ISSN 1853-709X

Fascículo 40

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

M. Vigué

Homologie de Hochschild
Homologie cyclique

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 40

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Cursos y Seminarios
Fascículo 40

Homologie de Hochschild
Homologie cyclique

Micheline Vigué

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Ciudad Universitaria - Pabellón I
1428 Buenos Aires, ARGENTINA

Homologie de Hochschild, homologie cyclique

Micheline Vigué

Le but de ce cours est d'introduire deux nouvelles théories homologiques: l'homologie de Hochschild (1945) et l'homologie cyclique (Connes, Feigin - Tsygan, Loday - Quillen, 1983).

Nous montrerons quelques applications de ces théories. L'homologie cyclique a des applications dans de nombreux domains des mathématiques, et il est bien clair que je ne les aborderai pas toutes. Pour une vision assez large du sujet, je recommande le livre de J. L. Loday: "Cyclic homology".

Les trois premiers chapitres de ce cours donnent les résultats généraux sur ces théories et s'adressent plutôt aux études en thése, les théorèmes sont, en général, demontrés en detail.

Les deux derniers chapitres contiennent des résultats plus difficiles sur l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique des algèbres commutatives. Les démonstrations ne sont pas toutes explictiées et le lecteur est convié à consulter les articles de recherche cités dans la bibliographie.

Dans tout ce cours, k est un anneau commutatif unitaire et A une k-algèbre associative unitaire. Sauf mention contraire, le produit tensoriel est noté $\otimes$, et s'effectue sur des k-modules.

Table des matières

Chapitre 1

Homologie de Hochschild

1.1 Bimodule

Définition 1.1.1 *Un bimodule M sur A est un A-module à droite et à gauche vérifiant*

- $(am)a' = a(ma')$ $\forall a, a' \in A$, $\forall m \in M$
- $(\lambda a)m = \lambda(am) = a(\lambda m)$, $\forall \lambda \in k$, $\forall a \in A$, $\forall m \in M$

On note A^{op} la k-algèbre pour laquelle le k-module sous-jacent est A, et la multiplication dans A^{op} vérifie $a^{op}b^{op} = (ba)^{op}$. On a alors une structure de k-algèbre associative sur $A \otimes A^{op}$.

Proposition 1.1.2 *1. Tout A-bimodule M peut être muni d'une structure de $(A \otimes A^{op})$-module à droite (resp. à gauche).*

2. Tout $(A \otimes A^{op})$-module à droite (resp. à gauche) peut être muni d'une structure de bimodule.

Démonstration:
1) On définit une application $M \times (A \otimes A^{op}) \to M$ par $(m, a \otimes a') \mapsto a'ma$ (resp. $(A \otimes A^{op}) \times M \to M$ $(a \otimes a', m) \mapsto ama'$).

On vérifie que les axiomes des modules sont satisfaits.

2) Soit $\phi : M \times (A \otimes A^{op}) \to M$ définissant la structure de $(A \otimes A^{op})$-module à droite sur M. On définit une structure de bimodule sur M par les formules suivantes:

$$M \times A \to M$$

$$(m, a) \mapsto \phi(m, a \otimes 1)$$

$$A \times M \to M$$

$$(a, m) \mapsto \phi(m, 1 \otimes a)$$

Remarque: Le produit munit A d'une structure canonique de A-bimodule, d'où une structure de $(A \otimes A^{op})$-module à droite et à gauche sur A.

1.2 Complexe de Hochschild

Soit M un A-bimodule. Pour $n \geq 0$, on considère le k-module

$$C_n(A) := M \otimes A^{\otimes n}$$

et l'application k-linéaire $b : C_n(A) \to C_{n-1}(A)$ si $n \geq 1$

$$b(m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n) = ma_1 \otimes a_2 \otimes ... \otimes a_n +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n-1}$$

où $m \in M$ et $a_i \in A$ si $i = 1, ..., n$.

Lemme 1.2.1 *$b.b=0$*

Démostration: Verification immediate.

Consèquence: $(C_*(A, M) := \bigoplus_{n \geq 0} C_n(A, M), b)$ est un complexe de k-modules appélé **complexe de Hochschild** de la k-algèbre A et à valeurs dans le bimodule M. On appelle b le **bord de Hochschild.**

Remarque: Si $M = A$, on écrit $C_*(A)$ au lieu de $C_*(A, A)$, et on l'appelle le complexe de Hochschild de A.

Définition 1.2.2 *L'homologie du complexe $(C_*(A, M), b)$ s'appelle l'homologie de Hochschild de A a valeurs dans M et se note $H_*(A, M)$.*

On a $H_*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(A, M)$ ou $H_n(A, M) = H_n(C_*(A, M), b)$

Remarque:

- Si $M = A$, on ecrira $HH_*(A) = H_*(A, M)$ et c'est l'homologie de Hochschild de A.
- Si A est commutatif, chaque $H_n(A, M)$ est un A-module.

1.3 Fonctorialité

1. Soit M et M' deux A bimodules et $f : M \to M'$ un homomorphisme de A-bimodules. Il est claire que f induit une application k-linéaire, notée $C_n(f) : C_n(A, M) \to C_n(A, M')$ qui commute avec b. Ceci induit une application de k-modules gradués: $f_* : H_*(A, M) \to H_*(A, M')$.
2. Soient A et A' deux algèbres associatives et $f : A \to A'$ un morphisme d'algèbres, alors f induit un morphisme de k-modules $HH_*(A) \to HH_*(A')$

Proposition 1.3.1 *HH_* est un foncteur de la catégorie des k-algèbres associatives dans la catégorie des k-modules gradués.*

1.4 Calcul de $H_0(A, M)$

Par dèfinition, $C_1(A, M) = M \otimes A$, $C_0(A, M) = M$ et $b(m \otimes a) = ma - am$.

Ceci montre que $H_0(A, M) = M/\{ma - am, a \in A, m \in M\}$

Par définition, $H_0(A, M)$ est le module des coinvariants. Notons $[A, A]$ le sous k-module des commutateurs de A. On a $HH_0(A) = A/[A, A]$. Si A est commutatif, alors $HH_0(A) = A$. En particulier, on a $HH_0(k) = k$. On vérifie que $HH_n(k) = 0$, $n > 0$.

1.5 Bar résolution

Posons $C'(A) = A^{\otimes(n+2)}$ pour tout $n \geq 0$. Alors $C'_n(A)$ est un A-bimodule dont les structures sont données par:

$$\alpha(a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1}) = \alpha a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1}$$

$$(a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1})\alpha' = a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1}\alpha'$$

On définit $b' : C'_n(A) \to C'_{n-1}(A)$ par:

$$b'(a_0 \otimes ... \otimes a_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_n + 1$$

On vérifie $b'b' = 0$.

On définit $\mu : C'_0(A) = A \otimes A \to A$ par $\mu(a \otimes a') = aa'$ si $a, a' \in A$.

Proposition 1.5.1 *$(C'_*(A), b')$ est une résolution (à droite, où à gauche) du $A \otimes A^{op}$-module A.*

Démostration: Il est claire que chaque $C'_n(A)$ est un $A \otimes A^{op}$-module et b' est une application linéaire de $A \otimes A^{op}$-modules. De plus, $(C'_n(A), b')$ muni de μ est un complexe au dessus de A. Il reste à vérifier que l'homologie du complexe $(C'_n(A), b')$ est nulle. Une methode consiste à construire une homotopie contractante s, i.e.:une famille d'applications $(s_n)_{n\in K}$ et une application $s_{-1} : A \to C'_0(A)$, $s_n : C'_n(A) \to C'_{n+1}(A)$ vérifiant $\mu s_{-1} = Id_A$, $b's_n + s_{n-1}b' = Id_{C'_n(A)}, \forall n \in \mathbb{N}$

On pose $s_{-1}(a) = 1 \otimes a$ si $a \in A$, $s_n(a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1} = 1 \otimes a_0 \otimes ... \otimes a_{n+!}$ pour tout $a_i \in A$, $i = 0, ..., n+1$.

On vérifie que les applications (s_n) conviennent.

Définition 1.5.2 *$(C'_*(A), b')$ s'appelle la* **bar résolution** *ou* **résolution de Hochschild** *de A comme $A \otimes A^{op}$-module.*

Lemme 1.5.3 *Soit M un A-bimodule*

1. *On définit $\Theta : M \otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A) \to C_*(A, M)$ par $\Theta(m \otimes_{A\otimes A^{op}} (a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1})) = a_{n+1}ma_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n$*
2. *On définit $\Psi : C_*(A, M) \to M \otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A)$ par $\Psi(m \otimes a_1 \otimes a_n) = m \otimes 1 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \otimes 1$*

Alors:

1. *$\Psi\Theta = Id$, $\Theta\Psi = Id$*
2. *$\Theta[Id \otimes_{A\otimes A^{op}} b'] = b$*

Verification immédiate.

Théorème 1.5.4 *Si l'algèbre A est projective sur k (par example si k est un corp), alors por tout bimodule M et pour tout $n \geq 0$ on a des isomorphismes:*

$$H_n(A, M) = Tor_n^{A\otimes A^{op}}(M, A)$$

Démostration: Si A est k-projective sur k, alors $C'_n(A) = A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ est un $A \otimes A^{op}$-module projectif à gauche, donc la bar résolution est une résolution de A par des $(A \otimes A^{op})$-modules projectifs, donc $Tor_n^{A\otimes A^{op}}(M, A)$ se calcule comme le n^{ieme}-groupe d'homologie de $M \otimes_{A\otimes A^{op}} C'_*(A)$. Le lemme 1.5.3 permet de conclure.

Applications: Si A est k-projectif sur k, on peut calculer l'homologie de Hochschild en utilisant n'importe quelle résolution projective de A par des $A \otimes A^{op}$-modules.

Example 1: Soit $V = \bigoplus_{i=1}^m kx_i$ un k-module libre de rang m, alors $A = S(V)$ s'identifie à l'anneau de polynômes à n variables $x_1, ..., x_m$ et à coefficient dans k.

Dans ce cas $A \otimes A \cong k[x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m]$ et la multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ est le morphisme d'algèbres prolongeant l'application $\mu(x_i) = x_i$ et $\mu(x'_i) = x'_i$ si $i \in [1, ..., m]$.

Il est facile de voir que $Ker(\mu)$ est engendré par $\underline{x} = (x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, ..., x_n - x'_n)$. Cette suite est regulière, et il est bien connu que le complexe de Koszul $(K_*(\underline{x}), d)$ associe à la suite regulière $\underline{x}$ de l'anneau $k[x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m]$ est une résolution de A par des $A \otimes A$-modules libres.

On à $d_1 : K_1(\underline{x}) = \bigoplus_{i=1}^n k[x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m]y_i \to K_0(\underline{x}) = A \otimes A$ et $d_1(y_i) = x_i - x'_i$, pour tout $i = 1, ..., n$.

$K_*(\underline{x})$ est l'algèbre exterieur construite sur $K_1(\underline{x})$ et d est la différentielle d'algèbres prolongeant d_1.

Alors $A \otimes_{A\otimes A^{op}} K_*(\underline{x}) \cong E(\bigoplus_{i=1}^n k[x_1, ..., x_m, x'_1, ..., x'_m]y_i)$ et $1 \otimes_{A\otimes A^{op}} d = 0$ ou E désigne l'algèbre extèrieure du A-module $\bigoplus_{i=1}^n Ay_i$.

Ceci montre que

$$HH_n(k[x_1, ..., x_n]) \cong E^n(A^m) \text{ si } 0 \leq n \leq m$$
$$HH_n(k[x_1, ..., x_n]) \cong 0 \text{ si } n > m$$

Ou A^m désigne le A-module libre canonique de rang m et E^n est la partie de degre n de l'algèbre extèrieure.

Example 2: Soit $A = T(V)$, l'algèbre tensorielle d'un k-module V. On va supposer que V est projectif sur k.

On à $A = \bigoplus_{n\geq 0}(V^{otn})$ où $V^{ot0} = k$ et la multiplication sur A est induite par $(v_1 \otimes ... \otimes v_p).(v_{p+1} \otimes ... \otimes v_{p+q}) = v_1 \otimes ... \otimes v_p \otimes v_{p+1} \otimes ... \otimes v_{p+q}$.

