ISSN 1853-709X

Fascículo 41

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

M. C. Calvo, G. Keilhauer

Cuádricas

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 41

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Cursos y Seminarios

Fascículo 41

Cuádricas

Guillermo Keilhauer
María del Carmen Calvo

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Ciudad Universitaria - Pabellón I
1428 Buenos Aires, ARGENTINA

Cuádricas

Guillermo Keilhauer
María del Carmen Calvo

Departamento de Matemática - F.C.E. y N. - U.B.A.

Abril 1998

Contenido

Página

Generalidades

En esta primera parte nos dedicaremos a fijar la notación que vamos a usar y a dar algunas definiciones y resultados básicos sobre formas bilineales y cuadráticas definidas sobre un espacio vectorial real de dimensión finita, puesto que las cuádricas que vamos a clasificar estarán definidas sobre un espacio de este tipo.

Con el objeto de simplificar los enunciados convendremos en que, de ahora en más, $\mathbb{V}$ denota siempre a un espacio vectorial real de dimensión (finita) n.

DEFINICIÓN

Una **forma bilineal simétrica** *sobre* $\mathbb{V}$ *es una función* $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *que satisface*

(i) ϕ *es lineal en cada variable*

(ii) $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ *si* $x, y \in \mathbb{V}$

NOTACIONES Y COMENTARIOS

Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$.

1. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$, entonces

$$\phi(v, w) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \phi(v_i, v_j) = (x_1 \cdots x_n) \ . \ A \ . \ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donde $A = \|\phi(v_i, v_j)\| \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $A = A^t$ (traspuesta).

La matriz A se denomina la **matriz de ϕ respecto de B** y se la nota $A = \|\phi\|_B$.

2. Si $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ es otra base de $\mathbb{V}$, será $v = \sum_{i=1}^{n} x'_i v'_i$, $w = \sum_{j=1}^{n} y'_j v'_j$ y

$$\phi(v, w) = (x'_1 \cdots x'_n) \ . \ A' \ . \ \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

donde $A' = \|\phi(v'_i, v'_j)\|$.

Si $\|b_{ij}\| = C(B,B')$ es la matriz de cambio de base, podemos escribir $v_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}v'_k$, $v_j = \sum_{h=1}^{n} b_{hj}v'_h$. Reemplazando estas expresiones en $\phi(v_i,v_j)$, se obtiene la siguiente relación:

$$A = C(B,B')^t \, . \, A' \, . \, C(B,B')$$

3. Como $C(B,B') \in GL(n,\mathbb{R})$ resulta que $\|\phi\|_B$ y $\|\phi\|_{B'}$ tienen el mismo rango; es decir, el valor '$\text{rg}\,(\|\phi\|_B)$' no depende de la base B; por lo tanto, está bien definido el **rango de** ϕ como el número
$$\mathbf{r}(\phi) = \text{rg}\,(\|\phi\|_B)$$
cualquiera sea la base B de $\mathbb{V}$.

4. El conjunto $N(\phi) = \{v \in \mathbb{V} / \phi(v,w) = 0 \text{ si } w \in \mathbb{V}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ denominado el **núcleo de** ϕ.

   Si $B = \{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$, entonces $\phi(v,w) = \phi(w,v) = (y_1 \cdots y_n) \, . \, A \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Luego,
$$N(\phi) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Big/ \|\phi\|_B \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
   Y, en consecuencia, $\dim(N(\phi)) = n - \mathbf{r}(\phi)$

   NOTA: si $\mathbf{r}(\phi) = n$, se dice que ϕ es **no degenerada**. Es fácil ver que la condición anterior es equivalente al hecho de ser $N(\phi) = 0$.

5. Debido al inciso anterior es $\phi = 0$ si y sólo si $N(\phi) = \mathbb{V}$

6. Dada una forma bilineal $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, podemos definir una aplicación –que resulta lineal– entre $\mathbb{V}$ y $\mathbb{V}^*$ †, de la siguiente manera
$$\begin{aligned} L_\phi : \mathbb{V} &\longrightarrow \mathbb{V}^* \\ v &\mapsto L_\phi(v) : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad x \mapsto \phi(v,x) \end{aligned}$$
   i) $L_\phi^{-1}(0) = N(\phi)$. Luego, L_ϕ es isomorfismo si y sólo si ϕ es no degenerada.

   ii) Si $\alpha \in \mathbb{V}^*$, $L_\phi^{-1}(\alpha) = \{v \in \mathbb{V} / \phi(v, \ ) = \alpha\}$. De modo que,

† $\mathbb{V}^* = \{\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R} \ / \ \varphi \text{ es lineal}\}$; i.e., el espacio dual de $\mathbb{V}$

o bien $L_\phi^{-1}(\alpha) = \varnothing$, si $\alpha \notin \mathrm{Im} L_\phi$

o bien $L_\phi^{-1}(\alpha)$ es la variedad lineal $v + N(\phi)$, si $\alpha = L_\phi(v)$.

7. Sea $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x) = \phi(x, x)$; entonces ψ satisface
   (i) $\psi(a.x) = a^2\psi(x)$
   (ii) $\psi(x + y) = \phi(x + y, x + y) = \psi(x) + 2\phi(x, y) + \psi(y)$
   Con lo cual,
   $$\phi(x, y) = \tfrac{1}{2}\left(\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)\right)$$
   Es decir, se puede reconstruir ϕ a partir de ψ.

DEFINICIÓN

Una **forma cuadrática sobre** $\mathbb{V}$ *es una función* $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *que satisface*

(i) $\psi(a.x) = a^2\psi(x)$ *si* $x \in \mathbb{V}$, $a \in \mathbb{R}$

(ii) Si $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *se define por* $\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y)\right)$, *entonces* ϕ *es una forma bilineal ('simétrica' por construcción)*

NOTA

La forma cuadrática ψ construída en 7. se denomina la FORMA CUADRÁTICA ASOCIADA A ϕ. Análogamente, dada ψ, la forma bilineal ϕ construída según la definición anterior se denomina la FORMA BILINEAL ASOCIADA A ψ.

OBSERVACIONES

1. Sea ψ la forma cuadrática asociada a ϕ. Entonces: $\phi = 0$ si y sólo si $\psi = 0$.
   Es consecuencia directa de 7.

2. Supongamos que $\phi \neq 0$ y sea $v \in \mathbb{V}$ tal que $\phi(v, v) \neq 0$. El hecho de ser ϕ bilineal obliga a que sea $v \neq 0$; entonces, el conjunto
   $$H_v = \{u \in \mathbb{V} / \phi(u, v) = 0\}$$
   resulta un hiperplano de $\mathbb{V}$ que no contiene a v. Por lo tanto, $\mathbb{V} = H_v \oplus [v]$ ($[v]$ = subespacio generado por v).

   H_v se denomina el **hiperplano polar de** v **respecto de** ϕ y también el COMPLEMENTO ORTOGONAL DE v RESPECTO DE ϕ.

   Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$, $v = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 v_i$, entonces
   $$H_v = \left\{ u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \Big/ (x_1 \cdots x_n) \,.\, \|\phi\|_B \,.\, \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Diagonalización de Formas Bilineales Simétricas

Proposición 1

Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, entonces existe una base $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{V}$ tal que $\|\phi(u_i, u_j)\|$ es diagonal.

DEMOSTRACIÓN:

◇ Caso $\phi = 0$

Cualquier base de $\mathbb{V}$ satisface esa condición, ya que $\|\phi\|_B = 0$ para toda base B.

◇ Caso $\phi \neq 0$

La observación anterior garantiza la existencia de un vector $u_1 \in \mathbb{V}$ tal que $\psi(u_1) \neq 0$. Consideremos el subespacio de $\mathbb{V}$

$$H_1 = \{u \in \mathbb{V} / \phi(u, u_1) = 0\}$$

Evidentemente es $\dim(H_1) = n - 1$ y $\mathbb{V} = [u_1] \oplus H_1$. Además, si $\mathcal{B}_1$ es una base de H_1 y como base de $\mathbb{V}$ tomamos $\mathcal{B} = \{u_1\} \cup \mathcal{B}$, resulta

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \psi(u_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \|\phi|_{H_1}\|_{\mathcal{B}_1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Es ahora claro que para concluir la demostración basta aplicar –inductivamente– el procedimiento anterior.

Corolario 2

Con las notaciones de la proposición anterior, si $\mathbf{r}(\phi) = r$, existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ tal que, para algún $0 \leq s \leq r$, es

$$\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} 1 & {\scriptstyle s} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & {\scriptstyle r\text{-}s} & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En tal caso, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$, se tiene

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2$$

DEMOSTRACIÓN:

De acuerdo con la proposición anterior, existe una base $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ tal que $\|\phi\|_{B'}$ es diagonal. Reordenando la base, si fuera necesario, podemos suponer que

$$\|\phi\|_{B'} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a_s & & & & & \\ & & & a_{s+1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & a_r & & \\ & & & & & & a_{r+1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & a_n \end{pmatrix}$$

con $a_i > 0$ si $i = 1, \ldots, s$, $a_{s+j} < 0$ si $j = 1, \ldots, r-s$ y $a_j = 0$ si $j > r$.

Siendo $\psi(u_i) = a_i$ para $i = 1, \ldots, n$, si definimos

$$v_i = \frac{u_i}{\sqrt{a_i}} \ (i = 1, \ldots, s) \qquad v_{s+i} = \frac{u_{s+i}}{\sqrt{-a_{s+i}}} \ (i = 1, \ldots, r-s) \qquad v_j = u_j \ (j > r)$$

la base $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ satisface lo pedido.

DEFINICIÓN

En la situación anterior, la base 'ordenada' $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ se denomina una **base adaptada a** ϕ *o* **a** ψ*; o bien, una* **base ortonormal respecto de** ϕ.

EJEMPLO

Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x, y) = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La base $B = \{(1,0,0), (0,0,1), (1,-1,1)\}$, de $\mathbb{R}^3$, es adaptada a ϕ puesto que

$$\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí: $\mathbf{r}(\phi) = 2$ y $s = 1$.

Veremos a continuación que el número 's' queda unívocamente determinado por la forma bilineal; es decir, no depende de la base adaptada considerada.

Proposición 2

Sea ϕ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$ de rango r y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ bases adaptadas a ϕ; es decir,

$$\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (s,\ r\text{-}s) \quad , \quad \|\phi\|_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (s',\ r\text{-}s')$$

Entonces $s = s'$.

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos los siguientes subespacios de $\mathbb{V}$

$$V^+ = [v_1, \ldots, v_s] \ , \ V^- = [v_{s+1}, \ldots, v_r] \ , \ V^\circ = N(\phi)$$
$$W^+ = [v_1', \ldots, v_{s'}'] \ , \ W^- = [v_{s'+1}', \ldots, v_r']$$

Queremos probar la igualdad: $\dim(V^+) = \dim(W^+)$.
Notemos, en principio, que $W^+ \cap (V^- \oplus V^\circ) = \{0\}$
En efecto,

supongamos que existe $x \neq 0$, con $x \in W^+$ y $x \in V^- \oplus V^\circ$; luego, $\phi(x,x) > 0$ y $\phi(x,x) \leq 0$, lo que es absurdo. En consecuencia, $W^+ \cap (V^- \oplus V^\circ) = \{0\}$.
Esto nos permite afirmar

$$\begin{aligned} n \geq \dim(W^+ + V^- \oplus V^\circ) &= \dim(W^+) + \dim(V^-) + \dim(V^\circ) \\ &= \dim(W^+) + n - \dim(V^+) \end{aligned}$$

Luego, $\dim(V^+) \geq \dim(W^+)$. Por simetría se obtiene la otra desigualdad.
De modo que necesariamente es $\dim(V^+) = \dim(W^+)$.

Este resultado garantiza que no hay ambigüedad en la siguiente

DEFINICIÓN

Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, el número '$s = \dim(V^+)$' se denomina el **índice de** *ϕ (o de ψ: forma cuadrática asociada) y se lo nota índ(ϕ) (índ(ψ)), respectivamente.*

Ejercicios

1. *Determinar si las siguientes formas bilineales son simétricas.*
   a) $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \phi(x,y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$
   b) $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \phi(x,y) = -x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$
   c) $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \phi(x,y) = x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$

2. *Para las formas bilineales simétricas del ejercicio anterior, calcular el núcleo y el rango.*

3. *Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por $\phi(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_3$.*
   a) *Hallar la transformación lineal $L_\phi : \mathbb{R}^3 \to (\mathbb{R}^3)^*$ asociada a ϕ.*
   b) *Sea $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ definida por $\varphi(x) = 2x_1 - x_2 + x_3$; encontrar $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = \phi(u,x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.*

4. *Hallar en cada caso el hiperplano polar H_v de v respecto de ϕ*
   a) $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = (x_1x_2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad v = (1,0)$
   b) $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\phi(x,y) = (x_1x_2x_3)\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad v = (1,-2,3)$

5. *Para cada una de las siguientes formas bilineales simétricas en $\mathbb{R}^n$, hallar una base adaptada y calcular rango e índice*
   a) $n = 2$, $\phi(x,y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$
   b) $n = 3$, $\phi(x,y) = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 - x_3y_3$

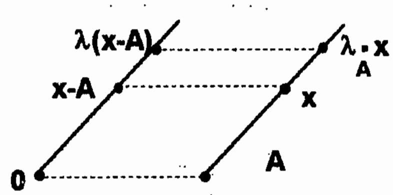
Estructura afín sobre $\mathbb{V}$

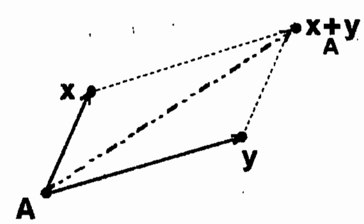
Dado $A \in \mathbb{V}$, podemos interpretar a $\mathbb{V}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial —con origen A— definiendo las operaciones

$$x \underset{A}{+} y = x + y - A$$

$$\lambda \underset{A}{\cdot} x = A + \lambda(x - A)$$

si $x, y \in \mathbb{V}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$





Dicho espacio vectorial se representa con $\mathbb{V}_A$.

Como '*conjuntos*' $\mathbb{V}_A = \mathbb{V}$, pero como espacios vectoriales sólo coinciden cuando $A = 0$ (origen de $\mathbb{V}$).

DEFINICIÓN

Un subconjunto no vacío $T \subset \mathbb{V}$ se denomina una **variedad lineal** *de $\mathbb{V}$ si T es subespacio de $\mathbb{V}_A$ cualquiera sea $A \in T$*

OBSERVACIÓN

Son equivalentes:

⋆ $T \subset \mathbb{V}$ es una variedad lineal de $\mathbb{V}$

⋆ T es subespacio de $\mathbb{V}_A$ para algún $A \in \mathbb{V}$

⋆ Existen $\mathbb{S}$ subespacio de $\mathbb{V}$ y $A \in T$ tales que $T = A + \mathbb{S}$

DEFINICIÓN

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales. Una función $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice una **aplicación afín** *si para todo $A \in \mathbb{V}$, la función $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{W}_{f(A)}$ es una transformación lineal.*

DEFINICIÓN

Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales de la misma dimensión. Una función $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se dice un **isomorfismo afín** *si para todo $A \in \mathbb{V}$, la función $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{W}_{f(A)}$ es un isomorfismo lineal.*

OBSERVACIÓN

Son equivalentes

⋆ $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es un isomorfismo afín.

⋆ Existe $A \in \mathbb{V}$ tal que $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{W}_{f(A)}$ es isomorfismo lineal.

⋆ Para todo $A \in \mathbb{V}$ es $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{W}_{f(A)}$ un isomorfismo lineal

⋆ Existe $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ isomorfismo lineal tal que $f = f(0) + g$.

NOTA

El conjunto de isomorfismos afines de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ constituye un grupo para la composición. Se llama GRUPO AFÍN y se lo nota $GA(\mathbb{V})$.

EJERCICIOS

6. *Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ y $A = (1,1)$. Si $x = (1,2)$ e $y = (3,-1)$, calcular y graficar*

$$x \underset{A}{+} y \quad ; \quad x \underset{A}{-} y \quad ; \quad 2 \underset{A}{.} x \underset{A}{+} 3 \underset{A}{.} y \quad ; \quad 2 \underset{A}{.} x \underset{A}{-} 3 \underset{A}{.} y$$

7. *Sean A, $B \in \mathbb{V}$. Consideremos la función $t_{AB} : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}_B$ definida por $t_{AB}(x) = x \underset{A}{+} B$.*

a) *Interpretar geométricamente la función* t_{AB}

b) *Probar que* $t_{AB}(x) = x \underset{B}{-} A$

c) *Probar que* t_{AB} *es un isomorfismo. ¿Quién es* t_{AB}^{-1}*?*

NOTA: t_{AB} *se denomina el isomorfismo canónico entre* $\mathbb{V}_A$ *y* $\mathbb{V}_B$, *o bien la traslación de* $\mathbb{V}_A$ a $\mathbb{V}_B$

8. *Sean en* $\mathbb{R}^2$ *los puntos* $A_1 = (1,-1)$, $A_2 = (1,1)$ *y* $A_3 = (2,1)$. *Sean en* $\mathbb{R}^3$ *los puntos* $B_1 = (1,2,0)$, $B_2 = (2,0,0)$ *y* $B_3 = (-1,1,0)$.
   a) *Hallar la forma explícita de la única aplicación afín* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *tal que* $g(A_i) = B_i$ *para* $1 \leq i \leq 3$
   b) *Hallar una aplicación afín* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que* $f(B_i) = A_i$ *para* $1 \leq i \leq 3$. *¿Es* f *única?*

Estructura euclídea sobre $\mathbb{V}$

Una forma bilineal simétrica $<,>$ sobre $\mathbb{V}$, con $\text{índ}(<,>) = n$, se llama PRODUCTO INTERNO de $\mathbb{V}$.

Notemos que si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ adaptada a $<,>$, la matriz de $<,>$ en esa base es la identidad; de donde, en particular se obtiene que $< x, x > \geq 0$ cualquiera sea $x \in \mathbb{V}$ y además $< x, x >= 0$ sólo si $x = 0$, ya que $< x, x >= \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ †.

Esto, junto con otras propiedades de $<,>$, permite introducir una manera de medir a los vectores de $\mathbb{V}$ y de definir la noción de ángulo entre ellos. Esto lo veremos en la sección siguiente.

Pensando en la estructura afín del espacio, el hecho de tener un producto interno en $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0$ nos permite reproducirlo —vía el isomorfismo afín $f(x) = x - A$— en cada $\mathbb{V}_A$, de la siguiente manera

$$<,>_A: \mathbb{V}_A \times \mathbb{V}_A \to \mathbb{R} \qquad , \qquad < x, y >_A = < f(x), f(y) > = < x - A, y - A >$$

Esta definición asegura que todo vector trasladado a cualquier punto $B \in \mathbb{V}$ mantiene, en $\mathbb{V}_B$, la misma longitud que tenía en $\mathbb{V}$. También garantiza la preservación de ángulos.

A esto lo llamamos la ESTRUCTURA EUCLÍDEA sobre $\mathbb{V}$.

† Una forma bilineal con esta propiedad se llama **definida positiva**

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

1. Recordemos que dado un endomorfismo $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ se define el endomorfismo traspuesto $\alpha^t : \mathbb{V}^* \to \mathbb{V}^*$ por $\alpha^t(\gamma)(v) = \gamma(\alpha(v))$.
   Siendo $<,>$ no degenerada † la aplicación $L_{<,>} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ resulta un isomorfismo. Miremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{V} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "L_{<,>}"'] & \mathbb{V} \arrow[d, "L_{<,>}"] \\
\mathbb{V}^* \arrow[r, "\alpha^t"'] & \mathbb{V}^*
\end{tikzcd}$$

   Si fuera conmutativo, tendríamos $\alpha^t \circ L_{<,>} = L_{<,>} \circ \alpha$, lo que equivale a decir que para todo $u, v \in \mathbb{V}$

$$< v, \alpha(u) >=< \alpha(v), u >$$

   Hay ejemplos de endomorfismos α que no satisfacen esta relación; por eso, a los que sí lo cumplen se les da un nombre: ENDOMORFISMOS AUTOADJUNTOS. La razón de este nombre es que al endormorfismo $\alpha^* = L_{<,>}^{-1} \circ \alpha^t \circ L_{<,>}$ se lo llama ADJUNTO de α y claramente los autoadjuntos son los que verifican $\alpha^* = \alpha$.

2. Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ se dice AUTOVALOR de A si existe $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$, tal que $v.A = \lambda.v$. Al vector v se lo llama AUTOVECTOR de A. Es fácil verificar que los autovalores de una matriz A son exactamente las raíces del polinomio $P(t) = \det(A - t.I)$.

3. Sean $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ un endomorfismo y B, B' bases de $\mathbb{V}$. La relación $\|\alpha\|_B = C(B, B')^t \,.\, \|\alpha\|_{B'} \,.\, C(B', B)^t$ y propiedades del determinante muestran que los autovalores de $\|\alpha\|_B$ y de $\|\alpha\|_{B'}$ coinciden. Esto nos permite hablar —sin ambigüedades— de los *autovalores de un endomorfismo* como los de su matriz respecto de una base arbitraria del espacio.

4. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal respecto de $<,>$ se comprueba fácilmente que

$$\|\alpha^*\|_B = \|\alpha\|_B^t$$

   Y de aquí es inmediato que, si α es autoadjunto, su matriz en cualquier base ortonormal es simétrica.

---

† $\mathbf{r}(<,>) = n$

Consecuencia importante: un endomorfismo autoadjunto tiene todos sus autovalores reales y además existe una base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovectores. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores de un tal endomorfismo α y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de autovectores de α resulta claro que

$$\|\alpha\|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5. Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$. Entonces existe un único endomorfismo $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\phi(x, y) =< \alpha(x), y >$. Además α resulta autoadjunto. En efecto,
para definir α basta hacerlo sobre una base ortonormal de $\mathbb{V}$, digamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$; se tiene : $\alpha(v_i) = \sum_{j=1}^{n} < \alpha(v_i), v_j > v_j$. Y como debe cumplir $< \alpha(v_i), v_j >= \phi(v_i, v_j)$, basta definir α como el único endomorfismo que satisface $\|\alpha\|_B = \|\phi\|_B$.
Finalmente, la simetría de ϕ hace que α sea autoadjunto.

6. Se deduce de 3. que si ϕ es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ (respecto de $<,>$) en $\mathbb{V}$ tal que

$$\|\phi\|_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores (todos reales) de α; i.e., los autovalores de $\|\phi\|_B$, para cualquier base ortonormal (respecto de $<,>$) B de $\mathbb{V}$.

7. Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, la base canónica E es ortonormal respecto del producto interno canónico. Luego, $\|\alpha\|_E = \|\phi\|_E$ y por lo tanto, los autovalores y autovectores buscados son simplemente los de la matriz $\|\phi\|_E$.

8. Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales con producto interno. Un isomorfismo (lineal) $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se denomina una TRANSFORMACIÓN ORTOGONAL si $< f(x), f(y) >=< x, y >$ para todo $x, y \in \mathbb{V}$.
Denotamos con $\mathcal{O}(\mathbb{V})$ al conjunto de las transformaciones ortogonales de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$.

9. Sean $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales con producto interno de la misma dimensión. Un isomorfismo afín $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ se denomina una ISOMETRÍA de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$ si para cada $A \in \mathbb{V}$ (equivalentemente, para todo $A \in \mathbb{V}$) $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{W}_{f(A)}$ transforma bases ortonormales de $\mathbb{V}_A$ en bases ortonormales de $\mathbb{W}_{f(A)}$.

Denotamos con $\mathcal{I}(\mathbb{V})$ al conjunto de todas las isometrías de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$.

Apelando a algunos resultados anteriores se prueba que

$$f \in \mathcal{I}(\mathbb{V}) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } g \in \mathcal{O}(\mathbb{V}) : f = f(0) + g$$

10. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial y $<,>$ un producto interno en $\mathbb{V}$. Dado $x \in \mathbb{V}$, se llama **norma** de x al número real $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$. Es inmediato verificar que si f es un endomorfismo de $\mathbb{V}$, entonces

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{V}) \quad \Longleftrightarrow \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

EJERCICIOS

9. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$

a) Probar que ϕ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

b) Construir una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal respecto de ϕ.

10. Determinar para qué valores a, $b \in \mathbb{R}$ resulta un producto interno en $\mathbb{R}^3$ la forma bilineal $\phi(x,y) = a.x_1y_1 + b.x_1y_2 + b.x_2y_1 + b.x_2y_2 + (1+b).x_3y_3$

11. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$

$S_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/2x_1 - x_2 = 0\}$

$S_2 = [(1,1,1),(1,0,,1)]$

12. Hallar una base ortonormal para cada uno de los subespacios del ejercicio anterior.

Métrica en un espacio euclídeo

Todo producto interno $<,>$ sobre $\mathbb{V}$ determina una DISTANCIA O MÉTRICA en $\mathbb{V}$, i.e., una aplicación $d : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ que satisface

- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,x) \geq 0$
- $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

para todo x, y, $z \in \mathbb{V}$.

En efecto, la función $d(x,y) = \|x - y\|$, definida sobre $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ y a valores en $\mathbb{R}$, verifica las propiedades anteriores y por lo tanto es una distancia en $\mathbb{V}$.

Observación

Una función $f \in \mathcal{I}(\mathbb{V})$ si y sólo si f es un isomorfismo afín y además conserva distancias; i.e., $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo x, $y \in \mathbb{V}$.

- Si $f \in \mathcal{I}(\mathbb{V})$, existe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ tal que $f = f(0) + g$. En particular, f es un isomorfismo afín.

Con respecto a la otra afirmación, dados x, $y \in \mathbb{V}$

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|g(x) - g(y)\| = \|g(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

- Recíprocamente, si f es un isomorfismo afín, sea $g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ el isomorfismo lineal que hace que sea $f = f(0) + g$. Debemos ver que $g \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$; es decir, que g preserva la norma. Pero, dados x, $y \in \mathbb{V}$,

$$\|x - y\| = d(x, y) = d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|g(x) - g(y)\|$$

como queríamos.

Un producto interno sobre $\mathbb{V}$ permite también introducir la noción de medida de ángulos entre vectores *no nulos* de $\mathbb{V}$.

Más precisamente, dados x, $y \in \mathbb{V}$ con x, $y \neq 0$, buscamos una manera de medir el ángulo que forman sobre el plano generado por ellos.

Comencemos analizando el caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ y $<,>$ = producto interno canónico †

La medida α del ángulo entre $x = (a_1, a_2)$ e $y = (b_1, b_2)$ queda determinada por la condición $0 \leq \alpha \leq \pi$ y el valor "$\cos\alpha$" que se puede calcular a partir del teorema del coseno

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2.\|x\|.\|y\|. \cos\alpha$$

Escribiendo esta expresión en términos de $<,>$ y simplificando, obtenemos la relación

$$< x, y >= \|x\|.\|y\|. \cos\alpha$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{< x, y >}{\|x\|.\|y\|}$$

Resumiendo, la medida del ángulo entre x e y es el *único número* $\alpha \in [0, \pi]$ *tal que* $\cos\alpha = \dfrac{< x, y >}{\|x\|.\|y\|}$.

Esta forma de verlo nos sugiere cómo generalizarlo a un espacio vectorial cualquiera.

† $< (a_1, a_2), (b_1, b_2) >= a_1 b_1 + a_2 b_2$

Dados x, $y \in \mathbb{V}$ no nulos, la desigualdad de Cauchy-Schwarz †† garantiza que el número $\dfrac{< x, y >}{\|x\|.\|y\|} \in [-1, 1]$ y en consecuencia hay un único número $\alpha \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\alpha = \frac{< x, y >}{\|x\|.\|y\|}$$

Basta entonces definir la medida del ángulo entre x e y como este número α

OBSERVACIONES

1. Toda $f \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ preserva ángulos

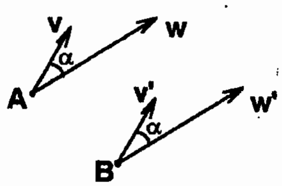
   En efecto, si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ y v,$w \in \mathbb{V}$ son no nulos, para comprobar que el ángulo entre v y w mide lo mismo que el que forman $f(v)$ con $f(w)$ basta llamar α a la medida del primero y verificar que $\dfrac{< f(v), f(w) >}{\|f(v)\|.\|f(w)\|} = \cos\alpha$.

   Por hipótesis : $< f(v), f(w) > = < v, w >$, $\|f(v)\| = \|v\|$ y $\|f(w)\| = \|w\|$. Luego, obviamente

   $$\frac{< f(v), f(w) >}{\|f(v)\|.\|f(w)\|} = \frac{< v, w >}{\|v\|.\|w\|} = \cos\alpha$$

2. La estructura euclídea determinada por $<, >$ sobre $\mathbb{V}$ preserva ángulos.

   Tomemos v, $w \in \mathbb{V}$. Trabajamos en $\mathbb{V}_A$ y llamamos α al ángulo que forman v y w en este espacio.



Consideremos ahora

$$v' = v \underset{A}{+} B \quad \text{y} \quad w' = w \underset{A}{+} B$$

i.e., los trasladados de v y w a origen B.

Debemos comprobar que, en $\mathbb{V}_B$, v' y w' también forman un ángulo α. Sabemos que α está determinado por

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad , \quad \cos\alpha = \frac{< v, w >_A}{\|v\|_A.\|w\|_A}$$

Calculemos

$$< v', w' >_B = < v \underset{A}{+} B, w \underset{A}{+} B >_B = < v \underset{A}{+} B \underset{A}{-} B, w \underset{A}{+} B \underset{A}{-} B >_A = < v, w >_A$$

De manera análoga se comprueba que

$$\|v'\|_B = \|v\|_A \qquad \text{y} \qquad \|w'\|_B = \|w\|_A$$

y con esto queda probado lo que afirmamos.

EJERCICIO

13. a) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$

†† $| < x.y > | \leq \|x\|.\|y\|$

$$L_1 : x_1 - x_2 = 1 \qquad\qquad L_2 : x_1 + x_2 = 3$$

b) Hallar una recta L_3 tal que

$$L_1 \cap L_2 \in L_3 \qquad y \qquad \angle(L_1, L_3) = \angle(L_2, L_3)$$

Observación

Sea $\mathbb{W}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n = \dim(\mathbb{V})$ y sea $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ un isomorfismo. Entonces, si $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$, $\phi' : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi'(x, y) = \phi(f(x), f(y))$$

es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{W}$.

Proposición 3

Sea $\mathbb{W}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión $n = dim(\mathbb{V})$ y sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$ y $\phi' : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{W}$. Entonces, existe un isomorfismo $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tal que $\phi'(x, y) = \phi(f(x), f(y))$ si y sólo si $\mathbf{r}(\phi) = \mathbf{r}(\phi')$ e $ind(\phi) = ind(\phi')$.

DEMOSTRACIÓN:

- $(\Rightarrow)$

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, adaptada a ϕ y sea $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ la base de $\mathbb{W}$ definida por $f(w_i) = v_i$ para $1 \leq i \leq n$.

Si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} y_j w_j$, entonces $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ y $f(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$; luego,

$$\phi'(x, y) = \phi(f(x), f(y)) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - \sum_{i=s+1}^{r} x_i y_i \quad , \quad s = \text{ind}(\phi) \ , \ r = \mathbf{r}(\phi)$$

De modo que, $\mathcal{B}$ es una base adaptada a ϕ' y entonces $\mathbf{r}(\phi') = r$ e $\text{ind}(\phi') = s$.

- $(\Leftarrow)$

Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base se $\mathbb{V}$ adaptada a ϕ y sea $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$ una base de $\mathbb{W}$ adaptada a ϕ'. Por hipótesis y por la definición de base adaptada, resulta que

$$\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots^{\,s} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots^{\,r\text{-}s} & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \|\phi'\|_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots^{\,s} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots^{\,r\text{-}s} & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, podemos escribir $\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{s} x_i y_i - \sum_{i=s+1}^{r} x_i y_i$, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$. Y, análogamente, si $x' = \sum_{j=1}^{n} x'_j v'_j$ e $y' = \sum_{j=1}^{n} y'_j v'_j$, $\phi(x',y') = \sum_{j=1}^{s} x'_j y'_j - \sum_{j=s+1}^{r} x'_j y'_j$.

Esto nos sugiere construir el isomorfismo $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ mediante las condiciones

$$f(v'_i) = v_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

Luego, $\phi'(x,y) = \phi(f(x), f(y))$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{W}$.

Observación

La función $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}$ dada por $f(x) = x - A$ resulta un isomorfismo. Si $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}$, de acuerdo con la proposición anterior —para el caso $\mathbb{W} = \mathbb{V}_A$— queda definida una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}_A$, $\phi_A : \mathbb{V}_A \times \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$, por $\phi_A(x,y) = \phi(f(x), f(y)) = \phi(x - A, y - A)$. Apelando al mismo resultado, también podemos asegurar que $\text{ind}(\phi_A) = \text{ind}(\phi)$ y que $\mathbf{r}(\phi_A) = \mathbf{r}(\phi)$.

La forma cuadrática asociada a ϕ_A es $\psi_A : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$, dada por $\psi_A(x) = \phi_A(x,x) = \phi(x - A, x - A) = \psi(x - A)$

Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base adaptada a ϕ, en el transcurso de la demostración de la citada proposición se probó que $B_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ —con $w_i = v_i + A$— es una base de $\mathbb{V}_A$, adaptada a ϕ_A. Si $x = x_1 \underset{A}{\cdot} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} w_n$, es $x = A + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$; luego, si $s = \text{ind}(\phi)$ y $r = \mathbf{r}(\phi)$, se cumple

$$\begin{aligned}\psi_A(x) &= \psi_A(x_1 \underset{A}{\cdot} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} w_n) = \psi_A(A + x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) \\ &= \psi(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2\end{aligned}$$

Enunciamos a continuación una versión de la proposición 3 adaptada al caso particular que acabamos de tratar.

Corolario 4

Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica, con $r = \mathbf{r}(\phi)$ e $\text{ind}(\phi) = s$ y sea ψ su forma cuadrática asociada.

Sea $A \in \mathbb{V}$ y $\phi_A : \mathbb{V}_A \times \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{V}_A$ definida por $\phi_A(x,y) = \phi(x - A, y - A)$. Entonces,

$$\mathbf{r}(\phi_A) = \mathbf{r}(\phi) = r \qquad e \qquad \mathit{ind}(\phi_A) = \mathit{ind}(\phi) = s$$

Además, si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* $\mathbb{V}$ *adaptada a* ϕ, *entonces* $B_A = \{v_1 + A, \ldots, v_n + A\}$ *es una base de* $\mathbb{V}_A$ *adaptada a* ϕ_A

Observación

En la situación anterior,

$$\psi_A(x) = \psi(x - A) = \phi(x - A, x - A) = \psi(x) - 2\phi(A, x) + \psi(A)$$

Llamando $c = \psi(A)$ y $\varphi(x) = -\phi(A, x)$, se tiene que $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es lineal y ψ_A se escribe en la forma

$$\psi_A(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c$$

Es decir, ψ_A se representa —sobre el espacio vectorial $\mathbb{V}$— como la suma de una función cuadrática, una lineal y una constante.

Definición

Una función $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *se denomina una* **función cuadrática** *si existen: una forma cuadrática* no nula $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, *una forma lineal* $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *y una constante* $c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$F = \psi + 2\varphi + c$$

Representación en coordenadas

Sea $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(\psi(x + y) - \psi(x) - \psi(y))$ la forma bilineal asociada a ψ; luego, $\psi(x) = \phi(x, x)$.

Dada una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$, llamemos $a_{ij} = \phi(v_i, v_j)$, $A = \|a_{ij}\|$, $b_i = \varphi(v_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Para $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ se tiene:

$$F(x) = \phi(x, x) + 2\varphi(x) + c = x \;.\; A \;.\; x^t + 2\; x \;.\; b^t + c$$

Ejemplo

Si $n = 1$ es $v = x_1 \;.\; v_1$ y

$$F(x_1 \;.\; v_1) = x_1^2 a_{11} + 2x_1 \;.\; b_1 + c$$

(*"polinomio de segundo grado"*).

Unicidad de la escritura

Sean $\psi, \psi' : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ formas cuadráticas, $\varphi, \varphi' : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ formas lineales y $c, c' \in \mathbb{R}$ tales que $\psi + 2\varphi + c = \psi' + 2\varphi' + c'$. Entonces : $\psi = \psi'$, $\varphi = \varphi'$ y $c = c'$.

si $x = 0$ resulta $\psi(0) + 2\varphi(0) + c = \psi'(0) + 2\varphi'(0) + c'$, luego, $c = c'$ pues $\psi(0) = \psi'(0) = \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$.

De donde, $\psi(x) + 2\varphi(x) = \psi'(x) + 2\varphi'(x)$ y $\psi(-x) + 2\varphi(-x) = \psi'(-x) + 2\varphi'(-x)$; y como además $\psi(-x) = \psi(x)$, $\psi'(-x) = \psi'(x)$, se tiene que $\psi(x) - 2\varphi(x) = \psi'(x) - 2\varphi'(x)$.

Sumando se concluye que $\psi(x) = \psi'(x)$ para $x \in \mathbb{V}$, y por lo tanto también que $\varphi(x) = \varphi'(x)$ si $x \in \mathbb{V}$.

NOTA

Una propiedad importante que tienen las funciones cuadráticas es que se representan de la misma forma en cualquier espacio vectorial $\mathbb{V}_A$.

Proposición 5

Sea $F = \psi + 2\varphi + c : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una función cuadrática y $A \in \mathbb{V}$. Entonces existen una única forma cuadrática $\psi_A : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$, una única forma lineal $\varphi_A : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ y una única constante $c_A \in \mathbb{R}$ tales que $F = \psi_A + 2\varphi_A + c_A$

DEMOSTRACIÓN:

Basta verificar la existencia, pues la unicidad es consecuencia de la *Unicidad de la escritura* aplicada al espacio vectorial $\mathbb{V}_A$.

Suponiendo que ψ_A, φ_A y c_A existan, debe ocurrir

$$\psi(x) + 2\varphi(x) + c = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + c_A \qquad \text{si } x \in \mathbb{V} \tag{1}$$

Si $x = A$, es $\psi_A(A) = \varphi_A(A) = 0$ pues A es origen de $\mathbb{V}_A$; luego,

$$c_A = \psi(A) + 2\varphi(A) + c = F(A) \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1) — y simplificando c — se llega a

$$\psi(x) + 2\varphi(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + \psi(A) + 2\varphi(A) \tag{3}$$

Sea $\psi_A(x) = \psi(x - A)$ y veamos si la función $\varphi_A : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ (obtenida de (3)) resulta ser lineal como aplicación de $\mathbb{V}_A$ en $\mathbb{R}$. Como $\psi(x - A) = \psi(x) - 2\phi(A, x) + \psi(A)$, reemplazando dicho valor en (3) y simplificando $\psi(x)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2\varphi(x) &= -2\phi(A, x) + \psi(A) + 2\varphi_A(x) + \psi(A) + 2\varphi(A) \\ &= -2\phi(A, x) + 2\psi(A) + 2\varphi_A(x) + 2\varphi(A) \end{aligned}$$

Simplificando el '2' y notando que $\psi(A) = \phi(A, A)$, se deduce

$$\varphi_A(x) = \varphi(x - A) + \phi(A, x - A) \tag{4}$$

Sea $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}$ la aplicación lineal $f(x) = x - A$; luego, $\varphi \circ f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ y $\phi(A, f(\ )) : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ son lineales y por lo tanto $\varphi_A = \varphi \circ f + \phi(A, f(\ )) : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ es lineal.

Definiendo las siguientes REGLAS DE TRANSFORMACIÓN,

$$\begin{aligned} c_A &= F(A) \\ \psi_A(x) &= \psi(x - A) \\ \varphi_A(x) &= \varphi(x - A) + \phi(A, x - A) \end{aligned}$$

queda entonces asegurada la existencia con sólo comprobar la igualdad $F = \psi_A + 2\varphi_A + c_A$.

EJERCICIO

14. *Sean* $F = \psi + 2\varphi + c : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *y* $A, B \in \mathbb{V}$. *Por lo anterior, es* $F = \psi_A + 2\varphi_A + c_A = \psi_B + 2\varphi_B + c_B$.

    Mostrar que valen las siguientes igualdades

$$\psi_B(x) = \psi_A(x \underset{A}{-} B) \qquad \varphi_B(x) = \varphi_A(x \underset{A}{-} B) + \phi_A(B, x \underset{A}{-} B)$$

NOTA

Si no hubiésemos multiplicado por '2' a φ, la regla de transformación sería : $\varphi_A(x) = \varphi(x - A) + 2.\phi(A, x - A)$.

De acuerdo con los comentarios previos al corolario 4 y con la proposición 5 podemos extender la definición de rango e índice.

DEFINICIÓN

Sea F una función cuadrática —$F = \psi_A + 2\varphi_A + c_A$— se define el **índice** *de F como índ(F) = índ(ψ_A) y el* **rango** *de F como* $\mathbf{r}(F) = \mathbf{r}(\psi_A)$ *cualquiera sea* $A \in \mathbb{V}$

DEFINICIÓN

Un subconjunto no vacío $Q \subset \mathbb{V}$ se denomina una **cuádrica** *en $\mathbb{V}$ si existe una función cuadrática $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ tal que $Q = F^{-1}(0)$*

NOTA

En la situación de la definición anterior, escribimos $Q : F(x) = 0$ y decimos que "$F(x) = 0$" es UNA ECUACIÓN PARA Q, o que F DEFINE A Q.

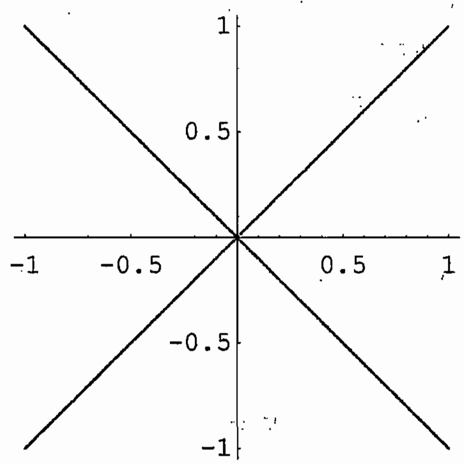
Si $\dim(\mathbb{V}) = 2$, Q se denomina una CÓNICA.

