplo, si $\phi(\infty) = 0$, entonces $A = 0$

Por otra parte, si se toma $\phi(x)=0$ para todo X finito, se obtiene la siguiente proposición: las únicas funciones armónicas no negativas en el semiplano superior que se anulan en el eje X, son de la forma $Ay$.

\- - - - - - -

$\boxed{\S 5.4}$ Volvamos ahora otra vez a la fórmula |4| de Nevanlinna:

$$G\,(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\xi} - \frac{t}{1+t^2}\right)ds(t) + A\,\xi + C\ , \qquad [4]$$

donde S(t), A y C cumplen las exigencias ya especificadas.

Podría pensarse, a primera vista, que haciendo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-\zeta}-\frac{t}{1+t^2}\right)ds(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,s(t)}{t-\zeta}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,ds(t)}{1+t^2} \qquad [6]$$

la [4] toma el aspecto más sencillo

$$G(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,s(t)}{t-\zeta} + A\zeta + C_1 \quad , \qquad [7]$$

donde $C_1$ es una nueva constante real. Pero esto es falso, puesto que si bien existe, según demostramos, el primer miembro de la [6] , nada permite afirmar que existan por separado las integrales del segundo miembro, puesto que ambas podrían ser divergentes. Esta afirmación se hace más patente si tenemos en cuenta que S (t) sólo debe cumplir la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\,s(t)}{1+t^2} < \infty$$

que nada asegura sobre la existencia de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\,ds(t)}{1+t^2}$

Este hecho plantea el siguiente problema: puesto que la [7] no representa a todas las funciones holomorfas en el semiplano superior de parte imaginaria no negativa, entonces, a cuales caracterizará?

Una respuesta está dada por el siguiente

Teorema 3. Toda función G ($\zeta$) holomorfa en el semiplano no superior, de parte imaginaria no negativa en ese semiplano, y tal que

$$\sup_{y>0} |\, y \; G(i\,y)\,| < \infty , \qquad [8]$$

es representable mediante la fórmula

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,h(t)}{t-\zeta} \qquad [9]$$

donde h(t) es una función no decreciente y acotada. Recíprocamente, para toda h(t) no decreciente y acotada, la $G(\zeta)$ definida por [9] posee las características enunciadas.

La segunda parte del toerema es inmediata. En efecto: sea h(t) no decreciente y acotada. Entonces $G(\zeta)$ es holomorfa para $y > 0$ y:

$$\Im G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Im \frac{1}{t-\zeta}\, d\,h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\, d\,h(t) \geq 0$$

Además:

$$|y\, G(iy)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{t-iy}\, d\,h(t) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ty+iy^2}{t^2+y^2}\, d\,h(t) \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{t^2y^2+y^4}{t^2+y^2}}\, d\,h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{t^2}{y^2}}}{1+\frac{t^2}{y^2}}\, d\,h(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\,h(t) < M < \infty .$$

Pasemos ahora a demostrar la primera parte del teorema. Como por hipótesis G es holomorfa en el semiplano superior y de parte imaginaria no negativa en ese semiplano, será representable por la fórmula [3] de Nevalinna:

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\, d\,g(t) + A\zeta + C$$

(incluímos por comodidad el factor $\frac{1}{\pi}$ en g), con g acotada no decreciente,

$A \geqslant 0$ y C real. La condición [8] se expresa pues por:

$$| y G(iy) | = | \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1 + i\, ty}{t - iy} \, d\, g(t) + i\, Ay^2 + y\, C \,| < M$$

para todo Y, donde M es un número positivo. Enc consecuencia, tanto la parte real como la imaginaria serán en módulo, menores que M:

$$\left| y \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t - ty^2}{t^2 + y^2} \, d\, g(t) + C \right\} \right| < M$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 (1-t^2)}{t^2 + y^2} \, d\, g(t) + A\, y^2 \right| < M$$

De la primera se deduce que

$$C = \lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\, (y^2 - 1)}{t^2 + y^2} \, d\, g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t \, dg(t) \quad ;$$

es decir, C es el momento de primer orden de g (t).

De la segunda, puesto que la integral tiene integrando positivo, se deduce que

$$A = 0$$

y por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 (1 + t^2)}{t^2 + y^2} \, d\, g(t) < M$$

Por la misma razón de positividad tendremos, para todo N:

$$\int_{-N}^{N} \frac{y^2 (1 + t^2)}{t^2 + y^2} \, d\, g(t) < M$$

Haciendo $y \to \infty$, resulta:

$$\int_{-N}^{N} (1 + t^2)\, d\, g(t) < M$$

y como la desigualdad vale para todo N, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + t^2)\, d\, g(t) < M$$

de manera que la función

$$h\,(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 + \alpha^2)\, d\, g(\alpha)$$

es no decreciente y acotada.

En definitiva, reemplazando en la expresión de $G(\zeta)$ los valores de A y C obtenidos, resulta:

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t}{t - \zeta}\, d\, g(t) + \int_{-\infty}^{\infty} t\, dg(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{t - \zeta}\, dg(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dh(t)}{t - \zeta}$$

que es la tesis, c.q.d.

- - - - - - - -

$\boxed{\S 5.5}$ Consideremos nuevamente la representación canónica de Nevanlinna de todas las funciones holomorfas en el semiplano superior de parte imaginaria no negativa en ese semiplano:

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t\zeta}{t - \zeta}\, d\, g(t) + A\zeta + C \quad .$$

Nuestro objetivo inmediato es encontrar una interpretación de la constante positiva A que aparece en la fórmula, y que por razones que enseguida veremos, se llama <u>derivada angular</u> en el infinito de la función G ( $\zeta$ ).

Sea $\zeta_0$ un punto cualquiera del semiplano superior. Entonces:

$$\frac{G(\zeta)-G(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} = A + \frac{1}{\zeta-\zeta_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1+t\zeta}{t-\zeta} - \frac{1+t\zeta}{t-\zeta}\right) dg(t) = A + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t^2}{(t-\zeta)(t-\zeta_0)}\, d\, g(t) \quad .$$

Demostraremos que la integral tiende a cero cuando $\zeta \to \infty$ a lo largo de cualquier camino interior al sector

$$0 < \eta \leq \arg \zeta \leq \pi - \eta$$

es decir, cuando $\zeta$ se desplaza en una región angular del semiplano superior, con vértice en el origen, que no "toca" al eje real.

En efecto, haciendo $\zeta = \rho e^{i\theta}$ , es sencillo comprobar (hágase el dibujo) que para todo t (real) se cumple

$$\left| \frac{t-\zeta}{t} \right| \geq \operatorname{sen}\theta > \operatorname{sen}\eta$$

y entonces, eligiendo $\eta$ tal que $\eta \leq \arg \zeta_0 \leq \pi - \eta$ :

$$\left| \frac{1+t^2}{(t-\zeta)(t-\zeta_0)} \right| = \frac{\left|1+\frac{1}{t^2}\right|}{\left|\frac{t-\zeta}{t}\cdot\frac{t-\zeta_0}{t}\right|} \leq \frac{\left|1+\frac{1}{t^2}\right|}{\operatorname{sen}^2\eta}$$

Como para un T fijo y suficientemente grande y un $\varepsilon > 0$ arbitrario, se cumple $\int_{|t|\,T} dg(t) < \varepsilon$ por definición de integral, tenemos:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+t^2}{(t-\zeta)(t-\zeta_0)}\, dg(t) \right| \leq \left| \int_{|t|<T}\frac{1+t^2}{(t-\zeta)(t-\zeta_0)}\, dg(t)\right| + \frac{1+\frac{1}{T^2}}{\operatorname{sen}^2\eta}\,\varepsilon$$

Haciendo ahora $\zeta \to \infty$ en la forma prescripta resulta, puesto que T es fijo

$$\lim_{\zeta \to \infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{(t- \quad )(t- \quad )} \, d\, g(t) \right| \leq 0 + \frac{1 + \frac{1}{T^2}}{\operatorname{sen}^2 \eta} \, \varepsilon \, ,$$

y como $\eta$ es fijo y $\varepsilon$ es arbitrario, se concluye que la integral tiende a cero.

En consecuencia vale la igualdad (para $0 < \eta \leq \text{ang}\, \zeta \leq 2\pi - \eta$):

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{G(\zeta) - G(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} = A$$

para todo $\zeta_0 = x_0 + iy_0$ del semiplano superior incluído en una región angular del tipo descripto, es decir, $y_0 > 0$, o bien $x_0 = y_0 = 0$.

Entonces, dividiendo el numerador y denominador del primer miembro por , obtenemos:

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{G(\zeta)}{\zeta} = A \, ,$$

y ésta es la razón del nombre de derivadada angular dado a A.

Otra manera de determinar A es la siguiente. Puesto que, según vimos:

$$\frac{G(\zeta) - G(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} = A + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{(t-\zeta)(t-\zeta_0)} \, dg(t)$$

resulta inmediatamente que:

$$G'(\zeta) = A + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{(t-\zeta)^2} \, d\, g(t)$$

Y ahora, haciendo $\zeta \to \infty$ en la región angular considerada, se demuestra de la misma manera que antes que la integral tiende a cero, y por lo tanto :

$$\lim_{\zeta \to \infty} G'(\zeta) = A \quad .$$

Daremos aún otra forma d e determinación de $A$. Si en la fórmula [3] de Nevanlinna se toma parte imaginaria, resulta :

$$\Im G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \Im \frac{1 + t\zeta}{t - \zeta} \, d\, g(t) + A \Im \zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,(1 + t^2)}{(t-x)^2 + y^2} \, d\, g(t) + Ay \quad ,$$

de manera que

$$\frac{\Im G(\zeta)}{\Im \zeta} = A + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t^2}{(t-x)^2 + y^2} \, d\, g(t) \quad .$$

Si $\zeta \to \infty$ en la región angular considerada, se cumple y y en-tonces, como se ve facilmente, la integral tiende a cero, por lo cual :

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{\Im G(\zeta)}{\Im(\zeta)} = A \quad .$$

En definitiva, hemos demostrado el siguiente

Teorema 4. Si $G(\zeta)$ es una función holomorfa en el semiplano superior, de parte imaginaria no negativa en ese semiplano, su derivada angular $A$, definida (de manera única) mediante la fórmula :

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + t\zeta}{t - \zeta} \, d\, g(t) + A\zeta + c \quad ,$$

está dada por cualquiera de las relaciones

$$A = \lim_{\zeta \to \infty} \frac{G(\zeta)}{\zeta} = \lim_{\zeta \to \infty} G'(\zeta) =$$

$$= \lim_{\zeta \to \infty} \frac{\Im G(\zeta)}{\Im \zeta}$$

<u>entendiéndose que $\zeta \to \infty$ manteniéndose en el sector $\eta \leq \arg \zeta \leq \pi - \eta$, donde $\eta > 0$ es arbitrario.</u>

En este teorema está contenido, esencialmente, un teorema de Julia-Carathéodory, referente a funciones holomorfas acotadas en el círculo unidad, del cual nos ocuparemos luego ( §6.2)

Merece la pena recalcarse que la derivada angular es real no negativa, y vale cero cuando $f(\varphi)$ (ef. §5.3, [3a] ) es continua en 0 y $2\pi$

\- - - - - - -

$\boxed{\S 5.6}$ Es nuestro propósito ahora dar una ligera idea de la utilidad de las fórmulas de representación recientemente obtenidas, en la teoría espectral de operadores en el espacio de Hilbert. La lectura de esta sección no es necesaria para la comprensión general del curso, y puede considerarse como una disgresión.

Sea $\mathcal{H} = \{x\}$ un espacio de Hilbert y A un operador lineal autoadjunto definido en él. Recordamos queA es coadjunto si y sólo si $A = A^*$, donde $A^*$ -operador adjunto de A — está definido por la relación $(Ax, y) = (x, A^* y)$, donde designamos con paréntesis al producto escalar.

El teorema espectral de Hilbert-F.Riesz-von Neumann afirma que a A le corresponde una familia de operadores $E(\lambda) = E_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ tales que se cumple:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E_\lambda$$

Los operadores $E_\lambda$ son proyectores, y a ese conjunto se lo llama des - composición de la unidad respecto de A.

Observemos que la integral no es una integral de Stieltjes usual, puesto que $E_\lambda$ son operadores. Su significado es el siguiente: para todo $x \in \mathcal{H}$ del dominio de A, la expresión $(E_\lambda x,x) = M_x(\lambda)$ es una función no decre - ciente y acotada en $\lambda$, y se cumple:

$$(Ax,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\,(E_\lambda x,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, M_x(\lambda) ,$$

donde la integral es ahora una integral de Stieltjes usual.

Uno de los procedimientos para demostrar el teorema espectral anunciado se basa en el teorema 2 de Nevanilanna ( §5.3 )[1], pero eso sí, no es el único camino posible.

Una vez obtenida la representación espectral de A, no ofrece mayores dificultades la fundamentación de un cálculo operacional: si f(A) es una fun - ción del operador A, entonces.

$$f\,(A) = f\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, E_\lambda \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\, E_\lambda$$

En particular, es importante el operador resolvente de un operador A, definido por

$$R_z = (\, z\, I - A\,)^{-1}$$

---

(1): Tal como está expuesto en: Achieser - Glasmann: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert Raum (Akad. Verlag, Sringner, Berlin, 1954. Cap. VI.

Aquí, I es el operador identidad ($Ix = x$ , $\forall x \in \mathcal{H}$ ) y z una variable compleja, de manera que el operador resolvente es una función de z.

En virtud del cálculo operacional:

$$R_z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d E_\lambda}{z - \lambda} ,$$

también:

$$(R_z x , x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d (E_\lambda x , x)}{z - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d M_x (\lambda)}{z - \lambda}$$

es decir, $R_z$ se expresa por medio de una integral del tipo de Cauchy-Stieltjes

Se demuestra además que la función ($R_z$ x, x) = $\varphi(z)$ es analítica en todo z no perteneciente al espectro de A. Recordamos que el espectro de A es un conjunto del plano complejo que está definido en la forma siguiente: z no pertenece al espectro de A si y sólo si $R_z$ existe, está definido en todo $\mathcal{H}$ ,y es acotado.

Basten estas consideraciones para una idea, muy somera por cierto. Sólo agregaremos que no es éste el único campo de aplicación de la fórmulas canónicas de representación que hemos tratado. Así por ejemplo, son de utilidad para la representación espectral de operadores diferenciales (1) Tal representación tiene lugar mediante operadores integrales, y una de las demostraciones más interesantes del teorema espectral(2), fundamental en la teoría, se basa en la fórmula [3] de Nevanlinna.

---

(1) Cf: Coddington-Levinson: Theory of ordinary differential equations. (McGrow-Hill, 1955).
(2) Cf: Titchmarsh: Eingenfunction expressions associated with second orden differential equations. (Oxford, 1945)

Otro campo de aplicación: el de la teoría de circuitos, será mencionado un poco mas abajo.

- - - - - - -

$\boxed{§5.7}$ Hasta ahora hemos tratado con funciones holomorfas en el círculo unidad y en el semiplano superior, Pero como ya hicimos notar, el método de transformación conforme permite dar representaciones canónicas en otras regiones del plano complejo Debido a su aplicación a la teoría de circuitos, nos ocuparemos ahora de funciones holomorfas en el semiplano de la derecha, $R(p) > 0$, $p = x+iy$, y de parte real no negativa.

El correspondiente teorema de representación es el siguiente:

Teorema 5. (F. Riesz). Toda función $H(p)$ holomorfa en el semiplano de la derecha, de parte real no negativa en ese semiplano, es representable mediante la fórmula:

$$H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\,tp-1}{i\,t-p}\, d\,h(t) + Ap + i\,c \quad , \tag{10}$$

donde $h(t)$ es una función acotada no decreciente en $(-\infty, \infty)$, A un número real no negativo, y C un número real. Recíprocamente, para todo $h(t)$; A y C que cumplan estas condiciones, $H(p)$ tendrá las características enunciadas.

La demostración puede llevarse a cabo a partir de las $F(z)$ del círculo unidad (§5.2), de la misma manera que se hizo en el teorema 2, §5, para caracterizar las $G(\xi)$ (§5.3), o bien partiendo de éstas últimas. Seguiremos aquí el último camino.

Multiplicando por i la fórmula [3. §5] de Nevanlinna (suponemos el factor $\frac{1}{\pi}$ englobado en g), resulta:

$$i\, G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,\zeta + 1}{-it + i\,\zeta}\, d\, g(t) + i\, A \quad + i\, c$$

Llamando $-i\,\zeta = p$ y $-i\; G(\zeta) = -i\; G(ip) = H(p)$, obtenemos

$$H(p) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\; tp + 1}{-it - p}\, d\, g(t) + A\, p - i\, c \quad ,$$

y cuando $\zeta$ varía en el semiplano superior, $p$ varía en el semiplano derecho, y como $G$ tiene parte imaginaria no negativa, $H$ tendrá parte real no negativa. Haciendo ahora el cambio de variable $u = -t$, resulta:

$$H(p) = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{i\; up - 1}{iu - p}\, d\, g(-u) + A\, p - i\, c \quad ,$$

Si ahora definimos $h(u) = -g(-u)$ y cambiamos $C$ por $-C$, esta fórmula se convierte en la [1], y $h(u)$, $A$ y $C$ cumplen los requisitos exigidos.

El hecho de que las $H(p)$ son todas las funciones con las propiedades arriba establecidas, se debe a que provienen de todas las $G(\zeta)$ correspondientes, c.q.d.

De idéntica manera que en §5.3, si se tiene en cuenta la identidad

$$\frac{itp-1}{it-p} = \left( \frac{1}{p-it} - \frac{it}{1 - t^2} \right) ( 1 + t^2)$$

y se introduce la función $s(t) = \int_{-\infty}^{-t} (1+\alpha^2)\, d\, h(t)$, resulta que:

<u>Teorema 5a. El teorema 5 de F. Riesz conserva su validez cuando se reemplaza la</u> [10] por:

$$H(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{p - it} - \frac{it}{1 + t^2} \right) d\,s(t) + A\,p + i\,c$$

donde S (t) cumple la condición $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,s(t)}{1 + t^2} < \infty$

Todo lo dicho en 5.5, respecto a la derivada angular, conserva ahora su validez, con la diferencia de que p debe mantenerse en el sector angular $-\frac{\pi}{2} + \eta, \leq \arg p \leq \frac{\pi}{2} - \eta$ con $\eta > 0$. La línea de razonamiento es idéntica, y omitimos repetirla.

\- - - - - - - -

$\boxed{\S 5.8}$ En teoría de circuitos tienen especial importancia las funciones H(p) que, además de poseer las características en descriptas en §6.1, satisfacen la condición adicional de ser reales en el semieje real: $\bar{H}(x) = H(x)$.

Como H ($\rho$) está determinada por h(t), A y C, veremos ahora cuales son las condiciones a que deben satisfacer estos parámetros para que tenga lugar la circunstancia apuntada.

Ante todo, tenemos ( $p = x + iy$):

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\,tx - 1}{i\,t - x}\, d\,h(t) + Ax + ic = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(1+t^2) + it(1-x^2)}{t^2 + x^2} dh(t) + Ax + ic\,.$$

Para que H (x) sea real debe cumplirse, para todo x:

$$\Im H(x) = (1 - x^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,dh(t)}{t^2 + x^2} + c = 0$$

la cual implica:

$$c = 0 \quad , \quad y \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{t\, dh(t)}{t^2 + x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{t\, dh(t)}{t^2 + x^2} = 0$$

de donde

$$\int_{0}^{\infty} \frac{t}{t^2 + x^2}\, d\,[\, h(t) + h(-t)\,] = 0$$

para todo X, por lo cual

$$d\, h(t) = -d\, h(-t)$$

Entonces, toda función H (p) con las características deseadas será de la forma

$$H\,(p) = \int_{-\infty}^{0} \frac{itp - 1}{it - p}\, d\, h(t) + \int_{0}^{\infty} \frac{itp - 1}{it - p}\, d\, h(t) + Ap =$$

$$= \int_{0}^{\infty} \left( \frac{itp+1}{it+p} + \frac{itp-1}{it-p} \right) d\, h(t) + Ap = \int_{0}^{\infty} \frac{2p(1+t^2)}{t^2 + p^2}\, d\, h(t) + Ap \; ,$$

lo cual muestra, en particular, que $\overline{H}\,(p) = H\,(\overline{p})$. Esto último, por otra parte, es consecuencia inmediata del principio de simetría de Schwarz.

Además, como $h(\,t\,)$ es acotada no decreciente, la función

$$s\,(t) = 2 \int_{0}^{t} (1 + \alpha^2)\, d\, h(\alpha)$$

será no decreciente y tal que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\, s(t)}{1 + t^2} < \infty$$

En definitiva, hemos demostrado el siguiente

Teorema 6.(Cauer). Toda función $H^*(p)$ holomorfa en el semiplano de la derecha, de parte real no negativa en ese semiplano, y real en el semieje real, es representable mediante la fórmula

$$H^*(p) = \int_0^\infty \frac{p\, d\, s(t)}{p^2 + t^2} + A\, p \qquad [11]$$

donde $S(t)$ es una función no decreciente en $(0,\infty)$ que cumple la condición

$$\int_0^\infty \frac{d\, s(t)}{1 + t^2} < \infty ,$$

y $A$ es un número real no negativo. Recíprocamente, para todo $S(t)$ y $A$ que verifican estas condiciones, $H^*(p)$ tendrá las características enunciadas.

La aplicación de lo que antecede a la teoría de circuitos se debe a lo siguiente: se demuestra que la impedancia de un sistema lineal pasivo es una holomorfa en el semiplano de la derecha, de parte real no negativa en ese semiplano, y real en el semieje real. Por consiguiente, la [11] representa la impedancia más general de un sistema lineal pasivo, y además es la base del método de Foster, que es un procedimiento de síntesis de circuitos. No podemos considerar aquí estas cuestiones, pues nos alejarían demasiado del tema.