Montrons que $0 \longrightarrow A \otimes V \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{\mu} 0$ est une résolution de A. (Ici $A \otimes V \otimes A$ est considéré comme un sous-module de $C'_1(A)$).

On défini't $s'_{-1} : A \to A \otimes A$ par $s'_{-1}(a) = a \otimes 1$ et $s_0 : A \otimes A \to A \otimes V \otimes A$ par $s'_0 = 0$ sur $A \otimes k$ et $s'_0(a \otimes a') = -\sum_{i=1}^{p-1}(av_1...v_{i-1}) \otimes v_i \otimes v_{i+1}...v_p) - (av_1...v_{p-1}) \otimes v_p \otimes 1$ si $a' = v_1 \otimes ... \otimes v_p$ et $a \in A$.

On vérifie que $\mu s_{-1} = Id_A$, $b's'_0 + s_{-1}\mu = Id_{A\otimes A}$, $s'_0 b' = Id_{A\otimes V\otimes A}$. Comme V est projectif sur k, $A \otimes V \otimes A$ est un $A \otimes A^{op}$-module projectif, et donc on à exhibé une résolution projective de A. L'homologie de Hochschild est, d'après le theoreme 1.5.4, l'homologie du complexe:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes V \otimes A) \arrow[r, "Id\otimes b'"] \arrow[d, equal] & A \otimes_{A\otimes A^{op}} (A \otimes A) \arrow[d, equal] \\
& A \otimes V \arrow[r, "b"] & A
\end{tikzcd}$$

$b(a \otimes v) = av - va$ si $a \in A$, $v \in V$.

Notons σ la permutation cyclique sur $V^{\otimes m}$, $\sigma(v_1 \otimes ... \otimes v_m) = v_m \otimes v_1 \otimes ... \otimes v_{m-1}$

On a alors:

$$HH_n(T(V)) = 0 \text{ si } m \geq 2$$
$$HH_1(T(V)) = Ker(b) = \bigoplus_{m\geq 1}(V^{\otimes m})^\sigma$$
$$HH_0(T(V)) = k \bigoplus \bigoplus_{m\geq 1}(V^{\otimes m})_\sigma$$

où $(V^{\otimes m})^\sigma$ désigne les invariants sous l'action de σ et $(V^{\otimes m})_\sigma$ désigne les coinvariants sous l'action de σ.

1.6 Complexe de Hochschild normalisé

Rappelons que $C_n(A,M) = M \otimes A^{\otimes n}$. Soit $D_n \subset C_n(A,M)$ ou $D_n = \{m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n,\ m \in M,\ a_i \in A,\ \exists i \in [1,...,n]$ avec $a_i \in k\}$. On vérifie que $b(D_n) \subset D_{n-1}$, donc $(D_* = \bigoplus_{n\geq 0} D_n, b)$ estun sous-complexe, et on pose:

$$\overline{C_n}(A,M) = C_n(A,M)/D_n \cong M \otimes \overline{A}^{\otimes n}$$

où $\overline{A} = A/k$.

On muni $\overline{C_n}(A,M)$ de la diferentielle image de b dans le quotient et on note encore b cette différentielle.

Lemme 1.6.1 *(D_*, b) est un complexe acyclique.*

Corollaire 1.6.2 *L'application de projection $C_n(A,M) \to \overline{C_n}(A,M)$ est un morphisme de complexes, et l'application induite en homologie est un isomorphisme.*

Démostration: le lemme est un résultat classique sur les modules simpliciaux. Le corollaire est evident à partir du lemme et de la longue suite exacte d'homologie associée à la suite exacte de complexes:
$0 \to (D_*, b) \to C_*(A,M) \to \overline{C_*}(A,M) \to 0$

Corollaire 1.6.3 $H_n(A,M) = H_n(C_*(A,M), b) = H_n(\overline{C_*}(A,M), b)$

Définition 1.6.4 *$(\overline{C_*}(A,M), b)$ s'appelle le complexe de Hochschild normalisé.*

1.7 Exercices

1. A et A' deux k-algèbres associatives, montrer que

$$HH_*(A \times A') \cong HH_*(A) \bigoplus HH_*(A')$$

2. Soit A un anneau commutatif, S partie multiplicative dans A, $0 \notin S$, $1 \in S$. Soit M un bimodule. Notons A_S le localisé de A. Quand A est plat sur k, montrer que

$$H_*(A_S, M_S) = H_*(A,M) \otimes_A A_S$$

   où $M_S = M \otimes_A A_S$.

3. Soit $A = k[x]/(x^{m+1})$, $m \geq 1$, on note u la multiplication par $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ et v la multiplication par $x^m \otimes 1 + x^{m-1} \otimes x + ... + 1 \otimes x^m$ dans $A \otimes A$, montrer que

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{u} A \otimes A \xrightarrow{v} A \otimes A \xrightarrow{u} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

   est une résolution de A.

   En deduire les groupes d'homologie de Hochschild de A quand $\mathbb{Q} \subseteq k$.

Chapitre 2

Homologie cyclique

Il y a au moins trois faCons de construire l'homologie cyclique à partir de l'homologie de Hochschild. Alain Connes avait constaté que le groupe cyclique $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ agit sur $C_n(A)$ et que le module des coinvariants sous cette action à bien une différentielle deduite du bord de Hochschild, et ce nouveau complexe, appélé complexe de Connes, lui permettait de dèfinir une nouvelle theorie homologique appelle homologie de Connes qui coincide avec les autres dèfinitions quand $\mathbb{Q} \subseteq k$. Ici, nous allons dèfinir l'homologie cyclique, à partir de la notion de complexe mixte, introduite par Kassel.

2.1 Complexe mixte

Définition 2.1.1 *Un* **complexe mixte** (M_*, b, B) *est la donnée d'un k-module gradué $M_* = \bigoplus_{n\geq 0} M_n$, d'une différentielle de k-modules b de degré -1, et d'une différentielle B de degré $+1$ vérifiant:*

$$b^2 = B^2 = bB + Bb = 0$$

Un complexe mixte determine un bicomplexe $\mathcal{B}_{**}(M)$ dans le premier quadrant si on pose $\mathcal{B}_{p,q} = M_{p-q}$ si $0 \leq p \leq q$, $\mathcal{B}_{pq}(M) = 0$ sinon.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & \\
\mathcal{B}_{03} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{13} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{23} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{33} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l] \\
\mathcal{B}_{02} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{12} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{22} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{32} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l] \\
\mathcal{B}_{01} \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{11} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{21} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \mathcal{B}_{31} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l] \\
\mathcal{B}_{00} & \mathcal{B}_{10} \arrow[l, "B"'] & \mathcal{B}_{20} \arrow[l, "B"'] & \mathcal{B}_{30} \arrow[l, "B"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Dans ce tableau, seuls les termes au dessus de la diagonale $q = p$ sont nuls.

A un tel bicomplexe, on associe le complexe total $(Tot\mathcal{B}_{**}(M), b+B)$ avec $(Tot\mathcal{B}_{**}(M))_n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{B}_{pq} = M_n \bigoplus M_{n-2} \bigoplus M_{n-4} \bigoplus \cdots$

Définition 2.1.2 *$HC_*(M,b,B) := H_*(Tot\mathcal{B}_{**}(M), b+B)$. L'homologie du complexe total s'appelle* **l'homologie cyclique du complexe mixte** *et se note $HC_*(M,b,B)$*

On considerera aussi $H_*(M) = H_*(M_*, b)$ appélé homologie du complexe. Ces deux homologies sont reliées par le théorème suivant:

Théorème 2.1.3 *On a une longue suite exacte:*

$$\cdots \longrightarrow HC_{n-1}(M,b,B) \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{I_*} HC_n(M,b,B) \xrightarrow{S_*} HC_{n-2}(M,b,B) \xrightarrow{B_*} H_{n-1}(M) \longrightarrow \cdots$$

Démostration: On a une suite exacte courte de complexes:

$$0 \longrightarrow (M_*, b) \xrightarrow{I} (Tot\mathcal{B}_{**}(M), b, B) \xrightarrow{S} (Tot\mathcal{B}_{**}(M), b, B)[-2] \longrightarrow 0$$

où $I(m_n) = m_n \in \mathcal{B}_{0n}$, $(Tot\mathcal{B}_{**}(M)[-2])_n = (Tot\mathcal{B}_{**}(M))_{n-2}$, $S(m_n, m_{n-2}, m_{n-4}, \ldots) = (m_{n-2}, m_{n-4}, \ldots)$ d'où une suite exacte en homologie.

Définition 2.1.4 Suite spectrale fondamentale du complexe mixte. *On filtre le bicomplexe par $F_p\mathcal{B}_{ij} = \bigoplus_{i\leq p} B_{ij}$ pour tout $p \geq 0$.*
On définit ainsi une suite spectrale ou $d^0 : E^0_{pq} = \mathcal{B}_{pq} \to E^0_{pq-1} = \mathcal{B}pq-1$ et $d^0 = b$.

Il s'en suit que E^1_{pq} est égal à l'homologie en dégré q de la colonne p du bicomplexe muni de la différentielle b.
On a donc $E^1_{pq} = H_{p-q}(M_*)$ si $0 \leq p \leq q$ et $E^1_{pq} = 0$ sinon.
La différentielle d^1 est induite par la différentielle B. Un petit calcul montre que $d^1 = B_*I_*$. On a donc montre:

Théorème 2.1.5 *La première filtration du bicomplexe $\mathcal{B}_{**}(M)$ définit une suite spectrale convergeant vers $HC(M,b,B)$ et dont le terme E^1 vérifie: $E^1pq = H_{p-q}(M)$ si $0 \leq p \leq q$, $E^1_{pq} = 0$ sinon et $d^1 = B_*I_*$.*

Définition 2.1.6 *Un morphisme de complexes mixtes $f : (M_*, b, B) \to (M'_*, b', B')$ est une suite d'applications k-linearies $f_n : M_n \to M'_N$ qui commutent avec b et B.*

Proposition 2.1.7 *Soit $f : (M_*, b, B) \to (M'_*, b', B')$ un morphisme de complexes mixtes tel que $H_*(f) : H_*(M) \to H_*(M')$ est un isomorphisme. Alors l'application $HC_*(f)$ induite par f entre les homologies cycliques des deux complexes est un isomorphisme.*

Démostration: : On utilise la suite spectrale donnée au théorème 2.1.5 et un argument classique sur les suites spectrales.

2.2 Homologie cyclique d'une k-algèbre associative A

Le complexe de Hochschild $(C_*(A), b)$ va être muni d'un opérateur B pour faire un complexe mixte.
On pose $B : C_n(A) \to C_{n+1}(A)$ dèfini par:

$$B(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{0\leq i\leq n} (-1)^{in}[1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} + a_i \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}]$$

Lemme 2.2.1 $0 = B^2 = bB + Bb$. *$(C_*(A), b, B)$ est un complexe mixte.*

Définition 2.2.2 *$HC_*(A) := HC_*(C_*(A), b, B)$ s'appelle* **l'homologie cyclique de** *A et*

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A) \longrightarrow HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} HH_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

s'appelle la **longue suite exacte de Connes**. *De plus, S, (au lieu de S_*) s'appelle* **l'opérateur de périodicité de Connes**. *La suite spectrale du complexe mixte (définition 2.1.4), s'appelle la* **suite spectrale fondamentale d'homologie cyclique**.

L'image de la différentielle B sur le complexe de Hochschild normalisé est encore noté B et on a:

$$B(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^{in} 1 \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1}$$

si $a_0 \in A$ et $a_i \in A/k$ pour $i \in [1, \ldots, n]$.

Proposition 2.2.3 *$(\overline{C_*}(A), b, B)$ est un complexe mixte et l'application de projection $C_*(A) \to \overline{C_*}(A)$ induit un isomorphisme en homologie cyclique. On a donc*

$$HC_*(A) := HC_*(C_*(A), b, B) = HC_*(\overline{C_*}(A), b, B)$$

Démostration: Celà resulte de l'étude des suites spectrales fondamentales d'homologie cyclique des deux complexes mixtes et du corollaire 1.6.2 du chapitre I.