Antes de continuar, veamos algunas cuádricas particulares

EJEMPLOS

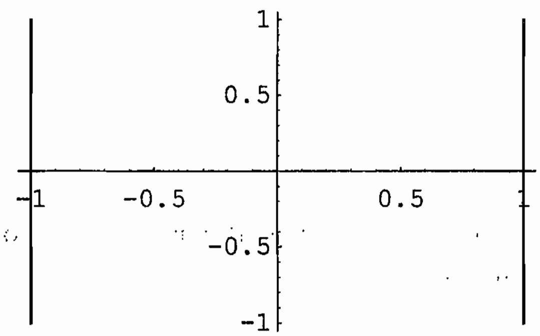
- **Cónicas en $\mathbb{R}^2$**

(1) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0$



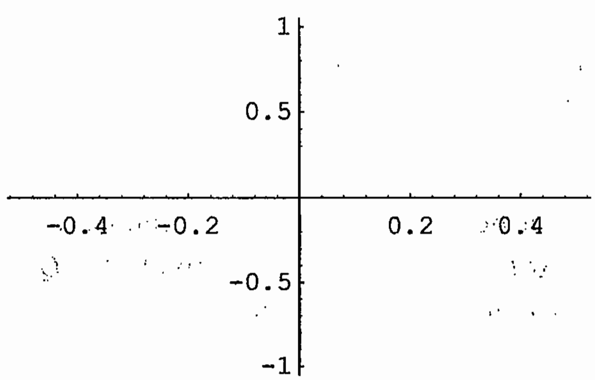
dos rectas por el origen, no paralelas

(2) $Q : F(x) = x_1^2 - 1 = 0$



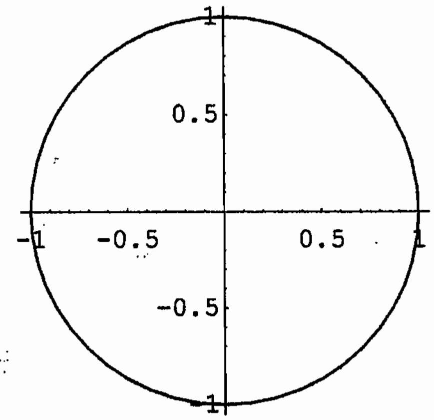
dos rectas paralelas distintas

(3) $Q : F(x) = x_1^2 = 0$



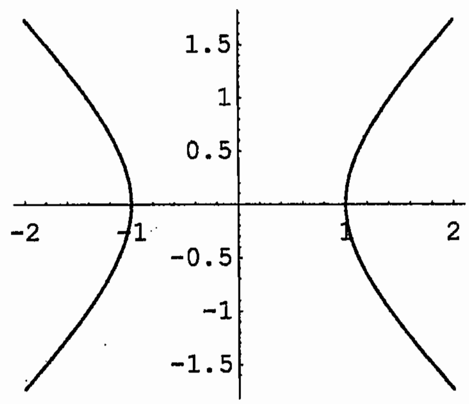
recta doble

(4) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$



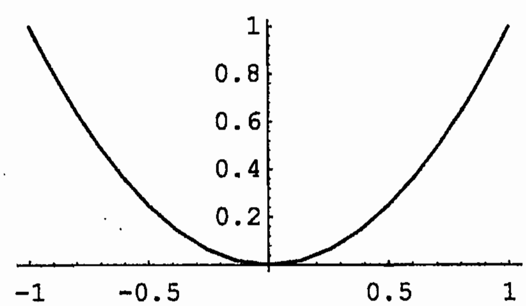
circunferencia

(5) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0$



hipérbola

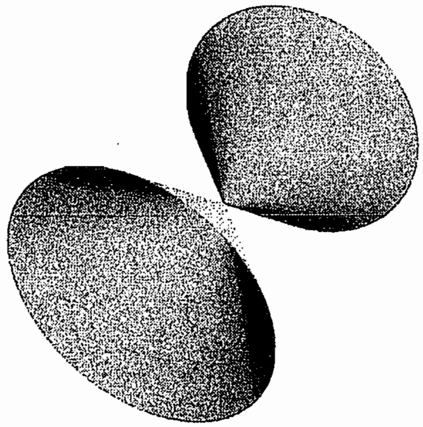
(6) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2 = 0$



parábola

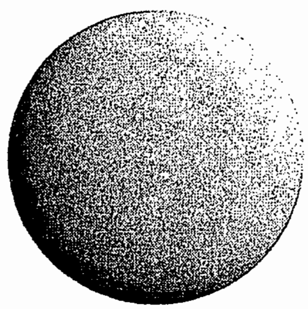
- **Cuádricas en $\mathbb{R}^3$**

(7) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$



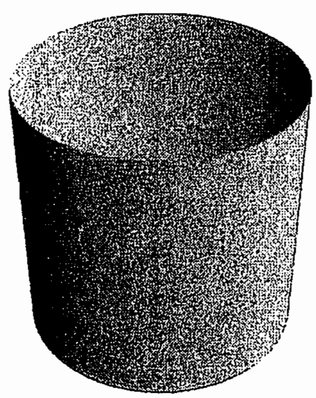
cono irreducible

(8) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$



elipsoide

(9) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$



cilindro elíptico

OBSERVACIONES

1. $Q \neq \mathbb{V}$ si $\psi \neq 0$
2. La condición 'no vacío' en la definición de cuádrica se debe a que podría ocurrir que fuese $F^{-1}(0) = \varnothing$; es el caso de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$.
3. No es cierto que si $F, G : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ son funciones cuadráticas tales que $F^{-1}(0) = G^{-1}(0) = Q$ sea $G = \lambda.F$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}\neq 0$. Por ejemplo, sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$. Si $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$ y $2 \leq r \leq n$, se definen $F(x) = x_1^2 + \ldots + x_r^2$ y $G(x) = x_1^2 + \ldots + a.x_r^2$ $(a > 0)$. Claramente, F y G definen la misma cuádrica $Q = \{x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n / x_1 = \ldots = x_r = 0\}$ pero, evidentemente, no es una múltiplo de la otra, si $a \neq 1$.

   Esta familia de cuádricas es en realidad una familia de variedades lineales de dimensión $n - r \leq n - 2$. Veremos más adelante que éstas son las únicas cuádricas para las cuales no se cumple este tipo de unicidad para las ecuaciones que las representan.

Cuádricas reducibles

Vamos a caracterizar a continuación un tipo de cuádricas con la propiedad que la función cuadrática que las define (polinomio de grado 2) se puede factorear como producto de dos formas afines (polinomios de grado 1). De ahí su nombre.

Proposición 6

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) Existe H, hiperplano de $\mathbb{V}$, tal que $H \subset Q$

b) Existen H_1, H_2, hiperplanos de $\mathbb{V}$, tales que $Q = H_1 \cup H_2$

c) Existen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ lineales, $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ y $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$F = (\varphi_1 + c_1) \cdot (\varphi_2 + c_2)$$

DEMOSTRACIÓN:

Claramente, *c)* implica *b)* y *b)* implica *a)*. Luego, sólo tenemos que mostrar que *a)* implica *c)*.

Sean $\mathbb{H}$ el subespacio paralelo de H, $A \in H$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ con $\mathbb{H} = [v_1, \ldots, v_{n-1}]$. Si definimos $w_i = v_i + A$ $(i = 1, \ldots, n)$ obtenemos que $B_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de $\mathbb{V}_A$ y $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ una base de H.

Obviamente, en B_A, $H : x_n = 0$. Y como $A \in Q$, es $Q : \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$.

Para $x = x_1 \underset{A}{.} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_{n-1} \underset{A}{.} w_{n-1} \underset{A}{+} x_n \underset{A}{.} w_n$ sea $y = x_1 \underset{A}{.} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_{n-1} \underset{A}{.} w_{n-1}, z = x_n \underset{A}{.} w_n$; luego, $x = y \underset{A}{+} z$. Como $y \in H$ y $H \subset Q$ resulta $\psi_A(y) + 2\varphi_A(y) = 0$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\psi_A(x) + 2\varphi_A(x) &= \psi_A(y \underset{A}{+} z) + 2\varphi_A(y \underset{A}{+} z) \\
&= \psi_A(y) + 2\phi_A(y,z) + \psi_A(z) + 2\varphi_A(y) + 2\varphi_A(z) \\
&= 2\phi_A(y,z) + \psi_A(z) + 2\varphi_A(z) = 2\phi_A(x \underset{A}{-} z, z) + \psi_A(z) + 2\varphi_A(z) \\
&= 2\phi_A(x,z) - 2\psi_A(z) + \psi_A(z) + 2\varphi_A(z) = 2\phi_A(x,z) - \psi_A(z) + 2\varphi_A(z) \\
&= 2\phi_A(x, x_n \underset{A}{.} w_n) - \psi_A(x_n \underset{A}{.} w_n) + 2\varphi_A(x_n \underset{A}{.} w_n) \\
&= 2x_n\phi_A(x, w_n) - x_n^2\psi_A(w_n) + 2x_n\varphi_A(w_n) \\
&= x_n\left(2\phi_A(x, w_n) - x_n\psi_A(w_n) + 2\varphi_A(w_n)\right).
\end{aligned}$$

Llamando $f_1(x) = x_n$, $f_2(x) = 2\phi_A(x, w_n) - f_1(x)\psi_A(w_n) + 2\varphi_A(w_n)$ se tiene que f_1, $f_2 : \mathbb{V}_A \to \mathbb{R}$ son funciones lineales y

$$\psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = f_1(x) \ . \ f_2(x)$$

Pasando a origen 0, esto se expresa diciendo que existen dos formas lineales no nulas y dos constantes tales que

$$Q : (\varphi_1(x) + c_1) \ . \ (\varphi_2(x) + c_2) = 0$$

como queríamos.

Definición

Una cuádrica que satisface cualquiera de las tres condiciones equivalentes de la proposición anterior se llama **cuádrica reducible.** *Las cuádricas que no son reducibles se llaman* **irreducibles.**

Volvemos ahora al tema de la unicidad de las ecuaciones antes mencionado. Se trata de determinar cuáles son las cuádricas Q para las cuales

$$Q : F(x) = 0 \quad \text{y} \quad Q : F'(x) = 0 \quad \text{implica} \quad F' = c \ . \ F \text{ para algún } c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$$

Daremos previamente una serie de resultados que simplificarán la demostración de dicha unicidad.

Proposición 7

Sean $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ subespacios distintos de $\mathbb{V}$, $\psi : \mathbb{V} :\to \mathbb{R}$ una forma cuadrática no nula y $C = \psi^{-1}(0)$. Entonces se verifica:

a) $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$

b) $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup C$

c) $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C$

DEMOSTRACIÓN:

• *a)*

Supongamos que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$; eso obliga a que $\mathbb{S} \not\subset \mathbb{T}$ pues, de no ser así, resultaría $\mathbb{V} = \mathbb{T}$. Luego, deben existir un $x \in \mathbb{S}$ tal que $x \notin \mathbb{T}$ y un $y \in \mathbb{T}$ tal que $y \notin \mathbb{S}$. Sea $z = x + y$; luego, $z \notin \mathbb{S}$ y $z \notin \mathbb{T}$. Esto contradice que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.

Podemos asegurar entonces que $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.

• *b)*

Supongamos que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \cup C$. Como $\mathbb{S} \neq \mathbb{V}$, sea $z \in \mathbb{V}$ tal que $z \notin \mathbb{S}$; luego, $z \in C$ y por lo tanto $\psi(z) = 0$. Si mostramos que $\mathbb{S} \subset C$, necesariamente deberá ser $\mathbb{V} = C$ y en consecuencia $\psi = 0$, que es imposible por hipótesis. Verifiquemos esa inclusión; dado $x \in \mathbb{S}$ debe ser $x + z \notin \mathbb{S}$ y $x - z \notin \mathbb{S}$ y como estamos suponiendo que $\mathbb{V} = \mathbb{S} \cup C$, eso obliga a que $x + z \in C$ y $x - z \in C$ y entonces

$$0 = \psi(x+z) = \psi(x) + 2\phi(x,z) + \psi(z) = \psi(x) + 2\phi(x,z)$$
$$0 = \psi(x-z) = \psi(x) - 2\phi(x,z) + \psi(z) = \psi(x) - 2\phi(x,z)$$

Sumando ámbas ecuaciones se obtiene $\psi(x) = 0$; es decir, $x \in C$.

Concluimos así que $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup C$.

• *c)*

Debido a *b)* podemos suponer que $\mathbb{S}$ y $\mathbb{T}$ son no nulos.

Sean $\psi_{\mathbb{T}} = \psi|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ y $\psi_{\mathbb{S}} = \psi|_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$; luego, $\psi_{\mathbb{T}}^{-1}(0) = \mathbb{T} \cap \psi^{-1}(0) = \mathbb{T} \cap C$ y $\psi_{\mathbb{S}}^{-1}(0) = \mathbb{S} \cap C$.

Si $\psi_{\mathbb{T}} = 0$, $\mathbb{T} \subset C$ y $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C = \mathbb{S} \cup C \neq \mathbb{V}$, por *b)*.

Si $\psi_{\mathbb{S}} = 0$, por la misma razón es $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C = \mathbb{T} \cup C \neq \mathbb{V}$.

Basta entonces probarlo para $\psi_{\mathbb{T}} \neq 0$ y $\psi_{\mathbb{S}} \neq 0$

Por otro lado,

si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{T}$, entonces $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}$ y $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C = \mathbb{S} \cup C \neq \mathbb{V}$, por *b)* y

si $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \mathbb{S}$, por la misma razón, es $\mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C \neq \mathbb{V}$.

De modo que también podemos suponer que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{T}$ y $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq \mathbb{S}$.

Se obtiene de *b)* que $\mathbb{T} \neq \mathbb{S} \cap \mathbb{T} \cup \psi_{\mathbb{T}}^{-1}(0)$ y $\mathbb{S} \neq \mathbb{S} \cap \mathbb{T} \cup \psi_{\mathbb{S}}^{-1}(0)$. Luego, existe un $x \in \mathbb{T}$ con $x \notin \mathbb{S}$ y $\psi(x) \neq 0$ y existe un $y \in \mathbb{S}$ con $y \notin \mathbb{T}$ y $\psi(y) \neq 0$. Sea $z = x + t.y$, $t \neq 0$; luego, $z \notin \mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.

Si fuera $\mathbb{V} = \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C$, resultaría que $z \in C$ y por lo tanto,

$$0 = \psi(z) = \psi(x + t.y) = \psi(x) + 2t\phi(x,y) + t^2\psi(y)$$

para todo $t \neq 0$. Esto a su vez implicaría que $\psi(x) = \psi(y) = \phi(x,y) = 0$, lo que es absurdo.

En conclusión, debe ser $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup \mathbb{T} \cup C$.

Corolario 8

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) = 0$ y supongamos que existe un subespacio $\mathbb{H}$ diferente de $\mathbb{V}$ que contiene a Q. Entonces, Q es el subespacio $N(\phi)$ de $\mathbb{V}$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $\varphi \neq 0$ y sea $\mathbb{T} = \varphi^{-1}(0)$; luego, $\mathbb{T} \neq \mathbb{V}$ y si $C = \psi^{-1}(0)$ resulta $\mathbb{V} \neq \mathbb{T} \cup \mathbb{H} \cup C$. Sea $z \in \mathbb{V}$ con $z \notin \mathbb{T}$, $z \notin \mathbb{H}$ y $z \notin C$; un simple cálculo muestra que $F(t.z) = 0$ si $t = -\dfrac{2\varphi(z)}{\psi(z)}$; luego, $t.z \in Q \subset \mathbb{H}$. Al ser $z \notin \mathbb{H}$, necesariamente se obtiene que $t = 0$, o sea que $\varphi(z) = 0$, con lo cual $z \in \mathbb{T}$ que es un absurdo ya que tomamos $z \notin \mathbb{T}$. En consecuencia, $\varphi = 0$ y $Q = \psi^{-1}(0) \subset \mathbb{H}$.

Por otro lado, si $x \in N(\phi)$ es $\phi(x, y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{V}$; en particular, $\psi(x) = \phi(x, x) = 0$ y entonces se concluye: $N(\phi) \subset \psi^{-1}(0) = Q$.
Afirmamos que también $\psi^{-1}(0) \subset N(\phi)$, con lo cual tendremos $Q = N(\phi)$.
En efecto,

sea $x \in \psi^{-1}(0)$ y $\mathbb{T} = \{y \in \mathbb{V} / \phi(x, y) = 0\}$; si mostramos que $\mathbb{T} = \mathbb{V}$ quedará probado lo que afirmamos. Y siendo $\mathbb{H} \neq \mathbb{V}$, bastará verificar –en virtud de la proposición anterior parte a)– que $\mathbb{V} = \mathbb{T} \cup \mathbb{H}$.
Tomemos entonces $z \in \mathbb{V}$ con $z \notin \mathbb{H}$ y mostremos que $z \in \mathbb{T}$. Como $z \notin \mathbb{H}$, entonces $z \notin \psi^{-1}(0)$; luego, $\psi(z) \neq 0$. Para $y \in \mathbb{V}$ de la forma $y = x + t.z$ se cumple

$$F(y) = \psi(y) = \psi(x + t.z) = \psi(x) + 2t\phi(x, z) + t^2\psi(z) = t[2\phi(x, z) + t\psi(z)] = 0$$

si $t = -\dfrac{2\phi(x, z)}{\psi(z)}$. Luego, $y \in Q \subset \mathbb{H}$ y por lo tanto, $x + t.z \in \mathbb{H}$. Pero $x \in Q \subset \mathbb{H}$, entonces $t.z \in \mathbb{H}$, de modo que –como $z \notin \mathbb{H}$– obligatoriamente debe ser $t = 0$, o sea, $\phi(x, z) = 0$, lo que implica que $z \in \mathbb{T}$.

Corolario 9

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ tal que existe una variedad lineal H –diferente de $\mathbb{V}$– que la contiene. Entonces Q es una variedad lineal. Más precisamente, si $A \in Q$ es

$$Q = A + N(\phi)$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta tomar $A \in Q$ y aplicar el corolario anterior al espacio vectorial $\mathbb{V}_A$ y al subespacio (de $\mathbb{V}_A$) H.

Proposición 10

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica tal que para todo $A \in Q$ es $\varphi_A = 0$. Entonces, Q es una variedad lineal.

DEMOSTRACIÓN:

Dado $A \in Q$, por hipótesis es $\varphi_A = 0$ o equivalentemente $\varphi_A(x) = \varphi(x - A) + \phi(A, x - A) = 0$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Luego, $\varphi(x) + \phi(A, x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{V}$ y por lo tanto $A \in L_\phi^{-1}(-\varphi)$. Esto nos dice que $Q \subset L_\phi^{-1}(-\varphi)$.

Por otro lado, si $A \in L_\phi^{-1}(-\varphi)$ es $L_\phi^{-1}(-\varphi) = A + N(\phi)$ y como $\psi \neq 0$, resulta $L_\phi^{-1}(-\varphi) \neq \mathbb{V}$.

De acuerdo con el corolario anterior, Q es una variedad lineal.

Corolario 11

Sea Q una cuádrica irreducible en $\mathbb{V}$ no contenida en una variedad lineal de dimensión $n-2$ y $F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$, $F'(x) = \psi'(x) + 2\varphi'(x) + c' = 0$ dos funciones cuadráticas que la definen. Si $\varphi_A = 0$ para algún $A \in \mathbb{V}$, también es $\varphi'_A = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos $A = 0$; en caso contrario basta repetir este razonamiento en $\mathbb{V}_A$.

Debemos mostrar que si $\varphi = 0$ también $\varphi' = 0$. En tal caso nos queda $Q : \psi(x) = -c$. De aquí se deduce que

$$x \in Q \qquad \Leftrightarrow \qquad -x \in Q$$

Utilizando la otra función cuadrática que define a Q, obtenemos para $x \in Q$ las igualdades

$$\psi'(x) + 2\varphi'(x) + c' = 0 \qquad \text{y} \qquad \psi'(x) - 2\varphi'(x) + c' = 0$$

Restando ambas ecuaciones vemos que $\varphi'(x) = 0$ para todo $x \in Q$ y por lo tanto, $Q \subset N(\varphi')$. Si fuese $\varphi' \neq 0$, sería $N(\varphi')$ un hiperplano lo que nos permitiría concluir, de acuerdo con el corolario 9, que Q es una variedad lineal. Pero esto no puede ser si $\dim(Q) \leq n-2$ ni tampoco si $\dim(Q) = n-1$ ya que resultaría reducible en virtud de la proposición 6 parte a). Luego, $\varphi' = 0$.

EJERCICIOS

15. *Si L es una recta y Q una cuádrica, probar que $L \cap Q$ es vacío, un punto, dos puntos o L.*

16. *Sea $\dim \mathbb{V} = n \geq 2$ y Q una cuádrica en $\mathbb{V}$ que no se reduce a un punto. Probar que Q es un conjunto infinito.*

Teorema 12

Sea $\dim\mathbb{V} = n \geq 2$ *y* $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ *una cuádrica no contenida en una variedad lineal de dimensión* $n-2$. *Si* $Q : F'(x) = \psi'(x) + 2\varphi'(x) + c' = 0$, *entonces existe* $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ *tal que* $F' = \lambda \,.\, F$.