Solo daremos, para concluir, dos consecuencias del teorema 6 de Cauer, que se refieren a algunas propiedades de las funciones $H^*(p)$. En primer lugar el

Corolario 2 (Teorema sobre el argumento de funciones positivas). Toda función $H^*(p)$ holomorfa en el semiplano de la derecha, de parte real no negativa en

<u>ese semiplano, y real en el semieje real, verifica la relación</u>.

$$|\arg H^*(p)| \leq |\arg p|$$

<u>para todo p de parte real no negativa</u>.

En efecto: por el teorema 6, existe una $s(t)$ y una A tales que

$$H^*(p) = \int_0^\infty \frac{p\,d\,s(t)}{p^2+t^2} + A\,p \quad ,$$

de manera que

$$\arg H^*(p) = \arg\left\{ \int_0^\infty \frac{d\,s(t)}{p+\frac{t^2}{p}} + A\,p \right\} \quad .$$

La demostración se basará en este hecho evidente si $\alpha$ y $\beta$ son dos números complejos de argumento comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, entonces:

$$|\arg(\alpha+\beta)| \leq \text{máx}\,(|\arg\alpha|\,,\,|\arg\beta|) \quad .$$

Entonces, como $|\arg \frac{t^2}{p}| = |\arg p|$ (por ser $\arg t^2 = 0$), resulta:

$$|\arg(p+\frac{t^2}{p})| \leq |\arg p|$$

por lo cual

$$|\arg \frac{1}{p+\frac{t^2}{p}}| \leq |\arg p| \,,$$

Como la integral $\int_0^N \frac{ds(t)}{p+\frac{t^2}{p}}$ es un límite de sumas, basta notar que

$$\left| \arg \sum_i \frac{\Delta s(t_i)}{p + \frac{t^2}{p}} \right| \leqslant | \arg p |$$

en virtud de la propiedad de los argumentos de números complejos. Entonces, para todo $N > 0$

$$\left| \arg \int_0^N \frac{d\, s(t)}{p + \frac{t^2}{p}} \right| \leqslant | \arg p | ,$$

y en consecuencia se mantiene la desigualdad para $N \to \infty$ , c.q.d.

Es también importante conocer cuáles son las singularidades que presentan las funciones $H^*(p)$. Por ser $S(t)$ localmente de variación acotada, el teorema de descomposición de Lebesgue permite afirmar que se puede expresar de manera única como la suma de una función absolutamente continua, una función a saltos y una función singular. Si en particular, $S(t)$ se reduce a la función a saltos $\sigma(t)$ se cumple el siguiente

Corolario 3. Si una función $H^*(p)$ está definida por

$$H(p) = \int_0^\infty \frac{p\, d\, \sigma(t)}{p^2 + t^2} + A\, p$$

donde A es un número real no negativo y $\sigma(t)$ una función no decreciente a saltos, con un número finito de saltos, entonces sus únicos puntos singulares son polos simples situados en el eje imaginario, y con residuos positivos.

Llamando $\sigma_j$ ($> 0$),($j = 0, 1, .., n$) los saltos de $\sigma(t)$ en los puntos $t_j$ ( en particular $t_0 = 0$ ; si no tuviese salto en el origen se tomaría $\sigma_0 = 0$)

es evidente que

$$H^{*}(p) = \frac{\sigma_o}{p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j\, p}{p^2 + t_j^2} + A\, p \quad .$$

Con esto, fácilmente se deduce la tesis, trabajo que dejaremos a cargo del lector.

- - - - - - - - - - - -

## §6 FUNCIONES ACOTADAS

$\boxed{\S 6.1}$ En el anterior parágrafo hemos tratado con funciones holomorfas en ciertas regiones, cuya parte real o imaginaria estaban sujetas a ciertas condiciones de positividad. Impondremos ahora una condición de acotación (1) para poder entrar luego al estudio de las clases $H^p$ de Hardy.

Cuando una función $F(z)$ es acotada podemos poner, sin restringir generalidad, que es menor o igual que uno, puesto que si no fuera así bastaría multiplicar por una constante suficientemente pequeña.

En primer lugar consignaremos el resultado elemental dado por el

**Lema 1** (Schwarz). Si $F(z)$ es holomorfa en el círculo unidad, acotada en él $|F(z)| \leq 1$, y además $F(o) = 0$ entonces se cumple $|F(x)| \leq |z|$ para todo $|z| \leq 1$

En efecto, la función $\frac{F(z)}{z}$ es holomorfa en el círculo unidad, y $|\frac{F(z)}{z}| \leq 1$ en su contorno. Entonces, en virtud del teorema de módulo máximo, será $|\frac{F(z)}{z}| \leq 1$ en el interior, c.q.d.

Observemos la semejanza entre este lema: $|F(z)| \leq |z|$ con el corolario 2 (§5.8) que afirma $|\arg F(z)| \leq |\arg z|$ bajo ciertas condiciones. Hacen ambos la

(1): Un primer resultado para funciones acotadas lo obtuvimos ya en §4.5 (Teorema de Fatou).

misma afirmación, uno para el módulo y el otro para el argumento.

Introduciremos ahora el concepto de <u>ángulo de Stoltz</u>.

Se dice que la variable z ($|z|<1$) tiende a un punto $z_o$ del contorno del círculo unidad en un ángulo de Stoltz, cuando para todo z existe una constante K tal que

$$\frac{|z_o - z|}{1 - |z|} < K$$

La interpretación geométrica es sencilla: significa que z tiende a $z_o$ a lo largo de un camino no tangente a la circunferencia unidad (hágase el dibujo).

Otra noción que luego utilizaremos es la <u>de horiciclo.</u> Se llama así a toda circunferencia unidad, y tangente a ella en un punto $z_o$ .

Su llamamos D a su diámetro, su ecuación será:

$$| z - z_o (1 - D) |^2 + | z - z_o |^2 = D^2$$

o sea desarrollando y teniendo en cuenta que $|z_o|^2 = 1$ :

$$|z|^2 + (1 - D)^2 + ( |z - z_o|^2 - 1 - |z|^2 ) 91 - D) + |z - z_o|^2 = D^2$$

es decir:

$$\frac{1 - |z|^2}{|z_o - z|^2} = \frac{2}{D} - 1$$

En definitiva, la desigualdad

$$\frac{1 - |z|^2}{|z_o - z|^2} \geqslant \lambda \quad , \qquad 0 < \lambda < \infty \quad ,$$

significa que $z$ es interior al horiciclo de diámetro $D = \frac{2}{1+\lambda}$

- - - - - - -

$\boxed{\S 6.2}$ Con los preliminares de la sección anterior estamos en condiciones de demostrar el importante teorema de Julia - Carathéodory, referente a funciones acotadas; pero como la demostración la haremos partiendo de funciones de parte real positiva, conviene dividirla en dos partes, probando antes el siguiente

Lema 2. Sea $G(z)$ una función holomorfa en el círculo unidad y de parte real no negativa en esa región, y $z_0 = e^{i\varphi_0}$ un punto cualquiera del contorno. Entonces existen y son iguales los límites.

$$\lim_{z \to z_0} (z_0 - z)\, G(z) \quad ; \quad \lim_{z \to z_0} (z_0 - z)^2\, G'(z)$$

y su valor es cero excepto a lo sumo en un conjunto numerable.

Como $G(z)$ satisface las hipótesis del teorema §5.2, 1 de Herglotz, se la puede representar de manera única por la fórmula.

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\, g(\varphi) + i\, c \quad ,$$

donde $g(\varphi)$ es acotada no decreciente y $C$ real.

Puesto que debemos hacer $z \to z_0$ , conviene antes eliminar la posible discontinuidad de $g(\varphi)$ en $\varphi = \varphi_0$ . Para ello escribimos:

$$G(z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\varphi_0 - 0} + \int_{\varphi_0 - 0}^{\varphi_0 + 0} + \int_{\varphi_0 + 0}^{2\pi} \right\} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z}\, d\, g(\varphi) + ic =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i\varphi_0} + z}{e^{i\varphi_0} - z} \left( g(\varphi_0 + 0) - g(\varphi_0 - 0) \right) + \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\varphi_0 - 0} + \int_{\varphi_0 + 0}^{2\pi} \right\} \cdot \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\, g(\varphi) + ic.$$

Definamos ahora la función

$$g^*(\varphi) = \begin{cases} g(\varphi) & \text{para} \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 \\ g(\varphi) - \left[ g(\varphi_0 + 0) - g(\varphi_0 - 0) \right] & \text{para} \quad \varphi_0 < \varphi \leqslant 2\pi \end{cases}$$

$g(\varphi)$ será continua en $\varphi = \varphi_0$, y la fórmula se convierte en:

$$G(z) = \frac{e^{i\varphi_0} + z}{e^{i\varphi_0} - z} A + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\, g(\varphi) + ic \quad ,$$

donde $A = \frac{1}{2\pi} \left[ g(\varphi_0 + 0) - g(\varphi_0 - 0) \right] \geqslant 0$ vale el salto de $g(\varphi)$ en $\varphi_0$, dividido $2\pi$

Entonces:

$$(z_0 - z)\, G(z) = (z_0 + z) A + \frac{z_0 - z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\, g(\varphi) + i\, c(z_0 - z)$$

Demostraremos que el término en el cual aparece la integral tiende a cero, En efecto, haciendo

$$\int_0^{2\pi} = \int_0^{\varphi_0 - \delta} + \int_{\varphi_0 - \delta}^{\varphi_0 + \delta} + \int_{\varphi_0 + \delta}^{2\pi} \quad ,$$

inmediatamente se ve que los términos correspondientes a la primera y tercera integral tienden a cero para todo $\delta > 0$, por ser acotado el integrando. Y para la parte restante resulta:

$$I_2 = \left| \frac{z_0 - z}{2\pi} \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\, g(\varphi) \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} |z_0 - z| \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} \frac{|e^{i\varphi} + z|}{|e^{i\varphi} - z|} dg^*(\varphi)$$

por ser $g^*(\varphi)$ no decreciente. Además, como $|z| < 1$ :

$$| e^{i\varphi} + z | < 2 ,$$
$$| e^{i\varphi} - z | > | e^{i\varphi} | - |z| = 1 - |z|$$

y por lo tanto:

$$I_2 < \frac{1}{\pi} \frac{|z_0 - z|}{1 - |z|} \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} d\, g^*(\varphi) \quad .$$

Como $z \to z_0$ en un ángulo de Stoltz, es $\frac{|z_0 - z|}{1 - |z|} < K$ para algún K, y como $g^*$ es continua, se puede elegir un $\delta$ suficientemente pequeño para que

$$I_2 < \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Entonces $\lim_{z \to z_0} I_2 \leq \varepsilon$ , y como $\varepsilon$ es arbitrario, es

$$\lim_{z \to z_0} I_2 = 0$$

En definitiva:

$$\lim_{z \to z_0} (z_0 - z)\, G(z) = 2\, A\, z_0$$

Notemos que $A = 0$ excepto a lo sumo en un conjunto numerable, pues representa los saltos de una función no decreciente y acotada.

Para probar lo que resta de la tesis, consideremos la derivada de G(z) Siendo:

$$G'(z) = \frac{2\, A\, z_0}{(z_0 - z)^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - z)^2} \, d\, g(\varphi) \; ,$$

se obtiene

$$(z_o - z)^2 G'(z) = 2 A z_o + \frac{(z_o - z)^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}}{(e^{i\varphi} - z)^2} d g^*(\varphi)$$

Procediendo de la misma manera que antes, se demuestra que el último término tiende a cero cuando $z \to z_o$ en un ángulo de Stoltz, y resulta:

$$\lim_{z \to z_o} (z_o - z)^2 G'(z) = 2 A z_o$$

y la tesis queda demostrada en su totalidad, c. q. d.

Notemos ahora que si $G(z)$ tiene las propiedades enunciadas en la hipótesis del lema anterior, es decir, si es holomorfa en el círculo unidad y de parte real no negativa en esa región entonces, si $\omega_o = e^{i\varphi_o}$ es cualquier punto del contorno, la función

$$F(z) = \omega_o \frac{G(z) - 1}{G(z) + 1}$$

es holomorfa y acotada en el círculo unidad. En efecto: $G(z) \neq -1$ por hipótesis, y además:

$$|F(z)|^2 = \frac{G-1}{G+1}\,\frac{\bar{G}-1}{\bar{G}+1} = \frac{|G|^2 - 2\,RG + 1}{|G|^2 + 2\,RG + 1} \leq 1$$

La fórmula inversa de la transformación es :

$$G(z) = \frac{\omega_o + F(z)}{\omega_o - F(z)} \quad ,$$

y recíprocamente, si $F(z)$ es holomorfa y acotada en el círculo unidad, $G(z)$ será holomorfa y de parte real no negativa. En efecto: $\omega_o \neq F(z)$ porque $|F(z)| < 1$ para $|z| < 1$ , y además

$$R\,G(z) = R\,\frac{\omega_o + F}{\omega_o - F} = R\,\frac{1 - |F|^2 + F\bar{\omega}_o - \bar{F}\omega_o}{|\omega_o - F|^2} = \frac{1 - |F|^2}{|\omega_o - F|^2} \geq 0$$

Con todo esto, probaremos el

Teorema 1. (Julia - Carathéodory) Sea $F(z)$ holomorfa y acotada ($|F(z)| \leq 1$) en el círculo unidad, y $z_o = e^{i\varphi_o}$ y $\omega_o = e^{i\varphi_o}$ dos puntos cualesquiera del contorno. Si $z$ tiende a $z_o$ en un ángulo de Stoltz, existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - \omega_0}{z - z_0} = \frac{1}{A} \frac{\omega_0}{z_0} ,$$

*donde $0 \leq A \leq \infty$, y si ese límite es finito ( $A \neq 0$), entonces existe también el límite de la derivada, y vale lo mismo:*

$$\lim_{z \to z_0} F'(z) = \frac{1}{A} \frac{\omega_0}{z_0}$$

*Además, para todo $z$ se verifica la desigualdad*

$$\frac{1 - |F(z)|^2}{|\omega_0 - F(z)|^2} \geq A \frac{1 - |z|^2}{|z_0 - z|^2} ,$$

*y el signo de igualdad tiene lugar si y sólo si $F(z)$ es lineal.*

Como ya señalamos más arriba, la última desigualdad significa que si $z$ está en el horiciclo tangente en $z_0$ y de diámetro $D$, entonces $F(z)$ se mantiene en el horiciclo tangente en $\omega_0$ y de diámetro $D_1 = \dfrac{2D}{2A + AD + D}$

Definamos la función $G(z)$ mediante

$$G(z) = \frac{\omega_0 + F(z)}{\omega_0 - F(z)}$$

Como ya dijimos, $G(z)$ es holomorfa y de parte real no negativa en el círculo unidad, de manera que le es aplicable el lema 2, y por lo tanto existe el

$$\lim_{z \to z_0} (z_0 - z)\, G(z) = 2 A z_0$$

Entonces, recordando que

$$F(z) = \omega_0 \frac{G(z) - 1}{G(z) + 1}$$

es la fórmula inversa de la transformación, obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\omega_0 - F(z)}{z_0 - z} = \lim_{z \to z_0} \omega_0 \frac{1 - \dfrac{G(z) - 1}{G(z) + 1}}{z_0 - z} = \lim_{z \to z_0} \frac{2\omega_0}{(z_0 - z)\left[G(z) + 1\right]}$$

Aplicando pues el lema 2, resulta:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\omega_0 - F(z)}{z_0 - z} = \begin{cases} \frac{1}{A} \frac{\omega_0}{z_0} & \text{si} \quad A \neq 0 \\ \infty & \text{si} \quad A = 0 \end{cases}$$

y la primera parte del teorema queda demostrada.

En cuanto a la derivada, como

$$G'(z) = \frac{d}{dz} \frac{\omega_0 + F(z)}{\omega_0 - F(z)} = \frac{2\omega_0 F'(z)}{[\omega_0 - F(z)]^2} ,$$

en virtud del lema 2 obtenemos

$$\lim_{z \to z_0} (z_0 - z)^2 \frac{2\omega_0 F'(z)}{[\omega_0 - F(z)]^2} = 2 A z_0$$

Si $A \neq 0$ , resulta:

$$\lim_{z \to z_0} F'(z) = \frac{1}{A} \frac{\omega_0}{z_0} = \frac{1}{A} e^{i(\psi_0 - \varphi_0)}$$

Resta demostrar la relación entre los horiciclos. También en virtud del lema 2 se cumple:

$$\frac{\omega_0 + F(z)}{\omega_0 - F(z)} = \frac{z_0 + z}{z_0 - z} A + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\, g^*(\varphi) + i\, c ,$$

de donde, llamando $z = r\, e^{i\theta}$ y tomando la parte real:

$$\frac{1-|f(z)|^2}{|\omega_0-F(z)|^2} = \frac{1-|z|^2}{|z_0-z|^2}\, A + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2\,r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\, g^*(\varphi) ,$$

y como el núcleo de Poisson es no negativo y $g^*(\varphi)$es no decreciente, resulta la tesis. La igualdad sólo puede cumplirse si la integral es nula, y para ello debe ser

$$g^*(\varphi) = \text{Cte.} ,$$

de donde resulta:

$$\frac{\omega_0 + F(z)}{\omega_0 - F(z)} = A\, \frac{z_0 + z}{z_0 - z} + i\, c \qquad ,$$

es decir:

$$F(z) = \frac{\omega_0(A+1)\, z + \omega_0(A-1)\, z_0 + i\, c \quad _0}{(A-1)\, z + (A+1)\, z_0 + i\, c} \qquad ,$$

que es una función lineal, c.q.d.

- - - - - - - - -

$\boxed{\S 6.3}$ Así como en el §5 dimos representaciones canónicas de ciertas clases de funciones holofomorfas, haremos ahora eso mismo para las funciones que estamos considerando.

Sea pues $F(z)$ holomorfa en $|z|<1$ y acotada en esa región: $|F(z)|\leq 1$

Supongamos en un primer paso que $F(z)$ no se anule en el origen, y sea $z_k$ los ceros de la función - había a lo sumo un conjunto numerable - en $0<|z|<1$, ordenados por módulo creciente y contados cada uno con su orden de multiplicidad:

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \ldots \leq |z_k| \leq \ldots$$

Para cada $r$ $(0<r<1)$ y cada $k$, la expresión

$$\frac{r\,(z_k - z)}{r^2 - \bar{z}_k\, z}$$

es una transformación conforme del círculo de radio $r$ en el círculo unidad. Llamando

$$B_r(z) = \prod_{|z_k|<r} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{r(z_k - z)}{r^2 - \bar{z}_k\, z}$$

podremos descomponer $F(z)$ en la forma

$$F(z) = \frac{F(z)}{B_r(z)}\, B_r(z) = A_r(z)\, B_r(z)$$

donde $A_r(z) = \dfrac{F(z)}{B_r(z)}$ es una función holomorfa y sin ceros en $|z|<r$ ,puesto que los ceros de $F(z)$ se compensan exactamente con los ceros de $B_r(z)$

El interés de esto está en que por ser $A_r(z)$ holomorfa y sin ceros en $|z|<r$ , su logaritmo

$$\ln A_r(z) = \ln|A_r(z)| + i \arg A_r(z)$$

será una función holomorfa en esa región. Admitiendo, lo cual podemos hacer, que $r \neq |z_k|$ para todo $k$ , su parte real será continua en el contorno $|z| = r$ y por lo tanto admitirá la representación de Schwarz ( §3.1) con el núcleo de Poisson del círculo de radio r. Sumándole la conjugada resulta inmediatamente (tal como hicimos en §5.1 y §5.2):

$$\ln A_r(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi} + z}{r e^{i\varphi} - z} \ln|A_r(r e^{i\varphi})|\, d\varphi + i c ,$$

donde C es un número real y $\ln|A_r(re^{i\varphi})|$ es la parte real de $\ln A_r(z)$ en el contorno $|z| = r$. Y como para $|z|=r$ es $|B_r(z)| = 1$ (compruébese), la anterior podemos escribirla en la forma

$$\ln A_r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi}+z}{r e^{i\varphi}-z} \ln |F(r e^{i\varphi})| \, d\varphi + i c =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r e^{i\varphi}+z}{r e^{i\varphi}-z} \, d f_r(\varphi) + i c ,$$

donde $$f_r(\varphi) = \int_0^{\varphi} \ln \left| \frac{1}{f(r e^{i\alpha})} \right| d\alpha .$$

Como por hipótesis es $|F(z)| \leqslant 1$, resulta $f_r(\varphi)$ no decreciente. Además, para toda función acotada se verifica que el producto infinito de sus ceros,en valor absoluto,

$$\prod_k |z_k| ,$$

converge (1), y por lo tanto $f_r(\varphi)$está uniformemente acotada en r, pues:

$$f_r(\varphi) \leqslant f_r(2\pi) = \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1}{F(r e^{i\alpha})} \right| d\alpha = 2\pi \ln A_r(0) =$$

$$\frac{2\pi F(0)}{\prod\limits_{0<|z_k|<r} \frac{z_k}{|z_k|}\frac{r z_k}{r^2}} \leqslant \frac{2\pi F(0)}{\prod\limits_{0<|z_k|<r} |z_k|} \leqslant \frac{2\pi F(0)}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|} .$$

Considerando ahora una sucesión $f_{r_n}(\varphi)$ con $|r_n| \to 1$ , a esta familia le es aplicable el primer teorema de Helly ($\S$2) y por lo tanto existirá una subsucesión convergente hacia una función $f(\varphi)$acotada no decreciente.