Remarque:

1. On a $HC_0(A) = HH_0(A) = A/[A, A]$
2. HC_* est un foncteur de la catégorie des k-algèbres associatives dans celle des k-modules gradués. Si $f : A \to A'$ est un morphisme d'algèbres, on a des carrés commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HH_n(A) \arrow[r] & HC_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & HC_{n-2}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & HH_n(A') \arrow[r] & HC_n(A') \arrow[r] & HC_{n-2}(A') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.2.4 *Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'algèbres. Si f induit un isomorphisme entre les homologies de Hochschild alors f induit un isomorphisme entre les homologies cycliques et réciproquement.*

Démostration: Si f induit un isomorphisme entre les homologies de Hochschild, f induit donc un isomorphisme entre les termes E^1 de la suite spectrale fondamentale d'homologie cyclique. Un argument classique sur les suites spectrales convergeantes entraine que f induit un isomorphisme entre les homologies cycliques.

Réciproquement, si f induit un isomorphisme entre les homologies cycliques $HC_*(A)$ et $HC_*(A')$, le lemme des cinq implique que f induit un isomorphisme entre $HH_*(A)$ et $HH_*(A')$, compte-tenue de la remarque precedant.

2.3 Structure de comodule sur $HC_*(A)$

On va d'abord s'intéresser à $HC_*(k)$.

Proposition 2.3.1 *On a $HC_{2n+1}(k) = 0$ et pour tout $n \geq 0$, S est un isomorphisme de $HC_{2n+2}(k)$ sur $HC_{2n}(k)$.*

Corollaire 2.3.2 *$HC_{2n}(k)$ est un k-module libre de rang 1, soit u_n un gènérateur. On a $S(u_n) = u_{n-1}$.*

Démonstration: $HC_0(k) = k$, donc on peut prendre $u_0 = 1$. Comme $HH_n(k) = 0$ si $n > 0$, la longue suite exacte de Connes nous donne la proposition et le corollaire.

Lemme 2.3.3 *S muni $HC_*(k)$ d'une structure de coalgèbre cocommutative graduée colibre de rang 1.*

Démonstration: La comultiplication $\Delta : HC_*(k) \to HC_*(k) \otimes HC_*(k)$ est donnée par

$$\Delta(u_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} S^i(u_n) \otimes S^{n-i}(u_n) = \sum_{0 \leq i \leq n} u_{n-i} \otimes u_i$$

La coünité $c : HC_*(k) \to k$ est dèfinie par $c(u_0) = 1$ et $c(u_n) = 0$ si $n > 0$.

Proposition 2.3.4 *L'opérateur S munit $HC_*(A)$ d'une structure de comodule gradué sur la coalgèbre $HC_*(k)$.*

Démonstration: On définit $\delta_A : HC_*(A) \to HC_*(k) \otimes HC_*(A)$ par $\Delta_A = \sum_{i \geq 0} u_i \otimes S^i$.

En fait si $x \in HC_n(A)$ on a $\Delta_A(x) = u_0 \otimes x + u_1 \otimes S(x) + \ldots + u_{[n/2]} \otimes S^{[n/2]}(x)$ ou $[n/2]$ est la partie entière de $n/2$.

On vérifie que Δ_A vérifie les axiomes d'un comodule.

Définition 2.3.5 *On dit que $HC_*(A)$ est un* **comodule trivial** *si $S = 0$.*

2.4 Homologie cyclique réduite. Cas des algèbres augmentées

On suppose que l'homomorphisme $k \to A$ est injectif. Cette hypothèse est vérifiée si A est commutatif.

On a alors une injection $C_*(k) \to C_*(A)$. On pose $C_*(A)_{red} = C_*(A)/C_*(k)$ et

$$\overline{HH_n}(A) = H_n(C_*(A)_{red})$$

Il est immediat que $\overline{HH_n}(A) = HH_n(A)$ si $n > 0$ et $\overline{HH_0}(A) = HH_0(A)/k$. De même, on a une injection $Tot\overline{\mathcal{B}_{**}}(k) \to Tot\overline{\mathcal{B}_{**}}(A)$. On pose $\mathcal{B}(A)_{red} = Tot\overline{\mathcal{B}_{**}}(A)/Tot\overline{\mathcal{B}_{**}}(k)$ et

$$\overline{HC_n}(A) = H_n(Tot\mathcal{B}(A)_{red}, B + b)$$

On a donc une suite exacte en homologie cyclique:

$$\cdots \longrightarrow HC_n(k) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow \overline{HC_n}(A) \longrightarrow HC_{n-1}(k) \longrightarrow \cdots$$

Remarque: Si A est augmentée, cette longue suite exacte se scinde et on a

$$HC_*(A) \cong \overline{HC_n}(A) \bigoplus HC_*(k)$$

ou, en fait, la somme directe est une somme directe de comodules. Par ailleurs, il est clair qu'on a une longue suite exacte de Connes reliant l'homologie de Hochschild réduite et l'homologie cyclique réduit:

$$\cdots \longrightarrow \overline{HH_n}(A) \longrightarrow \overline{HC_n}(A) \xrightarrow{S} \overline{HC_{n-2}}(A) \xrightarrow{B} \overline{HH_{n-1}}(A) \longrightarrow \cdots$$

Théorème 2.4.1 *(Goodwillie): Soit A une k-algèbre graduée avec $A_0 = k$ et $\mathbb{Q} \subseteq k$, alors la structure de comodule sur $\overline{HC_*}(A)$ est triviale (i.e. $S = 0$ sur $\overline{HC_*}(A)$).*

Corollaire 2.4.2 *Sous les hypothèses du théorème 2.4.1, on a, pour tout $n > 0$, des courtes suites exactes:*

$$0 \longrightarrow \overline{HC_{n-1}}(A) \longrightarrow \overline{HH_n}(A) \longrightarrow \overline{HC_n}(A) \longrightarrow 0$$

Démostration: voir l'article de Goodwillie ou le livre de Weibel.

Ce théorème sera souvent utilisé dans la suite du cours.

Exemples d'application:

1. $A = T(V)$, V un k-module projectif et $\mathbb{Q} \subseteq k$. On a vu que $HH_n(A) = 0$ si $n \geq 2$, d'où $\overline{HC_n}(A) = 0$ si $n \geq 1$ et $HC_0(A) = HH_0(A) = T(V)^\sigma$
2. $A = k[x]/(x^{m+1})$ $m \geq 1$ et k un corps, $\mathbb{Q} \subseteq k$. On peut montrer, voir exercice du chapitre I, que $\overline{HC_1}(A) = 0$, $\overline{HH_2}(A) = \overline{HC_2}(A)$, $\overline{HC_3}(A) = 0$, et plus gènèralement, on montre que:

$$HC_{2n+1}(A) = 0 \text{ et } HC_{2n}(A) \cong k^{m+1} \text{ si } n > 0$$

2.5 Example - Calcul de l'homologie cyclique de $A = T(V)$

On va supposer que V est un module projectif sur k un anneau commutatif unitaire.

On a vu, au chapitre I, que $HH_n(A) = 0$ si $n \geq 2$, $HH_0(A) = T(V)/(1-\sigma)(T(V))$ et $HH_1(A) = T(V)^\sigma = \{\alpha \in T(V) : \sigma(\alpha) = \alpha\}$.

Lemme 2.5.1 *La suite spectrale fondamentale d'homologie cyclique dégénère au terme E^2 et on a:*

$$HC_{2n} = E^2_{nn} = Ker(d^1) = \{\alpha \in T(V)^\sigma : d^1(\alpha) = 0\}$$

$$HC_{2n-1} = E^2_{n-1n} = HH_1(A)/Im(d^1)$$

Démostration: $E^1_{pq} = HH_{pq}(A)$, dou $E^1_{pp} = HH_0(A)$, $E^1_{p-1p} = HH_1(A)$ et 0 sinon. Comme $d^1 : E^1_{pq} \to E^1_{p-1q}$ on voit qu'une seule des différentielles d^1 est non nulle, c'est:

$$0 \longrightarrow E^1_{pp} = HH_0(A) \xrightarrow{d^1} E^1_{p-1p} = HH_1(A) \longrightarrow 0$$

On a donc $E^r_{pq} = 0$ pour $r \geq 2$ et $(p,q) \neq (p,p)$ ou $(p, p+1)$.

Mais d^r est une application de E^r_{pq} dans $E^r_{p-r,q+r-1}$, donc $d^r = 0$, $\forall r \geq 2$ et donc la suite spectrale dégénère au terme E^2 et on a

$HC_{2n} = \bigoplus_{p+q=n} E^\infty_{pq} \bigoplus_{p+q=n} E^2_{pq} = E^2_{nn}$, de même on a $HC_{2n+1} = E^2_{n-1n}$.

Nous allons calculer d^1:

On a

$$E^1_{pp} = HH_0(A) = A/Im(b) \xrightarrow{d^1} E^1_{p-1p} = HH_1(A) = \frac{Ker(b)}{b(A \otimes \overline{A} \otimes \overline{A})}$$

On sait que d^1 est induit par $B : \overline{C_0}(A) = A \to \overline{C_1}(A) = A \otimes \overline{A}$. Si $x \in k$, $B(x) = 0$. Si $x \in V^{\otimes j}$, $j \geq 1$, ecrivons $x = v_1 \dots v_j$, alors $B(x) = 1 \otimes v_1 \dots v_j$.

On remarque que $B(x) = v_1 \otimes v_2 \dots v_j + v_2 \dots v_j \otimes v_1 + b(x_1)$ Regardons maintenant les éléments $v_2 \dots v_j \otimes v_1$, $v_3 \dots v_j v_1 \otimes v_2$, ... comme des éléments de $T(V)$ et introduisons la permutation cyclique σ défini par $\sigma(v_1 \dots v_m) = v_m v_1 \dots v_{m-1}$, on voit alors que, de proche en proche, on obtient

$$b(x) - (1 + \sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{j-1})(v_1 \dots v_j) + b(y)$$

ou $y \in A \otimes \overline{A} \otimes A$.

Ceci prouve que d^1 s'identifie à l'application $1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{j-1}$ sur $V^{\otimes j}$. On a donc

$$HC_{2n}(A) = Ker(d^1) = \{\alpha \in T(V)^\sigma : (1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{j-1})(\alpha) = 0\}$$

$$HC_{2n-1}(A) = T(V)^\sigma / Im(1+\sigma+\sigma^2+\ldots+\sigma^{j-1})$$

Un résultat classique sur l'homologie des groupes cycliques nous donne:

Théorème 2.5.2 *Soit V un k-module projectif et $T(V)$ l'algèbre tensoriel du k-module V, alors on a:*

$$\forall n > 0 \ HC_{2n}(T(V)) = HC_{2n}(k) \bigoplus \bigoplus_{j\geq 1} H_n(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, V^{\otimes j})$$

$$\forall n > 0 \ HC_{2n-1}(T(V)) = \bigoplus_{j\geq 1} H_n(\mathbb{Z}/j\mathbb{Z}, V^{\otimes j})$$

Chapitre 3

Homologies d'Hochschild et cyclique des algèbres commutatives

On suppose maintenant que A est une k-algèbre commutative. On a vu que $HH_0(A) = HC_0(A) = A$ et que chaque $HH_n(A)$ est un A-module pour $n \geq 0$.

On va montrer qu'en fait $HH_*(A)$ est une A-algèbre.

3.1 "Shuffle-produit" sur le complexe de Hochschild

On définit un produit noté : $C_p(A) \times C_q(A) \to C_{p+q}(A)$ si $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ de la manière suivante:

$$a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_p, a_0' \otimes a_{p+1} \ldots \otimes a_{p+q}) \mapsto \sum (sgn\sigma) a_0 a_0' \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

ou la somme est étendue à toutes les permutations $\sigma \in S_{p+q}$ telles que $\sigma(1) < \ldots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)$.

On définit, par la même formule, un produit sur le complexe normalisé $\overline{C_*}(A)$.

Lemme 3.1.1 *1. le "shuffle-produit" est gradué commutatif, c'est à dire si $x \in C_p(A)$, $y \in C_q(A)$, alors $yx = (-1)^{pq} xy$.*

2. le bord de Hochschild b est une différentielle d'algèbres graduées, c'est à dire si $x \in C_p(A)$, $y \in C_q(A)$, alors $b(xy) = b(x)y + (-1)^p x b(y)$.

Démostration: élémentaire et combinatoire.