DEMOSTRACIÓN:

Para las cuádricas reducibles este resultado es consecuencia de la proposición 6. Podemos suponer entonces que Q es irreducible.

$\star$ Caso $n = 2$

Por hipótesis, la cónica Q no se reduce a un punto; luego, existen $A, B \in Q$ con $A \neq B$. Sea L la recta que los une. Apelando al resultado del ejercicio 15 y a las hipótesis sobre Q, podemos afirmar que $L \cap Q = \{A, B\}$. Es lícito entonces escribir

$$Q : \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad L : y = t \underset{A}{.} B$$

De aquí se obtiene que $t = 0, 1$ son las *dos únicas* raíces de la ecuación

$$\psi_A(B) \,.\, t^2 \;+\; 2\varphi_A(B) \,.\, t = 0 \tag{1}$$

Trabajando de igual forma con F' llegamos a que también $t = 0, 1$ son las *dos únicas* raíces de la ecuación

$$\psi'_A(B) \,.\, t^2 \;+\; 2\varphi'_A(B) \,.\, t = 0 \tag{2}$$

Resulta entonces que los primeros miembros de (1) y (2) representan polinomios del mismo grado (=2) y con las mismas raíces (0 y 1). Por lo tanto, existe $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que

$$F'|_L = \lambda \,.\, F|_L$$

Nosotros estamos tratando de probar esta igualdad pero sobre todo $\mathbb{V}$. Para ello definimos la función $G : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ por $G(x) = F'(x) - \lambda.F(x)$. Se trata entonces de ver que $G = 0$ en $\mathbb{V}$.

Evidentemente, el conjunto $Q' = G^{-1}(0)$ es no vacío ya que $L \cup Q \subset G^{-1}(0)$. Y como la función G se escribe como suma de una función cuadrática, una lineal y una constante, vemos que Q', o bien es una cuádrica (si $\psi' - \lambda.\psi \neq 0$) o bien es una variedad lineal. Tendremos que descartar entonces el primer caso y, en el segundo, mostrar que la variedad lineal es todo $\mathbb{V}$.

Supongamos que Q' es una cuádrica. Como $L \subset Q'$, esto quiere decir que Q' es reducible (L es un hiperplano en $\mathbb{V}$). La proposición 6 asegura en tal caso que hay otra recta L', tal que

$$Q' = L \cup L'$$

con lo cual: $Q \subset L \cup L'$.

Ahora bien, siendo que Q no se reduce a un punto ($A, B \in Q$) el resultado del ejercicio 16 nos garantiza que Q es un conjunto infinito. Podemos, en consecuencia, tomar tres puntos distintos $C, D, E \in Q - L$, lo que implica que $C, D, E \in L'$.

Apelando nuevamente al ejercicio 15, concluimos que $L' \subset Q$, cosa que no puede ocurrir debido a la irreducibilidad de Q. Queda así descartada la posibilidad de que Q' sea una cuádrica y, en consecuencia, vale

$$\psi' = \lambda \,.\, \psi$$

en $\mathbb{V}$. De tal forma, Q' no tiene más remedio que ser una variedad lineal. Veamos que $Q' = \mathbb{V}$.

Si no lo fuera, Q' sería una recta y como $L \subset Q'$, debe ser $Q' = L$, de donde también $Q = L$. Pero esto es imposible puesto que $Q \cap L$ consta exactamente de dos puntos.

Luego, $Q' = \mathbb{V}$; es decir, $F' = \lambda.F$ en $\mathbb{V}$.

$\star$ Caso $n \geq 3$

Las hipótesis sobre Q impiden que sea una variedad lineal. En esta situación la proposición 10 asegura la existencia de un $A \in Q$ tal que $\varphi_A \neq 0$. En virtud del corolario 11 también resulta $\varphi'_A \neq 0$.

Consideremos el hiperplano

$$T : \varphi_A(x) = 0$$

Aplicando el corolario 9 vemos que $Q \not\subset T$, por lo que debe existir un $v \in Q - T$; luego,

$$\varphi_A(v) \neq 0$$

Para cada $x \in T$, $x \neq A$, definimos el subespacio de V_A

$$\pi_x = \left\{ a \underset{A}{.} x \underset{A}{+} b \underset{A}{.} v \Big/ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Como π_x tiene dimensión 2, $Q_x = \pi_x \cap Q$ es una cónica (que no se reduce a un punto pues $A, v \in Q_x$). Pero para dimensión 2 ya sabemos que la tesis se cumple siempre y cuando Q_x sea irreducible. Pero también si Q_x es reducible, debido a la proposición 6 y el caso $n = 2$.

Sea entonces $\lambda_x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que

$$F'|_{\pi_x} = \lambda_x . F|_{\pi_x}$$

en particular,

$$\varphi'_A|_{\pi_x} = \lambda_x . \varphi_A|_{\pi_x}$$

y siendo $x \in T$ obtenemos: $\varphi'_A(x) = 0$.

La arbitrariedad de $x \in T$ nos dice que $T \subset N(\varphi'_A)$ y, como ambos son hiperplanos resulta $T = N(\varphi'_A)$.

Como ambas ecuaciones —$\varphi_A(x) = 0$, $\varphi'_A(x) = 0$— definen el mismo hiperplano, debe existir un $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que

$$\varphi'_A = c \,.\, \varphi_A$$

en $\mathbb{V}$. De esta forma, siendo que $v \in \pi_x$, vale

$$\varphi'_A(v) = \lambda_x \,.\, \varphi_A(v) \qquad \text{y} \qquad \varphi'_A(v) = c \,.\, \varphi_A(v)$$

cualquiera sea $x \in T$.

Por lo tanto, $\lambda_x = c$ para todo $x \in T$, dado que $\varphi_A(v) \neq 0$.

Resumiendo, hasta aquí hemos probado que

$$F'|_{\pi_x} = c \,.\, F|_{\pi_x}$$

para todo $x \in T$.

Tomemos $y \in \mathbb{V}$ y veamos que $F'(y) = c.F(y)$; con esto quedará probado el teorema.

Sabemos que existen $t \in \mathbb{R}$ y $x \in T$ tales que $y = x \underset{A}{+} t \underset{A}{.} v$, dado que T es un hiperplano de $\mathbb{V}_A$ y que $v \notin T$.

Como $y \in \pi_x$ es $F'(y) = F'|_{\pi_x}(y) = c \,.\, F(y)$.

O sea,

$$F' = c \,.\, F$$

en $\mathbb{V}$, como queríamos.

Centro de una cuádrica

De acuerdo con los ejemplos de las páginas 20, 21 y 22, las cónicas del (1) al (5) tienen la propiedad que si $x \in Q$, entonces $-x \in Q$. Esto nos sugiere decir que el origen de $\mathbb{R}^2$ es un *centro* de Q. Lo mismo podríamos decir respecto del origen de $\mathbb{R}^3$ en los ejemplos del (7) al (9).

Generalizando esta situación, basta que sea $\varphi = 0$, para que 0 resulte un centro de Q.

Más aún, en el caso del cilindro podemos observar que si $A = (0, 0, x_3)$ –con $x_3 \in \mathbb{R}$ cualquiera– entonces para todo $x \in Q$ es $\underset{A}{-}\, x \in Q$.

Como esta propiedad nos va ser útil en el momento de clasificar las cuádricas, la vamos a estudiar con más detalle.

DEFINICIÓN

Sea Q una cuádrica en $\mathbb{V}$. Un punto $A \in V$ se denomina un **centro** *de Q si para todo $x \in Q$ es $\underset{A}{-} x \in Q$.*

Consideremos una cuádrica $Q : F(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ y supongamos que existe un $A \in \mathbb{V}$ que satisface $\varphi_A = 0$. En tal caso $Q : F(x) = \psi_A(x) + c_A$ y, en consecuencia, para todo $x \in Q$ es $\underset{A}{-} x \in Q$. Luego, este punto A resulta ser un centro de Q.

Nos ocuparemos ahora de probar la recíproca; a saber, si A es un centro de Q, entonces $\varphi_A = 0$. Para ello necesitamos algunos resultados auxiliares.

Proposición 13

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ y supongamos que $0 \in \mathbb{V}$ (origen de $\mathbb{V}$) es un centro de Q. Entonces, $\varphi = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

Si $x \in Q$ es $0 = \psi(x) + 2\varphi(x)$ y $0 = \psi(x) - 2\varphi(x)$; luego, $\varphi(x) = 0$ y por lo tanto, $Q \subset \mathbb{S} = N(\varphi)$. Si mostramos que $\mathbb{S} = \mathbb{V}$, será $\varphi = 0$.

Supongamos que $\mathbb{V} \neq \mathbb{S}$ y sea $C = \psi^{-1}(0)$; en tal caso, $\mathbb{V} \neq \mathbb{S} \cup C$ y por lo tanto existe $z \in \mathbb{V}$ tal que $z \notin \mathbb{S}$ y $z \notin C$. Luego,

$$F(tz) = \psi(tz) + 2\varphi(tz) = t^2\psi(z) + 2t\varphi(z) = t[t\psi(z) + 2\varphi(z)] = 0$$

si $t = -\dfrac{2\varphi(z)}{\psi(z)}$. En consecuencia, $t.z \in Q \subset \mathbb{S}$ y como $z \notin \mathbb{S}$ debe ser $t = 0$ y por consiguiente $\varphi(z) = 0$, i.e., $z \in \mathbb{S}$. Esto es absurdo y por lo tanto concluimos que $\mathbb{S} = \mathbb{V}$.

Corolario 14

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ y supongamos que existe $A \in Q$ tal que A es un centro de Q. Entonces $\varphi_A = 0$

DEMOSTRACIÓN:

Tomando origen A, es $Q : F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$. El resultado es ahora consecuencia del resultado anterior aplicado al espacio vectorial $\mathbb{V}_A$.

Teorema 15:

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ y $A \in \mathbb{V}$. Son equivalentes las afirmaciones

a) $\varphi_A = 0$

b) A es un centro de Q

DEMOSTRACIÓN:

De acuerdo con lo observado al pie de la última definición, basta probar que si A es un centro de Q, entonces $\varphi_A = 0$. Y como para $A \in Q$ es claro que $\varphi_A = 0$, gracias al corolario 14, podemos suponer que $A \notin Q$.

Por definición de centro, si $x \in Q$, es $\underset{A}{-}\, x \in Q$; luego, para todo $x \in Q$ se cumple

$$0 = F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + c_A$$
$$0 = F(\underset{A}{-}\, x) = \psi_A(x) - 2\varphi_A(x) + c_A$$

y restando se obtiene que $\varphi_A(x) = 0$; luego, $Q \subset N(\varphi_A)$.

Al ser $Q \neq \varnothing$ podemos tomar $B \in Q$; luego, $Q : F(x) = \psi_B(x) + 2\varphi_B(x)$.

Razonando por el absurdo, supongamos que $\varphi_A \neq 0$; resulta entonces que $N(\varphi_A)$ es un subespacio de $\mathbb{V}_A$, distinto de $\mathbb{V}_A$. Lo mismo vale respecto de $\mathbb{V}_B$ ya que $B \in Q \subset N(\varphi_A)$. Además, en virtud del corolario 8, Q resulta un subespacio de $\mathbb{V}_B$ y siendo A un centro de Q y $B \in Q$, es $C = \underset{A}{-}\, B \in Q$. Pero $\underset{A}{-}\, B = 2 \underset{B}{\cdot} A$, de donde $2 \underset{B}{\cdot} A \in Q$.

El hecho de ser Q un subespacio de $\mathbb{V}_B$ nos permite deducir que $A \in Q$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

En consecuencia debe ser $\varphi_A = 0$, como queríamos.

NOTACIÓN:

Dada una cuádrica $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$, notamos con Q_C al conjunto de sus centros; i.e.,

$$Q_C = \{A \in \mathbb{V} / A \text{ es centro de } Q\}$$

En caso de ser Q_C vacío decimos que Q es una cuádrica SIN CENTRO.

Caracterización de Q_C

Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, $M = \|\phi\|_B = \|\phi(v_i, v_j)\|$, $\varphi(v_i) = b_i$, $A = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$.

Dado $y \in \mathbb{V}$, $y = y_1 v_1 + \ldots + y_n v_n$, se tiene

$$\varphi(y) + \phi(A, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i y_i + \sum_{i,j=1}^{n} \phi(v_i, v_j) x_i y_j$$

$$= (y_1 \cdots y_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + (y_1 \cdots y_n) \, . \, M \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (y_1 \cdots y_n) \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + M \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

De modo que, A es centro de Q si y sólo si

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + M \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos finalmente que

$$Q_C = \left\{ A = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in \mathbb{V} \Big/ M \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix} \right\}$$

Si suponemos $Q_C \neq \varnothing$ y recordamos que

$$N(\phi) = \left\{ A = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in \mathbb{V} \Big/ M \, . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

claramente se ve que

$$Q_C = A \; + \; N(\phi)$$

para cualquier $A \in Q_C$.

En particular, se deduce que Q_C es una variedad lineal y $\dim Q_C = \dim(N(\phi)) = n - \mathbf{r}(\psi)$.

Resumimos todo esto en el siguiente

Corolario 16

Sea Q una cuádrica en $\mathbb{V}$. Si Q_C es no vacío y $A \in Q_C$, entonces Q_C es la variedad lineal $A \; + \; N(\phi) = N(\phi_A)$.

EJERCICIOS

17. *Sea Q la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ de ecuación, en la base canónica,*
$$x_1^2 + (\alpha^2 + 3).x_2^2 + (\alpha^2 - 3)x_3^2 + (2\alpha + 4)x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_1 - 2x_2 + 1 = 0$$
Determinar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales Q tenga un único centro.

18. *Determinar en cada caso si existe $A \in \mathbb{R}^2$ tal que $Q : \psi_A(x) = -c_A$*
    a) $Q : x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - x_2 + 3 = 0$
    b) $Q : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 1 = 0$

19. *Encontrar Q_C en cada uno de los casos siguientes*
    a) $Q : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_2 - 1 = 0$ *(en $\mathbb{R}^2$)*
    b) $Q : x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 2x_1 - 4x_2 - 5 = 0$ *(en $\mathbb{R}^2$)*
    c) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$ *(en $\mathbb{R}^3$)*

OBSERVACIONES

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica.

1. Si $A, B \in Q_C$, entonces $F(A) = F(B)$

   Como $A \in Q_C$, $F(x) = \psi_A(x) + F(A)$. Luego, $F(B) = \psi_A(B) + F(A) = \psi(B - A) + F(A) = \phi(B - A, B - A) + F(A) = F(A)$ por ser $B - A \in N(\phi)$.

2. Si $Q_C \cap Q \neq \varnothing$ vale que $Q_C \subset Q$

   Es inmediato a partir de 1.

3. Si $Q_C = \varnothing$ entonces $\mathbf{r}(\psi) \leq n - 1$ y $N(\phi) \not\subset N(\varphi)$

   Tomemos una base adaptada a ψ, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, de modo que $M = \|\phi\|_B$ tiene la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$s =$ $\operatorname{ind}(\psi)$ y $r = \mathbf{r}(\psi)$.

Si $\varphi(v_i) = b_i$,

$$Q_C \ : \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \\ -x_{s+1} \\ \vdots \\ -x_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ \\ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ \\ -b_n \end{pmatrix}$$

Para ver que $\mathbf{r}(\psi) \leq n-1$ basta notar que si fuese $\mathbf{r}(\psi) = n$ resultaría M inversible, lo que es imposible ya que Q_C es vacío.
Con respecto a la otra afirmación, si $N(\phi)$ estuviese contenido en $N(\varphi)$ —por ser $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ base de $N(\phi)$— se tendría que $b_i = \varphi(v_i) = 0$ para $r+1 \leq i \leq n$ y de nuevo, por ser $Q_C = \varnothing$, eso no puede ocurrir.

4. Si $Q \subset H$, H variedad lineal distinta de $\mathbb{V}$, entonces $Q = Q_C$. En particular, Q resulta una variedad lineal

   Sea $A \in Q$; luego, $Q : F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$ y como $A \in Q \subset H$, H es un subespacio distinto de $\mathbb{V}_A$. Finalmente, aplicando el corolario 8 al espacio vectorial $\mathbb{V}_A$, se obtiene

$$Q = N(\phi_A) = A + N(\phi) = Q_C$$

Definición

Un punto $A \in \mathbb{V}$ se denomina un **punto singular** *de una cuádrica Q si $A \in Q \cap Q_C$.*

Notación

Con Q_S denotamos al conjunto de puntos singulares de la cuádrica Q; es decir,

$$Q_S = Q \cap Q_C$$

Observación

Las observaciones anteriores (2. y 4.) permiten afirmar que

$$Q = Q_S \text{ si y sólo si } Q \text{ es una variedad lineal}$$

Ejercicio

20. Determinar Q_S para cada una de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$

a) $Q : 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 + 1 = 0$ $(n = 3)$

b) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_4 + 4x_4 = 0$ $(n = 4)$

c) $Q: x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3x_4 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ $(n = 4)$
d) $Q: x_1x_2 + x_3x_4 + x_5^2 = 0$ $(n = 5)$
e) $Q: x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$

Conos

Sea $Q: F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ y supongamos que Q posee un punto singular A.

Como $Q: F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) + c_A = 0$ y $c_A = F(A) = 0$ —pues $A \in Q$ y $\varphi_A = 0$, por ser A un centro— resulta $Q: F(x) = \psi_A(x) = 0$.

Para cada $x \in Q$, $x \neq A$, notamos con L_{Ax} a la recta que une A con x; luego, $L_{Ax} = \left\{ t \underset{A}{.} x / t \in \mathbb{R} \right\}$ y por lo tanto

$$F\left(t \underset{A}{.} x\right) = \psi\left(t \underset{A}{.} x\right) = t^2 \psi_A(x) = t^2.0 = 0$$

Consecuentemente, $L_{Ax} \subset Q$.

Este hecho sugiere la siguiente

DEFINICIÓN

Las cuádricas que poseen puntos singulares se llaman **conos**.

Recta tangente

Sea $Q: F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ y $A \in Q$; luego,

$$Q: F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$$

Si $B \neq A$ y L es la recta que une A con B, es $L: x = t \underset{A}{.} B$ y la intersección de L con Q está determinada por los ceros del polinomio en 't'

$$F(t \underset{A}{.} B) = t^2 \psi_A(B) + 2t\varphi_A(B) = t(t.\psi_A(B) + \varphi_A(B)) = 0$$

Caben las siguientes posibilidades:

a) *A no es un punto singular y por lo tanto $\varphi_A \neq 0$*

- Si $\varphi_A(B) \neq 0$ y $\psi_A(B) \neq 0$ el polinomio tiene dos raices distintas y por lo tanto, $Q \cap L$ consiste de dos puntos diferentes.
- Si $\varphi_A(B) \neq 0$ y $\psi_A(B) = 0$, el polinomio tiene a $t = 0$ como raiz simple.
- Si $\varphi_A(B) = 0$ y $\psi_A(B) \neq 0$ el polinomio tiene a $t = 0$ como raiz doble y entonces $Q \cap L$ es A.
- Si $\varphi_A(B) = \psi_A(B) = 0$, el polinomio es nulo y en consecuencia L está contenida en Q.

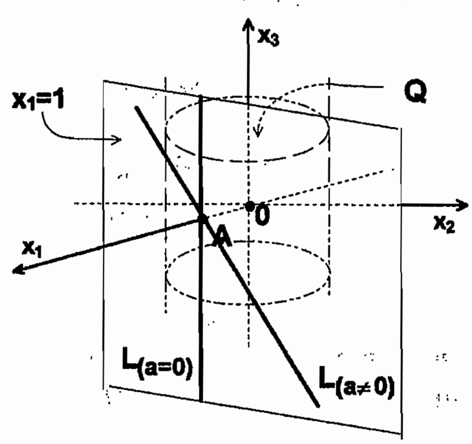
b) *A es un punto singular; es decir, $\varphi_A = 0$*

En este caso $\varphi_A(B) = 0$ y por lo tanto se reitera lo analizado en la parte a).

EJEMPLOS

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ y consideremos las ecuaciones de las cuádricas referidas al sistema de coordenadas canónico.

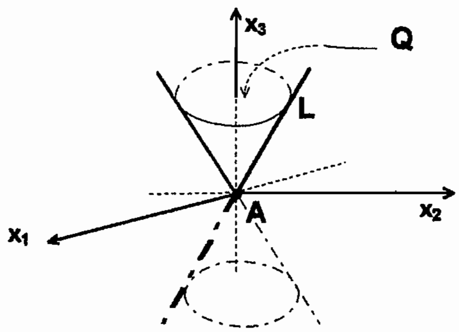
1. Sea Q el cilindro dado por $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ y $A = (1,0,0)$, entonces $\varphi_A(x) = x_1 - 1$ y $\psi_A(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2$
   Si $B = (0,0,0)$, es $\varphi_A(B) \neq 0$ y $\psi_A(B) \neq 0$ y la recta $L : x = t \underset{A}{.} B$ —que no es otra cosa que la dada por las ecuaciones $x_2 = 0$, $x_3 = 0$— interseca a Q en A y en $C = (-1,0,0)$.
   No hay ningún B que satisfaga $\varphi_A(B) \neq 0$ y $\psi_A(B) = 0$.
   Si $B = (1,a,b)$ con $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $\varphi_A(B) = 0$.
   - Para $a \neq 0$ es $\psi_A(B) \neq 0$ y la recta $L : x = t \underset{A}{.} B$ se interseca con Q solamente en el punto A.
   - Para $a = 0$ es $\psi_A(B) = 0$ y la recta L está contenida en Q



2. Sea Q el cono irreducible dado por $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, $A = (0,0,0)$, entonces $\varphi_A = 0$.