Aplicando el segundo teorema de Helly ($\S$2) (modificado) se puede pasar al límite bajo el signo de integral, y entonces

---

(1) Por ahora aceptamos esto sin demostración; se deduce de la fórmula de Jensen, como luego veremos.

$$\lim_{r\to 1^-} \ln A_r(z) = \ln A(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, f(\varphi) + i\, c \;.$$

Si ahora definimos el <u>producto de Blaschke</u> de la manera

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\, \frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}$$

se ve que converge al mismo tiempo que $B(0) = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|$ (1), y para todo $|z| < 1$ resulta

$$F(z) = B(z)\, A(z)$$

En el caso en que $F(z)$ , tenga un cero de orden m en el origen (2), considerando la función $F(z)/z^m$ el razonamiento anterior conserva su validez, y resulta así demostrada la primera parte del siguiente teorema de representación canónica:

<u>Teorema 2</u> (F. Riesz(3)). <u>Toda función $F(z)$ holomorfa y acotada en el círculo unidad admite una representación en la forma</u>

$$F(z) = z^m \prod_k \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\, \frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}\; \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, f(\varphi) + ic \right. \qquad [2]$$

<u>donde m es el orden de multiplicidad del cero de $F(z)$ en el origen, $z_k$ los ceros de $F(z)$ en $0 < |z| < 1$ contados con su orden de multiplicidad, $f(\varphi)$ una función acotada no decreciente y c un número real. Recíprocamente, si $f(\varphi)$ y c cumplen esas condiciones, m es un entero no negativo y $z_k$ ($k=1,2,..$) una sucesión de números complejos tal que $\prod_k |z_k|$ converge, entonces la $f(z)$ definida por la [2] es holomorfa y acotada en el círculo unidad y con ceros $z_k$.</u>

La segundo parte del teorema es inmediata - basta examinar la [2] para determinar las propiedades de $F(z)$ - y por lo tanto la omitimos.

---

(1) Por esta razón se introduce en la definición el factor $\frac{\bar{z}_k}{|z_k|}$, aparentemente sin importancia.
(2) En tal caso definimos como $B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|}\, \frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}$ al prod. de Blaschke.
(3) Math. Zeitschr., 1921.

Observemos que en la descomposición se han aislado los ceros de $F(z)$ : el factor exponencial no se anula.

A veces es conveniente dar una descomposición de $F(z)$ como suma de dos funciones holomorfas acotadas y sin ceros (1), esto es inmediato:

$$F(z) = B(z)\,A(z) = \left[ B(z) - 1 \right] A(z) + A(z)$$

teniendo en cuenta que $|B(z)|<1$ para $|z| < 1$

Restrinjamos ahora nuestra atención al factor exponencial $A(z)$ de la $[2]$, es fácil demostrar el:

<u>Corolario 1. El exponente de la representación canónica [2] de F.Riesz tiene límite integrable para $|z| \to 1$</u>

En efecto: puesto que

$$\ln A(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, f(\varphi) + i\, c \quad ,$$

se obtiene ($z=re^{i\theta}$) :

$$\ln |A(z)| = -\int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, d\, f(\varphi) \quad ,$$

donde $P(r, \theta-\varphi)$ es el núcleo de Poisson.

Como

$$f(\varphi) = a(\varphi) + \delta(\varphi) + s(\varphi)$$

donde $a(\varphi)$ es absolutamente continua, $\delta(\varphi)$ a saltos y $s(\varphi)$ singular, las dos últimas con derivada nula p.p., haciendo $r \to 1$ obtenemos, en virtud del teorema §3.2,2 de Herglotz:

$$\lim_{|z|\to 1} \ln |A(z)| = a'(\varphi)$$

en casi todo punto, y evidentemente $a'(\varphi) \in L^1$ , c.q.d.

Observemos que la tesis no era evidente, pues el teorema de Fatou §4.5,6

(1): De esto hacen uso frecuentemente Hardy y Littlewood.

sólo afirmaba la existencia p.p. de límite integrable para $A(z)$, pero no para la parte real de su logaritmo.

Del corolario anterior resulta inmediatamente el siguiente:

Corolario 2 (Teorema de unicidad) (1) Si $F(z)$ es holomorfa y acotada en el círculo unidad y $f(\theta)=F(e^{i\theta})=\lim_{|z|\to 1} F(z)$ es nula en un conjunto de medida positiva en la circunferencia, entonces $F(z)$ es idénticamente nula.

Notemos antes que la existencia p.p. de $f(\theta)$ está asegurada por el teorema de Fatou §4.5,6.

Si $f(\theta)=0$ en un conjunto de medida positiva, y $F(z)$ no fuese idéntica - mente nula, se cumpliría en ese conjunto $\ln f(\theta)=-\infty$, y por lo tanto no sería integrable ,lo cual contradice al corol. 1, c.q.d.

Esté teorema de unicidad puede extenderse a funciones no necesariamente acotadas (Lusin, Privalov); de esto nos ocuparemos más adelante.

- - - - - - - -

§6.4 Para terminar con el presente parágrafo, diremos algunas palabras sobre cierta clase de funciones holomorfas en el círculo unidad que, si bien no son acotadas, están estrechamente vinculadas a ellas.

Diremos que $F \in N$, o $F$ pertenece a la clase de Nevanlinna (2), si es expresable mediante el cociente $f(z) = \dfrac{F_1(z)}{F_2(z)}$ ,

donde $F_1$ y $F_2$ son holomorfas y acotadas en $|z|<1$ , y además $F_2$ no tiene ceros en esa región.

Ante todo, se cumple el siguiente teorema de representación canónica:

Teorema 3. Toda función $F \in N$ es representable mediante la fórmula

---

(1): F. y M. Riesz, 1919.

(2): Este autor hizo un estudio de tales funciones, que llamó "funciones de tipo acotado" (en alemán: Beschränktartige Funktionen).

$$F(z) = B(z) \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, f(\varphi) + i\, c \right. ,$$

donde B(z) es el producto de Blaschke del numerador, $f(\varphi)$ una función de variación acotada y c un número real. Recíprocamente, si $f(\varphi)$ y c cumplen estas condiciones, y B(z) es un producto de Blaschke con $\prod_k |z_k|$ convergente, entonces $F \in N$.

Es inmediato comprobar la validez del enunciado, a partir del teorema 2 de F. Riesz, y por lo tanto omitimos su demostración.

Mostraremos en cambio otra forma de caracterización de la clase N.

Teorema 4. Es condición necesaria y suficiente para que $F \in N$, que sea holomorfa en $|z| < 1$, y la integral

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |F(r\, e^{i\theta})|\, d\theta$$

esté acotada en $r < 1$.(1)

Para probar la condición necesaria, basta observar que

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| \frac{F_1(r\, e^{i\theta})}{F_2(r\, e^{i\theta})} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{1}{F_2\, (r\, e^{i\theta})} \right| d\theta ,$$

por ser $|F_1| \leq 1$ y $|F_2| \leq 1$ por hipótesis, y tener en cuenta que el segundo miembro es igual a

$$2\pi \ln \left| \frac{1}{F_2(0)} \right| ,$$

que es finito por hipótesis, e independiente de r.

Respecto a la suficiencia, partimos de

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |F(r\, e^{i\theta})|\, d\theta < M$$

Un razonamiento análogo al que hemos hecho para demostrar el teorema de Riesz §6.3,2 , y que por brevedad no detallaremos aquí (2), muestra que

(1): Como es usual, designamos con $\ln^+$ la función definida en el semieje real positivo mediante: $\ln^+ x = \ln x$ si $x \geq 1$ , y, $\ln^+ x = 0$ si $x \leq 1$
(2): Cf: Zygmund.op cit, Segunda edición, Tomo I, Cap VII, 7.

$$F(z) = B(z).A(z) = B(z) \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, i\, f(\varphi) + i\, c \right. ,$$

donde $B(z)$, $f(\varphi)$ y $c$ cumplen las condiciones del teorema 3, y por consiguiente resulta la tesis.

- - - - -

## §7. CLASES $H^{\delta}$

$\boxed{\S 7.1}$ Comenzaremos ahora a estudiar cierta clase de funciones que ocuparon primero la atención de Hardy y luego la de F. Riesz (1), quien la designó con el nombre de clase $H^{\delta}$ de Hardy.

Ya hemos dado en §1.1 su definición:

Se dice que $F \in H^{\delta}$ $(\delta > 0)$ si $F(z)$ $F(re^{i\theta})$ es holomorfa en $|z| < 1$ y existe una constante $M$ tal que para todo $r < 1$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z)|^{\delta}\, d\theta < M \quad ;$$

en otras palabras, si la integral mencionada está acotada en $r < 1$.

Demostraremos en primer lugar que esta clase constituye un subconjunto de la clase de Nevanlinna (§6.4):

Teorema 1. Si $F \in H^{\delta}$, para algún $\delta > 0$, entonces $F \in N$.

Basta demostrar que si existen $\delta > 0$ y $M$ tales que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(z)|^{\delta}\, d\theta < M \quad ,$$

entonces se cumple:

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |F(z)|\, d\theta < M_1 \quad ,$$

para algún número $M_1$.

(1): Math. Zeitschr., 1922.

La tesis surge inmediatamente de:

$$t^{\delta} \geq \delta \ln t \quad , \quad \delta > 0 \quad , \quad t > 0 \quad ,$$

de manera que sólo es necesario probar esta última desigualdad.

Si $t \leq 1$, es obvio que se cumple. Además, para $t \quad 1$ es:

$$\frac{d}{dt} t^{\delta} \geq \frac{d}{dt} \delta \ln^{+} t \quad ,$$

y por lo tanto la desigualdad anterior es también cierta para $t > 1$, c.q.d.

\- - - - - -

$\boxed{\S 7.2}$ Antes de entrar al estudio en general de las clases $H^{\delta}$, veremos algunas propiedades elementales de la clase $H^2$. Similarmente a lo que ocurre con las clases $L^p$ de Lebesgue, el caso $\delta = 2$ es más sencillo de tratar.

En primer lugar consideraremos la convergencia en norma en el contorno.

<u>Teorema 2. Si $F \in H^2$, entonces converge en $L^2$, para $|z| \to 1$.</u>

De:
$$F(z) = F(r\,e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \quad , \quad |z| = r < 1 \quad ,$$

como $F(r\,e^{i\theta}) = f_r(\theta)$ tiene norma -2 finita por ser $F \in H^2$, resulta la igualdad de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\,F(r\,e^{i\theta})\,|^2 \, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, r^{2n} \quad .$$

Por hipótesis, el primer miembro es acotado en $r < 1$, y entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \quad .$$

Como acotación al margen, podríamos afirmar ya, en virtud del teorema de Riesz - Fischer, que la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{in\theta}$$

donde la convergencia de la serie se entiende en norma, pertenece a $L^2$, pero no podemos afirmar por ahora que

$$F(z) \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n E^{in\theta}$$

Prosiguiendo con el hilo de la demostración, veremos que si $r_h \to 1$, entonces $F(r_h e^{i\theta}) = f_{r_h}(\theta)$ es una sucesión fundamental en $L^2$. En efecto, de:

$$F(r_h e^{i\theta}) - F(r_k e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r_h^n - r_k^n) e^{in\theta} ,$$

por Parseval resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | F(r_h e^{i\theta}) - F(r_k e^{i\theta}) |^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |r_h^n - r_k^n|^2$$

y el segundo miembro es arbitrariamente pequeño para h y k suficientemente grandes.

Por lo tanto, puesto que $L^2$ es completo, existe una función de $L^2$ $F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ tal que

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - F(r e^{i\theta})|^2 d\theta = 0 \quad , \text{ c. q. d.}$$

Examinaremos ahora la convergencia puntual. El problema es más delicado, y requiere previamente el siguiente lema que demostraremos para todo $p > 1$, aunque sólo necesitamos $p = 2$):

Lema 1. Es condición necesaria y suficiente para que una función armónica $u(r, \theta) = f_r(\theta)$ sea la integral de Poisson de una función $f(\theta)$ de $L^p$ $(p > 1)$, que la integral

$$\int_0^{2\pi} | f_r(\theta) |^p \, d\theta$$

sea acotada para $r < 1$.(1)

Demostraremos en primer lugar la necesidad. Llamando $q = p^* < \infty$ al conjugado de p, por la desigualdad de Hölder obtenemos:

(1): Para el caso $p = 1$, cf. los teoremas §4.3,3 y §4.5,5.

$$|f_r(\theta)| = \left|\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi\right| = \left|\int_0^{2\pi} |P(r,\theta-\varphi)|^{1/p} f(\varphi)\,.\right.$$

$$\left. .\,|P(r,\theta-\varphi)|^{1/q}\, d\varphi\right| \leqslant \left\{\int_0^{2\pi} P(r,\theta-\varphi)\,|f(\varphi)|^p d\varphi\right\}^{1/p} . \left\{\int_0^{2} P(r,\theta-\varphi)\, d\varphi\right\}^{1/q}$$

Puesto que $q<\infty$ , el segundo factor vale 1 (compruébese), y como el teorema de Fubini permite invertir el orden de integración, obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} |f_r(\theta)|^p\, d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^p\, d\varphi$$

Pasaremos ahora a la suficiencia, Sea

$$P_R(r\,,\,\theta-\varphi) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

el núcleo de Poisson del círculo de radio $R<1$. Por el teorema de Schwarz(cf. §3.1,1) se cumple:

$$f_r(\theta) = \int_0^{2\pi} P_R(r\,,\,\theta-\varphi)\, f_R(\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} P_R(r,\,\theta-\varphi)\, dF_R(\varphi)$$

donde

$$F_R(\varphi) = \int_0^{\varphi} f_R(\alpha)\, d\alpha$$

Pero la función $F_R(\varphi)$está acotada uniformemente en R -puesto que $f_R \in L^p$ y entonces a fortiori $\in L^1$, con norma acotada en R por hipótesis Entonces, por el primer teorema de Helly, existirá una sucesión $R_j \to 1$ tal que $F_{R_j}(\varphi)$ converge a una función de variación acotada $F(\varphi)$, y por el segundo teorema de Helly resulta:

$$f_r(\theta) = \int_0^{2\pi} P(r,\,\theta-\varphi)\, d\,F(\varphi)$$

Probaremos ahora que $F(\varphi)$ es absolutamente continua, y para esto basta ver que $F_R(\varphi)$ son absolutamente continuas uniformemente en R. Y esto es así,pues por Hölder se cumple

$$\left| \int_E f_R(\alpha)\, d\alpha \right| \leq \left\{ \int_E |f_R(\alpha)|^p\, d\alpha \right\}^{1/p} \left\{ m(E) \right\}^{1/q} ,$$

donde $m(E)$ es la medida de $E \subset (0,2\pi)$. Pero la norma p de $f_R$ está acotada en R por por hipótesis y además $q<\infty$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ independiente de R tal que para todo E con $m(E)< \delta$ se cumple

$$\left| \int_E f_R(\alpha)\, d\alpha \right| < \varepsilon$$

Por consiguiente, siendo $F(\varphi)$ absolutamente continua, si llamamos $f(\varphi) = F'(\varphi)$ resulta:

$$f_r(\theta) = \int_0^{2\pi} P(r, \theta - \varphi)\, f(\varphi)\, d\varphi .$$

Resta probar que $f \in L^p$, lo cual resulta inmediatamente de un teorema de Fatou sobre paso al límite (1):

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^p\, d\varphi \leq \sup_R \int_0^{2\pi} |f_R(\varphi)|^p\, d\varphi , \quad \text{c. q. d.}$$

Este lema está en estrecha vinculación con el problema de las "clases de funciones de series de Fourier", consistente en obtener condiciones necesarias y suficientes para que una serie trigonométrica sea la serie de Fourier de alguna función que posea determinadas propiedades, por ej., que sea continua, acotada, o de algún $L^p$, etc.(2)

Podemos ahora establecer la correspondiente aserción para la convergencia puntual.

<u>Teorema 3. Si $F \in H^2$, entonces converge p.p. para $|z| \to 1$</u>

Sea pues $F(z) = F(re^{i\theta}) \equiv f_r(\theta)$ con norma 2 acotada en $r<1$. Si llamamos y V a las partes real e imaginaria, respectivamente, de F, también se cumplirá, a fortiori:

(1): Cf, por ej; Natamon, op. cit, Cap VI, §1, teor9.
(2): Para más detalles, cf.: Zygmund, op cit, Cap IV.

$$\int_0^{2\pi} |\ U(r\ e^{i\theta})\ |^2\ d\theta < M \quad ,$$

$$\int_0^{2\pi} |\ V(r\ e^{i\theta})\ |^2\ d\theta < M \quad .$$

Entonces, en virtud del lema 1 se verifica:

$$U\ (r\ e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P\ (r,\ \theta - \varphi)\ u(\varphi)\ d\varphi \quad ,$$

$$v\ (r\ e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P\ (r,\ \theta - \varphi)\ v(\varphi)\ d\varphi \quad ,$$

con u y v de $L^2$ y por lo tanto también de $L^1$. En consecuencia, por el teorema de Fatou §3.3.corol 1, se cumple:

$$U(z) \longrightarrow u(\theta),$$

$$V(z) \longrightarrow v(\theta),$$

para $r \to 1$, en casi todo punto. por consiguiente:

$$\lim_{z \to 1} F(z) = u(\theta) + iv(\theta), \text{ c.q.d.}$$

Observemos que la función límite es de $L^2$.

\- - - - - -

$\boxed{\S 7.3}$ Nuestro próximo objetivo es demostrar el teorema de Szegő para funciones de $H^{\delta}$ , análogo al corol. 1 ( §6.3) que se refería a funciones acotadas. Más generalmente, probaremos el

<u>Teorema 4</u> (F.Riesz (1)). <u>Si $F \in N$ y si en un conjunto E de medida positiva en la circunferencia existe el límite radial</u>

$$\lim_{|z| \to 1} F(z) = F(e^{i\theta}) = f(\theta),$$

<u>entonces $\ln|f(\theta)|$ es integrable en ese conjunto</u>.

---

(1): Acta. Litter. ac. Scient, 1922, pag 88-97.

El teorema de Szegö hace la misma afirmación para $F \in H^{\delta}$, y por lo tanto, en virtud del teorema §7.1,1, no es más que un caso particular.

Sea pues (cf. teor §6.4,4) F(z) holomorfa en $|z|<1$ y

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |F(r e^{i\theta})| \, d\theta < M .$$

Supongamos en un primer paso que F(z) no tenga ceros en $|z| < 1$. Entonces $\ln |F(z)|$ será armónica en esa región, y para $R<1$ vale la representación de Schwarz

$$\ln |F(z)| = \int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - \varphi) \ln |F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi, \quad z=re^{i\theta},$$

para todo $|z| = r < R$. Esta última se puede escribir:

$$\ln |F(z)| = \int_{|F(z)|<1} P_R(r, \theta - \varphi) \ln|F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi + \int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - \varphi) \cdot \ln^+|F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi =$$

$$= - \int_{|F(z)|<1} P_R(r, \theta - \varphi) \left|\ln|F(R e^{i\varphi})|\right| d\varphi + \int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - \varphi) \cdot \ln^+|F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - \varphi) \ln^+|F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi - \int_0^{2\pi} P_R(r, \theta - \varphi) \left|\ln|F(R e^{i\varphi})|\right| d\varphi .$$

ahora bien, como:

$$\max_{\varphi} P_R(r, \theta - \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{R + r}{R - r} , \quad y \quad \min_{\varphi} P_R(r, \theta - \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{R - r}{R + r} ,$$

la anterior se puede mayorar en la forma:

$$\ln|F(z)| \leq \frac{1}{\pi} \frac{R + r}{R - r} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(R e^{i\varphi})| \, d\varphi - \frac{1}{2\pi} \frac{R - r}{R + r} \int_0^{2\pi} \left|\ln|F(Re^{i\varphi})|\right| d\varphi .$$

Por hipótesis, la integral del primer término del segundo miembro es menor que M, y entonces, despejando la otra integral, obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} \left| \ln |F(R e^{i\varphi})| \right| d\varphi \leqslant 2M \left( \frac{R+r}{R-r} \right)^2 - 2\pi \frac{R+r}{R-r} \ln |F(z)| \quad .$$

Si E es el conjunto en el cual existe la función límite $f(\theta)$, a fortiori se cumple:

$$\int_E \left| \ln|F(R e^{i\varphi})| \right| d\varphi \leqslant 2M \left( \frac{R+r}{R-r} \right)^2 - 2\pi \frac{R+r}{R-r} \ln |F(z)| \quad .$$

Recordamos que esta desigualdad se cumple para todo z tal que $|z| = r < R$. Haciendo ahora $R \to 1$ y teniendo en cuenta el teorema de Fatou de paso al límite (1):

$$\int_E \left| \ln |f(\varphi)| \right| d\varphi \leqslant \sup_{R \geqslant R_0 > r} \left\{ 2M \left( \frac{R+r}{R-r} \right)^2 - 2\pi \frac{R+r}{R-r} \ln |F(z)| \right\} \quad ;$$

y como el segundo miembro es finito porque supusimos a F(z) sin ceros, obtenemos:

$$\ln |f(\theta)| \in L^1(E)$$

Para extender la demostración al caso general, en el cual F(z) tiene posiblemente ceros, basta tener en cuenta que se puede escribir (teor 6.4,3):

$$\ln |F(z)| = \ln |B(z)| + \ln |A(z)| \quad .$$

con A(z) sin ceros, y $\lim_{|z| \to 1} |B(z)| = 1$ ,p.p.(2) , c. q. d.

Como consecuencia inmediata, obtenemos el

<u>Corolario 1</u> (Teorema de unicidad) <u>Si $F \in N$, y si en un conjunto de medida positiva de la circunferencia se verifica</u>

$$\lim_{|z| \to 1} F(z) = 0,$$

<u>entonces F(z) es idénticamente nula.</u>

---

(1) Mencionando en §7.2, nota al pie.

(2) Esto último será demostrado más adelante

La demostración es inmediata, e idéntica a la de funciones acotadas (§ 6,3, corol.2), por lo cual la omitimos.