Définition 3.1.2 *Soit $(C_* = \bigoplus C_n, b)$ un k-module differentiel gradué. On dit que (C_*, b) est une* k-**algèbre différentielle graduée** *(a.d.g. en abrege) si C_* est munie d'un produit, noté . , qui en fasse une k-algèbre vérifiant $C_p.C_q \subseteq C_{p+q}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ et si la différentielle b vérifie $b(x.y) = b(x)y + (-1)^p x b(y)$, pour tout $x \in C_p(A)$, $y \in C_q(A)$. On dit que l'a.d.g. (C_*, b) est une* k-**algèbre différentielle graduée commutative** *(en abregé a.d.g.c.) si, de plus, $yx = (-1)^{pq} xy$, pour tout $x \in C_p(A)$, $y \in C_q(A)$,$(p,q) \in \mathbb{N}^2$.*

Lemme 3.1.3 *1. Soit (C_*, b) une algèbre différentielle graduée, alors $H_0(C_*, b)$ à une structure de k-algèbre et $H_*(C_*, b)$ a une structure de $H_0(C_*, b)$-algèbre graduée deduite de celle de C_*.*

2. Si (C_*, b) est une algèbre différentielle graduée commutative, alors $H_0(C_*, b)$ a une k-algèbre commutative et $H_*(C_*, b)$ a une structure d'algèbre graduée commutative.

Démostration: Calculs élémentaires en algèbre homologique.

Les lemmes 3.1.1 et 3.1.3 permettent de montrer:

Théorème 3.1.4 *Soit A une k-algèbre commutative, alors $HH_*(A)$ a une structure de A-algèbre gradué commutative.*

3.2 Dèrivation et algèbre des formes différentielles

Définition 3.2.1 *Soit A une k-algèbre et M un A-module. Une derivation de A à valeurs dans M est une application k-linéaire $D : A \to M$ satisfaisant la relation:*

$$D(ab) = a(Db) + b(Da)$$

pour tout $a, b \in A$.

L'ensemble de toutes les derivations de A dans M forme un A-module noté $Der_k(A, M)$. On remarque que le k-module $A \otimes A$ peut être muni d'une structure de A-module par la loi:

$$\alpha(a \otimes a') = \alpha a \otimes a' \text{ si } \alpha \in A,\ a \in A,\ a' \in A$$

Soit N le sous A-module de $A \otimes A$ engendré par les éléments de la forme $1 \otimes ab - a \otimes b - b \otimes a$ pour tout $a, b \in A$.

Proposition 3.2.2 *Le A-module quotient $(A \otimes A)/N$, noté $\Omega^1_{A/k}$ est appélé* **module des différentielles de Kähler de** A. *L'application $d : A \to \Omega^1_{A/k}$ définie par $da = cl(1 \otimes a)$ dans $(A \otimes A)/N$ est une derivation vérifiant la propiété universelle suivante:*

Pour tout A-module M et toute derivation $D \in Der_k(A, M)$, il existe une unique application A-linéaire $f : \Omega^1_{A/k} \to M$ telle que $D = fd$

Démostration: Il est claire que d est une k-derivation. On remarque aussi que le A-module $\Omega^1_{A/k}$ est engendré par les éléments da, pour tout $a \in A$, d'où l'unicité de f. Il reste a montrer l'existence de f. Soit $D \in Der_k(A, M)$, on lui associe une application $\Delta : A \times A \to M$ définie par $\Delta(a, b) = aDb$ por tout $(a, b) \in A^2$; il est claire que Δ est k-bilinéaire, donc il existe une application Δ' k-linéaire $A \otimes A :\to M$ prolongeant Δ, on a $\Delta(a \otimes b) = aDb$. Lorsqu'on munit $A \otimes A$ de la structure de A-module définie ci-dessus, alors Δ' est A-linéaire, et $\Delta'(N) = 0$, donc Δ' se factorise en une application $f : (A \otimes A)/N \to M$; de plus f est A-linéaire et vérifie $D = fd$.

Corollaire 3.2.3 *On a un isomorphisme de A-modules*

$$Der_k(A, M) \cong Hom_A(\Omega^1_{A/k}, M)$$

Démostration: La proposition ci-dessus montre que l'application $f \in Hom_A(\Omega^1_{A/k}, M) \mapsto fd$ est un isomorphisme.

Exercice: Montrer que $\Omega^1_{A/k}$ est isomorphe, comme A-module, à I/I^2 ou $I = Kre(\mu)$ et $\mu : A \otimes \to A$ est la multiplication.

Example: $A = k[x_1, ..., x_p]$ l'anneau des polynômes à p variables et à coefficients dans k. Notons $L = \bigoplus_{i=1}^p Ay_i$, un A-module libre de rang p et de base $(y_1, ..., y_p)$.

Une derivation D de A dans un A module M est determinée de maniere unique par la donnée de Dx_i pur $i = 1, ..., p$. En particulier, une derivation $d : A \to L$ est définie en posant $dx_i = y_i$, pour tout $i \in [1, ..., p]$.

On remarque, alors, que L possede la propiete universelle suivante: toute derivation $D : A \to M$ se factorise de maniere unique en une application A-linéaire $f : L \to M$ vérifiant $fd = D$. En effet, L etant libre, f est bien determinée par la donnée de $f(y_i) = Dx_i$. La proposition 3.2.2 implique $\Omega^1_{A/k} \cong L$.

Définition 3.2.4 *$\Omega^*_{A/k} := E_A(\Omega^1_{A/k})$ est, par définition, la A-algèbre extèrieure du A-module $\Omega^1_{A/k}$.*

On a $\Omega^*_{A/k} = \bigoplus_{n\geq 0}\Omega^n_{A/k}$, avec $\Omega^0_{A/k} = A$, et $\Omega^n_{A/k}$ est le A-module engendré par les éléments $da_1 \wedge ... \wedge da_n$ ou $a_i \in A$. On définit $d : \Omega^n_{A/k} \to \Omega^{n+1}_{A/k}$ pour tout $n \geq 0$, par

$$d(a_0da_1 \wedge ... \wedge da_n) = da_0 \wedge da_1 \wedge ... \wedge da_n$$

$(\Omega^*_{A/k}, d)$ s'appelle **l'algèbre des formes différentielles sur** *A.*

Lemme 3.2.5 *1. $dd = 0$*

2. $(\Omega^*_{A/k}, d)$ est une A-algèbre différentielle graduée commutative avec une différentielle d de degré +1.

Démostration: 1. est immediat.

2. Par définition $\Omega^*_{A/k} = T_A(\Omega^1_{A/k})/J$ ou $T_A(\Omega^1_{A/k}) = \bigoplus_{m\geq 0}(\Omega^1_{A/k})^{\otimes_A m}$ et J est l'idéal bilatère engendré par le éléments de la forme $x \otimes_A y + y \otimes_A x$, si $x, y \in \Omega^1_{A/k}$.

On gradué $T_A(\Omega^1_{A/k})$ en posant $deg(x_1 \otimes_A ... \otimes_A x_m) = m$, si $x_i \in \Omega^1_{A/k}$ pour tout $i = 1, ..., n$.

Il est claire que $T_A(\Omega^1_{A/k})$ est une algèbre graduée et $T_A(\Omega^1_{A/k})/J$ une algèbre graduée commutative. De plus, d est une différentielle d'algèbres par construction.

Définition 3.2.6 *$H^*_{DR}(A) := H^*(\Omega^*_{A/k}, d)$ s'appelle la* **cohomologie de de Rham** *de l'algèbre commutative A. C'est une A-algèbre graduée commutative.*

Exercice: Si $A = k[x_1, ..., x_p]$, montrer que $\Omega^n_{A/k} = A \otimes E^n(\bigoplus_{i=1}^p ky_i)$, $\forall n \geq 0$; deplus si $\mathbb{Q} \subseteq k$, montrer que $H^n_{DR}(A) = 0$ pour tout $n > 0$.

3.3 Algèbre des formes différentielles et homologie de Hochschild

Un calcul direct montre que $HH_1(A) = (A \otimes A)/(\{ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b,\ a, b, c \in A\})$

L'application $\gamma : \Omega^1_{A/k} \to HH_1(A)$ définie par $\gamma(adb) = cl(a \otimes b)$ dans $HH_1(A)$ est l'application identique et les structures de A-modules définies sur $\Omega^1_{A/k}$ et $HH_1(A)$ coincident.

Proposition 3.3.1 *1. γ est un isomorphisme de A-modules.*

2. γ s'etend en un homomorphism de A-algèbres graduées commutatives $\gamma^* : \Omega^*_{A/k} \to HH_*(A)$.

Démostration: 2. Puisque $\Omega^*_{A/k}$ est la A-algèbre extèrieure libre construite sur le A-module $\Omega^1_{A/k}$ en degré 1, c'est aussi la A-algèbre graduée commutative construite sur $\Omega^1_{A/k}$.

Par ailleurs $HH_*(A)$ a une structure de A-algèbre graduée commutative d'après le teoreme 3.1.4, donc γs'etend de maniere unique en un homomorphisme d'algèbres graduées commutatives en posant:

$$\gamma * (a_0 \wedge a_1 ... \wedge a_p) = a_0\gamma(da_1).\gamma(da_2)...\gamma(da_p)$$

où le produit à droite est le produit dans $HH_*(A)$.

Remarque: On ne sait pas en général définir une application $\epsilon_n : \Omega^n_{A/k} \to C_n(A)$ vérifiant $b\epsilon_n = 0$, et telle que $\epsilon^* = \gamma^*$. Ceci est possible si $A = k[x_1, ..., x_p]$ car $\Omega^1_{A/k}$ est un A-module libre.

Par contre, on définit $\Theta'_n : \overline{C_n}(A) \to \Omega^n_{A/k}$ par:

$$\Theta'_n(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n) = a_0da_1 \wedge ... \wedge da_n \text{ si } a_0 \in A,\ a_i \in \overline{A},\ i \in [1, ..., n]$$

Lemme 3.3.2 *1. $Theta'_n b = 0$ pour tout $n > 0$*

2. la famille $(\Theta'_n)_{n\geq 0}$ induit des applications k-linéaires $H_n(\Theta') : HH_n(A) \to \Omega^n_{A/k}$ vérifiant $H_n(\Theta')\gamma^n = n!Id_{\Omega^n}$ pour tout $n \geq 0$

3. si $\mathbb{Q} \subseteq k$, $\Omega^*_{A/k}$ est un facteur direct dans $HH_*(A)$

Démostration: Calculs élémentaires.

Question: Sous quelles hypothèses, γ^* est un isomorphisme? On a vu que c'est vrai si A est un anneau de polynômes.

Définition 3.3.3 *1. Soit R un anneau commutatif. Une suite finie $(r_1, ..., r_p)$ d'éléments de R est dite regulière dans R si pour tout $i = 1, ..., p-1$, l'image $\overline{r_i}$ de r_i dans $R/(r_1, ..., r_{i-1})$ n'est pas un diviseur de 0 (On pose $r_0 = 0$).*

2. Soit A une k-algèbre commutative, on dit que A est **lisse** *sur k si A est plat sur k es si, pour tout idéal maximal $\mathcal{M}$ de A, le noyau J de l'application localisée $\mu\mathcal{M} : (A \otimes A)_{u^{-1}(\mathcal{M})} \to A_{\mathcal{M}}$ est engendré par une suite regulière dans $(A \otimes A)_{u^{-1}(\mathcal{M})}$. On rappelle que $\mu(a \otimes a') = aa'$.*

Example: L'algèbre des fonctions algebriques sur une variété non singulière sur un corps algebriquement clos est lisse.