Si $B = (1,0,0)$ entonces $L : x = t \underset{A}{.} B$ —que tiene por ecuaciones $x_1 = 0$, $x_2 = 0$— interseca a Q sólo en A.

Si $B \in Q$, entonces L está contenida en Q.



DEFINICIÓN

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$, $A \in Q$, $B \in \mathbb{V}$, $B \neq A$ y $L : x = t \underset{A}{.} B$.

Si $\varphi_A \neq 0$, la recta L se dice **tangente** *a Q en A si $\varphi_A(B) = 0$.*

Si $\varphi_A = 0$, la recta L se dice **tangente** *a Q en A si $\psi_A(B) = 0$.*

NOTA

La definición de recta tangente es equivalente a la dada en [3].

OBSERVACIONES

1. En la situación de la definición anterior, si $\varphi_A \neq 0$ es

$$T_A : \varphi_A(x) = 0$$

un hiperplano (afín) de $\mathbb{V}$. Más precisamente, un subespacio de $\mathbb{V}_A$.
Luego, si $B \neq A$ se tiene que la recta L es tangente a Q en A si y sólo si $B \in T_A$.
Además, si L es tangente entonces $\varphi_A(t \underset{A}{.} B) = t.\varphi_A(B) = t.0 = 0$ y por lo tanto, $L \subset T_A$.
El hiperplano T_A se denomina el **hiperplano tangente** a Q en A.
Si $\varphi_A = 0$ y L es tangente, $\psi_A(t \underset{A}{.} B) = t^2.\psi_A(B) = 0$ y por lo tanto $L \subset Q$. En este caso no existe el hiperplano tangente.
En particular, si $Q = Q_S$, es decir, si Q es una variedad lineal, las rectas tangentes son las rectas contenidas en Q.

2. En el ejemplo 1. anterior, el plano $x_1 = 1$ es el plano tangente al cilindro en el punto $A = (1,0,0)$. Las rectas $L : x = t \underset{A}{.} B$ con $B = (1, a, b)$ y $(a, b) \neq (0, 0)$ son las rectas tangentes a Q en A.
Si $a = 0$, L está contenida en el cilindro y si $a \neq 0$, L interseca al mismo solamente en A.

EJERCICIOS

21. *Hallar los hiperplanos tangentes a las siguientes cuádricas de* $\mathbb{R}^n$ *en los puntos que se indican*
a) $n = 2$, $P = (1,0)$, $Q : 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1 + x_2 - 1 = 0$
b) $n = 3$, $P = (0,0,0)$, $Q : 3x_1^2 - 5x_2^2 + 3x_1x_2 + 6x_1 - x_2 = 0$

22. *a) Hallar las tangentes a la cónica* $Q : 3x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ *que pasan por el punto* $P = (1,1)$.
b) Determinar todos los P *de la cónica dada por* $Q : x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ *tales que la tangente en* P *sea paralela a la recta de ecuación* $x_1 + x_2 = 3$.

OBSERVACIONES

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$.

1. Si Q es reducible, es decir, $Q = H_1 \cup H_2$ con H_1 y H_2 hiperplanos, el conjunto de puntos singulares es

$$Q_S = H_1 \cap H_2$$

En consecuencia, para todo $A \in Q - (H_1 \cap H_2)$ existe el hiperplano tangente y es

$$T_A = \begin{cases} H_1 & \text{si } A \in H_1 - H_2 \\ H_2 & \text{si } A \in H_2 - H_1 \end{cases}$$

2. Sea $A \in Q$, $B \neq A$ y $L : x = t \underset{A}{.} B$ una recta *no* contenida en Q. Se tiene:
L es tangente a Q en A si y sólo si $f(t) = F(t \underset{A}{.} B)$ tiene a $t = 0$ como raíz doble.
Es inmediato a partir de la definición de recta tangente.

3. Sea $P \notin Q$ y L una recta que pasa por P y es tangente a Q; es decir, existe $A \in Q$ tal que $L : x = t \underset{A}{.} P$ y L es tangente a Q en A. Entonces $\varphi_A \neq 0$, $L \subset T_A$ y $Q \cap L = \{A\}$.
En efecto,
si fuera $\varphi_A = 0$, por definición de recta tangente correspondiente a este caso, se tendría que $L \subset Q$ con lo cual $P \in Q$ que no es el caso.

Dado que $\varphi_A \neq 0$ y L es tangente, por una observación anterior sabemos que $L \subset T_A$. Análogamente, por ser $\varphi_A \neq 0$ es $L \cap Q = \{A\}$ o $L \subset Q$. Este último caso no puede darse pues $P \notin Q$.

4. Si $A \in Q$ y $P \in \mathbb{V}$ entonces $\varphi_A(P) = \varphi_P(A) + c_P$
Por ser $\varphi_A(x) = \varphi_P(x \underset{P}{-} A) + \phi_P(A, x \underset{P}{-} A)$ cualquiera sea $x \in \mathbb{V}$; para $x = P$ se obtiene que $\varphi_A(P) = -\varphi_P(A) - \psi_P(A)$.
Por otro lado, la condición $A \in Q$ implica que $F(A) = \psi_P(A) + 2\varphi_P(A) + c_P = 0$; luego, $\varphi_A(P) = \varphi_P(A) + c_P$

5. Si $P \notin Q$ y $\varphi_P = 0$, no existe ninguna recta L tangente a Q que pase por P.
En efecto,
si existiese una recta L tangente a Q que pasa por P, por la observación 3. es $\varphi_A \neq 0$ y $L \subset T_A : \varphi_A(x) = 0$; luego, $P \in T_A$ o, equivalentemente, $\varphi_A(P) = 0$. Siendo $\varphi_P(A) = 0$, la observación anterior implica que $c_P = 0$; es decir, $P \in Q$, que no es el caso.

6. Sea $P \notin Q$ y L una recta tangente a Q que pasa por P. Si $F_P : \mathbb{V}_P \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática definida por
$$F_P(x) = \varphi_P^2(x) - c_P \psi_P(x)$$
entonces $F_P(x) = 0$ si $x \in L$.
Sea $Q \cap L = \{A\}$, $x \in L$ con $x \neq A, P$; luego, $L : y = s \underset{P}{.} x$ y $A = \lambda \underset{P}{.} x$ para algún λ.
Como $t = 0$ es raíz doble del polinomio $F(t \underset{A}{.} x)$, entonces λ es raíz doble de
$$F(s \underset{P}{.} x) = s^2 \psi_P(x) + 2s\varphi_P(x) + c_P$$
Pero entonces el discriminante de dicho polinomio es nulo; es decir $F_P(x) = 0$. Claramente se cumple $F_P(A) = 0$

7. Sea $P \notin Q$ tal que $\varphi_P \neq 0$. Si $F_P = 0$, entonces Q es un hiperplano doble.
En efecto,
por ser $F = \psi_p + 2\varphi_P + c_p$ es $c_P.F = c_P.\psi_P + 2c_P.\varphi_P + c_P^2$ y como $F_P = \varphi_P^2 - c_P.\psi = 0$, resulta $c_P.F = (\varphi_P + c_P)^2$.
Sea H_P el hiperplano definido por $H_P : \varphi_P(x) + c_P = 0$; luego, por ser $c_P \neq 0$, $c_P.F$ y F definen la misma cuádrica Q y por lo tanto $Q = H_P \cup H_P$.

Definición.

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ y $P \in \mathbb{V}$ tal que $\varphi_P \neq 0$. el hiperplano $H_P : \varphi_P(x) + c_P = 0$ se denomina el **hiperplano polar** *de P respecto de Q.*

La importancia del hiperplano polar se verá enseguida

Cono de tangentes

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$ y $P \notin Q$.

Queremos caracterizar al conjunto de todas las rectas que son tangentes a Q y pasan por P. Denotaremos a este conjunto con $C_P(Q)$.

Notemos en principio, que si Q es reducible o una variedad lineal, todas las rectas tangentes están contenidas en Q y por lo tanto $C_P(Q) = \varnothing$. En consecuencia, supondremos en lo que sigue que:

Q no es ni reducible ni una variedad lineal

Para estas cuádricas vale el teorema de unicidad y por consiguiente si P no es un centro de Q el hiperplano polar H_P está definido. Además, $Q_S \neq Q$.

Por otra parte, de acuerdo con la observación 5., si P es un centro de Q, $C_P(Q)$ es vacío; luego, vamos a suponer que $\varphi_P \neq 0$. Es de hacer notar que la condición $\varphi_P \neq 0$ no implica que $C_P(Q)$ sea necesariamente no vacío; es decir, si bien es una condición necesaria para la existencia de rectas tangentes a Q que pasan por P, no es suficiente †.

Busquemos entonces una condición necesaria y suficiente para que $C_P(Q)$ sea no vacío, que además sea fácilmente verificable.

Si $C_P(Q)$ es no vacío, existe una recta L tangente a Q que pasa por P. Por la observación 3. esta recta satisface

$$L \cap Q = \{A\} \quad , \quad \varphi_A \neq 0 \quad , \quad L \subset T_A$$

Siendo $P \in L \subset T_A$, resulta $\varphi_A(P) = 0$ que por la observación 4. implica que $\varphi_P(A) + c_P = 0$; o sea, $A \in H_P \cap (Q - Q_S)$

Recíprocamente, sea $A \in H_P \cap (Q - Q_S)$; luego, $\varphi_A(P) = \varphi_P(A) + c_P = 0$ y por lo tanto $P \in T_A : \varphi_A(x) = 0$. En consecuencia, la recta $L : x = t \underset{A}{.} P$ es tangente a Q en A, de donde $L \subset C_P(Q)$.

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que $C_P(Q)$ sea no vacío es que $H_P \cap (Q - Q_S)$ sea no vacío.

De acuerdo con lo anterior tenemos

$$C_P(Q) \cap Q = C_P(Q) \cap (Q - Q_S) = H_P \cap (Q - Q_S) \tag{1}$$

Si para $A \neq P$, L_{PA} denota a la recta $L_{PA} : x = t \underset{P}{.} A$, entonces

$$C_P(Q) = \bigcup \{L_{PA} \;/\; A \in H_P \cap (Q - Q_S)\} \tag{2}$$

Los puntos $A \in H_P \cap (Q - Q_S)$ son los puntos de tangencia.

---

† Ver el ejemplo 1 de la página 43

Hacemos notar que, de acuerdo con la observación 4., siempre se cumple que $Q_S \subset H_P$ cualquiera sea $P \notin Q$ y por lo tanto, la condición $H_P \cap Q \neq \varnothing$ no asegura —si Q es un cono– - la existencia de rectas tangentes a Q que pasen por P †.

Denotemos con

$$C_P^*(Q) : F_P(x) = \varphi_P^2(x) - c_P.\psi_P(x) = 0 \tag{3}$$

Como estamos suponiendo que Q es irreducible, por la observación 7. es $F_P \neq 0$ y por lo tanto, $C_P^*(Q)$ es una cuádrica en $\mathbb{V}$. De hecho es un cono, ya que $F_P : \mathbb{V}_P \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática.

De acuerdo con la observación 6. se tiene

$$C_P(Q) \subset C_P^*(Q) \tag{4}$$

En general no tienen por qué ser iguales. Si Q es un cono, $Q_S \subset C_P^*(Q)$.
En efecto,

si $A \in Q_S$ es $A \in H_P$ y por lo tanto $\varphi_P(A) + c_P = 0$. Como además $A \in Q$, es $\psi_P(A) + 2\varphi_P(A) + c_P = 0$ lo que implica $\psi_P(A) + \varphi_P(A) = 0$; luego, $A \in C_P^*(Q)$ y como $C_P(Q)$ y Q_S no tienen puntos en común resulta

$$C_P(Q) \neq C_P^*(Q)$$

Para cuádricas Q sin puntos singulares pueden existir rectas, que pasen por P y contenidas en $C_P^*(Q)$, que no intersequen a Q ††.

La inclusión (4) implica a su vez

$$C_P(Q) \cap (Q - Q_S) \subset C_P^*(Q) \cap (Q - Q_S)$$

Ahora bien, si $A \in C_P^*(Q) \cap (Q - Q_S)$,

$$\varphi_A \neq 0 \qquad , \qquad \varphi_P^2(A) - c_P.\psi_P(A) = 0 \qquad , \qquad \psi_P(A) + 2\varphi_P(A) + c_P = 0$$

Estas igualdades implican inmediatamente que $\varphi_P(A) + c_P = 0$; es decir, $A \in H_P$. Y como $A \in Q - Q_S$, resulta $A \in H_P \cap (Q - Q_S)$. Luego,

$$C_P(Q) \cap Q = H_P \cap (Q - Q_S) = C_P^*(Q) \cap (Q - Q_S) \tag{5}$$

Definición

† Ver el ejemplo 2 de la página 43

†† Ver el ejemplo 3 de la página 44

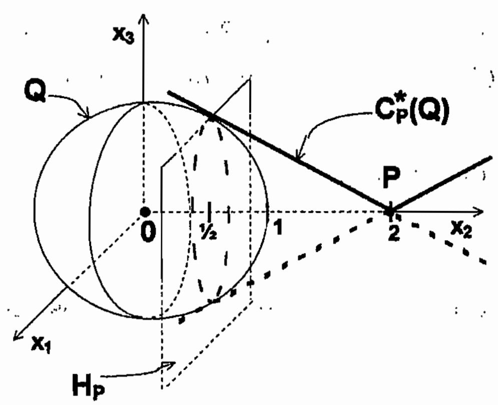
El conjunto $C^*_P(Q)$ definido por (3) se llama el **cono de tangentes** *de P respecto de Q.*

EJEMPLOS

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ y consideremos el sistema de coordenadas canónico.

1. Sea $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$, $P = (a, b, c) \neq (0,0,0)$.
   Luego, $H_P : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$.
   - Si $0 < a^2 + b^2 + c^2 < 1$, es $H_P \cap Q = \varnothing$ y por lo tanto $C_P(Q)$ también lo es, lo que geométricamente es obvio.
   - Si $a^2 + b^2 + c^2 > 1$ es $H_P \cap Q \neq \varnothing$ y $C_P(Q) = C^*_P(Q)$

   Veamos gráficamente esta situación para $P = (0, 2, 0)$.
   En este caso tenemos: $H_P : x_2 = \frac{1}{2}$ y $C^*_P(Q) : 3x_1^2 - (x_2 - 2)^2 + 3x_3^2 = 0$



2. Sea $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; $P = (a, b, c) \neq (0,0,0)$.
   Luego, $H_P : ax_1 + bx_2 - cx_3 = 0$.
   - Si $P = (0,0,1)$, entonces $H_P \cap Q = Q_S = \{(0,0,0)\}$ y por lo tanto $C_P(Q) = \varnothing$, lo que es geométricamente obvio.
   - Si $P = (1,0,0)$,
   $$H_P \cap Q : \begin{cases} x_2^2 - x_3^2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

   Luego, $C_P(Q)$ consiste de todas las rectas que pasan por P y por puntos $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ que pertenecen a $H_P \cap Q$.

3. Sea $Q : F(x) = x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$. Luego, Q no tiene centros.
   Si $P = (0,0,0)$ (con lo cual $P \notin Q$), resulta $H_P : x_1 - x_2 = 1$.
   De donde, $H_P \cap Q = \{(1, 0, x_3), (-1, -2, x_3)\}$ y por lo tanto $C_P(Q)$ consta de las rectas que unen P con los puntos de $H_P \cap Q$.

En este caso, el cono $C_P^*(Q) : F_P(x) = x_2^2 - 2x_1x_2 = 0$ es claramente distinto de $C_P(Q)$; por ejemplo, $(0,0,1)$ pertenece a $C_P^*(Q)$ pero no a $C_P(Q)$.

EJERCICIOS

23. *Determinar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ por los cuales pasan dos tangentes a la cónica $Q : x_1x_2 - 1 = 0$.*

24. *Sea Q la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ definida por $Q : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ (base canónica). Sea $P = (a,b,c)$ tal que $a^2 + b^2 + c^2 > 1$. Probar que el conjunto de todas las rectas tangentes a Q que pasan por P definen un cono. ¿Cuál es su ecuación respecto de la base canónica?*

25. *Supongamos que $\dim \mathbb{V} \geq 3$ y sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica irreducible y sin puntos singulares. Sea $P \in \mathbb{V}$ que no está en Q ni es un centro de Q. Probar que $C_P(Q) \neq C_P^*(Q)$ en cada uno de los siguientes casos:*
    a) $\dim(N(\phi)) \geq 2$
    b) Q tiene centro y $\dim(N(\phi)) = 1$

OBSERVACIÓN

De acuerdo con lo visto podemos distinguir tres tipos diferentes de cuádricas

Tipo **I** :	$Q_S \neq \varnothing$	(conos)
Tipo **II** :	$Q_S = \varnothing$, $Q_C \neq \varnothing$	(cuádricas con centro, sin puntos singulares)
Tipo **III** :	$Q_C = \varnothing$	(cuádricas sin centro)

En los próximos capítulos vamos a clasificar cada uno de estos tipos, primero en forma afín y por último en forma euclídea.

COMENTARIOS

1. Sea Q una cuádrica en $\mathbb{V}$ y sean $F = \psi + 2\varphi + c = 0$ y $F' = \psi' + 2\varphi' + c' = 0$ dos funciones cuadráticas que la definen, entonces $\mathbf{r}(F') = \mathbf{r}(F)$.

   En efecto,

   - si Q no es una variedad lineal, el corolario 9 garantiza que Q no está contenida en una variedad lineal de dimensión $n-2$; por lo tanto podemos aplicar el teorema 12 y asegurar la existencia de un $\lambda \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ tal que $F' = \lambda \,.\, F$. Sigue inmediatamente de aquí que $\mathbf{r}(F') = \mathbf{r}(F)$

- si Q es una variedad lineal, el citado corolario nos dice que $Q = A + N(\phi) = A + N(\phi')$, para $A \in Q$. De aquí , $\dim(N(\phi)) = \dim(N(\phi'))$ lo que a su vez implica que F y F' tienen el mismo rango.

2. a) Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **I**.
Tomemos una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ adaptada a ψ y $A \in Q_S$. Sea $B_A = \{w_1, \dots, w_n\}$ con $w_i = v_i + A$ $(i = 1, \dots, n)$. Si $x = x = x_1 \underset{A}{\cdot} w_1 \underset{A}{+} \dots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} w_n$ se tiene

$$Q : F(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 = 0 \qquad (s = \operatorname{índ}(F), r = \mathbf{r}(F)) \tag{1}$$

debido a que $\varphi_A = 0$ y $c_A = 0$.
Si fuera $s < r - s$, para $G = -F$ —que también define a Q— vale la relación opuesta: $\operatorname{índ}(G) \geq r - \operatorname{índ}(G)$ y en consecuencia siempre podemos representar a Q en la forma (1) con $s \geq r - s$.
Esto sugiere definir el número

$$\mathrm{s} = \text{máx}\{\ \operatorname{índ}(F),\ \operatorname{índ}(-F)\}$$

Lo anterior nos dice que hay una base $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{V}_A$ en la cual

$$Q : \sum_{i=1}^{\mathrm{s}} x_i^2 - \sum_{i=\mathrm{s}+1}^{r} x_i^2 = 0 \qquad (\mathrm{s} \geq r - \mathrm{s}) \tag{2}$$

Afirmamos que este número 's' no depende de F.
En efecto,

para el caso en que Q no sea una variedad lineal, el teorema 12 y la propia definición de 's' lo garantizan. Supongamos entonces que Q es una variedad lineal. Luego, $Q = A + N(\phi) = N(\phi_A)$ con $A \in Q = Q_S$.
De acuerdo con (2), si $\mathrm{s} < r$ es $\phi_A(u_\mathrm{s}, u_\mathrm{s}) = 1$ y por lo tanto $u_\mathrm{s} \notin N(\phi_A) = Q$. Además, $u_\mathrm{s} \underset{A}{+} u_{\mathrm{s}+1} \in Q = N(\phi_A)$ y $u_\mathrm{s} \underset{A}{-} u_{\mathrm{s}+1} \in Q = N(\phi_A)$. Luego, $2 \underset{A}{\cdot} u_\mathrm{s} \in N(\phi_A)$ y en consecuencia $u_\mathrm{s} \in N(\phi_A)$, lo que es absurdo.
En consecuencia $\mathrm{s} = r$ y ya vimos que r no depende de F.

b) Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **II**.
Tomemos $A \in Q_C$. Luego, $\varphi_A = 0$ y $F(A) \neq 0$ pues $Q \cap Q_C \neq \varnothing$. De modo que

$$Q : \psi_A(x) + F(A) = 0$$

Dividiendo por '$-F(A)$'

$$Q : -\frac{1}{F(A)} \psi_A(x) - 1 = 0$$

Esto sugiere definir $G = -\dfrac{1}{F(A)} \, . \, F$. Evidentemente G es una función cuadrática que también define a Q y $\mathbf{r}(G) = \mathbf{r}(F)$.