- - - - - - - - - -

$\boxed{\S 7.4}$ Para extender los resultados obtenidos en §7.2 a cualquier $H^{\delta}$, de la manera como F. Riesz lo llevó a cabo(1), es necesario el siguiente teorema de representación canónica:

<u>Teorema 5</u> (F.Riesz). <u>Toda función $F \in H^{\delta}$, $\delta \geq 0$, admite una representación en la forma</u>

$$F(z) = B(z) . A(z)$$

<u>donde B(z) es el producto de Blaschke de F(z), y</u>

$$A(z) = \exp \left\{ - \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, d\, f(\varphi) + i\, c \right\}$$

<u>pertenece a $H^{\delta}$ y no tiene ceros. Además $f(\varphi)$ es una función acotada no decreciente y c un número real. Recíprocamente si $f(\varphi)$ y c cumplen estas condiciones y B(z) es el producto de Blaschke de la sucesión $\{z_k\}$ con $\prod_k |z_k|$ convergente, resulta $A \in H^{\delta}$ y sin ceros, F B , y B(z) el producto de Blaschke de F (z)</u>

Por razones de brevedad, como ya anunciamos, no demostraremos este teorema, que es análogo al §6.3,2(2)

La extensión del teorema §7.2,3 a cualquier $H^{\delta}$, $\delta > 0$ está dada por el

<u>Teorema 6. Si $F \in H^{\delta}$, $\delta > 0$, entonces converge p.p. para $|z| \to 1$</u>

En efecto: por el teorema 5 podemos escribir:

$$F(z) = B(z) . A(z)$$

con $A \in H^{\delta}$ y sin ceros. Entonces $A^{\delta/2} \in H^2$, y ya hemos visto (§7,2,3) que e -

---

(1) Math. Zeitschr., 1922
(2) Cf.: Zygmund, op.cit., segunda edicion, Tomo I, Cap. VII, §7

xiste pp el límite.

$$\lim_{|z|\to 1} A(z)^{\delta/2}$$

Por consiguiente existirá también la función límite de $A(z)$, y como $B(z) \to 1$ p.p., resulta la tesis, c.q.d.

También existe convergencia en norma: así lo afirma la siguiente proposición, análoga al teorema § 7. 2,2 :

<u>Teorema 7. Si $F \in H^{\delta}$ , $\delta > 0$ , entonces converge en $L^2$ , para $|z| \to 1$</u>

Acabamos de ver que existe convergencia puntual. Llamando :

$$\lim_{|z|\to 1} F(z) = \lim_{r\to 1} F(r\, e^{i\theta}) = F(e^{i\theta}) = f(\theta) \quad ,$$

comenzaremos por demostrar que para todo $E \subset [0,2\pi]$ se cumple :

$$\lim_{r\to 1} \int_E |F(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \, d\theta = \int_E |f(\theta)|^{\delta} \, d\theta \ .$$

En efecto; por el teorema 5 de factorización :

$$F(z) = B(z) \,.\, A(z)$$

y entonces :

$$\left| \int_E \left\{ |f(\theta)|^{\delta} - |F(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \right\} d\theta \right| = \left| \int_E \left\{ |f(\theta)|^{\delta} - |B(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \,.\, |A(re^{i\theta})|^{\delta} \right\} d\theta \right| \leq \int_E |f(\theta)|^{\delta} \left| 1 - |B(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \right| d\theta + \int_E |B(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \left| |f(\theta)|^{\delta} - |A(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \right| d\theta \ .$$

Para $r \to 1$ , la primera integral tiene integrando acotado y además

$B(z) \to 1$ p.p. ; por consiguiente tiende a cero. En cuanto a la segunda, como $|B(z)| \leqslant 1$ , será menor o igual que :

$$\int_E \Big| |f(\theta)|^\delta - |A(r e^{i\theta})|^\delta \Big| d\theta \leqslant \int_E \Big| f(\theta)^\delta - A(r e^{i\theta})^\delta \Big| d\theta =$$

$$= \int_E \left\{ f(\theta)^{\delta/2} - A(r e^{i\theta})^{\delta/2} \right\} \left\{ f(\theta)^{\delta/2} + A(r e^{i\theta})^{\delta/2} \right\} d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_E \left\{ f(\theta)^{\delta/2} - A(r e^{i\theta})^{\delta/2} \right\}^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_E \left\{ f(\theta)^{\delta/2} + A(r e^{i\theta})^{\delta/2} \right\}^2 d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Pero el primer factor tiende a cero para $r \to 1$ , puesto que $A(z)^{\delta/2} \to$ $\to f(\theta)^{\delta/2}$ en norma 2 , y el segundo permanece acotado por ser $A^{\delta/2} \in H^2$. En definitiva :

$$\int_E | F(r e^{i\theta})|^\delta d\theta \xrightarrow[r \to 1]{} \int_E |f(\theta)|^\delta d\theta .$$

Nuestro objeto es demostrar que

$$\int_0^{2\pi} |F(r e^{i\theta}) - f(\theta)|^\delta d\theta \longrightarrow 0$$

Como $F(r e^{i\theta}) \to f(\theta)$ p.p. , en virtud del teorema de Egorov(1) , existe un conjunto de medida arbitrariamente pequeña tal que en su complementario la convergencia es uniforme. Sea E tal adjunto, y elijámoslo de manera que dado $\varepsilon > 0$ arbirtario se cumpla

$$\int_E |f(\theta)| \quad d\theta < \varepsilon ,$$

lo cual siempre lo podemos conseguir porque $f \in L^\delta$ . Entonces, por lo demostrado recientemente será :

$$\int_E |F(r e^{i\theta})| \quad d\theta < 2\varepsilon$$

---

(1) Cf, por ej, Natanson, op cit, Cap IV , §3 , Teor. 5 .

para $r$ suficientemente próximo a $1$.

Por otro lado, en virtud de la desigualdad :

$$|a_1 + a_2|^{\delta} \leq 2^{\delta} (|a_1|^{\delta} + |a_2|^{\delta}), \quad (1)$$

obtenemos :

$$\int_M |f(\theta) - F(r\, e^{i\theta})|^{\delta}\, d\theta \leq 2^{\delta} \left\{ \int_M |f(\theta)|^{\delta}\, d\theta + \int_M |F(r\, e^{i\theta})|^{\delta}\, d\theta \right\}.$$

Entonces, si llamamos $CM$ al complementario de $M$, por el teorema de Egorov obtenemos :

$$\left| \lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - F(r\, e^{i\theta})|^{\delta} d\theta \right| \leq$$

$$\leq \left| \lim_{r\to 1} \int_{CM} |f(\theta) - F(r\, e^{i\theta})|^{\delta} d\theta + 2^{\delta} \int_M |f(\theta)|^{\delta}\, d\theta + 2^{\delta} \lim_{r\to 1} \int_M |F(r^{i\theta})|^{\delta} .\right.$$

$$\left. .d\theta \right| \leq 2^{\delta}\, 3\varepsilon\,,$$

y como $\varepsilon$ es arbitrario, resulta la tesis, c. q. d.

---

§7.5 Terminaremos este parágrafo mostrando que las funciones de $H^{\delta}$ pueden representarse por su integral de Cauchy. Es decir:

**Teorema 8.** Si $F \in H^{\delta}$, $\delta \geq 1$, entonces para todo $|z| < 1$ se cumple:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} \frac{F(\omega)\, d\omega}{\omega - z}.$$

---

(1): Por Hölder : $|\sum_n a_n b_n| \leq \left\{ \sum_n |a_n|^{\delta} \right\}^{1/\delta} \left\{ \sum_n |b_n|^{\delta^*} \right\}^{1/\delta^*}$ Para $n = 1, 2$ y $b_1 = b_2 = 1$, resulta: $|a_1 + a_2| \leq \left\{ |a_1|^{\delta} + |a_2|^{\delta} \right\}^{1/\delta} 2^{1/\delta^*}$ de donde : $|a_1 + a_2|^{\delta} \leq \left\{ |a_1|^{\delta} + |a_2|^{\delta} \right\} 2^{\delta - 1}$.

donde $F(\omega) = F(e^{i\theta}) = \lim_{|z|\to 1} F(z)$ .

Notemos en primer lugar que estamos afirmando algo más que el teorema elemental de funciones analíticas, pues ahora $F(z)$ es holomorfa en el interior del círculo unidad, pero no necesariamente en el contorno, donde ni siquiera se puede afirmar la continuidad ( teor. de Goursat) .

La existencia de $F(e^{i\theta})$ está asegurada por el teorema § 7.4,6 . Entonces existe para $|z| < 1$ la función :

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)\, d\omega}{\omega - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} F(\omega) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\omega^{n+1}} \right\} d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|\omega|=1} \frac{F(\omega)}{\omega^{n+1}} d\omega =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

donde $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$ son los coeficientes de Fourier de la función límite $f(\theta) = F(e^{i\theta})$ . Tengamos en cuenta que $f \in L^{\delta}$ con $\delta \geq 1$ y por lo tanto $f \in L^1$ , de donde $c_n \to 0$ para $n \to \infty$ .

Por otro lado:
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

de donde resulta:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

La tesis equivale a afirmar que $a_n = c_n$ . En efecto :

$$|a_n r^n - c_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \left\{ F(r e^{i\theta}) - f(\theta) \right\} e^{-in\theta} d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(r e^{i\theta}) - f(\theta)|\, d\theta ,$$

y la última integral tiende a cero para $r \rightarrow 1$, pues la convergencia en $L^{\delta}$ (teorema §7.4, 7) implica la convergencia en $L^1$. c.q.d.

---

$\boxed{\S 7.6}$ Pasaremos ahora a estudiar, en el semiplano de la derecha, las funciones análogas a las de las clases $H^{\delta}$ del círculo unidad, en especial las de $H^2$.

Un procedimiento standard consiste en representar conformemente el círculo $|Z| < 1$ en el semiplano $Rp > 0$ mediante

$$Z = \frac{1 - p}{1 + p}$$

Hemos visto ya ( § 7.1) que por definición, $F \in H^{\delta}$ si y sólo si $F(z)$ es holomorfa en el círculo $|z| < 1$ y además se cumple, para todo $r = |z| < 1$ :

$$\int_0^{2\pi} |F(r\, e^{i\theta})|^{\delta} \, d\theta < M$$

La integral se toma pues en círculos con centro en el origen y de radio menor que 1.

Por analogía, en el semiplano de la derecha integraremos en rectas verticales, y daremos por lo tanto la siguiente definición:

Se dice que $G \in H_d^{\delta}$ si $G(p)$ es holomorfa en $R(p) > 0$ y además existe una constante $M$ tal que para todo $x > 0$ se cumple

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x + iy)|^{\delta} \, dy < M$$

...ado, demostramos ( § 7.2) que en particular $F \in H^2$ si y sol... $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ en $|z| < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ . Ahora bien: el análogo de la serie de Taylor para el círculo es, en el semiplano de la derecha, la integral de Laplace, y por lo tanto naturalmente nos vemos conducidos a considerar funciones G(p) holomorfas en Rp > o y representables mediante

$$G(p) = \mathcal{L}g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t)\, dt \quad .$$

Notemos sin embargo que la analogía entre series de Taylor y transformadas de Laplace nos es completa: toda función holomorfa en $|z| < 1$ es representable por una serie de Taylor, pero en cambio no toda función holomorfa en Rp > o es representable por una integral de Laplace, pues hace falta además que sea regular en el infinito.

Cabe esperarse que las funciones representables por una integral de Laplace coincidan con las de $H_d^2$ , siempre que $\int_0^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$ , es decir con $g \in L^2 (0,\infty)$ . En efecto así lo afirma el siguiente:

<u>Teorema 9</u> (Paley-Wiener [(1)]). <u>Son equivalentes las siguientes dos condiciones necesarias y suficientes para que $G \in H_d^2$ :</u>

a) <u>G(p) es holomorfa en Rp > o, y existe una constante M tal que para todo $x > 0$ se cumple:</u>

$$\int_0^{\infty} | G(x + iy) |^2\, dy < M \quad ;$$

b) <u>G(p) es holomorfa en Rp > o y representable mediante la integral de</u>

(1): CF: Paley-Wiener: Fourier transform in the complex domain.

place

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} g(t)\, dt \quad ,$$

con $g \in L^2(0,\infty)$

Las funciones $H_d^{\delta}$ del semiplano de la derecha han sido estudiadas por Hille y Tamarkin(1)

Prosiguiendo con la analogía, notemos que así como para funciones $F(Z) = $ $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in H^2$ , al hacer $|Z| \to 1$ , se obtiene la serie de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad ,$$

respecto a las funciones de $H_d^2$ , procediendo formalmente obtenemos la transformada de Fourier:

$$G(p) = \int_0^{\infty} e^{-xt} e^{-iyt} g(t)\, dt \xrightarrow[x \to 0]{} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} g(t)\, Y(t)\, dt \quad ,$$

donde $Y(t)$ es la función de Heaviside.(2)

(1): Fundamenta Mathematical, 1935.
(2): Para más detalles sobre lo tratado en §7.6, cf. Doetsch: Theorie und Andwendungen der Laplasche Transformationen (Segunda edición)

$\boxed{§7.7}$ Tiene especial interés la subclase de $H^{\delta}$ constituida por aquellas funciones que satisfacen la condición adicional de tomar valores reales en el semieje real. En consecuencia, por el principio de reflexión de Schwarz, tomarán valores conjugados en puntos conjugados del plano. Tales funciones se denominan típicamente reales, y designaremos a la clase respectiva $^{r}H^{\delta}$ . Se cumple el siguiente teorema de representación cañonica:

Teorema 10. Toda función $F \in {}^{r}H^{\delta}$ admite una representación en la forma

$$F(z) = B(z)\,A(z)$$

donde B(Z) es el producto de Blaschke de F(Z), y

$$A(z) = \exp\left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\varphi + z^2}\, d\,f(\varphi) + ic \right\},$$

siendo $f(\varphi)$ acotada no decreciente y de $L^{\delta}$ y C real no negativo. Recíprocamente, si $f(\varphi)$ y C cumplen estas condiciones, y B(Z) es el producto de Blaschke de la sucesión $\{z_k\}$ con $\prod_k |z_k|$ convergente, y tal que con cada $z_k$ aparece en la sucesión su conjugado, entonces $F \in {}^{r}H^{\delta}$ .

La demostración se efectúa partiendo del teorema §7.4, 5 de F.Riesz, e imponiendo la condición adicional de ser F(Z) real para Z real, en forma análoga a la que expusimos en §5.8.

Señalemos que la integral que aparece en la expresión de A(Z) no es una integral de Poisson, pues en ella aparece Z complejo, y no r = $|Z.|$

Al pasar del círculo al semiplano de la derecha, resulta este otro teorema de representación canónica, donde designamos con $^{r}H_d^{\delta}$ al subconjunto de $H_d^{\delta}$ formado por las funciones típicamente reales.

Teorema 11.[1] Toda función $G \in {}^{r}H_d^{\delta}$ admite una representación en la forma

$$G(p) = B(p)\, A(p).$$

donde

$$B(p) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p - p_k}{p + p_k} \cdot \frac{|1 + p_k|}{1 + p_k} \cdot \frac{|1 - p_k|}{1 - p_k}$$

siendo

$$\mathcal{R}\, p_k > 0 \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{R}\, p_k}{1 + |p_k|^2} < \infty$$

y

$$A(p) = \exp\left\{ - \int_0^{\infty} \frac{p\, d\, h(b)}{p^2 + t^2} \cdot \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + t^2} \ln|g(t)|\, dt - cp \right\},$$

siendo la función límite $g(t)$ de $F(p)$ perteneciente a $L^p$, y

$$\frac{\ln |g(t)|}{1 + t^2} \in L^1,$$

y además $h(t)$ es acotada no decreciente y tal que

$$\int_0^{\infty} \frac{d\, h(t)}{1 + t^2} < \infty$$

y $C$ es un número real no negativo. Recíprocamente, si $B(p)$ y $A(p)$ cumplen estas condiciones, entonces $G \in {}^{r}H_d^{\delta}$.

---

(1) Compárese con el teorema §5.8

## §8. MATRICES ACOTADAS

**§ 8.1** El principal objetivo de este curso es extender algunos de los resultados clásicos anteriores, cuya teoría está exhaustivamente estudiada, al caso matricial, en el cual se parte no ya de una única función F(Z), sino de una matriz cuadrada de funciones, que por brevedad seguiremos notando de la misma manera:

$$F(z) = ( F_{ij}(z) ) = \begin{pmatrix} F_{12}(z) & \ldots & F_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1}(z) & \ldots & F_{nn}(z) \end{pmatrix}$$

Otra teoría interesante se obtendría al tratar de generalizar los resultados para funciones de varias variables $F = F(z_1, \ldots, z_n)$

En el caso que nos interesa ahora -el matricial-, existen dos líneas de investigación posibles.

Una de ellas, desarrollada por Helson-Londenslager y Wiener-Massani [(1)], es la base de la teoría de la predicción múltiple de Wiener.

La otra fué seguida por Potapov [(2)], quien se ocupó de matrices acotadas -o "no dilatantes", como él las llama-, y fue aplicada por Lifschitz a la teoría espectral de operadores no autoadjuntos. La base del trabajo de Potapov es el teorema análogo al de factorización de F. Riesz ( §6.3, 2), que afirmaba que toda función holomorfa y acotada en $|z| < 1$ es expresable mediante el producto B(Z) A(Z), donde B(Z) es el producto de Blaschke de la función de partida, y A(Z) es acotada y sin ceros.

(1): Acta Math., 1958. Ambas memorias aparecieron en el mismo número.
(2): Trudi, de la Soc.Mat. de Moscú, 1955.

En lo que sigue, daremos por conocidas algunas propiedades elementales sobre matrices, que pueden consultarse, por ejemplo, en: Gantmacher: Matrizenrechnung (V.D.V.. Berlin. 1958). De todas maneras reuniremos en un apéndice las nociones requeridas.

---

$\boxed{\S 8.2}$ Sea pues F(Z) una matriz de orden n, holomorfa en el círculo unidad $|z| < 1$ y acotada en esa región, es decir:

$$||F(z)|| \leqslant 1 \quad ,$$

o lo que es equivalente:

$$I - F(z)\, F^{*}(z) \geqslant 0 \quad ,$$

donde designamos con un asterisco a la matriz adjunta.

Designamos en $Z_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ a los ceros de F(Z); ordenados por módulos crecientes.

Comenzaremos por "aislar" el cero $Z_1$, de manera análoga que para funciones. Para ello, consideramos la matriz numérica $F(Z_1)$ y la descomponemos en forma polar:

$$F(z_1) = H\, U \quad ,$$

donde H es una matriz hermitiana no negativa, y U una matriz unitaria. Y como H es hermitiana, la podemos diagonalizar:

$$H = V\, H_D\, V^{-1} \quad ,$$

siendo V unitaria y $H_D$ diagonal. En particular, algunos elementos diagonales de esta última pueden ser nulos. Entonces, multiplicando a derecha e izquierda por matrices unitarias R y S convenientemente elegidas, podemos conseguir que los elementos nulos ocupen los primeros lugares, es decir:

$$H_D = R\, H_{D_1}\, S \quad ,$$

$$H_{D_1} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & 0 & & & \\ & & \lambda_{r_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \quad 1 \leqslant r_1 \leqslant n \quad .$$

En definitiva, podemos escribir:

$$F(z_1) = U_1\, H_{D_1}\, V_1$$

donde $V_1$ y $U_1$ son matrices unitarias.

Definamos ahora la matriz:

$$\phi(z) = U_1^{-1}\, F(z)\, V_1^{-1}$$

Evidentemente:

$$\phi(z_1) = H_{D_1} \quad , \quad y \qquad F(z) = U_1\, \phi(z)\, V_1$$

donde $U_1$ y $V_1$ son unitarias y constantes.

Consideremos ahora el factor:

$$b_1(z) = U_1 \begin{pmatrix} \beta_1(z)\, I_{r_1} & 0 \\ 0 & I_{n-r_1} \end{pmatrix} U_1^{-1}$$

donde $I_\alpha$ es la matriz unidad de orden $\alpha$, y

$$\beta_1(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \bar{z}_1 z} \; \frac{\bar{z}_1}{|z_1|} \quad .$$

Como $b_1(z)$ tiene determinante con cero de orden $r_1$ en $Z = Z_1$, $b_1^{-1}(z)$ tendrá un polo del mismo orden. Consideremos ahora la matriz:

$$b_1^{-1}(z)\; F(z) = U_1 \begin{pmatrix} \beta_1^{-1}(z)\; I_{r_1} & 0 \\ 0 & I_{n-r_1} \end{pmatrix} \phi(z)\; V_1 \quad .$$

Veremos un poco más abajo que el orden del pólo de $b_1^{-1}(z)$ no es mayor que el orden del cero de $\phi(z)$. Caben entonces dos posibilidades. Si los dos órdenes coinciden, habríamos logrado ya aislar el cero de F(Z), pues $b_1^{-1}(z)F(z)$ no tendría cero en $Z_1$; de lo contrario se reitera el razonamiento seguido hasta aquí con $b_1^{-1}(z)\; F(z)$ en lugar de F(Z), y como el orden del cero de F(Z) lo suponemos finito, después de un número finito de pasos, llegamos a que:

$$F_1(z) = b_{\ell_1}^{-1}(z) \,.\, b_{\ell_1 - 1}^{-1}(z) \,\ldots\, b_1^{-1}(z) .\; F(z)$$

no tiene cero en $Z_1$. Por consiguiente, podemos escribir:

$$F(z) = \prod_{i=1}^{\ell_1} b_i(z) .\; F_1(z) \quad ,$$

con $F_1(Z)$ no nula en $Z_1$.

Resta probar que el orden del polo de $\prod_{i=1}^{1} b_i^{-1}(z)$ no es mayor que el orden del cero de $\phi(z)$, y para ello basta ver que $F_1(Z)$ es una matriz acotada.

Y así es en efecto: en primera lugar veamos que para $\varepsilon > 0$ arbitrario y $|z| = \rho\,(< 1)$ suficientemente próximo a 1 se cumple:

$$||F_1(z)|| \leq ||\prod_{i=1}^{\ell_1} b_i^{-1}(z)||\; ||F(z)|| < 1 + \varepsilon \quad .$$

Esto se debe a que $||F(z)|| < 1$ en $|z| < 1$, por hipótesis, y además, como los elementos diagonales de cada $b_i(Z)$ tienden en valor absoluto a 1, como $||e^{i\lambda_k}\,\delta_{hk}|| = 1_{\ell_1}$ y la norma es una función continua de los coeficientes, resulta $||\prod_{i=1}^{\ell_1} b_i^{-1}(z)|| \rightarrow 1$.