Définition 3.3.4 *1. Un anneau local noetherien d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et de corps residuel $k = A/\mathcal{M}$ est dite* **local regulier** *si la dimension de Krull de A est ègal à $dim_k(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)$.*

2. Un anneau est dite **regulière** *si tout ses localisés par des ideaux maximaux sont des anneaux locaux reguliers.*

3. Une k-algèbre A est dite **geometriquement regulière sur** *k si pour toute extension finie k' de k, l'anneau $A \otimes_k k'$ est regulier*

Un théorème difficile s'enonce ainsi:

Théorème 3.3.5 *Si A est une k-algèbre noetherienne et k un corps, alors il est equivalent de dire que A est lisse sur k et A est geometriquement regulière sur k.*

Nous pouvons alors enoncer un rèsultat celebre:

Théorème 3.3.6 *(Hochschild - Konstant - Rosemberg)(1962) Si A est lisse sur k, alors $\gamma^* : \Omega^*_{A/k} \to HH_*(A)$ est un isomorphisme de A-algèbres*

Démostration: Elle est longue, elle utilise le fait que $HH_*(A)$ est isomorphe a $Tor^{A\otimes A}_*(A, A)$. On se ramene à montrer le rèsultat pour des anneaux locaux en utilisant le fait que $HH_*(A_{\mathcal{M}}) = HH_*(A) \otimes_A A_{\mathcal{M}}$ et $\Omega^1_{A_{\mathcal{M}}/k} = \Omega^1_{A/k} \otimes_A A_{\mathcal{M}}$. Si A est lisse sur k, alors le noyau de la multiplication est engendré pour une suite regulière, donc pour calculer $Tor^{A\otimes A}_*(A, A)$ on peut utiliser le complexe de Koszul. Ceci permet de montrer que, sous les hypothèses de l'enoncé, $Tor^{A\otimes A}_*(A, A)$ est une algèbre extèrieure sur $Tor^{A\otimes A}_1(A, A)$. Le rèsultat en decoule.

3.4 Algèbre des formes différentielles et homologie cyclique

Proposition 3.4.1 *Pour tout $n \geq 0$, on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \Omega_A^n \arrow[r, "\gamma^n"] \arrow[d, "d"'] & HH_n(A) \arrow[d, "B_n"] \\ \Omega_A^{n+1} \arrow[r, "\gamma^{n+1}"] & HH_n(A) \end{tikzcd}$$

ou B_n est l'application induit en homologie par l'opérateur $B : C_n(A) \to C_{n+1}(A)$.

Corollaire 3.4.2 $HC_1(A) \cong \Omega^1_{A/k}/dA$

Dèmostration du corollaire: la longue suite exacte de Connes et la proposition 3.4.1, pour $n = 0$ nous donne:

$$\begin{tikzcd} HC_0(A) \arrow[r, "B_0"] \arrow[d, equal] & HH_1(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & HC_1(A) \arrow[r] & 0 \\ A \arrow[r, "d"] & \Omega^1_{A/k} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Dèmostration de la proposition: Soit $\omega \in \Omega^n_{A/k}$, $\omega = a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_n$, alors $\gamma^n(\omega)$ est la classe de $\gamma(a_0 \otimes a_1).\gamma(1 \otimes a_2)\ldots\gamma(1 \otimes a_n)$, ou . est le shuffle produit de $C_*(A)$. On vérifie que $\gamma^n(\omega) = cl(\sum_{\sigma \in S_n} a_0 \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)})$, d'où, en utilisant le complexe normalisé $\overline{C_n}(A)$, $B_n\gamma^n(\omega)$ est la classe de

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}} \sum_{\sigma' \in S_{n+1}, \sigma(0)=0} (sgn\sigma + sgnt) 1 \otimes a_{t^{-1}(0)} \otimes a_{t^{-1}\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{t^{-1}\sigma^{-1}(n)})$$

Comme toute permutation de S_{n+1} s'écrit $\sigma' t$ avec $\sigma'(0) = 0$, on voit que cet élément est ègal à $\gamma^{n+1} d(\omega)$.

Proposition 3.4.3 *Pour tout $n \geq 0$ on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \overline{C_n}(A) \arrow[r, "\Theta'_n"] \arrow[d, "B"'] & \Omega^n_{A/k} \arrow[d, "(n+1)d"] \\ \overline{C_{n+1}}(A) \arrow[r, "\Theta'_{n+1}"] & \Omega^{n+1}_{A/k} \end{tikzcd}$$

Démostration: evident.

Proposition 3.4.4 $(\Omega^*_{A/k}, 0, d)$ *est un complexe mixte. La suite spectrale associée dégénère au terme E^2 et on a:*

$$E^2_{pq} = \begin{cases} \Omega^q_A / d\Omega^{q-1} & si\ p = 0 \\ H^{q-p}_{DR}(A) & si\ 0 < p \leq q \\ 0 & sinon \end{cases}$$

De plus $E^2_{pq} \Rightarrow HC_n(\Omega^*_{A/k}, 0, d) = \Omega^n / d\Omega^{n-1} \bigoplus H^{n-2}_{DR}(A) \bigoplus H^{n-4}_{DR} \bigoplus \cdots$

Démostration: le calcul de E^2_{pq} est classique, le fait que la différentielle de degré -1 est nulle entraine que l'homologie du complexe total se deduit directement de l'homologie des lignes, d'où la dégénèrescence de la suite spectrale.

Théorème 3.4.5 *On suppose que $\mathbb{Q} \subseteq k$ et on pose $\Theta_n = \frac{1}{n!}\Theta'_n$, alors*

1. $(\Theta_n)_{n\geq 0} : (\overline{C_*}(A), b, B) \to (\Omega^*_{A/k}, 0, d)$ *est un morphisme de complexes mixtes.*
2. *On a $H_n(\Theta)\gamma^n = Id_{\Omega^n_A}$ pour tout $n \geq 0$*

Corollaire 3.4.6 *Si $\mathbb{Q} \subseteq k$, alors $\Omega^n / d\Omega^{n-1}$ est un facteur direct dans $HC_n(A)$ pour tout $n > 0$.*

Démonstration: le théorème se deduit directement du lemme 3.3.2 et de la proposition 3.4.3. Le corollaire se deduit du théorème 3.4.5 et de la proposition 3.4.4

Théorème 3.4.7 *On suppose $\mathbb{Q} \subseteq k$ et que A est lisse sur k, alors la suite spectrale d'homologie cyclique dégénère au terme E^2 et on a:*

$$HC_n(A) = \Omega^n_A / d\Omega^{n-1}_A \bigoplus H^{n-2}_{DR}(A) \bigoplus H^{n-4}_{DR}(A) \bigoplus \cdots$$

Démonstration: d'après le teoreme de Hochschild - Konstant - Rosemberg, γ^* est un isomorphisme, donc $H_n(\Theta)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$. Les deux complexes mixtes $(\Omega^*_{A/k}, 0, d)$ et $(\overline{C_*}(A), b, B)$ donnent naissance à deux suites spectrales et le morphisme Θ induit un isomorphisme entre les termes E^2 des deux suites spectrales. Le complexe $(\Omega^*_{A/k}, 0, d)$ donne naissance à une suite spectrale qui dégénère aussi au terme E^2, et les homologies totales des deux complexes mixtes sont isomorphes, d'où le théorème.

Exercice: Soit $V = \bigoplus_{i=1}^{p} kx_i$, $A = S(V) = k[x_1, ..., x_p]$ et $\mathbb{Q} \subseteq k$. Montrer directement que $HC_n(k[x_1, ..., x_p] = HC_n(k) \bigoplus \Omega^n / \Omega^{n-1}$.

Solution: $A = k[x_1, ..., x_p]$ est graduée si on posse $degx_i = 1$. D'après le théorème 2.4.1 on a pour tout $n > 0$ une courte suite exacte

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \overline{HC_{n-1}}(A) \arrow[r, "B_n"] & HH_n(A) \arrow[r, "I_n"] \arrow[d, "\gamma^n"] & \overline{HC_n}(A) \arrow[r] & 0 \\ & & \Omega^n_A & & \end{tikzcd}$$

Comme I_{n-1} est surjective, $B_n(\overline{HC_{n-1}}(A)) = B_n I_{n-1}(HH_n(A))$. Or $B_n I_{n-1} : HH_n(A) \to HH_n(A)$.

La proposition 3.4.1 dit que $d\gamma^{n-1} = \gamma^n B_{n-1}$, d'où le rèsultat.

Chapitre 4

Méthodes de calcul

On a vu, au chapitre III, que si A est lisse sur k, on sait calculer l'homologie de Hochschild el l'homologie cyclique à partir du complexe mixte $(\Omega^*_{A/k}, 0, d)$.

Le problème est donc ouvert si A n'est pas lisse. L'idée originale vient de la topologie algebrique et du principe de remplacer une algèbre commutative non lisse par une algèbre différentielle graduée commutative "libre" (i.e. du type anneau de polynômes) qui aura même homologie de Hochschild et même homologie cyclique que l'algèbre non lisse de depart. On prouvera des théorèmes permettant de calculer les homologies de Hochschild et cyclique de ces objects libres à partir de complexes mixtes généralisant le complexe $(\Omega^*_{A/k}, 0, d)$.

4.1 Catégorie k-adgc

Définition 4.1.1 *On note* k-**adgc** *la catégorie dont les objects sont les algèbres différentielles graduées commutatives définies au chapitre III, définition 3.1.2 et les morphismes $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ sont les homomorphismes d'algèbres graduées vèrifiant $d_B f = f d_A$.*

On dit que f est un **quasi-isomorphisme** *si $H_*(f) : H_*(A, d_A) \to H_*(B, d_B)$ est un isomorphisme. Si $a \in A_n$, on note $|a| = n =$degré(a).*

Remarque: tout k-algèbre commutative A est une algèbre graduée commutative en prenant $A = A_0$, et $d = 0$. La catégorie k-**Algcom** est contenue dans k-adgc, ou k-Algcom est la catégorie des algèbres commutatives.

Définition 4.1.2 *L'algèbre graduée commutative libre construite sur le k-module gradué libre $V = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$ est, par définition, le produit tensoriel de l'algèbre symetrique $S(\bigoplus_{n\geq 0} V_{2n})$ et de l'algèbre extèrieure $E(\bigoplus_{n\geq 0} V_{2n+1})$. On notera:*

$$\Lambda V = S(\bigoplus_{n\geq 0} V_{2n}) \otimes E(\bigoplus_{n\geq 0} V_{2n+1})$$

Proposition 4.1.3 *Soit A une k-algèbre commutative, alors il existe une algèbre diferentielle graduée libre de la forme $(\Lambda V, \partial)$ et un morphisme $\rho : (\Lambda V, \partial) \to A$ tels que ρ soit un quasi-isomorphisme. On dit que $(\Lambda V, \partial)$ est un* **modèle de** *A.*

Démostration: on construit $V = \bigoplus_{n\geq 0} V_n$ par recurrence sur n.

Construction de V_0: A est un k-module, donc il existe un k-module libre V_0 et une application k-linéaire surjective $\rho_0 : V_0 \to A$, qui s'etend en un morphisme d'algèbres surjectif, noté encore ρ_0; $\Lambda V_0 = S(V_0) \to A$, on pose $\partial = 0$ sur ΛV_0. Soit $I = Ker(\rho_0)$, et V_1 un k-module libre s'envoyant surjectivement sur I: $V_1 \xrightarrow{\pi_1} I \longrightarrow 0$. Si $(v_i)_{i\in I}$ est une base de V_1 on pose $\partial v_i = \pi_1(v_i)$, on a alors $\rho_0 \partial = 0$. On pose $\rho_1 = 0$ sur V_1. Alors $H_0(\rho_0 + \rho_1) : \Lambda(V_0 \bigoplus V_1) \to A$

est bijective. En général $H_1(\Lambda(V_0 \bigoplus V_1), \partial) \neq 0$, on introduit alors un k-module libre pour tuer $H_1(\Lambda(V_0 \bigoplus V_1))$. De proche en proche, on construit ainsi $V_0, V_1, ..., V_n, ...$ et ∂ de facon que $H_p(\Lambda V, \partial) = 0$ si $p > 0$.