Veamos que 's'= $\text{índ}(G)$ no depende ni de $A \in Q_C$ ni de F.

La independencia de $A \in Q_C$ se debe a que si $B \in Q_C$ es $F(B) = F(A)$. Por otro lado, una cuádrica de este tipo no puede estar contenida en una variedad lineal de dimensión $n-2$. Luego, por el teorema 12, si F' define a Q es $F' = \lambda \, . \, F$ y por lo tanto $-\dfrac{1}{F'(A)}F' = -\dfrac{1}{\lambda F(A)}\lambda F = -\dfrac{1}{F(A)}F$

c) Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **III**.

Si tomamos $A \in Q$ —en este caso $\varphi_A \neq 0$ pues $Q_C = \varnothing$

$$Q : F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$$

Como en el caso a), definimos $s = \text{máx}\{\, \text{índ}(F), \ \text{índ}(F')\}$

Según observamos en a) y ya que tampoco en este caso puede estar Q contenida en una variedad lineal de dimensión $n-2$, el teorema 12 y la definición de 's' garantizan su independencia de F.

Los comentarios previos aseguran que no hay ambigüedad en la siguiente

DEFINICIÓN

Sea $Q : F(x) = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$.

(i) Llamamos **rango** *de Q al número $r = \mathbf{r}(F)$ y lo notamos $\mathbf{r}(Q)$.*

(ii) Si Q es del tipo **I** *o* **III**, *llamamos* **índice** *de Q al número $s = \text{máx}\{\, \text{índ}(F), \ \text{índ}(-F)\}$ y lo notamos $\text{índ}(Q)$.*

(iii) Si Q es del tipo **II**, *llamamos* **índice** *de Q al número $s = \text{índ}\left(-\dfrac{1}{F(A)} \, . \, F\right)$ y lo notamos $\text{índ}(Q)$, donde A es un centro de Q.*

OBSERVACIÓN

De acuerdo con la definición anterior, si Q es una variedad lineal, o sea $Q = Q_S$, $\mathbf{r}(Q) = \text{índ}(Q) = n - \dim(Q)$.

EJERCICIOS

26. Hallar el rango y el índice de Q para las siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$

a) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$

b) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - x_2 - \frac{3}{4} = 0$

c) $4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$

27. *Lo mismo que el ejercicio anterior pero para las cuádricas de* $\mathbb{R}^3$

   a) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2 = 0$
   b) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_1 - 4x_2 - 10x_3 = 0$
   c) $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3 = 0$
   d) $x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 1 = 0$
   e) $x_1^2 + x_2^2 + 10x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_2x_3 + 9x_3 - 3x_1 + 1 = 0$

28. *Lo mismo que el ejercicio anterior pero para la cuádrica de* $\mathbb{R}^4$

$$x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$$

29. *Sea* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *la función cuadrática cuya expresión en la base canónica es*

$$F(x) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_1x_2 + x_2x_3 - x_1 + 3x_2 - 10$$

   a) *Hallar su expresión respecto de la base* $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$
   b) *Encontrar una base* B' *de* $\mathbb{R}^3$ *tal que en la expresión de* F *en la base* B' *no figuren términos del tipo "*$a.x_ix_j$*" para* $i \neq j$.
   c) *Encontrar* $A \in \mathbb{R}^3$ *tal que* $F = \psi_A + 2\varphi_A$.

Clasificación afín

Nos ocuparemos ahora de clasificar cada uno de los tipos de cuádricas. Nuestro objetivo es encontrar –para cada tipo– una ecuación que la represente y cuya expresión sea lo más simple posible. Pretendemos además que dicha expresión dependa del rango e índice de la cuádrica y no de una de las funciones cuadráticas que la definen. Esto nos obligará a tomar algunos recaudos.

Ecuación Normal Afín de las Cuádricas del Tipo I

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **I**.
Si $r = \mathbf{r}(\psi)$ y $s =$ índ(ψ), podemos suponer que $s \geq r - s$. En caso contrario, cambiamos F por $-F$ para que así suceda. De esta forma: $r = \mathbf{r}(Q)$ y $s =$ índ(Q).
Tomemos

- $\mathcal{B} = \{v_i, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{V}$ adaptada a ψ
- $A \in Q_S$
- $\mathcal{B}_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ con $w_i = v_i + A$, $1 \leq i \leq n$

Con esto logramos que sean: $\varphi_A = 0$ y $c_A = 0$.
Si escribimos un punto x en la base $\mathcal{B}_A$, $x = x_1 \underset{A}{.} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{.} w_n = A + x_1.v_1 + \ldots + x_n.v_n$, se ve que

$$F(x) = \psi_A(x) = \psi(x - A) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2$$

Llegamos así a la representación normal afín de las cuádricas del tipo **I**

$$(1) \qquad Q : \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 = 0$$

Ecuación Normal Afín de un Cono

donde $s =$ índ(Q), $r = \mathbf{r}(Q)$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto x referidas a la citada base $\mathcal{B}_A$.

Ecuación Normal Afín de las Cuádricas del Tipo II

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **II**
Si tomamos un $A \in Q_C$, la ecuación de Q resulta

$$Q : F(x) = \psi_A(x) + F(A) = 0$$

siendo $F(A) \neq 0$, ya que $Q_C \cap Q = \varnothing$ en este caso.

Podemos normalizar esta ecuación definiendo $G(x) = -\dfrac{1}{F(A)} \cdot F(x)$. A esta nueva función cuadrática —que también define a Q— la podemos escribir en la forma

$$G(x) = \tilde{\psi}(x - A) - 1$$

donde $\tilde{\psi} = -\dfrac{1}{F(A)} \cdot \psi$ vuelve a ser una forma cuadrática cuyo rango e índice (los mismos de G) coinciden – según la definición dada en la sección anterior– respectivamente con los de Q.

Finalmente, si tomamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, una base de $\mathbb{V}$ adaptada a $\tilde{\psi}$, y $\mathcal{B}_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ la base de $\mathbb{V}_A$ definida por $w_i = v_i + A$, $1 \leq i \leq n$, obtenemos la representación normal afín de las cuádricas del tipo **II.**

(2) $Q : \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 - 1 = 0$ **Ecuación Normal Afín de una Cuádrica con Centro sin Puntos Singulares**

donde $s =$ índ(Q), $r = \mathbf{r}(Q)$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto x referidas a la base $\mathcal{B}_A$ antes mencionada.

NOTA: '$s \geq 1$'por ser $Q \neq \varnothing$.

Ecuación Normal Afín de las Cuádricas del Tipo III

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **III**
Utilizando el mismo argumento que para el caso de las cuádricas del tipo **I**, también aquí podemos suponer que $s \geq r - s$.

De esta forma : $r = \mathbf{r}(Q)$ y $s =$ índ(Q).
Tomemos $A \in Q$. Luego, $c_A = 0$ y por lo tanto

$$Q : F(x) = \psi_A(x) + 2\varphi_A(x) = 0$$

Siendo Q del tipo **III** podemos asegurar que está definido el hiperplano tangente a Q en A

$$T_A = N(\varphi_A) = A + \mathbb{H}$$

donde $\mathbb{H} : \varphi(x) + \phi(A, x) = 0$.

Teniendo en cuenta la observación 3 de la página 34 y siendo Q una cuádrica sin centro se concluye que

$$r \leq n - 1 \qquad \text{y} \qquad N(\phi) \not\subset N(\varphi)$$

En consecuencia, podemos elegir $u \in N(\phi) - N(\varphi)$ de manera que

$$\mathbb{V} = \mathbb{H} \oplus [u]$$

verificándose además que

$$\text{índ}(\psi) = \text{índ}(\psi|_{\mathbb{H}}) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(\psi) = \mathbf{r}(\psi|_{\mathbb{H}})$$

Esto nos sugiere tomar

- $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base de $\mathbb{H}$ adaptada a $\psi|_{\mathbb{H}}$
- $w_i = v_i + A$ para $1 \leq i \leq n-1$
- $w = u + A$

Luego, $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, w\}$ es una base de $\mathbb{V}_A$ y en ella

$$\psi_A(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2$$

Tenemos ya 'normalizada' la parte cuadrática de la ecuación de Q. Nos vamos a ocupar ahora de hacer lo propio con la parte lineal.

Respecto de la base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, w\}$, T_A tiene ecuación

$$T_A : x_n = 0$$

y por lo tanto, en esta base,

$$\varphi_A(x) = x_n \cdot \varphi_A(w) = x_n \cdot \varphi(u)$$

Luego,

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 + 2\varphi(u) \cdot x_n$$

donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes del punto x respecto de la base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}, w\}$.

Para culminar sólo nos falta hacer una pequeña 'corrección' que nos permita eliminar el factor '$2\varphi(u)$' de la expresión de la función cuadrática. Para ello, simplemente alcanza con definir

$$v_n = -\frac{1}{2\varphi(u)} \cdot u \qquad \text{y} \qquad w_n = A + v_n$$

pues con esto, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ resulta una base de $\mathbb{V}$ adaptada a ψ y $\mathcal{B}_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de $\mathbb{V}_A$, respecto de la cual

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 - x_n$$

Obtenemos así la representación normal afín de las cuádricas del tipo **III**

$$(3)\quad Q : \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{i=s+1}^{r} x_i^2 - x_n = 0 \qquad \textbf{Ecuación Normal Afín de una Cuádrica sin Centro}$$

donde $s = \text{índ}(Q)$, $r = \mathbf{r}(Q)$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto $x \in \mathbb{V}$ referidas a la base $\mathcal{B}_A$.

EJERCICIOS

30. *a) Dada la cónica de ecuación $Q : (x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = 1$, hallar una base que exprese a Q en su forma normal afín.*
b) Idem con $Q : 9(x_1 - a)^2 - 4(x_2 - b)^2 = 1$.

31. *Determinar la ecuación normal afín de las siguientes cuádricas de $\mathbb{R}^n$, indicando en cada caso*

- ⋆ *origen A elegido*
- ⋆ *base $\mathcal{B}_A$ utilizada*
- ⋆ *índ(Q) y $\mathbf{r}(Q)$*

a) $Q : 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$ $(n = 2)$
b) $Q : x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3 = 0$ $(n = 3)$
c) $Q : x_1^2 - 2x_1x_3 + x_4^2 + 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0$ $(n = 4)$
d) $Q : x_1^2 - 2x_1 + 1 = 0$ $(n = 2)$
e) $Q : 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 3x_1 + 1 = 0$ $(n = 3)$

32. *Sea en $\mathbb{R}^3$ la cuádrica $Q : x_1^2 + x_2^2 - (x_3 - 1)^2 = 0$. Encontrar planos π_i $(1 \leq i \leq 6)$ tales que $\pi_i \cap Q$ sea* *a)* *una elipse*

b) *una parábola*

c) *una hipérbola*

d) *un cono plano*

e) *una recta doble*

f) *un punto*

Equivalencia afín de las cuádricas

Sean Q, Q' dos cuádricas del mismo tipo con el mismo índice s y rango r.

De acuerdo con lo hecho previamente podemos elegir –entre todas las funciones cuadráticas que las representan– dos de ellas $G,\, G' : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, dos puntos $A,\, A' \in \mathbb{V}$ y dos bases $\mathcal{B}_A = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de $\mathbb{V}_A$ y $\mathcal{B}_{A'} = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$ de $\mathbb{V}_{A'}$ que garanticen

- $\star$ $\text{índ}(G) = \text{índ}(G') = s$ y $\mathbf{r}(G) = \mathbf{r}(G') = r$
- $\star$ $Q : G(x) = 0$ respecto de la base $\mathcal{B}_A$
- $\star$ $Q' : G'(x) = 0$ respecto de la base $\mathcal{B}_{A'}$
- $\star$ $G(x_1 \underset{A}{\cdot} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} w_n) = G'(x_1 \underset{A'}{\cdot} w'_1 \underset{A'}{+} \ldots \underset{A'}{+} x_n \underset{A'}{\cdot} w'_n)$

Sea $f : \mathbb{V}_A \to \mathbb{V}_{A'}$ el único isomorfismo que cumple $f(w_i) = w'_i$ para $1 \leq i \leq n$. De esta forma,

$$f(x_1 \underset{A}{\cdot} w_1 \underset{A}{+} \ldots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} w_n) = x_1 \underset{A'}{\cdot} w'_1 \underset{A'}{+} \ldots \underset{A'}{+} x_n \underset{A'}{\cdot} w'_n$$

Claramente, $G(x) = G'(f(x))$ y por consiguiente $f(Q) = Q'$.

En otras palabras, si Q y Q' son dos cuádricas del mismo tipo, con igual rango e índice, existe un isomorfismo afín $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $f(Q) = Q'$.

Esto sugiere la siguiente

Definición

Dos cuádricas Q, Q' de $\mathbb{V}$ se dicen **afinmente equivalentes** *si existe $f \in GA(\mathbb{V})$ tal que $f(Q) = Q'$.*

En tal caso notamos : $Q \sim Q'$

EJERCICIOS

33. La relación $\sim$ es de equivalencia.

34. Dadas las cónicas de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones
$Q : 7x_1^2 - 10x_1x_2 + 7x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 - 1 = 0$
$Q' : 5y_1^2 + 4y_1y_2 + 2y_2^2 - 2y_1 + 4y_2 - 1 = 0$
ver si existe un isomorfismo afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(Q) = Q'$.

OBSERVACIÓN

Sean Q una cuádrica en $\mathbb{V}$ y $f \in GA(\mathbb{V})$. Entonces, $Q' = f(Q)$ es también una cuádrica en $\mathbb{V}$ y si F es una función cuadrática que define a Q se tiene que $F' = F \circ f^{-1}$ es una función cuadrática que define a Q'.
En efecto,

basta ver que F' es efectivamente una función cuadrática y que $Q' = F'^{-1}(0)$.

La primera afirmación se debe a que componer una función cuadrática con un isomorfismo afín vuelve a dar una función cuadrática.

Con referencia a la segunda afirmación, basta observar que

$$F'(x) = 0 \iff F(f^{-1}(x)) = 0 \iff f^{-1}(x) \in Q \iff x \in f(Q) = Q'$$

Proposición 17

Sean Q, Q' dos cuádricas en $\mathbb{V}$. Entonces,

a) si $Q \sim Q'$, Q y Q' son del mismo tipo

b) si Q y Q' son del mismo tipo, con igual rango e índice, $Q \sim Q'$

c) si Q y Q' son del mismo tipo y $Q \sim Q'$, ind(Q) = ind(Q') y $\mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}(Q')$.

DEMOSTRACIÓN:

- *a)* Es consecuencia de la observación anterior y de la definición de centro ya que la clasificación hecha se basa (esencialmente) en la existencia o no de centro.
- *b)* Se hizo en el desarrollo de los comentarios previos a la definición de cuádricas afinmente equivalentes.
- *c)* Es consecuencia de la proposición 3.

Conclusión

Los resultados probados nos permiten afirmar que toda cuádrica de $\mathbb{V}$ es afinmente equivalente a una y sólo a una de las construídas mediante las ecuaciones **(1)**, **(2)** y **(3)** a partir de una cierta base fija de $\mathbb{V}$.

Ejemplo

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = x_1^2 + 25x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 0$ expresada en el sistema de coordenadas canónico .

Nos proponemos hallar su ecuación normal afín.

⋆ Comencemos por averiguar a qué tipo pertenece.

Tenemos

$$\psi(x) = x_1^2 + 25x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3 = 0$$

de donde

$$\phi(x,y) = x_1y_1 + 25x_2y_2 - 4x_3y_3 - 5x_1y_2 + 2x_1y_3 - 10x_2y_3$$

y además

$$\varphi \equiv 0 \qquad \text{y} \qquad c = 0$$

Para estudiar la existencia o no de centros hay que ver si el siguiente sistema tiene solución

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 25 & -10 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un cálculo directo muestra que el conjunto de soluciones de este sistema es una recta, de ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Concluimos entonces que Q tiene una recta de centros y además que uno cualquiera de ellos tiene la forma

$$C = (5a, a, 0) \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}$$

El hecho de ser

$$F(5a, a, 0) = 25a^2 + 25a^2 - 50a^2 = 0$$

nos muestra que $Q_C \subset Q$; con lo cual $Q_S \neq \varnothing$.

Esto nos dice que Q es del tipo **I**; i.e., Q es un cono.

⋆ Otros datos que necesitamos conocer son: $\mathbf{r}(Q)$ e $\text{índ}(Q)$.

En principio, como $\|\phi\|$ tiene determinante nulo y dos filas linealmente independientes, $\mathbf{r}(\psi) = 2$ y $\dim(N(\phi)) = 1$.

Siendo que el sistema lineal que determina al subespacio $N(\phi)$ coincide, en este caso, con el que nos da el conjunto de centros, podemos afirmar sin más que

$$N(\phi) = [(5, 1, 0)]$$

Tomemos ahora el punto $(1,0,0)$, que claramente no está en $N(\phi)$. Por lo tanto, $\psi(1,0,0) = 1 > 0$; esto nos dice que $(1,0,0) \in \mathbb{R}^{3+}$ y en consecuencia resulta $\text{ind}(\psi) \geq 1$

Por otro lado, $\psi(0,0,1) = -4 < 0$, por lo tanto no puede ser $\text{ind}(\psi) = 2$. Podemos afirmar entonces que $\text{ind}(\psi) = 1$.

Finalmente, como $\text{ind}(\psi) = 1 = 2 - 1 = \mathbf{r}(\psi) - \text{ind}(\psi)$ se tiene la relación

$$\text{ind}(\psi) \geq \mathbf{r}(\psi) - \text{ind}(\psi)$$

y entonces resulta

$$\text{ind}(Q) = \text{ind}(\psi) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}(\psi)$$

Con estos datos ya podemos asegurar que la ecuación normal afín de Q es

$$Q : x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Para concluir vamos a encontrar un sistema de coordenadas en el que está expresada.

Comencemos por hallar una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^3$ adaptada a ψ. Teniendo en cuenta que $N(\phi) = [(5,1,0)]$, llamamos

$$u_3 = (5,1,0)$$

y recordando que $\psi(1,0,0) = 1 > 0$ definimos $u_1 = (1,0,0)$. Necesitamos encontrar ahora un u_2 que verifique

$$\psi(u_2) < 0 \qquad \text{y} \qquad \phi(u_1, u_2) = 0$$

Si (y_1, y_2, y_3) son las componentes de u_2 respecto del sistema canónico, la segunda condición equivale a $y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0$; luego, si fuera $y_3 = 0$ es evidente que sería $\psi(u_2) = 0$. De modo que debemos elegir $y_3 \neq 0$. Concretamente, fijemos $y_3 = 1$ e $y_2 = 0$; en tal caso debe ser $u_2 = (-2,0,1)$ que satisface las condiciones pedidas.

El conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal respecto de ϕ y siendo que $\psi(u_1) = 1$, $\psi(u_2) = -8$ basta definir

$$v_1 = u_1 = (1,0,0) \qquad v_2 = \frac{u_2}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \qquad v_3 = u_3 = (5,1,0)$$

Sólo nos resta ahora elegir como origen del sistema buscado un centro de Q, por ejemplo $A = (5,1,0)$ y definir $w_i = v_i + A$ $(i = 1,2,3)$.