Ahora bien: en virtud de la fórmula de la integral de Cauchy, se cumple:

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1\,(z + \rho\, e^{i\theta})\, d\theta$$

para $|z| < \rho$, de donde resulta - teniendo en cuenta la desigualdad triangular para normas, y el hecho que la integral es un límite de sumas- que $||F_1(z)||$ es una función subarmónica (1), es decir:

$$||F_1(z)|| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ||F_1(z + \rho e^{i\theta})||\, d\theta \quad .$$

En consecuencia, podemos afirmar que la desigualdad

$$||F_1(z)|| \leq 1 + \varepsilon$$

(1) : Toda función $f(z)$ que cumple $F(z) \leq 1/2\pi \int_0^{2\pi} f(z+\rho e^{i\theta})\, d\theta$ para $|z| < \rho$, se llama subarmónica. Por ejemplo si $h(z)$ es analítica entonces $|h(z)|$ es subarmónica. En particular, cuando el signo $\leq$ se reemplaza por el de igualdad, $f(z)$ es armónica. Es decir, las funciones armónicas son caso particular de las subarmónicas.

se cumple no sólo en la circunferencia $|z| = \rho$, sino también en su inter

Haciendo ahora $\varepsilon \to 0$ y por lo tanto $\rho \to 1$, obtenemos:

$$||F_1(z)|| \leq 1$$

para todo $|z| < 1$. Es decir, $F_1(z)$ es acotada en el círculo unidad.

-----------

$\boxed{\S 8.3}$ Hasta ahora logramos descomponer la matriz acotada $F(Z)$ en un producto finito:

$$F(z) = \prod_{i=1}^{\ell_1} b_i(z) . F_1(z)$$

donde $F_1(Z)$ es también acotada, y no se anula en $Z_1$.

Si reiteramos el proceso para cada cero $Z_k$:

$$F_1(z) = \prod_{i=\ell_1+1}^{\ell_2} b_i(z) . F_2(z) \quad ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_k(z) = \prod_{i=\ell_k+1}^{\ell_{k+1}} b_i(z) . F_{k+1}(z) \quad ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ;$$

obtendremos, para cada K :

$$F(z) = B_k(z) \; F_k(z)$$

con:

$$B_k(z) = \prod_{i=1}^{\ell_k} b_i(z) \quad ; \quad b_i(z) = U_i \begin{pmatrix} \rho_\alpha(z) \, I_{r_i} & 0 \\ 0 & I_{n-r_i} \end{pmatrix} U_i^{-1}$$

donde el subindice $\alpha$ se refiere al cero $z_k$ correspondiente al factor $b_i$ .

Haciendo $k \to \infty$ , obtenemos formalmente :

$$F(z) = B(z) \ A(z) \quad ,$$

donde $A(z) = \lim_{k\to\infty} F_k(z)$ es acotada y sin ceros, y

$$B(z) = \prod_{i=1}^{\infty} b_k(z)$$

es el producto de Blaschke de $F(z)$ .

Para que tal fórmula de factorización $F = B.A$ quede rigurosamente justificada, es menester probar que el producto de Blaschke es convergente .

Para evitar dificultades en la notación, contaremos cada cero $z_k$ tantas veces como factores simples de Blaschke le correspondan, y entonces podemos escribir simplemente :

$$b_k(z) = U_k \begin{pmatrix} \beta_k(z) \ I_{r_k} & 0 \\ 0 & I_{n-r_n} \end{pmatrix} U_k^{-1} \quad ,$$

con

$$\beta_k(z) = \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \ \frac{|z_k|}{z_k}$$

Haciendo $z = 0$ , resulta :

$$b_k(0) = U_k \begin{pmatrix} |z_k| \ I_{r_n} & 0 \\ 0 & I_{n-r_n} \end{pmatrix} U_k^{-1}$$

Llamando :

$$G_k = - \ln b_k(0) = U_k \left\{ - \ln \begin{pmatrix} |z_k| \ I_{r_n} & 0 \\ 0 & I_{n-r_n} \end{pmatrix} \right\} U_k^{-1} \quad ,$$

se cumple: (1)

$$b_k(0) = e^{-G_k} \quad ; \qquad B(0) = \prod_{k=1} e^{-G_k} \quad .$$

En un primer paso, probaremos que el producto de Blaschke converge en $z = 0$
Como $F(z)$ es acotada, det $F(z)$ es una función acotada, por lo cual, según ya vimos, convergerá su producto de Blaschke, que es precisamente det $B(Z)$, y se cumple:

$$\det B(0) = \prod_{k=1}^{\infty} |z_k|^{n_k} = \det \prod_{k=1}^{\infty} e^{-G_k} = \prod_{k=1}^{\infty} \det e^{-G_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} e^{-t_r G_k} = e^{-\sum_{k=1}^{\infty} t_r G_k} \quad ,$$

y como $\det B(0) \neq 0$ , debe cumplirse $\sum_{k=1}^{\infty} t_r G_k < \infty$

Pero:
$||G_k||$ = raíz cuadr. del máx. autov. de $G_k G_k^* \leqslant t_r G_k$ , y por lo tanto converge también

$$\sum_{k=1}^{\infty} ||G_k|| \quad ;$$

y entonces, a fortiori

$$\sum_{k=1} G_k$$

es convergente, de donde resulta que

$$B(0) = \prod_{k=1}^{\infty} b_k(0)$$

(1): Recuérdese que si $H = U H_D U^{-1}$ , entonces $f(H) = U f(H_D) U^{-1}$

converge, tal como deseábamos probar.

Consideremos ahora la expresión:

$$I - B_k(z)\ B_k^*(z) \quad .$$

Como:

$$\|B_k(z)\| \leqslant 1 \quad , \quad \|b_k(z)\| \leqslant 1 \quad , \quad \|A(z)\| \leqslant 1 \quad ,$$

se deduce:

$$0 \leqslant I - B_k(z)\ B_k^*(z) \leqslant I - B_{k+1}(z) B_{k+1}^*(z) \leqslant I - F(z)\ F^*(z) \quad .$$

Entonces, para todo Z es $I - B_k(z)\ B_k^*(z)$ creciente y acotada, y en consecuencia, convergente.

Pasemos ahora a la expresión:

$$I - B_k(\lambda)\ B_k^*(\mu) = \sum_{j=1}^{k} B_{j-1}(\lambda)\ B_{j-1}^*(\mu) - B_j(\lambda) B_j^*(\mu) \quad ,$$

donde $\lambda$ y $\mu$ son números complejos cualesquiera del círculo unidad. Ponemos $B_0(z) = I$ .

Mostraremos que esta expresión es también convergente para $k \to \infty$ . Para ello, hagamos:

$$I - B_k(\lambda)\ B_k^*(\mu) = \sum_{j=1}^{k} B_{j-1}(\lambda) \left\{ I - b_j(\lambda)\ b_j^*(\mu) \right\} B_{j-1}^*(\mu) \quad .$$

Pero:

$I - b_j(\lambda)\, b_j^*(\mu)$

$$= I - \left( U_j \begin{pmatrix} \beta_j(\lambda)\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & I_{n-r_j} \end{pmatrix} U_j^{-1} \right) \left( U_j^{-1*} \begin{pmatrix} \beta_j^*(\mu) I_{r_j} & 0 \\ 0 & I_{n-r_j} \end{pmatrix} U_j^* \right) =$$

$$= I \begin{pmatrix} \dfrac{z_j - \lambda}{1 - \bar{z}_j \lambda} \; \dfrac{\bar{z}_j - \bar{\mu}}{1 - z_j \bar{\mu}}\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & I_{n-r_j} \end{pmatrix} U_j^* =$$

$$= U_j \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{z_j - \lambda}{1 - \bar{z}_j \lambda} \cdot \dfrac{z_j - \bar{\mu}}{1 - z_j \bar{\mu}}\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_j^* =$$

$$= (1 - \lambda \bar{\mu})\, U_j \begin{pmatrix} \dfrac{1 - |z_j|^2}{(1 - \bar{z} \lambda)(1 - z_j \bar{\mu})}\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_j^*$$

Sustituyendo en la expresión anterior, obtenemos

$I - B_k(\lambda)\, B_k^*(\mu) =$

$$= (1 - \lambda \bar{\mu}) \sum_{j=1}^{k} B_{j-1}(\lambda)\, U_j \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{1-|z_j|^2}}{1 - \bar{z}_j \lambda}\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{1-|z_j|^2}}{1 - z_j \bar{\mu}}\, I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_j^* B_{j-1}^*(\mu)$$

$$= (1 - \lambda \bar{\mu}) \left\{ \sum_{j=1}^{k} B_{j-1}(\lambda) U_j \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{1-|z_j|^2}{1 - \bar{z}_j \lambda} I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ B_{j-1}(\mu) U_j \begin{pmatrix} \dfrac{1-|z_j|^2}{1 - z_j \bar{\mu}} I_{r_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right.$$

Llamemos $M_j(\lambda)$ y $M_j^*(\lambda)$ a las expresiones entre llaves. En virtud de la desigualdad de Schwarz para matrices, se cumple

$$\|I - B_k(\lambda)\, B_k^*(\lambda)\| = |1 - \lambda\overline{\mu}|\ \|\sum_{j=1}^{k} M_j(\lambda)\, M_j^*(\mu)\| \leqslant$$

$$\leqslant |1 - \lambda\overline{\mu}|\ \|\sum_{j=1}^{k} M_j(\lambda)\, M_j^*(\lambda)\|\ \ \|\sum_{j=1}^{k} M_j(\mu)\, M_j^*(\mu)\| \quad .$$

El último miembro es convergente para $k \longrightarrow \infty$ puesto que, evidentemente

$$(1 - |\lambda|^2) \sum_{j=1}^{k} M_j(\lambda)\, M_j^*(\lambda) = I - B_k(\lambda)\, B_k^*(\lambda) \quad ,$$

y análogamente para $\mu$ , y ya hemos visto que el miembro derecho converge.

En consecuencia:

$$I - B_k(\lambda)\, B_k^*(\lambda)$$

converge para $k \to \infty$ . En particular, haciendo $\mu = 0$ y $\lambda = z$, converge

$$I - B_k(z)\, B_k^*(0)$$

y como ya vimos que la sucesión $B_k(0)$ es convergente, resulta que la sucesión

$$B_k(z) = \prod_{i=1}^{k} b_i(z) = \prod_{i=1}^{k} U_i \begin{pmatrix} \beta_i(z)\, I_{r_i} & 0 \\ 0 & I_{n-r_i} \end{pmatrix} U_i^{-1}$$

converge para todo Z del círculo unidad. Con esto queda justificada la fórmula de factorización:

$$F(z) = B(z)\, A(z) \quad .$$

------------

$\boxed{\S 8.4}$ Nuestro próximo objetivo es dar una representación canónica de la matriz acotada y in ceros A(Z) que aparece en la fórmula de factorización, tal como hicimos para funciones. Ahora, en lugar de la exponencial de una integral, aparecerá una integral multiplicativa.

En primer lugar, mostraremos que es posible encontrar una sucesión matricial racional -es decir, con elementos racionales- $A_k(z)$ que aproxime a A(Z) en la forma:

$$||A(z) - A_k(z)|| \leq \frac{1}{k} \qquad \text{para} \quad |z| \leq \rho < 1 \quad ,$$

siendo además $A_k(z)$ unitaria en $|z| = 1$ .

Para ello, sea

$$\Omega(z) = i \left( I - A(z) \right)^{-1} \left( I + A(z) \right)$$

la transformada de Cayley de A(Z). Por ser A(Z) acotada, $\Omega(z)$ tendrá parte imaginaria no negativa y en consecuencia admitirá la representación (matricial) de Herglotz:

$$\Omega(z) = \tfrac{1}{2}\left(\Omega(0) + \Omega^*(0)\right) + i\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\,\Sigma(\theta) \quad ,$$

donde $\Sigma(\theta)$ es una matriz hermitiana no decreciente.

Tomando una partición del intervalo $[0,2\pi]$, en virtud de la definición integral, las matrices

$$\Omega_k(z) = \tfrac{1}{2}\left(\Omega(0) + \Omega^*(0)\right) + i\sum_{j=1}^{N_k} \frac{e^{i\theta_j^{(k)}}+z}{e^{i\theta_j^{(k)}}-z}\,\Delta\,\Sigma(\theta_j^{(k)})$$

serán aproximantes de $\Omega(z)$ . El índice (k) indica la partición elegida, y el j cada uno de los intervalos.

Cuando la norma de la partición tiende a cero, la suma tiende a la integral; entonces podemos elegir la partición de manera que para todo K se verifique:

$$||\,\Omega(z) - \Omega_k(z)\,|| \leq \frac{1}{k}$$

en $|z| < \rho < 1$ .

Además, para $|z|=1$ , cada sumando es de la forma:

$$\frac{e^{i\theta_j^{(k)}} + e^{i\varphi}}{e^{i\theta_j^{(k)}} \quad\quad e^{i\varphi}} \quad ,$$

qué es un número imaginario puro; por lo tanto $\Omega_k(z)$ es real en $|z| = 1$ y tiene un número finito de ceros.

Aplicamos ahora la transformación inversa de Cayley, y resulta

$$A_k(z) = \left(\Omega_k(z) - iI\right)\left(\Omega_k(z) + iI\right)^{-1}$$

unitaria en $|z| = 1$ y con un número finito de ceros. Por consiguiente, la podemos descomponer en un número finito de factores de Blaschke:

$$A_k(z) = \prod_{j=1}^{P_k} b_j^{(k)}(z) \,.\, U^{(k)} \quad ,$$

siendo $U^{(k)}$ cierta matriz unitaria.

Escribiremos $A_k(Z)$ como integral multiplicativa. Para eso pongamos:

$$b_j^{(k)}(z) = V^{(k)} \left\{ I - \frac{z_j^{(k)} + |z_j^{(k)}|\ z}{z_j^{(k)} - |z_j^{(k)}|\ z} H_j^{(k)} \right\} (V^{(k)})^{-1} \quad ,$$

de donde resulta:

$$H_j^{(k)} = V_j^{(k)} \begin{pmatrix} (1 - |z_j^{(k)}|)\, I_{r_j}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (V_j^{(k)})^{-1}$$

La matriz $H_j^{(k)}$ es hermitiana no negativa. Reemplazando el valor de $b_j^{(k)}(z)$ en la expresión anterior de $A_k(z)$, obtenemos:

$$A_k(z) = \prod_{j=1}^{p_k} \left\{ I - \frac{z_j^{(k)} + |z_j^{(k)}|\ z}{z_j^{(k)} - |z_j^{(k)}|^2\ z}\ H_j^{(k)} \right\} V^{(k)} .$$

Esta expresión es una aproximante de la integral multiplicativa.

Consideremos ahora el intervalo ( $0 , \ell$ ), donde:

$$\ell = \sum_{j=1}^{p_k} \operatorname{tr} H_j^{(k)} > 0 \quad ,$$

y dividámoslo por puntos intermedios $t_o=0,\ t_1\ , \ldots,\ t_{p_k}= \ell$ , definidos mediante:

$$T_i = \sum_{j=1}^{i} \operatorname{tr} H_j^{(k)} \quad .$$

Supongamos ahora a los $b_j^{(k)}(z)$ ordenados según j, para cada k, por argumentos crecientes de $z_j^{(k)}$ , y definamos la función escalar:

$$\lambda^{(k)}(t) = z_s^{(k)} \quad \text{si} \quad t_{s-1} \leq t < {}_s \quad ; \quad s = 1, 2, \ldots, p_k \quad ;$$

y la función matricial creciente:

$$E^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{s-1} H_i^{(k)} + \frac{t - t_{s-1}}{t_s - t_{s-1}}\ H_s^{(k)} \quad , \quad \text{si} \quad t_{s-1} < t \leq t_s \ ; s=1, 2,..,p_k .$$

Entonces podemos escribir:

$$A_k(z) = \int_0^{\ell} I - \frac{\lambda^{(k)}(t) + |\lambda^{(k)}(t)|\ z}{\lambda^{(k)}(t) - |\lambda^{(k)}(t)|^2 z}\ dE^{(k)}(t) =$$

$$= \int_0^{\hat{\ell}} e^{-\frac{\lambda^{(k)}(t) + |\lambda^{(k)}(t)|\, z}{\lambda^{(k)}(t) - |\lambda^{(k)}(t)|^2 z}} \, dE^{(k)}(t)$$

Haremos ahora $k \rightarrow \infty$ y $A_k \rightarrow A$ aplicando los teoremas de Helly, que mantienen su validez para matrices.

Para ello, notemos en primer lugar que $E^{(k)}(t)$ es una sucesión uniformemente acotada. En efecto, recordando la expresión de la norma en función de los autovalores, tenemos:

$$\left\| \sum_{j=1}^{P_k} H_j^{(k)} \right\| \leq \sum_{j=1}^{P_k} \| H_j^{(k)} \| = \sum_{j=1}^{P_k} \left( 1 - |z_j^{(k)}| \right)^2 ,$$

y como $\det \prod_{j=1}^{P_k} b_j^{(k)} = \prod_{j=1}^{P_k} |z_j^{(k)}|$ es convergente, resulta la acotación uniforme.

En consecuencia, en virtud del primer teorema de Helly, existirá una subsucesión $E^{(k_i)}(t)$ convergente hacia cierta matriz $E(t)$.

Razonando ahora de manera análoga con $\lambda^{(k_i)}(t)$, como su módulo tiende a uno, existirá una subsucesión convergente hacia $e^{i\theta(t)}$. En definitiva, según el segundo teorema de Helly, obtenemos:

$$A(z) = \int_0^{\hat{\ell}} e^{\frac{e^{i\theta(t)} + z}{e^{i\theta(t)} - z}} \, dE(t) ,$$

que es la representación buscada para el factor A(Z). Es inmediato comprobar además, por definición, que

$$\operatorname{tr} E(t) = t$$

Con esto hemos demostrado el siguiente teorema de factorización:

<u>**Teorema 1**</u> (Potapov [1]). <u>**Sea Fz una matriz holomorfa y acotada en el círculo unidad $|z|<1$. Entonces se puede escribir:**</u>

$$F(z) = B(z)\,A(z) \quad ,$$

<u>**donde B(Z) es el producto de Blaschke de F(z) y A(z) es una matriz acotada y sin ceros, expresable mediante la integral multiplicativa de Stieltjes:**</u>

$$A(z) = \int_0^{\widehat{\ell}} e^{\frac{e^{i\theta(t)}+z}{e^{i\theta(t)}-z}\, dE(t)} \quad ,$$

donde $\theta(t)$ es una función acotada no decreciente, un número positivo, y E(t) una matriz hermitiana no decrediente y tal que $\operatorname{tr} E(t)=t$ .

---

$\boxed{\S 8.5}$ Los siguientes son unos ejemplos simples de factorización de matrices acotadas. Compruebe el lector su validez en detalle. Recordemos también que la factorización es única.

a) $$\begin{pmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} z & \cos z \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{\pi}{4}-z}{1-\frac{\pi}{4}z} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{\pi}{4}z}{\frac{\pi}{4}-z}\operatorname{sen} z & \dfrac{1-\frac{\pi}{4}z}{\frac{\pi}{4}-z}\cos z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1): Trudi, Soc: Mat. de Moscú, 1955

c) $\begin{pmatrix} z-\frac{i}{2} & 0 \\ 0 & z+\frac{i}{2} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\frac{i}{2}-z}{1+\frac{i}{2}z}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dfrac{\frac{i}{2}+z}{1-\frac{i}{2}z}\, e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\frac{i}{2}z+1)e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & (\frac{i}{2}z-1)e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} z-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & z+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}-z}{1-\frac{z}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{1}{2}+z}{1+\frac{z}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z}{2}-1 & 0 \\ 0 & \frac{z}{2}+1 \end{pmatrix}$$

-------------

## §9. TEOREMA DE SZEGO

En la teoría de la predicción múltiple es importante una generalización para matrices de un teorema de Szegö, de manera que comenzaremos con este último. La demostración que daremos se debe esencialmente a Helson-Lewdenslager[1], con algunas simplificaciones debidas a A.P.Calderón, y utiliza el siguiente lema sobre espacios de Hilbert, que suponemos conocido[2]:

**Lema 1:** Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $x$ un elemento del mismo y $K\subset\mathcal{H}$ un subconjunto convexo y cerrado. Sea $\delta = \inf_{k\in K} \|x-k\|$. Entonces toda sucesión minimizante es convergente, es decir: si $k_i \in K$ $(i = 1,2,\dots)$ cumple la propiedad $\|x-k_i\| \to \delta$ para $i\to\infty$, entonces existe un elemento $k_0 \in K$ tal que $\|k_i-k_0\| \to 0$ y $\|x-k_0\| = \delta$.

Podemos ahora enunciar el teorema que nos ocupa:

(1): Op. cit.
(2): [illegible], por ej.: Dunford-Schwartz: Linear operators, T.I., pág. 248.

Teorema 1. (Szegö). Sea $\mu(x)$ una medida no negativa en $[0,2\pi]$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de los polinomios de la forma:

$$P(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \lambda^\nu \quad .$$

Entonces se cumple:

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | 1 + P(e^{ix})|^2 \, d\mu(x) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) dx \right\}$$

donde $g(x)$ es la densidad de la parte absolutamente continua de la medida $\mu$

Recordemos que $\mu$ admite la representación única:

$$d\mu(x) = g(x)\, dx + d\nu \quad ,$$

donde $g(x)\, dx$ es la parte absolutamente continua, y $d\nu$ la suma de las partes a saltos y singular

Designaremos con $\mathfrak{J}$ al ínfimo buscado:

$$\mathfrak{J} = \inf_{P\in\mathcal{P}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | 1 + P(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x)$$

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de las funciones $f(z)$ analíticas en $|z|<1$, continuas en $|z| \leqslant 1$, y tales que $f(0) = 1$ .

Consideremos el espacio de Hilbert $L^2_\mu$ de las funciones de cuadrado integrable respecto a la medida $\mu$, con el producto escalar:

$$(f_1 , f_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(e^{ix})\, \overline{f_2}(e^{ix})\, d\mu(x) \quad ,$$

y llamaremos $\bar{\mathcal{C}}$ a la clausura de $\mathcal{C}$ en la métrica de $L^2_\mu$. Es sencillo comprobar que $\mathcal{C}$ es convexo en $L^2_\mu$, y en consecuencia $\bar{\mathcal{C}}$ convexo y cerrado.