4.2 Homologie de Hochschild et homologie cyclique des k-adgc.

Si (A, ∂) est une algèbre différentielle graduée, alors chaque k-module $C_p(A)$ (chaque $\overline{C_p}(A)$) est gradué par

$$C_{pq} = \bigoplus_{i_0+i_1+...+1_p=q} A_{i_0} \otimes A_{i_1} \otimes ... \otimes A_{i_p}$$

Par ailleurs, la différentielle ∂ définit une différentielle notée encore ∂ sur $C_{pq}(A)$ par la formule:
$\partial(a_0 \otimes ... \otimes a_p) =$

$$\sum_{i=0}^{p} (-1)^{|a_0|+...+|a_{i-1}|} a_0 \otimes ... \otimes a_{i-1} \otimes \partial(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes ... \otimes a_p$$

Lemme 4.2.1

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
C_{20}(A) \arrow[d, "b"] & C_{21}(A) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "b"] & C_{21}(A) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l, "partial"'] \\
C_{10}(A) \arrow[d, "b"] & C_{11}(A) \arrow[l, "-\partial"'] \arrow[d, "b"] & C_{11}(A) \arrow[l, "-\partial"'] \arrow[d, "b"] & \cdots \arrow[l, "partial"'] \\
C_{00}(A) & C_{01}(A) \arrow[l, "\partial"'] & C_{01}(A) \arrow[l, "\partial"'] & \cdots \arrow[l, "partial"']
\end{tikzcd}$$

est un bicomplexe ou
$b(a_0 \otimes ... \otimes a_p) =$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes ... \otimes a_i a_{i+1} \otimes ... \otimes a_p + (-1)^{|a_0|+...+|a_{p-1}|} a_p a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{p-1}$$

Démostration: verification immédiate.

Définition 4.2.2 *L'homologie de Hochschild de (A, ∂) notée $HH_*(A)$ est l'homologie du complexe total $(TotC_{**}(A), b,$:*

On définit de même $(Tot\overline{C_{**}}(A), b, \pm\partial)$, et un argument classique de suite spectrale montre que $H_*(Tot\overline{C_{**}}(A), b, \pm\partial) = HH_*(A, \partial)$. L'opérateur de Connes B s'etend en un opérateur $B : C_{pq} \rightarrow C_{p+1q}$ vèrifiant $0 = B^2 = bB + Bb = \partial B - B\partial$. De même, on définit $B : \overline{C}_{pq} \rightarrow \overline{C}_{p+1q}$ par $B(a_0 \otimes ... \otimes a_p) = \sum_{i=0}^{\epsilon_i} 1 \otimes a_i \otimes ... \otimes a_n \otimes a_0 \otimes ... \otimes a_{i-1}$ ou $\epsilon_i = p_i + \sum_{j=0}^{p} (|a_j| . \sum_{l \neq j} |a_l|)$.

Définition 4.2.3 *L'homologie cyclique de $(A\partial)$, notée $HC_*(A, \partial)$, est l'homologie cyclique du complexe mixte $(TotC_{**}($ $\partial, B)$.*

Il est claire que $HC_* A, \partial) = HC_*(TotC_{**}(A), b \pm \partial, B) = HC_*(Tot\overline{C}_{**}(A), b \pm \partial, B)$.

Théorème 4.2.4 *1. Il existe une longue suite exacte de Connes reliant l'homologie de Hochschild et l'homologie cyclique:*

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A,\partial) \longrightarrow HC_n(A,\partial) \longrightarrow HC_{n-2}(A,\partial) \longrightarrow HH_{n-1}(A,\partial) \longrightarrow \cdots$$

2. Il existe une suite spectrale vérifiant:

$$E^2_{pq} = \begin{cases} HH_{p-q}(A,\partial) & si\ 0 \leq p \leq q \\ 0 & sinon \end{cases} \Rightarrow HC_*(A,\partial)$$

On définit de même l'homologie cyclique rèduite $\overline{HC}_n(A,\partial)$. Si (A,∂) est une a.d.g.c. Avec $A_0 = k$, on a $HC_n(A,\partial) \cong HC_n(k) \bigoplus \overline{HC}_n(A,\partial)$, pour tout $n \geq 0$.

Théorème 4.2.5 *Si k est un corps, et si $f : (A,\partial) \to (B,\partial)$ est un quasi-isomorphisme, alors f induit des isomorphismes $HH_*(A,\partial) \cong HH_*(B,\partial)$ et $HC_*(A,\partial) \cong HC_*(B,\partial)$.*

Démostration: on filtre les bicomplexes $C_{pq}(A)$ et $C_{pq}(B)$ par la première filtration. On pose donc $F_p(C_{**}(A)) = \bigoplus_{i\leq p} C_{i*}(A)$. Alors $E^0_{p,*}(A) = \frac{F_pC_{**}(A)}{F_{p-1}C_{**}(A)} = C_{p*}(A)$ et $d^0 = \partial$.

On fait de même avec $C_{**}(B)$. Comme k est un corps, la formule de Künneth donne:

$$E^1_{pq}(A) = C_{pq}(H_*(A)) \xrightarrow{E^1(f)} C_{pq}(H_*(B))$$

de plus d^1 s'identifie à b (bord de Hochschild pour les complexes de Hochschild des algèbres $H_*(A)$ ou $H_*(B)$).

Par ailleurs $E^1(f)(h_0 \otimes \ldots \otimes h_p) = f_*(h_0) \otimes \ldots \otimes f_*(a_p)$ si $h_i \in H_*(A)$ et $f_* = H_*(f)$.

Par hypothèse, f_* est un isomorphisme, donc $E^1(f)$ est un isomorphisme. Les suites spectrales étant convergentes, on en deduit que $E^\infty(f)$ est un isomorphisme, et donc, par définition de l'homologie de Hochschild, f induit un isomorphisme $HH_*(A,\partial) \cong HH_*(B,\partial)$.

Pour montrer que $HC_*(A,\partial) \cong HC_*(B,\partial)$, on utilise la suite spectrale du théorème 4.2.4 .

4.3 Algèbre des formes différentielles d'une k-adgc (A, ∂)

Soit $A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ et $\partial : A_n \to A_{n-1}$. On pose $\overline{A} = \bigoplus_{n>0} \overline{A}_n$ ou $\overline{A}_n = A_{n-1}$. On considère le k-module graduée $A \otimes \overline{A}$ qu'on munit d'une structure d A-module graduée en posant $\alpha(a \otimes \overline{b}) = \alpha a \otimes \overline{b}$ si $\alpha, a \in A$, $\overline{b} \in \overline{A}$. On munit $A \otimes \overline{A}$ de la différentielle ∂ défini par $\partial(a \otimes \overline{b}) = \partial a \otimes \overline{b} - (-1)^{|a|} a \otimes \overline{\partial b}$

On vérifie que $(A \otimes \overline{A}, \partial)$ est un (A,∂)-module différentielle graduée. Soit N le sous A-module differentiel graduée engendré par les èlèments $1 \otimes \overline{ab} - (-1)^{|a|} a \otimes \overline{b} - (-1)^{|b|\cdot|\overline{a}|} b \otimes \overline{a}$. Posons $\Omega^1_{(A,\partial)} = (A \otimes \overline{A})/N$, c'est un (A,∂)-module différentielle graduée. On note par δ sa différentielle deduite de ∂ par passage au quotient.

On note $d : (A,\partial) \to \Omega^1_{(A,\partial)}$ définie par $d(a) = cl(1 \otimes \overline{a})$. Alors d est une application k-linéaire de degré $+1$ vérifiant

$$d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|} a(db)$$

On remarque que la différentielle δ vérifie $\delta d + d\delta = 0$.

Définition 4.3.1 *Le (A,∂)-module differentiel gradué $(\Omega^1_{(A,\partial)}, \delta)$ s'appelle le* **module des différentielles** *de l'a.d.g.c. (A,∂).*

On va maintenant restreindre notre étude au cas ou $(A,\partial) = (\Lambda V, \partial)$. Dans ce cas $A \otimes \overline{A} = \Lambda V \otimes \overline{\Lambda V} = \Lambda(V \bigoplus \overline{V})$ ou $\overline{V} = big_{n>0}\overline{V}_n$ et $\overline{V}_n = V_{n-1}$.

Lemme 4.3.2 *Si $(A, \partial) = (\Lambda V, \partial)$, alors $\Omega^1_{\Lambda V,\partial}$ est isomorphe à $(\Lambda V \otimes \overline{V}, \delta)$ et δ est défini par $\delta\overline{v} = -d(\partial v)$ ou d est la differemtielle $\Lambda V \to \Lambda V \otimes \overline{V}$ vérifiant:*

1. $dv = \overline{v}$
2. $d(ab) = (da)b + (-1)^{|a|}a(db)$ *si* $a, b \in \Lambda V$

Démostration: on vérifie que N est engendré comme A-module par les monômes en des èlèments $\overline{v}_i \in V$, de longueur superieure à 2, d'où $\Omega^1_{\Lambda V} = (\Lambda V \otimes \Lambda V)/(\Lambda V \otimes \Lambda^{\geq 2}\overline{V}) \cong \Lambda V \otimes \overline{V}$.

Le reste du lemme decoule de la définition de $\Omega^1_{(A,\partial)}$.

Notons $\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)} = \Lambda V \otimes \Lambda \overline{V} = \bigoplus_{n\geq 0} \Omega^n_{\Lambda V}$ ou $\Omega^n_{\Lambda V} = \Lambda V \otimes \Lambda^n \overline{V}$ et $\Lambda^n \overline{V}$ est le k-module engendré par les monômes de longueur n en les èlèments $\overline{v}_i \in V$. On munit $\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}$ de la différentielle d'algèbres δ qui prolonge δ sur $\bigoplus_{n\geq 1} \Omega^n_{\Lambda V}$ et qui vaut ∂ sur $\Omega^0 = \Lambda V$.

Définition 4.3.3 *$(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}, \delta)$ est une $(\Lambda V, \partial)$-algèbre différentielle graduée commutative, appélée* **algèbre des formes différentielles sur** *$(\Lambda V, \partial)$.*

On prolongue $d : \Lambda V \to \Omega^1_{\Lambda V}$ en $d : \Omega^n_{\Lambda V} \to \Omega^{n+1}_{\Lambda V}$ par

$$d(a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_n) = da_0 \wedge da_1 \wedge \ldots \wedge da_n \text{ si } a_i \in \Lambda V$$

Proposition 4.3.4 *$(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}, \delta, d)$ est un complexe mixte.*

Démostration: immédiate.

4.4 Théorème fondamental et conséquences

Théorème 4.4.1 *Soit $(\Lambda V, \partial)$ une k-a.d.g.c. ou k est un corps de caracteristique 0, alors $\Theta_{p,n-p} : \overline{C}_{n,n-p}(\Lambda V) \to (\Omega^p_{\Lambda V})_n$ définie par:*

$$\Theta_{p,*}(a_0 \otimes \ldots \otimes a_p) = \frac{(-1)^{\eta_p(\underline{a})}}{p!} a_0 da_1 \wedge \ldots \wedge da_p$$

ou $a_0 \in \Lambda V$, $a_i \in \Lambda V/k$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $\eta_p(\underline{a}) = |a_1| + |a_3| + |a_5| + \ldots$

vérifie:

1. $\Theta b = 0$, $\Theta\partial = \delta\Theta$, $\Theta B = d\Theta$
2. $\bigoplus \Theta_{**} : (Tot\overline{C}_{**}, b \pm \partial, B) \to (\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}, \delta, d)$ *est un morphisme de complexes mixtes qui induit:*
   (a) *un isomorphisme* $HH_*(\Lambda V, \partial) \cong H_*(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}, \delta)$
   (b) *un isomorphisme* $HC_*(\Lambda V, \partial) \cong HC_*(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}, \delta, d)$

Démostration:

1: Calculs fastidieux, la 1^{ere} et la 3^{eme} formules ont deja ete demontrées dans le cas non graduée.

2: On filtre le bicomplexe $\overline{C}_{pq}(\Lambda V)$ par la 2^e filtration: $F_p(\Lambda V) = \bigoplus_{j\leq p} C_{*j}(\Lambda V)$. On a alors $E^0_{pq} = C_{qp}(\Lambda V)$ et $d^0 = b$. On filtre $\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}$ par $F^p(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)})_n = \bigoplus_{i\geq n-p} (\Omega^i_{\Lambda V})_n$. On a $E^0_{p,q} = (\Omega^q_{\Lambda V})_{p+q}$ et $d^0 : E^0_{p,q} = (\Omega^q_{\Lambda V})_{p+q} \to E^0_{p,q-1} = (\Omega^{q-1}_{\Lambda V})_{p+q-1}$.

Les applications Θ_{**} induisent des applications $E^0(\Theta) : (E^0_{pq}(C_*(\Lambda V)) = C_{pq}(\Lambda V), d^0) \to (E^0_{pq}(\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}) = (\Omega^q_{\Lambda V})_{p+q}, d^0)$.

La formule pour $E^0(\Theta)$ est la même que pour Θ_{**}.