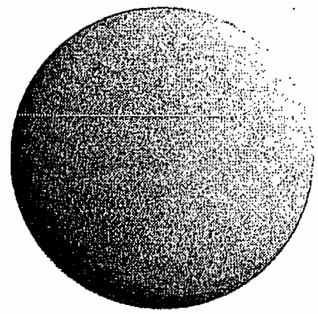
Uno de los sistemas de coordenadas respecto del cual es $Q : x_1^2 - x_2^2 = 0$ es

$$\mathcal{B}_A = \left\{(6,1,0), \left(5 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right), (10,2,0)\right\}$$

Complemento

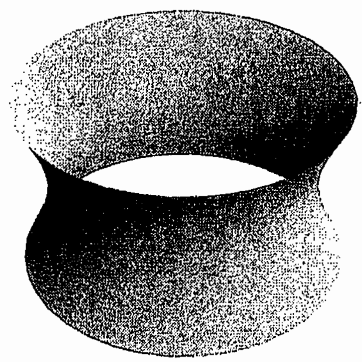
Clasificación afín de las Cuádricas en $\mathbb{R}^3$

(1) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$



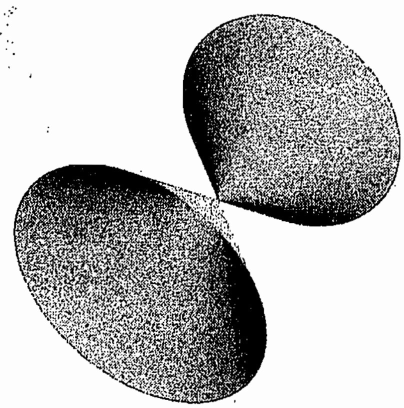
elipsoide

(2) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$



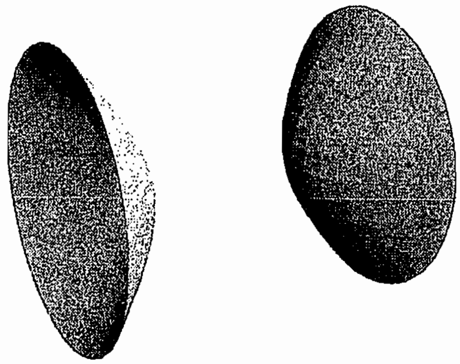
hiperboloide de una hoja

(3) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$



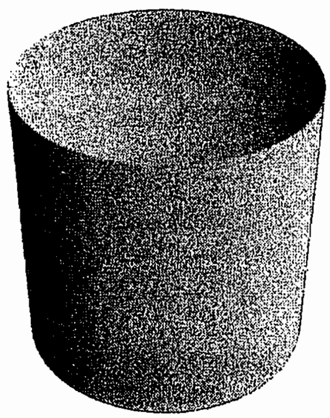
cono irreducible

(4) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$



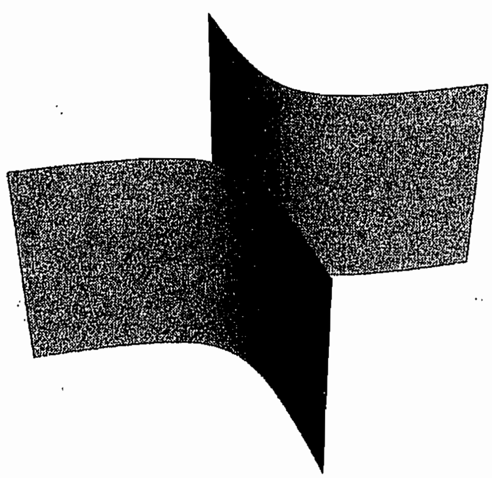
hiperboloide de dos hojas

(5) $Q : F(x) = x_1^2 + x_2^2 = 1$



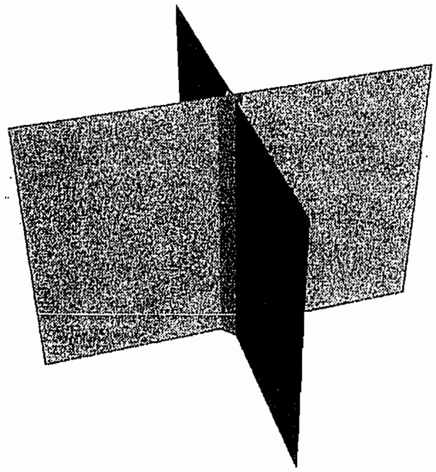
cilindro elíptico

(6) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 = 1$



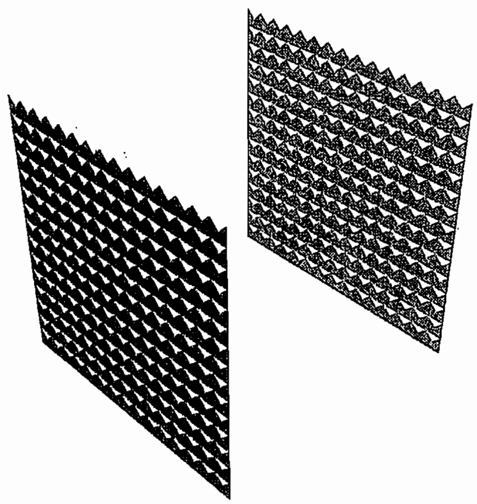
cilindro hiperbólico

(7) $Q : F(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0$



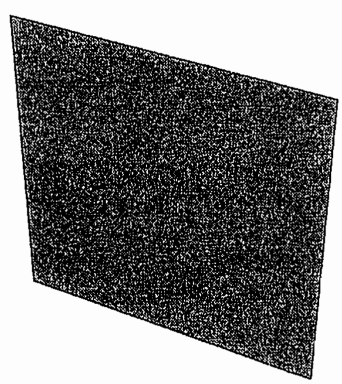
dos planos no paralelos

(8) $Q : F(x) = x_1^2 = 1$



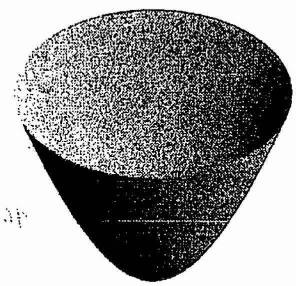
dos planos paralelos

(9) $Q : F(x) = x_1^2 = 0$



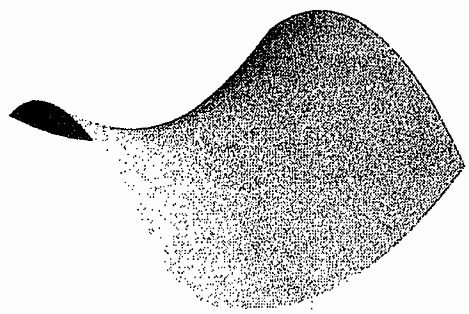
plano doble

(10) $Q: F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$



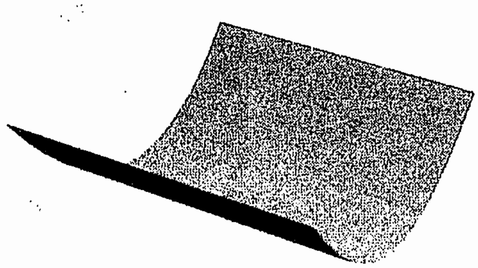
paraboloide
elíptico

(11) $Q: F(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_3 = 0$



paraboloide
hiperbólico

(12) $Q: F(x) = x_1^2 - 2x_3 = 0$



cilindro
parabólico

Clasificación euclídea

Consideramos ahora que el espacio vectorial $\mathbb{V}$ está dotado de una estructura euclídea. En tal caso podemos introducir una métrica [†] en $\mathbb{V}$.

Al hacer la clasificación afín, consideramos que dos cuádricas eran equivalentes cuando se podía llevar una en otra por medio de un isomorfismo afín.

Parece natural entonces decir, en el caso euclídeo, que dos cuádricas son (métricamente) equivalentes si se puede llevar una en otra mediante una isometría. Formalmente damos la siguiente

Definición

Sean Q_1 , Q_2 dos cuádricas en $\mathbb{V}$ del mismo rango e índice. Decimos que Q_1 y Q_2 son **métricamente equivalentes** *—y lo notamos con $Q_1 \sim_m Q_2$— si existe una isometría $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $f(Q_1) = Q_2$*

Observación

La relación $\sim_m$ es de equivalencia.

Claramente, como toda isometría es en particular un isomorfismo afín, para ser métricamente equivalentes deben ser en principio afínmente equivalentes.

Nos queda por analizar entonces si se mantiene la equivalencia (ahora métrica) de las cuádricas de cada tipo afín, supuesto que tengan el mismo rango e índice. En realidad, veremos que esto no es para nada así.

Hay un tipo de cuádricas que es muy fácil de clasificar métricamente: las variedades lineales. Esto es debido a que la condición necesaria y suficiente para que una sea la imagen de la otra por una isometría es que ambas tengan la misma dimensión.

En virtud de este hecho nos limitaremos a clasificar las cuádricas que no son variedades lineales.

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica en $\mathbb{V}$. Vamos a utilizar los comentarios de la página 9 y siguientes para escribir su ecuación en una forma más adecuada que facilite la clasificación que queremos hacer.

Sea ϕ la forma bilineal simétrica asociada a ψ y α el único endomorfismo de $\mathbb{V}$ tal que

$$\phi(x, y) = < \alpha(x), y >$$

[†] Ver página 12

para todo $x, y \in \mathbb{V}$.

Como α resulta autoadjunto, todos sus autovalores son reales y se puede encontrar una base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de α.

Concretamente, llamemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a los autovalores de α y $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{V}$ tal que

$$\alpha(e_i) = \lambda_i.e_i$$

para todo $i = 1, \ldots, n$

Debido a que F y $-F$ definen la misma cuádrica no se pierde generalidad si se supone que $s \geq r - s$; i.e., $2s \geq r$. Tampoco hay inconveniente en asumir además —caso contrario se reordena— que se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &\star\ \lambda_s \geq \ldots \geq \lambda_1 > 0 \\ &\star\ \lambda_r \leq \ldots \leq \lambda_{s+1} < 0 \\ &\star\ \lambda_i = 0 \text{ si } i = r+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{1}$$

donde $s =$ índ(Q) y $r = \mathbf{r}(Q)$.

Se deduce de aquí la existencia de números $a_1 \geq \ldots \geq a_s > 0$, $b_{s+1} \geq \ldots \geq b_r > 0$ tales que

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \tfrac{1}{a_i^2} \quad \text{si} \quad i = 1, \ldots, s \\ \lambda_i &= -\tfrac{1}{b_i^2} \quad \text{si} \quad i = s+1, \ldots, r \end{aligned}$$

Finalmente, si indicamos con $(x_1, \ldots, x_n)$ a las componentes de un punto x respecto de la base $\mathcal{B}$, la forma cuadrática se escribe en la forma

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} \tag{2}$$

con $a_1 \geq \ldots \geq a_s > 0$ y $b_{s+1} \geq \ldots \geq b_r > 0$.

Antes de tratar la situación general veamos un caso particular.

Sean en $\mathbb{R}^2$ los conos cuyas ecuaciones en la base canónica son

$$Q_1 : \psi_1(x) = x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$Q_2 : \psi_2(x) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 = 0$$

Evidentemente ambos tienen el mismo rango e índice; luego, son afinmente equivalentes. Nos preguntamos si también serán métricamente equivalentes. Supongamos que sí. en tal caso debe existir una isometría $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(Q_1) = Q_2$.

Según se vio anteriormente, $\psi_1 \circ f^{-1}$ es una función cuadrática que también define a la cuádrica Q_2.

Podemos escribir

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= (b_{11}x_1 + b_{21}x_2, b_{12}x_1 + b_{22}x_2) + (c_1, c_2) \\ &= (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + (c_1 \; c_2) \end{aligned}$$

con $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2)$.

De donde

$$\psi_1 \circ f^{-1}(x) = (b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + c_1)^2 - (b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + c_2)^2$$

Desarrollando estas expresiones y recordando que b es ortogonal se llega a que

$$\psi_1 \circ f^{-1}(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 - x_2^2) + \beta x_1 x_2 + 2(a_1 x_1 + a_2 x_2) + c$$

para ciertos números reales α, β, a_1, a_2 y c.

Ahora bien, siendo que $\psi_1 \circ f^{-1}$ y ψ_2 definen la misma cónica, que no es una variedad lineal, podemos aplicar el teorema de unicidad para concluir que existe un número $\lambda \neq 0$ tal que

$$\psi_1 \circ f^{-1} = \lambda.\psi_2$$

La unicidad de la escritura de una función cuadrática obliga a que

$$\begin{aligned} \alpha(x_1^2 - x_2^2) + \beta x_1 x_2 &= \lambda(x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_2^2) \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

De aquí, tomando primero $x = (1, 0)$ y luego $x = (0, 1)$ resulta que α debe ser —al mismo tiempo— igual a λ y a $\frac{1}{2}\lambda$, lo que es imposible pues $\lambda \neq 0$.

Este absurdo provino de suponer que Q_1 y Q_2 eran métricamente equivalentes. Por lo tanto, hemos mostrado dos conos afinmente equivalentes que no son métricamente equivalentes.

Es claro que cualquiera que hubiera sido el número ($\neq 1$) que reemplazara a $\frac{1}{2}$ en la ecuación de Q_2, seguiría sin haber equivalencia métrica entre ambas.

Una consecuencia importante entonces, es que al dar la clasificación euclídea no vamos a tener un conjunto *finito* de ecuaciones que represente a sendas clases de equivalencia, como ocurría en el caso afín.

El ejemplo anterior muestra que el conjunto de clases de equivalencia métrica es infinito.

Precisemos qué queremos decir con ecuación *normal* en el caso euclídeo.

- Para los conos trasladamos el origen del sistema de coordenadas a un punto de la cuádrica, lo que hace que el término independiente sea nulo; por lo tanto, cualquier múltiplo de la forma cuadrática que la define lo sigue haciendo y en consecuencia siempre podemos elegir esa constante de modo que el coeficiente de 'x_1^2' sea 1.
- Para las cuádricas con centro pero sin puntos singulares el punto a donde se traslada el origen del sistema de coordenadas *no* está en la cuádrica, por lo tanto el término independiente es ahora *no nulo*. Lo que hacemos es multiplicar a la función cuadrática que la define por un factor adecuado que haga que el término independiente sea -1.
- Para las cuádricas sin centro, la elección del origen del sistema de coordenadas requiere algunos conceptos nuevos. La 'normalización' de la ecuación está vinculada, como en el caso afín, con el coeficiente de 'x_n'.

Forma Normal Euclídea de las Cuádricas del Tipo I

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **I**. Sean $s =$ índ(Q) y $r = \mathbf{r}(Q)$.

Podemos suponer que se ha elegido F de modo tal que índ$(\psi) = s$ y $r = \mathbf{r}(\psi)$.

Los comentarios al comienzo de esta sección y el hecho de ser Q un cono nos permite asegurar que tomando $A \in Q_S$ es posible encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}_A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}_A$ de modo tal que

$$Q : \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} = 0 \qquad (*)$$

con $a_1 \geq \ldots \geq a_s > 0$ y $b_{s+1} \geq \ldots \geq b_r > 0$ y donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto $x \in \mathbb{V}$ respecto de la base $\mathcal{B}_A$.

Multiplicando a la ecuación $(*)$ por a_1^2 resulta

$$Q : x_1^2 + \sum_{i=2}^{s} \frac{x_i^2}{\mathbf{a}_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{\mathbf{b}_i^2} = 0$$

donde $\mathbf{a}_i = \frac{a_i}{a_1}$ $(i = 2, \ldots, s)$ y $\mathbf{b}_i = \frac{b_i}{a_1}$ $(i = s+1, \ldots, r)$.

Obtenemos así lo que llamaremos la representación normal euclídea de las cuádricas del tipo **I**

$$(1) \qquad Q : x_1^2 + \sum_{i=2}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} = 0$$

Ecuación Normal Euclídea de un Cono

con $a_2 \geq \ldots \geq a_s > 0$ y $b_{s+1} \geq \ldots \geq b_r > 0$ y donde $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto $x \in \mathbb{V}$ respecto de la base $\mathcal{B}_A$.

Forma Normal Euclídea de las Cuádricas del Tipo II

Sea $Q : F(x) = 0$ una cuádrica del tipo **II**. Sean $s = \text{índ}(Q)$ y $r = \mathbf{r}(Q)$.

En este caso $Q_C \neq \varnothing$ pero $Q_C \cap Q = \varnothing$; luego, podemos tomar $A \in Q_C$ y será $F(A) \neq 0$. Definimos entonces $G = -\dfrac{1}{F(A)}.F$. Con esto, si $G = \psi + 2\varphi + c$, resulta

$$\text{índ}(\psi) = s \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(\psi) = r$$

Con las notaciones del comienzo de esta sección, sea $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\mathcal{B}_A = \{v_1, \ldots, v_n\}$, donde $v_i = e_i + A$ para cada $i = 1, \ldots, n$; luego, si $x = x_1 \underset{A}{\cdot} v_1 \underset{A}{+} \cdots \underset{A}{+} x_n \underset{A}{\cdot} v_n$, ψ_A toma la forma (2) (cf. pág. 62) y como, debido a la forma en que elegimos A, es $\varphi_A = 0$ y $G(A) = 1$, llegamos a que

$$G(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} - 1 = 0$$

Logramos de esta forma lo que llamaremos la representación normal euclídea de una cuádrica del tipo **II**

$$(2) \quad Q : \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} - 1 = 0$$

Ecuación Normal Euclídea de una Cuádrica con Centro y sin Puntos Singulares

donde $s = \text{índ}(Q)$, $r = \mathbf{r}(Q)$ y $(x_1, \ldots, x_n)$ son las componentes de un punto x referidas a la base $\mathcal{B}_A$ antes mencionada.

Forma Normal Euclídea de una Cuádrica del Tipo III

Sea $Q : F(x) + \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$ una cuádrica del tipo **III**.
Utilizando el mismo argumento que para el caso de las cuádricas del tipo **I**, también aquí podemos suponer que $s \geq r - s$.

De esta forma : $r = \mathbf{r}(Q)$ y $s =$ índ(Q). Además, en este caso es $r \leq n-1$. Tomemos un $A \in Q$ y definamos $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{V} \ / \varphi(x) + \phi(A,x) = 0\}$; por lo tanto, $T_A = A + \mathbb{H}$.

En el caso afín, para lograr la ecuación normal, tomábamos una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{V}$ adaptada a ψ, tal que $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{H}$ y $v_n \in N(\phi)$. Ahora, en cambio, nos convendría poder elegir una base ortonormal de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de $\|\phi\|$ que siga cumpliendo la segunda condición. Vamos a ver ahora que esto es posible.

Sea $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ el endomorfismo autoadjunto asociado a ϕ y sea $P \in \mathbb{V}$ el único que satisface $\varphi(x) =< x, P >$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned}\varphi_A(x) = \varphi(x-A) + \phi(A, x-A) &=< P, x-A > + < \alpha(A), x-A > \\ &=< P + \alpha(A), x-A >\end{aligned}$$

y esto, teniendo en cuenta que $Q_C = \varnothing$ obliga a que sea $P + \alpha(A) \neq 0$, implica

$$x \in T_A \iff \varphi_A(x) = 0 \iff x - A \perp P + \alpha(A) \iff x \in A + [P + \alpha(A)]^{\perp}$$

Este hecho nos permite afirmar que

$$\mathbb{H} = [P + \alpha(A)]^{\perp}.$$

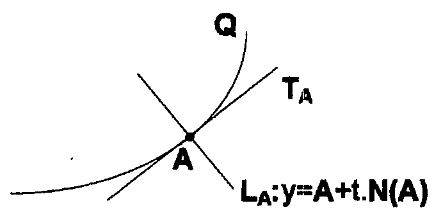
Llamemos $N(A) = P + \alpha(A)$. Luego,

$$T_A = A + [N(A)]^{\perp}$$

es decir, la recta

$$L_A : y = A + t.N(A)$$

es ortogonal a T_A



Para asegurar la validez de la segunda condición sobre los elementos de la base que estamos buscando bastaría con saber que $\alpha|_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ y que es el endomorfismo autoadjunto asociado a $\phi|_{\mathbb{H}\times\mathbb{H}}$. Es claro que para eso es suficiente con garantizar que $\alpha(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.

Ahora bien, si $h \in \mathbb{H}$, $< \alpha(h), N(A) >=< h, \alpha(N(A)) >$; luego, todo se reduce a poder encontrar un $A \in Q$ tal que $N(A) \in N(\alpha) = N(\phi)$.

Consideremos el siguiente subconjunto de Q

$$\mathcal{V}(Q) = \{B \in Q \ / \ N(B) \in N(\phi)\}$$

Queremos ver que es no vacío. Supongamos lo contrario y tomemos una base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{V}$ formada por autovectores de α y ordenada de modo tal que $N(\alpha) = [u_{r+1}, \ldots, u_n]$. Ahora basta aplicar el ejercicio 35 para concluir que $\mathcal{V}(Q)$ es una variedad lineal de dimensión $n - (r+1) = n - r - 1$, contenida en Q. En particular, $\mathcal{V}(Q) \neq \varnothing$, como prentendíamos.

NOTA: a los elementos de $\mathcal{V}(Q)$ se los llama **vértices** de Q.

Volviendo a nuestro problema anterior, tomemos

- $A \in \mathcal{V}(Q)$
- $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{H}$ formada por autovectores de $\alpha|_{\mathbb{H}}$ ordenados según (1) (ver pág. 62)
- $e_n = -\dfrac{N(A)}{\|N(A)\|}$

Como $e_n \in N(\alpha)$ resulta

$$\mathbf{r}(\psi|_{\mathbb{H}}) = \mathbf{r}(\psi) = r \qquad \text{e} \qquad \text{índ}(\psi|_{\mathbb{H}}) = \text{índ}(\psi) = s$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los correspondientes autovalores de α; i.e., $\alpha(e_i) = \lambda_i . e_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$, supongamos que los números $c_1, \ldots, c_s, d_{s+1}, \ldots, d_r$ satisfacen las condiciones

$$c_1 \geq \ldots \geq c_s > 0 \qquad , \qquad d_{s+1} \geq \ldots \geq d_r > 0$$
$$\lambda_i = \tfrac{1}{c_i^2} \quad \text{si} \quad i = 1, \ldots, s$$
$$\lambda_i = -\tfrac{1}{d_i^2} \quad \text{si} \quad i = s+1, \ldots, r$$

Si $\mathcal{B}_A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ donde $v_i = e_i + A$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y si $(x_1, \ldots, x_n)$ denotan las componentes de un punto $x \in \mathbb{V}$ referidas a la base $\mathcal{B}_A$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{c_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{d_i^2} + 2x_n \varphi_A(v_n)$$

Notemos que $\varphi_A(v_n) =< N(A), v_n - A >= -\dfrac{< N(A), N(A) >}{\|N(A)\|} = -\|N(A)\|$. Esto nos sugiere definir –con el objeto de 'normalizar' la ecuación de Q–

$$G = \frac{1}{\|N(A)\|} . F$$

lo que no altera los valores del índice y del rango por ser $\frac{1}{\|N(A)\|} > 0$.