Puesto que, evidentemente:

$$\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{C}}$$

deberá cumplirse:

$$\mathfrak{I} \geq \inf_{f \in \bar{\mathcal{C}}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x) = \inf_{f \in \bar{\mathcal{C}}} ||f||^2$$

Pero cualquier $f \in \bar{\mathcal{C}}$ es aproximable uniformemente en $|z| \leq 1$ por las sumas Césaro de su serie de Taylor -en virtud del teorema de Fejér- , que son elementos de $\mathcal{P}$, y puesto que la convergencia uniforme implica la convergencia en norma -por ser compacto el espacio de definición- ,resulta $\mathcal{P}$ denso en $\bar{\mathcal{C}}$, es decir:

$$\bar{\mathcal{P}} = \bar{\mathcal{C}} \quad ,$$

y en consecuencia:

$$\mathfrak{I} = \inf_{f \in \bar{\mathcal{C}}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x) = \inf_{f \in \bar{\mathcal{C}}} ||f||^2 \; .$$

Basta pues trabajar con el conjunto $\bar{\mathcal{C}}$. Como éste cumple las hipótesis del lema 1, existirá una función $f_0 \in \bar{\mathcal{C}}$ que da el ínfimo:

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f_0(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x) = ||f_0||^2 \; .$$

Definamos ahora la función:

$$h_{n,\lambda}(e^{ix}) = f_o(e^{ix}).(1 + \lambda e^{inx})$$

que $\lambda$ es un parámetro complejo y n un número entero. Es inmediato comprobar que $h_{n,\lambda}(e^{ix}) \in \bar{\mathcal{E}}$ si n es distinto de cero. En consecuencia:

$$I(\lambda) = \| h_{n,\lambda} \|^2 \geq \mathcal{J}$$

y puesto que

$$h_{n0}(e^{ix}) = f_0(e^{ix})$$

I(o) será un mínimo de $I(\lambda)$ , y por lo tanto:

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0$$

Calculando esta derivada en el eje real y en el eje imaginario, obtenemos, respectivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f_o(e^{ix}) |^2 (e^{inx} + e^{-inx})\, d\mu(x) = 0 ,$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} | f_o(e^{ix}) |^2 (e^{inx} - e^{inx})\, d\mu(x) = 0 ,$$

de donde resulta:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} |f_o(e^{ix})|^2 \, d\mu(x) = 0 \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

y por otra parte ya habíamos visto que:

$$c_o = \mathcal{J} \, .$$

Es decir, $c_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ son los coeficientes de Fourier de la medida

$$| f_o(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x) \quad .$$

Pero es inmediato comprobar que la medida

$$\mathcal{J} \, dx$$

tiene esos mismos coeficientes de Fourier; por consiguiente, en virtud del teorema de unicidad para series de Fourier-Stieltjes, debe cumplirse:

$$| f_o(e^{ix}) |^2 \, d\mu(x) = \mathcal{J} \, dx \quad ,$$

o sea:

$$| f_o(e^{ix}) |^2 \, (g(x)dx + d\nu(x)) = \mathcal{J} \, dx \quad ,$$

lo cual implica que

$$| f_o(e^{ix}) |^2 \, g(x) = \mathcal{J} \quad ; \quad | f_o(e^{ix}) |^2 \, d\nu(x) = 0 \quad \text{p.p.}$$

Puesto que $\mu$ es no negativa, por hipótesis, deberá ser $g(x) \geq 0$. En un primer paso impondremos la hipótesis más restrictiva

$$g(x) \geq \varepsilon > 0$$

Entonces, si en la última igualdad tomamos logaritmos, obtenemos:

$$2 \ln |f_o(e^{ix})| + \ln g(x) = \ln \mathcal{I}$$

de donde:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_o(e^{ix})| \, dx = \tfrac{1}{2} \ln \mathcal{I} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) dx.$$

Veremos ahora que $\ln |f_o(z)|$ es armónica en $|x| < 1$, para lo cual hay que comprobar que $f_o(z)$ no se anula en esa región. En efecto: supongamos por el contrario que $f_o(z_1) = 0$, $|z_1| < 1$. Entonces $f_o(z) \in \bar{\mathcal{E}}$ implica que

$$\frac{f_o(z)}{b_1(z)} \, b_1(0) \in \bar{\mathcal{E}} ,$$

donde designamos con $b_1$ el factor de Blaschke correspondiente a $z_1$. Y puesto que $|b_1(e^{ix})| = 1$, $b_1(0) = |z_1|$, resulta:

$$\int_0^{2\pi} \frac{|f_o(e^{ix})|^2}{|b_1(e^{ix})|^2} |b_1(0)|^2 \, d\mu(x) = |z_1|^2 \int_0^{2\pi} |f_o(e^{ix})|^2 \, d\mu(x) < \mathcal{I}$$

lo cual contradice la hipótesis de minimalidad de $f_0$ . En consecuencia $f_0(z)$ no se anula en $|z| < 1$ y $\ln|f_0(z)|$ es armónica en esa región. Entonces, recordando que $f_0(0)=1$ , tenemos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f_0(e^{ix})| \, dx = \ln |f_0(0)| = 0 \quad ,$$

es decir:

$$0 = \tfrac{1}{2} \ln \mathcal{J} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) \, dx \quad ,$$

y de aquí:

$$\mathcal{J} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) \, dx \right\} \quad ,$$

que es la tesis.

Para completar la demostración del teorema, sólo nos resta liberarnos de la suposición adicional $g(x) \geq \varepsilon > 0$ . Supongamos entonces que $g(x)$ sólo cumple la condición

$$g(x) \geq 0 \quad ,$$

y definamos la sucesión

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad g(x) \geq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad g(x) \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

**Llamemos además:**

$$d\mu_n(x) = g_n(x)\, dx + d\varphi(x) \quad .$$

Puesto que para todo x es $g_n(x) \geq \frac{1}{n}$ , vale el teorema en este caso; teniendo además en cuenta que $g_n(x) \geq g(x)$ , resulta:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_o(e^{ix})|^2\, d\mu(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_o(e^{ix})|^2\, d\mu_n(x) =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g_n(x)\, dx \right\} \quad ,$$

y como la desigualdad vale para todo n, obtenemos:

$$\mathcal{J} \leq \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x)\, dx \right\} \quad .$$

Demostraremos ahora la desigualdad inversa. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, teniendo en cuenta que $\mu_n$ converge decreciente hacia $\mu$ , dada una función fija cualquiera $f \in \mathcal{E}$ , existe un $n_o = n_o(f)$ tal que para $n > n_o$ vale:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2\, d\mu_n(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2\, d\mu(x) < \varepsilon \quad ,$$

y de aquí deducimos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2\, d\mu > \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2\, d\mu_n - \varepsilon \geq$$

$$\geq \inf_{f \in \bar{\mathcal{E}}} \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2 \, d\mu_n - \mathcal{E} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g_n(x) \, dx \right\} - \mathcal{E} \geq$$

$$\geq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) \, dx \right\} - \mathcal{E} \quad .$$

Como la desigualdad vale para cada $f \in \bar{\mathcal{E}}$ y todo $\mathcal{E}$, resulta, toman- do ínfimo en el primer miembro:

$$J \geq \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln g(x) \, dx \right\} \quad .$$

De ésta y la desigualdad inversa anterior, resulta la tesis, c.q.d.

# APENDICE I

## MATRICES

1. Introducción:

Haremos un breve resumen de la teoría elemental para referencia y para fijar notaciones.

a) Definiciones

Las matrices son conjuntos de n x m números, en general complejos, con dos subíndices enteros, el primero de los cuales varía de 1 a n y define la fila del elemento, el segundo de 1 a m y define la columna .

Nos limitaremos a considerar matrices de n filas y n columnas (matrices cuadradas), de n filas y una columna (vectores columna) y de una fila y n columnas (vectores fila).

b) Notaciones

Matriz cuadrada: $A = \{a_{ik}\}$ $(i, k=1,..n)$ Vector columna: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Determinante de A: $|A|$ ó det A

Traza de A: $\mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Vector fila: $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

c) Matrices derivadas de una matriz dada $A = \{a_{ik}\}$

Conjugada: $\bar{A} = \{\overline{a_{ik}}\}$

Transpuesta: $A^t = \{a_{ki}\}$

Adjunta: $A^* = \bar{A}_t = \{\overline{a_{ki}}\}$

Inversa: $A^{-1} = \left\{\dfrac{A_{ik}}{|A|}\right\}$ , donde $A_{ik}$ es el menor complementario de $a_{ki}$

d) Matrices especiales

Matriz unidad: $E = \{e_{ik}\}$ , siendo $e_{ii} = 1$ , $e_{ik} = 0$ si $i \neq k$ .

Matriz simétrica: $A^t = A$ .

Matriz ortogonal: $A^t = A^{-1}$ .

Matriz hermitiana o autoadjunta: $A^* = A$ .

Matriz unitaria: $A^* = A^{-1}$

e) Operaciones

Si A y B son dos matrices del mismo orden n, se define

Suma $A + B = C$ con $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$

Producto: $A = B \cdot C$ con $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$

Esta definición vale también para el producto de dos matrices rectangulares tales que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda.

Producto por Números: $c\,A = \{c\,a_{ik}\}$

Producto escalar de dos vectores: $\langle f , g \rangle = g^* . f = \sum_{i=1}^{n} f_i \bar{g}_i$

Dos vectores f y g son ortogonales si $\langle f , g \rangle = 0$ .

Norma de un vector: $\|f\| = \langle f , f \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Son fáciles de verificar las siguientes propiedades:

1) $\langle f , g \rangle = \langle g , f \rangle$

2) $\langle a_1 f_1 + a_2 f_2 , g \rangle = a_1 \langle f_1 , g \rangle + a_2 \langle f_2 , g \rangle$

3) $\langle f , a_1 g_1 + a_2 g_2 \rangle = \bar{a}_1 \langle f , g_1 \rangle + \bar{a}_2 \langle f , g_2 \rangle$

4) $A(af + bg) = aAf + bAg$

5) $(aA + bB)\, f = aAf + bBf$

8) $\langle Af , g \rangle = \langle f , A^* g \rangle$

9) $(A + B)^* = A^* + B^*$

10) $(A\,B)^* = B^* A^*$

11) $(cA)^* = \bar{c}\, A^*$

12) $A^{**} = A$

13) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

6) $||cf|| = |c| \; ||f||$

7) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$

14) $A A^{-1} = A^{-1} A = E$

15) $\det(AB) = \det A \, . \det B$

Llamaremos espacio vectorial $E^n$ al conjunto de todos los vectores de n componentes.

Un conjunto de vectores $f_1, f_2, \ldots, f_s$ es <u>linealmente independiente</u>. Si $a_1f_1 + a_2f_2 + \ldots + a_sf_s = 0$ implica $a_1 = a_2 = \ldots = a_s = 0$ .

Una base de $E^n$ es un conjunto de vectores linealmente independientes tales que todo vector se puede expresar como combinación lineal de ellos. Toda base de $E^n$ consta de n vectores. Una base formada por vectores ortogonales y de norma uno se llama <u>base ortonormal</u>

2. <u>Autovalores y autovectores</u>.

Los autovalores de una matriz A son números tales que para algún vector $x \neq 0$ es $Ax = \lambda x$ ; se dice en tal caso que x es un autovector correspondiente al autovalor $\lambda$ . También se pueden caracterizar los autovalores como las raices del polinomio en $\lambda$ $\det(A - \lambda E)$ ; la multiplicidad de la raiz se llama multiplicidad del autovalor si una matriz tiene el autovalor cero, es decir, si para algún vector $h \neq 0$ es $Ah = 0$ , se dice que A es una matriz singular. Las matrices que no son singulares se llaman regulares.

<u>Algunas propiedades</u>

a) Los autovalores de una matriz autoadjunta son reales, porque si f es un autovector,

$$\lambda \langle f,f \rangle = \langle Af,f \rangle = \langle f,Af \rangle = \bar{\lambda} \langle f,f \rangle \quad \text{, de donde } \lambda = \bar{\lambda}$$

Los autovalores de una matriz unitaria V tienen módulo uno, porque si f es un autovector de V , $\langle f,f \rangle = \langle V^{-1}Vf,f \rangle = \langle Vf,Vf \rangle = \lambda\bar{\lambda} \langle f,f \rangle$ ,de donde $|\lambda|^2 = 1$

c) Los autovectores de una matriz hermitiana correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales, pues si $A f_1 = \lambda_1 f_1$ , $A f_2 = \lambda_2 f_2$ , entonces

$$\lambda_1 \langle f_1 , f_2 \rangle = \langle Af_1, f_2 \rangle = \langle f_1, Af_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle f_1, f_2 \rangle = \lambda_2 \langle f_1, f_2 \rangle$$

de donde $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle f_1, f_2 \rangle = 0$, y como $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ debe ser $\langle f_1, f_2 \rangle = 0$

d) Los autovectores de una matriz remitaria $V$ correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales, porque si $Vf_1 = \lambda_1 f_1$ , $V f_2 = \lambda_2 f_2$ , entonces

$\langle f_1 , f_2 \rangle = \langle Vf_1, Vf_2 \rangle = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle f_1, f_2 \rangle$ , de donde $(1 - \lambda_1 \bar{\lambda}_2) \langle f_1, f_2 \rangle$ ; pero si $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , entonces $1 - \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ luego debe ser $\langle f_1 , f_2 \rangle = 0$

e) Si dos autovectores $f$ y $g$ de una matriz $A$ corresponden a un mismo autovalor $\lambda$ , entonces $af + bg$ es también un autovector correspondiente al mismo autovalor cualesquiera que sean los numeros a y b. En efecto,

$$A (af + bg) = aAf + bAg = a\lambda f + b\lambda g = \lambda (a f + b g)$$

f) Si $\{e_k\}$ , $k = 1, 2, .., n$ , es una base ortonormal y $V$ es una matriz unitaria, entonces $e'_k = V e_k$ , $k = 1, 2, ..., n$ , también forman una base ortonormal. Observando que

$$\langle e'_k \; e'_j \rangle = \langle Ve_k , Vr_j \rangle = \langle V^{-1}Ve_k , e_j \rangle = \langle e_k , e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j \\ 0 & \text{si } k\neq j \end{cases}$$

resulta que los vectores $e'_k$ forman un sistema ortonormal de $n$ vectores y son, por lo tanto, una base ortonormal de $E^n$.

Recíprocamente, si $\{e_k\}$ y $\{e'_k\}$ son dos bases ortonormales, existe una matriz unitaria $V$ tal que $e'_k = V e_k$ .

En efecto, $e'_j$ se puede representar como combinación lineal de los $e_k$ : $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ ; luego, teniendo en cuenta que $e_k$ tiene su k-esima componente igual a uno y las demás nulas, es $e'_k = V e_k$ , donde $V = \{a_{ij}\}$

Para probar que $V$ es unitaria observemos que

$$\langle V e_k , V e_j \rangle = \langle e'_k , e'_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Esta propiedad caracteriza a las matrices unitarias, porque si $x = c_1 e_1 + \ldots + c_n e_n$, $y = d_1 e_1 + \ldots + d_n e_n$ son dos vectores arbitrarios,

$$\langle V x , V y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_k \bar{d}_j \langle V e_k , V e_j \rangle = \sum_k c_k \bar{d}_k = \langle x , y \rangle$$

de donde

$$\langle V^* V x , y \rangle = \langle V x , V y \rangle = \langle x , y \rangle \quad ;$$

Siendo $x$ e $y$ arbitrarios, esto implica que $V^* V = E$ .

g) Si A es una matriz hermitiana, existe una base ortonormal de $E^n$ formada por autovectores de A.

En efecto, las combinaciones lineales de los autovectores de A constituyen un subespacio $E^r$ de $E^n$. Si $e_j$ es un autovector de A, también lo es $c\, e_j$, cualquiera que sea el número c; luego podemos elegir todos los autovectores de norma uno. Aquellos autovectores que correspondan a autovalores distintos son ortogonales entre sí por (c). Los autovectores que correspondan a un autovalor múltiple (de multiplicidad S) constituyen un subespacio $E^s$ de $E^r$ (por e ). Bastará elegir cualquier base ortonormal en $E^s$ para tener una base ortonormal de $E^r$ constituída por autovectores de A. Falta probar que $E^r = E^n$. Supongamos lo contrario. Entonces habrá un vector $x$ de $E^n$ ortogonal a $E^r$, es decir, ortogonal a todos los autovectores de A. Pero $\langle A x , e_k \rangle = \langle x , A e_k \rangle = \overline{\lambda_k} \cdot \langle x, e_k \rangle = 0$ o sea que también Ax es ortogonal a $E^k$. Análogamente $A^p$ es ortogonal a $E^r$ para cualquier p. Como a lo sumo hay n - r vectores linealmente independientes ortogonales a $E^r$, existirá un p tal que los vectores $x$, $Ax, A^2x, \ldots, A^px$ son linealmente dependientes, o sea que

$$a_o x + a_1 Ax + a_2 A^2x + \ldots + a_p A^p x = 0 \qquad (1)$$

donde los a son números no todos nulos. Pero la ecuación (1) se puede escribir

$$a_p (A - \alpha_1)(A - \alpha_2) \ldots (A - \alpha_p) x = 0 \quad ,$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ son las raíces del polinomio

$$a_o + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_p t^p$$

como es fácil verificar.

Si j es el menor índice tal que

$$(A - \alpha_j)(A - \alpha_{j+1}) \ldots (A - \alpha_p) x = y \neq 0 \qquad (2)$$

será

$$(A - \alpha_{j-1}) y = 0 \quad , \quad \text{o sea} \quad A y = \alpha_{j-1} y$$

o sea que y es un autovector de A. Pero por (2), y es una combinación lineal de vectores ortogonales a $E^r$; luego tendría que ser ortogonal a todos los autovectores de A. Esta contradicción demuestra nuestra afirmación.

h) Toda matriz hermitiana A se puede diagonalizar por una transformación unitaria, es decir, existe una matriz unitaria $U$ tal que $U^{-1}AU=D$ y $D$ es una matriz diagonal.

Si en el espacio $E^n$ está dada una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$, un vector columna ( $x_1, x_2, \ldots, x_n$ )(lo escribimos horizontalmente por comodidad) representa al elemento $x = x_1e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_ne_n$ .

Sea $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ otra base de $E^n$ formada por autovectores de A. Ambas bases están vinculadas por la relación $e_k' = U e_k$

El vector $x$ se representa en la nueva base como $x = x_1'e_1' + \ldots + x_n'e_n'$

Pero

$$x_k' = \langle x , e_k' \rangle = \langle x , Ue_k \rangle = \langle U^{-1}x , e_k \rangle \qquad ; \qquad (3)$$

Llamamos $x'$ al vector columna de componentes $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, la fórmula (3) nos dice que $x' = U^{-1}x$ es el vector columna que representa, en la base $e_k'$ al mismo elemento que el ector columna $x$ en la base $e_k$ .

Entonces, si $Af = g$, donde $f$ y $g$ están referidos a la base original $e_k$, será $f = Uf'$ y $g = Ug'$, donde $f'$ y $g'$ son los mismos vectores referidos a la base $e_k'$ . Luego tenemos

$$A\,U f' = U g' \qquad \text{o sea} \qquad U^{-1} A\, U f' = g'$$

Entonces $U^{-1} A\, U$ es la matriz que transforma entre sí los mismos elementos de $E^n$ que A, pero referidos a la nueva base, Luego los elementos $e_k'$, que eran autovectores de A, también lo serán de $U^{-1} A\, U$ .

Como una matriz es diagonal si y solo si los elementos de la base son auto vectores de dicha matriz, se concluye que $U^{-1} A U = D$ es una matriz diagonal, como queríamos demostrar.

i) Para toda matriz A las matrices $A A^*$ y $A^* A$ son autoadjuntas y sus autovalores son no negativos.

La primera afirmación es obvia si se tiene en cuenta que(por 1, (10))

$$(A A^*)^* = A A^* \quad , \quad (A^* A)^* = A A^*$$

Para demostrar la segunda parte basta observar que, si $f$ es un autovector de $A^* A$ correspondiente al autovalor $\mu$ , es

$$\mu \langle f , f \rangle = \langle A^* A f , f \rangle = \langle A f , A f \rangle$$

y siendo $\langle f , f \rangle > 0$ , $\langle A f , A f \rangle \geq 0$ es $\mu \geq 0$
Análogamente se procede con $A . A^*$

j) Para que una matriz A sea regular es necesario y suficiente que se cumpla cualquiera de las tres condiciones siguientes:

1) Que $\det A \neq 0$
2) Que exista la matriz inversa de A, $A^{-1}$
3) Que exista $k > 0$ tal que $||Af|| > k||f||$ para todo $f$

1) Resulta del hecho de que $A x = 0$ es un sistema homogeneo de ecuaciones lineales que tiene solución no trivial si y solo si $\det A = 0$

2) Se obtiene de 1) y de la definición de matriz inversa.

3) Si la condición se cumple, la ecuación $A x = 0$ no tiene solución $x \neq 0$ ; si la condición no se cumple, habrá una sucesión $\{f_n\}$ de vectores de norma uno

tal que $||Af_n|| \to 0$ .

Como $\{f_n\}$ es una sucesión acotada y $E^n$ es un espacio completo, podemos extraer una subsucesión convergente $f_{n_i} \to f$ , y siendo $A\,g = h$ una transformación continua de $E_n$ en $E_n$ (como probaremos enseguida), de $||Af_{n_i}|| \to 0$ se deduce $A\,.f = 0$ .

k) Desigualdad de Schwartz

Para todo par de vectores $x$ , $y$ vale $|\langle x,y\rangle| \leq ||x||.||y||$ (4).