Une version graduée du théorème de Hochschild - Konstant - Rosemberg pour $A = \Lambda V$, facil à demontrer directement, montre que $E^1(\Theta) = H_*(E^0(\Theta)) : H_*(C_{**}(\Lambda V), b) \to \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$ est un isomorphisme. Un argument classique de suites spectrales implique alors 2(a). Le même argument, mais appliqué à la suite spectrale fondamentale d'homologie cyclique implique 2(b).

Théorème 4.4.2 *Si A est une k-algèbre commutative, k un corps de caractéristique 0 et $(\Lambda V, \partial)$ un modèle de A, alors on a des decompositions:*

1. $HH_n(A) \cong HH_n(\Lambda V, \partial) = \bigoplus_{p=1}^n H_n(\Omega^p_{(\Lambda V, \partial)}, \delta)$ $n \geq 1$
2. $HC_n(A) \cong HC_n(\Lambda V, \partial) = \bigoplus_{p=1}^n HC_n(\Omega^p_{(\Lambda V, \partial)}, \delta, d)$ $n \geq 1$, *ou* $HC_n(\Omega^p_{(\Lambda V, \partial)}, \delta, d)$ *est l'homologie total du bicomplexe:*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda V \otimes \Lambda^p \overline{V})_n \arrow[d, "\delta"'] & (\Lambda V \otimes \Lambda^{p-1} \overline{V})_{n-1} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"'] & \cdots \arrow[l] & (\Lambda V)_{n-p} \arrow[l] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \arrow[l] \\
(\Lambda V \otimes \Lambda^p \overline{V})_{n-1} \arrow[d, "\delta"'] & (\Lambda V \otimes \Lambda^{p-1} \overline{V})_{n-2} \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta"'] & \cdots \arrow[l] & (\Lambda V)_{n-p-1} \arrow[l] \arrow[d, "\partial"'] & 0 \arrow[l] \\
{} & {} & & {} &
\end{tikzcd}$$

3. *La longue suite exacte de Connes se scinde en longues suites exactes pour tout $p > 0$:*

$$\cdots \longrightarrow H_n(\Omega^p, \delta) \longrightarrow HC_n(\Omega^p, \delta, d) \longrightarrow HC_{n-2}(\Omega^{p-1}, \delta, d) \longrightarrow H_{n-1}(\Omega^p, \delta) \longrightarrow \cdots$$

Démostration: il suffit de remarquer que $\delta(\Omega^p_{\Lambda V}) \subseteq \Omega^p_{\Lambda V}$, et que $(\Omega^p_{\Lambda V})_n = 0$ si $p > n$.

4.5 λ-decomposition de l'homologie de Hochschild et de l'homologie cyclique d'une k-algèbre commutative ou k est un corps, $\mathbb{Q} \subseteq k$

Le group symmetrique S_n agit à gauche sur $C_n(A)$ par:

$$\sigma.(a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes a_0 \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$$

A partir de là, Gerstenhaber et Schack construisent, pour chaque $n \geq 1$, une famillie $e_n^{(p)}$, $1 \leq p \leq n$, d'èlèments de $\mathbb{Q}[S_n]$, idempotents et orthogonaux 2 à 2, appélés idempotents euleriéns car ils sont construits à partir d'une partition eulérienne de S_n.

Proposition 4.5.1 *(Gerstenhaber - Schack) On a:*

$$be_n^{(p)} = e_{n-1}^{(p)}$$

pour tout p, $1 \leq p \leq n$, pour tout n.

Proposition 4.5.2 *(Loday) On a:*

$$e_n^{(p)} B = B e_{n-1}^{(p-1)}$$

pour tout p, $1 \leq p \leq n$, pour tout n.

Posons alors $C_n^{(p)}(A) = e_n^{(p)}(C_n(A))$. On montre facilment:

Théorème 4.5.3 *On a une decomposition pour tout $n \geq 1$, appélée λ-decomposition:*

$$HH_n(A) = bi_{p=1}^{n} HH_n^{(p)}(A) \text{ ou } HH_n^{(p)}(A) = H_n(C_*(p)(A), b)$$

$$HC_n(A) = bi_{p=1}^{n} HC_n^{(p)}(A) \text{ ou } HC_n^{(p)}(A) = HC_n(C_*(p)(A), b, B)$$

Remarque: le théorème 4.5.3 s'entend facilment à la catégorie k-adgc.
On peut alors montrer:

Théorème 4.5.4 *Les isomorphismes du théorème 4.4.1 envoient, de maniere isomorphique, $HH_n^{(p)}(\Lambda V, \partial)$ sur $H_n(\Omega^p_{\Lambda V}, \delta)$ et $HC_n^{(p)}(\Lambda V, \partial)$ sur $HC_n(\Omega^p_{\Lambda V}, \delta, d)$*

Corollaire 4.5.5 *Soit A une k-algèbre commutative, alors les decompositions de $HH_*(A)$ et $HC_*(A)$, définies à partir de $\Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$ ou $(\Lambda V, \partial)$ est un modèle, sont independantes du modèle.*

Chapitre 5

Applications

5.1 Hypersurface de l'espace affine $\mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}$ dèfinies par un polynôme P homogène ayant seulement une singularité a l'origine

Définition 5.1.1 *On dit qu'un polynôme*

$P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]$ homogène non constant, a une singularite isolée en 0 si les equations $\frac{\partial P}{\partial x_i}(z_1, ..., z_r) = 0$, pour tout $i = 1, ..., r$ ont une unique solution $z_1 = z_2 = ... = z_r = 0$

Il resulte alors du théorème de Hilbert (Nullstellensatz) que $\mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(\frac{\partial P}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial P}{\partial x_r})$ est un anneau artinien, donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Notation: $\mu = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(\frac{\partial P}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial P}{\partial x_r}))$

Lemme 5.1.2 *Soit $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(P)$ ou $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]$. Alors $(\Lambda V = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r] \otimes E(y), \partial)$ avec $|x_i| = 0$, $|y| = 1$, $\partial y = P$, et $\rho : (\Lambda V, \partial) \to A$ définie par $\rho(x_i) = cl(x_i)$ dans A, $\rho(y) = 0$ est un modèle de A.*

Il resulte du chapitre 4 que $HH_*(A) = HH_*(\Lambda V, \partial) = H_*(\Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}, \delta)$ et $HC_*(A) = HC_*(\Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}, \delta, d)$.

Example: $r = 1$. $A = \mathbb{C}[x]/(x^{m+1})$, $m \geq 1$.

Alors $\Omega^*_{(\Lambda V, \partial)} = \mathbb{C}[x] \otimes E(\overline{x}, y) \otimes \mathbb{C}[\overline{y}]$, ou $|\overline{x}| = 1$, $|\overline{y}| = 2$ et $\delta y = x^{m+1}$, $\delta \overline{y} = -(m+1)x^m \overline{x}$ et $\delta = 0$ sinon. Un calcul direct et très facile nous donne:

$$\text{si } n \geq 1 \; HH_{2n}(A) = HH^{(n)}_{2n}(A) \cong k^m \; ; \; \overline{HC}_{2n}(A) = \overline{HC}^{(n)}_{2n}(A) \cong k^m$$

$$\text{si } n \geq 0 \; HH_{2n+1}(A) = HH^{(n+1)}_{2n+1}(A) \cong k^m \; ; \; \overline{HC}_{2n+1}(A) = 0$$

Les techniques de calcul developpées au chapitre 4 permettent, par des arguments plus compliqués, de généraliser les résultats de l'exemple précedent au cas de $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(P)$, r quelconque:

Théorème 5.1.3 *Soit $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]$ ayant seulement une singularité isolée à l'origine. On pose $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(P)$. Alors pour $n \geq r$ on a:*

1. r impair:

$$\left\{ \begin{array}{l} HH_n(A) = HH_n^{(\frac{n+r-1}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \\ \overline{HC}_n(A) = \overline{HC}_n^{(\frac{n+r-1}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \end{array} \right\} \text{ si } n \text{ pair}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} HH_n(A) = HH_n^{(\frac{n+r}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \\ HC_n(A) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } n \text{ impair}$$

2. r pair:

$$\left\{ \begin{array}{c} HH_n(A) = HH_n^{(\frac{n+r-1}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \\ HC_n(A) = HC_n^{(\frac{n+r-1}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \end{array} \right\} \text{ si } n \text{ impair}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} HH_n(A) = HH_n^{(\frac{n+r}{2})}(A) = \mathbb{C}^\mu \\ \overline{HC}_n(A) = 0 \end{array} \right\} \text{ si } n \text{ impair}$$

Commentaires sur ce théorème:

1. On rapelle que si A est lisse, le théorème de Hochschild - Konstant - Rosemberg entraine que $HH_n(A)$, pour tout $n > N$. On remarque ici que si $n \geq r$, alors $HH_n(A) \neq 0$ pour tout n. En fait, on voit facilment que $HH_n(A) \neq 0$ pour tout $n < 0$. On remarque aussi une periodicité d'ordre 2 pour l'homologie cyclique réduite.

Question 1: est-ce que si A n'est pas lisse, alors $HH_n(A) \neq 0$ pour tout n. C'est une formule d'une conjecture donnée par Rodicio en 1990. On verra des reponses à cette question au paragraph suivant.

Question 2: si $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(I)$ ou I est l'idéal d'une variété singulière, a-t-on toujours cette periodicité pour l'homologie cyclique. Que se passe t-il pou l'homologie de Hochschild?

2. On rapelle que $HH_*(A)$ est une algèbre graduée commutative. Il est facile de voir que la multiplication de $HH_*(A)$ respecte la λ-decomposition, on a:

$$HH_p^{(i)}(A) \times HH_q^{(j)}(A) \to HH_{p+q}^{(i+j)}(A)$$

On a alors un corollaire immediat du théorème 5.1.3:

Corollaire 5.1.4 *Soit $A = \mathbb{C}[x_1, ...x_r]/(P)$, P homogène ayant une seule singularité isolée, $r > 2$. Alors les produits de 2 éléments quelconques en degré superieure ou égal à r dans $HH_*(A)$, est trivial. (i.e. pour tout $\alpha \in HH_m(A)$, $m \geq r$, pour tout $\beta \in HH_n(A)$, $n \geq r$, $\alpha.\beta = 0$).*

Question 3: si $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(I)$, I idéal d'une variété singulière, quelle est la structure d'algèbre sur $HH_*(A)$?

5.2 Caracterisation des varietés lisses

Dans le paragraph 1, nous avons exhibé des algèbres non lisses ayant des groupes d'homologie de Hochschild non nuls en une infinité de degrés. Cela conduit a:

Conjeture de Rodicio (1990): Si A est une k-algèbre de type fini et k un corps de caracteristique 0, et s'il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $HH_n(A) = 0$, alors A est lisse sur k.

Cette conjeture à ete resolue, avec des hypothèses un peu differentes par plusieurs auteurs: Villamayor et le groupe BACH, Rodicio lui-même, Avramov et moi-même pour un corps k quelconque. Je vais donner la démonstration de Avramov - Vigué, en supposant k de caracteristique 0, mais le résultat général s'énnonce ainsi:

Théorème 5.2.1 *Si A est une algèbre de type fini sur un corps k, et s'il existent deux entiers i et j tels que $HH_{2i}(A) = HH_{2j+1}(A) = 0$, alors A est lisse sur k.*

Démostration: on va, en fait, montrer que A est geometriquement regulière. Posons $A = \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]/(I)$ ou I est un idéal $\neq 0$ de A

Si k' est un corps contenant k, il est claire que

$$HH_*(A \otimes k') = HH_*(A) \otimes k'$$

On peut donc se ramener à $k = \mathbb{C}$ et montrer que sous les hypothèses du théorème, A est regulière.

Soit M un idéal maximal de $\mathbb{C}[x_1, ..., x_r]$ contenant I, posons $\mathcal{M} = M/I$, alors $A_{\mathcal{M}} \cong \mathbb{C}[x_1, ..., x_r]_M/I_M$ et, pour tout p

$$HH_*^{(p)}(A_{\mathcal{M}}) = HH_*^{(p)}(A) \otimes_A A_{\mathcal{M}}$$

Si A n'est pas regulière, il existe alors un idéal maximal $\mathcal{M}$ tel que $A_{\mathcal{M}}$ n'est pas regulière. Par ailleurs, on voit que $HH_{2i}(A) = HH_{2j+1}(A) = 0$ implique la même propiété pour $A_{\mathcal{M}}$. On raissonne donc avec $A_{\mathcal{M}}$, anneau local non regulier.