Si definimos números positivos a_i $(1 \leq i \leq s)$, b_j $(s+1 \leq j \leq r)$ mediante las relaciones

$$a_i^2 = \|N(A)\| . c_i^2 \qquad\qquad b_j^2 = \|N(A)\| . d_j^2$$

resulta

$$F(x) = \sum_{i=1}^{s} \|N(A)\| . \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \|N(A)\| . \frac{x_i^2}{b_i^2} - 2\|N(A)\| . x_n = 0$$

pues $\varphi_A(v_n) = -\|N(A)\|$.

Finalmente, dividiendo por $\|N(A)\|$, obtenemos lo que llamaremos la representación normal euclídea de una cuádrica del tipo **III**

$$(3)\ \ Q : \sum_{i=1}^{s} \frac{x_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=s+1}^{r} \frac{x_i^2}{b_i^2} - 2x_n = 0$$

Ecuación Normal Euclídea de una Cuádrica sin Centro

EJEMPLO

Consideramos a $\mathbb{R}^3$ como espacio euclídeo con el producto interno canónico y en él la cuádrica

$$Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2 = 0$$

expresada en el sistema de coordenadas canónico.

Vamos a encontrar su ecuación normal euclídea.

$\star$ En principio, averigüemos a qué tipo pertenece.

Para eso necesitamos calcular Q_C; i.e., determinar la soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que este sistema no tiene solución; luego, Q es del tipo **III**.

$\star$ Calculemos: $\text{índ}(Q)$ y $\mathbf{r}(Q)$

Como

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

es $\mathbf{r}(Q) = \mathbf{r}(\psi) = 2$.

Para calcular el índice basta notar que

$$\psi(1,0,0) = 1 > 0 \qquad \text{y} \qquad \psi(0,1,0) = -1 < 0$$

de donde se concluye que $\text{índ}(\psi)$, $\text{índ}(-\psi) \leq 1$. Esto implica que ninguno de los dos puede ser nulo, con lo cual $\text{índ}(\psi) = \text{índ}(-\psi) = 1$ y por lo tanto $\text{índ}(Q) = 1$.

Resumiendo,

$$\text{índ}(Q) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}(Q) = 2$$

Recordando lo hecho para llegar a la forma normal euclídea de una cuádrica del tipo **III**, el origen del sistema de coordenadas que nos da la ecuación normal es un vértice de Q. Manteniendo aquella notación tenemos $P = (2, 2, -1)$

$\star$ Busquemos un vértice de Q

Para que $A = (y_1, y_2, y_3)$ sea un vértice de Q debe verificar

$$N(A) \in N(\phi) \qquad \text{y} \qquad A \in Q$$

donde $N(A) = P + \alpha(A) = (2y_1 + 2y_2 + 2, 2y_1 - y_2 + 2, -1)$

Por lo tanto las coordenadas de A deben satisfacer

$$4y_1 + y_2 = -4 \ , \ 2y_1 + 5y_2 = -2 \ , \ F(A) = 0$$

Las dos primeras ecuaciones implican que $A = (-1, 0, s)$ para algún $s \in \mathbb{R}$ y reemplazando luego en la ecuación de Q resulta que debe ser $-2(s + 2) = 0$; i.e., $s = -2$. Por lo tanto,

$$A = (-1, 0, -2)$$

es un vértice de Q (en realidad el único).

Ya tenemos el origen del sistema de coordenadas en el que Q tendrá su forma normal euclídea. Para hallar la base de $\mathbb{R}^3_A$ tenemos que hallar $\mathbb{H}$, el subespacio paralelo de T_A.

$\star$ Cálculo de $\mathbb{H}$

$$T_A : \varphi_A(y) = y_3 + 2 = 0$$

de modo que

$$\mathbb{H} : y_3 = 0$$

Por otro lado, $N(A) = P + \alpha(A) = (2, 2, -1) + (-2, -2, 0) = (0, 0, -1)$. De aquí se deduce que el tercer vector de la base buscada debe tener la dirección de $(0, 0, -1)$. En cuanto a los dos primeros, deben ser autovectores de $\|\phi\|$ que sabemos pertenecerán a $\mathbb{H}$ pues al ser A un vértice de Q resulta $\alpha(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$.

Observemos que en este caso $\|N(A)\| = 1$; luego, no hace falta modificar a F.

$\star$ Calculemos los autovalores de α

Deberemos entonces hallar las raíces de

$$\det \begin{pmatrix} 2-t & 2 & 0 \\ 2 & -1-t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} = 0$$

Es decir, las raíces de

$$t(t^2 - t - 6) = 0$$

Luego, los autovalores de α son

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 0$$

$\star$ Calculemos u_1, u_2 tales que $\alpha(u_i) = \lambda_i.u_i$

Para u_1 debemos encontrar una solución no nula del sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta tomar $u_1 = (2, 1, 0)$

Para u_2 el sistema a resolver es

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos tomar entonces $e_2 = (1, -2, 0)$

De esta forma $\{u_1, u_2, N(A)\}$ resulta una base ortogonal formada por autovalores de α; luego, sólo tenemos que normalizarla.

Sea entonces $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, donde

$$e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \qquad e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right) \qquad e_3 = (0, 0, 1)$$

y $\mathcal{B}_A = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_i = e_i + A$; i.e.,

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1, \frac{1}{\sqrt{5}}, -2\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1, -\frac{2}{\sqrt{5}}, -2\right), (-1, 0, -1) \right\}$$

$\star$ Calculemos los números a_1 y b_1

Sabemos que están determinados por el hecho de ser $\lambda_1 = \frac{1}{a_1^2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{b_1^2}$ y $\lambda_3 = 0$ los autovalores de $\|\phi\|$. De modo que $a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Finalmente, si (x_1, x_2, x_3) son las componentes de $x \in \mathbb{R}^3$ respecto de $\mathcal{B}_A$

$$Q : \frac{x_1^2}{(1/\sqrt{3})^2} - \frac{x_2^2}{(1/\sqrt{2})^2} - 2x_3 = 0$$

es la ecuación normal euclídea de Q.

Equivalencia euclídea de las cuádricas

Teorema

Sean Q y Q' cuádricas del mismo tipo con el mismo rango r e índice s. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

a) Q y Q' tienen la misma ecuación normal euclídea

b) Q y Q' son métricamente equivalentes.

DEMOSTRACIÓN:

- *a) $\Rightarrow$ b)*

Por hipótesis, existen A y $A' \in \mathbb{V}$, bases ortonormales $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de $\mathbb{V}$ y funciones cuadráticas $G, G' : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

- $Q : G(x) = 0$; $Q' : G'(x) = 0$
- $G(A + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = G'(A' + x_1 e'_1 + \ldots + x_n e'_n)$

Sea $f : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definida por $f(A + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n) = A' + x_1 e'_1 + \ldots + x_n e'_n$; luego, $f \in \mathcal{I}(\mathbb{V})$ y $G'(f(x)) = G(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$; o, equivalentemente, $f(Q) = Q'$.

- *b) $\Rightarrow$ a)*

Sea $Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = 0$, con $\psi(x) =< \alpha(x), x >$ y $\varphi(x) =< P, x >$ y notemos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a los autovalores de α.

– Si Q es un cono o una cuádrica sin centro, suponemos que hemos elegido F de modo que

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0 \qquad \lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_r < 0 \qquad \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n = 0$$

– Si Q es una cuádrica con centro y sin puntos singulares, suponemos que hemos elegido F de modo que si A es un centro de Q, entonces $F(A) = -1$.

Sea $Q' : F'(x) = \psi'(x) + 2\varphi'(x) + c' = 0$ una cuádrica con la propiedad que existe una isometría $f \in \mathcal{I}(\mathbb{V})$ tal que $f(Q) = Q'$.

Si $f(x) = B + g(x)$ —con $g \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$— por ser $F'(x) = \psi'_B(x) + 2\varphi'_B(x) + c'_B$, se tiene que

$$G(x) = \psi'_B(f(x)) + 2\varphi'_B(f(x)) + c'_B$$

es una función cuadrática † que define a Q, pues

$$G(x) = 0 \iff F'(f(x)) = 0 \iff f(x) \in Q' \iff x \in Q$$

Debido al teorema de unicidad, existe $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ tal que $F'(f(x)) = G(x) = a \,.\, F(x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$. Luego,

$$(1) \qquad \psi'_B(f(x)) = a \,.\, \psi(x) \qquad , \qquad \varphi'_B f(x)) = a \,.\, \varphi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

Debido a que $\psi'_B(x) = \psi'(x - B)$ y $\varphi'_B(x) = \varphi'(x - B) + \phi'(B, x - B)$ se tiene

$$(2) \qquad \psi'(g(x)) = a \,.\, \psi(x) \qquad , \qquad \varphi'(g(x)) + \phi'(B, g(x)) = a \,.\, \varphi(x)$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

Si $\psi'(x) =< \alpha'(x), x >$ y $\varphi'(x) =< P', x >$, entonces

$$(3) \quad < \alpha'(g(x)), g(x) >= a. < \alpha(x), x > \; , \; < P', g(x) > + < \alpha'(B), g(x) >= a. < P, x >$$

para todo $x \in \mathbb{V}$; o, equivalentemente, por ser $g^{-1} \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$, resulta

$$(4) \quad < g^{-1} \circ \alpha' \circ g(x), x >=< a.\alpha(x), x > \quad , \quad < g^{-1}(P' + \alpha'(B)), x >= a. < P, x >$$

para todo $x \in \mathbb{V}$.

La igualdad anterior implica que se cumplen las siguientes identidades

$$(5) \qquad g^{-1} \circ \alpha' \circ g = a.\alpha$$

$$(6) \qquad g^{-1}(P + \alpha'(B)) = a.P$$

Cambiando F' por $F'' = \dfrac{1}{a} \,.\, F'$, se tiene que $Q' : F''(x) = 0$.

Si $F''(x) =< \beta(x), x > +2 < R, x > +k$, resulta

$$(7) \qquad g^{-1} \circ \beta \circ g = \alpha$$

---

† pues $\psi'_B \circ f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es una función cuadrática no nula sobre $\mathbb{V}$ y $\varphi'_B \circ f : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ es lineal

(8) $$R + \beta(B) = g(P)$$

De acuerdo con (7), los autovalores de β son los de α;i.e., $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Estamos suponiendo que Q y Q' son del mismo tipo. Analicemos cada uno por separado.

⋆ Q y Q' son del tipo **I**

La igualdad (7) implica que ambas tienen la misma ecuación normal euclídea.

⋆ Q y Q' son del tipo **II**

Si A es un centro de Q es $F(A) = -1$ y $A' = f(A)$ es un centro de Q'.
Como $F"(f(A)) = \frac{1}{a} \,.\, F'(f(A)) = \frac{1}{a}.a.\ F(A) = F(A) = -1$, se deduce de (7) que Q y Q' tienen la misma ecuación normal euclídea.

⋆ Q y Q' son del tipo **III**

Si $A \in \mathcal{V}(Q)$, entonces $A' = f(A) \in \mathcal{V}(Q')$. De hecho, como $A \in Q$ es $A' \in Q'$. Queda por verificar que $\beta(A') + R \in N(\beta)$, dado que

$$\begin{aligned}\beta(A') + R &= \beta(B + g(A)) = \beta(B) + \beta(g(A)) + R \\ &= \beta(g(A)) + \beta(B) + R = \beta(g(A)) + g(P) \\ &= g((g^{-1} \circ \beta \circ g)(A) + P) = g(\alpha(A) + P)\end{aligned}$$

se obtiene

(9) $$\beta(A') + R = g(\alpha(A) + P)$$

Por hipótesis, $\alpha(A) + P \in N(\alpha)$; luego,

$$\beta(\beta(A') + R) = \beta \circ g(\alpha(A) + P) = g \circ \alpha(\alpha(A) + P) = g(\alpha(\alpha(A) + P)) = g(0) = 0$$

En consecuencia, $\beta(A') + R \in N(\beta)$.

De acuerdo con (9), resulta $\|\beta(A') + R\| = \|\alpha(A) + P\|$ y como α y β tienen los mismos autovalores se tiene que Q y Q' tienen la misma forma normal euclídea.

Conclusión

El resultado anterior muestra que cada cuádrica de $\mathbb{V}$, que no sea una variedad lineal, es métricamente equivalente a una y sólo a una de las construídas mediante las ecuaciones **(1)**, **(2)**, **(3)** a partir de una cierta base ortonormal de $\mathbb{V}$.

EJERCICIOS

35. Con las notaciones utilizadas para hallar la forma normal euclídea de las cuádricas del tipo **III**.

a) Comprobar que $N(\alpha) \not\subset N(\varphi)$

b) Si para cada $i = 1, \ldots, n$, $p_i =< P, u_i >$ *verificar que* $(p_{r+1}, \ldots, p_n) \neq (0, \ldots, 0)$

c) Probar que si $d = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{p_i^2}{\lambda_i} - c\right)$, *entonces*

$$\mathcal{V}(Q) = \left\{ B = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \;/\; x_i = -\frac{p_i}{\lambda_i}\ i = 1, \ldots, n\ ,\ \sum_{i=r+1}^{n} p_i x_i = d \right\}$$

d) Deducir que $\mathcal{V}(Q)$ *es una variedad lineal de dimensión* $n - r - 1$.

36. Para las cuádricas del ejercicio 30 que no sean variedades lineales, determinar la ecuación normal euclídea, indicando en cada caso el origen A *y la base* $\mathcal{B}_A$ *utilizada.*

BIBLIOGRAFÍA

[1] GREUB, W.H. : Linear Algebra, Springer-Verlag, 3ªed., 1967

[2] LAROTONDA, A.R. : Algebra Lineal y Geometría, EUDEBA, 1977

[3] VILLAMAYOR, O. E. : Geometría Elemental a Nivel Universitario, Vol. I, Geometría Afín, Red Olímpica, 1997.

A1. ¿Existe una base B de $\mathbb{R}^2$ tal que $\|\phi\|_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ para la forma bilineal $\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(x, y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$?

A2. a) Hallar una forma bilineal simétrica $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuyo núcleo sea la recta definida por

$$2x_1 - x_2 = 0 \qquad\qquad x_1 + x_3 = 0$$

b) Hallar una forma bilineal simétrica de rango 2 e índice 1, cuyo núcleo contenga al vector $(1, -1, 0)$.

A3. Hallar los planos tangentes a la cuádrica $6x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2 - 4 = 0$ que contienen a la recta $\begin{cases} x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

A4. Sea Q la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ definida por $x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 = 0$. Determinar planos π_1, π_2 y π_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que

$\pi_1 \cap Q$ sea una elipse en π_1

$\pi_2 \cap Q$ sea una hipérbola en π_2

$\pi_3 \cap Q$ sea una parábola en π_3

A5. Determinar para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la cuádrica en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + \alpha x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_3 - 5 = 0$$

es un

a) hiperboloide de dos hojas
b) par de planos paralelos
c) paraboloide elíptico
d) cono irreducible
e) hiperboloide de una hoja

A6. Encontrar una aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(L) \subset L'$, siendo $L : 2x_1 - x_2 = 3$ y $L' : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$

A7. Definir una aplicación afín $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbb{R}^3) = \pi$ y $f(1,0,0) = (1,0,0)$, siendo $\pi : 2x_1 + x_2 - x_3 = 2$

A8. Sea ϕ una forma bilineal simétrica en $\mathbb{V}$. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones

a) $N(\phi) = 0$

b) Para toda $\varphi \in \mathbb{V}^*$ existe un único $v \in \mathbb{V}$ tal que $\varphi(x) = \phi(v, x)$ para todo $x \in \mathbb{V}$.

A9. Sea $\mathbb{V}$ un espacio euclídeo con producto interno $<,>$ y $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Probar que

a) Existe un único endomorfismo $\alpha : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que $\phi(x, y) =< \alpha(x), y >$ para todo x, $y \in \mathbb{V}$

b) $N(\phi) = N(\alpha)$

c) α es autoadjunta

d) Si $x, y \in \mathbb{V}$ son autovectores de α, con autovalores a y b respectivamente, $a \neq b$, entonces $< x, y >= 0$

e) Los autovalores de α son reales

f) Existe una base ortonormal B de $\mathbb{V}$ formada por autovalores de α

A10. Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y ψ la forma cuadrática asociada. Probar que si ϕ es *semidefinida* †, entonces

$$(\phi(x, y))^2 \leq \psi(x) \cdot \psi(y)$$

para todo x, $y \in \mathbb{V}$.

A11. Sea $\phi : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal.

a) Probar que si $\phi_f : \mathbb{W} \times \mathbb{W} \to \mathbb{R}$ está dada por $\phi_f(u, v) = \phi(f(u), f(v))$ entonces $f^{-1}(N(\phi) \subset N(\phi_f)$

b) Verificar que si f es epimorfismo, entonces $N(\phi_f) = f^{-1}(N(\phi))$

c) Mostrar que si f es isomorfismo y B es una base de $\mathbb{W}$, entonces $\|\phi_f\|_B = \|\phi_f\|_{f(B)}$

d) Mostrar que si $\mathbb{W} = \mathbb{V}$, B es una base de $\mathbb{V}$ y f es isomorfismo, entonces $\|\phi_f\|_B = \|f\|_B^t \cdot \|\phi\|_B \cdot \|f\|_B$

Deducir que $\det(\|\phi_f\|)$ y $\det(\|\phi\|_B)$ tienen el mismo signo.

A12. En cada uno de los casos siguientes encontrar –cuando sea posible– un isomorfismo f tal que $\psi' = \psi_f$

a) $\psi(x) = -2x_1x_2 - x_2^2 - x_3^2$ $\qquad$ $\psi'(x) = -x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

b) $\psi(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$ $\qquad$ $\psi'(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

A13. Hallar los planos tangentes a la cuádrica $Q : x_1^2 - 7x_2^2 + 2x_3^2 - 12 = 0$ que son paralelos al plano $\pi : 3x_1 + 6x_3 - 1 = 0$.

† i.e., $\phi(x, x) \geq 0$ para todo x, o bien $\phi(x, x) \leq 0$ para todo x.

A14. Dada la matriz de $\mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

hallar una matriz ortogonal S tal que $S^t \;.\; A \;.\; S$ sea diagonal.

A15. Sea Q la cónica de ecuación $x_1^2 + x_2^2 - 10x_2 + 21 = 0$. Hallar una cónica reducible con centro $C = (0,0)$ que contenga a las tangentes a Q que pasan por C.

A16. Sea Q la cónica de ecuación $Q : x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - 7 = 0$. Hallar todos los puntos P desde los cuales pueden trazarse dos tangentes a Q.

A17. Determinar todos los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la cónica de ecuación

$$Q : \alpha^2 x_1^2 + (\alpha^2 - 1)x_2^2 + 2(\alpha^2 - 1)x_1x_2 + 4x_1 + x_2 + 1 = 0$$

sea una parábola.

A18. Sea Q la cónica y L la recta cuyas respectivas ecuaciones son

$$Q : x_1^2 + 2x_2 = 0 \qquad\qquad L : ax_1 + bx_2 = c$$

Hallar todos los posibles a, b y c para los cuales L resulta tangente a Q.

A19. Encontrar la ecuación normal afín de la cuádrica

$$Q : x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_3 + 1 = 0$$

indicando el sistema de coordenadas usado.

A20. Sea Q la parábola de ecuación

$$Q : F(x) = \psi(x) + 2\varphi(x) + c = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_2 + 1 = 0$$

a) Determinar si existe $A \in Q$ tal que la recta tangente en A sea ortogonal al núcleo de ϕ, siendo ϕ la forma bilineal asociada a ψ.

b) Hallar la ecuación normal afín de Q en un sistema de coordenadas con origen A.

A21. Sea Q la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$Q : 4\alpha x_1^2 + x_2^2 + \alpha x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2\alpha x_2x_3 + 6x_1 - 8\alpha x_3 + 4 = 0$$

Determinar los valores de α que hacen de esta cuádrica

a) un cilindro parabólico   b) un paraboloide hiperbólico

A22. Sea Q la cuádrica de $\mathbb{R}^3$ definida por $Q: x_1^2 + 2x_3 = 0$. Determinar todos los planos tangentes a Q que contienen al punto $A = (1, 1, 4)$.

A23. Sea $Q \subset \mathbb{R}^3$ la cuádrica

$$Q: x_1^2 - 2x_1x_2 + ax_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 2bx_2 + 2x_3 - 5 = 0$$

Determinar los valores de a y b par los cuales la variedad de centros de Q tiene dimensión mayor que 0 y hallar, en ese caso, la forma normal afín de Q indicando la base utilizada.

A24. Construir una forma cuadrática en $\mathbb{R}^4$ de rango 3 e índice 2 cuyo núcleo esté generado por $(-1, 0, 1, 0)$.

A25. Sea Q la cónica de ecuación

$$Q: 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - 4 = 0$$

Definir $f \in GA(\mathbb{R}^2)$, $f \neq id$, tal que $f(Q) \subset Q$.

A26. Sea Q una cónica irreducible y A, B, C tres puntos (distintos) de Q. Mostrar que no están alineados.

Indice Alfabético