En efecto, si $t$ es cualquier número complejo,

$$||x + ty||^2 = ||x||^2 + t\langle x,y\rangle + \bar{t}\langle y,x\rangle + |t|^2\,||y||^2 > 0$$

tomando $t = r\dfrac{\langle y,x\rangle}{|\langle x,y\rangle|}$ con $r$ real, resulta

$$||x||^2 + 2\,r\,|\langle x,y\rangle| + r^2\,||y||^2 \geqslant 0 \quad .$$

Este es un trinomio de segundo grado en $r$ ; por ser no negativo, su discriminante debe ser no positivo, lo cual da (4)

3. Norma de una matriz

Para toda matriz $A$ vale $||A|| = \sup\limits_{||x||=1} ||Ax|| = \sup\limits_{x} \dfrac{||Ax||}{||x||} < \infty$ (1)

En efecto, para todo $x$ con $||x|| = 1$ es $||Ax||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^2 \leq$

$\leq \sum\limits_{i=1}^{n} \left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right|^2 < \infty$ (2)

El número $||A||$ definido por (1) se llama norma de la matriz $A$ , y esta definición es equivalente a la siguiente

$$||A|| = \sup_{||f||=||g||=1} |\langle Af,g\rangle| = \sup_{f,g} \frac{|\langle Af,g\rangle|}{||f||.||g||} \qquad (3)$$

En efecto, si $||f|| = ||g|| = 1$ , $|\langle Af,g\rangle| \leqslant ||Af||.||g|| = ||Af||$ , de donde

$$\sup_{||f||=||g||=1} |\langle Af,g\rangle| \leqslant \sup_{||f||=1} ||Af|| \quad .$$

Por otra parte

$$\sup_{||f||=||g||=1} |\langle Af;g\rangle| \geq \sup_{||f||=1} \langle Af, \frac{Af}{||Af||}\rangle = \sup_{||f||=1} \frac{\langle Af,Af\rangle}{||Af||} = \sup_{||f||=1} ||Af||$$

y estas dos desigualdades prueban nuestra afirmación.

Es fácil probar ahora que toda matriz representa una transformación continua de $E^n$ en $E_n$, es decir que, si $f_n \to f$ entonces $Af_n \to Af$ .

En efecto

$$||Af_n - Af|| = ||A(f_n - f)|| \leq ||A|| \; ||f_n - f|| \quad ,$$

y como $||f_n - f|| \to 0$ por hipótesis, resulta $||Af_n - Af|| \to 0$ , como queríamos demostrar.

Si A es una matriz hermitiana, las deficiciones de norma dadas son equivalentes a las siguientes;

$$||A|| = \sup_{f} \frac{|\langle Af , f\rangle|}{||f||^2} = \sup_{||f||=1} |\langle Af . f\rangle| \quad ; \qquad (4)$$

$$||A|| = \sup_{i} |\lambda_i| = |\lambda\, \max|$$

donde $\lambda_i$ son los autovalores de A

Llamando $||A||_1$, $||A||_3$, $||A||_4$ y $||A||_5$ a las normas definidas por (1), (3), (4), (5), probaremos que

$$||A||_3 \geq ||A||_4 \geq ||A||_5 \geq ||A||_1 = ||A||_2 \quad ,$$

on lo cual quedará probada la equivalencia.

La primera desigualdad es inmediata porque el supremo en (3) se toma sobre todos los pares de vectores, mientras que en (4) sólo sobre pares de vectores iguales

Para probar la segunda desigualdad basta observar que si $f$ es un autovector correspondiente al autovalor de mayor módulo $\lambda$ máx., se tiene

$$\frac{|\langle Af , f\rangle|}{||f||^2} = |\lambda \max| \frac{\langle f , f\rangle}{||f||^2} = |\lambda \max| ,$$

y por lo tanto

$$\sup_f \frac{|\langle Af , f\rangle|}{||f||^2} \geqslant |\lambda \max|$$

La última desigualdad se demuestra teniendo en cuenta que, por la propiedad g) del Nº 2 podemos escribir cualquier vector $f$ en la forma $f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ los $e_i$ son autovectores ortonormales de A; luego, para todo $f$, es

$$\frac{||Af||^2}{||f||^2} = \frac{\langle Af,Af\rangle}{||f||^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 |a_i|^2}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} \leqslant \frac{|\lambda \max|^2 \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2} = |\lambda \max|^2$$

o sea $\frac{||Af||}{||f||} \leqslant |\lambda \max|$ , de donde $\sup_f \frac{||Af||}{||f||} \leqslant |\lambda \max|$

Consecuencias

a) De la demostración resulta que para cualquier matriz es $||A|| \leqslant |\lambda \max|$, pero no es cierto en general que $||A|| = |\lambda \max|$

b) Toda matriz unitaria $V$ tiene norma 1, porque

$||Vf||^2 = \langle Vf , Vf \rangle = \langle f , V^{-1} V f \rangle = ||f||,$

de donde $\dfrac{||Vf||}{||f||} = 1$ para todo f .

Utilizando esta propiedad y recordando que todos los autovalores de $V$ son de norma uno, se puede demostrar la equivalencia de las cuatro definiciones de norma también para matrices unitarias.

c) La norma de una matriz $A$ es igual a la norma de la matriz adjunta: $||A|| = ||A^*||$ .

Para probarlo basta observar que

$\langle A f , g \rangle = \langle A g , f \rangle$ y aplicar la definición (3).

d) Para cualquier matriz A es $||A^*A|| = ||A||^2$; en efecto, como $A^*A$ es hermitiana, podemos usar para ella la definición (4) de norma. Entonces

$$||A^*A|| = \sup_{||f||=1} |\langle A^*Af , f \rangle| = \sup_{||f||=1} \langle Af,Af \rangle = \sup_{||f||=1} ||Af||^2 = ||A||^2$$

e) Para cualquier matriz A vale $||A|| = |\mu \max|^{1/2}$ , donde $\mu$ max. es el máximo autovalor de $A^*A$ .

Por ser $A^*A$ hermitiana es $||A^*A|| = \mu$ max., y por d),

$$||A|| = ||A^*A||^{1/2} = |\mu \max|^{1/2}$$

Los resultados d) y e) son trivialmente ciertos para matrices unitarias:

f) <u>Norma de un producto de dos matrices</u>

Para matrices A y B cualesquiera vale $||AB|| \leqslant ||A||.||B||$

En efecto,

$$||AB|| = \sup_{f,g} \frac{|\langle ABf,g\rangle|}{||f||.||g||} = \sup_{f,g} \frac{|\langle Bf,A^*g\rangle|}{||f||.||g||} \leqslant \sup_{f,g} \frac{||Bf||}{||f||} \frac{||A^*g||}{||g||} =$$

$$= ||B||.||A^*|| = ||B||.||A|| \quad .$$

g) Para matrices A y B cualesquiera es $||A+B|| \leqslant ||A|| + ||B||$ .

En efecto, por 7 del nº 1, es:

$$||(A + B) f|| = ||Af + Bf|| \leqslant ||Af|| + ||Bf|| \quad ;$$

luego

$$\sup_{||f||=1} ||(A + B) f|| \leqslant \sup_{||f||=1} ||Af|| + \sup_{||f||=1} ||Bf|| \quad .$$

h) Si definimos $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{K!}$ , $(A^0=E)$ vale $||e^A|| \leqslant e^{||A||}$

Aplicando f) y g), $||e^A|| = ||\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{K!}|| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = e^{||A||}$

i) La norma de una matriz mayora el valor absoluto de cualquiera de sus componentes: $|a_{ik}| \leqslant ||A||$ $(i,k = 1,2,...n)$. Si $e_k$ es un vector con la K esima compo nente 1 y lasdemas nulas, entonces

$$A\, e_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}) \qquad ; \text{ luego}$$

$$\|A\, e_k\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant |a_{ik}| \quad , \text{ cualquiera sea } i; \text{ entonces}$$

$$\|A\| = \sup_{\|f\|=1} \|Af\| \geqslant \|A\, e_k\| \geqslant |a_{ik}| \quad ,$$

como queríamos demostrar.

## 4. Transformación de Cayley

Toda matriz A se puede escribir en la forma

$$A = R + Ii = \frac{A + A^*}{2} + i\,\frac{A - A^*}{2i} \quad ,$$

donde $R = \dfrac{A+A^*}{2}$ e $I = \dfrac{A-A^*}{2i}$ son matrices hermitianas, como es fácil verificar. R se llama parte real de A. e I parte imaginaria.

Se dice que una matriz A es positiva si $\langle Ah , h\rangle$ es real y positivo para todo $h \neq 0$ . Si A es una matriz positiva y V es cualquier matriz no singular, entonces $V^*A\,V$ es positiva. En efecto,

$$\langle V^*A\,V\,h , h\rangle = \langle A\,V\,h , V\,h\rangle = \langle A\,g , g\rangle$$

es positivo, ya que $g = V\,h \neq 0$ por ser V regular.

Se dice que una matriz hermitiana B es mayor que otra matriz hermitiana A si B - A es una matriz positiva.

Si Z es una variable compleja, la fórmula

$$w = i\,\frac{1 + z}{1 - z}$$

define una transformación del círculo unidad en el semiplano superior de tal manera que si Z recorre la circunferencia $|z|=1$, W recorre el eje real, y si $|z| < 1$, W tiene parte imaginaria positiva.

La fórmula análoga para matrices (u operadores en un espacio de Hilbert)

$$A = i\,(E + U)\,(E - U)^{-1}$$

se llama transformación de Cayley y tiene propiedades semejantes a la anterior: Si U es una matriz unitaria sin autovalores iguales a uno, entonces A es hermitiana, y si $||U|| < 1$, entonces A tiene parte imaginaria positiva.

Demostración

$$\frac{A - A^*}{2i} = \frac{1}{2}\left\{ (E + U)(E - U)^{-1} + (E-U)^{-1}(E+U) \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(E-U^*)^{-1}\left\{ (E-U^*)(E+U) + (E+U^*)(E-U) \right\}(E-U)^{-1} = V^*\,(E-UU^*)\,V \quad , \qquad (1)$$

donde $V = (E-U)^{-1}$ existe y es regular porque V no tiene autovalor 1. Si U es unitaria es $UU^* = E$, y sustituyendo en (1), resulta $\frac{A - A^*}{2i} = 0$, lo que prueba la primera parte del teorema.

Si $||U|| < 1$, entonces $||UU^*|| \leq ||U||.||U^*|| = ||U||^2 < 1$; luego

$\langle UU^*h \, , \, h \rangle < \langle h \, , \, h \rangle = \langle E\,h \, , \, h \rangle$ para todo h, de donde

$\langle (E - UU^*)\,h \, , \, h \rangle > 0$ .

Sólo falta aplicar la propiedad demostrada más arriba de las matrices positivas para obtener la segunda parte de la tesis.

Análogamente se puede demostrar que la transformación inversa

$$U = (A + iE)^{-1} (A - iE)$$

transforma matrices hermitianas en matrices unitarias sin autovalor 1, y matrices de parte imaginaria positiva en matrices de norma menor que uno.

5. Formula de Jacobi

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d x_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{1}$$

donde los $a_{ij}$ son funciones de t.

Con la notación matricial, (1) se escribe

$$\frac{dx}{dt} = A x \qquad \text{donde} \qquad A = \{a_{ij}\} \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

Se llama matriz integral normalizada de (1) a una matriz x(t) tal que cada una de sus columnas es solución del sistema y $X(0) = E$ .

Los elementos de la matriz (t) satisfac a las ecuaciones

$$\frac{d x_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} \qquad (i,j = 1,\dots,n) \tag{2}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d X}{d t} = A X \ . \tag{3}$$

Recordando que l derivada de un determinante es la suma de los determinantes que se obtienen derivando sucesivamente las filas, y teniendo en cuenta (2), resulta

$$\frac{d\,|X|}{dt} = \sum_{i=1}^{h} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dot{x}_{i1} & \dot{x}_{i2} & & \dot{x}_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{h} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \end{vmatrix}$$

En el último miembro figuran los determinantes obtenidos de $|X|$ sustituyendo la fila $i$ por la $k$, los cuales son nulos si $i \neq k$, e iguales $|X|$ si $i = k$; luego

$$\frac{d\,|X|}{dt} = \sum_{i=1}^{h} a_{ii}\,|X| = \operatorname{tr} A \,.\, |X| \tag{4}$$

La (4) es una ecuación diferencial ordinaria que, con la condición inicial $|X(0)| = |E| = 1$, tiene como solución

$$|X| = e^{\int_0^t \operatorname{tr} A \, dt} \tag{5}$$

que es la fórmula de Jacobi.

En particular, si $A$ es constante, la (5) se reduce a

$$|X| = e^{\operatorname{tr} A . t} \tag{6}$$

Por otra parte, si $A$ es constante, la solución de (3) es

$$X = e^{At} \tag{7}$$

como se puede comprobar derivando la serie $e^{At} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$

De (6) y (7), tomando $t = 1$, resulta

$$\det e^{A} = e^{\operatorname{tr} a} ,$$

válida para toda matriz constante $A$.

6) <u>Descomposición polar de matrices.</u>

Como es sabido, todo número complejo $z$ se puede representar como producto de un número real positivo por un número de módulo uno: $z = r\,u = r\,e^{i}$ .
Las matrices tienen una propiedad análoga:

Toda matriz $A$ puede ser representada en la forma

$$A = H\,U \quad (1) \qquad ó \qquad A = U_1\,H_1 \quad (2)$$

donde $H_1$ y $H_2$ son matrices hermitianas positivas y $U_1$ , $U_2$ son matrices unitarias.

Demostración: Suponiendo probado el teorema podríamos escribir

$$A = H\,U \quad , \quad A^* = U^*\,H \quad , \text{ de donde}$$

$$A\,A^* = H\,U\,U^*\,H = H^2$$

Esto quiere decir que si existe la matriz $H$ con las propiedades pedidas, deber ser

$$B = A\,A^* = H^2 \qquad (3)$$

En tal caso sería $U = H^{-1}\,A$ , $U^* = A^*\,H^{-1}$ , de donde

$$U\,U^* = H^{-1}\,A\,A^*\,H^{-1} = H^{-1}\,H^2\,H^{-1} = E \quad ,$$

o sea que $V$ resulta unitaria.

Entonces sólo falta probar que la ecuación (3) tiene una solución $H$ hermitiana.

Por ser la matriz $B$ hermitiana, se la puede diagonalizar por una transformación unitaria $V$ (ver 2,h) :

$$V_{-1}\,B\,V = D \quad , \text{ de donde } \quad B = V\,D\,V^{-1}$$

Además, por ser $B$ no negativa, tambien lo es $D$ (ver 4); luego los elementos diagonales de $D$ son no negativos: $d_{ii} \geq 0$ . Definamos una matriz $M = \{m_{ij}\}$ por las condiciones $m_{ii} = +\sqrt{d_{ii}}$ , $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$ . Se tiene, entonces, evidentemente, $M^2 = D$ .

Poniendo ahora $H = V M V^{-1}$, se comprueba directamente que $H$ es hermitiana y que

$$H^2 = V M V^{-1} V M V^{-1} = V M^2 V^{-1} = V D V^{-1} = B = A A^* ,$$

Como queríamos demostrar.

La fórmula (2) se prueba aplicando la (1) a la matriz $A^*$ :

$$A^* = H_1 V_1 \quad , \text{ de donde } \quad A = V_1^* H_1 = U_1 H_1$$

7. <u>Integrales multiplicativas de Riemann-Stieltjes</u>

<u>Definición</u>:

Supongamos dada en el intervalo $[a, b]$ una función escalar $f(x)$ y una función matricial $H(t)$. Tomando una partición de $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} \quad t_n = b \quad , y \quad t_k \leq \zeta_k \leq t_{k+1} \quad (k=0,1,\dots,n) \qquad (1)$$

Llamaremos producto integral a la matriz

$$\widehat{\prod_{k=1}^{n}} e^{f(\zeta_k)\Delta H(t_k)} = e^{f(\zeta_1)\Delta H(t_1)} \cdot e^{f(\zeta_2)\Delta H(t_2)} \dots e^{f(\zeta_n)\Delta H(t_n)} \qquad (2)$$

$$(\Delta H(t_k) = H(t_k) - H(t_{k-1}))$$

Si cuando máx. $\Delta t_k \to 0$ el producto integral tiende a un límite que no depende de la forma de subdivisión del intervalo por los puntos $t_k$ ni de los puntos intermedios $\zeta_k$, el límite se denomina integral multiplicativa de Stieltjes de la función $f(t)$ con respecto al peso $H(t)$, y se designa con el símbolo $\widehat{\int_a^b} e^{f(t)\, dH(t)}$

A los efectos que nos interesan, nos basta considerar el caso en que $f(t)$

es integrable Riemann y la matriz H (t) satisface la condición

$$||H(t') - H(t'')|| \leqslant |t' - t''| \qquad (t', t'' \in [a,b]) \qquad (3)$$

<u>Existencia</u>

Probaremos que con estas restricciones, la integral existe

Consideremos para ello una subpartición de la partición (1)

$$a = t_0 = t_1^{(0)} < t_1^{(1)} < \ldots < t_1^{(p_1)} = t_1 = t_2^{(0)} < t_2^{(1)} < \ldots < t_2^{(p_2)} = t_2 = t_3^{(0)} <$$

$$< \ldots < t_{n-1}^{(p_{n-1})} = t_{n-1} = t_n^{(0)} < t_n^{(1)} < \ldots < t_n^{(p_n)} = t_n = b \ , \qquad (4)$$

$$t_k^{(r)} \leqslant \zeta_k^{(r+1)} \leqslant t_k^{(r+1)}$$

y designemos con $\Pi'$ y $\Pi''$ los productos integrales correspondientes a las particiones (1) y (4). Es evidente que bastará probar que $||\Pi - \Pi'|| \to 0$ si $\max \Delta t_k \to 0$. Formemos las particiones que coinciden con la (4) en el segmento $[a, t_s]$ y con la (1) en el segmento $[t_s, b]$. Si $\Pi_s$ (s=0..n) son los productos integrales correspondientes a estas particiones, entonces $\Pi_0 = \Pi, \Pi_n = \Pi'$ y $\Pi - \Pi' = \sum_{s=1}^{n} (\Pi_{s-1} - \Pi_s)$

Como los productos integrales $\Pi_{s-1}$ y $\Pi_s$ sólo difieren en el segmento $[t_{s-1}, t_s]$ teniendo en cuenta (3) y la (8) del nº 5, resulta

$$||\Pi_{s-1} - \Pi_s|| \leqslant e^{m\ell} || e^{f(\zeta_s)\Delta H(t_s)} - e^{f(\zeta_s^{(1)})\Delta H(t_s^{(1)})} e^{f(\zeta_s^{(2)})\Delta H(t_s^{(2)})} \ldots e^{f(\zeta_s^{(p)})\Delta H(t_s^{(p)})} || = e^{m\ell} || e^{f(\zeta_s)\left(\Delta H(t_s^{(1)}) + \Delta H(t_s^{(2)}) + \ldots + \Delta H(t_s^{(p_s)})\right)} -$$

$$- e^{f(\zeta_s^{(1)})\Delta H(t_s^{(1)})} e^{f(\zeta_s^{(2)})\Delta H(t_s^{(2)})} \ldots e^{f(\zeta_s^{(p_s)})\Delta H(t_s^{(p_s)})} || \ , \qquad (5)$$

donde $M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$ , $\ell = b - a$

Pero si $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ son matrices cualesquiera, entonces

$$||e^{A_1+A_2+\ldots+A_k} - e^{B_1} e^{B_2} \ldots e^{B_k}|| \leqslant ||A_1-B_1||+||A_2-B_2||+\ldots+||A_k-B_k|| +$$

$$+ \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} (||A_1||+||A_2||+\ldots+||A_k||)^p + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} (||B_1||+||B_2||+\ldots+||B_k||)^p \qquad (6)$$

Aplicando la acotación (6) a la desigualdad (5), obtenemos:

$$||\Pi_{s-1}-\Pi_s|| \leqslant e^{M\ell} \left(w_s \Delta t_s + 2M^2 e^{M\ell} (\Delta t_s)^2\right) ,$$

$$||\Pi-\Pi'|| \leqslant \sum_{s=1}^{n} ||\Pi_{s-1}-\Pi_s|| \leqslant e^{M\ell} \left( \sum_{s=1}^{n} w_s \Delta t_s + 2 M^2 \ell e^{M} \max_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta t_k \right)$$

donde $w_s$ es la oscilación de la función en el intervalo $[t_{s-1}, t_s]$.
Como la función $f(t)$ es integrable Riemann, cuando máx $\Delta t_k \rightarrow 0$ la suma $\sum_{s=1}^{n} w_s' \Delta t_s \rightarrow 0$ y, por lo tanto $||\Pi-\Pi'|| \rightarrow 0$, como queríamos demostrar.