Un résultat classique d'algèbre commutative montre que $A_{\mathcal{M}} \cong A_0/J$, ou A_0 est une $\mathbb{C}$-algèbre locale regulière telle que, si η est son idéal maximal, on a $J \subseteq \eta^2$. On va, comme au chapitre 4, utiliser un modèle de A_0/J dans la catégorie de $\mathbb{C}$-a.d.g.c.. Ce modèle à ete mis en evidence par Tate dans les années 60.

Proposition 5.2.2 *Soit $A_{\mathcal{M}} = A_0/J$, A_0 une $\mathbb{C}$-algèbre locale regulière d'idéal maximal η et $J \subseteq \eta^2$. Il existe un $\mathbb{C}$-espace vectoriel graduée $V = \bigoplus_{n \geq 1} V_n$, une différentielle ∂ sur $A_0 \otimes \Lambda V$ qui fasse de $(A_0 \otimes \Lambda V, \partial)$ une algèbre différentielle graduée commutative et un morphisme $\rho : (A_0 \otimes \Lambda V, \partial) \to A_0/J$ qui soit un quasi-isomorphisme. De plus, on a: $\partial(V_1) \subseteq \eta^2$, $\partial(V_p) \subseteq \eta V_{p-1} + \Lambda^+ V.\Lambda^+ V.(A_0 \otimes \Lambda V)$ si $p \geq 2$, $\Lambda^+ V = \Lambda V/k$.*

Dans ce cas, le théorème 4.2.5 implique que:

$$HH_n(A_{\mathcal{M}}) \cong\cong (A_0 \otimes \Lambda V, \partial)$$

pour tout $n \geq 0$.

Considerons $\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$, c'est une k-algèbre graduée commutative comme produit tensoriel d'algèbres graduées commutatives. Chacune est munie d'une différentielle d de degrée $+1$, on munit donc $\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$ d'une différentielle notée encore d défini par la formule

$$d(\alpha \otimes \beta) = d\alpha \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes d\beta$$

si $\alpha \in \Omega^*_{A_0}$, $\beta \in \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$.

On remarque que $A_0 \otimes \Lambda V$ est une sous-algèbre de $\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$. On prolongue alors la différentielle ∂ définie sur $A_0 \otimes \Lambda V$ en une différentielle d'algèbres δ définie sur $\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}$ par la formule $\delta d + d\partial = 0$. Comme $\partial = 0$ sur A_0, on a $\delta = 0$ sur $\Omega^*_{A_0}$.

Les théorèmes fondamentaux 4.4.1 et 4.5.4 du chapitre 4, adaptés à ce cas, s'ennoncent ainsi:

Théorème 5.2.3 *Il existe un isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués entre $HH_*(A_0 \Lambda V, \partial)$ et $H_*(\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}, \delta)$.*

De plus, pour tout $n \geq 0$, pour tout $p > 0$, on a:

$$HH_n^{(p)}(A_0) \cong HH_n^{(p)}(A_0 \otimes \Lambda V, \partial) \cong H_n([\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}]^p, \delta)$$

Fin de la démonstration du théorème 5.2.1 à partir de ce résultat:

On a donc $A_{\mathcal{M}} = A_0/J$. Comme $A_{\mathcal{M}}$ n'est pas local regulier, $J \neq 0$. Alors, dans le modèle de $A_{\mathcal{M}}$ donné par la proposition 5.2.2, on a $V_1 \neq 0$, car $dV_1 = J$. Posons $\eta = (f_1, ..., f_l)$ ou $(f_1, ..., f_l)$ est une suite regulière engendrant η. Soit $z \in V_1$ possons $Z_i = df_1 \wedge ... \wedge df_i$ si $i \leq l$, alors $Z_i \in \Omega^i_{A_0}$, $\delta Z_i = 0$ et Z_i n'est pas un bord pour δ, donc la classe $[Z_i]$ de Z_i dans $H_i(\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V, \partial)}, \delta)$ est non nule.

L'élément dz est de degré 2 dans $\Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}$ et on peut etudier, pour $n \geq 0$, $Z_{l+2n} = df_1 \wedge ... \wedge df_l \wedge (dz)^n \in \Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}$, $|Z_{l+2n}| = l+2n$. On vérifie facilement que $\delta(Z_{l+2n}) = 0$, car $\delta(df_i) = 0$ et $\delta(dz) \in (df_1, ..., df_l).\Omega^*_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V,\partial)}$. L'hypothèse de minimalité de ∂ dans le modèle donné par la proposition 5.2.2, entraine que Z_{l+2n} ne peut pas être de la forme $\delta(x)$. On a donc construit une suite d'éléments $[Z_{l+2n}]$ dans $HH_{l+2n}(A_0 \otimes \Lambda V, \partial)$ qui sont non nuls. Ceci achêve la démonstration du théorème 5.2.1.

5.3 Caracterisation des variétés localement intersections complètes

Définition 5.3.1 *Soit $A = k[x_1, ..., x_r]/I$, on dit que A est une* **intersection complète locale** *si pour tout idéal maximal M de $k[x_1, ..., x_r]$ contenant I, l'idéal I_M peut être engendré par une suite regulière.*

Théorème 5.3.2 *(Feigin - Tsygan, Vigué): Soit A une algèbre de type fini sur un corps k de caracteristique* 0. *On suppose que A est une intersection complète locale, alors on a:*

$$HH_n^{(p)}(A) = 0, \textit{ pour tout } p < \frac{n}{2}, \textit{ pour tout } n \geq 0$$

Démostration: on a vu que si M est un idéal maximal de $k[x_1, ..., x_r]$ contenant I et si $\mathcal{M} = M/I$, alors

$$HH_n^{(p)}(A) = 0 \iff HH_n^{(p)}(A_{\mathcal{M}}) = 0, \text{ pour tout } \mathcal{M} \text{ idéal maximal de } A$$

On se ramene donc à $A_{\mathcal{M}} = A_0/(f_1, ..., f_l)$ ou $(f_1, ..., f_l)$ est une suite regulière contenue dans η^2, si η est l'idéal maximal de A_0.

Possons $V_1 = \bigoplus_{i=1}^l ky_i$ et considerons $(A_0 \otimes \Lambda V_1, partial)$ avec $\partial y_i = f_i$, pour $i \in [1, ..., l]$. C'est, exactement le complexe de Koszul associé à la suite $(f_1, ..., f_l)$ regulière dans A_0. On a donc $H_n(A_0 \otimes \Lambda V_1, \partial)$ est un modèle de Tate de $A_{\mathcal{M}}$.

On a vu, théorème 5.2.3, que:

$$HH_n^{(p)}(A_{\mathcal{M}}) = HH_n^{(p)}(A_0 \otimes \Lambda V_1, \partial) = H_n([\bigoplus_{i+j=p} \Omega^i_{A_0} \otimes \Omega^j_{\Lambda V}], \delta)$$

$\Omega^i_{A_0} = A_0 \otimes \Lambda^i(\bigoplus_{i=1}^l kdf_i)$ et $\Omega^j_{\Lambda V} = \Lambda V_1 \otimes \Lambda^j(dV_1)$. On a donc

$$HH_n^{(p)}(A_{\mathcal{M}}) = H_n(A_0 \otimes \Lambda V_1 \otimes (\bigoplus_{i+j=p} (\Lambda^i(\bigoplus_{i=1}^l kdf_i) \otimes \Lambda^j(dV_1))), \delta)$$

Comme $\rho : (A_0 \otimes \Lambda V, \delta) \to A$ est un quasi-isomorphisme, on montre qu'on a un quasi-isomorphisme $\rho \otimes Id$: $(A_0 \otimes \Lambda V_1 \otimes \Lambda(dV_1) \otimes \Lambda(\bigoplus kdf_i), \delta) \to (A \otimes \Lambda(dV_1) \otimes \Lambda(\bigoplus df_i), \overline{\delta})$ ou $\overline{\delta}$ est défini par $(\rho \otimes Id)\delta = \overline{\delta}(\rho \otimes Id)$.

On a donc

$$HH_n^{(p)}(A) = H_n(A \otimes (\bigoplus_{i+j=p} (\Lambda^i(\bigoplus_{i=1}^l kdf_q) \otimes \Lambda^j(dV_1))), \overline{\delta})$$

Un élément non nul de $A \otimes (\bigoplus_{i+j=p}(\Lambda^i(\bigoplus_{i=1}^l kdf_q) \otimes \Lambda^j(dV_1)))$ est de dégré $i + 2j = 2(i + j) - i = 2p - i$; donc $n \leq 2p$, soit $p \geq n/2$. On a une reciproque de ce théorème, plus difficile à demontrer.

Théorème 5.3.3 *Soit A une algèbre de type fini sur un corps de caracteristique* 0. *Supposons qu'il existe un entier N tel que pour tout $n > N$, pour tout $p < n/2$, $HH_n^{(p)}(A) = 0$, alors A est une intersection complète locale.*

Ideé de la démonstration: on écrit $A_{\mathcal{M}} = A_0/J$ et on considère le modèle de Tate $(A_0 \otimes \Lambda V, \partial)$. Si J n'est pas engendré par une suite regulière, on montre que $V = \bigoplus_{n\geq 1} V_n$, avec $V_n \neq 0$ pour tout n. On utilise un élément $z \in V_3$, $z \neq 0$, de sorte que $dz \in (dV)_4$, et donc $(dz)^n \in (\Omega^n_{l_v})_{4n}$.

On construit, à partir de là, des classes d'homologie non nulles dans $H_n((\Omega^0_{A_0} \otimes \Omega^*_{(\Lambda V,\partial)})^p, \delta)$ pour n assez grand et $p < n/2$.

5.4 Conclusion

L'homologie de Hochschild des algèbres commutatives apparait comme une généralisation, au cas non lisse, de l'algèbre des formes différentielles Ω^*_A, et l'homologie cyclique comme une généralisation de la cohomologie de de Rham d'une algèbre.

Question: Caracteriser, en termes d'homologie de Hochschild, les propiétés algébriques des algèbres commutatives: Macaulay, Gorenstein,...

References

Quelque titres parmi beaucoup d'autres...

LIVRES

- A.CONNES: Geometrie non commutative. Intereditions Paris (1990)
- J.L.LODAY: Cyclic homology. Springer Verlag (1992)
- C.WEIBEL: An introduction to homological algebra. Cambridge Univerity press (1994)

ARTICLES dans des revues

- L.Avramov and M.Vigué: Hochschild homology criteria for smoothness. Inter. Research Math. Notes (Duke) **65** (1992) 17-25.
- D.Burghelea and M.Vigué: Cyclic homology of commutative algebras. Lect. Notes Math. **1318** (1988) 51-72.
- A.Campillo, J.Guccione, J.J.Guccione, M.J.Redondo, A.Solotar, O.Villamayor: A Hochschild homology criterium for smoothness of an algebra. Comment Math. Elv. **69** (1994) 163-168.
- B.L.Feigin and Tsygan: Additive K-theory. Lect. Notes Math. **1289** (1987) 97-207.
- M.Gerstenhaber and Schack: A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology. J. Pure Alg. **48** (1987) 229-247
- T.Goodwillie: Cyclic homology, derivations and the free loop space. Topology **24** (1985) 187-215.
- G.Hochschild, B.Konstant, A.Rosemberg: Differential forms on regular affine algebras. Trans. A.M.S. **102** (1962)
- M.Karoubi: Homologie cyclique et K-theorie. Asterisque **149** (1987).
- C.Kassel: Cyclic homology, comodules and mixed complexes. J. Alg. **107** (1987) 195-216.
- J.L.Loday and D.Quillen: Cyclic homology and the Lie algebra homology of matrices. Comment. Math. Helv. **59** (1984) 565-591.
- M.Vigué: Cyclic homology of algebraic hypersurfaces. J. Pure Appl. Alg. **72** (1991) 95-108.
- M.Vigué: Homologie et K-thèorie des algèbres commutatives - Caractèrisation des intersectiones complètes. J. Alg **173** (1995) 679-695.