Algunas propiedades

i) Resulta inmediatamente de la definición que

$$\int_a^{b} e^{f(t)dH(t)} = \int_a^{c} e^{f(t)dH(t)} \cdot \int_c^{b} e^{f(t)dH(t)} \qquad (7)$$

$$(a < c < b)$$

b) De la fórmula $\det e^A = e^{\mathrm{tr}A}$ se deduce

$$\det \int_a^{b} e^{f(t)dH(t)} = e^{\int_a^b f(t)dh(t)} \qquad (h(t) = \mathrm{tr}H(t)) \qquad (8)$$

Por lo tanto la integral multiplicativa es una matriz no singular.

c) Vale la siguiente relación:

$$\int_a^{b} e^{f(t)\, dH(t)} = E + \int_a^b f(t)\, dH(t) + R \quad ,$$

$$||R|| \leq \left( \int_a^b |f(t)|\, dt \right)^2 e^{\int_a^b |f(t)|dt} \tag{9}$$

En efecto, el producto integral (2) se puede desarrollar en serie

$$\prod_{k=1}^{n} e^{f(\zeta_k)\Delta H(t_k)} = E + \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta H(t_k) \quad \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=s}$$

$$\frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\,\nu_n!} \left( f(\zeta_1)\Delta H(t_1) \right)^{\nu_1} \left( f(\zeta_2)\Delta H(t_2) \right)^{\nu_2} \ldots \left( f(\zeta_n)\Delta H(t_n) \right)^{\nu_n};$$

pero

$$|| \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_n=s} \frac{1}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\,\nu_n!} \left( f(\zeta_1)\Delta H(t_1) \right)^{\nu_1} \left( f(\zeta_2)\Delta H(t_2) \right)^{\nu_2} \ldots$$

$$\ldots \left( f(\zeta_n)\Delta H(t_n) \right)^{\nu_n} || \leq \sum_{s=2} \frac{1}{s!} \left( \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\ ||\Delta H(t_k)|| \right)^s \leq$$

$$\leq \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s!} \left( \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta t_k \right)^s \leq \left( \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta t_k \right)^2 e^{\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta t_k}$$

y pasando al límete para máx. $\Delta t_k \to 0$ , obtenemos (9)

Teorema de Helly

La siguiente proposición, análoga alteorema clásico de Helly es válida para integrales multiplicativas: si la sucesión $\{f_n(t)\}$ de funciones integrables Riemann tiende a una función integrable Liemann $f(t)$, y la sucesión de funciones matriciales $\{H_n(t)\}$, que satisfacen la condición $\| H_n(t) \| \leq \Delta t$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ tiende a la función matricial $H(t)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b\curvearrowright} e^{f_n(t)\, dH_n(t)} = \int_a^{b\curvearrowright} e^{f(t)\, dH(t)}$$

Demostración: Dividamos el intervale $(a, b)$ en partes iguales por los puntos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_p = b$$

y definamos

$$F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k\curvearrowright} e^{f(t)\, dH(t)} \quad , \quad F_k^{(n)} = \int_{x_{k-1}}^{x_k\curvearrowright} e^{f_n(t)\, dH_n(t)} \qquad (k=1,2,\ldots p)$$

Entonces

$$\int_a^{b\curvearrowright} e^{f(t)\, dH(t)} - \int_a^{b\curvearrowright} e^{f_n(t)\, dH_n(t)} = \prod_{k=1}^{p\curvearrowright} F_k - \prod_{k=1}^{p\curvearrowright} F_k^{(n)} =$$

$$= (F_1 - F_1^{(n)})\, F_2^{(n)}\, F_3^{(n)} \ldots F_p^{(n)} + F_1\,(F_2 - F_2^{(n)})\, F_3^{(n)} \ldots F_p^{(n)} + \ldots + F_1 F_2 \ldots$$

$$\ldots F_{p-1}\,(F_p - F_p^{(n)})$$

Existe una constante M tal que

$$\left\| \int_{a'}^{b'} e^{f(t)}\, dH(t) \right\| \leqslant e^{\int_{a'}^{b'} |f(t)|dt} < M \qquad y$$

$$\left\| \int_{a'}^{b'} e^{f_n(t)}\, dH_n(t) \right\| \leqslant e^{\int_{a'}^{b'} |f_n(t)|\, dt} < M$$

$$(a \leqslant a' \leqslant b' \leqslant b)$$

En virtud de (9)

$$\left\| \int_a^b e^{f(t)}\, dH(t) - \int_a^b e^{f_n(t)}\, dH_n(t) \right\| \leqslant M^2 \sum_{k=1}^{p} \| F_k - F_k^{(n)} \| \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \sum_{k=1}^{p} \left\| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dH(t) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\, dH_n(t) \right\| +$$

$$+ M^2 \sum_{k=1}^{p} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\, dt \right)^2 e^{\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|\, dt} +$$

$$+ M^2 \sum_{k=1} \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f_n(t)|\, dt \right)^2 e^{\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f_n(t)|\, dt}$$

Teniendo en cuenta que si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ son números positivos es

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_p^2 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant p} a_k . (a_1 + a_2 + \ldots + a_p) \quad ,$$

los dos últimos sumandos se pueden hacer arbitrariamente pequeños aumentando el número p.

Completaremos la demostración probando que la primera sumatoria tiende a cero para p fijo y $n \to \infty$.

En efecto, por 1) del nº 3, la condición $\| H_n(t) \| < \Delta t$ implica $|\Delta h_n^{ij}(t)| < \Delta t$ donde $h_n^{ij}(t)$ con las componentes de $H_n(t)$. Entonces $h_n^{ij}(t)$ son funciones de variación acotada uniformemente en n, y tienden a $h^{ij}(t)$.

Luego podemos aplicar el teorema de Helly para funciones y obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dh^{ij}(t) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\, dh_n^{ij}(t) \right| = 0 \quad \begin{array}{l}(i,j=1,2,\dots,n)\\(k=1,2,\dots,p)\end{array}$$

Basta aplicar la fórmula $\|A\| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right|^2$ (ver (2') nº 3) para llegar a que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dH(t) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_n(t)\, dH_n(t) \right\| = 0 \quad (k=1,2,\dots,p)$$

Como queríamos demostrar.

## APENDICE 2

## TEOREMA DE RIESZ - HERGLOTZ PARA OPERADORES

Nos proponemos generalizar para matrices, o más en general, para operadores sobre un espacio de Hilbert, el siguiente

Teorema 1 (De Riesz - Herglotz para funciones): Para que una función $f(z)$, holomorfa en $|z| < 1$, tenga parte real no negativa en $|z| < 1$, es necesario y suficiente que admita la representación

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\, g(\varphi) + a\, i \quad , \tag{1}$$

donde $g(\varphi)$ es una función no decreciente y $a$ es un número real.

Necesitamos previamente ciertos conceptos y teoremas de la teoría del espacio de Hilbert que pasamos a exponer.

Una funcional lineal $g$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un operador con dominio en dicho espacio y de valores complejos, con la siguiente propiedad: si $u_1, u_2 \in \mathcal{H}$ y $a_1, a_2$ son números complejos, entonces:

$$g(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1\, g(u_1) + a_2\, g(u_2) \tag{2}$$

Se dice que una funcional lineal es continua o acotada si existe y es finito el

$$\sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ ||u||=1}} |g(u)| = \sup_{u \in \mathcal{H}} \frac{|g(u)|}{||u||} = ||g|| \quad ,$$

en cuyo caso $||g||$ se llama la norm de la funcional $g$ (cfr. Achieser y Glassman).

Teorema 2 (de representación de funcionales lineales continuas, de F.Riesz). Dada cualquier funcional lineal continua $g$ existe un único elemento $v$ del espacio

$\mathcal{H}$ tal que $g(u) = \langle u,v \rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}$, siendo $\|g\| = \|v\|$.

Demostración: Sea K el núcleo de la funcional g, es decir, el conjunto de los elementos $k \in \mathcal{H}$ tales que $g(k) = 0$. Por la linealidad de g es K un subespacio, y por la continuidad de g, K es cerrado, porque si $\{k_n\} \in K$ y $\lim_{n\to\infty} k_n = k$ es $g(k) = \lim_{n\to\infty} g(k_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

Si $K = \mathcal{H}$, la funcional g es idénticamente nula. y el vector $v=0$ satisface a la tesis del teorema.

Si $K \neq \mathcal{H}$, entonces K es un subespacio propie cerrado y por lo tanto, existe un vector $v_o$ que podemos tomar de norma uno, ortogonal a K. Todo otro elemento de $\mathcal{H}$ ortogonal a K es proporcional a $v_o$, porque si suponemos que $v_o$ y $v_1$ son ortogonales a K, entonces es $g(v_o) = a$, $g(v_1) = b$. Por la linealidad de g es $g(bv_1 - av_o) = ba - ab = 0$, o sea que $bv_o - av_1 \in K$. Pero como $v_o$ y $v_1$ son ortogonales a K, debe ser $bv_o - av_1 \neq 0$, o sea $v_1 = \frac{b}{a} v_o$

Por lo tanto K es el hiperplano complementario ortogonal al vector $v_o$ y en consecuencia, todo vector de $\mathcal{H}$ se puede descomponer de la siguiente manera:

$$h = \langle h, v_o \rangle v_o + h' \quad , \quad \text{con} \quad h' \in K \quad .$$

Luego

$$g(h) = \langle h,v_o \rangle g \langle v_o \rangle + g \langle h' \rangle = \langle h,v_o \rangle g \langle v_o \rangle = \langle h,v \rangle$$

donde $v = \overline{g(v_o)}\, v_o$ es el vector que verifica la tesis.

La unicidad de v es inmediata porque si fuese $g(h) = \langle h,v' \rangle$ para todo $h \in \mathcal{H}$ resultaría $\langle h,v \rangle = \langle h,v' \rangle$, de donde $\langle h,v-v' \rangle = 0$. Tomando, en particular $h=v-v'$ obtenemos $\|v-v'\| = 0$ o sea $v = v'$

Las dos desigualdades siguientes prueban la última afirmación del teorema:

$$||g|| = \sup_{h\in\mathcal{H}} \frac{|g(h)|}{||h||} \geq \frac{|g(v)|}{||v||} = \frac{\langle v,v\rangle}{||v||} = ||v|| \quad ,$$

$$||g|| = \sup_{h\in\mathcal{H}} \frac{|g(h)|}{||h||} = \sup_{h\in\mathcal{H}} \frac{|\langle h,v\rangle|}{||h||} \leq \sup_{h\in\mathcal{H}} \frac{||h||.||v||}{||h||} = ||v|| \quad .$$

Una funcional bilineal h es un operador con dominio de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ y de valores complejos, es decir que a cada par de vectores $u,v \in \mathcal{H}$ le hace corresponder un número complejo $h(u,v)$, de tal manera que se satisfacen las siguientes propiedades:

$$h(a_1u_1 + a_2u_2 , v) = a_1 h(u_1,v) + a_2 h(u_2,v) \tag{3}$$

$$h(u , a_1v_1 + a_2v_2) = \overline{a_1} h(u , v_1) + \overline{a_2} h(u,v_2) \tag{4}$$

se dice que una funcional bilineal es continua o acotada si

$$\sup_{\substack{u,v\in\mathcal{H}\\ ||u||=||v||=1}} |h(u , v)| = \sup_{u,v\in\mathcal{H}} \frac{|h(u , v)|}{||u||.||v||} = ||h|| < \infty \quad ;$$

en tal caso $||h||$ se denomina la norma de h.

Teorema 3. Si una funcional bilineal satisface a la cordición

$$|h(u,u)| \leq C ||u||^2 \tag{5}$$

entonces h es una funcional bilineal continua con norma $||h|| \leq 2C$

Demostración: Utilizando (3) y (4) se verifica de manera inmediata que

$$h(u\ ,\ v) = \frac{1}{4}\left\{ h(u+v\ ,\ u+v) - h(u-v\ ,\ u-v) + ih(u+iv\ ,\ u+iv) - \right.$$

$$\left. - ih(u-iv\ ,\ u-iv)\right\}\ ,$$

y por (5)

$$|h(u\ ,\ v)| \leqslant \frac{C}{4}\left\{||u+v||^2 + ||u-v||^2 + ||u+iv||^2 + ||u-iv||^2\right\} = C(||u||^2 +$$

$$+ ||v||^2)$$

Si $||u||=||v||=1$ resulta $|h(u\ ,\ v)| \leqslant 2\,C$

y por lo tanto

$$||h|| = \sup_{\substack{u,v\in\mathcal{H} \\ ||u||=||v||=1}} |h(u\ ,\ v)| \leqslant 2\,C$$

como queríamos demostrar.

<u>Teorema 4.</u> (De representación de fun ionales bilineales continuas). Dada cualquier funcional bilineal continua g existe un único operador lineal continuo A tal que

$$g(u\ ,\ v) = \langle Au\ ,\ v\rangle \quad , \tag{7}$$

Siendo $||A|| = ||g||$

<u>Demostración</u>: La fórmula $\overline{g(u\ ,\ a_1v_1 + a_2v_2)} = a_1\,\overline{g(u\ ,\ v_1)} + a_2\,\overline{g(u\ ,\ v_2)}$ prueba que, para u fijo, $\overline{g(u\ ,\ v)}$ es una funcional lineal en v que indicaremos $g_u(v)$

Por otra parte

$$||g|| = \sup_{x,v\in\mathcal{H}} \frac{|g(x\ ,\ v)|}{||x||.||v||} \geqslant \sup_{v\in\mathcal{H}} \frac{|g(u\ ,\ v)|}{||u||.||v||}\ ,$$

de donde

$$||g_u|| = \sup_{v\in\mathcal{H}} \frac{|\overline{g(u\ ,\ v)}|}{||v||} \leqslant ||g||.||u|| \quad ,$$

o sea que $g_u(v)$ es continua con norma $||g_u|| \leqslant ||g||.||u||$ .

Entonces por el teorema 2, a cada funcional $g_u$ , o lo que es lo mismo, <u>a cada</u> u , le corresponde un único elemento z tal que

$$\overline{g(\ u\ ,\ v\ )} = \langle v\ ,\ z\rangle \qquad\qquad \text{o sea } g(u,v) = \langle z,v\rangle \text{ para todo } v\in\mathcal{H}$$

Como el elemento z está univocamente determinado por u , podemos escribir z=Au y, sustituyendo en la ecuación anterior, resulta:

$$g(u\ ,\ v) = \langle Au\ ,\ v\rangle \quad .$$

Traduciendo en términos de esta representación la fórmula (3) tenemos

$$\langle A\ (a_1u_1 + a_2u_2) - a_1\, A\, u_1 - a_2\, A\, u_2\ ,\ v\ \rangle = 0$$

y como esta igualdad vale para todo $v\in\mathcal{H}$ es:

$$A\ (a_1u_1 + a_2u_2) = a_1\, A\, u_1 + a_2\, A\, u_2 \qquad ,$$

lo que prueba que A es un operador lineal.

La unicidad del operador A es inmediata, porque si fuese $g(u,v) = \langle A'u,v\rangle$ , sería $\langle Au,v\rangle = \langle A'u,v\rangle$ para todo v; luego Au=A'u , y como está igualdad vale para todo u , es A = A'.

Las dos desigualdades siguientes prueban la última afirmación del teorema

$$||g|| = \sup_{u,v\in\mathcal{H}} \frac{|g(u,v)|}{||u||.||v||} = \sup_{u,v\in\mathcal{H}} \frac{|\langle Au,v\rangle|}{||u||.||v||} \leq \sup_{u,v\in\mathcal{H}} \frac{||Au||.||v||}{||u||.||v||} =$$

$$= \sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{||Au||}{||u||} = ||A|| \quad ,$$

$$||g|| = \sup_{u,v\in\mathcal{H}} \frac{|\langle Au,v\rangle|}{||u||.||v||} \geq \sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{|\langle Au,Au\rangle|}{||u||.||Au||} = \sup_{u\in\mathcal{H}} \frac{||Au||}{||u||} = ||A||$$

Pasamos ahora al objetivo fundamental de este apéndice, que es la demostración del siguiente teorema.

Teorema: Para que un operador $f(z)$ holomorfo en $|z| < 1$ tenga parte real no negativa para $|z|<1$ es necesario y suficiente que admita la representación

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, dA(\varphi) + i\, b \qquad (8)$$

donde $A(\varphi)$ es un operador hermitiano no decreciente y $b$ es un operador hermitiano constante (igual a la parte imaginaria de $f(0)$ ).

Observaciones:

a) Decimos que $f(z)$ es un operador holomorfo y de parte real no negativa para $|z|<1$ si la función $\langle f(z)u,u\rangle$ es holomorfa y de parte real no negativa para $|z|<1$ cualquiera sea $u$.

b) Decimos que $A(\varphi)$ es un operador hermitiano no decreciente si lo es la función $\langle g(\varphi)u , u\rangle$ cualquiera sea $u$.

La igualdad (8) debe entenderse en el sentido de la topología débil, es decir que, cualquiera sea el par de vectores $u , v \in \mathcal{H}$ ,

Se verifica

$$\langle f(z)u , v\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d\langle A(\varphi)u,v\rangle + i\langle bu,v\rangle \qquad (9)$$

Demostración:

1º) La condición de suficiente

Si $f(z)$ admite la representación (8) será

$$\langle f(z)u \,,\, u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\langle A(\varphi)u \,,\, u\rangle + i\langle bu \,,\, u\rangle$$

y entonces, por el teorema 1. $\langle f(z)u,u\rangle$ tendrá parte real no negativa para $|z| < 1$ .

2º) La condición es necesaria

Supongamos que $h(z) = \langle f(z)u \,,\, u\rangle$ es holomorfa y de parte real no negativa para $|z| < 1$. Sin restringir la generalidad podemos suponer que $b = 0$, o sea que también $\operatorname{Im} h(0) = 0$ . Entonces la fórmula que tenemos que demostrar se reduce a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, A(\varphi)$$

Por el teorema 1, $\langle f(z)u \,,\, u\rangle$ admite la representación

$$\langle f(z)u \,,\, u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\, d\, g(\varphi,u)$$

Para cada u habrá una única $g(\varphi,u)$ que le corresponde si imponemos a g que sea continua a derecha y $g(0) = 0$ (condiciones de normalización). Entonces, para cada $\varphi$ fijo, $g(\varphi,u)$ es una funcional en u .

Utilizando la siguiente identidad, cuya verificación es inmediata:

$$\langle f(z)(u+v) \,,\, u+v\rangle - \langle f(z)(u-v) \,,\, u-v\rangle + i\langle f(z)(u+iv) \,,\, u+iv\rangle -$$

$$- i\langle f(z)(u-iv) \,,\, u-iv\rangle = 4\langle f(z)u, v\rangle \,,$$

y poniendo

$$g(\varphi,u,v) = \frac{g(\varphi,u+v) - g(\varphi,u-v) + ig(\varphi,u+iv) - ig(\varphi,u-iv)}{4} \tag{10}$$

resulta

$$\langle f(z)u\ ,\ v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,dg(\varphi,u,v)\quad , \tag{11}$$

donde $g(\varphi,u,v)$ es una función compleja de variación acotada con respecto a $\varphi$. Probaremos que $g(\varphi,u,v)$ es una funcional bilineal continua. En efecto:

$$\langle f(z)(a_1u_1 + a_2u_2)\ ,\ v\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,dg(\varphi,a_1u_1 + a_2u_2\ ,\ v)\quad ; \tag{12}$$

por otra parte:

$$\langle f(z)(a_1u_1 + a_2u_2)\ ,\ v\rangle = a_1\langle f(z)u_1\ ,\ v\rangle + a_2\langle f(z)u_2\ ,\ v\rangle = a_1\,\frac{1}{2\pi}\ .$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,dg(\varphi,u_1,v) + a_2\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,dg(\varphi,u_2,v) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\left\{a_1\,g(\varphi,u_1,v) + a_2\,g(\varphi,u_2,v)\right\}\quad ; \tag{13}$$

de (12) y (13), en virtud de la unicidad de la $g$, resulta

$$g(\varphi,a_1u_1 + a_2u_2\ ,\ v) = a_1g(\varphi,u_1,v) + a_2g(\varphi,u_2,v)\quad .$$

Recordando que $\langle f(z)u\ ,\ v\rangle = \langle\overline{f(z)v\ ,\ u}\rangle$, se demuestra fácilmente de manera análoga que

$$g(\varphi,u,a_1v_1 + a_2v_2) = \overline{a_1}\,g(\varphi,u,v_1) + \overline{a_2}\,g(\varphi,u,v_2)\quad .$$

Además

$$\langle f(0)u\ ,\ u\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dg(\varphi,u,u) = \frac{1}{2\pi}\,g(2\pi,u,u)\quad ;$$

luego

$$g(\varphi,u,u) \leqslant g(2\pi,u,u) = 2\pi\langle f(0)u,u\rangle \leqslant 2\pi\|f(0)\|\langle u,u\rangle \quad ;$$

Entonces, por el teorema 3, $g(\varphi,u,v)$ es una funcional bilineal acotada con norma $\leqslant 4\pi\|f(0)\|$ .

El teorema 4 nos asegura ahora la existencia de un operador $A(\varphi)$ tal que

$$g(\varphi,u,v) = \langle A(\varphi)u\ ,\ v\rangle \tag{14}$$

Tomando $v=u$ y recordando que $g(\varphi,u,u)$ es acotada y no decreciente en $\varphi$ resulta, por definición, que $A(\varphi)$ es un operador acotado no decreciente.

El operador $A(\varphi)$ es hermitiano o, lo que es lo mismo, $\langle A(\varphi)u\ ,\ v\rangle = \langle \overline{A(\varphi)v,u}\rangle$, como se deduce fácilmente de (10) teniendo en cuenta (14).

Sustituyente (14) en (11), obtenemos (9), como queríamos demostrar.

# I N D I C E

# CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

| | | |
|---|---|---|
| Fascículo 1. | Matemática y física cuántica ..... | Laurent Schwartz |
| Fascículo 2. | Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert ... | Mischa Cotlar |
| Fascículo 3. | Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por ... | Alberto P. Calderón |
| Fascículo 4. | Propiedades en el contorno de funciones analíticas ............... | Alberto González Domínguez |
| Fascículo 5. | Teoría constructiva de funciones ... | Jean Pierre Kahane |
| Fascículo 6. | Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables . | Jean Pierre Kahane |
| Fascículo 7. | Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones ...... | Juan Carlos Merlo |
| Fascículo 8. | Intr[illegible] estudio del problema de [illegible] ................... | Esteban Vági |
| Fascículo 9. | Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP ........ | Guido Weiss |
| Fascículo 10. | Probabilidades y estadítsica ....... | Roque Carranza |
| Fascículo 11. | Introducción a la teoría de la representación de grupos ............ | Mischa Cotlar |
| Fascículo 12. | Algebra lineal .................. | Jean Dieudonné |
| Fascículo 13. | Una introducción de la integral sin la noción de medida ............... | Jan Mikusinski |
| Fascículo 14. | Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas .......... | Jean Dieudonné |
| Fascículo 15. | Equipación con espacios de Hilbert . | Mischa Cotlar |
| Fascículo 16. | Grupos de Lie y grupos de transformaciones ..................... | Philippe Tondeur |
| Fascículo 17. | Tres teoremas sobre variedades diferenciales ..................... | Juan Carlos Merlo |
| Fascículo 18. | Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos ...................... | S. Lojasiewicz |
| Fascículo 19. | Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables ... | L. A. Santaló |
| Fascículo 20. | Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz ........ | Evelio T. Oklander |
| Fascículo 21. | Categorías y Functores .......... | Philippe Tondeur |
| Fascículo 22. | Notas de Algebra ............... | Enzo R. Gentile |

**PEDIDOS:**

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**
**Departamento de Biblioteca y Publicaciones**
**Perú 272 - Casilla de Correo 1766**
**Buenos Aires - Argentina**